

Consolidación elastoplástica con deformaciones finitas. Implementación con elementos finitos y ejemplos numéricos

Ronaldo I. Borja y Claudio Tamagnini

Department of Civil and Environmental Engineering
Stanford University
Stanford CA 94305 EE.UU.
Tel.: 1-650-723 3664, Fax: 1-650-723- 7514
e-mail: borja@cive.stanford.edu

Enrique Alarcón

Departamento de Mecánica Estructural y Construcciones Industriales
UPM ETSII
José Gutiérrez Abascal, 2
28006 Madrid, España
Tel.: 34-91-336 3021, Fax: 34-91-336 3004
e-mail: alarcon@estru.upm.es

Resumen

En un programa de elementos finitos se implementa un modelo matemático para la consolidación elastoplástica con deformaciones finitas en un medio representativo de un suelo totalmente saturado. El tratamiento algorítmico de la elasticidad en deformaciones finitas para la fase sólida está basado en una descomposición multiplicativa y acoplado con el algoritmo de flujo del fluido mediante la presión intersticial de Kirchhoff. Se utiliza una formulación mixta de elementos finitos con dos campos en que los desplazamientos nodales del sólido y las presiones nodales de agua en los poros están acoplados mediante las ecuaciones de equilibrio de masa y cantidad de movimiento.

La ley de comportamiento de la fase sólida se representa mediante una teoría de tipo Cam-Clay modificada, formulada en el espacio de las tensiones principales de Kirchhoff, y se utiliza una aplicación de retorno que se lleva a cabo en el espacio de deformaciones definido por los invariantes de los alargamientos elásticos logarítmicos principales. El comportamiento de la fase fluida se representa mediante una ley de Darcy generalizada formulada respecto a la configuración actual. El modelo de elementos finitos es completamente linealizable con exactitud. Se presentan varios ejemplos numéricos con y sin efectos de deformaciones finitas para demostrar el impacto de la no linealidad geométrica en las correspondientes respuestas. El artículo finaliza con un estudio del comportamiento del modelo de elementos finitos en relación con la precisión y la estabilidad numérica.

ELASTOPLASTIC CONSOLIDATION WITH FINITE DEFORMATIONS. IMPLEMENTATION WITH FINITE ELEMENTS AND NUMERICAL EXAMPLES

Summary

In a finite element computer program a mathematical model has been implemented to analyze the elastoplastic consolidation with finite deformations of a medium representing a fully saturated soil. The algorithmic treatment of the finite elasticity approach to the solid phase behaviour is based on a multiplicative decomposition and is coupled to an algorithm of fluid flow using the Kirchhoff pore pressure. A mixed finite element formulation with two fields has been used, where the solid nodal displacements and the nodal water pore pressure are coupled using the equations of balance of mass and linear momentum.

The constitutive law of the solid phase is based on a modified Cam-Clay theory written in the main Kirchhoff stress space, and a return mapping in the space of deformations defined by the invariants of the main logarithmic elastic stretches. The behaviour of the fluid phase is modelled using a generalized Darcy's law written in the actual configuration. The finite element model is completely and rigorously linearized. Several examples with and without finite deformation effects are presented in order to show the impact of geometric non-linearities in the corresponding results. The paper ends with a study of the finite element behaviour in relation with its numerical precision and stability.

INTRODUCCIÓN

Las arcillas compresibles experimentan grandes deformaciones en intervalos de tiempo finitos. En muchas ocasiones los grandes movimientos del terreno causados por las deformaciones dependientes del tiempo repercuten sobre el comportamiento de estructuras geotécnicas críticas.

La variación con el tiempo de los movimientos de las arcillas puede achacarse a los siguientes factores¹: a) retraso hidrodinámico o consolidación, fenómeno transitorio en que el fluido intersticial es expulsado de la masa de suelo y b) fluencia del suelo, fenómeno provocado por las deformaciones irreversibles originadas por el carácter viscoso del comportamiento del suelo.

Las deformaciones de fluencia son de carácter reológico y representan una respuesta a un comportamiento que depende del tiempo, mientras que la consolidación proviene de una interacción transitoria entre las fases sólida y fluida y produce una deformación retardada debida a los cambios de tensión en la matriz del suelo. Este artículo se concentra en el modelado de la componente variable con el tiempo de la deformación del suelo debida a efectos de consolidación.

Los modelos anteriores para la difusión transitoria de fluidos en medios porosos y deformables fueron desarrollados a partir de los trabajos precursores de Terzaghi² y Biot³⁻⁶ que establecieron los cimientos matemáticos de la teoría de los medios porosos linealmente elásticos en situaciones mono y tridimensionales respectivamente. La formulación general de la teoría de la consolidación se adelantó a su época⁷ y tuvieron que pasar dos décadas hasta que se consiguieron resultados similares en el tema general de la teoría de las mezclas en continuos (véase la referencia⁸ para una historia descriptiva de la evolución de la teoría de mezclas, así como las referencias⁹⁻¹¹ para referencias adicionales), teoría aplicable a medios polifásicos generales como mezclas de gases, de fluidos, de líquidos con burbujas, suspensiones y aleaciones. Respecto al problema de consolidación de suelos, la teoría tridimensional de Biot ha sido la base de la mayoría de los trabajos posteriores en geofísica, mecánica de suelos y de rocas¹²⁻¹⁴. Desde entonces la teoría se ha ampliado para incluir irreversibilidad y efectos no lineales de materiales¹⁵⁻²⁰ así como los efectos de grandes deformaciones²¹⁻²³ que pueden producirse en depósitos de arcillas muy compresibles.

Hasta ahora las ampliaciones de la teoría infinitesimal de la consolidación al régimen de deformaciones finitas se han formulado en el marco de la hipoeelasticidad²¹⁻²⁶. La formulación hipoeelástica restringe la validez de las ecuaciones constitutivas incrementales a pequeñas deformaciones elásticas²⁷ y enturbia la definición adecuada de los gradientes principales y los cambios medios de volumen necesarios para imponer la ecuación de conservación de la masa en incrementos de carga finitos²⁸. Además para la formulación hipoeelástica se precisa utilizar alguna medida no única de una velocidad de tensiones objetiva, como la velocidad de tensiones de Jaumann que según se sabe produce malos resultados en corte simple²⁹.

Muy recientemente se ha propuesto una formulación alternativa basada en la plasticidad multiplicativa con objeto de estudiar el problema de la consolidación elastoplástica con deformación finita²⁸⁻³⁰.

Esta formulación prolonga las ideas de la referencia²⁷ a continuos bifásicos suelo-agua y conduce a un problema condicionado de valores de contorno en que la deformación volumétrica de la matriz sólida queda coaccionada por el movimiento relativo de la fase fluida. Además, para permitir el desarrollo de grandes deformaciones elásticas, la nueva formulación evita el tema de las velocidades en el cálculo con deformaciones finitas.

Un interesante subproducto de la formulación presentada en la referencia²⁸ es que para suelo saturado con partículas y fluido incompresibles el balance de energía sugiere que la tensión efectiva de Terzaghi es la medida de tensión adecuada para escribir la respuesta del esqueleto del suelo. Por tanto, la formulación tiene la ventaja de ser capaz de admitir la

mayoría de los modelos que, basados en la tensión efectiva, han sido propuestos en ingeniería geotécnica para describir la deformación de arcillas compresibles³¹.

Este artículo se apoya en el modelo matemático de la consolidación elastoplástica para deformaciones finitas presentado en la referencia²⁸ y sitúa la teoría en el marco del cálculo con elementos finitos no lineales. Se desarrollan formas matriciales de las ecuaciones variacionales y se resuelven ejemplos numéricos para comprobar la robustez del modelo de elementos finitos. Un tema clave en el cálculo de la consolidación elastoplástica se refiere al papel que juega el modelo constitutivo con dilataciones plásticas. En este artículo se emplea un modelo de tipo estado crítico propuesto primeramente en la referencia³² y modificado luego³²⁻³⁶ para incorporar los efectos de las grandes deformaciones.

Este modelo es capaz de simular algunas de las más importantes características del comportamiento de arcillas compresibles como son su compactación y dilatación plástica así como sus respuestas asociadas de endurecimiento y reblandecimiento.

En la referencia³³ el modelo se ha situado en el marco de la plasticidad multiplicativa que es el modelo usado en este artículo para comprobar la robustez del modelo propuesto de consolidación con elementos finitos.

Respecto a las rotaciones y símbolos, las letras en negrita indican matrices y vectores, el símbolo (\cdot) indica producto escalar de dos vectores ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$) o la contracción de los índices adyacentes de dos tensores ($\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = c_{ij} d_{jk}$); el símbolo $(:)$ indica producto interno de dos tensores de segundo orden ($\mathbf{c} : \mathbf{d} = c_{ij} d_{ij}$) o una doble contracción de índices adyacentes de tensores de rango dos o superior ($\mathbf{D} : \mathbf{C} = D_{IJKL} C_{KL}$).

Ecuaciones de campo en forma variacional

Sea $B \subset R^{n_s d}$ un cuerpo simple de suelo saturado por un fluido y acotado por la superficie ∂B en la configuración de referencia. Sea además ϕ el movimiento de la fase sólida y θ la presión de Kirchhoff del agua intersticial. Para posteriores referencias desde este mismo artículo, se recuerdan ahora los resultados presentados en la referencia²⁸.

En forma variacional el equilibrio en ausencia de tensiones rotacionales y de inercia se escribe

$$G(\phi, \theta, \boldsymbol{\eta}) = \int_B (\text{grad } \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\tau} - \theta \text{div } \boldsymbol{\eta} - \rho_0 \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{G}) dV - \int_{\partial B^T} \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{t} dA = 0 \quad (1)$$

donde $\boldsymbol{\eta}$ es la variación del campo de desplazamientos.

La forma variacional del balance de masa admitiendo la incompresibilidad tanto de las partículas como la del fluido es

$$H(\phi, \theta, \psi) = \int_B (\psi \dot{J} - \text{grad } \psi \cdot J \mathbf{v}) dV - \int_{\partial B^h} \psi_h Q dA = 0 \quad (2)$$

donde ψ es el campo de la variación de la presión intersticial. En las ecuaciones (1) y (2) $\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma}$ es el tensor simétrico de tensiones efectivas de Kirchhoff obtenido al multiplicar el tensor de tensiones efectivas de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ por el jacobiano J del movimiento de la fase sólida, \mathbf{G} es el vector de aceleraciones de la gravedad, \mathbf{t} el vector tensión prescrito en $\partial B^T \subset \partial B$ definido en la configuración de referencia, ρ_0 es una densidad de referencia o constante de la masa de suelo, \dot{J} la derivada respecto al tiempo de J , \mathbf{v} la velocidad relativa del flujo por unidad de área de la masa de suelo deformada, Q el flujo volumétrico, prescrito por unidad de área indeformada a través del contorno $\partial B^h \subset B$ (generalmente $Q = 0$), grad el operador gradiente y div el operador de divergencia espacial.

La serie de discretizaciones temporales y espaciales puede intercambiarse, lo que se usa para el término incremental \dot{J} en (2) desde el principio. Para ello se considera la siguiente ecuación variacional integrada en el tiempo^{15,16}

$$\begin{aligned}
H_{\Delta t}(\phi, \theta, \psi) &= \int_B \frac{\psi}{\Delta t} \left(J_{n+1} - \sum_{m=1}^k \alpha_m J_{n+1-m} \right) dV - \\
&- \beta_0 \int_B [\beta(\text{grad } \psi \cdot J\mathbf{v}) + (1 - \beta)(\text{grad } \psi \cdot J\mathbf{v})_n] dV - \\
&- \beta_0 \int_{\partial B} \psi [\beta Q_{n+1} + (1 - \beta)Q_n] dA = 0
\end{aligned} \tag{3}$$

donde $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ y β, β_0 y las α_m son los parámetros de integración en el tiempo. La conocida familia de métodos trapeciales se obtiene en (3) poniendo $k = 1$; $\beta_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$ y $\beta \in [0, 1]$.

Si $\beta = 1$ y $k \geq 1$, se obtiene la familia de métodos en diferencias regresivas (BDF) incondicionalmente establece, con exactitud de orden k y con k pasos^{15,16}. En este artículo se considerará (1) y la discretización temporal (3) para posterior introducción de las funciones de discretización espacial.

Puesto que tanto G como $H_{\Delta t}$ son nulos, sus primeras variaciones δG y $\delta H_{\Delta t}$ deben anularse también. Poniendo $\delta G = 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
\delta G &= \int_B \text{grad } \boldsymbol{\eta} : (\mathbf{c} + \boldsymbol{\tau} \otimes \mathbf{1}) : \text{grad } \delta \mathbf{u} dV - \\
&- \int_B (\delta \theta \text{div } \boldsymbol{\eta} - \theta \text{grad}^t \boldsymbol{\eta} : \text{grad } \delta \mathbf{u}) dV - \\
&- \int_B \rho_w J \text{div } (\delta \mathbf{u}) \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{G} dV - \int_{\partial B} \boldsymbol{\eta} \cdot \delta \mathbf{t} dA = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

donde $\delta \mathbf{u}$, $\delta \theta$ y $\delta \mathbf{t}$ son respectivamente las variaciones del vector desplazamiento, la presión intersticial de Kirchhoff y el vector tensión. La primera integral en (4) contiene el término de tensiones iniciales $(\boldsymbol{\tau} \otimes \mathbf{1})_{ijkl} = \tau_{ji} \delta_{ik}$, donde $(\mathbf{1})_{ij} = \delta_{ij}$ es la delta de Kronecker, así como el tensor \mathbf{c} de rigidez tangencial espacial; la tercera integral representa la variación de la densidad másica de referencia ρ_0 (no constante) y representada la cantidad de fluido con densidad másica constante ρ_w que penetra o escapa de la matriz de suelo debido a la variación del jacobiano.

Poniendo $\delta H_{\Delta t} = 0$ y fijando Δt , se tiene

$$\begin{aligned}
\delta H_{\Delta t} &= \int_B \frac{\psi}{\Delta t} J \text{div } \delta \mathbf{u} dV + \beta \beta_0 \int_B \text{grad } \psi \cdot \frac{\mathbf{k}}{\rho_w g} \cdot \text{grad } \delta \theta dV - \\
&- 2\beta \beta_0 \int_B \text{grad } \psi \cdot \text{sim} \left(\frac{\mathbf{k}}{\rho_w g} \cdot \text{grad}^t \delta \mathbf{u} \right) \cdot \text{grad } \theta dV - \\
&- \beta \beta_0 \int_B \text{grad } \psi [\text{grad } \delta \mathbf{u} - (\text{div } \delta \mathbf{u}) \mathbf{1}] \cdot k \cdot \frac{\mathbf{G}}{g} J dV - \\
&- \beta \beta_0 \int_{\partial B} \psi \delta Q dA = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

donde δQ es la variación del flujo de fluido Q , g es la aceleración de la gravedad y \mathbf{G} es el vector de aceleraciones de gravedad (obsérvese $\|\mathbf{G}\| \equiv g$).

Las integrales segunda, tercera y cuarta contienen el tensor de segundo orden \mathbf{k} permeabilidad espacial (supuesto constante) que se obtiene al generalizar la ley de Darcy a problemas bi y tridimensionales.

Ecuaciones matriciales

Las ecuaciones matriciales del método de elementos finitos pueden obtenerse siguiendo los procedimientos típicos. La idea es definir dos, quizá diferentes, matrices de funciones de interpolación espaciales $\mathbf{N}^\phi(\mathbf{x})$ y $\mathbf{N}^\theta(\mathbf{x})$ para aproximar el movimiento de la fase sólida ϕ y el campo de presiones intersticiales θ .

Supóngase que ϕ se aproxima mediante el campo de desplazamientos espaciales $\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) \in R^{R_{sd}}$. En forma matricial se tiene

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^\phi(\mathbf{x})\mathbf{d} + \mathbf{N}_g^\phi(\mathbf{x})d_g \quad (6)$$

donde $\mathbf{d} \in R^{N_Q}$ es el vector de desplazamientos nodales incógnita del sólido y \mathbf{d}_g el vector de desplazamientos nodales prescritos. Igualmente sea θ el campo espacial de presiones intersticiales de Kirchhoff aproximado mediante la función $\theta^h(\mathbf{x}) \in R^1$.

En forma matricial se tiene

$$\theta^h(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^\theta(\mathbf{x})\boldsymbol{\theta} + \mathbf{N}_r^\theta(\mathbf{x})\boldsymbol{\theta}_r \quad (7)$$

donde $\boldsymbol{\theta} \in R^{N_Q}$ es el vector de presiones intersticiales de Kirchhoff nodales incógnita. Las funciones de ponderación $\boldsymbol{\eta}$ y $\boldsymbol{\psi}$ pueden aproximarse de la misma manera en función de sus valores nodales $\boldsymbol{\eta}$ y $\boldsymbol{\psi}$, tal como se indica a continuación

$$\boldsymbol{\eta}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^\phi(\mathbf{x})\boldsymbol{\eta}; \quad \boldsymbol{\psi}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^\theta(\mathbf{x})\boldsymbol{\psi} \quad (8)$$

donde $\boldsymbol{\eta} \in R^{N_Q}$ y $\boldsymbol{\psi} \in R^{N_P}$. Tras estos preliminares se tienen los siguientes resultados:

Proposición 1

Si la función de ponderación $\boldsymbol{\eta}$ se aproxima con cualquier conjunto de valores nodales arbitrarios $\boldsymbol{\eta} \in R^{N_Q}$ mediante (8), la ecuación de elementos finitos para el balance de la cantidad de movimiento en ausencia de inercia y tensiones rotacionales puede escribirse como

$$G^h = (\phi, \theta, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta}^t[\mathbf{N}^S(\mathbf{d}) + \mathbf{N}^w(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{F}_{\text{EXT}}] = 0 \quad (9)$$

donde

$$\mathbf{N}^S(\mathbf{d}) = \int_B \mathbf{B}^t\{\boldsymbol{\tau}\}dV \quad (10a)$$

$$\mathbf{N}^w(\boldsymbol{\theta}) = - \int_B \mathbf{b}^T(\mathbf{N}^\theta\boldsymbol{\theta} + \mathbf{N}_r^\theta\boldsymbol{\theta}_r)dV \quad (10b)$$

$$\mathbf{F}_{\text{EXT}} = \int_B \rho_0\mathbf{N}^{\phi t}\mathbf{G}dV + \int_{\partial B} \mathbf{N}^{\phi t}\mathbf{t}dA \quad (10c)$$

$\{\boldsymbol{\tau}\} = \{\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13}\}^T$ para $n_{sd} = 3$.

Demostración

Sea \mathbf{B} la matriz habitual de transformación (espacial) deformaciones-desplazamientos con estructura

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_{NQ}]$$

Para $n_{sd} = 3$ por ejemplo \mathbf{B} es de dimensión $6 \times 3 NQ$. Observando que $\boldsymbol{\tau}$ es simétrica y desarrollando, se tiene $\boldsymbol{\eta}^t \mathbf{B}^t \{\boldsymbol{\tau}\} = \text{grad } \boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\tau}$ de modo que (10a) conduce a la primera integral de (1). A continuación defínase $\mathbf{b} = \{\mathbf{1}\}^T \mathbf{B}$ donde $\{\mathbf{1}\} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}^t$ y \mathbf{b} es la dimensión $1 \times 3 NQ$ cuando $n_{sd} = 3$. Se sigue que $\mathbf{b}\boldsymbol{\eta} \equiv \text{div } \boldsymbol{\eta}$ de modo que (10b) conduce a la segunda integral de (1). Las integrales tercera y cuarta pueden obtenerse a partir de (10c) mediante razonamientos semejantes.

Proposición 2

Aproxímese la función de ponderación ψ mediante valores nodales arbitrarios $\boldsymbol{\psi} \in R^{NP}$ mediante (8); en ese caso la ecuación de elementos finitos para el balance de masa, suponiendo que tanto los granos sólidos como el fluido son incompresibles, puede escribirse como

$$-\Delta t H_{\Delta t}^h(\varphi, \theta, \boldsymbol{\psi}) = \boldsymbol{\psi}^t [\mathbf{J}(\mathbf{d}) + \beta_0 \Delta t \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\theta}) + \beta_0 \Delta t \mathbf{H}_{EXT}] = 0 \quad (11)$$

donde

$$\mathbf{J}(\mathbf{d}) = - \int_B \mathbf{N}^{\theta t} (J_{n+1} - \sum_{m=1}^k \alpha_m J_{n+1-m}) dV \quad (12a)$$

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\theta}) = \beta \int_B \mathbf{E}^t J_{n+1} \mathbf{v}_{n+1} dV + (1 - \beta) \int_B \mathbf{E}^t \mathbf{f}_n J_n \mathbf{v}_n dV \quad (12b)$$

$$\mathbf{H}_{EXT} = \int_B \mathbf{N}^{\theta t} [\beta Q_{n+1} + (1 - \beta) Q_n] dA \quad (12c)$$

donde $\mathbf{f}_n = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_n}$ es el gradiente de deformación local referido a la configuración en el instante t_n .

Demostración

A partir de (12a) se tiene $\mathbf{N}^\theta \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}^t \mathbf{N}^{\theta t} \equiv \psi^h$, y por ello (12a) y (12c) producen respectivamente la primera y la tercera integral de (3). A continuación se define \mathbf{E} como la matriz de transformación gradiente-presión con estructura

$$\mathbf{E} = [\text{grad } N_1^\theta, N_2^\theta, \dots, N_{NP}^\theta]$$

Por ejemplo, para $n_{sd} = 3$, \mathbf{E} tiene dimensión $3 \times NP$.

Por tanto $\mathbf{E}\boldsymbol{\eta} = \text{grad } \boldsymbol{\eta}$ y $\mathbf{f}_n^t \mathbf{E}\boldsymbol{\eta} = \text{grad}_n \boldsymbol{\eta}$, por lo que (12b) produce la segunda integral de (3).

Las aproximaciones descritas más arriba pueden utilizarse también para expresar las primeras variaciones de G^h y $H_{\Delta t}^h$ en forma matricial. Siguiendo²⁸ se supone una condición de carga muerta y se imponen condiciones adicionales de vectores tensión externos nulos ($\delta \mathbf{t} = \mathbf{0}$) e igualmente para el flujo externo ($\delta Q = 0$). En estas condiciones las variaciones primeras de G^h y $H_{\Delta t}^h$ se transforman en funciones lineales de las primeras variaciones de \mathbf{d} y $\boldsymbol{\theta}$.

Proposición 3

Supóngase que las funciones de ponderación $\boldsymbol{\eta}$ se aproximan mediante valores nodales arbitrarios $\boldsymbol{\eta} \in R^{NQ}$ mediante (8). En estas condiciones la ecuación de elementos finitos para la variación primera de G^h puede escribirse como

$$\delta G^h = (\phi, \theta, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta}^t [\mathbf{K}_{\phi\phi} \delta \mathbf{d} + \mathbf{K}_{\phi\theta}] \delta \theta \quad (13)$$

donde

$$\mathbf{K}_{\phi\phi} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \mathbf{T} \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \mathbf{I}_\theta \mathbf{B} - \rho_w J \mathbf{N}^{\theta t} \mathbf{G} \mathbf{b} dV \quad (14a)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\theta} = - \int_B \mathbf{b}^t \mathbf{N}^\theta dV \quad (14b)$$

y $\delta \mathbf{d}$, $\delta \boldsymbol{\theta}$ son respectivamente las variaciones primeras de \mathbf{d} y θ .

Demostración

Ordénense los elementos del tensor de cuarto orden \mathbf{C} en una matriz de rigidez material \mathbf{C} para $n_{sd} = 3$, \mathbf{C} es 6×6 mediante el método bosquejado en la referencia³⁷. Un sencillo desarrollo del producto escalar $\boldsymbol{\eta}^t, \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \delta \mathbf{d}$ (obsérvese que $\delta \mathbf{d}_g = \mathbf{0}$) produce la expresión equivalente para $\text{grad } \boldsymbol{\eta}^h : \mathbf{c} : \text{grad } \delta \mathbf{u}^h$ en (4). Esta es la contribución de la rigidez del material a la matriz de coeficientes.

A continuación se define la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^{sk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{B}_{NQ} \\ \mathbf{B}_1^{sk} & \mathbf{B}_2^{sk} & \dots & \mathbf{B}_{NQ}^{sk} \end{bmatrix}$$

donde \mathbf{B}^{sk} es la parte asimétrica de \mathbf{B} que representa los efectos rotacionales. Por ejemplo, para $n_{sd} = 3$ la matriz \mathbf{B}^{sk} de dimensión 3×3 NQ y \mathbf{B} es de dimensión 9×3 NQ .

Considérese además los elementos del tensor $\boldsymbol{\tau}$ ordenados en la matriz \mathbf{T} siguiendo el procedimiento bosquejado³⁸. Para $n_{sd} = 3$ la matriz \mathbf{T} es de dimensión 9×9 NQ y siempre simétrica.

El desarrollo del término del producto escalar $\boldsymbol{\eta}^t \mathbf{B}^t \mathbf{T} \mathbf{B} \delta \mathbf{d}$ conduce a la expresión equivalente para $\text{grad } \boldsymbol{\eta}^h : \boldsymbol{\tau} \otimes \mathbf{1} : \text{grad } \delta \mathbf{u}^h$ en (4). Esta es la contribución de las tensiones iniciales a la matriz de coeficientes.

Finalmente defínase una matriz diagonal \mathbf{I}_θ tal que para que $n_{sd} = 3$, \mathbf{I}_θ sea la dimensión 9×9 e $(\mathbf{I}^\theta)_{ii} = \theta^h$ para $i = 1, 2, 3$; $(\mathbf{I}_\theta)_{ii} = \theta^h/2$ para $i = 4, 5, 6$ y $(\mathbf{I}_\theta)_{ii} = -\theta^h/2$ para $i = 7, 8, 9$.

El desarrollo del término $\boldsymbol{\eta}^t \mathbf{B}^t \mathbf{I}^\theta \mathbf{B} \delta \mathbf{d}$ produce la expresión equivalente $\theta^h \text{grad } \boldsymbol{\eta}^h : \text{grad } \delta \mathbf{u}^h$. Ello genera la contribución de la presión intersticial inicial a la matriz de coeficientes. Los términos restantes pueden demostrarse utilizando las identidades $\mathbf{b} \delta \mathbf{d} = \text{div}(\delta \mathbf{u}^h)$ y $\mathbf{b} \boldsymbol{\eta} = \text{div}(\boldsymbol{\eta}^h)$ junto con las condiciones de contorno esenciales $\delta \boldsymbol{\theta}_r = 0$.

Proposición 4

Supóngase que se aproxima la función de ponderación ψ mediante una serie de valores nodales arbitrarios $\boldsymbol{\psi} \in R^{NP}$ vía (8). En este caso la ecuación de elementos finitos para la variación primera de $H_{\Delta t}^h$ puede escribirse como

$$-\Delta t \delta H_{\Delta t}^h(\phi, \theta, \boldsymbol{\psi}) = \boldsymbol{\psi}^t [\mathbf{K}_{\theta\phi} \delta \mathbf{d} + \mathbf{K}_{\theta\theta} \delta \boldsymbol{\theta}] \quad (15)$$

donde

$$\mathbf{K}_{\theta\phi} = - \int_B J \mathbf{N}^{\theta t} \mathbf{b} dV + \beta \beta_0 \Delta t \int_B \left(\frac{1}{\rho_w g} \mathbf{E}^t \mathbf{A} \mathbf{B} - J \mathbf{E}^t \mathbf{W} \mathbf{B} \right) dV \quad (16a)$$

$$\mathbf{K}_{\theta\theta} = - \frac{\beta \beta_0 \Delta t}{\rho_w g} \int_B \mathbf{E}^t \mathbf{k} \mathbf{E} dV \quad (16b)$$

y $\delta \mathbf{d}$, $\delta \boldsymbol{\theta}$ son las variaciones primeras de \mathbf{d} y $\boldsymbol{\theta}$ respectivamente.

Demostración

Las formas matriciales de las dos primeras integrales en (5) son triviales. Respecto a la tercera, que surge debido a las no linealidades geométricas, se puede obtener la siguiente identidad por desarrollo directo (ver(16a))

$$2 \text{ grad } \psi^h \cdot \text{sim}[\mathbf{k} \text{ grad}^t (\delta u^h)] \cdot \text{grad } \theta = \boldsymbol{\psi}^t \mathbf{E}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \delta \mathbf{d}$$

donde

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3]$$

y (para $n_{sd} = 3$)

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} k_{11}\theta_{,1} & \vdots & k_{12}\theta_{,2} & \vdots & k_{13}\theta_{,3} \\ k_{21}\theta_{,1} & \vdots & k_{22}\theta_{,2} & \vdots & k_{23}\theta_{,3} \\ k_{31}\theta_{,1} & \vdots & k_{32}\theta_{,2} & \vdots & k_{33}\theta_{,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{v}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{v}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{v}_2 \end{bmatrix}$$

$$2\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} k_{11}\theta_{,2} + k_{12}\theta_{,1} & \vdots & k_{12}\theta_{,3} + k_{13}\theta_{,2} & \vdots & k_{11}\theta_{,3} + k_{13}\theta_{,1} \\ k_{21}\theta_{,2} + k_{22}\theta_{,1} & \vdots & k_{22}\theta_{,3} + k_{23}\theta_{,2} & \vdots & k_{21}\theta_{,3} + k_{23}\theta_{,1} \\ k_{31}\theta_{,2} + k_{32}\theta_{,1} & \vdots & k_{32}\theta_{,3} + k_{33}\theta_{,2} & \vdots & k_{31}\theta_{,3} + k_{33}\theta_{,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{v}_2 & 0 & \hat{v}_3 \\ \hat{v}_1 & \hat{v}_3 & 0 \\ 0 & \hat{v}_2 & \hat{v}_1 \end{bmatrix}$$

$$2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} k_{12}\theta_{,1} - k_{11}\theta_{,2} & \vdots & k_{13}\theta_{,2} - k_{12}\theta_{,3} & \vdots & k_{13}\theta_{,1} + k_{11}\theta_{,3} \\ k_{22}\theta_{,1} - k_{21}\theta_{,2} & \vdots & k_{23}\theta_{,2} - k_{22}\theta_{,3} & \vdots & k_{23}\theta_{,1} - k_{21}\theta_{,3} \\ k_{32}\theta_{,1} - k_{31}\theta_{,2} & \vdots & k_{33}\theta_{,2} - k_{32}\theta_{,3} & \vdots & k_{33}\theta_{,1} - k_{31}\theta_{,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{v}_2 & 0 & \hat{v}_3 \\ -\hat{v}_1 & \hat{v}_3 & 0 \\ 0 & -\hat{v}_2 & -\hat{v}_1 \end{bmatrix}$$

donde $\hat{v}_i = k_{ij}\theta_{,j}$ (suma en $j = 1, 2, 3$). Para $n_{sd} = 3$ la matriz \mathbf{A} es de dimensión 3×9 .

Respecto a la cuarta integral en (5), que también es debida a la no linealidad, por desarrollo directo puede obtenerse (ver (16a))

$$\text{grad } \psi^h \cdot [\text{grad } (\delta \mathbf{u}^h) - \text{div}(\delta \mathbf{u}^h) \mathbf{1}] \cdot \mathbf{k} \frac{\mathbf{G}}{g} = \boldsymbol{\psi}^t \mathbf{E}^T \mathbf{W} \mathbf{B} \delta \mathbf{d} \quad (\text{véase (16a)})$$

donde

$$\mathbf{W} = [\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3]$$

$$\mathbf{W}_1 = -\frac{1}{g} \begin{bmatrix} 0 & k_{1i}G_i & k_{1i}G_i \\ k_{2i}G_i & 0 & k_{2i}G_i \\ k_{3i}G_i & k_{3i}G_i & 0 \end{bmatrix}; \quad 2\mathbf{W}_2 = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} k_{2i}G_i & 0 & k_{3i}G_i \\ k_{1i}G_i & k_{3i}G_i & 0 \\ 0 & k_{2i}G_i & k_{1i}G_i \end{bmatrix}$$

$$2\mathbf{W}_3 = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} k_{2i}G_i & 0 & k_{3i}G_i \\ -k_{1i}G_i & k_{3i}G_i & 0 \\ 0 & -k_{2i}G_i & -k_{1i}G_i \end{bmatrix}$$

Con suma implícita desde $i = 1, 2, 3$. Para $n_{sd} = 3$ la matriz \mathbf{W} también es de dimensión 3×9 .

Puesto que tanto $\boldsymbol{\eta}$ como $\boldsymbol{\psi}$ son arbitrarias, las ecuaciones vectoriales (acopladas) siguientes cumplen las condiciones (9) y (11).

- Balance de cantidad de movimiento

$$\mathbf{r}_\phi(\mathbf{d}, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{N}^s(\mathbf{d}) + \mathbf{N}^w(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{F}_{EXT} = \mathbf{0} \quad (17)$$

- Balance de masa

$$\mathbf{r}_\theta(\mathbf{d}, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{J}(\mathbf{d}) + \beta_0 \Delta t \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\theta}) + \beta_0 \Delta t \mathbf{H}_{EXT} = \mathbf{0} \quad (18)$$

Para el cálculo numérico el problema se reduce a la determinación de la configuración definida por los valores nodales \mathbf{d} y $\boldsymbol{\theta}$ para los que (17) y (18) se cumplen simultáneamente.

Si $\mathbf{r} = [\mathbf{r}_\phi, \mathbf{r}_\theta]^t \neq \mathbf{0}$, para alguna configuración de tanteo $\mathbf{d}^k, \boldsymbol{\theta}^k$ se puede obtener la solución numérica por iteración según el método de Newton. Sin embargo, para ello, generalmente se precisa el uso de un operador tangente consistente que para el problema presente puede montarse fácilmente a partir de las matrices de coeficientes indicados más arriba.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\phi\phi} & \mathbf{K}_{\phi\theta} \\ \mathbf{K}_{\theta\phi} & \mathbf{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (19)$$

En general la matriz \mathbf{K} es indefinida y no simétrica.

La asimetría de \mathbf{K} es debida a la solución de un problema de consolidación asimétrica. Sin embargo hay condiciones que conducen a una \mathbf{K} simétrica incluso si el problema de consolidación es intrínsecamente asimétrico. Obviamente que $\mathbf{K}_{\theta\theta} = \mathbf{K}_{\theta\theta}^t$, lo que es cierto si y sólo si el tensor de permeabilidad \mathbf{K} es simétrico. Además, para cálculos en pequeñas deformaciones el jacobiano J es idénticamente igual a la unidad, mientras que la segunda integral de (16a) se anula idénticamente, ya que su origen inicial es la no linealidad geométrica²⁸. Por tanto, para esta condición $\mathbf{K}_{\theta\phi} = \mathbf{K}_{\theta\phi}^t$. En las mismas condiciones impuestas por la hipótesis de pequeñas deformaciones el último término de la integral de (14a) también se anula, puesto que es simplemente la linealización del jacobiano constante. Por tanto, con la hipótesis de pequeñas deformaciones $\mathbf{K}_{\theta\theta} = \mathbf{K}_{\theta\theta}^t$, siempre que \mathbf{C} sea simétrica¹⁷.

EJEMPLOS NUMÉRICOS

Esta sección demuestra la importancia de las grandes deformaciones en la consolidación de las cimentaciones sobre arcilla compresible. Los ejemplos se refieren a consolidación mono y bidimensional (deformación plana) usando elementos finitos mixtos que combinen una interpolación de desplazamientos bicuadrada con 9 nudos con una interpolación de presiones bilineal y con 4 nudos. La integración en el tiempo se hace mediante un esquema en diferencias regresivas, incondicionalmente estable con precisión de primer orden, que se obtiene al poner $k = 1$, y $\beta_0 = \beta = \beta_1$ en (3). Los cálculos se llevaron a cabo en doble precisión usando un programa de elementos finitos llamado SPIN2D¹⁶.

Consolidación hiperelástica monodimensional

En este caso se considera un esqueleto de suelo poroso hiperelástico, inicialmente libre de tensiones, descrito por una función de energía libre ψ que es cuadrática en los alargamientos logarítmicos elásticos principales³⁹. La expresión para ψ en función de los parámetros λ y μ de Lamé tiene la forma

$$\psi = \frac{1}{2} \lambda [\varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e]^2 + \mu [(\varepsilon_1^e)^2 + (\varepsilon_2^e)^2 + (\varepsilon_3^e)^2] \quad (20)$$

donde $\varepsilon_A^e = \ln(\lambda_A^e)$; $A = 1, 2, 3$ son los alargamientos elásticos logarítmicos principales. Los valores de los parámetros materiales supuestos son $\lambda = 57,7$ kPa (equivalentes a un módulo de Young $E = 100$ kPa y a un coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$).

La Figura 1 muestra la columna de 10 elementos finitos que forma la malla de EF. Ésta tiene un fondo impermeable fijo en desplazamientos laterales con desplazamiento horizontal nulo y presión intersticial nula en el borde superior. Se supone una permeabilidad vertical $k_v = 8,64 \times 10^{-4}$ m/día y el peso específico del agua $\rho_w g = 10$ kN/m³. A efectos de normalización de resultados es útil el empleo del módulo confinado⁴⁰ $D = \lambda + 2\mu = 134,7$ kPa. Así se puede calcular que el coeficiente de consolidación vale $c_v = k_v D / (\rho_w g) = 1,16 \times 10^{-2}$ m²/día, mientras que el factor normalizado es $T = c_v t / H_0^2$, donde H_0 es el espesor inicial de la columna de suelo². Durante la etapa de consolidación los intervalos de tiempo van creciendo según el esquema $\Delta t_{n+1} = 1,5 \Delta t_n$. Ello conduce a puntos regularmente espaciados cuando la respuesta temporal se dibuja con escala logarítmica en el eje de tiempos. Los excesos de presión intersticial se generan aplicando una carga de Cauchy vertical y hacia abajo de valor $\Delta w^{\text{Cauchy}} = -90$ kPa de forma instantánea en el borde superior de la columna de suelo, lo que produce la isócrona inicial mostrada en la Figura 1.

La Figura 2 presenta una comparación entre las variaciones respecto al tiempo de potencia fluido $\pi = \pi^\theta + \pi^e = \theta / (J \rho_w g) + X_2$ en el punto de Gauss A próximo a la base impermeable y a una distancia inicial de 4,894 m del borde superior de la columna de suelo indeformada. El significado físico del potencia π es la cota piezométrica total en este punto de Gauss⁴¹. La solución en pequeñas deformaciones mostrado en la Figura 2 se ha obtenido mediante el modelo de Terzaghi de consolidación monodimensional lineal².

Previamente a la consolidación, los potenciales fluidos predichos por los modelos de pequeñas y grandes deformaciones son iguales y valen 14 m, de los cuales 9 m representan la parte transitoria inducida por la carga vertical de 90 kPa. Obsérvese en la Figura 2 que, mientras el potencial fluido predicho por la solución de Terzaghi tiende al valor permanente inicial $\Pi^{\text{pequeno}} = 5$ (por la altura de la columna sigue siendo la misma debido a la hipótesis de pequeñas deformaciones), la solución en grandes deformaciones tiende a un valor permanente $\Pi^{\text{finito}} = 3,24$ m que representa la altura comprimida final de la columna de suelo.

La validez de la solución en grandes deformaciones se puede comprobar mediante las siguientes sencillas operaciones manuales. Para una compresión monodimensional confinada

el jacobiano J en régimen permanente puede calcularse como relación entre las alturas final e inicial.

Por tanto $J = 3,24/5 = 0,648$ y es constante en toda la altura de la columna de suelo. La tensión vertical efectiva de Kirchhoff es $\Delta w^{\text{Kirchhoff}} = J\Delta w^{\text{Cauchy}} = 58,32$ kPa que está también distribuída uniformemente a lo largo de la altura en condiciones permanentes. Puesto que la ley de comportamiento elástica se expresa en función de las tensiones de Kirchhoff, se tiene $\Delta w^{\text{Kirchhoff}} = D\varepsilon_v^e$. El correspondiente alargamiento vertical elástico principal es $\lambda_v^e = \exp(\varepsilon_v^e) = 0,648$, lo que coincide con el valor permanente calculado para el jacobiano J .

Figura 1. Malla de elementos finitos y presiones iniciales en el agua intersticial para el problema de consolidación monodimensional

Figura 2. Consolidación hiperelástica monodimensional: variación con el tiempo del potencial total en el punto de Gauss A

La Figura 3 muestra las isócronas de presiones intersticiales de Cauchy dibujadas para diferentes valores del factor de tiempo equivalente T . Estas presiones se calcularon como $\vartheta = \theta/J$ en los puntos de Gauss interpolando las presiones intersticiales modales de Kirchhoff obtenidas con la solución global y dividiéndolas por el jacobiano en los puntos de Gauss (ya que no pueden calcularse en los nudos donde no se dispone del valor del jacobiano). Obsérvese que las isócronas predichas por el modelo de grandes deformaciones se trasladan en el espacio por efecto de esas deformaciones. A efectos comparativos también se dibujan en la Figura 3 las isócronas calculadas mediante el modelo de Terzaghi.

Figura 3. Consolidación hiperelástica monodimensional: isócronas de presión intersticial de Cauchy constante

Consolidación hiperelasto-plástica monodimensional

Se repite a continuación el cálculo del punto anterior, pero usando ahora una ley de comportamiento del suelo del tipo estado crítico muy conocida: el modelo plástico Cam-Clay modificado. En lo que respecta al cálculo de deformaciones finitas se está interesado en un problema en el que el dominio en estudio carece de una configuración libre de tensiones iniciales respecto a la que sea posible referir la configuración actual. Un ejemplo de este tipo de situación es un depósito de suelo sometido inicialmente a su peso propio, donde la remoción de la carga gravitatoria no conduce forzosamente a una configuración libre de tensiones razonable, ya que los suelos se depositan mediante un proceso de sedimentación. El ejemplo descrito más abajo ilustra el procedimiento que puede utilizarse para establecer una configuración de referencia que no está libre de tensiones.

La fase inicial para obtener una configuración de referencia sin tensiones iniciales requiere la aplicación del peso propio del suelo y la determinación de las tensiones internas que equilibran esa carga.

Para ello se lleva a cabo un cálculo en pequeñas deformaciones, por lo que las tensiones internas generadas por la solución siguen la definición de Cauchy. Una vez impuestas las cargas gravitatorias, los desplazamientos deben ponerse a cero de nuevo antes de que comience el cálculo de la consolidación. Puesto que la configuración tras el peso propio es la configuración de referencia, el jacobiano toma valor inicial $J = 1$ antes del cálculo de consolidación.

Se va a describir ahora un modelo de comportamiento elastoplástico en que la componente elástica muestra que la respuesta del suelo depende del valor de las tensiones internas. Para arcillas se toman funciones de energía almacenada del tipo

$$\boldsymbol{\psi}(\varepsilon_v^e, \varepsilon_s^e) = \rho_0 \boldsymbol{\chi} \exp\left(\frac{\varepsilon_v^e - \varepsilon_{v_0}^e}{\boldsymbol{\chi}}\right) + \frac{3}{2} \eta^e \varepsilon_s^e{}^2 \quad (21a)$$

donde μ^e es el módulo elástico de rigidez definido como

$$\mu^e = \mu_0 + \alpha \rho_0 = \rho_0 \exp\left(\frac{\varepsilon_v^e - \varepsilon_{v_0}^e}{\boldsymbol{\chi}}\right) \quad (21b)$$

donde ε_v^e y ε_s^e son los invariantes volumétrico y desviador respectivamente, ρ_0 y $\varepsilon_{v_0}^e$ parámetros de referencia y $\boldsymbol{\chi}$ un índice de compresibilidad elástico. La función de energía almacenada descrita por (21) conduce a un tipo de elasticidad en que el módulo de compresibilidad elástica varía linealmente con la tensión normal media efectiva⁴². Poniendo $\alpha = 0$, el módulo de rigidez elástico μ^e se puede aproximar mediante un valor constante $\mu_0 > 0$, mientras que haciendo $\mu_0 = 0$ y $\alpha > 0$ se consigue un μ^e que varía linealmente también con la tensión normal media efectiva³³. Puesto que ni ε_v^e ni ε_s^e son cero, en la configuración tras el peso propio, $\boldsymbol{\psi}$ toma valores no nulos en ella.

Considérese ahora un modelo de plasticidad basado en la teoría Cam-Clay modificada de la mecánica del suelo para estados críticos³², reformulada en la referencia³³ para incluir los efectos de las deformaciones finitas. En el régimen de pequeñas deformaciones la función de plastificación es

$$f = \frac{q^2}{M^2} + p(p - p_c) = 0 \quad (22)$$

donde p es la tensión de Cauchy normal media efectiva, q el segundo invariante de la componente desviadora del tensor de tensiones de Cauchy, p_c la presión de preconsolidación del suelo y M un parámetro que representa la pendiente de la línea de estado crítico en el espacio $p - q$. En régimen de deformaciones finitas la función de plastificación se obtiene reemplazando p , q y p_c en (22) por sus equivalentes de Kirchhoff $P = J \cdot p$, $Q = J \cdot q$ y P_c respectivamente³³. El núcleo del modelo así formulado es una ley de endurecimiento bilogarítmica adecuada en los casos que representan grandes deformaciones volumétricas plásticas⁴³.

El modelo de plasticidad descrito³³ se acopla al modelo elástico con conservación de energía descrito en el apartado anterior mediante una formulación basada en una descomposición multiplicativa del gradiente de deformación. Esta ley de comportamiento hiperelasto-plástica es capaz de reproducir la dilatación y la compactación volumétrica plástica que son imprescindibles para ensayar la robustez del modelo de consolidación no lineal.

Los parámetros del material utilizados en las simulaciones monodimensionales se muestran en la Tabla I. Para describir el cambio de volumen del suelo se utilizan dos conjuntos de parámetros $(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\lambda})$ para deformaciones infinitesimales y $(\hat{\chi}, \hat{\lambda})$ para deformaciones finitas. En la referencia³³ se describe el significado físico de estos parámetros. Las densidades máxicas de las fases sólida y fluida ρ_s y ρ_w respectivamente se suponen constantes.

Junto con la porosidad φ del esqueleto de suelo, estas densidades máxicas pueden utilizarse para obtener la densidad saturada φ_{sat} de la mezcla suelo-agua mediante

$$\varphi_{\text{sat}} = (1 - \varphi)\rho_s + \varphi\rho_w \quad (23)$$

Parámetro	Pequeñas deformaciones	Deformaciones finitas
μ_0 (kPa)	200,0	200,0
α	0,0	0,0
κ	0,0476	--
λ	0,1667	--
κ	--	0,05
$\hat{\lambda}$	--	0,20
M	1,00	1,00
ρ_0 (kPa)	-10,0	-10,0
ρ_{c_0} (kPa)	-10,0	-10,0
$\varepsilon_{v_0}^e$	-0,0476	-0,0500
ρ_s (t/m ³)	2,70	2,70
ρ_w (t/m ³)	1,00	1,00
k (m/día)	$8,64 \times 10^{-4}$	$8,64 \times 10^{-4}$

Tabla I. Parámetros del material para el modelo hiperelasto-plástico MCC

En esta simulación 1D se usa la misma malla de elementos finitos y condiciones de contorno mostrada en la Figura 1. La fase de inicialización en deformaciones infinitesimales consta de la aplicación de las cargas gravitatorias y el cálculo de las tensiones internas que equilibran esas cargas. Puesto que la función de energía elástica almacenada (23) produce un módulo de compresibilidad elástico que es función lineal de las tensiones efectivas volumétricas, se precisan tensiones iniciales no nulas para arrancar las iteraciones. En este turno inicial se ha supuesto la existencia de un pequeño valor de -10,0 kPa en los puntos de Gauss para la tensión isotropa p y para la presión de preconsolidación p_c .

Figura 4. Consolidación hiperelástica monodimensional: tensiones efectivas iniciales generadas en las hipótesis de densidad másica constante y variable

La Figura 4 muestra las distribuciones de tensiones efectivas de Cauchy horizontales (σ_{11}) y verticales (σ_{22}) generadas por la carga gravitatoria. Junto con la distribución hidrostática inicial de presiones intersticiales mostrada en la Figura 1, las tensiones de la Figura 4 son tensiones internas congruentes que equilibran aquella carga. En la Figura 4 se muestran dos series de resultados. La primera solución muestra que la densidad másica saturada ρ_{sat} varía con la profundidad debido al cambio de la porosidad φ con la profundidad como resultado

de la sobrecarga creciente. Esta condición de tensiones iniciales es útil para posteriores cálculos en grandes deformaciones.

La segunda solución supone una $\rho_{\text{sat}} = 1506 \text{ t/m}^3$ constante y es útil para posteriores cálculos en pequeñas deformaciones.

Puesto que la Figura 4 demuestra que las condiciones iniciales para los cálculos en pequeñas y grandes deformaciones son prácticamente iguales, es pertinente una comparación entre los resultados.

La Figura 5 muestra un gráfico de variación del índice inicial de preconsolidación del suelo según la profundidad.

Figura 5. Consolidación hiperelástica monodimensional: índice de preconsolidación inicial R generado en las hipótesis de densidad másica constante y variable

A efectos de definición, el índice de preconsolidación generalizado R en el ámbito de pequeñas deformaciones es

$$R = \frac{p_c}{p} \left[1 + \left(\frac{q}{MP} \right)^2 \right]^{-1} \quad (24)$$

En el ámbito de las deformaciones finitas las combinaciones de Kirchhoff P , Q y P_c pueden sustituirse en (24) en el lugar de p , q y p_c . Por tanto $R = 1$ implica un suelo normalmente consolidado ($\mathcal{F} = 0$), mientras que $R > 1$ corresponde a un suelo preconsolidado ($\mathcal{F} < 0$). Es claro que la imposición de una tensión isotropa efectiva $p = -10 \text{ kPa}$ previa a la fase de aplicación de la carga de gravedad hace que los puntos próximos a la superficie del suelo estén preconsolidados debido a la poca sobrecarga, mientras que a profundidades mayores el suelo tiende a estar normalmente consolidado por las sobrecargas de peso propio. La Figura 5 muestra de nuevo la pequeña diferencia entre las soluciones con densidad másica constante o variable, lo que da sentido a una comparación de los resultados posteriores en pequeñas y grandes deformaciones. Posteriormente se aplica una carga vertical hacia abajo de $\Delta w^{\text{Cauchy}} = -90 \text{ kPa}$ en lo alto de la columna de suelo, en 3 pasos de tiempo con una velocidad constante de $30,0 \text{ kPa/día}$ y $\Delta t = 10 \text{ días}$ para cada paso de tiempo, tras lo cual se permite que los excesos de presión intersticial se disipen. En la Figura 6 se observan los resultados en pequeñas y grandes deformaciones, lo que permite comparar las variaciones respecto al tiempo del potencial fluido total Π en el mismo punto de Gauss A mostrado en la Figura 1. Obsérvese que la disipación de la cota piezométrica es más rápida para la solución en deformaciones finitas debido a la reducida trayectoria de drenaje que se

obtiene al compactarse la columna de suelo. Además, la solución en deformaciones finitas muestra un potencial hidráulico permanente de aproximadamente 3,3 m, lo que representa una reducción del 34 % de la altura total de la columna de suelo.

Figura 6. Consolidación hiperelástica monodimensional: variación con el tiempo del potencial total en el punto de Gauss A

Figura 7. Consolidación hiperelástica monodimensional: isócronas de presiones intersticiales de Cauchy constantes

La Figura 7 muestra una comparación de las isócronas de las presiones intersticiales de Cauchy para diferentes valores del factor de tiempo equivalente T predicho por las soluciones en pequeñas y grandes deformaciones. A efectos de definición, el factor de tiempo equivalente T para el caso hiperelasto-plástico como en el apartado anterior es $T = c_v t / H_0^2$, donde $c_v = 2\mu_0 k_v / (\rho_w g)$ y $k_v = k$ de la Tabla I. De nuevo las isócronas predichas para la última solución indican un dominio móvil que resulta de la inclusión de los efectos de deformaciones finitas. Con la Figura 8 se pueden comparar los grandes medios de consolidación \bar{U}_{ave} pronosticados por ambas soluciones. Aquí \bar{U}_{ave} se define como la relación entre el asiento en superficie del suelo variable con el tiempo y el asiento al final de la consolidación. Obsérvese

que la solución en pequeñas deformaciones pronostica una velocidad de consolidación inferior a la obtenida con grandes deformaciones, puesto que en este último caso se considera explícitamente la reducción de las trayectorias de drenaje, lo que incrementa la disipación de los excesos de presión intersticial (este efecto podría equilibrarse con la reducción del coeficiente de permeabilidad del suelo debido a la consolidación, pero este factor no se ha considerado en el cálculo que se presenta). Habitualmente, los efectos geométricos se consideran despreciables, pero este ejemplo muestra que el carácter de la solución puede cambiar cuando la deformación es grande.

Figura 8. Consolidación hiperelástica monodimensional: grado medio de consolidación en función del factor de tiempo

Consolidación hiperelástica en deformación plana

Existen soluciones analíticas para el problema de consolidación en deformación plana de un semiespacio elástico sometido a una carga en faja uniforme⁴⁴. Con este ejemplo se tratará de reproducir numéricamente esas soluciones y demostrar la importancia de los efectos de las deformaciones finitas en la respuesta de un suelo hiperelástico consolidándose en un estado de deformación plana.

La malla de elementos finitos correspondiente a este problema se muestra en la Figura 9. Se trata de una carga tipo terraplén en un semiespacio con $a = 5$ m, aplicada sobre una capa hiperelástica de suelo de 20 m de espesor. La malla tiene 132 elementos mixtos D9P4 con 575 nudos de desplazamiento y 156 nudos de presión. Se supone que el fondo de la capa de arcilla es rígido, rugoso y perfectamente drenante, sometido a un valor constante del potencial total de $\Pi = 20,0$ m. Los parámetros del material son $\lambda = 0$ y $\mu = 250$ kPa (que corresponden a valores del módulo de Young $E = 500$ kPa y del coeficiente de Poisson $\nu = 0$). En la superficie del suelo se aplica casi instantáneamente (en un período de $\Delta t = 10$ días, lo que es muy poco comparado con los $t \approx 10\,000$ días necesarios para completar la consolidación) una carga en faja de $w^{\text{Cauchy}} = 120$ kPa y se mantiene constante hasta que se produce la consolidación del suelo. Las permeabilidades son $k = k_{11} = k_{22} = 8,64 \times 10^{-4}$ m/día y $k_{12} = k_{21} = 0$; la densidad másica del fluido es $\rho_w = 1,9$ t/m³.

Se supone que inicialmente los elementos del suelo están libres de tensiones.

La Figura 10 muestra la solución analítica para la variación del exceso de presión intersticial con el tiempo a una profundidad $z = a$ en el eje, bajo la carga en faja de un

Figura 9. Malla EF para el ejemplo de consolidación hiperelástica en deformación plana

semiespacio elástico⁴⁴. Con ella se encuentran los resultados del modelo numérico. Los excesos de presión intersticial se han normalizado respecto a la carga del terraplén w mediante la expresión $(\vartheta - \vartheta_0)/w$, donde ϑ_0 es la presión intersticial de Cauchy de referencia. El punto correspondiente a $z = a$ en la malla de la Figura 9 es el nudo A situado a una distancia de 5 m de la base del terraplén. La solución EF en pequeñas deformaciones da inmediatamente la versión temporal de la presión intersticial en este punto puesto que es un nudo de presión. Sin embargo en el modelo de grandes deformaciones se precisan los valores del jacobiano para obtener las presiones intersticiales de Cauchy que no están fácilmente disponibles en los puntos nodales. Por tanto se escoge el punto de Gauss más próximo al punto A para establecer la exactitud del modelo numérico. Por congruencia en la presentación, ambas soluciones, grandes y pequeñas deformaciones, se calculan en el punto B situado a distancias horizontal y vertical de 0,211 m del nudo A (Figura 9). Para describir la solución en el dominio del tiempo se utiliza un factor de tiempo normalizado $T = ct/a^2$, donde $c = 2\mu k(g\rho_w)$ y t es el tiempo transcurrido desde el comienzo de la consolidación.

La comparación entre las curvas dibujadas en la Figura 10 sugiere que en el caso de grandes deformaciones se inducen altas presiones intersticiales por la súbita aplicación de cargas externas en un estado inicial del proceso de consolidación.

Tras ello la disipación se produce prácticamente a la misma velocidad hasta un factor de tiempo $T \approx 5,0$ en que la solución en grandes deformaciones se estabiliza, mientras que la de pequeñas deformaciones sigue disminuyendo. Obsérvese que la solución en grandes deformaciones tiende asintóticamente a un exceso de presión intersticial distinto de cero, puesto que la presión final de régimen permanente difiere numéricamente de la presión intersticial hidrostática inicial debido a la variación de la configuración geométrica del problema. Como era de esperar, la solución EF en pequeñas deformaciones se acerca más a la solución analítica, pero no es igual a ella entre otras cosas por las limitaciones del modelo EF a la hora de representar el semiespacio y debido al uso de un pequeño incremento de tiempo para imponer la carga del terraplén.

Tanto la solución analítica como la solución EF muestran el efecto Mandel-Cryer o incremento inicial del exceso de presión intersticial, que es una característica de la solución acoplada⁴⁰.

Figura 10. Consolidación hiperelástica en deformación plana: variación con el tiempo del exceso de presión intersticial en el eje a una profundidad $z = a$

La Figura 11 muestra las isócronas de presiones intersticiales de Cauchy constante pronosticadas por los modelos de deformaciones pequeñas y finitas a lo largo de la línea vertical $X_1 = 0,211$ bajo la carga del terraplén. Esta línea es la definida por la columna de puntos de Gauss más próximos al eje de simetría del problema.

Figura 11. Consolidación hiperelástica en deformación plana: isócronas de presiones intersticiales de Cauchy constantes a lo largo de la línea vertical $X_1 = 0,211$ cerca del eje

Obsérvese que la solución en grandes deformaciones pronostica una isócrona permanente definida por una línea casi recta con una pendiente aparente equivalente a un fluido con densidad másica de alrededor de $1,23 \text{ t/m}^3$, que es superior a la respuesta $\rho_w = 1,0 \text{ t/m}^3$. Ello es el resultado de una condición artesiana local caracterizada por una filtración hacia arriba en régimen permanente originada por la reducción del espesor de la capa en consolidación, ya que tanto las condiciones de drenaje en el contorno superior como en el inferior permanecen inalterables. La presión intersticial de Cauchy en el contorno inferior converge

a un valor permanente que es ligeramente superior al inicial. Ello es consecuencia de la fijación de las condiciones esenciales de contorno en forma de presión intersticial de Kirchhoff, lo que se amplifica con la inversa del jacobiano, inferior a la unidad debido a la compresión volumétrica del suelo.

Consolidación hiperelasto-plástica en deformación plana

Como ejemplo final se considera el problema de una zapata en faja flexible que se apoya en una arcilla compresible previamente sometida a una precarga superficial. La precarga crea un estado de preconsolidación inicial que hace más rígida la respuesta del suelo a posteriores recargas. La malla EF usada en este problema se muestra en la Figura 12. El depósito de arcilla se representa mediante la misma malla de la Figura 9, pero ahora en lo alto de la capa de arcilla se sitúa un estrato de 1 m de espesor con elementos de arena representados mediante 12 elementos finitos tipo D9P0 para simular una cubierta drenante.

Figura 12. Malla EF para el ejemplo de consolidación hiperelástica en deformación plana

Parámetro	Pequeña deformación	Deformación finita
E (kPa)	1000,0	1000,0
ν	0,00	0,00
φ_0	--	0,41
ρ_s (t/m ³)	--	2,70
ρ_w (t/m ³)	--	1,00
ρ (t/m ³)	2,01	--

Tabla II. Parámetros materiales de la capa arenosa

El modelo de la capa de arena es un material hiperelástico con las propiedades indicadas en la Tabla II. El modelo de grandes deformaciones precisa una porosidad de referencias φ_0 ,

puesto que la densidad macroscópica másica del suelo se calcula en función de la porosidad. La capa de arcilla blanda subyacente se modela mediante un material elastoplástico Cam-Clay modificada con los mismos parámetros contenidos en la Tabla I.

Figura 13. Consolidación hiperelástica en deformación plana: tensiones efectivas iniciales generadas en las hipótesis de densidad másica constante y variable

Figura 14. Consolidación hiperelástica en deformación plana: índice de preconsolidación inicial R generado en las hipótesis de densidad másica constante y variable

Al igual que en el ejemplo de la sección anterior el proceso de inicialización implica arrancar con cálculos en pequeñas deformaciones para generar la configuración inicial de referencia producida por las cargas gravitatorias, con y sin consideración de la variación de la porosidad con la profundidad. A continuación el suelo se precarga a valores superficiales de 30 kPa, 15 kPa y cero (normalmente consolidada), produciendo tres condiciones de preconsolidación. Para la precarga de 30 kPa, las Figuras 13 y 14 muestran las variaciones del estado inicial de tensiones y del índice de preconsolidación del suelo R según la profundidad. Los resultados de las Figuras 13 y 14 muestran la variación no lineal con la profundidad de las tensiones efectivas horizontales debido a las tensiones internas producidas por la precarga, pero son, por otro lado, casi iguales en los dos casos y lo mismo sucede con las tensiones efectivas verticales y con los perfiles indicados de preconsolidación. Para los casos de precarga nula o de 15 kPa se obtienen resultados semejantes.

A continuación se aplicó una carga en faja de $w = 75$ kPa sobre un semiancho de $a = 5$ m a velocidad constante durante un período de 90 días, tras lo cual se mantuvo constante. De nuevo este intervalo de tiempo es muy pequeño en comparación con el necesario para alcanzar la consolidación completa, y por ello el suelo responde esencialmente en condiciones sin drenaje durante la etapa de aplicación de la carga del terraplén. La Figura 15 muestra la evolución de los asentos de la línea central con la profundidad pronosticada por el cálculo en grandes deformaciones, junto con el de pequeñas deformaciones sin precarga. Como era esperable, el cálculo en grandes deformaciones pronostica valores menores de los desplazamientos verticales. Éstos decrecen para valores crecientes del índice de preconsolidación R .

Figura 15. Consolidación hiperelástica en deformación plana: asiento de la superficie del suelo en el eje en función del tiempo (caso 1: sin precarga; caso 2: con 15 kPa de precarga; caso 3: con 30 kPa de precarga)

Figura 16. Consolidación hiperelástica con deformaciones finitas: presión intersticial de Cauchy en el punto B en función del tiempo (caso 1: sin precarga; caso 2: con 15 kPa de precarga; caso 3: con 30 kPa de precarga)

La Figura 16 muestra la solución de las presiones intersticiales de Cauchy $\vartheta = \theta/J$ en el punto de Gauss B (Figura 12). Obsérvese que la solución en grandes deformaciones pronostica un valor inferior de los excesos de presión intersticial inicial, pero ligeramente mayores al final en régimen permanente. Las predichas por el modelo de grandes deformaciones reflejan las mismas condiciones artesianas locales creadas por considerar la reducción finita del

espesor de la capa consolidante de forma similar al efecto descrito en el ejemplo del apartado anterior.

Las Figuras 17 y 18 muestran la comparación entre las trayectorias de tensiones efectivas de Cauchy y Kirchhoff en el mismo punto de Gauss B , pronosticados por los modelos de deformaciones infinitesimales y finitas respectivamente (recuérdese que la ley de comportamiento en deformaciones finitas se formula en función de las tensiones de Kirchhoff). Se ve que durante la etapa de carga del terraplén las trayectorias de tensiones efectivas sin drenaje predichas por el módulo de pequeñas deformaciones han alcanzado prácticamente la línea de estado crítico, lo que indica que el suelo está cerca o en pleno fallo al final de la etapa de carga del terraplén. Por otro lado, para el mismo valor de la carga, el modelo de deformaciones finitas todavía produce condiciones previas al fallo en los tres casos.

Figura 17. Cálculos en pequeñas deformaciones: trayectorias de tensiones efectivas de Cauchy para el punto B de Gauss mostrando el crecimiento de la superficie de plastificación durante la carga sin drenaje (caso 1: sin precarga; caso 2: con 15 kPa de precarga; caso 3: con 30 kPa de precarga); CSL - línea de estado crítico

Figura 18. Cálculos en pequeñas deformaciones: trayectorias de tensiones efectivas de Kirchhoff para el punto B de Gauss mostrando el crecimiento de la superficie de plastificación durante la carga sin drenaje (caso 1: sin precarga; caso 2: con 15 kPa de precarga; caso 3: con 30 kPa de precarga); CSL - línea de estado crítico

En consecuencia, el modelo en pequeñas deformaciones no pudo producir resultados convergentes cuando la carga de terraplén superó los 75 kPa. En contraste, el modelo de deformaciones finitas podría alcanzar cargas de terraplén del orden de los 90 kPa. Respecto a las trayectorias de tensiones efectivas sin drenaje en la etapa preconsolidada, ambos modelos predicen pendientes verticales, lo que implica respuestas elásticas, volumétrica y desviadora, desacopladas, lo que se asocia al uso de la ecuación hiperelástica^{33,34,42} (21) con $\alpha = 0$.

Las Figuras 17 y 18 muestran que los puntos de tensión se alejan durante la consolidación de la línea de estado crítico haciendo que la superficie de plastificación se dilate más. La consolidación crea una condición en que el jacobiano J disminuye continuamente con el tiempo como resultado de la compactación volumétrica del esqueleto de suelo (en contraste el valor de J es igual a la unidad durante la carga sin drenaje, y por tanto los valores de las tensiones de Cauchy y Kirchoff permanecen iguales en este período). Por ello el suelo gana resistencia al corte debido al endurecimiento. La comparación de las superficies de plastificación, que se muestra en las dos figuras, sugiere que el modelo en deformaciones infinitesimales pronostica una plastificación más intensa que el de deformación finita tanto durante la carga sin drenaje como en la etapa de consolidación.

Finalmente en la Tabla III se comparan perfiles típicos de la convergencia mostrada por las iteraciones de Newton-Raphson durante las etapas de carga sin drenaje y consolidación. Los cálculos pertenecen al escenario pésimo sin precarga (perfil de suelo inicialmente consolidado) en que la solución exige el mayor número de iteraciones hasta la convergencia. Obsérvese que la etapa de carga sin drenaje se hace arrancar mediante el vector de cargas residuales desequilibradas r_ϕ de (17) que surge de la carga incremental del terraplén, mientras que el estado de consolidación se provoca mediante el flujo fluido desequilibrado r_ϕ de (18) debido a los efectos de difusión, que a su vez es convertido en fuerzas desequilibradas r_ϕ en la iteración siguiente haciendo que la norma residual relativa $\|\mathbf{r}_1\|/\|\mathbf{r}^0\|$ en la iteración # 1 del cálculo de consolidación, salte unos dos órdenes de magnitud (Tabla III).

Curiosamente la solución en grandes deformaciones suele converger una iteración más deprisa que la de pequeñas deformaciones durante la etapa de carga del terraplén, pero la tendencia se invierte durante la etapa de consolidación. Con todo, este ejemplo muestra que la linealización congruente hace funcionar un cálculo de consolidación elastoplástica en grandes deformaciones con la misma facilidad que un cálculo no lineal equivalente en pequeñas deformaciones.

Iteración número	Pequeñas deformaciones	Grandes deformaciones
0	1,000e+0	1,000e+0
1	8,398e-1	8,689e-1
2	6,539e-1	2,714e-1
3	2,927e-1	4,461e-2
4	7,720e-2	4,238e-4
5	4,903e-3	5,520e-8
6	2,301e-5	2,127e-12
7	5,530e-10	—

Tabla IIIa. Convergencia cuadrática usual de las iteraciones de Newton-Raphson: número de iteraciones versus norma normalizada del residuo. Intervalo de tiempo # 6; carga sin drenaje $t = 90$ días

Iteración número	Pequeñas deformaciones	Grandes deformaciones
0	1,000e+0	1,000e+0
1	1,075e+2	1,085e+2
2	2,342e+1	2,132e+1
3	7,175e-1	1,576e+0
4	3,450e-3	1,189e-3
5	7,092e-8	2,132e-6
6	--	1,084e-8

Tabla IIIb. Convergencia cuadrática usual de las iteraciones de Newton-Raphson: número de iteraciones versus norma normalizada del residuo. Intervalo de tiempo # 18; consolidación $t = 1482$ días

CONCLUSIONES

En un programa de elementos finitos se ha implantado un modelo matemático basado en plasticidad multiplicativa para consolidación elastoplástica en deformaciones finitas de suelos saturados. La fase sólida se describe mediante una versión hiperelástica de un modelo Cam-Clay modificada capaz de representar la compactación volumétrica plástica que se presenta en la compresión de suelos arcillosos. El flujo fluido se describe mediante la ley de Darcy generalizada formulada en la configuración actual. Ambas leyes de comportamiento pueden linealizarse de forma congruente con solución analítica.

Los ejemplos numéricos desarrollados en compresión monodimensional y en deformación plana bidimensional en arcillas compresibles demuestran la utilidad del modelo en deformaciones finitas.

En concreto se calculó como ejemplo un problema con deformación plana de arcilla con diferentes grados de preconsolidación para demostrar que, contrariamente a los modelos de deformación finita basados en modelos hiperelásticos cuyo uso está restringido a pequeñas deformaciones elásticas, la nueva formulación también admite el desarrollo de grandes deformaciones elásticas. Además, la formulación utilizada en el modelo evita el problema de la velocidad de cálculo de las deformaciones finitas. Una comparación de los cálculos en pequeñas y grandes deformaciones muestra que los efectos de estas últimas pueden influir mucho en las deformaciones y en las presiones intersticiales pronosticadas para el suelo, así como en la variación temporal del grado medio de consolidación.

Además los resultados indican que una linealización congruente hace funcionar un cálculo de consolidación elastoplástica con deformaciones finitas tan fácilmente como para el caso de pequeñas deformaciones.

AGRADECIMIENTOS

Este estudio fue subvencionado en parte por la Air Force Office of Scientific Research con el Grant N° F 49620-92-J-0008 y por la G3S Division of National Science Foundation mediante el Contract N° MSS-9022448. Además, el primer autor recibió una ayuda del Ministerio de Educación y Ciencia de España mientras se escribía la referencia²⁸ en Madrid. Los profesores G. Calabresi (Universitá di Roma, La Sapienza) y J.K. Mitchell (Virginia Polytechnia Institute) suministraron una muy apreciada motivación así como sugerencias de apoyo.)

REFERENCIAS

- 1 L. Bjerrum, "Engineering geology of Norwegian normally consolidated marine clays as related to settlements of buildings", 7 Rankine Lecture, *Géotechnique*, Vol. **17**, pp. 83–117, (1967).
- 2 K. Terzaghi, "*Theoretical soil mechanics*", Wiley, New York, (1943).
- 3 M.A. Biot, "General theory of three-dimensional consolidation", *J. Appl. Phys.*, Vol. **12**, pp. 155–164, (1941).
- 4 M.A. Biot, "Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid", *J. Appl. Phys.*, Vol. **26**, pp. 182–185, (1995).
- 5 M.A. Biot, "Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. **28**, pp. 168–191, (1956).
- 6 M.A. Biot, "Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media", *J. Appl. Phys.*, Vol. **33**, pp. 1483–1498, (1967).
- 7 R. de Boer, R.L. Schiffman y R.E. Gibson, "The origins of the theory of consolidation", The Terzaghi-Fillunger dispute, *Géotechnique*, Vol. **46**, pp. 175–186, (1996).
- 8 R.J. Atkin y R.E. Craine, "Continuum theories of mixtures: basic theory and historial development", *Q. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. **29**, pp. 209–244, (1976).
- 9 R.M. Bowen, "Theory of mixtures", in: *Continuum Physics 3*, A.C. Eringen (Ed.), Academic Press, New York, pp. 1–27, (1976).
- 10 A.C. Eringen y J.D. Ingram, "A continuum theory of chemically reacting media I", *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. **3**, pp. 197–212, (1995).
- 11 A.C. Eringen y J.D. Ingram, "A continuum theory of chemically reacting media II: Constitutive equations of reacting fluid mixtures", *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. **5**, pp. 289–322, (1967).
- 12 J.R. Booker y J.C. Small, "An investigation of the stability of numerical solutions of Biot's equations of consolidation", *Int. J. Solids and Structures*, Vol. **11**, pp. 907–971, (1975).
- 13 J.T. Christian, "Two- and three-dimensional consolidation", In: "*Numerical methods in geotechnical engineering*", C.S. Desai and J.T. Christian (Eds.), McGraw Hill, San Francisco, pp. 399–426, (1977).
- 14 R.L. Schiffman, "The stress components of a porous media", *J. Geophys. Res.*, Vol. **75**, pp. 4035–4038, (1970).
- 15 R.I. Borja, "Nonlinear consolidation multistep methods and iterative algorithms", *Proceeding Seventh International Conference on Computer Methods Advances in Geomechanics*, G. Beer, J.R. Booker and J.P. Carter (Eds.), Balkema, pp. 1111–1116, (1991).
- 16 R.I. Borja, "One-step and linear multistep methods for nonlinear consolidation", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **85**, pp. 239–272, (1991).
- 17 R.I. Borja, "Composite Newton-PCG and quasi-Newton iterations for nonlinear consolidation", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **88**, pp. 27–60, (1991).
- 18 A.M. Britto y M.J. Gunn, "*Critical state soil mechanics via finite elements*", John Wiley and Sons, New York, (1987).
- 19 H.J. Siriwardane and C.S. Desai, "Two numerical schemes for nonlinear consolidation", *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. **17**, pp. 395–426, (1981).

- 20 J.C. Small, J.R. Booker y E.H. Davis, "Elastoplastic consolidation of soil", *Int. J. Solids and Structures*, Vol. **12**, pp. 431–448, (1976).
- 21 J.H. Prevost, "Mechanics of continuous porous media", *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. **18**, pp. 787–800, (1980).
- 22 J.H. Prevost, "Implicit-explicit schemes for nonlinear consolidation", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **33**, pp. 225–239, (1983).
- 23 J.P. Carter, J.R. Booker y J.C. Small, "The analysis of finite elasto-plastic consolidation", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. **3**, pp. 107–129, (1979).
- 24 A.E. Green and P.M. Naghdi, "A general theory of an elasto-plastic continuum", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, Vol. **18**, pp. 251–281, (1995).
- 25 A.E. Green y B.C. McInnis, "Generalized hypo-elasticity", *Proc. Roy. Soc. Edinburgh A57*, pp. 220-230, (1967).
- 26 T.J.R. Hughes, "Numerical implementation of constitutive models: Rate independent deviatoric plasticity", In: S. Nemat-Nasser, R. Asaro and G. Hegemier (Eds.), "*Theoretical foundations for large-scale computations of nonlinear material behaviour*", Martinus Nijhoff, The Netherlands, (1984).
- 27 J.C. Simo, "Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **99**, pp. 61–112, (1992).
- 28 R.I. Borja y E. Alarcón, "A mathematical framework for finite strain elastoplastic consolidation. Part I: Balance laws, variational formulation and linearization", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **122**, pp. 145–171, (1995).
- 29 J.C. Nagtegaal y J.E. de Jong, "Some aspects of non-isoplastic workhardening in finite strain plasticity", In: "*Plasticity of metals at finite strains*", E.H. Lee y R.L. Mallet (Eds.), *Proc. Research Workshop*, Stanford University, pp. 65–102, (1981).
- 30 R.I. Borja, "Elastoplastic consolidation at finite strain", *Computer Methods Advances in Geomechanics*, H.J. Siriwardane y M.M. Zaman (Eds.), Balkema, pp. 753–758, (1994).
- 31 A. Ges y D.M. Potts, "Critical state models in computational geomechanics", *Engng. Comput.*, Vol. **5**, pp. 178–197, (1988).
- 32 K.H. Roscoe y J.B. Burland, "On the generalized stress-strain behaviour of 'wet' clay", In: "*Engineering plasticity*", J. Heyman y F.A. Leckie (Eds.), Cambridge University Press, pp. 535–609.
- 33 R.I. Borja y C. Tamagnini, "Cam-Clay plasticity. Part III. Extension of the infinitesimal model to include finite strains", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, en prensa.
- 34 R.I. Borja, C. Tamagnini y A. Amorosi, "Coupling plasticity and energy-conserving elasticity models for clays", *J. Geotech. Engng.*, ASCE, en prensa.
- 35 R.I. Borja y C. Tamagnini, "Finite deformation theory for a Cam-Clay model", In: "*Numerical models in geomechanics*", NUMOG V, G.N. Pande y S. Pistruszczak (Eds.), pp. 3–8, (1995).
- 36 R.I. Borja y C. Tamagnini, "Critical state model at finite strains", *Proc. 11th ASCE Engng. Mech. Conference*, Y.K. Lin y T.C. (Eds.), 1, pp. 148–151, (1996).
- 37 T.J.R. Hughes, "*The finite element method*", Prentice-Hall, Inc. New Jersey, (1987).
- 38 T.J.R. Hughes y J.H. Prevost, "DIRT II-A nonlinear quasi-static finite element analysis program", (User's manual), Stanford University, (1979).

- 39 J.E. Marsden y T.J.R. Hughes, "*Mathematical foundations of elasticity*", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1983).
- 40 T.W. Lambe y R.V. Whitman, "*Soil mechanics*", Wiley, New York, (1969).
- 41 J. Bear, "*Dynamics of fluids in porous media*", Dover, New York, (1972).
- 42 G.T. Houlsby, "The use of a variable shear modulus in elastic-plastic models for clays", *Computers and Geotechnics*, Vol. **1**, pp. 3–13, (1985).
- 43 R. Butterfield, "A natural compression law for soils", *Géotechnique*, Vol. **29**, pp. 469–480, (1979).
- 44 R.L. Schiffman, A. Chen y J.C. Jordan, "The consolidation of a half plane MATE", Report 67-3, U. Illinois, Chicago Circle, (1967).