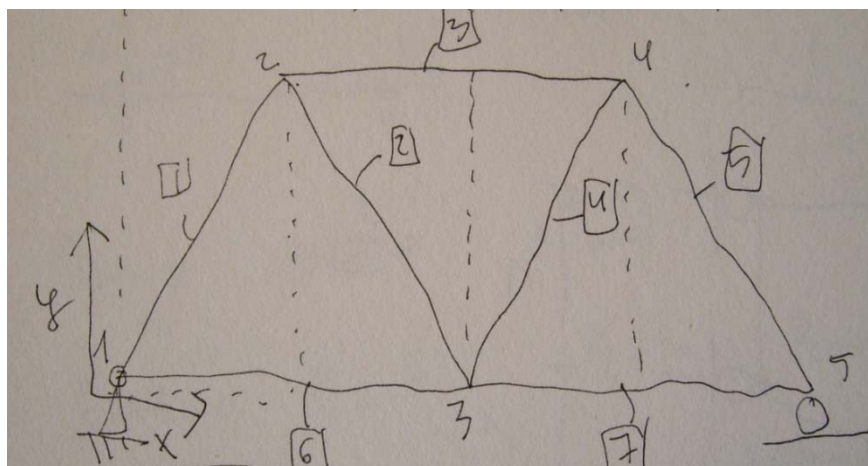


MATRIZ DE EQUILIBRIO

DE ESTRUCTURAS TRIANGULADAS DE BARRAS ARTICULADAS CON CARGAS EN LOS NODOS



Jose L. Fernandez Cabo

Departamento de Estructuras, ETS de Arquitectura de Madrid.

Universidad Politécnica de Madrid.

ARCHIVO DIGITAL UPM: www.oa.upm.es

Madrid, 20 de Junio, 2012 (v4)

Licencia Creative Commons tipo:



Reconocimiento - NoComercial - SinObraDerivada (by-nc-nd)

1. Introducción

La palabra clave de toda la teoría de estructuras es sin duda *equilibrio*.

El análisis de una estructura se hace imponiendo las condiciones de equilibrio, ya sea en primer o segundo orden, en condiciones estáticas o dinámicas.

Decimos que la estructura es isostática cuando el simple uso de las ecuaciones de equilibrio permite obtener los esfuerzos de la estructura. Esta cuestión sólo queda completamente clara cuando somos capaces de establecer y estudiar dichas ecuaciones. Eso es precisamente lo que vamos a hacer en este texto, aunque *limitado* al caso de estructura trianguladas articuladas con cargas en los nodos. Se plantearán las ecuaciones *para el caso general espacial*.

El uso de ordenadores ha potenciado el método de los desplazamientos frente al de las fuerzas, ya que su implementación es más sencilla. En dicho método, la cuestión clave es el ensamblaje de la matriz de rigidez de estructura; que es de hecho nace de las plantear las ecuaciones del equilibrio en términos de los grados de libertad cinemáticos, es decir, los movimientos en los nodos. Pero para ello no es necesario plantear el equilibrio en términos de esfuerzos; de hecho, numéricamente, trabajando con el ordenador, no es rentable hacerlo. Esto hace que muchos textos sólo aborden el estudio de la matriz de rigidez, lo que sin duda desdibuja la cuestión central: el equilibrio.

Pero desde el punto de vista pedagógico es indispensable plantear las ecuaciones del equilibrio en su forma más pura, es decir, en función de los esfuerzos. Además, desde el *punto de vista teórico, la cuestión es de capital importancia*, aunque no es objeto de este texto entrar con detalle en el porqué de esa importancia. El lector puede consultar el trabajo pionero de **Livesley** (1970), de la escuela de Cambridge, y cuya obra ha tenido una gran influencia en el análisis de estructuras; o el más reciente de **Ha** (1990), que ha servido en gran medida de base para el tratamiento aquí expuesto; y que es un texto mucho más orientado al estudiante.

REFERENCIAS

Ha, K.H. 1999. *Structural Analysis*. Concordia University. Canada.

Livesley, R. K. 1970. *Métodos matriciales para el cálculo de estructuras*. Editorial Blume, Madrid.

2. Notación, variables del problema, convenio de signos y ámbito de la solución

2.1. Notación

Los **escalares** se representan por minúsculas en cursiva (normal, sin negrita). El signo de multiplicación entre se omite como regla general (no sólo entre escalares). Por ejemplo, $3a$ indica la multiplicación de 3 por el escalar a .

Los **vectores** se representan por minúsculas en cursiva y en negrita, y por defecto indican un vector columna, que además se cierra siempre con un corchete. Para el vector fila se usa el símbolo de traspuesta. Por ejemplo:

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}; \mathbf{a}^T = \{1 \ 2 \ 3\}^T = [1 \ 2 \ 3]$$

Las **matrices** se representan por mayúsculas con cursiva y en negrita. Por ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Para la matriz diagonal se podrá usar un corchete especial:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \lceil 1 \ 2 \ 2 \rceil$$

En los dibujos que representan la estructura, los números asociados a los nodos no llevan ningún símbolo adicional, pero los asociados a las barras se insertan en un rectángulo. Por ejemplo:

2.2. Variables del problema y convenio de signos

Si la estructura está en equilibrio, lo está en su conjunto y en cada una de sus partes. Las ecuaciones de equilibrio se plantearán nodo a nodo, es decir, en sus partes, lo que implica por un lado a las **fuerzas nodales** (cargas en los nodos) y por otro a los **esfuerzos** en la barras, en este caso sólo **normales o axiales**, ya que se trata de barras articuladas y sólo se admiten fuerzas nodales. Pero además sólo se plantea el equilibrio asociado a los grados de libertad (**GDL**). Veámoslo sobre un sencillo ejemplo.

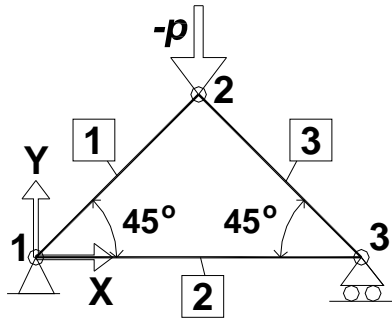


Fig. 1 Ejemplo de numeración de nodos y barras

En dicha figura aparece además el convenio para uno de los dos sistemas de signos usados, el de fuerzas nodales o acciones, que coincide además con el de los movimientos de los nodos.

Como en cualquier otro ámbito del análisis de estructuras, manejamos en total dos sistemas de signos totalmente independientes (Fig. 2), el **sistema 1**, de fuerzas nodales o acciones y movimientos de los nodos. La geometría juega también con el sistema 1, y para el **sistema 2**, de esfuerzos y deformaciones.

Sistema 1		Geometría, acciones y movimientos
Sistema 2		Esfuerzos y deformaciones

Fig. 2 Convenio de signos para el sistema 1, de geometría, fuerzas nodales o acciones y movimientos de los nodos; y para el sistema 2, de esfuerzos y deformaciones.

Las ecuaciones de equilibrio se plantean nodo a nodo. Gráficamente, (ver Fig. 3) resulta más intuitivo. Para hacerlo analíticamente, como luego veremos, es imprescindible la claridad en el convenio de signos antes definido.

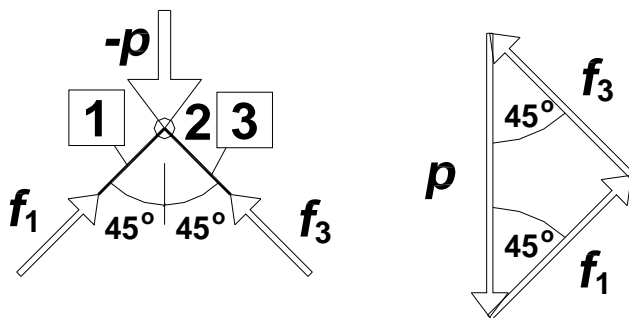


Fig. 3 Equilibrio en el nodo 2

El esquema gráfico de la Fig. 3 implica en realidad dos ecuaciones de equilibrio, la de equilibrio de fuerzas en vertical y horizontal. Y eso a su vez implica que el nodo 2 no tiene coaccionado ni el movimiento vertical ni el horizontal. Es decir, el desplazamiento del nodo 2 en vertical y horizontal son dos de los GDL de esta estructura.

Lo que finalmente haremos será precisamente un tratamiento sistemático, analítico, de los equilibrios de fuerzas en vertical y horizontal, nodo a nodo, en todos los GDL.

Al plantear la matriz de equilibrio supondremos conocidas las fuerzas nodales, y el problema consiste por tanto es conocer los esfuerzos normales de las barras, que son finalmente las variables del problema.

2.3.Ámbito de la solución

El equilibrio nodo a nodo se plantea en la posición inicial de la estructuras, lo que se denomina **primer orden**. El tratamiento del segundo orden pasa por aquí, de manera que el camino recorrido no es estéril.

3. Equilibrio de la barra aislada: contribución al equilibrio global

Casi siempre hay alternativas a la hora de tratar un problema, aunque al final el resultado sea el mismo. Primero, y de una forma clásica, pensaremos en la contribución de una **barra m** cualquiera a la matriz de equilibrio, y en concreto al equilibrio de los **nodos i y j** a los que se une dicha barra (Fig. 4).

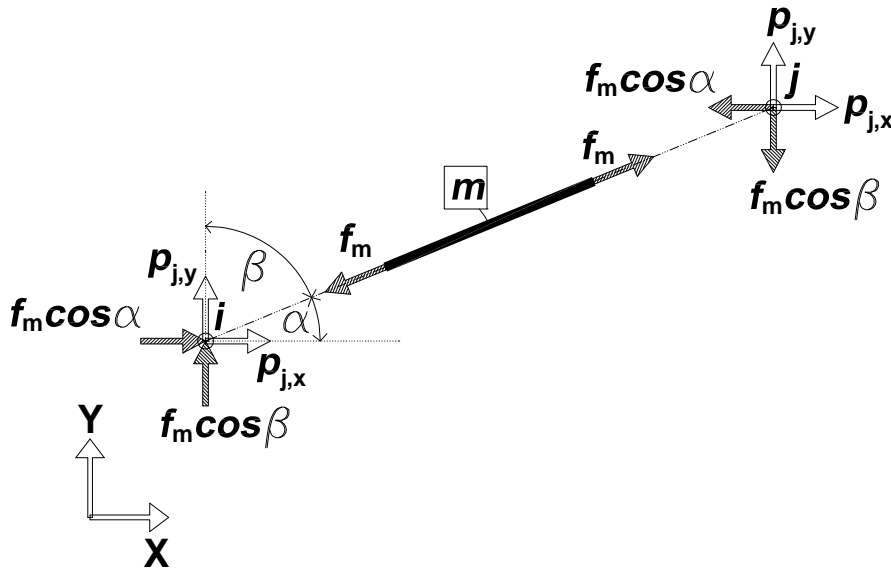


Fig. 4 Contribución de la **barra m** al equilibrio de los **nodos (i,j)** que la definen.

En la Fig. 4 se muestra equilibrio en los **nodos i y j** a los que se une la barra m. Nótese que nos atenemos al convenio de signos antes definido.

Del equilibrio en los **nodos i y j** se deducen las siguientes ecuaciones:

...

$$p_{i,x} = -f_m \cdot \cos \alpha$$

$$p_{i,y} = -f_m \cdot \cos \beta$$

...

$$p_{j,x} = f_m \cdot \cos \alpha$$

$$p_{j,y} = f_m \cdot \cos \beta$$

...

Si llamamos l_m a la longitud de la barra m , se tiene:

$$\cos \alpha_m = \frac{x_j - x_i}{l_m}$$

$$\cos \beta_m = \frac{y_j - y_i}{l_m}$$

Esas ecuaciones, como se verá enseguida, nos dan la pauta para ensamblar el efecto de una barra cualquiera dentro de la matriz de equilibrio.

Obviamente **puede haber otras barras** que **confluyan** en los **nodos i y j**. El esquema ahora mostrado muestra la contribución sólo de la barra m, pero que ejemplifica el método para definir la contribución de cualquier otra barra unida a cualesquiera dos nudos de la estructura.

Consideramos el **vector de de fuerzas nodales, p**, y el **de esfuerzos, f**, ordenados del siguiente modo:

$$\mathbf{p} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \dots \\ p_{i,x} \\ p_{i,y} \\ \dots \\ p_{j,x} \\ p_{j,y} \\ \dots \end{Bmatrix}}_{2n \times 1}; \quad \mathbf{f} = \underbrace{\begin{Bmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_m \\ \dots \\ f_b \end{Bmatrix}}_{b \times 1};$$

Donde **n** es el número total de nodos (de momento no consideramos las coacciones, lo haremos después, aunque se podría, como también veremos, plantear el equilibrio directamente para los GDL, punto en el que de uno u otro modo hay que acabar), y **b** el número total de barras.

De acuerdo con esa organización de los datos y con la Fig. 4, **la contribución de la barra m en la matriz de equilibrio H** será:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \dots \\ p_{i,x} \\ p_{i,y} \\ \dots \\ p_{j,x} \\ p_{j,y} \\ \dots \end{Bmatrix}}_{2n \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dots & \text{(columna m)} & \dots \\ \dots & -\cos \alpha_m & \dots \\ \dots & -\cos \beta_m & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & +\cos \alpha_m & \dots \\ \dots & +\cos \beta_m & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}}_{2n \times b} \underbrace{\begin{Bmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_m \\ \dots \\ f_b \end{Bmatrix}}_{b \times 1} \Rightarrow \underbrace{\mathbf{p}}_{2n \times 1} = \underbrace{\mathbf{H}}_{2n \times b} \underbrace{\mathbf{f}}_{b \times 1}$$

El trabajar con los cosenos directores permite **generalizar el planteamiento para el caso de 3D** de forma directa, como se muestra a continuación.

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \dots \\ p_{i,x} \\ p_{i,y} \\ p_{i,z} \\ \dots \\ p_{j,x} \\ p_{j,y} \\ p_{j,z} \end{Bmatrix}}_{3n \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dots & \text{(columna } m) & \dots \\ \dots & -\cos \alpha_m & \dots \\ \dots & -\cos \beta_m & \dots \\ \dots & -\cos \gamma_m & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & +\cos \alpha_m & \dots \\ \dots & +\cos \beta_m & \dots \\ \dots & +\cos \gamma_m & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}}_{3n \times b} \underbrace{\begin{Bmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_m \\ \dots \\ f_b \end{Bmatrix}}_{b \times 1} \Rightarrow \underbrace{\mathbf{p}}_{3n \times 1} = \underbrace{\mathbf{H}}_{3n \times b} \underbrace{\mathbf{f}}_{b \times 1}$$

Donde (α, β, γ) son los **cosenos directores** definidos por la dirección de la barra **m**, con los convenios antes definidos, con los **ejes globales (x,y,z)** respectivamente; y siendo por tanto

$$\cos \gamma_m = \frac{z_j - z_i}{l_m}$$

A partir de aquí el problema se reduce, primero, a ir sumando las contribuciones de cada una de las barras; y segundo, a eliminar las ecuaciones asociadas a coacciones, pues el equilibrio se plantea sólo en los GDL. El **equilibrio en las coacciones** se plantea, pero en una fase posterior, y permitirá obtener el valor de las **reacciones**.

Si se quisiera una optimización numérica del proceso, se podría plantear el equilibrio directamente sólo en los GDL, pero pensamos que el método expuesto tiene ventajas pedagógicas. Por otra parte, cambiar el algoritmo para seleccionar sólo las ecuaciones asociadas a los GDL es muy simple, y también se mostrará.

La matriz de equilibrio no es, en principio, cuadrada. **La estructura es isostática** si los esfuerzos pueden obtenerse usando exclusivamente dichas ecuaciones de equilibrio. Esto implica que para que la estructura sea isostática, la matriz **H debe ser cuadrada y su rango máximo** (lo que implica que su determinante no sea nulo).

4. Ordenación de los datos a tratar sobre un ejemplo

La Fig. 5 muestra la sencilla estructura que se usará de base para el ejemplo, que es de hecho la usada anteriormente para ejemplificar la numeración de barras y nodos.

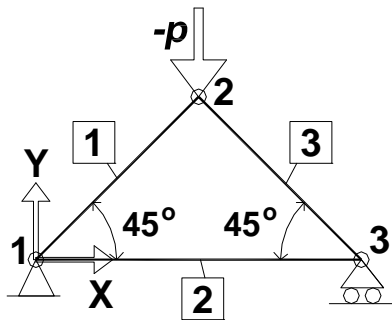


Fig. 5 Numeración de nodos y barras

Numeradas barras y nodos, queda definida la *matriz de conectividad*. Nótese que a cada barra se le asigna no sólo una dirección sino también un sentido, definido del nodo inicial al final. Habitualmente se usa el criterio de considerar como origen el nodo de número más bajo. Es importante resaltar que ese criterio no es obligatorio, pero sí la definición de *un sentido*, necesario para definir unívocamente los *cosenos directores de cada barra*.

La matriz de conectividad del ejemplo es:

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{cc}
 i & j \\
 \boxed{1} & 1 \quad 2 \\
 \boxed{2} & 1 \quad 3 \\
 \boxed{3} & 2 \quad 3
 \end{array}
 \Rightarrow \text{matriz de conectividad} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

La fila m corresponde por tanto a la barra número m ; la primera columna corresponde al nodo inicial, i , y la segunda al nodo final, j .

Al considerar que i (*nodo inicial*) $<$ j (*nodo final*), se está asumiendo implícitamente el sentido de las barras como $\overline{m} \Rightarrow i \rightarrow j$, es decir, desde el nodo i hasta el nodo j (véase la Fig. 6).

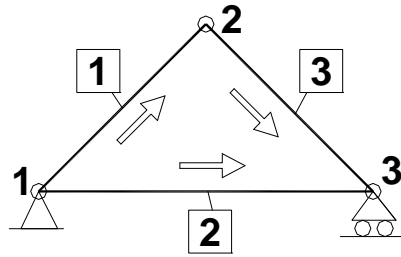


Fig. 6 Sentido implícito asumido por las barras, en el ejemplo, para el cálculo de los cosenos directores.

El siguiente paso es numerar los GDL de la estructura debidamente sustentada, i.e. la estructura incluyendo sus coacciones. Finalmente vamos a usar sólo los activos, es decir, sin las coacciones. Como ya se ha dicho, con el fin de que se entienda mejor el proceso, en un primer algoritmo primero numeraremos todos los posibles GDL (es decir, el de la estructura sin coaccionar), y luego impondremos las coacciones, manejando ya los GDL de la estructura con sus coacciones; i.e. lo que verdaderamente se puede denominar *la estructura*.

La forma más simple y sistemática es numerar con el orden de los nodos y expandiendo el número de elementos en concordancia con el máximo GDL, movimientos u , por nodo. Se usa además el criterio de 0 = coaccionado y 1 = libre. Según esto, en el ejemplo:

$$\left(\begin{array}{l} \mathbf{1} \rightarrow \\ \\ \mathbf{2} \rightarrow \\ \\ \mathbf{3} \rightarrow \end{array} \begin{array}{l} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right\}$$

Fig. 7 vector que define los GDL (movimientos en este caso) de la estructura

De acuerdo con ello, la matriz de equilibrio sin coacciones, \mathbf{H}_T , es:

$$\left(\begin{array}{l} \\ \\ \\ \mathbf{1} \rightarrow \\ \\ \mathbf{2} \rightarrow \\ \\ \mathbf{3} \rightarrow \end{array} \begin{array}{ccc} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ -\cos \alpha_1 & -\cos \alpha_2 & 0 \\ -\cos \beta_1 & -\cos \beta_2 & 0 \\ \cos \alpha_1 & 0 & -\cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & 0 & -\cos \beta_3 \\ 0 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ 0 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \end{array} \right) \Rightarrow \mathbf{H}_T = \left[\begin{array}{ccc} -\cos \alpha_1 & -\cos \alpha_2 & 0 \\ -\cos \beta_1 & -\cos \beta_2 & 0 \\ \cos \alpha_1 & 0 & -\cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & 0 & -\cos \beta_3 \\ 0 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ 0 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \end{array} \right]$$

Y, considerando finalmente las coacciones establecidas, la matriz de equilibrio final (realmente la única matriz de equilibrio, pues este no puede establecerse sin coacciones), \mathbf{H} , es:

$$GDL \rightarrow \left(\begin{array}{l} \mathbf{1} \rightarrow u_{1x} \\ u_{1y} \\ \mathbf{2} \rightarrow u_{2x} \\ u_{2y} \\ \mathbf{3} \rightarrow u_{3x} \\ u_{3y} \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & 0 & -\cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & 0 & -\cos \beta_3 \\ 0 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & 0 & -\cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & 0 & -\cos \beta_3 \\ 0 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \end{bmatrix}$$

5. Algoritmo 1 de ensamblaje: implementación en Maple®

Se va a explicar un algoritmo que implementa los pasos anteriores en Maple®, de forma ya general, en 3D, y usando además el mismo ejemplo.

Ref.: ensamblaje matriz equilibrio 2012_06_20a_v4

```
> restart;
```

```
> with(LinearAlgebra):
```

```
>>
```

```
> Num_Nod:=3;#numero de nodos
```

```
Num_Nod := 3
```

```
> Num_Bar:=3;#numero de barras
```

```
Num_Bar := 3
```

```
> H_t:=Matrix(Num_Nod*3,Num_Bar);#dimension de la matriz de equilibrio total, sin coacciones
```

$$H_t := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
>
```

```
>
```

```
> Coor_Nod:=Matrix(Num_Nod,3):
```

```
> Coor_Nod:=Matrix([[0,0,0],[1,1,0],[2,0,0]]);#coordenadas de los nodos en X,Y,Z
```

$$Coor_Nod := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
>
```

```
> Coac_Nod:=Matrix(Num_Nod,3):
```

```
> Coac_Nod:=Matrix([[0,0,0],[1,1,0],[1,0,0]]);#coacciones de los  
nodos en X,Y,Z; 0=coaccionado, 1=libre
```

$$Coac_Nod := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

merece la pena ponerlo en forma de vector, en paralelo a los g.d.l. y a las acciones nodales está en el orden antes definido (...p_{ix}, p_{iy}, p_{iz}...)

```
> Coac_Nod_Vec:=Vector(Num_Nod*3);
```

$$Coac_Nod_Vec := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
>
```

```
> for i from 1 to Num_Nod do
```

```
>
```

```
>
```

```
> Coac_Nod_Vec[3*i-2]:=Coac_Nod[i,1]:
```

```
> Coac_Nod_Vec[3*i-1]:=Coac_Nod[i,2]:
```

```
> Coac_Nod_Vec[3*i]:=Coac_Nod[i,3]:
```

```
>
```

```
> end do;
```

```
>
```

```
Coac_Nod_Vec1:=0
```

```
Coac_Nod_Vec2:=0
```

```
Coac_Nod_Vec3:=0
```

$Coac_Nod_Vec_4 := 1$

$Coac_Nod_Vec_5 := 1$

$Coac_Nod_Vec_6 := 0$

$Coac_Nod_Vec_7 := 1$

$Coac_Nod_Vec_8 := 0$

$Coac_Nod_Vec_9 := 0$

> **Coac_Nod_Vec;**

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

> **Coac_List:=[];**

$Coac_List := []$

>

lista grados de libertad coaccionados, **List_Coac**

>

> **for i from 1 to (Num_Nod*3) do**

> **if Coac_Nod_Vec[i]=0 then Coac_List:=[op(Coac_List), i] end if:**

>

> **end do:**

>

> **Coac_List;**

$[1, 2, 3, 6, 8, 9]$

>

Lista de grados de libertad activos, en donde se plantean las ecuaciones de equilibrio

```
> Equil_List:=[];
```

$$\text{Equil_List} := []$$

```
>
```

```
>
```

```
> for i from 1 to (Num_Nod*3) do
```

```
> if Coac_Nod_Vec[i]=1 then Equil_List:=[op(Equil_List), i] end  
if:
```

```
>
```

```
> end do:
```

```
>
```

```
> Equil_List;
```

$$[4, 5, 7]$$

```
>
```

```
>
```

```
> Conec_Nod:=Matrix(Num_Bar,2):#matriz de conectividad de los  
nodos
```

```
> Conec_Nod:=Matrix([[1,2],[1,3],[2,3]]);
```

$$\text{Conec_Nod} := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> Cos_Dir_Bar:=Matrix(4,Num_Bar);#ordenación de los cosenos  
directores (l=primera fila,m,n) y la longitud de la barra  
L=cuarta fila, según la matrix de conectividad definida
```

$$\text{Cos_Dir_Bar} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
>
```

```
> for i from 1 to Num_Bar do
```

```
> ini:=Conec_Nod[i,1]:fin:=Conec_Nod[i,2]:#se calcula en  
número de nodos inicial y final
```

```

>
>   Cos_Dir_Bar[4,i]:=((Coor_Nod[fin,1]-
Coor_Nod[ini,1])^2+(Coor_Nod[fin,2]-
Coor_Nod[ini,2])^2+(Coor_Nod[fin,3]-
Coor_Nod[ini,3])^2)^0.5:#longitud
>   Cos_Dir_Bar[1,i]:=(Coor_Nod[fin,1]-
Coor_Nod[ini,1])/Cos_Dir_Bar[4,i]:
>   Cos_Dir_Bar[2,i]:=(Coor_Nod[fin,2]-
Coor_Nod[ini,2])/Cos_Dir_Bar[4,i]:
>   Cos_Dir_Bar[3,i]:=(Coor_Nod[fin,3]-
Coor_Nod[ini,3])/Cos_Dir_Bar[4,i]:
>
> end do:
>
>
> Cos_Dir_Bar;

```

$$\begin{bmatrix} 0.7071067814 & 1.0000000000 & 0.7071067814 \\ 0.7071067814 & 0. & -0.7071067814 \\ 0. & 0. & 0. \\ 1.414213562 & 2.0000000000 & 1.414213562 \end{bmatrix}$$

```

>
>
> for j from 1 to Num_Bar do
>
>   ini:=Conec_Nod[j,1]:fin:=Conec_Nod[j,2]:# nudos inicial y
final de cada barar
>
>   H_t[3*ini-2,j]:=-Cos_Dir_Bar[1,j]:
>   H_t[3*ini-1,j]:=-Cos_Dir_Bar[2,j]:
>   H_t[3*ini,j]:=-Cos_Dir_Bar[3,j]:
>
>   H_t[3*fin-2,j]:=Cos_Dir_Bar[1,j]:

```



```
> H_t[3*fin-1,j]:=Cos_Dir_Bar[2,j]:
```

```
> H_t[3*fin,j]:=Cos_Dir_Bar[3,j]:
```

```
>
```

```
> end do:
```

```
>
```

```
>
```

montaje de la matriz de equilibrio H, que tiene por tanto en cuenta las coacciones

```
>
```

montaje de H por borrado de las filas coaccionadas

```
> H:=DeleteRow(H_t,Coac_List);
```

$$H := \begin{bmatrix} 0.7071067814 & 0 & -0.7071067814 \\ 0.7071067814 & 0 & 0.7071067814 \\ 0 & 1.0000000000 & 0.7071067814 \end{bmatrix}$$

```
>
```

```
> P_t:=Vector([0,0,0,0,-1,0,0,0,0]);
```

$$P_t := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las siguientes instrucciones van a montar el vector de fuerzas nodales para la estructura debidamente coaccionada, p .

```
> nops(Equil_List);#da el número de operandos de la lista
```

3

```
>
```

```
> P:=Vector(nops(Equil_List));
```

$$P := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```

>
>
> for i from 1 to nops(Equil_List) do
>   P[i]:=P_t[Equil_List[i]]:
> end do:
>
>
> P;

```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

esfuerzos

```

> N:=MatrixVectorMultiply(MatrixInverse(H),P);

```

$$N := \begin{bmatrix} -0.707106780973095 \\ 0.500000000000000 \\ -0.707106780973095 \end{bmatrix}$$

Al igual que sucede con el ensamblaje de la matriz de equilibrio, el hacerlo primero para la estructura sin coaccionar y luego para la coaccionada (la que realmente es una estructura) es una cuestión puramente educativa. No obstante, desde el punto de vista práctico, y aunque algo más costoso en tiempo de ordenador, este procedimiento ofrece la ventaja de ir cambiando las coacciones de la estructura y obtener la nueva matriz de equilibrio a partir de la total previamente ensamblada.

6. Algoritmo 2 de ensamblaje: implementación en Maple®

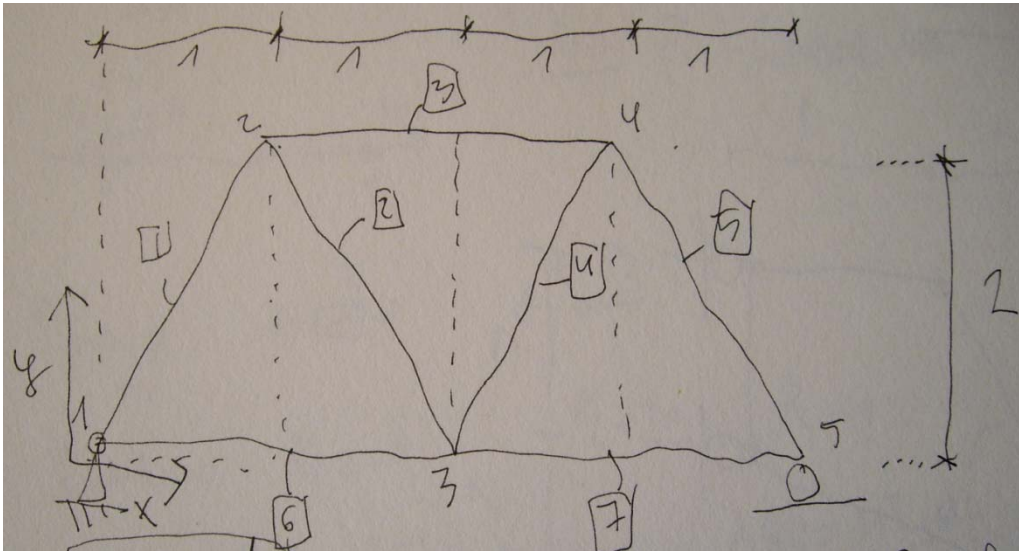


Fig. 8 Ejemplo de estructura triangulada de barras articuladas

7. Notas finales