TRABAJOS VIRTUALES: UN METODO COMPACTO PARA EL ANALISIS PRACTICO

Por E. ALARCON ALVAREZ
Profesor Adjunto de "Construcción y Arte" en la E.I.T.O.P. Madrid

La utilización del teorema de los trabajos virtuales para el estudio de los mecanismos de colapso de una estructura, permite resolver con elegancia y sencillez los problemas de diseño plástico.

A continuación vamos, de manera somera, a recordar los conceptos fundamentales y resolver algunos ejemplos.

I. TEOREMA DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

Supongamos la existencia de un sistema de cargas **en equilibrio.** Los esfuerzos producidos por las mismas se relacionan con ellas de modo que

$$p = \frac{d^2\ M}{d\ S^2}$$

Asimismo sean **M** y (S) las deformaciones **compatibles** con el sistema de coacciones, impuestas a la estructura. Podemos escribir

$$p.y = \frac{d^2\ M}{d\ S^2} \cdot y$$

e integrar a lo largo de la directriz

$$\int_{ed}^{ef} p\ y\ ds = \int_{ed}^{ef} \frac{d^2\ M}{ds^2}\ y\ ds = \left\{ \begin{array}{l} u = y \\ dv = \dfrac{d^2\ M}{ds^2}\ ds \\ du = dy \\ v = \dfrac{d\ M}{ds} \end{array} \right\}$$

$$= \left| y \frac{d\ M}{ds} \right|_{ed}^{ef} - \int_{ed}^{ef} \frac{d\ M}{ds}\ dy = \left| y \frac{d\ M}{ds} \right|_{ed}^{ef} -$$

$$- \int_{ed}^{ef} \frac{d\ M}{ds}\frac{dy}{ds}\ ds = \left\{ \begin{array}{l} u = \dfrac{dy}{ds} \\ dv = \dfrac{d\ M}{ds}\ ds \\ du = \dfrac{d^2 y}{ds^2}\ ds \\ V = M \end{array} \right\} = \left| y \frac{d\ M}{ds} - M \frac{dy}{ds} \right|_{ed}^{ef} +$$

$$+ \int_{ed}^{ef} M \frac{d^2 y}{ds^2}\ ds$$

En las condiciones habituales el primer sumando se anula. Por ejemplo, si se trata de un extremo libre $\frac{dM}{ds} = 0$; $M = 0$; si apoyado $y = 0$, $M = 0$; si empotrado $y = 0$; $\frac{dy}{ds} = 0$, etc. Es decir, obtenemos la igualdad

$$\int_{ed}^{ef} p.y.\ ds = \int_{ed}^{ef} M \frac{d^2\ y}{ds^2}\ ds$$

cuya interpretación es sencilla. El primer miembro representa el trabajo realizado por las cargas durante la deformación y el segundo el realizado por los momentos, pues $\frac{d^2y}{ds^2}$ es la curvatura y por tanto $\frac{d^2y}{ds^2}\ ds = \frac{ds}{\rho} = d\Theta$. Una expresión general debe incluir, por un lado, la existencia de cargas concentradas. Para ello bastaría añadir al primer término la sumatoria $\Sigma\ P_i\ Y_i$. Además es posible la existencia de momentos en puntos con rótulas. Será preciso añadir al segundo miembro un sumando $\Sigma\ M_i\ \Theta_i$.

En definitiva se ha establecido una igualdad

$$\boxed{(\mathrm{I})\quad \Sigma P_i\, Y_i + \int_{ed}^{ef} p.y.\, ds = \Sigma\, M_i\, \Theta_i + \int_{ed}^{ef} MK\, ds}$$

que relaciona dos series (p, P, M) (y, Θ, K) independientes entre sí por hipótesis, pero tales

que
- el sistema de cargas (p, P, M) está en equilibrio.
- el sistema de deformaciones (y, Θ, K) es compatible.

Podemos combinar así

– Un estado real de deformación con la carga real que lo provoca.

– Un estado real de deformación con una carga diferente.

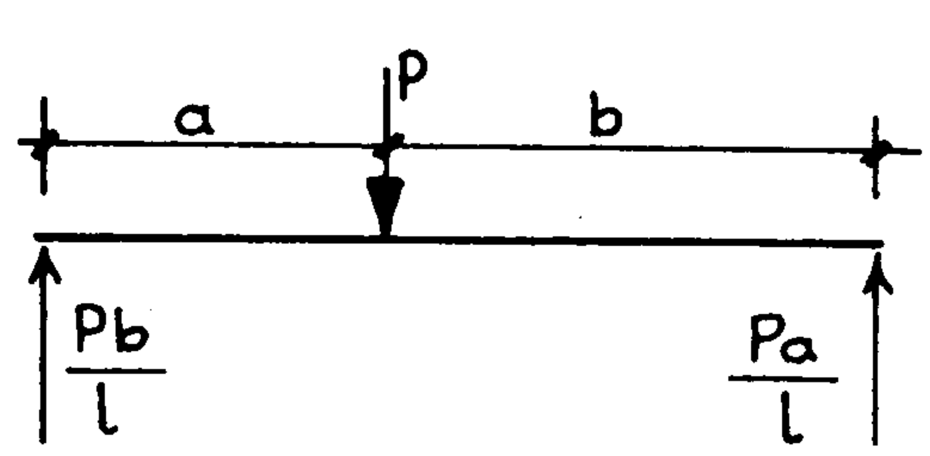
– Un estado de deformación diferente al real con la carga real.

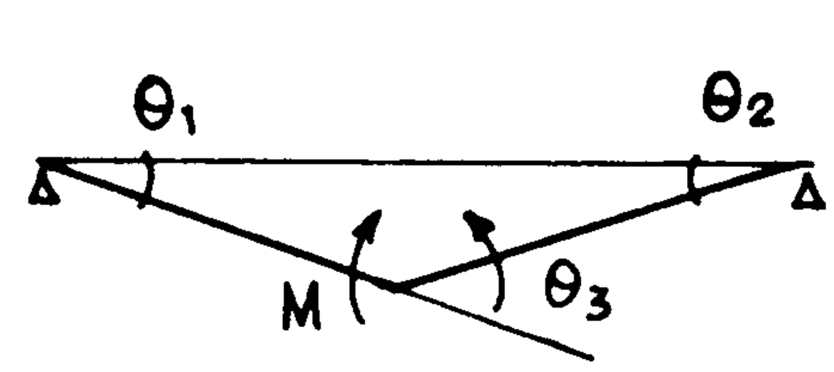
– Un estado imaginario de deformación con una carga imaginaria.

La utilización de la ecuación (I) permite así establecer condiciones de **equilibrio** o **compatibilidad** sobre la estructura en estudio.

Ejemplo I

Sea la viga de la figura. Imaginemos una deformación arbitraria tal como la indicada. La determinación de los ángulos es





$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0 \\ \theta_1\, L + \theta_3\, b = 0 \end{cases} \qquad \boxed{\theta_1 = -\frac{\theta_3\, b}{L}}$$

$$\theta_2 = -(\theta_1 + \theta_3) = -\theta_1 + \frac{L}{b}\theta_1 = \frac{L-b}{b}\theta_1$$

$$\boxed{\theta_3 = -\frac{L}{b}\theta_1\ ;\ \theta_2 = \frac{a}{b}\theta_1}$$

$$\delta = \theta_1\, a$$

En la rótula arbitraria actúa como coacción un momento M

$$P\,\theta_1\, a = M\,\theta_3 = M\,\frac{l}{b}\,\theta_1 \qquad \boxed{M = \frac{P\,a\,b}{l}}$$

Varios detalles merecen ser observados. En primer lugar la determinación de los ángulos con las ecuaciones de equilibrio

– Suma de ángulos nula

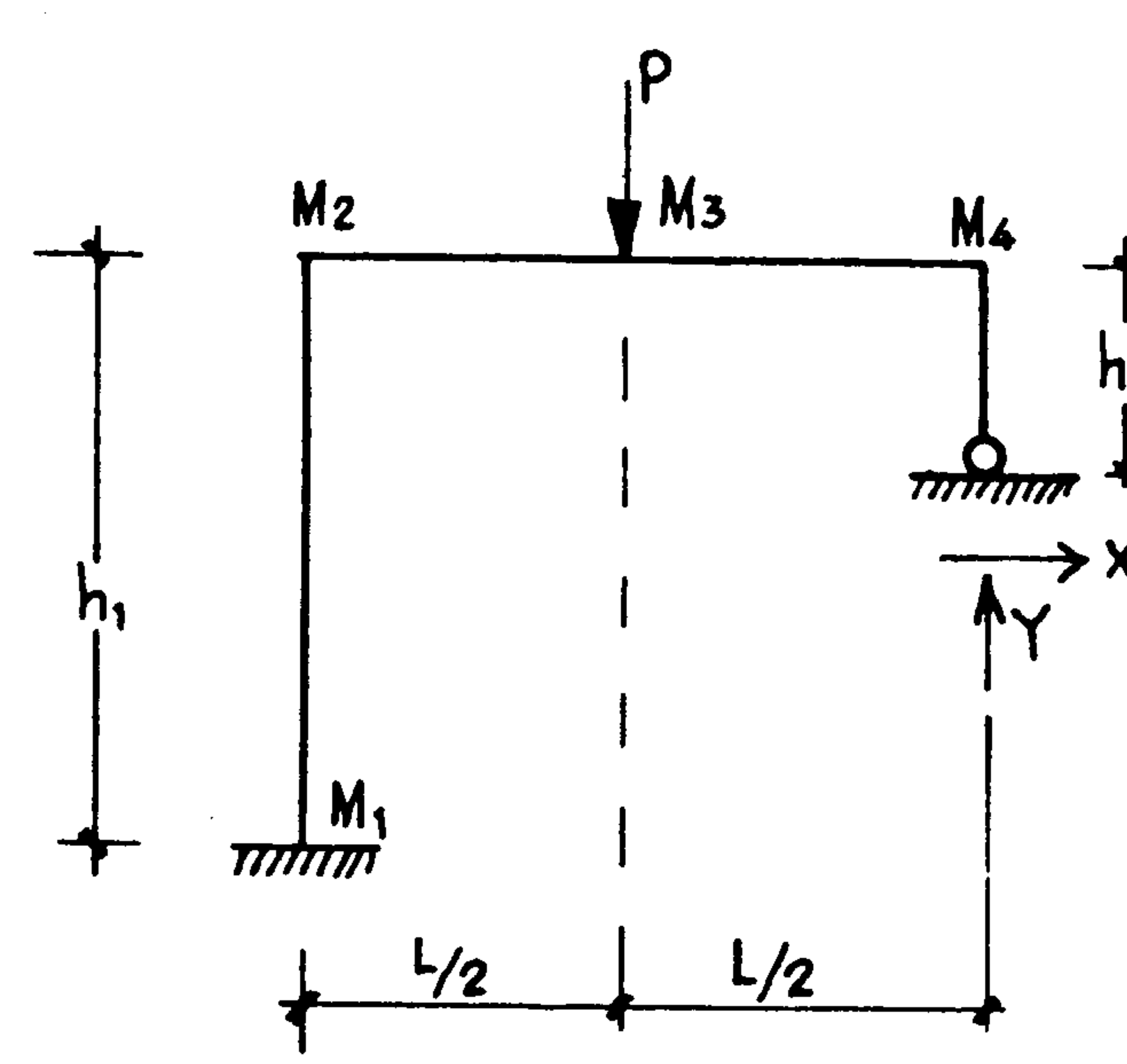
– Suma de momentos de ángulos nula en dos ejes ortogonales

asemejando los ángulos a cargas es evidente. En mecanismos complicados permite la determinación de los valores de los giros y de la figura deformada sin necesidad de recurrir al concepto de centro instantáneo de rotación. Los valores y signos son relativos al grado de libertad del mecanismo.

En segundo lugar el signo del resultado obtenido indica que el signo supuesto para M es el correcto. Finalmente el resultado, de todos conocido, manifiesta la condición de equilibrio entre la carga y la solicitación provocada.

Ejemplo II

En el pórtico de la figura la ley de momentos es del tipo indicado. En función de las reacciones (desconocidas) frontales, las leyes de la estática nos permiten escribir.



$$
\begin{aligned}
M_4 &= X\,h_2 \\
M_3 &= X\,h_2 + Y\,\frac{L}{2} \\
M_2 &= X\,h_2 + Y\,L - P\,\frac{L}{2} \\
M_1 &= -X\,(h_1 - h_2) + Y\,L - P\,\frac{L}{2}
\end{aligned}
$$

De las dos primeras $Y\,\frac{L}{2} = M_3 - M_4$ y, por tanto sustituyendo en las dos últimas

$$
\begin{aligned}
M_2 &= M_4 + 2\,(M_3 - M_4) - P\,\frac{L}{2} \\
M_1 &= +\left(\frac{h_2 - h_1}{h_2}\right) M_4 + 2\,(M_3 - M_4) - P\,\frac{L}{2}
\end{aligned}
$$

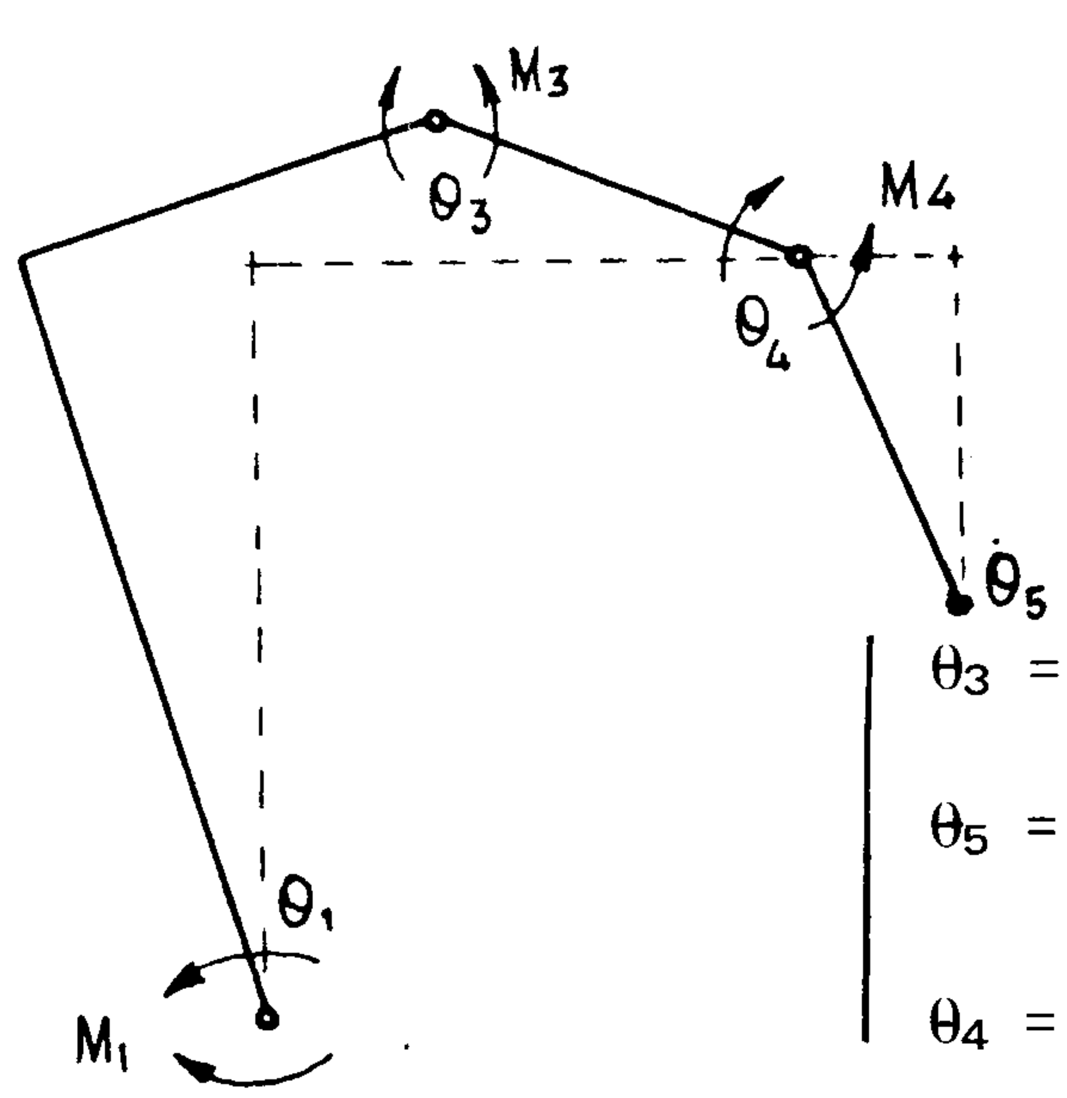
$$
\begin{aligned}
M_2 - 2\,M_3 + M_4 + P\,\frac{L}{2} &= 0 \\
M_1 - 2\,M_3 + M_4\left(2 - \frac{h_2 - h_1}{h_2}\right) + \frac{pl}{2} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\begin{aligned}
M_2 - 2\,M_3 + M_4 + P\,\frac{L}{2} &= 0 \\
M_1 - 2\,M_3 + \frac{h_2 + h_1}{h_2}\,M_4 + \frac{PL}{2} &= 0
\end{aligned}}
$$

Entre las 4 incógnitas posibles hemos podido establecer dos relaciones independientes. El número de puntos con momento a relacionar (4 en este caso) menos el número de hiperestáticas (2) es el que determina aquéllas. Este resultado es general. (Basta observar el proceso que sirve para eliminar X e).

Si la relación (I) sirva para expresar el equilibrio entre la solicitación y el esfuerzo, las ecuaciones anteriores deben ser deducibles con ella. Veámoslo.

Tomemos el mecanismo de la figura y sobre él situemos los **momentos supuestos**



$$
\begin{aligned}
\theta_3 &= -\,2\,\theta_1 \\
\theta_5 &= -\,\frac{h_1}{h_2}\,\theta_1 \\
\theta_4 &= \frac{h_1 + h_2}{h_2}\,\theta_1
\end{aligned}
$$

Trabajo de los momentos $M_1|\theta_1| - M_3|\theta_3| + M_4|\theta_4|$

Trabajo de las cargas $-\,P.\ \theta_1 . \frac{L}{2}$

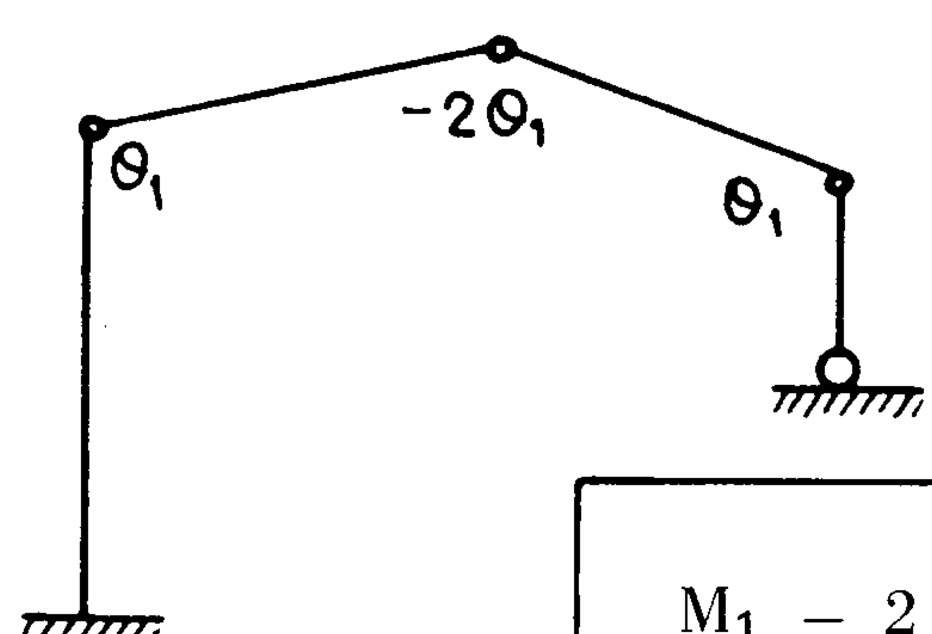
La relación (I) permite escribir

$$
\boxed{M_1 - 2\,M_3 + \frac{h_1 + h_2}{h_2}\,M_4 = -\,\frac{PL}{2}}
$$

que era lo que tratábamos de buscar.

Obsérvese que ha sido preciso introducir el signo de los giros, puesto que los de la ley de momentos eran prescritos. (Se ha buscado el positivo correspondiente a las tracciones dentro del pórtico).

La primera ecuación se obtiene suponiendo el mecanismo de rotura de dintel



$$
\boxed{M_1 - 2\,M_3 + M_4 = -\,\frac{PL}{2}}
$$

Conclusión

> Para obtener las relaciones de equilibrio estático basta establecer (I) para tantos mecanismos independientes como número de momentos en juego menos hiperestáticas.

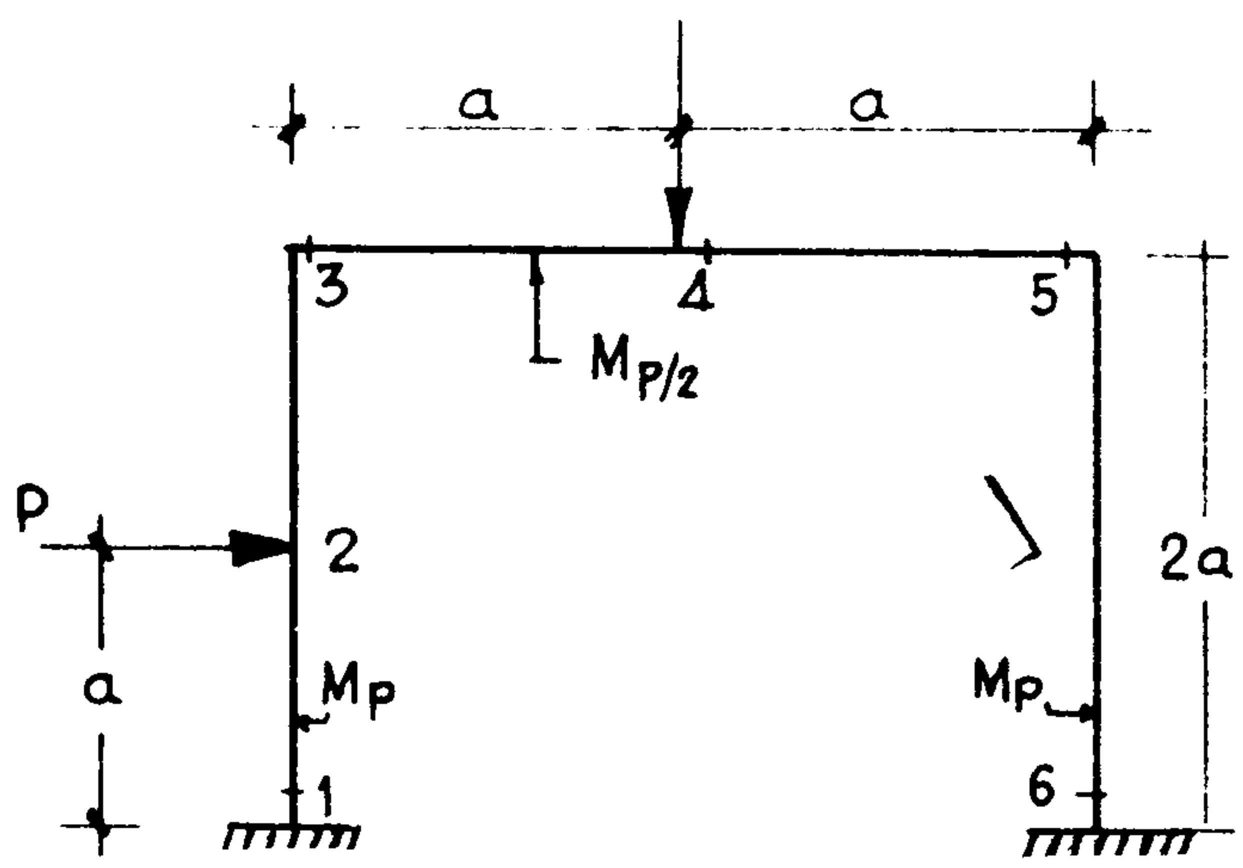
II. EL METODO DE LA COMBINACION DE MECANISMOS

Como es bien sabido el análisis plástico busca la carga mínima que hunde una estructura. De la ecuación (I) se deduce que la carga de hundimiento (recuérdese que el estado de carga es proporcional) decrece cuando disminuye el número de rótulas y cuando aumentan las deformaciones. El método de la combinación de mecanismos intenta llegar a la estructura con menos rótulas y más deformación a base de superponer aquellos que tengan, en lugares comunes, rótulas con ángulos de distinto signo.

El proceso se repite hasta que no se ve manera de seguir adelante. Una comprobación posterior (ver apartado 3) permite cerciorarse de que hemos hallado la carga final.

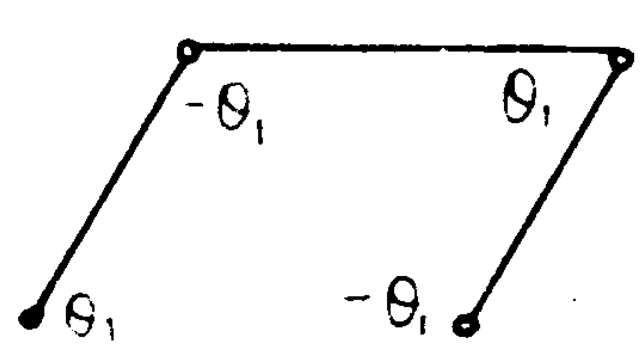
Ejemplo III

Supongamos el pórtico de la figura. El momento peligroso se puede presentar en los puntos 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Hay 3 hiperestáticas y, por tanto, número de mecanismos base: $6 - 3 = 3$.

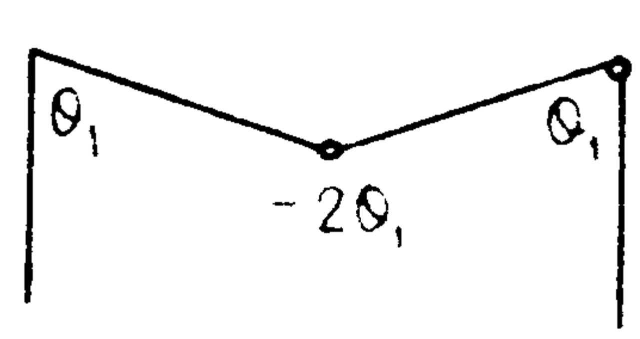


Se suelen buscar mecanismos sencillos. Por ejemplo los indicados

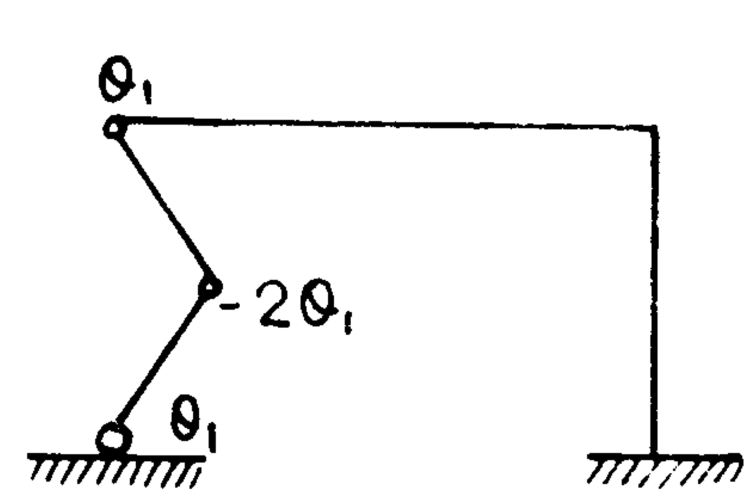
En el primero $2\ Mp + 2\ \dfrac{Mp}{2} = Pa$ $\boxed{P = \dfrac{3\ Mp}{a}}$



En el segundo $4\ \dfrac{Mp}{2} = 2\ Pa$ $\boxed{P = \dfrac{Mp}{a}}$



En el tercero $3\ Mp + \dfrac{Mp}{2} = Pa$ $\boxed{P = \dfrac{7}{2}\ \dfrac{Mp}{a}}$



En principio el más favorable es el segundo; si se superpone con el primero (que es el que le sigue en valor) anulamos un θ, en el dintel (peso $\dfrac{Mp}{2}$) queda

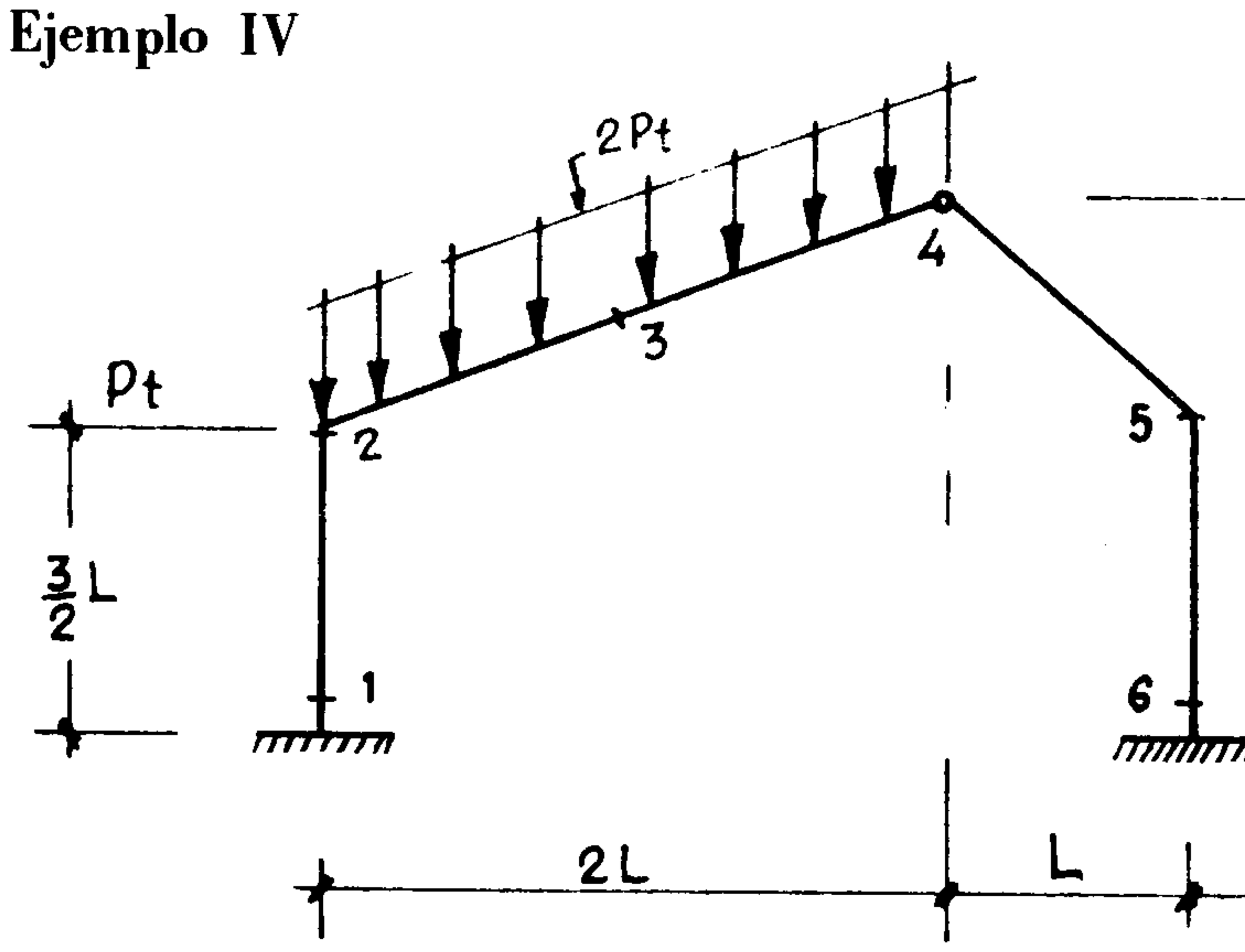
$$2\ Mp + 4\ \frac{Mp}{2} = 3\ Pa$$

$$\boxed{P = \frac{4}{3}\ \frac{Mp}{a}}$$

valor intermedio lógicamente, pues a cambio de anular una hemos hecho aparecer 2 rótulas más con fuerte peso (Mp).

En resumen, parece que el mecanismo segundo es la solución, y sólo resta comprobar los valores de M en los puntos 1, 2 y 6 (ver apartado 3).

Ejemplo IV



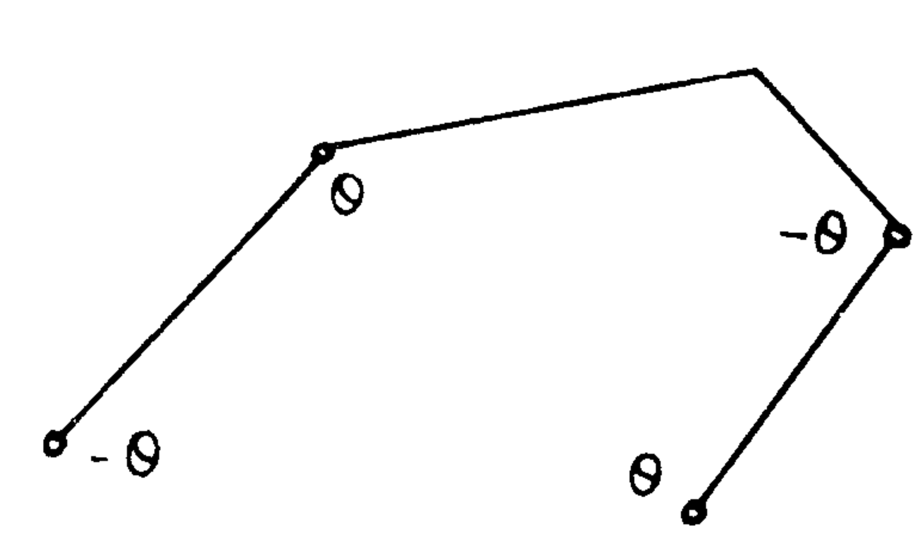
Número de mecanismos independientes -

$$6 - 3 = 3$$

Tomaremos los indicados

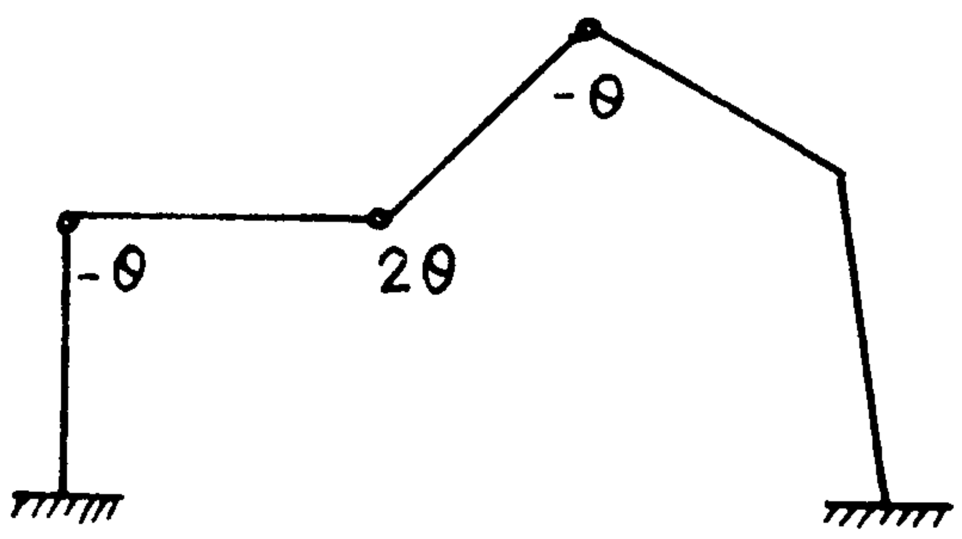
En el primero

$4\ Mp = \dfrac{3}{2}\ L\ P$ $\boxed{(PL)_1 = \dfrac{8}{3}\ Mp}$



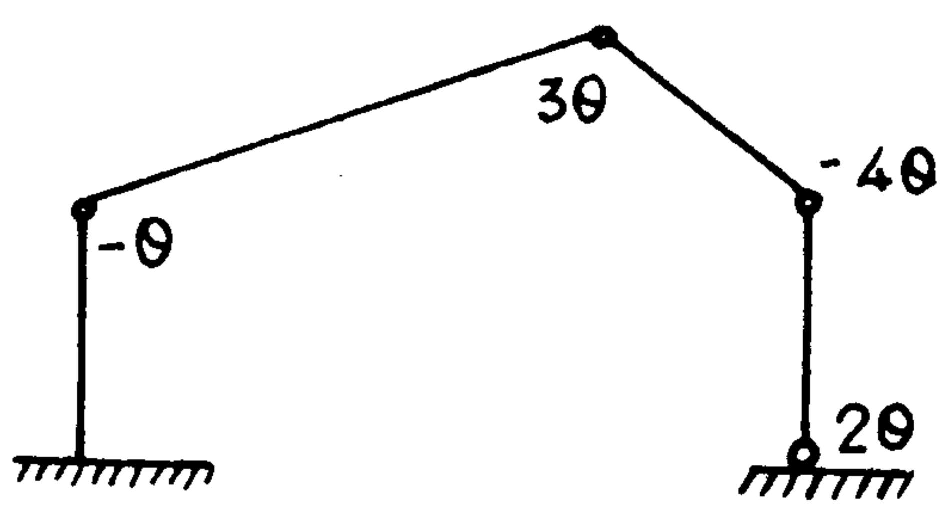
En el segundo

$$4\ Mp = \frac{1}{2}\ 2\ L.L.\frac{P}{L} \qquad \boxed{(PL)_2 = 4\ Mp > (PL)_1}$$

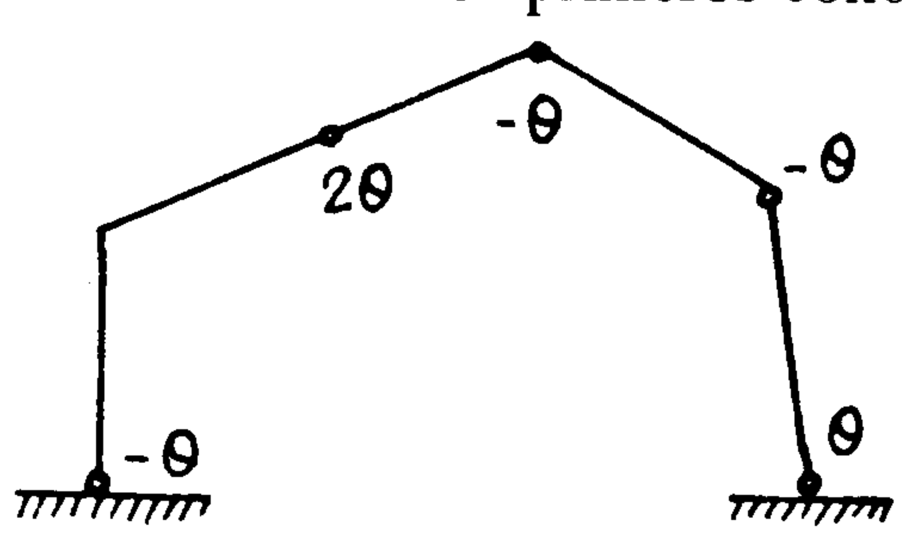


En el tercero

$$10\ Mp = \frac{1}{2}\ 2\ L.\ 2\ L.\frac{P}{L} \qquad \boxed{(PL)_3 = 5\ Mp}$$



La combinación de los dos primeros conduce a

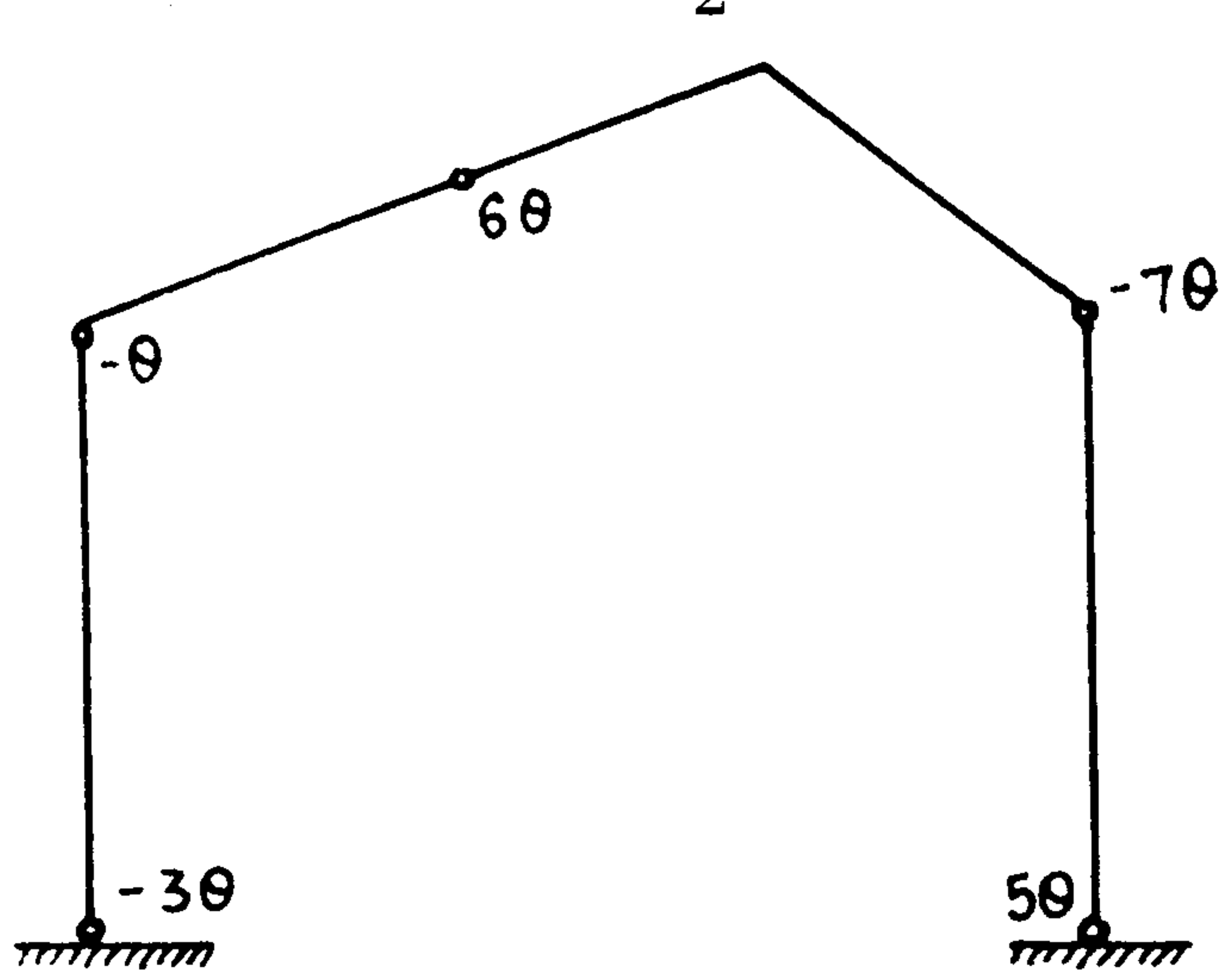


$$6\ Mp = PL + \frac{3}{2} PL \qquad \boxed{(PL)_4 = \frac{12}{5}\ Mp} < (PL)_1$$

Se observa así la posibilidad de anular la rótula en cumbrera combinando (3) con 3 x (4).

El resultado es

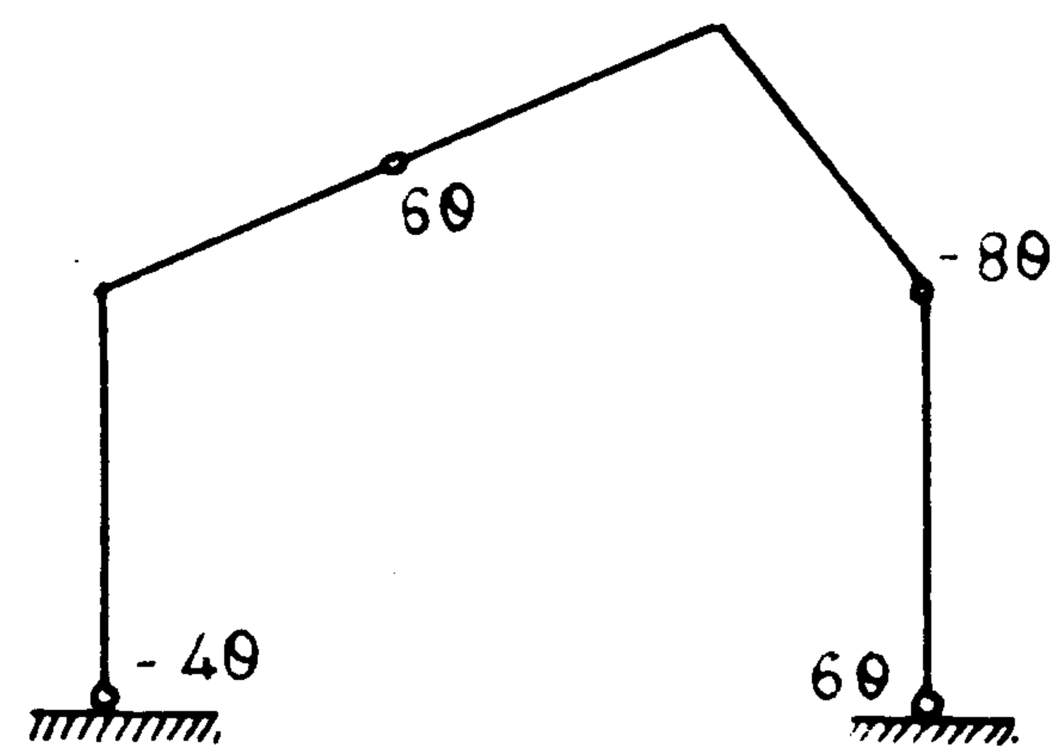
$$22\ Mp = 2\ PL + \frac{15}{2}\ PL$$



es decir

$$\boxed{(PL)_5 = \frac{44}{19}\ Mp < (PL)_4}$$

De nuevo observamos la posibilidad de combinación con el mecanismo (1) para eliminar la rótula superior del pilar izquierdo. Así el resultado no es supermecanismo



$$24\ Mp = \frac{19}{2}\ PL + \frac{3}{2} PL$$

$$\boxed{(PL)_6 = \frac{24}{11}\ Mp = 2{,}18\ Mp}$$

Mediante las técnicas que se exponen en el apartado 3 el lector puede comprobar que éste es el mecanismo solución. El ajuste de la posición de la rótula da el resultado exacto

$$\boxed{PL = 2{,}14\ Mp.}$$

Puede verse que, pese a la desafortunada elección del mecanismo (3) hemos llegado a la solución con toda comodidad.

III. COMPROBACION DE LA SOLUCION

Según es bien sabido una solución que sea a la vez

1) Compatible con los extremos.
2) En equilibrio.
3) Tal que en todos los puntos el momento flector M_x sea inferior al momento plástico del miembro $|M_x| \leqslant |M_{px}|$

es la solución buscada (Teoremas de Greenberg, Feinberg, Gvozdev, etc.)

Las condiciones 1, 2, 3 se suelen llamar, respectivamente

Condiciones	1) De compatibilidad	(Y, θ, K)
	2) De equilibrio	(M, P, p)
	3) De fluencia	($M \leqslant Mp$)

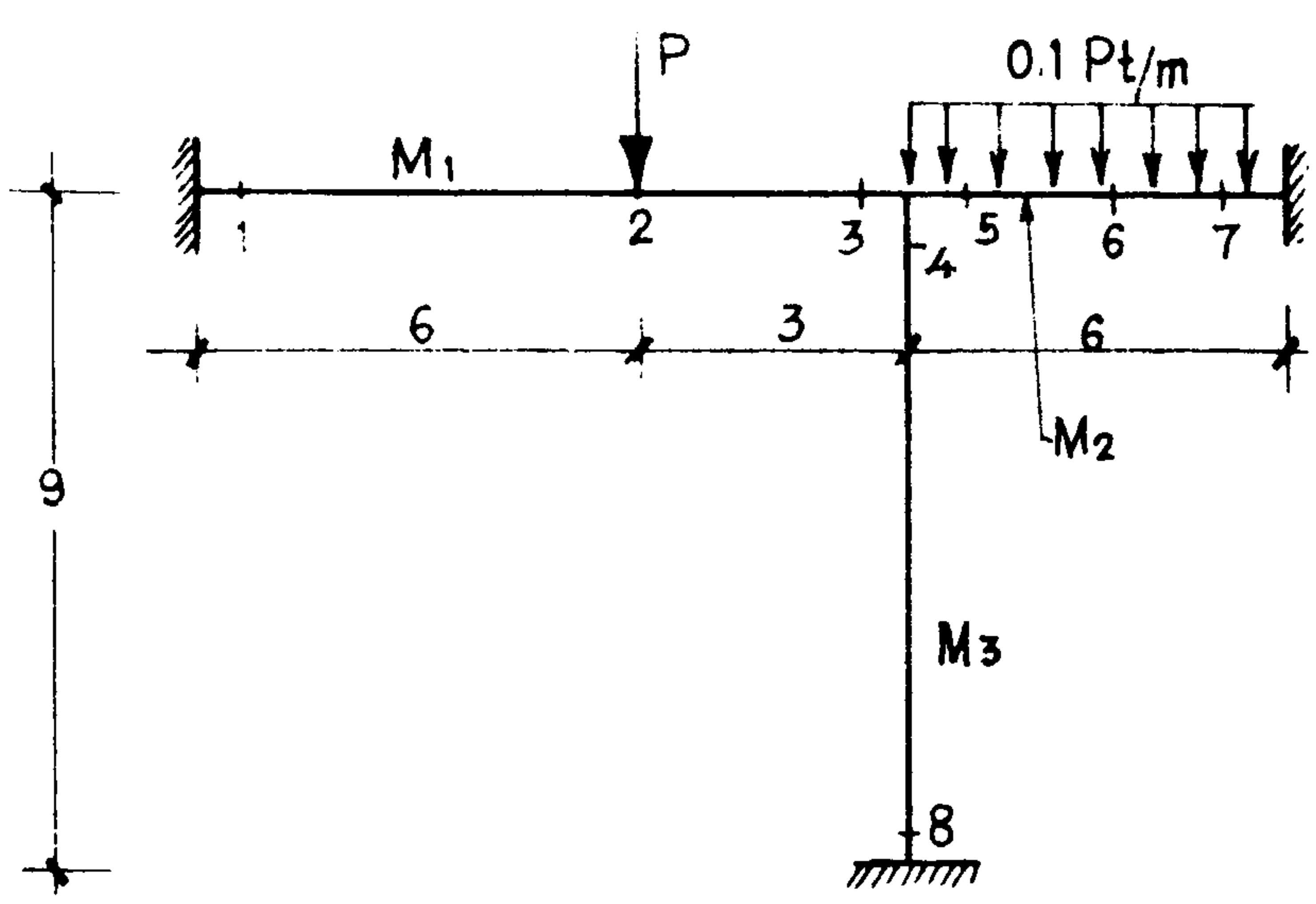
Todo mecanismo cumple las 2 primeras, de modo que basta comprobar la tercera en aquel que aparezca como más favorable.

El método de los trabajos virtuales permite un elegante tratamiento de esta etapa **aprovechando el trabajo previo.** Bastará utilizar los mecanismos desechados (deformación falsa) con las cargas obtenidas en el presunto mecanismo solución (solicitación real).

Obsérvese, sin embargo, que nunca obtendremos más relaciones que mecanismos independientes, pues éstos no son más que un modo de representar las condiciones estáticas.

Ejemplo V

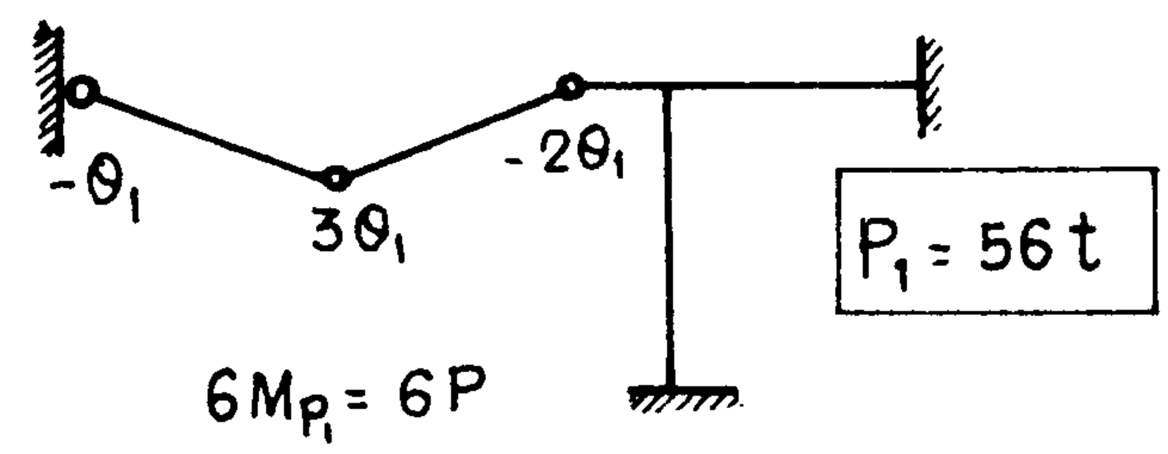
Un ejemplo interesante es el que tratamos ahora.

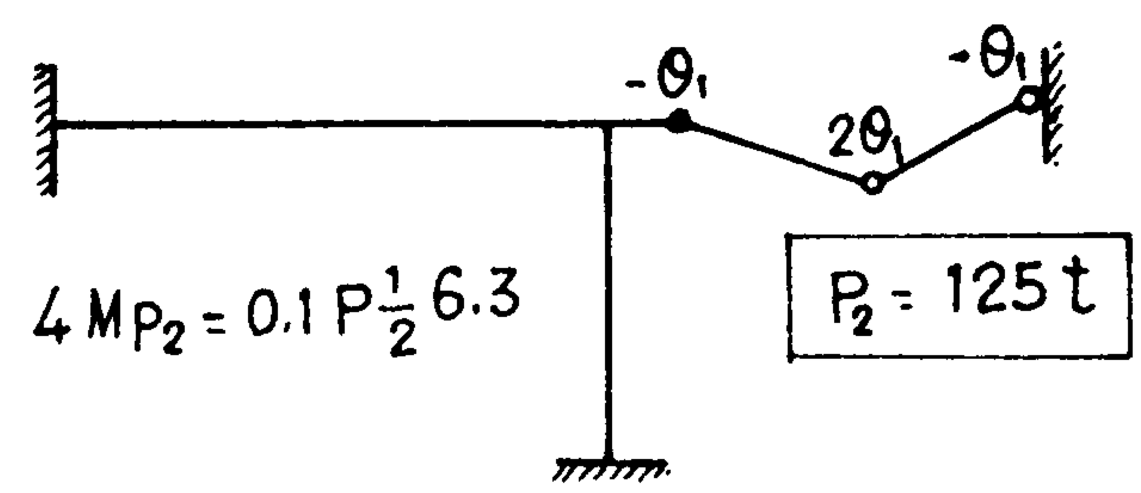


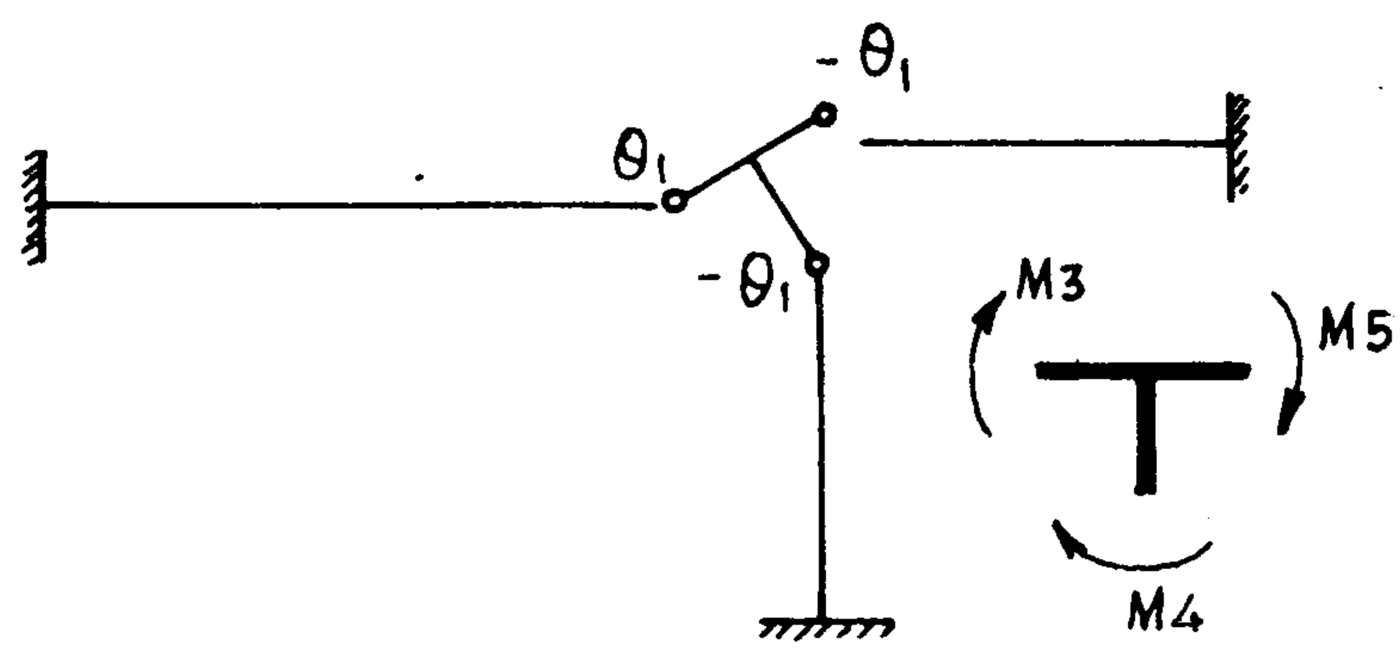
$Mp_1 = 56$ mt.	
$Mp_2 = 28$ mt.	
$Mp_3 = 14$ mt.	

Los puntos posibles de momento plástico son 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, pues al ser la estructura intraslacional $M_8 = \frac{M_4}{2}$

Los mecanismos independientes serán los indicados, pero existe la posibilidad de que se plastifiquen simultáneamente los puntos 3, 4 y 5, en cuyo caso el nudo carecería de rigidez y, por tanto, se habría producido el colapso.







Obsérvese que, de nuevo, este mecanismo representa el equilibrio del nudo pues la relación (I) sería

$$\underline{M_3 + M_4 + M_5 = \theta}$$

Si unimos este mecanismo multiplicado por 2, con el primero anulamos una rótula importante por su peso frente a las dos nuevas que aparecen.

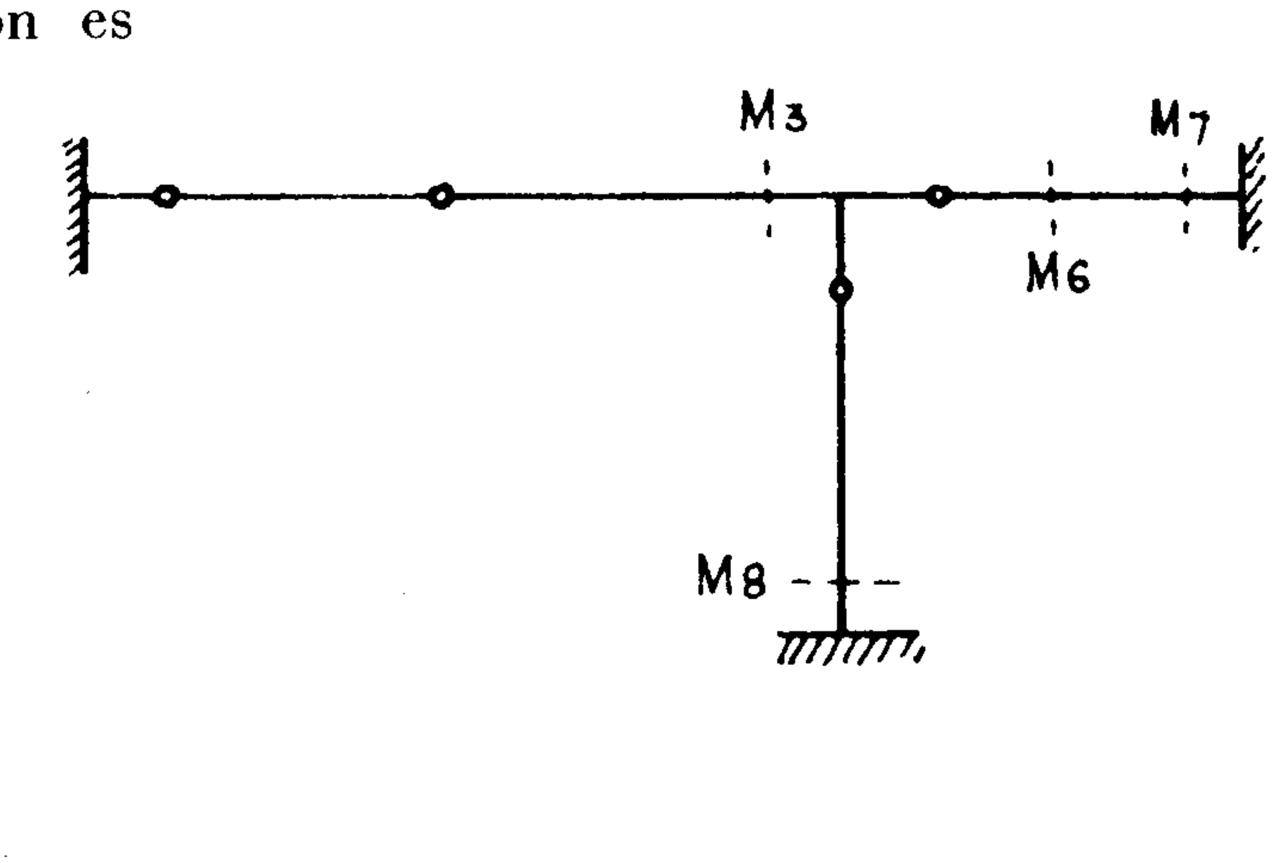
La ecuación sería

$$4\ Mp_1 + 2\ Mp_3 + 2\ Mp_2 = 6\ P$$

es decir

$$\frac{P}{3} = \frac{4 \times 56 + 2,42}{6} = \frac{308}{6} < P_1$$

La combinación del último mecanismo, cambiado de signo con el 2.°, parece desfavorable pues introduce la peligrosa rótula del dintel izquierdo. Así, pues, lo lógico es iniciar la etapa de comprobación. Nuestra presunta solución es

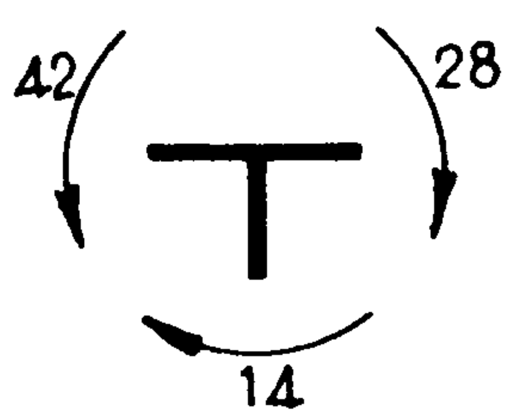


Evidentemente $M_8 = \frac{M_4}{2} = 7$ mt. y sólo se necesita comprobar M_3, M_6 y M_7. Obsérvese que no disponemos más que de dos ecuaciones independientes. La primera es inmediata con el primer mecanismo (falso) y la carga de la presunta solución

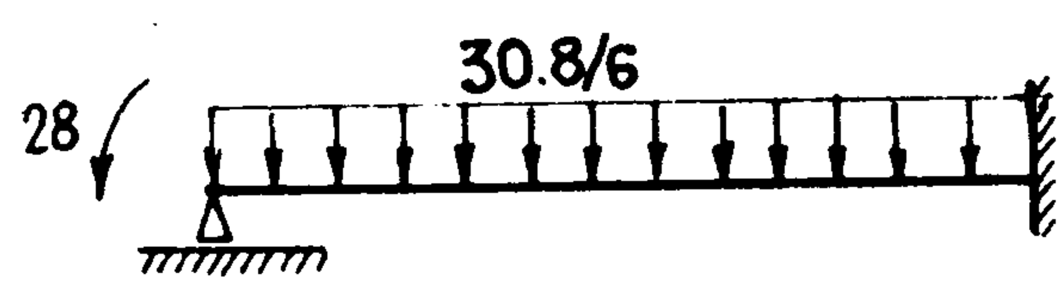
$$4 \times 56 + 2\, M_3 = 6 \times \frac{308}{6} \qquad \boxed{M_3 = 154 - 112 = 42}$$

$M_3 = 42$ mt. (con el signo del primer mecanismo) Mp_1

al mismo resultado conduciría el mecanismo de nudo $M_3 = -(M_4 + M_5) = -(28 + 14) = -42$ mt. (obsérvese el significado del signo)



El dintel derecho se resuelve poniendo el esquema de la figura, que es un problema normal de resistencia de materiales.



En el empotramiento

$$M_7 = \frac{28}{4} - \frac{30{,}8}{6}\ \frac{6^2}{8} = 7 - 23 = -16$$

$$\boxed{M_7 = -16 \text{ mt.} < Mp_2}$$

La reacción en el apoyo es

$$R = \frac{30{,}8}{6}\ \frac{6}{2} + \frac{12}{6} = 17{,}4 \text{ t}$$

y el momento en el centro

$$M_6 = -28 + 17{,}4.3 - \frac{30{,}8}{6}\ \frac{3^2}{2} = -28 + 52{,}2 - 23 =$$

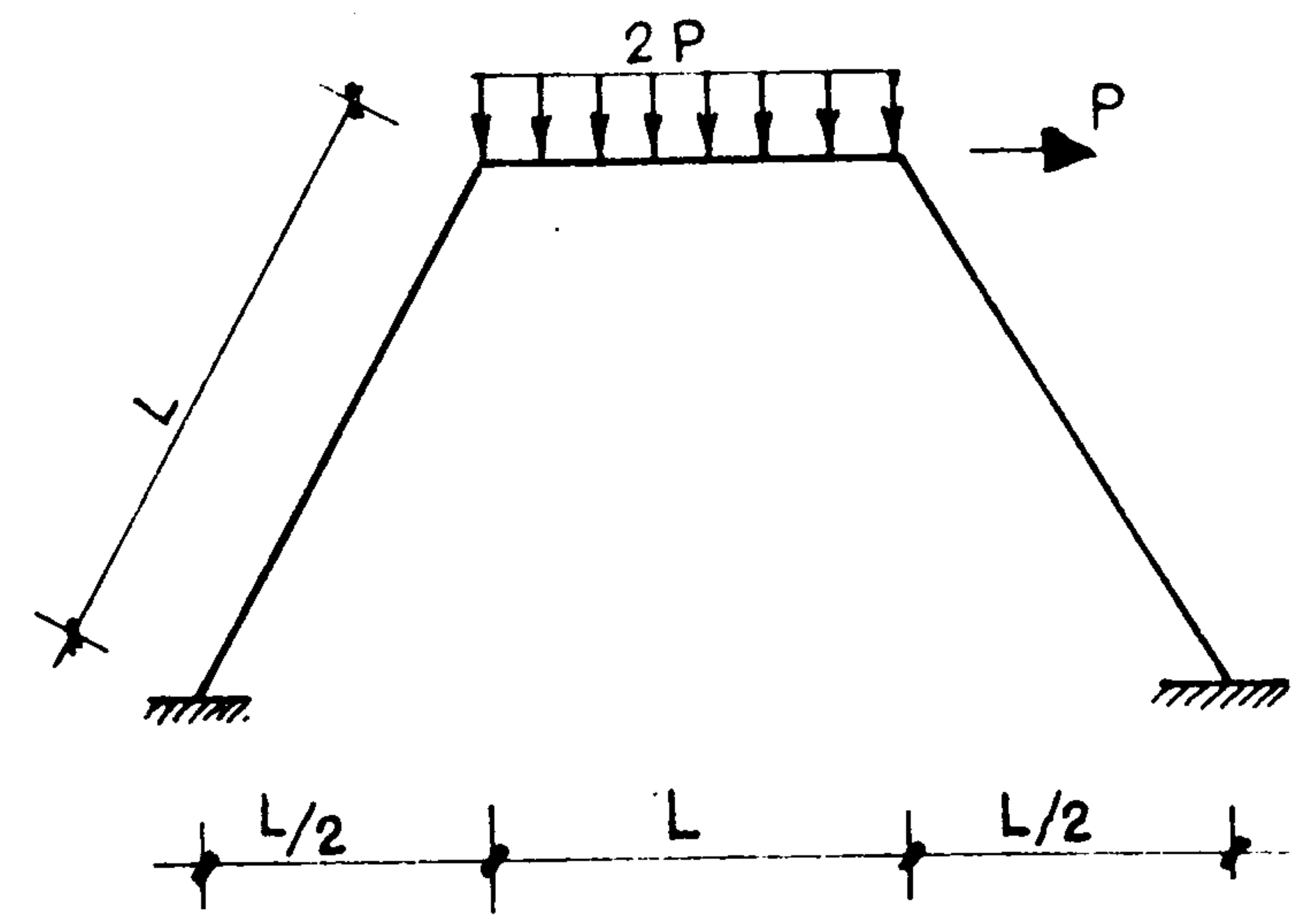
$$\boxed{M_6 = -51 + 52{,}2 = 1{,}2 \text{ mt} < Mp_2}$$

Se trata de la solución pues el momento máximo sólo superará en poco al M_6 anterior y, por tanto, se mantiene inferior a Mp_2.

Ejemplo VI

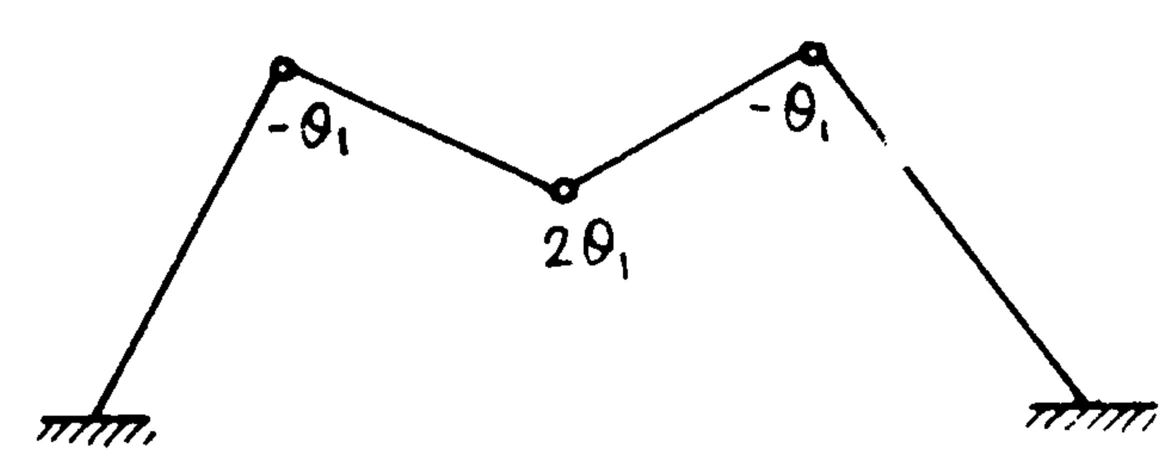
Mecanismo independientes $5 - 3 = 2$

$$h = \sqrt{L^2 - \frac{1}{4} L^2} = \frac{L}{2}\sqrt{3}$$



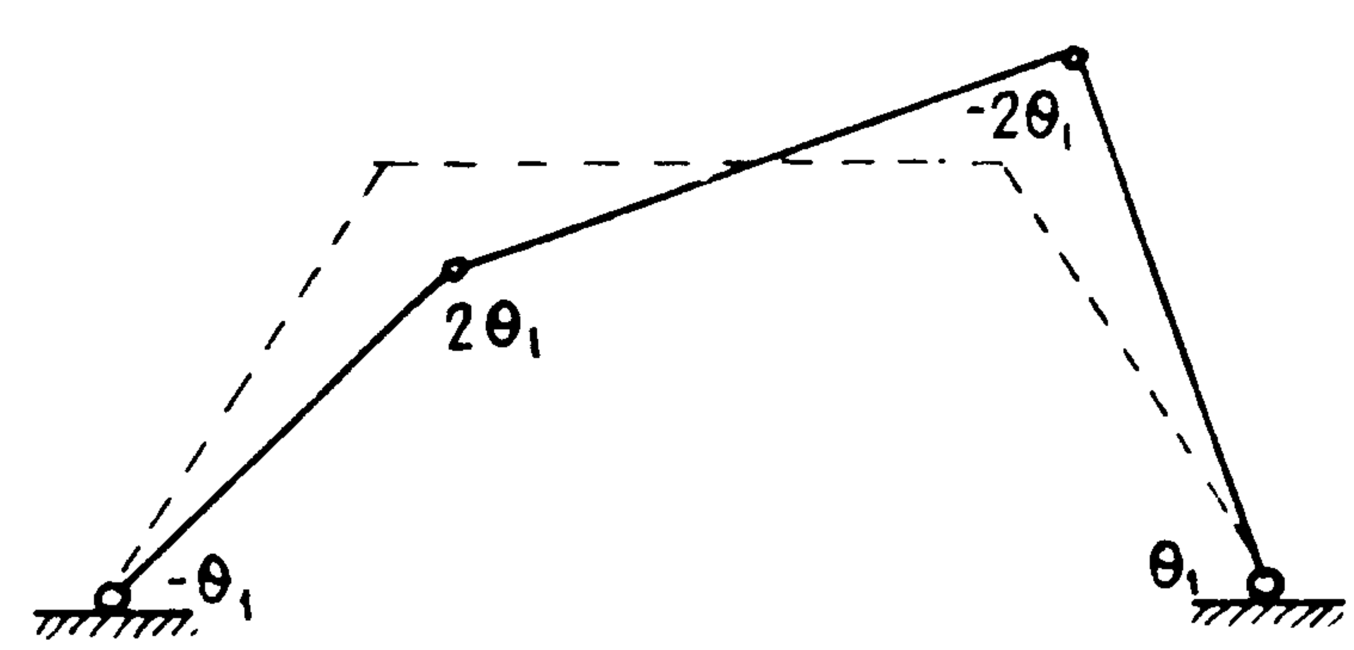
Mecanismo 1

$$4\ Mp = \frac{1}{2}\ L\ \frac{L}{2}\ \frac{2P}{L} \qquad \boxed{Mp_1 = \frac{PL}{8}}$$



Mecanismo 2

$$6\ Mp = P\ \frac{L}{2}\ \sqrt{3} \qquad \boxed{Mp_2 = \frac{\frac{PL}{2}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)} > MP_1}$$



La combinación evidente es 2 (1) + (2) que produce

$$10\ Mp = PL \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\boxed{Mp_3 = PL \frac{1}{\left(\frac{20}{1+\sqrt{3}}\right)} > Mp_3}$$

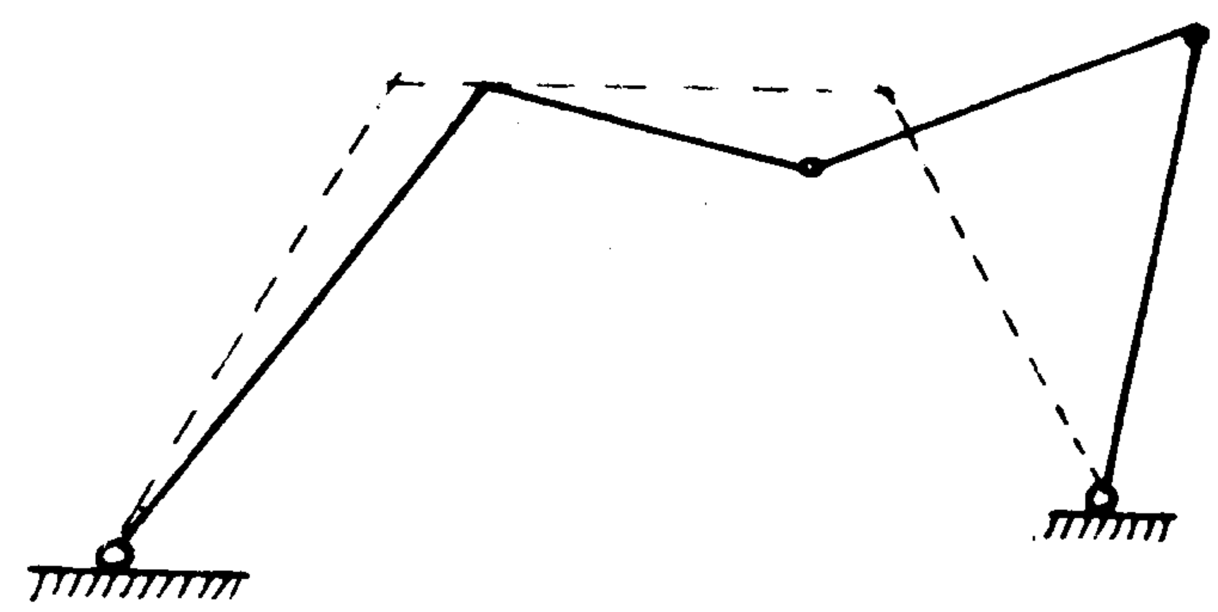
Para comprobar esta presunta solución en que $M_1 = M_3 = M_4 = M_5 = Mp$ basta buscar el M_2.

Usando el primer mecanismo

$$M_2 + 3\ Mp_3 = \frac{PL}{2}$$

$$M_2 = PL\ (0{,}5 - 0{,}557) = -\ 0{,}057\ PL < Mp_3$$

El mecanismo solución es del tipo indicado pero el valor exacto y la posición de la rótula en el dintel deberá ajustarse obligando a que el valor sea máximo, según cualquiera de los procedimientos conocidos.



—— 0 ——