

reconstrucción de imágenes tomográficas

técnicas en el dominio de la frecuencia

La tomografía transaxial es una técnica radiográfica, que permite obtener imágenes de secciones bidimensionales, pertenecientes a estructuras tridimensionales mediante la exploración apropiada y utilizando algún tipo de radiación.

En este trabajo se presentan los principios básicos de esta técnica, así como una visión general de los métodos de reconstrucción basados en el análisis de Fourier y sus respectivas versiones discretas con vista a su tratamiento en ordenadores digitales.

Carlos Robaina Padrón, Miguel Angel Muriel Fernández y J.A. Martín Pereda

IMAGE RECONSTRUCTION METHODS FROM TRANSAXIAL TOMOGRAPHIC SAMPLES Frequency Domain Techniques

Transaxial tomography is a radiographic technique, that provides an image of an isolated two-dimensional section of a three-dimensional object.

The basic principles of this technique and a general view of the reconstruction methods based on the Fourier analysis, are reviewed in this paper; their discrete versions in order to the treatment in digital computers, are also shown.

INTRODUCCION

Las imágenes se usan para representar la distribución de algún parámetro de un objeto o sistema físico, así, una imagen puede describir desde la estructura de una molécula hasta la distribución del brillo de una estrella [9]. Por tanto, la formación, procesamiento e interpretación de imágenes es una actividad común a muchas disciplinas científicas.

Las imágenes más familiares son aquellas que se obtienen mediante instrumentos ópticos, usando la luz visible reflejada o transmitida por un objeto. Sin embargo, en muchas aplicaciones en las que se requiere una imagen, sólo podemos hacer medidas indirectas, sometiendo al objeto a algún tipo de radiación o interpretando la que un cuerpo pueda emitir (aplicaciones en radiología y radioastronomía).

El propósito de todos los métodos de reconstrucción de imágenes es el de, mediante el procesamiento adecuado de los datos disponibles (proyecciones) formar la imagen, para facilitar la interpretación de las medidas. Así, en medicina, a menudo se precisa conocer la localización y tamaño de un posible tumor localizado en el cerebro de un paciente u otro tipo de daños, para planificar la mejor terapia posible. Obviamente se prefiere actuar desde el exterior mediante algún tipo de medición indirecta, como usar rayos-X para

obtener una radiografía de la zona. Pese a su habitual uso e importancia, este método tiene una gran desventaja: sobre la película, las estructuras internas se solapan dificultando enormemente su distinción. Esto ocurre particularmente cuando los coeficientes de atenuación o absorción que presentan estructuras adyacentes al tipo de radiación utilizada, difieren en cantidad muy pequeña, lo cual es muy frecuente. Para evitar este problema se recurre a realizar varias radiografías desde distintas posiciones y en las cuales las diversas estructuras aparecen en diferente relación, facilitándose su interpretación.

Otra técnica que se utiliza en estos casos es la Tomografía [6], [7]. Esta, de práctica común hoy en día, ha sido el método tradicional seguido para la obtención de información tridimensional. Utilizando una fuente de rayos-X y una película, y encontrándose el objeto situado estáticamente entre emisor y detector móviles según direcciones opuestas, se impresiona la película. Considerando el cuerpo como una serie de planos paralelos a la película, sólo habrá uno cuya imagen proyectada permanezca estacionaria con respecto a la película a medida que ésta avanza, por lo que aparecerá enfocado, mientras que los otros estarán borrosos. La gran desventaja está en la presencia de estos otros planos desenfocados que emborronan la imagen.

Una nueva técnica vino a soslayar éste y otros problemas, es la conocida como tomografía axial computerizada (TAC) [10] y, que ha supuesto una revolución en radiología. Con ella se consiguen imágenes espectaculares y muy útiles de cortes cerebrales, habiéndose hoy en día conseguido aplicarla a otros órganos, «Total Body». Actualmente, se experimenta para conseguir imágenes nítidas de estructuras en sus diferentes fases de movimiento (corazón, pulmones), de flujos sanguíneos y otras constantes fisiológicas [9].

CLASIFICACION DE LOS METODOS

Un caso particular de la reconstrucción de imágenes a

partir de proyecciones, es aquel en que el objeto a reconstruir posee simetría circular. La ecuación integral a que da lugar se reduce a resolver una de las formas de la conocida transformada de Abel, cuya inversión es ya clásica [12]. La primera contribución importante a la teoría general de la reconstrucción de imágenes, llegó en 1917 con la publicación por J. Radon de la formulación necesaria para la resolución de la ecuación integral, que relaciona objetos bidimensionales asimétricos con sus proyecciones. Sus fórmulas de inversión son la base de gran parte de los métodos actuales [1], [2].

Muchos algoritmos se han propuesto para realizar la tarea, pudiéndolos englobar en una primera clasificación.

a) Aquellos que deducen su formulación trabajando en el dominio de la frecuencia (transformada de Fourier).

b) Técnicas en el tiempo o dominio real.

Dentro de los primeros están entre otros: Inversión de la transformada de Radon, filtrado de la Imagen Suma, imagen a partir de retroproyecciones filtradas, y método de convolución, (cuyo tratamiento es el objeto de este artículo).

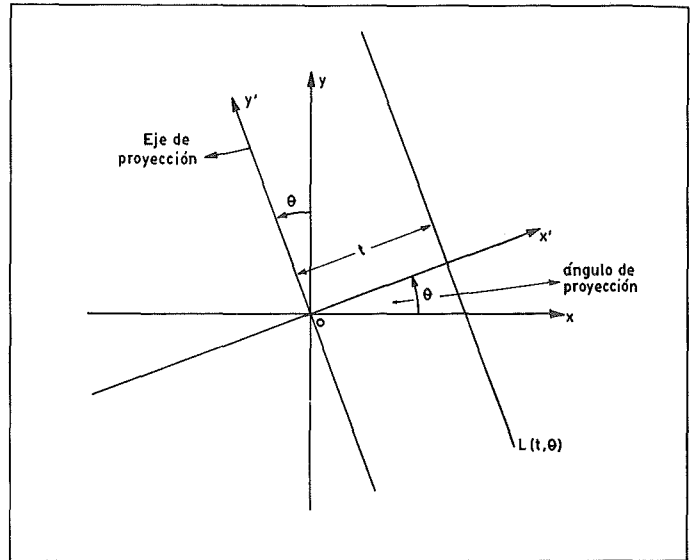


Figura 1. Ejes de coordenadas y variables que definen la función proyección.

CONCEPTOS BASICOS

El problema de la reconstrucción tridimensional es resoluble considerando el objeto como una sucesión de cortes bidimensionales o planos tomográficos, por lo que si es posible encontrar una solución en 2-D, el caso 3-D puede ser resuelto. Un número limitado de cortes bidimensionales estratégicamente situados bastarán para realizar la reconstrucción tridimensional del objeto con suficiente aproximación.

Concepto de proyección

Proyección es el procedimiento por el cual se pasa una función N-dimensional a otra (N-1)-dimensional mediante la integración de la función primitiva en una dirección en particular.

Para funciones bidimensionales, es práctica común referirse a las proyecciones por su ángulo, llamado ángulo de proyección. Una proyección en el ángulo θ , será interpretada como una proyección sobre el eje de coordenadas x' , que forma un ángulo θ con el eje x , por lo mismo, el eje de proyección y' ; forma un ángulo θ con el eje y (figura 1).

Matemáticamente, se puede expresar el concepto de proyección de una función bidimensional de la siguiente forma [1]; [3]; [11]:

$$P_{\theta}(x') = \int_{-\infty}^{\infty} f(x', y') dy' \quad (1)$$

La relación básica para el estudio de la transmisión de cierto tipo de radiación puede ser formulada como sigue: dada una fuente monoenergética de rayos, lo suficientemente estrechos, de fotones de intensidad I , que inciden normalmente sobre un pequeño trozo de materia de dimensión Δl , la porción de intensidad que absorbe éste es proporcional a la intensidad incidente y a la dimensión de la materia explorada. El decremento de intensidad será pues:

$$\Delta I = -\mu I \Delta l \quad (2)$$

siendo el factor de proporcionalidad μ , el coeficiente de atenuación lineal del medio transmisor que a su vez depende

de la energía del rayo, del número atómico y densidad del objeto material.

Integrando (2) se obtiene la expresión de la intensidad I transmitida por un objeto de espesor «1» cuando la intensidad incidente es I_0 ; $I = I_0 \exp(-\mu_t 1)$, donde μ_t es el coeficiente de atenuación lineal total.

Si el objeto explorado es no homogéneo, el exponente ha de reemplazarse por la integral de los coeficientes de atenuación lineal $\mu(x, y)$

$$I = I_0 \exp \left[- \int_{Fuente}^{Detector} \mu(x, y) ds \right] \quad (3)$$

siendo ds un diferencial de longitud sobre el camino de exploración. Realizando una simple transformación logarítmica tenemos que:

$$\ln \frac{I_0}{I} = \int_{Fuente}^{Detector} \mu(x, y) ds \quad (4)$$

siendo esta función (4) matemáticamente idéntica a la desarrollada bajo el concepto de proyección (1), por lo que la exploración realizada equivale a calcular las proyecciones del objeto o corte cuya imagen se desea reconstruir.

El camino de exploración entre fuente y detector puede asimilarse al conjunto de líneas $L(t, \theta) = x \cos \theta + y \sin \theta - t = 0$, por lo que (4) puede expresarse como:

$$P_{\theta}(t) = \int_{L(t, \theta)} f(t, y') dy' \quad (5)$$

ya que $ds \equiv dy'$, $x' \equiv t$ y la relación entre coordenadas es $x = t \cos \theta - y' \sin \theta$ e $y = t \sin \theta + y' \cos \theta$.

Los datos del problema son las distintas $P_{\theta}(t)$ para $0 \leq \theta < \pi$, que pueden obtenerse girando el conjunto emisor-detector después de cada exploración transversal entre dos valores de t máximo y mínimo, que limitan el dominio de existencia de la función a reconstruir (figura 2) [1]; [3]; [4].

Teorema del Corte Central o Proyección - Corte

Este teorema relaciona la transformada de Fourier (TF)

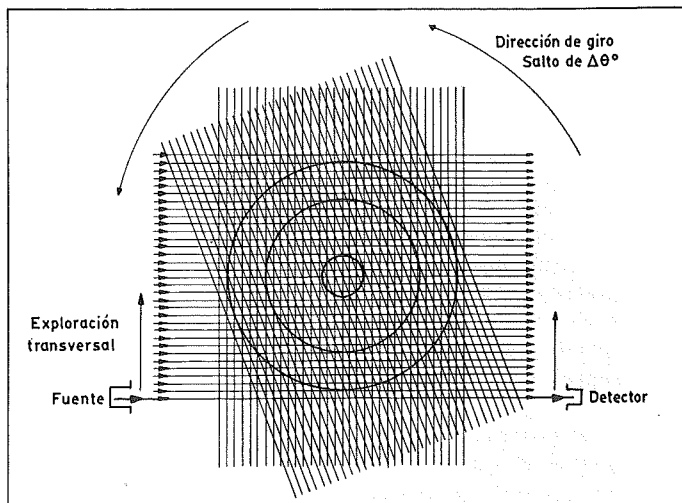


Figura 2. Esquema básico de la reconstrucción bidimensional. Fase de exploración en tees ángulos diferentes.

(N-1)-dimensional de la función proyección con la TF N-dimensional de la función original, de la cual se obtuvo la proyección. En nuestro caso, para N=2, la función proyección $P_\theta(x')$ de $f(x',y')$ viene expresada por la ecuación (1). Su TF es:

$$P_\theta(f_1) = \int_{-\infty}^{\infty} P_\theta(x') \exp(-j2\pi x' f_1) dx' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x',y') \exp(-j2\pi x' f_1) dx' dy' \quad (6)$$

Es inmediato comprobar

$$P_\theta(f_1) = F(f_1, f_2) \Big|_{f_2=0} \quad (7)$$

siendo $F(f_1, f_2)$ la transformada de Fourier bidimensional de $f(x',y')$.

El teorema del Corte Central demuestra pues que, la TF unidimensional de la función proyección en un ángulo θ constante, es un corte en el mismo ángulo y por el origen de la TF bidimensional de la función original (figura 3) [8]; [11].

Retroproyección o superposición lineal «back-projection»

En esencia, es la operación inversa de la proyección, dado que, a partir de una función unidimensional de $x' \equiv t$, se crea una distribución bidimensional mediante la extensión uniforme de la primera sobre todo el espacio de reconstrucción en la dirección y' . Si tenemos la proyección unidimensional $P_\theta(t)$, su retroproyección será simplemente $b(r,\Phi)$:

$$b(r,\Phi) = P_\theta [r \cos(\Phi - \theta)] \quad (8)$$

siendo $x' \equiv t = r \cdot \cos(\Phi - \theta)$.

Estrictamente hablando, la retroproyección no es la operación inversa de la proyección, dado que en este proceso no se reconstruye la función original de la que deriva la proyección (figura 4) [1]; [2]; [9]. A cada punto del dominio de reconstrucción se le hace corresponder el valor que toma la función proyección, para un valor fijo de θ ,

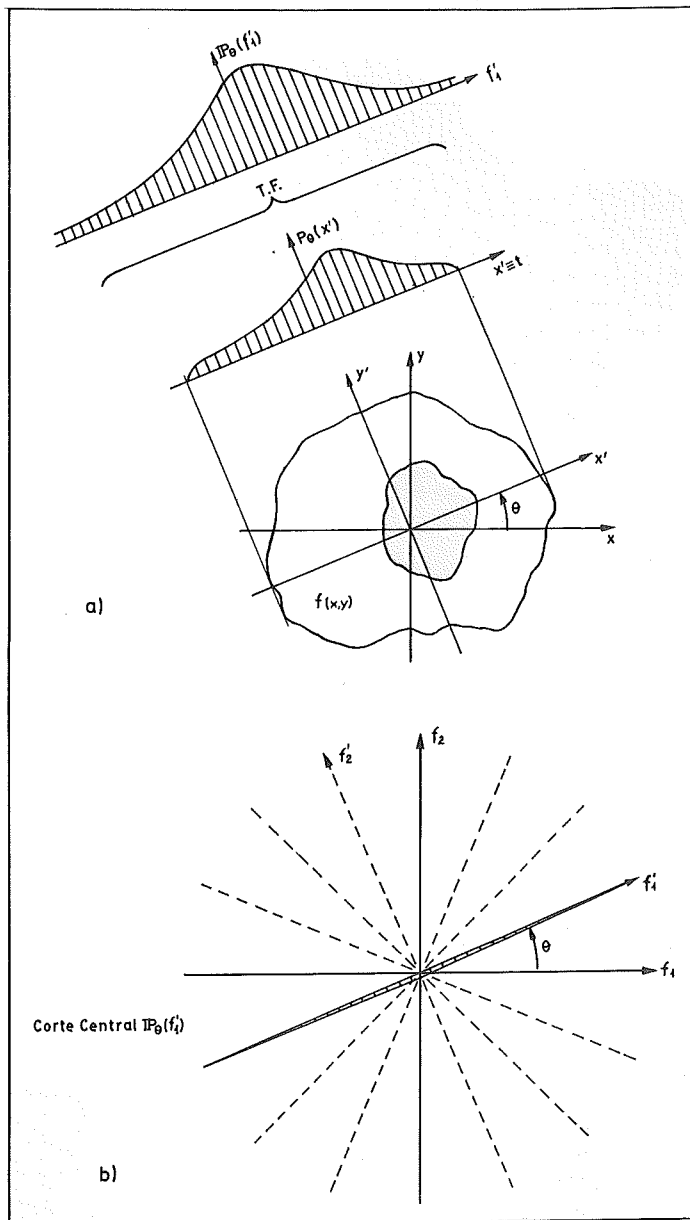


Figura 3a) Proyección de $f(x,y)$ en el ángulo θ ; b) Dominio de la frecuencia. Ensamblaje de diferentes cortes centrales.

estimado a lo largo de la línea que pasa por el punto y perpendicular a x' .

Imagen suma «summation image»

La combinación de un conjunto de retroproyecciones da lugar a una nueva distribución bidimensional que denominamos imagen suma, siendo ésta la forma más rápida y sencilla de reconstruir una función bidimensional a partir de múltiples proyecciones unidimensionales.

Si se dispone de un conjunto continuo de proyecciones $P_\theta(t)$, se define la imagen suma como:

$$g(r,\Phi) = \int_0^\pi P_\theta [r \cos(\Phi - \theta)] d\theta \quad (9)$$

La integral se extiende al rango $(0, \pi)$ en la variable θ , dado que en él se encuentra contenida toda la información disponible (figura 5) [1]; [2].

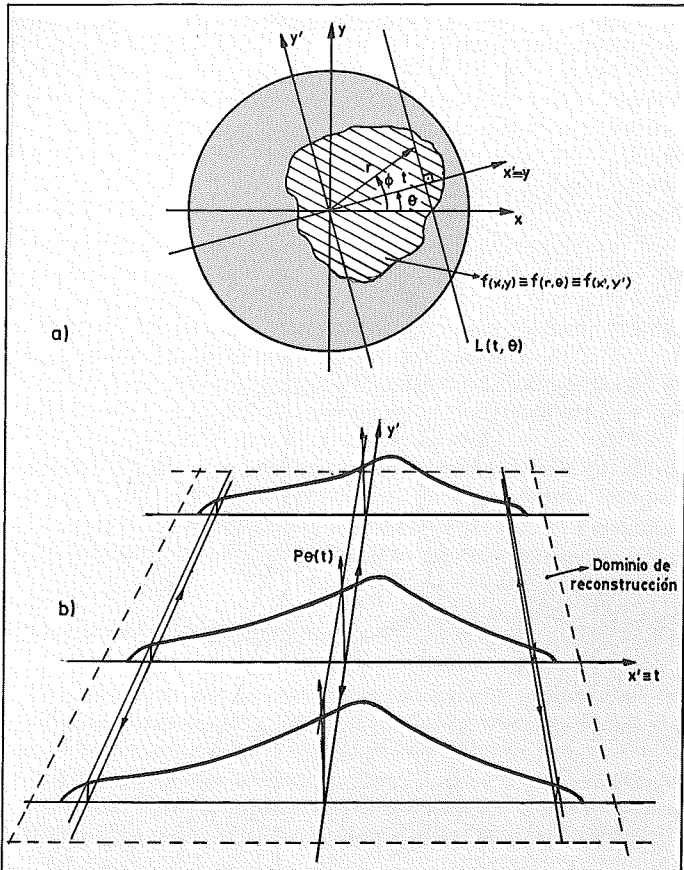


Figura 4a) Relación entre coordenadas cartesianas y polares, a las que se encuentra fijado el objeto. b) La retroproyección extiende uniformemente sobre y' la función unidimensional $P_\theta(t)$ para formar una distribución bidimensional.

En la práctica no se dispone de un conjunto infinito de proyecciones, por lo que hay que aproximar la integral por un sumatorio:

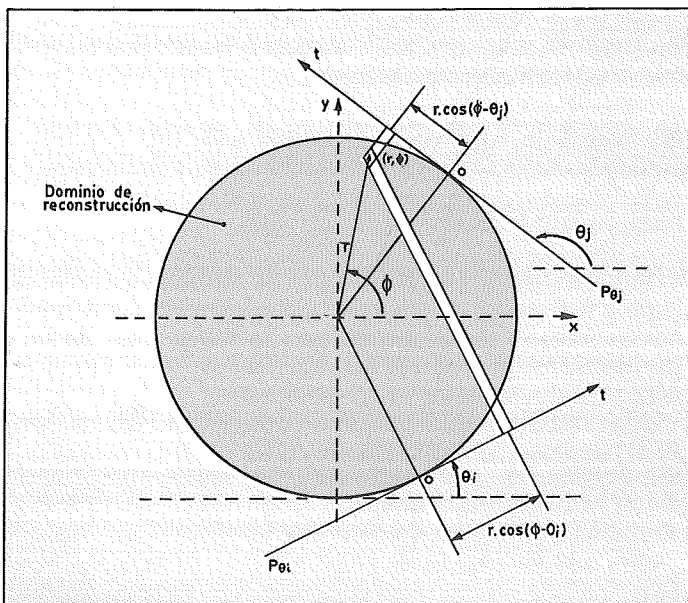


Figura 5. Representación de un elemento de la imagen de coordenadas (r, Φ) , después de la retroproyección de dos rayos que parten de proyecciones bajo ángulos diferentes.

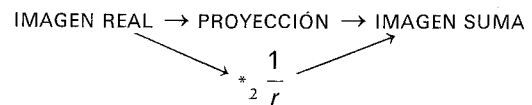
$$g_N(x,y) = \Delta\theta \sum_{n=0}^{N-1} P_{n,\Delta\theta} [x \cdot \cos(n \cdot \Delta\theta) + y \cdot \text{sen}(n \cdot \Delta\theta)] \quad (10)$$

donde $\Delta\theta = \pi/N$ y N el número de proyecciones obtenidas a incrementos iguales a lo largo de la variable angular θ .

Esta técnica coincide básicamente con la usada en la tomografía convencional realizada mediante métodos analógicos. El conjunto de datos de las múltiples proyecciones se superponen sobre una placa fotográfica cambiando el ángulo de exposición, en consonancia con el cambio de ángulo en que se obtienen las proyecciones. Este método no puede dar una reconstrucción verdadera, incluso en el caso más favorable, que es aquel en que se cuenta con un número infinito de proyecciones, ya que la retroproyección no es el proceso inverso de la proyección. La relación existente entre la imagen suma y la imagen real puede expresarse como:

$$g(r, \Phi) = \mu(r, \Phi) *_{2} \frac{1}{r} \quad (11)$$

o lo que es lo mismo, $I \cdot \text{Suma} = I \cdot \text{Real} *_{2} 1/r$, donde $*_{2}$ significa una convolución bidimensional.



La imagen que se obtiene es una versión muy borrosa de la función original apareciendo un efecto de halo. Esto nos da pie a la introducción de algún tipo de filtrado de los datos, para así obtener imágenes con mucha mayor definición.

INVERSION DE LA TRANSFORMADA DE RADON

La ecuación integral descrita por Radon relaciona los valores de cada elemento de una imagen en coordenadas polares y las proyecciones $P_\theta(t)$ de la sección a reconstruir [1]; [2].

De la aplicación del teorema del Corte Central se deduce que, si se conociese la transformada de Fourier de las proyecciones, $P_\theta(f_1)$, para todo valor de f_1 y θ , la transformada bidimensional de la función original de la cual se obtuvieron las proyecciones estaría absolutamente determinada.

$$f(r, \Phi) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} P_\theta(f_1) \cdot \exp [j2\pi f_1 r \cos(\Phi - \theta)] |f_1| df_1 d\theta \quad (a1)$$

El término $|f_1|$ aparece debido a la simetría circular supuesta y al Jacobiano de la transformación $df_1 df_2 = -f_1 df_1 d\theta$, pudiéndose expresar como $|f_1| = j2\pi f_1 (-j \text{sgn } f_1) / 2\pi$. Dada la relación existente entre la transformada de Hilbert, y la de Fourier, se llega a la ecuación integral de Radon.

$$f(r, \Phi) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta P_\theta(x') / \delta x'}{r \cdot \cos(\Phi - \theta) - x'} dx' d\theta \quad (a2)$$

La integral en x' ha de ser tratada en el sentido del valor principal de Cauchy en el punto de discontinuidad $x' = r \cos(\Phi - \theta)$. Si las proyecciones son finitas, la integral

converge, lo que no ocurre con (a1), donde aparece el término $|f_1|$, ya que al estar extendida entre $\pm \infty$, ésta diverge.

La función $f(x,y) = f(r,\Phi)$ y por extensión $P_\theta(t)$, han de satisfacer ciertas condiciones para que la reconstrucción mediante la ecuación de Radon tenga sentido.

- a) $f(x,y)$ ha de estar acotada.
- b) Ha de ser continua o con un número finito de discontinuidades.
- c) Su valor ha de ser nulo para $r \geq R'$, donde $R' < R$, siendo R el radio del dominio de reconstrucción y R' el del dominio de existencia de $f(x,y)$.

De estas condiciones se desprende que la función $P_\theta(t)$ es continua o con un número finito de discontinuidades, de valor nulo para $|t| \geq R'$ y suponiendo que la derivada parcial de $P_\theta(t)$ con respecto a «t» es continua, la función $f(x,y)$ estará determinada por sus proyecciones y relacionada con éstas a través de la ecuación de Radon.

FILTRADO DE LA IMAGEN SUMA

Este algoritmo se basa en la retroproyección de las proyecciones para obtener la imagen suma, aplicándosele a continuación un filtrado bidimensional [1]; [9].

Aplicando la transformada de Fourier a la relación entre las imágenes suma y real se llega a:

$$G(\rho, \psi) = F(\rho, \psi) \frac{1}{\rho} \tag{b1}$$

donde (ρ, ψ) son las coordenadas radial y angular en el dominio de Fourier. De la expresión anterior (b1) es inmediato deducir que el filtro apropiado ha de tener una forma:

$$H_2(\rho) = \rho \cdot A_2(\rho) \tag{b2}$$

siendo $A_2(\rho)$ una función bidimensional que modifica el comportamiento de la función a la cual va asociada y, que denominamos función ventana.

La expresión práctica para la realización de la reconstrucción utilizando este método será:

$$f(r, \Phi) = F_2^{-1} [H_2(\rho, \psi) \cdot F_2[g(r, \Phi)]] \tag{b3}$$

pudiéndose resumir en los siguientes pasos:

- 1) Obtener el conjunto de proyecciones.
- 2) Retroproyectar dichas proyecciones, para así obtener la imagen suma según (10).
- 3) Calcular la TF bidimensional de la imagen suma.
- 4) Multiplicarla por la función de transferencia del filtro (b2).
- 5) Calcular la TF inversa en 2-D de 4) para obtener la imagen real.

Para que el tiempo de procesamiento sea relativamente corto, hay que utilizar la transformada rápida de Fourier en 2-D, lo que obliga a introducir algún tipo de interpolación a las muestras para pasarlas de polares a cartesianas, dando lugar a distorsiones y pérdida de resolución.

Una característica importante de este método de reconstrucción, es la de que se puede llevar a cabo tanto ópticamente como en forma digital sin variaciones apreciables en cuanto a calidad se refiere.

IMAGEN A PARTIR DE RETROPROYECCIONES FILTRADAS

Como la retroproyección y el filtrado son dos operadores lineales, es posible intercambiar el orden de su aplicación, equivaliendo el filtrado a una convolución en el dominio real.

Sea $P_\theta(t)$ la función proyección y $h_1(t)$ la función ponderal del filtro, ambas unidimensionales, por lo que la función proyección filtrada vendrá dada por:

$$\hat{P}_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_\theta(x') \cdot h_1(t-x') dx' \equiv P_\theta(t) * h_1(t) \tag{c1}$$

Retroproyectando cada una de las $\hat{P}_\theta(t)$, para cada valor de θ y sumando, se obtiene una nueva función $\hat{f}(r,\Phi)$.

$$\begin{aligned} \hat{f}(r, \Phi) &= \int_0^\pi \hat{P}_\theta(t) d\theta = \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^{\infty} P_\theta(x') \cdot h_1(t-x') dx' = \\ &= \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^{\infty} P_\theta(x') \cdot h_1[r \cdot \cos(\Phi - \theta) - x'] dx' \end{aligned} \tag{c2}$$

Por analogía con la ecuación de Radon (a1) se toma como función de transferencia del filtro:

$$H_1(f_1) = |f_1| \cdot A_1(f_1) \tag{c3}$$

donde $A_1(f_1)$ hace de función ventana y $h_1(t) = F_1^{-1}[H_1(f_1)]$.

Un método análogo a éste es el conocido por método de convolución, el cual se ha impuesto sobre la mayoría de las otras técnicas [2]; [5].

MUESTREO Y DOMINIOS DISCRETOS DE RECONSTRUCCION

Como la reconstrucción se va a llevar a cabo utilizando ordenadores digitales, los datos han de ser una versión muestreada de las proyecciones, y por lo mismo, la imagen resultante estará formada por un conjunto bidimensional de puntos, a los cuales el algoritmo de reconstrucción les ha asignado un valor del parámetro a representar.

Toda función $f(x,y)$ a reconstruir ha de cumplir las tres condiciones, a), b) y c), enunciadas en el método de la inversión de Radon, pues de lo contrario, sería imposible muestrear la porción no nula de la función proyección de $f(x,y)$ en un número finito de puntos muestrales. Es práctica común englobar el objeto a reconstruir en un dominio circular de radio unidad ($D=2$), tomando su centro como origen de coordenadas y centro de rotación. Los dominios de reconstrucción más usuales, suelen ser arrays cuadrados de diferente número de elementos ($P \times P$), siendo P una constante entera par o impar, equiespaciados entre sí la cantidad «s» real y positiva y a la que denominamos resolución en distancia, de forma que $P \cdot s = D$. Ha de establecerse una correspondencia biunívoca entre los elementos del array y los de la función a reconstruir $(I, J) \leftrightarrow (x_j, y_i)$.

El muestreo más sencillo, es aquel que explora la sección a reconstruir transversalmente mediante un número M de rayos paralelos y a ritmo constante. Este proceso se repite N veces a lo largo de la variable angular θ entre 0 y 180; de

forma equiespaciada tal que, el incremento de ángulo girado después de cada exploración transversal es de $\Delta\theta = \pi/N$ radianes.

La función proyección $P_\theta(t)$, por ejemplo, será conocida en el conjunto de puntos $[-D/2 + ka; n\Delta\theta]$, donde $k=1, \dots, M$ y $n=0, \dots, N-1$, siendo «a» la distancia entre dos rayos paralelos consecutivos ($a=D/M$) y ha de ser menor al elemento significativo más pequeño de $f(x,y)$, para que su contribución aparezca en la función proyección muestreada [9]; [14] (figura 6).

Actualmente, se vienen utilizando otros métodos de

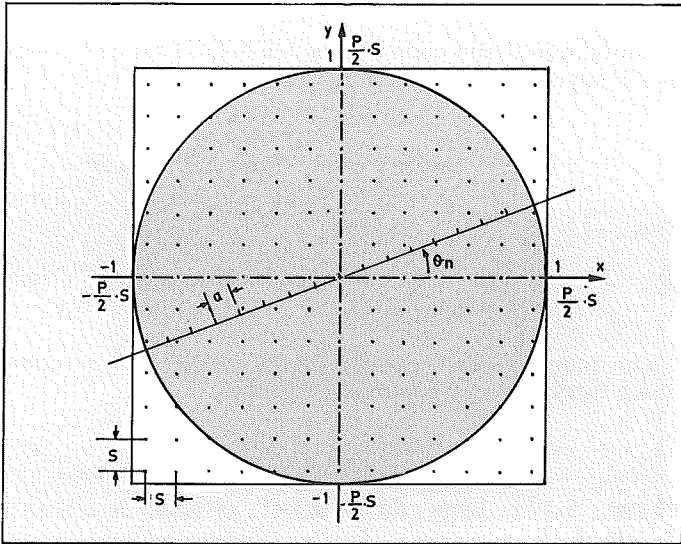


Figura 6. Dominio discreto de reconstrucción. La línea que forma un ángulo θ_n con el eje X, representa el dominio de la función $P_\theta(t)$ en el ángulo $\theta_n = n\Delta\theta$. Las marcas gruesas son aquellos puntos, $t_k = -1 + ka$, donde se muestrea la proyección.

exploración más rápidos como son la exploración en abanico en sus diferentes versiones, la helicoidal, la cónica, etc., que en unión con algoritmos especiales consiguen disminuir considerablemente el tiempo de reconstrucción.

INTERPOLACION

Las muestras de las proyecciones $P_\theta(t)$ se han tomado en los puntos $t_k = -1 + ka$; $1 \leq k \leq M$, para luego retroproyectarlas, filtradas o no, sobre un dominio de puntos, elementos de P^2 . Los puntos de toma de muestras no tienen por qué coincidir con los de reconstrucción, en general, por lo que es necesario estimar el valor que toma el conjunto de muestras en cada uno de dichos puntos. Esto hace imprescindible la introducción del operador interpolación.

La interpolación consiste en, conocido el valor que toma una función en una serie de puntos, estimar su valor en puntos intermedios [8]; [11].

Se define el operador interpolación I_a^f , que se aplica sobre la función $h(t)$, de la forma:

$$I_a^f h(t_k) = \sum_{k=1}^M h(t_k) \cdot f\left(\frac{t_k - t_k}{a}\right) \quad (d1)$$

siendo a la distancia entre dos muestras consecutivas, f la función interpoladora y $h(t_k)$ la función $h(t)$ interpolada en el punto t_k .

Las funciones interpoladoras más comunes son $f(t) = \Pi(t)$, que da lugar a la interpolación por punto más cercano, $f(t) = \Lambda(t)$, que da lugar a la interpolación lineal, $f(t) = \text{sinc}(t)$, que da lugar a la interpolación de Whittaker-Shannon y las polinómicas [9]. La interpolación lineal es la más utilizada debido a su sencillez, bajo coste en tiempo y baja distorsión, obteniéndose reconstrucciones de las mejores posibles.

Conocidos los valores que toma la función proyección $P_\theta(t)$ en dos puntos t_k y t_{k+1} , queremos estimarla en un punto intermedio $t_{k'}$ mediante interpolación lineal.

$$I_a^f P_\theta(t_{k'}) = P_\theta(t_k) \cdot (k+1 - k') + P_\theta(t_{k+1}) \cdot (k' - k) \quad (d2)$$

donde k' es real y positivo $0 \leq k' \leq M$. La parte entera de k' coincidirá con k si el punto donde queremos interpolar se halla entre los rayos t_k y t_{k+1} .

METODO DE CONVOLUCION

Este es uno de los métodos de reconstrucción más usados en los TAC actuales, incorporando un filtrado en los datos:

Partiendo de (a1), definimos como $Q(t, \theta)$ a la expresión siguiente:

$$Q(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} |f_1| |P_\theta(f_1)| \cdot \exp(j2\pi f_1 t) \cdot df_1 \quad (e1)$$

y que según el teorema de la convolución, puede expresarse:

$$Q(t, \theta) = P_\theta(t) * \varphi(t) \quad (e2)$$

siendo $\varphi(t)$ la transformada inversa de Fourier de la función $|f_1|$.

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |f_1| \exp(j2\pi f_1 t) df_1 \quad (e3)$$

La función reconstruida queda pues como:

$$f(r, \Phi) = \int_0^\pi [P_\theta(t) * \varphi(t)] d\theta \quad (e4)$$

El gran problema de este tipo de reconstrucción estriba en el hecho de que la función $|f_1|$ carece de transformada inversa de Fourier, por lo que es preciso introducir una nueva función que permita su cálculo, función ventana $A(f_1)$.

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |f_1| \cdot A(f_1) \exp(j2\pi f_1 t) df_1 \quad (e5)$$

$A(f_1)$ cumple dos funciones primordiales, que son, el permitir el cálculo de $\varphi(t)$ y el prevenir la amplificación de las altas frecuencias de ruido, donde las componentes espectrales de la imagen a esas frecuencias se han supuesto insignificantes, para poder considerar a $f(x,y)$ como una función muy próxima a ser de banda limitada, y por tanto, reconstruible a partir de un número finito de sus muestras.

Como el conjunto de datos disponible es finito, es necesario reemplazar las integrales por sus respectivos sumatorios. La función reconstruida, que dependerá del tipo de filtro utilizado, queda:

$$f_\varphi(x,y) = \frac{\pi}{N} \cdot a \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_{\theta_n}(t_k) \cdot \varphi(x \cdot \cos \theta_n + y \cdot \sin \theta_n - t_k) \quad (e6)$$

El sumatorio en k será finito $|k| \leq 1/a$, siempre y cuando $f(x,y)$ sea nula para $x^2 + y^2 \geq 1$, y por tanto $P_\theta(t) = 0$ para $|t| \geq 1$ [3]; [13]; [14].

Este método puede resumirse en los siguientes pasos:

- 1) Definir el número de rayos exploradores M , el número de proyecciones N y el número de puntos de reconstrucción P^2 . Estos tres parámetros definen a su vez el espaciamiento entre muestras a , el incremento angular entre proyecciones sucesivas y la resolución en distancia s .
- 2) Estimación de las N proyecciones de M muestras cada una.
- 3) Cálculo de la función $\varphi(t)$ en su versión discreta.
- 4) Convolución de las proyecciones y la función $\varphi(t)$, ambas en su versión muestreada al mismo ritmo.
- 5) Interpolación de los datos convolucionados y retroproyección sobre el dominio P^2 .
- 6) Visualización (listado, TRC, etc.).

Una de las grandes ventajas de este método, consiste en su gran flexibilidad para incorporarle distintos tipos de filtrado e interpolaciones.

Funciones compensadoras o de filtrado

Una de las más conocidas es el filtro en rampa, el cual utiliza una función ventana del tipo pulso rectangular, llamada también de banda limitada (figura 7) [8]; [13].

Esta función de banda limitada elimina todas las componentes de frecuencia superiores a $1/2a$ de la función $|f_1|$, teniendo como efecto indeseado el introducir oscilaciones de alta frecuencia en los datos filtrados.

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_{-1/2a}^{1/2a} |f_1| \cdot \Pi(f_1 a) \exp(j2\pi f_1 t) df_1 = \\ &= \frac{1}{4a^2} [2 \operatorname{sinc}(t/a) - \operatorname{sinc}^2(t/2a)] \end{aligned} \quad (f7)$$

La versión muestreada de $\varphi(t)$ en los puntos $t_k = ka$ será:

$$\varphi(ka) = \begin{cases} \frac{1}{4a^2} & \text{para } k=0 \\ \frac{1}{(\pi a k)^2} & \text{para } k \text{ impar} \\ 0 & \text{para } k \text{ par} \end{cases} \quad (f8)$$

Otro tipo de filtro, el cual da lugar a reconstrucciones con un menor grado de oscilaciones, es aquel que utiliza una función ventana del tipo paso bajo y banda limitada [9]; [14].

$$F(f_1) = |f_1| \cdot \operatorname{sinc}(f_1 a) / (f_1 a) \quad (f9)$$

Este filtro atenúa la contribución de frecuencias cercanas a $1/2a$, permitiendo el paso de aquellas cercanas a cero sin apenas modificación.

$$\varphi(t) = \frac{2}{(\pi a)^2} \left[\frac{(2t/a) \cdot \operatorname{sen}(\pi t/a) - 1}{(2t/a)^2 - 1} \right] \quad (f10)$$

y su versión muestreada:

$$\varphi(ka) = \frac{-2}{(\pi a)^2 \cdot (4k^2 - 1)} \text{ para todo } k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (f11)$$

Otros muchos tipos de filtros se vienen utilizando como son el paso bajo y banda limitada tipo coseno, el Hamming

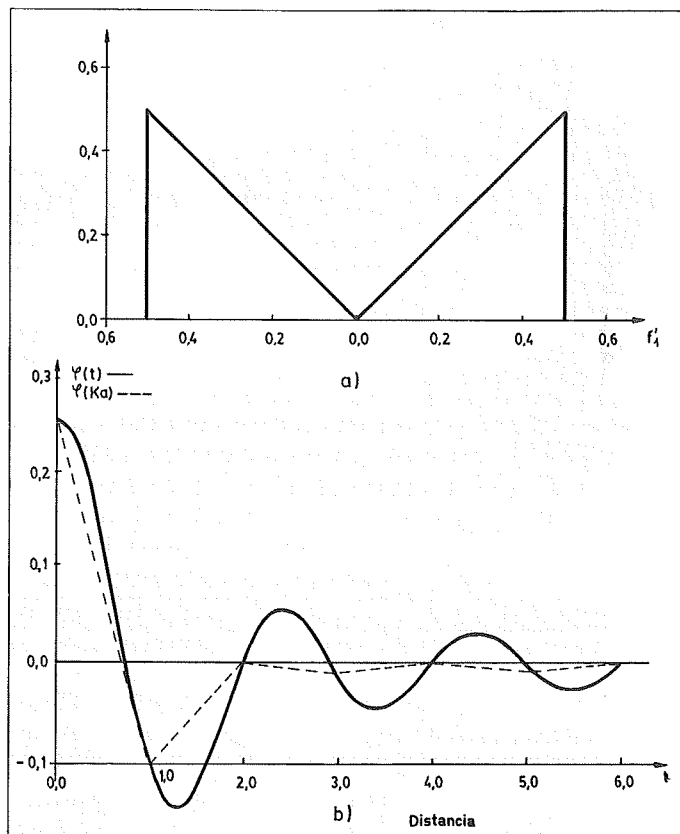


Figura 7. Filtro en rampa $a=1$. a) Función de transferencia. b) Función ponderal del filtro. A trazos discontinuos, la interpolación lineal de su versión discreta.

generalizado, el de Lewitt, Parzen, Butterworth y el $|f_1|$ generalizado.

Del estudio comparativo llevado a cabo, se desprende como conclusión más importante, el hecho de que no existe un único filtro óptimo con el que obtener reconstrucciones de máxima calidad, sino que cada tipo de datos requiere un determinado tipo de filtro, dependiendo de la calidad de éstos, así como de otras características especiales. La búsqueda de nuevas funciones puede dar lugar a reconstrucciones más rápidas y mejores. ●

REFERENCIAS

- [1] Barrett, H.H., Swindell, W. «Analog Reconstruction Methods for Transaxial Tomography». Proceedings of the IEEE, Vol. 65 N.º 1, pág. 89-107, enero 1977.
- [2] Budinger, T.F., Gullberg, G.T. «Three-Dimensional Reconstruction in Nuclear Medicine Emission Imaging». IEEE Transactions in Nuclear Science, Vol. NS-21, pág. 2-20, junio 1974.
- [3] Casares, V., Payaró, M. «Tomografía Axial por Rayos-X con Ordenador». Mundo Electrónico, N.º 76, pág. 73-78, 1978.
- [4] Cho, Z.H. «General Views on 3-D Image Reconstruction and Computerized Transverse Axial Tomography». IEEE Transactions on Nuclear Science, Vol. NS-21, pág. 44-71, junio 1974.
- [5] Cho, Z.H., Chan, J.K., Hall, E.L., Kruger, R.P., McCaughey, D.G. «A Comparative Study of 3-D Image Reconstruction Algorithms with Reference to Number of Projections and Noise Filtering». IEEE Transactions on Nuclear Science, Vol. NS-22, pág. 344-358, febrero 1975.
- [6] Grant, D.G. Tomosynthesis: «A Three-Dimensional Radiographic Imaging Technique». IEEE Transactions on Biomedical Engineering, Vol. BME-19, N.º 1, pág. 20-28, enero 1972.
- [7] Gordon, R., Herman, G.T., Johnson, S.A. «Image Reconstruction from Projections». Scientific American, Vol. 233, N.º 4, pág. 56-68, octubre 1975.

- [8] Hall, E.L. «Reconstruction from Projections». Computer Image Processing and Recognition, Cap. 5, Academic Press, pág. 258-304, 1979.
- [9] Herman, G.T. «Image Reconstruction from Projections. Implementation and Applications». Topics in Applied Physics, Vol. 32, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1979.
- [10] Hounsfield, G.N. «Computerized Transverse Axial Scanning (Tomography): Part 1. Description of System». British Journal of Radiology, Vol. 46, N.º 552, pág. 1016-1022, diciembre 1973.
- [11] Mersereau, R.M., Oppenheim, A.V. «Digital Reconstruction of Multidimensional Signals from their Projections». Proceedings of the IEEE, Vol. 62, N.º 10, pág. 1319-1338, octubre 1974.
- [12] Pohl, F. «Abel Equation for Asymmetric Emission». Max-Planck Institut für Plasma Physik, IPP 6/173, julio 1978.
- [13] Ramachandran, G.N., Lakshminarayanan, A.V. «Three-Dimensional Reconstruction from Radiographs and Electron Micrographs: Applications of Convolutions instead of Fourier Transforms». Proc. Nat. Acad. Sci. USA, Vol. 68, N.º 9, pág. 2236-2240, septiembre 1971.
- [14] Shepp, L.A., Logan, B.F. «The Fourier Reconstruction of a Head Section». IEEE Transactions on Nuclear Science, Vol. NS-21, pág. 21-43, junio 1974.

Carlos Robaina Padrón. *Ingeniero Superior de Telecomunicación por la Universidad Politécnica de Madrid (promoción de 1982). Durante dos años dedicado al procesado y reconstrucción de imágenes.*

Miguel Angel Muriel Fernández. *Ingeniero de Telecomunicación en junio de 1978. Doctor Ingeniero de Telecomunicación en julio de 1980. La Tesis doctoral presentada, que tuvo como objeto el estudio de las deflexiones transversales de luz mediante cristales líquidos, obtuvo el Premio a la mejor Tesis Doctoral convocado por el Colegio y la Asociación de Ingenieros de Telecomunicación en septiembre de 1980.*

Ha publicado y participado en varios Congresos Nacionales e Internacionales con temas derivados de sus trabajos sobre cristales líquidos. En la actualidad es Profesor Adjunto de la Cátedra de «Tecnología Electrónica y Electrónica Cuántica», de la E.T.S.I.T. de Madrid.

José Antonio Martín Pereda. *Ingeniero de Telecomunicación y Licenciado en Ciencias Físicas en junio de 1967. Realizó los estudios de doctorado en el Departamento de Física, en el Grupo de Electrónica Cuántica, de la Colorado State University de Fort Collins, Colorado, de 1968 a 1971. Doctor Ingeniero de Telecomunicación en junio de 1971. Catedrático y Director del Departamento de Tecnología Electrónica y Electrónica Cuántica de la E.T.S. de Ingenieros de Telecomunicación, de Madrid, desde diciembre de 1975. En la actualidad es Vicerrector de Investigación de la Universidad Politécnica de Madrid.*

Ha publicado artículos y presentado ponencias en un gran número de Congresos Internacionales, casi todos ellos basados en el estudio de los cristales líquidos como medios electro-ópticos para modulación y deflexión y en sus posibles aplicaciones dentro del campo de las Comunicaciones Ópticas.

Indique 39

AVX

CONDENSADORES CERAMICOS MINIATURA.

CONDENSADORES CERAMICOS MULTICAPA DE MAXIMA CALIDAD Y MINIMO TAMAÑO.

CARACTERISTICAS:

- DE 0,001 a 4,5 μ F de CAPACIDAD
- CERAMICA NPO - X7R - Z5U
- TOLERANCIA
DESDE $\pm 1\%$ a +80 - 20%.

ITT DISTRIBUCION
 UNA DIVISION DE STANDARD ELECTRICA,
 MIGUEL ANGEL, 21-3º MADRID-10 · TELEX 27.461.
 AMPLIO STOCK · ENTREGA INMEDIATA.
 PEDIDOS POR TELEFONO.

(91) 419 09 57



distribuidor oficial:

distribución

Gama completa de componentes para la industria