

## IDENTIFICACION DE FORMA DE TUNELES O REFUERZOS DE MINAS

Pascual Martí (\*)

Enrique Alarcón (\*\*)

Miguel A. Hacar ( )

(\*) Universidad Politécnica de Valencia. España

(\*\*) Universidad Politécnica de Madrid. España

Resumen.- En esta comunicación presentamos un procedimiento para identificar la forma de la curva elástica de un túnel o refuerzo de mina, cuando se conocen las distancias entre unos puntos determinados. Este procedimiento puede emplearse para identificar esfuerzos y presiones, comparando los resultados obtenidos a partir de deformaciones sucesivas de la estructura. El método ha sido implementado en un programa de computador que puede emplearse en microcomputadores.

### INTRODUCCION

Hay muchas ocasiones, en ingeniería civil y de minas, en las que es necesario predecir el estado de tensiones en túneles o refuerzos. En general, no es posible establecer una instrumentación permanente que sea capaz de registrar de forma continua las deformaciones; debido a ésto, es frecuente recurrir a la obtención periódica de desplazamientos, u otra medida significativa, que sirvan de datos para algún método que permita el conocimiento de las tensiones a través de la resolución de un problema inverso.

Uno de los métodos propuestos para este fin es debido a Giorda y Jurinas (1). Aunque este método es de aplicación bastante general, parece ser más adecuado para tratar situaciones con pequeños desplazamientos.

En la ingeniería de minas, nos encontramos frecuentemente con casos de grandes desplazamientos de los refuerzos de los túneles. Así mismo, nos encontramos con respuestas no lineales debidas a dispositivos especiales, colocados para un control pasivo del refuerzo. En estos casos, la única posibilidad es intentar controlar la forma de la estructura, y, por sucesivas medidas y análisis incrementales, intentar identificar los esfuerzos.

En esta comunicación presentamos un método que permite obte

ner la forma de la curva elástica de un túnel o refuerzo de mina, cuando se conocen las distancias entre unos puntos determinados.

El punto inicial de método es el conocimiento de las distancias entre puntos situados a lo largo de la estructura (fig. 1)

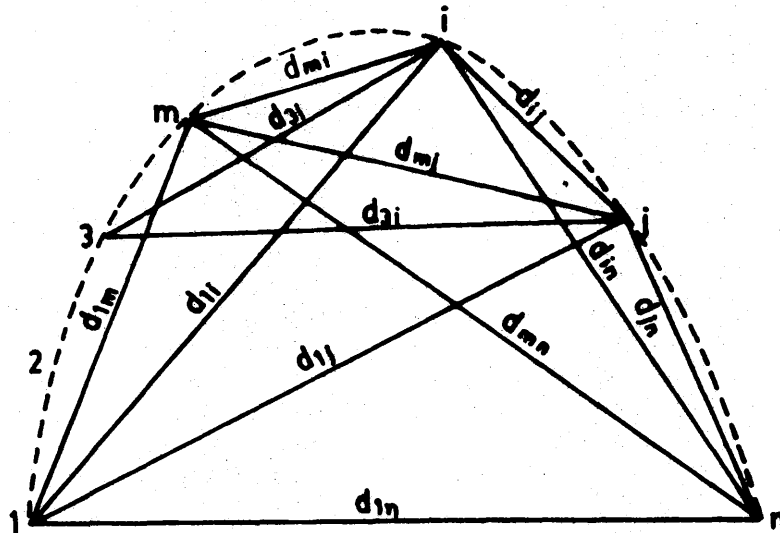


Fig. 1.- Distancias empleadas como datos del problema

Estas medidas resultan especialmente adecuadas para las difíciles condiciones de trabajo en las minas, ya que no es necesario el empleo de una referencia fija.

La idea consiste en obtener una curva ajustada a los valores medidos en un instante y entonces, comparando con otras curvas obtenidas en situaciones previas de carga y deformación, obtener los desplazamientos y deformaciones en cada uno de los puntos de la estructura. Si se conoce de forma suficientemente segura la respuesta del material, el proceso termina con el cálculo de los esfuerzos y tensiones incrementales.

El proceso completo puede dividirse en tres partes:

- a) Predicción de las coordenadas de los puntos en un sistema de referencia adecuado.
- b) Obtención de la curva que pasa por los puntos anteriores.
- c) Determinación de los esfuerzos.

#### PREDICCIÓN DE LAS COORDENADAS DE LOS PUNTOS

Un procedimiento para obtener las coordenadas de los puntos, podría ser la resolución del sistema de ecuaciones que

relacione las coordenadas cartesianas con los valores medidos, empleando alguna técnica de minimización del error. Este sistema de ecuaciones es no lineal, y difícil de resolver por métodos directos. Lo que nosotros proponemos es obtener una primera solución aproximada, que corregimos a continuación mediante la técnica de mínimos cuadrados.

La idea es la siguiente (fig. 2); cada pareja de puntos se toma como base para un sistema de coordenadas local  $x'-y'$ . Cada punto se sitúa con respecto a este sistema a partir de los valores de las distancias medidas. Posteriormente, las distancias se refieren a un sistema de coordenadas global, que en la figura 2 es el 1-m. De esta forma obtenemos, por procedimientos geométricos, una nube de posibles situaciones para cada punto.

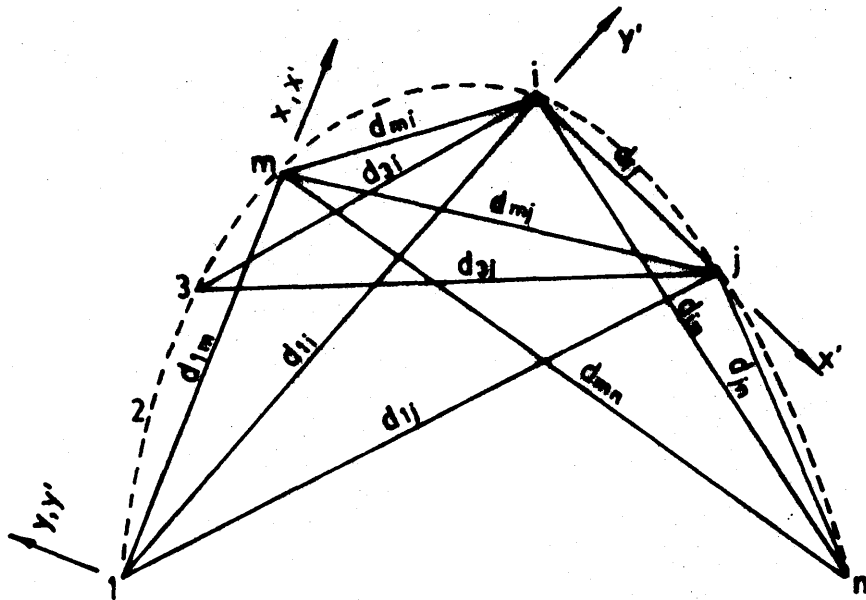


Fig. 2.- Sistemas de coordenadas locales y global

La primera solución aproximada podría consistir en adoptar, para las coordenadas de cada punto, el centro de gravedad de la nube de puntos; así como otra regla de aplicación sencilla. En nuestro caso, debido a la efectividad de la corrección posterior, lo que hacemos es seguir el proceso anterior hasta obtener un primer valor para las coordenadas de cada uno de los puntos. La razón de esta simplificación está en que, en general, no conocemos el nivel y distribución de los errores, por lo que no es posible asegurar la compensación de los mismos al seguir con el procedimiento anterior. En realidad, los valores obtenidos dependen del punto inicial, del orden seguido en el proceso y, naturalmente, de los errores de las medidas.

A partir de las coordenadas aproximadas, el problema puede abordarse fácilmente con la técnica de mínimos cuadrados.

Sea  $i-j$  (fig. 3) la primera aproximación para las coordenadas de dos puntos. La distancia entre estos dos puntos es  $d_{ij}$ ;

por otro lado, el valor medido es  $D_{ij}$ , así que es necesaria una traslación, una rotación y una deformación axial, para alcanzar la posición correcta I-J.

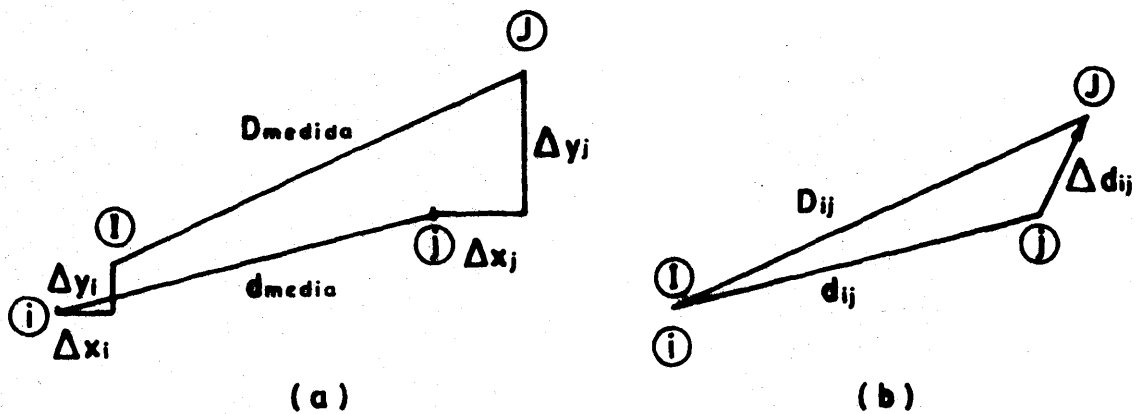


Fig. 3.- Correcciones a las coordenadas de los puntos  
De acuerdo con la figura 3 (b).

$$\underline{D}_{ij} = \underline{d}_{ij} + \Delta \underline{d}_{ij} \quad (1)$$

y el cuadrado de la longitud es

$$\underline{D}_{ij}^T \underline{D}_{ij} = (\underline{d}_{ij} + \Delta \underline{d}_{ij})^T (\underline{d}_{ij} + \Delta \underline{d}_{ij}) \quad (2)$$

o, después de algunas operaciones

$$\underline{d}_{ij}^T \Delta \underline{d}_{ij} = \frac{1}{2} (\underline{D}_{ij}^T \underline{D}_{ij} - \underline{d}_{ij}^T \underline{d}_{ij}) - \frac{1}{2} \Delta \underline{d}_{ij}^T \Delta \underline{d}_{ij} \quad (3)$$

si admitimos que el último término es despreciable, la ecuación anterior se transforma en la relación básica

$$\underline{d}_{ij}^T \Delta \underline{d}_{ij} = \frac{1}{2} (\underline{D}_{ij}^T \underline{D}_{ij} - \underline{d}_{ij}^T \underline{d}_{ij}) \quad (4)$$

en la que se ha empleado la notación siguiente

$$\underline{d}_{ij} = (x_j - x_i, y_j - y_i)^T; \quad \Delta \underline{d}_{ij} = (\Delta x_j - \Delta x_i, \Delta y_j - \Delta y_i)^T \quad (5)$$

pero

$$\underline{d}_{ij}^T \Delta \underline{d}_{ij} = (x_j - x_i, y_j - y_i) \begin{bmatrix} \Delta x_j - \Delta x_i \\ \Delta y_j - \Delta y_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

si llamamos

$$\Delta \underline{x}^i = (\Delta x_i, \Delta y_i)^T \quad (7)$$

es posible escribir la ecuación (6) como

$$\underline{d}_{ij}^T \Delta \underline{d}_{ij} = (\underline{d}_{ij}^T, -\underline{d}_{ij}^T) \begin{bmatrix} \Delta \underline{x}^j \\ \Delta \underline{x}^i \end{bmatrix} \quad (8)$$

con lo que la ecuación básica es

$$(\underline{d}_{ij}^T, -\underline{d}_{ij}^T) \begin{bmatrix} \underline{x}^j \\ \underline{x}^i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (D_{ij}^T D_{ij} - \underline{d}_{ij}^T \underline{d}_{ij}) \quad (9)$$

o también

$$(\underline{d}_{ij}^T; \underline{d}_{ij}^T) \begin{bmatrix} \underline{x}^i \\ \underline{x}^j \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (d_{ij}^2 - D_{ij}^2) \quad (10)$$

La ecuación (10) puede aplicarse a cada una de las parejas de puntos para los que se ha medido la distancia. El sistema de ecuaciones puede ponerse, en forma compacta, como

$$\underline{C}^* \underline{\Delta}^* = \underline{F}^* \quad (11)$$

donde la matriz  $\underline{C}^*$  se construye elemento a elemento, y  $\underline{F}^*$  es el segundo miembro de la ecuación (10).

En forma expandida

$$\begin{array}{l} \text{medida} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \begin{bmatrix} \overbrace{2i-1} \quad \overbrace{2i} & \overbrace{2j-1} \quad \overbrace{2j} \\ & \\ & \\ \underline{d}_{ij}^T & \underline{d}_{ji}^T \\ & \\ & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \underline{x}^i \\ \vdots \\ \underline{x}^j \\ \vdots \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vdots \\ d_{ij}^2 - D_{ij}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (12)$$

Así pues, el número de filas es igual al número de medidas realizadas, mientras que el número de columnas es el doble del número de puntos utilizados.

Con el fin de impedir la posibilidad de movimientos de sólido rígido, es necesario imponer las condiciones de contorno

donde se conozcan, o asignar correcciones fijas a unos puntos determinados. Lo que hemos hecho es tomar como cero las correcciones a las coordenadas del último punto. De esta forma, el procedimiento se reduce a eliminar las dos últimas filas de la matriz  $\underline{C}^*$  y los dos últimos elementos del vector  $\underline{F}^*$ . De esta forma, la ecuación (11) se transforma en

$$\underline{C} \underline{\Delta} = \underline{F} \quad (13)$$

El error cuadrático viene dado por

$$E = (\underline{C} \underline{\Delta} - \underline{F})^T (\underline{C} \underline{\Delta} - \underline{F}) = \underline{\Delta}^T \underline{C}^T \underline{C} \underline{\Delta} - 2 \underline{\Delta}^T \underline{C}^T \underline{F} + \underline{F}^T \underline{F} \quad (14)$$

aplicando la condición de mínimo

$$\frac{\delta E}{\delta \underline{\Delta}} = 0 \longrightarrow (\underline{C}^T \underline{C}) \underline{\Delta} = \underline{C}^T \underline{F}$$

o, en forma simbólica

$$\underline{K} \underline{X} = \underline{P} \quad (15)$$

Después de algunas operaciones y teniendo en cuenta que

$$\underline{d}_{ij} = -\underline{d}_{ji} ; \underline{d}_{ij} \underline{d}_{ji}^T = \underline{d}_{ji} \underline{d}_{ij}^T = (\underline{d}_{ij} \underline{d}_{ji}^T)^T \quad (16)$$

se ve que  $\underline{K}$  tiene la forma siguiente

$$\begin{aligned} \underline{K} = \underline{C}^T \underline{C} &= \begin{bmatrix} \sum \underline{d}_{i-i} \underline{d}_{i-i}^T & \underline{d}_{i-j} \underline{d}_{j-i}^T & \underline{d}_{i-m} \underline{d}_{m-i}^T & \dots \\ & \sum \underline{d}_{j-j} \underline{d}_{j-j}^T & \underline{d}_{j-m} \underline{d}_{m-j}^T & \dots \\ \text{SIM.} & & \sum \underline{d}_{m-m} \underline{d}_{m-m}^T & \dots \\ & & & \dots \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sum \underline{d}_{i-i} \underline{d}_{i-i}^T & -\underline{d}_{i-j} \underline{d}_{i-j}^T & -\underline{d}_{i-m} \underline{d}_{i-m}^T & \dots \\ & \sum \underline{d}_{j-j} \underline{d}_{j-j}^T & -\underline{d}_{j-m} \underline{d}_{j-m}^T & \dots \\ \text{SIM.} & & \sum \underline{d}_{m-m} \underline{d}_{m-m}^T & \dots \\ & & & \dots \end{bmatrix} \quad (17) \end{aligned}$$

y también que

$$\underline{P} = \underline{C}^T \underline{F} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum (d_i^2 - D_i^2) \underline{d}_i \\ \sum (d_j^2 - D_j^2) \underline{d}_j \\ \sum (d_m^2 - D_m^2) \underline{d}_m \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (18)$$

donde

$$\varepsilon(d_i^2 - D_i^2) \underline{d}_i = (d_{ij}^2 - D_{ij}^2) \underline{d}_{ij} + (d_{im}^2 - D_{im}^2) \underline{d}_{im} + \dots (19)$$

y

$$\begin{aligned} \underline{d}_{ij} \underline{d}_{ij}^T &= \begin{bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \end{bmatrix} (x_j - x_i, y_j - y_i) = \\ &= \begin{bmatrix} (x_j - x_i)^2 & (x_j - x_i)(y_j - y_i) \\ (y_j - y_i)(x_j - x_i) & (y_j - y_i)^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

Así pues, el ensamblaje del sistema de ecuaciones (15) es directo, y su resolución por los procedimientos habituales proporciona las correcciones a las coordenadas aproximadas iniciales, obteniéndose de esta manera las coordenadas finales de los puntos.

#### OBTENCION DE LA CURVA AJUSTADA

Una vez obtenidas las coordenadas de los puntos, es necesario obtener la curva elástica entre cada pareja de puntos sucesivos. La curva tendrá continuidad  $C^2$  y es posible obtener una condición de curvatura mínima si realizamos la interpolación mediante funciones "spline" cúbicas.

Como es conocido (2), una vez definidos  $n$  puntos de abcisas  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , las condiciones para las funciones "spline" cúbicas naturales son

- a) en  $[-\infty, x_1]$  la función es  $C^1$
- b) en  $[x_1, x_n]$  la función es  $C^2$
- c) en  $[x_n, +\infty]$  la función es  $C^1$

La interpolación se realiza empleando  $n-1$  polinomios cúbicos, que requieren  $4n-4$  parámetros, y 2 polinomios lineales que requieren 4 parámetros; así pues, el número final de incógnitas es  $4n$ , y las  $4n$  ecuaciones se obtienen a partir de

- a)  $n$  valores de la función
- b)  $n$  condiciones de continuidad  $C^0$
- c)  $n$  condiciones de continuidad  $C^1$
- d)  $n$  condiciones de continuidad  $C^2$

Una vez impuestas las 4n condiciones anteriores, el sistema de ecuaciones a resolver presenta la estructura siguiente

$$\begin{bmatrix} 2 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \Delta x_k & & & & \\ & & & 2(x_{k+1}-x_{k-1}) & & & \\ & & & & \Delta x_{k-1} & & \\ & & & & & \text{Resto de los elementos} & \\ & & & & & \text{en las filas son cero.} & \\ & & & & & & 1 & 2 \\ & & & & & & & p_k \\ & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3f(x_1, x_2) \\ \vdots \\ 3f(x_{k-1}, x_k) \Delta x_k + \\ + 3f(x_k, x_{k+1}) \Delta x_{k-1} \\ \vdots \\ 3f(x_{n-1}, x_n) \end{bmatrix}$$

siendo

(21)

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$

$$f(x_k, x_{k+1}) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

$f(x_k)$  valor de la función en el punto  $x_k$

$p_k$  pendiente de la función en el punto  $x_k$

Como puede observarse el sistema de ecuaciones resultante es tridiagonal, admitiendo por tanto una solución muy simple.

En ocasiones es posible conocer las pendientes o las curvaturas en los puntos extremos. Es necesario en estos casos alterar el sistema de ecuaciones.

Cuando se conocen las curvaturas en los extremos, las ecuaciones primera y última son

- primera ecuación

$$2 p_1 + p_2 = 3 f(x_1, x_2) - \frac{y_1''}{2} \Delta x_1$$

- última ecuación

$$p_{n-1} + 2 p_n = 3 f(x_{n-1}, x_n) + \frac{y_n''}{2} \Delta x_{n-1}$$

siendo  $y_1''$  y  $y_n''$  las derivadas segundas en los puntos inicial y final.

Cuando se conocen las pendientes en los extremos, se eliminan las ecuaciones primera y última, y los segundos miembros de las ecuaciones segunda y penúltima quedan como



- segunda ecuación

$$3 f(x_1, x_2) \Delta x_2 + 3 f(x_2, x_3) \Delta x_1 - \Delta x_2 p_1$$

- penúltima ecuación

$$3 f(x_{n-2}, x_{n+1}) + 3 f(x_{n-1}, x_n) \Delta x_{n-2} - \Delta x_{n-2} p_n$$

Finalmente, hay que tener en cuenta que, en nuestro caso, la abscisa de interpolación es la longitud del arco  $s_i$  medida a partir del punto inicial; así pues

$$x_i = f_x(s_i) \quad (22 a)$$

$$y_i = f_y(s_i) \quad (22 b)$$

$$y'(s_i) = \frac{dy}{dx} = \frac{f'_y(s_i)}{f'_x(s_i)} \quad (22 c)$$

$$\begin{aligned} \kappa(s_i) &= \frac{y''(s_i)}{[1 + y'(s_i)^2]^{3/2}} = \frac{f'_x(s_i) f''_y(s_i) - f'_y(s_i) f''_x(s_i)}{[f'^2_x(s_i) + f'^2_y(s_i)]^{3/2}} = \\ &= f'_x(s_i) f''_y(s_i) - f'_y(s_i) f''_x(s_i) \quad (22 d) \end{aligned}$$

#### PROGRAMA DE COMPUTADOR

El procedimiento que presentamos en esta comunicación ha sido implementado en la forma de un programa FORTRAN, que ha sido comprobado y ejecutado en el computador UNIVAC 1100 de la Universidad Politécnica de Valencia. A continuación damos una breve descripción de las características más importantes del programa.

El esquema modular del programa es el de la figura 4.

En primer lugar tenemos un módulo principal IDESF, que se encarga de ir controlando la ejecución de los distintos módulos del programa.

El módulo EDATOS se encarga de la entrada e impresión de los datos del problema. Estos datos corresponden a las distancias entre puntos medidos en la situación actual, y las coordenadas finales obtenidas en una posición anterior. Igualmente se leen en este módulo las características elásticas de la estructura y otros datos auxiliares del problema.

El módulo GEOMET se encarga de obtener la primera aproximación para las coordenadas de los puntos, aplicando el procedimiento geométrico expuesto en el apartado segundo.

El módulo ACORMC corrige las coordenadas del módulo anterior, aplicando la técnica de mínimos cuadrados. Para ello forma la matriz  $K$  de (17) y el vector  $P$  de (18), resolviendo el sistema de ecuaciones (15) mediante la subrutina SOLSES de resolución de sistemas de ecuaciones con la matriz de coeficientes simétrica.

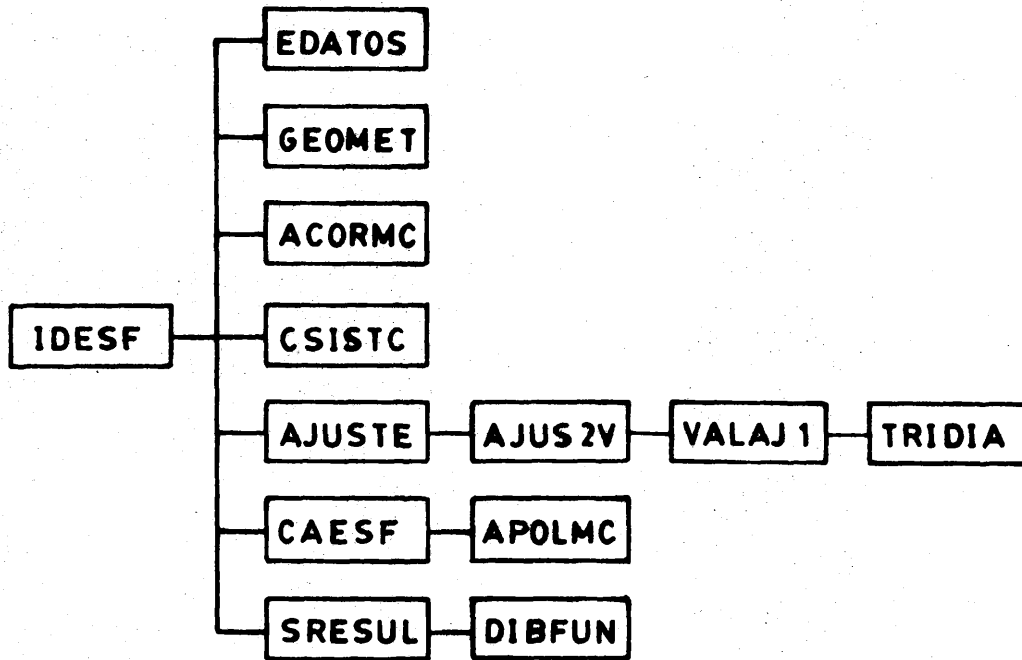


Fig. 4.- Esquema modular del programa

El módulo CSISTC realiza un cambio de sistema de coordenadas, con objeto de tener todos los puntos en un sistema adecuado para poder comparar con situaciones anteriores y para poder imponer las condiciones de pendientes o curvaturas en los extremos.

El módulo AJUSTE se encarga de ajustar "splines" cúbicos a las coordenadas de los puntos en los que se han realizado medidas. Para ello emplea la subrutina AJUS2V, que proporciona los valores de las coordenadas, pendientes y curvaturas de cualquier punto (ecuaciones 22) a partir de los valores obtenidos por VALAJ1, que interpola las coordenadas  $x$  e  $y$ , a lo largo del arco, mediante los "splines" cúbicos. En este módulo, TRIDIA es una subrutina de resolución de sistemas de ecuaciones tridimensionales.

El módulo CAESF se encarga de obtener los esfuerzos incrementales a partir de la curva ajustada a la situación actual y la obtenida a partir de las coordenadas de la posición anterior. En este módulo se emplea la subrutina APOLMC que ajusta, por mínimos cuadrados, curvas polinómicas a los resultados de los esfuerzos obtenidos por comparación de las dos curvas.

Finalmente, el módulo SRESUL se encarga de la salida de los

resultados intermedios y finales del programa, bien mediante impresora, bien a través del módulo DIBFUN, que proporciona una salida gráfica.

Con la implementación actual, el programa tiene unas 900 sentencias ejecutables, ocupando 2100 palabras. Igualmente, para procesar una estructura con 30 puntos, se necesitan unas 6000 palabras de memoria central, no siendo necesario ningún dispositivo de memoria periférico. Estas características hacen que el procedimiento sea muy adecuado para la implementación en microcomputadores.

#### EJEMPLO DE APLICACION

Con el objeto de comprobar la utilidad del procedimiento propuesto, se han realizado pruebas para distintos casos. Puesto que la aplicación a un caso real proporciona unos resultados que no permiten evaluar la bondad de la aproximación, hemos recurrido a simular el proceso de carga de una estructura mediante un programa de elementos finitos, lo que nos permite analizar y comparar con facilidad una gran cantidad de casos.

El caso que vamos a exponer corresponde al arco de circunferencia cuyas características geométricas, elásticas y cargas se dan en la figura 5.

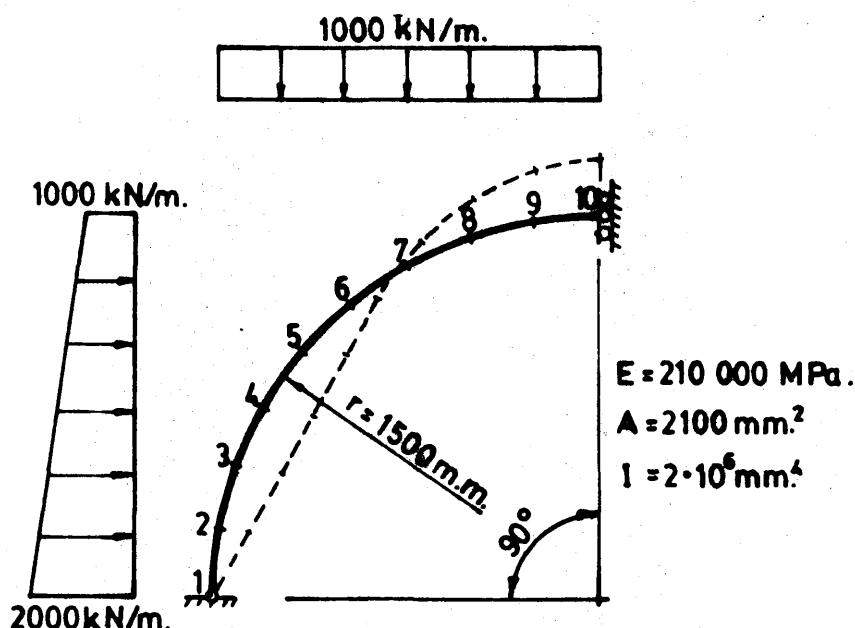


Fig. 5.- Arco de circunferencia.  
Geometría, propiedades elásticas y cargas.

A partir de la geometría inicial, mediante el programa de

análisis, hemos obtenido la geometría deformada de la estructura. A partir de esta geometría hemos obtenido las distancias entre los diez puntos de la figura, introduciendo errores de valores aleatorios para simular las distancias medidas.

La primera comparación se refiere a las coordenadas de los puntos de medida obtenidas con el procedimiento geométrico y con la aplicación de la técnica de mínimos cuadrados. En la tabla 1 se dan los valores obtenidos. En primer lugar, las coordenadas exactas; en segundo lugar las coordenadas obtenidas por el procedimiento geométrico calculando un solo valor para cada punto; a continuación las coordenadas por el procedimiento geométrico calculando todos los valores posibles para cada punto y sacando el valor medio; finalmente, las coordenadas obtenidas por mínimos cuadrados. Estos últimos valores resultan ser prácticamente iguales sea cual sea el número de valores de las coordenadas de cada punto obtenidas en el procedimiento geométrico. En las dos últimas filas se dan los errores globales de las aproximaciones, salvo en la columna correspondiente a las coordenadas exactas, en la que se dan los errores globales introducidos en las medidas exactas al sumarles errores aleatorios de valores máximos  $\pm 5$  mm.

Tabla 1.- Coordenadas obtenidas por distintos procedimientos.  
(Valores en mm. Errores máximos introducidos  $\pm 1$  mm)

PUNTO	REALES		GEOMET (1v)		GEOMET (t.v)		ACORMC	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	58.6	256.6	60.7	256.8	59.8	255.9	58.7	256.4
3	148.3	502.6	152.6	501.5	148.4	502.0	149.5	501.0
4	262.8	736.9	257.1	740.7	256.3	739.7	261.7	737.4
5	402.7	957.2	402.0	957.5	398.6	958.1	401.7	957.5
6	570.8	1157.6	570.5	1159.4	568.0	1159.0	569.9	1158.0
7	768.7	1329.2	773.4	1327.0	765.2	1331.1	767.7	1329.3
8	994.3	1461.5	993.2	1464.0	990.2	1464.1	993.2	1461.9
9	1241.3	1545.2	1238.2	1550.1	1238.7	1546.6	1240.0	1545.9
10	1500.0	1573.9	1501.0	1575.0	1499.5	1573.4	1499.7	1573.6
$\Sigma  e $	21.0 mm		54.1 mm		33.2 mm		21.3 mm	
$\Sigma (e)^2$	14.0 mm <sup>2</sup>		104.8 mm <sup>2</sup>		43.5 mm <sup>2</sup>		15.6 mm <sup>2</sup>	

En la tabla 2 se recogen las coordenadas obtenidas mediante la técnica de mínimos cuadrados para diferentes valores máximos de los errores aleatorios introducidos en las medidas exactas.

En la tabla 3 se recogen las coordenadas y pendientes de puntos de la elástica, obtenidas para distintas condiciones en los puntos extremos. En primer lugar los valores reales; a continuación los valores obtenidos al dejar libres los extremos (curvaturas cero) y, finalmente, los valores obtenidos al imponer las pendientes o curvaturas en los extremos. Todos los valores corresponden a distancias exactas a las que se les han ido

sumando errores aleatorios de valores máximos  $\pm 1$  mm.

Tabla 2.- Coordenadas obtenidas con diferentes niveles de error máximo en las medidas. (Valores en mm)

PUNTO	Error $\pm .1$ mm		Error $\pm 1.$ mm		Error $\pm 5.$ mm		Error $\pm 10.$ mm	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	58.6	256.6	58.7	256.4	59.1	255.7	59.7	254.7
3	148.4	502.4	149.5	501.0	145.6	494.8	161.1	487.1
4	262.7	737.0	261.7	737.4	257.4	739.0	252.5	740.6
5	402.6	957.3	401.7	957.5	397.6	958.5	392.3	959.7
6	570.8	1157.7	569.9	1158.0	566.2	1159.1	561.6	1160.5
7	768.6	1329.2	767.7	1329.3	763.9	1330.1	758.9	1331.1
8	994.2	1461.5	993.2	1461.9	989.1	1463.8	983.6	1466.3
9	1241.2	1545.3	1240.0	1545.9	1234.9	1548.5	1228.4	1551.8
10	1450.0	1573.9	1499.7	1573.6	1498.6	1572.5	1497.2	1571.0
$\Sigma e $	2.1 mm		21.3 mm		106.2 mm		211.7 mm	
$\Sigma(e)^2$	0.2 mm <sup>2</sup>		15.6 mm <sup>2</sup>		393.2 mm <sup>2</sup>		1585.2 mm <sup>2</sup>	

Tabla 3.- Coordenadas y pendientes con distintas condiciones en los puntos extremos. (Valores en mm)

PUNTO	REALES			EXTREMOS LIBRES			con PEND.o CURV.		
	X	Y	PEND	X	Y	PEND	X	Y	PEND
1	0.00	0.00	6.68	0.00	0.00	5.09	0.00	0.00	6.68
	7.11	43.37	5.62	8.45	42.77	5.01	7.46	42.94	5.12
	15.37	86.53	4.88	17.14	85.48	4.79	16.47	85.60	4.46
	24.73	129.47	4.33	26.33	128.08	4.47	26.32	128.08	4.22
	35.09	172.08	3.92	36.35	171.05	4.12	36.61	171.00	4.10
2	46.41	214.45	3.58	47.13	213.83	3.82	47.31	213.80	3.88
	58.64	256.57	3.32	58.70	256.42	3.55	58.70	256.42	3.60
	71.68	298.30	3.09	71.03	298.53	3.28	70.96	298.54	3.28
	85.52	339.77	2.90	84.42	340.30	2.96	84.37	340.31	2.95
	100.15	380.98	2.74	99.16	381.59	2.64	99.16	381.59	2.64
3	115.47	421.79	2.59	115.14	421.71	2.41	115.16	421.71	2.41
	131.51	462.33	2.46	132.12	461.44	2.29	132.13	461.44	2.29
	148.25	502.59	2.35	149.51	501.01	2.27	149.51	501.01	2.27
	165.65	542.47	2.24	167.05	541.00	2.28	167.05	541.00	2.28
	183.73	582.04	2.14	184.70	580.93	2.24	184.70	580.93	2.24
4	202.49	621.30	2.05	202.74	620.69	2.16	202.74	620.69	2.16
	221.91	660.21	1.96	221.41	660.10	2.05	221.41	660.09	2.05
	242.01	698.76	1.88	241.00	699.05	1.92	240.99	699.05	1.92
	262.80	736.95	1.80	261.69	737.40	1.78	261.69	737.40	1.78

Como puede observarse, la imposición de las pendientes o curvaturas en los extremos mejora notablemente los resultados en las cercanías de esos puntos, pero no introduce mejoras importantes en los puntos más alejados.

Finalmente, con objeto de ver la aplicación a la determinación de esfuerzos, se han calculado los momentos flectores en

la estructura, obteniendo los incrementos de curvatura por comparación de la curva deformada y la original, y ajustando por mínimos cuadrados curvas polinómicas de distintos grados (3,4 y 5). En la figura 6 se han dibujado los diagramas de momentos flectores obtenidos a partir de medidas con distintos niveles de error aleatorio máximo, imponiendo en todos los casos los valores de las pendientes en los extremos.

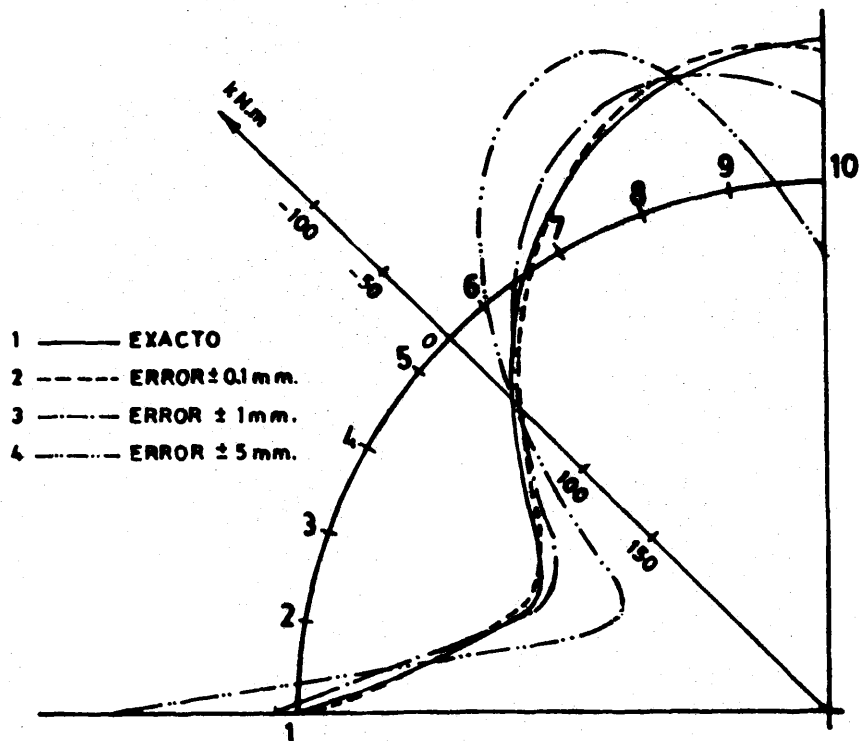


Fig. 6.- Diagramas de momentos flectores obtenidos con distintos niveles de error en las medidas

## CONCLUSIONES

Como se ha visto, el método propuesto es suficientemente robusto y seguro para ser aplicado en las severas condiciones de muchos trabajos de ingeniería civil y de minas.

La técnica de mínimos cuadrados ha demostrado ser particularmente efectiva para la obtención de las coordenadas de los puntos.

El conocimiento de las pendientes o las curvaturas en los puntos extremos mejora notablemente los resultados en las proximidades de estos puntos, aunque no mejora apreciablemente los resultados en los puntos más alejados.

La extensión clara del procedimiento es hacia el cálculo de esfuerzos y la identificación de presiones. Esto puede realizarse mediante un método paso a paso, que permita la posibilidad de considerar una respuesta elástica lineal. Si las medidas

se toman en intervalos suficientemente cortos, resultaría posible localizar articulaciones plásticas y repetir el método, identificando la forma de la estructura por tramos. Obviamente, al mismo resultado se llegaría si estas articulaciones plásticas se detectaran durante la realización de las mediciones.

#### REFERENCIAS

1. Gioda, G. y Jurinas, L. "Numerical identification of soil-structure interaction pressures". International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 3, pág. 33-56, 1981.
2. Stroud, A.H. "Numerical quadrature and solution of ordinary differential equations". Applied Mathematical Sciences 10, Springer-Verlag, 1974.
3. Avila, P.G. "Adaptive  $l_1$ - $l_2$  curve fitting". International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 14, pág. 871-903, 1979.
4. Hacar, M. y Fernandez, M. "Análisis de las deformaciones en el revestimiento de un tunel y de los esfuerzos que las ocasionan". Simposio sobre el uso industrial del subsuelo, Tomo I, Madrid, Abril 1981.
5. Irons, B.M. "Hyper-beams, generalized splines, and practical curve fitting". Capítulo 16 de 'Energy methods in finite element analysis', (Edit. R. Glowinski y otros), John Wiley and Sons, 1979.
6. Lawson, C. L. y Hanson, R.J. "Solving least squares problems" Englewood Cliffs,(N.J), Prentice-Hall, 1974
7. Rice, J.R. "General purpose curve fitting", en 'Approximation theory', (Edit. A. Talbot), Academic Press 1970, pág. 191-204.