

## LA EXTRACCION DE SOLUCIONES OPTIMAS EN LA VERSION P-ADAPTABLE DEL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

R. Perera<sup>1</sup>, J. Mateo<sup>2</sup> y E. Alarcón<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Mecánica Estructural y Construcciones Industriales,  
E.T.S. Ingenieros Industriales, Universidad Politécnica de Madrid,  
Gutierrez Abascal 2, 28006 Madrid, ESPAÑA

<sup>2</sup> Dpto. de Ingeniería Mecánica, E.T.S. de Ingenieros Industriales,  
Universidad Pontificia de Comillas, Alberto Aguilera 23, Madrid,  
ESPAÑA

*En este artículo se resumen las principales ideas relacionadas con la resolución de problemas elípticos mediante fórmulas de representación.*

*El uso de una familia de funciones interpolantes jerarquizadas permite el establecimiento de un sistema de resolución autoadaptable a un nivel de exactitud prefijado. Se incluye también una comparación descriptiva con el método de los elementos finitos.*

### 1. INTRODUCCION

Una importante familia de métodos aproximados para la resolución de problemas tipo

$$Au = f \quad [1]$$

donde  $A$  es un operador lineal autoadjunto,  $f$  unas funciones dato y  $u$  unas funciones incógnita son los llamados métodos de Galerkin.

En líneas generales puede decirse que el procedimiento consiste en la selección de una solución aproximada  $\hat{u}$ :

$$u \rightarrow \hat{u} \quad [2]$$

que cumpla:

$$A\hat{u} = f \quad [3]$$

La selección de una cierta familia de funciones de ponderación  $[\Psi_j]_1^N$  cuyas características están relacionadas con las del problema [1], permite la escritura de productos escalares:

$$(A\hat{u}, \Psi_j) = (f, \Psi_j) \quad [4]$$

o teniendo en cuenta [1]:

$$(A(u-\hat{u}), \Psi_j) = 0 \quad [5]$$

Si se define el residuo  $r$  como:

$$r = A(u-\hat{u}) \quad [6]$$

la igualdad [5] expresa la condición de Galerkin: los residuos deben ser ortogonales a las funciones de ponderación.

La aproximación [2] se realiza normalmente proyectando  $u$  sobre un espacio adecuado de funciones. El método más famoso, Rayleigh-Ritz, utiliza el subespacio finito generado por la familia  $[\Psi_j]_1^N$ , esto es, se hace:

$$u - \hat{u} = a_i \Psi_i \quad [7]$$

El establecimiento de las  $N$  condiciones [4] permite escribir:

$$(\Psi_i, A\Psi_j) a_j = (f, \Psi_i) \quad [8]$$

o bien:

$$(\Psi_i, \Psi_j)_A a_j = (f, \Psi_i) \quad [9]$$

donde  $(\cdot, \cdot)_A$  es el producto escalar inducido por el operador  $A$  y que en algunos casos es denominado «energético» ya que en problemas elásticos corresponde a la definición de energía elástica.

En el método de Ritz tradicional las funciones  $\Psi_i$  están definidas en todo el dominio y su naturaleza es arbitraria (salvo condiciones resultantes del paso (8) → (9) que están relacionadas con las condiciones de contorno).

El método de los elementos finitos (MEF) en desplazamientos está basado en (9), con dos condiciones adicionales: las funciones son polinomios y, en lugar de estar definidos globalmente, su soporte es pequeño, local.

Elo permite sistematizar el tratamiento numérico elemento a elemento. Además las funciones van tomando valores unidad en puntos clave, nudos, y anulándose en los demás, con lo que los coeficientes  $a_j$  pasan a tener un significado físico. A nivel de elemento la interpolación se suele escribir como:

$$u = Nu^e \quad [10]$$

donde  $N$  son las funciones de interpolación y  $u^e$  las variables particularizadas en los nudos del elemento. La formulación se completa representando la geometría de forma semejante:

$$x = Nx^e \quad [11]$$

con lo que se llega a la formulación isoparamétrica de uso habitual.

El método de elementos de contorno (MEC) se basa en una idea aplicada a una fórmula de representación clásica. En un problema de potencial sin focos ni sumideros puede establecerse por ejemplo que:

$$C \phi(P) = - \int_{\partial\Omega} q^*(P, Q) \phi(Q) + \int_{\partial\Omega} \phi^*(P, Q) q(Q) \quad [12]$$

donde  $\Omega$  es el dominio en estudio,  $\partial\Omega$  su contorno,  $P$  y  $Q$  dos puntos de contorno,  $C$  un número que depende de la geometría del contorno en  $P$  ( $C = 1/2$ ) si el contorno es liso,  $\phi$  es el potencial,  $q = \partial\phi/\partial n$  el flujo,  $\phi^*(P, Q)$   $q^*(P, Q)$  el potencial y el flujo respectivamente, generados en  $Q$  por una carga unidad situada en  $P$ .

Si se hacen aproximaciones

$$\phi \sim \hat{\phi} ; q \sim \hat{q} \quad [13]$$

[12] puede interpretarse como una relación integral semejante a [4] con la salvedad que ahora las funciones de ponderación  $\phi^*$  y  $q^*$  están definidas globalmente. La gran ventaja sin embargo estriba en que las integrales sólo están extendidas al contorno, por lo que la discretización queda reducida en una dimensión, respecto a la que sería necesaria con el MEF. En el caso de la elasticidad la fórmula de representación utilizada es la de Somigliana.

El paso siguiente es la definición de [13]. Generalmente el MEC ha trabajado con la idea isoparamétrica estricta. El contorno se divide en elementos y se produce una aproximación con funciones de pequeño soporte:

$$\begin{aligned} u &= Nu^f \\ x &= Nx^f \end{aligned} \quad [14]$$

que, generalmente se extiende también a las condiciones de contorno.

Entre las dificultades intrínsecas de método se encuentran la existencia de integrandos singulares que deben calcularse con cuadraturas numéricas, la asimetría de la matriz de coeficientes causada por el uso de funciones de interpolación distintas a las de aproximación y el carácter lleno de la matriz de coeficientes debido al uso de funciones de ponderación definidas globalmente. A pesar de ello el método ha tenido éxito, incluso comercial, y actualmente se halla establecido como una alternativa aceptable y ventajosa.

La mejora de resultados en la discretización se obtiene aumentando la base aproximante por subdivisión de los soportes. Es la llamada versión  $h$  (denominación que hace referencia al tamaño característico  $h$  del elemento). Este tipo de mejora representa el inconveniente de tener que reconstruir una discretización distinta a la inicial, con lo que todo el trabajo de cálculo debe, a su vez repetirse. Ello implica que, en aplicaciones prácticas donde no se estudia más que una malla «razonable» jamás se conozca el grado de precisión con que se trabaja. En general, las comprobaciones se reducen a un estudio cualitativo de los resultados en cuanto a su credibilidad física como distribución en  $\Omega$  así como a órdenes de magnitud.

Una herramienta de este grado de refinamiento y de este coste, debería sin embargo, estar dotada de algún método que le permitiera conseguir niveles de aproximación semejantes en todo el dominio, así como de estimadores «a posteriori» del error cometido.

Aunque existen diferentes alternativas, desde hace unos años se ha intentado reconsiderar las bases del MEC a la luz de las exigencias anteriores.

La idea fundamental es evitar la aproximación isoparamétrica que carece de sentido tan pronto como las funciones de ponderación sean definidas globalmente. Por otro lado, el método de Ritz con funciones globales basa su aprovechamiento en la corrección que las funciones sucesivas van realizando sobre lo precedente, en forma semejante a lo que se consigue con el desarrollo de Fourier.

Finalmente, desde el momento que las funciones de ponderación dejan de ser polinomios queda abierta la posibilidad de tratamiento con otro tipo de funciones.

Se trata, pues, de identificar zonas de contorno lo suficientemente grandes como para compensar el trabajo adicional que se va a realizar y, de esta manera, aprovechar las ventajas del MEF y el Ritz tradicional. Los elementos quedan limitados así por las esquinas, singularidades, etc., y la geometría se presenta de forma independiente y con toda la generalidad que se estime necesario.

## 2. ELEMENTOS P-ADAPTABLES

Según se indicó en el apartado anterior un sistema  $p$ -adaptable exige:

- una familia jerarquizada de funciones interpolantes.
- un criterio estimador que permita garantizar la bondad global de la solución.
- un criterio indicador que permita acusar la necesidad local de nuevas funciones de interpolación.

En general la familia de funciones jerarquizadas que se utiliza es la de Legendre que en una dimensión es:

$$P_p(\xi) = \frac{1}{(p-1)!} \frac{1}{2^{p-1}} \frac{d^p}{d\xi^p} [(\xi^2 - 1)^p] \quad [15]$$

obteniéndose las de dos dimensiones (elementos para problemas tridimensionales) mediante los correspondientes productos tensoriales.

El tema de los indicadores ha sido resuelto utilizando una técnica de Galerkin sobre una fórmula de representación, con lo que se consigue una evaluación global del error dentro de cada macroelemento.

En el caso del potencial, por ejemplo, se definen los operadores:

$$\begin{aligned} L_1 f(P) &= \int_{\partial\Omega_1} f(Q) \phi^*(P, Q) \\ L_2 f(P) &= C f(P) + \int_{\partial\Omega_2} f(Q) \varphi^*(P, Q) \\ p(P) &= \int_{\partial\Omega_1} \phi^0(Q) \varphi^*(P, Q) - \int_{\partial\Omega_2} \varphi^0(Q) \phi^*(P, Q) \end{aligned} \quad [16]$$

donde  $f$  es una función cualquiera,  $\partial\Omega_1$  es el trozo de contorno con  $\phi$  dato,  $\partial\Omega_2$  aquél en que  $q$  es dato, con lo que se demuestra que el residuo es:

$$r = L_1 \hat{q} + L_2 \hat{p} + p \quad [17]$$

y que

$$L_1 e_1 + L_2 e_2 + r = 0 \quad [18]$$

donde  $e_1$  y  $e_2$  son los errores cometidos en  $\partial\Omega_1$  y  $\partial\Omega_2$  con la aproximación efectuada (véase referencia n° 6).

El error «global» sobre el elemento se define mediante:

$$\|e\|_{\frac{2}{E}} = \int_{\partial\Omega_1} e_1 (L_1 e_1) + \int_{\partial\Omega_2} e_2 (L_2 e_2) = - \int_{\partial\Omega_1} e_1 r_1 - \int_{\partial\Omega_2} e_2 r_2 \quad [19]$$

y ello permite obtener indicadores del tipo:

$$I_i^2 = \frac{\int_{\partial\Omega_i} (N_{n+1} r_i)^2}{\int_{\partial\Omega_i} (N_{n+1}) L_2 (N_{n+1})} \quad i = 1, 2 \quad [20]$$

donde  $N_{n+1}$  es la función interpolatriz candidato a ser añadida tras la resolución anterior del problema.

Como puede observarse, el numerador mide la proyección del residuo sobre la función candidato y ello «indica» si su presencia es interesante o no para absorber aquél.

Debido a la complejidad de cálculo del denominador, el indicador se reduce a evaluar el numerador de [20] y a seleccionar el refinamiento de aquéllos elementos que tengan una aportación mayor.

El cálculo de un estimador global presenta problemas más serios. Wendland y Rank han desarrollado algunos estudios de convergencia que no son directamente aplicables a los casos expuestos por lo que, actualmente, el tema sigue abierto. Un caso muy sencillo que ilustra el sentido en que se pretende actuar, se refiere a los problemas tipo Neumann. En este caso el residuo y el error se pueden relacionar para contornos rectos (o planos). En efecto:

$$L_2 e_2 = \int_{\partial\Omega_2} e_2(Q) \varphi^*(P, Q) + C e_2(P) \quad [21]$$

Si los elementos son planos y el punto de colocación está en el elemento:

$$q^*(P, Q) = 0 \tag{22}$$

Con ello:

$$e_2(P) = -L_2 e_2 = -C e^2(P)$$

y por tanto:

$$-\int_{\partial\Omega_2} e_2(P) r_2(P) = \frac{1}{C} \int_{\partial\Omega_1} r_2^2(P) \tag{23}$$

Con  $C = \frac{1}{2}$  y sumando en el contorno:

$$\|e\|_{global}^2 = 2 \sum_1 \int_{\partial\Omega_1} r_2^2(P) \tag{24}$$

Este estimador está siendo utilizado actualmente, incluso en casos mixtos y con contorno curvo, demostrándose experimentalmente que marca bien el proceso de convergencia, por lo que sería de gran interés intentar una justificación precisa de su comportamiento.

El planteamiento anterior se ha realizado siguiendo la pauta de un método de Contorno tipo Galerkin. Sin embargo, el método de colocación tiene virtudes que pueden simplificar la elección de la medida de error.

Para verlo considérese el sencillo ejemplo de la figura 1. En un cuadrado se encuentra definida la función armónica:

$$\phi = x^3 - 3xy^2 \tag{25}$$

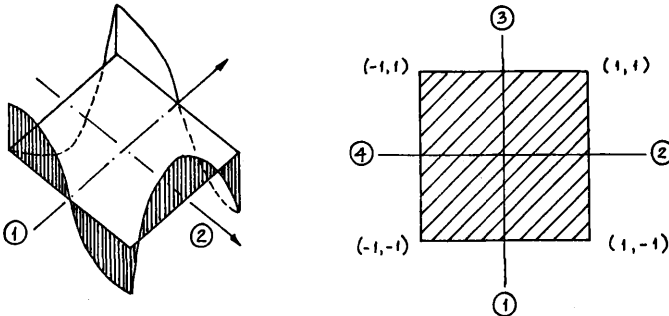


Figura 1

El ejercicio se plantea como un problema de Neumann dando valores de  $q = d\phi/dn$  en el contorno y ajustando de forma progresiva y selectiva el grado de interpolación según indican los estimadores citados más arriba.

La figura 2 recoge la solución para las aproximaciones lineal, parabólica y cúbica que ajusta finalmente el resultado.

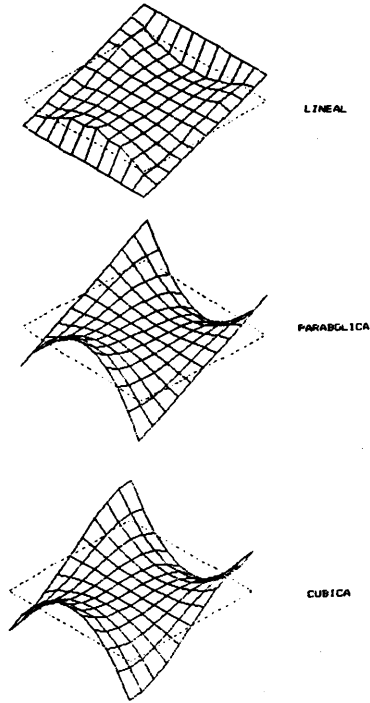
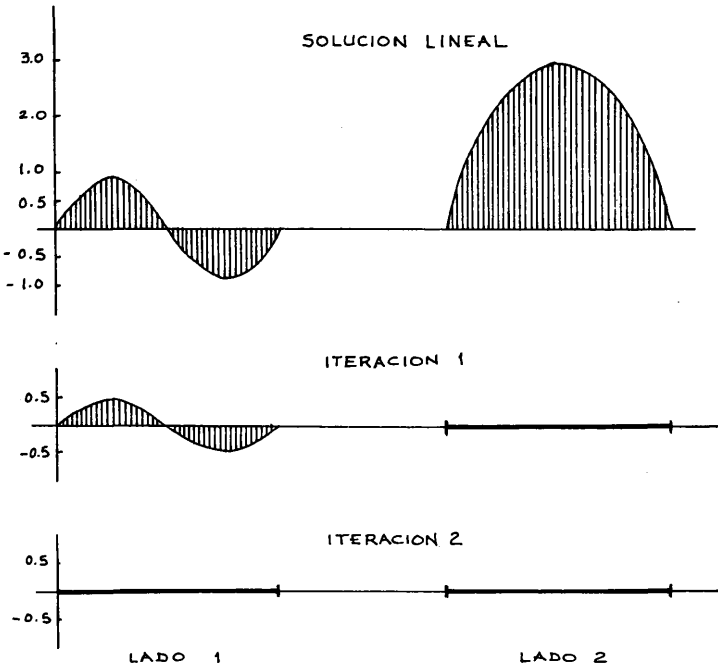


Figura 2.

La evolución de los residuos puede verse en la figura 3. Es llamativa la semejanza de la forma de los residuos con las funciones que son necesarias para mejorar la aproximación. Ello es sin embargo natural ya que puede comprobarse que (17) se reduce en este caso a la diferencia entre el valor interpolado y el valor que se calcularía al aplicar la fórmula de representación a un punto del contorno basándose en los resultados interpolados.

Para comprenderlo obsérvese de nuevo la figura 2. Los valores en los puntos internos se han obtenido utilizando la fórmula de representación y realizando las integraciones en el contorno con la solución aproximada correspondiente.

La fórmula de representación alisa los errores y produce resultados mejores que los del contorno por lo que la representación es equívoca. Para que la calidad de los resultados fuese comparable deberían haberse dibujado los valores en el contorno correspondientes a la aplicación de la fórmula de representación en lugar de a la interpolación, lo que habría dado una solución de gran calidad incluso con la solución lineal.



## EVOLUCION DE RESIDUOS

SOLUCION LINEAL	ELEMENTO 1	ELEMENTO 2
	0.4456	7.9711
ITERACION 1	$5.34 \times 10^{-2}$	$3.77 \times 10^{-3}$
ITERACION 2	$3.82 \times 10^{-3}$	$3.955 \times 10^{-3}$

Figura 3

Ello sugiere el uso como indicador de la diferencia entre los valores interpolados y calculados que puede medirse local o globalmente.

Por otro lado, puede observarse que los valores de esquina se modifican ligeramente en cada aproximación lo que puede utilizarse para el control de la solución global.

La referencia lineal, o primera solución, es pues la clave del proceso. Con respecto a ella se mide elemento a elemento la necesidad de refinamiento y el proceso termina cuando la máxima diferencia entre valores en los nudos iniciales es inferior a la tolerancia especificada. Una última aplicación de la fórmula de colocación conduce al auténtico resultado del método numérico.

El proceso de refinamiento puede por otro lado guiarse por bloques de comportamiento simétrico y antisimétrico.

Considérese por ejemplo (figura 4) que se dispone de los valores calculados  $\phi_i$

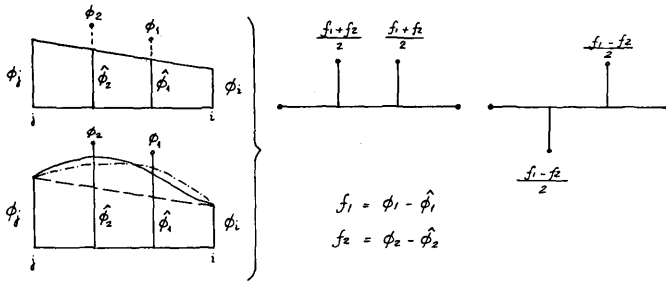


Figura 4

y de los  $\phi_i$  interpolantes  $\hat{\phi}_i$ . Se pueden definir las diferencias  $f_i$  que miden la deficiencia de la aproximación y, en particular, la importancia de la siguiente función simétrica o antisimétrica a añadir comparando la importancia de

$$\frac{f_1 + f_2}{2} \quad \text{y} \quad \frac{f_1 - f_2}{2} \quad \text{con} \quad \frac{\phi_i + \phi_j}{2}.$$

Con ello se puede juzgar si se deben introducir las dos funciones (simétrica y antisimétrica) que siguen en la jerarquía de interpolación a la última incluida, una de ellas o ninguna.

En el caso particular del ejemplo escogido es claro que el método conduciría a la inclusión de la parte simétrica (parábola) en los lados 2 y 4 y a la antisimétrica (cúbica) en los lados 1 y 3.

En este caso la parada vendría proporcionada por el propio incremento nulo de los residuos en el cálculo final.

### 3. LA VERSION h.

Aunque el razonamiento se ha planteado tomando como base la versión p el criterio anterior puede evidentemente seguirse cuando se trabaja con la versión h. Aunque en otras publicaciones (ref.6) se ha puesto de manifiesto la mayor velocidad de convergencia en el caso p, existen situaciones, como la presencia de singularidades donde un refinamiento polinómico no consigue capturar el comportamiento local. La figura 5. recoge un caso típico en que lo único que se consigue es distorsionar la solución. En estos casos es preferible un refinamiento local basado en el recálculo de la solución y que se pondrá de manifiesto por una fuerte componente asimétrica en los valores f precisados.



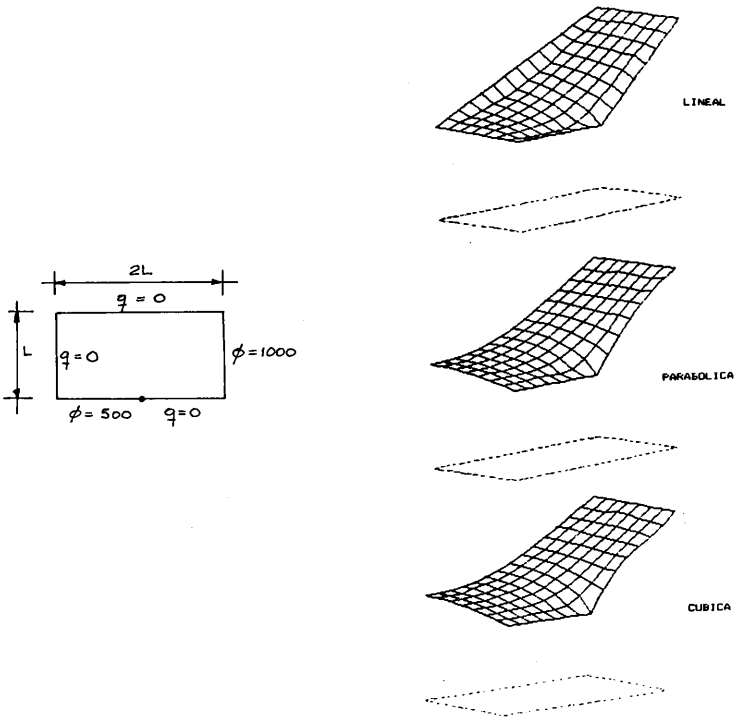


Figura 5

### CONCLUSIONES.

La extracción de una mejor solución sin refinar la malla se obtiene en el MEC gracias a la aplicación de la fórmula de representación para puntos de contorno.

Ello permite diseñar una estrategia de indicadores y estimadores que mejora la eficacia de intentos anteriores y permite controlar el desarrollo de la solución tanto en las versiones  $p$  como en la  $h$  o mixtos.

### AGRADECIMIENTOS.

Los autores desean agradecer a Patricia Méndez Herrera y José Carlos Hasbun Hasbun, las sugerencias realizadas en el desarrollo del trabajo, así como su colaboración en los cálculos intermedios.

El trabajo ha sido realizado en el marco del Proyecto de Investigación PB 90-0273 de la DGICYT.

**REFERENCIAS**

1. E. ALARCON, L. ABIA AND A. REVERTER: «On the possibility of adaptive boundary elements», in *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Elements Computation (ARFEC)*, Lisbon, 1984.
2. E. ALARCON, A. REVERTER AND J. MOLINA: «Hierarchical Boundary Elements», *Comp. Struct.*, 20 (1-3), 151-156 (1985).
3. E. ALARCON, AND A. REVERTER: «P-Adaptive boundary elements», *Int. j. numer. methods eng.* 23, 801-829, 1986.
4. D. W. KELLY, J. GAGO, O. C. ZIENKIEWICZ AND I. BABUSKA: «A posteriori error analysis and adaptive processes in the FEM». parts I and II, *Int. j. numer. methods eng.* 19, 1953-1619 (1983).
5. M. CERROLAZA, E. ALARCON: «P-adaptive boundary elements for 3D potencial problems». *Communications in applied numerical methods*, Vol. 3, 335-344 (1987)
6. M. CERROLAZA, M<sup>o</sup> S. GOMEZ LERA, E. ALARCON: «Elastostatics p-adaptive boundary elements for micros». *Software for Engineering Workstations*, 1988, 4. Enero.
7. M. CERROLAZA: «Elementos de Contorno p-adaptables: Desarrollo y aplicaciones en teoría del potencial y elastostática "Tesis Doctoral UPM." 1988
8. B. SZABO & I. BABUSKA: «Finite Element Analysis» J. Wiley 1991