UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
FACULTAD DE INFORMÁTICA

ANÁLISIS DE LA PERTURBACIÓN DE LA INVERSA DE DRAZIN DE MATRICES, ELEMENTOS EN ANILLOS Y OPERADORES ACOTADOS EN ESPACIOS DE BANACH

TESIS DOCTORAL

JOSE YGNACIO VÉLEZ CERRADA
Ldo. en Ciencias Matemáticas

2007

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
FACULTAD DE INFORMÁTICA

Análisis de la perturbación de la inversa de Drazin de matrices, elementos en anillos y operadores acotados en espacios de Banach

Autor: **Jose Ygnacio Vélez Cerrada**
Ldo. en Ciencias Matemáticas

Directora: **Nieves Castro González**
Dra. en Ciencias Matemáticas

2007

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
FACULTAD DE INFORMÁTICA

Análisis de la perturbación de la inversa de Drazin de matrices, elementos en anillos y operadores acotados en espacios de Banach

Memoria presentada para optar la grado de Doctor por JOSE YGNACIO VÉLEZ CERRADA, subvencionada parcialmente por el proyecto de investigación de Ministerio de Educación y Ciencia MTM2007-67232

Madrid, 2007

Índice general

Agradecimientos

Quiero mostrar mi más profunda gratitud a *Nieves Castro* por el tiempo inmenso que me ha dedicado en la dirección de este trabajo, por la confianza depositada en mi, por los conocimientos transmitidos y, sobre todo, por su inquebrantable disposición y su infinita paciencia.

A *Juan Robles* por su ayuda y apoyo.

Doy también las gracias a todos los miembros del Departamento de Matemática Aplicada de la Facultad de Informática, por su ayuda y solidaridad y, por hacerme sentir, en más de una ocasión, como parte de ellos.

Son muchas las personas que me han ayudado y me han animado a continuar este trabajo. A todas ellas mi más sincero agradecimiento.

Jose Ygnacio Vélez Cerrada
Madrid, 2007

Resumen

La generalización de la noción de inversa para trasformaciones lineales no invertibles ha sido estudiada por numerosos investigadores en los últimos años.

Así, han sido definidas varias "pseudoinversas" para las matrices no invertibles. Dentro de estas, la inversa de Moore-Penrose, definida independientemente por Moore (1920) y por Penrose (1955), nos aporta la solución por mínimos cuadrados de norma mínima de un sistema singular lineal de ecuaciones algebraicas. Sin embargo, tal inversa no posee propiedades del tipo $GA = AG$, si λ es un autovalor de A, entonces $1/\lambda$ es un autovalor de G y, si A es semejante a G entonces A y G tienen los mismos valores singulares, donde G es la inversa de Moore-Penrose de A. En 1958, M. P. Drazin introduce, a partir de una definición algebraica, un nuevo tipo de inversa generalizada, la inversa de Drazin, que denotaremos por A^D, la cual si posee las propiedades anteriores. En este trabajo nos centraremos en tal inversa.

La inversa de Drazin presenta variadas e importantes aplicaciones en la resolución de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales y ecuaciones lineales en diferencias, en la criptografía, en la teoría del control óptimo y en las cadenas de Markov. El buscador de Internet Google utiliza el algoritmo PageRank para ordenar los resultados de las búsquedas. Este algoritmo puede ser interpretado en términos de una cadena Markov, en la cual los estados son las páginas, y las transiciones entre los estados son los enlaces (links) entre las páginas de Internet. El vector estacionario de esta cadena de Markov, llamado vector PageRank, tiene como componentes las probabilidades de que una página sea visitada. Si T es la matriz de transición de una cadena de Markov, en teoría, toda la información de ésta puede ser extraída de la matriz $A = T - I$ y de A^D.

Esta "pseudoinversa" es inestable respecto a perturbaciones, esto es, si A_j, con $j = 1, 2, \ldots$, y A son $n \times n$ matrices tales que $A_j \to A$, entonces, en general, no se tiene que $A_j^D \to A^D$.

En [6], S. L. Campbell y C. D. Meyer, establecieron una condición necesaria y

suficiente para la continuidad de la inversa de Drazin. Formularon que si $A_j \to A$, entonces $A_j^D \to A^D$ si y sólo si existe un entero positivo j_0 tal que $rg(A_j^{k_j}) = rg(A^k)$, para $j \geq j_0$ y para ciertos enteros positivos k_j y k.

En dicho documento señalaron la dificultad de obtener cotas del error para la perturbación de la inversa de forma similar a las formuladas para la inversa de Moore-Penrose, como fueron establecidas por G. W. Stewart, [86]. La razón de esta afirmación estaría en que es algo más complicado trabajar algebraicamente con esta inversa que con la inversa de Moore-Penrose. La inversa de Moore-Penrose posee un tipo de ley de cancelación (si $GAB = GAC$ entonces $AB = AC$) que la inversa de Drazin no tiene. Además, la inversa de Drazin puede ser pensada en términos de la forma canónica de Jordan y, la forma de Jordan, no es una función continua de $\mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{C}^{n\times n}$.

La perturbación de la inversa de Drazin ha sido estudiada por diversos autores dando cotas del error relativo $\|B^D - A^D\|/\|A^D\|$ bajo la condición $rg(B^s) = rg(A^k)$, siendo s y k los índices de Drazin de B y A, respectivamente. Cuando el valor de los índices es igual a uno, nos referimos a la perturbación del Grupo inverso, que denotaremos por $A^\sharp$. Este caso es de especial interés dentro de la teoría de la inversa de Drazin.

Bajo las hipótesis $ind(B) = ind(A) = 1$ y $rg(B) = rg(A)$, en [62, 91], se dedujeron estimaciones para $\|B^\sharp - A^\sharp\|/\|A^\sharp\|$. Suponiendo $ind(B) = 1$ e $ind(A) = k$ y, $rg(B) = rg(A^k)$, en [16, 61, 95] fueron obtenidas nuevas cotas usando la norma espectral. El caso $rg(B^s) = rg(A^k)$, donde $s = ind(B)$ y $k = ind(A)$ fue estudiado en [97, 98, 102].

Para elementos de un álgebra de Banach en [79] se halló una cota superior de $\|b^D - a^D\|/\|a^D\|$.

En el marco de la teoría de operadores la perturbación de la inversa de Drazin ha sido estudiada en [14, 17].

En esta linea han trabajado varios autores, citemos entre otros a S. L. Campbell, N. Castro, J. J. Koliha, X. Li, C. D. Meyer, V. Rakočević, Y. Wei y H. Wu.

A continuación expondremos la estructura de este trabajo y los aspectos más relevantes tratados en este estudio.

En el **Capítulo 1** introduciremos las inversas generalizadas. También daremos una breve exposición cronológica de los logros más significados relacionados con la inversa de Drazin.

En el **Capítulo 2** se dan los conceptos y resultados más importantes acerca de la inversa de Drazin de matrices cuadradas que serán empleados en el desarrollo de los Capítulos 3 y 4. Se introducirá el concepto de proyección espectral asociada al autovalor 0 de una matriz cuadrada que denotaremos por A^π. Diversos resultados que muestran el importante papel que juega en la teoría de la inversa de Drazin.

En los Capítulos 3, 4, 5 y 6 se presenta la investigación realizada.

En el **Capítulo 3** se analiza en primer lugar la perturbación de la proyección espectral asociada al 0 en relación con la inversa de Drazin. Se considerarán los proyectores oblicuos de la forma $Q = A^\pi + S$ y, bajo la condición $I - S^2$ no singular, se caracterizarán las matrices perturbadas B tales que su proyección espectral asociada al 0, B^π, verifican $B^\pi = Q$. Entre otros resultados, se verá que su inversa de Drazin verifica la fórmula $B^D = (I + S + A^D(B - A))^{-1}A^D(I - S)$. A partir de esta, posteriormente se derivarán cotas superiores de $\|B^D\|$ y $\|B^D - A^D\|/\|A^D\|$, en términos de $\|S\|$. Diversos casos serán estudiados.

En la Sección 3.3 se introducirá la clase de matrices $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ las cuales satisfacen la siguiente condición, para algún entero positivo s,

$$(\mathcal{C}_s)\ :\ \mathcal{R}(B^s) \cap \mathcal{N}(A^k) = \{0\} \quad y \quad \mathcal{N}(B^s) \cap \mathcal{R}(A^k) = \{0\},$$

donde $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $k = ind(A)$.

Probaremos que las condiciones $(\mathcal{C}_s)$ y $rg(B^s) = rg(A^k) = rg(A^kB^sA^k)$ son equivalentes. Otras caracterizaciones serán dadas.

Estudiaremos en primer lugar el caso $s = 1$. El Grupo inverso juega un papel importante en el estudio de la estabilidad de las cadenas de Markov. Extenderemos los resultados obtenidos al caso $s > 1$.

En la Sección 3.4 se aplicarán los resultados obtenidos en secciones anteriores para dar diversos resultados de perturbación.

A partir de una fórmula para B^D en términos de $B - A$ y $B^\pi - A^\pi$, válida para las matrices relacionadas por $I - (B^\pi - A^\pi)^2$ es no singular, se derivarán cotas superiores para la inversa de Drazin de B y su error relativo.

Para las matrices que cumplen $ind(B) = 1$ y $(\mathcal{C}_1)$ obtendremos una fórmula explícita de $B^\sharp$, de la cual se deducirán cotas superiores de $\|B^\sharp - A^D\|/\|A^D\|$ y $\|B^\pi - A^\pi\|$.

Se extenderán los resultados obtenidos al caso $s > 1$, deduciéndose una expresión explícita de B^D y, cotas superiores para el error relativo de la inversa de Drazin y $\|BB^D - AA^D\|$.

Como aplicaciones, en la Sección 3.5 obtendremos una estimación de $\|B^\pi - A^\pi\|$ en términos de las proyecciones ortogonales sobre los subespacios núcleo e imagen de B^s y A^k.

Se aplicarán las acotaciones superiores de la inversa de Drazin y del error relativo de la perturbación para obtener una estimación del error en la solución de sistemas singulares.

Para finalizar, estudiaremos un tipo especial de perturbaciones $B = A+E$, dentro de la clase $(\mathcal{C}_s)$, que incluye a las matrices tales que $B^2A^DA = (BA^DA)^2$. Deduciremos una fórmula explícita para la inversa de Drazin de este tipo de perturbaciones, de la cual obtendremos una nueva cota superior de $\|B^D - A^D\|/\|A^D\|$.

Los principales resultados obtenidos en la Sección 3.2 generalizan [16, Teorema 2.1, Teorema 3.1 y Corolario 2.3], donde se caracterizaban las matrices con proyecciones espectrales iguales.

Mediante ejemplos numéricos mostraremos que las cotas obtenidas en la Sección 3.4, para el caso $s = 1$, son mejores que las dadas en [62, Teorema 3] y [97, Teorema 4 y Teorema 5], y para el caso $s > 1$, que las deducidas en [97, Teorema 1, Teorema 4 y Teorema 5] y [98, Teorema 4.1].

La aplicación a sistemas lineales singulares generaliza [100, Theorem 4.1] y el principal resultado del Apartado 3.5.3 generaliza el dado en [63, Teorema 3.2].

Parte de los resultados concernientes a la perturbación de la proyección espectral han sido publicados con el título ***Characterizations of matrices whose eigenprojections at zero are equal to a fixed perturbation***, [19], y los relacionados con el estudio de las matrices que cumplen $(\mathcal{C}_s)$ lo serán bajo el nombre ***Characterizations of a class of matrices and perturbations of the Drazin inverse***, [18].

En el **Capítulo 4** se estudiará la perturbación de la inversa de Drazin de una matriz rectangular. La inversa de Drazin en el contexto de las matrices rectangulares será llamada W-Drazin inversa y denotada por $A^{D,W}$.

Primero, se expondrán diversos aspectos de la W-Drazin inversa y del W-soporte idempotente de una matriz A, denotado por $A^{\sigma,W}$.

En la Sección 4.3 se darán diversas caracterizaciones de las matrices rectangulares B con W-soportes idempotentes relacionados por la condición $WB^{\sigma,W} = WA^{\sigma,W}$, entre otros resultados. También se estudiarán las matrices que verifican la condición simétrica $B^{\sigma,W}W = A^{\sigma,W}W$ y aquellas con igual W-soporte idempotente.

En la Sección 4.4, de los resultados obtenidos anteriormente, derivaremos cotas superiores para la W-Drazin inversa de B y para $\|B^{D,W} - A^{D,W}\|/\|A^{D,W}\|$.

Finalizará el capítulo con una aplicación a sistemas rectangulares perturbados.

En particular, si las matrices son cuadradas y $W = I$ se obtiene una caracterización de las matrices con igual proyección espectral, así, se generaliza [16, Teorema 2.1] y su extensión a operadores lineales acotados [78, Teorema 3.2].

Los resultados de perturbación obtenidos son más generales que los dados para matrices en [101, Teorema 1] y para operadores lineales y acotados en [78, Corolario

3.3 y Corolario 3.4].

En la aplicación a sistemas lineales se generaliza [101, Teorema 2], para matrices rectangulares, y [78, Teorema 4.4], para operadores lineales y acotados.

Los principales resultados de este capítulo aparecerán publicados bajo el título ***The weighted Drazin inverse of perturbed matrices with related support idempotents***, [20].

En el **Capítulo 5** se extenderán a elementos de un anillo unitario y álgebra de Banach con unidad, entre otros resultados, las caracterizaciones obtenidas en el Capítulo 3 para las matrices relacionadas por la condición $I-(B^{\pi}-A^{\pi})^2$ es no singular.

En la Sección 5.2 se introducirán los conceptos de espectro idempotente, elementos cuasipolares y regulares en un anillo, dando algunos resultados que los involucran. Se definirá la inversa de Drazin de elementos cuasipolares generalizando la inversa de Drazin convencional. Esta inversa se denominará inversa de Drazin generalizada o g-Drazin inversa. Se dará una expresión matricial para elementos de anillos y álgebras de Banach.

En la Sección 5.3 se caracterizarán los elementos g-Drazin invertibles b con espectros idempotentes relacionados por la condición $1-(b^{\pi}-a^{\pi})^2$ es un elemento invertible. También se dará una representación matricial para tales elementos.

En la Sección 5.4 se aplicarán los resultados obtenidos a elementos de un anillo con involución para obtener diversas caracterizaciones de los elementos EP y de la perturbación de tales elementos.

Para finalizar, en el contexto de un álgebra de Banach compleja asociativa con unidad se obtendrán cotas superiores de $\|b^D-a^D\|$ y $\|b^D\|$.

El Teorema 5.3.5 generaliza el principal resultado en [51, Teorema 6.1], donde se consideró elementos con igual espectro idempotente y se aplicaron los resultados obtenidos para dar una nueva caracterización de los elementos EP.

Si $b^{\pi}=a^{\pi}$, se obtiene una caracterización de los elementos EP en anillos con involución y, en particular, para matrices se tiene [16, Teorema 5.2].

Parte de los resultados de este capítulo se recogen en el artículo ***Elements in rings and Banach algebras with related spectral idempotents***, [21].

En el **Capítulo 6** estudiaremos la clase de operadores lineales y acotados sobre un espacio de Banach complejo, $B\in\mathcal{B}(\mathcal{X})$, Grupo invertibles que inducen las siguientes descomposiciones del espacio:

$$\mathcal{X}=\mathcal{R}(A^k)\oplus\mathcal{N}(B) \;\text{ y }\; \mathcal{X}=\mathcal{R}(B)\oplus\mathcal{N}(A^k), \tag{1}$$

donde $A\in\mathcal{B}(\mathcal{X})$ es Drazin invertible con $ind(A)=k$. Estas condiciones son equivalentes a que los proyectores espectrales en el 0 de B y A verifiquen la condición

$I - B^\pi - A^\pi$ es invertible en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Extenderemos algunos de los resultados dados para las matrices pertenecientes a $(\mathcal{C}_1)$ al ámbito de los operadores acotados.

En la Sección 6.2 expondremos algunos conceptos y resultados de la teoría de operadores Drazin invertibles y g-Drazin invertibles.

En la Sección 6.3 estudiaremos los operadores $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ cuya representación matricial, respecto la descomposición del espacio de Banach $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$, es de la forma

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{21}T_{11}^{-1}T_{12} \end{pmatrix}, \; T_{11} \text{ es invertible en } \mathcal{B}(\mathcal{X}_1).$$

Obtendremos una representación matricial del operador resolvente, del Grupo inverso y del proyector espectral para la clase de operadores objeto de estudio.

En la Sección 6.4 se introducirá la clase (1). Se darán diversas caracterizaciones de esta clase de operadores dando, entre otras, una representación matricial respecto de la descomposición topológica $\mathcal{X} = \mathcal{R}(A^k) \oplus \mathcal{N}(A^k)$. Mostraremos que $I + A^D(B - A)$ es invertible en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ y que $(I + A^D(B - A))^{-1}A^D$ es un inverso generalizado $(1, 2)$-inverso de B. El operador $(1, 2)$-inverso de B es llamado inverso algebraico o AG-inverso de B. Observamos que si un operador B es Grupo invertible, entonces B es AG-invertible. Diversas caracterizaciones de los operadores AG-inversos serán dadas.

En la Sección 6.5 analizaremos la perturbación de la inversa de Drazin para los operadores estudiados en la sección anterior. Algunos de los resultados obtenidos se aplicarán para obtener cotas superiores de $\|B^\sharp - A^D\|$ y $\|BB^\sharp - AA^D\|$. También se deducirá un resultado sobre la continuidad del Grupo inverso para operadores acotados.

En la Sección 6.6 caracterizaremos los operadores g-Drazin invertibles $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ que verifican las condiciones

$$\mathcal{X} = \mathcal{K}(A) \oplus \mathcal{H}_0(B) \;\; \text{y} \;\; \mathcal{X} = \mathcal{K}(B) \oplus \mathcal{H}_0(A),$$

donde los espacios anteriores son los definidos por M. Mbekhta en [64].

También obtendremos una estimación para $\|B^\pi - A^\pi\|$, en el caso en el que $\mathcal{X}$ sea una espacio de Hilbert.

Finalmente, en la Sección 6.7, dado un operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ g-Drazin invertible, se caracterizaran los operadores g-Drazin invertibles $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ relacionados por la condición $\mathfrak{pr}(B^\pi) = \mathfrak{pr}(A^\pi + S)$, donde $\mathfrak{pr}$ es el homomorfismo natural de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ en el álgebra de Calkin sobre $\mathcal{X}$ y $S \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$.

La clase dada por las condiciones (1) generaliza la clase de matrices $(\mathcal{C}_1)$, introducida en el Capítulo 3. En particular, el caso $B^\pi = A^\pi$ fue considerado en [16] para matrices, en [17] para operadores cerrados y, en [51] para elementos de un anillo.

El Teorema 6.3.2 generaliza [4, Teorema 7.7.7], donde el resultado fue dado para matrices por bloques.

En el Teorema 6.4.4 extendemos a operadores el resultado dado para matrices en el Teorema 3.3.7.

Los resultados de perturbación dados en la sección 6.5 generalizan los obtenidos en el Apartado 3.4.1 para matrices que cumplen la condición $(\mathcal{C}_1)$.

Por último, si $\mathfrak{pr}(B^\pi) = \mathfrak{pr}(A^\pi)$, el Corolario 6.7.5 se reduce a [76, Corolario 2.3].

Una parte de los resultados de este capítulo se recogen en el artículo ***On the perturbation of the Group generalized inverse for a class of bounded operators in Banach spaces***,[22].

Abstrat

The generalization of the notion of inverse for singular linear transformations has been studied for numerous investigators in the last years.

This way, several “pseudoinverses” for matrices non invertibles were defined. Inside these, the Moore-Penrose inverse, defined independently by Moore (1920) and Penrose (1955), it contributes us the minimal norm least squares solution of a linear singular system of algebraic equations. However, such inverse doesn't possess properties like $GA = AG$, if λ is an eigenvalue of A, then $1/\lambda$ is an eigenvalue of G and, if A is similar to G then A and G have the same singular values, where G is the Moore-Penrose inverse of A. In 1958, M. P. Drazin introduces, starting from an algebraic definition, a new type of generalized inverse, the Drazin inverse that we will denote for A^D, which possesses the previous properties. In this work we will center in such inverse.

The Drazin inverse presents varied and important applications as they are the resolution of difference equations and linear systems of differential equations, the cryptography, the theory of the optimal control and the theory of finite Markov chains. The Internet Google search uses the algorithm Pagerank to order the results of the searches. This algorithm can be interpreted as a Markov chain for which the states are the pages, and the transitions are the links among the pages. The stationary vector of this Markov chain, called PageRank vector, has as components the probabilities that a page is visited. If T is the transition matrix of a chain of Markov, in theory, all the information of this it can be extracted of the matrices $A = T - I$ and A^D.

This “pseudoinverse” is unstable respect perturbations, that is, if A_j, with $j = 1, 2, \ldots$, and A are $n \times n$ matrices such that $A_j \to A$, then, in general, one doesn't have that $A_j^D \to A^D$.

In [6], S. L. Campbell and C. D. Meyer, established a necessary and sufficient condition for the continuity of the Drazin inverse. They formulated that if $A_j \to A$,

then $A_j^D \to A^D$ if and only if there exists a positive integer j_0 such that $rg(A_j^{k_j}) = rg(A^k)$, for $j \geq j_0$ and for some positive integers k_j and k.

In the same paper, they indicated the difficulty in establishing norm estimates for the perturbed inverse similar to those for the Moore-Penrose inverse determined by G. W. Stewart, [86]. First, the Drazin inverse has a weaker "cancellation law", (if G is an inverse of A and $GAB = GAC$, then $AB = AC$) and is somewhat harder to work with algebraically than the Moore-Penrose inverse, and the Jordan form is not a continuous function of $\mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{C}^{n\times n}$ and the Drazin inverse can be thought of in terms of the Jordan form.

The perturbation of the Drazin inverse has been studied for several authors giving bounds for $\|B^D - A^D\|/\|A^D\|$ under the condition $rg(B^s) = rg(A^k)$, where s and k are the Drazin indexes of B and A, respectively. When the value of the indexes is one, we refer to the perturbation of the Group inverse, that we will denote for $A^\sharp$. This case is of special interest in theory of the Drazin inverse.

Under the hypotheses $ind(B) = ind(A) = 1$ and $rg(B) = rg(A)$, in [62, 91], were deduced bounds for $\|B^\sharp - A^D\|/\|A^D\|$. Supposing $ind(B) = 1$ and $ind(A) = k$ and, $rg(B) = rg(A^k)$, in [16, 61, 95] were obtained new bounds using the spectral norm. The case $rg(B^s) = rg(A^k)$, where $s = ind(B)$ and $k = ind(A)$ was studied in [97, 98, 102].

For elements of an Banach algebra in [79], was deduced a upper bound for $\|b^D - a^D\|/\|a^D\|$.

In the setting of operator theory, the perturbation of the Drazin inverse has been studied in [14, 17].

In this line several authors have worked, let us mention to S. L. Campbell, N. Castro, J. J. Koliha, X. Li, C. D. Meyer, V. Rakočević, Y. Wei and H. Wu.

Next, we will expose the structure of this work and the most outstanding aspects treated in this study.

In **Chapter 1** we will introduce the generalized inverses. Also, we will give a short exposition about the achievements more important related with the Drazin inverse.

In **Chapter 2** we give the concepts and more important results about the Drazin inverse of square matrices that we will employ in the development of the Chapters 3 and 4. We will introduce the concepts of eigenprojection of A corresponding to the eigenvalue 0 of a square matrix, which we will denote for A^π. Several results show the important paper that plays in the theory of the Drazin inverse.

In Chapters 3, 4, 5 and 6 we show the investigation.

In **Chapter 3**, first we analyze the perturbation of the eigenprojection at zero in relationship with the Drazin inverse. We will consider the oblique projector $Q = A^\pi + S$ and, under the condition $I - S^2$ nonsingular, we will be characterize the perturbed matrices B such as their eigenprojections at zero, B^π, verifies $B^\pi = Q$. We will see that we have the formula $B^D = (I+S+A^D(B-A))^{-1}A^D(I-S)$. Later, we will derive upper bounds for $\|B^D\|$ and $\|B^D - A^D\|/\|A^D\|$. Several cases will be studied.

In Section 3.3 we will introduce the class of matrices $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ satisfying the following conditions, for some positive integer s,

$$(\mathcal{C}_s) \ : \mathcal{R}(B^s) \cap \mathcal{N}(A^k) = \{0\} \quad \text{and} \quad \mathcal{N}(B^s) \cap \mathcal{R}(A^k) = \{0\},$$

where $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, with $k = ind(A)$.

We will prove that condition $(\mathcal{C}_s)$ is equivalent to $rg(B^s) = rg(A^k) = rg(A^kB^sA^k)$. Other characterizations will be given.

In first place, we will study the case $s = 1$. The Group inverse plays an important role in the study of the stability of Markov chains. We will extend the results obtained to the case $s > 1$.

In the Section 3.4 we will apply the results obtained in previous sections to give several results of perturbation.

From a formula for B^D in terms of $B-A$ and $B^\pi - A^\pi$, which is valid for matrices related for $I-(B^\pi - A^\pi)^2$ is nonsingular, we will derive upper bounds for the Drazin inverse of B and its relative error.

For the matrices such that $ind(B) = 1$ and $(\mathcal{C}_1)$ we will obtain an explicit formula of $B^\sharp$, which we will deduce upper bounds for $\|B^\sharp - A^D\|/\|A^D\|$ and $\|B^\pi - A^\pi\|$.

We will expand the results obtained to the case $s > 1$, deducing an explicit expression of B^D and, upper bounds for the relative error of the Drazin inverse and $\|BB^D - AA^D\|$.

In Section 3.5 we will obtain an estimate of $\|B^\pi - A^\pi\|$ in terms the orthogonal projections onto the nullspaces and ranges of B^s and A^k.

We will apply the upper bounds for the Drazin inverse and for the perturbation for relative error to perturbed linear systems.

Finally, we will study a special class of perturbation matrices $B = A+E$, inside the class $(\mathcal{C}_s)$, which includes to matrices such that $B^2A^DA = (BA^DA)^2$. We will deduce an explicit formula for the Drazin inverse of these matrices, which we will obtain a new upper bound for $\|B^D - A^D\|/\|A^D\|$.

The main results obtained in Section 3.2 generalize [16, Theorem 2.1, Theorem 3.1 and Corollary 2.3], it where were characterized the matrices with same eigenprojections at zero.

In a numerical example we show that our bounds obtained in Section 3.3, for $s = 1$, are better than other upper bounds given in [62, Theorem 3] and [97, Theorem 4 and Theorem 5], and for the case $s > 1$ that the upper bounds deduced in [97, Theorem 1, Theorem 4 and Theorem 5] and [98, Theorem 4.1].

The application to lineal singular systems generalizes [100, Theorem 4.1] and the main result of Section 3.5.3 generalizes [63, Theorem 3.2].

A part of results for perturbation of the eigenprojection at zero has been published with the title ***Characterizations of matrices whose eigenprojections at zero are equal to a fixed perturbation***, [19], and those related with the study of matrices that verify $(\mathcal{C}_s)$ will be with the name ***Characterizations of a class of matrices and perturbation of the Drazin inverse***, [18].

In **Chapter 4** it will be studied the perturbation of the Drazin inverse of rectangular matrices that we will call W-Drazin inverse, $A^{D,W}$.
First, we will give diverse aspects of the W-Drazin inverse and of W-support idempotent of A, that we will denote by $A^{\sigma,W}$.

In Section 4.3 we will give several characterizations of the rectangular matrices B with W-supports idempotentes related by the condition $WB^{\sigma,W} = WA^{\sigma,W}$, among other results. Moreover, we will study those that verify the symmetrical condition $B^{\sigma,W}W = A^{\sigma,W}W$ and those with equal W-support idempotente.

In Section 4.4, we will derive upper bounds for the W-Drazin inverse of B and for $\|B^{D,W} - A^{D,W}\|/\|A^{D,W}\|$.

Finally, we consider an application to the perturbation of linear systems.

In particular, if the matrices are square and $W = I$ we recover the results of [16, Theorem 2.1] related to the characterization of matrices with equal eigenprojections at zero and the perturbation by them, and their extension to bounded linear operators [78, Theorem 3.2].

The perturbation results obtained generalize the result in [101, Theorem 1] and for bounded linear operators in [78, Corollary 3.3 and Corollary 3.4].

In the application to linear systems it generalizes [101, Theorem 2], for rectangular matrices, and [78, Theorem 4.4], for bounden linear operators.

The main results of this chapter will appear published under the title ***The weighted Drazin inverse of perturbed matrices with related support idempotents***, [20].

In **Chapter 5** we will extend to the setting of rings and Banach algebras the results for matrices, given in Chapter 3, with eigenprojections at zero related by the condition $I - (B^{\pi} - A^{\pi})^2$ is nonsingular, among other results.

In Section 5.2 we will introduce the concepts of spectral idempotent, quasipolar and regular elements in a ring. We will define the Drazin inverse of quasipolar elements, generalizing the conventional Drazin inverse. This inverse will be denominated generalized Drazin inverse or g-Drazin inverse. An expression matricial will be given for elements of rings and Banach algebras.

In Section 5.3 we will characterize the g-Drazin invertibles elements b with spectral idempotent related by the condition $1-(b^\pi - a^\pi)^2$ is invertible. Also, we will give a matrix representation for such elements.

In Section 5.4 we apply this result in rings with involution to obtain a characterization of the perturbation of EP elements.

Finally, in the setting of an complex associative Banach algebra with unit we will be derive upper bounds for $\|B^D - A^D\|$ and $\|B^D\|$.

The Theorem 5.3.5 generalizes the result in [51, Theorem 6.1], where they considered elements with equal with spectral idempotent and were applied the results obtained to give a new characterization of EP elements.

If $b^\pi = a^\pi$, we obtain a characterization of EP elements in rings with involution and, in particular, for matrices it has [16, Theorem 5.2].

The main results of this chapter are picked up in the article ***Elements in rings and Banach algebras with related spectral idempotents***, [21].

In **Chapter 6** we will study the class of bounded linear operators on a complex Banach space, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, Group invertibles which induce the space decompositions:

$$\mathcal{X} = \mathcal{R}(A^k) \oplus \mathcal{N}(B) \quad \text{and} \quad \mathcal{X} = \mathcal{R}(B) \oplus \mathcal{N}(A^k), \tag{2}$$

where $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ is Drazin invertible with $ind(A) = k$, which is equivalent to the spectral projections associated with 0 of B and A are related by the condition $I - B^\pi - A^\pi$ is invertible in $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. We will extend some of the results for matrices that verify the condition $(\mathcal{C}_1)$ to bounded operators.

In Section 6.2 we will expose some concepts and results of the theory of Drazin invertibles and g-Drazin invertibles operators.

In Section 6.3 we will study the operators $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ which matrix form, with respect to the decomposition of the Banach space $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$, can be written as follow:

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{21}T_{11}^{-1}T_{12} \end{pmatrix}, \; T_{11} \text{ is invertible in } \mathcal{B}(\mathcal{X}_1).$$

We will obtain a matrix form of the resolvent operator, of the Group inverse spectral projection for this class of operators.

In Section 6.4 we will introduce the class (2). We will characterize this class of operators, giving a matrix form with respect to the topological decomposition $\mathcal{X} = \mathcal{R}(A^k) \oplus \mathcal{N}(A^k)$, with $k = ind(A)$. We will show that $I + A^D(B-A)$ is invertible in $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ and that $(I + A^D(B - A))^{-1}A^D$ is an algebraic generalized inverse, $(1,2)$-inverse of B. The $(1,2)$-inverse operator of B is called algebraic inverse or AG-inverse of B. We observe that if an operator B is Group invertible, then B is AG-invertible. We will give several characterizations of the AG-inverse operators.

In Section 6.5 we will analyze the perturbation of the Drazin inverse for the operators studied in the previous section. We will apply the results obtained to derive upper bounds for $\|B^\sharp - A^D\|$ and $\|BB^\sharp - AA^D\|$. Also we will deduce a result about the continuity of Group invertible bounded operators.

In Section 6.6 we will characterize the g-Drazin invertibles operators $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ that verify the conditions

$$\mathcal{X} = \mathcal{K}(A) \oplus \mathcal{H}_0(B) \quad \text{and} \quad \mathcal{X} = \mathcal{K}(B) \oplus \mathcal{H}_0(A),$$

where the previous spaces were defined by M. Mbekhta in [64].

Further, we will obtain an estimate for $\|B^\pi - A^\pi\|$, when $\mathcal{X}$ is a Hilbert space.

Finally, in Section 6.7, given an g-Drazin invertible operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, we will characterize the g-Drazin invertibles operators $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ related by the condition $\mathfrak{pr}(B^\pi) = \mathfrak{pr}(A^\pi + S)$, where $\mathfrak{pr}$ is the natural homomorphism of $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ onto the Calkin algebra and $S \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ is given.

The class given by the conditions (2) generalizes the class of matrices $(\mathcal{C}_1)$, introduced in Chapter 3. In particular, the case $B^\pi = A^\pi$ for matrices were studied in [16] and for closed operators in [17] and, in [51] for elements in a ring.

The Theorem 6.3.2 generalizes [4, Theorem 7.7.7], where the result was given for blocks matrices.

In Theorem 6.4.4 we extend to operators the results given for matrices in Theorem 3.3.7.

The results of perturbation given in section 6.5 generalize those obtained in section 3.4.1 for matrices $(\mathcal{C}_1)$.

Finally, if $\mathfrak{pr}(B^\pi) = \mathfrak{pr}(A^\pi)$, the Corollary 6.7.5 we obtain [76, Corollary 2.3].

A part of the results of this chapter are picked up in article ***On the perturbation of the Group generalized inverse for a class of bounded operators in Banach spaces***, [22].

Capítulo 1

Introducción

1.1. Inversas generalizadas. La inversa de Moore-Penrose y las $(i,\ j,\ k)$-inversas

Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{C}^{m\times n}, \quad x \in \mathbb{C}^n \text{ y } \quad b \in \mathbb{C}^m. \tag{1.1}$$

Representamos por $\mathcal{R}(A)$ al subespacio imagen de A y por $rg(A)$ al rango de A. El sistema anterior se dice que es consistente si $b \in \mathcal{R}(A)$ e inconsistente si $b \notin \mathcal{R}(A)$. En el primer caso, si $n = rg(A)$, el sistema (1.1) tiene solución única y, si $n > rg(A)$, entonces tiene infinitas soluciones.

Sería deseable encontrar para todos los casos una matriz apropiada $G \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tal que $x = Gb$ fuera algún tipo de solución del sistema (1.1), denominándose a G *inversa generalizada de* A. En particular, si A es una matriz invertible, entonces $G = A^{-1}$.

En 1935, E. H. Moore dio la siguiente definición de inversa generalizada. Por $P_{\mathcal{U}}$ denotamos a la proyección ortogonal sobre cualquier subespacio vectorial $\mathcal{U}$.

Definición 1.1.1 (Definición de Moore). Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se define la inversa generalizada de A como la única matriz, $A^\dagger \in \mathbb{C}^{m\times n}$, tal que

(i) $AA^\dagger = P_{\mathcal{R}(A)}$.

(ii) $A^\dagger A = P_{\mathcal{R}(A^\dagger)}$.

En 1955, R. Penrose, quien aparentemente desconocía el trabajo de Moore, dio una nueva definición de la misma inversa generalizada.

Definición 1.1.2 (Definición de Penrose). Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se define la inversa generalizada de A como la única matriz $A^{\dagger} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ tal que

(i) $AA^{\dagger}A = A$.

(ii) $A^{\dagger}AA^{\dagger} = A^{\dagger}$.

(iii) $(AA^{\dagger})^{*} = AA^{\dagger}$.

(iv) $(A^{\dagger}A)^{*} = A^{\dagger}A$.

Por $(\cdot)^{*}$ denotamos la traspuesta conjugada. A estas condiciones normalmente se las conoce como las *condiciones de Penrose*.

Claramente se observa que cuando $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es no singular esta inversa generalizada se reduce a la inversa usual A^{-1}.

En [4, Teorema 1.1.1] se demuestra que ambas definiciones son equivalentes y esta inversa generalizada $A^{\dagger}$ es llamada *inversa de Moore-Penrose* en honor a E. H. Moore y R. Penrose.

A continuación damos la definición funcional de una inversa generalizada de una aplicación lineal $\tilde{A}$ de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^m$ asociada a una descomposición de los espacios inicial y final de la aplicación, [4, Definición 6.2.1]. Recordemos que $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ son *subespacios complementarios* de $\mathbb{C}^n$ si $\mathbb{C}^n = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$. Denotamos por $\mathcal{N}(A)$ al subespacio núcleo de A.

Definición 1.1.3. Sea $\tilde{A} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ una trasformación lineal y, N y R subespacios complementarios de $\mathcal{N}(\tilde{A})$ y $\mathcal{R}(\tilde{A})$, respectivamente. Tomamos $\tilde{A}_1 = \tilde{A}\Big|_N$ y $x \in \mathbb{C}^m$, $x = x_1 \oplus x_2$, donde $x_1 \in \mathcal{R}(\tilde{A})$ y $x_2 \in R$. La trasformación lineal

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{G}_{N,R} : \mathbb{C}^m & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ x & \longmapsto & \tilde{A}_1^{-1}x_1 \end{array}$$

es llamada la *(N, R)-inversa generalizada* de $\tilde{A}$.

Dados N y R, la trasformación $\widetilde{G}_{N,R}$ es única, por lo tanto, si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ es la matriz asociada a la aplicación $\tilde{A}$, podemos definir $G_{N,R} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ como la matriz asociada a la aplicación $\widetilde{G}_{N,R}$ respecto de las bases canónicas de $\mathbb{C}^m$ y $\mathbb{C}^n$.

Si representamos como $\mathcal{U}^\perp$ al subespacio ortogonal del subespacio $\mathcal{U}$, entonces, de las igualdades

(i) $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{N}(A^\dagger)$.

(ii) $\mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A^\dagger)$.

se deduce que la inversa de Moore-Penrose es la $(\mathcal{R}(A^*), \mathcal{N}(A^*))$-inversa generalizada de A.

A continuación vemos qué tipo de solución de un sistema lineal de ecuaciones nos aporta la inversa de Moore-Penrose. Si el sistema (1.1) es inconsistente un tipo de solución a buscar podría ser aquellos vectores $u \in \mathbb{C}^n$ tal que la diferencia $Au - b$ en norma sea lo menor posible. Así, decimos que $u \in \mathbb{C}^n$ es una *solución por mínimos cuadrados* del sistema dado si $\|Au - b\| \leq \|Av - b\|$, para todo $v \in \mathbb{C}^n$.

El vector u es llamado *solución por mínimos cuadrados de norma mínima* si $\|u\| \leq \|w\|$, para cualquier otra solución por mínimos cuadrados w.

La inversa de Moore-Penrose nos aporta la solución por mínimos cuadrados de norma mínima, [4, Teorema 2.1.1].

TEOREMA 1.1.4. *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{C}^m$. Entonces $A^\dagger b$ es la solución por mínimos cuadrados de norma mínima para el sistema $Ax = b$.*

Otra clase de inversas generalizadas lo constituye las llamadas (i, j, k)*-inversas generalizadas*.

DEFINICIÓN 1.1.5. Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, una matriz $G \in \mathbb{C}^{n\times m}$ es una (i, j, k)*-inversa generalizada* de A si G satisface la i-ésima, j-ésima y k-ésima condiciones de Penrose.

El conjunto de todas las (i, j, k)-inversas de A se indicará por $A\{i, j, k\}$. Por ejemplo, G es una $(1, 3)$-inversa de A si $AGA = A$ y $(AG)^* = AG$, en este caso decimos que $G \in A\{1, 3\}$, pudiendo G satisfacer o no las restantes condiciones de Penrose.

A continuación expondremos una tabla dando los tipos más usuales de (i, j, k)-inversas y sus propiedades más significativas.

Tipo de inversa	Nombre	Propiedades
(1)-inversa	Inversa que resuelve ecuaciones o inversa interior	$G \in A\{1\} \Leftrightarrow Gb$ es una solución de $Ax = b$, para todo $b \in \mathcal{R}(A)$
(1,2)-inversa	(N, R)-inversa generalizada o inversa reflexiva	Si $G \in A\{1,2\}$, entonces tenemos $\mathbb{C}^n = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(G)$ y también $\mathbb{C}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(G)$. Cada (1,2)-inversa define subespacios complementarios de $\mathcal{R}(A)$ y de $\mathcal{N}(A)$
(1,3)-inversa	Inversa de mínimos cuadrados	$G \in A\{1,3\} \Leftrightarrow Gb$ es una solución por mínimos cuadrados de $Ax = b$, para todo $b \in \mathbb{C}^m$
(1,4)-inversa	Inversa de norma mínima	$G \in A\{1,4\} \Leftrightarrow Gb$ es la solución de mínima norma de $Ax = b$, para todo $b \in \mathcal{R}(A)$
(1,2,3,4)-inversa	Inversa de Moore-Penrose o Inversa por mínimos cuadrados de norma mínima, $A^\dagger$	$A\{1,2,3,4\}$ contiene exactamente un elemento, $A^\dagger$. El vector $A^\dagger b$ es la solución por mínimos cuadrados de norma mínima del sistema $Ax = b$. Si $b \in \mathcal{R}(A)$, entonces $A^\dagger b$ es la solución de norma mínima

Cuadro 1.1: (i, j, k)-inversas más usuales

Una característica fundamental de las (i, j, k)-inversas es que proporcionan algún tipo de solución, o solución por mínimos cuadrados, para un sistema lineal de ecuaciones algebraicas. Por este hecho, las (i, j, k)-inversas son también llamadas inversas que "resuelven ecuaciones". Sin embargo, hay ciertas propiedades que no poseen y que sería deseable que tuvieran. Por ejemplo, si A, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y A^g, B^g son (i, j, k)-inversas cualesquiera para A y B, respectivamente, vemos que ninguna (i, j, k)-inversa verifica todas las propiedades siguientes:

(i) $AA^g = A^g A$.

(ii) $(A^g)^p = (A^p)^g$, para algún $p \in \mathbb{N}$.

(iii) Si $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\} \Rightarrow \dfrac{1}{\lambda} \in \sigma(A^g)$.

(iv) $A^{p+1}A^g = A^p$, para algún $p \in \mathbb{N}$.

(iv) Si $B = PAP^{-1} \Rightarrow B^g = PA^gP^{-1}$.

La inversa generalizada llamada inversa de Drazin y, su caso particular, el Grupo inverso verifican las propiedades anteriores. Esta inversa será estudiada en el Capítulo 2.

En relación con las (i, j, k)-inversas la inversa de Drazin pertenece a $A\{2\}$ y el Grupo inverso a $A\{1, 2\}$.

1.2. Una breve reseña histórica de la inversa de Drazin

Sea $\mathfrak{R}$ un anillo asociativo con unidad $e \neq 0$.

En [29, (1958)], M. P. Drazin, introduce el concepto de inversa de Drazin en el marco de un anillo o semigrupo:

> *Un elemento $x \in \mathfrak{R}$ se dice que es pseudo-invertible (en $\mathfrak{R}$), si existe un elemento $c \in \mathfrak{R}$ satisfaciendo*
>
> $$cx = xc, \quad x - x^2c \text{ es nilpotente en } \mathfrak{R} \quad y \quad c = c^2x.$$

Esta pseudo-inversa es, generalmente, llamada inversa de Drazin clásica o convencional. Se observa que la condición $x - x^2c$ es nilpotente es equivalente a decir que $x^m = x^{m+1}c$ para algún entero positivo m. El entero más pequeño que verifica la condición anterior se denomina índice de x.

> *Un elemento $a \in \mathfrak{R}$ es llamado polar si existe un elemento idempotente $p \in \mathfrak{R}$ tal que,*
>
> $$pa = ap, \quad ap \text{ es nilpotente en } \mathfrak{R} \quad y \quad a + p \text{ es invertible en } \mathfrak{R}.$$

Cualquier elemento p que satisfaga estas condiciones es denominado un *espectro idempotente* de a. Todo elemento polar tiene un único espectro idempotente. Los elementos polares son los Drazin invertibles según la definición dada por Drazin.

Llamamos $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ al conjunto de todos operadores lineales y acotados definidos sobre un espacio de Banach complejo $\mathcal{X}$. En [8, (1974)], S. R. Caradus prueba que un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, tiene inversa de Drazin, con índice de Drazin igual a $k \geq 1$, si y sólo si el operador resolvente $R(\lambda; T)$ tiene un polo de orden k en $\lambda = 0$ y, en [7, (1978)], estudia la inversa de Drazin clásica en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.

En [4, (1979)], S. L. Campbell y C. D. Meyer, desarrollan e investigan la inversa de Drazin convencional para matrices cuadradas complejas.

Si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, obviamente, la definición de la inversa de Drazin clásica definida en el contexto de un anillo no puede ser aplicada a matrices rectangulares.

R. E. Cline y T. N. E. Greville, en [25, (1980)], definen la inversa de Drazin de una matriz rectangular $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, usando una matriz auxiliar $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$:

Sean A y W matrices rectangulares de dimensiones adecuadas. Se dice que X es la W-Drazin inversa de A si

$$AWX = XWA, \quad XWAWX = X \quad \text{y} \quad AW - (AW)^2XW \ \text{es nilpotente.}$$

En [74, (1981)], S. Qiao, extiende la W-Drazin inversa a la teoría de operadores lineales y acotados definidos entre espacios de Banach complejos distintos.

Un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ es cuasipolar si el 0 no es un punto de acumulación del espectro de T y polar si el 0 es un polo de la resolvente de T.

R. E. Harte, en [34, (1984)], introduce la inversa de Drazin para operadores cuasipolares haciendo referencia a la inversa de Drazin para operadores polares. También, en [36, (1988)], investiga los elementos cuasipolares de un álgebra normada general.

En [35, (1991)], R. E. Harte introduce el concepto de elemento cuasipolar en un anillo y su inversa de Drazin, que denominaremos g-Drazin inversa.
Así mismo, define los elementos cuasinilpotentes a como aquellos tales que $e - xa$ es invertible en $\mathfrak{R}$, para todo x que conmuta con a. Esta definición está asociada a la noción de elemento cuasipolar. Denotamos por $comm^2(a)$ al conjunto de todos los elementos que conmutan con cualquier elemento que conmute con a:

Un elemento $a \in \mathfrak{R}$ es cuasipolar si existe un elemento $b \in \mathfrak{R}$ tal que,

$$b \in comm^2(a), \quad ab = (ab)^2 \quad \text{y} \quad a - a^2b \ \text{es cuasinilpotente en } \mathfrak{R}.$$

Un elemento b que satisfaga las condiciones anteriores y además $b = ab^2$ es llamado g-Drazin inversa de a.

Los elementos cuasipolares en un anillo se pueden caracterizar de la siguiente forma:

> *Un elemento $a \in \mathfrak{R}$ es cuasipolar si y sólo si existe un elemento idempotente $p \in \mathfrak{R}$ tal que,*
>
> $p \in comm^2(a)$, *ap es cuasinilpotente en $\mathfrak{R}$ y $a+p$ es invertible en $\mathfrak{R}$.*

Los elementos cuasipolares en anillos y álgebras de Banach, y los operadores en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ cuasipolares serán los elementos g-Drazin invertibles y operadores g-Drazin invertibles, respectivamente.

En [72, (1992)], M. Z. Nashed e Y. Zhao extienden la inversa de Drazin convencional a operadores lineales y cerrados:

> *Un operador lineal y cerrado T es Drazin invertible si y sólo si el 0 es un polo de la resolvente de T.*

J. J. Koliha, en [48, (1996)], introduce la g-Drazin inversa para elementos de un álgebra de Banach unitaria, $\mathfrak{B}$:

> *Un elemento $a \in \mathfrak{B}$ es g-Drazin invertible si existe un $b \in \mathfrak{R}$ tal que,*
>
> $$ab = ba, \quad b = ab^2 \quad y \quad a - a^2b \text{ es cuasinilpotente en } \mathfrak{B}.$$
>
> *El elemento b es la g-Drazin inversa de a.*

En [57, (2001)], J. J. Koliha y T. D. Tran, definen la g-Drazin inversa de un operador cerrado T en un espacio de Banach en el caso que el 0 sea un punto aislado del espectro de T.

Recientemente, A. Dajić y J. J. Koliha, [26], han extendido el concepto de g-Drazin inversa a operadores lineales acotados entre espacios de Banach distintos, W-g-Drazin inversa.

Capítulo 2

La inversa de Drazin. Definiciones y resultados

2.1. Introducción

En este capítulo se expondrán los principales conceptos y propiedades acerca de la inversa de Drazin de matrices cuadradas.

En la Sección 2.2 se introducirá la noción de índice y las definiciones funcional y algebraica de la inversa de Drazin. Se darán dos representaciones de una matriz singular: la descomposición core-nilpotente y la descomposición índice 1-nilpotente, que serán de gran utilidad en los estudios posteriores.

En la Sección 2.3 se darán algunas propiedades básicas de la inversa de Drazin y de su caso especial, el Grupo inverso. También se introducirán las matrices EP.

En la Sección 2.4 se definirá el concepto de proyección espectral de una matriz correspondiente al autovalor 0 y se verá su relación con la inversa de Drazin. También se dará una caracterización de la proyección espectral y varias de la equivalencias de [16, Theorem 2.1], donde se caracterizaban las matrices con igual proyección espectral, entre otros resultados previos.

La Sección 2.6 recogerá varias representaciones de la inversa de Drazin, y del Grupo inverso, de una matriz por bloques.

Se finalizará este capítulo dando una aplicación de la inversa de Drazin a la resolución de sistemas singulares.

2.2. Definiciones

Existen dos posibles enfoques a la hora de dar una definición de la inversa de Drazin: el funcional o geométrico y el algebraico. Se expondrán ambas definiciones que resultarán ser equivalentes.

Antes, introducimos los conceptos de índice de una trasformación lineal e índice de una matriz cuadrada.

DEFINICIÓN 2.2.1. Sea $\tilde{A}$ una transformación lineal de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$. Llamamos *índice de* $\tilde{A}$ y lo representamos como $ind(\tilde{A})$ al entero no negativo k más pequeño tal que $\mathcal{N}(\tilde{A}^k) = \mathcal{N}(\tilde{A}^{k+1})$ o, equivalentemente, al entero no negativo k más pequeño tal que $\mathcal{R}(\tilde{A}^k) = \mathcal{R}(\tilde{A}^{k+1})$.
Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es la matriz asociada a la trasformación lineal $\tilde{A}$, entonces si denotamos el *índice de* A como $ind(A)$, se tiene que $ind(A) = ind(\tilde{A})$.

También se define el índice de A como el entero no negativo k más pequeño tal $rg(A^k) = rg(A^{k+1})$.

A continuación damos un lema previo a la definición funcional de la inversa de Drazin, [4, Lema 7.2.2].

LEMA 2.2.2. *Si* $\tilde{A}$ *es una transformación lineal sobre* $\mathbb{C}^n$ *e* $ind(\tilde{A}) = k$, *entonces* $\tilde{A}_1 = \tilde{A}\Big|_{\mathcal{R}(\tilde{A}^k)}$ *es una transformación lineal invertible sobre* $\mathcal{R}(\tilde{A}^k)$.

Ahora formulamos la *definición funcional de la inversa de Drazin* de una transformación lineal, $\tilde{A}$, sobre $\mathbb{C}^n$.

DEFINICIÓN 2.2.3 (DEFINICIÓN FUNCIONAL). Sea $\tilde{A}$ una transformación lineal sobre $\mathbb{C}^n$ tal que $ind(\tilde{A}) = k$. Sea $\tilde{A}_1 = \tilde{A}\Big|_{\mathcal{R}(\tilde{A}^k)}$ y tomemos $x = u + v$, donde $x \in \mathbb{C}^n$, $u \in \mathcal{R}(\tilde{A}^k)$ y $v \in \mathcal{N}(\tilde{A}^k)$. La transformación lineal definida por $\tilde{A}^D x = \tilde{A}_1^{-1} u$ es llamada *inversa de Drazin de* $\tilde{A}$.
Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es la matriz de la transformación lineal $\tilde{A}$, entonces se define la *inversa de Drazin de* A, A^D, como la matriz de la aplicación lineal $\tilde{A}^D$ respecto de la base canónica de $\mathbb{C}^n$.

Seguidamente damos la *definición algebraica de la inversa de Drazin* de una matriz cuadrada.

DEFINICIÓN 2.2.4 (DEFINICIÓN ALGEBRAICA). Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se define la *inversa de Drazin de* A como la matriz $A^D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

(i) $A^D A A^D = A^D$. (inversa exterior)

(ii) $AA^D = A^D A$.

(iii) $A^{k+1}A^D = A^k$, para algún entero $k \geq 0$.

El menor k que verifica (iii) es el $ind(A)$.

En adelante, por O y I denotaremos a una matriz nula y a una matriz identidad, de dimensiones adecuadas, respectivamente.

Observación 2.2.5. La condición (iii) de la definición anterior es equivalente a decir que $A - A^2A^D$ es nilpotente de índice k. En efecto,

$$\big(A(I - AA^D)\big)^k = A^k(I - AA^D)^k = A^k(I - AA^D) = O \Leftrightarrow A^k = A^{k+1}A^D.$$

En [4, Teorema 7.2.2] se demuestra que las definiciones funcional y algebraica son equivalentes.

2.2.1. Descomposición core-nilpotente

En el siguiente teorema se damos una representación matricial de la inversa de Drazin de una matriz cuadrada A. Esta representación es llamada *descomposición core-nilpotente de A*, [4, Teorema 7.2.1].

Teorema 2.2.6 (Descomposición core-nilpotente de A). *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es tal que $ind(A) = k \geq 0$ y $rg(A^k) = r$, entonces existe una matriz no singular $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que*

$$A = P \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} P^{-1}, \tag{2.1}$$

donde $A_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}$ es no singular y $A_2 \in \mathbb{C}^{n-r\times n-r}$ es nilpotente, con índice de nilpotencia k. Y con estas condiciones

$$A^D = P \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{2.2}$$

De la observación de las formas (2.1) y (2.2) se deduce que si A es nilpotente, entonces el bloque A_1 es vacío y por consiguiente $A^D = O$. Si el bloque A_2 es vacío, entonces A es no singular y $A^D = A^{-1}$.

Si $A_2 = O$, entonces $ind(A) = 1$ y si A es no singular, entonces $ind(A) = 0$.

A lo largo de este trabajo las matrices $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ representadas en la forma $M = P\begin{pmatrix} M_1 & M_{12} \\ M_{21} & M_2 \end{pmatrix} P^{-1}$ serán respecto a la representación (2.1).

A continuación se expondrá un algoritmo para obtener la descomposición core-nilpotente de la matriz A, hallando explícitamente las matrices P, A_1 y A_2.

Antes damos la siguiente definición.

Definición 2.2.7. Una matriz $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ está en *forma de hermite escalonada* si sus elementos h_{ij} satisfacen las condiciones siguientes:

(i) H es triangular superior.

(ii) h_{ij} es 0 ó 1.

(iii) Si $h_{ii} = 0$, entonces $h_{ik} = 0, \; 1 \leq k \leq n$.

(iv) Si $h_{ii} = 1$, entonces $h_{ki} = 0, \; \forall k \neq i$.

Algoritmo 2.2.8. Cálculo de A^D donde $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $ind(A) = k$.

1. Tomamos p un entero tal que $p \geq k$, (p puede ser tomado igual a n).
   Si $A^p = O$, entonces $A^D = O$. Asumimos que $A^p \neq O$.

2. Reducimos A^p a su forma de hermite escalonada por filas, H_{A^p}.
   Definición 2.2.7.

3. Seleccionamos las columnas de A^p que ocupan la misma posición que los elementos no cero de la diagonal de H_{A^p}, y las llamamos $v_1, v_2, \cdots, v_r$. Este conjunto constituye una base de $\mathcal{R}(A^k)$.

4. Formamos la matriz $I - H_{A^p}$ y guardamos las columnas no cero y las llamamos $v_{r+1}, v_{r+2}, \cdots, v_n$. Este conjunto constituye una base de $\mathcal{N}(A^k)$.

5. Construimos la matriz no singular $P = [v_1 \mid .. \mid v_r \mid v_{r+1} \mid ... \mid v_n]$.

6. Calculamos P^{-1}.

7. Hacemos el producto $P^{-1}AP$. Esta matriz es de la forma

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}, \text{ donde } A_1 \text{ es no singular y } A_2 \text{ nilpotente.}$$

8. Calculamos A_1^{-1}.

9. Calculamos $A^D = P \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}$.

En el Apéndice B se dará un algoritmo recursivo, basado en la traza de una matriz, para el cálculo de la inversa de Drazin.

2.2.2. Descomposición índice 1-nilpotente

La descomposición desarrollada en este apartado será utilizada en el desarrollo del Capítulo 3.

Definición 2.2.9 (Descomposición índice 1-nilpotente). Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, las matrices

$$C_A = AA^D A \quad \text{y} \quad N_A = A - C_A = (I - AA^D)A$$

son llamadas la *parte core* y la *parte nilpotente* de A, respectivamente. La representación

$$A = C_A + N_A$$

es llamada la *descomposición índice 1-nilpotente* de A.

En términos de la descomposición core-nilpotente de A dada en el Teorema 2.2.6 tenemos las siguientes representaciones:

$$C_A = P \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} \text{ y } N_A = P \begin{pmatrix} O & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

La descomposición índice 1-nilpotente es única en el sentido siguiente, [1, Teorema 11, Capítulo 4].

Teorema 2.2.10. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $ind(A) = k$. Entonces A tiene una única descomposición índice 1-nilpotente*

$$A = C_A + N_A$$

tal que $ind(C_A) = 1$, $N_A^k = O$ y

$$C_A N_A = N_A C_A = O.$$

Además,

$$A^p = C_A^p + N_A^p, \text{ para todo } p \geq 1, \text{ y } A^D = C_A^D.$$

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata del teorema anterior. Su demostración es obvia.

COROLARIO 2.2.11. *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y p es un entero positivo, entonces $C_A^p = C_{A^p}$, $N_A^p = N_{A^p}$ y $A^p = C_{A^p} + N_{A^p}$. Si $p \geq ind(A)$, entonces $A^p = C_A^p$.*

2.3. Propiedades de la inversa de Drazin

De las definiciones algebraica y funcional se tienen las siguientes propiedades.

PROPIEDADES 2.3.1. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $ind(A) = k$. Entonces,*

(i) $\mathcal{R}(A^D) = \mathcal{R}(AA^D) = \mathcal{R}(A^k)$.

(ii) $\mathcal{N}(A^D) = \mathcal{N}(AA^D) = \mathcal{N}(A^k)$.

(iii) $A^{p+1}A^D = A^p$, *para todo* $p \geq k$.

(iv) $B = QAQ^{-1} \Rightarrow B^D = QA^DQ^{-1}$.

A continuación damos una fórmula que nos permitirá obtener la inversa de Drazin en términos de cualquier (1)-inversa de una potencia de A, que será denotada como A^-, [33, Teorema 2.1.5]. Recordemos que si A^- es una (1)-inversa de A, entonces $AA^-A = A$. Se incluye su demostración por completitud.

TEOREMA 2.3.2. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $ind(A) = k$. Entonces, para cada entero $p \geq k$, y cualquier (1)-inversa de A^{2p+1}, se tiene*

$$A^D = A^p(A^{2p+1})^-A^p.$$

DEM. Sea

$$A = P\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

donde A_1 y P son no singulares y A_2 es nilpotente con índice de nilpotencia k. Entonces,

$$A^{2p+1} = P\begin{pmatrix} A_1^{2p+1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Si $G = P\begin{pmatrix} G_1 & G_{12} \\ G_{21} & G_2 \end{pmatrix} P^{-1}$ es una (1)-inversa de A^{2p+1}, entonces de $A^{2p+1}GA^{2p+1} = A^{2p+1}$. De aquí se sigue que

$$G = P\begin{pmatrix} A_1^{-2p-1} & G_{12} \\ G_{21} & G_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Luego, $A^D = A^p G A^p$. □

Notemos que, para todo entero $p \geq k$, $ind(A^{2p+1}) = 1$ y, por lo tanto, A^{2p+1} posee (1)-inversa.

El siguiente corolario se deduce del hecho de que la inversa de Moore-Penrose de A^{2p+1} es una (1)-inversa.

COROLARIO 2.3.3. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $ind(A) = k$. Entonces, para cada entero $p \geq k$, se tiene*

$$A^D = A^p (A^{2p+1})^\dagger A^p.$$

En particular, si $ind(A) = 1$, entonces

$$A^D = A(A^3)^\dagger A.$$

En general, la inversa de Drazin no posee la llamada regla del orden inverso. Esto es, $(AB)^D \neq B^D A^D$. En el caso de la inversa de Moore-Penrose, la conmutatividad de A y B no es suficiente para garantizar que $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$. Sin embargo, en el caso de la inversa de Drazin la conmutatividad si es suficiente.

A continuación mostramos algunas de las propiedades que se derivan de la conmutatividad de A y B, [4, Teorema 7.8.4 y Corolario 7.8.3].

TEOREMA 2.3.4. *Sean A, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $AB = BA$. Entonces,*

(i) $(AB)^D = B^D A^D = A^D B^D$.

(ii) $A^D B = BA^D$ *y* $AB^D = B^D A$.

(iii) $ind(AB) \leq \text{máx}\{ind(A), ind(B)\}$.

En general, incluso si $AB \neq BA$,

(iv) $(AB)^D = A((BA)^2)^D B$.

En el siguiente resultado damos una fórmula que posibilita construir A^D a partir de una solución de la ecuación $A^{k+1} X = A^k$, [4, Teorema 7.8.5].

TEOREMA 2.3.5. *Sean A, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $A^{p+1} B = A^p$, para algún $p \geq ind(A)$. Entonces,*

$$A^D = A^p B^{p+1}.$$

2.4. La proyección espectral asociada al autovalor cero

En esta sección se introducirá el concepto de proyección espectral correspondiente al autovalor 0. Se dará una caracterización de las proyecciones espectrales y de las matrices con igual proyección espectral.

Dados dos subespacios complementarios $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}^n$, cada $x \in \mathbb{C}^n$ se puede escribir de modo único como $x = u + v$, con $u \in \mathcal{U}$ y $v \in \mathcal{V}$.

El único operador lineal P definido por $Px = u$ es llamado *proyector oblicuo*, o *proyección oblicua, sobre* $\mathcal{U}$ *en la dirección, o a lo largo, de* $\mathcal{V}$ y lo denotaremos por $P_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$.

El proyector $P_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ tiene las siguientes propiedades:

- $P^2 = P$, i.e., P es idempotente.
- $I - P$ es el proyector sobre $\mathcal{V}$ en la dirección de $\mathcal{U}$.
- $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I-P) = \mathcal{U}$ y $\mathcal{R}(I-P) = \mathcal{N}(P) = \mathcal{V}$.

Sean los subespacios complementarios $\mathcal{N}(A^k)$ y $\mathcal{R}(A^k)$, donde $k = ind(A)$. La proyección $P_{\mathcal{N}(A^k),\mathcal{R}(A^k)}$, proyección oblicua sobre $\mathcal{N}(A^k)$ en la dirección de $\mathcal{R}(A^k)$, definida por

$$P_{\mathcal{N}(A^k),\mathcal{R}(A^k)}x = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathcal{R}(A^k), \\ x & \text{si} \quad x \in \mathcal{N}(A^k), \end{cases}$$

es llamada la *proyección espectral de* A *correspondiente al autovalor* 0 y se denota por A^π. Obviamente, $I - A^\pi = P_{\mathcal{R}(A^k),\mathcal{N}(A^k)}$ es el proyector complementario.

En [33, Teorema 1.3.1] se demuestra que para toda matriz idempotente A, los subespacios $\mathcal{R}(A)$ y $\mathcal{N}(A)$ son complementarios y $A = P_{\mathcal{R}(A),\mathcal{N}(A)}$.

La matriz AA^D es idempotente luego, de la igualdad anterior y de las Propiedades 2.3.1 (i) y (ii), se tiene que

$$AA^D = P_{\mathcal{R}(AA^D),\mathcal{N}(AA^D)} = P_{\mathcal{R}(A^k),\mathcal{N}(A^k)},$$

y así resulta la relación entre la proyección espectral y la inversa de Drazin dada por

$$AA^D = A^D A = I - A^\pi.$$

A continuación damos la expresión matricial del proyector A^π respecto la descomposición core-nilpotente de A.

PROPOSICIÓN 2.4.1. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $ind(A) = k$. Entonces la proyección espectral de, A^π, tiene una representación, respecto de la descomposición core-nilpotente de A, dada por*

$$A^\pi = P \begin{pmatrix} O & O \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1}.$$

DEM. Por el Teorema 2.2.6 se tiene que $A^D = P \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}$. Así,

$$A^\pi = P \left[\begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} \right] P^{-1} = P \begin{pmatrix} O & O \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Lo que demuestra el resultado. □

La siguiente proposición muestra una serie de relaciones existentes entre A, A^D y A^π. Se utilizará el hecho sabido de que si M es nilpotente, o sea, $\sigma(M) = \{0\}$, donde $\sigma(M)$ es el espectro de la matriz M, entonces $I + M$ es no singular.

PROPOSICIÓN 2.4.2. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $ind(A) = k$. Entonces,*

(i) $A^D A^\pi = A^\pi A^D = O$.

(ii) $A + A^\pi$ *es no singular.*

(iii) $A^D + A^\pi$ *es no singular.*

DEM. Su demostración es trivial. □

Seguidamente establecemos una expresión para la inversa de Drazin de una matriz A en términos de su proyección espectral.

PROPOSICIÓN 2.4.3. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $ind(A) = k$. Entonces,*

$$A^D = (A + A^\pi)^{-1}(I - A^\pi) = (I - A^\pi)(A + A^\pi)^{-1}. \tag{2.3}$$

DEM. Sean

$$A = P \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} P^{-1},\ A^\pi = P \begin{pmatrix} O & O \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1} \text{ y } A^D = P \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1},$$

donde A_1 es no singular y A_2 es nilpotente de índice de nilpotencia k. Entonces,

$$(A+A^\pi)^{-1}(I-A^\pi) = P\begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & (A_2+I)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & O \\ O & O\end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & O\end{pmatrix}P^{-1} = A^D.$$

Similarmente se demuestra la segunda igualdad. □

A continuación damos algunos resultados, involucrando a la proyección espectral, que serán utilizados más adelante.

La siguiente caracterización de la proyección espectral es una consecuencia de [56, Teorema 2.3].

Lema 2.4.4. *Sean A, $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces $Q = A^\pi$ si y sólo si*

$$Q^2 = Q, \quad AQ = QA, \quad \sigma(AQ) = \{0\}, \quad A+Q \text{ es no singular.} \tag{2.4}$$

Dem. Sea $A^\pi = P\begin{pmatrix} O & O \\ O & I\end{pmatrix}P^{-1}$. Consideramos $Q = A^\pi$, entonces las condiciones (2.4) se verifican por simple cálculo.

Recíprocamente, tomamos $Q = P\begin{pmatrix} Q_1 & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_2\end{pmatrix}P^{-1}$. De $AQ = QA$ se sigue $A^kQ = QA^k$ luego, para todo $k \geq ind(A)$, se tiene

$$P\begin{pmatrix} A_1^kQ_1 & A_1^kQ_{12} \\ O & O\end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} Q_1A_1^k & O \\ Q_{21}A_1^k & O\end{pmatrix}P^{-1}.$$

Así, usando que A_1 es no singular, se obtiene que $Q_{12} = Q_{21} = O$. Por otra parte, del hecho que Q es una proyección, se deduce que Q_2 y Q_1 son también proyecciones.

Ahora,

$$AQ = P\begin{pmatrix} Q_1A_1 & O \\ O & Q_2A_2\end{pmatrix}P^{-1}$$

es nilpotente luego existe $p \geq 0$ tal que $(AQ)^p = O$, entonces $A_1^pQ_1^p = A_1^pQ_1$, puesto que A y Q conmutan y $Q_1^2 = Q_1$. Así, $Q_1 = O$.

Finalmente, como $A+Q$ es no singular, entonces

$$(A+Q)^k = P\begin{pmatrix} A_1^k & O \\ O & (A_2+Q_2)^k\end{pmatrix}P^{-1}$$

es no singular, donde $k \geq ind(A)$. Luego

$$\begin{aligned}(A_2+Q_2)^k &= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}Q_2^{k-j}A_2^j = \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}Q_2^{k-j}A_2^j = \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}Q_2A_2^j \\ &= Q_2\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}A_2^j = Q_2(I+A_2)^k\end{aligned}$$

es también no singular, y como $(I + A_2)^k$ es no singular, entonces Q_2 también lo es. Ahora, $Q_2^2 = Q_2 \Leftrightarrow Q_2(Q_2 - I) = O$, por lo que $Q_2 = I$. $\square$

Notemos que la condición $\sigma(A) = \{0\}$ ha sido reemplazada por la condición equivalente, A es nilpotente, ver [103].

En [16, Theorem 2.1] fueron dadas varias caracterizaciones de matrices con igual proyección espectral en el autovalor 0, esto es, se caracterizaron las matrices B tales que $B^\pi = A^\pi$. Las caracterizaciones (i) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v) del citado teorema son extraídas en el siguiente Teorema.

TEOREMA 2.4.5. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Las siguientes condiciones sobre $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son equivalentes:*

(i) $A^\pi = B^\pi$.

(ii) $B = P\mathit{diag}(B_1\,,\, B_2)P^{-1}$ *con* B_1 *no singular,* B_2 *nilpotente.*

(iii) $B^D = (I + A^D(B - A))^{-1}A^D = A^D(I + (B - A)A^D)^{-1}$.

DEM. (i) $\Rightarrow$ (ii): Por el Lema 2.4.4 se tiene que (i) es equivalente a

$$A^\pi B = BA^\pi,\ BA^\pi \text{ es nilpotente y } B + A^\pi \text{ es no singular.}$$

Sea

$$B = P\begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ B_{21} & B_2 \end{pmatrix}P^{-1},$$

entonces

$$A^\pi B = BA^\pi \Leftrightarrow B = P\mathit{diag}(B_1\,,\, B_2)P^{-1}.$$

Ahora, BA^π es nilpotente entonces B_2 también lo es y B_1 es no singular debido a que $B + A^\pi$ es no singular.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): De la expresión $B = P\mathit{diag}(B_1\,,\, B_2)P^{-1}$, con B_1 no singular y B_2 nilpotente, se sigue $B^D = P\mathit{diag}(B_1^{-1}\,,\, O)P^{-1}$ y $I + A^D(B - A) = P\mathit{diag}(A_1^{-1}B_1\,,\, I)P^{-1}$ es no singular, entonces

$$\begin{aligned}(I + A^D(B - A))B^D &= P\mathit{diag}(A_1^{-1}B_1\,,\, I)\mathit{diag}(B_1^{-1}\,,\, O)P^{-1} \\ &= P\mathit{diag}(A_1^{-1}\,,\, O)P^{-1} = A^D.\end{aligned}$$

Ahora, como $\sigma(A^D(B - A)) \setminus \{0\} = \sigma((B - A)A^D) \setminus \{0\}$, entonces $I + (B - A)A^D$ es no singular y

$$\begin{aligned}B^D(I + (B - A)A^D) &= P\mathit{diag}(B_1^{-1}\,,\, O)\,\mathit{diag}(B_1A_1^{-1}\,,\, I)P^{-1} \\ &= P\mathit{diag}(A_1^{-1}\,,\, O)P^{-1} = A^D.\end{aligned}$$

(iii) $\Rightarrow$ (i): Manipulando las igualdades de (iii) se obtiene

$$B^D = A^D(I + (A - B)B^D) = (I + B^D(A - B))A^D,$$
$$A^D = B^D(I - (A - B)A^D) = (I - A^D(A - B))B^D.$$

Luego, $\mathcal{R}(A^D) = \mathcal{R}(B^D)$ y $\mathcal{N}(A^D) = \mathcal{N}(B^D)$, y así $A^\pi = B^\pi$. □

2.5. El Grupo inverso y matrices EP

Acorde con la definición de una (i, j, k)-inversa, dada en la Definición 1.1.5, vemos que la inversa de Drazin no siempre es una (1)-inversa, i.e., no verifica la primera condición de Penrose de una inversa generalizada, $AA^DA = A$ (*inversa interior*).

Sin embargo hay un caso especial de la inversa de Drazin en el que A^D es una (1)-inversa para $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, este es el *Grupo inverso*, y se denotará como $A^\sharp$.

Proposición 2.5.1. *Sea una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces,*

$$AA^DA = A \Leftrightarrow ind(A) \leq 1.$$

Dem. Si $ind(A) = 0$, entonces $A^D = A^{-1}$ y $AA^DA = A$. Supongamos que $ind(A) = 1$. Relativa a la descomposición core-nilpotente de A, se tiene que

$$A = P \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{y} \quad AA^DA = P \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Por lo que $AA^DA = A$. Recíprocamente, supongamos que $AA^DA = A$, entonces $A_2 = O$ y por consiguiente $ind(A) = 1$. □

Se observa que cuando el $ind(A) = 1$ la ecuación dada en la Definición 2.2.4 (iii) se reduce a $AA^\sharp A = A$.

En la terminología empleada en la Definición 1.1.3, el Grupo inverso de A es una $(\mathcal{R}(A), \mathcal{N}(A))$-inversa generalizada de A.

A continuación introducimos el concepto de matriz EP, [4, Definición 4.3.1].

Definición 2.5.2. Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ singular es EP si $A^\dagger A = AA^\dagger$.

En [4, Teorema 4.3.1] se caracterizaron la matrices EP.

TEOREMA 2.5.3. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *A es una matriz EP.*

(ii) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*)$.

(iii) $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A)$.

(iv) *Existe una matriz unitaria U y una matriz no singular $A_1 \in \mathbb{C}^{r\times r},\ r = rg(A)$, tal que*

$$A = U \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} U^*.$$

De este resultado se deduce que una matriz A es EP si y sólo si

$$AA^{\pi} = O \quad \text{y} \quad (A^{\pi})^* = A^{\pi}.$$

Se observa que la condición $AA^{\pi} = O$ es equivalente a que $ind(A) = 1$. Por lo tanto, concluimos que si una matriz A es EP, entonces A tiene Grupo inverso.

En [4, Teorema 7.3.4] se demostró que las matrices EP son aquellas que su inversa de Drazin coincide con su inversa de Moore-Penrose.

TEOREMA 2.5.4. *Sea una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces,*

$$A \text{ es una matriz } EP \Leftrightarrow A^{\sharp} = A^{\dagger}.$$

2.6. Inversa de Drazin de una matriz por bloques

En esta sección se darán diversas representaciones matriciales de la inversa de Drazin de una matriz por bloques de la forma

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}, \tag{2.5}$$

donde A y D son cuadradas.

En la actualidad no se conocen representaciones de M^D en términos de la inversa de Drazin de sus bloques con A, B, C y D arbitrarios. Varios trabajos han sido realizados considerando casos particulares.

Un caso de gran interés, y para el se tienen expresiones generales para la inversa de Drazin en términos de A^D y D^D, lo constituyen las matrices triangulares superiores e inferiores por bloques. A continuación damos su representación, [68].

Teorema 2.6.1. *Sean*

$$M_1 = \begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix} \quad y \quad M_2 = \begin{pmatrix} D & C \\ O & A \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

donde A y D son cuadradas con $ind(A) = k$ e $ind(D) = p$. Entonces,

$$M_1^D = \begin{pmatrix} A^D & O \\ X & D^D \end{pmatrix} \quad y \quad M_2^D = \begin{pmatrix} D^D & X \\ O & A^D \end{pmatrix},$$

donde

$$X = (D^D)^2 \left(\sum_{i=0}^{k-1} (D^D)^i C A^i\right) A^\pi + D^\pi \left(\sum_{i=0}^{p-1} D^i C (A^D)^i\right) (A^D)^2 - D^D C A^D.$$

Se define $O^0 = I$.

De los resultados dados anteriormente se sigue directamente el siguiente corolario.

Corolario 2.6.2. *Sean*

$$M_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ O & O \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} A & O \\ B & O \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} O & O \\ B & A \end{pmatrix} \ y\ M_4 = \begin{pmatrix} O & B \\ O & A \end{pmatrix},$$

donde A y cada M_i son cuadradas. Entonces,

$$M_1^D = \begin{pmatrix} A^D & (A^D)^2 B \\ O & O \end{pmatrix},\ M_2^D = \begin{pmatrix} A^D & O \\ B(A^D)^2 & O \end{pmatrix},\ M_3^D = \begin{pmatrix} O & O \\ (A^D)^2 B & A^D \end{pmatrix} \ y$$

$$M_4^D = \begin{pmatrix} O & B(A^D)^2 \\ O & A^D \end{pmatrix}.$$

En [4, Teorema 7.7.6] se formuló una expresión para M^D cuando $rg(M) = rg(A)$.

Teorema 2.6.3. *Sea* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *con* $A \in \mathbb{C}^{r\times r}$. *Si* $rg(M) = rg(A) = r$, *entonces*

$$M^D = \begin{bmatrix} I \\ CA^{-1} \end{bmatrix} ((AS)^2)^D A \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ CA^{-1} \end{bmatrix} A((SA)^2)^D \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \end{bmatrix},$$

donde $S = I + A^{-1}BCA^{-1}$.

El caso $ind(M) = 1$ es particularmente interesante. En el siguiente lema damos una condición para la existencia del Grupo inverso y una fórmula para su cálculo, [4, Lema 3.3.1 y Teorema 7.7.7].

En [90], N. Thome e Y. Wei investigaron la ecuación de rangos $rg \begin{pmatrix} A & B \\ C & X \end{pmatrix} = rg(A)$.

Teorema 2.6.4. *Sea* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *con* $A \in \mathbb{C}^{r\times r}$ *no singular y llamamos* $S = I + A^{-1}BCA^{-1}$. *Entonces,*

(i) $rg(M) = rg(A) \Leftrightarrow D = CA^{-1}B$.

En este caso, para todo entero $k \geq 1$, M^k *tiene una representación dada por*

$$M^k = \begin{bmatrix} I \\ CA^{-1} \end{bmatrix} (AS)^{k-1} A \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

(ii) *Si* $rg(M) = rg(A)$, *entonces* $ind(M) = 1 \Leftrightarrow S$ *es no singular.*

En este caso, el Grupo inverso de M *es dado por*

$$M^\sharp = \begin{bmatrix} I \\ CA^{-1} \end{bmatrix} (SAS)^{-1} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \end{bmatrix}.$$

Cuando A es no singular, la matriz $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ puede ser representada como sigue:

$$\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

La matriz $D - CA^{-1}B$ denomina el *complemento de Schur* de A en M.

Observamos que, bajo las hipótesis del Teorema 2.6.4, decir que $rg(M) = rg(A)$ es equivalente a decir que el complemento de Schur de A en M es cero, esto es, $D = CA^{-1}B$.

Si A es singular, entonces tenemos

$$\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^D & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^D B \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A^\pi C \\ BA^\pi & D - CA^D B \end{pmatrix},$$

donde $D - CA^D B$ es llamado el *complemento generalizado de Schur* de A en M.

Para finalizar esta sección mencionaremos algunos de los trabajos realizados, considerando casos especiales, sobre la obtención de representaciones explícitas por bloques de la inversa de Drazin de la matriz (2.5):

- $BC = O$, $DC = O$ y $BD = O$, ver [27].
- $BC = O$, $DC = O$ (o $BD = O$) y D nilpotente, ver [40].
- $CA^\pi = O$, $A^\pi B = O$ y el complemento generalizado de Schur de A en M es no singular o cero, ver [70, 96].
- $CA^\pi B = O$, $AA^\pi B = O$ y el complemento generalizado de Schur de A en M es no singular o cero, ver [40].
- $A = B = I$, C cuadrada y $D = O$, ver [10].
- $C^D A = C, A^D BC = BCA^D$ y $D = O$, ver [10].

Basado en este último caso, N. Castro, E. Dopazo y J. Robles, en [11], obtuvieron una fórmula explícita para la inversa de Drazin de una matriz de la forma $M = \begin{pmatrix} I & P^t \\ Q & UV^t \end{pmatrix}$, donde U, V, P y Q son matrices de dimensiones $n \times k$, y $(\cdot)^t$ representa la matriz traspuesta.

2.7. Aplicación a la resolución de sistemas singulares

En esta sección estudiaremos la aplicación de la inversa de Drazin a la resolución de un sistema lineal de ecuaciones algebraicas.

Recordemos que la inversa de Drazin no siempre es una (1)-inversa, i.e, no verifica la primera condición de Penrose, $AA^DA = A$, y por lo tanto no es una inversa de las llamadas inversas que "resuelven ecuaciones".

Consideramos el sistema lineal consistente de ecuaciones algebraicas,

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad x \in \mathbb{C}^n \quad \text{y} \quad b \in \mathcal{R}(A). \tag{2.8}$$

Entonces A^Db puede no ser una solución de este sistema. De hecho, A^Db es una solución de $Ax = b$ si y sólo si $b \in \mathcal{R}(A^k)$ donde $k = ind(A)$. Observamos que si $ind(A) = 1$, entonces $A^\sharp b$ proporciona una solución al sistema siempre que sea consistente.

Si $ind(A) = k$ y $b \in \mathcal{R}(A^k)$, entonces el conjunto de soluciones de (2.8) viene dado por $A^Db + \mathcal{N}(A^k)$. Además, si $x \in \mathcal{R}(A^k)$, A^Db es la única solución en el subespacio $\mathcal{R}(A^k)$.

El siguiente teorema, [92], establece la fórmula de la solución general del sistema (2.8) y qué tipo de solución es A^Db.

Teorema 2.7.1. *Sea $Ax = b$, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{C}^n$, $b \in \mathbb{C}^n$, $b \in \mathcal{R}(A^k)$ e $ind(A) = k$. Entonces la solución general del sistema es*

$$x = A^Db + A^{k-1}(I - A^DA)z, \quad con \ z \in \mathbb{C}^n.$$

Además, A^Db es la solución del sistema con mínima P-norma, definida como $\|x\|_P = \|P^{-1}x\|_2$, donde P es la matriz de paso tal que $P^{-1}AP$ es la forma canónica de Jordan de A y $x \in \mathbb{C}^n$.

Dem. Veamos que A^Db es la solución con mínima P-norma.

$$\begin{aligned}
\|x\|_P^2 &= \|P^{-1}\left(A^Db + A^{k-1}\left(I - A^DA\right)z\right)\|_2^2 \\
&= \left(P^{-1}A^DPP^{-1}b + P^{-1}A^{k-1}\left(I - A^DA\right)PP^{-1}z\right)^* \\
&\quad \times \left(P^{-1}A^DPP^{-1}b + P^{-1}A^{k-1}\left(I - A^DA\right)PP^{-1}z\right) \\
&= \left(P^{-1}A^Db\right)^*\left(P^{-1}A^Db\right) + \left(P^{-1}A^{k-1}\left(I - A^DA\right)PP^{-1}z\right)^* P^{-1}A^{k-1} \\
&\quad \times \left(I - A^DA\right)z + \left(P^{-1}b\right)^*\left(\left(P^{-1}A^DP\right)^*\left(P^{-1}A^{k-1}\left(I - A^DA\right)P\right)\right) \\
&\quad \times P^{-1}z + \left(P^{-1}z\right)^*\Big(\left(P^{-1}A^{k-1}\left(I - A^DA\right)P\right)^*\left(P^{-1}A^DP\right)\Big)P^{-1}b \\
&\geq \|P^{-1}A^Db\|_2^2 + \|P^{-1}A^{k-1}\left(I - A^DA\right)PP^{-1}z\|_2^2 \\
&= \|A^Db\|_P^2 + \|A^{k-1}\left(I - A^DA\right)z\|_P^2 \geq \|A^Db\|_P^2.
\end{aligned}$$

Luego, $\|A^Db\|_P \leq \|x\|_P$. $\square$

Capítulo 3

Caracterización de una clase de matrices y perturbación de la inversa de Drazin

3.1. Introducción

En [16], N. Castro, J. J. Koliha e Y. Wei establecieron varias caracterizaciones, en el marco de la inversa de Drazin, de las matrices con igual proyección espectral asociada al autovalor 0, esto es, caracterizaron las matrices $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que cumplan la condición $B^\pi = A^\pi$. Se vio que esta condición es equivalente a que la inversa de Drazin de B verifique la fórmula $B^D = (I + A^D(B-A))^{-1}A^D$. A partir de esta representación se derivó una cota superior del error relativo de la inversa de Drazin de B de la forma $\frac{\|B^D - A^D\|}{\|A^D\|} \leq \frac{\|A^D(B-A)\|}{1-\|A^D(B-A)\|}$.

En este capítulo se obtendrán varias caracterizaciones de las matrices B relacionadas con A por la condición,

$$I - (B^\pi - A^\pi)^2 \text{ es no singular.} \tag{3.1}$$

Se demostrará que la condición (3.1) implica que las proyecciones espectrales asociadas al cero de las matrices B y A son semejantes y que la inversa de Drazin de B verifica la fórmula $B^D = (I + B^\pi - A^\pi + A^D(B-A))^{-1}A^D(I - B^\pi + A^\pi)$. Esta expresión nos permitirá deducir una cota superior de $\|B^D - A^D\|$, en términos de $\|A^D(B-A)\|$ y $\|B^\pi - A^\pi\|$.

Se introducirá la clase de matrices $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ las cuales satisfacen la siguiente condición, para algún entero positivo s,

$$(\mathcal{C}_s)\ :\ \mathcal{R}(B^s)\cap\mathcal{N}(A^k)=\{0\}\quad y\quad \mathcal{N}(B^s)\cap\mathcal{R}(A^k)=\{0\},$$

donde $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, con $k=ind(A)$.

Se probará el hecho de que una matriz B, con $ind(B)=s$, cumpla la condición $(\mathcal{C}_s)$ es equivalente a que B verifique la condición (3.1), que a su vez es equivalente a que se cumplan las siguientes igualdades: $rg(B^s)=rg(A^k)=rg(A^kB^sA^k)$.

Los resultados anteriormente obtenidos nos permitirán deducir cotas superiores de $\|B^D-A^D\|/\|A^D\|$ y $\|B^\pi-A^\pi\|$, bajo las condiciones $rg(B^s)=rg(A^k)$.

A continuación mostramos la estructura de este capítulo.

En la Sección 3.2 se darán diversas caracterizaciones de las matrices B que satisfacen la condición (3.1). En particular, si $B^\pi=A^\pi$ se generalizará el resultado [16, Teorema 2.1].
Diversos casos especiales serán considerados.

En la Sección 3.3 se darán nuevas caracterizaciones de las matrices B, con $ind(B)=s$, que cumplen la $(\mathcal{C}_s)$.
En primer lugar, se considerará en caso $s=1$, dando, entre otros resultados una estructura matricial de B. Luego, se estudiará el caso $s>1$, obteniendo una representación para estas matrices. Estas formulaciones serán empleadas en la siguiente sección para la obtención de expresiones de $B^\sharp$ y B^D .
También se dará una fórmula explícita para B^π.

En la Sección 3.4 se aplicarán las caracterizaciones obtenidas en las dos secciones anteriores para dar diversos resultados de perturbación.
Para aquellas matrices para las cuales el Grupo inverso existe se obtendrá una fórmula explícita para $B^\sharp$, de la cual se derivará una cota superior de $\|B^\sharp-A^D\|/\|A^D\|$ y, de la expresión para B^π hallada en el Teorema 3.3.6 se tendrá una cota superior de $\|B^\pi-A^\pi\|$.
En un ejemplo numérico se ilustrará que las cotas obtenidas son mejores que las das en [62, 97].
Se extenderán los resultados obtenidos, para el caso $s=1$, a las matrices que verifican $(\mathcal{C}_s)$, con $s>1$, obteniéndose cotas superiores para $\|B^D-A^D\|/\|A^D\|$ y $\|BB^D-AA^D\|$, en términos que envuelven las potencias B^s-A^s. Compararemos, en un ejemplo numérico, estas cotas otras dadas en [97, 98] .

En la Sección 3.5 se derivará una cota superior de $\|B^\pi-A^\pi\|$, en términos de las proyecciones ortogonales sobre los subespacios núcleo e imagen de B^s y A^k, donde s y k son los índices de B y A, respectivamente.

Aplicaremos las acotaciones obtenidas al estudio de sistemas singulares de ecuaciones lineales. Los resultados obtenidos generalizan el dado por Y. Wei y G. Wang en [100, Theorem 4.1].

Por último, se analizará un caso particular de matrices que cumplen la condición $(\mathcal{C}_s)$. Hallaremos una fórmula explícita para la inversa de Drazin de la matriz B y una cota superior de $\|B^D - A^D\|/\|A^D\|$, en este caso, la cual no está basada en las potencias $B^s - A^s$. Se generaliza, de esta manera, el principal resultado dado por X. Li e Y. Wei en [63], donde consideraron el caso $B^2AA^D = (BAA^D)^2$.

Varios trabajos han tratado el análisis y la obtención de cotas superiores de la perturbación de la inversa de Drazin, $\|B^D\|$, y del error relativo, $\|B^D - A^D\|/\|A^D\|$.

En [91], Y. Wei, bajo las condiciones $ind(B) = ind(A) = 1$ y $rg(B) = rg(A)$, estableció cotas superiores para $\|B^\sharp\|$, $\|BB^\sharp\|$ y $\|B^\sharp - A^\sharp\|/\|A^\sharp\|$ en términos de $\|B - A\|$ y, en [62], con las misma hipótesis, fueron mejoradas por X. Li e Y. Wei.

N. Castro, J. J. Koliha e Y. Wei, en [16], suponiendo $ind(B) = 1$ e $ind(A) = k$ y, $rg(B) = rg(A^k)$, dedujeron una estimación para $\|B^\sharp - A^D\|_2/\|A^D\|_2$ en términos de $\|B - A\|_2$. En [95], y bajo las mismas condiciones, Y. Wei dio una nueva cota para el error relativo del Grupo inverso de la perturbación. Asumiendo las mismas hipótesis, en [61], X. Li e Y. Wei, mejoraron las acotaciones anteriormente dadas.

Suponiendo $rg(B^s) = rg(A^k)$, donde $s = ind(B)$ y $k = ind(A)$, en [102], Y. Wei y H. Wu, dieron cotas superiores de $\|B^D\|_2$, $\|BB^D\|_2$ y $\|B^D - A^D\|_2/\|A^D\|_2$, en términos de $\|B - A\|_2$, $\|B^l - A^l\|_2$ $\|B^{l-1} - A^{l-1}\|_2$, donde $l = \max\{s,\ k\}$. Posteriormente, en [97], Y. Wei y X. Li establecieron otra estimación de $\|B^D - A^D\|_2/\|A^D\|_2$ hasta los términos de primer orden de $\|B - A\|$. Mediante un ejemplo demuestran que esta cota mejora el resultado dado en [102].

En [98], Y. Wei, X. Li y F. Bu, basándose en la función separación de matrices, establecieron una cota superior para $\|B^D - A^D\|_F/\|A^D\|_F$, trabajando con la norma de Frobeniüs. En un ejemplo numérico se muestra que esta nueva cota mejora las dadas anteriormente.

En este capítulo mostraremos que las cotas superiores obtenidas en nuestro trabajo mejoran los resultados dados en la literatura para el caso que nos ocupa.

Parte de los resultados concernientes y los relacionados con el estudio de las matrices que cumplen $(\mathcal{C}_s)$

Los principales resultados relacionados con la perturbación de la proyección espectral asociada al 0 han sido publicados con el título ***Characterizations of matrices whose eigenprojections at zero are equal to a fixed perturbation***,

[19] y, los relativos al análisis de la clase de matrices ($\mathcal{C}_s$) lo serán con el nombre ***Characterizations of a class of matrices and perturbations of the Drazin inverse***, [18].

3.2. Caracterización de matrices con proyecciones espectrales relacionadas

En esta sección daremos uno de los principales resultados de este trabajo. Dada una matriz A con proyección espectral A^π, caracterizaremos las matrices B satisfaciendo $B^\pi = A^\pi + S,$ con $I - S^2$ no singular.

Antes de abordar el teorema de caracterización daremos algunos resultados involucrando a A^π y a matrices idempotentes de la forma $A^\pi + S$.

LEMA 3.2.1. *Sean A, $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $I - S^2$ es no singular. Si $A^\pi + S$ es idempotente, entonces*

(i) $A^\pi + S = (I - S)^{-1}A^\pi(I + S) = (I + S)A^\pi(I - S)^{-1}$.

(ii) $I - A^\pi - S = (I - S)(I - A^\pi)(I + S)^{-1} = (I + S)^{-1}(I - A^\pi)(I - S)$.

DEM. De la igualdad $(A^\pi + S)^2 = A^\pi + S$, se sigue $A^\pi + A^\pi S + SA^\pi + S^2 = A^\pi + S$. También se tiene que $(I - S)(I + S) = I - S^2$ es no singular, entonces $I - S$ $I + S$ son no singulares. Luego:

(i): $A^\pi(I + S) = A^\pi + S - SA^\pi - S^2 = (I - S)(A^\pi + S)$ y, por lo tanto, $A^\pi + S = (I - S)^{-1}A^\pi(I + S)$. La segunda igualdad se deduce de modo similar.

(ii): Partiendo de la relación dada en (i), $A^\pi(I + S) = (I - S)(A^\pi + S)$ se tiene

$$\begin{aligned}
&A^\pi + A^\pi S = -SA^\pi - S^2 + A^\pi + S \\
\Leftrightarrow\ & -I + S - S + A^\pi + A^\pi S = -SA^\pi - I - S^2 + A^\pi + S \\
\Leftrightarrow\ & (I - A^\pi - S)(I + S) = (I - S)(I - A^\pi) \\
\Leftrightarrow\ & I - A^\pi - S = (I - S)(I - A^\pi)(I + S)^{-1}.
\end{aligned}$$

Mediante cálculos algebraicos obtenemos la segunda igualdad. □

En la siguiente proposición, la cual será la principal herramienta en la demostración de próximo teorema, se demostrará que las matrices idempotentes de la forma $A^\pi + S$, con $I - S^2$ no singular, son semejantes a la proyección espectral A^π, esto es, existe una matriz no singular R tal que $R^{-1}B^{\pi}R = A^{\pi}$. Esto nos permitirá obtener una representación para la matriz B por bloques de la forma $B = Q\widetilde{B}Q^{-1}$, donde $\widetilde{B}$ es una matriz diagonal por bloques.

PROPOSICIÓN 3.2.2. *Sean A, $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$, tal que $I - S^2$ es no singular, y $A^{\pi} + S$ idempotente. Si llamamos*

$$R = (I - S)(I - A^{\pi}) + (I + S)A^{\pi} \quad y \quad T = (I - A^{\pi})(I - S) + A^{\pi}(I + S),$$

entonces

(i) *Las matrices R y T son no singulares, $R^{-1} = (I - S^2)^{-1}T = T(I - S^2)^{-1}$.*

(ii) *$R^{-1}(A^{\pi} + S)R = A^{\pi}$.*

DEM. (i): Primero, de $(A^{\pi}+S)^2 = A^{\pi}+S$ se sigue que $S^2 = S - A^{\pi}S - SA^{\pi}$. Ahora,

$$\begin{aligned} RT &= ((I - S)(I - A^{\pi}) + (I + S)A^{\pi})((I - A^{\pi})(I - S) + A^{\pi}(I + S)) \\ &= (I - S(I - A^{\pi}) + SA^{\pi})(I - (I - A^{\pi})S + A^{\pi}S) \\ &= I - 2(S - A^{\pi}S - SA^{\pi}) + S^2 \\ &= I - S^2. \end{aligned}$$

Análogamente comprobamos que $TR = I - S^2$. De $I - S^2$ es no singular se deduce que R y T son no singulares y,

$$R^{-1} = (I - S^2)^{-1}T = T(I - S^2)^{-1}.$$

(ii): Como $A^{\pi} + S$ es idempotente, por el Lema 3.2.1, se tiene que $(A^{\pi} + S)(I - S) = (I + S)A^{\pi}$. Usando esta igualdad obtenemos

$$(A^{\pi} + S)R = (A^{\pi} + S)((I - S)(I - A^{\pi}) + (I + S)A^{\pi}) = (A^{\pi} + S)A^{\pi}.$$

Por otra parte, de $(I - S)(A^{\pi} + S) = A^{\pi}(I + S)$ se sigue que

$$\begin{aligned} R^{-1}(A^{\pi} + S) &= (I - S^2)^{-1}((I - A^{\pi})(I - S) + A^{\pi}(I + S))(A^{\pi} + S) \\ &= (I - S^2)^{-1}(I - S)(A^{\pi} + S) = (I + S)^{-1}(A^{\pi} + S). \end{aligned}$$

Entonces,

$$R^{-1}(A^{\pi} + S)R = (I + S)^{-1}(A^{\pi} + S)A^{\pi} = (I + S)^{-1}(I + S)A^{\pi} = A^{\pi}.$$

Con lo que (ii) queda demostrado. $\square$

LEMA 3.2.3. *Sean A, $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces,*

(i) $\mathcal{R}(SA^D) = \mathcal{R}(SA^D A)$.

(ii) $\mathcal{N}(A^D S) = \mathcal{N}(A^D AS)$.

DEM. Para todo par de matrices tal que su producto esta bien definido se verifica

$$\mathcal{R}(AB) \subseteq \mathcal{R}(A) \text{ y } \mathcal{N}(B) \subseteq \mathcal{N}(AB).$$

(i): Aplicando la primera de las relaciones anteriores tenemos

$$\mathcal{R}(SA^D) = \mathcal{R}(SA^D AA^D) \subseteq \mathcal{R}(SA^D A) \quad \text{y} \quad \mathcal{R}(SA^D A) \subseteq \mathcal{R}(SA^D).$$

Luego, tenemos (i).

(ii): Se deduce de modo similar que (i), usando la relación $\mathcal{N}(B) \subseteq \mathcal{N}(AB)$. □

A continuación damos el resultado principal de esta sección.

TEOREMA 3.2.4. *Sean A, $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $I - S^2$ es no singular. Si $A^\pi + S$ es idempotente, entonces las siguientes condiciones sobre $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son equivalentes:*

(i) $B^\pi = A^\pi + S$.

(ii) $B(A^\pi + S) = (A^\pi + S)B$, $\sigma((A^\pi + S)B) = \{0\}$, $B + A^\pi + S$ *es no singular.*

(iii) $B = RPdiag(\widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2)P^{-1}R^{-1}$, *donde* $\widetilde{B}_1$ *es no singular,* $\widetilde{B}_2$ *es nilpotente,* $R = I - S + 2SA^\pi$.

(iv) $I+S+A^D(B-A)$ *es no singular,* $B(A^\pi+S) = (A^\pi+S)B$, $\sigma((A^\pi+S)B) = \{0\}$.

(v) $B^D = (I + S + A^D(B - A))^{-1}A^D(I - S)$.

(vi) $(I + S)B^D - A^D(I - S) = A^D(A - B)B^D$.

(vii) $\mathcal{R}(B^D) \subseteq \mathcal{R}((I - S)A^D)$, $\mathcal{N}(B^D(I + S)) \subseteq \mathcal{N}(A^D)$.

DEM. (i) $\Leftrightarrow$ (ii): De la condición $A^\pi + S$ es idempotente, por el Lema 2.4.4, tenemos que las condiciones (i) y (ii) son equivalentes.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Sea la matriz $R = (I + S)A^\pi + (I - S)(I - A^\pi)$. Por la Proposición 3.2.2, R es no singular y $A^\pi + S = RA^\pi R^{-1}$. Introducimos la matriz $\widetilde{B} = R^{-1}BR$, entonces

$$\widetilde{B}^\pi = R^{-1}B^\pi R = R^{-1}(A^\pi + S)R = A^\pi.$$

Así, las matrices $\widetilde{B}$ y A tienen la misma proyección espectral correspondiente al autovalor 0. Por el Teorema 2.4.5 (i) $\Leftrightarrow$ (ii) se tiene la siguiente estructura de $\widetilde{B}$ relativa a la descomposición core-nilpotente de A,

$$\widetilde{B} = P \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 & O \\ O & \widetilde{B}_2 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ con } \widetilde{B}_1 \text{ no singular y } \widetilde{B}_2 \text{ nilpotente.}$$

Finalmente,

$$B = R\widetilde{B}R^{-1} = RP \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 & O \\ O & \widetilde{B}_2 \end{pmatrix} P^{-1}R^{-1}.$$

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv): Sea $\widetilde{B} = R^{-1}BR$. Por la Proposición 3.2.2 se tiene,

$$B(A^\pi + S) = R\widetilde{B}R^{-1}(A^\pi + S) = R\widetilde{B}A^\pi R^{-1}.$$

Luego

$$B(A^\pi + S) \text{ es nilpotente } \Leftrightarrow \widetilde{B}A^\pi \text{ es nilpotente.}$$

Igualmente se observa que,

$$\widetilde{B}A^\pi = A^\pi\widetilde{B} \Leftrightarrow R\widetilde{B}A^\pi R^{-1} = RA^\pi\widetilde{B}R^{-1} \Leftrightarrow B(A^\pi + S) = (A^\pi + S)B.$$

Ahora, sea $S = P \begin{pmatrix} S_1 & S_{12} \\ S_{21} & S_2 \end{pmatrix} P^{-1}$, entonces la matriz R definida en (iii) tiene la estructura $R = P \begin{pmatrix} I - S_1 & S_{12} \\ -S_{21} & I + S_2 \end{pmatrix} P^{-1}$. Por hipótesis, $(A^\pi + S)^2 = A^\pi + S$ y de aquí se sigue que $S^2 = diag(S_1\,, -S_2)$. Observamos que se cumple la igualdad $(I + S + A^D(B - A))R = (A^\pi + S)R + A^D R\widetilde{B} = RA^\pi + A^D R\widetilde{B}$. Usando esto, por cálculo se obtiene

$$(I + S + A^D(B - A))R = P \begin{pmatrix} A_1^{-1}(I - S_1)\widetilde{B}_1 & S_{12} + A_1^{-1}S_{12}\widetilde{B}_2 \\ O & I + S_2 \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{3.2}$$

De las condiciones A_1, $\widetilde{B}_1$, $I - S_1$, $I + S_2$ y R son no singulares, deducimos que $I + S + A^D(B - A)$ es no singular.

(iv) $\Rightarrow$ (v): Definimos $\widetilde{B} = R^{-1}BR$, donde $R = I - S + 2SA^\pi$. Respecto a la descomposición core-nilpotente de A escribimos, $\widetilde{B} = P \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 & \widetilde{B}_{12} \\ \widetilde{B}_{21} & \widetilde{B}_2 \end{pmatrix} P^{-1}$. De la identidad $B(A^\pi + S) = (A^\pi + S)B$ se tiene

$$\widetilde{B}A^\pi = R^{-1}BRR^{-1}(A^\pi + S)R = R^{-1}(A^\pi + S)RR^{-1}BR = A^\pi\widetilde{B}.$$

Luego, $\widetilde{B}_{12} = O$ y $\widetilde{B}_{21} = O$.

Ahora, dado que $I + S + A^D(B - A)$, $I - S_1$ y $I + S_2$ son no singulares, de (3.2) se obtiene que $\widetilde{B}_1$ es no singular. De $R^{-1}B(A^\pi + S)R = \widetilde{B}A^\pi = Pdiag(O, \widetilde{B}_2)P^{-1}$ se deduce que $\widetilde{B}_2$ es nilpotente, puesto que asumimos que $B(A^\pi + S)$ lo es. Por lo tanto,

$$\widetilde{B} = P \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 & O \\ O & \widetilde{B}_2 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ con } \widetilde{B}_1 \text{ no singular y } \widetilde{B}_2 \text{ nilpotente}$$

es la descomposición core-nilpotente de $\widetilde{B}$ y así

$$\widetilde{B}^D = (R^{-1}BR)^D = R^{-1}B^DR = Pdiag(\widetilde{B}_1^{-1}, O)P^{-1}.$$

Luego, por cálculo se tiene

$$\left(I + S + A^D(B - A)\right) B^D R = P \begin{pmatrix} A_1^{-1}(I - S_1) & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} A^D(I - S)R &= A^D(I - S)((I + S)A^\pi + (I - S)(I - A^\pi)) = A^D(I - S)^2(I - A^\pi) \\ &= A^D(I - 2S + S^2)(I - A^\pi) = A^D(I - S - A^\pi S - SA^\pi))(I - A^\pi) \\ &= A^D(I - S)(I - A^\pi) = P \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - S_1 & -S_{12} \\ -S_{21} & I - S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} A_1^{-1}(I - S_1) & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

En consecuencia, $(I + S + A^D(B - A))B^DR = A^D(I - S)R$ y, así, se concluye la implicación.

(v) $\Rightarrow$ (vi): De $(I + S + A^D(B - A))B^D = A^D(I - S)$ se sigue que

$$(I + S)B^D - A^D(I - S) = A^D(A - B)B^D.$$

(vi) $\Rightarrow$ (i): De la igualdad $(I + S)B^D - A^D(I - S) = A^D(A - B)B^D$ se obtiene

$$A^D(I - S)B^\pi = O \quad \text{y} \quad A^\pi(I + S)B^D = O.$$

Entonces $(I - A^\pi)(I - S)B^\pi = A^\pi(I + S)(I - B^\pi)$ o, expresado de otra forma, $(I - S + 2SA^\pi)B^\pi = A^\pi(I + S)$. Ahora, aplicando la Proposición 3.2.2 (i) se tiene

$$B^\pi = (I - S^2)^{-1}(I - S + 2SA^\pi)A^\pi(I + S) = (I - S)^{-1}A^\pi(I + S) = A^\pi + S,$$

donde hemos aplicado el Lema 3.2.1 en la última igualdad.

(i) $\Rightarrow$ (vii): Dado que $B^DB = I - B^\pi = I - A^\pi - S$, por el Lema 3.2.1, tenemos que $BB^D = (I-S)AA^D(I+S)^{-1}$. Entonces,

$$\mathcal{R}(B^D) = \mathcal{R}(BB^D) = \mathcal{R}((I-S)AA^D) = \mathcal{R}((I-S)A^D),$$

donde hemos aplicado el Lema 3.2.3 (i) en la última igualdad.

Similarmente,

$$\mathcal{N}(B^D(I+S)) = \mathcal{N}(BB^D(I+S)) = \mathcal{N}((I-S)AA^D) = \mathcal{N}(AA^D) = \mathcal{N}(A^D).$$

(vii) $\Rightarrow$ (i): De la condición $\mathcal{R}(B^D) \subseteq \mathcal{R}((I-S)A^D)$ y del Lema 3.2.3 (i) se obtiene,

$$\mathcal{R}(BB^D(I+S)) = \mathcal{R}(BB^D) = \mathcal{R}(B^D) \subseteq \mathcal{R}((I-S)A^D) = \mathcal{R}((I-S)AA^D).$$

Por otra parte, de la condición $\mathcal{N}(B^D(I+S)) \subseteq \mathcal{N}(A^D)$, aplicando el Lema 3.2.3 (ii), se continua que

$$\mathcal{N}(BB^D(I+S)) \subseteq \mathcal{N}(AA^D) = \mathcal{N}((I-S)AA^D). \tag{3.3}$$

Por la implicación $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(B) \Rightarrow \mathcal{R}(A^*) \supseteq \mathcal{R}(B^*)$, de (3.3) se deduce que

$$\mathcal{R}((BB^D(I+S))^*) \supseteq \mathcal{R}(((I-S)AA^D)^*).$$

La inclusiones

$$\mathcal{R}((BB^D(I+S))^*) \supseteq \mathcal{R}(((I-S)AA^D)^*) \quad \text{y} \quad \mathcal{R}(BB^D(I+S)) \subseteq \mathcal{R}((I-S)AA^D)$$

implican la consistencia de las ecuaciones

$$XBB^D(I+S) = (I-S)AA^D \quad \text{y} \quad BB^D(I+S) = (I-S)AA^DY, \tag{3.4}$$

donde $X, Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Las ecuaciones (3.4) son equivalentes a

$$(I-S)AA^D(I+S)^{-1}B^\pi = O = A^\pi(I-S)^{-1}BB^D(I+S).$$

Finalmente, aplicando el Lema 3.2.1, de las identidades anteriores se sigue

$$(AA^D - S)B^\pi = O = (I - AA^D + S)BB^D.$$

Así,

$$BB^D = AA^D - S \Leftrightarrow B^\pi = A^\pi + S.$$

Lo que completa la demostración. $\square$

OBSERVACIÓN 3.2.5. Bajo las hipótesis del teorema anterior las condiciones (iv), (v) y (vi) son equivalentes a:

(iv′) $I+S+(B-A)A^D$ es no singular, $B(A^\pi+S)=(A^\pi+S)B$, $\sigma\left((A^\pi+S)B\right)=\{0\}$.

(v′) $B^D=(I-S)A^D\left(I+S+(B-A)A^D\right)^{-1}$.

(vi′) $B^D(I+S)-(I-S)A^D=B^D(A-B)A^D$.

OBSERVACIÓN 3.2.6. Si no asumimos la condición $I-S^2$ no singular, entonces podemos encontrar matrices $A,\,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $B^\pi=A^\pi+S$ y, sin embargo, $I+S+A^D(B-A)$ no es invertible. Sean las matrices en $\mathbb{R}^{4\times 4}$,

$$S=\begin{pmatrix}-1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$A^\pi=\begin{pmatrix}1/2 & -1/2 & 0 & 0\\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad B^\pi=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

y

$$I+S+A^D(B-A)=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Así, $B^\pi=A^\pi+S$ y, sin embargo, $I+S+A^D(B-A)$ no es invertible.

En el siguiente ejemplo, dadas sendas matrices A y S, se hallará la expresión matricial del conjunto de matrices B tal que $B^\pi=A^\pi+S$, según la fórmula dada en el Teorema 3.2.4 (iii).

EJEMPLO 3.2.7. Sean

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad S=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \epsilon & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Estas matrices cumplen que $ind(A) = 2$, $I - S^2$ es no singular y $A^\pi + S$ es idempotente. La inversa de Drazin A^D viene dada por

$$A^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos R y R^{-1}, donde $R = I + S - 2SAA^D$, resultando

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\epsilon & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \epsilon & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Y, por el Teorema 3.2.4, equivalencia (i) $\Leftrightarrow$ (iii), la expresión matricial de B tiene la estructura

$$B = R \begin{pmatrix} c_1 & c_{12} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & d_{12} \\ 0 & 0 & d_{21} & d_2 \end{pmatrix} R^{-1},$$

con $\begin{pmatrix} c_1 & c_{12} \\ c_{21} & c_2 \end{pmatrix}$ no singular y $\begin{pmatrix} d_1 & d_{12} \\ d_{21} & d_2 \end{pmatrix}$ nilpotente.

La inversa de Drazin de B viene dada por

$$B^D = R \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & c_{12} \\ c_{21} & c_2 \end{pmatrix}^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} R^{-1}.$$

En efecto, vemos que

$$B^\pi = I - BB^D = R \begin{pmatrix} O & O \\ O & I \end{pmatrix} R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^\pi + S.$$

3.2.1. Casos especiales

En este apartado se analizará la caracterización de las matrices B para las cuales $B^\pi = A^\pi + S$, para algunos casos especiales de $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Caso : S = O

Cuando $S = O$, el Teorema 3.2.4 se concreta en [16, Theorem 2.1], correspondiendo al caso donde A y B tienen la misma proyección espectral asociada al autovalor 0, i.e., $B^\pi = A^\pi$.

Caso : S nilpotente

Cuando S es nilpotente la condición $I - S^2$ es no singular siempre se cumple. En particular, si $S^2 = O$ tenemos el siguiente lemma.

Lema 3.2.8. *Sean A, $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Si $S^2 = O$ entonces $A^\pi + S$ es idempotente si y sólo si*

$$S = P \begin{pmatrix} O & S_{12} \\ S_{21} & O \end{pmatrix} P^{-1}$$

con $S_{12}S_{21} = O$ y $S_{21}S_{12} = O$.

Dem. Sea $S = P \begin{pmatrix} S_1 & S_{12} \\ S_{21} & S_2 \end{pmatrix} P^{-1}$. Se tiene

$$A^\pi + S \text{ es idempotente } \Leftrightarrow S^2 = (I - A^\pi)S(I - A^\pi) - A^\pi S A^\pi$$

y de $S^2 = O$ deducimos que $S_1 = S_2 = O$.

Además, $S^2 = O \Leftrightarrow S_{12}S_{21} = S_{21}S_{12} = O$. □

En este caso, la expresión matricial para B dada en el Teorema 3.2.4 (iii) tiene la forma

$$B = P \begin{pmatrix} I & S_{12} \\ -S_{21} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 & O \\ O & \widetilde{B}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -S_{12} \\ S_{21} & I \end{pmatrix} P^{-1},$$

con $\widetilde{B}_1$ no singular, $\widetilde{B}_2$ nilpotente y $S_{12}S_{21} = S_{21}S_{12} = O$.

En el siguiente ejemplo consideramos S nilpotente de orden 2, esto es, $S^2 = O$.

Ejemplo 3.2.9. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene, $A^D = A$ y $A^\pi = I - AA^D = I - A$. Entonces,

$$B^\pi = A^\pi + S = I - A + S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por el Teorema 3.2.4, equivalencia (i) $\Leftrightarrow$ (v) obtenemos

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & c_{12} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & d_{12} \\ 0 & 0 & d_{21} & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\epsilon \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde el bloque $\begin{pmatrix} c_1 & c_{12} \\ c_{21} & c_2 \end{pmatrix}$ es no singular y el bloque $\begin{pmatrix} d_1 & d_{12} \\ d_{21} & d_2 \end{pmatrix}$ es nilpotente.

Caso: $\mathbf{A^D S} = \boldsymbol{O}$

El siguiente lema nos proporciona la estructura de S cuando $A^D S = O$. Idéntico resultado se obtiene considerando la condición simétrica $SA^\pi = O$.

Lema 3.2.10. *Sean A, $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $I - S^2$ es no singular. Si se cumple $A^D S = O$ ($SA^\pi = O$) entonces $A^\pi + S$ es idempotente si y sólo si*

$$S = P \begin{pmatrix} O & O \\ S_{21} & O \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Dem. Sea $S = P \begin{pmatrix} S_1 & S_{12} \\ S_{21} & S_2 \end{pmatrix} P^{-1}$. De $A^D S = O$ se obtiene que $S_1 = S_{12} = O$. Por otra parte,

$$A^\pi + S \text{ es idempotente } \Leftrightarrow S^2 = S - SA^\pi - A^\pi S = S - SA^\pi - (I - AA^D)S = -SA^\pi.$$

Luego, $S_2^2 + S_2 = S_2(S_2 + I) = O$ y como $I + S_2$ es no singular se deduce que $S_2 = O$.

Análogamente se obtiene el resultado al tomar $SA^\pi = O$. $\square$

En este caso, la descomposición para B dada en el Teorema 3.2.4 (iii) viene dada por

$$B = (I - S)P diag(\widetilde{B}_1\,,\, \widetilde{B}_2)P^{-1}(I + S) \quad \text{con } \widetilde{B}_1 \text{ no singular y } \widetilde{B}_2 \text{ nilpotente.}$$

En el ejemplo siguiente se muestra este caso particular.

Ejemplo 3.2.11. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene, $B^\pi = A^\pi + S = I - A + S$. Luego,

$$B^\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si y sólo si

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & c_{12} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & d_{12} \\ 0 & 0 & d_{21} & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde el bloque $\begin{pmatrix} c_1 & c_{12} \\ c_{21} & c_2 \end{pmatrix}$ es no singular y el bloque $\begin{pmatrix} d_1 & d_{12} \\ d_{21} & d_2 \end{pmatrix}$ es nilpotente.

Caso: $\mathbf{SA^D} = \boldsymbol{O}$

En este caso se tomará la condición $SA^D = O$. Idéntico resultado se obtiene con la condición $A^\pi S = O$.

Lema 3.2.12. *Sean A, $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $I-S^2$ es no singular. Si se verifica $SA^D = O$ ($A^\pi S = O$). Entonces $A^\pi + S$ es idempotente si y sólo si*

$$S = P \begin{pmatrix} O & S_{12} \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Dem. Si $SA^D = O$, entonces $S = P \begin{pmatrix} O & S_{12} \\ O & S_2 \end{pmatrix} P^{-1}$ y

$$A^\pi + S \text{ es idempotente } \Leftrightarrow S^2 = -A^\pi S.$$

De aquí se sigue que $S_2 = O$. □

Bajo esta condición la descomposición para B dada en el Teorema 3.2.4 (iii) se reduce a

$$B = (I+S)P diag(\widetilde{B}_1\,, \widetilde{B}_2)P^{-1}, (I-S) \quad \text{con } \widetilde{B}_1 \text{ no singular y } \widetilde{B}_2 \text{ nilpotente.}$$

Caso: $\mathbf{BB^{\pi} = RAA^{\pi}R^{-1}}$

Por último analizaremos el caso en el que la parte nilpotente de B es semejante a la parte nilpotente de A, i.e., $BB^{\pi} = RAA^{\pi}R^{-1}$.

Corolario 3.2.13. *Sean A, $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $I - S^2$ es no singular. Si $A^{\pi} + S$ es idempotente entonces las siguientes condiciones sobre $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, satisfaciendo $(A^{\pi} + S)BA^{\pi} = (A^{\pi} + S)AA^{\pi}$, son equivalentes:*

(i) $B^{\pi} = A^{\pi} + S$.

(ii) $B(A^{\pi} + S) = (A^{\pi} + S)B$, $B + A^{\pi} + S$ *es no singular.*

(iii) $B = RPdiag(\widetilde{B}_1\,, \widetilde{B}_2)P^{-1}R^{-1}$ *con* $\widetilde{B}_1$ *no singular,* $\widetilde{B}_2 = A_2$ *y donde la matriz* R *es de la forma* $R = I - S + 2SA^{\pi}$.

(iv) $I + S + A^D(B - A)$ *es no singular,* $B(A^{\pi} + S) = (A^{\pi} + S)B$.

(v) $B^D = (I + S + A^D(B - A))^{-1}A^D(I - S)$.

(vi) $(I + S)B^D - A^D(I - S) = A^D(A - B)B^D$.

(vii) $B(A^{\pi} + S) = (A^{\pi} + S)B$, $rg(A) = rg(B)$.

Además, en todos los casos tenemos $BB^{\pi} = RA^{\pi}AR^{-1}$ *e* $ind(A) = ind(B)$.

Dem. Veamos que la condición $B(A^{\pi}+S)$ es nilpotente está implícita en (ii) y (iv). Por la Proposición 3.2.2 se tiene que

$$A^{\pi} + S = RA^{\pi}R^{-1} = ((I - S)(I - A^{\pi}) + (I + S)A^{\pi})\, A^{\pi}R^{-1} = (A^{\pi} + S)A^{\pi}R^{-1}.$$

Ahora, de la igualdad anterior y de las condiciones $B(A^{\pi} + S) = (A^{\pi} + S)B$ y $(A^{\pi} + S)BA^{\pi} = (A^{\pi} + S)AA^{\pi}$ se sigue

$$B(A^{\pi}+S) = B(A^{\pi}+S)A^{\pi}R^{-1} = (A^{\pi}+S)BA^{\pi}R^{-1} = (A^{\pi}+S)AA^{\pi}R^{-1} = RA^{\pi}AR^{-1}.$$

Y como AA^{π} es nilpotente entonces $B(A^{\pi} + S)$ es nilpotente.
Si B es de la forma $B = R\widetilde{B}R^{-1} = RPdiag(\widetilde{B}_1\,, \widetilde{B}_2)P^{-1}R^{-1}$, entonces

$$(A^{\pi} + S)BA^{\pi} = (A^{\pi} + S)AA^{\pi} \Leftrightarrow A^{\pi}\widetilde{B}R^{-1}A^{\pi} = A^{\pi}R^{-1}AA^{\pi}.$$

Así, al observar que $A^{\pi}R^{-1}A^{\pi} = A^{\pi}$ se tiene

$$P\begin{pmatrix} O & O \\ O & \widetilde{B}_2 \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} O & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

y de aquí se deduce que $\widetilde{B}_2 = A_2$.

Luego, por el Teorema 3.2.4, las condiciones (i) – (vi) son equivalentes.

Demostremos la equivalencia (vii) $\Leftrightarrow$ (iii). Asumamos (vii), entonces de la condición $B(A^\pi + S) = (A^\pi + S)B$ se obtiene que

$$B = RP \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} P^{-1}R^{-1}.$$

De la condición $rg(A) = rg(B)$ se sigue que $\widetilde{B}_1$ es no singular y, así, se verifica (iii). Recíprocamente, supongamos que tenemos (iii). Es suficiente con demostrar que $rg(A) = rg(B)$, pero esto es evidente a la vista de la representación matricial de B. Luego se tiene (vii).

Finalmente, falta probar que $ind(A) = ind(B)$. Supongamos (iii), entonces vemos que $ind(A) = ind(A_2) = ind(\widetilde{B}_2) = ind(B)$. □

Si $S = O$ el corolario anterior particulariza el caso en el que A y B tienen la misma proyección espectral y la misma parte nilpotente. Así, el Corolario 3.2.13 generaliza [16, Corolario 2.3].

3.3. Caracterización de la clase de matrices que verifican $(\mathcal{C}_s)$

En esta sección se introduce la clase de matrices $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisfacen la siguiente condición para algún entero positivo s,

$$(\mathcal{C}_s) \,:\, \mathcal{R}(B^s) \cap \mathcal{N}(A^k) = \{0\} \quad y \quad \mathcal{N}(B^s) \cap \mathcal{R}(A^k) = \{0\}, \tag{3.5}$$

donde $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $k = ind(A)$.

Estructuraremos esta sección en dos partes. La primera corresponde al caso especial $s = 1$. Se hace notar el papel importante que tiene el Grupo inverso en la estabilidad de las cadenas de Markov, [4, 23, 24, 65, 66]. El algoritmo Pagerank, con el que Google ordena los resultados de las búsquedas, puede ser entendido como una cadena Markov en la cual los estados son las páginas, y las transiciones son los enlaces entre las páginas. El cálculo del vector PageRank, vector cuyas componentes son las probabilidades de que una página sea visitada, equivale al cálculo del vector estacionario de una cadena de Markov ergódica, [2, 46, 47, 60].

En la segunda parte extenderemos los resultados para el Grupo inverso al caso general de perturbaciones satisfaciendo la condición $(\mathcal{C}_s)$ con $s > 1$.

Primeramente, se darán varios resultados que serán utilizados más adelante. En el próximo lema se exponen algunas desigualdades relativas al rango del producto de matrices, [103, Sección 2.4].

LEMA 3.3.1. *Sean* A, B, $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Entonces,*

$$rg(AB) = rg(B) - dim(\mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A)), \tag{3.6}$$

$$rg(ABC) \geq rg(AB) + rg(BC) - rg(B). \tag{3.7}$$

LEMA 3.3.2. *Sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *con* $ind(A) = k$ *y* $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *no singular. Entonces,*

$$I - A^\pi + CA^\pi C^{-1}A^\pi \text{ es no singular } \Leftrightarrow I - A^\pi + C^{-1}A^\pi CA^\pi \text{ es no singular.}$$

DEM. Sean $C = P\begin{pmatrix} C_1 & C_{12} \\ C_{21} & C_2 \end{pmatrix}P^{-1}$ y $C^{-1} = P\begin{pmatrix} X_1 & X_{12} \\ X_{21} & X_2 \end{pmatrix}P^{-1}$. Entonces,

$$I - A^\pi + CA^\pi C^{-1}A^\pi = P\begin{pmatrix} I & C_{12}X_2 \\ O & C_2X_2 \end{pmatrix}P^{-1},$$

$$I - A^\pi + C^{-1}A^\pi CA^\pi = P\begin{pmatrix} I & X_{12}C_2 \\ O & X_2C_2 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Luego, como C_2X_2 es no singular $\Leftrightarrow$ X_2C_2 es no singular, la equivalencia dada en este lema se tiene. □

De [55, Theorem 1.2] extraemos la equivalencia (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) en el siguiente lema.

LEMA 3.3.3. *Sean* P, $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *dos proyectores. Entonces,*

$$\Big(\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q) = \{0\} \text{ y } \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\}\Big) \Leftrightarrow P - Q \text{ es no singular.}$$

En el siguiente resultado, para una matriz B con $ind(B) = s$, establecemos la equivalencia entre la condición $B \in (\mathcal{C}_s)$, condiciones implicando el rango de la matriz y condiciones en términos de las proyecciones espectrales de A y B.

TEOREMA 3.3.4. *Sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *con* $ind(A) = k$. *Entonces las siguientes condiciones sobre* $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *con* $ind(B) = s$, *son equivalentes:*

(i) *B satisface la condición* $(\mathcal{C}_s)$.

(ii) $rg(B^s) = rg(A^k) = rg(A^kB^s) = rg(B^sA^k)$.

(iii) $rg(B^s) = rg(A^k) = rg(A^kB^sA^k)$.

(iv) $rg(B^s) = rg(A^k)$, $I - A^\pi + B^\pi A^\pi$ *es no singular.*

(v) $I - (B^\pi - A^\pi)^2$ *es no singular.*

(vi) $I - B^\pi - A^\pi$ *es no singular.*

DEM. (i) $\Rightarrow$ (ii): De la descomposición del espacio

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A^k) \oplus \mathcal{N}(A^k) = \mathcal{R}(B^s) \oplus \mathcal{N}(B^s)$$

y de las condiciones,

$$\mathcal{N}(B^s) \cap \mathcal{R}(A^k) = \{0\} \text{ y } \mathcal{R}(B^s) \cap \mathcal{N}(A^k) = \{0\}$$

es claro que $rg(B^s) = rg(A^k)$. Además, usando el Lema 3.3.1, igualdad (3.6), se tiene,

$$rg(A^k B^s) = rg(B^s) - dim(\mathcal{R}(B^s) \cap \mathcal{N}(A^k))$$

y

$$rg(B^s A^k) = rg(A^k) - dim(\mathcal{R}(A^k) \cap \mathcal{N}(B^s)).$$

Luego,

$$rg(A^k B^s) = rg(B^s) \quad \text{y} \quad rg(B^s A^k) = rg(A^k).$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Por el Lema 3.3.1, igualdad (3.7),

$$rg(A^k B^s A^k) \geq rg(A^k B^s) + rg(B^s A^k) - rg(B^s).$$

Luego, $rg(A^k B^s A^k) \geq rg(B^s)$. Ahora, de $\mathcal{R}(A^k B^s A^k) \subseteq \mathcal{R}(A^k)$ se sigue que $rg(A^k B^s A^k) \leq rg(A^k) = rg(B^s)$, y así concluimos que

$$rg(A^k B^s A^k) = rg(B^s).$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv): De la condición $rg(A^k B^s A^k) = rg(A^k) = rg(B^s)$, usando el Lema 3.3.1, fórmula (3.6), y la relación $\mathcal{R}(A^k B^s A^k) \subseteq \mathcal{R}(A^k B^s)$, se obtiene

$$rg(A^k) = rg(A^k B^s A^k) \leq rg(A^k B^s) = rg(B^s) - dim(\mathcal{R}(B^s) \cap \mathcal{N}(A^k)).$$

Luego, $0 \geq dim(\mathcal{R}(B^s) \cap \mathcal{N}(A^k))$ implica que $\mathcal{R}(B^s) \cap \mathcal{N}(A^k) = \{0\}$. Ahora, por el Lema 3.3.1, ecuación (3.6), se tiene que

$$rg(A^k) = rg(A^k B^s A^k) = rg(B^s A^k) - dim(\mathcal{R}(B^s A^k) \cap \mathcal{N}(A^k)) \leq rg(B^s A^k) \leq rg(A^k).$$

Por lo que

$$rg(B^s A^k) = rg(A^k) \Rightarrow \mathcal{N}(B^s) \cap \mathcal{R}(A^k) = \{0\}.$$

Ahora, sea $(I - A^\pi + B^\pi A^\pi)x = 0$. Multiplicando por la izquierda por $I - B^\pi$, se tiene $(I - B^\pi)(I - A^\pi)x = 0$, lo cual implica que $(I - A^\pi)x \in \mathcal{N}(I - B^\pi) = \mathcal{N}(B^s)$. Por otra parte $(I - A^\pi)x = AA^D x \in \mathcal{R}(A^D) = \mathcal{R}(A^k)$. Luego,

$$(I - A^\pi)x \in \mathcal{R}(A^k) \cap \mathcal{N}(B^s) = \{0\},$$

y así $(I - A^\pi)x = 0$. De esta última igualdad obtenemos que $B^\pi A^\pi x = 0$, entonces $A^\pi x \in \mathcal{N}(B^\pi) = \mathcal{R}(B^s)$. También, $A^\pi x \in \mathcal{N}(A^k)$ y, consecuentemente

$$A^\pi x \in \mathcal{R}(B^s) \cap \mathcal{N}(A^k) = \{0\}.$$

Por lo tanto, $x = 0$ y $I - A^\pi + B^\pi A^\pi$ es no singular.

(iv) $\Rightarrow$ (v): Tenemos que probar que $I - B^\pi + A^\pi B^\pi$ es no singular ya que se tiene que $I - (B^\pi - A^\pi)^2 = (I - A^\pi + B^\pi A^\pi)(I - B^\pi + A^\pi B^\pi)$.

Sean las descomposiciones core-nilpotentes,

$$A = P\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ y } B = Q\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

donde A_1 y B_1 son matrices no singulares del mismo tamaño ya que $rg(B^s) = rg(A^k)$.

Ahora, se tiene que $I - A^\pi + B^\pi A^\pi = I - A^\pi + QP^{-1}A^\pi PQ^{-1}A^\pi$ es no singular. Por el Lema 3.3.2 se concluye que

$$PQ^{-1}(I - B^\pi + A^\pi B^\pi)QP^{-1} = I - A^\pi + PQ^{-1}A^\pi QP^{-1}A^\pi$$

es no singular y, por lo tanto, $I - B^\pi + A^\pi B^\pi$ es también no singular.

(v) $\Leftrightarrow$ (vi): La equivalencia resulta obvia cuando observamos que

$$(I - B^\pi - A^\pi)^2 = I - (B^\pi - A^\pi)^2.$$

(vi) $\Rightarrow$ (i): Esta implicación se obtiene aplicando el Lema 3.3.3 a los proyectores $I - A^\pi$ y B^π. $\square$

En el próximo lema damos una serie de propiedades que serán necesarias más adelante.

Lema 3.3.5. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $ind(A) = k$. Si $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con $ind(B) = s$, satisface la condición $(\mathcal{C}_s)$, entonces*

(i) *Para cualquier entero $p \geq s$, $I + (A^D)^p(B^p - A^p)$ es no singular.*

(ii) *$I - (I + (A^D)^s(B^s - A^s))^{-1}A^\pi - A^\pi(I + (B^s - A^s)(A^D)^s)^{-1}$ es no singular.*

Dem. (i): Sea $(I + (A^D)^p(B^p - A^p))x = 0$ con $p \geq s$. Entonces se deduce que $A^\pi x = -(A^D)^p B^p x = 0$, ya que $A^\pi(I + (A^D)^p(B^p - A^p))x = A^\pi x = 0$. Luego,

$$x \in \mathcal{N}(A^\pi) = \mathcal{R}(A^k) \quad \text{y} \quad B^p x \in \mathcal{N}((A^D)^p) = \mathcal{N}(A^k).$$

Por otra parte, $B^p x \in \mathcal{R}(B^p) = \mathcal{R}(B^s)$, entonces

$$B^p x \in \mathcal{R}(B^s) \cap \mathcal{N}(A^k) = \{0\}.$$

Así, $B^p x = 0$. Por lo tanto,

$$x \in \mathcal{N}(B^p) \cap \mathcal{R}(A^k) = \{0\},$$

y, así, se concluye que $I + (A^D)^p(B^p - A^p)$ es no singular.

(ii): Sea $x - (I+(A^D)^s(B^s - A^s))^{-1}A^\pi x - A^\pi(I+(B^s - A^s)(A^D)^s)^{-1}x = 0$. Se observa que $(I + (A^D)^s(B^s - A^s))^{-1}(I + (A^D)^s(B^s - A^s))x - (I + (A^D)^s(B^s - A^s))^{-1}A^\pi x = A^\pi(I + (B^s - A^s)(A^D)^s)^{-1}x$, entonces

$$(I + (A^D)^s(B^s - A^s))^{-1}(A^D)^s B^s x = A^\pi(I + (B^s - A^s)(A^D)^s)^{-1}x.$$

Multiplicando esta identidad por A^π por la izquierda, y por la igualdad conocida $(I + (A^D)^s(B^s - A^s))^{-1}(A^D)^s = (A^D)^s(I + (B^s - A^s)(A^D)^s)^{-1}$, se concluye que

$$(I + (A^D)^s(B^s - A^s))^{-1}(A^D)^s B^s x = A^\pi(I + (B^s - A^s)(A^D)^s)^{-1}x = 0.$$

Por lo tanto, $(A^D)^s B^s x = 0$ y, así,

$$B^s x \in \mathcal{R}(B^s) \cap \mathcal{N}(A^k) = \{0\}.$$

Así, $B^s x = 0$ y, de aquí, $x \in \mathcal{N}(B^s)$. Además, de $A^\pi(I+(B^s - A^s)(A^D)^s)^{-1}x = 0$ deducimos que $(I + (B^s - A^s)(A^D)^s)^{-1}x \in \mathcal{N}(A^\pi) = \mathcal{R}(A^k)$, entonces, para algún $y \in \mathbb{C}^n$, $(I + (B^s - A^s)(A^D)^s)^{-1}x = A^k y$. Esto implica que $x = B^s(A^D)^s A^k y$ para algún $y \in \mathbb{C}^n$. Así

$$x \in \mathcal{R}(B^s) \cap \mathcal{N}(B^s) = \{0\},$$

donde el hecho de que la intersección anterior se reduce al vector cero es debido a que $ind(B) = s$. Luego $x = 0$ y (ii) esta probado. □

En el siguiente teorema obtenemos una fórmula para calcular la proyección espectral de B en el 0, B^π.

Teorema 3.3.6. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con $ind(A) = k$. Si $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con $ind(B) = s$, satisface la condición $(\mathcal{C}_s)$, entonces*

$$B^\pi = -(I + (A^D)^s(B^s - A^s))^{-1}A^\pi X^{-1} = -X^{-1}A^\pi(I + (B^s - A^s)(A^D)^s)^{-1},$$

donde

$$X = I - (I + (A^D)^s(B^s - A^s))^{-1}A^\pi - A^\pi(I + (B^s - A^s)(A^D)^s)^{-1}.$$

Dem. Por el Lema 3.3.5 se tiene que $I+(A^D)^s(B^s-A^s)$ y X son no singulares. De la igualdad

$$A^\pi(I+(A^D)^s(B^s-A^s))^{-1} = A^\pi = (I+(B^s-A^s)(A^D)^s)^{-1}A^\pi,$$

se deduce que

$$\begin{aligned} A^\pi(I+(B^s-A^s)(A^D)^s)^{-1}X &= -A^\pi(I+(B^s-A^s)(A^D)^s)^{-2}A^\pi \\ &= X(I+(A^D)^s(B^s-A^s))^{-1}A^\pi. \end{aligned}$$

Luego

$$(I+(A^D)^s(B^s-A^s))^{-1}A^\pi X^{-1} = X^{-1}A^\pi(I+(B^s-A^s)(A^D)^s)^{-1}. \tag{3.8}$$

Sea $Q=-(I+(A^D)^s(B^s-A^s))^{-1}A^\pi X^{-1}$. Se demostrará que Q es un proyector con $\mathcal{R}(Q)=\mathcal{N}(B^s)$ y $\mathcal{N}(Q)=\mathcal{R}(B^s)$. Primero, vemos que

$$\begin{aligned} Q^2 &= X^{-1}A^\pi(I+(B^s-A^s)(A^D)^s)^{-1}(I+(A^D)^s(B^s-A^s))^{-1}A^\pi X^{-1} \\ &= -(I+(A^D)^s(B^s-A^s))^{-1}A^\pi X^{-1} = Q. \end{aligned}$$

Ahora, es claro que

$$\mathcal{R}(Q)=\mathcal{R}((I+(A^D)^s(B^s-A^s))^{-1}A^\pi).$$

Supongamos que $x\in\mathcal{N}(B^s)$. Entonces $A^\pi x=(I+(A^D)^s(B^s-A^s))x$. De aquí se sigue que $x=(I+(A^D)^s(B^s-A^s))^{-1}A^\pi x$ y, así, $x\in\mathcal{R}(Q)$. Lo que prueba la relación $\mathcal{N}(B^s)\subseteq\mathcal{R}(Q)$.

Recíprocamente, asumamos que $x\in\mathcal{R}(Q)$. Entonces, para algún $y\in\mathbb{C}^n$, se tiene $x=(I+(A^D)^s(B^s-A^s))^{-1}A^\pi y$. Lo cual implica que existe $y\in\mathbb{C}^n$ tal que $(A^D)^sB^sx=A^\pi(y-x)\in\mathcal{R}(A^\pi)=\mathcal{N}(A^k)$. Es claro que $(A^D)^sB^sx\in\mathcal{R}(A^k)$, luego $(A^D)^sB^sx\in\mathcal{N}(A^k)\cap\mathcal{R}(A^k)=\{0\}$. Por consiguiente, $B^sx\in\mathcal{N}(A^k)\cap\mathcal{R}(B^s)=\{0\}$, y de aquí, $x\in\mathcal{N}(B^s)$.

Veamos ahora que $\mathcal{N}(Q)=\mathcal{R}(B^s)$. De la igualdad (3.8) tenemos la relación $\mathcal{N}(Q)=\mathcal{N}(A^\pi(I+(B^s-A^s)(A^D)^s)^{-1})$. Tomemos $x\in\mathcal{N}(Q)$. De la identidad

$$(A^\pi+B^s(A^D)^s)-B^s(A^D)^s = A^\pi(A^\pi+B^s(A^D)^s)^{-1}(A^\pi+B^s(A^D)^s)$$

se sigue que

$$\begin{aligned} A^\pi(I+(B^s-A^s)(A^D)^s)^{-1}x &= A^\pi(A^\pi+B^s(A^D)^s)^{-1}x \\ &= (A^\pi+B^s(A^D)^s-B^s(A^D)^s)(A^\pi+B^s(A^D)^s)^{-1}x \\ &= (I-B^s(A^D)^s(A^\pi+B^s(A^D)^s)^{-1})x = 0. \end{aligned}$$

La última igualdad implica que $x = B^s(A^D)^s(A^\pi + B^s(A^D)^s)^{-1}x$. Por lo tanto, $x \in \mathcal{R}(B^s)$ lo que prueba la relación $\mathcal{N}(Q) \subseteq \mathcal{R}(B^s)$.

Probemos que $\mathcal{R}(B^s) \subseteq \mathcal{N}(Q)$. Puesto que Q es un proyector e $ind(B) = s$, se tienen las siguientes sumas directas

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(Q) \oplus \mathcal{N}(Q), \quad \mathbb{C}^n = \mathcal{R}(B^s) \oplus \mathcal{N}(B^s).$$

Sea $x \in \mathcal{R}(B^s)$. Podemos escribir de modo único $x = x_1 + x_2$, con $x_1 \in \mathcal{R}(Q)$ y $x_2 \in \mathcal{N}(Q)$. Como $\mathcal{R}(Q) = \mathcal{N}(B^s)$ y $\mathcal{N}(Q) \subseteq \mathcal{R}(B^s)$, la descomposición anterior de x puede interpretarse relativa a la suma $\mathbb{C}^n = \mathcal{N}(B^s) \oplus \mathcal{R}(B^s)$, lo que implica que $x_1 = 0$ y $x = x_2$. Así pues, $Qx = Qx_2 = 0$, y por lo tanto $x \in \mathcal{N}(Q)$. Hemos concluido de ver que Q es el proyector tal que

$$\mathcal{N}(Q) = \mathcal{R}(B^s) \quad \text{y} \quad \mathcal{R}(Q) = \mathcal{N}(B^s).$$

Luego, $Q = B^\pi$. □

3.3.1. La clase $(\mathcal{C}_1)$

En esta sección estableceremos diversas caracterizaciones de las matrices B que satisfacen la condición $(\mathcal{C}_1)$, con $ind(B) = 1$, esto es,

$$(\mathcal{C}_1) \; : \mathcal{N}(B) \cap \mathcal{R}(A^k) = \{0\} \quad y \quad \mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A^k) = \{0\}.$$

Entre ellas daremos una representación matricial que nos será de gran utilidad en el estudio de la perturbación del Grupo inverso que se desarrolla en la próxima sección.

Es sabido que si T es la matriz de transición de una cadena de Markov, entonces la matriz $A = I - T$ tiene índice 1. En teoría, toda la información de la cadena de Markov puede ser extraída de la matriz A y de su Grupo inverso.

Teorema 3.3.7. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $ind(A) = k$. Entonces las siguientes condiciones sobre $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son equivalentes:*

(i) *B satisface la condición $(\mathcal{C}_1)$, $ind(B) = 1$.*

(ii) *$I + A^D(B - A)$ es no singular, $B(I + A^D(B - A))^{-1}A^\pi = O$, $I + (A^D)^2(B^2 - A^2)$ es no singular.*

(iii) *En relación a la descomposición core-nilpotente para A, B tiene la siguiente representación*

$$B = P \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ B_{21} & B_{21}B_1^{-1}B_{12} \end{pmatrix} P^{-1}, \tag{3.9}$$

donde B_1 y $I + B_1^{-1}B_{12}B_{21}B_1^{-1}$ son no singulares.

(iv) $rg(B) = rg(A^k)$, $I + A^D(B - A)$ *y* $I + (A^D)^2(B^2 - A^2)$ *son no singulares.*

DEM. (i) $\Rightarrow$ (ii): Dado que $ind(B) = 1$, por el Lema 3.3.5 (i) se tiene que las matrices $I + A^D(B - A)$ y $I + (A^D)^2(B^2 - A^2)$ son no singulares. Finalmente, usando la conocida igualdad $BB^\pi = O$ y aplicando el Teorema 3.3.6 se sigue que $BB^\pi = -B(I + (A^D)^s(B^s - A^s))^{-1}A^\pi X^{-1} = O$. Así tenemos la condición de (ii), $B(I + A^D(B - A))^{-1}A^\pi = O$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sea

$$B = P \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ B_{21} & B_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

respecto la descomposición core-nilpotente para A. Calculamos,

$$I + A^D(B - A) = P \begin{pmatrix} A_1^{-1}B_1 & A_1^{-1}B_{12} \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Y, como $I + A^D(B - A)$, entonces B_1 es no singular. Igualmente,

$$I + (A^D)^2(B^2 - A^2) = P \begin{pmatrix} A_1^{-2}(B_1^2 + B_{12}B_{21}) & A_1^{-2}(B_1B_{12} + B_{12}B_2) \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1},$$

y así, $I + B_1^{-1}B_{12}B_{21}B_1^{-1} = B_1^{-1}(B_1^2 + B_{12}B_{21})B_1^{-1}$ es no singular, ya que B_1 y $I + (A^D)^2(B^2 - A^2)$ lo son.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} B(I + A^D(B - A))^{-1}A^\pi &= P \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ B_{21} & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1^{-1}A_1 & -B_1^{-1}B_{12} \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & O \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} O & O \\ O & -B_{21}B_1^{-1}B_{12} + B_2 \end{pmatrix} P^{-1}, \end{aligned}$$

y, de la condición $B(I + A^D(B - A))^{-1}A^\pi = O$, concluimos que $B_2 = B_{21}B_1^{-1}B_{12}$.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv): De la representación (3.9), aplicando el Lema 2.6.4, se sigue que $rg(B) = rg(B_1) = rg(A^k)$. Calculamos,

$$I + A^D(B - A) = P \begin{pmatrix} A_1^{-1}B_1 & A_1^{-1}B_{12} \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1}$$

y

$$I + (A^D)^2(B^2 - A^2) = P \begin{pmatrix} A_1^{-2}(B_1^2 + B_{12}B_{21}) & A_1^{-2}(B_1B_{12} + B_{12}B_2) \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Como B_1 y $I + B_1^{-1}B_{12}B_{21}B_1^{-1}$ son no singulares, entonces $I + A^D(B - A)$ y $I + (A^D)^2(B^2 - A^2)$ son también no singulares.

Recíprocamente, sea la matriz $B = P \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ B_{21} & B_2 \end{pmatrix} P^{-1}$. Dado que $I + A^D(B - A)$ y $I + (A^D)^2(B^2 - A^2)$ son no singulares, argumentando como en la demostración de (ii) $\Rightarrow$ (iii), se deduce que B_1 y $I + B_1^{-1}B_{12}B_{21}B_1^{-1}$ son no singulares. Finalmente, de la condición $rg(B) = rg(A^k)$ se obtiene que $rg(B) = rg(B_1)$ y, por el Lema 2.6.4 (i), se concluye que $B_2 = B_{21}B_1^{-1}B_{12}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Asumimos que B tiene la representación matricial (3.9). Por el Lema 2.6.4, se sigue que $rg(B) = rg(B_1) = rg(A^k)$ e $ind(B) = 1$. Por otra parte,

$$rg(A^kBA^k) = \mathrm{rg}\left(P \begin{pmatrix} A_1^kB_1A_1^k & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}\right) = rg(A_1^kB_1A_1^k) = rg(A^k).$$

Luego, por el Teorema 3.3.4 (i) $\Leftrightarrow$ (iii), B satisface la condición $(\mathcal{C}_1)$. $\square$

Observación 3.3.8. La condiciones (ii) y (iv) en el anterior teorema pueden ser reemplazadas por las siguientes condiciones simétricas :

(ii′) $I+(B-A)A^D$ es no singular, $A^\pi(I+(B-A)A^D)^{-1}B = O$, $I+(B^2-A^2)(A^D)^2$ es no singular.

(iv′) $rg(B) = rg(A^k)$, $I + (B - A)A^D$ y $I + (B^2 - A^2)(A^D)^2$ son no singulares.

En el siguiente resultado damos una representación matricial de B y $B^\sharp$.

Lema 3.3.9. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con $ind(A) = k$, y $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con $ind(B) = 1$, satisfaciendo la condición $(\mathcal{C}_1)$. Entonces tenemos la representación*

$$B = P \begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} B_1 \begin{bmatrix} I & T \end{bmatrix} P^{-1}, \tag{3.10}$$

donde $I + TS$ y B_1 son no singulares.

Además,

$$B^\sharp = P \begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} ((I + TS)B_1(I + TS))^{-1} \begin{bmatrix} I & T \end{bmatrix} P^{-1}. \tag{3.11}$$

Dem. Por el Teorema 3.3.7 (c), B tiene una representación matricial dada por

$$B = P \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ B_{21} & B_{21}B_1^{-1}B_{12} \end{pmatrix} P^{-1},$$

donde B_1 y $I + B_1^{-1}B_{12}B_{21}B_1^{-1}$ son no singulares. Si $T = B_1^{-1}B_{12}$ y $S = B_{21}B^{-1}$, entonces obtenemos la representación (3.10).

Aplicando el Lema 2.6.4, fórmula (2.6.4), se tiene la expresión para $B^\sharp$. $\square$

3.3.2. La clase $(\mathcal{C}_s)$ con $s > 1$

A continuación, apoyándonos en los obtenidos para la clase $(\mathcal{C}_1)$, generalizaremos los resultados para la clase de matrices $(\mathcal{C}_s)$ con $ind(B) = s > 1$.

Observamos que B^s satisface la condición $(\mathcal{C}_1)$ e $ind(B^s) = 1$.

TEOREMA 3.3.10. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $ind(A) = k$. Entonces las siguientes condiciones sobre $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son equivalentes:*

(i) *B satisface la condición $(\mathcal{C}_s)$, $ind(B) = s$.*

(ii) *$I + (A^D)^s(B^s - A^s)$ es no singular, $B^s(I + (A^D)^s(B^s - A^s))^{-1}A^\pi = O$, $I + (A^D)^{s+1}(B^{s+1} - A^{s+1})$ es no singular, donde s es el entero positivo más pequeño que verifica las condiciones anteriores.*

(iii) *La descomposición índice 1-nilpotente de B, $B = C_B + N_B$, tiene la siguiente representación relativa a la descomposición core-nilpotente de A,*

$$B = C_B + N_B = P \begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} B_1 \begin{bmatrix} I & T \end{bmatrix} P^{-1} + P \begin{bmatrix} T \\ -I \end{bmatrix} B_2 \begin{bmatrix} S & -I \end{bmatrix} P^{-1}, \qquad (3.12)$$

donde $I + TS$ y B_1 son no singulares y, $B_2(I + ST)$ es nilpotente de índice s.

(iv) *$I + (A^D)^s(B^s - A^s)$ y $I + (A^D)^{s+1}(B^{s+1} - A^{s+1})$ son no singulares, $rg(B^s) = rg(A^k)$, donde s es el entero positivo más pequeño que verifica las condiciones anteriores.*

DEM. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iv): Si $ind(B) = s$ y B satisface la condición $(\mathcal{C}_s)$, entonces s es el más pequeño entero positivo tal que B^s satisface la condición $(\mathcal{C}_1)$ e $ind(B^s) = 1$. Además, se observa que para cualquier entero $p \geq s$, $I + (A^D)^p(B^p - A^p)$ es no singular si y sólo si $I + A^D(B^p - A)$ es no singular. Así, aplicando el Teorema 3.3.7 con B^s se obtiene la equivalencia entre las condiciones (i) y

(ii′) $I + (A^D)^s(B^s - A^s)$ es no singular, $B^s(I + (A^D)^s(B^s - A^s))^{-1}A^\pi = O$, $I + (A^D)^{2s}(B^{2s} - A^{2s})$ es no singular, donde s es el entero positivo más pequeño que verifica las condiciones anteriores.

Observamos que las condiciones (ii) y (ii′) son equivalentes.

Un similar desarrollo prueba la equivalencia entre la condiciones (i) y (iv) en este teorema. Aplicando el Teorema 3.3.7 con B^s obtenemos la equivalencia de (i) y (iv′) $I + (A^D)^s(B^s - A^s)$ y $I + (A^D)^{2s}(B^{2s} - A^{2s})$ son no singulares, $rg(B^s) = rg(A^k)$, donde s es el entero positivo más pequeño que verifica las condiciones anteriores.

Finalmente, notamos que las condiciones (iv′) y (iv) son equivalentes .

(i) $\Rightarrow$ (iii): Supongamos que $B = C_B + N_B$ es la descomposición índice 1-nilpotente de B dada en el Teorema 2.2.10. Se sabe que si $s = ind(B)$, entonces $\mathcal{N}(C_B) = \mathcal{N}(B^s)$ y $\mathcal{R}(C_B) = \mathcal{R}(B^s)$. Luego, si B satisface la condición $(\mathcal{C}_s)$, entonces C_B satisface la condición $(\mathcal{C}_1)$ e $ind(C_B) = 1$. Por el Teorema 3.3.7 se sigue que

$$C_B = P \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ B_{21} & B_{21}B_1^{-1}B_{12} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} B_1 \begin{bmatrix} I & T \end{bmatrix} P^{-1}, \tag{3.13}$$

donde hemos definido $T = B_1^{-1}B_{12}$ y $S = B_{21}B_1^{-1}$. Del citado teorema se tiene que B_1 y $I + TS$ son no singulares. Se observa que $I + ST$ es también no singular.

Ahora, sea $N_B = P \begin{pmatrix} N_1 & N_{12} \\ N_{21} & N_2 \end{pmatrix} P^{-1}$. Calculamos,

$$C_B N_B = P \begin{pmatrix} B_1N_1 + B_1TN_{21} & B_1N_{12} + B_1TN_2 \\ SB_1N_1 + SB_1TN_{21} & SB_1N_{12} + SB_1TN_2 \end{pmatrix} P^{-1},$$
$$N_B C_B = P \begin{pmatrix} N_1B_1 + N_{12}SB_1 & N_1B_1T + N_{12}SB_1T \\ N_{21}B_1 + N_2SB_1 & N_{21}B_1T + N_2SB_1T \end{pmatrix} P^{-1}.$$

De la condición $C_BN_B = N_BC_B = O$ se sigue que

$$N_1 = TN_2S$$
$$N_{12} = -TN_2$$
$$N_{21} = -N_2S.$$

Así,

$$N_B = P \begin{bmatrix} T \\ -I \end{bmatrix} B_2 \begin{bmatrix} S & -I \end{bmatrix} P^{-1}, \tag{3.14}$$

y para todo entero positivo p se tiene,

$$N_B^p = P \begin{bmatrix} T \\ -I \end{bmatrix} (B_2(I + ST))^{p-1} B_2 \begin{bmatrix} S & -I \end{bmatrix} P^{-1}. \tag{3.15}$$

La condición $N_B^s = O$ implica que

$$(B_2(I + ST))^{s-1}B_2(I + ST)(I + ST)^{-1} = O \Leftrightarrow (B_2(I + ST))^s = O.$$

Por lo tanto, $(B_2(I+ST))$ es nilpotente de índice s. De (3.13) y (3.14) se obtiene la representación (3.12).

(iii) $\Rightarrow$ (i): Asumamos que B tiene la descomposición $B = C_B + N_B$, donde C_B y N_B tienen una representación dada por (3.12). Claramente $C_B N_B = N_B C_B = O$. Además, por el Teorema 3.3.7, equivalencia (i) $\Leftrightarrow$ (iii), se sigue que C_B satisface la condición $(\mathcal{C}_1)$ e $ind(C_B) = 1$, esto es,

$$\mathcal{N}(C_B) \cap \mathcal{R}(A^k) = \{0\} \quad y \quad \mathcal{R}(C_B) \cap \mathcal{N}(A^k) = \{0\}, \tag{3.16}$$

con $ind(C_B) = 1$.

Usando (3.15) se tiene que

$$\begin{aligned} N_B^s &= P \begin{bmatrix} T \\ -I \end{bmatrix} (B_2(I + ST))^{s-1} B_2 \begin{bmatrix} S & -I \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} T \\ -I \end{bmatrix} (B_2(I + ST))^{s} (I + ST)^{-1} \begin{bmatrix} S & -I \end{bmatrix} P^{-1} = O, \end{aligned}$$

ya que $B_2(I + ST)$ es nilpotente de índice s.

Así, $B = C_B + N_B$ es la descomposición índice 1-nilpotente de B con $ind(B) = s$. Entonces $\mathcal{R}(C_B) = \mathcal{R}(B^s)$ y $\mathcal{N}(C_B) = \mathcal{N}(B^s)$ y, sustituyendo en (3.16), concluimos que $B \in (\mathcal{C}_s)$ e $ind(B^s) = s$. □

Corolario 3.3.11. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $ind(A) = k$. Entonces las siguientes condiciones sobre $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $ind(B) = s$ son equivalentes:*

(i) *B satisface la condición $(\mathcal{C}_s)$.*

(ii) *$I + (A^D)^s(B^s - A^s)$ es no singular, $B^s(I + (A^D)^s(B^s - A^s))^{-1}A^\pi = O$.*

(iii) *$I + (A^D)^s(B^s - A^s)$ es no singular, $rg(B^s) = rg(A^k)$.*

Dem. (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Para establecer esta equivalencia se demostrará que, bajo la hipótesis $ind(B) = s$, las condiciones dadas en (ii) implican que $I + (A^D)^{s+1}(B^{s+1} - A^{s+1})$ es no singular. Una vez visto esto, el Teorema 3.3.10 (i) $\Leftrightarrow$ (ii), mostrará la equivalencia que nos ocupa.

Primero, se observa que $\mathcal{N}(B^s) = \mathcal{N}(B^{s+1})$, ya que $ind(B) = s$. Ahora, sea $x \in \mathcal{N}(A^\pi) \cap \mathcal{N}(B^s)$, entonces $A^\pi x = 0$ y $(A^D)^s B^s x = 0$. Luego

$$(A^\pi + (A^D)^s B^s)x = (I + (A^D)^s(B^s - A^s))x = 0,$$

y como $I + (A^D)^s(B^s - A^s)$ es no singular resulta $x = 0$. Esto muestra que

$$\mathcal{N}(A^\pi) \cap \mathcal{N}(B^s) = \mathcal{N}(A^\pi) \cap \mathcal{N}(B^{s+1}) = \{0\}.$$

Ahora, de $B^s(I + (A^D)^s(B^s - A^s))^{-1}A^\pi = O$ se sigue que

$$B^s(I + (A^D)^s(B^s - A^s))^{-1} = B^s(I + (A^D)^s(B^s - A^s))^{-1}AA^D$$

o, expresado de otra forma, que

$$B^s = B^s(I + (A^D)^s(B^s - A^s))^{-1}(A^D)^s B^s.$$

Entonces $B^{s+1} = B^s(I + (A^D)^s(B^s - A^s))^{-1}(A^D)^s B^{s+1}$, y se tiene

$$\mathcal{N}((A^D)^{s+1}B^{s+1}) \subseteq \mathcal{N}(B^s(I + (A^D)^s(B^s - A^s))^{-1}(A^D)^{s+1}B^{s+1}) = \mathcal{N}(B^{s+1}).$$

Supongamos que tenemos $(A^\pi + (A^D)^{s+1}B^{s+1})x = 0$. Entonces $A^\pi x = 0$ y $(A^D)^{s+1}B^{s+1}x = 0$. De aquí obtenemos

$$x \in \mathcal{N}(A^\pi) \cap \mathcal{N}((A^D)^{s+1}B^{s+1}) \subseteq \mathcal{N}(A^\pi) \cap \mathcal{N}(B^{s+1}) = \{0\}.$$

Por lo tanto, $A^\pi + (A^D)^{s+1}B^{s+1}$ es no singular.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii): Procediendo de un modo similar al dado en la equivalencia anterior, tenemos que $\mathcal{N}(A^\pi) \cap \mathcal{N}(B^s) = \{0\}$. De la condición $ind(B) = s$ se sigue que

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(Q) \oplus \mathcal{N}(Q) = \mathcal{R}(B^s) \oplus \mathcal{N}(B^s).$$

Dado que $\mathcal{R}(A^k) \cap \mathcal{N}(B^s) = \{0\}$ y como $rg(A^k) = rg(B^s)$, entonces concluimos que $\mathcal{R}(B^s) \cap \mathcal{N}(A^k) = \{0\}$. $\square$

Observación 3.3.12. Bajo las hipótesis del corolario anterior la condición (iii) puede ser sustituida por la condición equivalente

(iii′) $rg(B^s) = rg(A^k)$, $I + (A^D)^s(B^s - A^s)$ y $I + (A^D)^{s+1}(B^{s+1} - A^{s+1})$ son no singulares.

3.4. Resultados de perturbación

El principal objetivo de esta sección será la obtención de cotas superiores para $\|B^D - A^D\|/\|A^D\|$ y $\|B^\pi - A^\pi\|$.

El caso en que el Grupo inverso de B existe será objeto de especial atención y se estudiará en primer lugar.

En varios ejemplos numéricos compararemos las cotas superiores obtenidas en este trabajo con otras dadas en la literatura.

A continuación damos algunos resultados sobre la continuidad de la inversa de Drazin.

Si A_j, $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, entonces $A_j \to A$ denota la convergencia de A_j a A con respecto de una norma de $\mathbb{C}^{m\times n}$.

En el siguiente teorema, [73], R. Penrose estableció condiciones necesarias y suficientes para continuidad de la inversa de Moore-Penrose.

Teorema 3.4.1. *Sean A_j, $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tal que $A_j \to A$. Entonces $A_j^\dagger \to A^\dagger$ si y sólo si existe un j_0 tal que $rg(A_j) = rg(A)$, para todo $j \geq j_0$.*

El siguiente ejemplo muestra que la implicación hacia la derecha en esta caracterización no se tiene en el caso de la inversa de Drazin.

Ejemplo 3.4.2. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/j \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, $A_j \to A$ y $A_j^D \to A^D$, pero $rg(A_j) \neq rg(A)$, para todo j.

La implicación contraria tampoco se tiene.

Ejemplo 3.4.3. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_j = \begin{pmatrix} 1/j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$A_j^D = \begin{pmatrix} j & j^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mientras $A^D = O$. Así, $A_j \to A$, $rg(A_j) = rg(A)$ e $ind(A_j) = ind(A) = 2$, pero $A_j^D \nrightarrow A^D$.

En [6], S. L. Campbell y C. D. Meyer Jr establecieron las condiciones necesarias y suficientes para la continuidad de la inversa de Drazin, relacionando la continuidad de A^D con el *core-rango* de A. Recordemos que el core-rango de A, que denotaremos por *core-rg*(A), es el rango de A^k, donde $k = ind(A)$.

Teorema 3.4.4. *Sean A_j, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A_j \to A$. Entonces $A_j^D \to A^D$ si y sólo si existe un j_0 tal que core-$rg(A_j) =$ core-$rg(A)$, para todo $j \geq j_0$.*

Es sabido que se si $A_j \to A$, entonces

$$A_j^D \to A^D \Leftrightarrow A_j^\pi \to A^\pi.$$

En efecto, si $A_j^D \to A^D$, entonces

$$A_j A_j^D \to AA^D \Leftrightarrow A_j^\pi \to A^\pi.$$

Recíprocamente, si $A_j^\pi \to A^\pi$, entonces $A_j^\pi + A_j \to A^\pi + A$, con $A^\pi + A$ no singular y así, $(A_j^\pi + A_j)^{-1} \to (A^\pi + A)^{-1}$. Finalmente,

$$A_j^D = (A_j^\pi + A_j)^{-1}(I - A_j^\pi) \to (A^\pi + A)^{-1}(I - A^\pi) = A^D.$$

Ejemplo 3.4.5. Sean

$$A_j = \begin{pmatrix} 1 & 1/j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$A_j^D = \begin{pmatrix} 1 & 1/j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, $A_j \to A$, $ind(A_j) = ind(A) = 2$, $rg(A_j^2) = rg(A^2)$ y $A_j^D \to A^D$. Observamos que también se tiene la convergencia $A_j^\pi \to A^\pi$.

La continuidad de la inversa de Drazin sin dar cotas explícitas del error ha sido estudiada en [1, 3, 6, 15, 53, 75, 80].

Trabajaremos con la norma matricial natural en el conjunto de las matrices complejas, $\mathbb{C}^{m\times n}$, inducida por la norma vectorial $\|\cdot\|_v$ en $\mathbb{C}^n$. Esta norma es multiplicativa, i.e.,

$$\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|,$$

para todo par de matrices A y B tal que el producto esté bien definido y consistente con la norma vectorial que la induce, i.e.,

$$\|Ax\|_v \leq \|A\|\|x\|_v,$$

para toda matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $x \in \mathbb{C}^n$.

Cuando $v = 2$, la norma matricial inducida por la norma euclídea es la norma espectral definida como $\|A\|_2 = \sqrt{\sigma(A^*A)}$.

Las siguientes acotaciones básicas se utilizarán a lo largo del capítulo sin ser mencionadas explícitamente:

Si $\|F\| < 1$, entonces $I + F$ es no singular y

- $\|(I - F)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1 - \|F\|}$, [4].
- $\|I - (I + F)^{-1}\| \leq \dfrac{\|F\|}{1 - \|F\|}$, [88].

En el Teorema 3.2.4 se derivó la fórmula

$$B^D = (I + S + A^D(B - A))^{-1}A^D(I - S),$$

válida siempre que $I - S^2$ sea no singular. Si $S = B^\pi - A^\pi$, entonces esta fórmula es también válida para las matrices de perturbación $B \in (\mathcal{C}_s)$, con $ind(B) = s$.

Utilizando la fórmula anterior para B^D, en el siguiente resultado establecemos cotas superiores para $\|B^D\|$ y $\frac{\|B^D - A^D\|}{\|A^D\|}$ en términos de $\|B^\pi - A^\pi\|$. Posteriormente se darán estimaciones para la norma de la diferencia de las proyecciones espectrales.

TEOREMA 3.4.6. *Sean A, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Denotamos $E = B - A$. Si se cumple la condición $\|B^\pi - A^\pi\| + \|A^D E\| < 1$, entonces*

$$\|B^D\| \leq \frac{\|A^D\|(1 + \|B^\pi - A^\pi\|)}{1 - \|B^\pi - A^\pi\| - \|A^D E\|} \tag{3.17}$$

y

$$\frac{\|B^D - A^D\|}{\|A^D\|} \leq \frac{\|A^D E\| + 2\|B^\pi - A^\pi\|}{1 - \|B^\pi - A^\pi\| - \|A^D E\|}. \tag{3.18}$$

DEM. Sea $S = B^\pi - A^\pi$. Como $\|B^\pi - A^\pi\| + \|A^D(B - A)\| < 1$ es claro que $\|B^\pi - A^\pi\| < 1$ y, por lo tanto, $I - S^2$ es no singular. Ahora, por el Teorema 3.2.4, equivalencia (i) $\Leftrightarrow$ (vi), tenemos

$$(I + S)B^D - A^D(I - S) = A^D E B^D.$$

Aplicando normas a $B^D = A^D - A^D S - (S + A^D E)B^D$ se obtiene

$$\|B^D\| \leq \|A^D\| + \|A^D\|\,\|S\| + (\|S\| + \|A^D E\|)\|B^D\|$$

y de aquí, agrupando términos en la desigualdad y despejando $\|B^D\|$, se deriva (3.17). Ahora, de

$$B^D - A^D = -(S + A^D E)(A^D + (B^D - A^D)) - A^D S$$

se sigue

$$\|B^D - A^D\| \le (\|S\| + \|A^D E\|)(\|A^D\| + \|B^D - A^D\|) + \|A^D\|\,\|S\|$$

y, consecuentemente, (3.18). □

Del precedente teorema se obtiene [16, Teorema 2.1] cuando se considera $S = O$, i.e., $B^\pi = A^\pi$.

Observación 3.4.7. Si $\|B^\pi - A^\pi\| + \|A^D\|\,\|E\| < 1$ en el Teorema 3.4.6, entonces

$$\frac{\|B^D - A^D\|}{\|A^D\|} \le \frac{\|A^D\|\,\|E\| + 2\|B^\pi - A^\pi\|}{1 - \|B^\pi - A^\pi\| - \|A^D\|\,\|E\|} \le \frac{\kappa_D(A)\Theta + 2\|B^\pi - A^\pi\|}{1 - \|B^\pi - A^\pi\| - \kappa_D(A)\Theta},$$

donde $\kappa_D(A) = \|A^D\|\,\|A\|$ es el *número de condición de Drazin* de A y $\Theta = \|E\|/\|A\|$.

Además, si Δ es una cota superior para $\|B^\pi - A^\pi\|$ tal que $\Delta + \|A^D\|\,\|E\| < 1$, entonces

$$\frac{\|B^D - A^D\|}{\|A^D\|} \le \frac{\kappa_D(A)\Theta + 2\Delta}{1 - \Delta - \kappa_D(A)\Theta}.$$

3.4.1. Matrices perturbadas con índice de Drazin uno

Apoyándonos en los resultados obtenidos en la sección anterior, en el siguiente teorema obtenemos una expresión explícita del Grupo inverso y, de ésta, derivamos una cota superior del error relativo del Grupo inverso de la matriz B.

Teorema 3.4.8. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con $ind(A) = k$, y $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con $ind(B) = 1$. Asumamos que B satisface la condición $(\mathcal{C}_1)$ y tomemos $E = B - A$. Entonces,*

$$\begin{aligned} B^\sharp =& \Phi_1^{-1}\Big(A^D + A^D\Psi_{11}^{-1}\Phi_1^{-1}A^D E A^\pi(I - A^\pi E A^D\widetilde{\Phi}_1^{-1}) + A^\pi E A^D \widetilde{\Phi}_1^{-1}\Psi_{11}^{-1} \\ &\times \big(A^D - \Phi_1^{-1}A^D E A^D - (\Phi_1^{-1}A^D)^2 E A^\pi E A^D \widetilde{\Phi}_1^{-1}\Psi_{11}^{-1}\big)(I + \Phi_1^{-1}A^D E A^\pi)\Big), \end{aligned} \tag{3.19}$$

donde $\Phi_1 = I + A^D E$, $\widetilde{\Phi}_1 = I + EA^D$ y $\Psi_{11} = I + \Phi_1^{-1}A^D E A^\pi E A^D \widetilde{\Phi}_1^{-1}$

Si asumimos que $\max\{\|EA^D\|, \|A^D E\|\} < 1$, *entonces*

$$\begin{aligned} \frac{\|B^\sharp - A^D\|}{\|A^D\|} \le& \frac{\|A^D E\|}{1 - \|A^D E\|} + \frac{\|A^D E A^\pi\|\,\|\Psi_{11}^{-1}\|}{(1 - \|A^D E\|)^2}\left(1 + \frac{\|A^\pi E A^D\|}{1 - \|EA^D\|}\right) \\ &+ \frac{\|A^\pi E A^D\|\,\|\Psi_{11}^{-1}\|}{(1 - \|A^D E\|)(1 - \|EA^D\|)}\left(1 + \frac{\|A^D E A^\pi\|}{1 - \|A^D E\|}\right) \\ &\times \left(1 + \frac{\|A^D E\|}{1 - \|A^D E\|} + \frac{\|A^\pi E A^D\|\,\|A^D E A^\pi\|\,\|\Psi_{11}^{-1}\|}{(1 - \|A^D E\|)^2(1 - \|EA^D\|)}\right). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Además, si $\text{máx}\{\|EA^D\|, \|A^DE\|\} < \dfrac{1}{1+\sqrt{\|A^\pi\|}}$, *entonces*

$$\|\Psi_{11}^{-1}\| \leq \frac{(1-\|A^DE\|)(1-\|EA^D\|)}{(1-\|A^DE\|)(1-\|EA^D\|)-\|A^DE\|\,\|A^\pi EA^D\|}. \tag{3.21}$$

DEM. Utilizando la representación de B dada en el Lema 3.3.9 tenemos

$$E = P\begin{pmatrix} B_1 - A_1 & B_1T \\ SB_1 & SB_1T - A_2 \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{3.22}$$

Si $\Phi_1 = I + A^DE$ y $\widetilde{\Phi}_1 = I + EA^D$, entonces

$$\Phi_1^{-1} = P\begin{pmatrix} B_1^{-1}A_1 & -T \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1} \text{ y } \widetilde{\Phi}_1^{-1} = P\begin{pmatrix} A_1B_1^{-1} & O \\ -S & I \end{pmatrix} P^{-1}.$$

En vista de estas representaciones obtenemos

$$\Phi_1^{-1}A^D = A^D\widetilde{\Phi}_1^{-1} = P\begin{pmatrix} B_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{3.23}$$

Además, usando (3.22) y (3.23) tenemos

$$\Phi_1^{-1}A^DEA^\pi = P\begin{pmatrix} O & T \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} \text{ y } A^\pi EA^D\widetilde{\Phi}_1^{-1} = P\begin{pmatrix} O & O \\ S & O \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{3.24}$$

Sea $\Psi_{11} = I + \Phi_1^{-1}A^DEA^\pi EA^D\widetilde{\Phi}_1^{-1}$ Usando (3.24) tenemos una representación por bloques de Ψ_{11} de la cual se sigue

$$\Psi_{11}^{-1} = P\begin{pmatrix} (I+TS)^{-1} & O \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{3.25}$$

Ahora, tenemos que verificar la identidad (3.19), lo cual es equivalente a

$$(I + A^DE)B^\sharp = \Sigma_1 + \Sigma_2, \tag{3.26}$$

donde

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= A^D + A^D\Psi_{11}^{-1}\Phi_1^{-1}A^DEA^\pi(I - A^\pi EA^D\widetilde{\Phi}_1^{-1}), \\ \Omega &= A^D - \Phi_1^{-1}A^DEA^D - (\Phi_1^{-1}A^D)^2EA^\pi EA^D\widetilde{\Phi}_1^{-1}\Psi_{11}^{-1}, \\ \Sigma_2 &= A^\pi EA^D\widetilde{\Phi}_1^{-1}\Psi_{11}^{-1}\Omega(I + \Phi_1^{-1}A^DEA^\pi). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Usando la representación de $B^\sharp$, dada en el Lema 3.3.9, obtenemos

$$(I+A^DE)B^\sharp = P\begin{pmatrix} A_1^{-1}(I+TS)^{-1} & A_1^{-1}(I+TS)^{-1}T \\ S\big((I+TS)B_1(I+TS)\big)^{-1} & S\big((I+TS)B_1(I+TS)\big)^{-1}T \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{3.28}$$

Por otra parte, utilizando (3.22), (3.24) y (3.25), vemos que

$$\begin{aligned}\Sigma_1 =&P\left[\begin{pmatrix}A_1^{-1} & O\\ O & O\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A_1^{-1}(I+TS)^{-1} & O\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O & T\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & O\\ -S & I\end{pmatrix}\right]P^{-1}\\ =&P\begin{pmatrix}A_1^{-1}(I+TS)^{-1} & A_1^{-1}(I+TS)^{-1}T\\ O & O\end{pmatrix}P^{-1},\\ \Omega =&P\left[\begin{pmatrix}A_1^{-1} & O\\ O & O\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}A_1^{-1}-B_1^{-1} & O\\ O & O\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}B_1^{-1}TS(I+TS)^{-1} & O\\ O & O\end{pmatrix}\right]P^{-1}\\ =&P\begin{pmatrix}B_1^{-1}(I+TS)^{-1} & O\\ O & O\end{pmatrix}P^{-1},\end{aligned}$$

y, así,

$$\begin{aligned}\Sigma_2 =&P\begin{pmatrix}O & O\\ S(I+TS)^{-1} & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1^{-1}(I+TS)^{-1} & O\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & T\\ O & I\end{pmatrix}P^{-1}\\ =&P\begin{pmatrix}O & O\\ S\big((I+TS)B_1(I+TS)\big)^{-1} & S\big((I+TS)B_1(I+TS)\big)^{-1}T\end{pmatrix}P^{-1}.\end{aligned}$$

Luego, vemos que $\Sigma_1+\Sigma_2$ es igual al lado derecho de la igualdad (3.28). Consecuentemente, la identidad (3.26) es verificada.

A continuación demostramos (3.20). Asumimos que $\max\{\|EA^D\|,\ \|A^DE\|\}<1$. De (3.26) se sigue

$$B^\sharp - A^D = -A^DE(B^\sharp - A^D + A^D) + \Sigma_1 - A^D + \Sigma_2.$$

Luego, tomando normas obtenemos

$$\|B^\sharp - A^D\| \le \frac{\|A^D\|\,\|A^DE\| + \|\Sigma_1 - A^D\| + \|\Sigma_2\|}{1-\|A^DE\|} \tag{3.29}$$

Ahora, tenemos

$$\|\Phi_1^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|A^DE\|} \quad \text{y} \quad \|\widetilde{\Phi}_1^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|EA^D\|}. \tag{3.30}$$

De (3.27), tomando normas y usando (3.30), obtenemos

$$\begin{aligned}\|\Sigma_1 - A^D\| \le&\frac{\|A^D\|\,\|A^DEA^\pi\|\,\|\Psi_{11}^{-1}\|}{1-\|A^DE\|}\left(1+\frac{\|A^\pi EA^D\|}{1-\|EA^D\|}\right),\\ \|\Omega\| \le&\|A^D\|\left(1+\frac{\|A^DE\|}{1-\|A^DE\|}+\frac{\|A^\pi EA^D\|\,\|A^DEA^\pi\|\,\|\Psi_{11}^{-1}\|}{(1-\|A^DE\|)^2(1-\|EA^DE\|)}\right),\\ \|\Sigma_2\| \le&\frac{\|A^\pi EA^D\|\,\|\Psi_{11}^{-1}\|}{1-\|EA^DE\|}\left(\frac{\|A^DEA^\pi\|}{1-\|A^DE\|}\right)\|\Omega\|.\end{aligned}$$

Sustituyendo $\|\Sigma_1 - A^D\|$ y $\|\Sigma_2\|$ por sus respectivas cotas en (3.29) obtenemos (3.20).

Finalmente, si $\max\{\|EA^D\|, \|A^DE\|\} < \dfrac{1}{1+\sqrt{\|A^\pi\|}}$, entonces

$$\|\Psi_{11} - I\| = \|\Phi_1^{-1}A^DEA^\pi EA^D\widetilde{\Phi}_1^{-1}\| \leq \frac{\|A^DE\|\,\|A^\pi EA^D\|}{(1-\|A^DE\|)(1-\|EA^D\|)} < 1.$$

Por lo tanto,

$$\|\Psi_{11}^{-1}\| \leq \frac{(1-\|A^DE\|)(1-\|EA^D\|)}{(1-\|A^DE\|)(1-\|EA^D\|) - \|A^DE\|\,\|A^\pi EA^D\|}$$

y, así, la cota superior para $\|\Psi_{11}^{-1}\|$ dada en (3.21) se tiene. □

Cuando $ind(B) = 1$ y $A^\pi EA^D = A^DEA^\pi$ tenemos el siguiente corolario. Notemos que de la condición $A^\pi EA^D = A^DEA^\pi$ se deduce que B tiene una representación dada por $B = P\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O\end{pmatrix}P^{-1}$.

Corolario 3.4.9. *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con $ind(A) = k$, e $ind(B) = 1$, tal que $rg(A^k) = rg(B) = rg(A^kBA^k)$, y sea $E = B - A$. Si $A^\pi EA^D = A^DEA^\pi$, entonces*

$$B^\sharp = (I + A^DE)^{-1}A^D.$$

Además, si $\|A^DE\| < 1$, entonces

$$\frac{\|B^\sharp - A^D\|}{\|A^D\|} \leq \frac{\|A^DE\|}{1-\|A^DE\|}.$$

Si consideramos sólo los términos de primer orden de $\|E\|$ en (3.20) obtenemos el siguiente resultado.

Observación 3.4.10. Sea $\delta_{11} = (1-\|A^DE\|)(1-\|EA^D\|) - \|A^DE\|\,\|A^\pi EA^D\|$, entonces

$$\|\Psi_{11}^{-1}\| \leq 1 + \frac{\|A^DE\|\,\|A^\pi EA^D\|}{\delta_{11}} = 1 + O(\|E\|^2).$$

Sustituyendo $\|\Psi_{11}^{-1}\|$ por la cota superior de arriba en (3.20) obtenemos que la cota superior de $\dfrac{\|B^\sharp - A^D\|}{\|A^D\|}$ de primer orden de $\|E\|$ tiene la siguiente expresión

$$\frac{\|B^\sharp - A^D\|}{\|A^D\|} \leq \frac{\|A^DE\|}{1-\|A^DE\|} + \frac{\|A^DEA^\pi\|}{(1-\|A^DE\|)^2} + \frac{\|A^\pi EA^D\|}{(1-\|EA^D\|)(1-\|EA^D\|)} + O(\|E\|^2). \tag{3.31}$$

Basado en el Teorema 3.3.6, donde se obtuvo una expresión explícita de B^π, obtenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 3.4.11. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con $ind(A) = k$, y $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con $ind(B) = 1$. Asumimos que B satisface la condición $(\mathcal{C}_1)$ y llamamos $E = B - A$. Si se cumple* $\max\{\|A^DE\|, \|EA^D\|\} < 1$, *entonces*

$$\|B^\pi - A^\pi\| \leq \frac{\|A^DEA^\pi\|}{1-\|A^DE\|} + \frac{\|A^\pi EA^D\|\,\|\Psi_{11}^{-1}\|}{(1-\|A^DE\|)(1-\|EA^D\|)}\left(1+\frac{\|A^DEA^\pi\|}{1-\|A^DE\|}\right), \quad (3.32)$$

donde $\Psi_{11} = I + (I + A^DE)^{-1}A^DEA^\pi EA^D(I + EA^D)^{-1}$.

Además, si $\max\{\|A^DE\|, \|EA^D\|\} < \dfrac{1}{1+\sqrt{\|A^\pi\|}}$, *entonces una cota superior de* $\|\Psi_{11}^{-1}\|$ *es dada en (3.21).*

DEM. Del Teorema 3.3.6 se tiene

$$B^\pi + A^DEB^\pi = -A^\pi X^{-1}, \quad (3.33)$$

donde $X = I - (I + A^DE)^{-1}A^\pi - A^\pi(I + EA^D)^{-1}$. Utilizando las expresiones matriciales de $\Phi_1 = I + A^DE$ y $\widetilde{\Phi}_1 = I + EA^D$ dadas en la demostración del Teorema 3.4.8, podemos representar

$$X = P\begin{pmatrix} I & T \\ S & -I\end{pmatrix}P^{-1} \text{ y } X^{-1} = P\begin{pmatrix} (I+TS)^{-1} & (I+TS)^{-1}T \\ S(I+TS)^{-1} & -I+S(I+TS)^{-1}T\end{pmatrix}P^{-1}.$$

Así,

$$-A^\pi X = A^\pi + P\begin{pmatrix} I & T \\ -S(I+TS)^{-1} & -S(I+TS)^{-1}T\end{pmatrix}P^{-1}. \quad (3.34)$$

Luego, en vista de las representaciones (3.24) y (3.25) podemos escribir

$$-A^\pi X^{-1} = A^\pi - A^\pi EA^D\widetilde{\Phi}_1^{-1}\Psi_{11}^{-1}(I + \Phi_1^{-1}A^DEA^\pi). \quad (3.35)$$

Sustituyendo esta última igualdad en (3.33) obtenemos

$$B^\pi - A^\pi = -A^DE(B^\pi - A^\pi + A^\pi) - A^\pi EA^D\widetilde{\Phi}_1^{-1}\Psi_{11}^{-1}(I + \Phi_1^{-1}A^DEA^\pi).$$

Ahora, dado que $\max\{\|A^DE\|, \|EA^D\|\} < 1$, tomando normas y reagrupando en $\|B^\pi - A^\pi\|$ tenemos

$$\|B^\pi - A^\pi\| \leq \frac{\|A^DEA^\pi\|}{1-\|A^DE\|} + \frac{\|A^\pi EA^D\|\,\|\Psi_{11}^{-1}\|}{(1-\|A^DE\|)(1-\|EA^D\|)}\left(1+\frac{\|A^DEA^\pi\|}{1-\|A^DE\|}\right).$$

Luego, la cota superior (3.32) es obtenida. □

A continuación damos un ejemplo en el que se comparan las cotas superiores para $\frac{\|B^\sharp - A^D\|_2}{\|A^D\|_2}$ dadas en Teorema 3.4.8, Observación 3.4.10 y Observación 3.4.7, en este caso Δ es reemplazada por la cota superior dada en (3.32), y la cota superior para $\|B^\pi - A^\pi\|_2$, deducida en el Teorema 3.4.11, con otras cotas superiores dadas en [62, 97].

Ejemplo 3.4.12. Sean

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{100} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\epsilon = 10^{-6}$. Vemos que $ind(A) = ind(A + E_i) = 1$ y $rg(A + E_i) = rg(A) = rg(A(A+E_i)A) = 3$, para $i = 1, 2$ y, así, por el Teorema 3.3.4, tenemos que la matriz $B = A + E_i$ satisface $ind(B) = 1$ y $B \in (\mathcal{C}_1)$.

En las siguientes tablas se muestra que nuestras cotas son mejores que las previamente dadas.

	Valor exacto	[97, Th. 5], (15)	(3.32)
$B = A + E_1$	$9{,}99 \times 10^{-7}$	$1{,}00 \times 10^{-4}$	$1{,}00 \times 10^{-6}$
$B = A + E_2$	$1{,}62 \times 10^{-6}$	$2{,}42 \times 10^{-4}$	$2{,}42 \times 10^{-6}$

Cuadro 3.1: Comparación de cotas superiores para $\|BB^\sharp - AA^\sharp\|_2$

	Valor exacto	[97, Th. 4], (6)	(3.31)
$B = A + E_1$	$1{,}62 \times 10^{-8}$	$1{,}02 \times 10^{-4} + O(\|E\|^2)$	$2{,}42 \times 10^{-6} + O(\|E\|^2)$
$B = A + E_2$	$3{,}31 \times 10^{-8}$	$2{,}43 \times 10^{-4} + O(\|E\|^2)$	$3{,}83 \times 10^{-6} + O(\|E\|^2)$

Cuadro 3.2: Comparación de cotas superiores para $\|B^\sharp - A^\sharp\|_2/\|A^\sharp\|_2$

	[62, Th. 3] (3.1)	(3.20)	(3.18) + (3.32)
$B = A + E_1$	$2{,}62 \times 10^{-4}$	$2{,}42 \times 10^{-6}$	$3{,}42 \times 10^{-6}$
$B = A + E_2$	$4{,}04 \times 10^{-4}$	$3{,}83 \times 10^{-6}$	$6{,}25 \times 10^{-6}$

Cuadro 3.3: Comparación de cotas superiores para $\|B^\sharp - A^\sharp\|_2/\|A^\sharp\|_2$

3.4.2. Matrices perturbadas de índice de Drazin $s > 1$

En este apartado extenderemos los resultados obtenidos anteriormente a la clase de matrices que cumplen $ind(B) = s > 1$ y $B \in (\mathcal{C}_s)$.

Primero damos una representación de las potencias de B la cual está basada en el Teorema 3.3.10.

LEMA 3.4.13. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con $ind(A) = k$, y $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con $ind(B) = s$, satisfaciendo la condición $(\mathcal{C}_s)$. Entonces, para todo entero $p \geq 1$, se tiene la representación*

$$B^p = P\left\{\begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix}(B_1(I+TS))^{p-1}B_1\begin{bmatrix} I & T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T \\ -I \end{bmatrix}(B_2(I+ST))^{p-1}B_2\begin{bmatrix} S & -I \end{bmatrix}\right\}P^{-1},$$

donde $I + TS$ y B_1 son no singulares y, $B_2(I + ST)$ es nilpotente de índice s.

Además,

$$B^D = P\begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix}((I+TS)B_1(I+TS))^{-1}\begin{bmatrix} I & T \end{bmatrix}P^{-1} \tag{3.36}$$

y

$$BB^D = P\begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix}(I+TS)^{-1}\begin{bmatrix} I & T \end{bmatrix}P^{-1}.$$

DEM. Por el Teorema 3.3.10, la descomposición índice 1-nilpotente de B tiene una representación relativa a la descomposición core-nilpotente de A dada por

$$B = C_B + N_B = P\begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix}B_1\begin{bmatrix} I & T \end{bmatrix}P^{-1} + P\begin{bmatrix} T \\ -I \end{bmatrix}B_2\begin{bmatrix} S & -I \end{bmatrix}P^{-1},$$

donde $I + TS$ y B_1 son no singulares, y $B_2(I + ST)$ es nilpotente de índice s. De $C_B N_B = N_B C_B = O$ se sigue que $B^p = C_B^p + N_B^p$. Por el Lema 2.6.4, fórmula (2.7), se obtiene la expresión

$$C_B^p = P\begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix}(B_1(I+ST))^{p-1}B_1\begin{bmatrix} I & T \end{bmatrix}P^{-1}$$

y, por la fórmula (3.15),

$$N_B^p = P\begin{bmatrix} T \\ -I \end{bmatrix}(B_2(I+ST))^{p-1}B_2\begin{bmatrix} S & -I \end{bmatrix}P^{-1}.$$

Así se llega a la expresión para B^p. Además, $B^D = C_B^\sharp$, entonces por el Lema 2.6.4, fórmula (2.6.4), se tiene la expresión para B^D. Finalmente, la fórmula para BB^D se comprueba por cálculo directo. $\square$

TEOREMA 3.4.14. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con ind$(A) = k$, y $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con ind$(B) = s$, satisfaciendo la condición $(\mathcal{C}_s)$. Denotamos $E_1 = E = B - A$ y $E_s = B^s - A^s$. Asumimos que $I + A^D E$ es no singular. Entonces,*

$$\begin{aligned} B^D =& \Phi_1^{-1}\Big(A^D + A^D\Psi_{ss}^{-1}\Phi_s^{-1}(A^D)^s E_s A^\pi (I - A^\pi E_s (A^D)^s \widetilde{\Phi}_s^{-1}) + A^\pi E_s (A^D)^s \widetilde{\Phi}_s^{-1}\Psi_{1s}^{-1} \\ & \times \big(A^D - \Phi_1^{-1}A^D E A^D - \Phi_1^{-1}A^D(\Psi_{ss} - I)\Psi_{ss}^{-1}\big)(I + \Phi_s^{-1}(A^D)^s E_s A^\pi)\Big), \end{aligned} \tag{3.37}$$

donde $\Phi_i = I + (A^D)^i E_i$, $\widetilde{\Phi}_i = I + E_i(A^D)^i$ y $\Psi_{is} = I + \Phi_i^{-1}(A^D)^i E_i A^\pi E_s (A^D)^s \widetilde{\Phi}_s^{-1}$, para $i = 1$ e $i = s$.

Si $\max\{\|A^D E\|, \|(A^D)^s E_s\|, \|E_s(A^D)^s\|\} < 1$, *entonces*

$$\begin{aligned} \frac{\|B^D - A^D\|}{\|A^D\|} \leq & \frac{\|A^D E\|}{1 - \|A^D E\|} + \frac{\|(A^D)^s E_s A^\pi\|\,\|\Psi_{ss}^{-1}\|}{(1 - \|A^D E\|)(1 - \|(A^D)^s E_s\|)}\left(1 + \frac{\|A^\pi E_s (A^D)^s\|}{1 - \|E_s(A^D)^s\|}\right) \\ & + \frac{\|A^\pi E_s (A^D)^s\|\,\|\Psi_{1s}^{-1}\|}{(1 - \|A^D E\|)(1 - \|E_s(A^D)^s\|)}\left(1 + \frac{\|(A^D)^s E_s A^\pi\|}{1 - \|(A^D)^s E_s\|}\right) \\ & \times \left(1 + \frac{\|A^D E\|}{1 - \|A^D E\|} + \frac{\|A^\pi E_s (A^D)^s\|\,\|(A^D)^s E_s A^\pi\|\,\|\Psi_{ss}^{-1}\|}{(1 - \|A^D E\|)(1 - \|(A^D)^s E_s\|)(1 - \|E_s(A^D)^s\|)}\right). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Además, si $\max\{\|A^D E\|, \|(A^D)^s E_s\|, \|E_s(A^D)^s\|\} < \dfrac{1}{1 + \sqrt{\|A^\pi\|}}$, *entonces*

$$\|\Psi_{is}^{-1}\| \leq \frac{(1 - \|(A^D)^i E_i\|)(1 - \|E_s(A^D)^s\|)}{(1 - \|(A^D)^i E_i\|)(1 - \|E_s(A^D)^s\|) - \|(A^D)^i E_i\|\,\|A^\pi E_s (A^D)^s\|}, \tag{3.39}$$

para $i = 1$ e $i = s$.

DEM. Del Teorema 3.3.10 (iii), tenemos que la descomposición índice 1-nilpotente de B, es dada por $B = C_B + N_B$, con

$$C_B = P\begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} B_1 \begin{bmatrix} I & T \end{bmatrix} P^{-1} \ \text{ y } \ N_B = P\begin{bmatrix} T \\ -I \end{bmatrix} B_2 \begin{bmatrix} S & -I \end{bmatrix} P^{-1},$$

donde $I + TS$ y B_1 son no singulares y, $B_2(I + ST)$ es nilpotente de índice s. Luego, aplicando el Lema 3.3.9, obtenemos

$$B^D = C_B^\sharp = P\begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix}\big((I + TS)B_1(I + TS)\big)^{-1}\begin{bmatrix} I & T \end{bmatrix} P^{-1}. \tag{3.40}$$

Además, podemos escribir $E = B - A$ como

$$E = P \begin{pmatrix} B_1 + TB_2S - A_1 & B_1T - TB_2 \\ SB_1 - B_2S & SB_1T + B_2 - A_2 \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{3.41}$$

En vista de esta última representación obtenemos

$$I + A^DE = P \begin{pmatrix} A_1^{-1}(B_1 + TB_2S) & A_1^{-1}(B_1T - TB_2) \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{3.42}$$

De la suposición $I + A^DE$ es no singular se sigue que $B_1 + TB_2S$ es no singular. Usando (3.42) y (3.40) tenemos

$$(I+A^DE)B^D = P \begin{pmatrix} A_1^{-1}(I + TS)^{-1} & A_1^{-1}(I + TS)^{-1}T \\ S\big((I + TS)B_1(I + TS)\big)^{-1} & S\big((I + TS)B_1(I + TS)\big)^{-1}T \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{3.43}$$

Denotamos $\Phi_1 = I + A^DE$, entonces

$$\Phi_1^{-1} = P \begin{pmatrix} (B_1 + TB_2S)^{-1}A_1 & -(B_1 + TB_2S)^{-1}(B_1T - TB_2) \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{3.44}$$

Utilizando la representación de las potencias de B dada en el Lema 3.4.13, escribimos $E_s = B^s - A^s$ como

$$E_s = P \begin{pmatrix} \big(B_1(I + TS)\big)^{s-1}B_1 - A_1^s & \big(B_1(I + TS)\big)^{s-1}B_1T \\ S\big(B_1(I + TS)\big)^{s-1}B_1 & S\big(B_1(I + TS)\big)^{s-1}B_1T - A_2^s \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{3.45}$$

Ahora, llamando $\Phi_s = I + (A^D)^sE_s$ y $\widetilde{\Phi}_s = I + E_s(A^D)^s$, obtenemos

$$\begin{aligned} \Phi_s^{-1} &= P \begin{pmatrix} B_1^{-1}\big((B_1(I + TS))^{s-1}\big)^{-1}A_1^s & -T \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1}, \\ \widetilde{\Phi}_s^{-1} &= P \begin{pmatrix} A_1^sB_1^{-1}\big((B_1(I + TS))^{s-1}\big)^{-1} & O \\ -S & I \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned} \tag{3.46}$$

y

$$\Phi_s^{-1}(A^D)^s = (A^D)^s\widetilde{\Phi}_s^{-1} = P \begin{pmatrix} B_1^{-1}\big((B_1(I + TS))^{s-1}\big)^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{3.47}$$

Además,

$$\Phi_s^{-1}(A^D)^sE_sA^\pi = P \begin{pmatrix} O & T \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} \;\text{ y }\; A^\pi E_s(A^D)^s\widetilde{\Phi}_s^{-1} = P \begin{pmatrix} O & O \\ S & O \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{3.48}$$

Sea $\Psi_{is} = I + \Phi_i^{-1}(A^D)^i E_i A^\pi E_s (A^D)^s \widetilde{\Phi}_s^{-1}$, para $i = 1$ e $i = s$. Usando (3.48) tenemos una representación por bloques de Ψ_{ss} de la cual se sigue

$$\Psi_{ss}^{-1} = P \begin{pmatrix} (I+TS)^{-1} & O \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1}, \tag{3.49}$$

y, usando (3.41), (3.42) y (3.48), obtenemos

$$\Psi_{1s} = P \begin{pmatrix} (B_1 + TB_2 S)^{-1} B_1 (I+TS) & O \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1}$$

y, así,

$$\Psi_{1s}^{-1} = P \begin{pmatrix} (I+TS)^{-1} B_1^{-1} (B_1 + TB_2 S) & O \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{3.50}$$

Introducimos

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= A^D + A^D \Psi_{ss}^{-1} \Phi_s^{-1} (A^D)^s E_s A^\pi (I - A^\pi E_s (A^D)^s \widetilde{\Phi}_s^{-1}), \\ \Omega &= A^D - \Phi_1^{-1} A^D E A^D - \Phi_1^{-1} A^D (\Psi_{ss} - I) \Psi_{ss}^{-1}, \\ \Sigma_2 &= A^\pi E_s (A^D)^s \widetilde{\Phi}_s^{-1} \Psi_{1s}^{-1} \Omega (I + \Phi_s^{-1} (A^D)^s E_s A^\pi). \end{aligned} \tag{3.51}$$

A fin de verificar la igualdad (3.37) veremos que la representación matricial de $\Sigma_1 + \Sigma_2$ es igual al lado derecho de (3.43). Calculamos

$$\Sigma_1 = P \begin{pmatrix} A_1^{-1}(I+TS)^{-1} & A_1^{-1}(I+TS)^{-1}T \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Por otra parte, utilizando (3.41), (3.44) y (3.49) vemos que

$$\Omega = P \begin{pmatrix} (B_1 + TB_2 S)^{-1}(I+TS)^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1},$$

y, así, usando (3.50), obtenemos

$$\Psi_{1s}^{-1}\Omega = P \begin{pmatrix} (I+TS)^{-1} B_1^{-1} (I+TS)^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Sigma_2 =& P \begin{pmatrix} O & O \\ S & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (I+TS)^{-1} B_1^{-1} (I+TS)^{-1} & O \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & T \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1} \\ =& P \begin{pmatrix} O & O \\ S\big((I+TS)B_1(I+TS)\big)^{-1} & S\big((I+TS)B_1(I+TS)\big)^{-1}T \end{pmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

En vista de estas expresiones de Σ_1 y Σ_2 concluimos la demostración de la primera parte.

A continuación demostramos la cota (3.38). De la identidad

$$B^D - A^D + A^D E(B^D - A^D + A^D) = \Sigma_1 - A^D + \Sigma_2,$$

tomando normas obtenemos

$$\|B^D - A^D\| \leq \|A^D E\| \, \|B^D - A^D\| + \|A^D E\| \, \|A^D\| + \|\Sigma_1 - A^D\| + \|\Sigma_2\|.$$

Puesto que $\max\{\|A^D E\|, \, \|(A^D)^s E_s\|, \, \|E_s (A^D)^s\|\} < 1$, tenemos

$$\|B^D - A^D\| \leq \frac{\|A^D E\| \, \|A^D\| + \|\Sigma_1 - A^D\| + \|\Sigma_2\|}{1 - \|A^D E\|} \tag{3.52}$$

y

$$\|\Phi_s^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|(A^D)^s E_s\|} \quad \text{y} \quad \|\widetilde{\Phi}_s^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|E_s (A^D)^s\|}. \tag{3.53}$$

Tomando normas en (3.51), y usando estas cotas superiores obtenemos

$$\|\Sigma_1 - A^D\| \leq \frac{\|A^D\| \, \|(A^D)^s E_s A^\pi\| \, \|\Psi_{ss}^{-1}\|}{1 - \|(A^D)^s E_s\|} \left(1 + \frac{\|A^\pi E_s (A^D)^s\|}{1 - \|E_s (A^D)^s\|}\right)$$

y

$$\begin{aligned} \|\Sigma_2\| \leq & + \frac{\|A^D\| \, \|A^\pi E_s (A^D)^s\| \, \|\Psi_{1s}^{-1}\|}{1 - \|E_s (A^D)^s\|} \left(1 + \frac{\|(A^D)^s E_s A^\pi\|}{1 - \|(A^D)^s E_s\|}\right) \\ & \times \left(1 + \frac{\|A^D E\|}{1 - \|A^D E\|} + \frac{\|A^\pi E_s (A^D)^s\| \, \|(A^D)^s E_s A^\pi\| \, \|\Psi_{ss}^{-1}\|}{(1 - \|A^D E\|)(1 - \|(A^D)^s E_s\|)(1 - \|E_s (A^D)^s\|)}\right). \end{aligned}$$

Sustituyendo $\|\Sigma_1 - A^D\|$ y $\|\Sigma_2\|$ por sus respectivas cotas en (3.52) concluimos la demostración de (3.38).

Finalmente, si $\max\{\|A^D E\|, \, \|(A^D)^s E_s\|, \, \|E_s (A^D)^s\|\} < \dfrac{1}{1 + \sqrt{\|A^\pi\|}}$, entonces

$$\|\Psi_{is} - I\| \leq \frac{\|(A^D)^i E_i\| \, \|A^\pi E_s (A^D)^s\|}{(1 - \|(A^D)^i E_i\|)(1 - \|E_s (A^D)^s\|)} < 1, \quad i = 1, s.$$

Por lo tanto,

$$\|\Psi_{is}^{-1}\| \leq \frac{(1 - \|(A^D)^i E_i\|)(1 - \|E_s (A^D)^s\|)}{(1 - \|(A^D)^i E_i\|)(1 - \|E_s (A^D)^s\|) - \|(A^D)^i E_i\| \, \|A^\pi E_s (A^D)^s\|}, \quad i = 1, s.$$

Esto completa la demostración. $\square$

Observación 3.4.15. Si denotamos

$$\delta_{is} = (1 - \|(A^D)^i E_i\|)(1 - \|E_s(A^D)^s\|) - \|(A^D)^i E_i\| \, \|A^\pi E_s(A^D)^s\|,$$

entonces la cota superior (3.39), para $i = 1$ e $i = s$, puede ser expresada como

$$\|\Psi_{is}^{-1}\| \leq 1 + \frac{\|(A^D)^i E_i\| \, \|A^\pi E_s(A^D)^s\|}{\delta_{is}} = 1 + O(\|E\|^2),$$

donde en la última identidad hemos tenido en cuenta que $\|E_s\| = O(\|E\|)$, ver [80].

Sustituyendo esto en (3.38) obtenemos que la cota superior de $\frac{\|B^D - A^D\|}{\|A^D\|}$, hasta el primer orden de $\|E\|$ en (3.38), tiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \frac{\|B^D - A^D\|}{\|A^D\|} \leq & \frac{\|A^D E\|}{1 - \|A^D E\|} + \frac{\|(A^D)^s E_s A^\pi\|}{(1 - \|A^D E\|)(1 - \|(A^D)^s E_s\|)} \\ & + \frac{\|A^\pi E_s(A^D)^s\|}{(1 - \|A^D E\|)(1 - \|E_s(A^D)^s\|)} + O(\|E\|^2). \end{aligned} \tag{3.54}$$

Teorema 3.4.16. *Sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$*, con* $ind(A) = k$*, y* $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$*, con* $ind(B) = s$*, satisfaciendo* $(\mathcal{C}_s)$*. Sea* $E_s = B^s - A^s$*. Si* $\max\{\|(A^D)^s E_s\| \, \|E_s(A^D)^s\|\} < 1$*, entonces*

$$\|B^\pi - A^\pi\| \leq \frac{\|(A^D)^s E_s A^\pi\|}{1 - \|(A^D)^s E_s\|} + \frac{\|A^\pi E_s(A^D)^s\| \, \|\Psi_{ss}^{-1}\|}{(1 - \|(A^D)^s E_s\|)(1 - \|E_s(A^D)^s\|)} \left(1 + \frac{\|(A^D)^s E_s A^\pi\|}{1 - \|(A^D)^s E_s\|}\right), \tag{3.55}$$

donde $\Psi_{ss} = I + (I + (A^D)^s E_s)^{-1}(A^D)^s E_s A^\pi E_s (A^D)^s (I + E_s(A^D)^s)^{-1}$.

Además, si $\max\{\|(A^D)^s E_s\|, \, \|E_s(A^D)^s\|\} < \dfrac{1}{1 + \sqrt{\|A^\pi\|}}$*, entonces una cota superior de* $\|\Psi_{ss}^{-1}\|$ *es dada en (3.39).*

Dem. Del Teorema 3.3.6 se tiene

$$B^\pi + (A^D)^s E_s B^\pi = -A^\pi X^{-1}, \tag{3.56}$$

donde $X = I - (I + (A^D)^s E_s)^{-1} A^\pi - A^\pi (I + E_s(A^D)^s)^{-1}$ Utilizando las expresiones de Φ_s^{-1} y $\widetilde{\Phi}_s^{-1}$ dadas en la demostración del Teorema 3.4.14, representaciones (3.46), tenemos

$$X = P \begin{pmatrix} I & T \\ S & -I \end{pmatrix} P^{-1} \text{ y } X^{-1} = P \begin{pmatrix} (I + TS)^{-1} & (I + TS)^{-1} T \\ S(I + TS)^{-1} & -I + S(I + TS)^{-1} T \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Así,

$$-A^\pi X = A^\pi + P \begin{pmatrix} O & O \\ -S(I + TS)^{-1} & -S(I + TS)^{-1} T \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{3.57}$$

Luego, de las representaciones (3.48) y (3.49) podemos escribir

$$-A^\pi X^{-1} = A^\pi - A^\pi E_s (A^D)^s \widetilde{\Phi}_s^{-1} \Psi_{ss}^{-1} (I + \Phi_s^{-1} (A^D)^s E_s A^\pi). \tag{3.58}$$

Sustituyendo esta última igualdad en (3.56) obtenemos

$$B^\pi - A^\pi = -(A^D)^s E_s (B^\pi - A^\pi + A^\pi) - A^\pi E_s (A^D)^s \widetilde{\Phi}_s^{-1} \Psi_{ss}^{-1} (I + \Phi_s^{-1} (A^D)^s E_s A^\pi).$$

Tomando normas

$$\begin{aligned} \|B^\pi - A^\pi\| \leq & \|(A^D)^s E_s\| \, \|B^\pi - A^\pi\| + \|(A^D)^s E_s A^\pi\| \\ & + \|A^\pi E_s (A^D)^s\| \, \|\widetilde{\Phi}_s^{-1}\| \, \|\Psi_{ss}^{-1}\| (1 + \|\Phi_s^{-1}\| \, \|(A^D)^s E_s A^\pi\|). \end{aligned}$$

Ahora, dado que $\max\{\|(A^D)^s E_s\|, \|E_s (A^D)^s\|\} < 1$ reagrupando en $\|B^\pi - A^\pi\|$ y sustituyendo $\|\Phi_s^{-1}\|$ y $\|\widetilde{\Phi}_s^{-1}\|$ por las cotas superiores (3.53), obtenemos (3.55). □

Se observa a continuación la acotación que resulta cuando en la cota (3.55) consideramos los términos de primer orden de $\|E\|$.

Observación 3.4.17. Si $\max\{\|(A^D)^s E_s\|, \|E_s (A^D)^s\|\} < \dfrac{1}{1 + \sqrt{\|A^\pi\|}}$, análogamente a la Observación 3.4.15, la cota superior de $\|B^\pi - A^\pi\|$ hasta el primer orden de $\|E\|$ en (3.55) resulta como sigue,

$$\|B^\pi - A^\pi\| \leq \frac{\|(A^D)^s E_s A^\pi\|}{1 - \|(A^D)^s E_s\|} + \frac{\|A^\pi E_s (A^D)^s\|}{(1 - \|(A^D)^s E_s\|)(1 - \|E_s (A^D)^s\|)} + O(\|E\|^2). \tag{3.59}$$

En el siguiente ejemplo se compara la cota superior para $\|B^\pi - A^\pi\|_2$, derivada en el Teorema 3.4.16, y las cotas superiores para $\frac{\|B^D - A^D\|_2}{\|A^D\|_2}$ dadas en Teorema 3.4.14, Observación 3.4.15 y Observación 3.4.7, reemplazando en este caso Δ por la cota superior dada en (3.55), con las cotas superiores dadas en [97].

Ejemplo 3.4.18. Sean

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{100} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\epsilon = 10^{-9}$. Vemos que $ind(A) = ind(A + E_i) = 2$ y $rg((A + E_i)^2) = rg(A^2) = rg(A^2 (A + E_i)^2 A^2) = 3$, para $i = 1, 2$. Por el Teorema 3.3.4 tenemos que $B = A + E_i$ satisface $ind(B) = 2$ y $B \in (\mathcal{C}_2)$.

Los resultados obtenidos se reflejan en las siguientes tablas.

	Valor exacto	[97, Th. 5], (15)	(3.55)
$B = A + E_1$	$9{,}99 \times 10^{-9}$	$1{,}00 \times 10^{-5}$	$1{,}00 \times 10^{-9}$
$B = A + E_2$	$1{,}85 \times 10^{-9}$	$2{,}74 \times 10^{-5}$	$2{,}74 \times 10^{-9}$

Cuadro 3.4: Comparación de cotas superiores para $\|BB^D - AA^D\|_2$

	Valor exacto	[97, Th. 4], (6)	(3.54)
$B = A + E_1$	$1{,}12 \times 10^{-10}$	$1{,}00 \times 10^{-5} + O(\|E\|^2)$	$2{,}41 \times 10^{-9} + O(\|E\|^2)$
$B = A + E_2$	$3{,}44 \times 10^{-11}$	$2{,}73 \times 10^{-5} + O(\|E\|^2)$	$4{,}15 \times 10^{-9} + O(\|E\|^2)$

Cuadro 3.5: Comparación de cotas superiores para $\frac{\|B^D - A^D\|_2}{\|A^D\|_2}$ hasta el primer orden

	[97, Th. 1], (1)	(3.38)	(3.18) + (3.55)
$B = A + E_1$	0,7649	$2{,}41 \times 10^{-9}$	$3{,}41 \times 10^{-9}$
$B = A + E_2$	0,9008	$4{,}15 \times 10^{-9}$	$6{,}88 \times 10^{-9}$

Cuadro 3.6: Comparación de cotas superiores para $\frac{\|B^D - A^D\|_2}{\|A^D\|_2}$

En [98], fórmula (4.1), los autores dieron una cota superior para el error relativo de la inversa de Drazin basada en la separación de matrices.

La función separación de dos matrices cuadradas A y B es definida como en [87]:

$$\mathrm{sep}_F(A,\, B) = \begin{cases} \min_{\|W\|_F=1} \|AW - WB\|_F & \text{si } \sigma(A) \cap \sigma(B) = \{0\}, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $\|\cdot\|_F$ es la norma de Frobeniüs, definida como $\|A\|_F = \left(\sum_{i=i}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Se puede calcular la función $\mathrm{sep}_F(A,\, B)$ como el mínimo valor singular de la matriz $I \otimes A - B^t \otimes I$, donde $\otimes$ es el producto de Kronecker para matrices.

La cota superior [98, Teorema 4.1] esta basada en la separación de matrices $\mathrm{sep}_F(C,\, N)$, con C y N las matrices de la siguiente representación

$$Q^* A Q = \begin{pmatrix} C & G \\ O & N \end{pmatrix}, \tag{3.60}$$

donde Q es una matriz unitaria, C es no singular y N es nilpotente de índice de nilpotencia $ind(A)$. Esta representación se deduce del teorema de descomposición de Schur dado en [88].

En el siguiente ejemplo consideramos las matrices dadas en el Ejemplo 3.4.18, dando explícitamente las matrices que intervienen en (3.60). En él comparamos la cota superior formulada en (3.38), usando la norma de Frobeniüs, con la cota obtenida en [98, Teorema 4.1].

Ejemplo 3.4.19. Calculamos

$$A = Q \begin{pmatrix} C & G \\ O & N \end{pmatrix} Q^* = Q \left(\begin{array}{ccc|cc} 1/100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/\sqrt{2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) Q^*,$$

con

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que $\mathrm{sep}_F(C, N) = 1{,}42 \times 10^{-4}$.

En la siguiente tabla se exponen los resultados obtenidos.

	Valor exacto	[98, Th. 4.1], (4.1)	(3.38)
$B = A + E_1$	$1{,}14 \times 10^{-10}$	$8{,}39 \times 10^{-5}$	$2{,}42 \times 10^{-9}$
$B = A + E_2$	$3{,}47 \times 10^{-11}$	$8{,}39 \times 10^{-5}$	$4{,}15 \times 10^{-9}$

Cuadro 3.7: Comparación de cotas superiores para $\frac{\|B^D - A^D\|_F}{\|A^D\|_F}$

3.5. Aplicaciones

A continuación se exponen las aplicaciones tratadas en esta sección.

Deduciremos una estimación para $\|B^\pi - A^\pi\|$ cuya obtención es totalmente independiente de los resultados alcanzados en las secciones anteriores. Esta cota será dada en términos de las proyecciones ortogonales sobre los subespacios núcleo e imagen de las proyecciones espectrales B^π y A^π. Una cota en términos del gap entre los subespacios $\mathcal{R}(A^k)$, $\mathcal{R}(B^s)$, y $\mathcal{N}(A^k)$, $\mathcal{N}(B^s)$ fue dada en [50].

Las acotaciones superiores de la inversa de Drazin y del error relativo de la perturbación serán aplicadas en el estudio de la perturbación de sistemas singulares de ecuaciones lineales. Se derivará un resultado que generaliza el obtenido por Y. Wei y G. Wang en [100, Theorem 4.1].

Se considerará una clase especial de matrices perturbadas $B = A + E$, que verifican la condición $(\mathcal{C}_s)$, que incluye las matrices tales que $B^2AA^D = (BAA^D)^2$. Se dará una fórmula explícita para la inversa de Drazin de dicha matriz y una cota superior para el error relativo de la inversa de Drazin. El principal resultado dado en este apartado generaliza el obtenido por X. Li e Y. Wei en [63, Teorema 3.2].

3.5.1. Una cota para el error de la proyección espectral de la perturbación

Antes de obtener la cota superior de $\|B^\pi - A^\pi\|$ damos el siguiente lema, el cual constituye una herramienta básica en la obtención de dicha cota.

LEMA 3.5.1. *Sean A, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con $k = ind(A)$ y $s = ind(B)$. Entonces,*

(i) $\|(I - B^\pi)A^\pi\| \leq \|I - B^\pi\| \, \|A^\pi\| \, \|P_{\mathcal{N}(B^s)} - P_{\mathcal{N}(A^k)}\|$.

(ii) $\|B^\pi(I - A^\pi)\| \leq \|B^\pi\| \, \|I - A^\pi\| \, \|P_{\mathcal{R}(B^s)} - P_{\mathcal{R}(A^k)}\|$.

(iii) $\|(I - A^\pi)B^\pi\| \leq \|I - A^\pi\| \, \|B^\pi\| \, \|P_{\mathcal{N}(A^k)} - P_{\mathcal{N}(B^s)}\|$.

(iv) $\|A^\pi(I - B^\pi)\| \leq \|A^\pi\| \, \|I - B^\pi\| \, \|P_{\mathcal{R}(A^k)} - P_{\mathcal{R}(B^s)}\|$

DEM. Para todo proyector Q se verifica $\mathcal{X} = \mathcal{R}(Q) \oplus \mathcal{N}(Q)$, luego para cada $x \in \mathcal{X}$,

$$x = Qx + (I - Q)x, \text{ donde } Qx \in \mathcal{R}(Q) \text{ y } (I - Q)x \in \mathcal{N}(Q).$$

Así, $P_{\mathcal{R}(Q)}Qx = Qx$. Ahora, dado que $\mathcal{R}(Q)$ y $\mathcal{N}(Q)$ son subespacios ortogonales, se tiene $P_{\mathcal{N}(Q)} = I - P_{\mathcal{R}(Q)}$. Luego,

$$P_{\mathcal{N}(Q)}x = (I - P_{\mathcal{R}(Q)})x = x - P_{\mathcal{R}(Q)}x = x - Qx = (I - Q)x$$

(i): De $P_{\mathcal{R}(A^\pi)}A^\pi x = A^\pi x$ y $P_{\mathcal{R}(B^\pi)}A^\pi x \in \mathcal{R}(B^\pi)$ se sigue,

$$\begin{aligned}(I - B^\pi)A^\pi x &= (I - B^\pi)(P_{\mathcal{R}(A^\pi)}A^\pi x - P_{\mathcal{R}(B^\pi)}A^\pi x) \\ &= (I - B^\pi)(P_{\mathcal{R}(A^\pi)} - P_{\mathcal{R}(B^\pi)})A^\pi x.\end{aligned}$$

Aplicando normas,

$$\begin{aligned}\|(I-B^\pi)A^\pi x\| &\le \|I-B^\pi\|\,\|P_{\mathcal{R}(A^\pi)}-P_{\mathcal{R}(B^\pi)}\|\,\|A^\pi\|\,\|x\|\\ &= \|I-B^\pi\|\,\|P_{\mathcal{N}(A^k)}-P_{\mathcal{N}(B^t)}\|\,\|A^\pi\|\,\|x\|\\ &= \|I-B^\pi\|\,\|A^\pi\|\,\|P_{\mathcal{N}(B^t)}-P_{\mathcal{N}(A^k)}\|\,\|x\|.\end{aligned}$$

(ii): Por $P_{\mathcal{R}(I-A^\pi)}(I-A^\pi)x=(I-A^\pi)x$ y $P_{\mathcal{N}(B^\pi)}(I-A^\pi)x=(I-B^\pi)(I-A^\pi)x$ se tiene,

$$\begin{aligned}B^\pi(I-A^\pi)x &= B^\pi(P_{\mathcal{R}(I-A^\pi)}(I-A^\pi)x-P_{\mathcal{N}(B^\pi)}(I-A^\pi)x)\\ &= B^\pi(P_{\mathcal{N}(A^\pi)}(I-A^\pi)x-P_{\mathcal{N}(B^\pi)}(I-A^\pi)x)\\ &= B^\pi(P_{\mathcal{N}(A^\pi)}-P_{\mathcal{N}(B^\pi)})(I-A^\pi)x\end{aligned}$$

y, así,

$$\begin{aligned}\|B^\pi(I-A^\pi)x\| &\le \|B^\pi\|\,\|P_{\mathcal{N}(A^\pi)}-P_{\mathcal{N}(B^\pi)}\|\,\|I-A^\pi\|\,\|x\|\\ &= \|B^\pi\|\,\|P_{\mathcal{R}(B^t)}-P_{\mathcal{R}(A^\pi)}\|\,\|I-A^\pi\|\,\|x\|\\ &= \|B^\pi\|\,\|I-A^\pi\|\,\|P_{\mathcal{R}(B^t)}-P_{\mathcal{R}(A^\pi)}\|\,\|x\|.\end{aligned}$$

Los puntos (iii) y (iv) son obtenidos de forma similar. □

En el siguiente resultado se establecerá una cota superior para $\|B^\pi-A^\pi\|$.

Proposición 3.5.2. *Sean A, $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$, con $k=ind(A)$ y $s=ind(B)$. Llamamos $\Gamma_{\mathcal{R}}=\|P_{\mathcal{R}(B^s)}-P_{\mathcal{R}(A^k)}\|$ y $\Gamma_{\mathcal{N}}=\|P_{\mathcal{N}(B^s)}-P_{\mathcal{N}(A^k)}\|$. Si $\|A^\pi\|\,\Gamma_{\mathcal{N}}+\|I-A^\pi\|\,\Gamma_{\mathcal{R}}<1$, entonces*

$$\|B^\pi-A^\pi\|\le\frac{\|A^\pi\|\,\|I-A^\pi\|\,(\Gamma_{\mathcal{N}}+\Gamma_{\mathcal{R}})}{1-\|A^\pi\|\,\Gamma_{\mathcal{N}}-\|I-A^\pi\|\,\Gamma_{\mathcal{R}}}. \tag{3.61}$$

Dem. De la igualdad $B^\pi-A^\pi=B^\pi(I-A^\pi)-(I-B^\pi)A^\pi$ se sigue

$$\|B^\pi-A^\pi\|\le\|B^\pi(I-A^\pi)\|+\|(I-B^\pi)A^\pi\|.$$

Ahora, aplicando el Lema 3.5.1 se obtiene

$$\begin{aligned}\|B^\pi-A^\pi\| &\le \|B^\pi(I-A^\pi)\|+\|(I-B^\pi)A^\pi\|\\ &\le \|I-A^\pi\|\,\|B^\pi\|\,\|P_{\mathcal{R}(B^s)}-P_{\mathcal{R}(A^k)}\|+\|A^\pi\|\,\|I-B^\pi\|\,\|P_{\mathcal{N}(B^s)}-P_{\mathcal{N}(A^k)}\|\\ &\le \|I-A^\pi\|(\|A^\pi\|+\|B^\pi-A^\pi\|)\,\Gamma_{\mathcal{R}}+\|A^\pi\|(\|I-A^\pi\|+\|B^\pi-A^\pi\|)\,\Gamma_{\mathcal{N}}\\ &= \|A^\pi\|\,\|I-A^\pi\|(\Gamma_{\mathcal{R}}+\Gamma_{\mathcal{N}})+(\|I-A^\pi\|\,\Gamma_{\mathcal{R}}+\|A^\pi\|\,\Gamma_{\mathcal{N}})\|B^\pi-A^\pi\|.\end{aligned}$$

Luego, si $\|A^\pi\|\,\Gamma_{\mathcal{N}}+\|I-A^\pi\|\,\Gamma_{\mathcal{R}}<1$, entonces

$$\|B^\pi-A^\pi\|\le\frac{\|A^\pi\|\,\|I-A^\pi\|(\Gamma_{\mathcal{N}}+\Gamma_{\mathcal{R}})}{1-\|A^\pi\|\,\Gamma_{\mathcal{N}}-\|I-A^\pi\|\,\Gamma_{\mathcal{R}}}.$$

Lo que completa la demostración. □

Notemos que si $\|A^\pi\|\,\Gamma_{\mathcal{N}} + \|I-A^\pi\|\,\Gamma_{\mathcal{R}} < 1$, entonces se dan las desigualdades $\|A^\pi\|\,\Gamma_{\mathcal{N}} < 1$ y $\|I-A^\pi\|\,\Gamma_{\mathcal{R}} < 1$, y dado que $\|A^\pi\|\,, \|I-A^\pi\| < 1$ se sigue que $\Gamma_{\mathcal{N}}\,, \Gamma_{\mathcal{R}} < 1$.

Si consideramos la igualdad $B^\pi - A^\pi = (I-A^\pi)B^\pi - A^\pi(I-B^\pi)$, entonces

$$\|B^\pi - A^\pi\| \leq \|(I-A^\pi)B^\pi\| + \|A^\pi(I-B^\pi)\|,$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|B^\pi - A^\pi\| &\leq \|(I-A^\pi)B^\pi\| + \|A^\pi(I-B^\pi)\| \\ &\leq \|I-A^\pi\|\,\|B^\pi\|\,\|P_{\mathcal{N}(A^k)} - P_{\mathcal{N}(B^t)}\| + \|A^\pi\|\,\|I-B^\pi\|\,\|P_{\mathcal{R}(A^k)} - P_{\mathcal{R}(B^t)}\| \\ &\leq \|I-A^\pi\|(\|A^\pi\| + \|B^\pi - A^\pi\|)\,\Gamma_{\mathcal{N}} + \|A^\pi\|(\|I-A^\pi\| + \|B^\pi - A^\pi\|)\,\Gamma_{\mathcal{R}} \\ &= \|A^\pi\|\,\|I-A^\pi\|(\Gamma_{\mathcal{N}} + \Gamma_{\mathcal{R}}) + (\|I-A^\pi\|\,\Gamma_{\mathcal{N}} + \|^\pi\|\,\Gamma_{\mathcal{R}})\|B^\pi - A^\pi\|.\end{aligned}$$

Si $\|A^\pi\|\,\Gamma_{\mathcal{R}} + \|I-A^\pi\|\,\Gamma_{\mathcal{N}} < 1$, entonces

$$\|B^\pi - A^\pi\| \leq \frac{\|A^\pi\|\,\|I-A^\pi\|\,(\Gamma_{\mathcal{N}} + \Gamma_{\mathcal{R}})}{1 - \|A^\pi\|\,\Gamma_{\mathcal{R}} - \|I-A^\pi\|\,\Gamma_{\mathcal{N}}}. \tag{3.62}$$

Observación 3.5.3. Si usamos la norma espectral se tiene que $\|A^\pi\|_2 = \|I-A^\pi\|_2$, [45]. En este caso las acotaciones (3.61) y (3.62) son iguales y

$$\|B^\pi - A^\pi\|_2 \leq \frac{\|I-A^\pi\|_2^2\,(\Gamma_{\mathcal{N}} + \Gamma_{\mathcal{R}})}{1 - \|I-A^\pi\|_2\,(\Gamma_{\mathcal{N}} + \Gamma_{\mathcal{R}})} \leq \frac{\kappa_D(A)^2(\Gamma_{\mathcal{N}} + \Gamma_{\mathcal{R}})}{1 - \kappa_D(A)(\Gamma_{\mathcal{N}} + \Gamma_{\mathcal{R}})}.$$

En el Teorema 3.4.6 y en la Observación 3.4.7, cuando se verifica la condición $\Delta + \|A^D\|\,\|E\| < 1$, donde Δ es una cota superior de $\|B^\pi - A^\pi\|$, fueron dadas las siguientes estimaciones de la inversa de Drazin y del error relativo de la inversa de Drazin,

$$\|B^D\| \leq \frac{\|A^D\|(1+\Delta)}{1 - \Delta - \|A^D E\|} \tag{3.63}$$

y

$$\frac{\|B^D - A^D\|}{\|A^D\|} \leq \frac{\|A^D\|\,\|E\| + 2\Delta}{1 - \Delta - \|A^D\|\,\|E\|}. \tag{3.64}$$

Luego, tomando Δ igual a cualquiera de las cotas anteriormente obtenidas para $\|B^\pi - A^\pi\|$, cuando $\Delta + \|A^D\|\,\|E\| < 1$, las estimaciones superiores (3.63) y (3.64) se tienen.

En el siguiente ejemplo hallamos una acotación superior para $\|B^D - A^D\|/\|A^D\|$, según la ecuación (3.64). De (3.61) obtenemos una estimación de $\|B^\pi - A^\pi\|$. Empleamos la norma espectral $\|\cdot\|_2$.

Ejemplo 3.5.4. Sean

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&\epsilon\\\epsilon&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \epsilon\to 0,\quad ind(A)=ind(B)=2.$$

Entonces,

$$A^D=\begin{pmatrix}1/2&0&0&0\\0&1/2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad A^\pi=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Llamamos $E=B-A$. Obtenemos las siguientes normas:

$$\begin{array}{lcl}\|A^D\|_2 &=& \frac{1}{2},\\ \|A^\pi\|_2=\|I-A^\pi\|_2 &=& 1,\\ \|E\|_2 &=& \epsilon.\end{array}$$

Sean las bases normalizadas de los subespacios núcleo e imagen de A^2 y B^2:

$$\begin{aligned}
B_{\mathcal{N}(A^2)} &= \mathcal{L}\left\{(0,0,1,0),(0,0,0,1)\right\},\\
B_{\mathcal{R}(A^2)} &= \mathcal{L}\{(1,0,0,0),(0,1,0,0)\},\\
B_{\mathcal{N}(B^2)} &= \mathcal{L}\left\{(0,0,1,0),(0,\frac{\epsilon}{\sqrt{4+\epsilon^2}},0,\frac{-2}{\sqrt{4+\epsilon^2}})\right\},\\
B_{\mathcal{R}(B^2)} &= \mathcal{L}\left\{(\frac{2}{\sqrt{4+\epsilon^2}},0,\frac{\epsilon}{\sqrt{4+\epsilon^2}},0),(0,1,0,0)\right\}.
\end{aligned}$$

Las proyecciones ortogonales sobre las bases normalizadas anteriores son:

$$P_{\mathcal{N}(A^2)}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$P_{\mathcal{N}(B^2)}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\epsilon^2/(4+\epsilon^2)&0&-2\epsilon/(4+\epsilon^2)\\0&0&1&0\\0&-2\epsilon/(4+\epsilon^2)&0&4/(4+\epsilon^2)\end{pmatrix},$$

$$P_{\mathcal{R}(A^2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_{\mathcal{R}(B^2)} = \begin{pmatrix} 4/(4+\epsilon^2)-1 & 0 & 2\epsilon/(4+\epsilon^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\epsilon/(4+\epsilon^2) & 0 & \epsilon^2/(4+\epsilon^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora,

$$P_{\mathcal{R}(B^2)} - P_{\mathcal{R}(A^2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon^2/(4+\epsilon^2) & 0 & -2\epsilon/(4+\epsilon^2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\epsilon/(4+\epsilon^2) & 0 & 4/(4+\epsilon^2)-1 \end{pmatrix},$$

$$P_{\mathcal{N}(B^2)} - P_{\mathcal{N}(A^2)} = \begin{pmatrix} 4/(4+\epsilon^2)-1 & 0 & 2\epsilon/(4+\epsilon^2) & 0 \\ 0 & 00 & 0 & 0 \\ 2\epsilon/(4+\epsilon^2) & 0 & \epsilon^2/(4+\epsilon^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y, por lo tanto,

$$\Gamma_{\mathcal{R}} = \|P_{\mathcal{R}(B^2)} - P_{\mathcal{R}(A^2)}\|_2 = \frac{\epsilon}{\sqrt{4+\epsilon^2}},$$
$$\Gamma_{\mathcal{N}} = \|P_{\mathcal{N}(B^2)} - P_{\mathcal{N}(A^2)}\|_2 = \frac{\epsilon}{\sqrt{4+\epsilon^2}}.$$

Entonces, si $2\epsilon/\sqrt{4+\epsilon^2} < 1$ $\left(\epsilon < \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, aplicando la Proposición 3.5.2 se obtiene,

$$\|B^\pi - A^\pi\|_2 \le \frac{\|A^\pi\|_2\,\|I-A^\pi\|_2(\Gamma_{\mathcal{N}}+\Gamma_{\mathcal{R}})}{1-\|A^\pi\|_2\Gamma_{\mathcal{R}} - \|I-A^\pi\|_2\Gamma_{\mathcal{N}}} = \frac{2\epsilon/\sqrt{4+\epsilon^2}}{1-2\dfrac{\epsilon}{\sqrt{4+\epsilon^2}}} = \frac{2\epsilon}{\sqrt{4+\epsilon^2}-2\epsilon} := \Delta.$$

Finalmente, por (3.64), si $\Delta < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$, entonces

$$\frac{\|B^D - A^D\|_2}{\|A^D\|_2} \le \frac{\|A^D\|_2\,\|E\|_2 + 2\Delta}{1-\Delta-\|A^D\|_2\,\|E\|_2} \le \frac{\epsilon/2+2\Delta}{1-\Delta-\epsilon/2} = \frac{5\epsilon}{2+4\epsilon} + O(\epsilon^2).$$

Si usamos una norma matricial unitariamente invariante (p.e. $\|\cdot\|_2$), entonces la norma $\|P_{\mathcal{R}(B^s)} - P_{\mathcal{R}(A^k)}\|_2$ puede ser determinada en términos de los ángulos canónicos entre los subespacios $\mathcal{R}(B^s)$ y $\mathcal{R}(A^k)$. Ver [31]. En particular, si se cumple $p = dim(\mathcal{R}(B^s)) \geq dim(\mathcal{R}(A^k)) = q$, y $\theta_1 \leq \cdots \leq \theta_q \leq \pi/2$ son los ángulos canónicos entre estos subespacios, entonces

$$\|P_{\mathcal{R}(B^s)} - P_{\mathcal{R}(A^k)}\|_2 = \begin{cases} sin(\theta_q) & p = q, \\ 1 & p \neq q. \end{cases}$$

Análogamente con la norma $\|P_{\mathcal{N}(B^s)} - P_{\mathcal{N}(A^k)}\|_2$.

3.5.2. Aplicación a sistemas lineales

En este apartado se aplicarán los resultados obtenidos a la perturbación de un sistema singular de ecuaciones lineales.

Sean A, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Consideramos el sistema lineal singular

$$Ax = b, \qquad b \in \mathcal{R}(A^D) \text{ dado}, \tag{3.65}$$

y el sistema perturbado

$$By = c, \qquad c \in \mathcal{R}(B^D) \text{ dado}. \tag{3.66}$$

La única solución en $\mathcal{R}(A^D)$ de (3.65) viene dada por $x = A^D b$ y la única solución de (3.66) en $\mathcal{R}(B^D)$ es $y = B^D c$. En el siguiente resultado obtenemos una estimación del error relativo $\|y - x\|/\|x\|$.

Teorema 3.5.5. *Sean A, B, $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que cumplen la relación $S = B^\pi - A^\pi$. Si $\|S\| + \|A^D(B - A)\| < 1$, entonces*

$$\frac{\|y - x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^D\|(1 + \|S\|)}{1 - \|S\| - \|A^D(B - A)\|}\left(\|B - A\| + \frac{\|b - c\|}{\|b\|}\|A\|\right) + \|S\|. \tag{3.67}$$

Dem. Sea $b \in \mathcal{R}(A^D)$, entonces

$$B^D S b = B^D(B^\pi - A^\pi)b = 0.$$

Por la Observación 3.2.5 (vi′) se tiene,

$$(B^D - A^D)b = -B^D S b - S A^D b - B^D(B - A)A^D b = -Sx - B^D(B - A)x.$$

Luego,

$$y - x = B^D c - A^D b = (B^D - A^D)b + B^D(c - b) = -B^D(B - A)x + B^D(c - b) - Sx.$$

Aplicando normas y usando la acotación (3.17) se sigue,

$$\begin{aligned}\|y-x\| &\le \|B^D\|\,\|B-A\|\,\|x\| + \|B^D\|\,\|b-c\| + \|S\|\,\|x\| \\ &= \|B^D\|(\|B-A\|\,\|x\| + \|b-c\|) + \|S\|\,\|x\| \\ &\le \frac{\|A^D\|(1+\|S\|)\|x\|}{1-\|S\|-\|A^D(B-A)\|}(\|B-A\| + \frac{\|b-c\|}{\|b\|}\|A\|) + \|S\|\,\|x\|.\end{aligned}$$

Lo que completa la demostración. □

Si $\mathcal{R}(A^D) = \mathcal{R}(B^D)$, entonces $Sx = (B^\pi - A^\pi)A^D b = 0$ y la cota (3.67) se reduce a

$$\frac{\|y-x\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^D\|}{1-\|A^D(B-A)\|}\left(\|B-A\| + \frac{\|b-c\|}{\|b\|}\|A\|\right),$$

obteniéndose el resultado dado por Wei y Wang en [100, Theorem 4.1].

Observación 3.5.6. Si $\kappa_D(A) = \|A^D\|\,\|A\|$ es el número de condición de Drazin de A y $\Theta = \|B-A\|/\|A\|$, entonces la fórmula (3.67) viene dada por

$$\|y-x\| \le \frac{(\kappa_D(A)/\|A\|)(1+\|S\|)\|x\|}{1-\|S\|-\kappa_D(A)\Theta}\left(\Theta\|A\| + \frac{\|b-c\|}{\|b\|}\|A\|\right) + \|S\|\,\|x\|.$$

En el siguiente ejemplo comparamos la cota $\|y-x\|$, para el caso en el que conocemos este error exactamente con los obtenidos tras aplicar las distintas cotas conocidas de $\|B^\pi - A^\pi\|$.

Ejemplo 3.5.7. Sean las matrices A y B dadas en el Ejemplo 3.5.4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon \to 0.$$

Vemos que $ind(A) = ind(B) = 2$ y $rg(B^2) = rg(A^2) = rg(A^2B^2A^2) = 2$. Por el Teorema 3.3.4 tenemos que $B \in (\mathcal{C}_2)$.

Consideremos el sistema lineal singular

$$Ax = b, \qquad b = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^* \in \mathcal{R}(A^D), \tag{3.68}$$

y el sistema perturbado

$$By = c, \qquad c = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \epsilon & 0 \end{pmatrix}^* \in \mathcal{R}(B^D). \tag{3.69}$$

En la siguiente tabla comparamos el error exacto entre las soluciones de (3.68) y (3.68) con la cota del error obtenida de la fórmula (3.67). Consideramos, por separado, las cotas para $\|B^\pi - A^\pi\|$ deducidas en la Proposición 3.5.2, fórmula (3.61), y el Teorema 3.4.16, fórmula (3.55).

Por el Ejemplo 3.5.4, $\|B^\pi - A^\pi\|_2 \le \dfrac{2\epsilon}{\sqrt{4+\epsilon^2} - 2\epsilon}$.

	Valor exacto	(3.61)	(3.55)
$\epsilon = 0{,}1$	2,0621590627	2,9285285782	2,8899920472
$\epsilon = 0{,}001$	2,0615528734	2,0683982070	2,0683955775
$\epsilon = 0{,}00001$	2,0615528128	2,0616211235	2,0616211232

Cuadro 3.8: Cotas superiores para $\|y - x\|_2$

3.5.3. Una clase especial de matrices $(\mathcal{C}_s)$

En esta sección se considerará la clase de matrices perturbadas $B = A + E$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

(i) $I + A^D E$ y $I + (A^D)^2(B^2 - A^2)$ son no singulares.

(ii) $B(I + A^D E)^{-1} A^{\pi} B A^D = O$.

(iii) s es el entero positivo más pequeño tal que $rg(B^s) = rg(A^k)$.

Si $s = 1$ en la condición (iii), entonces del Teorema 3.3.7 se sigue que B satisface la condición $(\mathcal{C}_1)$ e $ind(B) = 1$ y, además, $B(I + A^D E)^{-1} A^{\pi} = O$. Centraremos nuestra atención en el caso $s > 1$. Mostraremos que estas perturbaciones satisfacen la condición $(\mathcal{C}_s)$. Daremos una expresión explícita para B^D de la cual se derivará una estimación superior para $\|B^D - A^D\|/\|A^D\|$ diferente de la previamente dada en el Teorema 3.4.14. Esta nueva cota superior no requiere del cálculo de las potencias de $E_s = B^s - A^s$. Notemos que la condición (ii) es verificada cuando se cumple $B^2 A A^D = (BAA^D)^2$. Así, se generaliza el principal resultado de [63, Teorema 3.2].

Primero damos el siguiente lema donde deducimos una representación matricial para las potencia de B.

Lema 3.5.8. *Sean $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con $ind(A) = k$. Si $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ verifica las condiciones* (i), (ii) *y* (iii), *entonces B satisface la condición $(\mathcal{C}_s)$ e $ind(B) = s$.*

Además, para todo entero $p \geq 1$ se tiene la descomposición

$$B^p = P\left\{ \begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} (B_1(I+TS))^{p-1} B_1 \begin{bmatrix} I & T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T \\ -I \end{bmatrix} B_2^p \begin{bmatrix} O & -I \end{bmatrix} \right\} P^{-1},$$

donde $B_1(I + TS)$ es no singular, B_2 es nilpotente de índice s y $B_2 S = O$.

Dem. Denotamos $E_i = B^i - A^i$, para todo entero $i > 1$, y $E = E_1$. Por el Teorema 3.3.10 se tiene que para que B satisfaga la condición $(\mathcal{C}_s)$ e $ind(B) = s$ es suficiente mostrar que $I + E_s(A^D)^s$ y $I + E_{s+1}(A^D)^{s+1}$ son no singulares.

Sea $B = P \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ B_{21} & B_2 \end{pmatrix} P^{-1}$, respecto la descomposición core-nilpotente de A. De las condiciones $I + A^D E$ y $I + (A^D)^2 E_2$ son no singulares se deduce que B_1 y $B_1 + B_1^{-1} B_{12} B_{21}$ son no singulares.

De $B(I + A^D E)^{-1} A^\pi B A^D = O$ se sigue que $B(I + A^D E)^{-1} A^\pi B A A^D = O$. Por cálculo se obtiene

$$B(I + A^D E)^{-1} A^\pi B A A^D = P \begin{pmatrix} O & O \\ O & -B_{21} B_1^{-1} B_{12} B_{21} + B_2 B_{21} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Luego, $B_2 B_{21} = B_{21} B_1^{-1} B_{12} B_{21}$ y

$$B^2 A A^D = P \begin{pmatrix} B_1^2 + B_{12} B_{21} & O \\ B_{21} B_1 + B_2 B_{21} & O \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} B_1 \\ B_{21} \end{bmatrix} \psi \begin{bmatrix} I & O \end{bmatrix} P^{-1},$$

donde $\psi = B_1 + B_1^{-1} B_{12} B_{21}$ es no singular. Así, para todo entero positivo p,

$$B^p A A^D = P \begin{bmatrix} B_1 \\ B_{21} \end{bmatrix} \psi^{p-1} \begin{bmatrix} I & O \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Entonces,

$$A^\pi + B^p (A^D)^p = P \begin{pmatrix} B_1 \psi^{p-1} A_1^{-p} & O \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1}$$

es no singular ya que ψ lo es. Por lo tanto $I + (A^D)^p E_p$ es no singular para todo $p \geq 1$.

Se observa que

$$A^\pi (A^\pi + B^s (A^D)^s)^{-1} B A A^D = P \begin{pmatrix} O & O \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^s \psi^{-s+1} B_{-1} & O \\ -B_{21} B_1^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & O \\ B_{21} & O \end{pmatrix} P^{-1} = O.$$

Por otra parte, por el Lema 3.4.13, para todo entero $p \geq 1$, se tiene la representación

$$B^p = P \left\{ \begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} (B_1(I + TS))^{p-1} B_1 \begin{bmatrix} I & T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T \\ -I \end{bmatrix} (B_2(I + ST))^{p-1} B_2 \begin{bmatrix} S & -I \end{bmatrix} \right\} P^{-1},$$

donde $I + TS$ y B_1 son no singulares, y $B_2(I + ST)$ es nilpotente de índice s. Entonces,

$$\begin{aligned} & A^\pi (A^\pi + B^s (A^D)^s)^{-1} B A A^D \\ &= P \begin{pmatrix} O & O \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^s B^{-1} (B_1 (I + TS))^{-s+1} & O \\ -S & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 + T B_2 S & O \\ S B_1 - B_2 S & O \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} O & O \\ -S T B_2 S - B_2 S & O \end{pmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

Luego, $A^\pi (A^\pi + B^s (A^D)^s)^{-1} B A A^D = O$ si y sólo si $B_2 S = O$. $\square$

Teorema 3.5.9. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con ind$(A) = k$. Asumimos que $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ satisface* (i), (ii) *y* (iii) *y, sea $E = B - A$. Entonces,*

$$B^D = \big(I + A^\pi EA^D(I+EA^D)^{-1}\big)\Bigg\{\Psi_{11}^{-1}(I+A^DE)^{-1}A^D\Psi_{11}^{-1}$$
$$+\sum_{p=0}^{s-1}\Big(\Psi_{11}^{-1}(I+A^DE)^{-1}A^D\Big)^{p+2}EA^\pi\Big(BA^\pi - BA^D(I+EA^D)^{-1}EA^\pi\Big)^p\Bigg\},$$

donde $\Psi_{11} = I + (I+A^DE)^{-1}A^DEA^\pi EA^D(I+EA^D)^{-1}$.

Si $\max\{\|A^DE\|, \|EA^D\|\} < 1$, *entonces*

$$\begin{aligned}\frac{\|B^D - A^D\|}{\|A^D\|} \le{}& \frac{\|A^DE\|}{1-\|A^DE\|} + \frac{\|A^\pi EA^D\|\,\|\Psi_{11}^{-1}\|}{(1-\|A^DE\|)^2(1-\|EA^D\|)}(\|\Psi_{11}^{-1}\| + \|A^DE\|)\\ &+\frac{\|EA^\pi\|\,\|A^D\|\,\|\Psi_{11}^{-1}\|^2}{(1-\|A^DE\|)^2}\Big(1+\frac{\|A^\pi EA^D\|}{1-\|EA^D\|}\Big)\\ &\times\sum_{p=0}^{s-1}\frac{\|A^D\|^p\,\|\Psi_{11}^{-1}\|^p}{(1-\|A^DE\|)^p}\left(\|BA^\pi\| + \frac{\|BA^D\|\,\|EA^\pi\|}{1-\|EA^D\|}\right)^p.\end{aligned} \tag{3.70}$$

Además, si $\max\{\|A^DE\|, \|EA^D\|\} < \dfrac{1}{1+\sqrt{\|A^\pi\|}}$, *entonces una cota superior de* $\|\Psi_{11}^{-1}\|$ *es dada por (3.21).*

Dem. Por el Lema 3.5.8,

$$B = P\begin{pmatrix} B_1 & B_1T - TB_2\\ SB_1 & SB_1T + B_2\end{pmatrix}P^{-1}, \quad E = P\begin{pmatrix} B_1 - A^1 & B_1T - TB_2\\ SB_1 & SB_1T + B_2 - A_2\end{pmatrix}P^{-1}, \tag{3.71}$$

donde $B_1(I+TS)$ es no singular, B_2 es nilpotente de índice s y $B_2S = O$. Definimos $\Phi_1 = I + A^DE$ y $\widetilde{\Phi}_1 = I + EA^D$. Obtenemos

$$\Phi_1^{-1}A^D = A^D\widetilde{\Phi}_1^{-1} = P\begin{pmatrix} B_1^{-1} & O\\ O & O\end{pmatrix}P^{-1}. \tag{3.72}$$

Además, usando (3.71) y (3.72), tenemos

$$\Phi_1^{-1}A^DEA^\pi = P\begin{pmatrix} O & T - B_1^{-1}TB_2\\ O & O\end{pmatrix}P^{-1}, \quad A^\pi EA^D\widetilde{\Phi}_1^{-1} = P\begin{pmatrix} O & O\\ S & O\end{pmatrix}P^{-1}. \tag{3.73}$$

Luego,

$$\Phi_1^{-1}A^D E A^\pi E A^D \widetilde{\Phi}_1^{-1} = P \begin{pmatrix} TS & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1},$$

ya que $B_2 S = O$. Así, denotando $\Psi_{11} = I + \Phi_1^{-1}A^D E A^\pi E A^D \widetilde{\Phi}_1^{-1}$, obtenemos

$$\Psi_{11}^{-1} = P \begin{pmatrix} (I+TS)^{-1} & O \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{3.74}$$

Además, para todo entero $p \geq 1$, se obtiene

$$\left[\Psi_{11}^{-1}\Phi_1^{-1}A^D\right]^p = P \begin{pmatrix} \left((I+TS)^{-1}B_1^{-1}\right)^p & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}$$

y

$$\left[B(A^\pi - A^D\widetilde{\Phi}_1^{-1}EA^\pi)\right]^p = P \begin{pmatrix} O & O \\ O & (I+ST)B_2^p \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Introducimos

$$\Gamma = \sum_{p=0}^{s-1} \left(\Psi_{11}^{-1}\Phi_1^{-1}A^D\right)^p EA^\pi \left(B(A^\pi - A^D\widetilde{\Phi}_1^{-1}EA^\pi)\right)^p. \tag{3.75}$$

Usando las representaciones de potencias de más arriba, obtenemos

$$\begin{aligned} \Gamma = \sum_{p=1}^{s-1} P & \begin{pmatrix} O & \left((I+TS)^{-1}B_1^{-1}\right)^{p-1}TB_2^p - \left((I+TS)^{-1}B_1^{-1}\right)^p TB_2^{p+1} \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} \\ + P & \begin{pmatrix} O & B_1T - TB_2 \\ O & SB_1T + B_2 - A_2 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} O & B_1T \\ O & SB_1T + B_2 - A_2 \end{pmatrix} P^{-1}. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Así,

$$\Phi_1^{-1}A^D\Gamma = P \begin{pmatrix} O & T \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{3.77}$$

Teniendo en cuenta la descomposición índice 1-nilpotente de B, $B = C_B + N_B$, donde $C_B = P \begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} B_1 \begin{bmatrix} I & T \end{bmatrix} P^{-1}$, sabemos que

$$B^D = C_B^\sharp = P \begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} \left((I+TS)B_1(I+TS)\right)^{-1} \begin{bmatrix} I & T \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (I + A^\pi E \Phi_1^{-1}A^D)^{-1}B^D &= P \begin{pmatrix} I & O \\ -S & I \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} \left((I+TS)B_1(I+TS)\right)^{-1} \begin{bmatrix} I & T \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} \left((I+TS)B_1(I+TS)\right)^{-1} & \left((I+TS)B_1(I+TS)\right)^{-1}T \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

Luego, usando (3.72), (3.74) y (3.77) se sigue que

$$(I + A^\pi E\Phi_1^{-1}A^D)^{-1}B^D = \Psi_{11}^{-1}\Phi_1^{-1}A^D\Psi_{11}^{-1}(I + \Phi_1^{-1}A^D\Gamma).$$

Por lo tanto, en vista de (3.75), concluimos la primera parte de la demostración.

Ahora, asumamos $\max\{\|A^D E\|, \|EA^D\|\} < 1$. Tomando normas en la igualdad

$$\begin{aligned} B^D =& \Psi_{11}^{-1}\Phi_1^{-1}A^D\Psi_{11}^{-1} + A^\pi EA^D\widetilde{\Phi}_1^{-1}\Psi_{11}^{-1}\Phi_1^{-1}A^D\Psi_{11}^{-1} \\ &+ (I + A^\pi EA^D\widetilde{\Phi}_1^{-1})(\Psi_{11}^{-1}\Phi_1^{-1}A^D)^2\Gamma, \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\|B^D - A^D\|}{\|A^D\|} \leq& \frac{\|\Psi_{11}^{-1}\Phi_1^{-1}A^D\Psi_{11}^{-1} - A^D\|}{\|A^D\|} + \frac{\|\Psi_{11}^{-1}\|^2\,\|A^\pi EA^D\|}{(1 - \|A^D E\|)(1 - \|EA^D\|)} \\ &+ \frac{\|A^D\|\,\|\Psi_{11}^{-1}\|^2\,\|\Gamma\|}{(1 - \|A^D E\|)^2}\left(1 + \frac{\|A^\pi EA^D\|}{1 - \|EA^D\|}\right). \end{aligned} \tag{3.78}$$

Podemos escribir

$$\begin{aligned} \Psi_{11}^{-1}\Phi_1^{-1}A^D\Psi_{11}^{-1} - A^D =& -\Phi_1^{-1}A^D EA^D - \Psi_{11}^{-1}\big(\Phi_1^{-1}A^D EA^\pi EA^D\widetilde{\Phi}_1^{-1}\Phi_1^{-1}A^D \\ &+ (\Phi_1^{-1}A^D)^2 EA^\pi EA^D\widetilde{\Phi}_1^{-1}\Phi_1^{-1}\big). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\|\Psi_{11}^{-1}\Phi_1^{-1}A^D\Psi_{11}^{-1} - A^D\|}{\|A^D\|} \leq& \frac{\|A^D E\|}{1 - \|A^D E\|} + \frac{\|A^D E\|\,\|A^\pi EA^D\|}{(1 - \|A^D E\|)^2(1 - \|EA^D\|)} \\ &\times \|\Psi_{11}^{-1}\|(1 + \|\Psi_{11}^{-1}\|). \end{aligned}$$

Tomando normas en (3.75), tenemos

$$\begin{aligned} \|\Gamma\| \leq& \|EA^\pi\| \sum_{p=0}^{s-1} \|\Phi_1^{-1}\|^p\,\|A^D\|^p\,\|\Psi_{11}^{-1}\|^p \left(\|BA^\pi\| + \|BA^D\|\,\|\widetilde{\Phi}_1^{-1}\|\,\|EA^\pi\|\right)^p \\ \leq& \|EA^\pi\| \sum_{p=0}^{s-1} \frac{\|A^D\|^p\,\|\Psi_{11}^{-1}\|^p}{(1 - \|A^D E\|)^p}\left(\|BA^\pi\| + \frac{\|BA^D\|\,\|EA^\pi\|}{1 - \|EA^D\|}\right)^p. \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo las cotas dadas arriba en (3.78) y reagrupando términos se deduce (3.70). $\square$

En el siguiente ejemplo se compara la cota obtenida para el error relativo de la perturbación dada en este apartado con otras estimaciones.

Ejemplo 3.5.10. Sean

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \epsilon & 0 & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon = 10^{-6}.$$

Consideramos $B = A + E$. Vemos que $ind(A) = ind(B) = 2$ y $rg(B^2) = rg(A) = rg(A^2) = 2$. La matriz B satisface las condiciones del Teorema 3.5.9.

Observamos que $B^2AA^D \neq (BAA^D)^2$ por lo que no podemos aplicar la cota dada en [63, Teorema 3.2].

En la siguiente tabla comparamos la cota superior del Teorema 3.5.9 con la cota superior (3.38), y con las cotas superiores dadas en [98, 102].

Para la cota [102, Teorema 4.2] calculamos $\text{sep}_F(C, N) = 0{,}009901$.

Valor exacto	[102, Th.4.2] (4.3)	[98, Th.4.1]	(3.38)	(3.70)
$1{,}01 \times 10^{-4}$	$3{,}55 \times 10^{-2}$	$8{,}28 \times 10^{-4}$	$1{,}17 \times 10^{-4}$	$1{,}73 \times 10^{-4}$

Cuadro 3.9: Comparación de cotas superiores para $\frac{\|B^D - A^D\|_F}{\|A^D\|_F}$

En [63] fue dada una expresión para B^D y una cota del error relativo bajo las condiciones siguientes:

(a) $\|A^DE\| < 1$.

(b) $B^2AA^D = (BAA^D)^2$.

(c) s es el entero positivo más pequeño tal que $rg(B^s) = rg(A^k)$.

Observamos que si las condiciones (a), (b) y (c) son verificadas, entonces las condiciones (i), (ii) y (iii) también son satisfechas.

Sea $B = P \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ B_{21} & B_2 \end{pmatrix} P^{-1}$. De la condición $\|A^DE\| < 1$ se sigue que $I + A^DE$ es no singular y de aquí se tiene que el bloque B_1 es también no singular.

De $B^2AA^D = (BAA^D)^2$ se deduce que $B_{12}B_{21} = O$ y $B_2B_{21} = O$. Entonces,

$B^2AA^D = P\begin{pmatrix} B_1^2 & O \\ B_{21}B_1 & O \end{pmatrix}P^{-1}$. Luego, $I + (A^D)^2E_2$ es no singular. Además,

$$\begin{aligned} &B(I + A^DE)^{-1}A^\pi BA^D \\ &= P\begin{pmatrix} A_1 & O \\ B_{21}B_1^{-1}A_1 & -B_{21}B_1^{-1}B_{12} + B_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & O \\ B_{21}A_1^{-1} & O \end{pmatrix}P^{-1} = O. \end{aligned}$$

Así, por el Lema 3.5.8 se tiene que

$$B = P\begin{pmatrix} B_1 & B_1T - TB_2 \\ SB_1 & SB_1T + B_2 \end{pmatrix}P^{-1},$$

donde $I + TS$ y B_1 son no singulares, B_2 es nilpotente de índice s, y $B_2S = O$. Luego,

$$B^2AA^D = P\begin{pmatrix} B_1(I+TS)B_1 & O \\ SB_1(I+TS)B_1 & O \end{pmatrix}P^{-1} \quad \text{y} \quad (BAA^D)^2 = P\begin{pmatrix} B_1^2 & O \\ SB_1^2 & O \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Y, de la condición $B^2AA^D = (BAA^D)^2$ se concluye que $TS = O$. Esta última condición implica que $A^DEA^\pi EA^D = O$, donde $E = B - A$. Consecuentemente, la matriz Ψ dada como en el Teorema 3.5.9 verifica que $\Psi = I$.

Tomando en consideración todas las simplificaciones expuestas, del Teorema 3.5.9 se deriva el siguiente corolario el cual fue el principal resultado en [63, Teorema 3.2].

Corolario 3.5.11. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con $ind(A) = k$. Asumimos que $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ satisface* (a), (b) *y* (c) *y, sea $E = B - A$. Entonces B satisface la condición $(\mathcal{C}_s)$, $ind(B) = s$ y*

$$\begin{aligned} B^D = \big(I + A^\pi E(I + A^DE)^{-1}A^D\big)\Big(&(I + A^DE)^{-1}A^D \\ &+ \sum_{p=0}^{s-1}\big((I + A^DE)^{-1}A^D\big)^{p+2}EA^\pi\big(BA^\pi\big)^p\Big). \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \frac{\|B^D - A^D\|}{\|A^D\|} \le &\frac{\|A^DE\|}{1 - \|A^DE\|} + \frac{\|A^\pi E\|\,\|A^D\|}{(1 - \|A^DE\|)^2} \\ &+ \frac{\|EA^\pi\|\,\|A^D\|}{(1 - \|A^DE\|)^2}\left(1 + \frac{\|A^\pi E\|\,\|A^D\|}{1 - \|A^DE\|}\right)\sum_{p=0}^{s-1}\frac{\|BA^\pi\|^p\,\|A^D\|^p}{(1 - \|A^DE\|)^p}. \end{aligned}$$

Capítulo 4

La W-Drazin inversa de matrices con W-soportes idempotentes relacionados

4.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos la inversa de Drazin de matrices $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, la cual denominaremos W-Drazin inversa de A y denotaremos por $A^{D,W} \in \mathbb{C}^{m\times n}$. La W-Drazin inversa puede ser estudiada en el marco de un álgebra de Banach cuando definimos en el espacio $\mathbb{C}^{m\times n}$ el producto de matrices y una norma matricial.

Dadas $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$, una matriz fija no nula, (a lo largo de este capítulo se considerará siempre no nula), y A, $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ definimos el *W-producto* en $\mathbb{C}^{m\times n}$, que denotaremos por $\star$, como $A \star B = AWB$. Así mismo, definimos la *W-norma*, $\|\cdot\|_W$ en $\mathbb{C}^{m\times n}$, como $\|A\|_W = \|A\|\,\|W\|$. El espacio así construido, $(\mathbb{C}^{m\times n}, +, \star, \|\cdot\|_W)$, es una álgebra de Banach compleja sin unidad, al menos que W sea no singular, en cuyo caso W^{-1} es la unidad.

El equivalente del proyector $A^D A$ para matrices cuadradas lo desempeña el W-soporte idempotente de A en el espacio anteriormente construido, el cual pasamos a definir a continuación.

Dadas la matrices $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y A, $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, el *W-soporte idempotente* de A, que se denotará por $A^{\sigma,W} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, se define como

$$A^{\sigma,W} = A(WA)^D = (AW)^D A, \tag{4.1}$$

el cual es obtenido de $A \star A^{D,W}$.

De (4.1) se tienen los proyectores oblicuos

$$\begin{aligned} A^{\sigma,W}W &= P_{\mathcal{R}((AW)^{k_1}),\mathcal{N}((AW)^{k_1})}, \\ WA^{\sigma,W} &= P_{\mathcal{R}((WA)^{k_2}),\mathcal{N}((WA)^{k_2})}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde $ind(AW) = k_1$ e $ind(WA) = k_2$.

En particular, si la matriz A es cuadrada y $W = I$, entonces el W-soporte idempotente viene dado por

$$A^{\sigma} = A^D A = AA^D = I - A^{\pi},$$

denominándose, en este caso, *soporte idempotente* de A.

En este capítulo será caracterizarán, entre otros resultados, las matrices rectangulares $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ cuyo W-soporte idempotente está relacionado con el W-soporte idempotente de una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ dada. También se deducirán cotas superiores de la W-Drazin inversa de B y de su error relativo.

En la Sección 4.2 se introducirá el concepto de W-Drazin inversa, , o inversa de Drazin con peso, que denotaremos por $A^{D,W}$, dando sus propiedades más significativas.

En la Sección 4.3 se caracterizarán las matrices rectangulares $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tal que

$$B^{\sigma,W}W = A^{\sigma,W}W, \tag{4.3}$$

donde $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ son dadas, mostrando una estructura algebraica matricial para B y una fórmula para la W-Drazin inversa de B.

Estos resultados podrán ser aplicados a la clase de matrices rectangulares de perturbación B las cuales satisfacen la siguiente condición:

$$(\mathcal{C}_{AW}) : \begin{cases} \mathcal{R}((B-A)W) \subseteq \mathcal{R}((AW)^{k_1}), \quad \mathcal{N}((AW)^{k_1}) \subseteq \mathcal{N}((AW)^{k_1}(B-A)W) \\ \text{con} \quad k_1 = ind(AW) \quad \text{y} \quad \|A^{D,W}W(B-A)W\| < 1. \end{cases}$$

Similarmente, se obtendrá una caracterización de las matrices rectangulares $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tal que

$$WB^{\sigma,W} = WA^{\sigma,W}. \tag{4.4}$$

Se verá que esta condición es verificada por las matrices rectangulares B tales que:

$$(\mathcal{C}_{WA}) : \begin{cases} \mathcal{N}((WA)^{k_2}) \subseteq \mathcal{N}(W(B-A)), \quad \mathcal{R}(W(B-A)(WA)^{k_2}) \subseteq \mathcal{R}((WA)^{k_2}) \\ \text{con} \quad k_2 = ind(WA) \quad \text{y} \quad \|A^{D,W}W(B-A)W\| < 1. \end{cases}$$

Demostraremos que las condiciones $(\mathcal{C}_{AW})$ y $(\mathcal{C}_{WA})$ son más restrictivas que la condición

$$\begin{cases} \mathcal{R}((B-A)W) \subseteq \mathcal{R}((AW)^k), \quad \mathcal{N}((WA)^k) \subseteq \mathcal{N}(W(B-A)) \\ \text{con } k = \text{máx}\{ind(WA), ind(AW)\} \text{ y } \|A^{D,W}\| \, W(B-A)W < 1, \end{cases}$$

dada en [101].

También se establecerán caracterizaciones de las matrices B que verifican las condiciones (4.3) y (4.4), en este caso,

$$B^{\sigma,W} = A^{\sigma,W}.$$

En la Sección 4.4 se obtendrán cotas superiores de $\|B^{D,W}\|$ y del error relativo $\|B^{D,W} - A^{D,W}\|/\|A^{D,W}\|$.

Finalmente, en la Sección 4.5 se aplicarán las cotas obtenidas a un sistema rectangular de ecuaciones lineales.

Los resultados de caracterización y de perturbación obtenidos generalizan el resultado principal de [101]. En particular, si las matrices A y B son cuadradas y $W = I$, entonces se obtienen los dados en [16], donde se caracterizaban matrices con igual proyección espectral y se derivaron consecuencias de perturbación.

En 1980, R. E. Cline y T. N. E. Greville, [25], extienden el concepto de inversa de Drazin de una matriz cuadrada a una matriz rectangular $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, usando una matriz auxiliar $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$.

La perturbación de la W-Drazin inversa ha sido estudiada para matrices en [94, 101].

En el marco de la teoría de operadores, la W-Drazin inversa para operadores fue introducida y estudiada por S. Z. Qiao, en [74], e investigada por R. Wang en [81, 82]. En [77, 78], V. Rakočević e Y. Wei estudiaron la W-Drazin inversa para operadores lineales acotados en espacios de Hilbert y Banach.

Recientemente, en [26], A. Dajić y J. J. Koliha introdujeron y estudiaron la W-g-Drazin inversa para operadores lineales acotados en espacios de Banach.

Parte de estos resultados se recogen en el artículo ***The weighted Drazin inverse of perturbed matrices with related support idempotents***, [20].

4.2. Definiciones y resultados

En esta sección expondremos los resultados más significativos de la W-Drazin inversa. Antes damos el siguiente lema para matrices cuadradas que será utilizado más adelante.

LEMA 4.2.1. *Sean* A, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Si*

$$A + B \text{ es no singular}, \quad BA = AB \quad y \quad B \text{ nilpotente},$$

entonces A *es no singular.*

DEM. Sea $ind(B) = s$. De $A+B$ es no singular se sigue que $(A+B)^s$ es no singular. Tenemos la siguiente factorización,

$$(A+B)^s = \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} A^{s-j}B^j = \sum_{j=0}^{s-1} \binom{s}{j} A^{s-j}B^j = A\sum_{j=0}^{s-1} \binom{s}{j} A^{s-j-1}B^j.$$

Ahora, dado que $A\sum_{j=0}^{s-1} \binom{s}{j} A^{s-j-1}B^j$ es no singular y, A y $\sum_{j=0}^{s-1} \binom{s}{j} A^{s-j-1}B^j$ conmutan, entonces A es no singular. □

La siguiente definición de la W-Drazin inversa fue introducida por R. E. Cline y T. N. E. Greville, [25].

DEFINICIÓN 4.2.2. Sea $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz fija y $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Decimos que $X \in \mathbb{C}^{m\times n}$ es una *W-Drazin inversa* de A si

$$AWX = XWA,\ (XW)^2A = X,\ (AW)^{k_1+1}XW = (AW)^{k_1} \text{ para algún entero } k_1 \geq 0. \tag{4.5}$$

El entero más pequeño k_1 que verifica (4.5) es el $ind(AW)$.

Esta definición puede ser expresada de la siguiente forma simétrica,

$$AWX = XWA,\ (XW)^2A = X,\ WX(WA)^{k_2+1} = (WA)^{k_2} \text{ para algún entero } k_2 \geq 0. \tag{4.6}$$

El entero más pequeño k_2 que verifica las condiciones anteriores es el $ind(WA)$. En principio $k_1 \neq k_2$.

En particular, cuando A es cuadrada y $W = I$, la W-Drazin inversa es la inversa de Drazin convencional para matrices cuadradas estudiada en la Definición 2.2.4.

A continuación se demostrará la unicidad de la W-Drazin inversa. Se considerarán dos soluciones X_1 y X_2 de las ecuaciones (4.5) y se probará que $X_1 = X_2$.

Proposición 4.2.3. *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Si existe una matriz $X \in \mathbb{C}^{m\times n}$ satisfaciendo (4.5) para alguna matriz $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$, entonces es única.*

Dem. Sean X_1 y X_2 dos soluciones de (4.5) para ciertos enteros no negativos k_1 y k_2, respectivamente. Tomemos $k = \text{máx}\{k_1, k_2\}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
X_1 &= X_1WAWX_1 \\
&= AWX_1WX_1 \\
&= AWX_1WAWX_1WX_1 \\
&= AWAWX_1WX_1WX_1 \\
&= (AW)^2(X_1W)^2X_1 \\
&= (AW)^2(X_1W)^2X_1WAWX_1 \\
&= (AW)^3(X_1W)^3X_1 \\
&= \cdots\cdots \\
&= (AW)^k(X_1W)^kX_1 \\
&= (AW)^{k+1}X_2W(X_1W)^kX_1 \\
&= X_2(WA)^{k+1}W(X_1W)^kX_1 \\
&= X_2W(AW)^{k+1}X_1W(X_1W)^{k-1}X_1 \\
&= X_2W(AW)^k(X_1W)^{k-1}X_1 \\
&= \cdots\cdots \\
&= X_2WAWX_1.
\end{aligned}$$

De forma análoga, utilizando las condiciones simétricas (4.6) se prueba que

$$X_2 = X_2WAWX_1.$$

Luego, $X_2 = X_1$. □

A continuación se expondrá una caracterización de la W-Drazin inversa en términos de la inversa de Drazin. Antes damos el siguiente lema.

Lema 4.2.4. *Sea $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz fija y $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces,*

(i) $(AW)^D = A((WA)^D)^2W$.

(ii) $(WA)^D = W((AW)^D)^2A$.

Dem. (i): Consideramos la matriz cuadrada $X = A((WA)^D)^2W$ y $k \geq ind(WA)+1$. Veamos que X cumple las condiciones dadas en (4.5), lo cual es equivalente a que

X sea la Drazin inversa de la matriz AW.

$$\begin{aligned}
AWX &= AWA((WA)^D)^2W \\
&= A(WA)^D(WA)^DWAW \\
&= XAW, \\
X^2AW &= (A((WA)^D)^2W)^2AW \\
&= A((WA)^D)^2WA((WA)^D)^2WAW \\
&= A(WA)^D(WA)^DW \\
&= X, \\
(AW)^{k+1}X &= (AW)^{k+1}A((WA)^D)^2W \\
&= A(WA)^{k+1}(WA)^D(WA)^DW \\
&= A(WA)^k(WA)^DW \\
&= A(WA)^{k-1}W \\
&= (AW)^k.
\end{aligned}$$

Luego, $X = (AW)^D$.

(ii): Esta identidad se deduce de forma similar tomando $X = W((AW)^D)^2A$ y $k \geq ind(AW) + 1$. □

PROPOSICIÓN 4.2.5. *Sea $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz fija y $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces la W-Drazin inversa de A viene dada por*

$$A^{D,W} = A((WA)^D)^2 = ((AW)^D)^2A. \tag{4.7}$$

DEM. Sea $X = A((WA)^D)^2$, entonces

$$\begin{aligned}
AWX &= AWA((WA)^D)^2 \\
&= A((WA)^D)^2WA \\
&= XWA, \\
XWAWX &= A((WA)^D)^2WAWA((WA)^D)^2 \\
&= A((WA)^D)^2 \\
&= X, \\
(AW)^{k+1}XW &= (AW)^{k+1}A((WA)^D)^2W \\
&= A(WA)^{k+1}(WA)^D(WA)^DW \\
&= A(WA)^k(WA)^DW \\
&= A(WA)^{k-1}W \\
&= (AW)^k, \text{ con } k \geq ind(WA) + 1.
\end{aligned}$$

Así, de las identidades anteriores se concluye que $X = A^{D,W}$.
La segunda igualdad se demuestra de forma similar. □

En el próximo resultado se dan algunas propiedades de la W-Drazin inversa.

PROPOSICIÓN 4.2.6. *Sea $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz fija y $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ con $k_1 = ind(AW)$ y $k_2 = ind(WA)$. Entonces,*

(i) $A^{D,W}W = (AW)^D$.

(ii) $WA^{D,W} = (WA)^D$.

(iii) $\mathcal{R}(A^{D,W}) = \mathcal{R}((AW)^{k_1})$.

(iv) $\mathcal{N}(A^{D,W}) = \mathcal{N}((WA)^{k_2})$.

(v) $dim(\mathcal{R}((AW)^{k_1})) = dim(\mathcal{R}((WA)^{k_2}))$.

DEM. En la Proposición 4.2.5 se demostró que $A^{D,W} = ((AW)^D)^2A$, luego:

(i): $A^{D,W}W = (AW)^D(AW)^DAW = (AW)^D$.

(ii): De la igualdad $(AW)^D = A((WA)^D)^2W$ dada en la Proposición 4.2.4 (i) se sigue,

$$\begin{aligned} WA^{D,W} &= W((AW)^D)^2A \\ &= W(AW)^D(AW)^DA \\ &= WA((WA)^D)^2WA((WA)^D)^2WA \\ &= (WA)^D(WA)^DWA \\ &= (WA)^D. \end{aligned}$$

(iii): Tenemos,

$$\mathcal{R}(A^{D,W}) = \mathcal{R}(((AW)^D)^2A) \subseteq \mathcal{R}((AW)^DAW) = \mathcal{R}((AW)^D) = \mathcal{R}((AW)^{k_1}).$$

Por otra parte,

$$\mathcal{R}((AW)^{k_1}) = \mathcal{R}((AW)^D) = \mathcal{R}((AW)^DAW) = \mathcal{R}(A^{D,W}WAW) \subseteq \mathcal{R}(A^{D,W}).$$

Entonces,

$$\mathcal{R}(A^{D,W}) = \mathcal{R}((AW)^{k_1}).$$

(iv): De la igualdad $A^{D,W} = A((WA)^D)^2$ se tiene

$$\mathcal{N}(A^{D,W}) = \mathcal{N}(A((WA)^D)^2) \subseteq \mathcal{N}((WA)^D) = \mathcal{N}((WA)^{k_2})$$

y

$$\mathcal{N}((WA)^{k_2}) = \mathcal{N}(((WA)^D)^2) \subseteq \mathcal{N}(A((WA)^D)^2) = \mathcal{N}(A^{D,W}).$$

Por lo tanto, de las inclusiones anteriores se concluye que

$$\mathcal{N}(A^{D,W}) = \mathcal{N}((WA)^{k_2}).$$

(v): Sea $A^{D,W} \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces,

$$n = dim(\mathcal{R}(A^{D,W})) + dim(\mathcal{N}(A^{D,W})).$$

Por (iii) y (iv) se tiene

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{R}((AW)^{k_1}) \oplus \mathcal{N}((WA)^{k_2}). \tag{4.8}$$

Ahora,

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{R}((WA)^{k_2}) \oplus \mathcal{N}((WA)^{k_2}) \tag{4.9}$$

entonces de (4.8) y (4.9) se deduce que

$$dim(\mathcal{R}((WA)^{k_2})) = dim(\mathcal{R}((AW)^{k_1})).$$

Quedando la proposición demostrada. □

En el siguiente teorema damos las representaciones matriciales de A, W y $A^{D,W}$ respecto a las descomposiciones core-nilpotentes de las matrices cuadradas AW y WA.

Teorema 4.2.7. *Sea $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz fija y $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ con $k_1 = ind(AW)$ y $k_2 = ind(WA)$. Entonces,*

$$A = P\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} Q^{-1},\ W = Q\begin{pmatrix} W_1 & O \\ O & W_2 \end{pmatrix} P^{-1} \tag{4.10}$$

y

$$A^{D,W} = P\begin{pmatrix} (W_1A_1W_1)^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1},$$

donde $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $A_1, W_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}$ son matrices no singulares y, $A_2W_2 \in \mathbb{C}^{m-r\times m-r}$ y $W_2A_2 \in \mathbb{C}^{n-r\times n-r}$ son nilpotentes de índices de nilpotencia k_1 y k_2, respectivamente.

DEM. Sean

$$WA = Q \begin{pmatrix} R & O \\ O & T \end{pmatrix} Q^{-1},\ AW = P \begin{pmatrix} C & O \\ O & N \end{pmatrix} P^{-1}$$

las descomposiciones core-nilpotentes de WA y AW, respectivamente, donde R y C son matrices no singulares del mismo orden y, T y N son matrices nilpotentes.

Tomemos las siguientes descomposiciones de A y W,

$$A = P \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix} Q^{-1},\ W = Q \begin{pmatrix} W_1 & W_{12} \\ W_{21} & W_2 \end{pmatrix} P^{-1}, \tag{4.11}$$

donde P y Q son no singulares.

Ahora, si $k = \text{máx}\{k_1,\, k_2\}$, entonces

$$\begin{aligned} (AW)^k A &= P \begin{pmatrix} C^k A_1 & C^k A_{12} \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1}, \\ A(WA)^k &= P \begin{pmatrix} A_1 R^k & O \\ A_{21} R^k & O \end{pmatrix} Q^{-1}, \end{aligned}$$

y de la igualdad $(AW)^k A = A(WA)^k$ se obtiene

$$C^k A_{12} = O \text{ y } A_{21} R^k = O.$$

Luego, $A_{12} = A_{21} = O$, ya que C y R son no singulares. Así, las expresiones matriciales de AW y WA resultan,

$$\begin{aligned} AW &= P \begin{pmatrix} A_1 W_1 & A_1 W_{12} \\ A_2 W_{21} & A_2 W_2 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} C & O \\ O & N \end{pmatrix} P^{-1}, \\ WA &= Q \begin{pmatrix} W_1 A_1 & W_{12} A_2 \\ W_{21} A_1 & W_2 A_2 \end{pmatrix} Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} R & O \\ O & T \end{pmatrix} Q^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A_1 W_1 = C, &\quad W_1 A_1 = R, \\ A_1 W_{12} = O, &\quad W_{21} A_1 = O, \\ W_2 A_2 = T, &\quad A_2 W_2 = N, \end{aligned}$$

y de aquí se deduce que A_1 y W_1 son no singulares, $W_2 A_2$ y $A_2 W_2$ nilpotentes y, $W_{12} = W_{21} = O$.

Finalmente, de la expresión $A^{D,W} = A((WA)^D)^2 = ((AW)^D)^2 A$ se obtiene

$$A^{D,W} = P \begin{pmatrix} C^{-2} A_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1} = P \begin{pmatrix} A_1 R^{-2} & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1} = P \begin{pmatrix} (W_1 A_1 W_1)^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Así obtenemos la expresión de la W-Drazin inversa de A. $\square$

De aquí en adelante, cualquier par de matrices $M \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $N \in \mathbb{C}^{n\times m}$ representadas en la forma $M = P\begin{pmatrix} M_1 & M_{12} \\ M_{21} & M_2 \end{pmatrix} Q^{-1}$ y $N = Q\begin{pmatrix} N_1 & N_{12} \\ N_{21} & N_2 \end{pmatrix} P^{-1}$, lo serán respecto a las descomposiciones dadas en (4.10).

Para finalizar esta sección damos la representación matricial del W-soporte idempotente de una matriz rectangular A.

Proposición 4.2.8. *Sea $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz fija y $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces el W-soporte idempotente de A, $A^{\sigma,W} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, tiene una representación dada por*

$$A^{\sigma,W} = P\begin{pmatrix} W_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Dem. Sean

$$W = P\begin{pmatrix} W_1 & O \\ O & W_2 \end{pmatrix} Q^{-1} \ \text{ y } \ A = P\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Entonces,

$$A^{\sigma,W} = (AW)^D A = P\begin{pmatrix} W_1^{-1}A_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} Q^{-1} = P\begin{pmatrix} W_1^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Luego tenemos (4.2.8). □

4.3. Caracterización de matrices con W-soportes idempotentes relacionados

En esta sección caracterizaremos las matrices rectangulares B, con W-soporte idempotente $B^{\sigma,W}$, tal que $B^{\sigma,W}W = A^{\sigma,W}W$, donde $A^{\sigma,W}$ es el W-soporte idempotente de A. Similarmente obtendremos una caracterización de las matrices B tal que $WB^{\sigma,W} = WA^{\sigma,W}$.

Por el Lema 4.2.6 tenemos $A^{D,W}W = (AW)^D$ y $WA^{D,W} = (WA)^D$. De aquí resultan los proyectores

$$A^{D,W}WAW = A^{\sigma,W}W = I_m - (AW)^\pi,$$
$$WA^{D,W}WA = WA^{\sigma,W} = I_n - (WA)^\pi,$$

donde I_m y I_n son la matriz identidad de órdenes m y n, respectivamente. Luego,

$$A^{\sigma,W}W = B^{\sigma,W}W \Leftrightarrow (AW)^\pi = (BW)^\pi,$$
$$WA^{\sigma,W} = WB^{\sigma,W} \Leftrightarrow (WA)^\pi = (WB)^\pi.$$

De estas equivalencias, aplicadas al Lema 2.4.4, se deduce el resultado siguiente. Su demostración es similar a la dada en el citado lema.

LEMA 4.3.1. *Sea $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz fija y $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces $T = A^{\sigma,W}W$ si y sólo si*

$$T^2 = T,\ AWT = TAW,\ AW(I-T) \text{ es nilpotente},\ AW + I - T \text{ es no singular}. \tag{4.12}$$

El siguiente teorema constituye uno de los resultados principales de este capítulo. En él se caracterizarán las matrices $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tales que $B^{\sigma,W}W = A^{\sigma,W}W$, dando una representación matricial de B respecto de (4.10) y una fórmula explícita para $B^{D,W}$.

TEOREMA 4.3.2. *Sea $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz fija y $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces las siguientes condiciones sobre $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ son equivalentes:*

(i) $B^{\sigma,W}W = A^{\sigma,W}W$.

(ii) $BWA^{\sigma,W}W = A^{\sigma,W}WBW,\ BW\left(I - A^{\sigma,W}W\right)$ *es nilpotente,*

$$I + A^{D,W}W(B-A)W \text{ es no singular.}$$

(iii) $B = P\begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ O & B_2 \end{pmatrix} Q^{-1}$, B_1 *no singular,* B_2W_2 *nilpotente,* $B_{12}W_2 = O$.

(iv) $A^{\sigma,W}WBW(I - A^{\sigma,W}W) = O$,

$$B^{D,W} = S^{-1}A^{D,W} + (S^{-1}A^{D,W}W)^2(B-A)(I - WA^{\sigma,W}),$$

donde $S = I + A^{D,W}W(B-A)W$.

DEM. (i) $\Rightarrow$ (ii): Por el Lemma 4.3.1 la condición (i) es equivalente a

$$\begin{gathered} BWA^{\sigma,W}W = A^{\sigma,W}WBW,\ BW(I - A^{\sigma,W}W) \text{ es nilpotente y} \\ BW + I - A^{\sigma,W}W \text{ es no singular.} \end{gathered} \tag{4.13}$$

Ahora, dado que $A^{D,W}W + I - A^{\sigma,W}W$ y $BW + I - A^{\sigma,W}W$ son no singulares, entonces

$$\begin{aligned} &(A^{D,W}W + I - A^{\sigma,W}W)(BW + I - A^{\sigma,W}W) \\ &\qquad = I + A^{D,W}W(B-A)W + (I - A^{\sigma,W}W)BW \end{aligned}$$

es no singular y como $(I - A^{\sigma,W}W)BW$ es nilpotente y conmuta con la matriz $I + A^{D,W}W(B - A)W$, por el Lema 4.2.1, se sigue que $I + A^{D,W}W(B - A)W$ es no singular. Así, de este hecho junto con la primera y segunda condiciones de (4.13) se tiene (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sea $B = P \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ B_{21} & B_2 \end{pmatrix} Q^{-1}$. Dado que $BWA^{\sigma,W}W = A^{\sigma,W}WBW$, entonces

$$P \begin{pmatrix} B_1W_1 & O \\ B_{21}W_1 & O \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} B_1W_1 & B_{12}W_2 \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1},$$

y como W_1 es no singular se concluye que $B_{21} = O$ y $B_{12}W_2 = O$.

De la igualdad

$$BW(I - A^{\sigma,W}W) = P \begin{pmatrix} O & O \\ O & B_2W_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

y de la condición $BW(I - A^{\sigma,W}W)$ es nilpotente se obtiene que B_2W_2 es nilpotente.

Finalmente,

$$I + A^{D,W}W(B - A)W = P \begin{pmatrix} W_1^{-1}A_1^{-1}B_1W_1 & O \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1}$$

es no singular, entonces B_1 es no singular ya que W_1 también lo es.

Luego,

$$B = P \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ O & B_2 \end{pmatrix} Q^{-1},\ B_1 \text{ es no singular, } B_2W_2 \text{ nilpotente, } B_{12}W_2 = O. \tag{4.14}$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv): De (4.14) se obtiene que

$$BW = P \begin{pmatrix} B_1W_1 & O \\ O & B_2W_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

y de aquí se sigue que $A^{\sigma,W}WBW(I - A^{\sigma,W}W) = O$. Ahora, usando la fórmula (4.7), vemos que

$$B^{D,W} = ((BW)^D)^2B = P \begin{pmatrix} (W_1B_1W_1)^{-1} & (W_1^{-1}B_1^{-1})^2B_{12} \\ O & O \end{pmatrix} Q^{-1}, \tag{4.15}$$

donde P, Q, W_1 y B_1 son no singulares.

Por otra parte,

$$I + A^{D,W}W(B - A)W = P \begin{pmatrix} W_1^{-1}A_1^{-1}B_1W_1 & O \\ O & I \end{pmatrix} Q^{-1} \tag{4.16}$$

es no singular ya que B_1 es no singular. Sea $S = I + A^{D,W}W(B-A)W$, entonces

$$S^{-1}A^{D,W} = P\begin{pmatrix}(W_1B_1^{-1}W_1)^{-1} & O\\ O & O\end{pmatrix}Q^{-1}$$

y

$$(S^{-1}A^{D,W}W)^2(B-A)(I-WA^{\sigma,W}) = P\begin{pmatrix}O & (W_1^{-1}B_1^{-1})^2B_{12}\\ O & O\end{pmatrix}Q^{-1}.$$

Así, de (4.15), se concluye que

$$B^{D,W} = S^{-1}A^{D,W} + (S^{-1}A^{D,W}W)^2(B-A)(I-WA^{\sigma,W}).$$

(iv) $\Rightarrow$ (i): Sea $S = I + A^{D,W}W(B-A)W$. De $A^{\sigma,W}WBW(I-A^{\sigma,W}W) = O$ se sigue que $A^{D,W}WBW(I-A^{\sigma,W}W) = O$ y de aquí,

$$\begin{aligned}A^{D,W}WBW &= A^{D,W}WBWA^{\sigma,W}W\\ &= A^{D,W}WBWA^{\sigma,W}W + A^{\sigma,W}W - A^{\sigma,W}W\\ &= (I + A^{D,W}W(B-A)W)A^{\sigma,W}W\\ &= SA^{\sigma,W}W\end{aligned}$$

y, usando que $(I-WA^{\sigma,W})W = W(I-A^{\sigma,W}W)$, se obtiene la igualdad

$$A^{D,W}W(B-A)(I-WA^{\sigma,W})W = O.$$

Luego

$$B^{\sigma,W}W = S^{-1}A^{D,W}WBW + (S^{-1}A^{D,W}W)^2(B-A)(I-WA^{\sigma,W})WBW = A^{\sigma,W}W.$$

Lo que completa la demostración. $\square$

A continuación deducimos una fórmula para el proyector $WB^{\sigma,W}$, la cual es válida cuando $B^{\sigma,W}W = A^{\sigma,W}W$.

COROLARIO 4.3.3. *Sea $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz fija y $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Si $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ es tal que $B^{\sigma,W}W = A^{\sigma,W}W$, entonces*

$$WB^{\sigma,W} = WA^{\sigma,W} + WS^{-1}A^{D,W}W(B-A)(I-WA^{\sigma,W}), \tag{4.17}$$

donde $S = I + A^{D,W}W(B-A)W$.

DEM. Por el Teorema 4.3.2 (iii) se tiene

$$A^{D,W}W(B-A)(I-WA^{\sigma,W})W = O.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
WB^{\sigma,W} &= W(S^{-1}A^{D,W} + (S^{-1}A^{D,W}W)^2(B-A)(I-WA^{\sigma,W}))WB \\
&= WS^{-1}A^{D,W}WB \\
&= WA^{D,W}WA + WS^{-1}(A^{D,W}WB - SA^{D,W}WA) \\
&= WA^{D,W}WA + WS^{-1}A^{D,W}WB - WS^{-1}(I + A^{D,W}W(B-A)W)A^{\sigma,W} \\
&= WA^{\sigma,W} + WS^{-1}A^{D,W}W(B-A)(I-WA^{\sigma,W}).
\end{aligned}$$

Así demostramos la identidad (4.17). □

En el siguiente ejemplo se verá que la implicación contraria en la corolario anterior no es cierta, o sea, podemos encontrar matrices rectangulares tales que verifican (4.17) y sin embargo $B^{\sigma,W}W \neq A^{\sigma,W}W$.

Ejemplo 4.3.4. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$A^{D,W} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A^{\sigma,W}W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; WA^{\sigma,W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^{D,W} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B^{\sigma,W}W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; WB^{\sigma,W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, por cálculo directo tenemos

$$WS^{-1}A^{D,W}W(B-A)(I-WA^{\sigma,W}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$WA^{\sigma,W} + WS^{-1}A^{D,W}W(B-A)(I-WA^{\sigma,W}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = WB^{\sigma,W}$$

y, sin embargo, $B^{\sigma,W}W \neq A^{\sigma,W}W$.

Sea la clase de matrices B que cumplen:

$$(\mathcal{C}_{AW}) : \begin{cases} \mathcal{R}((B-A)W) \subseteq \mathcal{R}((AW)^{k_1}), \quad \mathcal{N}((AW)^{k_1}) \subseteq \mathcal{N}((AW)^{k_1}(B-A)W) \\ \text{con} \quad k_1 = ind(AW) \quad \text{y} \quad \|A^{D,W}W(B-A)W\| < 1. \end{cases}$$

A continuación veremos que la clase de matrices $B \in (\mathcal{C}_{AW})$ verifican que sus W-soportes idempotentes están relacionados por $B^{\sigma,W}W = A^{\sigma,W}W$. Por lo cual, también se cumplirán las condiciones equivalentes del Teorema 4.3.2.

PROPOSICIÓN 4.3.5. *Sea $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz fija y $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Si $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ satisface la condición $(\mathcal{C}_{AW})$, entonces $B^{\sigma,W}W = A^{\sigma,W}W$.*

DEM. Dado que $k_1 = ind(AW)$, entonces $\mathcal{R}((AW)^{k_1}) = \mathcal{R}(A^{D,W}) = \mathcal{R}(A^{\sigma,W}W) = \mathcal{N}(I - A^{\sigma,W}W)$. Luego,

$$\mathcal{R}((B-A)W) \subseteq \mathcal{R}((AW)^{k_1}) \Rightarrow (I - A^{\sigma,W}W)(B-A)W = O.$$

Sea $B = P\begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ B_{21} & B_2 \end{pmatrix} Q^{-1}$. Entonces,

$$(I - A^{\sigma,W}W)(B-A)W = P\begin{pmatrix} O & O \\ B_{21}W_1 & (B_2 - A_2)W_2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

y así, $B_{21} = O$ y B_2W_2 es nilpotente ya que W_1 es no singular y A_2W_2 es nilpotente.

Ahora, de $\mathcal{N}((AW)^{k_1}) = \mathcal{R}(I - A^{\sigma,W}W)$ se sigue que

$$\mathcal{N}((AW)^{k_1}) \subseteq \mathcal{N}((AW)^{k_1}(B-A)W) \Rightarrow (AW)^{k_1}(B-A)W(I - A^{\sigma,W}W) = O.$$

Luego,

$$(AW)^{k_1}(B-A)W(I - A^{\sigma,W}W) = P\begin{pmatrix} O & (A_1W_1)^{k_1}B_{12}W_2 \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1},$$

y así, $B_{12}W_2 = O$, ya que A_1W_1 es no singular.

Además, la condición $\|A^{D,W}W(B-A)W\| < 1$ implica que

$$I + A^{D,W}W(B-A)W = P\begin{pmatrix} W_1^{-1}A_1^{-1}B_1W_1 & O \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1}$$

es no singular, luego B_1 es no singular. De todo lo anterior se concluye que

$$B = P\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

con B_1 no singular, $B_{12}W_2 = O$ y B_2W_2 nilpotente y, por el Teorema 4.3.2, equivalencia (i) $\Leftrightarrow$ (iii), tenemos que $B^{\sigma,W}W = A^{\sigma,W}W$. $\square$

A continuación se muestra que la implicación contraria en la proposición anterior no siempre se tiene. Damos matrices rectangulares tales que $B^{\sigma,W}W = A^{\sigma,W}W$ y sin embargo no verifican la condición $(\mathcal{C}_{AW})$.

Ejemplo 4.3.6. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$A^{D,W} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A^{\sigma,W}W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^{D,W} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B^{\sigma,W}W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por cálculo tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}((B-A)W) &= \mathcal{L}\{(0,1,0,0),(1,0,0,0),(0,0,0,1)\}, \\ \mathcal{R}(A^{D,W}) &= \mathcal{L}\{(0,1,0,0),(1,0,0,0)\}, \end{aligned}$$

luego, $\mathcal{R}((B-A)W) \not\subseteq \mathcal{R}(AW) = \mathcal{R}(A^{D,W})$.

Ahora, caracterizamos las matrices $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tales que $WB^{\sigma,W} = WA^{\sigma,W}$.

Teorema 4.3.7. *Sea $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz fija y $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces las siguientes condiciones sobre $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ son equivalentes:*

(i) $WB^{\sigma,W} = WA^{\sigma,W}$.

(ii) $WBWA^{\sigma,W} = WA^{\sigma,W}WB$, $WB(I - WA^{\sigma,W})$ *es nilpotente,*

$$I + W(B-A)WA^{D,W} \text{ es no singular.}$$

(iii) $B = P\begin{pmatrix} B_1 & O \\ B_{21} & B_2 \end{pmatrix} Q^{-1}$, B_1 *no singular,* W_2B_2 *nilpotente,* $W_2B_{21} = O$.

(iv) $(I - WA^{\sigma,W})WBWA^{\sigma,W} = O$,

$$B^{D,W} = A^{D,W}Z^{-1} + (I - A^{\sigma,W}W)(B - A)(WA^{D,W}Z^{-1})^2,$$

donde $Z = I + W(B - A)WA^{D,W}$.

Dem. La demostración se obtiene de modo similar a la demostración del Teorema 4.3.2. La modificaciones requeridas resultan obvias. □

Seguidamente obtenemos una expresión para el proyector $B^{\sigma,W}W$, la cual es válida cuando $WB^{\sigma,W} = WA^{\sigma,W}$.

Corolario 4.3.8. *Sean* $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *una matriz fija y* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. *Si* $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *es tal que* $WB^{\sigma,W} = WA^{\sigma,W}$, *entonces*

$$B^{\sigma,W}W = A^{\sigma,W}W + (I - A^{\sigma,W}W)(B - A)WA^{D,W}Z^{-1}W, \tag{4.18}$$

donde $Z = I + W(B - A)WA^{D,W}$.

Dem. Del Teorema 4.3.7 (iii) se obtiene $W(I - A^{\sigma,W}W)(B - A)WA^{D,W} = O$ y

$$\begin{aligned} B^{\sigma,W}W &= BW(A^{D,W}Z^{-1} + (I - A^{\sigma,W}W)(B - A)(WA^{D,W}Z^{-1})^2)W \\ &= BWA^{D,W}Z^{-1}W \\ &= A^{D,W}WAW + (BWA^{D,W} - A^{D,W}WAZ)Z^{-1}W \\ &= A^{D,W}WAW + BWA^{D,W}Z^{-1}W - A^{\sigma,W}(I + W(B - A)WA^{D,W})Z^{-1}W \\ &= A^{\sigma,W}W + (I - A^{\sigma,W}W)(B - A)WA^{D,W}Z^{-1}W. \end{aligned}$$

Así el corolario queda demostrado. □

A continuación damos un ejemplo en el que se muestra que existen matrices tal que cumplen (4.18) y, en cambio, los proyectores $WB^{\sigma,W}$ y $WA^{\sigma,W}$ son distintos, i.e., la implicación recíproca en el corolario anterior no siempre es cierta.

Ejemplo 4.3.9. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$A^{D,W} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{\sigma,W}W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad WA^{\sigma,W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^{D,W} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B^{\sigma,W}W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; WB^{\sigma,W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operando tenemos

$$(I - A^{\sigma,W}W)(B-A)WA^{D,W}Z^{-1}W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$WA^{\sigma,W} + WS^{-1}A^{D,W}W(B-A)(I - WA^{\sigma,W}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = WB^{\sigma,W}$$

y, sin embargo, $B^{\sigma,W}W \neq A^{\sigma,W}W$.

Sea ahora la clase de matrices que verifican:

$$(\mathcal{C}_{WA}) : \begin{cases} \mathcal{N}((WA)^{k_2}) \subseteq \mathcal{N}(W(B-A)), \quad \mathcal{R}(W(B-A)(WA)^{k_2}) \subseteq \mathcal{R}((WA)^{k_2}) \\ \text{con} \quad k_2 = ind(WA) \quad \text{y} \quad \|A^{D,W}W(B-A)W\| < 1. \end{cases}$$

En la siguiente proposición demostramos que las matrices $B \in (\mathcal{C}_{WA})$ cumplen que sus W-soportes idempotentes están relacionados por la condición $WB^{\sigma,W} = WA^{\sigma,W}$. De este modo, se cumplen las condiciones equivalentes del Teorema 4.3.7.

Proposición 4.3.10. *Sea $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz fija y $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Si $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ satisface la condición $(\mathcal{C}_{WA})$, entonces $WB^{\sigma,W} = WA^{\sigma,W}$.*

Dem. De $\mathcal{N}((WA)^{k_2}) = \mathcal{N}(A^{D,W}) = \mathcal{R}(I - WA^{\sigma,W})$ se tiene la implicación

$$\mathcal{N}((WA)^{k_2}) \subseteq \mathcal{N}(W(B-A)) \Rightarrow W(B-A)(I - WA^{\sigma,W}) = O.$$

Sea $B = P\begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ B_{21} & B_2 \end{pmatrix}Q^{-1}$. Entonces,

$$W(B-A)(I - WA^{\sigma,W}) = Q\begin{pmatrix} O & W_1B_{12} \\ O & W_2(B_2 - A_2) \end{pmatrix}Q^{-1},$$

y así, $B_{12} = O$, ya que W_1 es no singular y $W_2B_2 = W_2A_2$ es nilpotente.

Ahora, de la condición $\mathcal{R}((WA)^{k_2}) = \mathcal{N}(I - WA^{\sigma,W})$ se sigue que

$$\mathcal{R}(W(B-A)(WA)^{k_2}) \subseteq \mathcal{R}((WA)^{k_2}) \Rightarrow (I - WA^{\sigma,W})W(B-A)(WA)^{k_2} = O.$$

Entonces,

$$(I - WA^{\sigma,W})W(B - A)(WA)^{k_2} = Q \begin{pmatrix} O & O \\ W_2B_{21}(W_1A_1)^{k_2} & O \end{pmatrix} Q^{-1},$$

y así, $W_2B_{21} = O$, dado que W_1A_1 es no singular.

Además, de $\|A^{D,W}W(B - A)W\| < 1$ se obtiene que

$$I + A^{D,W}W(B - A)W = P \begin{pmatrix} W_1^{-1}A_1^{-1}B_1W_1 & O \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1}$$

es no singular, luego B_1 es no singular. Así, la estructura de B viene dada por

$$B = P \begin{pmatrix} B_1 & O \\ B_{21} & B_2 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

con el bloque B_1 no singular, $W_2B_{21} = O$ y W_2B_2 nilpotente, y por el Teorema 4.3.7 (i) $\Leftrightarrow$ (iii) concluimos que $WB^{\sigma,W} = WA^{\sigma,W}$. $\square$

En el siguiente ejemplo mostramos que las matrices relacionadas por $WB^{\sigma,W} = WA^{\sigma,W}$ no siempre verifican la condición $(\mathcal{C}_{WA})$.

Ejemplo 4.3.11. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$A^{D,W} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad WA^{\sigma,W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^{D,W} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad WB^{\sigma,W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(W(B - A)) &= \mathcal{L}\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}, \\ \mathcal{N}(A^{D,W}) &= \mathcal{L}\{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}, \end{aligned}$$

luego, $\mathcal{N}((WA)^2) = \mathcal{N}(A^{D,W}) \not\subseteq \mathcal{N}(W(B - A))$.

En los resultados anteriores obtuvimos caracterizaciones de las matrices $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tales que $WB^{\sigma,W} = WA^{\sigma,W}$ o $B^{\sigma,W}W = A^{\sigma,W}W$. La consideración de ambas identidades es equivalente a que A y B tengan el mismo W-soporte idempotente, $A^{\sigma,W} = B^{\sigma,W}$. En efecto,

$$\begin{aligned} WB^{\sigma,W} = WA^{\sigma,W} &\Rightarrow B^{\sigma,W} = B^{\sigma,W}WA^{\sigma,W}, \\ B^{\sigma,W}W = A^{\sigma,W}W &\Rightarrow A^{\sigma,W} = B^{\sigma,W}WA^{\sigma,W}. \end{aligned}$$

Recíprocamente,

$$\begin{aligned} B^{\sigma,W} = A^{\sigma,W} &\Rightarrow B^{\sigma,W}W = A^{\sigma,W}W, \\ B^{\sigma,W} = A^{\sigma,W} &\Rightarrow WB^{\sigma,W} = WA^{\sigma,W}. \end{aligned}$$

Así, de los Teoremas 4.3.2 y 4.3.7, se deriva la siguiente caracterización de las matrices rectangulares B tal que $A^{\sigma,W} = B^{\sigma,W}$.

COROLARIO 4.3.12. *Sea $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz fija y $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces las siguientes condiciones sobre $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ son equivalentes:*

(i) $B^{\sigma,W} = A^{\sigma,W}$.

(ii) $B^{\sigma,W}W = A^{\sigma,W}W,\ A^{\sigma,W}WB(I - WA^{\sigma,W}) = O$.

(iii) $WB^{\sigma,W} = WA^{\sigma,W},\ (I - A^{\sigma,W}W)BWA^{\sigma,W} = O$.

(iv) $B = P\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix}Q^{-1}$ *con B_1 no singular, B_2W_2 y W_2B_2 nilpotentes.*

(v) $B^{D,W} = (I + A^{D,W}W(B - A)W)^{-1}A^{D,W} = A^{D,W}(I + W(B - A)WA^{D,W})^{-1}$.

Particularizando las condiciones equivalentes del corolario anterior a matrices cuadradas A, B y tomando $W = I$ se obtiene una caracterización de las matrices B con $BB^D = AA^D$ o, equivalentemente, $B^\pi = A^\pi$. Así, este corolario es una generalización de [16, Teorema 2.1].

En [101] fue introducida la siguiente clase de matrices rectangulares B:

$$(\mathcal{C}) : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}((B - A)W) \subseteq \mathcal{R}((AW)^k), \quad \mathcal{N}((WA)^k) \subseteq \mathcal{N}(W(B - A)) \\ \text{con} \quad k = \text{máx}\{ind(WA), ind(AW)\} \quad \text{y} \quad \|A^{D,W}W(B - A)W\| < 1. \end{array} \right. \tag{4.19}$$

En el siguiente resultado se demostrará que el hecho de que se cumpla $(\mathcal{C})$ es equivalente a que se cumplan conjuntamente $(\mathcal{C}_{AW})$ y $(\mathcal{C}_{WA})$.

PROPOSICIÓN 4.3.13. *Sea $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz fija y A, $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces B verifica $(\mathcal{C})$ si y sólo si B verifica ambas condiciones $(\mathcal{C}_{AW})$ y $(\mathcal{C}_{WA})$.*

DEM. Demostremos que si se cumple $(\mathcal{C})$, entonces se tienen al mismo tiempo $(\mathcal{C}_{AW})$ y $(\mathcal{C}_{WA})$.

Sea $k = \text{máx}\{k_1, k_2\}$, donde $k_1 = ind(AW)$ y $k_2 = ind(WA)\}$. De la inclusión $\mathcal{N}((WA)^k) \subseteq \mathcal{N}(W(B-A))$ deducimos que

$$\begin{aligned}\mathcal{N}((AW)^{k_1}) &\subseteq \mathcal{N}(W(AW)^{k_1}) = \mathcal{N}((WA)^k W) \subseteq \mathcal{N}(W(B-A)W)\\ &\subseteq \mathcal{N}(A(WA)^{k-1}W(B-A)W) = \mathcal{N}((AW)^{k_1}W(B-A)W).\end{aligned}$$

Análogamente, de $\mathcal{R}((B-A)W) \subseteq \mathcal{R}((AW)^k)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(W(B-A)(WA)^{k_2}) &\subseteq \mathcal{R}(W(B-A)W) \subseteq \mathcal{R}(W(AW)^k)\\ &\subseteq \mathcal{R}((WA)^k) = \mathcal{R}((WA)^{k_2}).\end{aligned}$$

El recíproco es evidente. $\square$

Para finalizar esta sección damos un ejemplo con matrices que cumplen la igualdad $A^{\sigma,W} = B^{\sigma,W}$ y, sin embargo, no cumplen $(\mathcal{C})$.

EJEMPLO 4.3.14. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \ W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$A^{D,W} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad A^{\sigma,W} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$B^{D,W} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad B^{\sigma,W} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Los subespacios imagen de $(B-A)W$ y de $A^{D,W}$ son,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}((B-A)W) &= \mathcal{L}\{(0,1,0,0),(1,0,0,0),(0,0,0,1)\},\\ \mathcal{R}(A^{D,W}) &= \mathcal{L}\{(0,1,0,0),(1,0,0,0)\}.\end{aligned}$$

Luego, la condición $(\mathcal{C})$ no se cumple.

4.4. Perturbación de la W-Drazin inversa

En esta sección obtendremos resultados de perturbación de la W-Drazin inversa que serán de aplicación a una clase de matrices rectangulares perturbadas más amplia que la estudiada en [101].

Usaremos la norma natural matricial dada en la Sección 3.4.

A continuación vamos a presentar un resultado de perturbación para la W-Drazin inversa basado en el Teorema 4.3.2.

TEOREMA 4.4.1. *Sea* $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *una matriz fija y* $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, *A no nula. Asumimos que* $B^{\sigma,W}W = A^{\sigma,W}W$ *y* $\|A^{D,W}W(B-A)W\| < 1$. *Entonces,*

$$\|B^{D,W}\| \leq \frac{\|A^{D,W}\|}{1-\|A^{D,W}W(B-A)W\|} + \|A^{D,W}\|\,\Delta \tag{4.20}$$

y

$$\frac{\|B^{D,W}-A^{D,W}\|}{\|A^{D,W}\|} \leq \frac{\|A^{D,W}W(B-A)W\|}{1-\|A^{D,W}W(B-A)W\|} + \Delta, \tag{4.21}$$

donde

$$\Delta = \frac{\|A^{D,W}W\|\,\|W(B-A)(I-WA^{\sigma,W})\|}{(1-\|A^{D,W}W(B-A)W\|)^2}. \tag{4.22}$$

DEM. Por el Teorema 4.3.2 tenemos que

$$B^{D,W} = -A^{D,W}W(B-A)WB^{D,W} + A^{D,W} + A^{D,W}WS^{-1}A^{D,W}W(B-A)(I-WA^{\sigma,W}).$$

Entonces, aplicando normas

$$\begin{aligned}\|B^{D,W}\| \leq{}& \|A^{D,W}W(B-A)W\|\,\|B^{D,W}\| + \|A^{D,W}\|\\ &+ \|A^{D,W}W\|\,\|S^{-1}\|\,\|A^{D,W}W(B-A)(I-WA^{\sigma,W})\|\end{aligned}$$

y, usando que $\|S^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1-\|A^{D,W}W(B-A)W\|}$, se sigue (4.20).

Ahora, tomando normas a

$$\begin{aligned}B^{D,W}-A^{D,W} ={}& -A^{D,W}W(B-A)W(B^{D,W}-A^{D,W}+A^{D,W})\\ &+ A^{D,W}WS^{-1}A^{D,W}W(B-A)(I-WA^{\sigma,W})\end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\|B^{D,W}-A^{D,W}\| \leq{}& \|A^{D,W}W(B-A)W\|(\|B^{D,W}-A^{D,W}\| + \|A^{D,W}\|)\\ &+ \|A^{D,W}W\|\,\|S^{-1}\|\,\|A^{D,W}\|\,\|W(B-A)(I-WA^{\sigma,W})\|.\end{aligned}$$

Luego, (4.21) se tiene. □

En el siguiente corolario la condición de norma $\|A^{D,W}W(B-A)W\| < 1$ es reemplazada por la condición más fuerte $\|A^{D,W}\|\,\|W(B-A)W\| < 1$, lo que nos va a permitir obtener estimaciones utilizando $\kappa_{D,W}(A)$, el *número de condición con respecto a la W-Drazin inversa* de A, definido como $\kappa_{D,W}(A) = \|A^{D,W}\|\,\|WAW\|$. Su demostración resulta evidente.

Corolario 4.4.2. *Sea $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz fija y $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, A no nula. Asumimos que $B^{\sigma,W}W = A^{\sigma,W}W$ y $\|A^{D,W}\|\,\|W(B-A)W\| < 1$. Entonces,*

$$\|B^{D,W}\| \leq \frac{\kappa_{D,W}(A)/\|WAW\|}{1-\kappa_{D,W}(A)\,\|W(B-A)W\|/\|WAW\|} + \frac{\kappa_{D,W}(A)}{\|WAW\|}\,\Delta$$

y

$$\frac{\|B^{D,W}-A^{D,W}\|}{\|A^{D,W}\|} \leq \frac{\kappa_{D,W}(A)\,\|W(B-A)W\|/\|WAW\|}{1-\kappa_{D,W}(A)\,\|W(B-A)W\|/\|WAW\|} + \Delta,$$

donde Δ es definido como en (4.22).

Observación 4.4.3. Tanto en el Teorema 4.4.1 como en el Corolario 4.4.2 la condición $B^{\sigma,W}W = A^{\sigma,W}W$ puede ser reemplazada por cualquiera de las condiciones equivalentes dadas en el Teorema 4.3.2.

Podemos formular el siguiente resultado sobre la perturbación de la W-Drazin inversa, similar al dado en el Teorema 4.4.1, cuando se tiene la igualdad de proyectores $WB^{\sigma,W} = WA^{\sigma,W}$.

Teorema 4.4.4. *Sea $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz fija y $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, A no nula. Asumimos que $WB^{\sigma,W} = WA^{\sigma,W}$ y $\|W(B-A)WA^{D,W}\| < 1$. Entonces,*

$$\|B^{D,W}\| \leq \frac{\|A^{D,W}\|}{1-\|W(B-A)WA^{D,W}\|} + \|A^{D,W}\|\,\Theta \tag{4.23}$$

y

$$\frac{\|B^{D,W}-A^{D,W}\|}{\|A^{D,W}\|} \leq \frac{\|W(B-A)WA^{D,W}\|}{1-\|W(B-A)WA^{D,W}\|} + \Theta, \tag{4.24}$$

donde

$$\Theta = \frac{\|WA^{D,W}\|\,\|(I-A^{\sigma,W}W)(B-A)W\|}{(1-\|W(B-A)WA^{D,W}\|)^2}. \tag{4.25}$$

Dem. La demostración es análoga a la dada en el Teorema 4.4.1. □

Al igual que en el Corolario 4.4.2, en el siguiente corolario la condición de norma $\|W(B-A)WA^{D,W}\| < 1$ es reemplazada por $\|A^{D,W}\|\,\|W(B-A)W\| < 1$.

Corolario 4.4.5. *Sea $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz fija y $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, A no nula. Asumimos que $WB^{\sigma,W} = WA^{\sigma,W}$ y $\|A^{D,W}\|\,\|W(B-A)W\| < 1$. Entonces,*

$$\|B^{D,W}\| \leq \frac{\kappa_{D,W}(A)/\|WAW\|}{1-\kappa_{D,W}(A)\,\|W(B-A)W\|/\|WAW\|} + \frac{\kappa_{D,W}(A)}{\|WAW\|}\,\Theta$$

y

$$\frac{\|B^{D,W}-A^{D,W}\|}{\|A^{D,W}\|} \leq \frac{\kappa_{D,W}(A)\,\|W(B-A)W\|/\|WAW\|}{1-\kappa_{D,W}(A)\,\|W(B-A)W\|/\|WAW\|} + \Theta,$$

donde Θ es definido como en (4.25).

Observación 4.4.6. Tanto en el Teorema 4.4.4 como en el Corolario 4.4.5 la condición $WB^{\sigma,W} = WA^{\sigma,W}$ puede ser reemplazada por cualquiera de las condiciones equivalentes dadas en el Teorema 4.3.7.

Como un corolario de los Teoremas 4.4.1 y 4.4.4, podemos obtener fácilmente el resultado de perturbación de [101, Teorema 1] el cual se refiere a la clase de matrices que satisfacen la condición $(\mathcal{C})$.

Corolario 4.4.7. *Sea $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz fija y $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, A no nula. Si B satisface la condición $(\mathcal{C})$ definida como en (4.19), entonces*

$$B^{D,W} = (I + A^{D,W}W(B-A)W)^{-1}A^{D,W} = A^{D,W}(I + W(B-A)WA^{D,W})^{-1}, \tag{4.26}$$

$$\|B^{D,W}\| \leq \frac{\|A^{D,W}\|}{1-\|A^{D,W}W(B-A)W\|} \tag{4.27}$$

y

$$\frac{\|B^{D,W}-A^{D,W}\|}{\|A^{D,W}\|} \leq \frac{\|A^{D,W}W(B-A)W\|}{1-\|A^{D,W}W(B-A)W\|}. \tag{4.28}$$

En el corolario anterior si consideramos la condición $\|A^{D,W}\|\,\|W(B-A)W\| < 1$ y se expresa la ecuación (4.28) en términos de $\kappa_{D,W}(A)$, resulta

$$\frac{\|B^{D,W}-A^{D,W}\|}{\|A^{D,W}\|} \leq \frac{\kappa_{D,W}(A)\,\|W(B-A)W\|/\|WAW\|}{1-\kappa_{D,W}(A)\,\|W(B-A)W\|/\|WAW\|}.$$

Observamos que la condición $(\mathcal{C})$ implica que A y B tengan el mismo W-soporte idempotente, y en este caso la expresión (4.26) puede ser sustituida por cualquiera de las condiciones equivalentes dadas en el Corolario 4.3.12.

4.5. Aplicación a sistemas lineales rectangulares

En esta sección se aplicarán los Teoremas 4.4.1 y 4.4.4, y el Corolario 4.4.7 para obtener acotaciones de la perturbación de sistemas lineales singulares. Estos resultados generalizan el dado en [101, Teorema 2].

Sea el sistema rectangular de ecuaciones lineales dado por

$$WAWx = b, \quad b \in \mathcal{R}((WA)^{k_2}),\ k_2 = ind(WA), \tag{4.29}$$

entonces la única solución en $\mathcal{R}((AW)^{k_1}) = \mathcal{R}(A^{D,W})$, donde $k_1 = ind(AW)$, viene dada por $x = A^{D,W}b$.

Sea ahora el sistema perturbado

$$WBWy = c, \quad c \in \mathcal{R}((WB)^{l_2}),\ l_2 = ind(WB), \tag{4.30}$$

entonces la única solución en $\mathcal{R}((BW)^{l_1}) = \mathcal{R}(B^{D,W})$, donde $l_1 = ind(BW)$, viene dada por $y = B^{D,W}c$.

Seguidamente estableceremos diversas estimaciones en norma del error relativo de la solución exacta del sistema (4.29). Por simplificar asumimos que $\mathcal{R}(A^{D,W}) = \mathcal{R}(B^{D,W})$.

En primer lugar consideramos que las matrices de los coeficientes de los sistemas original y perturbado están relacionadas por la condición $B^{\sigma,W}W = A^{\sigma,W}W$.

Teorema 4.5.1. *Sea $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz fija y $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Asumimos que $B^{\sigma,W}W = A^{\sigma,W}W$ y $\|A^{D,W}W(B-A)W\| < 1$. Entonces,*

$$\frac{\|y-x\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{D,W}\|\,\|WAW\|}{1-\|A^{D,W}W(B-A)W\|}\left(\|A^{D,W}W(B-A)W\|+\widetilde{\Delta}+(1+\widetilde{\Delta})\frac{\|b-c\|}{\|b\|}\right), \tag{4.31}$$

donde

$$\widetilde{\Delta} = (1-\|A^{D,W}W(B-A)W\|)\Delta$$

y Δ es definido como en (4.22).

Dem. Aplicando normas a

$$y - x = B^{D,W}c - A^{D,W}b = (B^{D,W} - A^{D,W})b + B^{D,W}(c-b)$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\|y-x\| &\le \|B^{D,W} - A^{D,W}\|\,\|b\| + \|B^{D,W}\|\,\|b-c\| \\ &\le \|B^{D,W} - A^{D,W}\|\,\|WAW\|\,\|x\| + \|B^{D,W}\|\,\frac{\|b-c\|}{\|b\|}\|WAW\|\,\|x\|.\end{aligned}$$

Ahora, usando las cotas superiores (4.20) y (4.21) dadas en el Teorema 4.4.1 se tiene (4.31). □

Del teorema anterior se sigue el siguiente corolario.

COROLARIO 4.5.2. *Sea $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz fija y A, $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Asumimos que $B^{\sigma,W}W = A^{\sigma,W}W$ y $\|A^{D,W}\|\,\|W(B-A)W\| < 1$. Entonces,*

$$\frac{\|y-x\|}{\|x\|} \le \frac{\kappa_{D,W}(A)}{1-\kappa_{D,W}(A)\|W(B-A)W\|/\|WAW\|} \times \left(\kappa_{D,W}(A)\frac{\|W(B-A)W\|}{\|WAW\|} + \widetilde{\Delta} + (1+\widetilde{\Delta})\frac{\|b-c\|}{\|b\|}\right),$$

donde $\widetilde{\Delta} = (1-\|A^{D,W}W(B-A)W\|)\Delta$ y Δ es definida como en (4.22).

En el siguiente teorema asumimos la igualdad $WB^{\sigma,W} = WA^{\sigma,W}$.

TEOREMA 4.5.3. *Sea $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz fija y A, $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Asumimos que $WB^{\sigma,W} = WA^{\sigma,W}$ y $\|W(B-A)WA^{D,W}\| < 1$. Entonces,*

$$\frac{\|y-x\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{D,W}\|\,\|WAW\|}{1-\|W(B-A)WA^{D,W}\|}\left(\|W(B-A)WA^{D,W}\|+\widetilde{\Theta}+(1+\widetilde{\Theta})\frac{\|b-c\|}{\|b\|}\right), \tag{4.32}$$

donde

$$\widetilde{\Theta} = (1-\|W(B-A)WA^{D,W}\|)\Theta$$

y Θ es definida como en (4.25).

DEM. Su demostración es similar a la dada en el Teorema 4.5.1 considerando ahora las cotas (4.23) y (4.24) dadas en el Teorema 4.4.4. □

Al igual que en el Corolario 4.5.2, podemos fortalecer las condiciones del teorema anterior dando un resultado donde está involucrado el número de condición con respecto a la W-Drazin inversa de A.

COROLARIO 4.5.4. *Sea $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz fija y A, $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Asumimos que $WB^{\sigma,W} = WA^{\sigma,W}$ y $\|A^{D,W}\|\,\|W(B-A)W\| < 1$. Entonces,*

$$\frac{\|y-x\|}{\|x\|} \le \frac{\kappa_{D,W}(A)}{1-\kappa_{D,W}(A)\|W(B-A)W\|/\|WAW\|} \times \left(\kappa_{D,W}(A)\frac{\|W(B-A)W\|}{\|WAW\|} + \widetilde{\Theta} + (1+\widetilde{\Theta})\frac{\|b-c\|}{\|b\|}\right),$$

donde $\widetilde{\Theta} = (1-\|W(B-A)WA^{D,W}\|)\Theta$ y Θ es definida como en (4.25).

En el siguiente corolario damos una cota superior del error relativo cuando el W-soporte idempotente de la matriz del sistema original (4.29) es igual al soporte idempotente de la matriz de los coeficientes de sistema perturbado (4.30), es decir, $A^{\sigma,W} = B^{\sigma,W}$.

Corolario 4.5.5. *Sea* $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *una matriz fija y* A, $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. *Asumimos* $B^{\sigma,W} = A^{\sigma,W}$. *Si* $\|A^{D,W}W(B-A)W\| < 1$, *entonces*

$$\frac{\|y-x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{D,W}\|\,\|WAW\|}{1-\|A^{D,W}W(B-A)W\|}\left(\|A^{D,W}W(B-A)W\| + \frac{\|b-c\|}{\|b\|}\right). \quad (4.33)$$

Dem. Su demostración resulta evidente aplicando las cotas (4.27) y (4.28). □

Corolario 4.5.6. *Sea* $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *una matriz fija y* A, $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *con* A *no nula. Asumimos* $B^{\sigma,W} = A^{\sigma,W}$. *Si* $\|A^{D,W}\|\,\|W(B-A)W\| < 1$, *entonces*

$$\frac{\|y-x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa_{D,W}(A)}{1-\dfrac{\kappa_{D,W}(A)\|W(B-A)W\|}{\|WAW\|}}\left(\frac{\kappa_{D,W}(A)\|W(B-A)W\|}{\|WAW\|} + \frac{\|b-c\|}{\|b\|}\right). \quad (4.34)$$

Capítulo 5

Elementos de anillos y álgebras de Banach con espectros idempotentes relacionados

5.1. Introducción

La inversa de Drazin para elementos polares en anillos fue originalmente definida por M. P. Drazin, [29], y generalizada por R. E. Harte, [35], a elementos cuasipolares, denominándose en este caso inversa de Drazin generalizada, o g-Drazin inversa.

En [51], J. J. Koliha y P. Patricio caracterizaron los elementos g-Drazin invertibles en un anillo asociativo unitario con unidad $1 \neq 0$, denotado por $\mathfrak{R}$, cuyos espectros idempotentes son iguales.

El principal propósito de este capítulo será caracterizar los elementos g-Drazin invertibles en un anillo unitario con espectros idempotentes relacionados por la condición

$$1 - (b^\pi - a^\pi)^2 \in \mathfrak{R}^{-1}, \tag{5.1}$$

donde $\mathfrak{R}^{-1}$ representa al grupo de los elementos invertibles de $\mathfrak{R}$ y, a^π y b^π son los espectros idempotentes de a y b, respectivamente.

Se hace notar que la condición (5.1) se cumple, en particular, para elementos cuyos espectros idempotentes son iguales, generalizando así, [51, Teorema 6.1].

Los resultados de esta investigación en anillos se trasladarán al contexto de anillos con involución, con las modificaciones correspondientes. Se analizará la perturbación de elementos EP. En particular, para matrices con igual proyección espectral se tiene [16, Teorema 5.2].

En la Sección 5.2 se darán diversos conceptos y resultados básicos sobre la inversa de Drazin generalizada en anillos y álgebras de Banach. Se introducirán las nociones de elemento cuasipolar, elemento cuasinilpotente, espectro idempotente y elemento regular en un anillo.

Finalizaremos esta sección dando una representación matricial para elementos de un anillo y álgebra de Banach.

En la Sección 5.3 se expondrá el resultado principal de este capítulo. Se darán diversas caracterizaciones de los elementos en un anillo con espectros idempotentes relacionados por la condición (5.1).

En la Sección 5.4 se aplicarán los resultados obtenidos a elementos de anillos con involución para obtener diversas caracterizaciones de la perturbación de elementos EP, esto es, elementos los cuales tienen Drazin y Moore-Penrose inversas y ambas coinciden.

En la Sección 5.5, en el contexto de un álgebra de Banach compleja y asociativa con unidad, que llamaremos $\mathfrak{B}$, se derivará una cota superior de $\|b^D - a^D\|$ y $\|b^D\|$ en términos de $\|a^D(b-a)\|$ y $\|b^\pi - a^\pi\|$.

Los resultados principales de este capítulo se recogen en el artículo ***Elements in rings and Banach algebras with related spectral idempotents***, [21].

5.2. La inversa de Drazin generalizada en anillos y álgebras de Banach

En esta sección expondremos diversas nociones y resultados acerca de la g-Drazin inversa para elementos en un anillo unitario y en una álgebra de Banach con unidad.

5.2.1. Elementos cuasipolares en anillos y álgebras de Banach

A continuación damos la definición de un elemento cuasinilpotente en un anillo $\mathfrak{R}$ dada R. E. Harte en [35].

Antes introducimos los siguientes conjuntos:

Dado $a \in \mathfrak{R}$. Se define el *conmutador* y *doble conmutador* de a por

$$\begin{aligned} comm(a) &= \{x \in \mathfrak{R} : ax = xa\}, \\ comm^2(a) &= \{x \in \mathfrak{R} : xy = yx \text{ para todo } y \in comm(a)\}. \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 5.2.1. Un elemento $a \in \mathfrak{R}$ es *cuasinilpotente* si, para todo $x \in comm(a)$, $1 + xa \in \mathfrak{R}^{-1}$.

Denotaremos por $\mathfrak{R}^{qnil}$ y $\mathfrak{R}^{nil}$ al conjunto de todos los elementos cuasinilpotentes y nilpotentes de $\mathfrak{R}$, respectivamente.

En el contexto de un álgebra de Banach unitaria $\mathfrak{B}$, dotada de una norma $\|\cdot\|$, se tiene la siguiente caracterización de los elementos cuasinilpotentes, [37],

$$a \in \mathfrak{B}^{qnil} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = 0, \tag{5.2}$$

donde $\mathfrak{B}^{qnil}$ representa al conjunto de todos los elementos cuasinilpotentes de $\mathfrak{B}$.

En la siguiente definición se establecen los elementos cuasipolares de un anillo.

DEFINICIÓN 5.2.2. Un elemento $a \in \mathfrak{R}$ es *cuasipolar* si existe un elemento $p \in \mathfrak{R}$ idempotente tal que

$$p \in comm^2(a), \quad ap \in \mathfrak{R}^{qnil}, \quad a + p \in \mathfrak{R}^{-1}. \tag{5.3}$$

Si a es cuasipolar y $ap \in \mathfrak{R}^{nil}$ con índice de nilpotencia k, entonces a es llamado un elemento *polar* de orden k. Si $k = 1$ entonces a es llamado un elemento *simple polar* de $\mathfrak{R}$.

Cualquier elemento idempotente p que verifique las condiciones (5.3) es llamado un *espectro idempotente* de a, término tomado de la teoría espectral en álgebras de Banach [37].

En el Apartado 5.2.2 se demostrará que los elementos cuasipolares, polares y polares simple de anillos son los elementos g-Drazin invertibles, Drazin invertibles y Grupo invertibles de un anillo, respectivamente.

En [37], Harte demuestra que el producto de elementos cuasipolares que conmutan es cuasipolar.

En la siguiente proposición se mostrará que el espectro idempotente, si existe, es único. Antes damos los siguientes lemas.

LEMA 5.2.3. *Sean* a, $b \in \mathfrak{R}$. *Si* $a \in \mathfrak{R}^{-1}$ *y* $b \in \mathfrak{R}^{qnil} \cap comm(a)$, *entonces* $a+b \in \mathfrak{R}^{-1}$.

Dem. Como $b \in \mathfrak{R}^{qnil} \cap comm(a)$ y $a \in \mathfrak{R}^{-1}$, entonces $1 + a^{-1}b \in \mathfrak{R}^{-1}$ si y sólo si $a + b \in \mathfrak{R}^{-1}$. □

Lema 5.2.4. *Sea $a \in \mathfrak{R}$ cuasipolar y p, q dos espectros idempotentes de a, entonces*

(i) $(1-p)(a+p)^{-1}aq = aq(1-p)(a+p)^{-1}$.

(ii) $(a+p)^{-1}(1-p)a = (1-p) = a(1-p)(a+p)^{-1}$.

Dem. Como p, $q \in comm^2(a)$, entonces

$$(1-p)(a+p)^{-1}(a+p)aq = aq(1-p)(a+p)^{-1}(a+p).$$

De aquí, usando que $a + p \in \mathfrak{R}^{-1}$, se sigue que

$$(1-p)(a+p)^{-1}aq = aq(1-p)(a+p)^{-1},$$

lo que prueba (i).

Las identidades mostradas en (ii) son de fácil verificación:

$$1 - p = (1-p)(a+p)(a+p)^{-1} = a(1-p)(a+p)^{-1}$$

y

$$1 - p = (a+p)^{-1}(a+p)(1-p) = (a+p)^{-1}(1-p)a.$$

Con lo que concluimos la demostración. □

Proposición 5.2.5. *Cualquier elemento cuasipolar $a \in \mathfrak{R}$ tiene un único espectro idempotente.*

Dem. Sean p, $q \in \mathfrak{R}$ dos espectros idempotentes de un elemento cuasipolar $a \in \mathfrak{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned} 1-(1-p)q &= 1-(1-p)(a+p)^{-1}(1-p)(a+p)q = 1-(1-p)(a+p)^{-1}(1-p)aq \\ &= 1-(1-p)(a+p)^{-1}aq. \end{aligned}$$

Sea $b = (1-p)(a+p)^{-1}$. Aplicando el Lema 5.2.4 (i) se tiene que $b \in comm(aq)$ y por el Lema 5.2.3 se deduce que $1 - b(aq) \in \mathfrak{R}^{-1}$. Ahora, aplicando el punto (ii) del Lema 5.2.4, y del hecho que p y q conmutan se obtiene

$$1 - b(aq) = 1 - (1-p)q = 1 - (1-p)^2q^2 = \big(1-(1-p)q\big)\big(1+(1-p)q\big)$$

y como $1 - (1-p)q$ es invertible, entonces $(1-p)q = 0$, o sea, $q = pq$.

Similarmente obtenemos que $(1-q)p = 0$. Luego, $q = pq = qp = p$. □

A continuación veamos que para elementos polares de un anillo la condición $p \in comm^2(a)$ puede ser sustituida por la simple conmutatividad, $p \in comm(a)$.

PROPOSICIÓN 5.2.6. *Sea $a \in \mathfrak{R}$ un elemento polar y p su espectro idempotente. Entonces las condiciones (5.3) son equivalentes a:*

$$p \in comm(a), \quad ap \in \mathfrak{R}^{nil}, \quad a+p \in \mathfrak{R}^{-1}. \tag{5.4}$$

DEM. Basta con demostrar que si se cumplen las condiciones dadas en (5.4), entonces $p \in comm^2(a)$. Como $ap \in \mathfrak{R}^{nil}$, entonces existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $(ap)^k = a^k p = 0$.

Tomamos $b = (1-p)(a+p)^{-1}$. Del Lema 5.2.4 (ii) se sigue que $ab = ba = 1-p$. Sea $x \in comm(a)$. Tenemos

$$(1-p)xp = (1-p)^k xp = b^k a^k xp = b^k x a^k p = 0,$$

lo cual implica que $xp = pxp$.

Similarmente se demuestra que $px = pxp$. Luego $xp = px$ y, por consiguiente, $p \in comm^2(a)$. $\square$

5.2.2. La g-Drazin inversa. Definiciones y resultados

En esta sección se darán algunas propiedades de la g-Drazin inversa de elementos cuasipolares en anillos y álgebras de Banach.

DEFINICIÓN 5.2.7. Un elemento $a \in \mathfrak{R}$ es *g-Drazin invertible* si existe un $b \in \mathfrak{R}$ tal que

$$b \in comm^2(a), \quad ab^2 = b, \quad a^2b - a \in \mathfrak{R}^{qnil}. \tag{5.5}$$

Cualquier elemento $b \in \mathfrak{R}$ que verifique las condiciones anteriores es una *g-Drazin inversa* de a, que denotaremos por a^D.

Si $a^2b - a \in \mathfrak{R}^{nil}$, entonces se dice que a es *Drazin invertible* y b es una inversa de Drazin clásica de a. Si a es un elemento polar, entonces la doble conmutatividad puede ser sustituida por $b \in comm(a)$. Denotamos por $\mathfrak{R}^D$ y $\mathfrak{R}^{gD}$ al conjunto de todos los elementos Drazin invertibles y g-Drazin invertibles de $\mathfrak{R}$, respectivamente.

El siguiente resultado establece la equivalencia entre los elementos cuasipolares y los g-Drazin invertibles de $\mathfrak{R}$.

TEOREMA 5.2.8. *Un elemento $a \in \mathfrak{R}$ es g-Drazin invertible si y sólo si a es cuasipolar. En este caso a tiene una única g-Drazin inversa, a^D, dada por*

$$b = (a + a^{\pi})^{-1}(1 - a^{\pi}) = (1 - a^{\pi})(a + a^{\pi})^{-1}. \tag{5.6}$$

Dem. Sea a un elemento cuasipolar con espectro idempotente $p = a^\pi$. Definimos el elemento $b = (a + a^\pi)^{-1}(1 - a^\pi) = (1 - a^\pi)(a + a^\pi)^{-1}$. Veamos que b verifica las condiciones (5.5). Para comprobar que $b \in comm^2(a)$ tenemos que ver que $bx = xb$, para todo x que conmute con a. De $a^\pi \in comm^2(a)$ se sigue a^π conmuta con x luego,

$$bx = (a + a^\pi)^{-1}(1 - a^\pi)x = x(1 - a^\pi)(a + a^\pi)^{-1} = xb.$$

Ahora,

$$ab^2 = a(1 - a^\pi)^2(a + a^\pi)^{-2} = (a + a^\pi)(1 - a^\pi)(a + a^\pi)^{-2} = (1 - a^\pi)(a + a^\pi)^{-1} = b.$$

Por otra parte, aplicando el Lema 5.2.4 (ii),

$$a^2b - a = a^2(1 - a^\pi)(a + a^\pi)^{-1} - a = a(1 - a^\pi) - a = -aa^\pi \in \mathfrak{R}^{qnil}.$$

Luego b es una g-Drazin inversa de a y por lo tanto a es g-Drazin invertible.

Recíprocamente, sea $a \in \mathfrak{R}^{gD}$ con g-Drazin inversa b y sea $p = 1 - ab$. Como $a \in \mathfrak{R}^{gD}$ entonces $p \in comm^2(a)$,

$$(1 - p)^2 = a^2b^2 = ab = 1 - p,$$

lo cual implica que $p^2 = p$. Por otra parte,

$$a^2b - a = a(ab - 1) = -ap \in \mathfrak{R}^{qnil}.$$

Finalmente, veamos que $a + p \in \mathfrak{R}^{-1}$. Observamos que

$$(b + p)(a + p) = (a + p)(b + p) = ab + ap + bp + p = 1 + ap + b(1 - ab) = 1 + ap.$$

De aquí, puesto que $1 + ap \in \mathfrak{R}^{-1}$, se sigue que $a + p \in \mathfrak{R}^{-1}$. Por lo tanto a es cuasipolar y $p = a^\pi$ es el espectro idempotente de a.

De $(a + p)b = b(a + p) = 1 - p + pb = 1 - p + (1 - ab)b = 1 - p$ obtenemos que $b = (a + p)^{-1}(1 - p) = (1 - p)(a + p)^{-1}$.

La unicidad de la g-Drazin inversa a^D se deduce de la unicidad del espectro idempotente p demostrada en la Proposición 5.2.5. □

De esta demostración se obtienen las siguientes relaciones entre el espectro idempotente y la g-Drazin inversa de un elemento $a \in \mathfrak{R}$:

$$a^\pi = 1 - a^D a = 1 - a^D a, \qquad a^\pi a^D = a^D a^\pi = 0. \tag{5.7}$$

Observación 5.2.9. De modo similar al teorema anterior se demuestra que los elementos Drazin invertibles en $\mathfrak{R}$ son los elementos polares de $\mathfrak{R}$.

A continuación damos el concepto de índice extendido a elementos cuasipolares.

DEFINICIÓN 5.2.10. El *índice de g-Drazin*, $ind(a)$, de un elemento cuasipolar $a \in \mathfrak{R}$ es definido por

$$ind(a) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a \in \mathfrak{R}^{-1}, \\ k & \text{si} \quad a^2a^D - a \text{ es nilpotente de índice } k \in \mathbb{N}, \\ \infty & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si el $ind(a) = 0$, entonces a es invertible y $a^D = a^{-1}$. Si el $ind(a) = 1$, la g-Drazin inversa de a es llamada el *Grupo inverso*, y lo denotaremos por $a^\sharp$. El conjunto de todos los elementos que poseen Grupo inverso es denotado por $\mathfrak{R}^\sharp$. Observamos que el índice de g-Drazin de $a \in \mathfrak{R}$ es finito si y sólo si a es polar.

Es claro que todo elemento polar es g-Drazin invertible pero si es cuasipolar posee Drazin inversa si y sólo si su índice es finito.

A la vista de esta definición vemos que

$$\mathfrak{R}^{-1} \subseteq \mathfrak{R}^\sharp \subseteq \mathfrak{R}^D \subseteq \mathfrak{R}^{gD}.$$

En la siguiente proposición se dan algunas propiedades de la g-Drazin inversa.

PROPOSICIÓN 5.2.11. *Sea $a \in \mathfrak{R}^{gD}$ con espectro idempotente a^π, entonces*

(i) $a^D + a^\pi \in \mathfrak{R}^{-1}$.

(ii) $a^D \in \mathfrak{R}^\sharp$ *y* $(a^D)^\pi = (a^\pi)^D = a^\pi$.

DEM. (i): Tenemos que

$$(a^D + a^\pi)(a + a^\pi) = a^Da + a^\pi a + a^\pi = 1 + a^\pi a \in \mathfrak{R}^{-1},$$

y como $a + a^\pi \in \mathfrak{R}^{-1}$ y, a^D, a^π y a conmutan entre si, entonces $a^D + a^\pi \in \mathfrak{R}^{-1}$.

(ii): Veamos primero que el espectro idempotente de a^D es a^π. De (5.7) se tiene que $a^Da^\pi = 0$ luego $a^Da^\pi \in \mathfrak{R}^{nil} \subseteq \mathfrak{R}^{qnil}$. Por (i) se tiene que $a^D + a^\pi \in \mathfrak{R}^{-1}$. Sea $x \in comm(a^D)$, entonces $a^\pi x = xa^\pi$ y $a^\pi \in comm^2(a^D)$. Luego $(a^D)^\pi = a^\pi$. Por otra parte, de la g-Drazin inversa para elementos idempotentes se tiene que $(a^\pi)^D = a^\pi$.

Ahora,

$$(a^D)^2(a^D)^D - a^D = a^D(a^D(a^D)^D - 1) = -a^Da^\pi = 0,$$

luego $ind((a^D)^2(a^D)^D - a^D) = 1$ y, por consiguiente, $a^D \in \mathfrak{R}^\sharp$. □

Concluiremos este apartado dando algunos resultados relativos a la g-Drazin inversa en el contexto de un álgebra de Banach.

Si $a \in \mathfrak{B}$, vamos a denotar por *iso* $\sigma(a)$ y *acc* $\sigma(a)$ al conjunto de los puntos aislados y de acumulación del espectro de a, que llamaremos $\sigma(a)$, respectivamente.

En el siguiente teorema se caracterizan los elementos g-Drazin invertibles en un álgebras de Banach.

Teorema 5.2.12. *La siguientes condiciones sobre $a \in \mathfrak{B}$ son equivalentes:*

(i) $0 \notin acc\, \sigma(a)$.

(ii) *a es g-Drazin invertible.*

(iii) *a es cuasipolar.*

Dem. En [37, Teorema 9.7.6] se demuestra (i) $\Leftrightarrow$ (iii). Para la equivalencia entre (i) y (ii) ver [48]. $\square$

En el marco de un álgebra de Banach la doble conmutatividad $b \in comm^2(a)$ puede ser relajada por la simple conmutatividad.

Llamaremos $\mathfrak{B}^{gD}$ al conjunto de todos los elementos g-Drazin invertibles de $\mathfrak{B}$.

Dado un elemento $a \in \mathfrak{B}^{gD}$ con espectro idempotente a^{π}, denotamos por $R(\lambda;\, a)$ a la *resolvente* del elemento a, dada por $R(\lambda;\, a) = (\lambda 1 - a)^{-1}$.

En [48] se demostró que $R(\lambda;\, a)$ tiene un desarrollo en serie de Laurent en un entorno del $0 \in iso\, \sigma(a)$ dado por:

$$R(\lambda;\, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} a^n a^{\pi} - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (a^D)^{n+1}, \quad 0 < |\lambda| < r,$$

para un $r > 0$ suficientemente pequeño.

Observamos que a^D es el término independiente del desarrollo en serie.

En relación con la resolvente se tiene que el 0 es un polo de $R(\lambda;\, a)$ si y sólo si a es Drazin invertible. En particular, si 0 es un polo simple, entonces a posee Grupo inverso.

5.2.3. Resultados sobre elementos en anillos. Elementos regulares

En este apartado se expondrán algunos resultados básicos sobre los elementos de un anillo, necesarios en la demostración del resultado principal de este capítulo. También se definirán los elementos regulares dando algunas de sus propiedades.

Dado $a \in \mathfrak{R}$, introducimos los conjuntos siguientes:

$$\begin{aligned} a\mathfrak{R} &= \{ax : x \in \mathfrak{R}\}, & \mathfrak{R}a &= \{xa : x \in \mathfrak{R}\}, \\ a^0 &= \{y \in \mathfrak{R} : ay = 0\}, & {}^0a &= \{y \in \mathfrak{R} : ya = 0\}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

En teoría de anillos los conjuntos $a\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{R}a$ se denominan ideal derecho principal e ideal izquierdo principal generado por a, respectivamente. Los conjuntos a^0 y ${}^0a$ son ideales derecho e izquierdo, respectivamente. Estos conjuntos se denominan anulador derecho y anulador izquierdo generado por a, respectivamente.

Veamos que $a\mathfrak{R}$ es un ideal derecho:

- Dados $ax, ay \in a\mathfrak{R}$, entonces $ax + ay = a(x + y) \in a\mathfrak{R}$.
- El elemento $0 = a0 \in a\mathfrak{R}$.
- Si $ax \in a\mathfrak{R}$, entonces $axy \in a\mathfrak{R}$, para todo $y \in \mathfrak{R}$.

Similarmente se demuestra el resto de los conjuntos.

Si $M \subset \mathfrak{R}$, definimos

$$M^0 = \{y \in \mathfrak{R} : My = \{0\}\} \quad \text{y} \quad {}^0M = \{y \in \mathfrak{R} : yM = \{0\}\}. \tag{5.9}$$

A la vista de las definiciones de los conjuntos (5.8) podemos establecer las propiedades siguientes.

LEMA 5.2.13. *Sea $a \in \mathfrak{R}$. Se verifican las siguiente propiedades:*

(i) $a \in \mathfrak{R}^{-1} \Rightarrow a\mathfrak{R} = \mathfrak{R}a = \mathfrak{R}$.

(ii) $c \in comm(a) \Rightarrow ca\mathfrak{R} \subseteq a\mathfrak{R}$ *y* $\mathfrak{R}ac \subseteq \mathfrak{R}a$.

(iii) $a \in \mathfrak{R}^{-1} \Rightarrow (ab)^0 = b^0$, *para todo* $b \in \mathfrak{R}$.

(iv) $b \in \mathfrak{R}^{-1} \Rightarrow {}^0(ab) = {}^0a$, *para todo* $a \in \mathfrak{R}$.

Dem. (i): Sea $a \in \mathfrak{R}^{-1}$, entonces

$$y \in a\mathfrak{R} \Rightarrow y = ax = axa^{-1}a \in \mathfrak{R}a,$$
$$y \in \mathfrak{R}a \Rightarrow y = xa = aa^{-1}xa \in a\mathfrak{R}.$$

Por otra parte,

$$x \in \mathfrak{R} \Rightarrow x = xa^{-1}a \in \mathfrak{R}a,$$
$$y \in \mathfrak{R}a \Rightarrow y = xa \Leftrightarrow ay = axa \in a\mathfrak{R} \Rightarrow y \in \mathfrak{R}.$$

(ii): Consideremos un elemento $x \in ca\mathfrak{R}$, entonces $x = cay = acy \in a\mathfrak{R}$, donde $y \in \mathfrak{R}$. Análogamente se deduce la otra inclusión.

(iii): Sea $x \in (ab)^0$, entonces $abx = 0 \Leftrightarrow bx = 0$, luego $x \in b^0$. Consideramos ahora $x \in b^0$, entonces $bx = 0 \Leftrightarrow abx = 0$ y $x \in (ab)^0$.

(iv): Tomamos $x \in {}^0(ab)$, entonces $xab = 0 \Leftrightarrow xa = 0$. Luego $x \in {}^0a$. Para la otra inclusión elegimos $x \in {}^0a$ por lo que $xa = 0 \Leftrightarrow xab = 0$ y así $x \in {}^0(ab)$. □

A continuación definimos los elementos regulares.

Definición 5.2.14. Un elemento $a \in \mathfrak{R}$ es *regular* (en el sentido de von Neumann) si existe un elemento inverso interior x, i.e., si existe un $x \in \mathfrak{R}$ tal que $axa = a$.

Cualquier inversa interior de a será denotada por a^- y el conjunto de todos los elementos regulares de $\mathfrak{R}$ será denotado por $\mathfrak{R}^-$. Observamos que $\mathfrak{R}^{-1} \subseteq \mathfrak{R}^-$.

De esta definición se deducen las siguientes propiedades.

Lema 5.2.15. *Sea $a \in \mathfrak{R}^{gD}$ con g-Drazin inversa a^D, entonces*

(i) $a^D \in \mathfrak{R}^-$.

(ii) $a^Da \in \mathfrak{R}^-$.

(iii) *Si $b \in \mathfrak{R}^{-1}$, entonces a^Db, $ba^D \in \mathfrak{R}^-$.*

En [38], R. E. Hartwig estableció otras propiedades sobre los conjuntos (5.8) y (5.9), las cuales damos a continuación. Damos su demostración por completitud.

Proposición 5.2.16. *Sea $a \in \mathfrak{R}$ un elemento regular y M, $N \subset \mathfrak{R}$. Entonces,*

(i) $a \in \mathfrak{R}^{gD} \Rightarrow \mathfrak{R}a^D = \mathfrak{R}aa^D$ *y* $a^D\mathfrak{R} = aa^D\mathfrak{R}$.

(ii) $a^0 = (\mathfrak{R}a)^0$.

(iii) $\mathfrak{R}a = {}^0\big((\mathfrak{R}a)^0\big) = {}^0\big(a^0\big)$.

(iv) $M \subseteq N \Rightarrow {}^0M \supseteq {}^0N$.

DEM. (i): Vamos a probar la primera igualdad. Sea $x \in \mathfrak{R}a^D$, entonces $x = ya^D = ya^D aa^D \in \mathfrak{R}aa^D$, con $y \in \mathfrak{R}$. Recíprocamente, tomamos ahora $x \in \mathfrak{R}aa^D$, entonces $x = yaa^D \in \mathfrak{R}a^D$. De forma similar se demuestra la segunda igualdad.

(ii): Sea $y \in a^0$, entonces $ay = 0$ y $xay = 0$, para todo $x \in \mathfrak{R}$. Luego $y \in (\mathfrak{R}a)^0$.
Sea ahora $y \in (\mathfrak{R}a)^0$, entonces $\mathfrak{R}ay = xay = 0$, para todo $x \in \mathfrak{R}$. Si cogemos $x = 1$, entonces $ay = 0$ y así, $y \in a^0$.

(iii): Consideramos $ya \in \mathfrak{R}a$. Si $x \in a^0$, entonces $ax = 0$ y $yax = 0$, para todo $x \in a^0$. Luego $ya \in {}^0\big(a^0\big)$.
Si $y \in {}^0\big(a^0\big)$, entonces $yx = 0$, para todo $x \in a^0$. Ahora, como a es regular, $y = ya^-a + y(1 - a^-a)$ y $a - aa^-a = 0 = a(1 - a^-a)$, por lo que $(1 - a^-a) \in a^0$, y como $yx = 0$, para todo $x \in a^0$, tenemos que $y(1 - a^-a) = 0$. Luego $y = ya^-a \in \mathfrak{R}a$, eligiendo $x = ya^- \in \mathfrak{R}a$. Esto demuestra que $\mathfrak{R}a = {}^0\big(a^0\big)$. Para obtener la igualdad ${}^0((\mathfrak{R}a)^0) = {}^0(a^0)$ basta con aplicar (ii).

(iv): Si $x \in {}^0N$, entonces $xN = \{0\}$. Para todo $y \in M \subseteq N$ se cumple $xy = 0$ por lo cual $xM = \{0\}$ y así, $x \in {}^0M$. $\square$

5.2.4. Representación matricial de elementos en anillos y álgebras de Banach

En esta sección daremos una representación matricial para los elementos de anillos.

Decimos que $\mathcal{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ es un *sistema total de elementos idempotentes* no nulos en un anillo $\mathfrak{R}$ si $p_i^2 = p_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $p_ip_j = 0$ si $i \neq j$, y $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Dado un sistema total $\mathcal{P}$ de elementos idempotentes no nulos en un anillo $\mathfrak{R}$, consideramos el conjunto $\mathcal{M}_n(\mathfrak{R}, \mathcal{P})$ consistiendo en todas las matrices $A = \big(a_{ij}\big)_{i,j=1}^{n}$ con elementos en $\mathfrak{R}$ tal que $a_{ij} \in p_i\mathfrak{R}p_j$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, el cual es un anillo unitario con las operaciones usuales del álgebra matricial y con el elemento unidad $\mathcal{I}(\mathcal{P}) = diag(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

Si $\mathcal{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ es un sistema total de elementos idempotentes no nulos y

$x \in \mathfrak{R}$, definimos la aplicación

$$\varphi : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathfrak{R}, \mathcal{P})$$

por

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} p_1xp_1 & p_1xp_2 & \cdots & p_1xp_n \\ p_2xp_1 & p_2xp_2 & \cdots & p_2xp_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_nxp_1 & p_nxp_2 & \cdots & p_nxp_n \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

Denotaremos a la $\varphi(x)$ por $\big(p_ixp_j\big)_{i,j=1}^n$.

En el siguiente resultado demostramos que φ es un isomorfismo de anillos.

Lema 5.2.17. *La aplicación φ es un isomorfismo de anillos de $\mathfrak{R}$ en $\mathcal{M}_n(\mathfrak{R}, \mathcal{P})$.*

Dem. Tenemos que, para cada $x \in \mathfrak{R}$,

$$x = \Big(\sum_{i=1}^n p_i\Big)x\Big(\sum_{i=1}^n p_i\Big) = \sum_{i,j=1}^n p_ixp_j.$$

Veamos que φ es un homomorfismo de anillos. Sean $a, b \in \mathfrak{R}$ y 1 el elemento unidad de $\mathfrak{R}$, entonces

$$\varphi(a+b) = \big(p_i(a+b)p_j\big)_{i,j=1}^n = \big(p_iap_j\big)_{i,j=1}^n + \big(p_ibp_j\big)_{i,j=1}^n = \varphi(a) + \varphi(b).$$

$$\begin{aligned} \varphi(ab) &= \big(p_iabp_j\big)_{i,j=1}^n = \left(p_ia\left(\sum_{k=1}^n p_k\right)bp_j\right)_{i,j=1}^n = \left(\sum_{k=1}^n \big(p_iap_k\big)\big(p_kbp_j\big)\right)_{i,j=1}^n \\ &= \big(p_iap_j\big)_{i,j=1}^n \ \big(p_ibp_j\big)_{i,j=1}^n = \varphi(a)\varphi(b). \end{aligned}$$

φ preserva la unidad.

$$\varphi(1) = \big(p_ip_j\big)_{i,j=1}^n = diag(p_1, p_2, \dots, p_n) = \mathcal{I}(\mathcal{P}).$$

Por lo tanto la aplicación φ es un homomorfismo.

Probemos que es un isomorfismo. Para probar la inyectividad de φ. Tenemos que,

$$\varphi(a) - \varphi(b) = \big(p_iap_j\big)_{i,j=1}^n - \big(p_ibp_j\big)_{i,j=1}^n = \big(p_i(a-b)p_j\big)_{i,j=1}^n = O,$$

entonces $\sum\limits_{i=1}^n p_i(a-b)p_1 = \sum\limits_{i=1}^n p_i(a-b)p_2 = \ldots = \sum\limits_{i=1}^n p_i(a-b)p_n = 0$ ó, equivalentemente, $(a-b)p_1 = (a-b)p_2 = \ldots = (a-b)p_n = 0$, ya que $\sum\limits_{i=1}^n p_i = 1$. De aquí se sigue que $(a-b)\sum_{i=1}^{n} p_i = 0$, luego $a = b$.

Finalmente, tomemos la matriz $A = \big(a_{ij}\big) \in \mathcal{M}_n(\mathfrak{R}, \mathcal{P}),\ \ i,j \in \{1,\dots,n\}$ y $a \in \mathfrak{R}$ tal que $a = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}$. Como $a_{ij} \in p_i \mathfrak{R} p_j$, entonces $a_{ij} = p_i a p_j$, para todo i,j.

Luego

$$\varphi(a) = \big(p_i a p_j\big)_{i,j=1}^{n} = \big(a_{ij}\big)_{i,j=1}^{n} = A.$$

Así para toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathfrak{R}, \mathcal{P})$ existe $a \in \mathfrak{R}$ tal que $\varphi(a) = A$, por lo que es sobreyectiva. $\square$

Este isomorfismo manda elementos invertibles de $\mathfrak{R}$ en elementos invertibles de $\mathcal{M}_n(\mathfrak{R}, \mathcal{P})$ y viceversa. Así

$$\varphi(1) = \varphi(aa^{-1}) = \varphi(a)\varphi(a^{-1}) \Leftrightarrow \big(\varphi(a)\big)^{-1} = \varphi(a^{-1}).$$

Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Banach con unidad 1, entonces el conjunto $\mathcal{M}_n(\mathfrak{B}, \mathcal{P})$, construido de forma análoga a $\mathcal{M}_n(\mathfrak{R}, \mathcal{P})$, es también un álgebra de Banach con unidad $\mathcal{I}(\mathcal{P})$ y con la norma

$$\|A\| = \Big\| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \Big\|, \quad A = (a_{ij})_{i,\,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_n(\mathfrak{B}, \mathcal{P}).$$

Veamos que es una norma matricial. Dadas las matrices A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathfrak{B}, \mathcal{P})$ tenemos

$$\|A+B\| = \Big\| \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) \Big\| \leq \Big\| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \Big\| + \Big\| \sum_{k,l=1}^{n} b_{ij} \Big\| = \|A\| + \|B\|$$

y

$$\begin{aligned} \|AB\| &= \Big\| \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \Big) \Big\| = \Big\| \Big(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \Big) \Big(\sum_{m,j=1}^{n} b_{mj} \Big) \Big\| \\ &\leq \Big\| \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \Big\| \, \Big\| \sum_{m,j=1}^{n} b_{mj} \Big\| = \|A\| \, \|B\|, \end{aligned}$$

ya que $a_{ik} b_{mj} = 0$, cuando $m \neq k$.

Claramente $\|\mathcal{I}(\mathcal{P})\| = \Big\| \sum_{i=1}^{n} p_i \Big\| = 1$.

Observamos que para cada $x \in \mathfrak{B}$,

$$x = \sum_{i,j=1}^{n} p_i x p_j.$$

Tenemos que la aplicación

$$\phi : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathfrak{B}, \mathcal{P})$$

definida como en (5.10), junto con la norma matricial anterior, es un isomorfismo isométrico entre álgebras de Banach, [12].

Los isomorfismos entre anillos y álgebras de Banach vistos nos permiten establecer la identificación:

$$x = \big(p_i x p_j\big)_{i,j=1}^{n}, \tag{5.11}$$

para un sistema total de elementos idempotentes no nulos $\mathcal{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

Si $a \in \mathfrak{R}$, tenemos que $a_{ii} = p_i x p_i \in p_i \mathfrak{R} p_i$. Denotaremos por $\mathfrak{R}_i$ al subanillo $p_i \mathfrak{R} p_i$, el cual es unitario con unidad p_i, así a_{ii}^{-1} denota la inversa de a_{ii} en $\mathfrak{R}_i$; similarmente a_{ii}^{D} es la g-Drazin inversa de a_{ii} en $\mathfrak{R}_i$.

Por abreviar renombramos los elementos de la diagonal por a_i.

Utilizando la terminología matricial se dice que un elemento $a \in \mathfrak{R}$ es g-Drazin invertible si y sólo si existe un sistema total de elementos idempotentes no nulos (p_1, p_2) en $\mathfrak{R}$ tal que

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \tag{5.12}$$

donde $a_1 \in \mathfrak{R}_1^{-1}$ y $a_2 \in \mathfrak{R}_2^{qnil}$. Se hace notar que $(p_1, p_2) = (1 - a^\pi, a^\pi)$, entonces

$$a^D = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad a^\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como la inversa a_1^{-1} es tomada en $\mathfrak{R}_1 = (1 - a^\pi)\mathfrak{R}(1 - a^\pi)$, tenemos que $a_1^{-1} = 0$ si $a^\pi = 1$. Es evidente que si $a^\pi = 0$, entonces a es invertible en $\mathfrak{R}$.

5.3. Caracterización de elementos en anillos con espectros idempotentes relacionados

En esta sección se establecerá el resultado principal de este capítulo. Se caracterizarán los elementos a, $b \in \mathfrak{R}$ con espectros idempotentes satisfaciendo $b^\pi = a^\pi + s$, donde s es un elemento dado de $\mathfrak{R}$ tal que $1 - s^2 \in \mathfrak{R}^{-1}$. Observamos que, en particular, para cualquier $s \in \mathfrak{R}^{qnil}$ tenemos que $1 - s^2 \in \mathfrak{R}^{-1}$.

Antes de abordar esta caracterización daremos algunos resultados.

En la siguiente proposición vamos a mostrar algunas relaciones involucrando el espectro idempotente a^π y los elementos idempotentes de la forma $a^\pi + s$.

Proposición 5.3.1. *Sea* $a \in \mathfrak{R}^{gD}$ *y* $s \in \mathfrak{R}$ *tal que* $1 - s^2 \in \mathfrak{R}^{-1}$. *Si* $a^\pi + s$ *es idempotente, entonces*

(i) $a^\pi + s = (1-s)^{-1}a^\pi(1+s) = (1+s)a^\pi(1-s)^{-1}$.

(ii) $1 - a^\pi - s = (1-s)(1-a^\pi)(1+s)^{-1} = (1+s)^{-1}(1-a^\pi)(1-s)$.

(iii) *Sea* $r = (1+s)a^\pi + (1-s)(1-a^\pi)$, *entonces* $r \in \mathfrak{R}^{-1}$ *con* $r^{-1} = a^\pi(1-s)^{-1} + (1-a^\pi)(1+s)^{-1}$ *y*
$$a^\pi + s = r a^\pi r^{-1}.$$

Dem. (i): Como $a^\pi + s$ es idempotente, entonces

$$\begin{aligned}(a^\pi + s)^2 = a^\pi + s &\Leftrightarrow a^\pi + a^\pi s + s a^\pi + s^2 = a^\pi + s\\ &\Leftrightarrow a^\pi(1+s) = -s a^\pi - s^2 + a^\pi + s\\ &\Leftrightarrow a^\pi(1+s) = (1-s)(a^\pi + s)\\ &\Leftrightarrow a^\pi + s = (1-s)^{-1}a^\pi(1+s).\end{aligned}$$

La segunda igualdad en (i) se obtiene de forma similar.

(ii): De la identidad $a^\pi(1+s) = -s a^\pi - s^2 + a^\pi + s$, se sigue

$$\begin{aligned}1 - a^\pi - a^\pi s = -1 + s a^\pi + s^2 - a^\pi - s &\Leftrightarrow (1 - a^\pi - s)(1+s) = (1-s)(1-a^\pi)\\ &\Leftrightarrow 1 - a^\pi - s = (1-s)(1-a^\pi)(1+s)^{-1}.\end{aligned}$$

Análogamente deducimos la segunda igualdad en (ii).

(iii): Sean $r = (1+s)a^\pi + (1-s)(1-a^\pi)$ y $t = a^\pi(1-s)^{-1} + (1-a^\pi)(1+s)^{-1}$. Aplicando (i) y (ii) tenemos

$$\begin{aligned}rt &= \big((1+s)a^\pi + (1-s)(1-a^\pi)\big)\big(a^\pi(1-s)^{-1} + (1-a^\pi)(1+s)^{-1}\big)\\ &= (1+s)a^\pi(1-s)^{-1} + (1-s)(1-a^\pi)(1+s)^{-1} = a^\pi + s + 1 - a^\pi - s = 1.\end{aligned}$$

Del mismo modo obtenemos $tr = 1$. Consecuentemente, $t = r^{-1}$. Por otra parte,

$$\begin{aligned}r a^\pi r^{-1} &= \big((1+s)a^\pi + (1-s)(1-a^\pi)\big)a^\pi\big(a^\pi(1-s)^{-1} + (1-a^\pi)(1+s)^{-1}\big)\\ &= (1+s)a^\pi(1-s)^{-1} = a^\pi + s,\end{aligned}$$

donde hemos aplicado la propiedad (i) en la última igualdad. $\square$

Observación 5.3.2. De la condición $(a^\pi + s)^2 = a^\pi + s$ se deduce que $s^2(1 - a^\pi) = (1 - a^\pi)s^2 = (1 - a^\pi)s(1 - a^\pi)$ y $s^2 a^\pi = a^\pi s^2 = -a^\pi s a^\pi$.

Lema 5.3.3. *Sea $\mathcal{P} = (p_1, p_2)$ un sistema total de elementos idempotentes no nulos en un anillo $\mathfrak{R}$ y $z \in \mathfrak{R}$. Si*

$$p_2 z p_1 = 0 \quad y \quad p_i z p_i \in (p_i \mathfrak{R} p_i)^{-1},\ i = 1, 2,$$

entonces $z \in \mathfrak{R}^{-1}$.

Dem. Dado que $p_2 z p_1 = 0$, usando el isomorfismo $\varphi : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathfrak{R}, \mathcal{P})$, definido en el Apartado 5.2.4, obtenemos

$$\varphi(z) = \begin{pmatrix} p_1 z p_1 & p_1 z p_2 \\ 0 & p_2 z p_2 \end{pmatrix}.$$

Luego, dado que $p_i z p_i \in (p_i \mathfrak{R} p_i)^{-1}$, $i = 1, 2$, se sigue que la matriz $\varphi(z)$ es invertible en $\mathcal{M}_2(\mathfrak{R}, \mathcal{P})$ y, consecuentemente, por el isomorfismo z es invertible en $\mathfrak{R}$. $\square$

Lema 5.3.4. *Sea $\mathcal{P} = (p_1, p_2)$ un sistema total de elementos idempotentes no nulos en un anillo $\mathfrak{R}$. Si $z \in \mathfrak{R}$ conmuta con p_2 y $1 + p_2 z \in \mathfrak{R}^{-1}$, entonces*

$$z + p_2 \in \mathfrak{R}^{-1} \Leftrightarrow p_1 z + p_2 \in \mathfrak{R}^{-1}.$$

Dem. Dado que $z \in \mathfrak{R}$ conmuta con p_2, se sigue que

$$(p_1 z + p_2)(1 + p_2 z) = z + p_2.$$

Luego, la equivalencia que queremos probar se tiene, ya que $1 + p_2 z \in \mathfrak{R}^{-1}$. $\square$

Ahora estamos en condiciones de dar el resultado principal de este capítulo.

Teorema 5.3.5. *Sea $a \in \mathfrak{R}^{gD}$ y $s \in \mathfrak{R}$ tal que $1 - s^2 \in \mathfrak{R}^{-1}$. Si $a^\pi + s$ es idempotente, entonces las siguientes condiciones sobre $b \in \mathfrak{R}$ son equivalentes:*

(i) $b \in \mathfrak{R}^{gD}$, $b^\pi = a^\pi + s$.

(ii) $a^\pi + s \in comm^2(b)$, $(a^\pi + s)b \in \mathfrak{R}^{qnil}$, $b + a^\pi + s \in \mathfrak{R}^{-1}$.

(iii) $a^\pi + s \in comm^2(b)$, $(a^\pi + s)b \in \mathfrak{R}^{qnil}$, $1 + s + a^D(b - a) \in \mathfrak{R}^{-1}$.

(iv) $b \in \mathfrak{R}^{gD}$, $1 + s + a^D(b - a) \in \mathfrak{R}^{-1}$,

$$b^D = \big(1 + s + a^D(b - a)\big)^{-1} a^D (1 - s).$$

(v) $b \in \mathfrak{R}^{gD}$,
$$(1+s)b^D - a^D(1-s) = a^D(a-b)b^D.$$

(vi) $b \in \mathfrak{R}^{gD},\ a^\pi + s \in comm(b),\ 1-(b^\pi - a^\pi - s)^2 \in \mathfrak{R}^{-1}$.

(vii) $b \in \mathfrak{R}^{gD},\ b^D\mathfrak{R} \subseteq (1-s)a^D\mathfrak{R},\ \big(b^D(1+s)\big)^0 \subseteq \big(a^D\big)^0$.

Dem. (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Esta equivalencia se deduce del Teorema 5.2.8.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Sea $r = (1+s)a^\pi + (1-s)(1-a^\pi)$. Por la Proposición 5.3.1 (iii), se tiene que $r \in \mathfrak{R}^{-1}$ y $a^\pi + s = ra^\pi r^{-1}$. Entonces (ii) y (iii) son equivalentes a:

(ii)′ $a^\pi \in comm^2(r^{-1}br),\ a^\pi r^{-1}br \in \mathfrak{R}^{qnil},\ r^{-1}br + a^\pi \in \mathfrak{R}^{-1}$.

(iii)′ $a^\pi \in comm^2(r^{-1}br),\ a^\pi r^{-1}br \in \mathfrak{R}^{qnil},\ ra^\pi + a^Dbr \in \mathfrak{R}^{-1}$.

Mostraremos que bajo las hipótesis $a^\pi \in comm^2(r^{-1}br)$ y $a^\pi r^{-1}br \in \mathfrak{R}^{qnil}$ se cumple que
$$r^{-1}br + a^\pi \in \mathfrak{R}^{-1} \Leftrightarrow ra^\pi + a^Dbr \in \mathfrak{R}^{-1}. \tag{5.13}$$

Supongamos que $r^{-1}br + a^\pi \in \mathfrak{R}^{-1}$. Sea $z = ra^\pi + a^Dbr$. Entonces,
$$z = a^\pi ra^\pi + a^Dr(r^{-1}br + a^\pi)(1-a^\pi) + (1-a^\pi)(r + a^Dbr)a^\pi.$$

Probemos que z es invertible. Sea $(p_1, p_2) = (1-a^\pi, a^\pi)$. Observamos que $p_1,\ p_2$ conmutan con $r^{-1}br$ y, por la Observación 5.3.2, también con $1-s^2$. Se verifica que
$$\begin{aligned}
p_2zp_1 &= p_2\big(a^\pi ra^\pi + a^Dr(r^{-1}br + a^\pi)(1-a^\pi) + (1-a^\pi)(r + a^Dbr)a^\pi\big)p_1 = 0,\\
p_1zp_1 &= p_1\big(a^\pi ra^\pi + a^Dr(r^{-1}br + a^\pi)(1-a^\pi) + (1-a^\pi)(r + a^Dbr)a^\pi\big)p_1\\
&= p_1a^Dr(r^{-1}br + a^\pi)p_1 = p_1(a+a^\pi)^{-1}p_1r(r^{-1}br + a^\pi)p_1,\\
p_2zp_2 &= p_2\big(a^\pi ra^\pi + a^Dr(r^{-1}br + a^\pi)(1-a^\pi) + (1-a^\pi)(r + a^Dbr)a^\pi\big)p_2 = p_2rp_2.
\end{aligned}$$

Veamos que los elementos p_1zp_1 y p_2zp_2 son invertibles en $\mathfrak{R}_1$ y $\mathfrak{R}_2$, respectivamente.

La expresión que aparece en p_1zp_1 se puede reescribir de la forma siguiente:
$$\begin{aligned}
p_1r(r^{-1}br + a^\pi)p_1 &= p_1rp_1(r^{-1}br + a^\pi)p_1\\
&= p_1\big((1+s)a^\pi + (1-s)(1-a^\pi)\big)p_1(r^{-1}br + a^\pi)p_1\\
&= p_1(1-s)p_1(r^{-1}br + a^\pi)p_1\\
&= p_1(1-s)(r^{-1}br + a^\pi)p_1.
\end{aligned}$$

Luego, en el subanillo $\mathfrak{R}_1$ con unidad p_1, se tiene

$$\begin{aligned}(p_1zp_1)^{-1} &= \big(p_1(a+a^\pi)^{-1}p_1r(r^{-1}br+a^\pi)p_1\big)^{-1}\\ &= \big(p_1(a+a^\pi)^{-1}(1-s)(r^{-1}br+a^\pi)p_1\big)^{-1}\\ &= p_1(r^{-1}br+a^\pi)^{-1}(1-s)^{-1}(a+a^\pi)p_1.\end{aligned}$$

En el subanillo $\mathfrak{R}_2$ con unidad p_2 tenemos,

$$\begin{aligned}(p_2zp_2)^{-1} = (p_2rp_2)^{-1} &= \big(p_2\big((1+s)a^\pi+(1-s)(1-a^\pi)\big)p_2\big)^{-1}\\ &= (p_2(1+s)p_2)^{-1}\\ &= (p_2(1-s^2)p_2)^{-1}\\ &= p_2(1-s^2)^{-1}p_2.\end{aligned}$$

Así, por el Lema 5.3.3, z es invertible en $\mathfrak{R}$.

Recíprocamente, supongamos que $ra^\pi+a^Dbr\in\mathfrak{R}^{-1}$ y demostraremos que $r^{-1}br+a^\pi\in\mathfrak{R}^{-1}$. Sea el elemento

$$u=(a^D+a^\pi)(1-s^2)\big((1-a^\pi)r^{-1}br+a^\pi\big).$$

Vemos que

$$\big((1-a^\pi)r^{-1}br+a^\pi\big)(1+a^\pi r^{-1}br)=r^{-1}br+a^\pi.$$

De $a^\pi r^{-1}br\in\mathfrak{R}^{qnil}$ se deduce que $1+a^\pi r^{-1}br\in\mathfrak{R}^{-1}$ y, del Lema 5.3.4, se sigue

$$(1-a^\pi)r^{-1}br+a^\pi\in\mathfrak{R}^{-1}\Leftrightarrow r^{-1}br+a^\pi\in\mathfrak{R}^{-1}.$$

Por lo tanto,

$$u\in\mathfrak{R}^{-1}\Leftrightarrow r^{-1}br+a^\pi\in\mathfrak{R}^{-1}.$$

Verificamos que

$$\begin{aligned}p_2up_1 &= p_2(a^D+a^\pi)(1-s^2)\big((1-a^\pi)r^{-1}br+a^\pi\big)p_1=0,\\ p_1up_1 &= p_1(a^D+a^\pi)(1-s^2)((1-a^\pi)r^{-1}br+a^\pi)p_1=p_1a^Dp_1(1-s^2)p_1r^{-1}brp_1\\ &= p_1a^Dp_1rp_1r^{-1}brp_1=p_1a^Dbrp_1=p_1(ra^\pi+a^Dbr)p_1,\\ p_2up_2 &= p_2(1-s^2)p_2.\end{aligned}$$

Además, los inversos de p_1up_1 y p_2up_2 vienen dados por

$$\begin{aligned}p_1up_1 &= (p_1(ra^\pi+a^Dbr)p_1)^{-1}=p_1(ra^\pi+a^Dbr)^{-1}p_1,\\ p_2up_2 &= (p_2(1-s^2)p_2)^{-1}=p_2(1-s^2)^{-1}p_2,\end{aligned}$$

en los subanillos $\mathfrak{R}_1$ y $\mathfrak{R}_2$, respectivamente. Luego, por el Lema 5.3.3, u es invertible en $\mathfrak{R}$, y consecuentemente $r^{-1}br + p_2 \in \mathfrak{R}^{-1}$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Dado que (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii), entonces tenemos $b^\pi = a^\pi + s$ y $1 + s + a^D(b-a) \in \mathfrak{R}^{-1}$. Por la identidad $a^D = (a + a^\pi)(1 - a^\pi)$, dada en (5.6), se deduce que

$$\begin{aligned}\big(1 + s + a^D(b-a)\big)\, b^D &= (a^\pi + s + a^D b)\,(1 - (a^\pi + s))\,(b + a^\pi + s)^{-1}\\ &= a^D b(1 - a^\pi - s)(b + a^\pi + s)^{-1}\\ &= a^D(1-s).\end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (v): De $b^D = \big(1 + s + a^D(b-a)\big)^{-1} a^D(1-s)$ se sigue

$$(1+s)b^D + a^D(b-a)b^D = a^D(1-s), \tag{5.14}$$

y así se tiene (v).

(v) $\Rightarrow$ (i): Primero multiplicamos por la izquierda la igualdad (5.14) por a^π y después multiplicamos por la derecha la misma igualdad por b^π obteniendo

$$a^\pi(1+s)b^D = 0 \quad \text{y} \quad a^D(1-s)b^\pi = 0.$$

Entonces,

$$a^\pi(1+s)b^D b = aa^D(1-s)b^\pi \Leftrightarrow a^\pi(1+s)(1-b^\pi) = (1-a^\pi)(1-s)b^\pi.$$

Luego,

$$\begin{aligned}a^\pi(1+s) &= \big(a^\pi(1+s) + (1-a^\pi)(1-s)\big)b^\pi\\ &= \big(a^\pi(1-s)^{-1} + (1-a^\pi)(1+s)^{-1}\big)(1-s^2)b^\pi.\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando la Proposición 5.3.1 (iii) y (i), concluimos que

$$\begin{aligned}b^\pi &= (1-s^2)^{-1}\big((1+s)a^\pi + (1-s)(1-a^\pi)\big)a^\pi(1+s)\\ &= (1-s)^{-1}a^\pi(1+s) = a^\pi + s.\end{aligned}$$

(i) $\Leftrightarrow$ (vi): La implicación hacia la derecha es obvia. Demostraremos la implicación hacia la izquierda. De $1 - (b^\pi - a^\pi - s)^2 \in \mathfrak{R}^{-1}$ se sigue que $1 - b^\pi + a^\pi + s \in \mathfrak{R}^{-1}$ y $1 + b^\pi - a^\pi - s \in \mathfrak{R}^{-1}$. Ahora, como $a^\pi + s \in comm(b)$ y $b \in \mathfrak{R}^{gD}$, entonces $b^\pi(a^\pi + s) = (a^\pi + s)b^\pi$. Así, $(1 - a^\pi - s + b^\pi)(a^\pi + s)(1 - b^\pi) = 0$ y, consecuentemente, $(a^\pi + s)(1 - b^\pi) = 0$. Luego,

$$a^\pi + s = (a^\pi + s)b^\pi. \tag{5.15}$$

Por otra parte, $(1 - b^\pi + a^\pi + s)b^\pi(1 - a^\pi - s) = 0$ y así, $b^\pi(1 - a^\pi - s) = 0$. Por lo tanto,

$$b^\pi = (a^\pi + s)b^\pi. \tag{5.16}$$

Finalmente, de (5.15) y (5.16) se obtiene $b^\pi = a^\pi + s$.

(i) $\Rightarrow$ (vii): Como $b^D b = 1 - b^\pi = 1 - a^\pi - s$, por la Proposición 5.3.1 (ii) se tiene que $bb^D = (1 - s)aa^D(1 + s)^{-1}$. Entonces, aplicando el Lema 5.2.13,

$$b^D\mathfrak{R} = bb^D\mathfrak{R} = (1 - s)aa^D(1 + s)^{-1}\mathfrak{R} = (1 - s)aa^D\mathfrak{R} = (1 - s)a^D\mathfrak{R}.$$

Similarmente,

$$\mathfrak{R}b^D(1 + s) = \mathfrak{R}bb^D(1 + s) = \mathfrak{R}(1 - s)aa^D = \mathfrak{R}aa^D = \mathfrak{R}a^D.$$

Ahora, $b^D(1 + s)$ y a^D tienen inversas propias $(1 + s)^{-1}b$ y a, respectivamente, luego son elementos regulares, y por la Proposición 5.2.16 (i),

$$\left(b^D(1 + s)\right)^0 = \left(\mathfrak{R}b^D(1 + s)\right)^0 = \left(\mathfrak{R}a^D\right)^0 = \left(a^D\right)^0.$$

(vii) $\Rightarrow$ (i): De $\left(b^D(1 + s)\right)^0 \subseteq \left(a^D\right)^0$, por la Proposición 5.2.16 (ii), (iii) y el Lema 5.2.13, se sigue que

$$\mathfrak{R}bb^D(1 + s) = \mathfrak{R}b^D(1 + s) = {}^0\Big(\left(b^D(1 + s)\right)^0\Big) \supseteq {}^0\Big(\left(a^D\right)^0\Big) = \mathfrak{R}a^D = \mathfrak{R}(1 - s)aa^D.$$

Por otra parte, por el Lema 5.2.13,

$$bb^D(1 + s)\mathfrak{R} = bb^D\mathfrak{R} = b^D\mathfrak{R} \subseteq (1 - s)a^D\mathfrak{R} = (1 - s)aa^D\mathfrak{R}.$$

La inclusiones $\mathfrak{R}bb^D(1+s) \supseteq \mathfrak{R}(1-s)aa^D$ y $bb^D(1+s)\mathfrak{R} \subseteq (1-s)aa^D\mathfrak{R}$ implican la consistencia de las ecuaciones

$$xbb^D(1 + s) = (1 - s)aa^D \quad \text{y} \quad bb^D(1 + s) = (1 - s)aa^D y, \tag{5.17}$$

las cuales son equivalentes a

$$(1 - s)aa^D(1 + s)^{-1}b^\pi = 0 = a^\pi(1 - s)^{-1}bb^D(1 + s).$$

Finalmente, aplicando la Proposición 5.3.1, de las identidades anteriores se sigue

$$(aa^D - s)b^\pi = 0 = (1 - aa^D + s)bb^D$$

y de aquí

$$bb^D = aa^D - s \Leftrightarrow b^\pi = a^\pi + s.$$

Lo que completa la demostración. $\square$

En particular, si $s = 0$ entonces se tiene [51, Teorema 6.1].

Observación 5.3.6. Bajo las hipótesis del teorema anterior las condiciones (iv) y (v) son equivalentes a

(iv′) $b \in \mathfrak{R}^{gD},\ 1 + s + a^D(b - a) \in \mathfrak{R}^{-1}$,

$$b^D = (1 - s)a^D(1 + s + (b - a)a^D)^{-1}.$$

(v′) $b \in \mathfrak{R}^{gD}$,

$$b^D(1 + s) - (1 - s)a^D = b^D(a - b)a^D.$$

El corolario siguiente es una especialización del Teorema 5.3.5 para el caso en el que a y b tienen partes cuasinilpotentes relacionadas por la condición $bb^\pi = raa^\pi r^{-1}$.

Corolario 5.3.7. *Sea $a \in \mathfrak{R}^{gD}$ y $s \in \mathfrak{R}$ tal que $1 - s^2 \in \mathfrak{R}^{-1}$. Si $a^\pi + s$ es idempotente, entonces las siguientes condiciones sobre $b \in \mathfrak{R}$, verificando la igualdad $(a^\pi + s)ba^\pi = (a^\pi + s)aa^\pi$, son equivalentes:*

(i) $b \in \mathfrak{R}^{gD},\ b^\pi = a^\pi + s.$

(ii) $a^\pi + s \in comm^2(b),\ b + a^\pi + s \in \mathfrak{R}^{-1}.$

(iii) $a^\pi + s \in comm^2(b),\ 1 + s + a^D(b - a) \in \mathfrak{R}^{-1}.$

(iv) $b \in \mathfrak{R}^{gD},\ 1 + s + a^D(b - a) \in \mathfrak{R}^{-1}$,

$$b^D = \left(1 + s + a^D(b - a)\right)^{-1} a^D(1 - s).$$

(v) $b \in \mathfrak{R}^{gD},\ (1 + s)b^D - a^D(1 - s) = a^D(a - b)b^D.$

(vi) $b \in \mathfrak{R}^{gD},\ a^\pi + s \in comm(b),\ 1 - (b^\pi - a^\pi - s)^2 \in \mathfrak{R}^{-1}.$

Dem. Por la Proposición 5.3.1 tenemos

$$a^\pi + s = ra^\pi r^{-1} = \left((1+s)a^\pi + (1-s)(1-a^\pi)\right)a^\pi r^{-1} = (1+s)a^\pi r^{-1} = (a^\pi + s)a^\pi r^{-1}$$

y además

$$b(a^\pi + s) = (a^\pi + s)ba^\pi r^{-1} = (a^\pi + s)aa^\pi r^{-1} = raa^\pi r^{-1}.$$

Por otra parte, $a \in \mathfrak{R}^{gD}$ y por lo tanto $aa^\pi \in \mathfrak{R}^{qnil}$. Así, la condición $b(a^\pi + s) \in \mathfrak{R}^{qnil}$ está implícita en las partes (ii) y (iii).

Luego, por el Teorema 5.3.5 las condiciones (i) – (vi) son equivalentes. □

A continuación damos una nueva caracterización de elementos $b \in \mathfrak{R}^{gD}$ tal que $1-(b^\pi - a^\pi)^2$ es invertible en términos de su expresión matricial.

TEOREMA 5.3.8. *Sea $a \in \mathfrak{R}^{gD}$ y $s \in \mathfrak{R}$ tal que $1-s^2 \in \mathfrak{R}^{-1}$. Si $a^\pi + s$ es idempotente, entonces las siguientes condiciones sobre $b \in \mathfrak{R}$ son equivalentes:*

(i) $b \in \mathfrak{R}^{gD}$, $b^\pi = a^\pi + s$.

(ii) *La representación matricial para b es:*

$$b = \begin{pmatrix} p_1(1-s)p_1 & p_1 s p_2 \\ -p_2 s p_1 & p_2(1+s)p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{b}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & -p_1 s(1+s)^{-1}p_2 \\ p_2 s(1-s)^{-1}p_1 & p_2 \end{pmatrix},$$

$\tilde{b}_1 \in \mathfrak{R}_1^{-1}$ *y* $\tilde{b}_2 \in \mathfrak{R}_2^{qnil}$, *donde* $\mathfrak{R}_i = p_i \mathfrak{R} p_i$, $i = 1, 2$.

DEM. Consideramos $r = (1+s)a^\pi + (1-s)(1-a^\pi) = 1 - s + 2sa^\pi$. Por la Proposición 5.3.1 (iii), r es no singular con $r^{-1} = a^\pi(1-s)^{-1} + (1-a^\pi)(1+s)^{-1} = (1-s+2a^\pi s)(1-s^2)^{-1}$ y $r^{-1}(a^\pi + s)r = a^\pi$. Además, r y r^{-1} tienen la siguiente representación matricial:

$$r = \begin{pmatrix} p_1(1-s)p_1 & p_1 s p_2 \\ -p_2 s p_1 & p_2(1+s)p_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad r^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 & -p_1 s(1+s)^{-1}p_2 \\ p_2 s(1-s)^{-1}p_1 & p_2 \end{pmatrix}.$$

Ahora, definimos $\tilde{b} = r^{-1}br$. Entonces $b^\pi = a^\pi + s \Leftrightarrow \tilde{b}^\pi = r^{-1}(a^\pi + s)r = a^\pi$, luego $\tilde{b}$ y a tiene el mismo espectro idempotente.

Por el Teorema 5.2.12,

$$\tilde{b}a^\pi = a^\pi \tilde{b}, \quad \tilde{b}a^\pi \in \mathfrak{R}^{qnil}, \quad \tilde{b} + a^\pi \in \mathfrak{R}^{-1}.$$

Sea $\tilde{b} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 & \tilde{b}_{12} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_2 \end{pmatrix}$ la expresión matricial para b respecto (5.12), entonces

$$\tilde{b}a^\pi = a^\pi \tilde{b} \Leftrightarrow b = diag(\tilde{b}_1\,, \tilde{b}_2).$$

Ahora, $\tilde{b}a^\pi$ es cuasinilpotente si y sólo si $\tilde{b}_2$ lo es y $\tilde{b}_1$ es no singular si y sólo si $\tilde{b} + a^\pi$ es no singular. Luego,

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{b}_2 \end{pmatrix}, \text{ donde } \tilde{b}_1 \in \mathfrak{R}_1^{-1} \text{ y } \tilde{b}_2 \in \mathfrak{R}_2^{qnil}.$$

Consecuentemente, tenemos la equivalencia entre (i) y (ii), ya que $b = r\tilde{b}r^{-1}$. $\square$

5.4. Caracterización de elementos EP en anillos con involución

En esta sección vamos a denotar * como la involución $x \mapsto x^*$ en un anillo $\mathfrak{R}$ tal que si a, $b \in \mathfrak{R}$, entonces

(i) $(a+b)^* = a^* + b^*$.

(ii) $(ab)^* = b^* a^*$.

(iii) $(a^*)^* = a$.

Si $\mathfrak{R} = \mathbb{C}^{n\times n}$, entonces A^* es la traspuesta conjugada de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

PROPOSICIÓN 5.4.1. *Sea $\mathfrak{R}$ un anillo con involución. Entonces,*

$$a \in \mathfrak{R}^{gD} \Leftrightarrow a^* \in \mathfrak{R}^{gD}.$$

En este caso,

$$(a^*)^D = (a^D)^* \quad y \quad (a^*)^\pi = (a^\pi)^*.$$

DEM. Sea b una g-Drazin inversa de a, entonces aplicando involución a (5.5) se obtiene

$$b^* \in comm^2(a^*), \quad a^*(b^*)^2 = b^*, \quad (a^*)^2 b^* - a^* \in \mathfrak{R}^{qnil},$$

y por la unicidad de la g-Drazin inversa se deduce que $a^* \in \mathfrak{R}^{gD}$ y $(a^*)^D = b^*$.

Similarmente, sea b una g-Drazin inversa de a^*, entonces aplicando involución se tiene

$$b^* \in comm^2(a), \quad a(b^*)^2 = b^*, \quad a^2 b^* - a \in \mathfrak{R}^{qnil},$$

luego $a \in \mathfrak{R}^{gD}$ y $a^D = b^* = ((a^*)^D)^*$, lo cual implica que $(a^D)^* = (a^*)^D$.

De la relación $a^\pi = 1 - aa^D$ se sigue

$$(a^\pi)^* = (1 - aa^D)^* = 1 - (a^D)^* a^* = 1 - (a^*)^D a^* = (a^*)^\pi.$$

Obteniéndose la igualdad $(a^\pi)^* = (a^*)^\pi$. □

En la Sección 2.5 se introdujo el concepto de matriz EP y se caracterizaron dichas matrices. En esta sección expondremos la noción de elemento EP de un anillo unitario, dando diversos resultados que lo involucran.

En [38], R. E. Hartwig hizo un detallado estudio de los elementos EP en anillos con involución y, en [49], J. J. Koliha estudió los elementos EP en C^*-álgebras.

A continuación exponemos el concepto de inversa de Moore-Penrose de un elemento de un anillo con involución, noción usada en la definición de un elemento EP.

Definición 5.4.2. Dado un anillo con involución $\mathfrak{R}$. Decimos que un elemento $a \in \mathfrak{R}$ es *Moore-Penrose invertible* si existe un $b \in \mathfrak{R}$ tal que

$$bab = b, \quad aba = a, \quad (ab)^* = ab, \quad (ba)^* = ba. \tag{5.18}$$

Este elemento b si existe es único, [73], y es llamado *inversa de Moore-Penrose*, y denotado por $a^\dagger$. El conjunto de todos los elementos Moore-Penrose invertibles de $\mathfrak{R}$ será denotado por $\mathfrak{R}^\dagger$.

Definición 5.4.3. Sea $\mathfrak{R}$ un anillo con involución. Un elemento a es EP si $a \in \mathfrak{R}^\dagger$ y $aa^\dagger = a^\dagger a$.

En el siguiente resultado se caracterizan los elementos EP.

Proposición 5.4.4. *Sea $\mathfrak{R}$ un anillo con involución y $a \in \mathfrak{R}$. La siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *a es EP.*

(ii) *$a \in \mathfrak{R}^\sharp$, $(a^*)^\pi = a^\pi$.*

(iii) *$a \in \mathfrak{R}^{gD} \cap \mathfrak{R}^\dagger$, $a^D = a^\dagger$.*

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): De $a \in \mathfrak{R}^\dagger$ y $aa^\dagger = a^\dagger a$ se deduce que $a^\dagger$ satisface la definición de $a^\sharp$, luego $a \in \mathfrak{R}^\sharp$.

Además,

$$(a^*)^\pi = (a^\pi)^* = (1 - a^\dagger a)^* = 1 - a^\dagger a = a^\pi.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Tenemos

$$(a^*)^\pi = (a^\pi)^* = (1 - a^\dagger a)^* = 1 - (a^\dagger a)^* = 1 - a^\dagger a = a^\pi.$$

Entonces $(a^\dagger a)^* = a^\dagger a$. Similarmente se obtiene $(aa^\dagger)^* = aa^\dagger$. De estas condiciones, junto con las que se tienen de $a \in \mathfrak{R}^\sharp$, se deduce que a es EP.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii): Esta equivalencia resulta obvia. $\square$

El siguiente teorema constituye el resultado principal de esta sección. Dado un elemento a, que es EP, caracterizaremos los elementos EP de la forma $b = a + e$, con $e \in \mathfrak{R}$, tal que $1 - (b^\pi - a^\pi)^2 \in \mathfrak{R}^{-1}$.

Teorema 5.4.5. *Sea $\mathfrak{R}$ un anillo con involución y $s \in \mathfrak{R}$ tal que $1-s^2 \in \mathfrak{R}^{-1}$. Si a es EP y $a^\pi + s$ es idempotente, entonces las siguientes condiciones sobre $b = a+e \in \mathfrak{R}$ son equivalentes:*

(i) b *es* EP, $b^\pi = a^\pi + s$.

(ii) $s^* = s,\ e(a^\sharp a - s) - as = e = (a^\sharp a - s)e - sa,\ 1 + s + a + e - a^\sharp a \in \mathfrak{R}^{-1}$.

(iii) $s^* = s,\ e(a^\sharp a - s) - as = e = (a^\sharp a - s)e - sa,\ 1 + s + a^\sharp e \in \mathfrak{R}^{-1}$.

(iv) $b \in \mathfrak{R}^{gD} \cap \mathfrak{R}^\dagger,\ (1 + s + a^\dagger e)^{-1} \in \mathfrak{R}$,

$$b^\dagger = b^D = (1 + s + a^\dagger e)^{-1} a^\dagger (1 - s).$$

(v) $b \in \mathfrak{R}^{gD} \cap \mathfrak{R}^\dagger$, $b^\dagger = b^D$,

$$(1 + s)b^\dagger - a^\dagger(1 - s) = -a^\dagger e b^\dagger.$$

Dem. Como a es EP, por las Proposiciones 5.4.4 y 5.4.1, se tiene

$$a \in \mathfrak{R}^\sharp \text{ y } (a^*)^\pi = (a^\pi)^* = a^\pi.$$

Ahora, si b es EP y $b^\pi = a^\pi + s$, entonces de

$$(b^\pi)^* = (a^\pi + s)^* = (a^\pi)^* + s^* = a^\pi + s^*$$

se deduce que $s^* = s$, puesto que $(b^\pi)^* = b^\pi$. Luego, la condición (i) es equivalente a

(i)$'$ $b \in \mathfrak{R}^\sharp,\ s = s^*$ y $b^\pi = a^\pi + s$.

De $a^\pi = 1 - aa^\sharp$ y $aa^\pi = 0$ se sigue

$$e(a^\sharp a - s) - as - e = -e(a^\pi a + s) + as = (a + e)(a^\pi + s) = 0$$

y

$$(a^\sharp a - s)e - sa - e = -(a^\pi a + s)e + sa = (a^\pi + s)(a + e) = 0,$$

luego las condiciones (ii) y (iii) son equivalentes a:

(ii)$'$ $s^* = s,\ (a + e)(a^\pi + s) = 0 = (a^\pi + s)(a + e),\ a^\pi + s + a + e \in \mathfrak{R}^{-1}$.

(iii)$'$ $s^* = s,\ (a + e)(a^\pi + s) = 0 = (a^\pi + s)(a + e),\ 1 + s + a^\sharp e \in \mathfrak{R}^{-1}$.

Finalmente, aplicando el Teorema 5.3.5 concluimos la equivalencia de las condiciones (i) – (v) del teorema. $\square$

A continuación, dado un $s \in \mathfrak{R}$, caracterizamos los elementos $a \in \mathfrak{R}$ tales que los espectros idempotentes de a y a^* satisfacen $(a^*)^\pi = a^\pi + s$.

Teorema 5.4.6. *Sea $\mathfrak{R}$ un anillo con involución y $s \in \mathfrak{R}$ tal que $1 - s^2 \in \mathfrak{R}^{-1}$. Entonces las siguientes condiciones sobre $a \in \mathfrak{R}$ son equivalentes:*

(i) $a^* \in \mathfrak{R}^\sharp,\ (a^*)^\pi = a^\pi + s.$

(ii) $a^* \in \mathfrak{R}^{gD},\ (a^*)^D a^* = aa^D - s,\ (1+s)a^* = a^D aa^*.$

(iii) $a^*(a^D a - s) = a^* = (a^D a - s)a^*,\ 1+s+a^* - a^D a \in \mathfrak{R}^{-1},\ s^2+s = saa^D + aa^D s.$

(iv) $a^*(a^D a - s) = a^* = (a^D a - s)a^*,\ 1+s+a^D(a^* - a) \in \mathfrak{R}^{-1},\ s^2+s = saa^D + aa^D s.$

Dem. Veamos que las condiciones (ii) – (iv) son equivalentes a:

(ii′) $(a^*)^\pi = a^\pi + s,\ a^*(a^\pi + s) = 0.$

(iii′) $(a^\pi + s)^2 = a^\pi + s,\ a^*(a^\pi + s) = 0 = (a^\pi + s)a^*,\ a^* + a^\pi + s \in \mathfrak{R}^{-1}.$

(iv′) $(a^\pi + s)^2 = a^\pi + s,\ a^*(a^\pi + s) = 0 = (a^\pi + s)a^*,\ 1 + s + a^D(a^* - a) \in \mathfrak{R}^{-1}.$

(ii) $\Rightarrow$ (ii′): Tenemos que

$$(a^*)^\pi = (a^\pi)^* = (1 - aa^D)^* = 1 - (a^*)^D a^* = 1 - aa^D + s = a^\pi + s.$$

Ahora, de $(1 + s)a^* - a^D aa^* = 0$ se sigue $(a^\pi + s)a^* = 0$, y del hecho que el espectro idempotente de a^* es $a^\pi + s$ se tiene que a^* es Grupo invertible y además que $a^*(a^\pi + s) = 0$.

(ii′) $\Rightarrow$ (ii) : De $(a^*)^\pi = a^\pi + s$ y $a^*(a^\pi + s) = 0$ se deduce que $a^* \in \mathfrak{R}^\sharp$, ya que $(a^*)^\pi a^* = a^*(a^*)^\pi = 0$. Ahora,

$$(a^*)^\sharp a^* = 1 - (a^*)^\pi = 1 - a^\pi - s = a^D a - s.$$

De $a^*(a^\pi + s) = 0$ se obtiene

$$(a^\pi + s)a^* = a^\pi a^* + sa^* = (1 - a^D a)a^* + sa^* = (1 + s)a^* - a^D aa^* = 0.$$

(iii) $\Leftrightarrow$ (iii′): Operando obtenemos

$$\begin{aligned} a^*(a^Da - s) = a^* = (a^Da - s)a^* &\Leftrightarrow a^*(a^Da - s - 1) = 0 = (a^Da - s - 1)a^* \\ &\Leftrightarrow a^*(1 - a^Da + s) = 0 = (1 - a^Da + s)a^* \\ &\Leftrightarrow a^*(a^\pi + s) = 0 = (a^\pi + s)a^*, \end{aligned}$$

y también

$$(a^\pi + s)^2 = (a^\pi + s) \Leftrightarrow s^2 + s = saa^D + aa^Ds.$$

Demostrando la equivalencia.

Siguiendo un razonamiento análogo al dado anteriormente se demuestra la equivalencia (iv) $\Leftrightarrow$ (iv′).

Ahora, aplicando el Teorema 5.3.5, puntos (i) – (iii), a a^* en lugar de b obtenemos (ii′) y (iv′).

La equivalencia entre (i) y (ii′) resulta obvia. □

En el corolario siguiente es una especialización del teorema anterior para el caso $s = 0$. En este caso, la condición (i) se traduce en el hecho de que a es EP. Así, obtenemos una caracterización de los elementos EP en anillos con involución. En particular, para matrices se recoge [16, Teorema 5.2].

Corolario 5.4.7. *Sea $\mathfrak{R}$ un anillo con involución. Entonces las siguientes condiciones sobre $a \in \mathfrak{R}$ son equivalentes:*

(i) *a es EP.*

(ii) $a^* \in \mathfrak{R}^{gD}$, $(a^*)^D a^* = aa^D$, $a^* = a^Daa^*$.

(iii) $a^*a^Da = a^* = a^Daa^*$, $1 + a^* - a^Da \in \mathfrak{R}^{-1}$.

(iv) $a^*a^Da = a^* = a^Daa^*$, $1 + a^D(a^* - a) \in \mathfrak{R}^{-1}$.

5.5. Resultados de perturbación en álgebras de Banach

En esta sección se derivará un resultado de perturbación en el marco de las álgebras de Banach.

Denotaremos por $\mathfrak{B}^{-1}$ al conjunto de todos los elementos invertibles de $\mathfrak{B}$.

Diversos trabajos acerca de la perturbación de la inversa de Drazin han sido realizados a fin de obtener una cota del error.

Si $a,\ b \in \mathfrak{B}$ son g-Drazin invertibles, bajo las hipótesis $b - a = aa^D(b-a)aa^D$ y $\|a^D\|\,\|b-a\| < 1$, en [79], V. Rakočević e Y. Wei derivaron una cota superior de $\|b^D - a^D\|/\|a^D\|$, en términos de $\|b-a\|$. En [12], N. Castro y J. J. Koliha suponiendo $a^\pi b = b$, $aba^\pi = 0$ y $b^2 = b$ establecieron una cota superior de $\|(b+a)^D - a^D\|/\|a^D\|$.

En este apartado utilizaremos la equivalencia (i) $\Leftrightarrow$ (v) del Teorema 5.3.5 en el contexto de un álgebra de Banach

$$b \in \mathfrak{R}^{gD},\ (1+s)b^D - a^D(1-s) = a^D(a-b)b^D,$$

para obtener cotas superiores de $\|b^D\|$ y $\|b^D - a^D\|/\|a^D\|$.

Teorema 5.5.1. *Sean $a,\, b \in \mathfrak{B}^{gD}$. Si $\|b^\pi - a^\pi\| + \|a^D(b-a)\| < 1$, entonces*

$$\|b^D\| \le \frac{\|a^D\|(1 + \|b^\pi - a^\pi\|)}{1 - \|b^\pi - a^\pi\| - \|a^D(b-a)\|} \tag{5.19}$$

y

$$\frac{\|b^D - a^D\|}{\|a^D\|} \le \frac{\|a^D(b-a)\| + 2\|b^\pi - a^\pi\|}{1 - \|b^\pi - a^\pi\| - \|a^D(b-a)\|}. \tag{5.20}$$

Dem. Sea $s = b^\pi - a^\pi$. De $\|s\| + \|a^D(b-a)\| < 1$ se deduce que $\|s\| < 1$, entonces $1-s, 1+s \in \mathfrak{B}^{-1}$. Ahora, por el Teorema 5.3.5 (i) $\Leftrightarrow$ (v),

$$(1+s)b^D - a^D(1-s) = a^D(a-b)b^D.$$

Aplicando normas a $b^D = a^D - a^D s - (s + a^D(b-a))b^D$ se sigue

$$\|b^D\| \le \|a^D\| + \|a^D\|\,\|s\| + (\|s\| + \|a^D(b-a)\|)\|b^D\|,$$

y de aquí, agrupando primero términos en $\|b^D\|$ al lado izquierdo de la desigualdad y despejando después $\|b^D\|$, resulta (5.19).

De

$$b^D - a^D = -(s + a^D(b-a))(a^D + (b^D - a^D)) - a^D s$$

se obtiene

$$\|b^D - a^D\| \le (\|s\| + \|a^D(b-a)\|)(\|a^D\| + \|b^D - a^D\|) + \|a^D\|\,\|s\|.$$

Agrupando términos tenemos la cota (5.20) . $\square$

Podemos combinar esta estimación con una cota superior de $\|b^\pi - a^\pi\|$ y así obtener una cota explícita del error de la perturbación de la g-Drazin inversa. En las Secciones 3.5 y 3.4 obtuvimos cotas superiores de $\|B^\pi - A^\pi\|$ en el ámbito de las matrices. Recordemos que una estimación para esta cota fue obtenida en términos del gap entre subespacios en [50, Section 4] para matrices y en [17, Section 6] para operadores lineales y acotados sobre un espacio de Banach.

Este resultado de acotación generaliza el obtenido para matrices en la Sección 3.4, Teorema 3.4.6.

Capítulo 6

Perturbación de una clase de operadores Grupo invertibles y acotados en espacios de Banach

6.1. Introducción

En este capítulo consideraremos el álgebra de Banach formada por todos los operadores lineales y acotados sobre un espacio de Banach complejo, que denotaremos por $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Tal álgebra está dotada de la norma usual para operadores acotados definida como

$$\|B\| = \sup\{\|Bx\| : \|x\| = 1,\ x \in \mathcal{X}\},$$

la cual es una norma multiplicativa. Las nociones de elemento Grupo invertible, Drazin invertible y g-Drazin invertible introducidas en el contexto de un álgebra de Banach en el Capítulo 5 pueden ser llevadas al ámbito de los operadores acotados.

Introduciremos la clase de operadores $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ Grupo invertibles que inducen las siguientes descomposiciones del espacio:

$$\mathcal{X} = \mathcal{R}(A^k) \oplus \mathcal{N}(B) \ \text{ y } \ \mathcal{X} = \mathcal{R}(B) \oplus \mathcal{N}(A^k), \tag{6.1}$$

donde $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ es Drazin invertible con $ind(A) = k$, la cual generaliza la clase de matrices $(\mathcal{C}_1)$ estudiada en el Capítulo 3. Se generalizarán resultados de caracterización y de perturbación obtenidos en el Capítulo 3 para matrices, a los operadores Grupo invertibles que verifican (6.1).

Si asumimos que $\mathcal{X}$ es un espacio de Hilbert de dimensión finita, entonces las condiciones (6.1) son equivalentes a

$$\mathcal{R}(A^k) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\} \text{ y } \mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A^k) = \{0\}.$$

En términos de los proyectores espectrales en el 0, esta clase de operadores puede ser descrita por la condición $I - B^\pi - A^\pi$ es invertible en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Bajo un supuesto equivalente la perturbación de la inversa de Drazin fue investigada para matrices en [19, 18] y, para elementos en un álgebra de Banach en [21], con un enfoque diferente del dado en este capítulo. El caso particular $B^\pi = A^\pi$ fue considerado en [16] para matrices, en [17] para operadores cerrados y, en [51] para elementos de un anillo. A relacionado documento es [28], el cual contiene caracterizaciones de operadores acotados con iguales proyecciones relacionadas con su externa o interna inversas generalizadas.

Por otra parte, también se formularán resultados de perturbación, derivados en el Capítulo 5 para elementos de álgebras de Banach, para los operadores $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ g-Drazin invertibles tales que

$$\mathcal{X} = \mathcal{K}(A) \oplus \mathcal{H}_0(B), \quad \mathcal{X} = \mathcal{K}(B) \oplus \mathcal{H}_0(A). \tag{6.2}$$

Un caso especial lo constituyen los operadores acotados g-Drazin invertibles con proyecciones espectrales esenciales distintas.

En la Sección 6.2 se darán algunas definiciones de la teoría espectral de operadores. Se verá que los operadores g-Drazin invertibles son aquéllos tales que el 0 no es un punto de acumulación del espectro, y los operadores acotados Drazin invertibles son aquéllos que tienen ascendente y descendente ambos finitos. Usando el cálculo operacional, daremos expresiones de los operadores g-Drazin inverso, de la proyección espectral asociada al autovalor 0 y del operador resolvente.

Tal y como se vio en el Capítulo 3, una característica de las matrices de la clase $(\mathcal{C}_1)$ es que pueden ser expresadas, respecto a una descomposición del espacio, mediante una determinada estructura matricial, la cual fue utilizada como herramienta básica para el desarrollo de la teoría de perturbación. Nuestro primer objetivo será estudiar la correspondiente representación matricial para operadores. Así, en la Sección 6.3 introduciremos la clase de operadores $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ cuya representación matricial, relativa a la descomposición en suma directa topológica $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$, con $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ espacios de Banach, es

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{21}T_1^{-1}T_{12} \end{pmatrix}, \; T_{11} \text{ es invertible en } \mathcal{B}(\mathcal{X}_1). \tag{6.3}$$

Obtendremos una representación matricial del operador resolvente, $R(\lambda; T)$, para esta clase de operadores y una condición necesaria y suficiente para que sean Grupo invertibles, dando, en este caso, una expresión matricial del Grupo inverso.

En la Sección 6.4 consideraremos la clase de operadores que poseen un $(1,2)$-inverso acotado, que llamaremos inverso generalizado algebraico o AG-inverso de T. Observamos que la clase de los operadores AG-invertibles incluye a la de los operadores Grupo invertibles. Diversas caracterizaciones de los operadores AG-inversos serán dadas.

También caracterizaremos los operadores acotados Grupo invertibles B que cumplen (6.1).

En la Sección 6.5 se derivarán diversos resultados de perturbación para la clase de operadores Grupo invertibles tratados en la sección anterior. También se obtendrá un resultado sobre la continuidad del Grupo inverso para operadores acotados sobre un espacio de Banach.

En la Sección 6.6 daremos un resultado sobre los operadores g-Drazin invertibles $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ que verifican las condiciones dadas en (6.2).

También obtendremos una estimación para $\|B^\pi - A^\pi\|$, en el caso en el que $\mathcal{X}$ sea una espacio de Hilbert, que denotaremos por $\mathcal{H}$.

Finalmente, en la Sección 6.7, dado un operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ g-Drazin invertible, caracterizaremos los operadores $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ g-Drazin invertibles con proyectores espectrales esenciales relacionados. En particular, si A y B tienen el mismo proyector espectral esencial se tiene [76].

En [14], N. Castro, J. J. Koliha y V. Rakočević obtuvieron una cota superior del error $\|B^D - A^D\|$ en términos del $gap(A,B)$ y $\|B^\pi - A^\pi\|$, donde A y B son operadores cerrados g-Drazin invertibles sobre un espacio de Banach. Cuando $A,\ B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, en ese mismo documento, dedujeron otra cota superior de $\|B^D - A^D\|$, en términos del *gap* entre las imágenes y núcleos de estos operadores y, $\|B - A\|$.

Bajo las condiciones $A,\ B \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$ g-Drazin invertibles, con el mismo dominio y $B^\pi = A^\pi$, en [17], N. Castro, J. J. Koliha e Y. Wei obtuvieron una estimación de $\|B^D - A^D\|/\|A^D\|$, en términos de $\|B - A\|$.

Parte de los resultados de este capítulo se recogen en el artículo ***On the perturbation of the Group generalized inverse for a class of bounded operators in Banach spaces***, [22].

6.2. Definiciones y resultados básicos

A continuación daremos algunas definiciones en el marco de la teoría espectral de operadores.

Dado un operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, definimos el *espectro* de A, $\sigma(A)$, como

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ A - \lambda I \text{ no es invertible}\}.$$

El *conjunto resolvente* de A, $\rho(A)$, es el complemento de $\sigma(A)$ en $\mathbb{C}$, i.e.,

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ (A - \lambda I)^{-1} \text{ existe}\}.$$

Designamos por *iso* $\sigma(A)$ y *acc* $\sigma(A)$ el conjunto de los puntos aislados y los puntos de acumulación de $\sigma(A)$, respectivamente.

El operador $R(\lambda;\, A) = (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, definido para $\lambda \in \rho(A)$, es llamado *resolvente* de A.

El *radio espectral* de A, $r(A)$, es definido como

$$r(A) = \sup\{|\lambda| : \ \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Es sabido que $r(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$. Los operadores *cuasinilpotentes* en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ se caracterizan del siguiente modo:

$$A \text{ es cuasinilpotente } \Leftrightarrow r(A) = 0 \Leftrightarrow \sigma(A) = \{0\}.$$

Atendiendo a la definición de la g-Drazin inversa de un elemento en un álgebra de Banach, decimos que un operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ es *g-Drazin invertible* si existe un operador $X \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tal que

$$XAX = X, \quad AX = XA, \quad \sigma(A(I - AX)) = \{0\}. \tag{6.4}$$

En [33, Teorema 10.1.1] se demuestra que si tal operador X existe, entonces es único. El operador X es llamado el *inverso de g-Drazin* de A y denotado por A^D. Si en (6.4) el operador $A(I - AX)$ es nilpotente, entonces decimos que A es *Drazin invertible* y el operador X es el *inverso de Drazin* de A. El *índice de Drazin*, $ind(A)$, de A es igual al índice de nilpotencia de $A(I - AX)$. En particular, si $ind(A) = 1$, entonces el operador inverso de Drazin de A es denotado por $A^\sharp$ y llamado el *Grupo inverso* de A.

Representaremos por $\mathcal{B}(\mathcal{X})^D$ al conjunto de todos los operadores Drazin invertibles en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. El *ascendente* de A, denotado por *asc(A)*, es el entero no negativo más pequeño n tal que $\mathcal{N}(A^n) = \mathcal{N}(A^{n+1})$, ó ∞, si tal entero no existe. Del mismo modo, el *descendente* de A, denotado por *des(A)*, es el entero no negativo más pequeño n tal que $\mathcal{R}(A^n) = \mathcal{R}(A^{n+1})$, ó ∞, si este entero no existe.

En [44] se prueba que un operador lineal y acotado A es Drazin invertible si y sólo si el ascendente de A y el descendente son ambos finitos. En este caso, $k = ind(A) =$

$asc(A) = desc(A)$. Además, los subespacios $\mathcal{R}(A^k)$ y $\mathcal{N}(A^k)$ son cerrados y el espacio $\mathcal{X}$ admite una descomposición en suma directa topológica $\mathcal{X} = \mathcal{R}(A^k) \oplus \mathcal{N}(A^k)$.

Mencionamos a continuación algunas clases de operadores Drazin invertibles y Grupo invertibles, [84]:

(I) Si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tal que el operador resolvente de A es racional y $0 \in \sigma(A)$, entonces A es Drazin invertible.

(II) Si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ es hermítico, i.e, $\|\exp(itA)\| = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y $0 \in iso\ \sigma(A)$, entonces A es Grupo invertible.

(III) Si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ es paranormal, i.e, $\|Ax\|^2 \leq \|A^2x\|\ \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{X}$, y $0 \in iso\ \sigma(A)$, entonces A es Grupo invertible.

(IV) Si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es hiponormal, i.e, $\|A^*x\|^2 \leq \|Ax\|\ \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$, y $0 \in iso\ \sigma(A)$, entonces A es Grupo invertible.

Usando el cálculo operacional, en [57], se demostró que un operador A es g-Drazin invertible si y sólo si $0 \notin acc\ \sigma(A)$.

En el ámbito de la teoría de operadores, si $0 \notin acc\ \sigma(A)$, entonces el operador *proyección espectral* de A asociado al 0, que designaremos por A^π, se corresponde con la noción de espectro idempotente de un elemento en un anillo introducida en la Sección 5.2.1.

En [14], se dio la siguiente representación de la g-Drazin inversa de un operador A tal que $0 \notin acc\ \sigma(A)$:

$$A^D = f(A), \quad f(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{en} \quad \Omega_0, \\ \lambda^{-1} & \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \tag{6.5}$$

siendo Ω_0 y Ω dos entornos abiertos y disjuntos de $\lambda = 0$ y $\sigma(A) \setminus \{0\}$, respectivamente.

Utilizando la terminología anterior, el operador proyección espectral asociado al 0, A^π, viene dado por

$$A^\pi = f(A), \quad f(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{en} \quad \Omega_0, \\ 0 & \text{en} \quad \Omega, \end{cases} \tag{6.6}$$

esto es,

$$A^\pi = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R(\lambda; A) d\lambda,$$

donde γ es una circunferencia centrada en el 0, positivamente orientada, y tal que no contiene en su interior otras singularidades de $R(\lambda; A)$.

De (6.5) y (6.6) se deduce fácilmente la relación

$$A^D = (A + A^\pi)^{-1}(I - A^\pi) = (I - A^\pi)(A + A^\pi)^{-1}.$$

Si A es g-Drazin invertible, entonces el operador resolvente tiene un desarrollo en serie de Laurent dado por:

$$R(\lambda;\, A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{n-1}A^\pi}{\lambda^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (A^D)^{n+1},$$

en la región $0 < |\lambda| < (r(A^D))^{-1}$, [8].
Se observa que A^π es el coeficiente de λ^{-1} y A^D es el término independiente en el desarrollo de la resolvente.

En [41, Proposición 50.2], se demuestra que un operador A es Drazin invertible si y sólo si el 0 es un polo de orden $k = ind(A)$ de la resolvente $R(\lambda; A)$. En este caso el desarrollo de Laurent adopta la forma:

$$R(\lambda;\, A) = \sum_{n=1}^{k} \frac{A^{n-1}A^\pi}{\lambda^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (A^D)^{n+1}.$$

De [89, Teorema V.9.2] se deduce la siguiente caracterización de los operadores g-Drazin invertibles.

PROPOSICIÓN 6.2.1. *Un operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ es g-Drazin invertible si y sólo si existe una descomposición del espacio $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ relativa a la cual el operador A puede escribirse de la forma*

$$A = A_1 \oplus A_2, \quad A_1 \text{ es invertible, } A_2 \text{ es cuasinilpotente.} \tag{6.7}$$

Respecto a esta descomposición se tiene que el $ind(A)$ es el entero positivo más pequeño k para el cual $A_2^k = 0$, ó ∞ si tal entero no existe.
Si A_2 es nilpotente, entonces decimos que el operador A es Drazin invertible.

Los operadores g-Drazin invertibles incluyen a los operadores invertibles y cuasinilpotentes cuando $\mathcal{X}_2 = \{0\}$ y $\mathcal{X}_1 = \{0\}$, respectivamente.

Si $A = A_1 \oplus A_2$ con A_1 y A_2 como en (6.7), entonces los operadores A^D y A^π vienen dados por

$$A^D = A_1^{-1} \oplus O \quad \text{y} \quad A^\pi = O \oplus I,$$

respectivamente.

En [64], M. Mbekhta probó que los espacios $\mathcal{X}_1$ y $\mathcal{X}_2$ en la suma directa $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$, que nos lleva a la representación (6.7), son $\mathcal{X}_1 = \mathcal{K}(A)$ y $\mathcal{X}_2 = \mathcal{H}_0(A)$, donde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0(A) =& \{x \in \mathcal{X} : \limsup_{n\to\infty} \|A^n x\|^{1/n} = 0\}, \\ \mathcal{K}(A) =& \{x \in \mathcal{X} : \exists x_n \in \mathcal{X} \text{ tal que} Ax_1 = x,\ Ax_{n+1} = x_n \text{ para } n = 1, 2, \dots \\ & \text{y } \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|^{1/n} < \infty\}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Estos subespacios son invariantes bajo A, y

$$\mathcal{N}(A^n) \subseteq \mathcal{H}_0(A), \quad \mathcal{K}(A) \subseteq \mathcal{R}(A^n), \quad n = 1, 2, \dots.$$

Se hace notar que si $asc(A) = desc(A) = k$, entonces

$$\mathcal{K}(A) = \mathcal{R}(A^k) \quad \text{y} \quad \mathcal{H}_0(A) = \mathcal{N}(A^k).$$

En [64], se demostró que un operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ es g-Drazin invertible si y sólo si $\mathcal{X}$ puede descomponerse en la suma directa

$$\mathcal{X} = \mathcal{K}(A) \oplus \mathcal{H}_0(A),$$

con al menos uno de los subespacios cerrado. La proyección espectral asociada al 0 de un operador g-Drazin invertible A es el operador acotado A^π tal que

$$\mathcal{R}(A^\pi) = \mathcal{H}_0(A) \quad \text{y} \quad \mathcal{N}(A^\pi) = \mathcal{K}(A).$$

Finalizaremos esta sección recordando algunas propiedades de la teoría de la inversa de Drazin las cuales serán usadas en este capítulo.

Propiedades 6.2.2. Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Entonces:

(a) $\mathcal{R}(A^D) = \mathcal{R}(AA^D)$.

(b) $\mathcal{N}(A^D) = \mathcal{N}(AA^D)$.

(c) $A^\pi = I - AA^D$. Así, $\mathcal{N}(A^\pi) = \mathcal{R}(A^D)$ y $\mathcal{N}(A^D) = \mathcal{R}(A^\pi)$.

(d) Si 0 es un polo de orden k de $R(\lambda; A)$, entonces $\mathcal{N}(A^\pi) = \mathcal{R}(A^k)$ y $\mathcal{R}(A^\pi) = \mathcal{N}(A^k)$.

(e) Si 0 es un polo simple de $R(\lambda; A)$, entonces $AA^\pi = O$.

6.3. El Grupo inverso de una clase de operadores

En esta sección trataremos con operadores lineales y acotados definidos sobre el espacio $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$, con $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ espacios de Banach, que tienen una expresión matricial de la forma $T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$, donde los coeficientes $T_{ij},\ i, j = 1, 2$ son operadores lineales que actúan del modo siguiente:

$$T_{ij} : \mathcal{X}_j \longrightarrow \mathcal{X}_i.$$

Renombramos $T_{ij} = T_i$, si $i = j$. Asumimos que todos los coeficientes de T son operadores lineales y acotados entre los correspondientes espacios.

En el siguiente resultado damos una expresión matricial de la resolvente para los operadores objeto de estudio.

Teorema 6.3.1. *Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ definido por $T = \begin{pmatrix} T_1 & T_{12} \\ T_{21} & T_2 \end{pmatrix}$, respecto la descomposición $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$, donde T_1 es invertible en $\mathcal{B}(\mathcal{X}_1)$ y $T_2 = T_{21}T_1^{-1}T_{12}$ y, sea $\Psi = I + T_1^{-1}T_{12}T_{21}T_1^{-1}$. Entonces $\rho(T_1) \cap \rho(T) = \rho(T_1) \cap \rho(\Psi T_1) \setminus \{0\}$ y, para todo λ en este conjunto, tenemos*

$$R(\lambda; T) = \begin{pmatrix} \lambda^{-1}(I + T_1 R(\lambda; \Psi T_1)) & \lambda^{-1}T_1 R(\lambda; \Psi T_1)T_1^{-1}T_{12} \\ \lambda^{-1}T_{21}R(\lambda; \Psi T_1) & \lambda^{-1}(I + T_{21}R(\lambda; \Psi T_1)T_1^{-1}T_{12} \end{pmatrix}. \tag{6.9}$$

Dem. Para cualquier $\lambda \in \rho(T_1)$, sea $S(\lambda) = \lambda - T_2 - T_{21}R(\lambda; T_1)T_{12}$. Denotamos por $\rho(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : S(\lambda)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\}$. Por [30, Proposición H], tenemos que $\rho(T_1) \cap \rho(T) = \rho(S)$ y, para todo $\lambda \in \rho(S)$,

$$R(\lambda; T) = \begin{pmatrix} R(\lambda; T_1)\big(I + T_{12}S(\lambda)^{-1}T_{21}R(\lambda; T_1)\big) & R(\lambda; T_1)T_{12}S(\lambda)^{-1} \\ S(\lambda)^{-1}T_{21}R(\lambda; T_1) & S(\lambda)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{6.10}$$

Usando la hipótesis $T_2 = T_{21}T_1^{-1}T_{12}$, podemos escribir $S(\lambda)$ de la forma

$$\begin{aligned} S(\lambda) &= \lambda - T_{21}T_1^{-1}T_{12} - T_{21}R(\lambda; T_1)T_{12} = \lambda - T_{21}R(\lambda; T_1)\big((\lambda I - T_1)T_1^{-1} + I\big)T_{12} \\ &= \lambda\big(I - T_{21}R(\lambda; T_1)T_1^{-1}T_{12}\big). \end{aligned}$$

Probemos que $\rho(S) = \rho(T_1) \cap \rho(\Psi T_1) \setminus \{0\}$ y, para todo λ en este conjunto,

$$S(\lambda)^{-1} = \lambda^{-1}\big(I + T_{21}R(\lambda; \Psi T_1)T_1^{-1}T_{12}\big). \tag{6.11}$$

De la igualdad siguiente

$$\begin{pmatrix} T_1 & T_{12} \\ T_{21} & T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -T_1^{-1}T_{12} \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 + T_1^{-1}T_{12}T_{21} & O \\ T_{21} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & T_1^{-1}T_{12} \\ O & I \end{pmatrix}$$

obtenemos que $\sigma(T) = \sigma(\Psi T_1) \cup \{0\}$, o lo que es lo mismo $\rho(T) = \rho(\Psi T_1) \setminus \{0\}$. Por consiguiente, $\rho(S) = \rho(T_1) \cap \rho(T) = \rho(T_1) \cap \rho(\Psi T_1) \setminus \{0\}$. Ahora, para λ en dicho conjunto, definimos $Z(\lambda) = \lambda^{-1}\big(I + T_{21}R(\lambda; \Psi T_1)T_1^{-1}T_{12}\big)$. Observamos que,

$$\begin{aligned} R(\lambda; \Psi T_1) - R(\lambda; T_1) &= R(\lambda; T_1)\big(\lambda - T_1 - (\lambda - T_1 - T_1^{-1}T_{12}T_{21})\big)R(\lambda; \Psi T_1) \\ &= R(\lambda; T_1)T_1^{-1}T_{12}T_{21}R(\lambda; \Psi T_1). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} S(\lambda)Z(\lambda) =& \lambda\big(I - T_{21}R(\lambda; T_1)T_1^{-1}T_{12}\big)\lambda^{-1}\big(I + T_{21}R(\lambda; \Psi T_1)T_1^{-1}T_{12}\big) \\ =& I + T_{21}\big(R(\lambda; \Psi T_1) - R(\lambda; T_1) - R(\lambda; T_1)T_1^{-1}T_{12}T_{21}R(\lambda; \Psi T_1)\big)T_1^{-1}T_{12} \\ =& I. \end{aligned}$$

De forma similar, usando que

$$R(\lambda; \Psi T_1) - R(\lambda; T_1) = R(\lambda; \Psi T_1)T_1^{-1}T_{12}T_{21}R(\lambda; T_1),$$

vemos que $Z(\lambda)S(\lambda) = I$. Por lo tanto, $Z(\lambda) = S(\lambda)^{-1}$.

Calculamos ahora las demás componentes de (6.10).

$$\begin{aligned} S(\lambda)^{-1}T_{21}R(\lambda;\ T_1) &= \lambda^{-1}\big(I + T_{21}R(\lambda; \Psi T_1)T_1^{-1}T_{12}\big)T_{21}R(\lambda;\ T_1) \\ &= \lambda^{-1}T_{21}\big(R(\lambda; \Psi T_1)T_1^{-1}T_{12}T_{21}R(\lambda;\ T_1) + R(\lambda;\ T_1)\big) \\ &= \lambda^{-1}T_{21}R(\lambda; \Psi T_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(\lambda;\ T_1)T_{12}S(\lambda)^{-1} &= R(\lambda;\ T_1)T_{12}\lambda^{-1}\big(I + T_{21}R(\lambda; \Psi T_1)T_1^{-1}T_{12}\big) \\ &= \lambda^{-1}R(\lambda; T_1\Psi)T_{12} \\ &= \lambda^{-1}T_1R(\lambda; \Psi T_1)T_1^{-1}T_{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(\lambda; T_1)\big(I + T_{12}S(\lambda)^{-1}T_{21}R(\lambda; T_1)\big) &= R(\lambda; T_1) + \lambda^{-1}T_1R(\lambda; T_1)T_1^{-1}T_{12}T_{21}R(\lambda; \Psi T_1) \\ &= \lambda^{-1}T_1R(\lambda; \Psi T_1) + (I - \lambda^{-1}T_1)R(\lambda; T_1) \\ &= \lambda^{-1}(I + T_1R(\lambda; \Psi T_1)). \end{aligned}$$

Finalmente, substituyendo (6.11) y las igualdades anteriores en (6.10) obtenemos (6.9). □

Consideramos ahora el Grupo inverso de un operador con una representación matricial como en el Teorema 6.3.1. El siguiente resultado es una generalización de [4, Teorema 7.7.7], el cual fue establecido para matrices por bloques.

TEOREMA 6.3.2. *Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ definido por $T = \begin{pmatrix} T_1 & T_{12} \\ T_{21} & T_2 \end{pmatrix}$, respecto la descomposición $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$, donde T_1 es invertible en $\mathcal{B}(\mathcal{X}_1)$ y $T_2 = T_{21}T_1^{-1}T_{12}$, y sea*

$\Psi = I + T_1^{-1}T_{12}T_{21}T_1^{-1}$. *Entonces* T *es Grupo invertible si y sólo si* Ψ *es invertible. En este caso,*

$$T^\sharp = \begin{pmatrix} (\Psi T_1 \Psi)^{-1} & (\Psi T_1 \Psi)^{-1} T_1^{-1} T_{12} \\ T_{21} T_1^{-1} (\Psi T_1 \Psi)^{-1} & T_{21} T_1^{-1} (\Psi T_1 \Psi)^{-1} T_1^{-1} T_{12} \end{pmatrix} \tag{6.12}$$

y

$$T^\pi = \begin{pmatrix} I - \Psi^{-1} & -\Psi^{-1} T_1^{-1} T_{12} \\ -T_{21} T_1^{-1} \Psi^{-1} & I - T_{21} T_1^{-1} \Psi^{-1} T_1^{-1} T_{12} \end{pmatrix}. \tag{6.13}$$

Dem. Por el Teorema 6.3.1, para todo $\lambda \in \rho(T_1) \cap \rho(T) = \rho(T_1) \cap \rho(\Psi T_1) \setminus \{0\}$, el operador resolvente $R(\lambda;T)$ tiene una forma matricial dada por

$$R(\lambda;T) = \begin{pmatrix} \lambda^{-1}(I + T_1 R(\lambda;\Psi T_1)) & \lambda^{-1} T_1 R(\lambda;\Psi T_1) T_1^{-1} T_{12} \\ \lambda^{-1} T_{21} R(\lambda;\Psi T_1) & \lambda^{-1}(I + T_{21} R(\lambda;\Psi T_1) T_1^{-1} T_{12} \end{pmatrix}. \tag{6.14}$$

Supongamos que T es Grupo invertible. Entonces $R(\lambda;T)$ tiene el desarrollo en serie de Laurent en la región $0 < |\lambda| < \big(r(T^D)\big)^{-1}$:

$$R(\lambda;T) = \frac{1}{\lambda}(I - TT^D) - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (T^D)^{n+1}. \tag{6.15}$$

Por otra parte, dado que $0 \in iso\,\sigma(T)$ y T_1 es invertible, entonces existe un disco perforado $D_{r_0} = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda| < r_0\}$ tal que $D_{r_0} \subset \rho(T) \cap \rho(T_1) = \rho(T_1) \cap \rho(\Psi T_1) \setminus \{0\}$. Luego, $0 \in \rho(\Psi T_1)$ ó $0 \in iso\,\sigma(\Psi T_1)$. Por lo tanto,

$$R(\lambda;\Psi T_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^n X_n,$$

para $\lambda \in D_{r_0}$ y los X_n son definidos como es usual en el desarrollo en serie de Laurent. Usando la expansión (6.15) en el lado izquierdo de (6.14) y la expresión dada arriba en el lado derecho de la misma identidad deducimos que $X_{-n} = 0$, para todo $n \geq 1$, y, así, ΨT_1 es invertible.

Recíprocamente, supongamos que ΨT_1 es invertible. Entonces tenemos el siguiente desarrollo

$$R(\lambda;\Psi T_1) = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \big((\Psi T_1)^{-1}\big)^{n+1},$$

en la región $|\lambda| < r(\Psi T_1)$. Usando este desarrollo junto con (6.14) vemos que el 0 es un polo simple de $R(\lambda;T)$ y, tomando los coeficientes de λ^0 y λ^{-1}, deducimos la representación de $T^\sharp$ y T^π, dadas en (6.12) y (6.13), respectivamente. $\square$

6.4. Caracterizaciones de perturbaciones Grupo invertibles

El principal propósito de esta sección será extender a operadores el análisis de la perturbación de la inversa de Drazin realizado en el Capítulo 3 para las matrices cuadradas A, B tales que B es grupo invertible y verifican las condiciones

$$\mathcal{R}(A^k) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}, \ \mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A^k) = \{0\},$$

donde $k = ind(A)$.

Para ello introduciremos la clase de operadores $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ Grupo invertibles que verifican las condiciones

$$\mathcal{X} = \mathcal{R}(A^k) \oplus \mathcal{N}(B) \ \text{ y } \ \mathcal{X} = \mathcal{R}(B) \oplus \mathcal{N}(A^k), \tag{6.16}$$

donde $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ es Drazin invertible con $ind(A) = k$.

Se hace notar que si $\mathcal{X}$ es un espacio de Hilbert de dimensión finita, entonces las condiciones en (6.16) son equivalentes a las anteriormente formuladas para matrices.

Se establecerá una conexión entre el hecho de que B verifique las condiciones (6.16) y el hecho de que B posea cierto inverso generalizado algebraico en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Finalizaremos esta introducción dando algunas conceptos básicos sobre los inversos generalizados algebraicos los cuales serán usados en esta sección, (ver [71]).

Sea $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Un operador $X \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ es llamado un *inverso interior* de B si $BXB = B$ y un *inverso exterior* si $XBX = X$, con $X \neq O$. Si $\mathcal{X}$ es de dimension finita, entonces el inverso exterior siempre existe. Si B posee un inverso interior acotado, entonces se dice que B es *regular*.

Si X es una inverso interior y exterior de B, el operador X es llamado un *inverso generalizado algebraico* o *AG-inverso*.

Observamos que un *AG*-inverso de B verifica las condiciones (i) y (ii) de Penrose, por lo tanto el operador $\mathcal{X}$ es un $(1, 2)$-inverso generalizado de B, según la terminología de las (i, j, k)-inversas introducida en el Capítulo 1. Notemos que el Grupo inverso de B también es un $(1, 2)$-inverso de B.

Es sabido que $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tiene un *AG*-inverso $X \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ si y sólo si $\mathcal{N}(B)$ y $\mathcal{R}(B)$ son cerrados y tienen complementos topológicos en $\mathcal{X}$.

Si B es un operador regular, entonces B posee un inverso exterior acotado, el recíproco no es cierto. Por lo tanto, la clase de los operadores regulares es la misma de la de los operadores *AG*-invertibles.

Para cualquier operador $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ con un AG-inverso acotado X, tenemos las siguientes propiedades:

(i) BX y XB son proyectores acotados tales que

$$\mathcal{R}(BX) = \mathcal{R}(B),\ \mathcal{R}(XB) = \mathcal{R}(X),\ \mathcal{N}(BX) = \mathcal{N}(X),\ \mathcal{N}(XB) = \mathcal{N}(B).$$

(ii) $\mathcal{X} = \mathcal{R}(X) \oplus \mathcal{N}(B)$, $\mathcal{X} = \mathcal{R}(B) \oplus \mathcal{N}(X)$.

En el siguiente teorema, dado un operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ Drazin invertible y bajo la hipótesis $I + A^D(B - A)$ es invertible, caracterizamos un AG-inverso de $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$.

TEOREMA 6.4.1. *Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ Drazin invertible con $ind(A) = k$. Las siguientes afirmaciones sobre $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ y $I + A^D(B - A)$ es invertible son equivalentes:*

(i) $Z = (I + A^D(B - A))^{-1}A^D = A^D(I + (B - A)A^D)^{-1}$ *es un AG-inverso de B.*

(ii) $B(I + A^D(B - A))^{-1}A^\pi = A^\pi(I + (B - A)A^D)^{-1}B = O$.

(iii) $\mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A^k) = \{0\}$.

(iv) $\mathcal{X} = \mathcal{N}(B) + \mathcal{R}(A^k)$.

(v) $\mathcal{R}(BA^D) = \mathcal{R}(B)$.

(vi) $\mathcal{N}(A^D B) = \mathcal{N}(B)$.

(vii) $A^\pi(\mathcal{N}(B)) = \mathcal{N}(A^k)$.

DEM. (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Observamos que $A^\pi(A^\pi + A^D B)^{-1} = A^\pi$ y, así,

$$ZBZ = (A^\pi + A^D B)^{-1}(A^D B + A^\pi - A^\pi)(A^\pi + A^D B)^{-1}A^D = Z.$$

Además,

$$BZB = B - B(I + A^D(B - A))^{-1}A^\pi = B - A^\pi(I + (B - A)A^D)^{-1}B.$$

Entonces,

$$BZB = B \Leftrightarrow A^\pi(I + (B - A)A^D)^{-1}B = B - B(I + A^D(B - A))^{-1}A^\pi = O.$$

Por lo que la equivalencia entre (i) y (ii) queda establecida.

(ii) $\Rightarrow$ (iii),(v): Tenemos que BZ es una proyección, entonces $\mathcal{R}(BZ) = \mathcal{R}(B)$ y $\mathcal{N}(BZ) = \mathcal{N}(Z)$. Además,

$$\mathcal{X} = \mathcal{N}(BZ) \oplus \mathcal{R}(BZ) = \mathcal{N}(Z) \oplus \mathcal{R}(B).$$

Claramente, $\mathcal{N}(Z) = \mathcal{N}(A^D) = \mathcal{N}(A^k)$ y, así, $\mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A^k) = \{0\}$. Usando que $\mathcal{R}(BZ) = \mathcal{R}(BA^D)$ también concluimos que $\mathcal{R}(BA^D) = \mathcal{R}(B)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iv),(vi),(vii): De ZB es una proyección se sigue que $\mathcal{R}(ZB) = \mathcal{R}(Z) = \mathcal{R}(A^k)$, $\mathcal{N}(A^D B) = \mathcal{N}(ZB) = \mathcal{N}(B)$ y

$$\mathcal{X} = \mathcal{N}(ZB) \oplus \mathcal{R}(ZB) = \mathcal{N}(B) \oplus \mathcal{R}(A^k).$$

Lo anterior prueba (iv) y (vi). Ahora, sea $x \in \mathcal{N}(A^k) = \mathcal{N}(A^D)$. Escribimos $x = A^D y + z$, respecto a la suma $\mathcal{X} = \mathcal{N}(B) \oplus \mathcal{R}(A^k)$. Entonces $x = A^\pi x = A^\pi z$, con $z \in \mathcal{N}(B)$. Esto prueba (vii).

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Tenemos

$$A^D B(I + A^D(B - A))^{-1} = (A^D B + A^\pi - A^\pi)(I + A^D(B - A))^{-1} = I - A^\pi. \quad (6.17)$$

Por lo tanto, para todo $x \in \mathcal{X}$, se cumple que

$$B(I + A^D(B - A))^{-1} A^\pi x \in \mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A^D) = \{0\}.$$

Luego, $B(I + A^D(B - A))^{-1} A^\pi x = 0$, para todo $x \in \mathcal{X}$. Esto prueba (ii).

(iv),(v) $\Rightarrow$ (ii): Asumimos (iv) y sea $x \in \mathcal{X}$. Escribimos $x = A^D y + z$, respecto a la suma $\mathcal{X} = \mathcal{N}(B) + \mathcal{R}(A^k)$. Entonces,

$$A^\pi(I + (B - A)A^D)^{-1} Bx = A^\pi(I + (B - A)A^D)^{-1} BA^D y = 0.$$

Si (v) se tiene, entonces para un arbitrario $x \in \mathcal{X}$, tenemos $Bx = BA^D y$, para algún $y \in \mathcal{X}$. Por lo tanto,

$$A^\pi(I + (B - A)A^D)^{-1} Bx = A^\pi(I + (B - A)A^D)^{-1} BA^D y = 0.$$

Esto prueba (ii).

(vi),(vii) $\Rightarrow$ (ii): Asumimos (vi). De (6.17) se sigue $A^D B(I + A^D(B - A))^{-1} A^\pi x = 0$, para todo $x \in \mathcal{X}$. Entonces $(I + A^D(B - A))^{-1} A^\pi x \in \mathcal{N}(A^D B) = \mathcal{N}(B)$. Así, $B(I + A^D(B - A))^{-1} A^\pi = O$.

Si tenemos (g), entonces, para todo $x \in \mathcal{X}$, tenemos $A^\pi x = A^\pi u$, con $u \in \mathcal{N}(B)$. Luego,

$$B(I + A^D(B - A))^{-1} A^\pi x = B(I + A^D(B - A))^{-1} A^\pi u = 0.$$

Así vemos esta implicación y se concluye la demostración el teorema. □

Del [54, Teorema 5.2], equivalencia (i) $\Leftrightarrow$ (ii), extraemos el siguiente lema.

LEMA 6.4.2. *Sean F, $G \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ dos proyectores oblicuos. Entonces,*

$$F - G \text{ es invertible} \Leftrightarrow \mathcal{X} = \mathcal{R}(F) \oplus \mathcal{R}(G) \text{ y } \mathcal{X} = \mathcal{N}(F) \oplus \mathcal{N}(G).$$

LEMA 6.4.3. *Sean $S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Entonces $I + ST$ es invertible en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ si y sólo si $I + TS$ es invertible en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.*

DEM. La demostración de este resultado se puede ver en [103, Teorema 2.8]. $\square$

En el siguiente teorema, el cual constituye el principal resultado de esta sección, caracterizamos la clase de operadores Grupo invertibles que satisfacen las condiciones (6.16).

TEOREMA 6.4.4. *Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ Drazin invertible con $ind(A) = k$. Las siguientes condiciones sobre el operador $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tal que B es Grupo invertible son equivalentes:*

(i) *$I + A^D(B - A)$ es invertible, $\mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A^k) = \{0\}$.*

(ii) *Respecto a la descomposición del espacio $\mathcal{X} = \mathcal{R}(A^k) \oplus \mathcal{N}(A^k)$, B tiene una representación matricial de la forma*

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ B_{21} & B_{21}B_1^{-1}B_{12} \end{pmatrix}, \; B_1, \; I + B_1^{-1}B_{12}B_{21}B_1^{-1} \text{ son invertibles en } \mathcal{B}(\mathcal{R}(A^k)). \tag{6.18}$$

(iii) *$I - A^\pi - B^\pi$ es invertible en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.*

(iv) *$\mathcal{X} = \mathcal{R}(A^k) \oplus \mathcal{N}(B)$, $\mathcal{X} = \mathcal{R}(B) \oplus \mathcal{N}(A^k)$.*

(v) *$B^\pi + A^D B$ es invertible, $\mathcal{N}(B) \cap \mathcal{R}(A^k) = \{0\}$.*

(vi) *$\mathcal{R}(A^D) = \mathcal{R}(A^D B A^D)$, $\mathcal{N}(A^D B) = \mathcal{N}(B)$, $\mathcal{N}(B) \cap \mathcal{R}(A^D) = \{0\}$.*

DEM. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sean $A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ B_{21} & B_2 \end{pmatrix}$ las formas matriciales de A y B, relativas a la descomposición $\mathcal{X} = \mathcal{R}(A^k) \oplus \mathcal{N}(A^k)$, respectivamente. Entonces,

$$I + A^D(B - A) = \begin{pmatrix} A_1^{-1}B_1 & A_1^{-1}B_{12} \\ O & I \end{pmatrix}.$$

De la condición $I+A^D(B-A)$ es invertible en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, se sigue que B_1 es invertible en $\mathcal{B}(\mathcal{R}(A^k))$. Además,

$$(I+A^D(B-A))^{-1} = \begin{pmatrix} B_1^{-1}A_1 & -B_1^{-1}B_{12} \\ O & I \end{pmatrix}.$$

Calculamos

$$B(I+A^D(B-A))^{-1}A^\pi = \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ B_{21} & B_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & -B_1^{-1}B_{12} \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & B_2 - B_{21}B_1^{-1}B_{12} \end{pmatrix}.$$

Entonces, $B_2 = B_{21}B_1^{-1}B_{12}$, ya que por el Teorema 6.4.4, equivalencia de (ii) y (iii), se verifica $B(I+A^D(B-A))^{-1}A^\pi = O$. Del cáculo

$$A^\pi + A^DB^2A^D = \begin{pmatrix} A_1^{-1}(B_1^2 + B_{12}B_{21})A_1^{-1} & O \\ O & I \end{pmatrix},$$

se sigue que $B_1^2 + B_{12}B_{21}$, o equivalentemente, $I + B_1^{-1}B_{12}B_{21}B_1^{-1}$ es invertible en $\mathcal{B}(\mathcal{R}(A^k))$ si y sólo si $A^\pi + A^DB^2A^D$ es invertible en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Mostraremos que el operador $A^\pi + A^DB^2A^D$ es invertible en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Primero, observamos el siguiente hecho. Por el Teorema 6.4.1, equivalencia de (iii), (v) y (vi), también tenemos $\mathcal{N}(A^DB) = \mathcal{N}(B)$ y $\mathcal{R}(BA^D) = \mathcal{R}(B)$. Por otra parte, dado que B es Grupo invertible se cumple que $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(B^2)$, $\mathcal{N}(B) = \mathcal{N}(B^2)$ y $\mathcal{X} = \mathcal{R}(B) \oplus \mathcal{N}(B)$.

Para probar que $A^\pi + A^DB^2A^D$ es inyectiva, sea $(A^\pi + A^DB^2A^D)x = 0$. Entonces $A^\pi x = 0$ y $A^DB^2A^Dx = 0$. De esta última igualdad se sigue que $BA^Dx \in \mathcal{N}(A^DB) = \mathcal{N}(B)$ y, de $\mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$, que $BA^Dx = 0$. Luego,

$$A^Dx \in \mathcal{R}(A^k) \cap \mathcal{N}(B).$$

De la condición $A^\pi + A^DB$ es invertible obtenemos que $\mathcal{N}(A^DB) \cap \mathcal{N}(A^\pi) = \mathcal{N}(B) \cap \mathcal{R}(A^k) = \{0\}$ y, así, $A^Dx = 0$, concluyendo que $x = A^\pi x + AA^Dx = 0$.

Queda probar que $A^\pi + A^DB^2A^D$ es sobreyectiva. Consideremos $x \in \mathcal{X}$ arbitrario, entonces hay un $u \in \mathcal{X}$ para el cual $x = (A^\pi + A^DB)u$, lo cual implica que $AA^Dx = A^DBu$. De $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(B^2) = \mathcal{R}(BA^D)$ se sigue que existen $v,\ w \in \mathcal{X}$ tal que $Bu = B^2v = B^2A^Dw$. Por lo tanto, $AA^Dx = A^DB^2A^Dw$, y

$$x = A^\pi x + AA^Dx = (A^\pi + A^DB^2A^D)(AA^Dw + A^\pi x).$$

Esto prueba que $A^\pi + A^DB^2A^D$ es sobreyectiva.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Llamamos $\Psi = I + B_1^{-1}B_{12}B_{21}B_1^{-1}$. Primero, del Teorema 6.3.2 deducimos que B es Grupo invertible ya que Ψ es invertible en $\mathcal{B}(\mathcal{R}(A^k))$. Además, aplicando la fórmula (6.13), obtenemos que

$$I - A^\pi - B^\pi = \begin{pmatrix} \Psi^{-1} & \Psi^{-1}B_1^{-1}B_{12} \\ B_{21}B_1^{-1}\Psi^{-1} & -I + B_{21}B_1^{-1}\Psi^{-1}B_1^{-1}B_{12} \end{pmatrix}. \tag{6.19}$$

Finalmente, de la identidad

$$(I - A^\pi - B^\pi)(I + A^D(B - A))^{-1} = \begin{pmatrix} \Psi^{-1}B_1^{-1}A_1 & O \\ B_{21}B_1^{-1}\Psi^{-1}B_1^{-1}A_1 & -I \end{pmatrix},$$

concluimos que $I - A^\pi - B^\pi$ es invertible.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv): Bajo la hipótesis que B es Grupo invertible, existe el proyector espectral B^π con $\mathcal{R}(B^\pi) = \mathcal{N}(B)$ y $\mathcal{N}(B^\pi) = \mathcal{R}(B)$. Puesto que $I - A^\pi$ es el proyector oblicuo con $\mathcal{R}(I - A^\pi) = \mathcal{R}(A^k)$ y $\mathcal{N}(I - A^\pi) = \mathcal{N}(A^k)$, aplicando el Lema 6.4.2 con $F = I - A^\pi$ y $G = B^\pi$ se deriva esta equivalencia.

(iv) $\Rightarrow$ (v): Primero, notamos que el operador $I + B^\pi A^D B$ es invertible en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Ahora, de la identidad

$$B^\pi + A^D B = (B^\pi + B^\sharp BA^D B)(I + B^\pi A^D B) \tag{6.20}$$

se sigue que $B^\pi + A^D B$ es invertible si y sólo si $B^\pi + B^\sharp BA^D B$ es invertible. Para probar que $B^\pi + B^\sharp BA^D B$ es inyectiva, supongamos que $(B^\pi + B^\sharp BA^D B)x = 0$. Entonces $B^\pi x = -B^\sharp BA^D Bx$ y, de aquí, deducimos que $B^\pi x = 0$ y $BA^D Bx = 0$. De la última relación se sigue que $A^D Bx \in \mathcal{N}(B) \cap \mathcal{R}(A^k)$ y, así, $A^D Bx = 0$. Pero también tenemos $Bx \in \mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A^D)$ y por lo tanto $Bx = 0$. Esto, junto con $B^\pi x = 0$ nos da que $x = B^\pi x + B^\sharp Bx = 0$.

Para ver que $B^\pi + B^\sharp BA^D B$ es sobre, tomemos $x \in \mathcal{X}$ arbitrario. De $\mathcal{X} = \mathcal{N}(B) \oplus \mathcal{R}(A^k)$ tenemos $x = z + A^D y$, con $z \in \mathcal{N}(B)$ e $y \in \mathcal{X}$. Así, $B^\sharp Bx = B^\sharp BA^D y$. Además, de $\mathcal{X} = \mathcal{R}(B) \oplus \mathcal{N}(A^k)$, podemos escribir $y = Bu + v$, con $u \in \mathcal{X}$ y $v \in \mathcal{N}(A^k)$. Por lo tanto, $B^\sharp Bx = B^\sharp BA^D y = B^\sharp BA^D Bu$ y

$$x = BB^\sharp x + B^\pi x = (B^\pi + B^\sharp BA^D B)(B^\sharp Bu + B^\pi x),$$

finalizando la implicación.

(v) $\Rightarrow$ (vi): De $\mathcal{R}(A^D) = \mathcal{R}(A^k)$ es claro que se tiene $\mathcal{N}(B) \cap \mathcal{R}(A^D) = \{0\}$. Para probar la inclusión $\mathcal{N}(A^D B) \subseteq \mathcal{N}(B)$, supongamos que $x \in \mathcal{N}(A^D B)$. Entonces $(B^\pi + A^D B)BB^\sharp = A^D Bx = 0$. De aquí se sigue que $BB^\sharp x = 0$ y, así, $x \in \mathcal{N}(B)$. La inclusión $\subseteq$ es obvia.

Queda probar únicamente que $\mathcal{R}(A^D) \subseteq \mathcal{R}(A^D BA^D)$ ya que la inclusión inversa resulta clara. Sea $x \in \mathcal{R}(A^D)$ arbitrario. Entonces existe $y \in \mathcal{X}$ para el cual $x = (B^\pi + A^D B)y$. Luego $A^\pi x = A^\pi B^\pi y = 0$ y, así, $B^\pi y \in \mathcal{R}(A^D) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$. Esto implica que $x = A^D By = A^D B(B^\pi + A^D B)z = A^D BA^D Bz$, con $z = (B^\pi + A^D B)^{-1}y$. Concluyendo que $x \in \mathcal{R}(A^D BA^D)$.

(vi) $\Rightarrow$ (i): Observamos en primer lugar que $I + A^D BA^\pi$ es invertible en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Ahora, de la identidad

$$(A^\pi + A^D B) = (I + A^D BA^\pi)(A^\pi + A^D BA^D A) \tag{6.21}$$

se sigue que $A^\pi + A^D B$ es invertible si y sólo si $A^\pi + A^D B A^D A$ es invertible. Probaremos que

$$\mathcal{N}(A^\pi + A^D B A^D A) = \{0\} \text{ y } \mathcal{R}(A^\pi + A^D B A^D A) = \mathcal{X}.$$

En vista de (6.21), y usando $\mathcal{N}(A^\pi) \cap \mathcal{N}(A^D B) = \{0\}$, concluimos que

$$\mathcal{N}(A^\pi + A^D B A^D A) = \mathcal{N}(A^\pi + A^D B) = \{0\}.$$

Para demostrar la segunda identidad tomemos un $x \in \mathcal{X}$ arbitrario. Por la igualdad $\mathcal{R}(A^D) = \mathcal{R}(A^D B A^D)$, podemos escribir $AA^D x = A^D B A^D y$, para algún $y \in \mathcal{X}$ y, entonces

$$x = A^\pi x + AA^D x = (A^\pi + A^D B A^D A)(A^\pi x + A^D y).$$

Además, por el Teorema 6.4.1, equivalencia (vi) $\Leftrightarrow$ (iii), se sigue la relación $\mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A^k) = \{0\}$. $\square$

Se hace notar que la segunda condición en (i) del teorema anterior puede ser reemplaza por cualquiera de las condiciones equivalentes dadas en el Teorema 6.4.1.

La demostración del teorema anterior muestra el siguiente resultado, el cual será usado en la próxima sección para dar una condición de la continuidad del Grupo inverso.

Lema 6.4.5. *Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ Drazin invertible y $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Si $I + A^D(B - A)$ es invertible y $\mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A^k) = \{0\}$, con $k = ind(A)$, entonces se cumple la siguiente equivalencia:*

$$B \textit{ es Grupo invertible} \Leftrightarrow I + (A^D)^2(B^2 - A^2) \textit{ es invertible en } \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

Dem. Bajo las hipótesis de este teorema y argumentando como en la demostración de la equivalencia (i) $\Leftrightarrow$ (ii) en el Teorema 6.4.4, tenemos $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ B_{21} & B_{21}B_1^{-1}B_{12} \end{pmatrix}$, con B_1 invertible en $\mathcal{B}(\mathcal{R}(A^k))$ y, además, si asumimos que B es Grupo invertible, entonces $A^\pi + A^D B^2 A^D$ es invertible.

Por el Lema 6.4.3, $I + (A^D)^2(B^2 - A^2)$ es invertible si y sólo si $I + A^D(B^2 - A^2)A^D$ es invertible. Por lo tanto, una implicación es probada.

Recíprocamente, si $A^\pi + A^D B^2 A^D$ es invertible, entonces usando la representación matricial de B dada arriba, derivamos que $I + B_1^{-1}B_{12}B_{21}B_1^{-1}$ es invertible en $\mathcal{B}(\mathcal{R}(A^k))$ y, del Teorema 6.3.2 se sigue que B es grupo invertible. $\square$

6.5. Cotas de perturbación para inversas de Drazin y proyectores espectrales

En esta sección se derivarán cotas del error para la norma de la diferencia de las inversas de Drazin y los proyectores espectrales de la clase de perturbaciones en estudio.

Primero, estableceremos una cota del error para la inversa de Drazin en términos de la norma de la diferencia de los proyectores espectrales asociados al autovalor 0. Observamos que la condición $\|A^D(B-A)\| < 1$ implica que $I + A^D(B-A)$ es invertible.

LEMA 6.5.1. *Sean A, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ Drazin invertibles. Si $\|B^\pi - A^\pi\| < 1$, entonces $\mathcal{N}(B^\pi) \cap \mathcal{N}(I - A^\pi) = \{0\}$.*

DEM. De $\|B^\pi - A^\pi\| < 1$ deducimos que $I - A^\pi + B^\pi$ es invertible. Ahora, asumimos que $x \in \mathcal{N}(B^\pi) \cap \mathcal{N}(I - A^\pi)$. Entonces $(I - A^\pi)x = B^\pi x = 0$ y, así, $(I - A^\pi + B^\pi)x = 0$. Luego $x = 0$ y la implicación es probada. □

TEOREMA 6.5.2. *Sean A, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ dos operadores Drazin invertible y Grupo invertible, respectivamente, y sea $E = B - A$. Si $\|B^\pi - A^\pi\| + \|A^D E\| < 1$, entonces*

$$\frac{\|B^\sharp - A^D\|}{\|A^D\|} \leq \frac{\|A^D E\| + 2\|B^\pi - A^\pi\|}{1 - \|B^\pi - A^\pi\| - \|A^D E\|}. \tag{6.22}$$

DEM. Por el Lema 6.5.1, tenemos $\mathcal{N}(B^\pi) \cap \mathcal{N}(I - A^\pi) = \{0\}$ o, equivalentemente $\mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A^k) = \{0\}$, con $k = ind(A)$. Por hipótesis también tenemos que $I + A^D(B - A)$ es invertible. Por lo tanto, podemos aplicar el Teorema 6.4.4 y de la equivalencia (i) $\Leftrightarrow$ (v) se sigue que $B^\pi + A^D B$ es invertible en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Ahora, notemos que la siguiente identidad se tiene:

$$B^\sharp = (B^\pi + A^D B)^{-1} A^D (I - B^\pi) = (I + A^D E + B^\pi - A^\pi)^{-1} A^D (I - B^\pi + A^\pi).$$

Esto da paso a

$$B^\sharp - A^D = -(A^D E + B^\pi - A^\pi)(B^\sharp - A^D + A^D) - A^D(B^\pi - A^\pi).$$

Tomando normas obtenemos

$$\|B^\sharp - A^D\| \leq (\|A^D E\| + \|B^\pi - A^\pi\|)\, \|B^\sharp - A^D\| + (\|A^D E\| + 2\|B^\pi - A^\pi\|)\, \|A^D\|.$$

Agrupando términos en $\|B^\sharp - A^D\|$ y usando la hipótesis $\|B^\pi - A^\pi\| + \|A^D E\| < 1$ tenemos la cota superior (6.22). □

La cota (6.22) puede ser combinada con una explícita cota superior de $\|B^\pi - A^\pi\|$. Por lo tanto, si Δ es una cota superior de $\|B^\pi - A^\pi\|$ tal que $\|A^D E\| + \Delta < 1$, entonces

$$\frac{\|B^\sharp - A^D\|}{\|A^D\|} \leq \frac{\|A^D E\| + 2\Delta}{1 - \|A^D E\| - \Delta}, \tag{6.23}$$

lo cual se sigue repitiendo el argumento de la demostración del teorema de arriba.

Dados dos operadores idempotentes P, $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, en [14, Proposistion 2.2] fue deducida una cota del error para la norma $\|P - Q\|$ en términos del gap entre sus subespacios núcleo e imagen.

Sea $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ el conjunto de todos los subespacios acotados del espacio de Banach $\mathcal{X}$. El *gap* entre los subespacios $\mathcal{U}$, $\mathcal{V} \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$ es definido en [32, 45]:

$$gap(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \text{máx}\{\delta(\mathcal{U}, \mathcal{V}), \delta(\mathcal{V}, \mathcal{U})\},$$

donde $\delta(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \sup\{\text{dist}(x, \mathcal{V}) : x \in \mathcal{U}, \|x\| = 1\}$.

Proposición 6.5.3. *Sean P, $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ operadores idempotentes y tomemos*

$$\nu(P, Q) = gap(\mathcal{N}(P), \mathcal{N}(Q)), \quad \varrho(P, Q) = gap(\mathcal{R}(P), \mathcal{R}(Q)).$$

Si $\|P\|\,\nu(P, Q) - \|I - P\|\,\varrho(P, Q) < 1$, entonces

$$\|P - Q\| \leq \frac{\|P\|\,\|I - P\|(\nu(P, Q) + \varrho(P, Q))}{1 - \|P\|\,\nu(P, Q) - \|I - P\|\,\varrho(P, Q)}.$$

Una estimación para Δ es obtenida directamente de la proposición anterior tomando los proyectores A^π y B^π.

Si consideramos un espacio de Hilbert, $\mathcal{H}$, entonces

$$gap(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \|P_\mathcal{U} - P_\mathcal{V}\|.$$

El resto de esta sección está dedicado a obtener formulaciones explícitas de las cotas del error de para las inversas de Drazin y los proyectores espectrales. Nuestro análisis está basado en la representación matricial del operador perturbación probado en el Teorema 6.4.4 y las fórmulas para el Grupo inverso y el proyector espectral deducidos en el Teorema 6.3.2.

A continuación damos el siguiente resultado el cual usaremos más adelante.

LEMA 6.5.4. *Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ un operador Drazin invertible. Asumimos que $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tiene una representación matricial dada como en (6.18). Si $E = B - A$, entonces tenemos las siguientes representaciones*

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_E &:= (I + A^D E)^{-1} A^D E A^\pi = \begin{pmatrix} O & B_1^{-1} B_{12} \\ O & O \end{pmatrix}, \\ \mathcal{L}_E &:= A^\pi E A^D (I + E A^D)^{-1} = \begin{pmatrix} O & O \\ B_{21} B_1^{-1} & O \end{pmatrix}, \\ (I + \mathcal{U}_E \mathcal{L}_E)^{-1} &= \begin{pmatrix} (I + B_1^{-1} B_{12} B_{21} B_1^{-1})^{-1} & O \\ O & I \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Si $\max\{\|A^D E\|, \|E A^D\|\} < \dfrac{1}{1 + \sqrt{\|A^\pi\|}}$, *entonces*

$$\|\mathcal{U}_E\| \leq \frac{\|A^D E A^\pi\|}{1 - \|A^D E\|}, \quad \|\mathcal{L}_E\| \leq \frac{\|A^\pi E A^D\|}{1 - \|E A^D\|}, \tag{6.25}$$

$$\|(I + \mathcal{U}_E \mathcal{L}_E)^{-1}\| \leq \frac{(1 - \|A^D E\|)(1 - \|E A^D\|)}{(1 - \|A^D E\|)(1 - \|E A^D\|) - \|A^D E\| \, \|A^\pi E A^D\|}. \tag{6.26}$$

DEM. La representación matricial del operador $E = B - A$, respecto a la descomposición del espacio $\mathcal{X} = \mathcal{R}(A^k) \oplus \mathcal{N}(A^k)$ es dada por

$$E = \begin{pmatrix} B_1 - A_1 & B_{12} \\ B_{21} & B_{21} B_1^{-1} B_{12} - A_2 \end{pmatrix}, \ B_1, \ I + B_1^{-1} B_{12} B_{21} B_1^{-1} \text{ son invertibles en } \mathcal{R}(A^k). \tag{6.27}$$

Entonces,

$$A^D E A^\pi = \begin{pmatrix} O & A_1^{-1} B_{12} \\ O & O \end{pmatrix}, \quad A^\pi E A^D = \begin{pmatrix} O & O \\ B_{21} A_1^{-1} & O \end{pmatrix}.$$

Por otra parte,

$$(I + A^D E)^{-1} = \begin{pmatrix} B_1^{-1} A_1 & -B_1^{-1} B_{12} \\ O & I \end{pmatrix}, \quad (I + E A^D)^{-1} = \begin{pmatrix} B_1^{-1} A_1 & O \\ -B_{21} A_1^{-1} & I \end{pmatrix}. \tag{6.28}$$

Usando estas representaciones vemos fácilmente que las expresiones (6.24) se tienen.

Bajo la hipótesis $\max\{\|E A^D\|, \|A^D E\|\} < \frac{1}{1 + \sqrt{\|A^\pi\|}} \ \left(\leq \frac{1}{2} \right)$, tenemos las siguientes estimaciones elementales

$$\|(I + A^D E)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A^D E\|}, \quad \|(I + E A^D)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|E A^D\|}.$$

Por lo tanto obtenemos las cotas superiores de $\|\mathcal{U}_E\|$ y $\|\mathcal{L}_E\|$ dadas en (6.25).

Usando las estimaciones (6.25), deducimos que

$$\|\mathcal{U}_E\mathcal{L}_E\| \leq \frac{\|A^D E A^\pi\|\,\|A^\pi E A^D\|}{(1-\|A^D E\|)(1-\|EA^D\|)} < 1,$$

y, combinando la desigualdad $\|(I+\mathcal{U}_E\mathcal{L}_E)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1-\|\mathcal{U}_E\mathcal{L}_E\|}$ con la cota superior de arriba obtenemos la estimación (6.26). □

A continuación obtenemos una fórmula para el proyector espectral del operador perturbación y una cota superior del error entre los proyectores espectrales.

TEOREMA 6.5.5. *Sean A, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ Drazin invertible y Grupo invertible, respectivamente, y sea $E = B - A$. Si $\mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A^k) = \{0\}$, con ind$(A) = k$, y* $\max\{\|A^D E\|, \|EA^D\|\} < \frac{1}{1+\sqrt{\|A^\pi\|}}$, *entonces*

$$B^\pi = -\mathcal{U}_E + A^\pi - (I-\mathcal{U}_E)\mathcal{L}_E(I+\mathcal{U}_E\mathcal{L}_E)^{-1}(I+\mathcal{U}_E), \tag{6.29}$$

donde $\mathcal{U}_E$ y $\mathcal{L}_E$ son definidos como en (6.24) y

$$\|B^\pi - A^\pi\| \leq \frac{\|A^D E A^\pi\|}{1-\|A^D E\|} + \frac{\|A^\pi E A^D\|}{\nu(E)}\left(1+\frac{\|A^D E A^\pi\|}{1-\|A^D E\|}\right), \tag{6.30}$$

donde $\nu(E) = (1-\|A^D E\|)(1-\|EA^D\|) - \|A^D E\|\,\|A^\pi E A^D\|$.

DEM. Por el Teorema 6.4.4 (i) $\Leftrightarrow$ (ii) tenemos que B tiene una representación, respecto $\mathcal{X} = \mathcal{R}(A^k) \oplus \mathcal{N}(A^k)$, dada por

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_{12} \\ B_{21} & B_{21}B_1^{-1}B_{12} \end{pmatrix}, \; B_1,\; I + B_1^{-1}B_{12}B_{21}B_1^{-1} \text{ son invertibles en } \mathcal{R}(A^D). \tag{6.31}$$

Ahora, aplicando en Teorema 6.3.2 obtenemos

$$B^\pi = \begin{pmatrix} I-\Psi^{-1} & -\Psi^{-1}B_1^{-1}B_{12} \\ -B_{21}B_1^{-1}\Psi^{-1} & I - B_{21}B_1^{-1}\Psi^{-1}B_1^{-1}B_{12} \end{pmatrix},$$

donde $\Psi = I + B_1^{-1}B_{12}B_{21}B_1^{-1}$. Usando las expresiones dadas en (6.24) vemos que

$$\begin{aligned} &-\mathcal{U}_E + A^\pi - (I-\mathcal{U}_E)\mathcal{L}_E(I+\mathcal{U}_E\mathcal{L}_E)^{-1}(I+\mathcal{U}_E) \\ &\quad= \begin{pmatrix} O & -B_1^{-1}B_{12} \\ O & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & -B_1^{-1}B_{12} \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & O \\ B_{21}B_1^{-1} & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Psi^{-1} & O \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & B_1^{-1}B_{12} \\ O & I \end{pmatrix} \\ &\quad= \begin{pmatrix} O & -B_1^{-1}B_{12} \\ O & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -(\Psi-I)\Psi^{-1} & -(\Psi-I)\Psi^{-1}B_1^{-1}B_{12} \\ B_{21}B_1^{-1}\Psi^{-1} & B_{21}B_1^{-1}\Psi^{-1}B_1^{-1}B_{12} \end{pmatrix} = B^\pi. \end{aligned}$$

Para probar (6.30). Escribimos

$$\begin{aligned} B^\pi - A^\pi &= -\mathcal{U}_E - (I - \mathcal{U}_E)\mathcal{L}_E(I + \mathcal{U}_E\mathcal{L}_E)^{-1}(I + \mathcal{U}_E) \\ &= -\mathcal{U}_E - (I + A^D E)^{-1}\mathcal{L}_E(I + \mathcal{U}_E\mathcal{L}_E)^{-1}(I + \mathcal{U}_E) \end{aligned}$$

Tomando normas obtenemos y usando las estimaciones (6.25)

$$\|B^\pi - A^\pi\| \leq \frac{\|A^D E A^\pi\|}{1 - \|A^D E\|} + \frac{\|A^\pi E A^D\| \, \|(I + \mathcal{U}_E\mathcal{L}_E)^{-1}\|}{(1 - \|A^D E\|)(1 - \|E A^D\|)} \left(1 + \frac{\|A^D E A^\pi\|}{1 - \|A^D E\|}\right).$$

Finalmente, substituyendo $\|(I+\mathcal{U}_E\mathcal{L}_E)^{-1}\|$ por su cota superior definida en (6.26) obtenemos (6.30). $\square$

Una cota superior de $\|B^\sharp - A^D\|/\|A^D\|$ puede ser obtenida aplicando a (6.23) el lado derecho de (6.30) en lugar de Δ.

En el siguiente teorema damos una expresión explícita del Grupo inverso y de esta derivamos una estimación directa del error relativo del Grupo inverso del operador B.

Teorema 6.5.6. *Sean $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ Drazin invertible y Grupo invertible, respectivamente, y sea $E = B - A$. Si $\mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A^k) = \{0\}$, con ind$(A) = k$, y* máx$\{\|A^D E\|, \|E A^D\|\} < \frac{1}{1+\sqrt{\|A^\pi\|}}$, *entonces*

$$B^\sharp = (I + A^D E)^{-1}(A^D + A^D\Sigma_2 + \Sigma_1 A^D + \Sigma_1 A^D \Sigma_2) \tag{6.32}$$

donde

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &:= \mathcal{L}_E(I + \mathcal{U}_E\mathcal{L}_E)^{-1}(I - (I + A^D E)^{-1}A^D E), \\ \Sigma_2 &:= (I + \mathcal{U}_E\mathcal{L}_E)^{-1}\mathcal{U}_E(I - \mathcal{L}_E), \end{aligned} \tag{6.33}$$

y

$$\frac{\|B^\sharp - A^D\|}{\|A^D\|} \leq \frac{\|A^D E\|}{1 - \|A^D E\|} + \delta_1 + \delta_2 + \delta_1\delta_2, \tag{6.34}$$

donde

$$\begin{aligned} \delta_1 &:= \frac{\|A^\pi E A^D\| \, \|(I + \mathcal{U}_E\mathcal{L}_E)^{-1}\|}{(1 - \|A^D E\|)(1 - \|E A^D\|)} \left(1 + \frac{\|A^D E\|}{1 - \|A^D E\|}\right), \\ \delta_2 &:= \frac{\|A^D E A^\pi\| \, \|(I + \mathcal{U}_E\mathcal{L}_E)^{-1}\|}{(1 - \|A^D E\|)^2} \left(1 + \frac{\|A^\pi E A^D\|}{1 - \|E A^D\|}\right). \end{aligned} \tag{6.35}$$

DEM. De acuerdo con el Teorema 6.4.4, (i) $\Leftrightarrow$ (ii), B tiene una representación matricial de la forma dada en (6.18). Además, si denotamos $\Psi = I + B_1^{-1}B_{12}B_{21}B_1^{-1}$, por el Teorema 6.3.2, fórmula (6.12), tenemos

$$B^\sharp = \begin{pmatrix} (\Psi B_1 \Psi)^{-1} & (\Psi B_1 \Psi)^{-1} B_1^{-1} B_{12} \\ B_{21} B_1^{-1} (\Psi B_1 \Psi)^{-1} & B_{21} B_1^{-1} (\Psi B_1 \Psi)^{-1} B_1^{-1} B_{12} \end{pmatrix}. \tag{6.36}$$

Con $E = B - A$, escrito de la forma (6.27), obtenemos

$$(I + A^D E) B^\sharp = \begin{pmatrix} A_1^{-1} \Psi^{-1} & A_1^{-1} \Psi^{-1} B_1^{-1} B_{12} \\ B_{21} B_1^{-1} (\Psi B_1 \Psi)^{-1} & B_{21} B_1^{-1} (\Psi B_1 \Psi)^{-1} B_1^{-1} B_{12} \end{pmatrix}. \tag{6.37}$$

Usando las representaciones (6.24) y (6.28) del Lema 6.5.4, podemos escribir los operadores Σ_1 y Σ_2, los cuales has sido definidos en (6.33), en la forma

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} O & O \\ B_{21} B_1^{-1} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^{-1} & O \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1^{-1} A_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & O \\ B_{21} B_1^{-1} \Psi^{-1} B_1^{-1} A_1 & O \end{pmatrix},$$
$$\Sigma_2 = \begin{pmatrix} \Psi^{-1} & O \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & B_1^{-1} B_{12} \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ -B_{21} B_1^{-1} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I + \Psi^{-1} & \Psi^{-1} B_1^{-1} B_{12} \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Deducimos (6.32) viendo que el lado derecho de (6.37) es igual a la representación matricial que resulta de calcular $A^D + A^D\Sigma_2 + \Sigma_1 A^D + \Sigma_1 A^D \Sigma_2$ usando las representaciones de arriba.

Ahora, la ecuación (6.32) implica

$$B^\sharp - A^D = -A^D E (B^\sharp - A^D + A^D) + A^D \Sigma_2 + \Sigma_1 A^D + \Sigma_1 A^D \Sigma_2.$$

Luego,

$$\|B^\sharp - A^D\| \leq \|A^D E\| \, \|B^\sharp - A^D\| + \|A^D\| \big(\|A^D E\| + \|\Sigma_1\| + \|\Sigma_2\| + \|\Sigma_1\| \, \|\Sigma_2\| \big),$$

y, de $\|A^D E\| < 1$, se sigue que

$$\frac{\|B^\sharp - A^D\|}{\|A^D\|} \leq \frac{\|A^D E\|}{1 - \|A^D E\|} + \frac{\|\Sigma_1\| + \|\Sigma_2\| + \|\Sigma_1\| \, \|\Sigma_2\|}{1 - \|A^D E\|}. \tag{6.38}$$

Ahora, usando las cotas (6.25), los términos Σ_1 y Σ_2 son estimados como sigue:

$$\begin{aligned} \|\Sigma_1\| &\leq \|\mathcal{L}_E\| \, \|(I + \mathcal{U}_E \mathcal{L}_E)^{-1}\| \big(1 + \|(I + A^D E)^{-1} A^D E\| \big) \\ &\leq \frac{\|A^\pi E A^D\| \, \|(I + \mathcal{U}_E \mathcal{L}_E)^{-1}\|}{1 - \|E A^D\|} \left(1 + \frac{\|A^D E\|}{1 - \|A^D E\|} \right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \|\Sigma_2\| &\leq \|(I + \mathcal{U}_E \mathcal{L}_E)^{-1}\| \, \|\mathcal{U}_E\| (1 + \|\mathcal{L}_E\|) \\ &\leq \frac{\|A^D E A^\pi\| \, \|(I + \mathcal{U}_E \mathcal{L}_E)^{-1}\|}{1 - \|A^D E\|} \left(1 + \frac{\|A^\pi E A^D\|}{1 - \|E A^D\|} \right). \end{aligned}$$

Finalmente, la cota superior (6.34), con δ_1 y δ_2 definidos como en (6.35), es deducida substituyendo estas estimaciones en (6.38). $\square$

Observamos que la hipótesis $\mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A^k) = \{0\}$, con $k = ind(A)$, en los resultados de perturbación previos puede ser reemplazada por cualquiera de las condiciones equivalentes dadas en el Teorema 6.4.1.

Observación 6.5.7. Si asumimos las hipótesis del Teorema 6.5.6 y reemplazando $\|(I+\mathcal{U}_E\mathcal{L}_E)^{-1}\|$ por su cota (6.26) en las expresiones de δ_1 y δ_2 obtenemos los nuevos valores

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta}_1 &:= \frac{\|A^\pi E A^D\|}{\nu(E)}\left(1+\frac{\|A^D E\|}{1-\|A^D E\|}\right), \\ \widetilde{\delta}_2 &:= \frac{\|A^D E A^\pi\|(1-\|EA^D\|)}{\nu(E)(1-\|A^D E\|)}\left(1+\frac{\|A^\pi E A^D\|}{1-\|EA^D\|}\right), \end{aligned} \tag{6.39}$$

donde $\nu(E) = (1-\|A^D E\|)(1-\|EA^D\|) - \|A^D E\|\,\|A^\pi E A^D\|$.

Corolario 6.5.8. *Bajo las hipótesis del Teorema 6.5.5, si* $\mathcal{N}(A^D) \subseteq \mathcal{N}(A^D B)$, *entonces*

$$\begin{aligned} B^\pi &= A^\pi - \mathcal{L}_E, \\ B^\sharp &= (I + A^D E)^{-1}(I+\mathcal{L}_E)A^D, \end{aligned}$$

donde $\mathcal{L}_E$ *es definido como en* (6.24) *y*

$$\begin{aligned} \|B^\pi - A^\pi\| &\le \frac{\|A^\pi E A^D\|}{1-\|EA^D\|}, \\ \frac{\|B^\sharp - A^D\|}{\|A^D\|} &\le \frac{\|A^D E\|}{1-\|A^D E\|} + \frac{\|A^\pi E A^D\|}{(1-\|A^D E\|)(1-\|EA^D\|)}. \end{aligned}$$

Corolario 6.5.9. *Bajo las hipótesis del Teorema 6.5.5, si* $\mathcal{N}(A^\pi) \subseteq \mathcal{N}(A^\pi B)$, *entonces*

$$\begin{aligned} B^\pi &= A^\pi - \mathcal{U}_E, \\ B^\sharp &= (I + A^D E)^{-1}A^D(I+\mathcal{U}_E), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{U}_E$ *es definido como en* (6.24) *y*

$$\begin{aligned} \|B^\pi - A^\pi\| &\le \frac{\|A^D E A^\pi\|}{1-\|A^D E\|}, \\ \frac{\|B^\sharp - A^D\|}{\|A^D\|} &\le \frac{\|A^D E\|}{1-\|A^D E\|} + \frac{\|A^D E A^\pi\|}{(1-\|A^D E\|)^2}. \end{aligned}$$

La continuidad de la inversa de Drazin para operadores lineales y acotados y elementos de un álgebra de Banach fue investigada en [14, 53, 54, 75, 79, 99].

En [53, Teorema 4.1] se dio el siguiente resultado de continuidad el cual será usado en el próximo teorema.

LEMA 6.5.10. *Sean A_n, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ operadores Drazin invertibles tal que $A_n \to A$. Entonces*

$$A_n^D \to A^D \Leftrightarrow A_n^\pi \to A^\pi.$$

TEOREMA 6.5.11. *Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ un operador Grupo invertible y $A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ operadores tal que $A_n \to A$. Entonces son equivalentes:*

(i) *A_n tiene un Grupo inverso para n suficientemente grande y $A_n^\sharp \to A^\sharp$.*

(ii) *$\mathcal{R}(A_n) \cap \mathcal{N}(A) = \{0\}$, $I + (A^D)^2(A_n^2 - A^2)$ es invertible para n suficientemente grande.*

DEM. De $A_n \to A$, para n suficientemente grande, tenemos $\|A^D\|\,\|A_n - A\| < 1$ y, así, $I + A^D(A_n - A)$ es invertible.

Asumimos (i). dado que $A_n^\sharp \to A^\sharp$, entonces $A_n^\pi \to A^\pi$. Luego $\|A_n^\pi - A^\pi\| < 1$, para n suficientemente grande. Ahora, por el Lema 6.5.1, $\mathcal{N}(A_n^\pi) \cap \mathcal{N}(I - A^\pi) = \{0\}$ o, equivalentemente $\mathcal{R}(A_n) \cap \mathcal{N}(A) = \{0\}$. La aserción $I + (A^D)^2(A_n^2 - A^2)$ es invertible se sigue del Lema 6.4.5.

Asumimos (ii). Para n suficientemente grande tenemos que $I + A^\sharp(A_n - A)$ es invertible, $\mathcal{R}(A_n) \cap \mathcal{N}(A) = \{0\}$ y $I + (A^\sharp)^2(A_n^2 - A^2)$ es invertible. Entonces A_n es Grupo invertible por el Lema 6.4.5. También, para n suficientemente grande, tenemos $\|A^D\|\,\|A_n - A\| < \frac{1}{1+\sqrt{\|A^\pi\|}}$ y, las estimaciones (6.34)–(6.35), dadas en el Teorema 6.5.6, nos conducen a que $\|A_n^\sharp - A^D\| \to 0$. $\square$

COROLARIO 6.5.12. *Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ un operador Grupo invertible y $A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ operadores tal que $A_n \to A$. Si $A_n^2 \to A^2$, entonces son equivalentes:*

(i) *A_n tiene un Grupo inverso para n suficientemente grande y $A_n^\sharp \to A^\sharp$.*

(ii) *$\mathcal{R}(A_n) \cap \mathcal{N}(A) = \{0\}$, para n suficientemente grande.*

6.6. Perturbación de operadores g-Drazin invertibles

Dado un operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ g-Drazin invertible, consideramos la clase de operadores acotados $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ g-Drazin invertibles que inducen las siguientes descomposiciones del espacio:

$$\mathcal{X} = \mathcal{K}(A) \oplus \mathcal{H}_0(B), \quad \mathcal{X} = \mathcal{K}(B) \oplus \mathcal{H}_0(A) \tag{6.40}$$

donde los espacios que intervienen en las sumas directas anteriores son definidos en (6.8).

Un caso particular lo constituyen los operadores acotados B g-Drazin invertibles que satisfacen:

$$\mathcal{K}(A) = \mathcal{K}(B) \quad \text{y} \quad \mathcal{H}_0(A) = \mathcal{H}_0(B). \tag{6.41}$$

La clase de los operadores B relacionados con A por la condición (6.41), lo cual equivale a que ambos operadores tengan el mismo proyector espectral en el 0, fueron caracterizados en [17, Corolario 2.2], y se vio que la g-Drazin inversa de B viene dada por $B^D = (I + A^D(B - A))^{-1}A^D$.

En el siguiente teorema damos una caracterización de los operadores que cumplen las condiciones dadas en (6.40).

TEOREMA 6.6.1. *Sea un operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ g-Drazin invertible. Las siguientes condiciones sobre el operador g-Drazin invertible $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ son equivalentes:*

(i) $\mathcal{X} = \mathcal{K}(A) \oplus \mathcal{H}_0(B)$, $\mathcal{X} = \mathcal{K}(B) \oplus \mathcal{H}_0(A)$.

(ii) $I - A^\pi - B^\pi$ *es invertible en* $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.

(iii) $B^\pi + A^D B$ *es invertible,* $\mathcal{X} = \mathcal{K}(B) + \mathcal{H}_0(A)$, $\mathcal{H}_0(B) \cap \mathcal{K}(A) = \{0\}$.

DEM. (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Los operadores A y B son g-Drazin invertibles, entonces existen proyectores A^π y B^π tal que

$$\mathcal{K}(A) = \mathcal{N}(A^\pi), \quad \mathcal{K}(B) = \mathcal{N}(B^\pi),$$
$$\mathcal{H}_0(A) = \mathcal{R}(A^\pi), \quad \mathcal{H}_0(B) = \mathcal{R}(B^\pi).$$

Ahora, $\mathcal{N}(B^\pi) = \mathcal{R}(I - B^\pi)$ y $\mathcal{R}(B^\pi) = \mathcal{N}(I - B^\pi)$. Luego, las relaciones en (i) se pueden reescribir de la forma

$$\mathcal{X} = \mathcal{N}(A^\pi) \oplus \mathcal{N}(I - B^\pi), \ \mathcal{X} = \mathcal{R}(I - B^\pi) \oplus \mathcal{R}(A^\pi).$$

Y, aplicando el Lema 6.4.2, se demuestra la equivalencia de (i) y (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Por el Lema 6.4.3 tenemos

$$I + (A^D - B^D)B \text{ es invertible } \Leftrightarrow I + B(A^D - B^D) \text{ es invertible.}$$

Para probar que $B^\pi + BA^D$ es sobre, asumamos que $(B^\pi + BA^D)x = 0$. Entonces $B^\pi x = -BA^D x$ y así $B^D A^D x = 0$. Luego $A^D x \in \mathcal{R}(A^D) \cap \mathcal{N}(B^D)$ y, así, $A^D x = 0$. Por lo tanto, $x \in \mathcal{R}(B^D) \cap \mathcal{N}(A^D) = \{0\}$.

Para probar que $B^\pi + BA^D$ es sobre, sea $x \in \mathcal{X}$ arbitrario. Como B es g-Drazin invertible, existen $f \in \mathcal{X}$ y $g \in \mathcal{N}(B^D)$ para los cuales $x = B^D f + g$, y entonces $B^\pi x = B^\pi g$. También, dado que $\mathcal{X} = \mathcal{R}(I - B^\pi) \oplus \mathcal{R}(A^\pi)$, podemos escribir $g = (I - B^\pi)h + A^\pi k$, con h, $k \in \mathcal{X}$. Esto implica que $B^\pi x = B^\pi A^\pi k$. Por otra parte, como $\mathcal{X} = \mathcal{N}(B^D) \oplus \mathcal{R}(A^D)$, entonces existen $z \in \mathcal{N}(B^D)$ y $y \in \mathcal{X}$, para los cuales $f = z + A^D y$ y $BB^D x = B^D f = B^D A^D y$. También, podemos escribir $y = B^D u + v$, con respecto a la suma directa $\mathcal{X} = \mathcal{R}(B^D) \oplus \mathcal{N}(A^D)$. Por lo tanto, $BB^D x = B^D A^D y = B^D A^D B^D u$ y

$$x = BB^D x + B^\pi x = (B^\pi + B^D A^D)(B^D u + A^\pi k),$$

obteniendo que $B^\pi + BA^D$ es sobre.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sea $(I - A^\pi - B^\pi)x = 0$. Entonces $(I - A^\pi)x = B^\pi x$ y $(I - A^\pi)x \in \mathcal{K}(A) \cap \mathcal{H}_0(B)$. Esto significa que $(I - A^\pi)x = 0$, y además $B^\pi x = 0$. De estas últimas igualdades se sigue que $x \in \mathcal{N}(B^\pi) \cap \mathcal{N}(I - A^\pi)$. Buscamos que $\mathcal{K}(B) \cap \mathcal{H}_0(A) = \{0\}$, y usando esto concluiríamos que $x = 0$. De $B^\pi + BA^D$ es invertible se sigue que $\mathcal{N}(B^\pi) \cap \mathcal{N}(A^D) \subseteq \mathcal{N}(B^\pi) \cap \mathcal{N}(BA^D) = \{0\}$ y así $x = \{0\}$ como queríamos probar.

Veamos que $I - A^\pi - B^\pi$ es sobre. Primero demostraremos que

$$\mathcal{K}(B) = \mathcal{R}((I - B^\pi)A^D), \quad \mathcal{H}_0(A) = \mathcal{R}(A^\pi B^\pi). \tag{6.42}$$

Efectivamente, la primera relación se sigue de $B^D = (I - B^\pi)A^D(B^\pi + BA^D)^{-1}$. Para la segunda, sea $x \in \mathcal{R}(A^\pi)$. Dado que $B^\pi + A^D B$ es sobre, existe $u \in \mathcal{X}$ para el cual $x = (B^\pi + A^D B)u$. Entonces $x = A^\pi x = A^\pi B^\pi u$ y así $x \in \mathcal{R}(A^\pi B^\pi)$.

Ahora estamos en condiciones de probar que $I - A^\pi - B^\pi$ es sobre. Sea $x \in \mathcal{X}$ arbitrario. Since $\mathcal{X} = \mathcal{K}(B) + \mathcal{H}_0(A)$, existen $y \in \mathcal{K}(B)$ y $z \in \mathcal{H}_0(A)$ para los cuales $x = y + z$. Usando las realaciones (6.42), podemos escribir $y = (I - B^\pi)A^D u$ y $z = A^\pi B^\pi w$, con $w, u \in \mathcal{X}$. Por lo tanto,

$$x = (I - B^\pi)A^D u + A^\pi B^\pi w = (I - B^\pi - A^\pi)(A^D u + B^\pi w).$$

Lo que demuestra la implicación. $\square$

Bajo los supuestos del teorema anterior la g-Drazin inversa de B tiene una expresión dada por:

$$B^D = (B^\pi + A^D B)^{-1} A^D (I - B^\pi).$$

Seguidamente damos un ejemplo del teorema anterior.

EJEMPLO 6.6.2. Sea ℓ_2 el espacio de sucesiones: $\ell_2 = \{(x_n)_{n=0}^\infty : \sum_{n=0}^\infty |x_n|^2 < \infty\}$. Consideramos los operadores lineales acotados A, $B : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$, definidos por las matrices infinitas

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & SL & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right) \quad \text{y} \quad B = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & \varepsilon & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & SL & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right),$$

donde SL es el operador shift left, con proyecciones espectrales dadas por las matrices infinitas

$$A^\pi = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & I & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right) \quad \text{y} \quad B^\pi = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & -\varepsilon & -\varepsilon & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & I & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right).$$

Sea $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ la base canónica de ℓ_2. Calculamos los subespacios que intervienen en las condiciones $\mathcal{X} = \mathcal{K}(A) \oplus \mathcal{H}_0(B)$, $\mathcal{X} = \mathcal{K}(B) \oplus \mathcal{H}_0(A)$:

$\mathcal{K}(A) = \mathcal{K}(B) = \{e_1, e_2\}$.

$\mathcal{H}_0(A) = \{e_n\}_{n=3}^\infty$.

$\mathcal{H}_0(B) = \{\varepsilon e_1 - e_n\}_{n=3}^\infty$.

Comprobamos que $B^\pi + A^D B$ es invertible,

$$B^\pi + A^D B = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1-\varepsilon & -\varepsilon & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & I & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right).$$

Igualmente vemos que $\mathcal{K}(A) \cap \mathcal{H}_0(B) = \{0\}$ y $\mathcal{X} = \mathcal{K}(B) + \mathcal{H}_0(A)$, luego B verifica las otras condiciones del Teorema 6.6.1.

Efectivamente,

$$I - B^\pi - A^\pi = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & -I & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right)$$

es invertible.

La g-Drazin inversa de B tiene una representación matricial de la forma:

$$B^D = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & \varepsilon & \varepsilon & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & O & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right).$$

A continuación derivaremos una estimación para $\|B^\pi - A^\pi\|$ de forma independiente a los resultados dados hasta ahora.

En [14, Proposistion 2.2] fue deducida una cota del error para la norma $\|P - Q\|$ en términos del gap entre sus subespacios núcleo e imagen, donde P, $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ son dos proyectores.

Basado en este resultado y teniendo en cuenta

$$gap(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \|P_\mathcal{U} - P_\mathcal{V}\|,$$

donde $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son dos subespacios acotados de un espacio de Hilbert, $\mathcal{H}$, obtenemos la siguiente proposición, donde deducimos una expresión para la cota Δ, cuando A, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, en términos de las proyecciones ortogonales sobre los subespacios que interviene en las condiciones dadas en el punto (ii) del Teorema 6.6.1. En la Proposición 3.5.2 obtuvimos una cota similar para matrices.

PROPOSICIÓN 6.6.3. *Sean A, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ g-Drazin invertibles. Llamamos $\Gamma_\mathcal{K} = \|P_{\mathcal{K}(B)} - P_{\mathcal{K}(A)}\|$ y $\Gamma_{\mathcal{H}_0} = \|P_{\mathcal{H}_0(B)} - P_{\mathcal{H}_0(A)}\|$. Si $\|A^\pi\|\,\Gamma_{\mathcal{H}_0} + \|I - A^\pi\|\,\Gamma_\mathcal{K} < 1$, entonces*

$$\Delta = \frac{\|A^\pi\|\,\|I - A^\pi\|\,(\Gamma_{\mathcal{H}_0} + \Gamma_\mathcal{K})}{1 - \|A^\pi\|\,\Gamma_{\mathcal{H}_0} - \|I - A^\pi\|\,\Gamma_\mathcal{K}}. \tag{6.43}$$

Teniendo en cuenta que $\|A^\pi\| = \|I - A^\pi\| \leq \kappa_D(A)$, la cota (6.43) se convierte en

$$\Delta = \frac{\kappa_D(A)^2(\Gamma_{\mathcal{H}_0} + \Gamma_{\mathcal{K}})}{1 - \kappa_D(A)(\Gamma_{\mathcal{H}_0} + \Gamma_{\mathcal{K}})}.$$

6.7. Operadores con proyecciones espectrales esenciales relacionadas

Dado un operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ g-Drazin invertible, en esta sección caracterizaremos los operadores $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ g-Drazin invertibles tal que $\mathfrak{pr}(B^\pi) = \mathfrak{pr}(A^\pi + S)$, donde $\mathfrak{pr}$ es el homomorfismo natural de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ sobre el álgebra de Calkin y $S \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ es un operador dado. En [76], V. Rakočević, consideró la igualdad de las proyecciones espectrales esenciales de operadores acotados sobre un espacio de Hilbert.

A continuación daremos los conceptos y resultados utilizados en el resultado de caracterización.

Por $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ denotamos al conjunto de todos los operadores lineales compactos.

Definición 6.7.1. Sean $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ y $K \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$. El *álgebra de Calkin* sobre $\mathcal{X}$ es definida como el álgebra cociente

$$\mathcal{C}(\mathcal{X}) = \mathcal{B}(\mathcal{X})/\mathcal{K}(\mathcal{X}) = \{[A] : \ A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\},$$

donde

$$[A] = A + \mathcal{K}(\mathcal{X}) = \{A + K : \ K \in \mathcal{K}(\mathcal{X})\},$$

con la norma

$$\|A + \mathcal{K}(\mathcal{X})\| = \inf_{K \in \mathcal{K}(\mathcal{X})} \|A + K\|.$$

Definimos el homomorfismo natural

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{pr} : \mathcal{B}(\mathcal{X}) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\mathcal{X})/\mathcal{K}(\mathcal{X}) \\ A & \longmapsto & A + \mathcal{K}(\mathcal{X}). \end{array}$$

Efectivamente, sean A, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ y α, $\beta \in \mathbb{C}$. Las combinaciones lineales de operadores compactos es un compacto, i.e, si K_1, $K_2 \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$, entonces $\alpha K_1 + \beta K_2 \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$. Igualmente la combinación lineal de operadores acotados es un acotado. Luego

$$\mathfrak{pr}(\alpha A + \beta B) = \alpha A + \beta B + \alpha K_1 + \beta K_2 \in \mathcal{C}(\mathcal{X}),$$

y

$$\alpha A + \beta B + \alpha K_1 + \beta K_2 = \alpha(A + K_1) + \beta(B + K_2) = \alpha\mathfrak{pr}(A) + \beta\mathfrak{pr}(B).$$

$$\mathfrak{pr}(\alpha A + \beta B) = [\alpha A + \beta B] = \alpha[A] + \beta[B] = \alpha\mathfrak{pr}(A) + \beta\mathfrak{pr}(B).$$

DEFINICIÓN 6.7.2. Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. El *espectro esencial* de A, $\sigma_{ess}(A)$, es el espectro de $\mathfrak{pr}(A)$, i.e., $\sigma_{ess}(A) = \sigma(\mathfrak{pr}(A))$. Denotaremos por $r_{ess}(A)$ al *radio espectral esencial* de A, i.e., $r_{ess}(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \|\big(\mathfrak{pr}(A)\big)^n\|^{1/n}$.

DEFINICIÓN 6.7.3. Un operador $F \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ es *Fredholm* si el $\mathcal{R}(F)$ es cerrado y, el $\mathcal{N}(F)$ y el cociente $\mathcal{X}/\mathcal{R}(F)$ son ambos de dimensión finita.

Denominaremos $\Phi(\mathcal{X})$ al conjunto de todos los operadores Fredholm de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.

TEOREMA 6.7.4 (ATKINSON). [9, Teorema 3.2.8] *Un operador $F \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ es Fredholm si y sólo si $\mathfrak{pr}(F)$ es invertible en $\mathcal{C}(\mathcal{X})$.*

En el Teorema 5.3.5, del Capítulo 5, dada un elemento $a \in \mathfrak{R}$ tal que a es g-Drazin invertible, se caracterizaron los elementos b de $\mathfrak{R}$ con espectros idempotentes relacionados por la condición $b^\pi = a^\pi + s$, con $s \in \mathfrak{R}$ y $1 - s^2$ es un elemento invertible de $\mathfrak{R}$.

Basándonos es este resultado obtenemos las siguientes caracterizaciones de los operadores g-Drazin invertibles.

COROLARIO 6.7.5. *Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ un operador g-Drazin invertible y $S \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tal que $I - S^2$ es invertible y $A^\pi + S$ idempotente, entonces las siguientes condiciones sobre el operador $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ son equivalentes:*

(i) *B es g-Drazin invertible, $\mathfrak{pr}(B^\pi) = \mathfrak{pr}(A^\pi + S)$.*

(ii) $\mathfrak{pr}\big((A^\pi + S)B\big) = \mathfrak{pr}\big(B(A^\pi + S)\big)$, $r_{ess}\big((A^\pi + S)B\big) = 0$, $B + A^\pi + S \in \Phi(\mathcal{X})$.

(iii) $\mathfrak{pr}\big((A^\pi + S)B\big) = \mathfrak{pr}\big(B(A^\pi + S)\big)$, $r_{ess}\big((A^\pi + S)B\big) = 0$, $A^\pi + S + A^D B \in \Phi(\mathcal{X})$.

(iv) *$B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ es g-Drazin invertible, $I + S + A^D(B - A) \in \Phi(\mathcal{X})$,*

$$B^D = CA^D(I - S) + K,$$

donde $K \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$ y $C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ es una inversa de Fredholm de $I + S + A^D(B - A)$.

(v) *$B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ es g-Drazin invertible,*

$$(I + S)B^D - A^D(I - S) = A^D(A - B)B^D + L,$$

donde $L \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$.

DEM. Observamos que $r_{ess}\big((A^\pi + S)B\big) = 0$ equivale a decir que $\mathfrak{pr}\big((A^\pi + S)B\big)$ es cuasinilpotente en el álgebra de Calkin $\mathcal{B}(\mathcal{X})/\mathcal{K}(\mathcal{X})$. También de $B + A^\pi + S \in \Phi(\mathcal{X})$ tenemos que $\mathfrak{pr}\big(B + A^\pi + S\big)$ es invertible en $\mathcal{C}(\mathcal{X})$. Similarmente ocurre con $A^\pi + S + A^D B \in \Phi(\mathcal{X})$. Luego, restringiéndonos $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ y aplicando el Teorema 5.3.5 el corolario queda demostrado. $\square$

Si $S = 0$ en el anterior Corolario obtenemos [76, Corolario 2.3].

Apéndice A

Conclusiones y líneas futuras de investigación

El análisis de la perturbación de la inversa de Drazin en el campo matricial, de elementos en álgebras de Banach y de operadores acotados en espacios de Banach realizado en la Tesis ha dado como resultado más significativo la obtención de caracterizaciones de la perturbación de inversa de Drazin y, de aquí, se derivaron cotas superiores de la norma de la matriz perturbada, y cotas superiores del error relativo de la inversa de Drazin y del error de la proyección espectral.

En el contexto de las matrices se dedujeron, entre otros resultados, expresiones para la inversa de Drazin de la matriz perturbada y de la proyección espectral, para aquellas matrices con proyecciones espectrales relacionadas por cierta condición. De estas fórmulas se derivaron cotas superiores de la norma de la inversa de Drazin y, del error de la inversa de Drazin y de la proyección espectral. También se obtuvieron diversos resultados de perturbación de las matrices rectangulares con W-soportes idempotentes relacionados.

Los resultados obtenidos para matrices cuadradas fueron extendidos al ámbito de elementos en anillos y álgebras de Banach. También se obtuvo una caracterización de la perturbación de los elementos EP en anillos con involución.

Finalmente, algunos de los resultados dados para matrices fueron formulados para operadores lineales y acotados Grupo invertibles, dando otras caracterizaciones nuevas hasta ahora. También se obtuvo un resultado de la continuidad del Grupo inverso para operadores acotados.

En esta investigación ha jugado un papel importante la obtención de representaciones matriciales para la perturbación, la inversa de Drazin y la proyección espectral en cada uno de los contextos expuestos anteriormente.

En [6], S. L. Campbell y C. D. Meyer, establecieron una condición necesaria y suficiente para la continuidad de la inversa de Drazin. También señalaron la dificultad de obtener cotas del error para la perturbación de la inversa de Drazin.

La dificultad de hallar resultados sin considerar restricciones sobre la perturbación, ha hecho que los trabajos en este campo se hayan dirigido a establecer condiciones los menos restrictivas posibles. En esta línea se halla esta Tesis, mejorando las cotas deducidas hasta ahora, en unos casos, y aportando nuevos enfoques y resultados, en otros. Citemos, a continuación los resultados obtenidos:

En el **Capítulo 3** los resultados de perturbación, para matrices con proyecciones espectrales relacionadas, Teorema 3.2.4, Teorema 3.4.6 y Corolario 3.2.13 generalizan [16, Teorema 2.1, Teorema 3.1 y Corolario 2.3], respectivamente, donde se caracterizaban las matrices con proyecciones espectrales iguales. Mediante ejemplos numéricos mostramos que las cotas obtenidas en la Sección 3.4, para el caso $s = 1$, son mejores que las dadas en [62, Teorema 3] y [97, Teorema 4 y Teorema 5], y para el caso $s > 1$, que las deducidas en [97, Teorema 1, Teorema 4 y Teorema 5] y [98, Teorema 4.1]. El resultado de aplicación a sistemas lineales singulares, Teorema 3.5.5, generaliza [100, Theorem 4.1] y el Teorema 3.5.9, donde se caracterizaba un tipo especial de matrices, el dado en [63, Teorema 3.2].

En el **Capítulo 4** los resultados de caracterización de la inversa de Drazin para matrices rectangulares con W-soportes idempotentes relacionados, Teorema 4.3.2 y Teorema 4.3.7 generalizan el dado en [16, Teorema 2.1], para matrices, y su extensión a operadores lineales acotados [78, Teorema 3.2]. Los resultados de perturbación Teorema 4.4.1 y Teorema 4.4.4 generalizan el dado para matrices en [101, Teorema 1] y para operadores lineales y acotados en [78, Corolario 3.3 y Corolario 3.4]. En la aplicación a sistemas lineales el Teorema 4.5.1 generaliza [101, Teorema 2], para matrices rectangulares, y [78, Teorema 4.4], para operadores lineales y acotados.

En el **Capítulo 5** el Teorema 5.3.5 generaliza el principal resultado en [51, Teorema 6.1], donde se consideró elementos con igual espectro idempotente y se aplicaron los resultados obtenidos para dar una nueva caracterización de los elementos EP. Si $b^\pi = a^\pi$, se obtiene una caracterización de los elementos EP en anillos con involución y, en particular, para matrices se tiene [16, Teorema 5.2].

En el **Capítulo 6** la clase dada por las condiciones (1) generaliza la clase de matrices $(\mathcal{C}_1)$, introducida en el Capítulo 3. En particular, el caso $B^\pi = A^\pi$ fue considerado en [16] para matrices, en [17] para operadores cerrados y, en [51] para elementos de un anillo. El Teorema 6.3.2 generaliza [4, Teorema 7.7.7], donde el resultado fue dado para matrices por bloques. En el Teorema 6.4.4 extendemos a operadores el resultado dado para matrices en el Teorema 3.3.7. Los resultados de perturbación dados en la sección 6.5 generalizan los obtenidos en el Apartado 3.4.1 para matrices que cumplen la condición $(\mathcal{C}_1)$. Por último, si $\mathfrak{pr}(B^\pi) = \mathfrak{pr}(A^\pi)$, el Corolario 6.7.5 se reduce a [76, Corolario 2.3].

El amplio campo de aplicación de la inversa de Drazin para operadores cerrados es suficientemente importante para que una futura línea de investigación sea la de extender a los operadores lineales cerrados el análisis de la perturbación realizado para operadores lineales y acotados.

M. Z. Nashed e Y. Zhao, en [72], introdujeron la inversa de Drazin clásica para operadores lineales y cerrados en espacios de Banach y mostraron su aplicación a la representación de soluciones de ecuaciones de evolución singulares y operadores diferenciales en derivadas parciales. Posteriormente, J. J. Koliha y T. D. Tran, en [57], estudiaron la inversa generalizada de Drazin para operadores cerrados, prestando especial atención al caso en que el operador cerrado A es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo. Para esta situación derivaron una representación integral de A^D que fue usada en el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones de una ecuación diferencial singular, y singularmente perturbada, en un espacio de Banach. En el trabajo [59] se realiza un estudio de la perturbación de un C_0-semigrupo de operadores asintóticamente convergente y los resultados se aplica para describir el comportamiento asintótico de las soluciones a ecuaciones diferenciales perturbadas singulares no homogéneas en espacios de Banach.

En relación al análisis de la continuidad de inversa de Drazin para operadores lineales y cerrados citemos los siguientes documentos:

N. Castro y J.J. Koliha, en [13], investigaron la perturbación de la inversa de Drazin de operadores lineales y cerrados, aplicando los resultados obtenidos a la solución de ecuaciones lineales perturbadas, al comportamiento asintótico de un C_0-semigrupo de operadores lineales y a ecuaciones diferenciales perturbadas.

En [14], N. Castro, J. J. Koliha y V. Rakočević estudiaron la perturbación y la continuidad de la inversa de Drazin de operadores lineales y cerrados, obteniendo cotas explícitas del error de la inversa de Drazin de la perturbación en términos del gap entre los operadores cerrados y en términos de el gap entre los subespacios núcleo e imagen de los operadores. Los resultados fueron usados para describir el comportamiento asintótico de un semigrupo de operadores.

En [17], N. Castro, J. J. Koliha e Y. Wei, investigaron la perturbación de la inversa de Drazin de operadores lineales y cerrados para el caso en el que los operadores perturbados tuvieran el mismo proyector espectral, derivando una cota explícita del error de la inversa de Drazin de la perturbación, en términos de las potencias de los operadores.

Finalmente, siguiendo en la misma linea de investigación establecida en el Capítulo 6, los resultados sobre la caracterización de los operadores lineales y acotados g-

Drazin invertibles dados en la Sección 6.6 servirán de base para elaborar un trabajo el cual se pretender enviar a un congreso.

Apéndice B

El algoritmo de la traza

Este algoritmo está basado en el conocido algoritmo para el cálculo de los coeficientes de la ecuación característica de una matriz A, ver [42].

Se omitirán las demostraciones, pudiéndose encontrar estas en la Sección 5 de [4, Capítulo 7].

Si A es no singular, A^{-1} puede ser expresada como un polinomio en A. Esta propiedad no se puede trasladar a las (i, j, k)-inversas, incluso siendo A cuadrada puede no existir un polinomio $p(x)$ tal que $G = p(A)$, donde G es una inversa generalizada. Sin embargo, la inversa de Drazin si posee esta propiedad.

Teorema B.0.6. *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, entonces existe un polinomio $p(x)$ tal que*

$$A^D = p(A).$$

El polinomio utilizado será el polinomio característico de A.

El siguiente resultado muestra cómo obtener A^D a partir del polinomio característico de A.

Teorema B.0.7. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con $ind(A) = k$, y m_0 la multiplicidad algebraica del autovalor 0. Sea*

$$0 = x^{m_0}(x^{n-m_0} + \beta_{n-1}x^{n-1-m_0} + \ldots + \beta_{m_0+1}x + \beta_{m_0}) = x^{m_0}q(x), \; (\beta_{m_0} \neq 0)$$

el polinomio característico de A. Llamamos

$$r(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\beta_{m_0}}(x^{n-m_0-1} + \beta_{n-1}x^{n-m_0-2} + \ldots + \beta_{m_0+1}) & si\ m_0 < n, \\ 0 & si\ m_0 = n. \end{cases} \tag{B.1}$$

Entonces,

$$A^D = A^l(r(A))^{l+1}, \text{ para todo entero } l \geq k.$$

Del hecho que el índice de una matriz nunca puede exceder de su tamaño, ni de m_0, tenemos el siguiente corolario. Antes damos el concepto de traza de una matriz cuadrada.

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ representada como $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$. Llamamos *traza* de A, y la denotamos como $tr(A)$, a

$$tr(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}.$$

COROLARIO B.0.8. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $A^D = A^n(r(A))^{n+1} = A^{m_0}(r(A))^{m_0+1}$, donde $r(x)$ es el polinomio dado en el Teorema B.0.7. Los coeficientes de la ecuación característica de A,*

$$x^n + \beta_{n-1}x^{n-1} + \beta_{n-2}x^{n-2} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0 = 0$$

pueden ser calculados recursivamente mediante el algoritmo dado por:

$$\beta_{n-j} = -\frac{1}{j}tr(AS_{j-1}), \tag{B.2}$$

donde

$$S_0 = I \text{ y } S_j = AS_{j-1} + \beta_{n-j}I. \tag{B.3}$$

Puesto que $S_j = A^j + \beta_{n-1}A^{j-1} + \ldots + \beta_{n-j}I$, el próximo resultado muestra como este algoritmo puede ser usado para obtener la matriz $r(A)$.

TEOREMA B.0.9. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $r(x)$ dado como en (B.1). Si $n = m_0$, entonces $A^D = O$. Si $n > m_0$, entonces $r(A) = -\frac{1}{\beta_{m_0}}S_{n-m_0-1}$, donde β_{m_0} y S_{n-m_0-1} son calculados de (B.2) y (B.3). Así,*

$$A^D = -\frac{1}{\beta_{m_0}^{l+1}}A^l S_{n-m_0-1}^{l+1},$$

para cada $l \geq ind(A)$.

OBSERVACIÓN B.0.10. Si $S_t = O$, entonces $O = S_{t+1} = S_{t+2} = \ldots = S_{n-1}$ y $\beta_{n-t-1} = \beta_{n-t-2} = \ldots = \beta_0 = O$.

A continuación exponemos el algoritmo.

ALGORITMO B.0.11. Cálculo de A^D donde $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $ind(A) = k$.

1. Tomamos $S_0 = I$ y recursivamente calculamos $S_j = AS_{j-1} + \beta_{n-j}I$, $\beta_{n-j} = -\frac{1}{j}tr(AS_{j-1})$, hasta que $S_t = O$, pero $S_{t-1} \neq O$.
2. Obtenemos el número u tal que $\beta_{n-u} \neq 0$ y $\beta_{n-u-1} = \beta_{n-u-2} = \ldots = \beta_{n-t-1} = 0$.
   (Se observa que $n-u = m_0$, es la multiplicidad algebraica del autovalor cero).
3. Sea $l = n - u$ y calculamos $S^{l+1}_{n-m_0-1} = S^{l+1}_{u-1}$.
4. Calculamos $A^D = -\frac{1}{\beta_l^{l+1}}A^l S^{l+1}_{u-1}$.

Hay que notar que no todos los S_j *'s* deben ser guardados. Si $\beta_{n-j} \neq 0$, entonces S_{j-2} puede ser olvidado. Sin embargo S_{j-1} debe ser guardado hasta que aparezca el próximo $\beta \neq 0$. Este algoritmo halla la multiplicidad algebraica del autovalor cero de A.

Tabla de símbolos

<u>MATRICES</u>: A y B son matrices cuadradas

$\|A\|_P$: P-norma de A.
$\|A\|_W$: W-norma de A.
$\|A\|_2$: Norma espectral de la matriz A.
$\|A\|_F$: Norma de Frobeniüs de A.
$\|v\|_2$: Norma euclídea del vector v.
$\sigma(A)$: Espectro de A.
$\kappa_D(A)$: Número de condición de la inversa de Drazin de A.
$\kappa_{D,W}(A)$: Número de condición con respecto a la W-Drazin inversa de A.
$A^\dagger$: Inversa de Moore-Penrose de A.
A^D : Inversa de Drazin de A.
$A^\sharp$: Grupo inverso de A.
A^* : Conjugada traspuesta de A.
A^t : Traspuesta de A.
A^π : Proyección espectral de A.
A^- : (1)-inversa de A.
A^g : Cualquier (i,j,k)-inversa de A.
A^σ : Soporte idempotente de A.
$A^{\sigma,W}$: W-soporte idempotente de A.
$A^{D,W}$: W-Drazin inversa de A.
$A\{i,j,k\}$: Conjunto de todas las (i,j,k)-inversas.
$A \longrightarrow B$: A converge en norma a B.
$A * B$: W-producto de A y B.

$\mathbb{C}^{n\times m}$: Matrices de $n \times m$ con coeficientes en $\mathbb{C}$.
$\mathbb{C}^{n}$: Vectores de $n \times 1$ con coeficientes en $\mathbb{C}$.
$(\mathcal{C}_s)$: Clase de matrices definida en Pág. 42.
$(\mathcal{C})$: Clase de matrices definida en Pág. 106.
$(\mathcal{C}_{AW})$: Clase de matrices definida en Pág. 101.
$(\mathcal{C}_{WA})$: Clase de matrices definida en Pág. 104.
$diag(A\,,\,B)$: Matriz diagonal por bloques A y B.
H_A : Forma de hermite de A.
I : Matriz identidad.
$ind(A)$: Índice de A.
O : Matriz nula.
$O(\|A\|)$: Orden de $\|A\|$.
$\mathbb{R}^{n\times m}$: Matrices de $n \times m$ con coeficientes en $\mathbb{R}$.
$rg(A)$: Rango de A.
$sep_F(A\,B)$: Función separación de las matrices A y B.
$tr(A)$: Traza de A.

ANILLOS: a es un elemento de un anillo o álgebra de Banach.

$\|a\|$: Norma de a.
$\sigma(a)$: Espectro de a.
a^D : g-Drazin inversa de a.
$a^\sharp$: Grupo inverso de a.
a^- : Inversa interior de a.
$a^\dagger$: Inversa de Moore-Penrose de a.
a^π : Espectro idempotente de a.
$a\mathfrak{R}$: Ideal derecho generado por a.
${}^0a$: Anulador izquierdo generado por a.
a^0 : Anulador derecho generado por a.
$acc\,\sigma(a)$: Conjunto de los puntos de acumulación de $\sigma(a)$.
$\mathfrak{B}$: Álgebra de Banach asociativa y unitaria.
$\mathfrak{B}^{qnil}$: Conjunto de los elementos cuasinilpotentes en $\mathfrak{B}$.

$\mathfrak{B}^{gD}$: Conjunto de los elementos g-Drazin invertibles en $\mathfrak{B}$.

$\mathfrak{B}^{-1}$: Conjunto de los elementos invertibles en $\mathfrak{B}$.

$comm(a)$: Conjunto conmutador de a definido en Pág. 117.

$comm^2(a)$: Conjunto doble conmutador de a definido en Pág. 117.

$\mathcal{I}(\mathcal{P})$: Elemento unidad de $\mathcal{M}_n(\mathfrak{R}, \mathcal{P})$.

$ind(a)$: Índice de a.

$iso\, \sigma(a)$: Conjunto de los puntos aislados de $\sigma(a)$.

$\mathcal{M}_n(\mathfrak{R}, \mathcal{P})$: Anillo de las matrices $n \times n$ con elementos en $\mathfrak{R}$ y respecto de $\mathcal{P}$.

$\mathcal{M}_n(\mathfrak{B}, \mathcal{P})$: Álgebra de Banach de las matrices $n \times n$ con elementos en $\mathfrak{B}$ y respecto de $\mathcal{P}$.

$\mathcal{P}$: Sistema total de elementos idempotentes en $\mathfrak{R}$.

$\mathfrak{R}$: Anillo asociativo y unitario.

$\mathfrak{R}^{-1}$: Conjunto de los elementos invertibles en $\mathfrak{R}$.

$\mathfrak{R}^{nil}$: Conjunto de los elementos nilpotentes en $\mathfrak{R}$.

$\mathfrak{R}^{qnil}$: Conjunto de los elementos cuasinilpotentes en $\mathfrak{R}$.

$\mathfrak{R}^{gD}$: Conjunto de los elementos g-Drazin invertibles en $\mathfrak{R}$.

$\mathfrak{R}^{D}$: Conjunto de los elementos Drazin invertibles en $\mathfrak{R}$.

$\mathfrak{R}^{\sharp}$: Conjunto de los elementos Grupo invertibles en $\mathfrak{R}$.

$\mathfrak{R}^{-}$: Conjunto de los elementos regulares en $\mathfrak{R}$.

$\mathfrak{R}^{\dagger}$: Conjunto de los elementos Moore-Penrose invertibles en $\mathfrak{R}$.

$\mathfrak{R}_i$: Subanillo $p_i \mathfrak{R} p_i$.

$\mathfrak{R}a$: Ideal izquierdo generado por a.

$R(\lambda; a)$: Resolvente de a.

ESPACIOS: U y V son espacios vectoriales

$dim(\mathcal{U})$: Dimensión de U.

$gap(\mathcal{U}, \mathcal{V})$: Gap entre los espacios $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ definido en Pág. 163.

ℓ_2 : Espacio de sucesiones definido en Pág 172.

$\mathcal{N}(\mathcal{U})$: Espacio núcleo de $\mathcal{U}$.

$P_{\mathcal{U}}$: Proyección ortogonal sobre $\mathcal{U}$.

$P_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$: Proyección oblicua sobre $\mathcal{U}$ en la dirección de $\mathcal{V}$.

$\mathcal{R}(\mathcal{U})$: Espacio imagen de $\mathcal{U}$.

OPERADORES: A y B son operadores. $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach.

$\sigma(A)$: Espectro de A.

$\rho(A)$: Conjunto resolvente de A.

$\sigma_{ess}(A)$: Espectro esencial de A.

$\Phi(\mathcal{X})$: Conjunto de todos los operadores Fredholm de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.

$\kappa_D(A)$: Número de condición de A respecto la inversa de Drazin.

$\|A\|$: Norma de A.

$A^\sharp$: Grupo inverso de A.

A^* : Operador adjunto de A.

A^D : Inverso de Drazin de A.

A^π : Proyector espectral de A asociado al autovalor 0.

$asc(A)$: Ascendente de A.

$acc\, \sigma(A)$: Conjunto de los puntos de acumulación de $\sigma(A)$.

$\mathcal{B}(\mathcal{X})$: Conjunto de todos los operador lineales y acotados sobre $\mathcal{X}$.

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$: Conjunto de todos los operador lineales y acotados sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

$\mathcal{C}(\mathcal{X})$: Álgebra de Calkin sobre $\mathcal{X}$.

$des(A)$: Descendente de A.

$gap(A, B)$: Gap entre A y B.

$\mathcal{H}_0(A)$: Espacio definido en Pág. 151.

$ind(A)$: Índice de A.

$iso\, \sigma(A)$: Conjunto de los puntos aislados de $\sigma(A)$.

$\mathcal{K}(A)$: Espacio definido en Pág. 151.

$\mathcal{K}(\mathcal{X})$: Conjunto de todos los operadores lineales y compactos sobre $\mathcal{X}$.

$\mathfrak{pr}$: Homomorfismo natural de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ sobre el álgebra de Calkin.

$r(A)$: Radio espectral de A.

$R(\lambda; A)$: Operador resolvente de A.

$r_{ess}(A)$: Radio espectral esencial.

Índice alfabético

Bibliografía

[1] A. Ben-Israel, T. N. E. Greville, *Generalized Inverse. Theory and Applications (Second Edition)*, Springer-Verlag, New York, (2003).

[2] M. Benzi, *A direct projection method for Markov chains*, Linear Algebra Appl., **386** (2004), 27–49.

[3] S. L. Campbell, *Continuity of the Drazin inverse*, Linear and Multilinear Algebra, **8** (1980), 265–268.

[4] S. L. Campbell, C. D. Meyer Jr., *Generalized Inverse of Linear Transformations*, Pitman, London, (1979); Dover, New York, (1991).

[5] S. L. Campbell, C. D. Meyer Jr., N. J. Rose, *Applications of the Drazin inverse to linear systems of differential equations*, SIAM J. Math. Anal. **10** (1979), 542–551.

[6] S. L. Campbell, C. D. Meyer, *Continuity properties of the Drazin pseudoinverse*, Linear Algebra Appl., **10** (1975), 77–83.

[7] S. R. Caradus, *Generalized inverses and operator theory*, Queen's Papers in Pure and Appl. Math., **50**, Queen's University, Kingston, Ontario, (1978).

[8] S. R. Caradus, *Operator theory of the generalized inverse*, Queen's Papers in Pure and Appl. Math., **38**, Queen's University, Kingston, Ontario, (1974).

[9] S. R. Caradus, W. E. Pfaffenberger, B. Yood, *Calkin algebras and algebras of operators on Banach spaces*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **9** (Marcel Dekker, New York, (1974).

[10] N. Castro-González, E. Dopazo, *Representations of the Drazin inverse for a class of block matrices*, Linear Algebra Appl., **400** (2005), 253–269.

[11] N. Castro-González , E. Dopazo, J. Robles, *Formulas for the Drazin inverse of special block matrices*, Appl. Math. Comput., **174** (2006), 252–270.

[12] N. Castro-González , J. J. Koliha, *New additive results for the g-Drazin inverse*, Proc. Royal Soc. Edinburh, **134 A** (2004), 1085–1097.

[13] N. Castro-González and J. J. Koliha, *Perturbation of the Drazin inverse for closed linear operators*, Integral Equations Operator Theory, **36** (2000), 92–106.

[14] N. Castro-González, J. J. Koliha, V. Rakočević, *Continuity and general perturbation of the Drazin inverse for closed linear operators*, Abstract Applied Analysis, **6** (2002), 335–347.

[15] N. Castro-González, J. J. Koliha, I. Straškraba, *Perturbation of the Drazin inverse*, Soochow J. Math., **27** (2001), 201–211.

[16] N. Castro-González, J. J. Koliha, Y. Wei, *Perturbation of the Drazin inverse for matrices with equal eigenprojections at zero*, Linear Algebra Appl., **312** (2000), 181–189.

[17] N. Castro-González, J. J. Koliha, Y. Wei, *Error bounds for perturbation of the Drazin inverse of closed operators with equal spectral projections*, Appl. Anal., **81** (2002), 915–928.

[18] N. Castro-González, J. Robles, J. Y. Vélez-Cerrada, *Characterizations of a class of matrices and perturbation of the Drazin inverse*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., to appear.

[19] N. Castro-González , J. Y. Vélez-Cerrada, *Characterizations of matrices whose eigenprojections at zero are equal to a fixed perturbation*, Appl. Math. Comput., **159** (2004), 613–623.

[20] N. Castro-González, J. Y. Vélez-Cerrada, *The weighted Drazin inverse of perturbed matrices with related support idempotents*, Appl. Math. Comput, to appear.

[21] N. Castro-González, J. Y. Vélez-Cerrada, *Elements in rings and Banach algebras with related spectral idempotents*, J. Aust. Math. Soc., **80** (2006), 383–396.

[22] N. Castro-González, J. Y. Vélez-Cerrada, *On the perturbation of the Group generalized inverse for a class of bounded operators in Banach spaces*, sent.

[23] G. E. Cho, C. D. Meyer, *Markov chain sensitivity measured by mean first passage times*, Linear Algebra Appl., **316** (2000), 21–28.

[24] G. E. Cho, C. D. Meyer, *Comparison of perturbation bounds for the stationary distribution of a Markov chain*, Linear Algebra Appl., **335** (2001), 137–150.

[25] R. E. Cline, T. N. E. Greville, *A Drazin inverse for rectangular matrices*, Linear Algebra Appl., **29** (1980), 53–62.

[26] A. Dajić, J. J. Koliha, *The weighted g-Drazin inverse for operators*, J. Aust. Math. Soc., **81** (2006), 405–423.

[27] D. S. Djordjević, P. S. Stanimirović, *On the generalized Drazin inverse and generalized resolvent*, Czechoslovak Math. J., **51 (126)** (2001), 617–634.

[28] D. S. Djordjević, W. Wei, *Operators with equal projections related to their generalized inverses*, Appl. Math. Comput., **155** (2004), 655–664.

[29] M. P. Drazin, *Pseudo-inverses in associate rings and semigroups*, Amer. Math. Monthly, **65** (1958), 506–514.

[30] K.-H. Forster, B. Nagy, *Transfer functions and spectral projections*, Publ. Math. Debrecen **52 (3–4)** (1998), 367–376.

[31] A. Galántai, *A note on projector norms*, Publ. Univ. of Miskolc. Series D. Natural Sciences, Mathematics, **38** (1998), 41–49.

[32] I. C. Gohberg, M. G. Krein, *The basic propositions on defect numbers, root numbers and indices of linear operators*, Uspehi Mat. Nauk, **12** (1960), 43–118; Amer. Math. Soc. Translations Series 2, **13** (1960), 185–264.

[33] W. Guorong, Y. Wei, Q. Sanzheng, *Generalized Inverses: Theory and Computations*, Graduate Series in Mathematics **5**, Science Press, Beijing/New York, (2004).

[34] R. E. Harte, *Spectral projections*, Irish Math. Soc. Newsletter, **11** (1984), 10–15.

[35] R. E. Harte, *On quasinilpotents in rings*, PanAm. Math. J., **1** (1991), 10–16.

[36] R. E. Harte, *Invertibility and singularity*, Marcel Dekker, New York, (1988).

[37] R. E. Harte, *Invertibility and singularity for bounded linear operators*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics vol. **109**, Marcel Dekker, New York, (1988).

[38] R. E. Hartwig, *Block generalized inverses*, Arch. Rational Mech. Anal., **61** (1976), 197–251.

[39] R. E. Hartwig, J. Levine, *Applications of the Drazin inverse to the Hill cryptographic system, Part III*, Cryptologia, **5** (1981), 67–77.

[40] R. E. Hartwig, X. Li, Y. Wei, *Representations for the Drazin Inverse of a* 2×2 *Block Matrix*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., **27** (2006), 757–771.

[41] H. G. Heuser, *Functional Analysis*, Wiley, New York, (1982).

[42] A. S. Householder, *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*, Blaisdell Publishing Co., New York, (1964).

[43] B. Istratescu, *Introduction to linear operator theory*, Marcel Dekker, New York, (1982).

[44] M. A. Kaashoek, *Ascent, Descent, Nullity and Defect, a Note on a Paper by A. E. Taylor*, Math. Annalen, **172** (1997), 105–115.

[45] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, 2nd ed., Springer, Berlin, (1980).

[46] S. Kirkland, *Conditioning properties of the stationary distribution for a Markov chain*, Electronic Journal of Linear Algebra, **10** (2003), 1–15.

[47] S. Kirkland, *A combinatorial approach to the conditioning of a single entry in the stationary distribution for a Markov chain*, Electronic Journal of Linear Algebra, **11** (2004), 168–179.

[48] J. J. Koliha, *A generalized Drazin inverse*, Glasgow Mathematical Journal, **38** (1996), 367–381.

[49] J. J. Koliha, *Elements of* C^**-algebras commuting with their Moore-Penrose inverse*, Studia Math., **139** (2000), 81–90.

[50] J. J. Koliha, *Error bound for a general perturbation of the Drazin inverse*, Appl. Math. Comput., **126** (2002), 181–185.

[51] J. J. Koliha, P. Patricio, *Elements of rings with equal spectral idempotents*, J. Aust. Math. Soc., **72** (2002), 137–152.

[52] J. J. Koliha, P. W. Poon, *Spectral sets II*, Rend. Circ. Mat. (Palermo), **47** (1998), 293–310.

[53] J. J. Koliha, V. Rakočević, *Continuity of the Drazin inverse II*, Studia Math., **131** (1998), 167–177.

[54] J. J. Koliha, V. Rakočević, *Invertibility of the difference of idempotents*, Linear and Multilinear Algebra, **51** (2003), 97–110.

[55] J. J. Koliha, V. Rakočević, I. Straškraba, *The difference and sum of projectors*, Linear Algebra Appl., **388** (2004), 279–288.

[56] J. J. Koliha, I. Straškraba, *Power bounded and exponentially bounded matrices*, Appl. Math., **44** (1999), 289–308.

[57] J. J. Koliha, T. D. Tran, *The Drazin inverse for closed linear operators and the asymptotic convergence of C_0-semigroups*, Journal of Operator Theory, **46** (2001), 323–336.

[58] J. J. Koliha, T. D. Tran, *Closed semistable operators and singular differential equations*, Czechoslovak Math. J., **53 (128)** (2003), 605–620.

[59] J. J. Koliha, T. D. Tran, *Singularly perturbed C_0-semigroups and nonhomogeneous differential equations in Banach spaces*, Journal of Operator Theory, **54** (2005), 363–377.

[60] A. N. Langville, C. D. Meyer, *Updating Markov chains with an eye on Google's Pagerank*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., **27 (4)** (2006), 968–987.

[61] X. Li, Y. Wei, *A note on the peturbation bounds of the Drazin inverse*, Appl. Math. Comput., **140** (2003), 329–340.

[62] X. Li, Y. Wei, *An improvement on the perturbation of the group inverse and oblique projection*, Linear Algebra Appl., **338** (2001), 53–66.

[63] X. Li, Y. Wei, *An expression of the Drazin inverse of a perturbed matrix*, Appl. Math. Comput, **153** (2004), 187–198.

[64] M. Mbekhta, Généralisation de la décomposition de Kato aux opérateurs paranormaux et spectraux, Glasgow Math. J., **29** (1987), 159–175.

[65] C. D. Meyer, *The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains*, SIAM Rev., **17** (1975), 443–464.

[66] C. D. Meyer, *The condition number of a finite Markov chains and perturbation bounds for the limiting probabilities*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, **1** (1980), 273–283.

[67] C. D. Meyer, N. J. Rose, *Applications of the Drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients*, SIAM J. Appl. Math., **31** (1976), 411–425.

[68] C. D. Meyer, N. J. Rose, *The index and the Drazin inverse of block triangular matrices*, SIAM J. Appl. Math., **33** (1977), 1–7.

[69] C. D. Meyer, J. M. Shoaf, *Updating finite Markov chains by using techniques of group matrix inversion*, J. Statist. Comput. Simulation, **11** (1980), 163–181.

[70] J. Miao, *Results of the Drazin inverse of block matrices* (in Chinese), J. Shanghai Normal University, **18** (1989), 25–31.

[71] M. Z. Nashed, *Inner, outer and generalized inverses in Banach and Hilbert spaces*, Numer. Funct. Anal. Optim., **9** (1987), 261–325.

[72] M. Z. Nashed, Y. Zhao, *The Drazin inverse for singular evolution equations and partial differential operators*, World Sci. Ser. Appl. Anal., **1** (1992), 441–456.

[73] R. Penrose, *A generalized inverse for matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **51** (1955), 406–413.

[74] S. Z. Qiao, *The weighted Drazin inverse of a linear operator on a Banach space and its approximations* (Chinese), Numer. Math. J. Chinese Univ., **3** (1981), 296–305.

[75] V. Rakočević, *Continuity of the Drazin inverse*, J. Operator Theory, **41** (1999), 55–68.

[76] V. Rakočević, *Koliha-Drazin invertible operators and conmuting Riesz perturbations*, Acta Sci. Math. (Szeged), **68** (2002), 291–301.

[77] V. Rakočević, Y. Wei, *The representation and approximation for the W-weighted Drazin inverse of linear operators in Hilbert space*, Appl. Math. Comput., **141** (2003), 455–470.

[78] V. Rakočević, Y. Wei, *A weighted Drazin inverse and applications*, Linear Algebra App., **350** (2002), 25–39.

[79] V. Rakočević, Y. Wei, *The perturbation theory for the Drazin inverse and its applications II*, J. Austral. Math. Soc., **70 (2)** (2001), 189–197.

[80] G. Rong, *The error bound of the perturbation of the Drazin inverse*, Linear Algebra Appl., **47** (1982), 159–168.

[81] G. Rong Wang, *Approximation methods for the W-weighted Drazin inverse of linear operators in Banach spaces* (Chinese), Numer. Math. J. Chinese Univ., **10** (1988), 74–81.

[82] G. Rong Wang, *Iterative methods for computing the Drazin inverse of linear operators based on functional interpolation*, Numer. Math. J. Chinese Univ., **11** (1989), 269–280.

[83] N. J. Rose, *A note on computing the Drazin inverse*, Linear Algebra Appl., **15** (1976), 95–98.

[84] C. Schmoeger, *On the operator equations* $ABA = A^2$ *and* $BAB = B^2$, Publications de LÍnstitut Mathématique, **78 (92)** (2005), 127–133.

[85] B. Simeon, C. Fuhrer, P. Rentrop, *The Drazin inverse in multibody system dynamics*, Numerische Mathematik, **64** (1963), 521–539.

[86] G. W. Stewart, *On the continuity of the generalized inverse*, SIAM J. Appl. Math., **17** (1969), 33–45.

[87] G. W. Stewart, *Error bounds for approximate invariant subspaces of closed linear operators*, SIAM J. Numer. Anal., **8** (1971), 796–808.

[88] G. W. Stewart, J. G. Sun, *Matrix Perturbation Theory*, Academic Press, Boston, (1990).

[89] A. E. Taylor, D. C. Lay, *Introduction to Functional Analysis*, 2nd ed., Wiley, New York, (1980).

[90] N. Thome, Y. Wei, *Generalized inverses and a block-rank equation*, Appl. Math. Comp., **141** (2003) 471–476.

[91] Y. Wei, *On the perturbation of the group inverse and oblique projections*, Appl. Math. Comput., **98** (1999), 29–42.

[92] Y. Wei, *Index splitting for tha Drazin inverse and the singular linear system*, Appl. Math. Comput., **95** (1998), 115–124.

[93] Y. Wei, *A characterization for the W-weighted Drazin inverse and Cramer rule for W-weighted Drazin inverse solution*, Appl. Math. Comput., **125 (2–3)** (2001), 303–310.

[94] Y. Wei, *Integral representation of the W-weighted Drazin inverse*, Appl. Math. Comput., **144** (2003), 3–10.

[95] Y. Wei, *Perturbation bound of the Drazin inverse*, Appl. Math. Comput., **125** (2002), 231–244.

[96] Y. Wei, *Expressions for the Drazin inverse of a* 2×2 *block matrix*, Linear and Multilinear Algebra, **45** (1998), 131–146.

[97] Y. Wei, X. Li, *An improvement on perturbation bounds for the Drazin inverse*, Numer. Linear Algebra Appl., **10** (2003), 563–575.

[98] Y. Wei, X. Li, F. Bu, *A perturbation bound of the Drazin inverse of a matrix by separation of simple invariant subspaces*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., **27 (1)** (2005), 72–81.

[99] Y. Wei, S. Qiao, *The representation and approximation of the Drazin inverse of a linear operator in Hilbert space*, Appl. Math. Comput., **138** (2003), 77–89.

[100] Y. Wei, G. Wang, *The perturbation theory for the Drazin inverse and its applications*, Linear Algebra Appl., **258** (1997), 179–186.

[101] Y. Wei, Ching-Wah Woo, T. Lei, *A note on perturbation of the W-weighted Drazin inverse*, Appl. Math. Comput., **149** (2004), 423–430.

[102] Y. Wei, H. Wu, *On the perturbation of the Drazin inverse and oblique projection*, Appl. Math. Lett., **13** (2000), 77–83.

[103] F. Zhang, *Matrix Theory. Basic results and techniques*, Springer-Verlag, New York, 1999.