

# Apuntes de Transmisión del calor

**Agustín Martín Domingo**

[agustin6martin@gmail.com](mailto:agustin6martin@gmail.com)

Departamento de Física e Instalaciones

E.T.S. Arquitectura de Madrid

Universidad Politécnica de Madrid

## Copyright

“Apuntes de Transmisión del Calor”

Copyright (C) 1995-2013 Agustín Martín Domingo <[agustin6martin@gmail.com](mailto:agustin6martin@gmail.com)>

Algunos derechos reservados.

Versión 2.3, junio de 2013.

## Licencia de distribución

Este trabajo se distribuye bajo una licencia *Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 3.0 España* (CC-BY-SA-NC).

Para ver una copia de esta licencia, visite la página de la licencia

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es>

o envíe una carta a Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, EEUU.

Estos apuntes se hacen públicos con la intención de que sean útiles. Aunque se ha tenido cuidado durante su preparación no puede descartarse que aún contengan errores. El autor no garantiza que el contenido de estos apuntes esté libre de errores.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain License. To view a copy of this license, visit

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/>

or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

These notes are provided in the hope they are useful. While precaution has been taken during its preparation, it is possible that notes still contain some errors. There is absolutely no warranty about its contents.

## Resumen de la licencia:

Está permitido...

- Copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra
- Hacer obras derivadas

Bajo las siguientes condiciones

**Reconocimiento:** Se deben reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciadore.

**No comercial:** No se puede utilizar esta obra para fines comerciales.

**Compartir bajo la misma licencia:** Si se altera o se transforma esta obra, o se genera una obra derivada, sólo se puede distribuir la obra generada bajo una licencia similar a ésta.



# Indice

<b>1. Transmisión del calor: conducción y convección.</b>	<b>1</b>
1.1. Campo de temperaturas y gradiente de temperaturas.	1
1.2. Descripción del flujo de calor.	2
1.3. Ley de Fourier para medios isotrópicos.	3
1.4. La ecuación diferencial de la conducción.	4
1.4.1. Ecuación diferencial de la conducción en un sólido isotrópico.	6
1.4.2. Ecuación diferencial de la conducción en un sólido anisótropo.	6
1.4.3. Condiciones para la resolución del problema.	7
1.4.4. Tipos de condiciones de contorno.	8
1.5. Transmisión del calor por convección.	8
1.5.1. Convección forzada.	10
1.5.2. Convección libre o natural.	12
1.5.3. Convección con cambio de fase.	13
1.6. Casos particulares de conducción y convección.	14
1.6.1. Transmisión del calor por conducción y convección a través de muros de paredes planas.	14
1.6.2. Transmisión del calor por conducción y convección a través de paredes cilíndricas.	17
<b>2. Fenómenos de transporte: procesos de difusión.</b>	<b>21</b>
2.1. Conceptos fundamentales y leyes.	21
2.2. Difusión del vapor.	22
2.2.1. La ley de transporte del vapor de agua.	23
2.2.2. Difusión del vapor a través de paredes planas	23
2.3. Difusión térmica.	24
<b>3. Transmisión del calor: radiación.</b>	<b>25</b>
3.1. Conceptos básicos de la radiación.	25
3.1.1. El espectro de la radiación electromagnética.	25
3.1.2. Definiciones previas.	27
3.1.3. Absorción, reflexión y transmisión de la radiación.	28
3.2. Leyes de la radiación.	29
3.2.1. Radiación en el interior de una cavidad.	29
3.2.2. Cuerpo negro. Ley de Planck.	30
3.2.3. Ley del desplazamiento de Wien.	32
3.2.4. Ley de Rayleigh-Jeans.	32
3.2.5. Ley de Stefan-Boltzmann.	33
3.2.6. Emisividad. Ley de Kirchoff.	33
3.2.7. Cuerpo gris.	36
3.2.8. La ley de Lambert.	36
3.3. El efecto invernadero.	38
3.4. Superficies selectivas.	38
3.5. Radiación directa entre cuerpos a distinta temperatura.	41
3.5.1. Radiación efectiva.	41
3.5.2. Planos infinitos y paralelos.	42
3.5.3. Intercambio de calor por radiación entre planos grises infinitos y paralelos	44
3.5.4. Transferencia de calor por radiación entre un cuerpo y su entorno.	45
3.5.5. El factor de forma.	47
3.5.6. Intercambio de calor por radiación en un recinto de paredes convexas de distintos materiales.	49
3.5.7. Cálculo analítico del factor de forma por integración.	53
<b>Indice alfabético</b>	<b>57</b>
<b>Referencias</b>	<b>60</b>

# Aristo Martin Domínguez

La energía calorífica se transmite desde las zonas de alta temperatura a las de baja temperatura, en un proceso que va acompañado de un cambio de entropía hasta que se alcanza, si es posible, el estado de equilibrio térmico caracterizado por una distribución uniforme de temperaturas. Denominamos calor a la transferencia de energía que tiene lugar sin un movimiento ordenado del sistema, en contraposición a la transferencia de energía que tiene lugar con un movimiento ordenado durante la realización de un trabajo mecánico.

La Termodinámica de los procesos reversibles estudia la transferencia de energía en éstos, pero siempre a lo largo de una sucesión de estados de equilibrio. Sin embargo, en un proceso de intercambio de calor entre cuerpos a distintas temperaturas, en tanto se mantenga una diferencia finita de temperaturas entre los mismos habrá un flujo irreversible de calor entre dichos cuerpos y no tendremos estados de equilibrio. Sin embargo, sí podemos tener estados en los que las variables macroscópicas del sistema no cambian con el tiempo, pero que no corresponden a estados de equilibrio sino a estados estacionarios en los que se mantienen constantes las temperaturas de los distintos cuerpos involucrados y el flujo de calor entre ellos. También podemos tener situaciones en las que el sistema está evolucionando con el tiempo y ni siquiera tenemos estados estacionarios.

La transmisión del calor tiene lugar por tres mecanismos básicos:

**Conducción:** La energía calorífica se transmite durante el contacto directo entre cuerpos (o partes de los mismos) a distintas temperaturas y tiene lugar mediante choques o acoplamientos entre las moléculas del sistema (unas en zonas más calientes, con mayor energía térmica y otras en las zonas más frías, con menor energía térmica), aunque no haya un movimiento macroscópico de las moléculas, o el material sea transparente a la radiación.

Este proceso es de gran importancia en sólidos, pero de menor importancia en líquidos y gases, donde normalmente aparece combinado con la convección y es prácticamente enmascarado por ésta.

**Convección:** La energía calorífica se transmite por el movimiento físico de moléculas “calientes” de las zonas de alta temperatura a las zonas de baja temperatura y viceversa, equilibrándose las temperaturas.

Este proceso tiene gran importancia en fluidos y también es denominado conducción superficial, ya que el flujo de calor entre la superficie de un material y un fluido está relacionado con la conducción a través de una fina capa del fluido que se encuentra junto a la superficie. Además, es este proceso de conducción superficial el que provoca, en un fluido inicialmente en reposo en contacto con una superficie a distinta temperatura, una diferencia de temperaturas en el fluido, originándose diferencias de densidad en el mismo que producirán a su vez un desplazamiento físico de materia a distintas temperaturas de unas zonas a otras, teniendo convección (en este caso natural).

La transferencia de calor por convección puede ser forzada cuando está ayudada por el movimiento de las superficies en contacto con el fluido o libre (llamada también natural) cuando se produce únicamente en virtud de una diferencia de densidades causada por una diferencia de temperaturas. También puede venir acompañada de un cambio de fase, como ocurre durante la condensación o la ebullición, con unos intercambios de calor muy intensos.

**Radiación:** La energía calorífica se transmite en forma de energía de la radiación electromagnética, emitida por todos los cuerpos por el hecho de encontrarse a una temperatura  $T$ , y que se propaga a la velocidad de la luz (porque es luz de distintas longitudes de onda) y puede ser absorbida por los cuerpos, aumentando su temperatura.

La radiación es el único medio de transmisión del calor cuando ésta tiene lugar a través del vacío, y puede ser muy importante para altas temperaturas.

Estos mecanismos básicos actuarán de forma combinada, no sólo para dar la temperatura final del recinto que estamos estudiando, sino en combinación con otros elementos como la humedad del aire, para dar el grado de comodidad o confort del ser humano en el espacio considerado. Así, mayores o menores grados de humedad darán lugar a una sensación de comodidad mayor o menor para una misma temperatura. La acción del viento y de la radiación son también elementos a considerar. Por una parte, el viento favorece los procesos de convección y evaporación. Por otra parte, para una misma temperatura en un lugar, el hecho de que éste esté soleado puede hacer más agradable la estancia en el mismo en invierno, no sólo por la luz sino por la radiación térmica que incide sobre la persona. De la misma forma, para una misma temperatura en una habitación la sensación térmica es más baja si paredes y suelo están aún fríos que si los mismos están ya calientes o incluso más calientes que el aire de la habitación.

# Aristo Martin Domínguez

# Capítulo 1

## Transmisión del calor: conducción y convección.

### 1.1. Campo de temperaturas y gradiente de temperaturas.

En la transmisión del calor por *conducción*, éste se propaga durante el contacto directo entre las partículas de un cuerpo y las de otro cuerpo que se encuentra a distinta temperatura o entre partes del mismo cuerpo que se encuentran a distintas  $T$ .

En los sólidos metálicos la transmisión del calor por conducción está relacionada con el movimiento de los electrones no ligados y con la transferencia de energía producida en los choques entre los mismos, de forma que hay relación estrecha entre las conductividades térmica y eléctrica. En sólidos aislantes la transferencia de energía por conducción está relacionada con las diferentes características de las vibraciones de la red cristalina (fonones) entre zonas a distinta temperatura. En ningún caso se produce un movimiento físico de las partículas. En fluidos la conducción se produce por choques entre moléculas a distinta temperatura. En la teoría analítica de la conducción del calor, no se tiene en cuenta la estructura molecular de la sustancia, ni como es el mecanismo microscópico de transmisión, sino que se considera la materia como un medio continuo.

Sólo puede haber transmisión del calor por conducción cuando hay cuerpos a distintas temperaturas (al igual que ocurre en otras formas de transmisión del calor). En general, hay variaciones de temperatura con el tiempo y la distribución de temperaturas es no uniforme, por lo que en realidad lo que se tiene es una distribución espacio-temporal de la temperatura, lo que se conoce como un *campo de temperaturas*:

$$T = f(x, y, z, t)$$

Para un campo estacionario, no hay variación temporal de la temperatura, y se tiene que:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow T = f(x, y, z)$$

Si además de estacionario el proceso es unidimensional, se tiene que:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \text{ y por tanto, } T = T(x)$$

Se denomina *superficie isoterma* al lugar geométrico de los puntos del cuerpo que están a la misma temperatura. Como un mismo punto no puede estar a la vez a dos temperaturas distintas, *las superficies isotermas no se cruzan*.

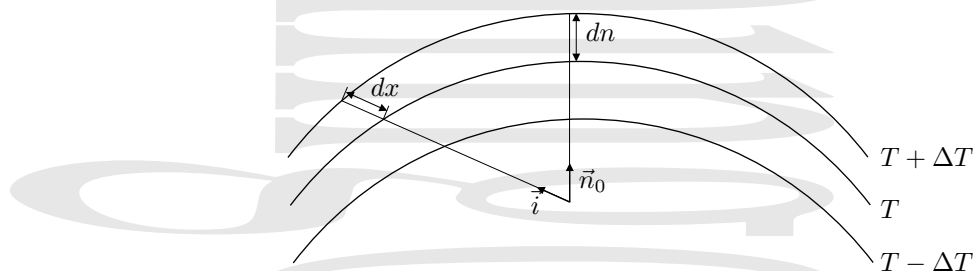


Figura 1-1: Isotermas en un campo de temperaturas.

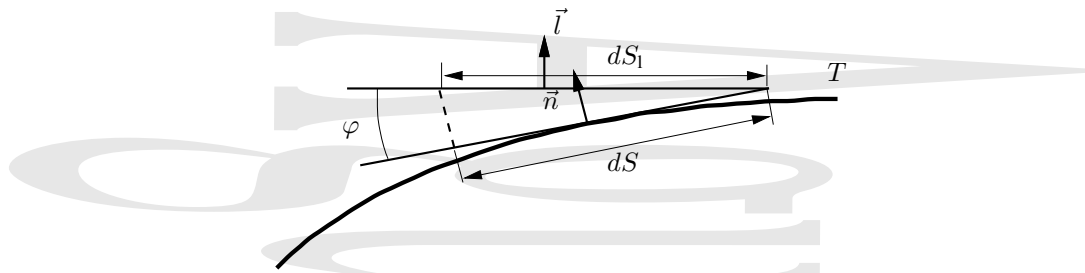


Figura 1-2: Relación entre las superficies  $dS$  y  $dS_1$ .

La mayor variación relativa de temperatura tiene lugar en la dirección normal a las superficies isothermas (figura 1-1), a la que apunta el gradiente:

$$\vec{\nabla}T = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k} = \frac{\partial T}{\partial n} \cdot \vec{n}_0 \quad (1-1)$$

donde  $\vec{n}_0$  es el vector unitario en la dirección normal a la isoterma y  $\partial T/\partial n$  es la derivada parcial de la temperatura en la dirección normal a las isothermas.

## 1.2. Descripción del flujo de calor.

A la hora de describir el flujo de energía calorífica utilizaremos distintas magnitudes.

Denominamos *densidad de flujo térmico*  $\vec{q}$  en un punto del flujo a la cantidad de calor que se transmite por unidad de tiempo y superficie a través de una pequeña superficie perpendicular al flujo en ese punto. La densidad de flujo es un vector dirigido en la dirección y sentido del flujo y tiene dimensiones de flujo de energía por unidad de tiempo ( $\text{W}/\text{m}^2$  en el sistema internacional) al igual que la intensidad.

Denominamos *flujo de calor*  $\Phi$  al calor transmitido por unidad de tiempo a través de una superficie  $S$ , siendo en función de la densidad de flujo

$$\Phi = \int_S \vec{q} d\vec{S} \quad [\Phi] = \text{W en S.I.} \quad (1-2)$$

con dimensiones de energía por unidad de tiempo al igual que la potencia.

Por tanto, el calor total que atraviesa una superficie dada en un intervalo de tiempo  $t$  vendrá dado por

$$Q_t = \int_0^t \Phi dt = \int_0^t dt \int_S \vec{q} d\vec{S} \quad [Q] = \text{julios en S.I.} \quad (1-3)$$

La cantidad de calor que fluye por unidad de tiempo y superficie a través de una superficie elemental que forma un ángulo  $\varphi$  con la superficie perpendicular al flujo es:

$$q_t = q \cos \varphi = \frac{\delta^2 Q_t}{dt dS} \cos \varphi = \frac{\delta^2 Q_t}{dt} \underbrace{\frac{\cos \varphi}{dS}}_{dS = dS_1 \cos \varphi} = \frac{\delta^2 Q_t}{dt dS_1} \quad (1-4)$$

donde  $dS = \cos \varphi dS_1$  es la proyección de la superficie  $dS_1$  sobre el plano perpendicular al flujo (en medios isótropos tangente a la isoterma), como se ve en la figura 1-2. Así, a través de  $dS_1$  fluye una cantidad de calor:

$$dQ_t = q_1 dS_1 dt = q \cos \varphi \frac{dS}{\cos \varphi} dt = q dS dt \quad (1-5)$$

igual que a través de la superficie  $dS$  que es la proyección sobre la superficie perpendicular al flujo.



**Tabla 1-1:** Conductividades térmicas para diversos materiales.

Material	$\lambda$ (cal/cm·s·°C)	$\lambda$ (W/m·°C)
Acero al carbono	0,11	46,05
Acero cromo-níquel (18 % cromo, 8 % níquel)	0,039	16,3
Agua	0,00143	0,598
Aire a 0°C	0,000055	0,023
Alúmina (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )	0,0016 – 0,0084	0,67 – 3,5
Aluminio	0,480	200,9
Amianto (suelto)	0,0004	0,167
Hormigón 20 – 1000°C	0,0027	1,13
Cobre	0,96	401
Corcho	0,00012	0,05
Hierro (sin tratar)	0,175	73
Ladrillo refractario 0 – 800°C	0,004	1,67
Lana de vidrio	$9,01 \cdot 10^{-5}$	0,038
Madera de pino		
Según fibra	$8,2 \cdot 10^{-4}$	0,34
Perp. a fibra	$2,6 \cdot 10^{-4}$	0,11
Vidrio (ventana)	$1,86 \cdot 10^{-3}$	0,78

### 1.3. Ley de Fourier para medios isotrópicos.

Para que se produzca transmisión del calor y en particular transmisión del calor por conducción la distribución de temperaturas debe ser no uniforme, es necesario que haya un gradiente de temperaturas entre distintos puntos del cuerpo. Si se considera un sistema de ejes coordenados en el cual uno de ellos está dirigido en la dirección perpendicular a la superficie isoterma en un punto y los otros en la dirección paralela (tangentes a la isoterma en ese punto) sólo habrá diferencia de temperaturas en la dirección perpendicular a la isoterma, pero no en las direcciones tangentes a la misma. Por tanto, el flujo de calor debe tener lugar en la dirección perpendicular a las isotermas, sin componente en las direcciones tangentes a la misma, ya que al ser el medio isotrópico todas las direcciones son equivalentes.

La ley de Fourier para medios isotrópicos establece que la cantidad de calor  $\delta Q_t$  que pasa a través de un elemento de superficie  $d\vec{S}$  de la isoterma en el intervalo de tiempo  $dt$  es proporcional al gradiente de temperaturas,  $\frac{\partial T}{\partial n} \vec{n}_0$  en la forma:

$$\delta^2 Q_t = -\vec{n}_0 \lambda \frac{\partial T}{\partial n} d\vec{S} dt = -\lambda \vec{\nabla} T d\vec{S} dt \quad [\delta Q] = \text{julios (S.I.)} \quad (1-6)$$

aunque es preferible representarlo en función de la densidad de flujo térmico,

$$\vec{q} = \frac{d^2 Q_t}{d\vec{S} dt} = -\vec{n}_0 \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{d\Phi}{dS} \vec{n}_0 = -\lambda \vec{\nabla} T \quad [q] = \text{W/m}^2 \text{ en S.I.} \quad (1-7)$$

que expresa la ley básica de la conducción del calor en medios isotrópicos, la densidad de flujo térmico  $q$  (energía transmitida por unidad de superficie y tiempo) es proporcional al gradiente de temperaturas.

El factor de proporcionalidad  $\lambda$  es una propiedad física de la materia que describe la capacidad que tiene la sustancia para conducir el calor y a la que se denomina *conductividad térmica*. En la tabla 1-1 se dan algunos ejemplos de conductividades térmicas para distintos materiales.

$$[\lambda] = \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{°C}} \quad (\text{S.I.}) \quad \text{o} \quad \frac{\text{cal}}{\text{seg} \cdot \text{m} \cdot \text{°C}}$$

Cuanto mayor es la conductividad térmica  $\lambda$  mayor es el flujo de calor para un mismo gradiente de temperaturas y viceversa.

Para un sólido isotrópico, el flujo térmico y el calor total que fluye en un cierto intervalo de tiempo se representarían como

$$\Phi = \int_S \vec{q} d\vec{S} = - \int_S \lambda \frac{\partial T}{\partial n} d\vec{S} \vec{n}_0 \quad [\Phi] = \text{W en S.I.}$$

y

$$Q_t = - \int_0^t \int_S \lambda \frac{\partial T}{\partial n} d\vec{S} \vec{n}_0 dt = \int_0^t dt \int_S \vec{q} d\vec{S} \quad [Q] = \text{julios en S.I.} \quad (1-8)$$

A través de una superficie elemental  $dS_1$  que forma un ángulo  $\varphi$  con la superficie perpendicular al flujo (aquí tangente a la isoterma) fluye en el tiempo  $t$  un calor:

$$Q_t = - \int_0^t \int_{S_1} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \cos \varphi dS_1 dt = - \int_0^t \int_S \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dS dt \quad (1-9)$$

#### 1.4. La ecuación diferencial de la conducción.

Para obtener las ecuaciones físicas que rigen la conducción, estudiaremos el fenómeno en un intervalo de tiempo pequeño y en un elemento de volumen infinitesimal del medio. Nos olvidaremos de la constitución íntima de la materia, considerando a ésta como un medio continuo y nos restringiremos a los casos en los que se cumple:

1. El medio es homogéneo e isótropo. Por lo tanto, sus propiedades físicas son las mismas en todos los puntos del medio, y no dependen de la dirección en que se midan.
2. Los parámetros físicos son constantes en el medio.
3. Las variaciones de volumen producidas por los cambios de temperatura son pequeñas comparadas con el volumen del cuerpo. Por lo tanto, el trabajo mecánico realizado es prácticamente nulo.
4. Las fuentes internas de calor, que dan una energía por unidad de tiempo y de volumen  $q_v = f(x, y, z, t)$ , están distribuidas de forma uniforme en el cuerpo.

La deducción que se presenta a continuación está basada en la ecuación del balance de la energía que surge directamente del primer principio de la Termodinámica:

$$\delta Q_1 + \delta Q_2 = dU \quad (1-10)$$

En esta expresión,  $\delta Q_1$  representa el calor neto intercambiado con el exterior por parte del elemento de volumen considerado (considerándose positivo si es absorbido por el elemento),  $\delta Q_2$  el calor aportado por fuentes internas de calor, y  $dU$  la variación de energía interna de dicho elemento de volumen. Como no hay trabajo mecánico,  $\delta W = 0$ .

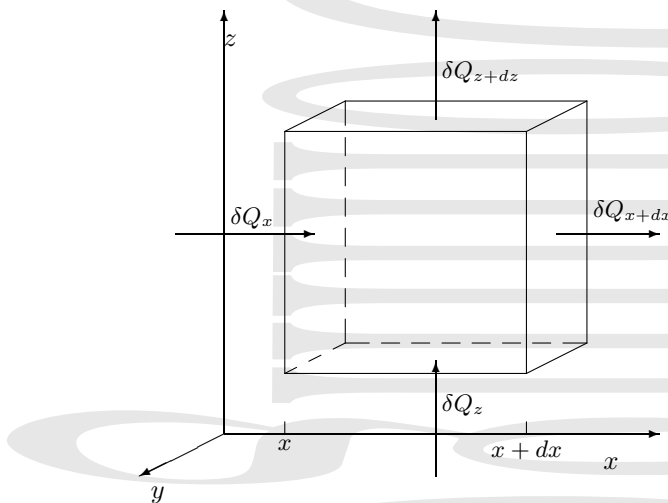


Figura 1-3: Elemento de volumen fijo en el espacio utilizado para la obtención de la ecuación diferencial de la conducción.

El calor que entra por la cara  $x$  en la dirección  $Ox$  viene dado por:

$$\delta Q_x = q_x dydzdt$$

mientras que el calor que sale por la cara  $x + dx$  en la dirección  $Ox$  es:

$$\delta Q_{x+dx} = q_{x+dx} dydzdt$$

Si desarrollamos  $q_{x+dx}$  en serie de Taylor hasta primer orden, se tiene:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$$

quedando el calor neto que entra o sale en la dirección  $x$  en la forma:

$$\delta Q_{x_1} = (q_x - q_{x+dx}) dx dy dz dt = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz dt$$

donde  $q_x$  es positivo al ser calor absorbido con el convenio escogido en la figura, es decir, flujo positivo en el sentido de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , y  $q_{x+dx}$  negativo al ser calor cedido por la misma razón. Análogamente se procede con los calores netos en las direcciones  $y$  y  $z$ :

$$\delta Q_{y_1} = (q_y - q_{y+dy}) dx dy dz dt = -\frac{\partial q_y}{\partial y} dx dy dz dt$$

$$\delta Q_{z_1} = (q_z - q_{z+dz}) dx dy dz dt = -\frac{\partial q_z}{\partial z} dx dy dz dt$$

Esto da, para el balance neto total de calor a través de todas las caras del elemento de volumen, la ecuación:

$$\delta Q_1 = -\left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right] dx dy dz dt \quad (1-11)$$

que da la cantidad neta de calor absorbida en el elemento de volumen considerado. En realidad, podríamos haberla derivado directamente del *Teorema de Gauss* con un convenio de signos contrario para el flujo de  $\vec{q}$ ,

$$-\frac{\delta Q_1}{dt} = \oint \vec{q} d\vec{S} = \int_{dV} \vec{\nabla} \cdot \vec{q} dV \quad (1-12)$$

Consideremos ahora la parte debida a las fuentes internas de calor en el elemento de volumen considerado. Si denominamos  $q_v$  a la energía calorífica suministrada por unidad de volumen y tiempo por las fuentes internas de calor que se encuentran en dicho elemento de volumen  $dV$  (las unidades de  $q_v$  en el S.I. serán  $W/m^3$ ), tendremos:

$$\delta Q_2 = q_v dV dt = q_v dx dy dz dt \quad (1-13)$$

Consideremos finalmente la variación de la energía interna para un proceso a volumen constante en el elemento de volumen considerado, que se encuentra fijo en el espacio. En un intervalo de tiempo  $dt$ , esta variación tiene la forma:

$$dU = dC_v dT = dC_v \frac{\partial T}{\partial t} dt = \rho dV c_v \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

donde  $dC_v = \rho dV c_v$  es la capacidad calorífica a volumen constante del elemento de volumen. Nótese que implícitamente se ha desarrollado  $dT$  en serie en función de sus variables, pero al estar el elemento de volumen fijo en el espacio sólo aparece la dependencia temporal. Así, al hacer las sustituciones correspondientes en la ecuación (1-10) queda

$$-\left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right] dx dy dz dt + q_v dV dt = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} dV dt$$

que se puede escribir como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\rho c_v} \cdot \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + \frac{q_v}{\rho c_v}$$

o, de forma más compacta, en la forma:

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + q_v \quad (1-14)$$

Esta expresión es la ecuación diferencial de la energía para procesos de intercambio de calor por conducción a volumen constante.

**Tabla 1-2:** Difusividades térmicas para diversos materiales.

Material	$\alpha$ (cm <sup>2</sup> /s)
Aluminio	0,826
Acero al carbono	0,12
Alúmina (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )	0,0023 – 0,00116
Aire a 0°C	0,179
Amianto (suelto)	0,0035
Ladrillo refractario 0 – 800°C	0,0074
Hormigón 20 – 1000°C	0,0056
Corcho	0,0017
Agua	0,00143
Madera de pino	
Según fibra	0,0036
Perp. a fibra	0,0012

#### 1.4.1. Ecuación diferencial de la conducción en un sólido isótropo.

En un sólido isótropo, el transporte de energía por conducción obedece a la *ley de Fourier* para medios isótropos, que tiene la forma  $\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla}T$  o  $q_i = -\lambda(\vec{\nabla}T)_i$ , y en los sólidos éste es el mecanismo predominante. En éstos además se cumple de forma aproximada que  $c_p \simeq c_v \simeq c$ , por lo que la ecuación diferencial de la conducción para sólidos isótropos queda:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\rho c} \vec{\nabla}(-\lambda \vec{\nabla}T) + \frac{q_v}{\rho c}$$

o, escrito de otra manera, se tiene la ecuación diferencial de la conducción en la forma en que ésta se escribe habitualmente:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \nabla^2 T + \frac{q_v}{\rho c} = \alpha \nabla^2 T + \frac{q_v}{\rho c} \quad (1-15)$$

en la que  $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c}$  es la *difusividad térmica* [m<sup>2</sup>/s en S.I.] y donde se ha considerado únicamente el caso en el que  $\lambda$  es independiente de la posición,  $\lambda \neq \lambda(x, y, z)$ . La difusividad térmica da una medida de la inversa de la inercia térmica del sistema, mientras que la conductividad térmica  $\lambda$  es una medida de la facilidad con que el sistema conduce calor. En efecto, para una misma distribución de temperaturas  $T(x, y, z)$ , la temperatura variará tanto más rápido cuanto mayor es la difusividad térmica  $\alpha$  mientras que el flujo en esas mismas condiciones es tanto mayor cuanto mayor es la conductividad térmica  $\lambda$ . La difusividad térmica  $\alpha$  es tanto mayor cuanto mayor es la conductividad térmica  $\lambda$  del material y tanto menor cuanto mayores son la densidad o el calor específico del material. Algunos ejemplos de valores de la difusividad térmica se dan en la tabla 1-2 para distintos materiales.

Si no hay fuentes internas de calor ( $q_v = 0$ ) queda la *ecuación de Fourier*:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \quad (1-16)$$

Si hay fuentes internas de calor, pero el sistema está en régimen estacionario, queda la *ecuación de Poisson*:

$$\alpha \nabla^2 T + \frac{q_v}{\rho c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 T + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \quad (1-17)$$

Finalmente, si tenemos conducción en régimen estacionario, y además no hay fuentes internas de calor queda la *ecuación de Laplace*:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \nabla^2 T = 0 \quad (1-18)$$

#### 1.4.2. Ecuación diferencial de la conducción en un sólido anisótropo.

Cuando el sólido es anisótropo, la transmisión del calor por conducción depende de la dirección del flujo térmico. En este caso, la ley de Fourier (1-7) toma la forma

$$\vec{q} = -[\lambda_{ij}] \vec{\nabla}T \quad \text{o} \quad \vec{q} = -\hat{\lambda} \vec{\nabla}T \quad (1-19)$$

que en forma matricial se escribiría

$$\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1-20)$$

donde en vez de una conductividad térmica escalar  $\lambda$  aparece el *tensor conductividad térmica*  $\hat{\lambda}$  (o  $[\lambda_{ij}]$ ). Este tensor es un tensor simétrico de segundo orden, y por tanto existe un sistema de ejes (ejes principales) en los cuales es diagonal, denominándose en ese caso a los valores de la diagonal valores propios del tensor conductividad térmica o conductividades térmicas principales. En estos ejes principales, la ley de Fourier se expresa como

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial r_1} \\ \frac{\partial T}{\partial r_2} \\ \frac{\partial T}{\partial r_3} \end{pmatrix} \quad (1-21)$$

donde  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$  corresponden a los ejes a lo largo de las direcciones principales. De esta forma, la ecuación general de la conducción para medios anisótropos queda en la forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho c} \vec{\nabla} \cdot (\hat{\lambda}_{ij} \vec{\nabla} T) + \frac{q_v}{\rho c} \quad (1-22)$$

Si la conductividad térmica es uniforme, esto es, no depende del punto del medio, es constante frente a las derivadas espaciales de  $\vec{\nabla} T$  y la ecuación general de la conducción se puede escribir, en el sistema de ejes principales, como

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho c} \left[ \lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial r_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T}{\partial r_2^2} + \lambda_3 \frac{\partial^2 T}{\partial r_3^2} \right] + \frac{q_v}{\rho c} \quad (1-23)$$

Para el caso isótropo todas las  $\lambda_i$  son iguales y el tensor conductividad térmica es diagonal con las tres componentes iguales (a la conductividad térmica escalar  $\lambda$ ) en cualquier sistema ortogonal de ejes de referencia. Así, en el caso isótropo, la ley de Fourier se reduce a la expresión (1-7) en función de la conductividad térmica escalar, y la ecuación general de la conducción a la expresión (1-15).

### 1.4.3. Condiciones para la resolución del problema.

La teoría de la conducción intentará encontrar soluciones particulares para estas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y otras ecuaciones que describen la conducción. Así, para resolver cada problema concreto habrá que establecer:

**Condiciones geométricas**, características de la forma y tamaño del cuerpo en el que tiene lugar la conducción. Describen el recinto objeto de estudio.

**Propiedades físicas** de la sustancia en la que tiene lugar la conducción ( $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $c$ ).

**Distribución inicial** de temperaturas en el cuerpo,  $T_0 = f(x, y, z, t_0)$ . Si la distribución es uniforme,  $T = T_0$  para  $t = t_0$  en todo el cuerpo. En algunos casos de régimen permanente, bastarán las condiciones de contorno en los límites del recinto.

**Condiciones de contorno** que describen las interacciones del cuerpo con el medio externo.

#### 1.4.4. Tipos de condiciones de contorno.

Estas condiciones de contorno pueden ser:

**Condiciones de contorno de primera especie,** también conocidas como *condiciones de contorno de Dirichlet*. Se da la distribución de temperaturas en la superficie del sólido en cada instante.

$$T = f(x, y, z, t)$$

Éste es el tipo de condición de contorno que se verá en el estudio del muro simple sin convección en la sección 1.6.1, donde se da la temperatura en las superficies externas.

**Condiciones de contorno de segunda especie,** también conocidas como *condiciones de contorno de von Neumann*. Se trata de condiciones de contorno en la derivada del campo  $\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T$ . Se da la densidad de flujo calorífico para cada punto de la superficie en cada instante.

$$q_s = f(x, y, z, t)$$

Por ejemplo, en el caso de dos superficies perfectamente juntas, a través de las cuales fluye el calor, la densidad de flujo es la misma para las dos.

**Condiciones de contorno de tercera especie.** Se da la temperatura exterior y la ley que gobierna la transferencia de calor entre la superficie del cuerpo y sus alrededores. El proceso de transferencia de calor entre la superficie de un cuerpo y el exterior obedece la *ley de Newton*, siendo la cantidad de calor intercambiada por unidad de superficie y de tiempo proporcional a la diferencia de temperaturas entre el medio exterior ( $T_\infty$ ) y la superficie ( $T_S$ ):

$$\frac{\Phi}{S} = q = h(T_S - T_\infty), \quad \text{con } [h] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}} \quad \text{en el S.I.} \quad (1-24)$$

donde  $h$  es el coeficiente de transmisión superficial del calor, coeficiente de película, coeficiente de transmisión aire-superficie o, como veremos en el apartado 1.5, coeficiente de convección.

Así, en régimen permanente se cumple, para la densidad de flujo en el principio del sólido y para la densidad de flujo por convección

$$q = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_s \Rightarrow \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = -\frac{h}{\lambda} (T_S - T_\infty)$$

Este es el tipo de condición de contorno que se utiliza cuando la convección está presente.

**Condiciones de contorno de cuarta especie.** Los cuerpos están en contacto perfecto y se igualan los flujos térmicos transmitidos entre ellos. Éste es el tipo de condición de contorno que se utiliza en el estudio de la transmisión del calor a través de la superficie de separación de dos paredes planas o cilíndricas (o de otra forma) que están en contacto perfecto.

Es decir, se da el flujo térmico  $\Phi(x, y, x, t)$  a través de toda la superficie.

### 1.5. Transmisión del calor por convección.

La transferencia de calor por *convección* está asociada al movimiento de un fluido, que actúa como portador de energía entre zonas del mismo que se encuentran a distinta temperatura (mediante el movimiento físico de partículas a distinta temperatura entre regiones del fluido a distinta temperatura) y entre el fluido y las superficies sólidas con las que éste intercambia calor. En la transmisión del calor por convección las características del flujo (perfil de velocidades, régimen del flujo) influyen notablemente en el proceso de intercambio de calor. Por ello, para un análisis de la misma se necesita estudiar en paralelo el flujo de energía y la dinámica del movimiento del fluido que está actuando como portador de ese flujo. Obviamente la convección aparecerá únicamente en fluidos, que es donde puede producirse este movimiento de materia. La convección puede ser natural o forzada.

Consideremos un fluido que inicialmente se encontrara en un campo gravitatorio en contacto con superficies también en reposo. Si en este fluido hay regiones a distinta temperatura la densidad en las mismas será distinta. Si las zonas

más densas por más frías son las que se encuentran en la parte superior, éstas se mueven hacia las zonas de menor densidad que se encuentran en la parte inferior (más caliente) desplazando el fluido que allí se encuentra. Por ejemplo, en un radiador,<sup>†</sup> el aire frío, al ser más denso que el aire caliente va hacia las zonas más bajas, desplazando al aire caliente, que asciende hacia las zonas más altas. Se establece así una circulación de materia (el fluido) que lleva asociado un flujo de energía y que tiende a igualar la temperatura del conjunto del gas. Este proceso corresponde a la denominada *convección natural* en la que el fluido se mueve espontáneamente en el campo de fuerza gravitatorio como consecuencia de las diferencias locales de densidad entre las zonas calientes y frías.

Por el contrario, se dice que se tiene *convección forzada* cuando algunas de las paredes en contacto con el fluido se mueven favoreciendo la circulación de éste.<sup>‡</sup> También se habla de convección forzada cuando hay cualquier efecto de origen no local que favorece el movimiento, como el viento.

Consideremos una superficie sólida que se encuentra a una temperatura  $T_S$ , en contacto con un fluido a distinta temperatura  $T_\infty$ . Como hemos visto, en estas condiciones se produce convección. El flujo térmico por unidad de superficie entre el fluido y la superficie se representa mediante la relación empírica conocida como *ley de enfriamiento de Newton*

$$\frac{\Phi}{S} = h(T_S - T_\infty). \quad (1-24)$$

Esta ley es equivalente al caso de las condiciones de contorno de tercera especie que se presenta en la página 8, donde  $h$  es el denominado *coeficiente de convección*, *coeficiente de película*, *coeficiente de transmisión superficial del calor* o *coeficiente de transmisión del calor aire-superficie*.

Aunque en muchos casos es posible medir experimentalmente el coeficiente de convección  $h$  para unas condiciones dadas, en general es difícil hacer un modelo más general para el mismo. El coeficiente  $h$  no es un parámetro fijo, sino que depende, de una forma en general compleja, de distintas variables como el tipo de flujo (laminar o turbulento), la viscosidad y conductividad térmica del fluido, la geometría del problema (con las dimensiones del sistema y la posible presencia de otras superficies que limiten la convección), el estado de las superficies, la velocidad del fluido, las temperaturas, el calor específico del fluido, el coeficiente de dilatación y la densidad del fluido (estos dos especialmente para convección natural) o el tipo de convección. Por ejemplo, la convección en la pared exterior de un edificio será, para una misma diferencia de temperaturas, distinta de la convección en la pared interna de una habitación, ya que en la primera se desarrolla a lo largo de toda la altura del edificio, mientras que en la segunda se desarrolla sólo a lo largo de la altura de la habitación.

En un análisis detallado ni siquiera el coeficiente de convección es uniforme en toda la superficie y lo que normalmente se conoce como  $h$  es en realidad un valor promedio en la superficie, el *coeficiente de convección promedio*,

$$\bar{h} = \frac{1}{S} \int_S h dS. \quad (1-25)$$

El movimiento del fluido producido por la convección a lo largo de la superficie tiene características similares a las que se estudian en los libros de hidrodinámica. Así en la misma superficie se satisface la denominada *condición de no deslizamiento* en la que el fluido está en reposo respecto a la superficie como consecuencia del predominio absoluto de las fuerzas viscosas sobre las de inercia. Según nos separamos de la superficie, la influencia de las fuerzas de inercia va aumentando, aunque en una primera zona, denominada *capa límite* la velocidad cambia de forma significativa según nos alejamos de la superficie. Al principio de establecerse el contacto con la superficie y en general cerca de la misma siguen predominando las fuerzas viscosas y tiene flujo *laminar*, esto es ordenado en capas, pero dentro de la misma capa límite el flujo se puede hacer *turbulento* (movimiento más desordenado) al alejarnos de la superficie o avanzar en contacto con la misma, dependiendo de las características del flujo, aunque siga habiendo una *subcapa laminar* en las proximidades de la superficie. A una cierta distancia de la superficie la variación de la velocidad con la distancia a la misma se hace muy pequeña y abandonamos la capa límite, teniéndose régimen turbulento fuera de ésta. Para describir los límites de la capa límite se utiliza el criterio de región próxima a la superficie en la que la velocidad media es menor que el 99 % de la velocidad  $v_\infty$  en el flujo libre (alejado de la superficie, donde ya no hay variación). Al igual que en

<sup>†</sup> Mal llamado radiador, porque en realidad el calentamiento tiene lugar principalmente por convección, natural cuando no hay ventilador, y forzada cuando se utiliza ésta para aumentar el intercambio de calor. Curiosamente las estufas de infrarrojos serían las que calentarían más por radiación.

<sup>‡</sup> Por ejemplo, un termo-ventilador o convector de los denominados convectores, en los que las palas de un ventilador favorecen el movimiento del fluido.

el caso general de flujo en tuberías, el paso de régimen laminar a turbulento en la capa límite se caracteriza mediante una magnitud adimensional denominada *número de Reynolds*  $Re$ , definido como

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{v L}{\nu} \quad (1-26)$$

con  $\rho$  la densidad,  $L$  una longitud característica cuya elección depende del sistema concreto,  $\mu$  la viscosidad dinámica y  $\nu = \mu/\rho$  la viscosidad cinemática. El número de Reynolds representa una cierta relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas en el flujo. En la mayoría de los cálculos analíticos el *número de Reynolds crítico* para la transición entre flujo laminar y turbulento en la capa límite sobre una placa plana se toma como  $5 \cdot 10^5$ , pero en realidad depende fuertemente de la rugosidad de la superficie y de la intensidad de la turbulencia de la corriente libre.

Nótese que tanto la definición de número de Reynolds como el valor del número de Reynolds crítico dependen de la geometría del problema. Así, en un problema de transmisión de calor por convección por un fluido que circula por una tubería deberíamos utilizar el diámetro  $D$  de la tubería en vez de  $L$  y el valor del número de Reynolds crítico también sería distinto (en particular el valor que se acaba de presentar es distinto del que aparece en hidráulica general en una tubería).

Además de la capa límite tradicional en el movimiento de fluidos, también llamada *capa límite de velocidad* o *hidrodinámica*, en la transmisión del calor por convección se tiene un segundo tipo de capa límite, la denominada *capa límite térmica*. La capa límite térmica separa la zona del fluido en la que la temperatura del mismo apenas varía al alejarse perpendicularmente de la superficie (y es prácticamente igual a la del fluido externo) de la zona del fluido en la que la temperatura varía rápidamente en la dirección perpendicular a la superficie. El espesor de la capa límite térmica se toma como el valor de la distancia perpendicular a la superficie para el que la diferencia de temperaturas  $T - T_S$  con la misma es el 99 % de la diferencia de temperaturas entre la temperatura  $T_\infty$  del fluido en la zona donde ya no se produce variación de temperatura por convección y la temperatura  $T_S$  de la superficie. Así, dentro de la capa límite térmica se cumplirá

$$T_S - T < 0,99(T_S - T_\infty) \quad (1-27)$$

Todo esto hace que un estudio detallado del problema de la convección sea tan complejo. Una de las formas de abordar el problema es mediante tediosos cálculos de elementos finitos aplicados a la convección. Para algunos casos se han obtenidos expresiones semi-empíricas para  $h$  mediante los denominados *métodos de semejanza* o *análisis dimensional* en los que se describe el problema en función de ciertos parámetros adimensionales que no dependen de la escala del problema, como el número de Reynolds que acabamos de mencionar.

Uno de los más importantes es el *número de Nusselt* que se define como

$$Nu = \frac{\bar{h}L}{\lambda} \quad (1-28)$$

en función de la conductividad térmica del material  $\lambda$ , del coeficiente de convección promedio en la superficie  $\bar{h}$  y de una longitud característica del modelo dada por  $L$  (por ejemplo el diámetro de un cilindro o el lado de una placa) de forma que conociendo el número de Nusselt para el caso considerado es posible obtener el coeficiente de convección  $h$ . El número de Nusselt representa de alguna manera la relación entre las tasas de transferencia de calor por convección y por conducción en un fluido.

A la hora de tratar el problema de la convección surge otro problema práctico, cuando se coloca el termómetro en contacto con la superficie una parte del mismo está en contacto térmico con el fluido, afectando a las medidas de la temperatura. Esto hace que a menudo sea difícil medir con precisión la temperatura de la superficie y no haya más remedio que recurrir a métodos iterativos.

En la tabla 1-3 se muestran algunos rangos típicos de valores del coeficiente de convección para distintos fluidos y tipos de convección.

### 1.5.1. Convección forzada.

En buena parte de los casos el número de Nusselt para la convección forzada puede ajustarse por una expresión de la forma

$$Nu = cte Re^m Pr^n \quad (1-29)$$



**Tabla 1-3:** Algunos rangos típicos de valores del coeficiente de convección  $h$ . Se incluyen los casos de vaporización y condensación.

5 – 25 W/m <sup>2</sup> K	Convección natural en el aire.
10 – 200 W/m <sup>2</sup> K	Convección forzada en el aire.
20 – 100 W/m <sup>2</sup> K	Convección natural en el agua.
50 – 10000 W/m <sup>2</sup> K	Convección forzada en el agua.
3000 – 100000 W/m <sup>2</sup> K	Agua en ebullición (evaporación).
5000 – 100000 W/m <sup>2</sup> K	Vapor de agua en condensación.

donde  $Re$  es el número de Reynolds y  $Pr$  es el número de Prandtl, dado por

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{c_p \mu}{\lambda} \quad (1-30)$$

con  $\alpha$  la difusividad térmica del fluido,  $L$  una dimensión característica del sistema y  $cte$ ,  $n$  y  $m$  parámetros función de la geometría y del rango de números de Reynolds. El número de Prandtl representa la relación existente entre la difusividad de la cantidad de movimiento y la difusividad del calor. También se puede ver como la relación entre los espesores de la capas límite de velocidad y térmica. Nótese que mientras que los números de Reynolds y Grashoff (éste se verá más adelante) se suelen representar con la longitud característica como subíndice, esto no se hace con el número de Prandtl que como se ve en la ecuación (1-30) depende sólo de las características del fluido y del flujo (esto a través de la dependencia de los parámetros con las condiciones del flujo).

Los valores del número de Prandtl van desde menos de 0,01 para los metales líquidos (por ejemplo 0,0196 para el mercurio) hasta más de 100000 para algunos aceites pesados (por ejemplo en torno a 3400 para un aceite de motor típico).  $Pr$  es del orden de 10 para el agua. Para los gases el número de Prandtl  $Pr$  apenas depende de la temperatura y su valor es en torno a 1, lo que indica que tanto la cantidad de movimiento como de calor se difunden por el fluido a una velocidad similar. En particular, en el caso concreto del aire puede tomarse en la práctica aproximadamente  $Pr = 0,7$ .

El calor se difunde con mucha rapidez en los metales líquidos ( $Pr \ll 1$ ) y con mucha lentitud en los aceites ( $Pr \gg 1$ ) en relación con la cantidad de movimiento. Valores bajos del número de Prandtl se corresponden con mayor transferencia del calor por conducción (Para valores pequeños el calor se difunde mucho más rápidamente comparado con la difusión de la cantidad de movimiento y el espesor de la capa límite térmica es mucho mayor que el de la capa límite hidrodinámica) y valores altos van asociados a una mayor transferencia del calor por convección.

Esto indica que la capa límite térmica es mucho más gruesa para los metales líquidos y mucho más delgada para los aceites, en relación con la capa límite de velocidad. Cuanto más gruesa sea la capa límite térmica con mayor rapidez se difundirá el calor en el fluido. El número de Prandtl se emplea tanto en convección forzada como natural.

Dependiendo del tipo de flujo (laminar o turbulento) y de la geometría de las superficies se utilizan distintas expresiones para el número de Nusselt [1, 8]. Así, para superficies planas en régimen laminar se utiliza para el número de Nusselt promedio una expresión de la forma

$$\overline{Nu}_L = 0,664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3} \quad (1-31)$$

válida en el rango  $Re < 5 \times 10^5$  para una superficie isoterma. Para una superficie plana en régimen turbulento desde prácticamente el principio, se utiliza para el número de Nusselt promedio la expresión

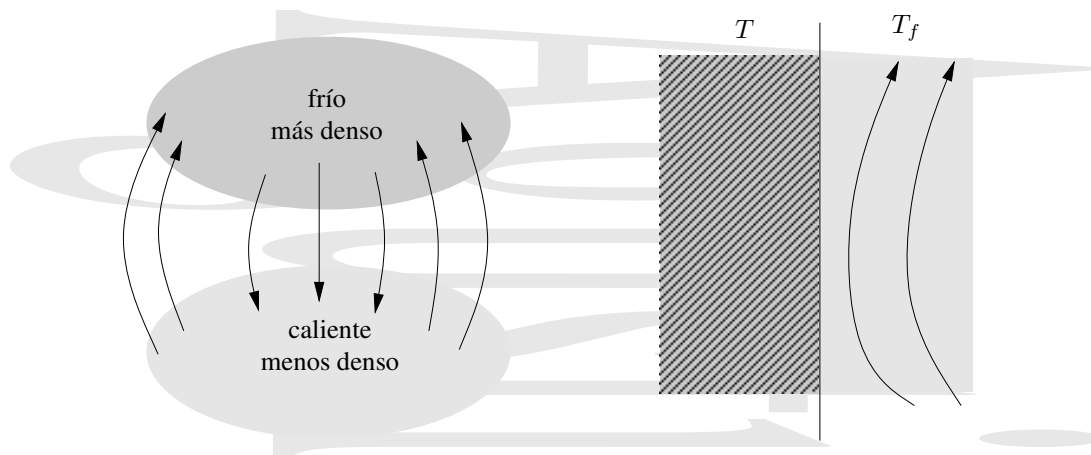
$$\overline{Nu}_L = 0,037 Re_L^{4/5} Pr^{1/3} \quad (1-32)$$

válida en el rango  $5 \times 10^5 < Re < 10^7$ . A menudo la lámina es lo suficientemente grande para que se tenga una combinación de flujo laminar y turbulento. En este caso,

$$\overline{Nu}_L = (0,037 Re_L^{4/5} - 871) Pr^{1/3} \quad (1-33)$$

válida en el rango  $5 \times 10^5 < Re < 10^7$  para una superficie isoterma a temperatura  $T_S$ . Cuando las propiedades del fluido no pueden considerarse constantes en el flujo éstas se suelen evaluar a la denominada *temperatura de película* que se define como la media aritmética entre la temperatura de la pared  $T_S$  y la temperatura del flujo libre  $T_\infty$ ,

$$T_f = \frac{T_S + T_\infty}{2}. \quad (1-34)$$



**Figura 1-4:** La convección natural tiene lugar a consecuencia de las distintas densidades del aire caliente y frío. El aire frío, más denso, desplaza al aire caliente cuando éste último está en las capas más bajas. Este mismo proceso también tiene lugar en la superficie de un muro en contacto con un fluido a distinta temperatura, produciéndose intercambio de calor por convección.

Una expresión utilizada para convección forzada en el interior de una tubería cilíndrica lisa con flujo turbulento completamente desarrollado ( $0,6 < Pr < 100$  y  $2500 < Re < 1,25 \times 10^5$ ) es la siguiente,

$$Nu_D = 0,023 Re_D^{4/5} Pr^n \quad (1-35)$$

donde el coeficiente del número de Prandtl tiene los valores  $n = 0,4$  cuando el fluido se está calentando y  $n = 0,3$  cuando se está enfriando y donde los números de Reynolds y Nusselt se calculan con el diámetro interno de la tubería  $D$  como longitud característica.

### 1.5.2. Convección libre o natural.

En convección libre se observa que, para distintas superficies isotermas, el número de Nusselt puede ajustarse experimentalmente en distintas regiones mediante una expresión de la forma

$$Nu = cte(Gr Pr)^n, \quad (1-36)$$

donde  $cte$  y  $n$  están tabuladas para distintos rangos y geometrías[1] y  $Gr$  es el número de Grashoff que se define como

$$Gr = \frac{g\alpha_v(T_S - T_\infty)L^3}{\nu^2} \quad (1-37)$$

donde  $\alpha_v$  es el coeficiente de dilatación de volumen,  $T_S$  la temperatura de la superficie y  $T_\infty$  la temperatura del fluido alejado de la superficie. El número de Grashoff desempeña en convección libre un papel similar al que realiza en convección forzada el número de Reynolds. En concreto, representa la relación entre las fuerzas de flotabilidad o empuje y las fuerzas viscosas en la corriente de convección natural y es la variable principal utilizada como criterio de la transición de capa límite laminar a turbulenta en convección natural.

Se denomina número de Rayleigh al producto de los números de Grashoff  $Gr$  y Prandtl  $Pr$

$$Ra = Gr Pr = \frac{g\alpha_v \Delta T L^3 c_p \rho^2}{\mu \lambda} \quad (1-38)$$

que aparecen en la ecuación (1-36), y también se utiliza para caracterizar la transición de régimen laminar a turbulento en convección libre. Por ejemplo, el flujo pasa a ser turbulento para  $Ra > 10^9$ .

En un modelo más elaborado debido a Churchill y Chu[9] válido para un mayor rango más amplio de números de Rayleigh la evaluación de la transmisión de calor por convección tiene una forma más compleja que la expresión

(1-36). Así, para régimen laminar en una superficie plana vertical<sup>†</sup> el número de Nusselt tiene la forma

$$\overline{Nu}_L = 0,68 + \frac{0,67Ra_L^{1/4}}{[1 + (0,492/Pr)^{9/16}]^{4/9}}, \quad (1-39)$$

expresión válida para  $0 < Ra_L < 10^9$ , mientras que cuando se tiene una combinación de regímenes laminar y turbulento en la misma superficie plana vertical, se utiliza para el número de Nusselt la expresión

$$\overline{Nu}_L = \left\{ 0,825 + \frac{0,387Ra_L^{1/6}}{[1 + (0,492/Pr)^{9/16}]^{8/27}} \right\}^2, \quad (1-40)$$

válida para  $10^{-1} < Ra_y < 10^{12}$ . También se obtienen expresiones para el número de Nusselt en convección libre en cilindros horizontales largos (con el diámetro del cilindro como longitud característica),

$$Nu_D = \left\{ 0,60 + \frac{0,387Ra_D^{1/6}}{[1 + (0,559/Pr)^{9/16}]^{8/27}} \right\}^2, \quad (1-41)$$

expresión válida para  $10^{-5} < Ra_D < 10^{13}$ , en la que ahora la longitud característica es el diámetro del cilindro  $D$ . Para una superficie esférica, donde la longitud característica es también el diámetro  $D$  de la esfera, queda

$$Nu_D = 2 + \frac{0,589 Ra_D^{1/4}}{[1 + (0,469/Pr)^{9/16}]^{4/9}}. \quad (1-42)$$

para el rango  $Ra < 10^{11}$  y  $Pr > 0,5$ . Las propiedades que aparecen directamente o indirectamente en las ecuaciones anteriores se evalúan a la temperatura de película (1-34).

En un modelo simplificado para convección natural entre el aire y varias superficies[1, 8] se obtienen unos valores del coeficiente de convección que se muestran en la tabla 1-4.

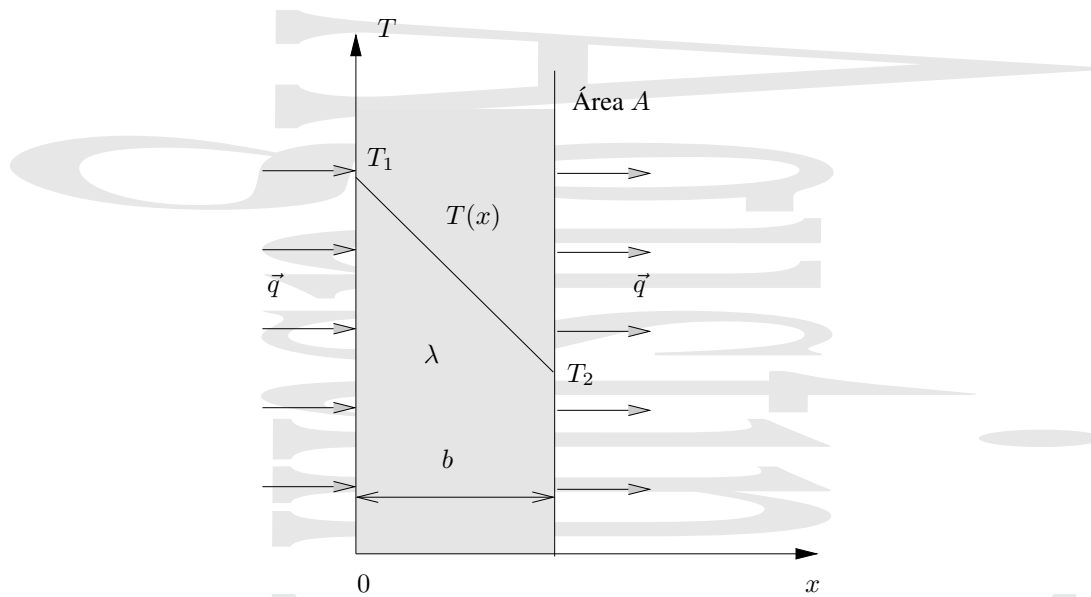
**Tabla 1-4:** Valores del coeficiente de convección en un modelo simplificado de convección natural del aire[1, 8] a una temperatura media de 21°C.  $h$  es el coeficiente de convección en unidades de  $W/m^2°C$ ,  $\Delta T$  la diferencia de temperaturas en grados centígrados entre la superficie y un punto del aire suficientemente alejado de la misma,  $L$  la dimensión vertical u horizontal en metros y  $D$  el diámetro también en metros, según corresponda.

Superficie	Laminar	Turbulento
	$10^4 < Ra < 10^9$	$Ra > 10^9$
Plano o cilindro vertical	$h = 1,42 \left( \frac{\Delta T}{L} \right)^{1/4}$	$h = 1,31(\Delta T)^{1/3}$
Cilindro horizontal	$h = 1,32 \left( \frac{\Delta T}{D} \right)^{1/4}$	$h = 1,24(\Delta T)^{1/3}$
Placa horizontal caliente mirando hacia arriba o placa fría mirando hacia abajo (la gravedad contribuye al movimiento)	$h = 1,32 \left( \frac{\Delta T}{L} \right)^{1/4}$	$h = 1,52(\Delta T)^{1/3}$
Placa horizontal caliente mirando hacia abajo o placa fría mirando hacia arriba (la gravedad no contribuye al movimiento)	$h = 0,59 \left( \frac{\Delta T}{L} \right)^{1/4}$	

### 1.5.3. Convección con cambio de fase.

En los casos de convección que acabamos de estudiar, los fluidos que intervienen siempre permanecen en la misma fase a pesar de los cambios de temperatura que experimentan. Sin embargo, en determinadas sustancias es posible que

<sup>†</sup>En este caso, la longitud característica  $L$  que se utiliza en las definiciones de los números de Grashof, Nusselt y Rayleigh es la altura de la superficie, simbolizada por el subíndice  $L$ .



**Figura 1-5:** Conducción del calor en una dimensión a través de un muro simple homogéneo. La temperatura varía en el interior del muro de forma lineal entre los valores  $T_1$  y  $T_2$  de las dos superficies externas del muro.

debido a los cambios de temperatura que tienen lugar durante el proceso se produzca una transición de fase con un intercambio de calor, que hay que tener en cuenta a la hora de calcular el flujo de energía con la superficie. Cuando los procesos de convección tienen lugar junto a un cambio de fase, como ocurre en los procesos de convección asociados a la condensación o a la ebullición se producen unos intercambios de calor muy importantes, incluso más intensos que en la convección forzada.

## 1.6. Casos particulares de conducción y convección.

### 1.6.1. Transmisión del calor por conducción y convección a través de muros de paredes planas.

#### **Muro simple de paredes planas con condiciones de contorno de primera especie (Temperatura en las superficies delimitadoras).**

Consideramos ahora el caso de una pared homogénea e isotrópica de espesor  $b$  y área  $A$ , con una conductividad térmica  $\lambda$  uniforme y constante. Las superficies externas se mantienen a las temperaturas constantes  $T_1$  y  $T_2$  (con  $T_1 > T_2$ ) y en el problema a estudiar no hay fuentes internas de calor. Así, éste es un problema unidimensional,

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

y, como en un régimen permanente (estacionario) las temperaturas  $T_1$  y  $T_2$  son constantes:

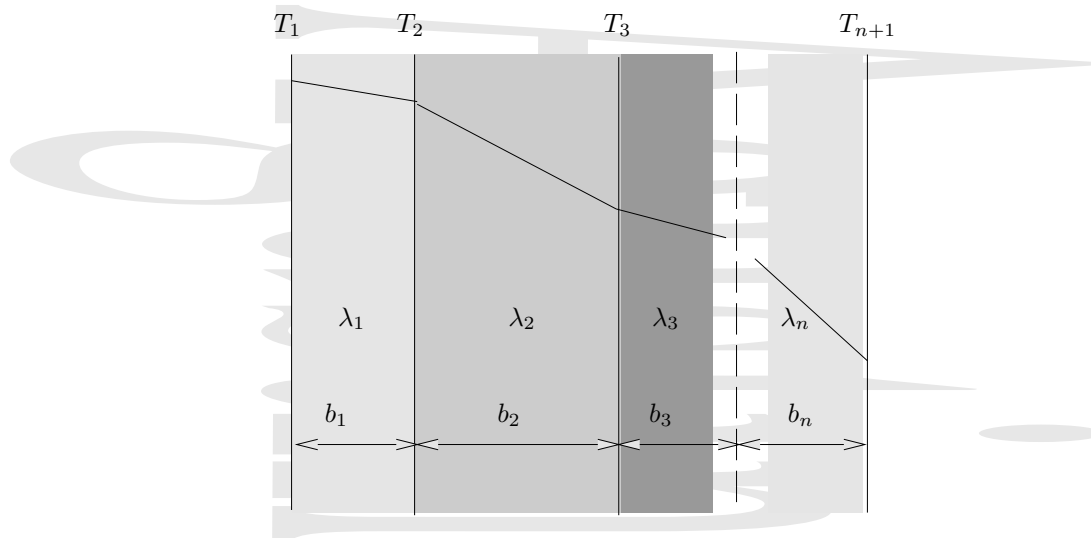
$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 = \alpha \nabla^2 T + \frac{q_v}{c\rho} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

queda, finalmente:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = cte = C_1 \Rightarrow T = C_1 x + C_2 \quad (1-43)$$

Si imponemos la condición de contorno  $T = T_1$  para  $x = 0$ , se tiene que  $T_1 = C_2$ , e imponiendo además la condición de contorno  $T = T_2$  para  $x = b$ , se tiene que:

$$T_2 = C_1 b + T_1 \Rightarrow C_1 = \frac{T_2 - T_1}{b}$$



**Figura 1-6:** Conducción del calor en una dimensión a través de un muro compuesto. La temperatura varía linealmente dentro de cada muro homogéneo entre los valores en sus dos superficies, con una pendiente distinta en cada muro dependiendo de su espesor y de su conductividad térmica.

quedando finalmente la distribución de temperaturas en el interior del muro simple:

$$T = \frac{T_2 - T_1}{b}x + T_1 \quad (1-44)$$

que como vemos sigue una ley lineal. La densidad de flujo que circula a través del muro será  $q = -\frac{\lambda}{b}(T_2 - T_1)$  y el flujo térmico elemental transmitido vendrá dado por:

$$d\Phi = qdS = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dS = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{b} dS = -\frac{\lambda}{b}(T_2 - T_1)dS$$

siendo el flujo total

$$\Phi = \int_0^\Phi d\Phi = \int_A -\lambda \frac{T_2 - T_1}{b} dS = \Phi = \frac{\lambda}{b}(T_1 - T_2)S$$

y la densidad de flujo  $q$

$$q = \frac{\Phi}{S} = \frac{\lambda}{b}(T_1 - T_2) \quad (1-45)$$

### **Muro compuesto de paredes planas con condiciones de contorno de primera especie.**

En el estado estacionario, el flujo la densidad de flujo (flujo transmitido por unidad de superficie) es la misma para todos y cada uno de los muros simples que forman el muro compuesto. En caso de que no fuera así, en alguno de ellos había acumulación o cesión neta de calor y no estaríamos en el estado estacionario ya que se tendría variación de  $T$ . Si tomamos por ejemplo  $T_1 > T_{n+1}$  se tiene, para cada muro,

$$\frac{\Phi}{S} = \frac{\lambda_1}{b_1}(T_1 - T_2) \Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{b_1}{\lambda_1} \frac{\Phi}{S}$$

⋮

$$\frac{\Phi}{S} = \frac{\lambda_n}{b_n}(T_n - T_{n+1}) \Rightarrow T_n - T_{n+1} = \frac{b_n}{\lambda_n} \frac{\Phi}{S}$$

Sumando estas expresiones, se tiene:

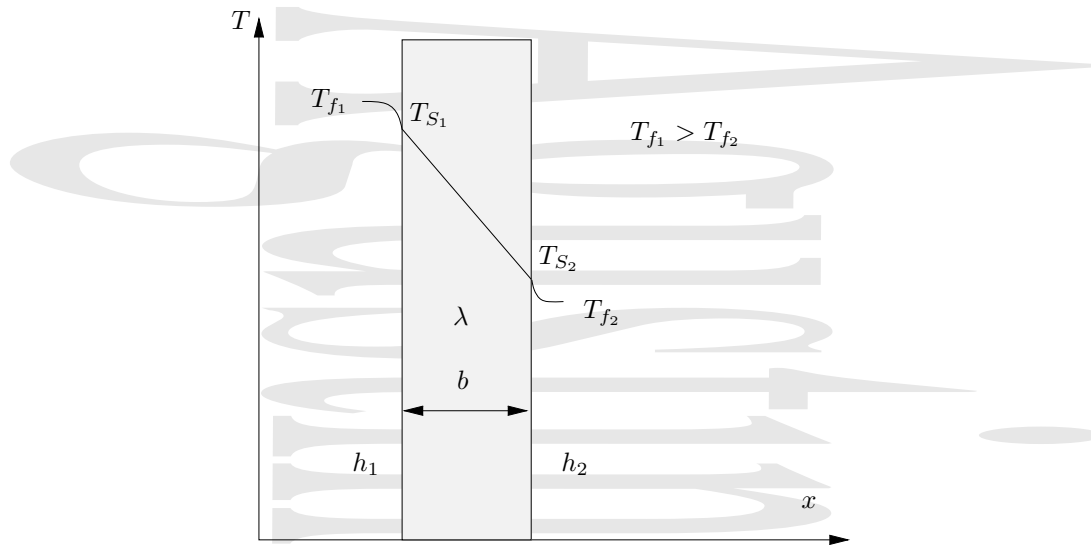


Figura 1-7: Condiciones de contorno de tercera especie para un muro simple.

$$T_1 - T_{n+1} = \sum_i \frac{b_i}{\lambda_i} \frac{\Phi}{S} = \frac{\Phi}{S} \sum_i \frac{b_i}{\lambda_i} \quad (1-46)$$

quedando, para la densidad de flujo calorífico:

$$q = \frac{\Phi}{S} = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum_i \frac{b_i}{\lambda_i}} = \bar{U}_c (T_1 - T_{n+1}) \quad (1-47)$$

donde se denomina  $R_c = \sum b_i/\lambda_i$  a la *resistencia térmica global* a la conducción del calor y  $\bar{U}_c = R^{-1}$  al *coeficiente global de conducción*. A éste se le denomina también *coeficiente de transmisión del calor superficie-superficie*.

### Condiciones de contorno de tercera especie para los muros simple y compuesto de paredes planas (Paredes planas con conducción y convección.)

Consideremos una pared plana que separa dos fluidos en movimiento. Conocemos  $T_{f1}, T_{f2}, h_1, h_2, \lambda$  y  $b$  que además de conocidas son constantes, y queremos conocer la cantidad de calor que fluye desde el fluido caliente al frío, así como las temperaturas en las caras de la pared. La densidad de flujo térmico entre el fluido caliente y la pared viene dada por la ley de enfriamiento de Newton:

$$q = \frac{\Phi}{S} = h_1(T_{f1} - T_{S1}) \Rightarrow T_{f1} - T_{S1} = \frac{q}{h_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\Phi}{S}$$

En régimen estacionario, ese mismo flujo térmico se transmitirá por conducción por unidad de superficie a través de la pared:

$$q = \frac{\lambda}{b}(T_{S1} - T_{S2}) \Rightarrow T_{S1} - T_{S2} = \frac{b}{\lambda} q$$

y la misma desde la superficie  $S_2$  al fluido frío:

$$q = h_2(T_{S2} - T_{f2}) \Rightarrow T_{S2} - T_{f2} = \frac{q}{h_2}$$

Sumando todas estas expresiones, se tiene:

$$T_{f1} - T_{f2} = q \left( \frac{1}{h_1} + \frac{b}{\lambda} + \frac{1}{h_2} \right) \quad (1-48)$$

que se puede escribir como:

$$q = \frac{\Phi}{S} = \bar{U}_t(T_{f_1} - T_{f_2}) \quad (1-49)$$

donde  $\bar{U}_t$  es el *coeficiente global de transmisión del calor* o *transmitancia* y su inversa

$$\frac{1}{\bar{U}_t} = \left( \frac{1}{h_1} + \frac{b}{\lambda} + \frac{1}{h_2} \right) \quad (1-50)$$

la *resistencia térmica total* del sistema al paso del calor,  $R_t = 1/\bar{U}_t = R_1 + R_b + R_2$ , donde:

$R_1 = \frac{1}{h_1}$  es la resistencia térmica a la transmisión del calor desde el fluido caliente a la pared.

$R_b = \frac{b}{\lambda}$  es la resistencia térmica a la transmisión del calor por conducción dentro del muro.

$R_2 = \frac{1}{h_2}$  es la resistencia térmica a la transmisión del calor desde la pared al fluido frío.

Es frecuente hablar de estos coeficientes globales de transmisión del calor como *coeficientes aire-aire* ya que incluyen todo lo que hay entre el aire de un lado y el aire del otro. Para un muro compuesto, las expresiones anteriores toman la forma:

$$R_t = \frac{1}{\bar{U}_t} = \frac{1}{h_1} + \sum_i \frac{b_i}{\lambda_i} + \frac{1}{h_2} \quad (1-51)$$

Este resultado es muy similar al obtenido para el caso de las resistencias eléctricas en serie, salvo en la presencia de la superficie en la definición de resistencia térmica<sup>†</sup> en transmisión del calor a través de muros. La presencia de esta superficie hace que cuando se trata el caso de las resistencias térmicas en paralelo, definidas de esta forma, no sea posible una extensión directa del caso de las resistencias eléctricas, como sí es posible cuando se define la resistencia térmica en la forma en que se define en electrónica, y que está relacionada con ésta mediante  $S R_{t_{el}} = R_t$ .

### 1.6.2. Transmisión del calor por conducción y convección a través de paredes cilíndricas.

#### **Condiciones de contorno de primera especie en una pared cilíndrica simple.**

Veamos ahora como tratar el problema de la conducción de calor a través de una pared cilíndrica. Ahora no es posible hacer una extensión directa de lo que se ha visto para el caso de una pared plana salvo que el espesor de la pared sea mucho menor que su radio, ya que las áreas de las caras interna y externa son distintas. Esto hace que, aunque el flujo térmico (energía transmitida por unidad de tiempo) a través de ambas paredes sea el mismo, no lo sea la densidad de flujo (flujo por unidad de superficie). Sin embargo, si consideramos un tubo cilíndrico de radio  $r$  y espesor infinitesimal  $dr$  dentro de la pared cilíndrica, como el que se muestra en la figura 1-8, sí es posible considerar las superficies interna y externa como prácticamente similares, y por tanto, es posible aplicar entre ellas la ley de Fourier en la forma

$$\vec{q} = \frac{d\Phi}{dS} \vec{u}_r = -\lambda \vec{\nabla} T = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{u}_r$$

donde en la última expresión ya se ha tenido en cuenta que debido a la simetría cilíndrica del problema la única dependencia de la temperatura es con la distancia  $r$  al eje del cilindro. El área total es  $S = 2\pi rL$ , siendo  $L$  la longitud del cilindro, y el flujo térmico total a través de la pared cilíndrica es  $\Phi$ , quedando:

$$\frac{\Phi}{S} = q_r = -\lambda \frac{dT}{dr} \Rightarrow \frac{\Phi}{2\pi rL} dr = -\lambda dT,$$

<sup>†</sup>Esta no es la única definición de resistencia térmica que se utiliza. Por ejemplo, en electrónica, cuando se calcula la resistencia térmica de los disipadores utilizados, la resistencia térmica de un elemento sencillo se define como:

$$\Delta T = \Phi R_{t_{el}} = \frac{\Phi}{S} R_t$$

y en este caso la analogía con las resistencias eléctricas en serie y paralelo es completa.

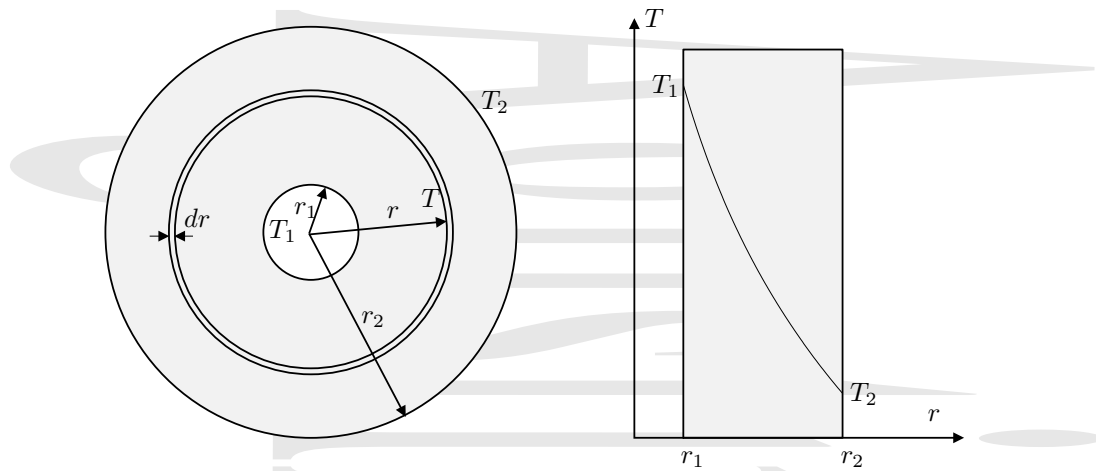


Figura 1-8: Conducción a través de un cilindro de una pared simple.

El flujo térmico es el mismo para las dos superficies y, por tanto, al integrar en  $r$  y  $T$  entre una de las superficies con temperaturas conocidas y la superficie cilíndrica interior se tiene

$$T(r) = T_1 - \frac{\Phi}{2\pi\lambda L} \ln \frac{r}{r_1} = T_2 - \frac{\Phi}{2\pi\lambda L} \ln \frac{r}{r_2}$$

que nos da una distribución logarítmica en función del radio para la temperatura en el interior de la capa cilíndrica (en vez de la distribución lineal que obtuvimos en el caso de una pared plana). Como conocemos las temperaturas en las superficies interior y exterior, podemos obtener la relación entre éstas, las características de la pared cilíndrica y el flujo

$$-\frac{\Phi}{2\pi\lambda L} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} = (T_2 - T_1).$$

Es decir, la diferencia de temperaturas entre las caras interior y exterior del cilindro viene dada por:

$$T_1 - T_2 = \frac{\Phi}{2\pi\lambda L} \ln \frac{r_2}{r_1} = \left[ \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} \right] \frac{\Phi}{L} = R_{LC} \frac{\Phi}{L} = \frac{1}{U_{LC}} \frac{\Phi}{L} \quad (1-52)$$

donde

$$R_{LC} = \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (1-53)$$

es la *resistencia térmica lineal a la conducción* o *resistencia térmica lineal superficie-superficie* para la pared cilíndrica simple y  $U_{LC} = R_{LC}^{-1}$  el *coeficiente lineal de conducción* o *coeficiente lineal de transmisión del calor superficie-superficie* para dicha pared cilíndrica simple.

Este mismo resultado podría haberse obtenido a partir de la ecuación de Laplace (1-18) expresada en coordenadas cilíndricas,

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad (1-54)$$

que, dado que no hay dependencia ni en  $\theta$  ni en  $z$  se convierte en

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = 0. \quad (1-55)$$

Para ello habría sido necesario resolver esta ecuación diferencial en derivadas parciales. Puede comprobarse que una función del tipo  $T(r) = A \ln Br$ , con  $A$  y  $B$  dos constantes, es una solución genérica de la ecuación diferencial (1-55) con dos variables independientes, como corresponde a una ecuación diferencial de segundo orden.



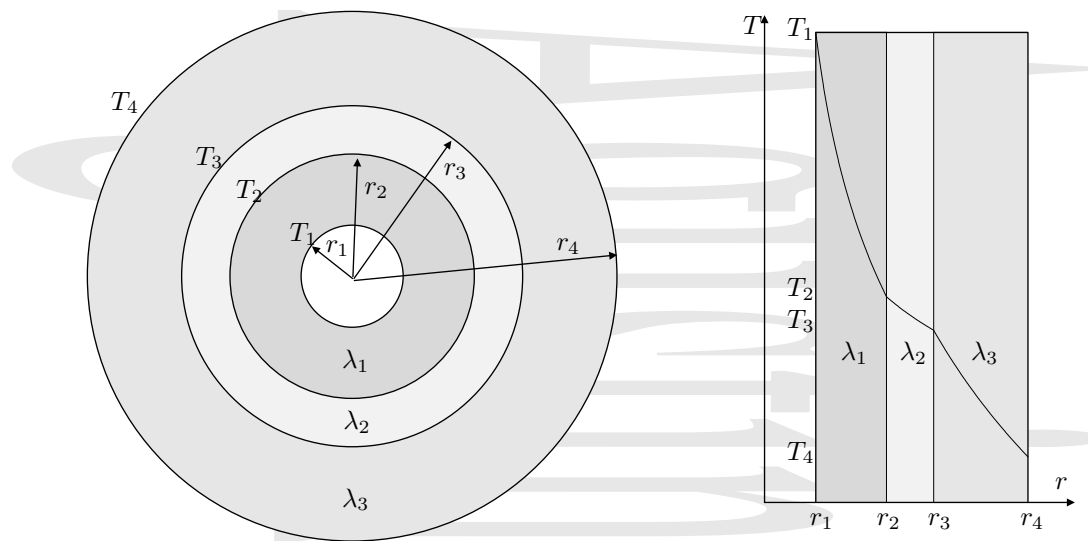


Figura 1-9: Conducción a través de un cilindro de paredes múltiples.

### Condiciones de primera especie en paredes cilíndricas compuestas.

Si en vez de tenerse una única capa cilíndrica como en el apartado anterior, se tiene una pared cilíndrica de distintas capas, todas ellas cilíndricas, como la que se muestra en la figura 1-9, es fácil obtener la relación entre las distintas conductividades térmicas, los radios interior y exterior del cilindro compuesto y las temperaturas en las superficies externa e interna. Si  $r_i$  son los radios internos de cada capa,  $T_i$  sus temperaturas, y  $\lambda_i$  sus conductividades térmicas se tiene, para cada una de las distintas capas cilíndricas,

$$\begin{aligned} T_1 - T_2 &= \frac{\Phi}{2\pi\lambda_1 L} \ln \frac{r_2}{r_1} \\ T_2 - T_3 &= \frac{\Phi}{2\pi\lambda_2 L} \ln \frac{r_3}{r_2} \\ &\dots \\ T_{n-1} - T_n &= \frac{\Phi}{2\pi\lambda_{n-1} L} \ln \frac{r_n}{r_{n-1}} \\ T_n - T_{n+1} &= \frac{\Phi}{2\pi\lambda_n L} \ln \frac{r_{n+1}}{r_n} \end{aligned}$$

Ahora bien, el flujo térmico  $\Phi$  es el mismo para todas las capas, por lo que al restar y sacar factor común queda la expresión

$$T_1 - T_{n+1} = T_{\text{int}}^{\text{sup}} - T_{\text{ext}}^{\text{sup}} = \left[ \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \dots + \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{r_{n+1}}{r_n} \right) \right] \frac{\Phi}{L}$$

que en forma más esquemática puede escribirse como

$$T_1 - T_{n+1} = \left[ \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} \right) \right] \frac{\Phi}{L} = R_{LC} \frac{\Phi}{L} = \frac{1}{U_{LC}} \frac{\Phi}{L} \quad (1-56)$$

donde  $R_{LC}$  es la *resistencia térmica lineal global a la conducción* o *resistencia térmica lineal global superficie-superficie* para la pared cilíndrica compuesta y  $U_{LC} = R_{LC}^{-1}$  el *coeficiente lineal global de conducción* o *coeficiente lineal global de transmisión del calor superficie-superficie* para dicha pared cilíndrica compuesta.

### Paredes cilíndricas compuestas con conducción y convección.

El caso más frecuente no es conocer de forma exacta las temperaturas en las paredes interior y exterior del cilindro, sino conocer solamente las temperaturas  $T_i$  y  $T_e$  en los medios interior y exterior. Entre estos fluidos interior y exterior

y las respectivas paredes, el calor se transmite básicamente por convección, de acuerdo con la fórmula de Newton (1-24). Estas relaciones deben ser añadidas a las que se acaban de ver para el caso de la pared cilíndrica compuesta, quedando

$$\begin{aligned}
 T_i - T_1 &= \frac{1}{h_i} \frac{\Phi}{2\pi r_1} \\
 T_1 - T_2 &= \frac{\Phi}{2\pi \lambda_1 L} \ln \frac{r_2}{r_1} \\
 T_2 - T_3 &= \frac{\Phi}{2\pi \lambda_2 L} \ln \frac{r_3}{r_2} \\
 &\dots \\
 T_n - T_{n-1} &= \frac{\Phi}{2\pi \lambda_{n-1} L} \ln \frac{r_n}{r_{n-1}} \\
 T_{n+1} - T_n &= \frac{\Phi}{2\pi \lambda_n L} \ln \frac{r_{n+1}}{r_n} \\
 T_{n+1} - T_e &= \frac{1}{h_e} \frac{\Phi}{2\pi r_{n+1}}
 \end{aligned}$$

donde  $h_i$  y  $h_e$  son los coeficientes de convección en las paredes interna y externa, respectivamente. Sumando todas estas expresiones se obtiene

$$T_i - T_e = \frac{\Phi}{L} \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{h_i r_1} + \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \dots + \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{r_{n+1}}{r_n} + \frac{1}{h_e r_{n+1}} \right\}$$

que de forma más resumida puede escribirse en la forma

$$T_i - T_e = \frac{\Phi}{L} \left[ \frac{1}{2\pi h_i r_1} + \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} \right) + \frac{1}{2\pi h_e r_{n+1}} \right]. \quad (1-57)$$

Esto puede escribirse como el flujo térmico por unidad de longitud en la forma

$$\frac{\Phi}{L} = U_L (T_i - T_e), \quad (1-58)$$

donde

$$U_L = \left[ \frac{1}{2\pi h_i r_1} + \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} \right) + \frac{1}{2\pi h_e r_{n+1}} \right]^{-1} \quad (1-59)$$

es el *coeficiente lineal global de transmisión del calor* o *coeficiente lineal de transmisión del calor aire-aire* y su inversa

$$R_L = \frac{1}{2\pi h_i r_1} + \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} \right) + \frac{1}{2\pi h_e r_{n+1}} \quad (1-60)$$

la *resistencia térmica lineal global a la transmisión del calor* o *resistencia térmica lineal aire-aire* para la pared cilíndrica en estas condiciones.

## Capítulo 2

# Fenómenos de transporte: procesos de difusión.

### 2.1. Conceptos fundamentales y leyes.

Muchos procesos de transferencia de calor que se encuentran en la naturaleza vienen acompañados por procesos de transferencia de masa de un componente a través del otro. Esto se tiene, por ejemplo, en la condensación del vapor procedente de una mezcla gas-vapor y en la evaporación de un líquido en una mezcla gas-vapor. El líquido evaporado se distribuye por la mezcla gas-vapor por difusión, viniendo acompañado este proceso de un cambio en la naturaleza de la mezcla y de una variación en la intensidad de transferencia de calor, lo que a su vez influye en el proceso de difusión.

Se entiende por *difusión* el proceso espontáneo de extensión o esparcimiento de materia en un medio binario o sistema de dos componentes bajo la influencia de la diferencia de concentración. En una mezcla homogénea en lo referente a la temperatura y la presión, la difusión tiende a homogeneizar las concentraciones en el sistema, viniendo acompañada de transferencia de masa de la región de alta concentración a la región de baja concentración. El flujo de difusión se puede determinar de cualquier manera, como masa de la sustancia disuelta que pasa por unidad de tiempo y de área, como número de moléculas, etc...

La difusión está caracterizada por el *flujo de difusión*  $J$  de un componente, esto es, por la cantidad de materia que pasa en la unidad de tiempo a través de una superficie dada en la dirección normal a la superficie. Definiremos la *densidad de flujo de difusión*  $j$  como la cantidad de sustancia que pasa en la unidad de tiempo a través de la unidad de área de la superficie dada en la dirección normal a esta superficie.

$$j = \frac{dJ}{dS} \quad (2-1)$$

y, por tanto:

$$J = \int_S j dS$$

quedando, para  $j$  uniforme:

$$J = jS$$

La densidad de flujo de difusión es un vector. Consideraremos que el valor de una de sus componentes es positivo cuando ésta esté dirigida hacia el sentido positivo del eje, y negativo en caso contrario.

Como la sustancia se traslada de los lugares de mayor concentración a los de menor concentración, el signo de la componente del flujo en una dirección será el contrario del que da la derivada de la concentración en esa dirección  $\frac{\partial c}{\partial n}$ . Si la concentración aumenta de izquierda a derecha, el flujo va hacia la izquierda y viceversa. Además, si la concentración de la solución es uniforme  $\frac{\partial c}{\partial n} = 0$ , no habrá flujo de difusión. Considerando todo esto, para un sistema estacionario macroscópico de dos componentes, homogéneo en lo que respecta a temperatura y presión, la densidad de flujo de difusión de uno de los componentes, debido a difusión molecular, viene dada por la *Ley de Fick*:

$$j_i = -D \frac{\partial c_i}{\partial n} \quad (2-2)$$

o, en la forma vectorial habitual:

$$\vec{j}_i = -D \vec{\nabla} c_i \quad (2-3)$$

donde

$c_i$  es la concentración local de la sustancia (componente)  $i$ -ésima. Puede medirse en masa por unidad de volumen, moles por unidad de volumen, etc...

$D$  es el *coeficiente de difusión molecular* de un componente respecto del otro o, de forma abreviada, el *coeficiente de difusión* [ $\text{m}^2/\text{s}$ ].

$n$  es la dirección normal a la superficie que une los puntos con similar concentración del componente.

$\frac{\partial c_i}{\partial n}$  es el *gradiente de concentración* (concentración relativa) que está siempre dirigido hacia el sentido creciente de las concentraciones.

El gradiente de concentraciones es la fuerza motriz que determina la transferencia de materia. Esto es equivalente al caso de la conducción del calor, donde la fuerza motriz que determina la transferencia de energía es el gradiente de temperaturas.

El signo negativo en la ecuación (2-3) indica que el movimiento de masa por difusión tiene lugar, de acuerdo con la ley de Fick, hacia las regiones de menor concentración. A este proceso descrito por la ley de Fick se le denomina *difusión por concentración*.

De acuerdo con consideraciones de la teoría cinética de los gases, el coeficiente de difusión aumenta cuando la temperatura crece, y disminuye cuando la presión aumenta. También depende en cierta medida de las proporciones de la mezcla, pero esta dependencia es pequeña cuando la concentración del componente considerado es pequeña, y es habitualmente ignorada en los cálculos. El coeficiente de difusión es idéntico para los dos componentes que se difunden mutuamente en una mezcla de dos componentes. Sus unidades son [ $\text{m}^2/\text{seg}$ ] en el sistema internacional y su valor no depende de la forma en que midamos  $\vec{j}$ , siempre que la densidad de flujo de difusión  $\vec{j}$  y la concentración  $c$  utilicen la misma forma de medir la materia.

Al hablar de difusión se ha sobreentendido que ésta tiene lugar en un medio en reposo, de forma que la igualación de las concentraciones es debida exclusivamente al movimiento térmico desordenado de las distintas moléculas. Se supone que el líquido o gas no se mezcla debido a acción exterior alguna que lo ponga en movimiento.

Sin embargo este tipo de mezcla puede aparecer en el fluido por la acción de la fuerza gravitatoria. Si se vierte un líquido más ligero sobre agua, por ejemplo, alcohol, la mezcla se producirá por difusión, pero si se vierte agua sobre alcohol, el agua descenderá como líquido más pesado.

De este modo vemos que es posible, bajo la acción del campo gravitatorio, uniformizar la composición del medio en un proceso acompañado de movimiento del mismo. A este fenómeno se le denomina también *convección*, siendo la igualación de concentración producida por convección más rápida que la producida por difusión. Este proceso es análogo al de la convección que ya hemos visto, en el cual el aire frío más denso desplaza al aire caliente más ligero de las zonas bajas.

## 2.2. Difusión del vapor.

Dentro de los procesos de difusión, el problema de la difusión del vapor a través de los cerramientos de las edificaciones tiene una importancia especial, ya que puede provocar en los mismos consecuencias indeseables no previstas.

La mayoría de los materiales son en mayor o menor medida permeables al agua, y por tanto son además permeables al vapor, pero también se tienen materiales impermeables al agua que por el contrario son permeables al vapor de agua, ya que el vapor puede atravesar intersticios que el agua no puede. El transporte de vapor de agua se realiza bien con el aire en movimiento, o bien por el aire macroscópicamente inmóvil en una difusión por concentración. Ésta es la forma en que el vapor de agua viaja a través de ladrillos y demás materiales permeables, que a su vez, presentan una cierta resistencia al paso de vapor de agua a su través.

### 2.2.1. La ley de transporte del vapor de agua.

Como en otros procesos de difusión por concentración, el vapor de agua se difunde desde las zonas de mayor concentración a las zonas de menor concentración. En el caso de la difusión de vapor de agua a través de los materiales, es habitual representar la concentración de vapor de agua a través de la tensión de vapor. La ley de Fick particularizada a este caso se escribe como

$$\vec{j}_v = -d_v \vec{\nabla} e \quad (2-4)$$

donde  $\vec{j}_v$  es la *densidad de flujo de difusión* del vapor de agua (de unidades  $[\text{kg}/\text{m}^2\text{s}]$ ),  $d_v$  la *difusividad al vapor* (unidades:  $[\text{kg m}/\text{N s}] \equiv \text{s}$ ) que es una característica del material, y  $e$  la tensión de vapor. A la inversa de la difusividad al vapor  $r_v = 1/d_v$  se le denomina *resistividad al vapor*, y sus unidades son, en el sistema internacional  $[\text{N S}/\text{kg m}]$  ( $\equiv \text{s}^{-1}$ ).

### 2.2.2. Difusión del vapor a través de paredes planas

Consideremos el caso particular de difusión del vapor a través de una pared plana de espesor  $a$  y difusividad al vapor  $d_v$ , siendo  $e_1$  y  $e_2$  las tensiones de vapor antes y después de la pared, respectivamente (por simplicidad, consideraremos  $e_2 > e_1$ ). En este caso, la ecuación (2-4) da directamente

$$j_v = \frac{d_v}{a}(e_2 - e_1) \quad (2-5)$$

que se puede escribir como

$$j_v = D_v(e_2 - e_1) \quad (2-6)$$

donde  $D_v$  es el *coeficiente de difusión al vapor*, de unidades  $[\text{kg}/\text{N s}]$  ( $\equiv \text{m}$ ) y su inversa  $R_v = 1/D_v$  es la *resistencia al vapor*, de unidades  $[\text{N s}/\text{kg}]$  ( $\equiv \text{m}/\text{s}$ ).

Si en vez de una única capa tenemos una serie de capas planas de espesores  $a_1, a_2, \dots, a_n$  y difusividades al vapor  $d_{v_1}, d_{v_2}, \dots, d_{v_n}$ , las densidades de flujo de difusión a través de cada una de ellas serán de

$$\begin{aligned} j_{v_1} &= D_{v_1}(e_2 - e_1) \\ j_{v_2} &= D_{v_2}(e_3 - e_2) \\ &\dots \\ j_{v_n} &= D_{v_n}(e_{n+1} - e_n) \end{aligned}$$

En régimen estacionario el flujo a través de todas las capas es el mismo, y si se escriben las ecuaciones anteriores como

$$\begin{aligned} e_2 - e_1 &= \frac{1}{D_{v_1}} j_v = R_{v_1} j_v \\ e_3 - e_2 &= \frac{1}{D_{v_2}} j_v = R_{v_2} j_v \\ &\dots \\ e_{n+1} - e_n &= \frac{1}{D_{v_n}} j_v = R_{v_n} j_v \end{aligned}$$

y se suman, se tiene

$$e_{n+1} - e_1 = \left( \frac{1}{D_{v_1}} + \frac{1}{D_{v_2}} + \dots + \frac{1}{D_{v_n}} \right) j_v = (R_{v_1} + R_{v_2} + \dots + R_{v_n}) j_v$$

que puede escribirse como

$$e_{n+1} - e_1 = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{d_{v_i}} j_v = \left[ \sum_{i=1}^n \frac{1}{D_{v_i}} \right] j_v = \left[ \sum_{i=1}^n R_{v_i} \right] j_v = R_v j_v = \frac{1}{D_v} j_v \quad (2-7)$$

donde  $R_v = \sum_i R_{v_i}$  es la resistencia al vapor del muro completo y  $D_v = 1/R_v$  el coeficiente de difusión al vapor del muro completo.

### 2.3. Difusión térmica.

Cuando hemos hablado de difusión en una mezcla de gases, se ha considerado únicamente el caso en el que tanto la temperatura como la presión del gas son iguales en todas partes, de forma que la única causa de la difusión es el gradiente de concentraciones en la mezcla. Sin embargo, el gradiente de temperaturas también puede dar lugar a una difusión, incluso si la mezcla es de composición uniforme.

Para ver esto consideremos una superficie imaginaria en un medio de concentración uniforme, con distintas temperaturas a cada lado de la superficie. Como las moléculas que se encuentran en el lado de la superficie de mayor temperatura tienen un movimiento térmico mayor, cuando se considera el balance de moléculas que atraviesan la citada superficie tanto en el sentido de temperaturas crecientes como en el sentido de temperaturas decrecientes, se observa que hay un flujo neto de partículas desde un lado a otro. A este proceso en el que aparece un flujo de difusión debido al gradiente de temperaturas se le llama *difusión térmica*. Este es un fenómeno muy importante sobre todo en gases, aunque se presenta también en las mezclas líquidas.

En la difusión térmica, la densidad de flujo de difusión, al que designaremos  $j_T$  es proporcional al gradiente de temperatura del gas y se ha establecido expresarlo de la siguiente manera:

$$j_T = D_T \frac{1}{T} \frac{dT}{dn} \quad (2-8)$$

o, en forma vectorial en función del gradiente de temperaturas:

$$\vec{j}_T = D_T \frac{1}{T} \vec{\nabla} T \quad (2-9)$$

donde a la magnitud  $D_T$  se le denomina *coeficiente de difusión térmica*. Mientras que el coeficiente de difusión  $D$  es siempre positivo, el signo del coeficiente de difusión térmica es en principio indeterminado y depende del flujo de la componente de la mezcla en cuestión.

Cuando la concentración de una componente cualquiera en la mezcla tiende a cero, el coeficiente de difusión térmica de esa componente debe de tender a cero, ya que en el gas puro, evidentemente no hay difusión de la componente que no está presente. De este modo, vemos que el coeficiente de difusión térmica depende considerablemente de la concentración de la mezcla, de nuevo al contrario que el coeficiente de difusión corriente.

Debido a la difusión térmica, en una mezcla gaseosa de composición originalmente homogénea, aparecen diferencias de concentraciones entre lugares calentados de distinta forma. Estas diferencias de concentraciones producen, a su vez, una difusión corriente que actúa en el sentido contrario, tendiendo a anular el gradiente de concentración producido. En condiciones estacionarias, si se mantiene en el gas un gradiente de temperaturas constante, estos dos procesos opuestos acaban conduciendo a un estado estacionario en el que los dos flujos se compensan, manteniéndose una determinada diferencia entre las composiciones de las regiones fría y caliente del gas.

## Capítulo 3

# Transmisión del calor: radiación.

### 3.1. Conceptos básicos de la radiación.

Por el hecho de encontrarse a una cierta temperatura todos los cuerpos emiten radiación electromagnética con unas características que dependen del cuerpo y de la temperatura de emisión. En la transmisión del calor por radiación un cuerpo cede parte de su energía interna a través de la emisión de *ondas electromagnéticas* (que viajan a la velocidad de la luz y no necesitan de un medio material para su propagación). Al absorberse estas ondas electromagnéticas por otros cuerpos, su energía pasa de nuevo a un movimiento térmico de las moléculas y, por tanto, a un aumento de temperatura. A su vez, estos cuerpos se encuentran a una temperatura y por tanto emiten radiación electromagnética que puede ser absorbida por otros cuerpos intercambiándose energía entre los mismos.

Así, el proceso de intercambio de energía por radiación es un proceso de absorción y emisión posterior de energía en forma de fotones por parte de los átomos y moléculas de una sustancia.

#### 3.1.1. El espectro de la radiación electromagnética.

La *radiación electromagnética* consiste en una perturbación armónica de los campos eléctrico y magnético que se propaga por el espacio. Ambos campos oscilan en direcciones perpendiculares y la propagación tiene lugar en la dirección perpendicular a ambas perturbaciones como se muestra en la figura 3-1 para el caso de una onda electromagnética plana polarizada linealmente.

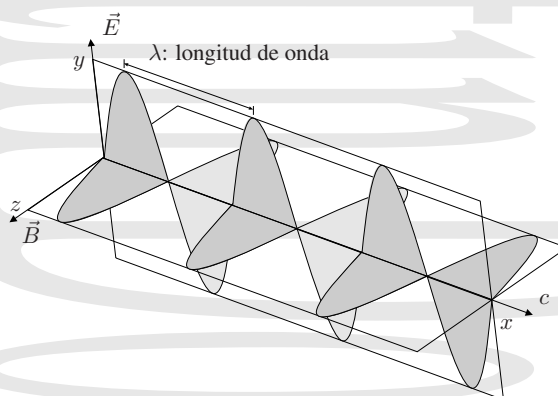
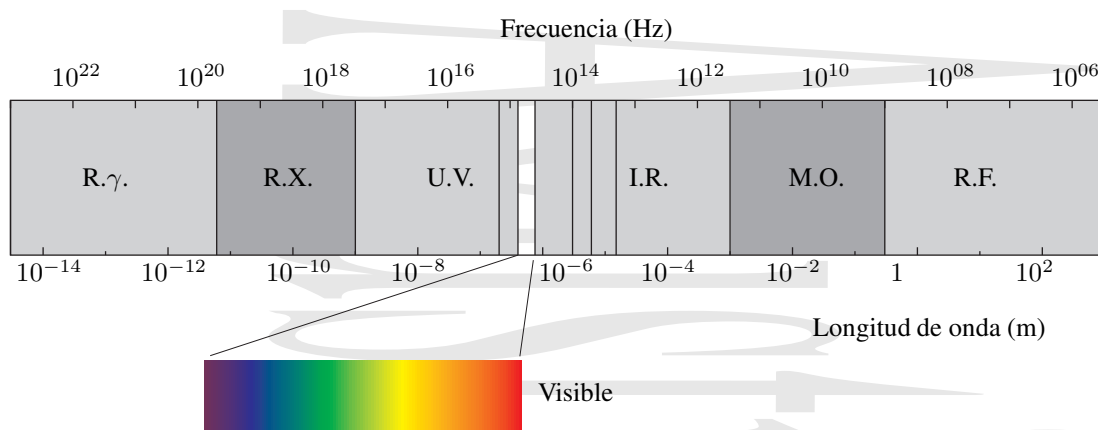


Figura 3-1: Onda electromagnética plana polarizada linealmente.

La radiación electromagnética se caracteriza bien por su *longitud de onda*  $\lambda$ , bien por su *frecuencia de oscilación*  $\nu$ , relacionadas ambas por la expresión  $\nu = c/\lambda$  donde  $c$  es la velocidad de propagación. Todos los tipos de radiación electromagnética no son en el fondo más que ondas electromagnéticas de distintas longitudes de onda. Así, la diferencia fundamental entre los rayos  $\gamma$ , los rayos X, la radiación ultravioleta, la radiación visible, la radiación infrarroja, la radiación de microondas o las radiofrecuencias no está en su naturaleza, sino en las distintas energías de cada fotón u onda electromagnética dadas por  $h\nu$ , con  $h = 6,624 \cdot 10^{-34}$  J s la *constante de Planck*. Los diferentes rangos correspondientes a los distintos tipos de radiación electromagnética se muestran en el *espectro de la radiación electromagnética* de la figura 3-2.

Cuando un cuerpo se calienta, emite radiación electromagnética de una longitud de onda  $\lambda$  que se encuentra típicamente comprendida en el rango de longitudes de onda de 0,1 a  $100\mu\text{m}$ , a la que se denomina *radiación térmica*. Lo que denominamos *radiación visible* o *espectro visible* es una porción muy estrecha del espectro y de la radiación



**Figura 3-2:** El espectro de la radiación electromagnética. La región visible es sólo una pequeña parte del espectro total. R.γ. se refiere a radiación gamma, R.X. a rayos X, U.V. a ultravioleta, I.R. a infrarrojo, M.O. a microondas y R.F. a radiofrecuencias. A su vez el ultravioleta se divide en cercano por un lado y lejano por el otro, separados en la figura por una línea vertical y el infrarrojo en cercano, intermedio, lejano y extremo, también separados en la figura por rayas verticales. Las microondas y las radiofrecuencias también se dividen a su vez en distintas bandas.

térmica, que se extiende aproximadamente desde  $0,35\mu\text{m}$  hasta  $0,75\mu\text{m}$ , como se muestra en la figura 3-2. Antes de calentarse el cuerpo también emitía radiación electromagnética, pero de longitudes de onda mayores (menor energía) y estaba en equilibrio térmico con el medio, esto es, emitía lo mismo que absorbía. A la distribución de energía emitida en función de la longitud de onda o frecuencia de la radiación se le denomina *espectro de la radiación*.

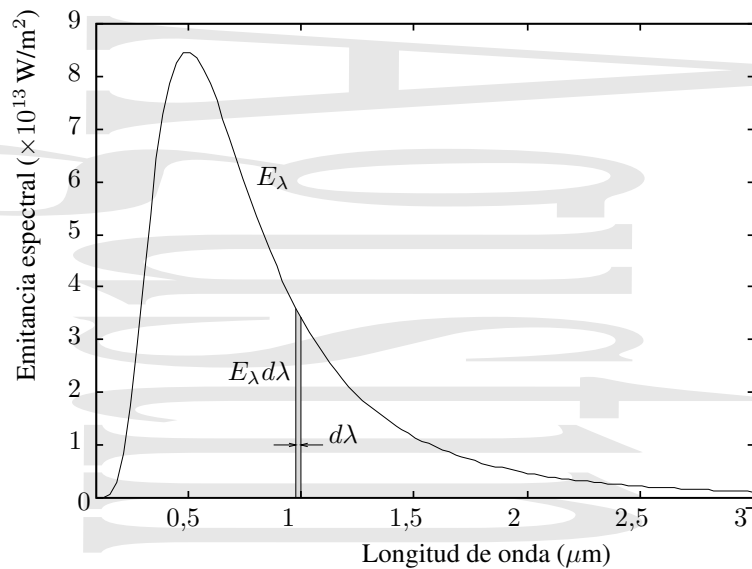
La mayor parte de los sólidos y los líquidos emiten con un *espectro continuo* de radiación, es decir, emiten energía en todas las longitudes de onda desde cero a  $\infty$ , aunque la intensidad con que lo hacen depende fuertemente de la región del espectro en la que se observa la radiación emitida. Por el contrario, en el caso de gases y vapores, o en el caso de muchos metales con la superficie pulida, se tiene un *espectro de emisión selectivo*. Sólo se produce emisión a unas determinadas longitudes de onda. En general, esta energía emitida se debe a transiciones entre los estados electrónicos, vibracionales o rotacionales de los átomos o moléculas. La intensidad de la radiación emitida depende de:

- Naturaleza de la sustancia.
- Temperatura de la sustancia.
- Longitud de onda  $\lambda$ .
- Estado de la superficie emisora.
- En los gases, también de la presión del gas y del espesor de la capa del mismo.

En los sólidos y líquidos opacos se produce una considerable absorción y emisión y, por tanto, solamente una fina capa superficial interviene en el proceso de transmisión del calor por radiación (el calor se transmite al resto del cuerpo por conducción y convección más que por radiación). Para los cuerpos no conductores opacos, el espesor típico de esta capa es de  $\sim 1\text{mm}$ , mientras que para los conductores opacos, el espesor típico es de  $\sim 1\mu\text{m}$ . En ambos casos, éste fenómeno se considera como un fenómeno de superficie. Para cuerpos semitransparentes (vidrios, gases, vapores, cristales, etc...), toda la sustancia interviene en el proceso de transmisión del calor por radiación.

La energía radiante de un emisor aumenta con la temperatura, ya que su energía interna aumenta. Cuando la temperatura cambia, no sólo cambia la magnitud absoluta de la energía, sino también su distribución en longitudes de onda (el espectro de la radiación). Al aumentar la temperatura aumenta la proporción de radiación de longitud de onda corta (alta frecuencia-alta energía) mientras que al disminuir la temperatura aumenta la proporción de radiación de longitud de onda larga (baja frecuencia-baja energía). La transmisión del calor por radiación térmica depende de la temperatura de una forma mucho más acusada que en el caso de la conducción o la convección, pudiendo a altas temperaturas convertirse en el mecanismo principal de transmisión de energía.





**Figura 3-3:** Emitancia espectral  $E_\lambda$  de un sustancia en función de la longitud de onda. En la figura se muestra la emisión de un cuerpo negro a 5800 K.

### 3.1.2. Definiciones previas.

Definimos en primer lugar algunas magnitudes necesarias para el cálculo de los intercambios de calor por radiación. Al igual que en la conducción del calor por conducción y convección hablaremos de *densidad de flujo energético* como la energía radiante que se propaga por unidad de tiempo y de superficie perpendicular al flujo y de *flujo energético* como la energía radiante atraviesa una cierta superficie real o imaginaria por unidad de tiempo, pero junto a estas definiciones añadiremos otras relacionadas con la fuente radiante.

**Flujo energético de una fuente radiante,  $\Phi$ .** Si tenemos una fuente  $F$  que emite energía radiante, su flujo energético es la energía irradiada por unidad de tiempo en todo el espacio que la rodea (ángulo sólido  $4\pi$ ). Para medirla habría que rodear completamente la fuente por un detector que absorbiera toda la energía emitida. Se mide en vatios o en cualquier otra unidad de energía por unidad de tiempo como la kcal/hora.

**Flujo monocromático o espectral de una fuente radiante,  $\Phi_\lambda$ .** Se denomina flujo espectral o monocromático al flujo energético emitido por unidad de longitud de onda, correspondiente a las radiaciones de longitud de onda comprendida entre  $\lambda$  y  $\lambda + d\lambda$ . Se mide en vatios/metro, kcal/hm u otra unidad similar.

**Poder emisivo o emitancia de una fuente,  $E$ .** Es la energía irradiada por unidad de tiempo por un elemento plano de superficie unidad en todo el espacio que le rodea,  $E = \Phi/S$ . Para una superficie no plana, es necesario referirnos a un punto  $P$  de la fuente para definir la emitancia en la forma:

$$E = \frac{d\Phi}{dS} \quad (3-1)$$

donde  $d\Phi$  es la irradiada por unidad de tiempo por el elemento de área  $dS$  tangente a la fuente en  $P$ .

**Emitancia monocromática o espectral  $E_\lambda$**  de una fuente en un punto. Si  $d^2\Phi$  es el flujo radiante emitido por el elemento de superficie  $dS$  situado en el punto  $P$  de la fuente en el intervalo de longitudes de onda de anchura  $d\lambda$  y origen en  $\lambda$ , se denomina emitancia monocromática a la expresión

$$E_\lambda = \frac{d^2\Phi}{dSd\lambda} = \frac{d\Phi_\lambda}{dS} = \frac{dE}{d\lambda} \quad (3-2)$$

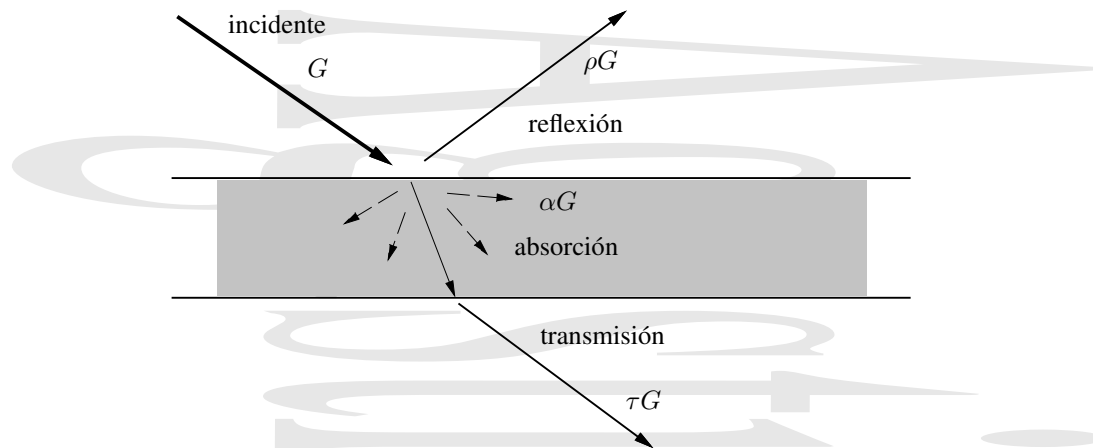


Figura 3-4: Absorción, reflexión y transmisión de la radiación a través de un medio.

Operando en esta definición, se tiene:

$$\frac{d\Phi}{dS} = E = \int_0^{\infty} E_{\lambda} d\lambda$$

y además se tiene:

$$d\Phi = dS \int_0^{\infty} E_{\lambda} d\lambda \quad \text{y} \quad \Phi = \int_S dS \int_0^{\infty} E_{\lambda} d\lambda$$

Para una sustancia condensada (sólido o líquido) el valor de  $E_{\lambda}$  se distribuye en función de  $\lambda$  según una curva continua como la que se presenta en la figura 3-3. El área rayada corresponde a la energía emitida por unidad de superficie y de tiempo en el intervalo de longitudes de onda comprendido entre  $\lambda$  y  $\lambda + d\lambda$ , es decir  $E_{\lambda} d\lambda$ .

El área total bajo la curva es  $E = \int_0^{\infty} E_{\lambda} d\lambda$  y representa el flujo radiante total emitido por unidad de superficie de la fuente en todo el espectro, es decir, la emitancia de la fuente. Cuando la temperatura crece, el máximo de la emisión se desplaza hacia las longitudes de onda cortas (alta energía).

La emitancia espectral también se puede expresar en función de la frecuencia (y por unidad de intervalo de frecuencia) o en función de la frecuencia angular (nótese que en estos casos las unidades de la emitancia espectral cambian). Los símbolos correspondientes serían  $E_{\nu}$  y  $E_{\omega}$ .

### 3.1.3. Absorción, reflexión y transmisión de la radiación.

Consideremos un haz de energía radiante que incide sobre una superficie. Denominaremos  $G$  [ $\text{Wm}^{-2}$ ] a la energía radiante global incidente.<sup>†</sup> Una parte  $\alpha G$  de la energía incidente  $G$  se absorbe en el material, una parte  $\rho G$  de la energía incidente  $G$  se refleja en la superficie y finalmente, una parte  $\tau G$  de la energía incidente se transmite a través del cuerpo, como se ve en la figura 3-4. Los coeficientes que aparecen son:

**$\alpha$ : Poder absorbente, coeficiente de absorción o absorptividad,** representa la fracción de la energía incidente absorbida por el cuerpo.

**$\rho$ : Poder reflector, coeficiente de reflexión o reflectividad,** representa la fracción de la energía incidente que es reflejada por la superficie.

**$\tau$ : Poder de transmisión, coeficiente de transmisión o transmitividad,** representa la fracción de la energía incidente que se transmite a través del cuerpo.

El balance energético da la relación:

$$\alpha G + \rho G + \tau G = G$$

<sup>†</sup>Por ejemplo, para el Sol, medida fuera de la atmósfera terrestre,  $G = 1353 \text{ Wm}^{-2}$  es la denominada constante solar, que representa la energía incidente por unidad de tiempo y de superficie perpendicular al flujo.

es decir:

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \quad (3-3)$$

Un cuerpo opaco no transmite nada de la radiación incidente, luego para una *superficie opaca*  $\tau = 0$  y  $\alpha + \rho = 1$ . Un reflector perfecto refleja toda la radiación incidente. Así, para un *reflector perfecto*,  $\rho = 1$  y  $\alpha = \tau = 0$ . Un absorbente perfecto (cuerpo negro) absorbe toda la radiación incidente. Por tanto, para un *absorbente perfecto*,  $\alpha = 1$  y  $\tau = \rho = 0$ . Para la mayor parte de los gases se cumple  $\alpha = \rho \simeq 0$  y  $\tau \simeq 1$ .

Se pueden definir los factores monocromáticos o espectrales en la forma:

$$\alpha_\lambda = \frac{\text{energía incidente absorbida en el intervalo } \lambda \rightarrow \lambda + d\lambda}{\text{energía incidente en ese intervalo de } \lambda}$$

$$\rho_\lambda = \frac{\text{energía incidente reflejada en el intervalo } \lambda \rightarrow \lambda + d\lambda}{\text{energía incidente en ese intervalo de } \lambda}$$

$$\tau_\lambda = \frac{\text{energía incidente transmitida en el intervalo } \lambda \rightarrow \lambda + d\lambda}{\text{energía incidente en ese intervalo de } \lambda}$$

cumpliéndose, para cada  $\lambda$ :

$$\alpha_\lambda + \rho_\lambda + \tau_\lambda = 1 \quad (3-4)$$

Si se denomina  $G_\lambda$  a la distribución espectral de  $G$ , entre los factores  $\alpha$  y  $\alpha_\lambda$  existe la relación:

$$\alpha = \frac{\text{energía absorbida}}{\text{energía incidente}} = \frac{\int_0^\infty G_\lambda \alpha_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda d\lambda} \quad (3-5)$$

cumpliéndose para  $\rho$  y  $\tau$  las relaciones análogas con  $\rho_\lambda$  y  $\tau_\lambda$ :

$$\rho = \frac{\text{energía reflejada}}{\text{energía incidente}} = \frac{\int_0^\infty G_\lambda \rho_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda d\lambda} \quad (3-6)$$

y

$$\tau = \frac{\text{energía transmitida}}{\text{energía incidente}} = \frac{\int_0^\infty G_\lambda \tau_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda d\lambda} \quad (3-7)$$

Para la radiación solar, los límites típicos de la integral son en la práctica de 0,25 y 3  $\mu\text{m}$ . Fuera de este rango espectral, apenas hay emisión solar.

## 3.2. Leyes de la radiación.

### 3.2.1. Radiación en el interior de una cavidad.

Denominaremos *cavidad* a un recinto hueco, cerrado, de paredes isotermas. Conocemos por experiencia que la radiación emitida por el exterior de la cavidad hacia fuera depende tanto de la temperatura como de la naturaleza de las paredes de la cavidad. Por ejemplo, una cavidad de paredes externas rojas tendrá un aspecto muy diferente al de una cavidad de paredes externas verdes o azules. Sin embargo, hay una característica muy especial de la radiación dentro de la cavidad. Se puede demostrar que, en dicha cavidad, cuando todo el sistema está en equilibrio,

*Cualquiera que sea la naturaleza de los materiales de las paredes interiores de la cavidad, la densidad de energía de la radiación en el interior de la cavidad depende exclusivamente de la temperatura de las paredes, mientras que la densidad espectral de energía depende exclusivamente de la temperatura y de la longitud de onda.*

Es decir:

$$u = u(T) \quad (3-8a)$$

$$u_\lambda = u_\lambda(\lambda, T) \quad (3-8b)$$

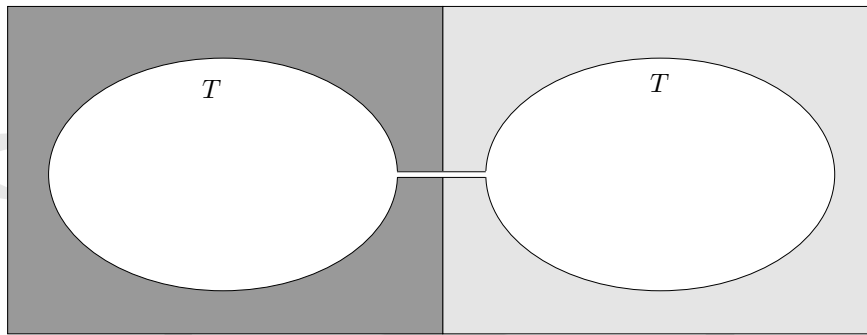


Figura 3-5: Dos cavidades de paredes de distinta naturaleza, pero a la misma temperatura.

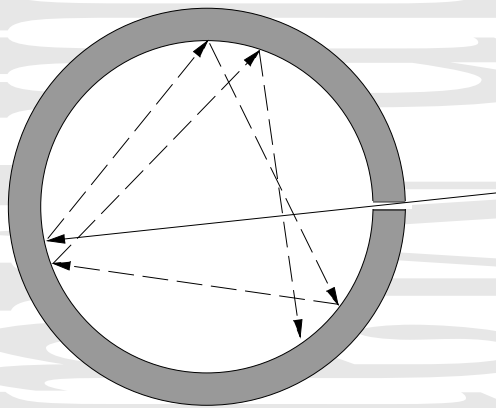


Figura 3-6: Cavidad como un cuerpo negro.

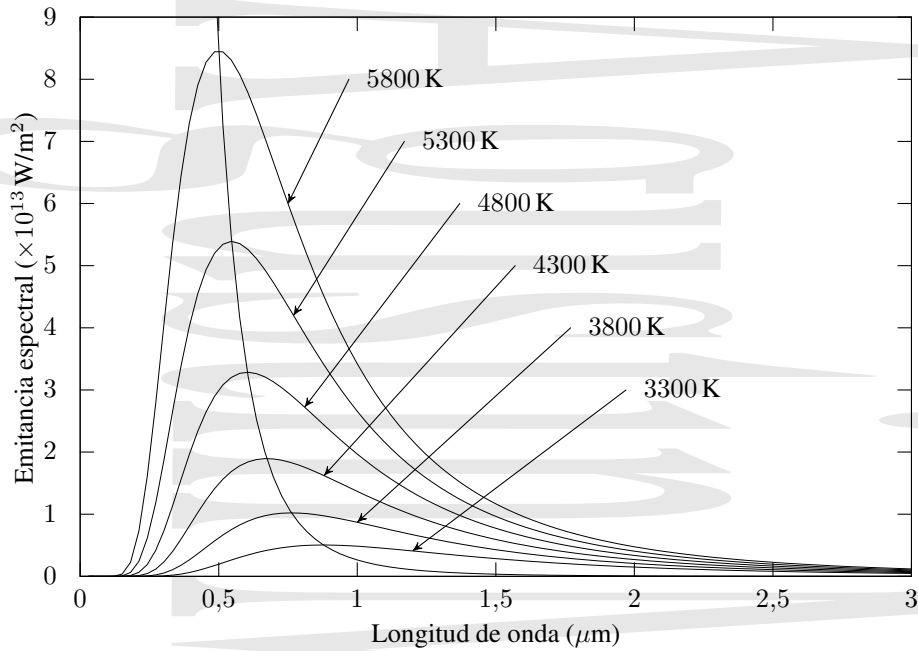
Para demostrar esto, consideraremos el caso de dos cavidades con paredes de distinta naturaleza que se encuentran a la misma temperatura, como se ilustra en la figura 3-5. Si las intensidades de radiación fueran distintas, habría un transporte neto de energía desde una de las cavidades a la otra. Esto contradeciría el segundo principio de la Termodinámica, ya que una cavidad se enfriaría y la otra se calentaría sin que se realizara trabajo sobre el sistema, luego las intensidades de radiación son iguales independientemente de la naturaleza de las paredes. Para extender este argumento a la densidad de energía espectral  $u_\lambda$  bastaría con colocar en el agujero de comunicación entre las dos cavidades un filtro que dejara pasar solamente la radiación en el estrecho rango entre  $\lambda$  y  $\lambda + d\lambda$ . De este modo, las densidades espectrales de energía de ambas cavidades deberían de ser iguales por la misma razón que antes.

Para ver que además debe de ser homogénea e isotrópica consideremos la presencia de un cuerpo alargado en el interior de la cavidad a la misma temperatura de las paredes. El hecho de que el cuerpo esté colocado en uno u otro sitio, o con sus superficies en una u otra orientación no hará que abandone el equilibrio térmico, a no ser que haya una intervención externa, ya que el que no fuera así iría contra el segundo principio de la Termodinámica. Por tanto, la radiación en el interior de la cavidad es además *homogénea e isotrópica*.

### 3.2.2. Cuerpo negro. Ley de Planck.

Se entiende por *cuerpo negro* aquel cuerpo que absorbe toda la energía incidente en todo el espectro de longitudes de onda ( $\alpha_\lambda = 1 = \alpha$  para todas las  $\lambda$ ). Aunque ningún cuerpo se comporta como un cuerpo negro perfecto, una cavidad con las paredes pintadas de negro y dotada de un pequeño orificio actúa de forma bastante similar a como lo haría un cuerpo negro, ya que la radiación incidente tiene pocas oportunidades de escapar (Figura 3-6).

Max Planck (1900) demostró, basándose en la Mecánica Cuántica, que la emitancia monocromática de un cuerpo



**Figura 3-7:** Dependencia de la emitancia espectral de un cuerpo negro con la longitud de onda para distintas temperaturas, según la ley de Planck (3-9). También se muestra la evolución de los máximos de emisión para dicho cuerpo negro.

negro que se encuentra a una temperatura  $T$  viene dada por la expresión:

$$E_{\lambda}^0(\lambda, T) = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{hc} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1} \quad (3-9)$$

conocida como *Ley de Planck*, en la cual  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío ( $2,998 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$ ),  $h$  una constante conocida como *constante de Planck* ( $6,625 \cdot 10^{-34} \text{ Js}^{-1}$ ), y  $k_B$  la constante de Boltzmann ( $1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ ).

La ley de Planck también puede expresarse para la emitancia monocromática en frecuencias o en frecuencias angulares por unidad de intervalo de las mismas (nótese que las unidades son distintas en cada caso)

$$E_{\nu}^0(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{h\nu} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad (3-10a)$$

$$E_{\omega}^0(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{\nu^3}{\hbar \omega} \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} - 1} \quad (3-10b)$$

con  $\hbar = h/2\pi$ .

La ley de Planck nos da una función continua de emisión para el cuerpo negro y se representa en la figura 3-7 para distintas temperaturas. Como se ve en la figura, al aumentar la temperatura la emisión de un cuerpo negro aumenta en cada longitud de onda y el máximo se desplaza hacia longitudes de onda menores. La radiación emitida por un cuerpo negro es independiente de la dirección y por tanto es *radiación difusa* que sigue la ley de Lambert (sección 3.2.8).

### 3.2.3. Ley del desplazamiento de Wien.

Experimentalmente ya se había observado que la emisión máxima de un cuerpo negro tiene lugar a longitudes de onda cada vez más cortas según crece la temperatura. La ley de Planck prevé este comportamiento y permite obtener el máximo de la emisión mediante un sencillo cálculo de máximos.

$$\left. \frac{dE_{\lambda}^0(\lambda, T)}{d\lambda} \right|_{T \text{ cte}} = 0.$$

Por simplicidad es preferible utilizar una variable intermedia  $x$  de forma que el cálculo de máximos se reduce a

$$\left. \frac{dE_{\lambda}^0(x, T)}{dx} \right|_{T \text{ cte}} = 0, \quad \text{con } x = \frac{hc}{k_B T \lambda}$$

quedando, al derivar y simplificar

$$x_{\text{máx}} = 5 \left( 1 - e^{-x_{\text{máx}}} \right).$$

Esta expresión debe resolverse de forma numérica o gráfica, obteniéndose que el poder emisor espectral del cuerpo negro alcanza su máximo a  $x_{\text{máx}} = 4,9651$  para una temperatura  $T$  dada. Deshaciendo el cambio de variable, se obtiene que para cada temperatura  $T$ , el máximo aparece a una  $\lambda_{\text{máx}}$  tal que se cumple

$$T \cdot \lambda_{\text{máx}} = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m} = 2898 \text{ K} \cdot \mu\text{m} \quad \left( = \frac{hc}{k_B x_{\text{máx}}} \right) \quad (3-11)$$

expresión conocida como *ley del desplazamiento de Wien*, que coincide con la ley de Wien experimental que ya era conocida previamente.

Así, según la ley de Wien, cuando en una lámpara incandescente normal una corriente atraviesa un delgado filamento de tungsteno, que se encuentra a una temperatura máxima de unos 2800 – 3000 K, la longitud de onda de la máxima emisión sería de unas 0,97  $\mu\text{m}$ , resultado que concuerda con la experiencia. Este máximo de emisión se encuentra en el infrarrojo, por lo que aunque el filamento de tungsteno emite una fracción en el visible, emite mucho más en el infrarrojo. No es posible aumentar mucho más la temperatura del filamento de una lámpara incandescente ya que al aproximarse hacia la temperatura de fusión del tungsteno (El tungsteno funde a 3653 K) éste comienza a evaporarse, degradándose rápidamente el filamento. En las lámparas halógenas incandescentes el filamento alcanza una temperatura algo mayor (3000 – 3300 K), pero con un máximo de emisión que aún se encuentra fuera de la zona visible del espectro. Todas estas lámparas incandescentes dan una luz cálida.

Para el Sol, con una temperatura en la superficie del orden de los 5800 K,  $\lambda_{\text{máx}} = 0,5 \mu\text{m}$ , que corresponde a un verde en la zona central de la región visible del espectro. El ojo humano está adaptado a este máximo de emisión, siendo allí donde tiene su mayor sensibilidad. El hecho de que las señales de peligro sean rojas no es debido a que sea el color para el cual el ojo humano es más sensible, sino a que es un color poco frecuente en la naturaleza y destaca con facilidad.

### 3.2.4. Ley de Rayleigh-Jeans.

En el límite de altas temperaturas, o longitudes de onda largas,  $hc \ll k_B T \lambda$ , y es posible desarrollar en serie la exponencial de la forma:

$$e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} \simeq 1 + \frac{1}{1!} \frac{hc}{k_B T \lambda} + \dots + \text{órdenes superiores al primero}$$

Así, quedándonos en el primer orden del desarrollo en serie se tiene, para la emitancia monocromática:

$$E^0(\lambda, T) = \frac{2\pi c^2 h k_B T \lambda}{\lambda^5 h c} = \frac{2\pi c k_B T}{\lambda^4} \quad (3-12)$$

relación conocida como *ley de Rayleigh-Jeans*.

Antes de que Planck formulara su ley, la leyes de Wien y Rayleigh-Jeans, junto con la ley de Stefan-Boltzmann que se verá a continuación, eran las únicas relaciones conocidas para la transmisión del calor por radiación. Se sabía que la fórmula de Rayleigh-Jeans funcionaba razonablemente en el infrarrojo a temperaturas no bajas, pero el intento de extrapolarla a longitudes de onda mayores llevaba a una paradoja conocida como *catástrofe ultravioleta*. A una determinada temperatura, la emitancia monocromática sería tanto mayor cuanto más corta fuera la longitud de onda. Así, se emitiría más cuanto mayor fuera la energía de la radiación, por ejemplo, a una temperatura de 5800 K, se emitiría más en el ultravioleta que en el visible, más en los rayos X que en el ultravioleta y más en los rayos gamma que en los rayos X, para una misma anchura espectral en todos los casos. El planeta Tierra estaría entonces achicharrado por los rayos X, gamma y otras radiaciones ionizantes de mayor energía que se emitirían aún en mayor cantidad y, absurdo tras absurdo, la energía total emitida sería infinita.

La ley de Planck resuelve esta situación absurda y da un valor para la energía total emitida que coincide con la Ley de Stefan-Boltzmann.

### 3.2.5. Ley de Stefan-Boltzmann.

Recordemos que denominábamos poder emisivo total o integral al flujo radiante por unidad de superficie emitido en todas las longitudes de onda por una superficie que se encuentra a una temperatura  $T$ .

Si la superficie se comporta como una superficie negra, el poder emisivo vendrá dado por la integral de la distribución de Planck a todas las longitudes de onda del espectro,

$$E^0(T) = \int_0^\infty E_\lambda^0(\lambda, T) d\lambda = 2\pi c^2 h \int_0^\infty \frac{\lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1} d\lambda$$

que da como resultado

$$E^0(T) = \frac{2\pi k_B^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \left( \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} \right) T^4, \quad \text{con } x = \frac{hc}{k_B T \lambda}.$$

De aquí resulta la *ley de Stefan-Boltzmann*<sup>†</sup> para la radiación del cuerpo negro que se escribe como

$$E^0(T) = \sigma T^4 \quad [\text{Wm}^{-2}] \quad (3-13)$$

donde

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4} \quad \left( = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} \right)$$

es la *constante de Stefan-Boltzmann*. Debido al pequeño valor de  $\sigma$ , a bajas temperaturas el efecto de la radiación es insignificante. Por el contrario, la dependencia en  $T^4$  hace que para altas temperaturas la radiación se convierta en el mecanismo predominante de transmisión del calor.

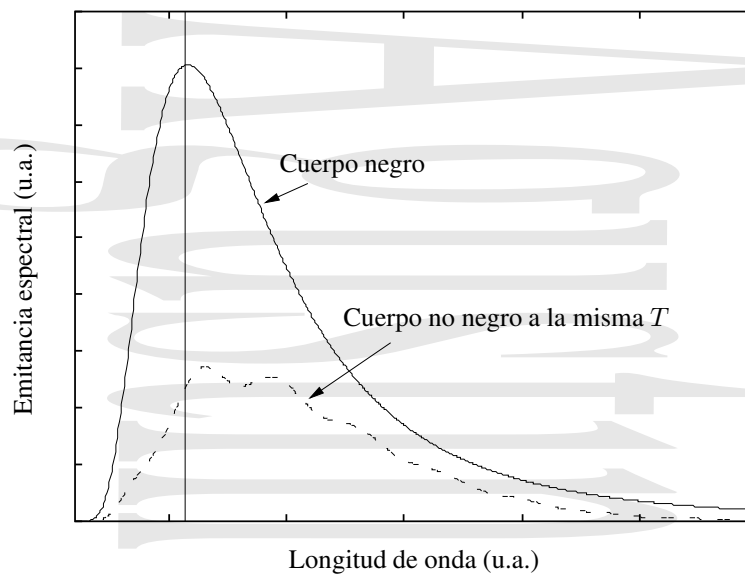
### 3.2.6. Emisividad. Ley de Kirchoff.

#### Factor de emisión o emisividad.

Al comparar el espectro de emisión de un cuerpo cualquiera con el de un cuerpo negro a la misma temperatura se observa lo siguiente (Figura 3-8):

1. Para cada longitud de onda, la curva  $E_\lambda^0(\lambda, T)$  correspondiente a la emitancia espectral del cuerpo negro está siempre por encima de la correspondiente a cualquier otro cuerpo no negro que se encuentre a la misma temperatura.

<sup>†</sup> En realidad, la ley de Stefan-Boltzmann es anterior a la ley de Planck de la radiación del cuerpo negro. Boltzmann llegó a ella a partir de los trabajos de Stefan, considerando un modelo estadístico de un gas de radiación (un gas de fotones).



**Figura 3-8:** Diferencias entre un cuerpo negro y un hipotético cuerpo no negro a la misma temperatura. Se observa que a una longitud de onda dada el cuerpo no negro siempre emite con un poder emisivo menor y su máximo de emisión normalmente está desplazado hacia las longitudes de onda largas (esto último puede no ser cierto en determinadas condiciones de emisividad).

- No sólo el valor, sino también la forma de la emitancia espectral para el cuerpo no negro es, en general, distinta de la del cuerpo negro a la misma temperatura (salvo que se trate de un cuerpo gris). Asimismo, su máximo normalmente corresponde a una longitud de onda mayor (menores frecuencia y energía).

Se define el *factor de emisión monocromático* o *emisividad espectral*  $\epsilon_\lambda$  de un cuerpo como el cociente:

$$\epsilon_\lambda = \frac{E_\lambda(\lambda, T)}{E_\lambda^0(\lambda, T)} \quad (3-14)$$

donde  $E_\lambda(\lambda, T)$  es la energía emitida por unidad de tiempo, superficie e intervalo espectral (emitancia espectral del cuerpo no negro) por el cuerpo no negro a una temperatura  $T$  en el intervalo de longitudes de onda  $\lambda \rightarrow \lambda + d\lambda$  y  $E_\lambda^0(\lambda, T)$  la energía emitida por unidad de superficie, tiempo e intervalo espectral (emitancia espectral del cuerpo negro) por un cuerpo negro a la misma temperatura  $T$  en el intervalo de longitudes de onda  $\lambda \rightarrow \lambda + d\lambda$ .

La *emisividad total* de un cuerpo cualquiera a una temperatura  $T$  vendrá dada por:

$$\epsilon = \frac{E(T)}{E^0(T)} = \frac{\int_0^\infty E_\lambda(\lambda, T) d\lambda}{\int_0^\infty E_\lambda^0(\lambda, T) d\lambda} = \frac{\int_0^\infty \epsilon_\lambda E_\lambda^0(\lambda, T) d\lambda}{\sigma T^4} \quad (3-15)$$

Como  $E_\lambda^0(\lambda, T) > E_\lambda(\lambda, T)$ , se cumplirá siempre que  $\epsilon_\lambda < 1$  y que  $\epsilon < 1$ . Para un cuerpo negro,  $E = E^0$  y por tanto,  $\epsilon = 1$  y  $\epsilon_\lambda = 1$  para todas las frecuencias. Asimismo se tiene que, para un cuerpo cualquiera:

$$E(T) = \epsilon \sigma T^4 \quad (3-16)$$

donde  $\epsilon$  depende de la temperatura, del material y del estado de la superficie.

### Ley de Kirchoff.

Consideremos las siguientes dos experiencias para llegar a la ley de Kirchoff:

**Experiencia primera:** Coloquemos un cuerpo negro en el interior de la cavidad, a la misma temperatura que las paredes de la cavidad.



Como el cuerpo y la cavidad están a la misma temperatura, no habrá intercambio neto de calor entre ambos. Así, serán iguales el flujo radiante emitido por el cuerpo hacia la cavidad  $\Phi^{\text{CN} \rightarrow \text{CAV}}$  y la parte del flujo radiante emitido por la cavidad que incide sobre el cuerpo,  $\Phi^{\text{CAV} \rightarrow \text{CN}}$ :

$$\Phi^{\text{CN} \rightarrow \text{CAV}} = \Phi^{\text{CAV} \rightarrow \text{CN}}$$

Por tanto, la radiación de un cuerpo negro es igual a la intensidad de la radiación de equilibrio existente en el interior de la cavidad a la misma temperatura.

**Experiencia segunda:** Coloquemos ahora en el interior de la cavidad un cuerpo no negro de la misma forma que el anterior y a la misma temperatura que las paredes. Antes vimos que como no debe haber intercambio neto de calor entre el cuerpo negro y la cavidad, en el equilibrio el cuerpo negro emitía todo lo que absorbía. Análogamente ocurrirá con el cuerpo no negro, éste sólo emitirá aquella fracción de la energía incidente que ha absorbido:

$$\alpha \Phi^{\text{CAV} \rightarrow \text{Cuerpo}} = \alpha \Phi^{\text{CAV} \rightarrow \text{CN}} = \Phi^{\text{Cuerpo} \rightarrow \text{CAV}} = \epsilon \Phi^{\text{CN} \rightarrow \text{CAV}}$$

donde hemos definido la emisividad  $\epsilon$  como el cociente entre la energía emitida por un cuerpo y lo que emitiría si fuese un cuerpo negro a la misma temperatura. Como acabamos de ver que  $\Phi^{\text{CN} \rightarrow \text{CAV}} = \Phi^{\text{CAV} \rightarrow \text{CN}}$ , se tiene finalmente que:

$$\alpha = \epsilon \quad (3-17a)$$

relación conocida como *ley de Kirchoff*, que en esta forma es válida exclusivamente en el equilibrio térmico (para intercambio de calor por radiación entre cuerpos que se encuentran a la misma temperatura).

La ley de Kirchoff se cumple también para los factores de absorción y emisividades espectrales:

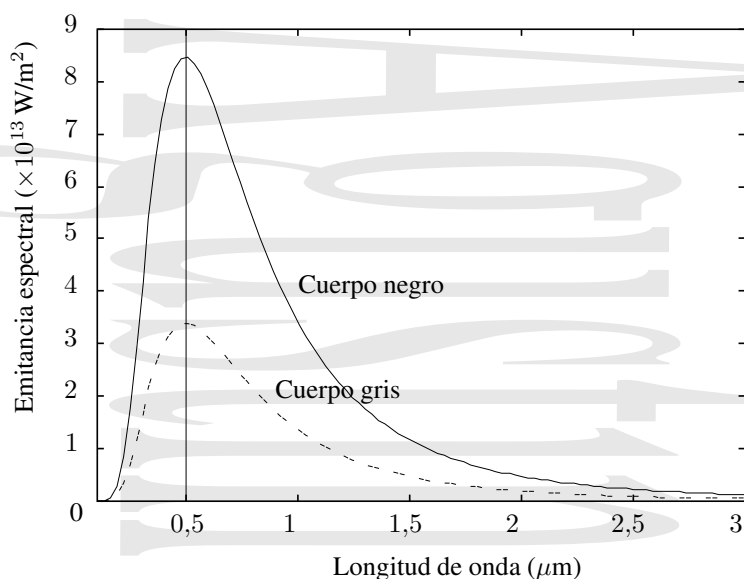
$$\alpha_\lambda = \epsilon_\lambda \quad (3-17b)$$

pero en esta forma es válida tanto en el equilibrio térmico como fuera de él (es decir, puede utilizarse para analizar el intercambio de calor por radiación entre cuerpos a distinta temperatura).

**Tabla 3-1:** Valores aproximados de la absorbancia de distintas superficies a las temperaturas ambiente y de la radiación solar.

Material	$\alpha_{\text{IR}} (25^\circ\text{C})$	$\alpha_{\text{VIS}} (5800\text{ K})$
Superficies negras no metálicas (asfalto, carbón, pizarra, pintura, papel).	0,90 – 0,98	0,85 – 0,98
Aluminio níquel o cromo muy pulido, papel de aluminio.	0,02 – 0,04	0,10 – 0,40
Cobre o bronce pulido	0,02 – 0,05	0,3 – 0,5
Cobre, latón o aluminio sin pulir, acero galvanizado, hierro pulido.	0,2 – 0,3	0,4 – 0,56
Cobre oxidado	0,8	0,65
Ladrillo y piedra amarillos, ladrillo refractario.	0,85 – 0,95	0,50 – 0,70
Ladrillo y cerámicas rojas, hormigón, piedra, hierro y acero oxidados y pinturas oscuras (rojo, marrón, verde)	0,85 – 0,95	0,65 – 0,70
Ladrillo, cerámica y piedra blancos, papel, yeso, escayola, cal,	0,85 – 0,95	0,30 – 0,50
Pintura blanca	0,9 – 0,95	0,12 – 0,16
Pintura brillante dorada, de bronce o de aluminio	0,2 – 0,3	0,3 – 0,5
Vidrio común de ventana	0,90 – 0,95	Transparente

En la tabla 3-1 se dan algunos valores aproximados de la absorbancia para distintas superficies para la radiación cuya temperatura de color es la temperatura ambiente ( $\sim 25^\circ\text{C}$ ,  $\lambda \sim 10\ \mu\text{m}$ ) y para radiación de temperatura de color la de la radiación solar ( $\sim 5800\text{ K}$ ,  $\lambda \sim 0,5\ \mu\text{m}$ ). De acuerdo con la Ley de Kirchoff, estos valores serían los correspondientes a la emisividad de las superficies a estas temperaturas, en el supuesto de que los materiales las



**Figura 3-9:** Diferencias entre un cuerpo negro y un cuerpo gris. En la figura se muestra la diferencia entre la emitancia espectral del Sol emitiendo como un cuerpo negro a 5800 K y un supuesto cuerpo gris a la misma temperatura con  $\alpha_\lambda = \epsilon_\lambda = \alpha = \epsilon = 0,4$ .

aguantaran. Nótese la similitud de los valores para las pinturas negra y blanca para temperatura ambiente, donde la emisión es básicamente infrarrojo. Obviamente los resultados son muy distintos para la temperatura de la radiación solar (5800 K) con el máximo de emisión en el visible. Así, los coeficientes de absorción en el infrarrojo de ambas pinturas serían mucho más parecidos de lo que su gran diferencia para el visible nos haría suponer.

### 3.2.7. Cuerpo gris.

Ninguna superficie real emite como un cuerpo negro. Para el estudio de la radiación, es útil definir una superficie que tenga una distribución espectral semejante en aspecto a la del cuerpo negro, pero con un poder emisor inferior en la misma proporción en todas las frecuencias, de modo que se cumpla que la emisividad es independiente de la frecuencia,  $\alpha_\lambda = \epsilon_\lambda = cte$ . A esta superficie se le llama *superficie gris* (Figura 3-9) o *cuerpo gris*. Algo análogo ocurre con los factores de transmisión y reflexión. El coeficiente de absorción de un cuerpo gris será:

$$\alpha = \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda G_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda d\lambda} = \alpha_\lambda \frac{\int_0^\infty G_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty G_\lambda d\lambda} = \alpha_\lambda$$

y análogamente para los casos de transmisión y reflexión. Así, para un cuerpo gris:

$$\alpha = \alpha_\lambda \quad (3-18a)$$

$$\rho = \rho_\lambda \quad (3-18b)$$

$$\tau = \tau_\lambda \quad (3-18c)$$

quedando la ley de Kirchoff para un cuerpo gris en la forma  $\alpha = \epsilon$ , con la diferencia de que en el caso del cuerpo gris esta expresión es válida incluso cuando el cuerpo no está en equilibrio térmico con sus alrededores. Así, conociendo la emisividad de un cuerpo gris a una cierta longitud de onda  $\lambda$  se conocen también las emitancias y absorbancias totales de la superficie.

### 3.2.8. La ley de Lambert.

Definiremos primero la *intensidad de radiación*, *intensidad específica* o *luminancia*  $L$  [ $\text{Wm}^{-2}\text{sr}^{-1}$ ] como la energía emitida por unidad de tiempo, ángulo sólido y *superficie vista* del emisor (superficie reducida a la proyección de este

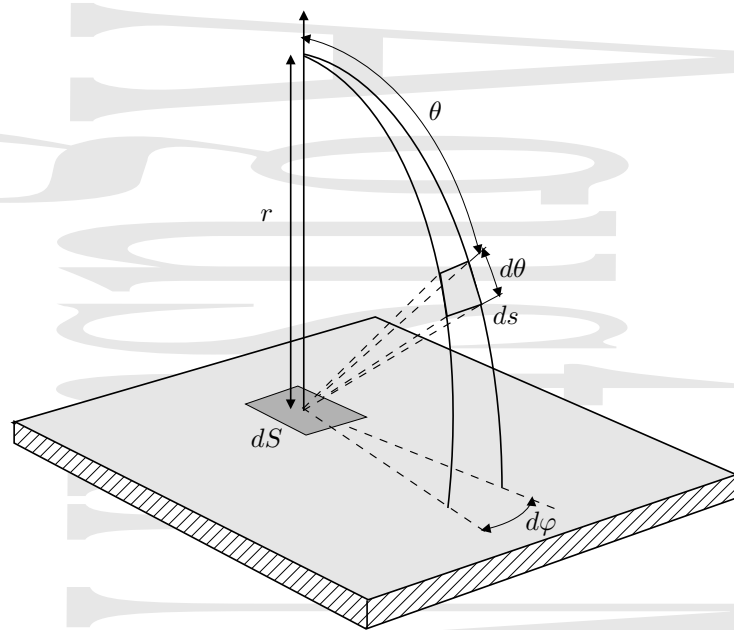


Figura 3-10: Ley de Lambert

área sobre el plano perpendicular a la dirección de radiación, a la superficie vista) de un cuerpo en la dirección  $\theta$ . Asimismo se define la *intensidad energética* [W/sr] en una cierta dirección como la integral a la superficie total del emisor de la intensidad de radiación en esa dirección.

Consideremos una superficie emisora elemental de área  $dS$ , y sobre ella una semiesfera imaginaria de radio  $r$  centrada en  $dS$  (figura 3-10). Consideremos ahora un elemento de superficie  $ds$  de la semiesfera, en cuyo centro queremos determinar el valor de la intensidad de radiación emitida por  $dS$ .

Si los  $4\pi$  estereorradianes subtendidos por toda la esfera corresponden a la superficie total de la esfera  $4\pi r^2$ , el ángulo sólido subtendido por la superficie  $ds$  será:

$$d\Omega = 4\pi \frac{ds}{4\pi r^2} = \frac{ds}{r^2} \quad (3-19)$$

Como  $ds$  ve al emisor como si tuviera una superficie efectiva  $dS \cos \theta$ , la intensidad de radiación o luminancia será:

$$L = \frac{d^2\Phi}{dS \cos \theta d\Omega} = \frac{r^2}{dS \cos \theta} \frac{d^2\Phi}{ds} \quad (3-20)$$

Para los cuerpos en los que se cumple la *Ley de Lambert*, la radiación se emite en todas las direcciones con la misma intensidad de radiación  $L$ , por lo que se le llama también *ley de la radiación difusa*. Se dice que estos cuerpos que cumplen la ley de Lambert emiten *radiación difusa*. En particular, la radiación emitida por un cuerpo negro es difusa.

Determinemos ahora la relación entre la intensidad de radiación y la emitancia, para un sistema que cumple la ley de Lambert. Despejando el flujo  $d^2\Phi$  de la ecuación (3-20) se tiene

$$d^2\Phi = \frac{L}{r^2} ds dS \cos \theta = L dS \sin \theta \cos \theta d\theta d\psi$$

donde se ha tenido en cuenta la forma  $ds = r^2 \sin \theta d\theta d\psi$  del elemento infinitesimal de superficie en coordenadas esféricas. De este modo, si se cumple la ley de Lambert ( $L$  no depende de la dirección), la energía radiante que atraviesa la superficie queda

$$d\Phi = L dS \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin \theta \cos \theta \int_{\psi=0}^{2\pi} d\psi = L dS \left. \frac{\sin^2 \theta}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} \left. \psi \right|_0^{2\pi} = L dS \pi$$

Como toda la radiación que atraviesa la superficie del hemisferio ha sido emitida por  $dS$ , la energía radiante total debe ser  $E dS$ , quedando:

$$L dS \pi = E dS \quad \Rightarrow \quad L = \frac{E}{\pi} \quad (3-21)$$

expresión válida cuando se cumple la ley de Lambert y además, exceptuando  $E$  no sale ninguna otra energía de la superficie, es decir, no hay transmisión desde detrás de la superficie, ni reflexión hacia afuera de la misma.

La *intensidad angular de radiación*  $L_\theta$  se define de forma similar a la intensidad de radiación, pero respecto de la superficie real del emisor y no respecto de la proyección de la misma. Entre las dos existe la relación:

$$L_\theta = L \cos \theta \quad (3-22)$$

que es otra forma de expresar la ley de Lambert. Para una superficie negra, con  $E = \sigma T^4$ , la intensidad angular de radiación valdría:

$$L_\theta = L \cos \theta = \frac{E \cos \theta}{\pi} = \frac{\sigma T^4 \cos \theta}{\pi} \quad (3-23)$$

### 3.3. El efecto invernadero.

Estudiaremos a continuación un comportamiento singular que tiene lugar cuando la radiación atraviesa una pared transparente a ésta (por ejemplo, un vidrio o una placa de plástico transparente) y se absorbe por una superficie interior, como se ve en la figura 3-11. La radiación solar incidente corresponde aproximadamente a un cuerpo negro a una temperatura de  $\simeq 5800$  K. Para este rango de longitudes de onda (fundamentalmente en el visible e infrarrojo cercano), la transmitancia espectral del vidrio es muy alta (próxima a 1), mientras que es muy baja ( $\sim 0$ ) para las longitudes de onda muy larga a las que emiten las superficies de los cuerpos interiores (figura 3-11). Así, el vidrio transmite el visible y el infrarrojo próximo, pero no transmite las longitudes de onda superiores a  $3\mu\text{m}$ .

De este modo, la mayor parte de la radiación solar incidente, cuyo máximo de emisión está a  $\lambda_{\text{máx}} \simeq 0,5\mu\text{m}$ , pasa sin dificultades a través del vidrio y es parcialmente absorbida en el interior del invernadero, dependiendo del coeficiente de absorción de los cuerpos que se encuentran en éste. La parte reflejada vuelve hacia atrás, atraviesa el vidrio y se pierde hacia el exterior. Por su parte, los cuerpos de dentro del invernadero emiten radiación térmica correspondiente a su temperatura (para una temperatura de  $40^\circ\text{C}$ , el máximo de emisión está en  $\lambda_{\text{máx}} \simeq 9\mu\text{m}$ ) (figura 3-11b). Sin embargo, para esta radiación el vidrio es prácticamente opaco (figura 3-11a), por lo que ésta bien es reflejada de nuevo hacia el interior o bien es absorbida por el vidrio y reemitida hacia el interior. El resultado final es que hay una acumulación de energía en el interior del recinto, que actúa como un captador solar, de forma que su temperatura es mayor que la que habría si no estuviera el vidrio. Este fenómeno se conoce como *efecto invernadero*.

Un efecto análogo tiene lugar en la Tierra, donde las nubes y la polución juegan el papel del vidrio, siendo éste proceso un elemento determinante de la temperatura superficial de la Tierra.

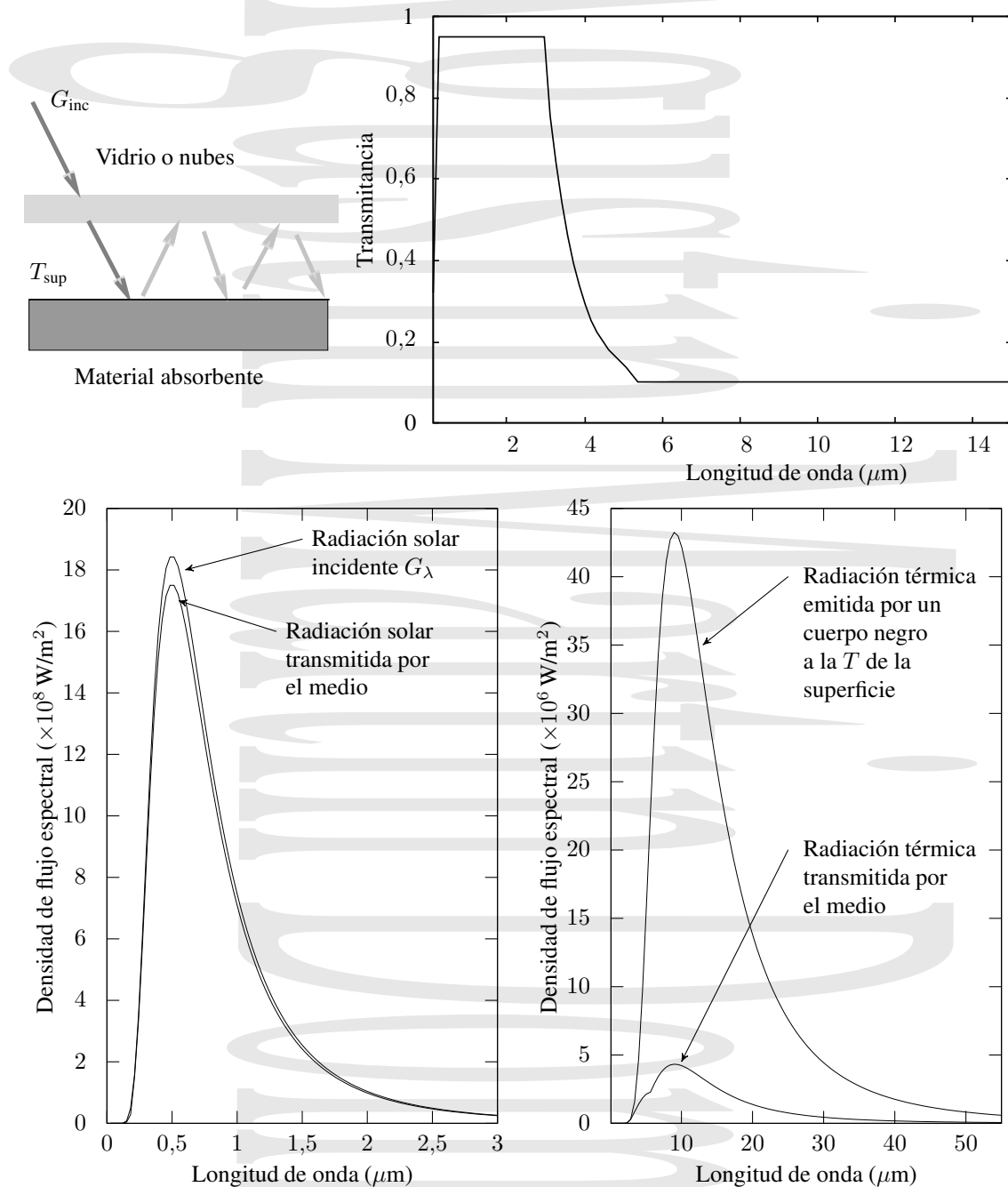
### 3.4. Superficies selectivas.

¿Cómo debe ser un captador solar para conseguir una mayor eficacia? La superficie ideal de un captador de energía solar sería aquella que:

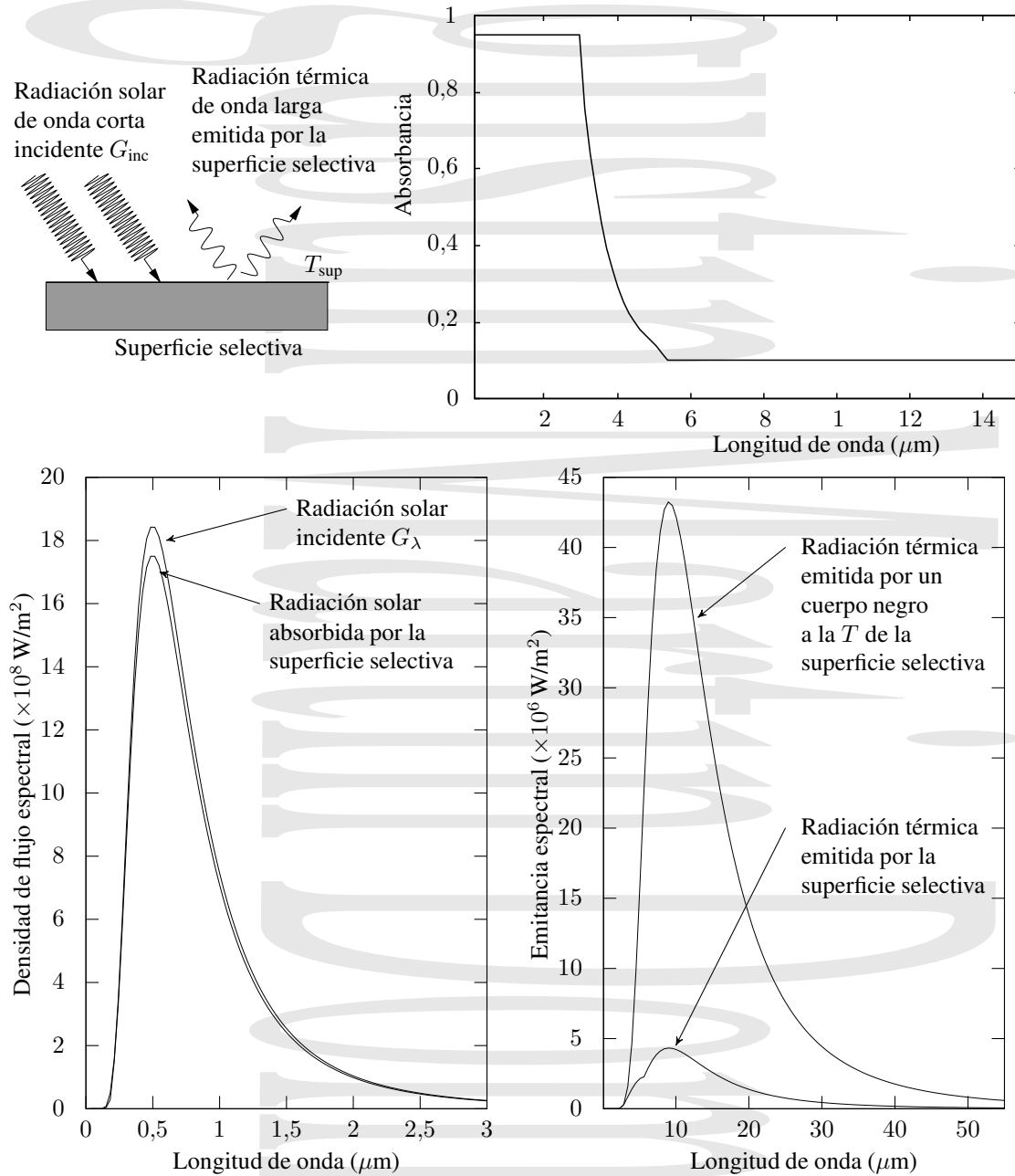
- Absorbe casi toda la energía de la radiación solar incidente ( $\alpha$  alto para  $\lambda < 3\mu$ ).
- Emite débilmente en el infrarrojo lejano ( $\alpha$  bajo para  $\lambda > 3\mu$ ). Esto correspondería a la mayor parte del espectro de radiación emitida por el absorbente a su temperatura (típicamente  $50 - 100^\circ\text{C}$ )

Si la transmisión es baja,  $\tau = 0$  y  $\alpha + \rho = 1$ , lo que equivale a:

- Baja reflectividad por debajo de las  $3\mu$ .
- Alta reflectividad por encima de las  $3\mu$ .



**Figura 3–11:** El efecto invernadero. Considérese un medio cuya transmitancia es la que se muestra en la parte superior de la figura, sobre una superficie absorbente. Sobre esta superficie y a través del medio, incide radiación solar (con una emitancia espectral máxima a 529 nm, como corresponde a una temperatura de 5800 K). Como a la longitud de onda de la radiación solar la transmitancia es alta, la mayor parte de la radiación incidente atraviesa el medio e incide sobre la superficie, donde se absorbe. Como la temperatura en la superficie es más baja (por ejemplo, 47°C o 320 K), la radiación emitida por ésta es de longitud de onda más larga (el máximo está en torno a las 9  $\mu m$ ) y al ser su transmitancia baja a esa longitud de onda no puede atravesar el medio, bien porque se refleja o bien porque se absorbe y reemite de nuevo. La consecuencia de esto es que se acumula energía entre la superficie y el medio, produciéndose un aumento de la temperatura.



**Figura 3-12:** Comportamiento de una superficie selectiva típica cuyo factor de absorción espectral (y emisividad espectral) son las dadas en la figura. La radiación solar incidente (de onda más corta) es en su mayor parte absorbida por la superficie. Sin embargo como la superficie a su temperatura emite en el infrarrojo, a una longitud de onda más larga, su emisión es considerablemente más baja que la de un cuerpo negro a esa temperatura. Así absorbe bien en el visible, pero emite mal en el infrarrojo, dando como resultado un calentamiento hasta que se alcanza una temperatura a la que la emisión iguala a la absorción. Esta temperatura puede ser mayor que la temperatura que alcanzaría un cuerpo negro en las mismas condiciones.

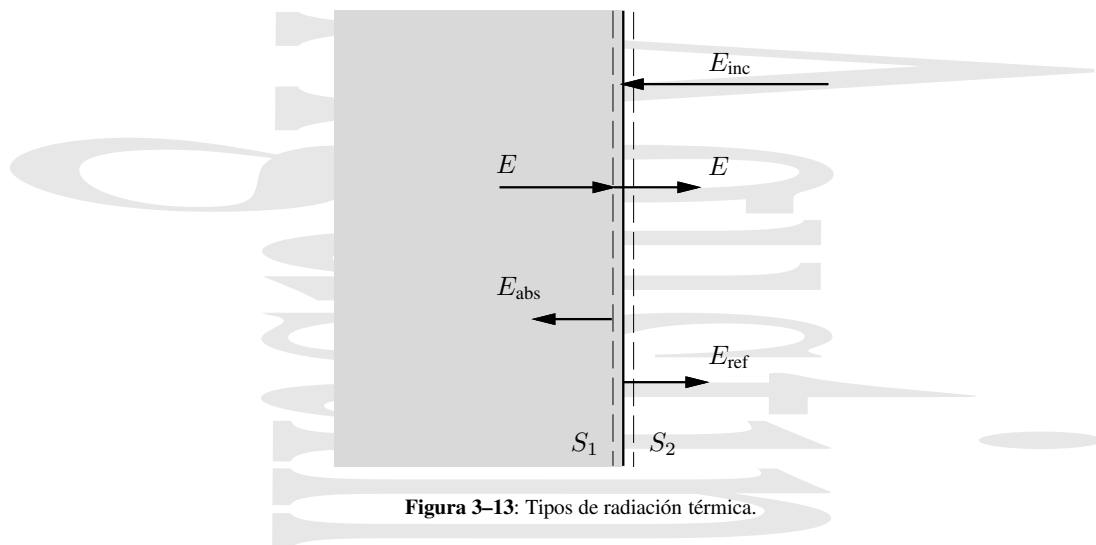


Figura 3-13: Tipos de radiación térmica.

Estas superficies, llamadas *superficies selectivas*, pueden alcanzar una temperatura  $T_s$  en el estado estacionario mayor que la que alcanzaría un cuerpo negro en esa misma situación.

Veamos un ejemplo de esto. Si  $G$  es la energía solar incidente por unidad de tiempo y de superficie, en el estado estacionario se cumplirá, para un cuerpo negro, que:

$$G = \sigma T_n^4 \quad \Rightarrow \quad T_n^4 = \frac{G}{\sigma} \quad (3-24)$$

mientras que para una superficie selectiva con  $\alpha_{\text{vis}} = 0,9$  y  $\epsilon_{\text{ir}} = 0,1$ , se tiene que:

$$\alpha G = \epsilon \sigma T_s^4 \quad \Rightarrow \quad T_s^4 = \frac{\alpha_{\text{vis}} G}{\epsilon_{\text{ir}} \sigma} = 9 \frac{G}{\sigma} \quad (3-25)$$

De este modo, si  $G = 1 \text{ kWm}^{-2}$ , la temperatura en el estado estacionario para el cuerpo negro es de 364 K, mientras que para la superficie selectiva con las características anteriores sería de 631 K.

El hecho de que  $\epsilon$  no sea igual a  $\alpha$  no va en contra de la ley de Kirchoff, ya que esta decía que ambos coeficientes eran iguales, pero en el equilibrio térmico, es decir, a la misma temperatura (A la misma longitud de onda). Así una superficie selectiva ideal sería un excelente emisor en el visible ( $\alpha_{\text{vis}} \simeq \epsilon_{\text{vis}}$ ), emitiendo casi como un cuerpo negro. Sin embargo, como lo que emite en el visible un cuerpo negro a  $40^\circ\text{C}$  es prácticamente despreciable, emitirá muy poco. Asimismo, es un pésimo absorbente en el infrarrojo lejano ( $\alpha_{\text{ir}} \simeq \epsilon_{\text{ir}}$ ), pero como la componente de la radiación solar en ese rango es muy pequeña, apenas se deja de captar energía solar por esa razón.

### 3.5. Radiación directa entre cuerpos a distinta temperatura.

#### 3.5.1. Radiación efectiva.

Hemos visto que un cuerpo emite una radiación propia por encontrarse a una cierta temperatura, y habíamos denominado a la densidad del flujo radiante propio *emitancia* o *poder emisivo*  $E$ . Esta emisión propia se hace a costa de su energía interna y viene determinada por su temperatura, material y estado de la superficie. Si no incidiera ninguna radiación sobre el cuerpo de éste saldría únicamente la radiación propia. Consideremos un cuerpo en el que la transmisión es despreciable y por tanto  $\tau = 0$  y por consiguiente  $\rho + \alpha = 1$  (Figura 3-13). Sobre éste incidirá la radiación  $E_{\text{inc}}$  procedente de otros cuerpos. Una parte  $E_{\text{abs}}$  de esta radiación es absorbida por el cuerpo, mientras que la parte restante  $E_{\text{ref}}$  es reflejada por la superficie. Además, el cuerpo emite su radiación propia. A la radiación total que sale del cuerpo se le denomina *radiación efectiva* o *emergente* con una densidad efectiva de flujo radiante  $q_{\text{ef}}$  [ $\text{Wm}^{-2}$ ]:

$$q_{\text{ef}} = E + E_{\text{ref}} = E + \rho E_{\text{inc}} = E + (1 - \alpha) E_{\text{inc}} \quad (3-26)$$

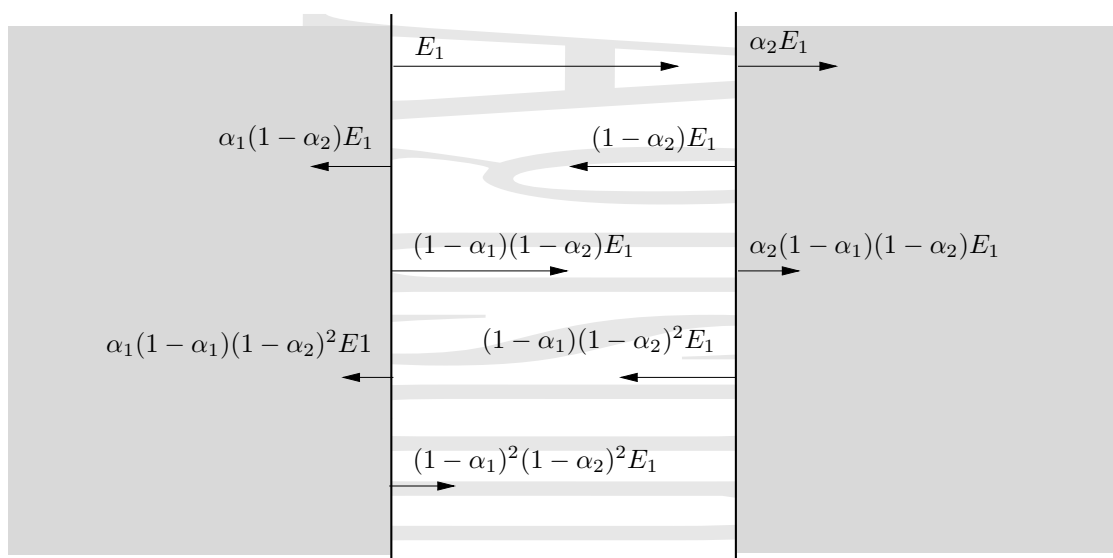


Figura 3-14: Método de las reflexiones múltiples para analizar la transferencia de calor por radiación entre planos infinitos y paralelos.

Al flujo térmico que incluye tanto la radiación emergente de la superficie como la incidente sobre la misma se le denomina flujo térmico neto o resultante, designándose a la densidad neta de flujo radiante o resultante como  $q_{\text{neto}}$ . Consideremos el flujo térmico neto a través de dos superficies imaginarias  $S_1$  y  $S_2$ .  $S_1$  es una superficie que se encuentra dentro del cuerpo muy cerca de su superficie, de modo que la radiación reflejada le es ajena y  $S_2$  es una superficie que se encuentra fuera del cuerpo, pero muy próxima a su superficie, de modo que la radiación absorbida le es ajena. Se puede calcular la densidad neta del flujo térmico en cualquiera de las dos superficies:

$$q_{\text{neto}} = E - E_{\text{abs}} = E - \alpha E_{\text{inc}} \quad (3-27a)$$

$$q_{\text{neto}} = E + E_{\text{ref}} - E_{\text{inc}} = q_{\text{ef}} - E_{\text{inc}} \quad (3-27b)$$

que, eliminando  $E_{\text{inc}}$  entre las dos ecuaciones da:

$$q_{\text{ef}} = \frac{1}{\alpha} [E - (1 - \alpha) q_{\text{neto}}] \quad (3-28)$$

con el convenio de signos para  $q$  (+) hacia la derecha del cuerpo (el exterior) y (-) hacia la izquierda del cuerpo (el interior). El flujo radiante neto  $\Phi_{\text{ef}}$  en función del flujo radiante neto  $\Phi_{\text{neto}}$  vendrá dado por

$$\Phi_{\text{ef}} = \frac{1}{\alpha} [\Phi_{\text{em}} - (1 - \alpha) \Phi_{\text{neto}}] \quad (3-29)$$

con el mismo convenio de signos.

### 3.5.2. Planos infinitos y paralelos.

#### Método de las reflexiones múltiples (con $\tau \sim 0$ ).

Estudiamos a continuación el caso del intercambio de calor por radiación entre dos planos infinitos y paralelos. El primer método que utilizaremos es el de las reflexiones múltiples y nos limitaremos a sistemas que satisfagan las siguientes condiciones:

- $\epsilon = \alpha$  es independiente de  $T$  para cada uno de los dos planos, así como del punto de la superficie.
- Existe una distribución uniforme de temperaturas en la superficie.
- No hay transferencia de calor dentro del sólido ni por conducción ni por convección.



- Estamos en el estado estacionario.

En este caso, ocurre lo siguiente, como se muestra en la figura 3-14.

- El plano 1 emite con una emitancia  $E_1$ .
- El plano 2 absorbe  $\alpha_2$  y emite  $(1 - \alpha_2)E_1$ .
- El plano 1 absorbe  $\alpha_1(1 - \alpha_2)E_1$  y emite  $(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)E_1$ .
- El plano 2 absorbe  $\alpha_2(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)E_1$  y emite  $(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)^2 E_1$ .
- ...

Y así sucesivamente. Algo similar ocurre con la  $E_2$  emitida originalmente por el cuerpo 2. De la energía que ha emitido el cuerpo 1, ese mismo cuerpo 1 absorbe una energía:

$$E_{1 \rightarrow 1} = E_1(1 + k + k^2 + \dots)(1 - \alpha_2)\alpha_1 = E_1 \left( \frac{1}{1 - k} \right) (1 - \alpha_2)\alpha_1$$

donde se ha introducido  $k = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)$ . De la energía que ha emitido el cuerpo 2, el cuerpo 1 absorbe:

$$E_{2 \rightarrow 1} = E_2(1 + k + k^2 + \dots)\alpha_1 = \frac{\alpha_1}{1 - k} E_2$$

La densidad del flujo radiante neto (flujo de energía por unidad de superficie perpendicular al flujo) será la diferencia entre lo que sale y lo que entra:

$$q_{\text{neto}} = E_1 - E_{1 \rightarrow 1} - E_{2 \rightarrow 1} = E_1 - E_1 \left( \frac{1}{1 - k} \right) (1 - \alpha_2)\alpha_1 - \frac{\alpha_1}{1 - k} E_2$$

que, operando da:

$$q_{\text{neto}} = \frac{\alpha_2 E_1 - \alpha_1 E_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2} = \frac{\frac{E_1}{\alpha_1} - \frac{E_2}{\alpha_2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} - 1} \quad (3-30)$$

En este caso, el cálculo es relativamente sencillo, pero este método se complica mucho cuando hay que considerar otras geometrías. Nótese que aquí hemos estudiado el caso general y por tanto no tiene por qué ser cierto para los valores globales que  $\epsilon = \alpha$ , aunque sí lo sea para los valores espectrales. Más adelante se estudiará el caso de los planos grises en los que además  $\epsilon = \alpha$ .

Si uno de los dos planos, por ejemplo el 1, es una superficie negra perfecta con  $\alpha_1 = 1$ , la densidad neta del flujo térmico es:

$$q_{\text{neto}} = \alpha_2 E_1 - E_2$$

### Método de la radiación neta.

Repetiremos ahora este mismo cálculo, pero ahora con un segundo método que a menudo es más útil que el que acabamos de presentar. Para ello utilizaremos el concepto y las fórmulas obtenidas para la radiación efectiva. La densidad neta de flujo radiante entre 1 y 2 será la diferencia entre las densidades efectivas de flujo radiante que salen de cada uno de los cuerpos:

$$q_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = q_1^{\text{ef}} - q_2^{\text{ef}} \quad (3-31)$$

La radiación efectiva que sale de cada uno de los cuerpos viene dada por:

$$q_1^{\text{ef}} = \frac{1}{\alpha_1} [E_1 - (1 - \alpha_1)q_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2}] \quad (3-32a)$$

$$q_2^{\text{ef}} = \frac{1}{\alpha_2} [E_2 - (1 - \alpha_2)q_{\text{neto}}^{2 \rightarrow 1}] \quad (3-32b)$$

En condiciones de radiación en el estado estacionario  $q_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = -q_{\text{neto}}^{2 \rightarrow 1}$  que, sustituyendo en la ecuación (3-31) nos da de nuevo la ecuación (3-30), pero de una forma mucho más sencilla que cuando utilizamos el método de las reflexiones múltiples.

### Método de la radiación efectiva.

Repitamos ahora el cálculo del intercambio de calor por radiación entre dos planos infinitos y paralelos por un tercer método muy relacionado con el anterior, el método de la radiación efectiva. Anteriormente vimos que  $q_{\text{ef}} = E + E_{\text{ref}} = E + \rho E_{\text{inc}}$ . Si además tenemos en cuenta que estamos considerando el caso  $\tau = 0 \Rightarrow \rho = 1 - \alpha$  se obtiene, para las radiaciones efectivas que salen de 1 y 2, el sistema de ecuaciones

$$q_1^{\text{ef}} = E_1 + (1 - \alpha_1)q_2^{\text{ef}} \quad (3-33a)$$

$$q_2^{\text{ef}} = E_2 + (1 - \alpha_2)q_1^{\text{ef}} \quad (3-33b)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene:

$$q_1^{\text{ef}} = \frac{E_1 + E_2 - \alpha_1 E_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2}$$

$$q_2^{\text{ef}} = \frac{E_1 + E_2 - \alpha_2 E_1}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2}$$

que, sustituyendo en la ecuación (3-31) da directamente la ecuación (3-30), pero de nuevo de una forma mucho menos complicada que en el método de las reflexiones múltiples, y además más aplicable a otras geometrías.

### 3.5.3. Intercambio de calor por radiación entre planos grises infinitos y paralelos

#### Densidad neta de flujo radiante entre dos planos grises infinitos y paralelos.

Obtengamos ahora el cálculo final reemplazando en la ecuación (3-30) el valor del poder emisivo de cada uno de los planos dado por la ley de Stefan Boltzmann:

$$E_1 = \epsilon_1 \sigma T_1^4 \quad E_2 = \epsilon_2 \sigma T_2^4 \quad (3-34)$$

que da, teniendo en cuenta la ley de Kirchoff para planos grises ( $\alpha = \epsilon$ ),

$$q_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} - 1} = \alpha_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (3-35)$$

donde  $\alpha_{12}$  es la absorbancia reducida del sistema, que para este sistema geométrico concreto es:

$$\alpha_{12} = \left[ \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} - 1 \right]^{-1} \quad (3-36)$$

Para el caso de dos planos negros, se tiene que  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ , y que  $\rho_1 = \rho_2 = \tau_1 = \tau_2 = 0$ , quedando la relación ya conocida:

$$q_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (3-37)$$

Si solo uno de los dos planos es negro, por ejemplo,  $\alpha_1 = 1$ , se tiene que  $\alpha_{12} = \alpha_2$ , y

$$q_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = \alpha_2 \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

Si uno de los planos es muy reflectante ( $\rho \simeq 1$ ) se tiene que  $\alpha \simeq 0$  y por tanto  $\alpha_{12} \simeq 0$ . En estas condiciones, el intercambio de calor por radiación es muy pequeño.

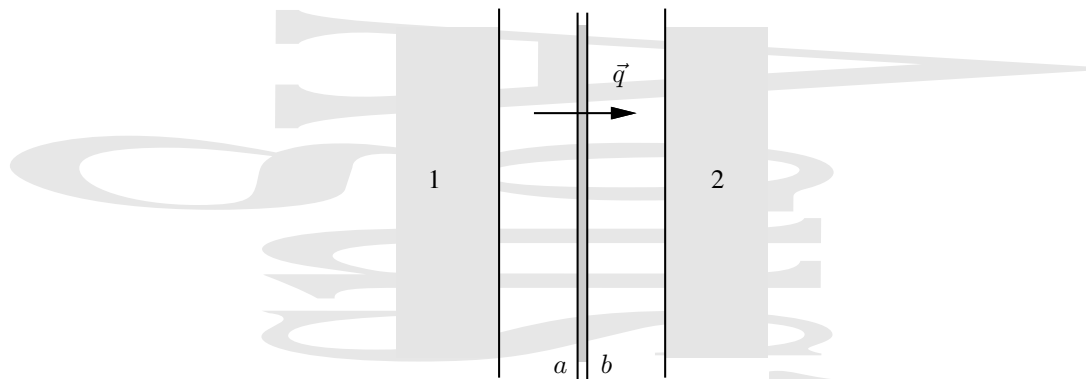


Figura 3-15: Efecto de un apantallamiento en la transmisión del calor por radiación entre dos planos infinitos y paralelos.

### Efecto de las pantallas.

Estudiaremos ahora el efecto de una pantalla de superficies grises en la transmisión de calor por radiación entre dos planos grises infinitos y paralelos en una situación como la que se muestra en la figura (3-15). Al tratarse de cuerpos grises  $\epsilon = \alpha$  y a partir de la ecuación (3-35) escribimos, en régimen estacionario, las ecuaciones para la transferencia de calor entre uno de los planos y la cara de la pantalla que le corresponde y el otro plano y su correspondiente cara de la pantalla,

$$\left[ \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_a} - 1 \right] \frac{q_{\text{neto}}}{\sigma} = T_1^4 - T_p^4 \quad (3-38a)$$

$$\left[ \frac{1}{\alpha_b} + \frac{1}{\alpha_2} - 1 \right] \frac{q_{\text{neto}}}{\sigma} = T_p^4 - T_2^4 \quad (3-38b)$$

donde hemos supuesto por simplicidad que la temperatura  $T_p$  en la pantalla es uniforme y que  $q_{\text{neto}}$  es el mismo en ambos casos al limitarnos a régimen estacionario. Si sumamos ambas ecuaciones y despejamos  $q_{\text{neto}}$  se obtiene la expresión

$$q_{\text{neto}} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_a} + \frac{1}{\alpha_b} - 2} \quad (3-39)$$

Si una de las superficies de la pantalla está muy pulimentada y tiene una alta reflectividad el coeficiente de absorción será muy bajo y por tanto  $q_{\text{neto}}$  será muy bajo. Nótese que no es necesario que las dos superficies de la pantalla lo sean, basta con que lo sea una.

Si todos los planos y las superficies de la pantalla tienen la misma emisividad, de (3-39) se tiene que  $q_{\text{neto}}$  con la pantalla pasa a ser la mitad del que habría habido sin la pantalla. Asimismo, si se tienen  $n$  pantallas y todas las superficies implicadas tienen la misma emisividad,

$$q_{\text{con pantalla}}^{\text{neto}} = \frac{1}{n+1} q_{\text{sin pantalla}}^{\text{neto}} \quad (3-40)$$

### 3.5.4. Transferencia de calor por radiación entre un cuerpo y su entorno.

Consideremos ahora dos cuerpos, uno de los cuales rodea completamente al otro, no habiendo pantallas entre ambos. El cuerpo 1 es un cuerpo convexo y el cuerpo 2 cóncavo, siendo sus superficies respectivas  $S_1$  y  $S_2$ , sus absorbancias  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  y sus temperaturas  $T_1$  y  $T_2$ , con  $T_1 > T_2$ .

El flujo radiante neto será:

$$\Phi_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = \Phi_1^{\text{ef}} - F_{21} \Phi_2^{\text{ef}} \quad (3-41)$$

donde  $F_{21}$  es el factor de forma, que da la fracción de la energía total emitida por 2 que es capturada por 1.  $F_{12}$  es 1 al ser el cuerpo 1 convexo (no captura nada de su propia energía, toda la captura el cuerpo 2) y el cuerpo 2 envolverlo y

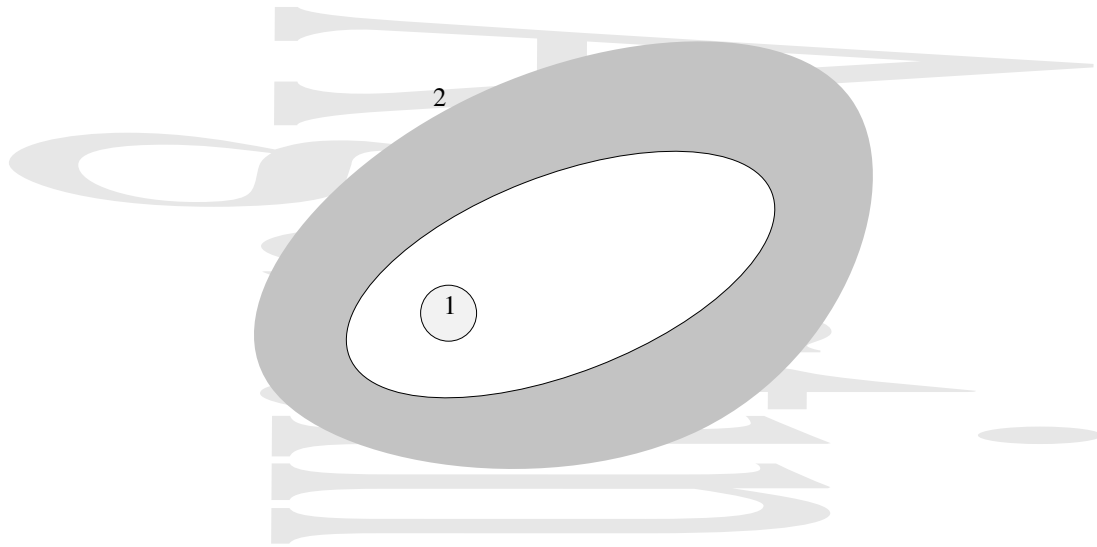


Figura 3-16: Dos cuerpos, uno de los cuales rodea completamente al otro.

por la misma razón  $F_{11} = 0$ .  $F_{22}$  no es uno, ya que parte de la energía que emite es capturada por el cuerpo 1, ni cero, ya que captura parte de su energía emitida, sino  $F_{22} = 1 - F_{21}$ . Esto caracteriza la fracción de la energía emitida por el cuerpo 2 que es absorbida por sí mismo.

El flujo radiante efectivo que abandona cada uno de los cuerpos es:

$$\Phi_1^{\text{ef}} = \left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right) \Phi_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} + \frac{\Phi_1}{\alpha_1} \quad (3-42a)$$

$$\Phi_2^{\text{ef}} = \left(1 - \frac{1}{\alpha_2}\right) \Phi_{\text{neto}}^{2 \rightarrow 1} + \frac{\Phi_2}{\alpha_2} \quad (3-42b)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (3-41) y teniendo en cuenta que, en el estado estacionario,  $\Phi_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = -\Phi_{\text{neto}}^{2 \rightarrow 1}$  se obtiene:

$$\Phi_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = \frac{\frac{\Phi_1}{\alpha_1} - \frac{\Phi_2}{\alpha_2} F_{21}}{\frac{1}{\alpha_1} + \left(\frac{1}{\alpha_2} - 1\right) F_{21}} \quad (3-43)$$

Escribiendo los flujos radiantes propios  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  en función de las superficies y emisividades de cada cuerpo,

$$\Phi_1 = S_1 \epsilon_1 \sigma T_1^4 \quad \Phi_2 = S_2 \epsilon_2 \sigma T_2^4$$

queda, para el flujo radiante neto:

$$\Phi_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = \frac{\frac{S_1 \epsilon_1 \sigma T_1^4}{\alpha_1} - \frac{S_2 \epsilon_2 \sigma T_2^4}{\alpha_2} F_{21}}{\frac{1}{\alpha_1} + \left(\frac{1}{\alpha_2} - 1\right) F_{21}} \quad (3-44)$$

Estimemos ahora cual es el *factor de forma*. Éste es un factor puramente geométrico, por lo que no dependerá de la diferencia de temperaturas entre los dos cuerpos. Así, estudiaremos el problema en el equilibrio térmico, con ambos cuerpos a la misma temperatura. En este caso,  $\Phi_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = 0$ , quedando la ecuación anterior como:

$$\frac{\epsilon_1}{\alpha_1} S_1 - \frac{\epsilon_2}{\alpha_2} F_{21}$$

que da:

$$F_{21} = \frac{\alpha_2 \epsilon_1 S_1}{\alpha_1 \epsilon_2 S_2} \quad (3-45)$$

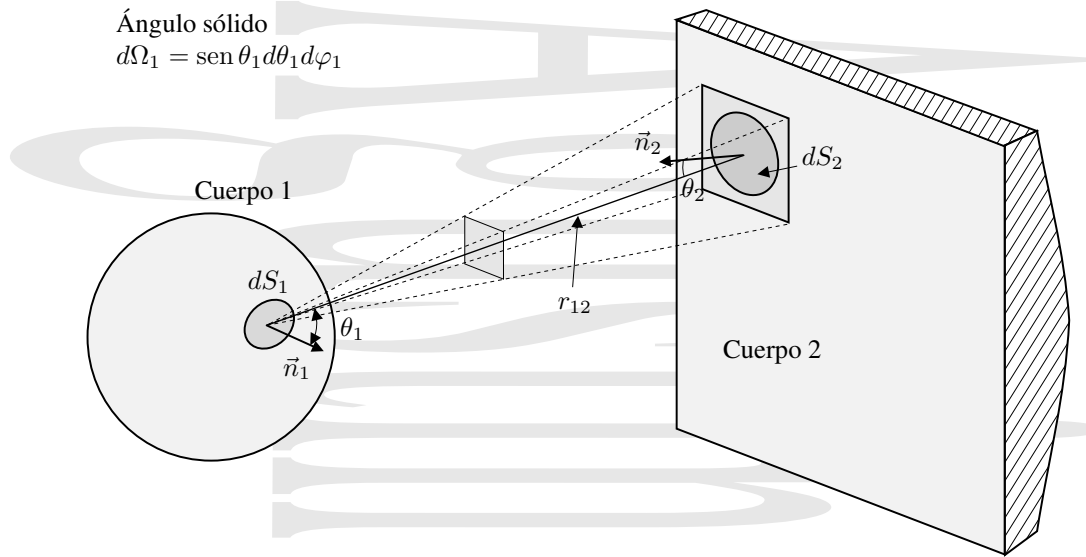


Figura 3-17: El factor de forma.

Como según la ley de Kirchoff, en el equilibrio térmico  $\epsilon = \alpha$ , se tiene que, para este caso de un cuerpo completamente envuelto por el otro, el factor de forma es:

$$F_{21} = \frac{S_1}{S_2} \quad (3-46)$$

En el caso general, el factor de forma depende de la geometría del sistema y de sus propiedades ópticas, pero no de la diferencia de temperaturas entre los dos cuerpos, al ser un factor puramente geométrico.

Si los planos son grises,  $\alpha_1 = \epsilon_1$  y  $\alpha_2 = \epsilon_2$  y el resultado anterior da, para el flujo radiante neto:

$$\Phi_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma \left[ S_1 T_1^4 - S_2 \frac{S_1}{S_2} T_2^4 \right]}{\frac{1}{\alpha_1} + \left( \frac{1}{\alpha_2} - 1 \right) \frac{S_1}{S_2}} = S_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \alpha_{\text{red}} \quad (3-47)$$

donde  $\alpha_{\text{red}}$  es el coeficiente de absorción reducido para este sistema de un cuerpo completamente envuelto por el otro:

$$\alpha_{\text{red}} = \left[ \frac{1}{\alpha_1} + \left( \frac{1}{\alpha_2} - 1 \right) \frac{S_1}{S_2} \right]^{-1} \quad (3-48)$$

En el caso extremo  $S_1 \simeq S_2$  (cuerpos en contacto completo) se obtiene el mismo resultado que para las placas plano-paralelas. Otro caso extremo es cuando  $S_1 \ll S_2$  que da  $\frac{S_1}{S_2} \rightarrow 0$  y por tanto  $F_{21} = 0$ . Si sólo el cuerpo 2 es un cuerpo negro,  $\alpha_2 = 1$  y se tiene que  $\alpha_{\text{red}} = \alpha_1$ . Finalmente, si ambos son cuerpos negros,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  lo que da  $\Phi_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = \sigma S_1 (T_1^4 - T_2^4)$

### 3.5.5. El factor de forma.

Veamos como se calcula el *factor de forma* o *factor de intercambio de radiación* en el caso general.

Consideremos dos elementos de superficie  $dS_1$  y  $dS_2$  que se ven mutuamente. Consideremos la energía radiada desde  $dS_1$  en un ángulo sólido  $\text{sen } \theta_1 d\theta_1 d\psi_1$  situado alrededor de  $r_{12}$ , suficientemente grande para que  $dS_2$  quede completamente comprendida dentro del haz que subtiende ese ángulo sólido. Esta energía radiada en la unidad de

tiempo será, si se cumple la ley de Lambert, y ambas superficies son negras,

$$I dS_{\text{vista}_1} d\Omega_1 = I_\theta dS_1 d\Omega_1 = \left( \frac{\sigma T_1^4}{\pi} \cos \theta_1 \right) dS_1 \sin \theta_1 d\theta_1 d\psi_1. \quad (3-49)$$

La fracción de la energía proveniente de la superficie  $dS_1$  en el ángulo sólido  $d\Omega_1$  que es interceptada por la superficie  $dS_2$  será el cociente entre el área de  $dS_2$  proyectada sobre un plano perpendicular al radio vector  $r_{12}$  (área de  $dS_2$  vista desde  $dS_1$ ) y el área formada por la intersección del ángulo sólido  $\sin \theta_1 d\theta_1 d\psi_1$  con una esfera de radio  $r_{12}$  centrada en  $dS_1$ :

$$\frac{dS_2 \cos \theta_2}{r_{12}^2 \sin \theta_1 d\theta_1 d\psi_1}$$

por lo que el flujo radiante de  $dS_1$  a  $dS_2$  será:

$$\begin{aligned} d\Phi^{1 \rightarrow 2} &= \frac{\sigma T_1^4}{\pi} \cos \theta_1 \sin \theta_1 d\theta_1 d\psi_1 dS_1 \frac{dS_2 \cos \theta_2}{r_{12}^2 \sin \theta_1 d\theta_1 d\psi_1} = \\ &= \frac{\sigma T_1^4 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r_{12}^2} dS_1 dS_2 \end{aligned} \quad (3-50)$$

Análogamente, el flujo radiante de  $dS_2$  a  $dS_1$  (energía radiante que sale de  $dS_2$  y es interceptada por  $dS_1$  en la unidad de tiempo) será:

$$d\Phi^{2 \rightarrow 1} = \frac{\sigma T_2^4 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r_{12}^2} dS_1 dS_2 \quad (3-51)$$

De este modo, el flujo radiante neto entre  $dS_1$  y  $dS_2$ , cuando ambas superficies son negras, queda:

$$d\Phi_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = d\Phi^{1 \rightarrow 2} - d\Phi^{2 \rightarrow 1} = \frac{\sigma}{\pi} (T_1^4 - T_2^4) \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r_{12}^2} dS_1 dS_2 \quad (3-52)$$

quedando el flujo radiante neto entre los cuerpos negros 1 y 2 :

$$\Phi_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma}{\pi} (T_1^4 - T_2^4) \iint \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r_{12}^2} dS_1 dS_2 \quad (3-53)$$

donde la integración está restringida a las parejas de superficies elementales  $dS_1$  y  $dS_2$  que se ven mutuamente. Este resultado se suele expresar en la forma:

$$\Phi_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = S_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) = S_2 F_{21} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (3-54)$$

donde se han introducido los factores de forma:

$$F_{12} = \frac{1}{\pi S_1} \iint \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r_{12}^2} dS_1 dS_2 \quad (3-55a)$$

El factor de forma  $F_{12}$  representa la fracción de la radiación que sale de 1 que es interceptada por 2, mientras que la fracción de la energía que sale de 2 que es interceptada por 1 viene dada por el factor de forma  $F_{21}$ :

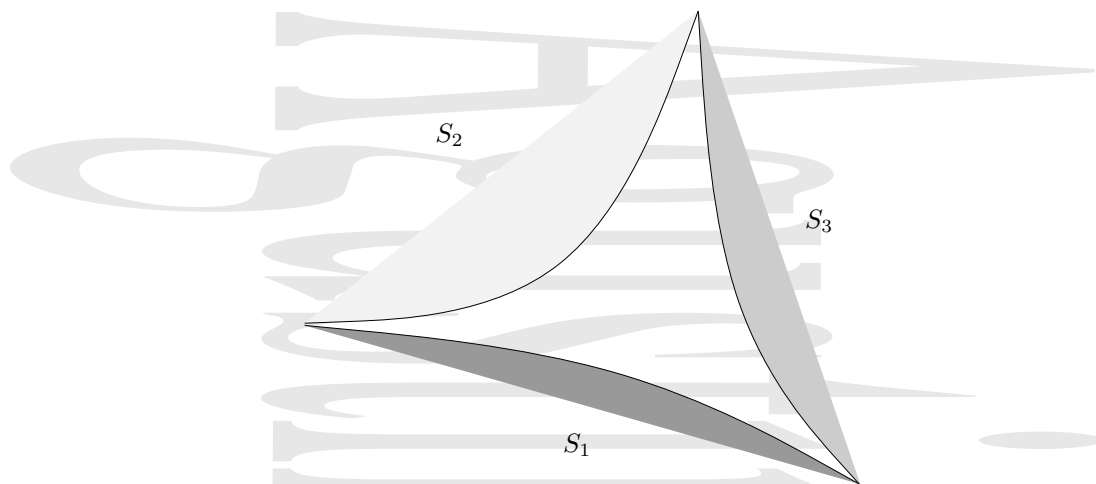
$$F_{21} = \frac{1}{\pi S_2} \iint \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r_{12}^2} dS_1 dS_2 \quad (3-55b)$$

Evidentemente, se cumple la relación de reciprocidad

$$S_1 F_{12} = S_2 F_{21} \quad (3-56)$$

Si ambas superficies son grises, la ecuación (3-54) se transforma en

$$\Phi_{\text{neto}}^{1 \rightarrow 2} = S_1 F_{12} \epsilon_1 \sigma T_1^4 - S_2 F_{21} \epsilon_2 \sigma T_2^4 = S_1 F_{12} \sigma (\epsilon_1 T_1^4 - \epsilon_2 T_2^4) = S_2 F_{21} \sigma (\epsilon_1 T_1^4 - \epsilon_2 T_2^4) \quad (3-57)$$



**Figura 3-18:** Cálculo del factor de forma para el caso de un recinto cerrado delimitado por tres paredes convexas  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  en general de distintos materiales.

### 3.5.6. Intercambio de calor por radiación en un recinto de paredes convexas de distintos materiales.

Veamos ahora como calcular los factores de forma y la magnitud del intercambio de calor por radiación para un caso particular importante. Este caso particular es el de un recinto cerrado limitado por tres paredes convexas que pueden ser, en general, de distintos materiales. La importancia de este caso que en principio parece tan específico radica en que muchos problemas de factores de forma en recintos más complejos pueden descomponerse en varios problemas de factores de forma en un recinto cerrado o casi cerrado delimitado por tres paredes convexas.

#### Obtención de los factores de forma.

Consideremos las superficies convexas  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  de la figura. Como son superficies convexas, la radiación emitida por cada una de ellas va a las demás, pero no a sí misma, esto es, no se autoirradian. Por tanto, se tiene para los factores de forma de autoirradiación

$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0 \quad (3-58)$$

Para un recinto cerrado, la suma de los factores de forma para cada superficie debe ser la unidad. Como las superficies son además convexas y por tanto, los factores de forma de autoirradiación son 0, se tiene que

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = F_{12} + F_{13} = 1 \quad (3-59a)$$

$$F_{21} + F_{22} + F_{23} = F_{21} + F_{23} = 1 \quad (3-59b)$$

$$F_{31} + F_{32} + F_{33} = F_{31} + F_{32} = 1 \quad (3-59c)$$

Introduzcamos ahora un nuevo elemento para simplificar los cálculos. Se denominan superficies efectivas a las superficies

$$H_{ij} = S_i F_{ij} \quad (3-60)$$

que tal como están definidas cumplen la condición

$$H_{ij} = H_{ji} \quad (3-61)$$

En función de estas superficies efectivas, la ecuación (3-59a) se escribe como

$$H_{12} + H_{13} = S_1$$

$$H_{21} + H_{23} = S_2 \quad (3-62)$$

$$H_{31} + H_{32} = S_3$$

Si tenemos en cuenta que

$$\begin{aligned} H_{12} &= H_{21} \\ H_{13} &= H_{31} \\ H_{23} &= H_{32} \end{aligned} \quad (3-63)$$

la suma de las ecuaciones (3-62) da como resultado

$$H_{12} + H_{13} + H_{23} = \frac{1}{2}(S_1 + S_2 + S_3) \quad (3-64)$$

Restando de esta expresión cada una de las ecuaciones (3-62) se tiene

$$\begin{aligned} H_{12} &= \frac{1}{2}(S_1 + S_2 - S_3) \\ H_{13} &= \frac{1}{2}(S_1 + S_3 - S_2) \\ H_{23} &= \frac{1}{2}(S_2 + S_3 - S_1) \end{aligned} \quad (3-65)$$

que da, para los factores de intercambio de calor por radiación entre las superficies convexas  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  los resultados

$$F_{12} = \frac{S_1 + S_2 - S_3}{2S_1} \quad (3-66a)$$

$$F_{13} = \frac{S_1 + S_3 - S_2}{2S_1} \quad (3-66b)$$

$$F_{21} = \frac{S_1 + S_2 - S_3}{2S_2} \quad (3-66c)$$

$$F_{23} = \frac{S_2 + S_3 - S_1}{2S_2} \quad (3-66d)$$

$$F_{31} = \frac{S_2 + S_3 - S_1}{2S_3} \quad (3-66e)$$

$$F_{32} = \frac{S_2 + S_3 - S_1}{2S_3} \quad (3-66f)$$

Es decir, la fracción de la energía emitida por una superficie que es recibida por otra es la suma de las superficies entre las que se calcula el factor de forma menos la otra superficie, y todo ello dividido por el doble de la superficie emisora.

### **Intercambio de calor por radiación entre dos placas paralelas semiinfinitas.**

Trataremos ahora un ejemplo de aplicación de lo que se acaba de ver. En la sección 3.5.2 ya se estudió el problema de la transferencia de calor por radiación entre dos planos grises infinitos y paralelos. Ahora abordaremos un problema distinto, representado en la figura 3-19, el de la transferencia de calor por radiación entre dos planos paralelos semi-infinitos (de anchura  $a$ ) separados una distancia  $h$ . En estas condiciones, es evidente que de la radiación emitida por el plano 1 no llega nada al mismo, esto es,  $F_{11} = 0$ .

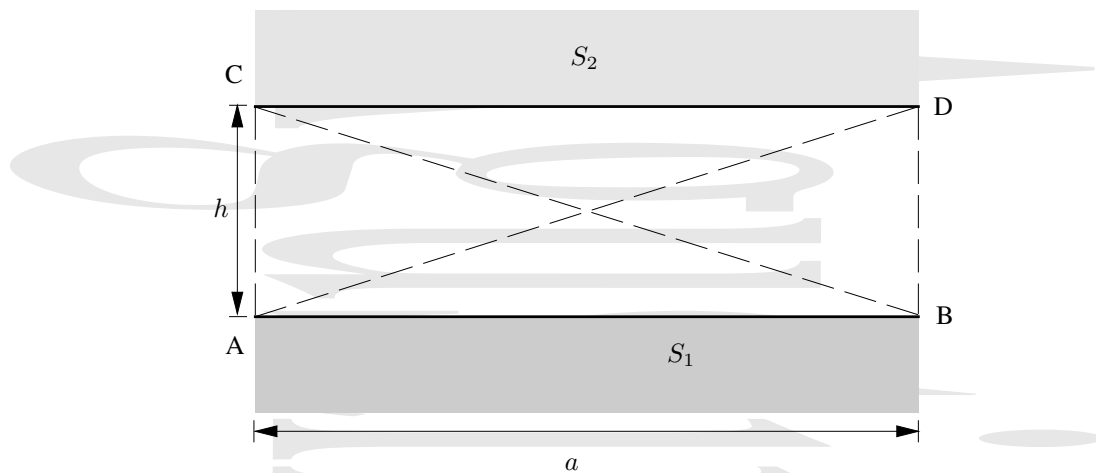
Para estudiar este problema y obtener el factor de forma correspondiente, consideraremos el recinto cerrado ABCD, delimitado por las 4 paredes AB, BD, DC y CA, dos reales y dos ficticias. Para la radiación emitida desde la superficie 1 debe cumplirse que la suma de los factores de forma ha de ser la unidad, esto es,

$$F_{12} + F_{1AC} + F_{1DB} + F_{11} = F_{12} + F_{1AC} + F_{1DB} = 1$$

es decir, que

$$F_{12} = 1 - F_{1AC} - F_{1DB}.$$





**Figura 3-19:** Cálculo del factor de forma para el intercambio de calor por radiación entre dos placas semiinfinitas de anchura  $a$ , separadas una distancia  $h$ .

Ahora bien, cuando se consideran los recintos cerrados ACB y ADB (de nuevo mezclamos superficies reales e imaginarias) formados por tres superficies convexas (planas, es decir en el límite, pero lo suficiente para que no haya autoirradiación) se tiene el caso tratado en la sección anterior y por tanto, los factores de forma  $F_{1AC}$  y  $F_{2DB}$  se pueden escribir como

$$F_{1AC} = \frac{S_1 + S_{AC} - S_{BC}}{2S_1} \quad \text{y} \quad F_{1DB} = \frac{S_1 + S_{DB} - S_{AD}}{2S_1}. \quad (3-67)$$

Como la anchura de las dos placas es la misma,  $S_1 = S_2 = a$ . La longitud  $L$  de las placas es también la misma (e infinita), por lo que los valores de las superficies  $S_{AC} = S_{DB}$  y  $S_{BC} = S_{AD}$  son respectivamente de

$$S_{AC} = S_{DB} = AB \cdot h = hL$$

$$S_{BC} = S_{AD} = \sqrt{a^2 + h^2} \cdot L$$

Por tanto, los factores de forma  $F_{1AC}$  y  $F_{1DB}$  quedan como

$$F_{1AC} = \frac{a + h - \sqrt{a^2 + h^2}}{2a} \quad \text{y} \quad F_{1DB} = \frac{a + h - \sqrt{a^2 + h^2}}{2a}$$

y, en definitiva, el factor de forma  $F_{12} = 1 - F_{1AC} - F_{1DB}$  queda como

$$F_{12} = \frac{1}{a} \left( \sqrt{a^2 + h^2} - h \right) \quad (3-68)$$

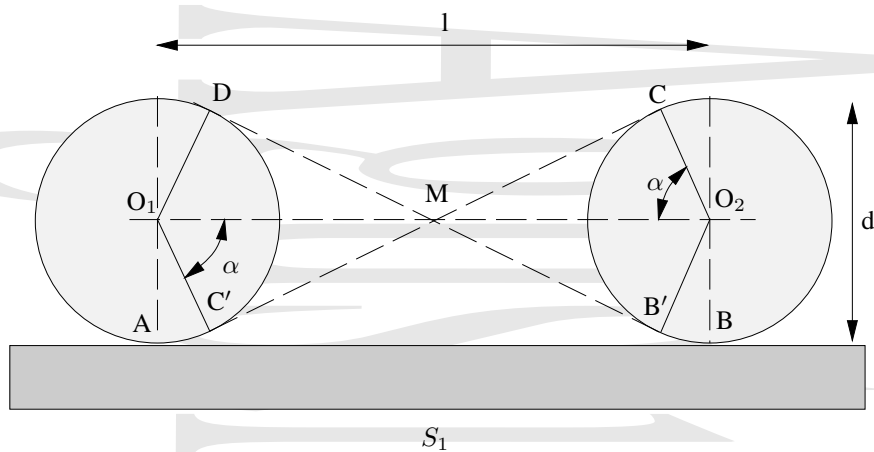
obteniéndose así la fracción de la energía emitida por la superficie 1 que llega a la superficie 2.

#### **Intercambio de calor por radiación entre un plano infinito y un sistema de cilindros infinitos pegados al mismo.**

Otro ejemplo de aplicación es el estudio del intercambio de calor por radiación en el sistema formado por un sistema de cilindros paralelos de longitud infinita y diámetro  $d$ , con ejes separados una distancia  $l$ , en contacto con un plano infinito, como se ve en la figura 3-20.

Ahora se tendrán en consideración los recintos AC'CBB'A y ABB'DC'A, ambos recintos cerrados delimitados por tres paredes (reales o imaginarias). El factor de forma entre los cilindros y el plano de la figura será la suma de los factores de forma entre cada uno de los cilindros A y B y el plano 1,

$$F_{21} = F_{21A} + F_{21B} = 2F_{ABB'DC'A} = 2 \frac{S_1 + S_{BB'C} - S_{CC'A}}{2S_1}$$



**Figura 3-20:** Cálculo del factor de forma para el intercambio de calor por radiación entre un plano infinito y un sistema de infinitos cilindros paralelos de diámetro  $d$  separados una distancia  $l$ .

El arco  $BB'C$  viene dado por

$$\overline{BB'C} = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \frac{d}{2}$$

y los lados del triángulo rectángulo  $O_1C'M$  cumplen la relación

$$\frac{d^2}{4} + (\overline{C'M})^2 = \frac{l^2}{4}$$

por lo que la distancia  $C'M$  es

$$\overline{C'M} = \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{d^2}{4}}$$

Así, la longitud  $CC'A = C'A + 2\overline{C'M}$  queda

$$CC'A = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \frac{d}{2} + 2\sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{d^2}{4}}. \quad (3-69)$$

La tangente del ángulo  $\alpha$  viene dada por

$$\tan \alpha = \frac{\overline{C'M}}{\overline{OC'}} = \frac{2}{d} \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{d^2}{4}} = \sqrt{\frac{l^2}{d^2} - 1}$$

por lo que el ángulo  $\alpha$  resulta ser

$$\alpha = \arctan \sqrt{\frac{l^2}{d^2} - 1}. \quad (3-70)$$

Como se tiene intercambio de calor por radiación entre la superficie  $S_1$  y las dos superficies que ve de los cilindros, ( $AC'D$  y  $BB'C$ ) y los factores de forma entre la superficie  $S_1$  y cada una de estas dos superficies son los mismos, el factor de forma total será el doble del factor de forma con cada una de ellas, es decir,

$$F_{12} = 2F_{12A} = F_{12B} = \frac{S_1 + S_{2A} - S_{3A}}{S_1} = \frac{l + \overline{BB'C} - \overline{CC'A}}{l} \quad (3-71)$$

La diferencia entre las superficies  $BB'C$  y  $CC'A$  queda

$$\overline{BB'C} - \overline{CC'A} = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \frac{d}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \frac{d}{2} - \sqrt{l^2 - d^2} = d\alpha - \sqrt{l^2 - d^2}$$

De esta forma, la ecuación (3-71) queda como

$$F_{12} = 1 + \frac{d}{l}\alpha - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{l}\right)^2} + \frac{d}{l} \arctan \sqrt{\frac{l^2}{d^2} - 1} \quad (3-72)$$

### 3.5.7. Cálculo analítico del factor de forma por integración.

En algunos casos favorables puede obtenerse el factor de forma por integración analítica de la ecuación (3-53). Estudiaremos alguno de esos casos y algunas relaciones útiles que permiten obtener el valor del factor de forma en otros casos.

#### **Intercambio de calor por radiación entre dos planos negros perpendiculares.**

Para obtener el factor de forma entre dos rectángulos perpendiculares que comparten una arista consideraremos las superficies infinitesimales  $dS_1$  y  $dS_2$  sobre cada una de las superficies como se muestra en la figura 3-21. Si denominamos  $x_1$  a la variable  $x$  cuando se recorre la superficie 1 y  $x_2$  a la misma variable  $x$  cuando se recorre la superficie 2, el cuadrado del vector posición relativa entre las dos superficie,  $r_{12}$  se escribe como

$$r_{12}^2 = r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - 0)^2 + (0 - z_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + y^2 + z^2$$

donde por simplicidad hemos escrito  $y_1 \equiv y$  y  $z_2 \equiv z$  ya que en ambos casos no hay confusión y se sabe qué superficie recorre cada una de estas variables durante la integración y también  $r_{12} \equiv r$ . Observando la figura se tiene que cada uno de los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  vienen dados por las expresiones

$$\cos \theta_1 = \frac{z}{r} \quad \cos \theta_2 = \frac{y}{r}$$

por lo que la ecuación (3-53) queda en la forma

$$F_{12} = \frac{1}{\pi S_1} \int_0^c \int_0^b dydz \int_0^a \int_0^a \frac{zy}{[(x_1 - x_2)^2 + y^2 + z^2]^2} dx_1 dx_2$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son las dimensiones de los rectángulos. La integración analítica de esta expresión es compleja, pero da como resultado

$$F_{12} = \frac{1}{\pi W} \left( W \arctan \frac{1}{W} + H \arctan \frac{1}{H} - \sqrt{H^2 + W^2} \arctan \frac{1}{\sqrt{H^2 + W^2}} + \right. \\ \left. \frac{1}{4} \ln \left\{ \frac{(1 + W^2)(1 + H^2)}{1 + W^2 + H^2} \left[ \frac{W^2(1 + W^2 + H^2)}{(1 + W^2)(H^2 + W^2)} \right]^{W^2} \left[ \frac{H^2(1 + W^2 + H^2)}{(1 + H^2)(H^2 + W^2)} \right]^{H^2} \right\} \right) \quad (3-73)$$

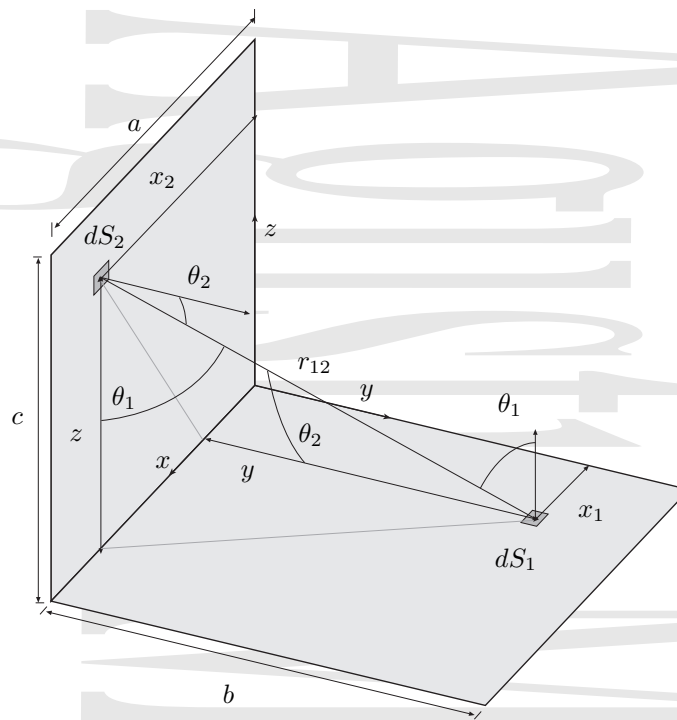
en función de  $H = c/a$  y  $W = b/a$ . Por comodidad, en vez de trabajar con la compleja expresión (3-73) se trabaja con la misma representada gráficamente como se muestra en la figura 3-22.

Un caso particular de lo anterior se tiene cuando cuando las dos superficies que comparten una arista son cuadrados. En este caso,  $H = c/a = W = b/a = 1$  y el factor de forma queda  $F_{12} = 0,2$  para cualquier tamaño de los cuadrados (ambos el mismo).

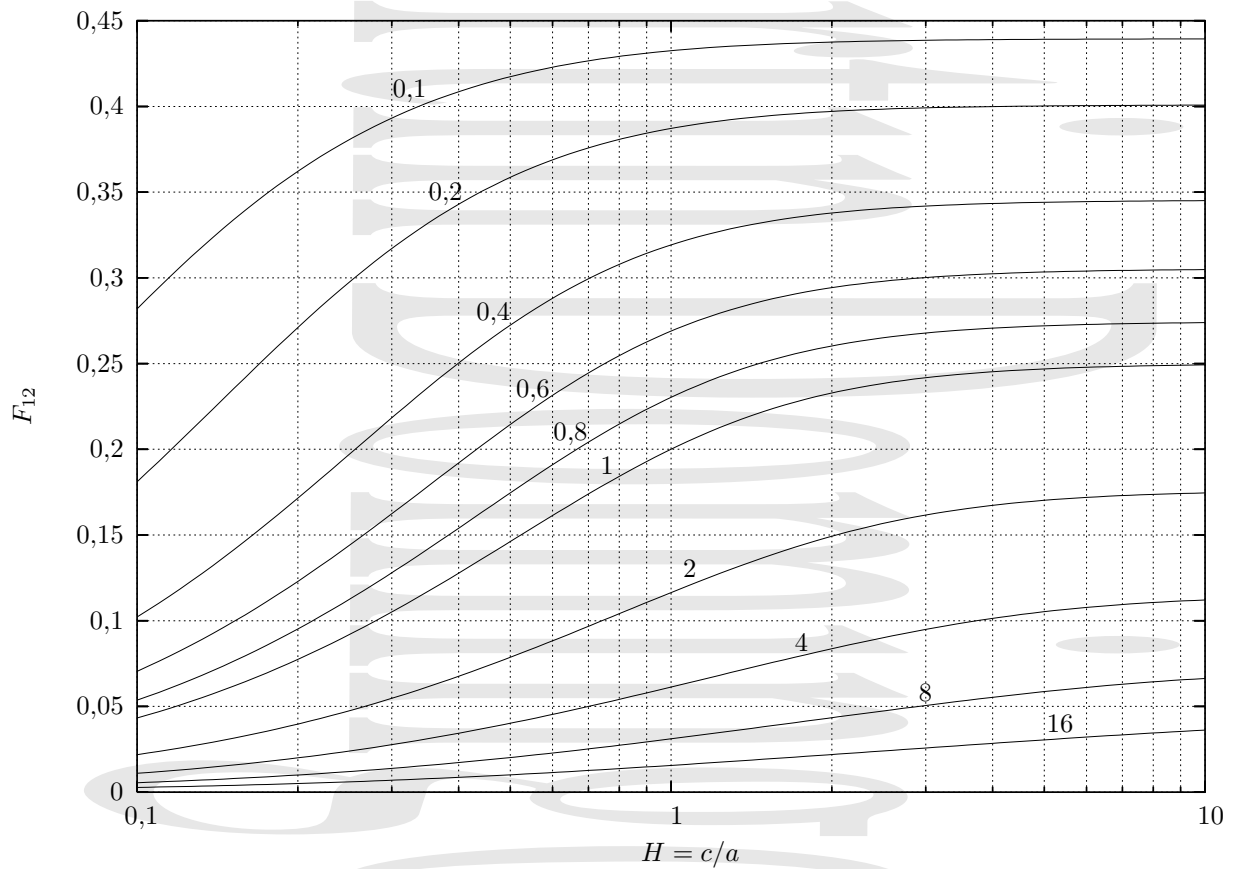
Esto lleva a otro caso particular, el de un cubo hueco, en el que como hemos visto, el factor de forma entre una cara y cada una de las caras adyacentes será 0,2, y por tanto el factor de forma entre esa cara y la cara opuesta será también de 0,2, al ser todas las superficies iguales y en ese caso la suma de los factores de forma entre esa cara y cada una de las otras caras la unidad. de esta forma, la transferencia de calor que tiene lugar a partir de una de las caras de un cubo hueco se reparte por igual entre las demás caras.

#### **Relación entre los factores de forma para dos planos negros perpendiculares con un eje coincidente.**

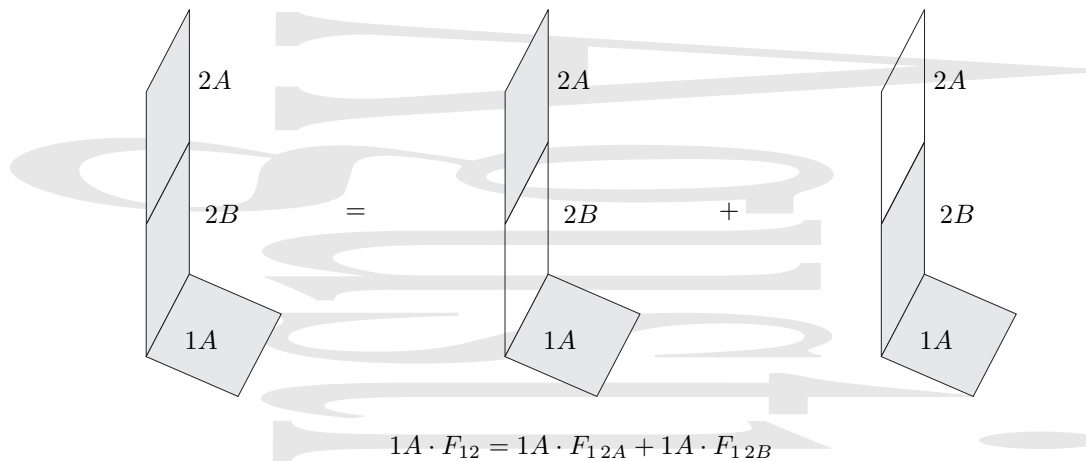
La relación anterior (3-73) permite en la práctica obtener el factor de forma para cualesquiera dos áreas rectangulares perpendiculares con una arista paralela. Para ello basta con tener en cuenta el carácter aditivo de la integración de la ecuación (3-73) y con una cuidadosa combinación de factores de forma de superficies para obtener el factor de forma deseado.



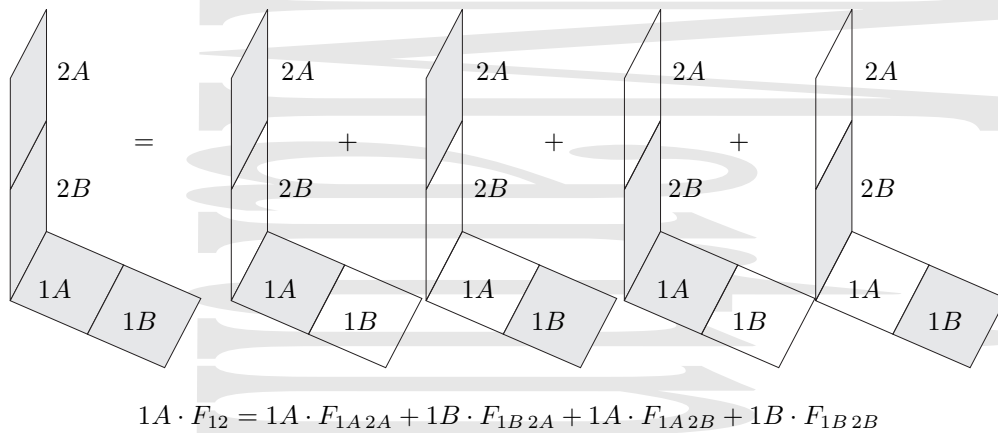
**Figura 3-21:** Cálculo del factor de forma en el intercambio de calor por radiación entre dos planos negros perpendiculares.



**Figura 3-22:** Representación gráfica del factor de forma de radiación para el caso de dos rectángulos perpendiculares con una arista común en función de los cocientes  $H = c/a$  y  $W = b/a$ .



El factor de forma  $F_{12A}$  puede obtenerse fácilmente a partir de los factores de forma  $F_{12}$  y  $F_{12B}$ , que pueden obtenerse directamente a partir de la ecuación (3-73), y de los valores de las superficies 1A, 2A y 2B, que son conocidos.



El factor de forma  $F_{1B2A}$  puede obtenerse de una forma también simple, pero un poco más compleja que antes a partir de los factores de forma  $F_{12}$  y  $F_{1A2B}$ , que pueden obtenerse directamente a partir de la ecuación (3-73), de los valores de los factores de forma  $F_{1A2A}$  y  $F_{1B2B}$ , que pueden obtenerse como se ha visto en la parte superior de esta figura y de los valores de las superficies 1A, 2A, 1B y 2B, que son conocidos.

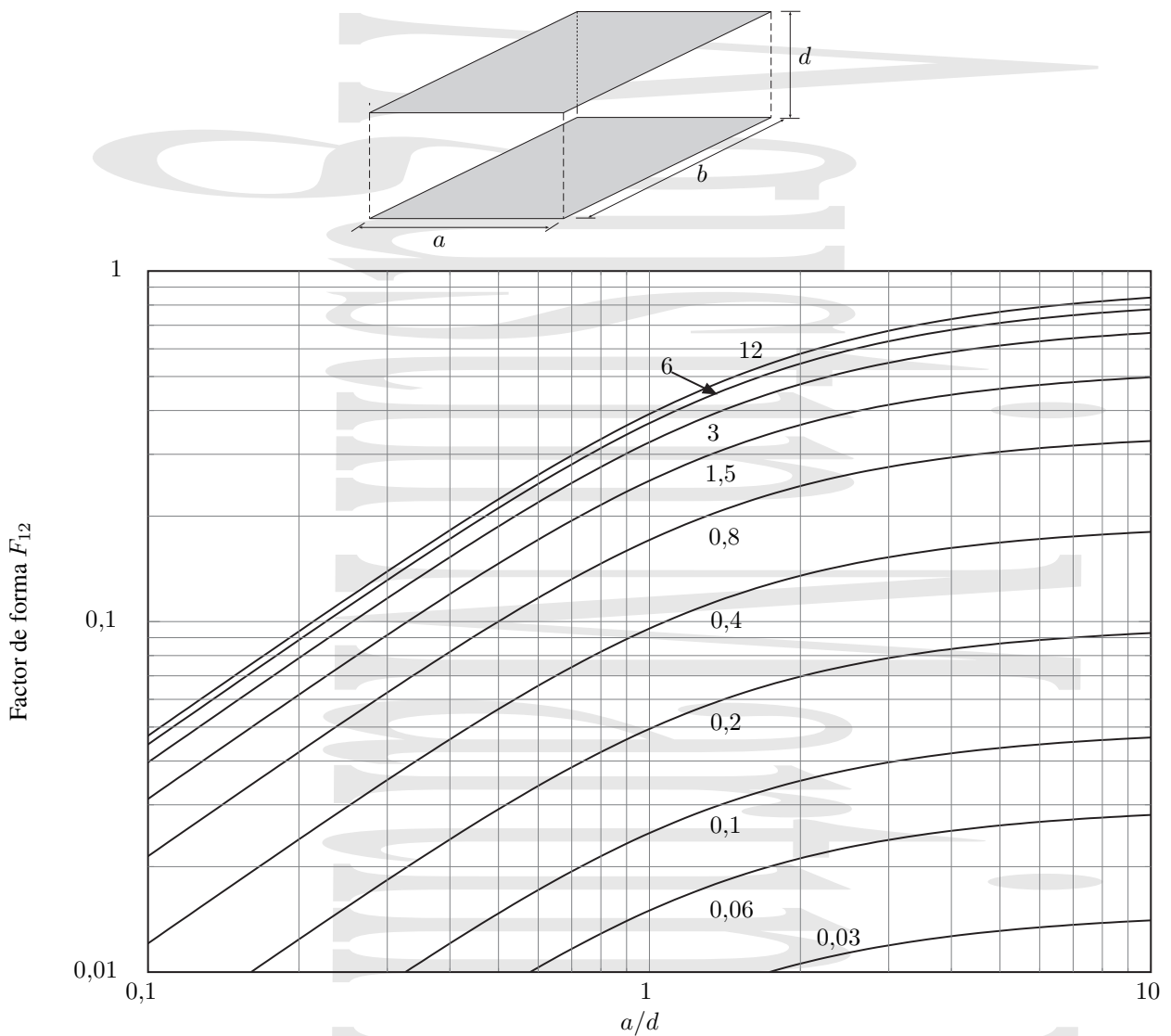
**Figura 3-23:** Relación entre los factores de forma para cualesquiera dos áreas rectangulares perpendiculares con una arista paralela. Ejemplos para tres y cuatro subáreas.

### ***Intercambio de calor por radiación entre dos superficies rectangulares negras iguales y paralelas colocadas de frente a una distancia $d$ .***

En este caso, el factor de forma resultante puede escribirse como

$$F_{12} = \frac{1}{2\pi XY} \left( \ln \sqrt{\frac{(1+X^2)(1+Y^2)}{1+X^2+Y^2}} - X \arctan X - Y \arctan Y + \right. \\ \left. X\sqrt{1+Y^2} \arctan \frac{X}{\sqrt{1+Y^2}} + Y\sqrt{1+X^2} \arctan \frac{Y}{\sqrt{1+X^2}} \right) \quad (3-74)$$

donde hemos expresado el factor de forma en función de los cocientes  $X = a/d$  y  $Y = b/d$ . De forma similar al caso



**Figura 3-24:** Representación gráfica del factor de forma de radiación para el caso de dos rectángulos paralelos alineados en función de los cocientes  $a/d$  (en el eje  $x$ ) y  $b/d$  (representado por cada una de las líneas señaladas en la gráfica).

de los rectángulos negros perpendiculares que comparten un eje, puede obtenerse mediante una serie de combinaciones adecuadas el valor del factor de forma para el intercambio de radiación entre dos superficies rectangulares negras de cualquier tamaño con aristas paralelas.

# Índice alfabético

## A

absorbancia  
reducida, 44  
absorbente perfecto, 29  
absorción, coeficiente de, 28  
absortividad, 28  
análisis dimensional, 10

## B

Boltzmann, constante de, 31

## C

campo de temperaturas, 1  
capa límite, 9  
de velocidad, 10  
hidrodinámica, 10  
térmica, 10  
cavidad, 29  
coeficiente  
aire-aire, 17  
aire-superficie, 8  
de absorción, 28  
reducido, 47  
de convección, 8, 9  
promedio, 9  
de difusión, 22  
al vapor, 23  
molecular, 22  
térmica, 24  
de película, 8, 9  
de reflexión, 28  
de transmisión, 28  
del calor aire-superficie, 9  
superficial del calor, 8, 9  
global  
de conducción, 16  
de transmisión, 17  
lineal  
de conducción, 18  
de transmisión del calor aire-aire, 20  
de transmisión del calor superficie-superficie, 18  
global de conducción, 19  
global de transmisión del calor, 20  
global de transmisión superficie-superficie, 19  
superficie-superficie, 16  
concentración  
difusión por, 22  
gradiente de, 22  
condición de no deslizamiento, 9  
condiciones de contorno, 7  
de cuarta especie, 8  
de Dirichlet, 8  
de primera especie, 8  
de segunda especie, 8  
de tercera especie, 8  
de von Neumann, 8  
conducción, 1  
ecuación diferencial de, 6  
conductividad térmica, 3  
principal, 7  
tensor, 7

## constante

de Boltzmann, 31  
de Planck, 25, 31  
de Stefan-Boltzmann, 33  
solar, 28

## convección, 22

con cambio de fase, 14  
forzada, 9  
natural, 9

## cuerpo

gris, 36  
negro, 29, 30

## D

### densidad

de flujo de difusión, 21, 23  
de flujo energético, 27  
de flujo radiante, 41  
de flujo térmico, 2  
efectiva de flujo radiante, 41

### difusión, 21

coeficiente de, 22  
del vapor, 22  
densidad de flujo, 21  
flujo de, 21  
molecular, 21  
por concentración, 22  
térmica, 24  
térmica, coeficiente de, 24

### difusividad

al vapor, 23  
térmica, 6

Dirichlet, condiciones de contorno, 8

## E

### ecuación

de Fourier, 6  
de Laplace, 6  
de Poisson, 6  
diferencial de la conducción, 6

efecto invernadero, 38

### emisividad

espectral, 34  
total, 34

emitancia, 27, 41

espectral, 27  
monocromática, 27

energía radiante, 26

densidad de, 29

### espectro

de emisión  
continuo, 26  
selectivo, 26  
de la radiación, 26  
visible, 25

## F

### factor

de emisión monocromático, 34  
de forma, 4547  
de intercambio de radiación, 47

- Fick, ley de, 21, 23
- flujo
- de calor, 2
  - de difusión, 21
  - energético, 27
  - energético de una fuente, 27
  - espectral de una fuente radiante, 27
  - laminar, 9
  - monocromático de una fuente radiante, 27
  - radiante
    - densidad efectiva, 41
    - densidad neta, 42
    - efectivo, 42, 46
    - neto, 42, 45
  - térmico, 2
  - turbulento, 9
- Fourier
- ecuación de, 6
  - ley de, 3, 6
- frecuencia de la onda, 25
- G**
- Gauss, teorema de, 5
- gradiente
- de concentración, 22
  - de temperaturas, 3
  - térmico, 24
- Grashoff, número de, 12
- I**
- intensidad
- angular de radiación, 38
  - de radiación, 36
  - energética, 37
  - específica, 36
- isoterma, 1
- K**
- Kirchoff, ley de, 35
- L**
- Lambert, ley de, 37
- Laplace, ecuación de, 6
- ley
- de enfriamiento de Newton, 9
  - de Fick, 21, 23
  - de Fourier, 3, 6
    - en medios anisótropos, 6
  - de Kirchoff, 35
  - de la radiación difusa, 37
  - de Lambert, 37
  - de Newton, 8
  - de Planck, 31
  - de Stefan-Boltzmann, 33
  - del desplazamiento de Wien, 32
- ley de Rayleigh-Jeans, 33
- longitud de onda, 25
- luminancia, 36
- M**
- métodos de semejanza, 10
- muro
- compuesto, 15
    - con convección, 17
  - simple, 14
    - con convección, 17
- N**
- Newton
- ley de, 8
  - ley de enfriamiento, 9, 16
  - número
    - de Grashoff, 12
    - de Nusselt, 10
    - de Prandtl, 11
    - de Rayleigh, 12
    - de Reynolds, 10
      - crítico, 10
    - Nusselt, número de, 10
- O**
- ondas electromagnéticas, 25
- P**
- pared cilíndrica
- compuesta
    - con conducción y convección, 19
    - condiciones de primera especie, 19
    - sin convección, 19
  - simple
    - condiciones de primera especie, 17
    - sin convección, 17
- Planck
- constante de, 31
  - ley de, 31
- poder
- absorbente, 28
  - de transmisión, 28
  - emisivo, 27, 41
  - reflector, 28
- Poisson, ecuación de, 6
- Prandtl, número de, 11
- R**
- radiación
- difusa, 31, 37
  - efectiva, 41
  - electromagnética, 25
  - emergente, 41
  - neta, 42
  - solar
    - máximo de emisión, 32
  - térmica, 25
  - visible, 25
- Rayleigh, número de, 12
- Rayleigh-Jeans, ley de, 33
- reflectividad, 28
- reflector perfecto, 29
- reflexión, coeficiente de, 28
- régimen
- laminar, 9, 11, 13
  - turbulento, 9, 11, 13
- resistencia
- al vapor, 23
  - térmica
    - global a la conducción, 16
    - total, 17
  - térmica lineal, 20
    - a la conducción, 18
    - aire-aire, 20
    - superficie-superficie, 18
  - térmica lineal global
    - a la conducción, 19
    - superficie-superficie, 19
- resistividad al vapor, 23
- Reynolds, número de, 10



**S**

Stefan-Boltzmann  
  constante de, 33  
  ley de, 33  
superficie  
  efectiva, 49  
  gris, 36  
  isoterma, 1  
  negra, 30  
  opaca, 29  
  perfectamente absorbente, 29  
  reflectora perfecta, 29  
  selectiva, 38, 41  
  vista, 36

**T**

temperatura

campo de, 1  
de película, 11  
gradiente de, 3, 24

tensor conductividad térmica, 7  
Teorema de Gauss, 5  
transmisión, coeficiente de, 28  
transmitancia, 17  
transmitividad, 28

**V**

viscosidad  
  cinemática, 10  
  dinámica, 10  
von Neumann, condiciones de contorno, 8

**W**

Wien, ley del desplazamiento de, 32

---

# Referencias

- [1] Holman, J. P., *Transferencia de calor*. Mc Graw-Hill, 1998.
- [2] Isachenko, V. P., V. A. Osipova y A. S. Sukomel, *Heat transfer*. Ed. Mir, Moscú, 1977.
- [3] Chapman, A. J., *Transferencia de calor*. Librería Editorial Bellisco, Madrid, 3ª edición, 1990.
- [4] Bejan, A., *Heat transfer*. John Wiley & Sons, Nueva York, 1993.
- [5] Cornwell, K., *Transferencia de calor*. Ed. Limusa, México, 1981.
- [6] Çengel, Y. A., *Transferencia de calor*. McGraw Hill, México, 2ª edición, 2004.
- [7] Ojotin, V., V. Zhidkij, V. Laviguin y F. Salomzoda, *Fundamentos de termotecnia*. Ed. Mir, Moscú, 1988.
- [8] Parsons, R. (editor), *1997 ASHRAE Handbook: Fundamentals*. ASHRAE Handbook Fundamentals, American Society of Heating, Refrigerating and Air Conditioning Engineers, 1997.
- [9] Churchill, S. W. y H. Chu, *Int. J. Heat Mass Transfer* **18**, 1323–1329, 1975.
- [10] Aguilar Peris, J., *Curso de termodinámica*. Ed. Alhambra, 1989.