DEPARTAMENTO: INTELIGENCIA ARTIFICIAL
FACULTAD DE INFORMÁTICA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

TESIS DOCTORAL

Aproximaciones de estructuras de preferencia en problemas de decisión multiobjetivo

Autor:
Jacinto González Pachón.
(Licenciado en Ciencias Matemáticas)
Director:
Sixto Ríos Insua.
(Doctor en Ciencias Matemáticas)

Madrid, 1990.

Índice general

Agradecimientos

Deseo hacer constar mi más profundo agradecimiento al Profesor Dr. D. Sixto Ríos Insua, cuya ayuda fue indispensable en el desarrollo de esta memoria, pues, además de proporcionarme los primeros conocimientos sobre Teoría de la Decisión, supo con su valía humana disipar esos 'ciertos momentos bajos'.

José Manuel Pérez ha compartido conmigo desde hace muchos años su amistad y entusiasmo por la Ciencia, es a él a quien debo agradecer la tantas veces tediosa tarea de mecanografiado.

También deseo hacer extensiva mi gratitud a mis compañeros de Departamento, con los cuales siempre pude aprender y cambiar impresiones. David Ríos me estimuló en ocasiones con sus sugerencias y opiniones en el tema.

Finalmente, doy las gracias a mis padres y hermana, pues, aunque ellos son ajenos al contenido de este trabajo, su cariño es coautor del mismo.

Introducción

Hasta hace relativamente pocos años, la Investigación Operativa, basándose en el punto de vista de los economistas, reducía sus modelos de optimización a maximizar beneficios o minimizar pérdidas, todo ello en términos monetarios. En la vida real se ha demostrado, que tanto en el terreno tecnológico, como en el económico, el político o en el de otras áreas de las llamadas Ciencias Sociales, la toma de una decisión debe conjugar a veces diversos objetivos o criterios, los cuales pueden llegar a ser conflictivos, difíciles de comparar e incluso imposibles de medir. Intentar conseguir simultáneamente varias de estas metas es lo que da lugar a la *Teoría de los Problemas de Decisión Multiobjetivo* (o *Multicriterio*). Ésta ha constituido el marco idóneo en donde enunciar problemas tan dispares como el de la ubicación de una central nuclear o un aeropuerto, el control de inventarios en bancos de sangre, la planificación de una región geográfica, el diagnóstico y tratamiento de enfermedades, etc.

Los orígenes históricos de la mencionada teoría se encuentran en la obra de Pareto "*Course dÉconomie Politique*", fechada en 1896. En dicha obra se habla por primera vez de '*punto de equilibrio*'como aquella situación, en la relación consumidor–productor, en la cual la mejora del estado de una persona suponía perjuicio para las restantes.

No es hasta después de la Segunda Guerra Mundial, coincidiendo con el auge global que experimenta la Investigación Operativa, cuando aparecen otros trabajos de importancia, como los de *Koopmans, Kuhn, Tucker, Arrow*, etc.

Ciñéndonos más al tema que nos ocupa en esta memoria, diremos que el estudio sobre preferencias surge de los trabajos de *Cantor* y *Haussdorf* sobre ordenación de conjuntos. Así, por ejemplo, la noción conjuntista de clase de equivalencia daría lugar a las llamadas *curvas de isovalor*, utilizadas para representar preferencias e indiferencias. En los trabajos de *Debreu, Fishburn, Keeney, Raiffa*, ... se analiza este último concepto junto con algunos teoremas de representación.

Es en la década de los 70 cuando *Yu (1973,1974)* introduce la noción de *estructura de dominación*. Este concepto, desarrollado posteriormente en trabajos como los de *Bergstresser et al. (1976), Coladas (1979)* o *Chien et al. (1989)*, entre otros, constituye el punto de partida para nuestro estudio.

Un proceso de decisión multiobjetivo, al cual nos referimos repetidamente en este trabajo, está constituido por los siguientes elementos:

- El decisor, o persona encargada de tomar una decisión. Pueden ser varios los decisores en un proceso de decisión.

- El analista, o persona encargada de asesorar científicamente al decisor.

- El conjunto de alternativas, o acciones, a elegir por aquel que decide.

- El ambiente en el cual se desarrolla el proceso: puede ser controlable por el decisor, y por tanto no influir en el proceso, (ambiente de certidumbre), o no controlable, y por tanto influir en él (ambiente de incertidumbre). En esta memoria se considerará que el proceso de decisión lleva asociado un ambiente del primer tipo. Debido a ello, podemos prescindir de este elemento en nuestra modelización.

- El conjunto de objetivos o consecuencias: sus elementos serán un conjunto finito de medidas numéricas, y estarán relacionados unívocamente con el conjunto de alternativas o acciones. Se suele denotar como un subconjunto Y de $\mathbf{R}^n$. Cada uno de los elementos de Y indica el grado con que se alancanzaría cada objetivo, si el decisor eligiese la alternativa o alternativas asociadas a dicho elemento.

- La información proporcionada al analista por la persona que decide: está formada por la descripción de las actitudes que toma el decisor, al cotejar diferentes pares de alternativas.

La estructuración de la información mencionada es el principal objetivo de esta memoria, que consta de tres capítulos. En el primero de ellos, la información obtenida por el analista se recoge en el concepto de *estructura de preferencia* (definición 1.1.7). En él aparecen, en forma de relaciones binarias diferentes, las actitudes de *preferencia*, *indiferencia* y *duda* que puede tomar la persona que decide. Esta última postura, considerada en muchos trabajos como una posición incómoda para el analista, adquiere gran importancia en el nuevo concepto de estructura de preferencia. Así, englobando también bajo el término de *duda* las posibles incoherencias del decisor detectadas en el estudio, ésta se convierte en un tipo de información relevante en el proceso.

El teorema 1.1.13 permite pasar relaciones binarias, de las utilizadas para modelizar preferencias e indiferencias, al nuevo lenguaje de estructuras de preferencia.

El resto del capítulo se completa con la transcripción a la mencionada terminología de resultados sobre teoría del valor y estructuras de dominación.

El segundo capítulo está dedicado a la aproximación de estructuras de preferencia. Con el término de *estructura de aproximación lineal*, se define un concepto que pretende ser operativo en el estudio de la eficiencia o búsqueda de alternativas idóneas para el decisor.

El teorema 2.2.10 permite utilizar el concepto de *aproximación* con propiedad y rigor matemático, sirviendo como base para la descripción y resultados que, sobre estructuras de aproximación, se dan posteriormente para un caso particular de estructuras de preferencia: las $\succ_V-$ preferencias.

Éstas proceden de generalizar aquellas estructuras que poseen representación analítica mediante una *función de valor*.

Los teoremas 2.4.14 y 2.4.15 abren las puertas a lo que podrían ser aproximaciones con condiciones analíticas más complejas que las lineales, y que aprovecharían mejor la información.

En el último capítulo se utilizan la terminología y los resultados expuestos anteriormente para el estudio de aproximaciones del conjunto eficiente tanto en $\succ_V-$preferencias como en estructuras generales. Así, el algoritmo utilizado en *Yu (1974)* para realizar una aproximación superior iterativa del conjunto eficiente, y que aparece recogido de forma estructurada en *Ríos et al. (1989)*, se modifica, estableciendo un tipo de aproximación más estricta. Dicho concepto se extiende, finalmente, al caso de aproximaciones inferiores.

Terminología

Se representa por letras mayúsculas los conjuntos (A, B, ...) y por minúsculas sus elementos ($a_1, a_2 \in A$ ...). Se sigue la siguiente notación:

$A + B = \{a + b : \quad a \in A, b \in B\}$.

$\alpha B = \{\alpha b : \quad b \in B\} \quad \alpha \in \mathbf{R}$.

A^c para el complementario de A.

$A \backslash B$ para la diferencia de conjuntos A y B.

δA para el concepto topológico de frontera del conjunto A.

$C\ell A$ para el concepto topológico de clausura del conjunto A.

$\overset{\circ}{A}$ para el concepto topológico de interior del conjunto A.

Capítulo 1

La estructura de preferencia

El objetivo de este primer capítulo será definir un concepto, mediante el cual, la información que proporciona el decisor al analista, quede estructurada en base a las actitudes que toma el primero de ellos en un problema de decisión.

Las definiciones 1.1.7 (*estructura de preferencia*) y 1.1.8 (*cuaterna de relaciones binarias asociada a una estructura de preferencia*) cumplen este cometido. A su vez, se establece un marco común para la teoría de estructuras de dominación, aparecida en los trabajos de *Yu (1974)* y *Bergstresser et al (1976)* (sección 1.2), y para algunos teoremas enunciados por *Debreu (1954,1959)* y *Fishburn (1970)* sobre teoría del valor (sección 1.3).

Finalmente, el capítulo concluye con el estudio de la eficiencia en estructuras de preferencias, como uno de los conceptos fundamentales en los problemas de decisión multiobjetivo (sección 1.4).

1.1. PREFERENCIA, INDIFERENCIA E INDECISIÓN COMO RELACIONES BINARIAS

Se denomina **preferencia**, a la actitud favorable manifestada por la persona que decide (*decisor*) hacia una alternativa, una vez que se ha cotejado con otra. Cuando las alternativas se encuentran cuantificadas, o convenientemente representadas, el símbolo que indica que una de ellas es preferida a la otra es '$\succ$'. Así, dadas dos opciones a través de las letras x e y, '$x \succ y$'simboliza la preferencia que manifiesta el decisor hacia x al compararla con y. Ésta puede expresarse, igualmente, mediante el símbolo simétrico '$\prec$'. De este modo, la expresión '$x \succ y$és equivalente a '$y \prec x$', que se traduce como *y es menos preferida que x*.

No es la preferencia la única actitud que puede manifestar el decisor al cotejar dos alternativas. De hecho, existen dos posturas más ante las cuales puede encontrarse la persona que decide. La primera de ellas es la **indiferencia**. El decisor, en este caso, recibe la sensación de similitud al comparar dos opciones. Ello indica que ambas satisfacen del mismo modo sus objetivos. La citada actitud se representa por '$\sim$'. Así, '$x \sim y$'simboliza, en un proceso de decisión, que al decisor le resulta indiferente elegir entre la alternativa x o la y.

La segunda actitud es la **duda** o **indecisión**. Ésta puede aparecer en el decisor:

1. Como consecuencia de incoherencias en sus juicios. En este caso, el analista comprueba, en su interacción con la persona que decide, que ésta no respeta ciertos principios de racionalidad.

2. Como duda temporal. Aparece ante la incapacidad del decisor, en un momento determinado, de realizar comparaciones entre ciertas alternativas, debido a la situación del problema o a la falta de información.

3. Como duda de tipo conmensurable. La calidad de los datos, el número de atributos u objetivos a tener en cuenta etc, imposibilitan al decisor comparar ciertas alternativas.

4. Finalmente, puede existir otra serie de causas de difícil determinación, como, por ejemplo, no querer revelar preferencias.

Algunos autores, como *Roy (1977)* o *Jacquet–Lagréze (1975)*, tratan esta actitud desde la perspectiva del apartado 3, utilizando para ello el nombre de **incomparabilidad**. Sin embargo, recientemente, *Chien et al. (1989)* utilizan el término de **indecisión** para referirse, de modo más extenso, a este tipo de postura.

A partir de ahora, utilizaremos '?'como símbolo para representar esta relación entre alternativas. Así, '$x?y$'simboliza la indecisión que se origina en el decisor al comparar las alternativas x e y, es decir, el decisor duda, durante el proceso de decisión, elegir x o y.

El marco formal donde incluiremos estos tres tipos de actitudes, '$\succ$', '$\sim$'y '?'(en realidad cuatro, si se considera '$\prec$'como una actitud distinta), serán las relaciones binarias en un conjunto. A continuación, se resume algunas definiciones y propiedades sobre éstas, esenciales para el desarrollo de esta memoria.

Definición 1.1.1 Dado un conjunto X, denominaremos **relación binaria en** X, a todo subconjunto del producto cartesiano $X \times X$, el cual se denotará por $\mathcal{R}$.

La relación $(x_1, x_2) \in \mathcal{R}$, siendo $x_1, x_2 \in X$, se puede escribir como $x_1 \mathcal{R} x_2$.

Veamos ahora algunas propiedades que puede verificar una relación binaria.

Definición 1.1.2 Una relación binaria $\mathcal{R}$ en un conjunto X puede ser:

a) Reflexiva: cuando $(x, x) \in \mathcal{R},\ \forall x \in X$.

b) Irreflexiva: cuando $(x, x) \notin \mathcal{R},\ \forall x \in X$.

c) Simétrica: cuando se verifica que $(x, x') \in \mathcal{R} \Rightarrow (x', x) \in \mathcal{R}$, siendo $x, x' \in X$.

d) Asimétrica: cuando se verifica que $(x, x') \in \mathcal{R} \Rightarrow (x', x) \notin \mathcal{R}$, siendo $x, x' \in X$.

e) Antisimétrica: cuando se verifica que $(x, x') \in \mathcal{R}$ y $(x', x) \in \mathcal{R} \Rightarrow x' = x$, siendo $x, x' \in X$.

f) Transitiva: si se verifica que, $(x, x') \in \mathcal{R}$ y $(x', x'') \in \mathcal{R} \Rightarrow (x, x'') \in \mathcal{R}$, siendo $x, x', x'' \in X$.

g) Negativamente transitiva: si se verifica que $(x,x') \notin \mathcal{R}$ y $(x',x'') \notin \mathcal{R} \Rightarrow (x,x'') \notin \mathcal{R}$, siendo $x,x',x'' \in X$.

h) Completa (o débilmente conexa): si se verifica que $x \neq x' \Rightarrow (x,x') \in \mathcal{R}$ ó $(x',x) \in \mathcal{R}$, siendo $x,x' \in X$.

i) Fuertemente conexa: si se verifica que, $\forall x,x' \in X$, o bien $(x,x') \in \mathcal{R}$ ó bien $(x',x) \in \mathcal{R}$.

Veamos cómo se denominan ciertas relaciones binarias atendiendo a las propiedades que verifican.

Definición 1.1.3 Sea $\mathcal{R}$ una relación binaria en un conjunto X. Diremos que:

a) $\mathcal{R}$ es **una relación de equivalencia**, si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Una relación de equivalencia proporciona una clasificación del conjunto X, lo que en teoría de conjuntos se denomina una partición, es decir, una familia de subconjuntos de X disjuntos cuya unión es el conjunto total.

Cada subconjunto de la partición se denomina **clase de equivalencia**. Así, dado $x \in X$, la clase de equivalencia a la cual pertenece será el subconjunto $\{x' \in X/(x,x') \in \mathcal{R}\}$. Éste se suele denotar por $[x]_{\mathcal{R}}$.

El conjunto de todas las clases de equivalencia se simboliza por $X/\mathcal{R}$, y se le conoce por **conjunto cociente**:

$$X/\mathcal{R} = \{[x]_{\mathcal{R}} : x \in X\} \quad .$$

b) $\mathcal{R}$ es un **orden parcial estricto**, si es irreflexiva y transitiva.

c) $\mathcal{R}$ es un **orden débil estricto**, si es asimétrica y negativamente transitiva.

d) $\mathcal{R}$ es un **orden lineal estricto**, si $\mathcal{R}$ es un orden débil estricto y, además, completo.

Ejemplo 1.1.4 Vamos a representar por $\underline{x} = (x_1, x_2)$ los elementos de $\mathbf{R}^2$.

1. La relación $\mathcal{R}$ definida por $(\underline{x}, \underline{x}') \in \mathcal{R} \iff \mid \underline{x} \mid = \mid \underline{x}' \mid$, en donde $\mid \underline{x} \mid = +\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ representa el módulo de dicho vector, es una relación de equivalencia en $\mathbf{R}^2$.

2. La relación $\mathcal{R}$ definida por $(\underline{x}, \underline{x}') \in \mathcal{R} \iff x_1 + x_2 > x_1' + x_2'$, es un orden débil estricto en $\mathbf{R}^2$

3. La relación $\mathcal{R}$ definida por $(\underline{x}, \underline{x}') \in \mathcal{R} \iff x_1 \geq x_1'$ y $x_2 \geq x_2'$, siendo $\underline{x} \neq \underline{x}'$, es un orden parcial estricto, denominado **orden de Pareto en $\mathbf{R}^2$**.

4. La relación $\mathcal{R}$ definida por

$$(\underline{x}, \underline{x}') \in \mathcal{R} \iff \begin{cases} x_1 > x_1' \\ \text{ó} \\ x_1 = x_1' \text{ y } x_2 > x_2' \end{cases}$$

   es un orden lineal estricto en $\mathbf{R}^2$ denominado **orden lexicográfico**.

Observación 1.1.5 Teniendo en cuenta la definición anterior, todo orden lineal estricto es un orden débil estricto.

También se verifica que todo orden débil estricto es un orden parcial estricto. El ejemplo 1.1.4.3 nos ilustra, sin embargo, que el recíproco no es cierto.

Para comprobar este tipo de relaciones, recordemos algunas propiedades de fácil demostración.

Propiedades 1.1.6

1. *Si $\mathcal{R}$ es asimétrica, es irreflexiva.*

2. *Si $\mathcal{R}$ es irreflexiva y transitiva, es asimétrica.*

3. *Si $\mathcal{R}$ es negativamente transitiva y asimétrica, es transitiva.*

4. *Si $\mathcal{R}$ es transitiva, irreflexiva y completa, es negativamente transitiva.*

Obsérvese, que la propiedad 3 es la que sustenta la afirmación de la observación 1.1.5.

La siguiente definición nos va a permitir modelizar las actitudes del decisor, frente a un problema de decisión, en una única estructura. Autores como *White (1972)* o *Roy (1977)*, entre otros, ya establecen una modelización de éstas mediante un conjunto de relaciones binarias. Más recientemente, los trabajos de *Yu (1985)* y *Chien et al. (1989)* tratan el tema, aunque no proporcionan una estructura totalmente unificada en donde incluir esas actitudes.

Definición 1.1.7 (ESTRUCTURA DE PREFERENCIA).
Sea Y el conjunto que representa el espacio de objetivos o consecuencias en un problema de decisión. Una **estructura de preferencia** en Y es un par de relaciones binarias en dicho conjunto, denotadas por $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$, que verifican los siguientes axiomas:

E1: $\mathcal{R}_1$ es asimétrica y transitiva. A $\mathcal{R}_1$ se le denominará **preferencia** en Y.

E2: $\mathcal{R}_2$ es una relación de equivalencia. A $\mathcal{R}_2$ se le denominará **indiferencia** en Y.

E3: $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son disjuntos: $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \emptyset$

Además, $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ se relacionan mediante los siguientes axiomas de **coherencia racional**:

E4: Si $(y_1, y_2) \in \mathcal{R}_1$ e $(y_2, y_3) \in \mathcal{R}_2 \Rightarrow (y_1, y_3) \in \mathcal{R}_1$

E5: Si $(y_1, y_2) \in \mathcal{R}_2$ e $(y_2, y_3) \in \mathcal{R}_1 \Rightarrow (y_1, y_3) \in \mathcal{R}_2$

La definición se ha hecho para un conjunto Y de objetivos o consecuencias, que es lo que nos va a interesar en esta memoria. No obstante, ésta se podría extender sobre el conjunto de acciones.

En *Chien et al. (1989)* se define la estructura de preferencia como la reunión de las relaciones $\{\succ\}$, $\{\sim\}$ y $\{?\}$; sin embargo, no se establece una conexión precisa entre ellas, ni se propone tampoco una axiomática que proporcione una mayor coherencia al concepto. Esta axiomática, necesaria a nuestro parecer, se suple en el citado trabajo por un conjunto de hipótesis a posteriori.

En realidad, hemos manejado cuatro tipos de relaciones binarias (si consideramos por separado la relación simétrica a la preferencia) que se corresponden con las cuatro actitudes citadas en un proceso de decisión. Ésto nos lleva a dar una nueva definición que, aunque no enriquece el contenido de la definición 1.1.7, nos proporciona una herramienta útil e intuitiva.

Definición 1.1.8 (CUATERNA DE RELACIONES BINARIAS ASOCIADAS A UNA ESTRUCTURA DE PREFERENCIA).
Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia en Y. Llamaremos **cuaterna de relaciones binarias** asociada a $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ a las relaciones

$$(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1^s, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_{12}^c) \quad ,$$

donde $\mathcal{R}_1^s$ es el simétrico de $\mathcal{R}_1$ en $Y \times Y$ repecto de la diagonal (Δ) y $\mathcal{R}_{12}^c$ es el complementario de $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_1^s \cup \mathcal{R}_2$ en $Y \times Y$. A esta última relación se le denominará *duda* o *indecisión*.

Con esta definición se originan particiones del espacio $Y \times Y$ como la que aparece en la figura 1.1

Para ilustrar estos conceptos, veamos cuál será la estructura de preferencia, y su cuaterna asociada, en un problema de decisión enunciado por *Jacquet–Lagréze (1975)*.

Ejemplo 1.1.9 Supongamos que tenemos cuatro proyectos *a,b,c* y *d*, entre los cuales debemos elegir, siendo nuestro objetivo minimizar costes. Nuestra actitud sería clara, si la diferencia entre dichos costes superase las 20.000 Ptas; en caso contrario, debido a que la calidad de los datos no es suficientemente fidedigna, nuestra postura quedaría confusa, originando actitudes de indecisión.

La relación entre proyectos y costes es la siguiente:

Acciones	a	b	c	d
Costes (Ptas)	135.000	150.000	160.000	175.000

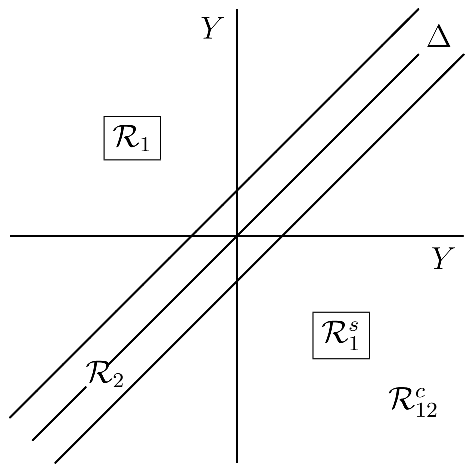


Figura 1.1:

Para este caso, nuestra estructura de preferencia en el espacio de objetivos descrito por los costes es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \{(a,c),(a,d),(b,d)\} \\ \mathcal{R}_2 &= \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\} \quad . \end{aligned}$$

Si deseamos obtener la cuaterna de relaciones binarias asociadas a $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$, completaríamos las relaciones binarias anteriores con

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1^s &= \{(c,a),(d,a),(d,b)\} \\ \mathcal{R}_{12}^c &= \{(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(c,d),(d,c)\} \quad . \end{aligned}$$

Esta última relación puede ser expresada del siguiente modo:

$$y\mathcal{R}_{12}^c y' \Leftrightarrow |y - y'| \leq 20{,}000 \quad .$$

Obsérvese, que hemos utilizado para representar los costes (elementos del espacio de objetivos) la nomenclatura de las acciones, con las cuales se corresponden biunívocamente.

Veamos ahora algunas propiedades adicionales, que se deducen a partir de los axiomas que verifica una estructura de preferencia.

Proposición 1.1.10 *La relación que representa la duda o incertidumbre, $\mathcal{R}_{12}^c$, es irreflexiva y simétrica.*

$\triangleright$<u>Demostración</u>. Es irreflexiva, pues $\mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_{12}^c = \emptyset$, y, como $\Delta \subset \mathcal{R}_2$, entonces, $\mathcal{R}_{12}^c \cap \Delta = \emptyset$.

Por otra parte, es inmediato deducir que $\mathcal{R}_{12}^c$ es simétrica, pues ésta es el complementario en $Y \times Y$ del conjunto simétrico $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_1^s \cup \mathcal{R}_2$. `c.q.d.` $\triangleleft$

Proposición 1.1.11 *Dada $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia en Y, se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Si $(y_1, y_2) \in \mathcal{R}_2$ e $(y_2, y_3) \in \mathcal{R}_{12}^c \Rightarrow (y_1, y_3) \in \mathcal{R}_{12}^c$*

2. *Si $(y_1, y_2) \in \mathcal{R}_{12}^c$ e $(y_2, y_3) \in \mathcal{R}_2 \Rightarrow (y_1, y_3) \in \mathcal{R}_{12}^c$*

$\triangleright$<u>Demostración</u>. Demostraremos solamente el apartado 1, pues el 2 se obtiene mediante un razonamiento análogo.

Supongamos que $(y_1, y_2) \in \mathcal{R}_2$ e $(y_2, y_3) \in \mathcal{R}_{12}^c$.

- Si $(y_1, y_3) \in \mathcal{R}_1$, como $(y_2, y_1) \in \mathcal{R}_2$, por E5 tendríamos que $(y_2, y_3) \in \mathcal{R}_1$, que es absurdo; luego $(y_1, y_3) \notin \mathcal{R}_1$

- Si $(y_1, y_3) \in \mathcal{R}_2$, como $(y_1, y_2) \in \mathcal{R}_2$, por E2 tendríamos que $(y_2, y_3) \in \mathcal{R}_2$, que es absurdo; luego $(y_1, y_3) \notin \mathcal{R}_2$

- Finalmente, si $(y_1, y_3) \in \mathcal{R}_1^s$ (que es lo mismo que decir que $(y_3, y_1) \in \mathcal{R}_1$), como $(y_1, y_2) \in \mathcal{R}_2$, por E4 tendríamos que $(y_3, y_2) \in \mathcal{R}_1$. Es decir, $(y_2, y_3) \in \mathcal{R}_1^s$, que es absurdo; luego $(y_1, y_3) \notin \mathcal{R}_1^s$.

Por tanto, $(y_1, y_3) \notin \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_1^s$, luego $(y_1, y_3) \in \mathcal{R}_{12}^c$, `c.q.d.` $\triangleleft$

Lo que hasta ahora se ha venido denominando en la literatura especializada *preferencia* e *indiferencia*, no siempre va a poder ser transcrito directamente, a la terminología de estructura de preferencia, (definición 1.1.7) como $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$. Veamos, para ilustrar esta afirmación, un ejemplo de *Jacquet–Lagréze (1975).*

Ejemplo 1.1.12 Supongamos que una persona quiere elegir entre cuatro coches a, b, c y d, cuyos precios en francos son los siguientes:

coches	a	b	c	d
Precios	9.900	9.980	10.050	10.100

Si su objetivo es minimizar los gastos y, además, dicha persona confiesa resutarle indiferente elegir entre un coche u otro cuando la diferencia de precio es menor a 100 francos, se tendrían las siguientes relaciones entre los diferentes coches, según la información del decisor:

$$\{\sim\} = \{(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(c,d),(d,c),(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$$

$$\{\succ\} = \{(a,c),(a,d),(b,d)\}$$

$$\{\prec\} = \{(c,a),(d,a),(d,b)\}$$

$$\{?\} = \emptyset$$

Con $\{\sim\}$ se representa lo que hasta ahora se ha considerado como relación de indiferencia. Del mismo modo, $\{\succ\}$ estaría representando la preferencia en dicho problema, $\{?\}$ la duda o indecisión y $\{\prec\}$ la relación simétrica a la preferencia.

Sin embargo, obsérvese, que no se puede reconstruir una estructura de preferencia para este problema (definición 1.1.7) llamando $\mathcal{R}_1$ a $\{\succ\}$ y $\mathcal{R}_2$ a $\{\sim\}$. La razón es que $\{\sim\}$ no es una relación de equivalencia, pues, como se puede observar, no verifica la propiedad transitiva. ¿ Cómo solucionamos esta situación? Podemos, incluso, hacernos una pregunta aún más general: dadas dos relaciones binarias $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ en un conjunto de objetivos Y, tal que $\Delta \subset \mathcal{S}$ ¿se puede generar una estructura de preferencia a partir de ellas?. El siguiente resultado dará respuesta a esta cuestión.

Llamemos $\mathcal{C}$, al mayor de los subconjuntos de $\mathcal{R} \cup \mathcal{S} \subset Y \times Y$ con las siguientes propiedades:

1. En $\mathcal{C}$ se verifican los axiomas de coherencia racional para $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ *E4* y *E5*.

2. $\mathcal{R} \cap \mathcal{C}$ es asimétrica y transitiva.

3. $\mathcal{S} \cap \mathcal{C}$ es una relación de equivalencia.

Teorema 1.1.13 *Sean dos relaciones binarias $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ en Y, tales que $\Delta \subset \mathcal{S}$.Consideremos, además, el conjunto $\mathcal{C}$ definido anteriormente. Si llamamos $\mathcal{R}_1^*$ y $\mathcal{R}_2^*$ a las relaciones $\mathcal{R} \cap \mathcal{C}$ y $\mathcal{S} \cap \mathcal{C}$, respectivamente, y se verifica que $\mathcal{R}_1^* \neq \emptyset$, entonces,*

$$(\mathcal{R}_1^* \backslash \mathcal{R}_2^*, \mathcal{R}_2^*)$$

es una estructura de preferencia, que llamaremos **asociada a** $\mathcal{R}$ *y* $\mathcal{S}$ *y representaremos por* $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)_{\mathcal{R},\mathcal{S}}$

$\triangleright$Demostración. Los axiomas E2 y E3 se obtienen directamente de la definición de las relaciones $\mathcal{R}_1^* \backslash \mathcal{R}_2^*$ y $\mathcal{R}_2^*$, que definen la estructura de preferencia. Veamos que se verifica E1:

- $\mathcal{R}_1^* \backslash \mathcal{R}_2^*$ es asimétrica, por ser subconjunto de $\mathcal{R}_1^*$ y ser ésta asimétrica.
- $\mathcal{R}_1^* \backslash \mathcal{R}_2^*$ es transitiva:

  Si $(y_1, y_2) \in \mathcal{R}_1^* \backslash \mathcal{R}_2^*$ e $(y_2, y_3) \in \mathcal{R}_1^* \backslash \mathcal{R}_2^*$, entonces $(y_1, y_3) \in \mathcal{R}_1^*$, pues $\mathcal{R}_1^*$ verifica la transitividad, por definición del conjunto $\mathcal{C}$.

  Nos queda probar que $(y_1, y_3) \notin \mathcal{R}_2^*$, y por tanto, $(y_1, y_3) \in \mathcal{R}_1^* \backslash \mathcal{R}_2^*$.

  Supongamos que $(y_1, y_3) \in \mathcal{R}_2^*$; ésto es lo mismo que decir que $(y_3, y_1) \in \mathcal{R}_2^*$. Como $(y_1, y_2) \in \mathcal{R}_1^*$, tendremos que $(y_3, y_2) \in \mathcal{R}_1^*$ (por verificarse E5 en $\mathcal{C}$), lo cual es absurdo, por ser $\mathcal{R}_1^*$ asimétrica.

Veamos que se verifica E4:

Supongamos $(y_1, y_2) \in \mathcal{R}_1^* \backslash \mathcal{R}_2^*$ e $(y_2, y_3) \in \mathcal{R}_2^*$, queremos ver que $(y_1, y_3) \in \mathcal{R}_1^* \backslash \mathcal{R}_2^*$. Que $(y_1, y_3) \in \mathcal{R}_1^*$ está claro, pues en $\mathcal{C}$ se verifica E4. Queda probar que $(y_1, y_3) \notin \mathcal{R}_2^*$. Supongamos que $(y_1, y_3) \in \mathcal{R}_2^*$, entonces, como $(y_2, y_3) \in \mathcal{R}_2^*$, por E2 se verifica que $(y_1, y_2) \in \mathcal{R}_2^*$, lo cual es absurdo, luego $(y_1, y_3) \in \mathcal{R}_1^* \backslash \mathcal{R}_2^*$,

Del mismo modo podemos verificar E5. `c.q.d.` $\triangleleft$

Observación 1.1.14 Podemos ampliar el concepto de estructura de preferencia asociada, al caso en que $\mathcal{R}_1^* = \emptyset$.

El hecho de ser $\mathcal{R}_1^* = \emptyset$, indica que el decisor toma actitudes de indiferencia o duda pero no expresa preferencia por ninguna alternativa. La estructura de preferencia asociada será $(\emptyset, \mathcal{R}_2^*)$.

Un caso particular de este tipo de estructura es la que expresa duda total, y vendría representada por $(\emptyset, \Delta)$.

Dadas dos relaciones binarias $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ en Y, a su estructura de preferencia asociada le llamaremos directamente $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$, si no existe ambigüedad en la notación.

Podemos observar que el conjunto $\mathcal{C}$, el cual se ha definido para construir esta estructura de preferencia asociada, es el conjunto de pares donde se manifiesta cierta coherencia racional, por parte del decisor, frente a la comparación de objetivos o consecuencias. Así, asociar una estructura de preferencia a un par de relaciones, es incluir todos aquellos pares de alternativas que no verifican las reglas de coherencia racional, aparecidas en la definición 1.1.7, en el subconjunto $\mathcal{R}_{12}^c$, quedando en $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ sólo aquellos ante los cuales la postura del decisor sea coherente o consistente.

La estructura de preferencia asociada al problema del ejemplo 1.1.12 será:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \{(a,c),(a,d),(b,d)\} = \{\succ\} \\ \mathcal{R}_2 &= \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\} = \Delta \neq \{\sim\} \end{aligned}$$

Si quisiésemos la cuaterna asociada a $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$, tendríamos que completar esas relaciones con las siguientes:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1^s &= \{(c,a),(d,a),(d,b)\} = \{\prec\} \\ \mathcal{R}_{12}^c &= \{(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(c,d),(d,c)\} \neq \{?\} \end{aligned}$$

Obsérvese, que hemos pasado a $\mathcal{R}_{12}^c$ los puntos de $\{\sim\}$ que transgredían la propiedad racional de la transitividad para la indiferencia.

Veamos algunos ejemplos más.

Ejemplo 1.1.15

1. La actitud del decisor frente al conjunto de objetivos que se describe por 'cuanto más en cada uno de ellos, mejor', y que se denomina **orden de Pareto** (ejemplo 1.1.4.4), lleva asociada la siguiente estructura de preferencia, denotada por $(\mathcal{R}_{1P}, \mathcal{R}_{2P})$:

   Suponiendo que $Y \subset \mathbf{R}^n$, y que cada $\underline{y}_i \in \mathbf{R}^n$ viene representado por

$$\underline{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, ..., y_{in}) \quad ,$$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{R}_{1P} & = & \{(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in Y \times Y : y_{1i} \geq y_{2i},\ \forall i = 1, ..., n \text{ y } \underline{y}_1 \neq \underline{y}_2\} \\
\mathcal{R}_{2P} & = & \{(\underline{y}, \underline{y}) \in Y \times Y\} = \Delta
\end{array}
$$

Si quisieramos la cuaterna asociada a $(\mathcal{R}_{1P}, \mathcal{R}_{2P})$, complementaríamos estas dos relaciones con $\mathcal{R}^s_{1P}$ y con aquella que representa la duda o indecisión:

$$
\mathcal{R}^c_{12P} = \{(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in Y \times Y : \exists i, j / y_{1i} > y_{2i} \text{ y } y_{1j} < y_{2j}\} \quad .
$$

2. Cuando el decisor logra establecer una jerarquía entre todos los objetivos, ordenándolos de tal forma, que el primero que aparece en el vector n–dimensional sea el más importante y vayan disminuyendo en importancia a medida que subimos en el orden de las coordenadas, se define el llamado **orden lexicográfico** (ejemplo 1.1.4). Su estructura de preferencia asociada se representa por $(\mathcal{R}_{1L}, \mathcal{R}_{2L})$, y viene expresada por:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{R}_{1L} & = & \{(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in Y \times Y : y_{11} > y_{21} \text{ ó } (y_{1i} < y_{2i},\ i = 1, ..., k \\
& & \text{e } y_{1k+1} > y_{2k+1},\ k = 1, ..., n-1)\} \\
\mathcal{R}_{2L} & = & \Delta
\end{array}
$$

En este caso, la cuaterna asociada a $(\mathcal{R}_{1L}, \mathcal{R}_{2L})$ se complementaría con $\mathcal{R}^s_{1L}$ y $\mathcal{R}^c_{12L} = \emptyset$. Esto significa que el decisor expresa, en cada caso, su preferencia con racionalidad y sin dudas.

COMPLETITUD EN ESTRUCTURAS DE PREFERENCIA

La completitud, en el marco de las estructuras de preferencia, será una propiedad para indicar qué tipo de actitudes toma el decisor frente al conjunto de objetivos o alternativas. Así, podemos asegurar que $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}^c_{12}$ y

$\mathcal{R}_1^s \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_{12}^c$ son relaciones completas, pues la persona que decide, o bien prefiere una alternativa a la otra ($\mathcal{R}_1$ ó $\mathcal{R}_1^s$), o bien permanece indiferente ante ellas ($\mathcal{R}_2$), o duda o comete una incoherencia ($\mathcal{R}_{12}^c$).

$\mathcal{R}_1$, y por tanto $\mathcal{R}_1^s$, será completa cuando el decisor tenga un juicio preciso sobre sus preferencias, y no permanezca ni indiferente ante las alternativas ni dude entre ellas.

$\mathcal{R}_2$ será completa cuando el decisor vea equivalentes todas las alternativas proporcionadas por el problema (en este caso, $\mathcal{R}_2 = Y \times Y$).

$\mathcal{R}_{12}^c$ será completa cuando el decisor dude frente a todo par de alternativas, salvo en el caso de la identidad, que le resultará indiferente.

Definición 1.1.16 Una estructura de preferencia $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ se dice **completa** cuando $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ (y, por tanto, $\mathcal{R}_1^s \cup \mathcal{R}_2$) sea una relación completa.

Veamos algunas propiedades de la completitud, cuyas demostraciones omitimos por su sencillez.

Propiedades 1.1.17 *Dada $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$, estructura de preferencia sobre un espacio de objetivos Y, se verifica:*

1. $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ *(y, por tanto, $\mathcal{R}_1^s \cup \mathcal{R}_2$) es completa sii* [1] $\mathcal{R}_{12}^c = \emptyset$.
2. $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_{12}^c$ *(y, por tanto, $\mathcal{R}_1^c \cup \mathcal{R}_{12}^c$) es completa sii* $\mathcal{R}_2 = \Delta$.
3. $\mathcal{R}_1$ *(y, por tanto, $\mathcal{R}_1^s$) es completa sii* $\mathcal{R}_2 = \Delta$ *y* $\mathcal{R}_{12}^c = \emptyset$.
4. $\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_{12}^c$ *es completa sii* $\mathcal{R}_1 = \emptyset$ *(y, por tanto, $\mathcal{R}_1^s = \emptyset$).*

El orden lexicográfico (ejemplo 1.1.15.2) llevará, de este modo, asociada una estructura de preferencia completa, pues, al ser $\mathcal{R}_{2L} = \Delta$ y $\mathcal{R}_{12L}^c = \emptyset$, $\mathcal{R}_{1L}$ es completa y, por tanto, lo será $\mathcal{R}_{1L} \cup \mathcal{R}_{2L}$

El siguiente resultado relaciona el concepto de completitud, cuando el espacio de objetivos es finito, con la posibilidad de encontrar una única consecuencia, o elemento de Y, óptima para el decisor.

[1] En lo sucesivo, utilizaremos la abreviatura 'sii'para indicar 'si y solo si'.

Teorema 1.1.18 *Sea Y un espacio de objetivos o consecuencias finito y $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia sobre Y.*
Si $\mathcal{R}_1$ es completa, existe un único elemento $y^* \in Y$ tal que

$$(y, y^*) \in \mathcal{R}_1 \ \forall y \in Y, \ \textit{siendo } y \neq y^*$$

$\triangleright$Demostración. En esta demostración utilizaremos la notación clásica de $\succ$ para referirnos a $\mathcal{R}_1$ y $\sim$ para referirnos a $\mathcal{R}_2$, teniendo siempre en cuenta que es a una estructura de preferencia (definición 1.1.7) a la que nos referimos.

Sea $Y = \{y_1, ..., y_n\}$ el espacio finito de consecuencias. Tomemos el elemento y_1:

1. Si no existe y_j tal que $y_j \succ y_1$, tomamos $y^* = y_1$, pues, al ser $\mathcal{R}_1$ completa, $y_1 \succ y_j \ \forall j = 2, ..., n$ y, por tanto, ya estaría probado el teorema.
2. Si existiese un $y_j \succ y_1$, haríamos el mismo razonamiento que se ha hecho antes para y_1, esta vez con y_j, es decir,
   - Si no existiese un $y_k \succ y_j$, tomaríamos $y^* = y_j$, y
   - Si existiese un $y_k \succ y_j$, usaríamos y_k para aplicar el proceso.

Como estudiamos un conjunto finito, llegaremos a la existencia de y^*, ya sea agotando todos los elementos, o probando hasta un número intermedio de ellos.

Veamos la unicidad. Supongamos que hubiese dos elementos y_1^*, y_2^* tales que $y_1^* \succ y_j$, para todo y_j tal que $y_j \neq y_1^*$, e $y_2^* \succ y_j$, para todo y_j tal que $y_j \neq y_2^*$. Por tanto $y_1^* = y_2^*$, pues, si no se verificase la igualdad, llegaríamos a un absurdo, al ser $\mathcal{R}_1$ asimétrica. `c.q.d.` $\triangleleft$

Vamos a utilizar la siguiente terminología, respetando la notación clásica: Si Y es un conjunto de objetivos o consecuencias, $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia sobre Y e $y_0 \in Y$:

- El conjunto de las consecuencias u objetivos mejores que y_0, respecto a $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$, lo denotaremos por

$$\{y_0 \prec\} = \{y \in Y : (y_0, y) \in \mathcal{R}_1^s \text{ ó } (y, y_0) \in \mathcal{R}_1\}$$

- El conjunto de las consecuencias u objetivos peores que y_0, respecto a $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$, lo denotaremos por

$$\{y_0 \succ\} = \{y \in Y : (y_0, y) \in \mathcal{R}_1\} \text{ ó } (y, y_0) \in \mathcal{R}_1^s\}$$

- El conjunto de elementos de Y indiferentes a y_0, respecto a $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$, lo denotaremos por

$$\{y_0 \sim\} = \{y \in Y : (y_0, y) \in \mathcal{R}_2\}$$

- Finalmente, el conjunto de elementos de Y que al compararlos con y_0 producen indecisión, respecto a $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$, lo denotaremos por

$$\{y_0?\} = \{y \in Y : (y_0, y) \in \mathcal{R}_{12}^c\}$$

Frecuentemente, se utilizarán notaciones mixtas como

$$\{y_0 \precsim \} = \{y_0 \prec\} \cup \{y_0 \sim\}, \{y_0 \prec ?\} = \{y_0 \prec\} \cup \{y_0?\} \text{ etc}$$

Obsérvese también, que la notación utilizada, aunque no lo lleve explícito, depende implícitamente de la estructura de preferencia considerada en Y. Sin embargo, ha sido omitido para evitar excesiva complicación en la notación.

En *Yu (1985, pg 17)* se hace la siguiente observación, que adaptaremos a la terminología de estructuras de preferencia:
Consideremos en $Y = \mathbf{R}^n$ la estructura de preferencia asociada al orden de Pareto $(\mathcal{R}_{1P}, \mathcal{R}_{2P})$. Utilizando la nomenclatura anterior y dado $\underline{y}_0 \in \mathbf{R}^n$,

$$\{\underline{y}_0?\} = \{\underline{y} \in \mathbf{R}^n : \ \exists\ j, i \in \{1, ..., n\}/y_{0j} > y_j \ e \ y_{0i} < y_i, \ \underline{y} \neq \underline{y}_0\}$$

Este conjunto representará $[1-2(1/2)^n]$ de $\mathbf{R}^n$; por tanto, se observa, que a medida que crece n, número de objetivos, la región que representa la zona indecisa respecto $\underline{y}_0$ de $\mathbf{R}^n$ crecerá exponencialmente. Ésto es lógico, pues la capacidad del decisor de discernir entre objetivos irá disminuyendo a medida que éstos aumentan.

1.2. ESTRUCTURAS DE PREFERENCIA INDUCIDAS POR UNA FAMILIA DE CONJUNTOS CONVEXOS

Supongamos que $Y \subset \mathbf{R}^n$ representa el espacio de objetivos o consecuencias de un problema de decisión. Además, sea una familia de conjuntos convexos

$$\{P(\underline{y}_0)\}_{\ \underline{y}_0 \in Y} \quad ,$$

verificando que $\underline{y}_0 \in P(\underline{y}_0)$ $\forall \underline{y}_0 \in Y$, tal que las actitudes de *preferencia* ($\succ$) e *indiferencia* ($\sim$) (todas ellas en el sentido clásico), que manifiesta el decisor en dicho problema, vienen expresadas por:

$$\begin{aligned} \underline{y}_1 &\succ \underline{y}_2 \Leftrightarrow \underline{y}_1 \in \underline{y}_2 + P(\underline{y}_2) \text{ pero } \underline{y}_2 \notin \underline{y}_1 + P(\underline{y}_1) \\ \underline{y}_1 &\sim \underline{y}_2 \Leftrightarrow \underline{y}_1 \in \underline{y}_2 + P(\underline{y}_2) \text{ y } \underline{y}_2 \in \underline{y}_1 + P(\underline{y}_1) \end{aligned}$$

Definición 1.2.1 Llamaremos **estructura de preferencia inducida por la familia de conjuntos convexos $\{\mathbf{P}(\underline{\mathbf{y}}_\mathbf{0})\}_{\underline{\mathbf{y}}_\mathbf{0} \in \mathbf{Y}}$** a $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)_{\mathcal{R},\mathcal{S}}$ (teorema 1.1.13), donde $\mathcal{R} = \{\succ\}$ y $\mathcal{S} = \{\sim\}$.

Esta definición podría darse, sin utilizar un lenguaje propio de un problema de decisión, partiendo de dos relaciones binarias $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ definidas del modo anterior, por la familia $\{P(\underline{y}_0)\}_{\underline{y}_0 \in Y}$.

Yu (1974) estudia, inicialmente, el caso particular en el que $\{\prec\}$ (pues él habla de 'dominación'y no de *preferencia*) viene expresada por una familia $\{P(\underline{y}_0)\}_{\underline{y}_0 \in Y}$ de conos convexos. Sin embargo, más adelante, *Bergstresser, Charnes* y *Yu (1976)* amplían el estudio a una familia de conjuntos convexos. Su intención era establecer un modelo que no perdiese gran parte de la información proporcionada por el decisor al analista. En *Coladas (1979)* también encontramos esta generalización.

Antes de continuar nuestro estudio, vamos a recoger algunas de las propiedades de conos que pueden resultarnos útiles [2].

[2]Información más detallada sobre este tema puede encontrarse en obras clásicas sobre análisis convexo como *Rockafellar (1970), Stoer y Witzgall (1970)* y *Robert y Varberg (1973)*, entre otras

CONOS

En primer lugar, veamos algunas definiciones básicas.

Definición 1.2.2 Un **cono** en $\mathbf{R}^n$ es un conjunto $C \subset \mathbf{R}^n$ que verifica la propiedad: $\alpha C \subset C, \ \forall \alpha > 0$.

Si, además, verifica la condición: $\forall \alpha, \beta > 0/\alpha + \beta = 1, \ \alpha C + \beta C \subset C$ (de conjunto convexo), diremos que C es un **cono convexo**.

Un cono se dice **apuntado** cuando $C \cap (-C) = \{\underline{0}\}$. Esto equivale a decir que C no contiene subespacios no triviales.

Un cono **poliédrico** será aquel que viene expresado por la ecuación matricial

$$C = \{\underline{c} \in \mathbf{R}^n / A\underline{c}^T \geq \underline{0}^T\} \ ,$$

donde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, es decir, que C es un poliedro.

Estos conos poliédricos puede expresarse por

$$C = \{\sum_{i=1}^{m} a_i \underline{v}^i / \ a_i \geq 0 \ a_i \in \mathbf{R}\} \ .$$

Al conjunto $V = \{\underline{v}^i \in \mathbf{R} \ i = 1, ..., m\}$ se le denomina **conjunto de generadores**, y al cono C se le denotará por $C[V]$.

Los generadores no tienen por qué ser únicos, incluso se puede hablar de conjuntos de generadores con el menor número de elementos posibles. A estos se les llama **conjuntos minimales de generadores** (*Steuer (1986)*).

Ejemplo 1.2.3 Sea el cono poliédrico

$$C = \{(c_1, c_2) \in \mathbf{R}^2 / 2c_1 + 3c_2 \geq 0 \ 3c_1 + 2c_2 \geq 0 \ \} \quad .$$

Tendremos que

$$V = \{(3, -2), (-2, 3)\}$$

es un conjunto de generadores de C, como también lo es

$$V' = \{(3, -2), (-2, 3), (1, 1)\} \quad .$$

En este caso, V es el conjunto minimal de generadores.

Definición 1.2.4 Dado un subconjunto $S \subset \mathbf{R}^n$, llamaremos **polar** de S, y lo denotaremos por S^*, al conjunto

$$S^* = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^n / \underline{x} \cdot \underline{s} \geq 0,\ \forall \underline{s} \in S\} \quad .$$

Algunas propiedades sobre conos polares pueden verse en *Yu (1974), Bazaraa y Shetty (1976), Coladas (1979)* o *Yu (1985)*, entre otros [3].

Consideremos nuevamente las estructuras de preferencias inducidas por una familia de conjuntos convexos. El siguiente resultado es una propiedad interesante para el caso de una familia cónica constante, es decir, $P(\underline{y}_0) = P$ $\forall \underline{y}_0 \in Y$, siendo P un cono convexo tal que $\underline{0} \in P$.

Teorema 1.2.5 *Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)_{\mathcal{R},\mathcal{S}}$ una estructura de preferencia inducida por una familia cónica convexa y constante, cuyo cono contiene a $\underline{0}$ ($P(\underline{y}_0) = P$ $\forall \underline{y}_0 \in Y$ y $\underline{0} \in P$). Se verifica que $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}$ y $\mathcal{R}_2 = \mathcal{S}$.*

$\triangleright$Demostración Teniendo en cuenta que

$$\begin{array}{lcl} \underline{y}_1 & \mathcal{R} & \underline{y}_2 \Leftrightarrow \underline{y}_1 \in \underline{y}_2 + P \text{ pero } \underline{y}_2 \notin \underline{y}_1 + P \\ \underline{y}_1 & \mathcal{S} & \underline{y}_2 \Leftrightarrow \underline{y}_1 \in \underline{y}_2 + P \text{ y } \underline{y}_2 \in \underline{y}_1 + P \quad , \end{array}$$

demostraremos que $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ es una estructura de preferencia.

- En primer lugar, veamos que se verifica *E1*:
  - $\mathcal{R}$ *es asimétrica*: si $\underline{y}_1 \mathcal{R} \underline{y}_2$, tenemos que $\underline{y}_1 \in \underline{y}_2 + P$ pero $\underline{y}_2 \notin \underline{y}_1 + P$, con lo cual se verifica No $[\underline{y}_2 \mathcal{R} \underline{y}_1]$
  - $\mathcal{R}$ *es transitiva*: veamos que si $\underline{y}_1 \mathcal{R} \underline{y}_2$ e $\underline{y}_2 \mathcal{R} \underline{y}_3$, entonces $\underline{y}_1 \mathcal{R} \underline{y}_3$, que es equivalente a decir que $\underline{y}_1 \in \underline{y}_3 + P$ pero $\underline{y}_3 \notin \underline{y}_1 + P$.

    $\underline{y}_1 - \underline{y}_2 \in P$ e $\underline{y}_2 - \underline{y}_3 \in P$, por verificarse $\underline{y}_1 \mathcal{R} \underline{y}_2$ e $\underline{y}_2 \mathcal{R} \underline{y}_3$. Como P es convexo, entonces,

[3] Alguno de ellos, como *Yu o Coladas*, utilizan como definición de cono polar $(-S^*)$. Ello se debe a que su estudio se hace bajo el punto de vista de la dominación y no de la preferencia, como se hace en esta memoria.

$$\frac{1}{2}(\underline{y}_1 - \underline{y}_2) + \frac{1}{2}(\underline{y}_2 - \underline{y}_3) \in P \quad ,$$

y esto significa, al ser P un cono, que $\underline{y}_1 - \underline{y}_3 \in P$.
Además, $\underline{y}_3 - \underline{y}_1 \notin P$. Si se verificase que $\underline{y}_3 - \underline{y}_1 \in P$, entonces, como $\underline{y}_2 - \underline{y}_3 \in P$ e $\underline{y}_1 - \underline{y}_2 \in P$, al ser P convexo, tenemos que $\underline{y}_2 - \underline{y}_1 \in P$ e $\underline{y}_3 - \underline{y}_2 \in P$, lo cual es absurdo, pues $\underline{y}_1 \mathcal{R} \underline{y}_2$ e $\underline{y}_2 \mathcal{R} \underline{y}_3$.

- Veamos que S verifica *E2*:
  - Que S es *reflexiva* y *simétrica* se obtiene fácilmente de la definición de esta relación binaria.
  - *S es transitiva*: supongamos que $\underline{y}_1 \mathcal{S} \underline{y}_2$ e $\underline{y}_2 \mathcal{S} \underline{y}_3$. Veamos como $\underline{y}_1 \mathcal{S} \underline{y}_3$, es decir, $\underline{y}_1 - \underline{y}_3 \in P$ e $\underline{y}_3 - \underline{y}_1 \in P$. Ésto se obtiene fácilmente de la definición de S y del hecho de ser P convexo.
- Por definición de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ obtenemos *E3*.
- Finalmente, demostraremos *E4*, puesto que *E5* se obtendría mediante un razonamiento análogo:

  Si $\underline{y}_1 \mathcal{R} \underline{y}_2$ e $\underline{y}_2 \mathcal{S} \underline{y}_3$, tendremos que

$$\begin{aligned} \underline{y}_1 \in \underline{y}_2 + P \text{ pero } \underline{y}_2 \notin \underline{y}_1 + P \\ \underline{y}_2 \in \underline{y}_3 + P \text{ y } \underline{y}_3 \in \underline{y}_2 + P \end{aligned}$$

  Aplicando la convexidad de P, obtenemos que $\underline{y}_1 - \underline{y}_3 \in P$. Además, se observa, que $\underline{y}_3 \notin \underline{y}_1 + P$, ya que, si no se verificase esto último, deduciríamos, por un razonamiento ya empleado, que $\underline{y}_2 - \underline{y}_1 \in P$, y ésto es absurdo. Luego $\underline{y}_1 \mathcal{R} \underline{y}_3$.

`c.q.d.` ◁

A este tipo de estructura de preferencia se le llama **estructura de preferencia cónica constante**.

Ejemplo 1.2.6 1. La estructura de preferencia asociada al orden de Pareto $(\mathcal{R}_{1P}, \mathcal{R}_{2P})$ en $\mathbf{R}^n$ (ejemplo 1.1.15.1) es una estructura de preferencia cónica constante, definida por

$$P = \{\underline{p} = (p_1, ..., p_n) \in \mathbf{R}^n / \underline{p} \neq \underline{0},\ p_i \geq 0 \ \ \forall i\} \quad .$$

2. Por otro lado, el orden lexicográfico en $\mathbf{R}^n$ origina una estructura de preferencia cónica constante $(\mathcal{R}_{1L}, \mathcal{R}_{2L})$ (ejemplo 1.1.15.2), definida por

$$P = \{\underline{p} = (p_1, ..., p_n) \in \mathbf{R}^n / p_i > 0 \ \ \acute{o}\, (p_i = 0,\ i < l; p_l > 0,\ l = 2, ..., n)\} \quad .$$

Obsérvese, que en el caso de una estructura de preferencia cónica constante definida por un cono convexo y apuntado P, se verifica lo siguiente:

$$\begin{array}{ll} \{\underline{y} \prec\} = (\underline{y} + P^-) \cap Y & \{\underline{y} \succ\} = (\underline{y} - P^-) \cap Y \\ \{\underline{y} \sim\} = \Delta \subset Y & \{\underline{y}?\} = (\underline{y} + P^*) \cap Y \quad , \end{array}$$

siendo $P^* = P^c \backslash \{\underline{0}\}$ (es decir, el complementario de P en $\mathbf{R}^n$ salvo el punto $\{\underline{0}\}$) y $P^- = P \backslash \{\underline{0}\}$.

Esta observación nos permite deducir, que dado dos puntos $\underline{y}_1, \underline{y}_2 \in Y$ tales que $\underline{y}_1 \succ \underline{y}_2$, la dirección $d = \underline{y}_1 - \underline{y}_2$ de $\mathbf{R}^n$ nos lleva a puntos preferentes a $\underline{y}_2$, dentro del conjunto Y.

Este último resultado es de gran interés en nuestro estudio; es por ello por lo que, más adelante, (capítulo 2) utilizaremos diversos conceptos de los aquí expuestos para definir aproximaciones a estructuras de preferencia que satisfagan propiedades como la anterior.

1.3. ESTRUCTURAS DE PREFERENCIA REPRESENTADAS MEDIANTE FUNCIONES DE VALOR

En esta sección veremos dos formas de representar una estructura de preferencia a través de funciones en el espacio de objetivos o consecuencias.

Definición 1.3.1 Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia en el espacio de objetivos $Y \subset \mathbf{R}^n$. Diremos que $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ **tiene una representación mediante una función de valor escalar** sii existe una función $v : Y \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ tal que:

$$\begin{array}{rcl} (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_1 & \Leftrightarrow & v(\underline{y}_1) > v(\underline{y}_2) \\ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_2 & \Leftrightarrow & v(\underline{y}_1) = v(\underline{y}_2) \end{array}$$

Nuestra pregunta será ahora: ¿Bajo qué condiciones podríamos garantizar la existencia de una función escalar que represente a una estructura de preferencia dada?

Una condición fundamental es que $\mathcal{R}^c_{12} = \emptyset$. Ésto indica que las actitudes del decisor, frente a las alternativas de que consta el problema, son de *preferencia* e *indiferencia*. No existe, por tanto, la *duda* ante ellas. De esta manera, la postura del decisor está determinada completamente.

En el tratamiento que algunos autores, como *Debreu (1959)* o *Fishburn (1970)*, dan en sus obras, clásicas sobre este problema, no se recoge explícitamente el hecho de que $\mathcal{R}^c_{12} = \emptyset$, aunque aparece de modo implícito. En *Chien et al. (1989)* se recoge recientemente esta condición, la cual viene expresada por $\{?\} = \emptyset$, donde $\{?\}$ representa pares de alternativas frente a las cuales el 'decisor'cree poseer duda.

Teorema 1.3.2 (DEBREU). *Sea (Y, τ), $Y \subset \mathbf{R}^n$, un espacio de objetivos dotado de una topología (por lo general, la natural de $\mathbf{R}^n$). Las siguientes condiciones son suficientes para que una estructura de preferencia $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ sobre Y tenga una representación mediante una función de valor escalar contínua:*

D1: $\mathcal{R}^c_{12} = \emptyset$

D2: $\{y \succ\}$, $\{y \prec\} \in \tau \ \forall y \in Y$ [4].

D3: (Y, τ) *es conexo y separable.*

La demostración de este teorema puede encontrarse en *Debreu (1959).*

Este autor enuncia en su trabajo las condiciones **D2** y **D3**, pero, además, impone que las actitudes de preferencia e indiferencia, por parte del decisor,

[4] según la terminología introducida al final de la sección 1.1

constituyan una relación binaria ($\succsim$) reflexiva, transitiva y completa. Esta última condición aparece dentro de nuestro teorema recogida en **D1**, ya que por la proposición 1.1.17.1, ésto equivale a que $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ sea completa. Por otra parte, es evidente que verifica las propiedades reflexiva y transitiva, pues éstas ya aparecen recogidas en la definición de estructura de preferencia (definición 1.1.7).

Veamos ahora una representación de una estructura de preferencia que generaliza a la función de valor escalar.

Definición 1.3.3 Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia en el espacio de objetivos $Y \subset \mathbf{R}^n$. Diremos que $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ **tiene una representación mediante una función de valor vectorial** sii existe una función $\underline{v} \equiv (v_1, ..., v_k) : Y \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^k$ $(k < n)$ tal que:

$$
\begin{array}{lcl}
(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_1 & \Leftrightarrow & \underline{v}(\underline{y}_1) \neq \underline{v}(\underline{y}_2) \text{ y } v_i(\underline{y}_1) \geq v_i(\underline{y}_2) \ i = 1, ..., k \\
(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_2 & \Leftrightarrow & \underline{v}(\underline{y}_1) = \underline{v}(\underline{y}_2)
\end{array}
$$

Esta representación podríamos haberla expresado del modo siguiente: Si $(\mathcal{R}_{1P}, \mathcal{R}_{2P})$ es la estructura de preferencia asociada al orden de Pareto en el espacio de objetivos $\underline{v}(Y) \subset \mathbf{R}^k$,

$$
\begin{array}{lcl}
(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_1 & \Leftrightarrow & (\underline{v}(\underline{y}_1), \underline{v}(\underline{y}_2)) \in \mathcal{R}_{1P} \\
(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_2 & \Leftrightarrow & (\underline{v}(\underline{y}_1), \underline{v}(\underline{y}_2)) \in \mathcal{R}_{2P}
\end{array}
$$

Trabajos como los de *Roberts (1979), Ríos-Insua (1980), Skulimowski (1985)* y *Ríos y Ríos-Insua (1986)* han estudiado este tipo de representación.

El siguiente resultado de representación de una estructura de preferencia mediante una función de valor vectorial es una extensión del aparecido en *Ríos-Insua (1980)*, en el caso topológico, a este planteamiento más general que constituye la noción de *estructura de preferencia.*

Teorema 1.3.4 *Sea* (Y, τ), $Y \subset \mathbf{R}^n$, *un espacio de objetivos dotado de una topología. Las siguientes condiciones son suficientes para que* $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$, *estructura de preferencia sobre* Y, *tenga una representación mediante una función de valor vectorial contínua:*

1. $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ *es una estructura de preferencia definida por:*

$$\mathcal{R}_2 = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{R}_{2i}$$
$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R} \backslash \mathcal{R}_2 \quad \textit{donde } \mathcal{R} = \textstyle\bigcap_{i=1}^{k} (\mathcal{R}_{1i} \cup \mathcal{R}_{2i}) \quad ,$$

siendo $\{(\mathcal{R}_{1i}, \mathcal{R}_{2i})\}_{i=1,...,k}$ $(k < n)$ *una familia finita de estructuras de preferencia en* Y*, verificando las condiciones* D1 *y* D2 *del teorema 1.3.2*

2. (Y, τ) *es conexo y separable.*

$\triangleright$Demostración. Aplicando el teorema 1.3.2 a cada estructura de preferencia $(\mathcal{R}_{1i}, \mathcal{R}_{2i})$, $i = 1, ..., k$, ya que éstas verifican las condiciones *D1*, *D2* y *D3* del citado teorema, obtendremos k funciones escalares contínuas

$$v_i : Y \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R} \quad ,$$

tales que :

$$(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_{1i} \quad \Leftrightarrow \quad v_i(\underline{y}_1) > v_i(\underline{y}_2)$$
$$(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_{2i} \quad \Leftrightarrow \quad v_i(\underline{y}_1) = v_i(\underline{y}_2) \quad i = 1, ..., k \quad .$$

Llamando

$$\underline{v} \equiv (v_1, ..., v_k) : Y \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^k \quad ,$$

y teniendo en cuenta la definición de $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ en 1, tendremos:

$$(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_1 \quad \Leftrightarrow \quad v_i(\underline{y}_1) \geq v_i(\underline{y}_2)) \quad i = 1, ..., k \text{ pero } \underline{v}(\underline{y}_1) \neq \underline{v}(\underline{y}_2)$$
$$(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{v}(\underline{y}_1) = \underline{v}(\underline{y}_2) \quad .$$

`c.q.d.` $\triangleleft$

Estos dos últimos teoremas (1.3.2 y 1.3.4) pueden ser enunciados en un espacio topológico general (Y, τ), aunque nosotros hemos preferido seguir considerando el espacio de objetivos como un subconjunto de $\mathbf{R}^n$, ya que será lo que aparezca en la práctica.

Por otra parte, al encontrarnos en un espacio métrico como es $\mathbf{R}^n$, la condición *D3* del teorema 1.3.2 puede ser expresada mediante las dos condiciones siguientes:

D3': $\mathcal{R}_{1P} \subset \mathcal{R}_1$

D3": Si $(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_1$ y $(\underline{y}_2, \underline{y}_3) \in \mathcal{R}_1$, $\exists \lambda, \mu \ \in (0,1)$ tal que

$$\begin{array}{rcl} (\lambda \underline{y}_1 + (1-\lambda)\underline{y}_3, \underline{y}_2) & \in & \mathcal{R}_1 \\ (\underline{y}_2, \mu \underline{y}_1 + (1-\mu)\underline{y}_3) & \in & \mathcal{R}_1 \ . \end{array}$$

Estas condiciones aparecen, bajo la terminología clásica de preferencia e indiferencia en el decisor $(\succ, \sim)$, en *Fishburn (1970)*. La relación entre *D3* y *D3'*

–D3" se recoge en *Yu (1985)*. La generalización de estas condiciones, cuando la estructura de preferencia es representada mediante una función de valor vectorial, aparece en *Ríos-Insúa (1980)*, también con la notación anterior.

Finalmente, observemos en el teorema 1.3.4 cómo la estructura de preferencia aquí definida, $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$, a pesar de definirse a partir de estructuras de preferencia completas, $\{(\mathcal{R}_{1i}, \mathcal{R}_{2i})\}_{i=1,\ldots,k}$, no es completa ($\mathcal{R}_{12}^c \neq \emptyset$).

De un modo más general, si tenemos una familia de estructuras de preferencia $\{(\mathcal{R}_{1i}, \mathcal{R}_{2i})\}_{i \in I}$ y definimos la estructura de preferencia $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ mediante

$$\mathcal{R}_1 = \bigcap_{i \in I} \mathcal{R}_{1i} \ , \ \mathcal{R}_2 = \bigcap_{i \in I} \mathcal{R}_{2i} \quad ,$$

no podemos extender este tipo de relaciones, mediante intersecciones, al caso de $\mathcal{R}_{12}^c$. Sólo podemos asegurar que

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{R}_{12i}^c \subset \mathcal{R}_{12}^c \quad .$$

1.4. CONJUNTOS EFICIENTES PARA UNA ESTRUCTURA DE PREFERENCIA

Hasta ahora, la información que proporciona el decisor sobre sus actitudes frente a un problema, ha sido recogida, por parte del analista, en lo que se ha llamado estructura de preferencia. En la sección 1.3 hemos dado teoremas que nos permiten representar dichas estructuras, relacionándolas, así, con la teoría del valor. Nos queda, ahora, utilizar esa información para obtener aquellas alternativas que sean óptimas a la persona que decide. Ésto nos lleva a dos definiciones de lo que, en términos generales, llamaremos **eficiencia**.

Definición 1.4.1 Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia en $Y \subset \mathbf{R}^n$. Diremos que $\underline{y}_0 \in Y$ es **un punto eficiente** [5] respecto de $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ en Y, si

$$\nexists \underline{y} \in Y \text{ tal que } (\underline{y}, \underline{y}_0) \in \mathcal{R}_1 \text{ , es decir, } \{\underline{y}_0 \prec\} = \emptyset \quad .$$

Esta condición se puede expresar de forma equivalente por

1. $\forall \underline{y} \in Y \ (\underline{y}, \underline{y}_0) \in \mathcal{R}_1^s \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_{12}^c$
2. $\forall \underline{y} \in Y \ (\underline{y}_0, \underline{y}) \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_{12}^c$
3. $\nexists \underline{y} \in Y \ /(\underline{y}_0, \underline{y}) \in \mathcal{R}_1^s$

Denominaremos **conjunto eficiente** al conjunto de todos los puntos eficientes respecto de $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ en Y. Se denotará por

$$\xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)) \quad .$$

En el ejemplo 1.1.12, una vez definida la estructura de preferencia $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$, tendríamos que

$$\xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)) = \{(a, b)\} \quad .$$

El concepto de conjunto eficiente juega, como es obvio, un papel central en los Problemas de Decisión Multiobjetivo y, aunque sus propiedades, características y representaciones son numerosas (ver, por ejemplo, *White (1982)*), nuestro interés se centrará en aquellas que nos permitan, a través de algoritmos, la determinación de dicho conjunto.

Trabajos en los que se encuentran desarrolladas propiedades de la eficiencia son, entre otros, *Coladas (1979), Hazen, Morin (1983)* y *Sawaragi et al. (1985)*.

Veamos ahora un concepto de eficiencia más restrictivo que el establecido en la definición 1.4.1 (ver *Chien et al. (1989)*)

[5]En la literatura aparece con otros nombre, como 'punto no dominado', 'optimal de Pareto', etc.

Definición 1.4.2 Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia en $Y \subset \mathbf{R}^n$. Diremos que $\underline{y}^* \in Y$ es **un punto eficiente estricto** respecto de $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ en Y, si

$$\nexists \underline{y} \in Y \text{ tal que } (\underline{y}, \underline{y}^*) \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_{12}^c \text{ , es decir, } \{y^* \prec ?\} = \emptyset \quad .$$

Igual que para la definición anterior, esta condición puede ser expresada de modo equivalente por

1. $\forall \underline{y} \in Y,\ (\underline{y}, \underline{y}^*) \in \mathcal{R}_1^s \cup \mathcal{R}_2$
2. $\forall \underline{y} \in Y,\ (\underline{y}^*, \underline{y}) \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$
3. $\nexists \underline{y} \in Y \ / \ (\underline{y}^*, \underline{y}) \in \mathcal{R}_1^s \cup \mathcal{R}_{12}^c$

Denominaremos **conjunto eficiente estricto** al conjunto de todos los puntos eficientes estrictos respecto de $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ en Y, y lo denotaremos por

$$\xi^*(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)) \quad .$$

Obsérvese, que los puntos eficientes estrictos son aquellos que no están dominados ($\{\underline{y} \prec\} = \emptyset$) y, además, no producen en el decisor la actitud de duda o indecisión (?) frente a otra alternativa.

En el ejemplo 1.1.12:

$$\xi^*(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)) = \emptyset \quad .$$

Los siguientes resultados nos relacionan los dos conjuntos eficientes definidos anteriormente.

Proposición 1.4.3 *Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia en $Y \subset \mathbf{R}^n$. Se verifica que*

$$\xi^*(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)) \subset \xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)) \quad .$$

La demostración se obtiene directamente de las definiciones

Proposición 1.4.4 *Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia completa en $Y \subset \mathbf{R}^n$. Se verifica que*

$$\xi^*(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)) = \xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)) \quad .$$

$\triangleright$Demostración Por la proposición 1.1.17.1, al ser completa $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$, se verifica que $\mathcal{R}_{12}^c = \emptyset$, luego

$$\forall\ \underline{y} \in Y,\ \{\underline{y}?\} = \emptyset \quad .$$

Sea $\underline{y} \in \xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2))$. Por definición, ésto es equivalente a que $\{\underline{y} \prec\} = \emptyset$, luego

$$\{\underline{y} \prec ?\} = \{\underline{y} \prec\} \cup \{\underline{y}?\} = \emptyset$$

y, por tanto,

$$\underline{y} \in \xi^*(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)) \quad .$$

c.q.d. $\triangleleft$

Obsérvese, que el orden lexicográfico origina una estructura de preferencia $(\mathcal{R}_{1L}, \mathcal{R}_{2L})$ (ejemplo 1.1.15.2) en donde $\xi^*(Y, (\mathcal{R}_{1L}, \mathcal{R}_{2L})) = \xi(Y, (\mathcal{R}_{1L}, \mathcal{R}_{2L}))$. Esta igualdad también se verifica para las estructuras de preferencia representadas por una función de valor escalar (definición 1.3.1).

Una localización inicial en Y de los dos conjuntos anteriores viene dada por los siguientes resultados.

Consideremos Y con la topología natural de $\mathbf{R}^n$

Proposición 1.4.5 *Sea* $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ *una estructura de preferencia en* Y*. Si* $\forall \underline{y}_0 \in Y$ $\{\underline{y}_0 \succsim\}$ *no es un entorno de* $\underline{y}_0$*, entonces*

$$\xi^*(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)) \subset \delta Y \quad .$$

$\triangleright$Demostración Consideremos $\underline{y}_0 \in \xi^*(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2))$, ya que si $\xi^*(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)) = \emptyset$ la afirmación sería evidente. Se verifica, entonces, que $\{\underline{y}_0 \prec ?\} = \emptyset$ (definición 1.4.2). Supongamos que $\underline{y}_0 \notin \delta Y$. Por tanto,

$$\underline{y}_0 \in \overset{\circ}{Y} \quad ,$$

es decir, podemos encontrar un entorno V de $\underline{y}_0$, tal que $\underline{y}_0 \in V \subset Y$. Como $\{\underline{y}_0 \succsim\} = Y$, al ser $\{\underline{y}_0 \prec ?\} = \emptyset$, resulta que $\underline{y}_0 \in V \subset \{\underline{y}_0 \succsim\}$, lo cual es absurdo. c.q.d. $\triangleleft$

Proposición 1.4.6 *Sea* $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ *una estructura de preferencia en* Y*. Si* $\forall \underline{y}_0 \in Y$, $\{\underline{y}_0 \succsim ?\}$ *no es un entorno de* $\underline{y}_0$*, entonces*

$$\xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)) \subset \delta Y \quad .$$

La demostración de este resultado es análoga a la del anterior.

Estas últimas proposiciones proceden de modificar ciertos resultados aparecidos en *Casares de Cal (1989)*, transcribiéndolos a la terminología de estructura de preferencia.

CONJUNTOS EFICIENTES PARA LA ESTRUCTURA DE PREFERENCIA ASOCIADA AL ORDEN DE PARETO

Veamos algunos resultados que nos permitirán el cálculo de conjuntos eficientes para este tipo de estructuras. Solucionamos, en primer lugar, el problema para el caso del conjunto eficiente estricto.

Proposición 1.4.7 *Sea $(\mathcal{R}_{1P}, \mathcal{R}_{2P})$ la estructura de preferencia asociada al orden de Pareto en $Y \subset \mathbf{R}^n$. Se verifica que*

$$\xi^*(Y, (\mathcal{R}_{1P}, \mathcal{R}_{2P})) = \emptyset \;\; \textit{ó} \;\; \xi^*(Y, (\mathcal{R}_{1P}, \mathcal{R}_{2P})) = \{\underline{y}^*\} \quad ,$$

donde $\underline{y}^* = (y_1^*, ..., y_n^*)$ se define como

$$y_i^* = \max_{\underline{y} \in Y} \; pr_i(\underline{y}), \;\; i = 1, ..., n$$

(pr_i representa la función proyección i–ésima en $\mathbf{R}^n$).

▷<u>Demostración</u> Supongamos que $\xi^*(Y, (\mathcal{R}_{1P}, \mathcal{R}_{2P})) \neq \emptyset$ y sea

$$\underline{y}_0 \equiv (y_{01}, ..., y_{0n}) \in \xi^*(Y, (\mathcal{R}_{1P}, \mathcal{R}_{2P})) \quad .$$

Entonces, por definición, $\{\underline{y}_0 \prec_P ?\} = \emptyset$.

Teniendo en cuenta cómo está definido $\mathcal{R}_{1P}^s$ y $\mathcal{R}_{12P}^c$ (ejemplo 1.1.15.1), $\forall \underline{y} \equiv (y_1, ..., y_n) \in Y$ se verifica $y_{0i} \geq y_i, \;\; i = 1, ..., n$. Por tanto

$$y_{0i} = \max_{\underline{y} \in Y} \; y_i = \max_{\underline{y} \in Y} \; \mathrm{pr}_i(\underline{y}) \quad ,$$

es decir $\underline{y}_0 = \underline{y}^*$, `c.q.d.` ◁

El punto $\underline{y}^*$ recibe el nombre de **punto ideal** o **punto utopía** para Y.

Introducimos la siguiente notación, que nos ayudará a enunciar las próximas proposiciones sobre la localización de conjuntos eficientes:

$$\begin{array}{rcl} \Lambda^{>} & = & \{\underline{d} \in \mathbf{R}^n / d_i > 0 \ i = 1, ..., n\} \\ \Lambda^{\geq} & = & \{\underline{d} \in \mathbf{R}^n / d_i \geq 0 \ i = 1, ..., n\} \backslash \{\underline{0}\} \\ \Lambda^{>=} & = & \{\underline{d} \in \mathbf{R}^n / d_i \geq 0 \ i = 1, ..., n\} \end{array}$$

Impongamos, además, la condición de que Y sea un conjunto cerrado [6].

Proposición 1.4.8 *Sea $(\mathcal{R}_{1P}, \mathcal{R}_{2P})$ la estructura de preferencia asociada al orden de Pareto en $Y \subset \mathbf{R}^n$. Se verifica que $\underline{y}_0 \in \xi(Y, (\mathcal{R}_{1P}, \mathcal{R}_{2P}))$ sii $\underline{y}_0$ es la única solución de algún programa de la forma*

$$\begin{array}{rl} & \text{máx}\, pr_i(\underline{y}) \\ s.a. & \underline{y} \in Y_i(\underline{y}_0) \end{array} \quad ,$$

donde

$$Y_i(\underline{y}_0) = \{\underline{y} \in Y / y_k \geq y_{0k}, \quad k \neq i, \ k = 1, ..., n\} \quad ,$$
$$\underline{y} \equiv (y_1, ..., y_n) \ e \ \underline{y}_0 \equiv (y_{01}, ..., y_{0n})$$

Proposición 1.4.9 *Sea $(\mathcal{R}_{1P}, \mathcal{R}_{2P})$ la estructura de preferencia asociada al orden de Pareto en $Y \subset \mathbf{R}^n$.*

1. *Si $\underline{y}_0 \in Y$ es solución de algún programa de la forma*

$$\begin{array}{rl} & \text{máx} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i pr_i(\underline{y}) \\ s.a. & \underline{y} \in Y \end{array} \quad ,$$

   siendo $\underline{\lambda} \equiv (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \Lambda^{>}$, entonces

$$\underline{y}_0 \in \xi(Y, (\mathcal{R}_{1P}, \mathcal{R}_{2P})) \quad .$$

[6] Esta condición es equivalente a decir que $\delta Y \subset Y$, lo cual es indispensable para que los conjuntos eficientes, estudiados en los siguientes resultados, no sean vacíos de partida a causa de las propiedades topológicas de Y.

2. Si $\underline{y}_0 \in Y$ *es la única solución de algún programa de la forma*

$$\begin{array}{rl} & \max \sum_{i=1}^{n} \lambda_i pr_i(y) \\ s.a. & \underline{y} \in Y \quad , \end{array}$$

siendo $\underline{\lambda} \equiv (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \Lambda^{\geq}$, *entonces*

$$\underline{y}_0 \in \xi(Y, (\mathcal{R}_{1P}, \mathcal{R}_{2P})) \quad .$$

Proposición 1.4.10 *Sea* $(\mathcal{R}_{1P}, \mathcal{R}_{2P})$ *la estructura de preferencia asociada al orden de Pareto en* $Y \subset \mathbf{R}^n$. *Se verifica:*

$$\underline{y}_0 \in \xi(Y, (\mathcal{R}_{1P}, \mathcal{R}_{2P}))$$

sii para algún $i \in \{1, ..., n\}$, *existen* $n-1$ *constantes*

$$r(i) = \{r_k / k \neq i \ k = 1, ..., n\} \quad ,$$

tales que $\underline{y}_0$ *es la solución única del programa:*

$$\begin{array}{rl} & \max pr_i(\underline{y}) \\ s.a. & \underline{y} \in Y(r(i)) \quad , \end{array}$$

siendo $\underline{y} \equiv (y_1, ..., y_n)$ *y* $Y(r(i)) = \{\underline{y} \in Y / y_k \geq r_k k \neq i, \ k = 1, ..., n\}$

Las demostraciones de estas tres últimas proposiciones se encuentran en *Yu (1985)* [7]. Los enunciados, en nuestro caso, han sido transcritos a la terminología de estructura de preferencia.

Obsérvese, que el problema de localizar el conjunto eficiente para la estructura de preferencia asociada al orden de Pareto, ha sido tratado en unas condiciones generales en cuanto al espacio de objetivos Y se refiere. En *Yu (1985)* se estudia la eficiencia en el orden de Pareto bajo ciertas condiciones particulares de Y, por ejemplo, distintas condiciones de convexidad, compacidad, etc. Éstas no son recogidas en esta memoria.

[7] Página 24, teoremas 3.4, 3.5 y 3.6 respectivamente.

CONJUNTOS EFICIENTES PARA ESTRUCTURAS DE PREFERENCIA REPRESENTADAS POR UNA FUNCIÓN DE VALOR ESCALAR

Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia en $Y \subset \mathbf{R}^n$ representada por una función de valor escalar

$$v : Y \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R} \quad .$$

Se observó anteriormente que, al ser $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ completa,

$$\xi^*(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)) = \xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)) \quad .$$

Se verifica el siguiente resultado.

Proposición 1.4.11 *Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia en $Y \subset \mathbf{R}^n$ representada por una función de valor escalar*

$$v : Y \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R} \quad .$$

$\underline{y}_0 \in \xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2))$ *sii* $\underline{y}_0$ *es solución del programa de la forma*

$$\begin{array}{rl} & \max v(\underline{y}) \\ s.a. & \underline{y} \in Y \quad , \end{array}$$

Su demostración es sencilla a partir de la definición de una estructura de preferencia representada por una función de valor escalar y del conjunto eficiente.

Este último programa es un problema de optimización clásico, para el que hay un buen número de métodos de solución.

CONJUNTOS EFICIENTES PARA LA ESTRUCTURA DE PREFERENCIA ASOCIADA AL ORDEN LEXICOGRÁFICO

Sea $(\mathcal{R}_{1L}, \mathcal{R}_{2L})$ la estructura de preferencia asociada al orden lexicográfico sobre $Y \subset \mathbf{R}^n$ (ejemplo 1.1.15.2). Al ser completa, se verifica, como en el caso anterior, que

$$\xi^*(Y, (\mathcal{R}_{1L}, \mathcal{R}_{2L})) = \xi(Y, (\mathcal{R}_{1L}, \mathcal{R}_{2L})) \quad .$$

El siguiente resultado soluciona, para este caso, el problema de localizar el conjunto eficiente.

Proposición 1.4.12 *$\underline{y}_0 \in \xi(Y, (\mathcal{R}_{1L}, \mathcal{R}_{2L}))$ sii $\underline{y}_0$ es solución de la familia de programas $\{P_k\}_{k=1}^n$, definidos de la siguiente forma:*

$$[P_k] \qquad \begin{array}{rl} & \max pr_k(\underline{y}) \\ s.a. & \underline{y} \in D_{k-1} \quad , \end{array}$$

siendo D_{k-1} las soluciones del programa P_{k-1} y $D_0 = Y$.

CONJUNTOS EFICIENTES PARA ESTRUCTURAS DE PREFERENCIAS CÓNICAS CONSTANTES

Para establecer condiciones necesarias y suficientes que caractericen estos conjuntos, vamos a imponer a P ser un cono poliédrico, tal que $Cl(P)$ sea apuntado (cono agudo) y su polar P^* esté generado por un conjunto finito de vectores $\{\underline{h}_1, ..., \underline{h}_r\} \in \mathbf{R}^n$. Definamos

$$Z = \{\underline{z} \in \mathbf{R}^r / \ \underline{z}^T = H\underline{y}^T \text{ siendo } \underline{y} \in Y\} \quad ,$$

donde H es la matriz de dimensión $r \times n$ que tiene en su fila k-ésima al vector $\underline{h}_k$.

El siguiente teorema se usará como punto de partida en resultados posteriores.

Teorema 1.4.13 *Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia cónica constante de cono P con las propiedades expuestas anteriormente.*

1. *$\underline{y}_0 \in \xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2))$ sii*

$$\underline{z}_0^T = H\underline{y}_0^T \in \xi(Z, (\mathcal{R}_{1P}, \mathcal{R}_{2P})) \quad ,$$

siendo $(\mathcal{R}_{1P}, \mathcal{R}_{2P})$ la estructura de preferencia asociada al orden de Pareto en $Z \subset \mathbf{R}^r$

2. $\underline{y}_0 \in \xi^*(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2))$ *sii*

$$(\underline{z}_0^*)^T = H\underline{y}_0^T \quad ,$$

donde $\underline{z}^* \equiv (z_1^*, ..., z_r^*)$ *es el punto ideal para* $Z \subset \mathbf{R}^r$*.*

$\triangleright$Demostración.

1. "$\Rightarrow$" Lo demostraremos por reducción al absurdo. Supongamos que $\underline{z}_0 \notin \xi(Z, (\mathcal{R}_{1P}, \mathcal{R}_{2P}))$. Existe , por tanto,

$$\underline{z} \in Z,\ \underline{z} \neq \underline{z}_0 /\ (\underline{z}, \underline{z}_0) \in \mathcal{R}_{1P} \quad .$$

Ésto es equivalente a decir que $\underline{z} \geq_P \underline{z}_0$, en donde $\geq_P$ representa la desigualdad en cada una de las componentes. Luego existe un elemento $\underline{y} \in Y$ tal que $H\underline{y}^T \geq_P H\underline{y}_0^T$, o lo que es lo mismo,

$$H(\underline{y} - \underline{y}_0)^T \geq_P \underline{0} \quad .$$

Ello significa que $\underline{y} - \underline{y}_0 \in P$, por definición de cono polar y de la matriz H. Por tanto,

$$\underline{y} \in \underline{y}_0 + P \quad ,$$

que es equivalente a decir

$$(\underline{y}, \underline{y}_0) \in \mathcal{R}_1 \quad ,$$

con lo cual $\{\underline{y}_0 \prec\} \neq \emptyset$, que es absurdo.
"$\Leftarrow$" Nuevamente, por reducción al absurdo, supongamos que $\underline{y}_0 \notin \xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2))$. Existe entonces $\underline{y}$, tal que $\underline{y} \in \{\underline{y}_0 \prec\}$, es decir, $\underline{y} - \underline{y}_0 \in P \backslash \{\underline{0}\}$. Por tanto, $H(\underline{y} - \underline{y}_0)^T \geq_P \underline{0}$, que expresado de otro modo nos dice que $H\underline{y}^T \geq_P H\underline{y}_0^T$. Por tanto

$$\underline{z}_0 \notin \xi(Z, (\mathcal{R}_{1P}, \mathcal{R}_{2P})) \quad ,$$

que es absurdo. `c.q.d.`

2. "$\Rightarrow$" Consideremos $\underline{y}_0 \in \xi^*(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2))$. Se verifica que $\{\underline{y}_0 \prec ?\} = \emptyset$, por tanto $\{\underline{y}_0 \succ\} = Y \backslash \Delta$. Podemos asegurar entonces que

$$\forall \underline{y} \neq \underline{y}_0 \quad \underline{y}_0 \in \underline{y} + P \quad ,$$

es decir,
$$H\underline{y}_0^T \geq_P H\underline{y}^T = \underline{z}^T \quad ,$$
por lo tanto
$$H\underline{y}_0^T = \underline{z}^{*T} \quad ,$$
siendo $\underline{z}^*$ el punto ideal en Z.
"$\Leftarrow$" Si $H\underline{y}_0^T = \underline{z}^{*T}$, siendo $\underline{z}^T$ punto ideal en Z, entonces
$$H\underline{y}_0^T \geq_P H\underline{y}^* \quad \forall \underline{y} \neq \underline{y}_0 \in Y \quad .$$
Por tanto $H(\underline{y} - \underline{y}_0)^T \geq_P \underline{0}^T$ y esto significa que
$$\underline{y}_0 - \underline{y} \in P \; \forall \underline{y} \in Y, \underline{y} \neq \underline{y}_0 \quad .$$
Concluimos así que $\underline{y}_0 \in \xi^*(y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2))$, pues $\{\underline{y}_0 \succ\} = Y \backslash \Delta$ y, por ello, $\{\underline{y}_0 \prec ?\} = \emptyset$ `c.q.d.` $\triangleleft$

Con este teorema, hemos solucionado el problema para conjuntos eficientes estrictos en estructuras cónicas constantes de preferencia, remitiéndonos al caso ya estudiado de estructuras de preferencias asociadas al orden de Pareto. Además, nos permite enunciar los próximos resultados para conjuntos eficientes, los cuales son análogos a los ya estudiados en el caso de estructuras de preferencia asociadas al orden de Pareto.

Proposición 1.4.14 *Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia cónica constante de cono P con las hipótesis impuestas inicialmente. Se verifica que*
$$\underline{y}_0 \in \xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2))$$
sii para algún $i \in \{1, ..., r\}$, $\underline{y}_0$ es solución única del programa
$$\begin{array}{rl} & \max \underline{h}_i \cdot \underline{y} \\ s.a. & \underline{y} \in Y_i(\underline{y}_0) \quad , \end{array}$$
siendo
$$Y_i(\underline{y}_0) = \{\underline{y} \in Y / \underline{h}_k \cdot \underline{y} \geq \underline{h}_k \cdot \underline{y}_0, \; k \neq i, \; k = 1, ..., r\} \quad .$$

Proposición 1.4.15 *Sea* $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ *una estructura de preferencia cónica constante en las condiciones anteriores.*

1. *Si* $\underline{y}_0 \in Y$ *maximiza* $\underline{\lambda} \cdot H\underline{y}^T$ *sobre* Y *para algún* $\underline{\lambda} \in \Lambda^{>} \subset \mathbf{R}^r$*, entonces*
$$\underline{y}_0 \in \xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2))$$

2. *Si* $\underline{y}_0 \in Y$ *es el único punto que maximiza la expresión* $\underline{\lambda} \cdot H\underline{y}^T$ *sobre* Y *para algún* $\underline{\lambda} \in \Lambda^{\geq}$*, entonces*
$$\underline{y}_0 \in \xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2))$$

Proposición 1.4.16 *Sea* $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ *una estructura de preferencia como en los enunciados anteriores. Una condición necesaria y suficiente para que* $\underline{y}_0 \in \xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2))$ *es que para algún* $i \in \{1, ..., r\}$ *existan* $r-1$ *constantes*
$$C(i) = \{c_k / k \neq i, \ k = 1, ..., r\} \quad ,$$
tal que $\underline{y}_0$ *sea solución única del programa*
$$\begin{array}{rl} & \max \underline{h}_i \cdot \underline{y} \\ s.a. & \underline{y} \in Y(C(i)) \quad , \end{array}$$
donde
$$Y(C(i)) = \{\underline{y} \in Y / y_k \geq c_k \ k \neq i, \ k = 1, ..., r\} \quad .$$

Las demostraciones de las proposiciones anteriores, no desarrolladas en este trabajo, utilizan el teorema 1.4.13 junto con las proposiciones 1.4.8, 1.4.9 y 1.4.10, respectivamente.

Si al construir una función de valor que represente una estructura de preferencia, se utilizase lo que en *Keeny* y *Raiffa (1976)* se denomina *tasa de intercambio*, la intuición nos lleva a eliminar aquellos puntos del espacio de objetivos que posean tasas no acotadas. Ésto origina el concepto de **punto propiamente eficiente**, introducido por *Kuhn y Tucker (1951)* y desarrollado, más adelante, por *Geoffrion (1968)* y *Benson (1977)*, entre otros. Nosotros no trataremos, sin embargo, dicho concepto en esta memoria.

En *Yu (1985)*, igual que ocurre para el orden de Pareto, se estudia la eficiencia en estructuras de preferencias cónicas constantes bajo ciertas condiciones particulares de Y (condiciones de compacidad, convexidad, ...) que, sin embargo, no hemos recogido en este estudio.

Finalmente, nos quedaría estudiar la eficiencia en casos más generales como en estructuras de preferencia inducida por una familia de conjuntos convexos, o en estructuras representadas por una función de valor vectorial . Este análisis se realizará, en la medida que corresponda, en el capítulo 2, dedicado a unas estructuras de preferencia más generales, como son las $\succ_{V-}$preferencias

Capítulo 2

Aproximaciones de estructuras de preferencia

Cuando en un proceso de decisión el conjunto de alternativas es muy numeroso (por ejemplo, un conjunto contínuo), obtener de modo exacto la estructura de preferencia que clasifique las actitudes del decisor es prácticamente imposible. Una primera solución al problema se describe en la sección 2.1 con las llamadas $\succ_V-$*preferencias* (definición 2.1.3). Éstas forman una clase particular de estructuras de preferencia cuya utilidad, en muchos casos, consiste en reemplazar a otras que no posean representación analítica, sea difícil de obtener o sea difícil de manejar. Es por ello por lo que son tratadas en este capítulo dedicado a la aproximación.

En la sección 2.2 se introduce el concepto más sencillo de *aproximación lineal*: una cuaterna de relaciones binarias cuya conexión entre ellas es aproximar, bajo ciertas condiciones de linealidad, a la cuaterna asociada a una estructura de preferencia. Las definiciones dadas en 2.2.5, 2.2.6 y 2.2.7 muestran las tres clases posibles de dichas aproximaciones: *las estructuras de aproximación lineal inferior, superior* y *local*, respectivamente.

La sección 2.3 analiza la relación existente entre estructuras de aproximación lineal y las $\succ_V-$preferencias, definidas al inicio del capítulo.

Finalmente, en las secciones 2.4 y 2.5, se describen las aproximaciones lineales a las $\succ_V-$preferencias, atendiendo a si el espacio de objetivos es $\mathbf{R}^2$ ó $\mathbf{R}^n$ $(n > 2)$, respectivamente.

2.1. ESTRUCTURAS DE PREFERENCIA REPRESENTADAS MEDIANTE FAMILIAS DE FUNCIONES ESCALARES: $\succ_{\mathbf{V}}-$PREFERENCIAS

En el primer capítulo se introdujo el concepto de *estructura de preferencia representada por una función de valor vectorial* $\underline{v}$ (definición 1.3.1). Éste puede ser un primer ejemplo de representación mediante una familia de funciones escalares, considerando como elementos de la familia a las componentes de $\underline{v}$.

En esta definición aparece como condición, que la dimensión del espacio vectorial donde está contenido el dominio de la función vectorial, n, sea mayor que la del espacio donde está contenido el rango, k. Ésto respeta el sentido histórico del concepto, utilizado por autores como los ya citados *Roberts, Ríos, Ríos–Insua, Skulimowsky,* etc. La función de valor vectorial aparece en aquellos problemas en los que el decisor no proporcina información suficiente como para poder representar sus preferencias mediante una función de valor escalar. Sin embargo, ésta puede utilizarse para remodelar, en cierto modo, el espacio de objetivos, logrando bajar su dimensión.

Podemos plantearnos la generalización de este concepto desde una motivación estrictamente teórica, utilizando para representar ciertas estructuras de preferencia familias de funciones escalares [1] cuyo cardinal no esté sometido a ningún tipo de restricción. La necesidad de dicha generalización vendrá también reforzada, ahora desde una perspectiva práctica, con los siguientes resultados y ejemplo enunciados a continuación.

Proposición 2.1.1 *Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia cónica constante en $\mathbf{R}^n$ de cono P , poliédrico y convexo. Sea $\{\underline{l}_1^*, ..., \underline{l}_p^*\}$ un conjunto minimal de generadores de P^*, siendo $\underline{l}_i^* = (l_{i1}^*, ..., l_{in}^*)$ $i = 1, ..., p$. Si llamamos $l_i(\underline{y})$ a la función lineal sobre $\mathbf{R}^n$ definida por*

$$l_i(\underline{y}) = l_{i1}^* y_1 + ... + l_{in}^* y_n \quad i = 1, ..., p$$

y $\underline{l}(\underline{y})$ a la función vectorial

[1] No hemos utilizado el término *función de valor vectorial*, pues, cuando $k \geq n$, esta terminología carece de sentido.

$$\underline{l}(\underline{y}) = (l_1(\underline{y})...l_p(\underline{y})) \quad ,$$

tendremos que:

$$\begin{array}{lcl} (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_1 & \Leftrightarrow & l_i(\underline{y}_1) \geq l_i(\underline{y}_2) \ \forall i = 1, ..., p \quad \textit{pero} \quad \underline{l}(\underline{y}_1) \neq \underline{l}(\underline{y}_2) \\ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_2 & \Leftrightarrow & l_i(\underline{y}_1) = l_i(\underline{y}_2) \end{array}$$

$\triangleright$Demostración. Por ser $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia cónica de cono P, se verifica:

$$(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_1 \Leftrightarrow \underline{y}_1 - \underline{y}_2 \in P \ \text{ pero } \ \underline{y}_2 - \underline{y}_1 \notin P \quad .$$

Ésto equivale a lo siguiente:

$$\underline{l}_i^* \cdot (\underline{y}_1 - \underline{y}_2) \geq 0 \ \ \forall i = 1, .., p$$

$$\Longleftrightarrow \underline{l}_i^* \cdot \underline{y}_1 \geq \underline{l}_i^* \cdot \underline{y}_2 \forall i = 1, ..., p \Longleftrightarrow l_i(\underline{y}_1) \geq l_i(\underline{y}_2)$$

$\forall i = 1, ..., p$. Sin embargo, $\underline{l}(\underline{y}_1) \neq \underline{l}(\underline{y}_2)$ pues $\underline{y}_2 - \underline{y}_1 \notin P$.

Por otro lado

$$(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_2 \Longleftrightarrow \underline{y}_1 - \underline{y}_2 \in P \text{ e } \underline{y}_2 - \underline{y}_1 \in P \quad .$$

Y esto, debido al razonamiento que se ha hecho anteriormente, equivale a que

$$\underline{l}(\underline{y}_1) = \underline{l}(\underline{y}_2) \quad ,$$

`c.q.d.` $\triangleleft$

Con este resultado, vemos la posibilidad de representar estructuras de preferencia cónicas constantes mediante familias de funciones escalares cuyo cardinal puede llegar a ser igual a la dimensión del espacio donde está contenido el conjunto de objetivos o consecuencias.

Veamos ahora un ejemplo adaptado de otro que aparece en *Yu (1985).*

Ejemplo 2.1.2 Un trabajador informa, ante la posibilidad de elegir entre varias ofertas de empleo, que no le importaría trabajar en domingo si le pagasen al menos \$ 50 por hora.

El analista, en este caso, construye el espacio de objetivos $Y \subset \mathbf{R}^2$, en donde, para cada $\underline{y} \equiv (y_1, y_2) \in Y$, y_1 representa el "tiempo de ocio" (en horas) e y_2 el "beneficio económico" (tomando como unidad los \$ 50). Veamos dos caminos diferentes a través de los cuales podremos concluir que la estructura de preferencia de dicho trabajador, sobre las ofertas de empleo, es una estructura cónica constante.

Primer camino

Vamos a describir aquí lo que usualmente se ha hecho con este tipo de problemas, sin utilizar, para ello, la terminología de estructura de preferencia [2]. El analista supone que las preferencias del decisor estarían representadas mediante una hipotética función de valor escalar desconocida v_0. La información de que dispone es insuficiente como para construir ésta. Sin embargo, le permite definir una familia V de funciones que la contendrá. A partir de V, se puede dar una 'aproximación'de las preferencias del decisor del siguiente modo (*Hazen (1988)*):

$$\underline{y}_1 \succ \underline{y}_2 \Leftrightarrow \ \forall v \in V \ v(\underline{y}_1) > v(\underline{y}_2), \quad \text{siendo} \ \ \underline{y}_1, \underline{y}_2 \in Y \quad .$$

Es decir, para representar la preferencia hacia $\underline{y}_1$, manifestada por el decisor una vez comparada con $\underline{y}_2$, que es equivalente a decir que $v_0(\underline{y}_1) > v_0(\underline{y}_2)$, imponemos esta condición a todos los elementos de V, ya que sabemos que $v_0 \in V$.

También podemos aproximar la indiferencia de la siguiente manera:

$$\underline{y}_1 \sim \underline{y}_2 \Longleftrightarrow \forall v \in V \ v(\underline{y}_1) = v(\underline{y}_2), \quad \text{siendo} \ \ \underline{y}_1, \underline{y}_1 \in Y \quad .$$

En nuestro caso, la información proporcionada por el trabajador llevaría a que la hipotética función de valor es aditiva. En base a ésto, dicha función sería del tipo

$$v_\lambda(\underline{y}) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \quad ,$$

[2] Así aparece tratado en *Yu (1985)*.

donde $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$ pertenece al cono

$$K = \{(\lambda_1, \lambda_2) : \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \geq 1 \ , \ \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0\} \quad .$$

De esta forma, la preferencia en Y vendría expresada por el siguiente orden cónico constante:

$$\underline{y_1} \succ \underline{y_2} \Leftrightarrow \forall v \in V \quad v(\underline{y_1}) > v(\underline{y_2}) \Leftrightarrow \underline{y}_1 - \underline{y}_2 \in K^* \quad .$$

Hazen (1988) estudia una generalización del problema, suponiendo para ello que V no definiese una preferencia representada por un orden cónico constante en Y. En el citado trabajo el autor consigue reducir el problema al caso cónico, sumergiendo a Y en un espacio de dimensión mayor que el original.

Obsérvese, que este primer camino utilizado no tendría fundamento, si en vez de considerar *preferencia* e *indiferencia* en el sentido clásico hubiésemos utilizado el concepto de *estructura de preferencia.*

En primer lugar, no podríamos suponer la existencia de una función de valor escalar v_0 que representase dicha estructura, pues sabemos (teorema 1.3.2), que la condición indispensable para ello es que $\mathcal{R}_{12}^c = \emptyset$ [3] (es decir, $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ completa), y ésto, en nuestro caso, no se verifica.

Por otra parte, en este supuesto, la duda o indecisión se manifiesta como la incapacidad de construir la función v_0, debida a una información insuficientemente extensa o detallada (*problemas con información parcial*). Sin embargo, la duda frente a alternativas, como componente de una estructura de preferencia ($\mathcal{R}_{12}^c$), es una actitud más, consciente o inconsciente, por parte del decisor, y por tanto, parte significativa dentro de la información proporcionada al analista.

El segundo camino para tratar el problema incorpora un concepto fundamental en nuestro estudio, como es la *estructura de preferencia.*

Segundo camino

En este caso, el analista fija un punto arbitrario $\underline{y}^0 = (y_1^0, y_2^0) \in Y$ e intenta extraer información acerca de las actitudes del decisor ante ese punto y el resto de las alternativas.

[3] $\{?\} = \emptyset$, *Chien et al. (1989).*

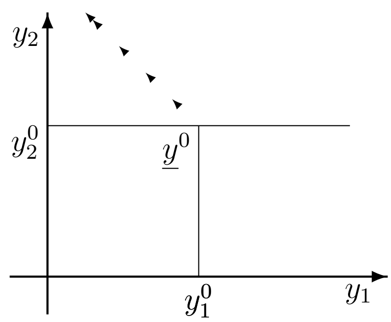


Figura 2.1:

En nuestro ejemplo, la información proporcionada por el trabajador nos lleva a que $\{\underline{y}^0 \prec\}$ es aproximadamente el conjunto que aparece subrayado en la figura 2.1.

Como la información que proporciona el trabajador es global y no depende del $\underline{y}_0$ tomado, tenemos que la aproximación del conjunto preferido es igual para todos los elementos del conjunto Y.

Del mismo modo, podemos representar la aproximación del conjunto *dominado* y *de duda* respecto de $\underline{y}_0$ mediante las figuras 2.2 y 2.3, respectivamente.

Para el *conjunto indiferente* tenemos que $\{\underline{y}^0 \sim\} = \{\underline{y}^0\}\ \forall \underline{y}^0 \in Y$.

A la vista de ésto, puede concluirse que la estructura de preferencia $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ del trabajador frente a las ofertas de empleo es cónica constante de cono

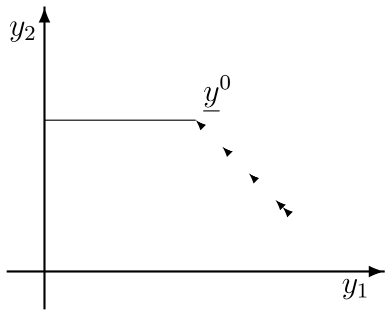
$$P = \{(d_1, d_2) \in \mathbf{R}^2 / d_2 \geq 0\ d_1 + d_2 \geq 0\} \quad .$$

Como $\{(0,1),(1,1)\}$ es un conjunto minimal de generadores de P^*, la proposición 2.1.1 nos dice que esta estructura de preferencia viene representada por la familia de funciones lineales

$$V = \{v_1, v_2\} \quad ,$$

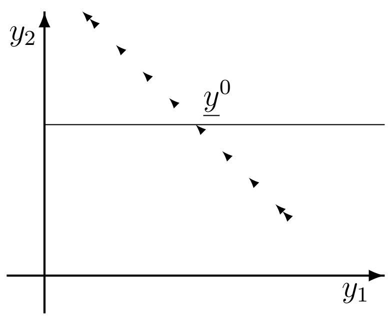
donde

$$\begin{array}{rlcc} v_1 : & Y \subset \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & (y_1, y_2) & \longrightarrow & y_2 \end{array} \qquad \begin{array}{rlcc} v_2 : & Y \subset \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & (y_1, y_2) & \longrightarrow & y_1 + y_2 \end{array} \quad .$$



$\{\underline{y}^0 \succ\}$

Figura 2.2:



$\{\underline{y}^0 ?\}$

Figura 2.3:

White (1972) estudia ciertas aproximaciones lineales a los conjuntos $\{\underline{y}^0 \succ\}$ e $\{\underline{y}^0? \sim\}$. Su estudio está basado en modificaciones a resultados aparecidos en los trabajos de *Luce (1956)* y *Aumann (1962)*. Sin embargo, desde nuestro punto de vista, algunas objeciones al trabajo de *White* son las siguientes:

1. No distingue entre las actitudes de *duda* e *indiferencia*. De hecho, engloba a ambas dentro de una relación binaria que denota por I.

2. Establece hipótesis restrictivas para las preferencias, con la finalidad de obtener aproximaciones lineales constantes. Así, al estar trabajando en $\mathbf{R}^2$, crea un par de familias de rectas paralelas (dos direcciones en $\mathbf{R}^2$), de forma que son las intersecciones de éstas las que aproximan a los conjuntos *preferentes, dominados* e *indecisos.*

3. Restringe su análisis exclusivamente a las aproximaciones lineales.

Posteriormente, *Yu (1974)* trata el problema de aproximaciones lineales mediante la terminología de *conos de direcciones de preferencia, de dominación e indiferencia* [4]. Este planteamiento se recogerá más adelante, en esta memoria, bajo la perspectiva de la estructura de preferencia, unificándolo, en cierta forma, con el estudio de *White.*

Obsérvese, que tanto en el resultado 2.1.1 como en el ejemplo 2.1.2, aparecen estructuras de preferencia representadas por una familia V de funciones. Ésto nos lleva a definir el próximo concepto, el cual puede ser considerado como una generalización de las estructuras de preferencia representadas por una función de valor vectorial.

Definición 2.1.3 Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia en $Y \subset \mathbf{R}^n$ y V una familia de funciones de clase $C^k(\mathbf{R}^n)$. Diremos que $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ es una $\succ_V-$ preferencia de clase k [5], si $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)_{\mathcal{R},\mathcal{S}}$, donde

$$\begin{array}{rcl} \underline{y}_1 \mathcal{R} \underline{y}_2 & \Leftrightarrow & v(\underline{y}_1) \geq v(\underline{y}_2) \ \forall v \in V \\ \underline{y}_1 \mathcal{S} \underline{y}_2 & \Leftrightarrow & v(\underline{y}_1) = v(\underline{y}_2) \ \forall v \in V \end{array} \ .$$

Un ejemplo de $\succ_V-$ preferencia es la estructura de preferencia asociada al orden Pareto en $\mathbf{R}^n$ $(\mathcal{R}_{1P}, \mathcal{R}_{2P})$, en donde $V = \{\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, ..., \mathrm{pr}_n\}$, siendo pr_i la proyección i-ésima en $\mathbf{R}^n$.

[4]En *Chien et al. (1989)* se amplía con direcciones de *indecisión.*

[5]Cuando sea de clase 1, se denominará simplemente $\succ_V-$ preferencia.

Las estructuras de preferencia cónicas constantes y aquellas que poseen una representación mediante una función de valor vectorial serán también $\succ_V-$ preferencias según se deduce de las consideraciones realizadas al principio del capítulo.

Obsérvese, que de la anterior definición se obtiene la siguiente relación directa entre la familia V y la cuaterna de relaciones binarias asociada a $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$.

Proposición 2.1.4 *Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una $\succ_V-$ preferencia en $Y \subset \mathbf{R}^n$. Se verifica que:*

$$\begin{array}{rcl}
\underline{y}_1 \mathcal{R}_1 \underline{y}_2 & \Leftrightarrow & v(\underline{y}_1) \geq v(\underline{y}_2)\ \forall v \in V\ \ y\ \exists v' \in V / v'(\underline{y}_1) > v'(\underline{y}_2) \\
\underline{y}_1 \mathcal{R}_1^s \underline{y}_2 & \Leftrightarrow & v(\underline{y}_1) \leq v(\underline{y}_2)\ \forall v \in V\ \ y\ \exists v' \in V / v'(\underline{y}_1) < v'(\underline{y}_2) \\
\underline{y}_1 \mathcal{R}_2 \underline{y}_2 & \Leftrightarrow & v(\underline{y}_1) = v(\underline{y}_2)\ \forall v \in V \\
\underline{y}_1 \mathcal{R}_{12}^c \underline{y}_2 & \Leftrightarrow & \exists v, v' \in V / v(\underline{y}_1) > v(\underline{y}_2)\quad y\quad v'(\underline{y}_1) < v(\underline{y}_2)
\end{array}$$

$\triangleright$Demostración Se obtiene de combinar las definiciones 1.1.8 y 2.1.3. $\triangleleft$

Antes de pasar al siguiente epígrafe, estudiemos ciertas relaciones binarias que pueden definirse en el conjunto de estructuras de preferencia sobre un espacio de objetivos Y. Éstas constituirán una herramienta útil en posteriores resultados.

RELACIONES ENTRE ESTRUCTURAS DE PREFERENCIA

Dado un espacio de objetivos $Y \subset \mathbf{R}^n$, denotaremos por E_Y al conjunto de todas las estructuras de preferencia sobre Y.

Dadas $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ y $(\mathcal{R}_1', \mathcal{R}_2')$ pertenecientes a E_Y, tendremos:

Definición 2.1.5 Se dice que $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ es más fina que $(\mathcal{R}_1', \mathcal{R}_2')$ y se representará por $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) >>_Y (\mathcal{R}_1', \mathcal{R}_2')$ cuando

$$\mathcal{R}_1 \supset \mathcal{R}_1' \text{ y } \mathcal{R}_2 \supseteq \mathcal{R}_2' \quad .$$

A partir de esta definición, obtenemos el siguiente resultado de fácil demostración:

Proposición 2.1.6 *Si* $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) >>_Y (\mathcal{R}'_1, \mathcal{R}'_2)$*, entonces* $\mathcal{R}'^c_{12} \supset \mathcal{R}^c_{12}$.

Una estructura de preferencia será por tanto más fina que otra, cuando el decisor *dude menos* y, además, cometa *menos incoherencias* en sus juicios.

Proposición 2.1.7

1. $>>_Y$ *es un orden parcial estricto en* E_Y.
2. *Si* $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ *es una estructura de preferencia en* Y *completa, entonces es un elemento maximal de* $>>_Y$ *en* E_Y.

$\triangleright$Demostración

1. $>>_Y$ es irreflexiva, por serlo la relación de inclusión $\subset$.

   Por otro lado, es transitiva, pues $\subset$ y $\subseteq$ también lo son.

2. Supongamos que $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) \in E_Y$ es completa.

   Si existiese $(\mathcal{R}'_1, \mathcal{R}'_2)$ tal que

   $$(\mathcal{R}'_1, \mathcal{R}'_2) >>_Y (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) \quad ,$$

   entonces $\mathcal{R}'^c_{12} = \emptyset$, pues, por 2.1.6, $\mathcal{R}'^c_{12} \subset \mathcal{R}^c_{12} = \emptyset$. Por tanto, $(\mathcal{R}'_1, \mathcal{R}'_2)$ es completa:

   $$\mathcal{R}'_1 \cup \mathcal{R}'^s_1 \cup \mathcal{R}'_2 = Y \times Y \quad .$$

   Si $(\mathcal{R}'_1, \mathcal{R}'_2) >>_Y (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$, entonces, por definición,

   $$\mathcal{R}'_1 \supset \mathcal{R}_1 \;\text{ y }\; \mathcal{R}'_2 \supseteq \mathcal{R}_2 \quad .$$

   . Sin embargo, ésto es absurdo, pues, al ser $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ completa,

   $$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}^s_1 \cup \mathcal{R}_2 = Y \times Y \quad .$$

   Luego no puede existir $(\mathcal{R}'_1, \mathcal{R}'_2)$ en esas condiciones.

c.q.d. ◁

Al conjunto $E_{\mathbf{R}^n}$ le llamaremos **conjunto de estructuras globales de preferencia**.

Podemos definir en $E_{\mathbf{R}^n}$ la siguiente relación de equivalencia:

$$(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) \sim_Y (\mathcal{R}'_1, \mathcal{R}'_2) \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{R}_1 \cap (Y \times Y) = \mathcal{R}'_1 \cap (Y \times Y) \text{ y } \mathcal{R}_2 \cap (Y \times Y) = \mathcal{R}'_2 \cap (Y \times Y)$$

Proposición 2.1.8 *Entre el conjunto cociente $E_{\mathbf{R}^n}/\!\sim_Y$ y E_Y existe una biyección que los identifica como conjuntos.*

▷Demostración Definamos una aplicación f de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl} f : E_{\mathbf{R}^n}/\!\sim_Y & \longrightarrow & E_Y \\ [(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)] & \longrightarrow & (\mathcal{R}_1 \cap (Y \times Y), \mathcal{R}_2 \cap (Y \times Y)) \end{array}$$

- f está bien definida,

  pues $(\mathcal{R}_1 \cap (Y \times Y), \mathcal{R}_2 \cap (Y \times Y))$ es una estructura de preferencia sobre Y (verifica *E1, E2, E3, E4* y *E5*), al ser $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia en $\mathbf{R}^n$

- f es inyectiva:

  Si $f([(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)]) = f([(\mathcal{R}'_1, \mathcal{R}'_2)])$ entonces

  $$\mathcal{R}_1 \cap (Y \times Y) = \mathcal{R}'_1 \cap (Y \times Y)$$

  y

  $$\mathcal{R}_2 \cap (Y \times Y) = \mathcal{R}'_2 \cap (Y \times Y) \quad ,$$

  luego

  $$(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) \sim_Y (\mathcal{R}'_1, \mathcal{R}'_2)$$

  y ésto significa que

  $$[(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)] = [(\mathcal{R}'_1, \mathcal{R}'_2)] \quad .$$

- f es sobreyectiva:
  Dada $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) \in E_Y$, definimos $(\mathcal{R}_1^0, \mathcal{R}_2^0)$ en $E_{\mathbf{R}^n}$ como sigue:
  $\mathcal{R}_1^0 = \mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2^0 = \mathcal{R}_2 \cup \Delta$, siendo Δ la diagonal de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

  Se verifica que
  $$f[(\mathcal{R}_1^0, \mathcal{R}_2^0)] = (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) \quad .$$

`c.q.d.` $\triangleleft$

A partir de ahora nuestros objetivos serán los siguientes: por una parte, construir aproximaciones lineales a una $\succ_V -$ preferencia. Por otra, lo que podría ser el problema recíproco, dadas ciertas aproximaciones lineales a una estructura de preferencia, estudiar la posibilidad de construir la familia V que defina a ésta como una $\succ_V -$ preferencia.

Veamos, previamente, qué se entiende por aproximación lineal.

2.2. APROXIMACIONES LINEALES A ESTRUCTURAS DE PREFERENCIA

Dado dos puntos $\underline{y}_0, \underline{y}_1 \in Y$, si se verifica que $(\underline{y}_0, \underline{y}_1) \in \mathcal{R}_1$, podría considerarse la dirección $\underline{d} = \underline{y}_1 - \underline{y}_0$ como buena para hallar puntos preferidos a $\underline{y}_0$. Un razonamiento similar puede hacerse con cualquiera de las relaciones binarias que forman la cuaterna asociada a una estructura de preferencia. Ésto nos lleva a la siguientes definiciones:

Definiciones 2.2.1 Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) \in E_Y$ y $(\mathcal{R}_1^0, \mathcal{R}_2^0)$ un representante de la clase de equivalencia
$$f^{-1}((\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)) \in E_{\mathbf{R}^n}/\sim_Y \quad .$$
Dado $\underline{y}_0 \in Y$ y $\underline{d} \in \mathbf{R}^n$, tal que $\underline{d} \neq \underline{0}$

1. Se dice que $\underline{d}$ es una **dirección global de preferencia en** $\underline{y}_0$, si $\forall \alpha > 0$
   $$(\underline{y}_0 + \alpha \underline{d}, \underline{y}_0) \in \mathcal{R}_1^0 \quad .$$
   Al conjunto de todas las direcciones globales de preferencia en $\underline{y}_0$ se le llama **cono de preferencia** y se denota por $P(\underline{y}_0)$

2. Se dice que $\underline{d}$ es una **dirección local de preferencia en $\underline{y}_0$**, si existe $\alpha_1 \in \mathbf{R}$, tal que $\forall\alpha,\ 0 < \alpha < \alpha_1$, se verifica que
$$(\underline{y}_0 + \alpha\underline{d}, \underline{y}_0) \in \mathcal{R}_1^0 \quad .$$
Al conjunto de todas las direcciones locales de preferencia en $\underline{y}_0$ se le llama **cono de preferencia local** y se denota por $LP(\underline{y}_0)$.

3. Se dice que $\underline{d}$ es una **dirección global de dominio en $\underline{y}_0$**, si $\forall\alpha > 0$
$$(\underline{y}_0 + \alpha\underline{d}, \underline{y}_0) \in (\mathcal{R}_1^0)^s \quad .$$
Al conjunto de todas las direcciones globales de dominio en $\underline{y}_0$ se le llama **cono de dominación global** y se denota por $D(\underline{y}_0)$.

4. Se dice que $\underline{d}$ es una **dirección local de dominio en $\underline{y}_0$**, si existe $\alpha_2 \in \mathbf{R}$, tal que $\forall\alpha,\ 0 < \alpha < \alpha_2$, se verifica que
$$(\underline{y}_0 + \alpha\underline{d}, \underline{y}_0) \in (\mathcal{R}_1^0)^s \quad .$$
Al conjunto de todas las direcciones locales de dominio en $\underline{y}_0$ se le llama **cono de dominación local** y se denota por $LD(\underline{y}_0)$.

5. Se dice que $\underline{d}$ es una **dirección global de indiferencia en $\underline{y}_0$**, si $\forall\alpha > 0$
$$(\underline{y}_0 + \alpha\underline{d}, \underline{y}_0) \in \mathcal{R}_2^0 \quad .$$
Al conjunto de todas las direcciones globales de indiferencia en $\underline{y}_0$ se le llama **cono de indiferencia global** y se denota por $I(\underline{y}_0)$.

6. Se dice que $\underline{d}$ es una **dirección local de indiferencia en $\underline{y}_0$**, si existe $\alpha_3 \in \mathbf{R}$, tal que $\forall\alpha,\ 0 < \alpha < \alpha_3$, se verifia que
$$(\underline{y}_0 + \alpha\underline{d}, \underline{y}_0) \in \mathcal{R}_2^0 \quad .$$
Al conjunto de todas las direcciones locales de indiferencia en $\underline{y}_0$ se le llama **cono de indiferencia local** y se denota por $LI(\underline{y}_0)$.

7. Se dice que $\underline{d}$ es una **dirección global de duda en** $\underline{y}_0$, si $\forall\alpha > 0$

$$(\underline{y}_0 + \alpha\underline{d}, \underline{y}_0) \in (\mathcal{R}^0_{12})^c \quad .$$

Al conjunto de todas las direcciones globales de duda en $\underline{y}_0$ se le llama **cono de duda global** y se denota por $DD(\underline{y}_0)$.

8. Se dice que $\underline{d}$ es una **dirección local de duda para** $\underline{y}_0$, si existe $\alpha_4 \in \mathbf{R}$, tal que $\forall\alpha,\ 0 < \alpha < \alpha_4$, se verifica que

$$(\underline{y}_0 + \alpha\underline{d}, \underline{y}_0) \in (\mathcal{R}^0_{12})^c \quad .$$

Al conjunto de todas las direcciones locales de duda en $\underline{y}_0$ se le llama **cono de duda local** y se denota por $LDD(\underline{y}_0)$.

Las definiciones anteriores han sido formuladas respecto a la estructura global de preferencia $(\mathcal{R}^0_1, \mathcal{R}^0_2)$, y no a la $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$, para no tener problemas cuando el conjunto Y sea discreto o cerrado.

En *Chien et al. (1989)*, ésto se soluciona definiendo un conjunto abierto $Y^0 \supset Y$ sobre el cual se establecen *la preferencia, la indiferencia* y *la duda* (estos términos utilizados en el sentido clásico). Sin embargo, cualquier tipo de acotación de Y^0, como 'tener diámetro finitoó 'estar contenido en un semiespacio', afectaría a las definiciones allí expuestas. Es por ello, por lo que se ha preferido transcribir éstas, a la terminología de estructura de preferencia (definición 2.2.1), considerando $Y^0 = \mathbf{R}^n$.

Veamos algunos ejemplos ilustrativos de estos últimos conceptos

Ejemplo 2.2.2 $\boxed{\mathbf{A}}$ Supongamos el caso hipotético de una estructura de preferencia $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ sobre $\mathbf{R}^2$ representada por la siguiente función de valor escalar:

$$\begin{array}{rcl} v : \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \underline{y} & \longrightarrow & \|\underline{y} - \underline{y}^*\|_2 \end{array} \quad ,$$

donde $\underline{y}^* = (y^*_1, y^*_2)$ es un punto fijo de $\mathbf{R}^2$.

Al ser $\mathcal{R}^c_{12} = \emptyset$, pues $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ es completa, tendremos que

$$DD(\underline{y}_0) = LDD(\underline{y}_0) = \emptyset \ \forall\underline{y}_0 \in \mathbf{R}^2 \quad (Y^0 = \mathbf{R}^2) \quad .$$

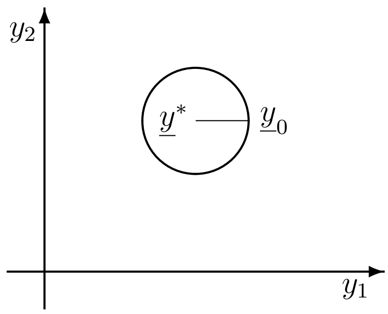


Figura 2.4:

Por otra parte, el conjunto indiferente para un punto $\underline{y}_0 \in \mathbf{R}^2$ será una circunferencia (ver figura 2.4) con centro en $\underline{y}^*$ y radio $\|\underline{y}_0 - \underline{y}^*\|_2$. Ésto se expresa analíticamente por

$$\{\underline{y}_0 \sim\} = \{\underline{y} \in \mathbf{R}^2 / \|\underline{y} - \underline{y}^*\|_2 = \|\underline{y}_0 - \underline{y}^*\|_2\} \quad .$$

Así, los conos de direcciones indiferentes serán

$$I(\underline{y}_0) = LI(\underline{y}_0) = \{(0,0)\} \quad \forall \underline{y}_0 \in \mathbf{R}^2 \quad .$$

Finalmente, los conos restantes verifican lo siguiente: $\forall\ \underline{y}_0 \in \mathbf{R}^2$,

$$\begin{aligned}
P(\underline{y}_0) &= LP(\underline{y}_0) = \{(d_1, d_2) \in \mathbf{R}^2 / (y_{01} - y_1^*)(d_1 - y_{01}) + \\
&\quad (y_{02} - y_2^*)(d_2 - y_{02}) \geq 0\} \backslash \{(0,0)\}, \quad \text{siendo} \\
&\quad \underline{y}_0 = (y_{01}, y_{02}) \;\; \text{e} \;\; \underline{y}^* = (y_1^*, y_2^*) \\
D(\underline{y}_0) &= \emptyset \\
LD(\underline{y}_0) &= -P(\underline{y}_0) = -LP(\underline{y}_0)
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{B}}$ Para $(\mathcal{R}_{1P}, \mathcal{R}_{2P})$, estructura de preferencia asociada al orden de Pareto en $\mathbf{R}^n$, tendremos $\forall \underline{y}_0 \in \mathbf{R}^n$ que

$$\begin{aligned}
P(\underline{y}_0) = LP(\underline{y}_0) &= \{\underline{d} \in \mathbf{R}^n / d_i \geq 0 \ i = 1, ..., n \ \} \backslash \{(0,0)\} = \Lambda^{\geq} \\
D(\underline{y}_0) = LD(\underline{y}_0) &= -\Lambda^{\geq} \\
I(\underline{y}_0) = LI(\underline{y}_0) &= \{(0, ..., 0)\} \\
DD(\underline{y}_0) = LDD(\underline{y}_0) &= \{\underline{d} \in \mathbf{R}^n / \exists i, j \text{ verificando } d_i > 0 \ \text{ y } \ d_j < 0\} = \\
&\quad (\Lambda^{\geq} \cup -\Lambda^{\geq} \cup \{(0, ..., 0)\})^c \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{C}}$ Para $(\mathcal{R}_{1L}, \mathcal{R}_{2L})$, estructura de preferencia asociada al orden lexicográfico en $\mathbf{R}^n$, tendremos $\forall \underline{y}_0 \in \mathbf{R}^n$ que

$$\begin{aligned}
P(\underline{y}_0) = LP(\underline{y}_0) &= \{\underline{d} \in \mathbf{R}^n / d_1 > 0 \text{ ó } (d_j = 0 \ j < l, d_l > 0), \\
&\quad l = 2, ..., n\} \\
D(\underline{y}_0) = LD(\underline{y}_0) &= -P(\underline{y}_0) = -LP(\underline{y}_0) \\
I(\underline{y}_0) = LI(\underline{y}_0) &= \{(0, ..., 0)\} \\
DD(\underline{y}_0) = LDD(\underline{y}_0) &= \emptyset \ .
\end{aligned}$$

Obsérvese, que los conos definidos en 2.2.1 no tienen por que ser convexos. De hecho, $DD(\underline{y}_0)$, para la estructura de preferencia $(\mathcal{R}_{1P}, \mathcal{R}_{2P})$ en $\mathbf{R}^n$, no es convexo.

Los conos globales verifican la siguiente propiedad de aproximación.

Proposición 2.2.3 *Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia en $Y \subset \mathbf{R}^n$. $\forall \underline{y}_0 \in Y$ se verifican las siguientes inclusiones:*

$$\begin{array}{ll}
(\underline{y}_0 + P(\underline{y}_0)) \cap Y \subset \{\underline{y}_0 \prec\} & (\underline{y}_0 + I(\underline{y}_0)) \cap Y \subset \{\underline{y}_0 \sim\} \\
(\underline{y}_0 + D(\underline{y}_0)) \cap Y \subset \{\underline{y}_0 \succ\} & (\underline{y}_0 + DD(\underline{y}_0)) \cap Y \subset \{\underline{y}_0 ?\}
\end{array}$$

$\triangleright$<u>Demostración</u> Sea $\underline{y} \in (\underline{y}_0 + P(\underline{y}_0)) \cap Y$. Ésto significa que $\underline{y} = \underline{y}_0 + \underline{d}$, donde $\underline{d} \in P(\underline{y}_0)$. Por definición de $P(\underline{y}_0)$, se verifica que

$$(\underline{y}, \underline{y}_0) \in \mathcal{R}_1^0 \cap (Y \times Y) = \mathcal{R}_1 \quad ,$$

luego $\underline{y} \in \{\underline{y}_0 \prec\}$. Para el resto de expresiones se utilizará el mismo razonamiento. `c.q.d.` $\triangleleft$

Para los conos locales no existen expresiones generales de este tipo.

Obsérvese, que en los tres ejemplos de 2.2.2 se verifica que

$$I(\underline{y}_0) = \underline{0} \quad \forall \underline{y}_0 \in \mathbf{R}^n \quad .$$

Vamos a enunciar un resultado que describe este tipo de conos para un caso particular de $\succ_V -$ preferencia.

Teorema 2.2.4 *Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una $\succ_V -$preferencia de clase k en $\mathbf{R}^n$, siendo V una familia de cardinal finito. Si en $\underline{y}_0 \in \mathbf{R}^n$ se verifica que $I(\underline{y}_0) \neq \{(0,...,0)\}$, entonces, $\underline{y}_0 + I(\underline{y}_0)$ está constituido por todas las rectas, contenidas en la variedad diferenciable $\{\underline{y}_0 \sim\}$, que pasan por $\underline{y}_0$.*

$\triangleright$Demostración En primer lugar, veamos que $\{\underline{y}_0 \sim\}$ es una variedad diferenciable.

Por definición de $\{\underline{y}_0 \sim\}$ y de $\succ_V -$preferencia, si $V = \{v_1, ..., v_k\}$, tendremos que:

$$\{\underline{y}_0 \sim\} = \{\underline{y} \in \mathbf{R}^n / v_i(\underline{y}) = v_i(\underline{y}_0) \ i = 1, ..., n\} \quad ,$$

es decir, tenemos la ecuación implícita de una variedad diferenciable de clase k en $\mathbf{R}^n$.

Al ser $I(\underline{y}_0) \neq \{(0,...,0)\}$, el cono $I(\underline{y}_0)$ está constituido por rectas que pasan por $(0,...,0)$, luego $\underline{y}_0 + I(\underline{y}_0)$ son rectas que pasan por $\underline{y}_0$.

Como, por 2.2.3, $\underline{y}_0 + I(\underline{y}_0) \subset \{\underline{y}_0 \sim\}$, queda demostrado el teorema. $\triangleleft$.

Otra consideración, basada en la definición 2.2.1 y constatada con los ejemplos, es que no siempre se dan relaciones como

$$P(\underline{y}_0) = -D(\underline{y}_0) \quad D(\underline{y}_0) = LD(\underline{y}_0) \quad , \text{etc} \quad .$$

Algunas de estas relaciones algebraicas serán estudiadas más adelante en el caso particular de las $\succ_V -$preferencias.

Veamos ahora qué se entiende por *aproximación lineal* de una estructura de preferencia general.

Definición 2.2.5 Sean $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) \in E_Y$ y $(\mathcal{R}_1^0, \mathcal{R}_2^0) \in E_{\mathbf{R}^n}$, en las condiciones de la definición 2.2.1. Se denomina **estructura de aproximación**

lineal inferior de $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ a una cuaterna de relaciones binarias en $\mathbf{R}^n$, (L_1, L_2, L_3, L_4), definida por

$$L_1 = \bigcup_{\substack{\underline{y}_0 \in Y \\ \underline{d} \in P(\underline{y}_0) \\ \alpha > 0}} \{(\underline{y}_0 + \alpha \underline{d}, \underline{y}_0)\} \qquad L_2 = \bigcup_{\substack{\underline{y}_0 \in Y \\ \underline{d} \in D(\underline{y}_0) \\ \alpha > 0}} \{(\underline{y}_0 + \alpha \underline{d}, \underline{y}_0)\}$$

$$L_3 = \bigcup_{\substack{\underline{y}_0 \in Y \\ \underline{d} \in I(\underline{y}_0) \\ \alpha > 0}} \{(\underline{y}_0 + \alpha \underline{d}, \underline{y}_0)\} \qquad L_4 = \bigcup_{\substack{\underline{y}_0 \in Y \\ \underline{d} \in DD(\underline{y}_0) \\ \alpha > 0}} \{(\underline{y}_0 + \alpha \underline{d}, \underline{y}_0)\}$$

Definición 2.2.6 Bajo las mismas hipótesis de 2.2.5, denominaremos **estructura de aproximación lineal inferior de** $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ a una cuaterna de relaciones binarias en $\mathbf{R}^n$, (L'_1, L'_2, L'_3, L'_4), definidas por

$$L'_1 = \bigcup_{\substack{\underline{y}_0 \in Y \\ \underline{d} \in K_1(\underline{y}_0) \\ \alpha > 0}} \{(\underline{y}_0 + \alpha \underline{d}, \underline{y}_0)\} \qquad L'_2 = \bigcup_{\substack{\underline{y}_0 \in Y \\ \underline{d} \in K_2(\underline{y}_0) \\ \alpha > 0}} \{(\underline{y}_0 + \alpha \underline{d}, \underline{y}_0)\}$$

$$L'_3 = \bigcup_{\substack{\underline{y}_0 \in Y \\ \underline{d} \in K_3(\underline{y}_0) \\ \alpha > 0}} \{(\underline{y}_0 + \alpha \underline{d}, \underline{y}_0)\} \qquad L'_4 = \bigcup_{\substack{\underline{y}_0 \in Y \\ \underline{d} \in K_4(\underline{y}_0) \\ \alpha > 0}} \{(\underline{y}_0 + \alpha \underline{d}, \underline{y}_0)\}$$

en donde para cada $\underline{y}_0 \in Y$, $K_1(\underline{y}_0), K_2(\underline{y}_0), K_3(\underline{y}_0)$ y $K_4(\underline{y}_0)$ son los siguientes conos:

$$\begin{aligned}
K_1(\underline{y}_0) &= \{\underline{d} \in \mathbf{R}^n / \ \exists \alpha' > 0 \ \text{ verificando que} \\
&\quad\ (\underline{y}_0 + \alpha' \underline{d}, \underline{y}_0) \in \mathcal{R}_1\} \\
K_2(\underline{y}_0) &= \{\underline{d} \in \mathbf{R}^n / \ \exists \alpha' > 0 \ \text{ verificando que} \\
&\quad\ (\underline{y}_0 + \alpha' \underline{d}, \underline{y}_0) \in \mathcal{R}_1^s\} \\
K_3(\underline{y}_0) &= \{\underline{d} \in \mathbf{R}^n / \ \exists \alpha' > 0 \ \text{ verificando que} \\
&\quad\ (\underline{y}_0 + \alpha' \underline{d}, \underline{y}_0) \in \mathcal{R}_2\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
K_4(\underline{y}_0) &= \{\underline{d} \in \mathbf{R}^n / \ \exists \alpha' > 0 \ \text{ verificando que} \\
&\quad (\underline{y}_0 + \alpha' \underline{d}, \underline{y}_0) \in \mathcal{R}_{12}^c\}
\end{aligned}
$$

En estas definiciones se han usado los términos 'aproximación'y 'lineal', que justificamos a continuación.

Proposición 2.2.7 *Bajo las mismas hipótesis de 2.2.5, si* (L_1, L_2, L_3, L_4) *y* (L'_1, L'_2, L'_3, L'_4) *son las estructuras de aproximación lineal inferior y superior de* $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$*, respectivamente, se verifica que*

$$
\begin{array}{ll}
L_1 \cap (Y \times Y) \subseteq \mathcal{R}_1 \subseteq L'_1 \cap (Y \times Y) & L_2 \cap (Y \times Y) \subseteq \mathcal{R}_1^s \subseteq L'_2 \cap (Y \times Y) \\
L_3 \cap (Y \times Y) \subseteq \mathcal{R}_2 \subseteq L'_3 \cap (Y \times Y) & L_4 \cap (Y \times Y) \subseteq \mathcal{R}_{12}^c \subseteq L'_4 \cap (Y \times Y)
\end{array}
$$

Estas cuatro relaciones las expresaremos, a partir de ahora, de forma compacta, por

$$
(L_1, L_2, L_3, L_4) << (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1^s, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_{12}^c) << (L'_1, L'_2, L'_3, L'_4)
$$

$\triangleright$Demostración En primer lugar, veamos las inclusiones inferiores.
Sea $(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in L_1 \cap (Y \times Y)$. Por ser $(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in L_1$, tendremos que

$$
\underline{d} = \underline{y}_1 - \underline{y}_2 \in P(\underline{y}_2) \quad ,
$$

con lo cual $\underline{y}_1 \in (\underline{y}_2 + P(\underline{y}_2)) \cap Y$. Aplicando la proposición 2.2.3, se obtiene que $\underline{y}_1 \in \{\underline{y}_2 \prec\}$. Por tanto, $(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_1$.

Hemos demostrado que $L_1 \cap (Y \times Y) \subset \mathcal{R}_1$. El resto de inclusiones inferiores se demuestran de modo análogo.

Veamos ahora las inclusiones superiores.

Sea $(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_1$. Ésto nos dice que $(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in Y \times Y$. Habrá que ver por tanto que $(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in L'_1$ o, equivalentemente, que

$$
\underline{d} = \underline{y}_1 - \underline{y}_2 \in K_1(\underline{y}_2) \quad .
$$

Ello se obtiene tomando $\alpha' = 1$

El resto de inclusiones superiores se demuestra con un argumento análogo.
`c.q.d.` $\triangleleft$

Proposición 2.2.8 *Bajo las mismas hipótesis de 2.2.5, si* (L_1, L_2, L_3, L_4) *y* (L'_1, L'_2, L'_3, L'_4) *son las aproximaciones lineales superior e inferior de* $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$*, se verifica que:*

$$\mathbf{P(1)} \qquad Si\ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in L_i\ (\ ó\ \ L'_i)\ \ i = 1, ..., 4 \Rightarrow$$

$$(\underline{y}, \underline{y}_2) \in L_i\ (\ ó\ \ L'_i)\ \ i = 1, ..., 4\ \ ,$$

para cada $\underline{y} \in \{\underline{y}_2 + \alpha(\underline{y}_1 - \underline{y}_2), \alpha > 0\}$*, semirrecta de origen* $\underline{y}_2$ *y dirección* $\underline{d} = \underline{y}_1 - \underline{y}_2$.

$\triangleright$Demostración Es consecuencia directa de las definiciones de L_i y L'_i, $i = 1, ..., 4$. $\triangleleft$

La propiedad $\mathbf{P(1)}$ de la proposición 2.2.8 indica que, si dos puntos se relacionan a través de algunas de las relaciones binarias que forman las aproximaciones lineales, el segundo de ellos se relacionará con todos los puntos de la semirrecta que tiene como origen a éste y pasa por el primero de ellos. Es así como se entiende el concepto 'lineal'que aparece en las definiciones anteriores.

Un tercer concepto de aproximación lineal, basado en los conos locales, se recoge en la siguiente definición.

Definición 2.2.9 Bajo las mismas hipótesis de 2.2.5, llamaremos **estructura de aproximación lineal local de** $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ a la cuaterna de relaciones binarias en $\mathbf{R}^n$ siguiente:

$$L_1^* = \bigcup_{\substack{\underline{y}_0 \in Y \\ \underline{d} \in LP(\underline{y}_0) \\ \alpha > 0}} \{(\underline{y}_0 + \alpha\underline{d}, \underline{y}_0)\} \qquad L_2^* = \bigcup_{\substack{\underline{y}_0 \in Y \\ \underline{d} \in LD(\underline{y}_0) \\ \alpha > 0}} \{(\underline{y}_0 + \alpha\underline{d}, \underline{y}_0)\}$$

$$L_3^* = \bigcup_{\substack{\underline{y}_0 \in Y \\ \underline{d} \in LI(\underline{y}_0) \\ \alpha > 0}} \{(\underline{y}_0 + \alpha\underline{d}, \underline{y}_0)\} \qquad L_4^* = \bigcup_{\substack{\underline{y}_0 \in Y \\ \underline{d} \in LDD(\underline{y}_0) \\ \alpha > 0}} \{(\underline{y}_0 + \alpha\underline{d}, \underline{y}_0)\}$$

Se denominan *aproximaciones locales*, a estas relaciones, debido a que, $\forall \underline{y}_0 \in Y$, existirá un entorno $\mathcal{V}$ de $\underline{y}_0$ en $\mathbf{R}^n$ tal que

$$\text{ó} \qquad L_i^* \bigcap (\{\underline{y}_0\} \times \mathcal{V}) \subseteq \{\underline{y}_0\} \times \{\underline{y}_0 @\}$$

$$\text{o bien} \quad L_i^* \bigcap (\{\underline{y}_0\} \times \mathcal{V}) \supseteq \{\underline{y}_0\} \times \{\underline{y}_0 @\} \ i = 1, ..., 4 \quad ,$$

siendo @ la relación binaria de la cuaterna asociada a $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ que estemos estudiando.

El entorno puede ser elegido común, independientemente de la L_i^* considerada, pues, aunque para cada i existiese un entorno $\mathcal{V}_i$ distinto, podríamos definir $\mathcal{V}$ como la intersección de esos cuatro. Por otro lado, estas aproximaciones se denominan *lineales* pues, tal y como se definen, todas verifican la propiedad $\mathbf{P(1)}$ de 2.2.8.

A partir de ahora, nos referiremos a estructuras de preferencia definidas sobre todo $\mathbf{R}^n$ (es decir, $Y = \mathbf{R}^n$), con lo cual no haremos distinción entre $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ y $(\mathcal{R}_1^0, \mathcal{R}_2^0)$, pues, en este caso, coincidirían las dos estructuras. Ello no supone una restricción importante y, sin embargo, nos proporciona una terminología más simple para los resultados que se tratan a continuación.

El siguiente teorema es una caracterización importante para las estructuras de aproximación lineal, tanto inferior como superior, de una estructura de preferencia.

Teorema 2.2.10 *Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia en $\mathbf{R}^n$ y $(S, >>)$ el conjunto ordenado de todas las cuaternas de relaciones binarias en $\mathbf{R}^n$ comparables con la cuaterna asociada a $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ mediante el orden $>>$. Si consideramos los conjuntos*

$$\mathbf{C} = \{(S_1, S_2, S_3, S_4) \in S : \ S_i \textit{ verifica } \mathbf{P(1)} \textit{ de 2.2.8 } \forall i = 1, ..., 4 \ \ \textit{y}$$

$$(S_1, S_2, S_3, S_4) << (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1^s, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_{12}^c)\}$$

$$\mathbf{C}' = \{(S_1, S_2, S_3, S_4) \in S : \ S_i \textit{ verifica } \mathbf{P(1)} \textit{ de 2.2.8 } \forall i = 1, ..., 4 \ \ \textit{y}$$

$$(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1^s, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_{12}^c) << (S_1, S_2, S_3, S_4)\} \quad .$$

Se verifica que:

1. $(L_1, L_2, L_3, L_4) = \text{máx}\,\mathbf{C}$.

2. $(L'_1, L'_2, L'_3, L'_4) = \text{mín}\,\mathbf{C}'$,

siendo (L_1, L_2, L_3, L_4) *y* (L'_1, L'_2, L'_3, L'_4) *las estructuras de aproximación lineal inferior y superior, repectivamente.*

$\triangleright$Demostración   Veamos en primer lugar *1.*

Sea $(S_1, S_2, S_3, S_4) \in \mathbf{C}$. Si $(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in S_1$, por verificarse la propiedad $\mathbf{P(1)}$ de 2.2.8, tendremos que

$$(\underline{y}_2 + \alpha(\underline{y}_1 - \underline{y}_2), \underline{y}_2) \in S_1,\ \forall \alpha > 0 \quad .$$

Como $S_1 \subset \mathcal{R}_1$ por definición de $\mathbf{C}$:

$$(\underline{y}_2 + \alpha(\underline{y}_1 - \underline{y}_2), \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_1,\ \forall \alpha > 0 \quad .$$

Luego $\underline{d} = \underline{y}_1 - \underline{y}_2 \in P(\underline{y}_2)$ y por tanto, tal y como se definió L_1, tendríamos que

$$(\underline{y}_2 + \alpha(\underline{y}_1 - \underline{y}_2), \underline{y}_2) \in L_1\ \forall \alpha > 0 \quad .$$

A partir de ésto queda demostrado que $S_1 \subset L_1$, tomando para ello $\alpha = 1$.

Las inclusiones $S_i \subset L_i,\ i = 2, 3, 4$, se demuestran de modo análogo, utilizando los conceptos de $D(\underline{y}_2)$, $I(\underline{y}_2)$ y $DD(\underline{y}_2)$, respectivamente.

De esta forma, se ha demostrado que

$$\forall (S_1, S_2, S_3, S_4) \in C,\ (S_1, S_2, S_3, S_4) << (L_1, L_2, L_3, L_4) \quad .$$

Como

$$(L_1, L_2, L_3, L_4) \in \mathbf{C} \quad ,$$

tendríamos que

$$(L_1, L_2, L_3, L_4) = \text{máx}\,\mathbf{C} \quad .$$

Veamos ahora *2.*

Consideremos $(S_1, S_2, S_3, S_4) \in C'$. Supongamos que $(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in L'_1$, tendremos que

$$(\underline{y}_2 + \alpha(\underline{y}_1 - \underline{y}_2), \underline{y}_2) \in L'_1\ \forall \alpha > 0 \quad .$$

Ésto significa, tal y como se define L'_1, que

$$\underline{d} = \underline{y}_1 - \underline{y}_2 \in K_1(\underline{y}_2) \quad .$$

Por tanto, existe algún $\alpha' > 0$ tal que

$$(\underline{y}_2 + \alpha'(\underline{y}_1 - \underline{y}_2), \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_1 \subset S_1 \quad .$$

Con lo cual, $\forall \alpha > 0$,

$$(\underline{y}_2 + \alpha(\underline{y}_1 - \underline{y}_2), \underline{y}_2) \in S_1 \quad ,$$

por verificarse la propiedad $\mathbf{P(1)}$ de 2.2.8. Así, tomando $\alpha = 1$, tendremos que

$$(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in S_1 \ .$$

Por tanto, $L'_1 \subset S_1$.

Las inclusiones $L'_i \subset S_i$ $i = 2, 3, 4$ se demuestran de forma análoga, utilizando los conos $K_2(\underline{y}_2)$, $K_3(\underline{y}_2)$ y $K_4(\underline{y}_2)$, respectivamente.

Hemos demostrado entonces que

$$\forall (S_1, S_2, S_3, S_4) \in \mathbf{C'},\ (L_1, L_2, L_3, L_4) << (S_1, S_2, S_3, S_4) \quad .$$

Luego

$$(L'_1, L'_2, L'_3, L'_4) = \text{mín}\, \mathbf{C'} \quad ,$$

pues $(L'_1, L'_2, L'_3, L'_4) \in \mathbf{C'}$ `c.q.d.` $\triangleleft$

Obsérvese, que el teorema justifica por qué hemos elegido como aproximaciones lineales superiores e inferiores a (L'_1, L'_2, L'_3, L'_4) y $(L_1,\ L_2, L_3, L_4)$, respectivamente.

Veamos una consecuencia del teorema, que nos permite relacionar, entre sí, las tres definiciones de aproximación lineal.

Corolario 2.2.11 *Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia en $\mathbf{R}^n$. Si (L_1, L_2, L_3, L_4), (L'_1, L'_2, L'_3, L'_4) y $(L^*_1, L^*_2, L^*_3, L^*_4)$ son las estructuras de aproximación lineal inferior, superior y local, respectivamente, se verifica que*

$$L_i \subseteq L^*_i \subseteq L'_i \ \forall i = 1, ..., 4 \quad .$$

$\triangleright$Demostración Las inclusiones $L_i \subseteq L^*_i$ $\forall i = 1, ..., 4$ se demuestran fácilmente a partir de las definiciones de conos globales y locales de 2.2.1 pues, $\forall \underline{y}_0 \in Y$, se verifica que

$$P(\underline{y}_0) \subset LP(\underline{y}_0)\ , D(\underline{y}_0) \subseteq LD(\underline{y}_0)$$

$$I(\underline{y}_0) \subseteq LI(\underline{y}_0) \text{ y } DD(\underline{y}_0) \subseteq LDD(\underline{y}_0)$$

Veamos las inclusiones superiores.

Sea $(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in L_1^*$. Tendremos que

$$(\underline{y}_2 + \alpha(\underline{y}_1 - \underline{y}_2), \underline{y}_2) \in L_i^*, \ \forall \alpha > 0 \quad .$$

Por definición de L_i^*, $\underline{d} = \underline{y}_1 - \underline{y}_2 \in LP(\underline{y}_2)$ y por tanto existe un α_1 tal que

$$\forall \alpha \quad 0 < \alpha < \alpha_1 \ (\underline{y}_2 + \alpha(\underline{y}_1 - \underline{y}_2), \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_1 \subset L_1' \quad .$$

Como L_1' verifica la propiedad **P(1)** de 2.2.8, podemos asegurar que

$$(\underline{y}_2 + \alpha(\underline{y}_1 - \underline{y}_2), \underline{y}_2) \in L_1' \ \forall \alpha > 0 \quad .$$

Por tanto, tomando $\alpha = 1$, se demuestra la inclusión $L_1^* \subset L_1$. Sin embargo, podría ocurrir que $\mathcal{R}_1 \subset L_1^*$ y ésto nos llevaría por el teorema 2.2.10, a la igualdad $L_1^* = L_1'$. Por consiguiente,

$$L_1^* \subseteq L_1' \quad .$$

Para el resto de inclusiones se utilizará un argumento similar, usando los correspondientes conos locales, `c.q.d.` $\triangleleft$

Obsérvese que

$$\begin{aligned}
\{L_1\underline{y}_0\} &= \{\underline{y} \in \mathbf{R}^n : (\underline{y}, \underline{y}_0) \in L_1\} = \underline{y}_0 + P(\underline{y}_0) \\
\{L_2\underline{y}_0\} &= \{\underline{y} \in \mathbf{R}^n : (\underline{y}, \underline{y}_0) \in L_1\} = \underline{y}_0 + D(\underline{y}_0) \\
\{L_3\underline{y}_0\} &= \{\underline{y} \in \mathbf{R}^n : (\underline{y}, \underline{y}_0) \in L_1\} = \underline{y}_0 + I(\underline{y}_0) \\
\{L_4\underline{y}_0\} &= \{\underline{y} \in \mathbf{R}^n : (\underline{y}, \underline{y}_0) \in L_1\} = \underline{y}_0 + DD(\underline{y}_0)
\end{aligned}$$

De igual modo tendremos, para las aproximaciones superiores, las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{ll}
\{L_1'\underline{y}_0\} = \underline{y}_0 + K_1(\underline{y}_0) & \{L_2'\underline{y}_0\} = \underline{y}_0 + K_2(\underline{y}_0) \\
\{L_3'\underline{y}_0\} = \underline{y}_0 + K_3(\underline{y}_0) & \{L_4'\underline{y}_0\} = \underline{y}_0 + K_4(\underline{y}_0)
\end{array}$$

Ante este hecho, podemos hacernos la siguiente pregunta: ¿ por qué construir L_i y L_i' $i = 1, ..., 4$ y no utilizar simplemente los conos ? La respuesta se basa, en que nuestro principal objetivo consiste en construir estructuras, que aproximen a $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$, que estén, de algún modo, representadas analíticamente (dichas estructuras se denotarán de forma genérica por $(\mathcal{R}_1^A, \mathcal{R}_2^A)$). Todo ello tiene como finalidad obtener una buena herramienta que posibilite trabajar con estructuras de preferencia de difícil representación.

Una manera de obtener estas $(\mathcal{R}_1^A, \mathcal{R}_2^A)$ sería a través de cuaternas asociadas, imponiéndoles ciertas condiciones a las relaciones que la constituyen (como puede ser la linealidad $\mathbf{P(1)}$-2.2.8).

Sin embargo, no siempre (L_1, L_2, L_3, L_4) ó (L_1', L_2', L_3', L_4') definen cuaternas asociadas a una estructura de preferencia.

En el siguiente epígrafe trataremos un caso en donde no se da esta objeción.

2.3. ESTRUCTURAS DE APROXIMACIÓN LINEAL Y $\succ_{\mathbf{V}}-$ PREFERENCIAS LINEALES

Consideremos $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una $\succ_V-$preferencia en $\mathbf{R}^n$. Diremos que $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ es una $\succ_{\mathbf{V}}-$**preferencia lineal**, si los elementos de la familia V son funciones escalares lineales en $\mathbf{R}^n$.

Nuestro propósito es: dadas las aproximaciones lineales a una $\succ_V-$ preferencia, deducir a partir de ellas si nos encontramos o no frente a una $\succ_V-$ preferencia lineal.

Lema 2.3.1 *La cuaterna de relaciones binarias asociada a una $\succ_V-$ preferencia lineal $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ cumple la propiedad de linealidad $\mathbf{P(1)}$ de la proposición 2.2.8.*

$\triangleright$Demostración Veamos primeramente que $\mathcal{R}_1$ verifica la propiedad $\mathbf{P(1)}$-2.2.8.

Sea $(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_1$, al ser $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia, se tiene, por la proposición 2.1.4, que $v(\underline{y}_1) \geq v(\underline{y}_2) \quad \forall v \in V$ y $\exists v' \in V$ tal que $v'(\underline{y}_1) > v'(\underline{y}_2)$. Como v es lineal,

$$\forall v \in V \;\; v(\underline{y}_1 - \underline{y}_2) \geq 0 \text{ y } \exists v' \text{ tal que } v'(\underline{y}_1 - \underline{y}_2) > 0 \quad .$$

Considerando $\alpha > 0$, se verifica que

$$v(\underline{y}_2) + \alpha v(\underline{y}_1 - \underline{y}_2) \geq v(\underline{y}_2), \ \forall v \in V$$

y $\exists v' \in V$ tal que

$$v'(\underline{y}_2) + \alpha v'(\underline{y}_1 - \underline{y}_2) > v(\underline{y}_2) \quad .$$

Estas últimas expresiones, al aplicar la linealidad de los elementos de V, quedarían enunciadas como:

$$\forall \alpha > 0 \ \ v(\underline{y}_2 + \alpha(\underline{y}_1 - \underline{y}_2)) \geq v(\underline{y}_2), \ \forall v \in V$$

y $\exists v' \in V$ tal que

$$v'(\underline{y}_2 + \alpha(\underline{y}_1 - \underline{y}_2)) > v'(\underline{y}_2) \quad .$$

Ésto es equivalente a decir:

$$\forall \alpha > 0 \ \ (\underline{y}_2 + \alpha(\underline{y}_1 - \underline{y}_2), \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_1 \quad ,$$

o, lo que es igual, $\mathcal{R}_1$ *verifica* **P(1)**-2.2.8.

La demostración para $\mathcal{R}_1^s$ se deduce de ésta.

Razonemos ahora para $\mathcal{R}_2$.

Consideremos $(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_2$. Por la proposición 2.1.4 y haciendo uso de la linealidad de los elementos de V, ésto se expresa mediante las siguientes igualdades:

$$v(\underline{y}_1) = v(\underline{y}_2) \ \forall v \in V \ \ \Leftrightarrow v(\underline{y}_1 - \underline{y}_2) = 0 \ \ \forall \underline{v} \in V \quad .$$

. Por la misma razón, se tiene que

$$v(\underline{y}_2 + \alpha(\underline{y}_1 - \underline{y}_2)) = v(\underline{y}_2) + \alpha v(\underline{y}_1 - \underline{y}_2) = v(\underline{y}_2), \ \forall v \in V \quad .$$

Ésto es equivalente a decir que

$$\forall \alpha > 0 \ \ (\underline{y}_2 + \alpha(\underline{y}_1 - \underline{y}_2), \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_2 \quad ,$$

o lo que es igual, $\mathcal{R}_2$ *verifica* **P(1)**-2.2.8.

Como $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1^s$ y $\mathcal{R}_2$ verifican **P(1)**-2.2.8, su complementario $\mathcal{R}_{12}^c$ también lo verificará `c.q.d.` $\triangleleft$

El siguiente teorema nos proporciona una caracterización de las $\succ_V -$preferencias lineales.

Teorema 2.3.2 *Sea* $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ *una* $\succ_V -$*preferencia en* $\mathbf{R}^n$.
$(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ *será una* $\succ_V -$*preferencia lineal sii:*

1. $(L_1, L_2, L_3, L_4) = (L'_1, L'_2, L'_3, L'_4)$.

2. *Cada* L_i *es compatible con la suma en* $\mathbf{R}^n$, *es decir,*

$$\forall \underline{y} \in \mathbf{R}^n, \text{ si } (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in L_i, (\underline{y}_1 + y, \underline{y}_2 + y) \in L_i \quad .$$

$\triangleright$Demostración

"$\Rightarrow$" Si $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ es una $\succ_V -$preferencia lineal, tendremos, por el lema 2.3.1, que $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1^s, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_{12}^c)$ verifican la propiedad **P(1)**-2.2.8. Esto significa, como consecuencia del teorema 2.2.10, que

$$(L_1, L_2, L_3, L_4) = (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1^s, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_{12}^c) = (L'_1, L'_2, L'_3, L'_4) \quad .$$

Queda así demostrado *1*

Vamos a demostrar *2*. Supongamos que $(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in L_1$; por estar $L_1 \subset \mathcal{R}_1$ y ser $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una $\succ_V -$preferencia, se tienen las siguientes desigualdades:

$$v(\underline{y}_1) \geq v(\underline{y}_2), \ \forall v \in V$$

y, además,

$$\exists v' \in V \ / \ v'(\underline{y}_1) > v'(\underline{y}_2) \quad .$$

Como $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ es una $\succ_V -$preferencia lineal, tendremos que

$$v(\underline{y}_1 - \underline{y}_2) \geq 0, \ \forall v \in V$$

y, además,

$$\exists v' \in V \ / \ v'(\underline{y}_1 - \underline{y}_2) > 0 \quad .$$

Sumando y restando $\underline{y} \in \mathbf{R}^n$, se obtienen las expresiones:

$$v((\underline{y}_1 + \underline{y}) - (\underline{y}_2 + \underline{y})) \geq 0, \ \forall \ v \in V$$

y para v':

$$v'((\underline{y}_1 + \underline{y}) - (\underline{y}_2 + \underline{y})) > 0 \quad .$$

Aplicando linealidad se verifican las desigualdades:

$$v(\underline{y}_1 + \underline{y}) \geq v(\underline{y}_2 + \underline{y}) \ \ \forall v \in V$$

y para v'
$$v'(\underline{y}_1 + \underline{y}) > v(\underline{y}_2 + \underline{y}) \quad .$$

Ésto significa que
$$(\underline{y}_1 + \underline{y}, \underline{y}_2 + \underline{y}) \in \mathcal{R}_1 = L_1 \quad .$$

Un razonamiento similar demostraría la compatibilidad con la suma para el resto de los L_i.

"$\Leftarrow$" Por verificarse *1* de 2.3.2, aplicando la proposición 2.2.7, tendremos que
$$(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1^s, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_{12}^c) = (L_1, L_2, L_3, L_4) = (L_1', L_2', L_3', L_4') \quad .$$

Demostremos las siguientes igualdades: $\forall \underline{y}_0 \in \mathbf{R}^n$,
$$\begin{array}{ll} P(\underline{y}_0) = LP(\underline{y}_0) = P & D(\underline{y}_0) = LD(\underline{y}_0) = -P \\ I(\underline{y}_0) = LI(\underline{y}_0) = I & DD(\underline{y}_0) = LDD(\underline{y}_0) = -DD \end{array}$$

Las igualdades entre conos globales y locales se deducen directamente de *1*. Veamos, por tanto, que los conos globales son constantes. Para ello, probaremos que, $\forall \underline{y}_1, \underline{y}_2 \in \mathbf{R}^n$,
$$P(\underline{y}_1) = P(\underline{y}_2) \quad ,$$

ya que para el resto de conos se seguiría un razonamiento análogo.

Sea $\underline{d} \in P(\underline{y}_1)$, $\forall \alpha > 0$ $(\underline{y}_1 + \alpha \underline{d}, \underline{y}_1) \in L_1$. Debido a la propiedad *2*, se tiene que
$$\forall \underline{y} \in \mathbf{R}^n \; \forall \alpha > 0, \quad (\underline{y}_1 + \underline{y} + \alpha \underline{d}, \underline{y}_1 + \underline{y}) \in L_1 \quad .$$

Aplicando la definición de L_1, tendremos que
$$\underline{d} \in P(\underline{y}_1 + \underline{y}), \; \forall \underline{y} \in \mathbf{R}^n \quad .$$

Luego
$$P(\underline{y}_1) \subseteq P(\underline{y}_1 + \underline{y}), \; \forall \underline{y} \in \mathbf{R}^n \quad .$$

Considerando $\underline{y} = \underline{y}_2 - \underline{y}_1$, y teniendo en cuenta el papel simétrico de $\underline{y}_1$ e $\underline{y}_2$, se obtiene la igualdad buscada,

$$P(\underline{y}_1) = P(\underline{y}_2) = P \quad .$$

Así

$$(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_1 \Leftrightarrow \underline{y}_1 - \underline{y}_2 \in P \quad ,$$

siendo P convexo al ser $\mathcal{R}_1$ transitiva. Por otra parte, $\mathcal{R}_2$ vendrá definido por:

$$(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_2 \Leftrightarrow \underline{y}_1 - \underline{y}_2 \in I \quad ,$$

donde I será un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^n$, pues

- $0 \in I$
- Si $\underline{d}, \underline{d}' \in I \Rightarrow \underline{d} + \underline{d}' \in I$, al ser I convexo ($\mathcal{R}_2$ es transitiva).
- Si $\underline{d} \in I \Rightarrow -\underline{d} \in I$ (al ser $\mathcal{R}_2$ simétrico). Por tanto

$$\forall \alpha \in \mathbf{R},\ \alpha \underline{d} \in I$$

Así, al ser $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una $\succ_V-$preferencia, ésta debe ser lineal, pues

$$(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_2 \Leftrightarrow \underline{y}_1 - \underline{y}_2 \in I \Leftrightarrow v(\underline{y}_1) = v(\underline{y}_2)\ \forall v \in V \quad ,$$

e I es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^n$. Además, $C\ell P = P \cup I$ (obśervese, que estamos en una $\succ_V-$preferencia) y, por tanto, la estructura de preferencia se puede expresar por las siguientes equivalencias:

$$\begin{array}{ll} (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_1 \Leftrightarrow \underline{y}_1 - \underline{y}_2 \in C\ell P & \text{pero } \ \underline{y}_2 - \underline{y}_1 \notin C\ell P \\ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_2 \Leftrightarrow \underline{y}_1 - \underline{y}_2 \in C\ell P & \text{y } \ \underline{y}_2 - \underline{y}_1 \in C\ell P \end{array}$$

Como $C\ell P$ es poliédrico y convexo, por 2.1.1, quedaría demostrado que $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ es una $\succ_V-$preferencia lineal. $\triangleleft$

Corolario 2.3.3 *Dada $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una $\succ_V-$preferencia lineal, se verifica que:*

$$(L_1, L_2, L_3, L_4) = (L_1^*, L_2^*, L_3^*, L_4^*) = (L_1', L_2', L_3', L_4') \quad .$$

$\triangleright$Demostración Se obtiene del teorema 2.3.2 y el corolario 2.2.11 . $\triangleleft$

Obsérvese, como, supuesto el caso en el que las estructuras de aproximación lineal superior e inferior verificasen las condiciones *1* y *2* del teorema 2.3.2, éstas pueden considerarse como una cuaterna asociada a alguna estructura de preferencia ($\succ_V-$preferencia, en este caso).

Surge por tanto la pregunta: ¿ cuándo se verificará, en una estructura de aproximación lineal, relaciones como $L_1^s = L_2$, $L_4 = (L_1 \cup L_2 \cup L_3)^c$, ..., propias de las cuaternas asociadas a estructuras de preferencia? Esta comenzará a tener respuesta en posteriores epígrafes.

La problemática tratada en esta sección, resuelta con el teorema 2.3.2, fue ya estudiada por *White (1972).* Sin embargo, en dicho trabajo no se cuenta con herramientas como las estructuras de preferencia o las aproximaciones lineales, para dar una mayor coherencia a los resultados e incluso poder ampliar el estudio a otros tipos de aproximaciones.

Ejemplo 2.3.4 El ejemplo 2.1.2 (más concretamente, la parte correspondiente al segundo camino), nos ilustra estos conceptos con un caso práctico. El punto de partida no será, como en el *primer camino*, una hipotética función de valor, la cual se intente construir o aproximar mediante la información que proporciona el decisor. Ahora se tiene una estructura de preferencia $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ que, teóricamente, recoge y clasifica las actitudes del trabajador ante alternativas de empleo en todo $\mathbf{R}^2$.

Llegar a esta estructura de preferencia global en $\mathbf{R}^2$ es imposible en la práctica, pues todas las posibilidades de comparación en dicho espacio son inaprehensibles. Nuestra intención será, por tanto, aproximar dicha estructura de preferencia mediante una $\succ_V-$preferencia.

¿ cómo construir una esta $\succ_V-$preferencia? La respuesta es: a través de las aproximaciones lineales a la estructura de preferencia $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ subyacente al problema. Esas aproximaciones se obtendrían, en este caso, considerando un número finito de ofertas de empleo y, fijándo cada una de ellas, recogiendo cuáles son las actitudes del decisor al cotejar la fijada con las restantes. Con esos datos se realizaría un ajuste lineal a los conjuntos $\{\underline{y}_0 \prec\}$, $\{\underline{y}_0 \succ\}$, $\{\underline{y}_0 \sim\}$ e $\{\underline{y}_0 ?\}$ (siendo $\underline{y}_0$ la alternativa fijada), que se traducirían en los conjuntos $\{L_1\underline{y}_0\}$, $\{L_2\underline{y}_0\}$, $\{L_3\underline{y}_0\}$ y $\{L_4\underline{y}_0\}$, o en aquellos que utilizan las L_i' para su definición.

En el ejemplo, ya sea porque el decisor ha ordenado sus preferencias antes de la entrevista, o bien porque el número de alternativas elegidas por el analista permita realizar este tipo de ajuste, las aproximaciones lineales verifican las hipótesis *1* y *2* del teorema 2.3.2. De ésto se deduce, que la $\succ_V-$preferencia, utilizada para aproximar la estructura de preferencia del trabajador, es lineal.

La aproximación, mediante una $\succ_V-$preferencia o una estructura de preferencia, será más exacta, cuanto mayor sea el número de alternativas elegidas por el analista en su entrevista con el decisor.

2.4. ESTRUCTURAS DE APROXIMACIÓN LINEAL Y $\succ_{\mathbf{V}}-$ PREFERENCIAS EN $\mathbf{R}^2$

Antes de adentrarnos en la temática de la sección, veamos unos resultados generales, que justifican por qué comenzaremos siempre nuestro estudio suponiendo que V es un conjunto unitario.

Proposición 2.4.1 *Sea* $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ *una* $\succ_V-$*preferencia en* $\mathbf{R}^n$*. Se verifica que*

1. $\mathcal{R}_2 = \bigcap_{v\in V} S_{2v}$
2. $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}\backslash\mathcal{R}_2$*, donde* $\mathcal{R} = \bigcap_{v\in V} S_{1v} \cup S_{2v}$,

siendo $\{(S_{1v}, S_{2v})\}_{v\in V}$ *una familia de estructuras de preferencia representadas por una función de valor de clase* $C^1(\mathbf{R}^n)$ [6] .

$\triangleright$Demostración Definiremos (S_{1v}, S_{2v}), siendo $v \in V$, como

$$\begin{array}{lcl} (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in S_{1v} & \Leftrightarrow & v(\underline{y}_1) > v(\underline{y}_2) \\ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in S_{2v} & \Leftrightarrow & v(\underline{y}_1) = v(\underline{y}_2) \end{array}$$

Por un razonamiento similar al realizado en el teorema 1.3.4, demostaríamos el resultado. $\triangleleft$

Proposición 2.4.2 *Dada* $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ *una* $\succ_V-$*preferencia en* $\mathbf{R}^n$*, sus estructuras de aproximación lineales, que denotaremos genéricamente por* $(L_i^\bullet)$ $i = 1, ..., 4,$ [7] *verifican:*

[6] Se verifica, por tanto, el axioma *D2* del teorema de Debreu.

[7] Representa tanto los inferiores, como los superiores, como los locales.

$$
\begin{array}{lcl}
- L_1^{\bullet} & = & \left(\bigcap_{v\in V} L_{1v}^{\bullet} \bigcup L_{3v}^{\bullet} \right) \setminus \bigcap_{v\in V} L_{3v}^{\bullet} \\
- L_i^{\bullet} & = & \bigcap_{v\in V} L_{iv}^{\bullet} \quad i=2,3 \\
- L_4^{\bullet} & \supset & \bigcap_{v\in V} L_{4v}^{\bullet}
\end{array}
$$

$\triangleright$Demostración Se obtiene a partir de la proposición 2.4.1 y de las definiciones de conos globales, locales, y los $K_i(\underline{y}_0)$ definidos en 2.2.6, que son los que determinan las estructuras de aproximación lineal.

Para demostrar la última inclusión podemos seguir la observación final de la sección 1.3 del capítulo anterior. $\triangleleft$

De este resultado, se concluye que las aproximaciones lineales a una $\succ_V-$preferencia pueden obtenerse a partir de aproximaciones de este tipo a estructuras de preferencia completas. Estudiaremos, pues, aproximaciones lineales a estas estructuras que, por el teorema de Debreu 1.3.2, serán a su vez $\succ_V-$preferencias, donde V es el conjunto unitario formado por la llamada *función de valor.*

En esta sección, consideraremos como *espacio de consecuencias* u *objetivos* al plano $\mathbf{R}^2$. Por otra parte, a partir de ahora, $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ será una estructura de preferencia representada mediante una función de valor $v_0 \in C^1(\mathbf{R}^2)$ no lineal [8]. Esta función, tal y como se construye una función de valor, verificará el teorema de la función implícita y, por tanto, existirá una función $g \in C^1(\mathbf{R})$ tal que $v_0(y_1, y_2) = y_2 - g(y_1)$. Además, impondremos la condición de que $v_0(0,0) = 0$

Definición 2.4.3 Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia como las consideradas en esta sección, definiremos para cada $\underline{y} = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$ los siguientes coeficientes:

$$
\begin{array}{lcl}
m^+(\underline{y}) & = & \sup\left\{ \frac{g(z_1)-g(y_1)}{z_1-y_1} : z_1 > y_1 \right\} \\
m^-(\underline{y}) & = & \sup\left\{ \frac{g(z_1)-g(y_1)}{z_1-y_1} : z_1 < y_1 \right\}
\end{array}
$$

[8]El caso lineal ya fue estudiado anteriormente.

$$\begin{array}{rcl} m_+(\underline{y}) & = & \inf\left\{ \frac{g(z_1)-g(y_1)}{z_1-y_1} : z_1 > y_1 \right\} \\ m_-(\underline{y}) & = & \inf\left\{ \frac{g(z_1)-g(y_1)}{z_1-y_1} : z_1 < y_1 \right\} \end{array}$$

Estas definiciones nos serán útiles para el cálculo de aproximaciones lineales a estrucuturas de preferencia como las consideradas en esta sección. Obsérvese, que sólo dependen de la primera coordenada del punto $\underline{y}$, pero, por razones de nomenclatura, las ponemos dependientes del punto, del plano, elegido. Antes de pasar a utilizar estos coeficientes, vamos a enunciar ciertas relaciones que se verifican entre ellos.

Proposición 2.4.4 *En las condiciones de la definición anterior, se verifican las siguientes desigualdades:* $\forall \underline{y} \in Y$,

$$m^+(\underline{y}) \geq m_-(\underline{y}) \qquad m^-(\underline{y}) \geq m_+(\underline{y}) \quad .$$

$\triangleright$Demostración Si denotamos por $g'_+(\underline{y})$ y $g'_-(\underline{y})$ las derivadas a la derecha y a la izquierda de g en $\underline{y}$, respectivamente, y tenemos en cuenta que $g'_+(\underline{y}) = g'_-(\underline{y})$ $\forall \underline{y} \in Y$, por ser $g \in C^1(\mathbf{R})$, se obtiene:

$$m^+(\underline{y}) \geq g'_+(\underline{y}) = g'_-(\underline{y}) \geq m_-(\underline{y})$$

$$m^-(\underline{y}) \geq g'_-(\underline{y}) = g'_+(\underline{y}) \geq m_+(\underline{y})$$

`c.q.d.` $\triangleleft$

Proposición 2.4.5 *Sea* $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ *una estructura de preferencia con las hipótesis de esta sección. Si definimos el conjunto*

$$D_1 = \left\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 : \begin{array}{l} m^+(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) < 0 \\ m_-(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) < 0 \end{array} \right\} \quad ,$$

considerando la desigualdad $(y_{11} - y_{21}) < 0$ *cuando algunos de esos coeficientes fuese infinito, se verifica que*

$$L_1 = D_1 \quad .$$

$\triangleright$Demostración Para demostrar esta igualdad, nos apoyaremos en el teorema 2.2.10. Así, el resultado quedaría probado viendo que D_1 verifica la propiedad $\mathbf{P(1)}$ y, además, las inclusiones $L_1 \subset D_1 \subset \mathcal{R}_1$.

Que D_1 verifica la propiedad *1* de 2.2.10, se obtiene directamente de la definición de D_1.

Demostraremos que este conjunto está contenido en $\mathcal{R}_1$.

Sea $(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in D_1$

- Si $y_{11} - y_{21} > 0$, como
$$m^+(\underline{y}_2) < \frac{y_{12} - y_{22}}{y_{11} - y_{21}} \quad ,$$
entonces, por ser $m^+(\underline{y}_2)$ un supremo, se tiene que
$$\frac{g(y_{11}) - g(y_{21})}{y_{11} - y_{21}} < \frac{y_{12} - y_{22}}{y_{11} - y_{21}} \Rightarrow g(y_{11}) - g(y_{21}) < y_{12} - y_{22} \Rightarrow$$
$$y_{22} - g(y_{21}) < y_{12} - g(y_{11}) \Rightarrow v_0(\underline{y}_2) < v_0(\underline{y}_1)$$
y, por tanto, $(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_1$
- Si $y_{11} - y_{21} < 0$, como
$$m_-(\underline{y}_2) > \frac{y_{12} - y_{22}}{y_{11} - y_{21}} \quad ,$$
entonces, por ser $m_-(\underline{y}_2)$ un ínfimo, se tiene que
$$\frac{g(y_{11}) - g(y_{21})}{y_{11} - y_{21}} > \frac{y_{12} - y_{22}}{y_{11} - y_{21}} \Rightarrow g(y_{11}) - g(y_{21}) < y_{12} - y_{22} \Rightarrow$$
$$y_{22} - g(y_{21}) < y_{12} - g(y_{11}) \Rightarrow v_0(\underline{y}_2) < v_0(\underline{y}_1)$$
y, por tanto, $(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_1$.

Debido a ésto, $D_1 \subset \mathcal{R}_1$.

Veamos ahora que $L_1 \subset D_1$.
Sea $(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in L_1$, es decir,
$$\forall \alpha > 0 \;\; (\underline{y}_2 + \alpha(\underline{y}_1 - \underline{y}_2), \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_1 \quad .$$
Ésto, en términos de la función v_0, significaría que
$$\forall \alpha > 0 \;\; v_0(\underline{y}_2 + \alpha(\underline{y}_1 - \underline{y}_2)) > v_0(\underline{y}_2) \quad .$$
Luego
$$y_{22} + \alpha(y_{12} - y_{22}) - g(y_{21} + \alpha(y_{11} - y_{21})) > y_{22} - g(y_{21}) \;\; \forall \alpha > 0 \quad .$$
Simplificando, tendremos que
$$g(y_{21} + \alpha(y_{11} - y_{21})) - g(y_{21}) < \alpha(y_{12} - y_{22}) \;\; \forall \alpha > 0 \quad .$$
Distinguiremos dos casos:

- Si $(y_{11}-y_{21})>0$, tendríamos que, $\forall\alpha>0$

$$\frac{g(y_{21}+\alpha(y_{11}-y_{21}))-g(y_{21})}{\alpha(y_{11}-y_{21})}<\frac{y_{12}-y_{22}}{y_{11}-y_{21}} \quad .$$

Como cualquier punto $y_1\in\mathbf{R}$, tal que $y_1>y_{21}$, se puede expresar como $y_1=y_{21}+\alpha(y_{11}-y_{21})$, entonces

$$m^+(\underline{y}_2)<\frac{y_{12}-y_{22}}{y_{11}-y_{21}} \quad ,$$

lo que implica que

$$m^+(\underline{y}_2)(y_{11}-y_{21})-(y_{12}-y_{22})<0 \quad .$$

Ésto, aplicando la proposición 2.4.4, significa que

$$m_-(\underline{y}_2)(y_{11}-y_{21})-(y_{12}-y_{22})<0 \quad .$$

- Si $(y_{11}-y_{21})<0$, tendríamos que $\forall\alpha>0$

$$\frac{g(y_{21}+\alpha(y_{11}-y_{21}))-g(y_{21})}{\alpha(y_{11}-y_{21})}>\frac{y_{12}-y_{22}}{y_{11}-y_{21}} \quad .$$

Por un razonamiento similar al anterior, se obtendría que

$$m_-(\underline{y}_2)>\frac{y_{12}-y_{22}}{y_{11}-y_{21}}$$

y por la proposición 2.4.4:

$$m^+(\underline{y}_2)>\frac{y_{12}-y_{22}}{y_{11}-y_{21}} \quad .$$

Luego se verifica que

$$\begin{aligned} m^+(\underline{y}_2)(y_{11}-y_{21})-(y_{12}-y_{22}) &< 0 \\ m_-(\underline{y}_2)(y_{11}-y_{21})-(y_{12}-y_{22}) &< 0 \end{aligned}$$

Por tanto, se concluye que $L_1 \subset D_1$, `c.q.d.` $\triangleleft$

Con un razonamiento similar al que hemos utilizado, se puede demostrar el siguiente resultado.

Proposición 2.4.6 *Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia con las hipótesis de esta sección. Si definimos el conjunto*

$$D_2 = \left\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 : \begin{array}{c} m^-(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) > 0 \\ m_+(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) > 0 \end{array} \right\} ,$$

considerando la desigualdad $y_{11} - y_{21} > 0$ cuando alguno de esos coeficientes fuese infinito, se verifica que

$$L_2 = D_2 \quad .$$

Finalmente, el estudio de la aproximación lineal inferior a $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ lo completaremos con la proposición siguiente.

Proposición 2.4.7 *Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia con las hipótesis de esta sección, se verifica que*

$$L_3 = \Delta \quad y \quad L_4 = \emptyset \quad .$$

$\triangleright$Demostración Sabemos que si L_3 fuese distinto de Δ, estaría formada por pares de puntos pertenecientes a algunas de las rectas contenidas en la hipersuperficie de valor $\{\underline{y}_0 \sim\}$ (teorema 2.4.4). En este caso, como $\{\underline{y}_0 \sim\}$ son curvas de $\mathbf{R}^2$, si contuviesen alguna recta sería porque dicha curva es por sí misma una recta, con lo cual v_0 sería lineal, y este caso lo habíamos eliminado.

$L_4 = \emptyset$, pues, al ser $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ completa, tendremos que $\mathcal{R}_{12}^c = \emptyset$. `c.q.d.` $\triangleleft$

Como conclusión de estos resultados, tendremos:

Dada una estructura de preferencia $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ representada por una función de valor $v_0 \in C^1(\mathbf{R}^2)$, no lineal, y verificando que $v_0(0,0) = 0$ y

$v_0(y_1, y_2) = y_2 - g(y_1)$, siendo $g \in C^1(\mathbf{R})$, su estructura de aproximación lineal inferior es

$$(D_1, D_2, \Delta, \emptyset) \quad .$$

Vamos a determinar las aproximaciones lineales superior y local.

Proposición 2.4.8 *Sea* $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ *una estructura de preferencia con las hipótesis de esta sección, se verifica que*

$$\begin{aligned}
L'_1 &= \Big\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 : \\
&\qquad \left.\begin{array}{ll} m^-(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) < 0 & \textit{o bien} \\ m_+(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) < 0 & \end{array}\right\} \\
L'_2 &= \Big\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 : \\
&\qquad \left.\begin{array}{ll} m^+(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) > 0 & \textit{o bien} \\ m_-(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) > 0 & \end{array}\right\} \\
L'_3 &= \Big\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 : \\
&\qquad \left[\begin{array}{ll} m_-(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) \geq 0 & y \\ m^-(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) \leq 0 & \end{array}\right] \\
&\qquad\quad \textit{o bien} \quad \left.\left[\begin{array}{ll} m^+(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) \geq 0 & y \\ m_+(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) \leq 0 & \end{array}\right]\right\} \\
L'_4 &= \emptyset
\end{aligned}$$

$\triangleright$Demostración Llamando D'_1 al conjunto que aparece igualado a L'_1 en el enunciado, demostraremos que D'_1 verifica $\mathbf{P(1)}$– 2.2.8 y, además, que $\mathcal{R}_1 \subset D'_1 \subset L'_1$. De esta manera, por el teorema 2.2.10, tendríamos probada la igualdad.

D'_1, por su definición, verifica la propiedad $\mathbf{P(1)}$.

Consideremos $(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_1$. Entonces, $(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in D'_1$, ya que si no se verificase ésto,

$$(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in (D'_1)^c = L_2 \cup \{ \text{ las rectas } m^-(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) = 0,$$

$$m_+(\underline{y}_2)(y_{11}-y_{21})-(y_{12}-y_{22})=0\} \subset \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_1^s$$

y esto es absurdo.

Por otro lado, tomemos $(\underline{y}_1,\underline{y}_2) \in D_1'$. Si

$$\nexists \alpha' > 0 \text{ tal que } (\underline{y}_2+\alpha'(\underline{y}_1-\underline{y}_2),\underline{y}_2) \in \mathcal{R}_1 \quad ,$$

ésto implicaría que

$$\forall \alpha > 0,\ (\underline{y}_2+\alpha(\underline{y}_1-\underline{y}_2),\underline{y}_2) \in (\mathcal{R}_1)^c = \mathcal{R}_1^s \cup \mathcal{R}_2 \quad .$$

Debido a ésto, tal como se define L_2, tendríamos que

$$(\underline{y}_1,\underline{y}_2) \in L_2 \cup \{ \text{ las rectas } m^-(\underline{y}_2)(y_{11}-y_{21})-(y_{12}-y_{22})=0,$$

$$m_+(\underline{y}_2)(y_{11}-y_{21})-(y_{12}-y_{22})=0\} \quad .$$

Por tanto, $(\underline{y}_1,\underline{y}_2) \in (D_1')^c$, que es absurdo. Luego, si $(\underline{y}_1,\underline{y}_2) \in D_1'$, tendremos que

$$\underline{y}_1-\underline{y}_2 \in K_1(\underline{y}_2)$$

y, por tanto,

$$(\underline{y}_1,\underline{y}_2) \in L_1' \quad .$$

El resto de la igualdades se demostrarían de modo análogo. `c.q.d.` ◁

Proposición 2.4.9 *Sea $(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia con las hipótesis consideradas hasta ahora, añadiendo, además, la condición $v_0 \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Se verifica que*

$$\begin{aligned} L_1^* &= \{(\underline{y}_1,\underline{y}_2) \in \mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2 : g'(\underline{y}_2)(y_{11}-y_{21})-(y_{12}-y_{22})<0\} \\ L_2^* &= \{(\underline{y}_1,\underline{y}_2) \in \mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2 : g'(\underline{y}_2)(y_{11}-y_{21})-(y_{12}-y_{22})>0\} \\ L_3^* &= \Delta \\ L_4^* &= \emptyset \end{aligned}$$

▷<u>Demostración</u> Sea $(\underline{y}_1,\underline{y}_2) \in \mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2$ tal que

$$g'(\underline{y}_2)(y_{11}-y_{21})-(y_{12}-y_{22})<0 \quad .$$

Analicemos los dos casos posibles:

- Si $(y_{11} - y_{21}) > 0$, entonces, todo y_1 tal que $y_1 > y_{21}$ se puede poner como $y_1 = y_{21} + \alpha(y_{11} - y_{21})$. Por otro lado,

$$g'(\underline{y}_2) < \frac{y_{12} - y_{22}}{y_{11} - y_{21}} \quad ,$$

con lo cual, al verificarse que

$$g'(\underline{y}_2) = g'_+(\underline{y}_2) = \lim_{\substack{y_1 \to y_{21} \\ y_1 > y_{21}}} \frac{g(y_1) - g(y_{21})}{y_1 - y_{21}} \quad ,$$

tendríamos que $\exists \alpha_0$ tal que, si $0 < \alpha < \alpha_0$,

$$\frac{g(y_{21} + \alpha(y_{11} - y_{21})) - g(y_{21})}{\alpha(y_{11} - y_{21})} < \frac{\alpha(y_{12} - y_{22})}{\alpha(y_{11} - y_{21})} \quad .$$

Simplificando, y sumado y restando y_{22} en el segundo término, tendremos:

$$g(y_{21} + \alpha(y_{11} - y_{21})) - g(y_{21}) < y_{22} + \alpha(y_{12} - y_{22}) - y_{22}$$

$$\Rightarrow y_{22} + \alpha(y_{12} - y_{22}) - g(y_{21} + \alpha(y_{11} - y_{21})) > y_{22} - g(y_{21}) \quad ,$$

o, lo que es igual,

$$v_0(\underline{y}_2 + \alpha(\underline{y}_1 - \underline{y}_2)) > v_0(\underline{y}_2) \;\; \forall \alpha \;/\; 0 < \alpha < \alpha_0 \quad .$$

Esto significa que

$$\forall \alpha \;/\; 0 < \alpha < \alpha_0 \;\; (\underline{y}_2 + \alpha(\underline{y}_1 - \underline{y}_2), \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_1 \quad .$$

- Si $(y_{11} - y_{21}) < 0$, argumentaríamos, de un modo similar, utilizando ahora el concepto de $g'_-(\underline{y}_2)$ en lugar de $g'_+(\underline{y}_2)$.

Por tanto $(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in L_1^*$

Sea $(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in L_1^*$. Ésto equivale a decir que $\underline{y}_1 - \underline{y}_2 \in LP(\underline{y}_2)$. Luego $\exists \alpha_0$ tal que, si $0 < \alpha < \alpha_0$,

$$(\underline{y}_2 + \alpha(\underline{y}_1 - \underline{y}_2), \underline{y}_2) \in \mathcal{R}_1 \quad ,$$

es decir,

$$v_0(\underline{y}_2 + \alpha(\underline{y}_1 - \underline{y}_2)) > v_0(\underline{y}_2) \quad .$$

Tal y como se define v_0, tendremos que

$$y_{22} - g(y_{21}) < y_{22} + \alpha(y_{12} - y_{22}) - g(y_{21} + \alpha(y_{11} - y_{21})) \quad .$$

Por tanto,

$$\begin{array}{lll} \dfrac{g(y_{21} + \alpha(y_{11} - y_{21})) - g(y_{21})}{\alpha(y_{11} - y_{21})} < \dfrac{y_{12} - y_{22}}{y_{11} - y_{21}} & \text{si} & y_{11} - y_{21} > 0 \\ \dfrac{g(y_{21} + \alpha(y_{11} - y_{21})) - g(y_{21})}{\alpha(y_{11} - y_{21})} > \dfrac{y_{12} - y_{22}}{y_{11} - y_{21}} & \text{si} & y_{11} - y_{21} < 0 \end{array}$$

Tomando límite cuando $\alpha \longrightarrow 0$, se tiene:

$$\begin{array}{lll} g'(\underline{y}_2) < \dfrac{y_{12} - y_{22}}{y_{11} - y_{21}} & \text{si} & y_{11} - y_{12} > 0 \\ g'(\underline{y}_2) > \dfrac{y_{12} - y_{22}}{y_{11} - y_{21}} & \text{si} & y_{11} - y_{12} < 0 \end{array}$$

Ambos casos se resumen en la expresión

$$g'(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) < 0 \quad .$$

Por tanto, queda demostrada la igualdad para L_1^*.

Para L_2^* la demostración es similar.

$L_3^* = \Delta$, pues no puede haber ningún segmento contenido en las curvas $\{\underline{y}_2 \sim\}$, ya que éstas son de clase ∞.

Finalmente, la igualdad para L_4^* se demuestra por el corolario 2.2.11 y las proposiciones 2.4.7 y 2.4.8. `cqd` $\triangleleft$

Hemos tratado hasta ahora el caso en el que V es unitario. Para poder generalizar nuestro estudio a una familia de funciones de $\mathbf{R}^2$ con cualquier cardinal, daremos primeramente una definición que amplía la dada en 2.4.3.

Definición 2.4.10 Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una $\succ_V-$preferencia en $\mathbf{R}^2$, donde V es una familia de funciones de clase $C^1(\mathbf{R}^2)$ tales que $v(y_1, y_2) = y_2 - g_v(y_1)$ y $v(0,0) = 0,\ \forall v \in V$. Para cada $\underline{y} = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$ y $\forall v \in V$, podemos definir los siguientes coeficientes:

$$\begin{array}{rcl} m_v^+(\underline{y}) & = & \sup\left\{ \frac{g_v(z_1)-g_v(y_1)}{z_1-y_1} : z_1 > y_1 \right\} \\ m_v^-(\underline{y}) & = & \sup\left\{ \frac{g_v(z_1)-g_v(y_1)}{z_1-y_1} : z_1 < y_1 \right\} \\ m_{v+}(\underline{y}) & = & \inf\left\{ \frac{g_v(z_1)-g_v(y_1)}{z_1-y_1} : z_1 > y_1 \right\} \\ m_{v-}(\underline{y}) & = & \inf\left\{ \frac{g_v(z_1)-g_v(y_1)}{z_1-y_1} : z_1 < y_1 \right\} \end{array}$$

$$M^+(\underline{y}) = \sup_v m_v^+(\underline{y}) \quad m^+(\underline{y}) = \inf_v m_v^+(\underline{y})$$

$$M^-(\underline{y}) = \sup_v m_v^-(\underline{y}) \quad m^-(\underline{y}) = \inf_v m_v^-(\underline{y})$$

$$M_+(\underline{y}) = \sup_v m_{v+}(\underline{y}) \quad m_+(\underline{y}) = \inf_v m_{v+}(\underline{y})$$

$$M_-(\underline{y}) = \sup_v m_{v-}(\underline{y}) \quad m_-(\underline{y}) = \inf_v m_{v-}(\underline{y})$$

La siguiente proposición nos describe las estructuras de aproximación lineales inferiores a las citadas $\succ_V-$preferencias.

Proposición 2.4.11 *Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una $\succ_V-$preferencia en $\mathbf{R}^2$ con las condiciones de 2.4.10. Se verifican las siguientes igualdades:*

$$\begin{array}{rcl} L_1 & = & \Big\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 : \\ & & \left.\begin{array}{l} M^+(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) < 0 \quad y \\ m_-(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) < 0 \end{array}\right\} \\ L_2 & = & \Big\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 : \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} M^{-}(\underline{y}_2)(y_{11}-y_{21})-(y_{12}-y_{22})>0 \quad y \\ m_{+}(\underline{y}_2)(y_{11}-y_{21})-(y_{12}-y_{22})>0 \end{array}\right\}$$

$$L_3 = \Delta$$

$$L_4 = \left\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 : \right.$$

$$si\ y_{11} < y_{21}, \quad \left[\begin{array}{l} M_{-}(\underline{y}_2)(y_{11}-y_{21})-(y_{12}-y_{22})<0 \quad y \\ m^{-}(\underline{y}_2)(y_{11}-y_{21})-(y_{12}-y_{22})>0 \end{array}\right]$$

$$\left. y\ si\ y_{11} > y_{21}, \quad \left[\begin{array}{l} M_{+}(\underline{y}_2)(y_{11}-y_{21})-(y_{12}-y_{22})>0 \quad y \\ m^{+}(\underline{y}_2)(y_{11}-y_{21})-(y_{12}-y_{22})<0 \end{array}\right] \right\}$$

$\triangleright$Demostración Las igualdades para L_1, L_2, L_3 se demuestran aplicando el resultado 2.4.2 junto con las proposiciones 2.4.5, 2.4.6 y 2.4.7, respectivamente.

Veamos qué ocurre en el caso de L_4. Para ello, denotemos por D_4 el conjunto que aparece igualado a L_4 en el enunciado. Vamos a demostrar que D_4 verifica la propiedad $\mathbf{P(1)}$ de la proposición 2.2.8 y, además, que $L_4 \subset D_4 \subset \mathcal{R}_{12}^c$. De este modo, aplicando el teorema 2.2.10, quedaría probada la igualdad $L_4 = D_4$.

Que D_4 verifica $\mathbf{P(1)}$ se obtiene directamente de su definición.

Probemos que $D_4 \subset \mathcal{R}_{12}^c$. Para ello, distinguiremos dos casos: Sea $(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in D_4$.

- Si $(y_{11} - y_{21}) < 0$, se verifica que

  $$M_{-}(\underline{y}_2)(y_{11}-y_{21})-(y_{12}-y_{22})<0 \quad ,$$

  con lo cual obtenemos que

  $$M_{-}(\underline{y}_2) > \frac{y_{12}-y_{22}}{y_{11}-y_{21}} \quad .$$

  Por definición de supremo, ésto implicaría que

  $$\exists v_j \in V \ / \ m_{v_j-}(\underline{y}_2) > \frac{y_{12}-y_{22}}{y_{11}-y_{21}} \quad .$$

  Así, por definición de $m_{v_j-}(\underline{y}_2)$,

  $$\frac{g_j(y_{11})-g_j(y_{21})}{y_{11}-y_{21}} > \frac{y_{12}-y_{22}}{y_{11}-y_{21}}[9] \quad .$$

[9] Utilizamos g_i y g_j para denotar a g_{vi} y g_{vj}, rspectivamente.

Ésto nos lleva, multiplicando por $y_{11} - y_{21}$, a que

$$g_j(y_{11}) - g_j(y_{21}) < y_{12} - y_{22} \Rightarrow y_{22} - g_j(y_{11}) < y_{12} - g_j(y_{21})$$

y, por tanto,

$$v_j(\underline{y}_2) < v_j(\underline{y}_1) \quad .$$

Por otra parte, también se verifica que

$$m^-(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) > 0 \quad .$$

Así,

$$m^-(\underline{y}_2) < \frac{y_{12} - y_{22}}{y_{11} - y_{21}} \quad .$$

Por definición de ínfimo, ésto implicaría que

$$\exists v_i \in V \ / \ m^-_{v_i}(\underline{y}_2) < \frac{y_{12} - y_{22}}{y_{11} - y_{21}} \quad .$$

De ésto, por definición de $m^-_{v_i}(\underline{y}_2)$, se obtiene que

$$\frac{g_i(y_{11}) - g_i(y_{21})}{y_{11} - y_{21}} < \frac{y_{12} - y_{22}}{y_{11} - y_{21}} \quad .$$

Multiplicando la desigualdad por $y_{11} - y_{21}$, obtenemos:

$$g_i(y_{11}) - g_i(y_{21}) > y_{12} - y_{22} \Rightarrow y_{22} - g_i(y_{21}) > y_{12} - g_i(y_{11}) \quad .$$

Por tanto,

$$v_i(\underline{y}_2) > v_i(\underline{y}_1) \quad .$$

Aplicando la proposición 2.1.4, tenemos que, si $(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in D_4$ y $y_{11} - y_{21} < 0$, $(\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathcal{R}^c_{12}$

- Si $(y_{11} - y_{21}) > 0$, se verifica por una parte que

$$M_+(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) > 0 \quad ,$$

Por tanto,

$$M_+(\underline{y}_2) > \frac{y_{12} - y_{22}}{y_{11} - y_{21}} \quad .$$

Como también se verifica que

$$m_+(\underline{y}_2)(y_{11}-y_{21})-(y_{12}-y_{22})<0 \quad ,$$

entonces, se obtiene que

$$m_+(\underline{y}_2)<\frac{y_{12}-y_{22}}{y_{11}-y_{21}} \quad .$$

Aplicando un razonamiento análogo al caso anterior, obtendríamos que $(\underline{y}_1,\underline{y}_2)\in\mathcal{R}_{12}^c$. Queda pues probado, que $D_4\subset\mathcal{R}_{12}^c$.

Veamos ahora que $L_4\subset D_4$.

Sea $(\underline{y}_1,\underline{y}_2)\in L_4$, entonces $\underline{y}_1-\underline{y}_2\in DD(\underline{y}_2)$, es decir,

$$(\underline{y}_2+\alpha(\underline{y}_1-\underline{y}_2),\underline{y}_2)\in\mathcal{R}_{12}^c,\ \forall\alpha>0 \quad .$$

Por la proposición 2.1.4, existirán $v_i,v_j\in V$ tales que

$$\begin{array}{rcl} v_i(\underline{y}_2+\alpha(\underline{y}_1-\underline{y}_2)) & > & v_i(\underline{y}_2)\ \ \forall\alpha>0 \\ v_j(\underline{y}_2+\alpha(\underline{y}_1-\underline{y}_2)) & < & v_j(\underline{y}_2)\ \ \forall\alpha>0 \end{array} \quad ,$$

o lo que es equivalente

$$(\mathbf{A})\left\{\begin{array}{ll} y_{22}+\alpha(y_{12}-y_{22})-g_i(y_{21}+\alpha(y_{11}-y_{21}))>y_{22}-g_i(y_{21}) & \forall\alpha>0 \\ y_{22}+\alpha(y_{12}-y_{22})-g_j(y_{21}+\alpha(y_{11}-y_{21}))<y_{22}-g_j(y_{21}) & \forall\alpha>0 \end{array}\right.$$

- Si $(y_{11}-y_{21})<0$, estas dos últimas desigualdades podrían expresarse por

$$\frac{g_i(y_{21}+\alpha(y_{11}-y_{21}))-g_i(y_{21})}{\alpha(y_{11}-y_{21})}>\frac{y_{12}-y_{22}}{y_{11}-y_{21}}\quad\forall\alpha>0$$

$$\frac{g_j(y_{21}+\alpha(y_{11}-y_{21}))-g_j(y_{21})}{\alpha(y_{11}-y_{21})}<\frac{y_{12}-y_{22}}{y_{11}-y_{21}}\quad\forall\alpha>0 \quad .$$

Ésto nos llevaría a que

$$m_{v_i-}(\underline{y}_2)>\frac{y_{12}-y_{22}}{y_{11}-y_{21}}>m_{v_i}^-(\underline{y}_2) \quad .$$

Por tanto,

$$M_{-}(\underline{y}_2) > \frac{y_{12} - y_{22}}{y_{11} - y_{21}} \quad ,$$

lo cual implica que

$$M_{-}(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) < 0 \quad .$$

Además,

$$m^{-}(\underline{y}_2) < \frac{y_{12} - y_{22}}{y_{11} - y_{21}} \quad ,$$

por lo que

$$m^{-}(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) > 0 \quad .$$

- Si $(y_{11} - y_{21}) > 0$, las desigualdades (**A**) se expresarían como

$$\frac{g_i(y_{21} + \alpha(y_{11} - y_{21})) - g_i(y_{21})}{\alpha(y_{11} - y_{21})} < \frac{y_{12} - y_{22}}{y_{11} - y_{21}} \quad \forall \alpha > 0$$

$$\frac{g_j(y_{21} + \alpha(y_{11} - y_{21})) - g_j(y_{21})}{\alpha(y_{11} - y_{21})} > \frac{y_{12} - y_{22}}{y_{11} - y_{21}} \quad \forall \alpha > 0 \quad .$$

Ésto nos lleva a que

$$m_{v_i+}(\underline{y}_2) > \frac{y_{12} - y_{22}}{y_{11} - y_{21}} > m^{+}_{v_i}(\underline{y}_2) \quad .$$

Por tanto,

$$M_{+}(\underline{y}_2) > \frac{y_{12} - y_{22}}{y_{11} - y_{21}} \quad ,$$

lo cual implica que

$$M_{+}(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) > 0 \quad .$$

Además,

$$m^{+}(\underline{y}_2) < \frac{y_{12} - y_{22}}{y_{11} - y_{21}} \quad ,$$

por lo que

$$m^{+}(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) < 0 \quad .$$

c.q.d. $\triangleleft$

Veamos ahora qué ocurre con las estructuras de aproximación lineal superiores.

Proposición 2.4.12 *Sea* $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ *una* $\succ_V$*−preferencia en* $\mathbf{R}^2$ *con las condiciones de 2.4.10. Se verifican las siguientes igualdades:*

$$
\begin{aligned}
L'_1 &= \Big\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 : \\
&\qquad \left. \begin{array}{ll} M^-(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) < 0 & \textit{o bien} \\ m_+(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) < 0 & \end{array} \right\} \\
L'_2 &= \Big\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 : \\
&\qquad \left. \begin{array}{ll} m_-(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) > 0 & \textit{o bien} \\ M^+(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) > 0 & \end{array} \right\} \\
L'_3 &= \Delta \\
L'_4 &= \Big\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 : \left[\begin{array}{l} m_-(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) > 0 \ y \\ M^-(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) < 0 \end{array} \right] \\
&\qquad \textit{o bien} \quad \left[\begin{array}{l} M^+(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) > 0 \ y \\ m_+(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) < 0 \end{array} \right] \Big\}
\end{aligned}
$$

$\triangleright$Demostración Se demuestra, atendiendo a la definición de estructura de aproximación lineal superior, y a la observación siguiente para determinar L'_4:

Toda función g_v verifica que su gráfica, a la izquierda de un punto $\underline{y}_2 \equiv (y_{21}, y_{22})$, está contenido en la región

$$m_{v-}(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) > 0 \text{ y } m_v^-(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) < 0 \quad ,$$

y, a la derecha de dicho punto, en

$$m_v^+(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) > 0 \text{ y } m_{v+}(\underline{y}_2)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) < 0$$

c.q.d. $\triangleleft$

Finalmente, veamos cuál es la estructura de aproximación lineal local.

Proposición 2.4.13 *Sea* $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ *una* $\succ_V -$*preferencia de* $\mathbf{R}^2$ *con las condiciones de 2.4.10. Se verifican las siguientes igualdades:*

$$
\begin{aligned}
L_1^* &= \Big\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 : \\
&\qquad \left.\begin{array}{l} (\inf_v g_v'(\underline{y}_2))(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) < 0 \text{ y} \\ (\sup_v g_v'(\underline{y}_2))(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) < 0 \end{array}\right\} \\
L_2^* &= \Big\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 : \\
&\qquad \left.\begin{array}{l} (\inf_v g_v'(\underline{y}_2))(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) > 0 \text{ y} \\ (\sup_v g_v'(\underline{y}_2))(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) > 0 \end{array}\right\} \\
L_3^* &= \Delta \\
L_4^* &= (L_1^*)^c \cap (L_2^*)^c \cap (L_3^*)^c
\end{aligned}
$$

$\triangleright$Demostración Las igualdades para L_1^* y L_2^* se demuestran aplicando el resultado 2.4.2 junto con la proposición 2.4.9.

Para demostrar la tercera igualdad, se utilizan los resultados 2.2.11, 2.4.11 y 2.4.12.

Finalmente, la igualdad para L_4^* se demuestra con la siguiente consideración: si una dirección $\underline{d}$, junto con un punto $\underline{y}_0$, no verifica que

$$
\exists \alpha_0 \ / \text{ si } \ 0 < \alpha < \alpha_0, \quad \text{o bien } (\underline{y}_0 + \alpha \underline{d}, \underline{y}_0) \in \mathcal{R}_1 \text{ ó } (\underline{y}_0 + \alpha \underline{d}, \underline{y}_0) \in \mathcal{R}_1^s
$$
$$
\text{ó } (\underline{y}_0 + \alpha \underline{d}, \underline{y}_0) \in \mathcal{R}_2 \quad ,
$$

entonces, $(\underline{y}_0 + \alpha \underline{d}, \underline{y}_0)$ debe pertenecer a $\mathcal{R}_{12}^c$, $\forall\ 0 < \alpha < \alpha_0$ (obsérvese que $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ es una $\succ_V -$preferencia). `c.q.d.` $\triangleleft$

Veamos ahora, igual que se hizo para el caso de las $\succ_V -$preferencias lineales, una caracterización de las $\succ_V -$preferencias definidas a partir de funciones globalmente convexas en $\mathbf{R}^2$

Teorema 2.4.14 *Sea* $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ *una* $\succ_V -$*preferencia en* $\mathbf{R}^2$*.* V *está constituida por funciones globalmente convexas en* $\mathbf{R}^2$ *sii*

$$L_2 = L_2^*$$

$\triangleright$Demostración

"$\Rightarrow$" Si g_v es una función convexa, entonces se verifica, $\forall \underline{y}_2 \in \mathbf{R}^2$, que

$$m_v^-(\underline{y}_2) = m_{+v}(\underline{y}_2) = g_v'(\underline{y}_2) \quad .$$

Por ello, aplicando las proposiciones 2.4.11 y 2.4.13, tendremos que $L_2 = L_2^*$.

"$\Leftarrow$" Si $L_2 = L_2*$, entonces, $\forall \underline{y}_2 \in \mathbf{R}^2$,

$$M^-(\underline{y}_2) = \sup_v m_v^-(\underline{y}_2) = \sup_v g_v'(\underline{y}_2) \quad (\text{ ó } \quad \inf_v g_v'(\underline{y}_2))$$

$$m^+(\underline{y}_2) = \inf_v m_v^+(\underline{y}_2) = \inf_v g_v'(\underline{y}_2) \quad (\text{ ó } \quad \sup_v g_v'(\underline{y}_2))$$

Como resulta que

$$m_v^-(\underline{y}_2) \geq g_v'(\underline{y}_2) \geq m_{v+}(\underline{y}_2) \quad ,$$

la $\succ_V-$preferencia puede ser descrita por un conjunto de funciones globalmente convexas, pues verifican que

$$m_v^-(\underline{y}_2) = m_{v+}(\underline{y}_2) = g_v'(\underline{y}_2) \quad ,$$

y esto es condición necesaria y suficiente para la convexidad

`c.q.d.` $\triangleleft$

El siguiente teorema es el análogo al anterior, pero con funciones globalmente cóncavas.

Teorema 2.4.15 *Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una $\succ_V-$preferencia en $\mathbf{R}^2$. V está constituida por funciones globalmente cóncavas en $\mathbf{R}^2$ sii*

$$L_1 = L_1^*$$

2.5. ESTRUCTURAS DE APROXIMACIÓN LINEAL Y $\succ_V-$ PREFERENCIAS EN $\mathbf{R}^n$

En éste último epígrafe del capítulo 2, vamos a generalizar los resultados obtenidos en el apartado anterior considerando $\succ_V-$ preferencias en el espacio $\mathbf{R}^n$. Iniciaremos nuestro estudio, como ya hiciéramos en la sección 2.4, restringiéndonos a las $\succ_V-$preferencias en donde V es un conjunto unitario. Una vez realizado el análisis para esta situación particular, pasaremos al caso más general, utilizando la proposición 2.4.2.

De este modo, consideraremos, en primer lugar, una estructura de preferencia $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ en $\mathbf{R}^n$ representada por una función de valor $v_0 \in C^1(\mathbf{R}^n)$ no lineal [10]. Esta función, tal y como se construye una función de valor, verificará el teorema de la función implícita. Por tanto, puede suponerse la existencia de una función $g \in C^1(\mathbf{R}^n)$ tal que

$$v_0(y_1, ..., y_n) = y_n - g(y_1, ..., y_{n-1}) \quad .$$

Además, impondremos la condición $v_0(0, ..., 0) = 0$.

A partir de ahora, utilizaremos la siguiente nomenclatura:

- Para cada $\underline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in S^{n-1}$ (esfera unidad en $\mathbf{R}^{n-1}$) e

  $$\underline{y}_0 = (y_{01}, y_{02}, ..., y_{0n}) \in \mathbf{R}^n \quad ,$$

  definiremos el plano:

  $$\prod{}_{\underline{a}}(\underline{y}_0) = \{(y_{01} + \lambda a_1, ..., y_{0n-1} + \lambda a_{n-1}, \mu) : \ \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$$

  y la hipersuperficie de $\mathbf{R}^n$

  $$v_{0,\underline{y}_0} = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n : \ v_0(x_1, ..., x_n) = v_0(y_{01}, ..., y_{0n})\} \quad .$$

- Al corte del plano con la superficie, $\prod_{\underline{a}}(\underline{y}_0) \cap v_{0,\underline{y}_0}$, la representaremos analíticamente por

  $$g_{\underline{a},\underline{y}_0}(\lambda) = x_n \quad ,$$

  que define una curva en $\mathbf{R}^n$.

[10] el caso lineal ya fue tratado en la sección 2.3.

- Para cada una de estas curvas, tendremos los siguientes coeficientes:

$$m^+_{\underline{a}}(\underline{y}_0) = \sup\left\{ \frac{g_{\underline{a},\underline{y}_0}(\lambda)-g_{\underline{a},\underline{y}_0}(0)}{\lambda} : \ \lambda > 0 \right\}$$

$$m^-_{\underline{a}}(\underline{y}_0) = \sup\left\{ \frac{g_{\underline{a},\underline{y}_0}(\lambda)-g_{\underline{a},\underline{y}_0}(0)}{\lambda} : \ \lambda < 0 \right\}$$

$$m_{+\underline{a}}(\underline{y}_0) = \inf\left\{ \frac{g_{\underline{a},\underline{y}_0}(\lambda)-g_{\underline{a},\underline{y}_0}(0)}{\lambda} : \ \lambda > 0 \right\}$$

$$m_{-\underline{a}}(\underline{y}_0) = \inf\left\{ \frac{g_{\underline{a},\underline{y}_0}(\lambda)-g_{\underline{a},\underline{y}_0}(0)}{\lambda} : \ \lambda < 0 \right\}$$

La siguiente proposición soluciona el problema de la estructura de aproximación lineal inferior para una estructura de preferencia $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$, bajo las hipótesis consideradas.

Proposición 2.5.1 *Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia bajo las hipótesis citadas. Se verifican las siguientes igualdades:*

$$L_1 = \bigcup_{\underline{a}\in S^{n-1}} L_1(\underline{a}) \qquad L_2 = \bigcup_{\underline{a}\in S^{n-1}} L_2(\underline{a})$$

$$L_3 = \bigcup_{\underline{a}\in S^{n-1}} L_3(\underline{a}) \qquad L_4 = \emptyset \quad ,$$

siendo

$$L_1(\underline{a}) \;=\; \left\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : \underline{y}_1 \in \textstyle\prod_{\underline{a}}(\underline{y}_2) \ \text{y además} \right. \left. \begin{array}{l} m^+_{\underline{a}}(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) < 0 \ \text{y} \\ m_{-\underline{a}}(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) < 0 \end{array} \right\}$$

$$L_2(\underline{a}) \;=\; \left\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : \underline{y}_1 \in \textstyle\prod_{\underline{a}}(\underline{y}_2) \ \text{y además} \right. \left. \begin{array}{l} m^-_{\underline{a}}(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) > 0 \ \text{y} \\ m_{+\underline{a}}(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) > 0 \end{array} \right\}$$

$$L_3(\underline{a}) \;=\; \left\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : \underline{y}_1 \in \textstyle\prod_{a}(\underline{y}_2) \right. \left. \begin{array}{l} m^+_{\underline{a}}(\underline{y}_2) = m_{-\underline{a}}(\underline{y}_2) = m^-_{\underline{a}}(\underline{y}_2) = m_{+\underline{a}}(\underline{y}_2) = m_{\underline{a}} \\ \text{y, además, } m_{\underline{a}}\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) = 0 \end{array} \right\} \quad ,$$

donde $\lambda(\underline{y}_1)$ *representa el coeficiente* λ *que determina a* $\underline{y}_1$ *en el plano* $\prod_{\underline{a}}(\underline{y}_2)$, *es decir*

$$(\underline{y}_1 = (y_{21} + \lambda(\underline{y}_1), y_{22} + \lambda(\underline{y}_1)a_2, ..., y_{2n-1}\lambda(\underline{y}_1)a_{n-1}, y_{1n})) \ .$$

$\triangleright$<u>Demostración</u> Por las proposiciones 2.4.5 y 2.4.6, $L_1(\underline{a})$ y $L_2(\underline{a})$ representan las aproximaciones a $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_1^s$ restringidas a los planos $\prod_{\underline{a}}(\underline{y}_2)$, siendo $\underline{y}_2 \in \mathbf{R}^n$.

Como recorrer $\underline{a} \in S^{n-1}$ supone recorrer todo el espacio $\mathbf{R}^n$, tendremos, que solucionar el problema en $\mathbf{R}^n$ es pasar a un conjunto de problemas en $\mathbf{R}^2$ y unir, posteriormente, todas sus posibles soluciones.

$L_4 = \emptyset$, pues $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ es completa y, por tanto, $\mathcal{R}_{12}^c = \emptyset$.

Finalmente, L_3 estará constituido por las rectas que aparezcan al intersecar el plano $\prod_{\underline{a}}(\underline{y}_2)$ con la hipersuperfie $V_{0\underline{y}_0}$, es decir, cuando $g_{\underline{a},\underline{y}_2}(\lambda) = x_n$ sea la ecuación de una recta (ver teorema 2.2.4). `c.q.d.` $\triangleleft$

El siguiente resultado nos resolverá el problema para el caso de las estructuras de aproximación lineal superiores.

Proposición 2.5.2 *Sea* $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ *una estructura de preferencia bajo las hipótesis de esta sección. Se verifican las siguientes igualdades:*

$$L_1' = \bigcup_{\underline{a} \in S^{n-1}} L_1'(\underline{a}) \qquad L_2' = \bigcup_{\underline{a} \in S^{n-1}} L_2'(\underline{a})$$

$$L_3' = \bigcup_{\underline{a} \in S^{n-1}} L_3'(\underline{a}) \qquad L_4' = \emptyset \quad ,$$

siendo

$$\begin{aligned} L_1'(\underline{a}) \;&=\; \Big\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : \underline{y}_1 \in \textstyle\prod_{\underline{a}}(\underline{y}_2) \text{ y además} \\ &\quad \left. \begin{matrix} m_{\underline{a}}^-(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) < 0 \quad \text{ó} \\ m_{+\underline{a}}(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) < 0 \end{matrix} \right\} \\ L_2'(\underline{a}) \;&=\; \Big\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : \underline{y}_1 \in \textstyle\prod_{\underline{a}}(\underline{y}_2) \text{ y además} \\ &\quad \left. \begin{matrix} m_{\underline{a}}^+(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) > 0 \quad \text{ó} \\ m_{-\underline{a}}(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) > 0 \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L_3'(\underline{a}) \;=\; \Big\{ & (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : \underline{y}_1 \in \textstyle\prod_{\underline{a}}(\underline{y}_2) \ \textit{y además} \\
& \left[\begin{array}{l} m_{-\underline{a}}(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) \geq 0 \quad y \\ m_{\underline{a}}^{-}(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) \leq 0 \end{array} \right] \\
& \textit{o bien} \quad \left[\begin{array}{l} m_{\underline{a}}^{+}(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) \geq 0 \quad y \\ m_{+\underline{a}}(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) \leq 0 \end{array} \right] \Big\} \quad ,
\end{aligned}
$$

siendo $\lambda(\underline{y}_1)$ *el coeficiente* λ *que determina a* $\underline{y}_1$ *en el plano* $\prod_{\underline{a}}(\underline{y}_2)$*, tal y como se especifica en la proposición 2.5.1.*

$\triangleright$<u>Demostración</u> Análoga al razonamiento realizado en la proposición anterior, usando, para este caso, el resultado 2.4.8. $\triangleleft$

Finalmente, veamos qué ocurre con las estructuras de aproximación lineales locales a través de la siguiente proposición.

Proposición 2.5.3 *Sea* $\mathbf{R}^n$ *una estructura de preferencia bajo las condiciones de esta sección. Se verifican las siguientes igualdades:*

$$
L_1^* = \bigcup_{\underline{a} \in S^{n-1}} L_1^*(\underline{a}) \qquad L_2^* = \bigcup_{\underline{a} \in S^{n-1}} L_2^*(\underline{a})
$$

$$
L_3^* = \Delta \qquad\qquad L_4^* = \emptyset \quad ,
$$

siendo

$$
\begin{aligned}
L_1^*(\underline{a}) &= \Big\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : \underline{y}_1 \in \textstyle\prod_{\underline{a}}(\underline{y}_2) \ y \\
&\qquad g'_{\underline{a}\underline{y}_2}(0)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) < 0 \Big\} \\
L_2^*(\underline{a}) &= \Big\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : \underline{y}_1 \in \textstyle\prod_{\underline{a}}(\underline{y}_2) \ y \\
&\qquad g'_{\underline{a}\underline{y}_2}(0)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) > 0 \Big\}
\end{aligned}
$$

$\triangleright$<u>Demostración</u> Análoga a la de los resultados anteriores, usando, en este caso, la proposición 2.4.9. $\triangleleft$

Hemos tratado el caso de una $\succ_V-$preferencia en $\mathbf{R}^n$ donde V es una familia unitaria. Para poder generalizar nuestro estudio al caso en el que V esté constituido por un número no determinado de funciones sobre $\mathbf{R}^n$, daremos unas definiciones previas basadas en las aparecidas en 2.4.10.

Definición 2.5.4 Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una $\succ_V -$preferencia en $\mathbf{R}^n$, siendo V una familia de funciones de clase $C^1(\mathbf{R}^n)$ tales que

$$\forall v \in V,\ v(y_1, ..., y_n) = y_n - g_v(y_1, ..., y_{n-1})$$

y

$$v(0, ..., 0) = 0 \quad .$$

Para cada $\underline{y} = (y_1, ..., y_n) \in \mathbf{R}^n$, $\underline{a} \in S^{n-1}$ y $v \in V$, podemos definir los siguientes coeficientes:

$$m^+_{v,\underline{a}}(\underline{y}) = \sup \left\{ \ \tfrac{g_{v,\underline{a}}(\lambda) - g_{v,\underline{a}}(0)}{\lambda} \ : \ \lambda > 0 \ \right\}$$

$$m^-_{v,\underline{a}}(\underline{y}) = \sup \left\{ \ \tfrac{g_{v,\underline{a}}(\lambda) - g_{v,\underline{a}}(0)}{\lambda} \ : \ \lambda < 0 \ \right\}$$

$$m_{+v,\underline{a}}(\underline{y}) = \inf \left\{ \ \tfrac{g_{v,\underline{a}}(\lambda) - g_{v,\underline{a}}(0)}{\lambda} \ : \ \lambda > 0 \ \right\}$$

$$m_{-v,\underline{a}}(\underline{y}) = \inf \left\{ \ \tfrac{g_{v,\underline{a}}(\lambda) - g_{v,\underline{a}}(0)}{\lambda} \ : \ \lambda < 0 \ \right\}$$

siendo $g_{v,\underline{a}}$ la intersección del plano $\prod_{\underline{a}}(\underline{y})$ con la hipersuperficie

$$v_{\underline{y}} = \{(x_1, ..., x_n) : \ v(x_1, ..., x_n) = v(y_1, ..., y_n)\}$$

$$\begin{array}{llll}
M^+_{\underline{a}}(\underline{y}) = & \underset{v}{\sup}\ m^+_{v,\underline{a}}(\underline{y}) & m^+_{\underline{a}}(\underline{y}) = & \underset{v}{\inf}\ m^+_{v,\underline{a}}(\underline{y}) \\
M^-_{\underline{a}}(\underline{y}) = & \underset{v}{\sup}\ m^-_{v,\underline{a}}(\underline{y}) & m^-_{\underline{a}}(\underline{y}) = & \underset{v}{\inf}\ m^-_{v,\underline{a}}(\underline{y}) \\
M_{+\underline{a}}(\underline{y}) = & \underset{v}{\sup}\ m_{+v,\underline{a}}(\underline{y}) & m_{+\underline{a}}(\underline{y}) = & \underset{v}{\inf}\ m_{+v,\underline{a}}(\underline{y}) \\
M_{-\underline{a}}(\underline{y}) = & \underset{v}{\sup}\ m_{-v,\underline{a}}(\underline{y}) & m_{-\underline{a}}(\underline{y}) = & \underset{v}{\inf}\ m_{-v,\underline{a}}(\underline{y})
\end{array}$$

Veamos cómo se describen las aproximaciones lineales inferiores para este caso de $\succ_V -$preferencia general.

Proposición 2.5.5 *Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una $\succ_V -$preferencia en $\mathbf{R}^n$ en las condiciones de 2.5.4. Se verifican las siguientes igualdades:*

$$L_1 = \bigcup_{\underline{a}\in S^{n-1}} L_1(\underline{a}) \qquad L_2 = \bigcup_{\underline{a}\in S^{n-1}} L_2(\underline{a})$$

$$L_3 = \bigcup_{\underline{a}\in S^{n-1}} L_3(\underline{a}) \qquad L_4 = \bigcup_{\underline{a}\in S^{n-1}} L_4(\underline{a})$$

siendo

$$\begin{aligned}
L_1(\underline{a}) &= \Big\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : \underline{y}_1 \in \textstyle\prod_{\underline{a}}(\underline{y}_2) \ \textit{y además} \\
&\qquad \left.\begin{array}{l} M^+_{\underline{a}}(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) < 0 \\ m_{-\underline{a}}(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) < 0 \end{array}\right\} \\
L_2(\underline{a}) &= \Big\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : \underline{y}_1 \in \textstyle\prod_{\underline{a}}(\underline{y}_2) \ \textit{y además} \\
&\qquad \left.\begin{array}{l} M^-_{\underline{a}}(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) > 0 \\ m_{+\underline{a}}(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) > 0 \end{array}\right\} \\
L_3(\underline{a}) &= \Big\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : \underline{y}_1 \in \textstyle\prod_{a}(\underline{y}_2) \\
&\qquad \left.\begin{array}{l} M^+_{\underline{a}}(\underline{y}_2) = m_{-\underline{a}}(\underline{y}_2) = M^-_{\underline{a}}(\underline{y}_2) = m_{+\underline{a}}(\underline{y}_2) = m_{\underline{a}} \\ \textit{y además } m_{\underline{a}}\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) = 0 \end{array}\right\} \\
L_4(\underline{a}) &= \Big\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : \underline{y}_1 \in \textstyle\prod_{\underline{a}}(\underline{y}_2) \\
&\qquad \textit{si } \lambda(\underline{y}_1) < 0, \quad \left[\begin{array}{l} M_{-\underline{a}}(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) < 0 \quad y \\ m^-_{\underline{a}}(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) > 0 \end{array}\right] \\
&\qquad \textit{y si } \lambda(\underline{y}_1) > 0, \quad \left.\left[\begin{array}{l} M_{+\underline{a}}(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) > 0 \quad y \\ m^+_{\underline{a}}(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) < 0 \end{array}\right]\right\}
\end{aligned}$$

$\triangleright$Demostración Para las igualdades de L_1, L_1 y L_4 se utiliza un razonamiento similar al realizado en las proposiciones de esta sección, junto con el resultado 2.4.11. Para demostrar la igualdad de L_3, se razona de modo similar a la proposición 2.5.1. $\triangleleft$

Proposición 2.5.6 *Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una $\succ_V-$preferencia en $\mathbf{R}^n$ con las condiciones de 2.5.4. Se verifican las siguientes igualdades:*

$$L'_1 = \bigcup_{\underline{a}\in S^{n-1}} L'_1(\underline{a}) \qquad L'_2 = \bigcup_{\underline{a}\in S^{n-1}} L'_2(\underline{a})$$

$$L'_3 =< L'_3 > \qquad L'_4 = \bigcup_{\underline{a}\in S^{n-1}} L'_4(\underline{a}) \quad .$$

siendo

$$
\begin{array}{rcl}
L'_1(\underline{a}) & = & \Big\{ \; (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : \underline{y}_1 \in \prod_{\underline{a}}(\underline{y}_2) \;\; y,\; \textit{además,} \\
 & & \left. \begin{array}{l} M^-_{\underline{a}}(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) < 0 \quad \textit{ó} \\ m_{+\underline{a}}(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) < 0 \end{array} \right\} \\
L'_2(\underline{a}) & = & \Big\{ \; (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : \underline{y}_1 \in \prod_{\underline{a}}(\underline{y}_2) \;\; y,\; \textit{además,} \\
 & & \left. \begin{array}{l} m_{-\underline{a}}(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) > 0 \quad \textit{ó} \\ M^+_{\underline{a}}(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) > 0 \end{array} \right\} \\
L'_4(\underline{a}) & = & \Big\{ \; (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : \underline{y}_1 \in \prod_{\underline{a}}(\underline{y}_2) \;\; y,\; \textit{o bien} \\
 & & \left[\begin{array}{l} m_{-\underline{a}}(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) > 0 \quad y \\ M^-_{\underline{a}}(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) < 0 \end{array} \right] \\
 & & \quad \textit{ó} \; \left[\begin{array}{l} M^+_{\underline{a}}(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) > 0 \quad y \\ m_{+\underline{a}}(\underline{y}_2)\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) < 0 \end{array} \right] \Bigg\}
\end{array}
$$

y $< L'_3 >$ *representa el subespacio vectorial de* $\mathbf{R}^n$ *generado por* L'_3.

▷Demostración Utilizando la proposición 2.4.12 y el teorema 2.2.4. ◁

Finalmente, veamos un resultado para las estructuras de aproximación lineales locales.

Proposición 2.5.7 *Sea* $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ *una* $\succ_V -$*preferencia en* $\mathbf{R}^n$ *con las condiciones 2.5.4. Se verifican las siguientes igualdades:*

$$
L^*_1 = \textstyle\bigcup_{\underline{a} \in S^{n-1}} L^*_1(\underline{a}) \qquad L^*_2 = \textstyle\bigcup_{\underline{a} \in S^{n-1}} L^*_2(\underline{a})
$$

$$
L^*_3 = \Delta \qquad\qquad L^*_4 = \textstyle\bigcup_{\underline{a} \in S^{n-1}} L^*_4(\underline{a}) \quad ,
$$

siendo

$$
L^*_1(\underline{a}) \;\; = \;\; \Big\{ \; (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : \underline{y}_1 \in \prod_{\underline{a}}(\underline{y}_2) \;\; y
$$

$$
\begin{array}{rcl}
& & \left.\begin{array}{l}(\inf_v g'_{v,\underline{a}}(\underline{y}_2))\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) < 0 \\ (\sup_v g'_{v,\underline{a}}(\underline{y}_2))\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) < 0\end{array}\right\} \\
L_2^*(\underline{a}) & = & \left\{ \; (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : \underline{y}_1 \in \prod_{\underline{a}}(\underline{y}_2) \; y \right. \\
& & \left.\begin{array}{l}(\inf_v g'_{v,\underline{a}}(\underline{y}_2))\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) > 0 \\ (\sup_v g'_{v,\underline{a}}(\underline{y}_2))\lambda(\underline{y}_1) - (y_{1n} - y_{2n}) > 0\end{array}\right\} \\
L_4^*(\underline{a}) & = & (L_1^*(\underline{a}))^c \cap (L_2^*(\underline{a}))^c \cap (L_3^*(\underline{a}))^c \quad .
\end{array}
$$

Capítulo 3

Eficiencia en $\succ_V$−preferencias

En el primer capítulo se introdujeron los conceptos de *conjunto eficiente* y *conjunto eficiente estricto* en estructuras de preferencia generales, haciendo un estudio más detallado para algunas de éstas estructuras, como las asociadas al orden de Pareto, las asociadas al orden lexicográfico, las cónicas constantes, etc. En dicho estudio no se incluyeron ciertas clases como las representadas por una función de valor vectorial o las inducidas por familias de conjuntos convexos, argumentando que éste se llevaría a cabo en un marco más amplio, constituido por las llamadas $\succ_V$−preferencias.

Nuestro propósito en este último capítulo, una vez estudiadas las $\succ_V$−preferencias en el anterior, es ampliar el análisis de la eficiencia a dicho marco.

Primeramente, en la sección 3.1, se tratará la eficiencia para una clase particular de estructuras inducidas por familias de conjuntos convexos: las estructuras cónicas no constantes.

Toda estructura de preferencia general, a través de sus aproximaciones lineales, origina estructuras del tipo estudiado en 3.1. Es por ello por lo que los resultados aquí obtenidos son usados en la sección 3.2 para aproximar conjuntos eficientes en dicho caso general.

Basándonos en cierto método iterativo de aproximación, aparecido en *Yu (1974)*, en la sección 3.3 se consigue acotar superior e inferiormente los conjuntos eficientes en $\succ_V$−preferencias.

Finalmente, la sección 3.4 trata la noción de eficiencia estricta para dichas estructuras.

3.1. EFICIENCIA EN ESTRUCTURAS DE PREFERENCIA CÓNICAS NO CONSTANTES

La definición de este tipo de estructura es una particularización del concepto de estructura de preferencia inducida por una familia de conjuntos convexos, caso en el que dichos conjuntos convexos sean conos (ver definición 1.2.1).

Definición 3.1.1 Sea $Y \subset \mathbf{R}^n$ el espacio de objetivos o consecuencias dentro de un problema de decisión multiobjetivo. Llamaremos **estructura de preferencia cónica no constante inducida por una familia de conos convexos** $\{K(\underline{y}_0)\}_{\underline{y}_0 \in Y}$ a una estructura de preferencia, $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$, inducida por dicha familia.

Un ejemplo de este tipo de estructuras nos lo proporciona la siguiente proposición

Proposición 3.1.2 *Sea* $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ *una* $\succ_V$*−preferencia en* $\mathbf{R}^n$, *y* (L_1, L_2, L_3, L_4), $(L_1^*, L_2^*, L_3^*, L_4^*)$ *sus estructuras de aproximación lineal inferior y local, respectivamente. Se verifica que* (L_1, L_3), (L_2^s, L_3), (L_1^*, L_3^*) *y* (L_2^{*s}, L_3^*) *son estructuras de preferencia cónicas no constante.*

▷Demostración. Por ser $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una $\succ_V$−preferencia y considerando la descripción que sobre sus aproximaciones lineales se hizo en el capítulo anterior, tendremos las siguientes equivalencias:

$$\left\{\begin{array}{l} (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in L_1 \Leftrightarrow \underline{y}_1 - \underline{y}_2 \in C\ell P(\underline{y}_2) \\ \text{pero } \ \underline{y}_2 - \underline{y}_1 \notin C\ell P(\underline{y}_1) \\ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in L_3 \Leftrightarrow \underline{y}_1 - \underline{y}_2 \in C\ell P(\underline{y}_2) \\ \text{y, además, } \ \underline{y}_2 - \underline{y}_1 \in C\ell P(\underline{y}_1) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in L_2^s \Leftrightarrow \underline{y}_1 - \underline{y}_2 \in C\ell - D(\underline{y}_2) \\ \text{pero } \ \underline{y}_2 - \underline{y}_1 \notin C\ell - D(\underline{y}_1) \\ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in L_3 \Leftrightarrow \underline{y}_1 - \underline{y}_2 \in C\ell - D(\underline{y}_2) \\ \text{y, además, } \ \underline{y}_2 - \underline{y}_1 \in C\ell - D(\underline{y}_1) \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in L_1^* \Leftrightarrow \underline{y}_1 - \underline{y}_2 \in C\ell LP(\underline{y}_2) \\ \text{pero } \ \underline{y}_2 - \underline{y}_1 \notin C\ell LP(\underline{y}_1) \\ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in L_3^* \Leftrightarrow \underline{y}_1 - \underline{y}_2 \in C\ell LP(\underline{y}_2) \\ \text{y, además, } \ \underline{y}_2 - \underline{y}_1 \in C\ell LP(\underline{y}_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in L_2^{*s} \Leftrightarrow \underline{y}_1 - \underline{y}_2 \in C\ell - LD(\underline{y}_2) \\ \text{pero } \ \underline{y}_2 - \underline{y}_1 \notin C\ell - LD(\underline{y}_1) \\ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in L_3^* \Leftrightarrow \underline{y}_1 - \underline{y}_2 \in C\ell - LD(\underline{y}_2) \\ \text{y, además, } \ \underline{y}_2 - \underline{y}_1 \in C\ell - LD(\underline{y}_1) \end{cases}$$

Ésto nos demuestra que (L_1, L_3), (L_2^s, L_3), (L_1^*, L_3^*) y (L_2^{*s}, L_3^*) son estructuras de preferencia cónicas no constantes inducidas por los conos

$$\begin{array}{ll} \{C\ell P(\underline{y}_0)\}_{\underline{y}_0 \in Y}, & \{C\ell - D(\underline{y}_0)\}_{\underline{y}_0 \in Y}, \\ \{C\ell LP(\underline{y}_0)\}_{\underline{y}_0 \in Y}, & \{C\ell - LD(\underline{y}_0)\}_{\underline{y}_0 \in Y} \quad , \end{array}$$

respectivamente. `c.q.d.` $\triangleleft$

El conjunto eficiente, para una estructura de preferencia cónica no constante, puede aproximarse superior e inferiormente por conjuntos eficientes para estructuras de preferencia cónicas constantes, como se demuestra en el siguiente resultado.

Proposición 3.1.3 *Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia cónica no constante en $Y \subset \mathbf{R}^n$ inducida por una familia de conos convexos $\{K(\underline{y}_0)\}_{\underline{y}_0 \in Y}$. Si se verifica que*

$$\bigcap_{\underline{y}_0 \in Y} K(\underline{y}_0) \neq \{\underline{0}\}$$

y el cono generado por ese conjunto,

$$< \bigcup_{\underline{y}_0 \in Y} K(\underline{y}_0) > \quad ,$$

es un conjunto convexo, entonces

$$\xi(Y, (D_0, D_0')) \subset \xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)) \subset \xi(Y, (D, D')) \quad ,$$

siendo (D, D') y (D_0, D_0') las estructuras de preferencias cónicas constantes inducidas por los conos $\cap_{\underline{y}_0 \in Y} K(\underline{y}_0)$ y $< \cup_{\underline{y}_0 \in Y} \ K(\underline{y}_0) >$, respectivamente.

▷Demostración. Sea $\underline{y}_1 \in \xi(Y,(D_0,D'_0))$. Ésto significa que

$$\forall \underline{y} \in Y \quad (\underline{y},\underline{y}_1) \notin D_0 \quad ,$$

es decir,

$$\underline{y} - \underline{y}_1 \notin < \bigcup_{\underline{y}_0 \in Y} K(\underline{y}_0) >, \ \forall \underline{y} \in Y \quad .$$

Por tanto, $\underline{y} - \underline{y}_1 \notin K(\underline{y}_1)\ \forall \underline{y} \in Y$, es decir, $(\underline{y},\underline{y}_1) \notin \mathcal{R}_1\ \forall \underline{y} \in Y$, lo que implica que

$$\underline{y}_1 \in \xi(Y,(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)) \quad .$$

Consideremos ahora $\underline{y}_1 \in \xi(Y,(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2))$. Ésto significa que

$$\forall \underline{y} \in Y \quad (\underline{y},\underline{y}_1) \notin \mathcal{R}_1 \quad ,$$

luego

$$\underline{y} - \underline{y}_1 \notin K(\underline{y}_1), \ \forall \underline{y} \in Y \quad ,$$

lo que implica que

$$\underline{y} - \underline{y}_1 \notin \bigcap_{\underline{y}_0 \in Y} K(\underline{y}_0)\ \forall \underline{y} \in Y \quad .$$

Por tanto, $(\underline{y},\underline{y}_1) \notin D,\ \forall \underline{y} \in Y$. De esta forma,

$$\underline{y}_1 \in \xi(Y,(D,D')) \quad ,$$

c.q.d. ◁

Yu (1974) estudia este tipo de problemas, limitándose al caso de las aproximaciones superiores. Obsérvese, que podían haberse utilizado estructuras de preferencias cónicas constantes más sencillas, definiendo (D,D') y (D_0,D'_0) como aquellas estructuras inducidas por los conos $\bigcap_{\underline{y}_0 \in \delta Y} K(\underline{y}_0)$ y $< \bigcup_{\underline{y}_0 \in \delta Y} K(\underline{y}_0) >$, respectivamente. Ello se debe a que el conjunto eficiente para una estructura de preferencia cónica no constante se encuentra en las condiciones 1.4.6 y, por tanto, estará incluido en δY, con lo cual podría utilizarse a dicho conjunto, en lugar de Y, para definir los conos anteriores.

3.2. APROXIMACIONES A CONJUNTOS EFICIENTES PARA ESTRUCTURAS DE PREFERENCIA GENERALES

Los resultados obtenidos en la sección anterior serán utilizados aquí, con el propósito de dar aproximaciones a conjuntos eficientes para una estructura de preferencia general $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$.

Proposición 3.2.1 *Sea* $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ *una estructura de preferencia en* $Y \subset \mathbf{R}^n$ *y consideremos* (L_1, L_2, L_3, L_4), $(L_1^*, L_2^*, L_3^*, L_4^*)$ *sus estructuras de aproximación lineal inferior y local, respectivamente. Se verifica que*

$$\xi(Y, (D_{01}, D'_{01})) \subset \xi(Y, (L_1, L_3)) \subset \xi(Y, (D_1, D'_1))$$

$$\xi(Y, (D_{02}, D'_{02})) \subset \xi(Y, (L_2^s, L_3)) \subset \xi(Y, (D_2, D'_2))$$

$$\xi(Y, (D^*_{01}, D^{*'}_{01})) \subset \xi(Y, (L_1^*, L_3^*)) \subset \xi(Y, (D_1^*, D_1^{*'}))$$

$$\xi(Y, (D^*_{02}, D^{*'}_{02})) \subset \xi(Y, (L_2^{*s}, L_3^*)) \subset \xi(Y, (D_2^*, D_2^{*'})) \quad ,$$

donde (D_{01}, D'_{01}), (D_{02}, D'_{02}), $(D^*_{01}, D^{*'}_{01})$ *y* $(D^*_{02}, D^{*'}_{02})$ *son estructuras de preferencia cónicas constantes inducidas, respectivamente, por los conos*

$$< \bigcup_{\underline{y}_0 \in Y} P(\underline{y}_0) > \qquad < \bigcup_{\underline{y}_0 \in Y} -D(\underline{y}_0) >$$

$$< \bigcup_{\underline{y}_0 \in Y} LP(\underline{y}_0) > \quad < \bigcup_{\underline{y}_0 \in Y} -LD(\underline{y}_0) >$$

Y (D_1, D'_1), (D_2, D'_2), $(D_1^*, D_1^{*'})$ *y* $(D_2^*, D_2^{*'})$ *son estructuras de preferencia cónicas constantes inducidas, respectivamente, por los conos*

$$\bigcap_{\underline{y}_0 \in Y} P(\underline{y}_0) \qquad \bigcap_{\underline{y}_0 \in Y} -D(\underline{y}_0)$$

$$\bigcap_{\underline{y}_0 \in Y} LP(\underline{y}_0) \quad \bigcap_{\underline{y}_0 \in Y} -LD(\underline{y}_0) \quad ,$$

siempre que estas intersecciones no sean iguales a $\{\underline{0}\}$ *y estos conos, junto con los anteriores, sean convexos*

$\triangleright$Demostración. Se obtiene aplicando 3.1.2 y, posteriormente, 3.1.3 $\triangleleft$

El siguiente teorema permitirá aproximar, superior e inferiormente, el conjunto eficiente para una estructura de preferencia general a partir de las estructuras de preferencia cónicas definidas en el resultado anterior.

Teorema 3.2.2 *Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia en $Y \subset \mathbf{R}^n$ y (L_1, L_2, L_3, L_4), $(L_1^*, L_2^*, L_3^*, L_4^*)$ sus estructuras de aproximación lineal inferior y local, respectivamente.*

1. *Si $\cap_{\underline{y}_0 \in Y} P(\underline{y}_0)$ y $\cap_{\underline{y}_0 \in Y} - D(\underline{y}_0)$ no son iguales a $\{\underline{0}\}$ y son conjuntos convexos, se verifica que*

$$\xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)) \subset \xi(Y, (D_1, D_1')) \cap \xi(Y, (D_2, D_2'))$$

2. *Si, además se verifica, que $L_1' = L_1^*$, $L_2' = L_2^*$ y*

$$< \bigcup_{\underline{y}_0 \in Y} LP(\underline{y}_0) > \quad , \quad < \bigcup_{\underline{y}_0 \in Y} -LD(\underline{y}_0) >$$

son conjuntos convexos, tendremos que

$$\xi(Y, (D_{01}^*, D_{01}^{*'})) \cup \xi(Y, (D_{02}^*, D_{02}^{*'})) \subset \xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2))$$

$\triangleright$Demostración.

1. Sea $\underline{y}_1 \in \xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2))$. Entonces se verifica las dos afirmaciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} \textbf{(a)} & \forall \underline{y} \in Y \quad (\underline{y}, \underline{y}_1) \notin \mathcal{R}_1 \\ \textbf{(b)} & \forall \underline{y} \in Y \quad (\underline{y}, \underline{y}_1) \notin \mathcal{R}_1^s \end{array}$$

A partir de **(a)** se obtiene que $(\underline{y}, \underline{y}_1) \notin L_1$ $\forall \underline{y} \in Y$, es decir,

$$\underline{y} - \underline{y}_1 \notin P(\underline{y}_1) \quad \forall \underline{y} \in Y \quad .$$

Por tanto,

$$\underline{y} - \underline{y}_1 \notin \bigcap_{\underline{y}_0 \in Y} P(\underline{y}_0) \ \forall \underline{y} \in Y \quad ,$$

lo que implica que

$$\underline{y}_1 \in \xi(Y,(D_1,D_1')) \quad .$$

A partir de **(b)** se obtiene que $(\underline{y}_1,\underline{y}) \notin L_2\ \forall \underline{y} \in Y$, es decir,

$$\underline{y}_1 - \underline{y} \notin D(\underline{y}) \quad \forall \underline{y} \in Y \quad .$$

De esta manera,

$$\underline{y}_1 - \underline{y} \notin \bigcap_{\underline{y}_0 \in Y} D(\underline{y}_0) \quad \forall \underline{y} \in Y \quad ,$$

con lo cual

$$\underline{y} - \underline{y}_1 \notin \bigcap_{\underline{y}_0 \in Y} -D(\underline{y}_0) \quad \forall \underline{y} \in Y \quad .$$

Ésto implica que

$$\underline{y}_1 \in \xi(Y,(D_2,D_2')) \quad .$$

2. Sea $\underline{y}_1 \in \xi(Y,(D_{01}^*,D_{01}^{*;}))$. Esto implica que

$$\forall \underline{y} \in Y \quad (\underline{y},\underline{y}_1) \notin D_{01}^* \quad ,$$

con lo cual

$$\underline{y} - \underline{y}_1 \notin < \bigcup_{\underline{y}_0 \in Y} LP(\underline{y}_0) > \quad \forall \underline{y} \in Y$$

y, por tanto,

$$\underline{y} - \underline{y}_1 \notin LP(\underline{y}_1)\ ,\ \forall \underline{y} \in Y \quad .$$

Ésto significa que

$$(\underline{y},\underline{y}_1) \notin L_1^* = L_1'\ ,\ \forall \underline{y} \in Y \quad ,$$

lo cual implica que

$$(\underline{y},\underline{y}_1) \notin \mathcal{R}_1\ \forall \underline{y} \in Y \quad .$$

Por tanto

$$\underline{y}_1 \in \xi(Y,(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)) \quad .$$

Por un razonamiento similar obtendríamos, que dado $\underline{y}_1 \in \xi(Y,(D_{02}^*,D_{02}^{*;}))$,

$$\underline{y}_1 \in \xi(Y,(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)) \quad .$$

`c.q.d.` ◁

Se ha visto en el último resultado, que las aproximaciones al conjunto eficiente para una estructura de preferencia general, se obtienen de las aproximaciones a las estructuras de preferencia cónicas no constantes definidas a partir de ésta (proposición 3.1.2).

Debido a lo anterior, describiremos, seguidamente, un método iterativo que permita aproximar los conjuntos eficientes para estructuras de preferencia cónicas no constante que, a su vez, ayudará a aproximar, según el teorema 3.2.2, a los conjuntos eficientes para estructuras más generales (ésto aparecerá recogido en el teorema 3.2.6, que se enuncia al final de la sección).

Lo que proponemos es una ampliación al método empleado por *Yu (1974)*, adaptada al contexto en el cual se desarrolla esta memoria.

MÉTODO ITERATIVO DE APROXIMACIÓN AL CONJUNTO EFICIENTE PARA UNA ESTRUCTURA DE PREFERENCIA CÓNICA NO CONSTANTE

Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una estructura de preferencia cónica no constante en $Y \subset \mathbf{R}^n$, definida a partir de la familia de conos convexos $\{K(\underline{y}_0)\}_{\underline{y}_0 \in Y}$. Si

$$\bigcap_{\underline{y}_0 \in Y} K(\underline{y}_0) \neq \{\underline{0}\} \quad ,$$

$$< \bigcup_{\underline{y}_0 \in Y} K(\underline{y}_0) >$$

es convexo, y consideramos (D, D') y (D_0, D'_0) las estructuras de preferencia cónicas constantes inducidas por los conos

$$\bigcap_{\underline{y}_0 \in Y} K(\underline{y}_0) \quad \text{y} \quad < \bigcup_{\underline{y}_0 \in Y} K(\underline{y}_0) > \quad ,$$

respectivamente, podemos dar el siguiente algoritmo, el cual proporciona una aproximación superior para el conjunto $\xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2))$:

Paso 0: Consideramos el conjunto $Y^0 = Y$ y $n = 0$.

Paso 1: Consideramos la estructura de preferencia cónica constante $(D^n, D^{n\prime})$ inducida por el cono

$$\bigcap_{\underline{y}_0 \in Y^n} K(\underline{y}_0) \quad .$$

Paso 2: Llamamos $Y^{n+1} = \xi(Y^n, (D^n, D^{n\prime}))$.

Paso 3: Si $Y^{n+1} = Y^n$, paramos, e Y^n sería la aproximación superior a $\xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2))$ que buscábamos.

Si $Y^{n+1} \neq Y^n$, se incrementa el contador n en una unidad y volvemos al paso **1**

Una pregunta sería: ¿hacia dónde converge este algoritmo, caso que no parásemos en un número finito de pasos? La respuesta nos la da el siguiente teorema.

Teorema 3.2.3 *Si llamamos $\overline{Y}$ a $\bigcap_{n\geq 0} Y^n$ y ξ a $\xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2))$, se verifica que:*

1. $\xi \subset Y^n \quad \forall n \geq 0$

2. $\xi \subset \overline{Y}$

▷Demostración.

1. Vamos a demostrarlo por inducción.

   - $\xi \subset Y^1$. Ésto se verifica por la proposición 3.1.3.
   - Si $\xi \subset Y^n$, veamos que $\xi \subset Y^{n+1}$. Supongamos que existese $\underline{y}_1 \in \xi$ tal que $\underline{y}_1 \notin Y^{n+1}$. Entonces, por definición de Y^{n+1}, existiría un $\underline{y} \in Y^n$, $\underline{y} \neq \underline{y}_1$, tal que

$$\underline{y} \in \underline{y}_1 + \bigcap_{\underline{y}_0 \in Y^n} K(\underline{y}_0) \subset \underline{y}_1 + K(\underline{y}_1) \quad .$$

   Por tanto, $\underline{y}_1 \notin \xi$, que es absurdo

2. Se obtiene a partir de la definición de $\overline{Y}$ y el resultado *1.* `c.q.d.` ◁

De forma similar, vamos a proporcionar un algoritmo que nos permita obtener una aproximación inferior al conjunto eficiente $\xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2))$

Paso 0: Consideramos $Y_0 = \xi(Y, (D_0, D_0'))$ y $n = 1$.

Paso 1: Consideramos la estructura de preferencia cónica constante $(D_{*n}, {D_{*n}}')$, inducida por el cono

$$< \bigcup_{\underline{y}_0 \in Y \setminus Y_{n-1}} K(\underline{y}_0) >$$

Paso 2: Llamamos $Y_n = \xi(Y, (D_{*n}, {D_{*n}}'))$.

Paso 3: Si $Y_n = Y_{n-1}$, paramos e Y_{n-1} sería la aproximación inferior a $\xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2))$ que buscábamos.

Si $Y_n \neq Y_{n-1}$ se incrementa el contador n en una unidad y volvemos al paso **1**

La convergencia de este algoritmo queda resuelta con el siguiente resultado.

Teorema 3.2.4 *Si llamamos* $\overline{Y}_*$ *a* $\bigcap_{n\geq 0} Y_n$ *y* ξ *a* $\xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2))$*, se verifica que:*

1. $Y_n \subset \xi \quad \forall n \geq 0$

2. $\overline{Y}_* \subset \xi$

$\triangleright$Demostración.

1. Vamos a demostrarlo por indución.

   - $Y_0 \subset \xi$, por la proposición 3.1.3.
   - Veamos que $Y_1 \subset \xi$. Para ello, demostraremos, en primer lugar, que $Y_0 \subset Y_1$.
     Sea $\underline{y}_1 \in Y_0 = \xi(Y, (D_0, D_0'))$. Entonces

     $$\forall \underline{y} \in Y, \quad \underline{y} - \underline{y}_1 \notin < \bigcup_{\underline{y}_0 \in Y} K(\underline{y}_0) > \quad .$$

     Luego

     $$\forall \underline{y} \in Y \quad \underline{y} - \underline{y}_1 \notin < \bigcup_{\underline{y}_0 \in Y \setminus Y_0} K(\underline{y}_0) > \; \Rightarrow$$

     $$\underline{y}_1 \in \xi(Y, (D_{*1}, D_{*1}')) = Y_1$$

Consideremos, pues, la descomposición $Y_1 = Y_1 \backslash Y_0 \cup Y_0$. Debemos demostrar, por tanto, que dado $\underline{y}_1 \in Y_1 \backslash Y_0$, $\underline{y}_1 \in \xi$. Si $\underline{y}_1 \in Y_1 \backslash Y_0 \Rightarrow$

$$\forall \underline{y} \in Y \ \underline{y} - \underline{y}_1 \notin < \bigcup_{\underline{y}_0 \in Y \backslash Y_0} K(\underline{y}_0) > \quad ,$$

luego

$$\underline{y} - \underline{y}_1 \notin K(\underline{y}_1) \quad \forall \underline{y} \in Y \quad ,$$

pues $\underline{y}_1 \notin Y_0$. Ésto implica que $\underline{y}_1 \in \xi$, luego

$$Y_1 \subset \xi$$

- Supongamos que $Y_n \subset \xi$, vamos a demostrar la inclusión $Y_{n+1} \subset \xi$. Por un razonamiento similar al de antes, se puede demostrar que $Y_{n+1} = Y_{n+1} \backslash Y_n \cup Y_n$. Demostraremos, por tanto, que $Y_{n+1} \backslash Y_n \subset \xi$. Sea $\underline{y}_1 \in Y_{n+1} \backslash Y_n \Rightarrow$

$$\forall \underline{y} \in Y \ \underline{y} - \underline{y}_1 \notin < \bigcup_{\underline{y}_0 \in Y \backslash Y_n} K(\underline{y}_0) > \quad ,$$

luego $\underline{y} - \underline{y}_1 \notin K(\underline{y}_1)$ $\forall \underline{y} \in Y$ (pues $\underline{y}_1 \notin Y_n$) $\Rightarrow \underline{y}_1 \in \xi$ y ,así,

$$Y_{n+1} \subset \xi$$

2. Se obtiene a partir de la definición de $\overline{Y}_*$ y el resultado *1* `c.q.d.` $\triangleleft$

A partir de estos dos últimos teoremas, obtendremos el siguiente corolario.

Corolario 3.2.5 *Bajo las condiciones de esta sección, si $\overline{Y} = \overline{Y}_*$, determinaríamos el conjunto eficiente $\xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2))$ a través de cualquiera de los algoritmos descritos anteriormente.*

$\triangleright$Demostración. Considerando que $\xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)) = \overline{Y} = \overline{Y}_*$. $\triangleleft$

Éstas aproximaciones superiores e inferiores al conjunto eficiente, para una estructura de preferencia cónica no constante, se utilizarán para construir aproximaciones al conjunto eficiente para estructuras de preferencia generales, a través del siguiente teorema.

Teorema 3.2.6 [1] *Sea* $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ *una estructura de preferencia en* $Y \subset \mathbf{R}^n$ *y* (L_1, L_2, L_3, L_4), $(L_1^*, L_2^*, L_3^*, L_4^*)$ *sus estructuras de aproximación lineal inferior y local, respectivamente.*

1. *Supongamos que* $\cap_{\underline{y}_0 \in Y} P(\underline{y}_0)$ *y* $\cap_{\underline{y}_0 \in Y} - D(\underline{y}_0)$ *no son iguales a* $\{\underline{0}\}$, *y que, además, son conjuntos convexos. Si llamamos* $\overline{Y}_1$ *e* $\overline{Y}_2$ *a las aproximaciones superiores de* $\xi(Y, (L_1, L_3))$ *y* $\xi(Y, (L_2^s, L_3))$, *respectivamente, se verifica que*

$$\xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)) \subset \overline{Y}_1 \cap \overline{Y}_2$$

2. *Si, además, tenemos las condiciones* $L_1' = L_1^*$, $L_2' = L_2^*$ *y los conjuntos*

$$< \bigcup_{\underline{y}_0 \in Y} LP(\underline{y}_0) > \quad < \bigcup_{\underline{y}_0 \in Y} -LD(\underline{y}_0) >$$

son convexos, llamando $\overline{Y}_{1*}$ *e* $\overline{Y}_{2*}$ *a las aproximaciones inferiores de* $\xi(Y, (L_1^*, L_3^*))$ *y* $\xi(Y, (L_2^{*s}, L_3^*))$, *se verifica que*

$$\overline{Y}_{1*} \cup \overline{Y}_{2*} \subset \xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2))$$

$\triangleright$Demostración. Aplicando los teoremas 3.2.3 y 3.2.4 a las estructuras de preferencia no constante (L_1, L_3), $(L_2 s, L_3)$, (L_1^*, L_3^*) y (L_2^{*s}, L_3^*) y, posteriormente, el teorema 3.2.2. $\triangleleft$

Este teorema es una versión del teorema 3.2.2, de mayor utilidad práctica.

Una vez que se ha dado un método de aproximación superior e inferior del conjunto eficiente, para estructuras de preferencia generales, nos centraremos nuevamente en el caso de las $\succ_V-$preferencias

3.3. APROXIMACIONES A CONJUNTOS EFICIENTES PARA $\succ_{\mathbf{V}}-$ PREFERENCIAS

[1]Utilizaremos la misma nomenclatura que para el teorema 3.2.2.

Antes de iniciar el estudio que da título a este epígrafe, daremos un resultado que permite transcribir, al lenguaje de $\succ_V-$preferencias, las condiciones que han venido siendo habituales en resultados anteriores, como

$$\bigcap_{\underline{y}_0 \in Y} P(\underline{y}_0) \neq \{\underline{0}\} \quad , \bigcap_{\underline{y}_0 \in Y} -D(\underline{y}_0) \neq \{\underline{0}\} \quad \ldots$$

Proposición 3.3.1 *Sea* $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ *una* $\succ_V-$*preferencia en* $Y \subset \mathbf{R}^2$, *y* (L_1, L_2, L_3, L_4) *su aproximación lineal inferior. Se verifica:*

- $\bigcap_{\underline{y}_0 \in Y} P(\underline{y}_0) \neq \{\underline{0}\}$ *si y solo si para cualquier* $\underline{y}_0 \in Y$ *fijo,* $m_-(\underline{y}_0) \leq M^+(\underline{y})\ \forall \underline{y} \in Y$
- $\bigcap_{\underline{y}_0 \in Y} -D(\underline{y}_0) \neq \{\underline{0}\}$ *si y solo si para cualquier* $\underline{y}_0 \in Y$ *fijo* $m_+(\underline{y}_0) \leq M^-(\underline{y})\ \forall \underline{y} \in Y$

$\triangleright$Demostración. Demostraremos sólo *1*, pues la demostración de *2* será análoga.

"$\Rightarrow$" Supongamos, por reducción al absurdo, que dado un $\underline{y}_0 \in Y$ existiese un $\underline{y}_1 \in Y$ tal que

$$m_-(\underline{y}_0) > M^+(\underline{y}_1) \quad .$$

Se verifica, entonces, que

$$m_-(\underline{y}_1) \leq M^+(\underline{y}_1) < m_-(\underline{y}_0) \leq M^+(\underline{y}_0) \quad .$$

Ésto nos lleva, teniendo en cuenta el resultado 2.4.11, a que

$$P(\underline{y}_0) \cap P(\underline{y}_1) = \{\underline{0}\} \quad ,$$

lo cual es absurdo.

"$\Leftarrow$" Bajo esta hipótesis, por la proposición 2.4.11, tendremos, que dado $\underline{y}_0, \underline{y} \in Y$ cualesquiera,

$$P(\underline{y}_0) \cap P(\underline{y}) \neq \{\underline{0}\} \quad .$$

Como, además, se verifica que

$$m_-(\underline{y}_0) \leq \sup_{\underline{y} \in Y} M^+(\underline{y}) \quad ,$$

entonces

$$\bigcap_{\underline{y}_0 \in Y} P(\underline{y}_0) \neq \{\underline{0}\}$$

`c.q.d.` $\lhd$

Como se ha venido haciendo en esta memoria, distiguiremos dos casos:

1. Cuando Y es subconjunto de $\mathbf{R}^2$.
2. Cuando Y es subconjunto de $\mathbf{R}^n,\ n > 2$.

CONJUNTOS EFICIENTES PARA $\succ_{\mathbf{V}}-$ PREFERENCIAS EN Y $\subset\mathbf{R}^2$

Consideremos $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una $\succ_V-$preferencia en $Y \subset \mathbf{R}^2$ y (L_1, L_2, L_3, L_4), $(L_1^*, L_2^*, L_3^*, L_4^*)$ sus estructuras de aproximación lineales inferior y local, respectivamente. Supongamos que se verifican las condiciones:

1. $m_-(\underline{y}_0) \leq M^+(\underline{y})\ \forall \underline{y} \in Y$, siendo $\underline{y}_0$ un punto fijo cualquiera de Y.
2. $m_+(\underline{y}_0) \leq M^-(\underline{y})\ \forall \underline{y} \in Y$, siendo $\underline{y}_0$ un punto fijo cualquiera de Y.

Utilizando la nomenclatura introducida en el resultado 3.2.1, la siguiente proposición nos dará una descripción de las estructuras de preferencia (D_1, D_1'), (D_2, D_2').

Proposición 3.3.2 *Dada $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una $\succ_V-$preferencia bajo las condiciones citadas, se verifica que*

$$\begin{aligned} D_1 &= \Big\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in Y \times Y : \\ &\quad \left.\begin{array}{ll} (\sup_{\underline{y}_0 \in Y} M^+(\underline{y}_0))(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) < 0 & y \\ (\inf_{\underline{y}_0 \in Y} m_-(\underline{y}_0))(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) < 0 & \end{array} \right\} \\ D_1' &= \Delta, \quad \textit{siendo } \Delta \textit{ la diagonal de } Y \times Y \end{aligned}$$

$$D_2 = \left\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in Y \times Y : \right.$$
$$\left. \begin{array}{ll} (\sup_{\underline{y}_0 \in Y} M^-(\underline{y}_0))(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) < 0 & y \\ (\inf_{\underline{y}_0 \in Y} m_+(\underline{y}_0))(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) < 0 & \end{array} \right\}$$

$$D'_2 = \Delta, \quad \textit{siendo } \Delta \textit{ la diagonal de } Y \times Y$$

▷Demostración. Se obtiene a partir de las definiciones de (D_1, D'_1) y (D_2, D'_2) y de aplicar, posteriormente, el resultado 2.4.11. ◁

Apliquemos, a este caso concreto, el algoritmo dado en el epígrafe anterior para aproximar el conjunto eficiente.

Paso 0: Consideramos $Y_1^0 = Y$ y $n = 0$.

Paso 1: Consideremos la estructura de preferencia (D_1^n, Δ) definida por

$$D_1^n = \left\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in Y \times Y : \right.$$
$$\left. \begin{array}{ll} (\sup_{\underline{y}_0 \in Y_1^n} M^+(\underline{y}_0)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) < 0 & \text{y} \\ (\inf_{\underline{y}_0 \in Y_1^n} m_-(\underline{y}_0)(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) < 0 & \end{array} \right\}$$

Paso 2: Llamamos $Y_1^{n+1} = \xi(Y_1^n, (D_1^n, \Delta))$

Paso 3: Si $Y_1^{n+1} = Y_1^n$, paramos y Y^n sería la aproximación superior buscada.

Si $Y_1^{n+1} \neq Y_1^n$, se incrementa el contador n en una unidad y volvemos al paso **1**.

El algoritmo puede ser aplicado partiendo de $D_1^0 = D_2$, obteniendo, en este caso, conjuntos Y_2^n.

Finalmente, considerando el conjunto

$$\overline{Y} = \bigcup_{\substack{n \geq 0 \\ i = 1,2}} Y_i^n \quad ,$$

obtendríamos la aproximación superior del conjunto eficiente:

$$\xi(Y,(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)) \subset \overline{Y} \quad .$$

Para poder encontrar una aproximación inferior del conjunto eficiente, mediante un algoritmo similar al utilizado para la aproximación superior, necesitamos imponer ciertas condiciones a la estructura de preferencia, como

$$\begin{array}{ll} 1: & L_1^* = L_1',\ L_2^* = L_2' \\ 2: & \inf_{\underline{y}_0 \in Y} \sup_{v\in V} g_v'(\underline{y}_0) \geq \sup_{\underline{y}_0 \in Y} \inf_{v\in V} g_v'(\underline{y}_0) \end{array}$$

Con la condición 2 aseguramos la convexidad del cono

$$< \bigcup_{\underline{y}_0 \in Y} LP(\underline{y}_0) >$$

(teorema 3.2.6), que en este caso particular coincide con el cono

$$< \bigcup_{\underline{y}_0 \in Y} -LD(\underline{y}_0) > \quad .$$

Debido a ésto, sólo tendremos una única aproximación inferior a $\xi(Y,(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2))$, que denotaremos por $\overline{Y}_{1*}$.

Antes de describir el algoritmo, veamos un resultado que nos muestra cómo será la estructura $(D_{01}^*, D_{01}^{*;})$ en este caso.

Proposición 3.3.3 *Dada $(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)$ una $\succ_V-$preferencia bajo las condiciones 1 y 2 mencionadas anteriormente, se verifica que*

$$\begin{array}{rcl} D_{01}^* & = & \left\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in Y \times Y : \right. \\ & & \left. \begin{array}{l} (\inf_{\underline{y}_0 \in Y} \sup_v g_v'(\underline{y}_0)(\underline{y}_0))(y_{11}-y_{21}) - (y_{12}-y_{22}) < 0 \quad y \\ (\sup_{\underline{y}_0 \in Y} \inf_v g_v'(\underline{y}_0)(\underline{y}_0))(y_{11}-y_{21}) - (y_{12}-y_{22}) < 0 \end{array} \right\} \\ D_{01}^{*;} & = & \Delta, \quad \textit{siendo } \Delta \textit{ la diagonal de } Y \times Y \end{array}$$

▷<u>Demostración</u> Se obtiene a partir de la definición de $(D^*_{01}, D^{*;}_{01})$, junto con el resultado 2.4.13. ◁

El algoritmo, por tanto, será el siguiente:

Paso 0: Consideraremos $Y_0 = \xi(Y, (D^*_{01}, \Delta))$ y $n = 1$.

Paso 1: Consideraremos la estructura de preferencia (D_{*n}, Δ) definida por

$$D_{*n} = \left\{ (\underline{y}_1, \underline{y}_2) \in Y \times Y : \begin{array}{l} (\inf_{\underline{y}_0 \in Y \setminus Y_{n-1}} \sup_v g'_v(\underline{y}_0))(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) < 0 \\ (\sup_{\underline{y}_0 \in Y \setminus Y_{n-1}} \inf_v g'_v(\underline{y}_0))(y_{11} - y_{21}) - (y_{12} - y_{22}) < 0 \end{array} \right\}$$

Paso 2: Llamamos $Y_n = \xi(Y, (D_{*n}, \Delta))$

Paso 3: Si $Y_n = Y_{n-1}$, paramos e Y_{n-1} será la aproximación inferior buscada.

Si $Y_n \neq Y_{n-1}$, se incrementa el contador n en una unidad y volvemos al paso **1**.

Considerando

$$\overline{Y}_{1*} = \bigcup_{n \geq 0} Y_n \quad ,$$

obtendríamos la aproximación inferior del conjunto eficiente:

$$\overline{Y}_{1*} = \xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)) \quad .$$

Resumiendo, dada una $\succ_V$−preferencia en $Y \subset \mathbf{R}^2$, verificando las condiciones *1* y *2* de la página 110 y 1 y 2 de la página 111, el conjunto eficiente de dicha estructura puede ser aproximado, superior e inferiormente, a través de los algoritmos descritos en esta sección:

$$\overline{Y}_* \subset \xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)) \subset \overline{Y} \quad .$$

Cuando se verifique que $\overline{Y}_* = \overline{Y}$, tendremos determinado con exactitud dicho conjunto eficiente.

CONJUNTOS EFICIENTES PARA $\succ_{\mathbf{V}}-$ PREFERENCIAS EN Y $\subset \mathbf{R}^n$

Para generalizar nuestro estudio al caso en que $Y \subset \mathbf{R}^n$, haremos las siguientes consideraciones, que nos permitirán reducirlo a un conjunto de problemas en $\mathbf{R}^2$ como los estudiados.

Sea $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ una $\succ_V-$preferencia en $Y \subset \mathbf{R}^n$. Consideraremos el plano

$$\prod{}_{\underline{a}} = \{(\lambda a_1, ..., \lambda a_{n-1}, \mu) : \ \lambda, \mu \underline{\mathbf{R}}\} \quad ,$$

siendo $\underline{a} = (a_1, ..., a_{n-1}) \in S^{n-1}$. Llamando

$$\mathcal{R}_{1\underline{a}} = \mathcal{R}_1 \cap \prod{}_{\underline{a}} \ \text{ y } \ \mathcal{R}_{2\underline{a}} = \mathcal{R}_2 \cap \prod{}_{\underline{a}} \quad ,$$

tendremos que

$$(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \bigcup_{\underline{a} \in S_{n-1}} (\mathcal{R}_{1\underline{a}}, \mathcal{R}_{2\underline{a}}) \quad .$$

De aquí, podremos deducir que el conjunto eficiente $\xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2))$ vendría definido por

$$\xi(Y, (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)) = \bigcup_{\underline{a} \in S_{n-1}} \xi(Y_{\underline{a}}, (\mathcal{R}_{1\underline{a}}, \mathcal{R}_{2\underline{a}})) \quad ,$$

donde $Y_{\underline{a}} = Y \cap \prod_{\underline{a}}$.

3.4. CONJUNTO EFICIENTE ESTRICTO EN $\succ_V-$ PREFERENCIAS EN $\mathbf{R}^n$

Antes de finalizar este capítulo, hemos de hacer mención al concepto de *conjunto eficiente estricto*, el cual no se ha tratado aún en el contexto de las $\succ_V-$preferencias.

Proposición 3.4.1 *Dada una $\succ_V-$preferencia $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ en $Y \subset \mathbf{R}^n$, el* **conjunto eficiente estricto** *será un conjunto unitario formado por aquel elemento $\underline{y}^* \in Y$ tal que*

$$v(\underline{y}^*) = \max_{\underline{y} \in Y} v(\underline{y}) \quad \forall v \in V \quad .$$

Este elemento $\underline{y}^*$ (*punto ideal o utopía*) es difícil que exista. Sin embargo, podríamos dar un conjunto de puntos que lo contuviese, definiendo así, cierta aproximación superior para el citado *conjunto eficiente estricto*. Dicha aproximación estaría formada por aquellos puntos para los cuales la aproximación de su conjunto de duda fuese vacía, es decir, estaría formado por aquellos puntos en donde la $\succ_V -$preferencia se comportase como 'una única función de valor'para dicho punto. Esta aproximación podría expresarse analíticamente mediante el conjunto

$$m_{-\underline{a}}(\underline{y}) = M^-_{\underline{a}}(\underline{y}) \text{ y } M^+_{\underline{a}}(\underline{y}) = m_{+\underline{a}}(\underline{y}) \quad \forall \underline{a} \in S^{n-1}\} \quad .$$

Problemas abiertos y futuras líneas de trabajo

Para finalizar esta memoria, resumimos algunos de los problemas y futuras líneas de trabajo surgidas a partir de ella. La motivación en ciertas casos es puramente teórica, y aparece ante la formalización de conceptos como el de *estructura de preferencia*, introducido en el primer capítulo, o el de *estructura de aproximación lineal*, recogido en el segundo. En otros, el origen es esencialmente práctico y plantean la implantación de los algoritmos sobre eficiencia, recogidos en el capítulo 3, en métodos interactivos de apoyo a Sistemas de Soporte a la Decisión (MCDSS). Esta última clase de objetivos se abandonan en nuestro estudio, en beneficio del establecimiento de un modelo formal mediante el cual el analista sea capaz de interpretar, con propiedad, toda la información proporcionada por el decisor.

- El primero de los problemas, de carácter teórico, consiste en tratar la *estructura de preferencia* como otra estructura matemática más, como puede ser la de espacio vectorial en un conjunto, espacio topológico, grupo, conjunto ordenado, etc. De esta forma, podrían definirse 'isomorfismoséntre estructuras de preferencia e incluso establecer operaciones entre ellas, como podrían ser la estructura de preferencia producto, cociente, ...

- Con los teoremas 2.4.14 y 2.4.15 se estimula la generalización de los resultados obtenidos en la sección 2.3, para aproximaciones lineales y $\succ_V-$ preferencias lineales, al caso de aproximaciones relacionadas con $\succ_V-$ preferencias con condiciones analíticas más complejas que la linealidad (por ejemplo, concavidad, convexidad, diferenciabilidad, ...).

- Un aspecto importante de la teoría del valor, frente a muchos de los métodos *ad hoc* en Decisión Multiobjetivo, es la existencia de un desarrollo paralelo en ambiente de incertidumbre, mediante la denominada *Teoría de la Utilidad* de Von Neumann y sus generalizaciones.

  Desarrollar los conceptos de estructuras de preferencia, incorporando el concepto de probabilidad, permitiría obtener una teoría global para problemas de decisión multiobjetivo, bajo la nueva terminología.

  Sería también de interés desarrollar estructuras de preferencias en ambiente difuso, incorporando el concepto de *posibilidad*.

- Utilizar todo el análisis realizado en este trabajo, como fundamento para crear un método interactivo, que sirva de base a un Sistema de Soporte a la Decisión, es el principal objetivo práctico de nuestro estudio, como se ha dicho anteriormente.

  El contraste con otros tipos de métodos, con la finalidad de encontrar el más amigable para el decisor, puede iniciar nuevas líneas de investigación en cuanto a la comparación de sistemas se refiere.

Bibliografía

[1] Aumann, R.J. (1962). Utility theory without the completeness axiom. *Econometrica* Vol **30**, No. 3, pp 445–462; (1964) Vol **32**, No. 1, pp 210–212.

[2] Bazaraa, M.S., Shetty, C.M. (1976). *Foundations of Optimization.* Springer-Verlag.

[3] Benson, H.P., Morin, T.L. (1977). The vector maximization problem: Proper efficiency and Stability. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol **32**, No. 1 , pp 64–72.

[4] Bergstresser, K., Charnes, A., Yu, P.L. (1976). Generalization of domination structures and nondominated solutions in multicriteria decision making. *J.O.T.A.*, Vol **18**, No. 1, pp 3 –13

[5] Chien, I. S., Yu, P.L., Zhang, D. (1989). Indefinite preference structures and Decision Analysis. Working paper pendiente de publicación en *J.O.T.A.*

[6] Casares de Cal, M.A. (1989). *Problemas de decisión multicriterio con sistemas de preferencias no cónicos.* Tesis doctoral, Universidad de Santiago de Compostela.

[7] Coladas, L. (1979). *Problemas multiobjetivo: Estructuras de dominación.* Tesis doctoral. Universidad de Santiago de Compostela.

[8] Debreu G. (1954). Representation of a preference ordering by a numerical function, en *Decision Processes. R.M. Thrall, C. H. Coombs, R.L. Davis, edts.* Wiley.

[9] Debreu, G. (1959). *Theory of value.* Wiley.

[10] Fishburn, P.C. (1970). *Utility Theory for Decision Making*. Wiley.

[11] French, S. (1986). *Decision Theory*. Ellis Horwood.

[12] French, S. (1989). *Readings in Decision Analysis*. Chapman and Hall.

[13] Geoffrion, A.M. (1968). Proper efficiency and the theory of vector maximization. *Journal of Mathematical Analysis and applications*. Vol **22**, pp 618–630.

[14] Goicoechea, A., Hansen, D., Duckstein, L. (1982). *Multiobjetive Decision Analysis*. Wiley.

[15] Hazen, G.B., Morin, T.L. (1983). Optimality conditions in nonconical multiple-objetive programming. *J.O.T.A.* Vol **40**, No. 1, pp 25–59.

[16] Hazen, G.B. (1988). Differential characterizations of nonconical dominance in multiple objetive decision making. *Mathematics of Operation Research*. Vol **13**, No. 1, pp 174–189.

[17] Jacquet-Lagréze, E. (1974). How we can use the notion of semiorders to build outranking relations in multicriteria decision making. *Revue METRA*, Vol **3**, pp 59–86.

[18] Keeney, R.L., Raiffa, H. (1976). *Decision with Multiple Objetives: Preferences and Value Tradeoffs*. Wiley.

[19] Kuhn, H.W., Tucker, A.W. (1951). Nonlinear programming. *Procceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability.J. Neyman, edt.*, pp 481–492.

[20] Luce, R.D. (1956). Semiorders and Theory of Utility Discrimination. *Econometrica*. Vol **24**, No. 1.

[21] Ríos, S. (1977). *Análisis de decisiones*. ICE, Madrid.

[22] Ríos, S., Ríos-Insua, S. (1986). Vector value function and vector distance methods in multicriteria optimization, presentado en *Int. Conf. Vector Optimization*, Darmstadt, R.F.A.

[23] Ríos, S., Ríos-Insua, M.J., Ríos-Insua, S. (1989). *Procesos de Decisión Multicriterio.EUDEMA*, Madrid.

[24] Ríos-Insua, S. (1980). *Decisiones con Multicriterios.* Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid.

[25] Ríos-Insua, D. (1990). *Sensitivity Analysis in Multi-Objective Decision Making.* Ph. D. Thesis, Universidad de Leeds, U.K., pendiente de publicación en Springer-Verlag.

[26] Roberts, F. (1979). *Measurement Theory.* Addison-Wesley

[27] Roberts, A.W., Varberg, D.E. (1973). *Convex Functions.* Academic Press.

[28] Rockafellar, R.T. (1970). *Convex Analysis.* Princeton University Press.

[29] Roy, B. (1977). Partial Preference Analysis and Decision Aid: The Fuzzy Outranking Relation concept. En *Conflicting Objetives in Decision. Bell, D.E., Keeney, R.L., Raiffa, H. edts.* Wiley.

[30] Sawaragi, Y., Nakayama, H., Tanino, T. (1985). *Theory of Multiobjetive Optimization.* Academic Press.

[31] Skulimowsky, A.M.J. (1985). Solving Vector Optimization Problems via Multilevel Analysis. *Foundations of Control Engineering.* Vol **10**, No. 1, pp 25–38.

[32] Steuer, R. (1986). *Multiple Criteria Optimization.* Wiley.

[33] Stoer, J., Witzgall, C. (1970). *Convexity and Optimization in Finite Dimensions I.* Springer-Verlag.

[34] White, D.J. (1972). Uncertain Value Functions. *Management Science.* Vol **19**, pp 31–41.

[35] White, D.J. (1982). *Optimality and Efficiency.* Wiley.

[36] Yu, P.L. (1973). Introduction to Domination Structures in Multicriteria Decision Making. En *Multiple Criteria Decision Making. Cochrane, J.L., Zeleny, M. edts.* University of Sourth Coroline Press, pp 249–261

[37] Yu, P.L. (1974). Cone convexity, cone extreme points and nondominated solutions in decision problems with multiobjetives. *J.O.T.A.*. Vol **14**, No. 3, pp 319–377.

[38] Yu, P.L. (1985). *Multiple Criteria Decision Making*. Plenum.