

SCBRE EL MEC EN VERSION P-ADAPTABLE: APLICACION A PROBLEMAS TRIDIMENSIONALES DE POTENCIAL

M. Cerrolaza; E. Alarcón.

E.T.S.I. Industriales. Universidad Politécnica de Madrid

RESUMEN.— El MEC ha demostrado ser una poderosa herramienta para el análisis de problemas elásticos y de potencial en dominios bidimensionales y tridimensionales.

Al igual que el MEF, es posible desarrollar versiones h-adaptables y p-adaptables que minimicen el esfuerzo humano en la preparación de los datos y aseguren una solución suficientemente precisa.

Este trabajo se ocupa, justamente, de desarrollar la versión p-adaptable del MEC para problemas de potencial, haciendo hincapié en el establecimiento de criterios apropiados para controlar el proceso automático de refinamiento de la solución, como es el caso de los indicadores locales y estimadores globales.

Se presentan algunos ejemplos ilustrativos y se discute la efectividad de la convergencia-p frente a la convergencia-h.

1. INTRODUCCION

El MEC ha generado, durante los últimos 10 años, numerosas investigaciones y gran interés en el área de los métodos numéricos para análisis y diseño en ingeniería.

Las técnicas p-adaptables, desarrolladas previamente para el Método de los Elementos Finitos, son ahora aplicadas al MEC /1,2,3/ con éxito, abriéndose una interesante línea de investigación en el desarrollo de nuevos métodos numéricos y el establecimiento de criterios de convergencia apropiados.

Este trabajo extiende la filosofía p-adaptable en el MEC a problemas 3-D gobernados por la ecuación de Laplace y discute algunos criterios de convergencia relacionados con el MEC /4/.

Los resultados numéricos presentados son altamente estimulantes y apuntan a la posibilidad de tratar problemas complejos con el método aquí propuesto.

2. FUNCIONES DE INTERPOLACION JERARQUICAS

El criterio básico del método consiste en seleccionar elementos de contorno del mayor tamaño, compatibles con la geometría y las condiciones de contorno. A continuación, se define una familia de funciones de interpolación, usualmente jerárquicas, las cuales están definidas sobre elementos y/o aristas del contorno. La familia escogida para desarrollar la versión p-adaptable del MEC es la familia de Legendre, cuya

expresión se conoce como:

$$P_p(\xi) = \frac{1}{(p-1)!} \frac{1}{2^{p-1}} \frac{d^p}{d\xi^p} \left[(\xi^2 - 1)^p \right] \quad (1)$$

con las correspondientes combinaciones basadas en los bien conocidos productos tensoriales. Las funciones pares afectan sólo al elemento sobre el cual se refina. Las funciones impares, sin embargo, están basadas sobre aristas, haciendo necesaria una cuidadosa estrategia en la programación del proceso de refinamiento, para asegurar la compatibilidad interelemental.

3. REPRESENTACION DE LA GEOMETRIA Y CONDICIONES DEL CONTORNO.

En los métodos p-adaptables el proceso de representación tanto de la geometría como de las condiciones de contorno es completamente independiente del resto del proceso. Ello permite la utilización de preprocesadores que ajusten, de la mejor manera posible, los datos, con lo que se disminuye una de las causas de error inherentes a las discretizaciones demasiado forzadas.

En nuestro caso se ha optado por utilizar una representación mediante funciones "serendipity" tanto de las facetas del elemento como de las condiciones de contorno, ajustando el grado independientemente de acuerdo con la dificultad de representación de cada una de ellas. El correspondiente preprocesador va acompañado de un refinador automático de malla lo que permite que

la geometría y la distribución de potenciales y flujos sean congruentes entre sí, pese a la potencial diferencia en el grado de aproximación.

Se recurre también en esta etapa a la identificación de vértices y aristas localmente resolubles, lo que sucede con ciertas condiciones de contorno. Estos lugares se eliminan del proceso posterior, lo que es del mayor interés para reducir el número de operaciones del proceso general, y se incorporan al conjunto de datos previamente almacenados.

4. PROCESO DE REFINAMIENTO DE LA SOLUCION

Una vez especificadas la geometría y las condiciones de contorno se obtiene una primera solución del problema utilizando funciones de interpolación lineales para todas las variables desconocidas, lo que, en muchos casos, produce ya una solución aceptable. En general, sin embargo, hay lugares en los que se precisa mejorar la aproximación y, en ellos, se añaden secuencialmente polinomios de la familia de Legendre descrita en el apartado 2. La identificación de los lugares en los que se precisa el refinamiento se realiza mediante el cálculo de los indicadores que se describen en los apartados siguientes (referencia 5).

5. INDICADORES Y ESTIMADORES

El proceso de refinamiento automático requiere la definición de algunos parámetros que gobiernen su evolución. Así los indicadores se definen para indicar en qué zonas del contorno (aristas/elementos) se debe refinar la solución. Los estimadores proporcionan una estimación del error global en la solución actual del problema.

Debido a limitaciones de espacio, sólo se presentan las fórmulas finales para los parámetros arriba citados. El lector interesado en la justificación y detalles adicionales puede consultar la referencia /4/.

Es conveniente destacar que las expresiones que se colocan a continuación son susceptibles de cambios, ya que están actualmente en investigación y experimentación.

Los indicadores propuestos toman las expresiones siguientes:

$$\|e\|_E^2 = \frac{\left[\int_{\partial\Omega_2} N_{n+1} r_2 \right]^2}{\int_{\partial\Omega_2} N_{n+1} L_2 N_{n+1}} \quad \text{se refina el potencial (2)}$$

$$\|e\|_E^2 = \frac{\left[\int_{\partial\Omega_1} N_{m+1} r_1 \right]^2}{\int_{\partial\Omega_1} N_{m+1} L_1 N_{m+1}} \quad \text{se refina el flujo (3)}$$

donde:

N_{n+1}, N_{m+1} = funciones añadidas para refinar

L_1 = operador integral de la forma:

$$L_1 f(P) = - \int_{\partial\Omega_1} f(Q) \phi^*(P,Q)$$

L_2 = operador integral de la forma:

$$L_2 f(P) = C f(P) + \int_{\partial\Omega_2} f(Q) q^*(P,Q)$$

r_2, r_1 = residuos de potencial

Los estimadores propuestos tienen el siguiente aspecto:

$$\text{Estimador (A)} : \|E\|^2 = \sum_{\partial\Omega_i}^{NE} r_i^2 d\Omega_i$$

$$\text{Estimador (B)} : \|E\|^2 = \sum_{\partial\Omega_i}^{NE} \frac{\left[\int_{\partial\Omega_i} r_i^2 d\Omega_i \right]^{1/2}}{\int_{\partial\Omega_i} |\hat{\phi}|_i d\Omega_i}$$

donde:

r_i = residuos de potencial sobre el elemento considerado.

$\hat{\phi}$ = valor de la función interpolada sobre el elemento.

NE = Número de elementos del contorno.

6. RESULTADOS NUMERICOS Y ESTUDIO DE LA CONVERGENCIA.

El primer caso analizado es un cubo de lado unidad sometido a un campo de temperaturas, cuya solución teórica es conocida. La figura 1 muestra las condiciones de contorno aplicadas al cubo, mientras que la figura 2 ilustra la solución teórica y dos etapas del proceso de refinamiento.

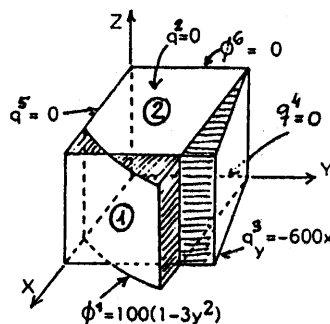


Fig. 1. Geometría y condiciones de contorno.

Las tablas 1 y 2 recogen la evolución de los estimadores **A** y **B**, pudiéndose observar su buen comportamiento.

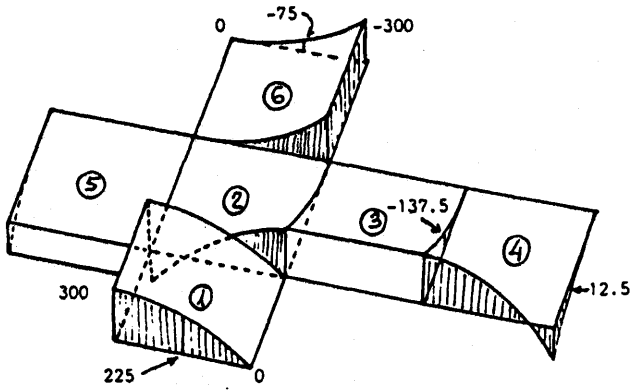


Fig. 2a. Solución teórica: $\phi=100(x^3-3xy^2)$

$$\|E\|^2 = \int_{\Omega} r^2 d\Omega$$

Elem.	Lineal	Parabólico
1	17.16	0.384
2	41.26	2.589
3	41.27	2.683
4	41.27	2.589
5	41.26	2.599
6	30.03	0.268
$\Sigma =$	211.49	11.11

Tabla 1. Evolución de los estimadores **A**.

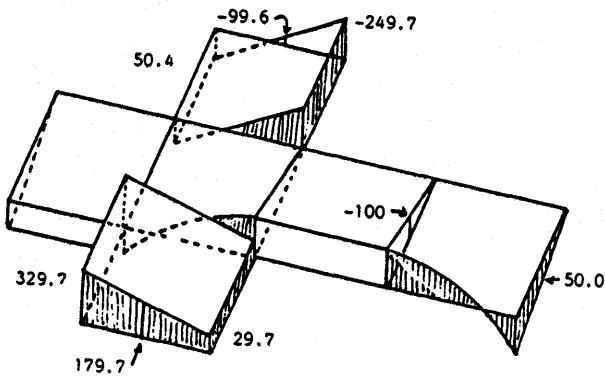


Fig. 2b. Solución lineal

$$\|E\|^2 = \sum_i^{NE} \frac{\left[\int_{\Omega_i} r^2 d\Omega_i \right]^{1/2}}{\int_{\Omega_i} |\phi| d\Omega_i}$$

Lineal	Parabólico
1.343	0.363

Tabla 2. Evolución del estimador **B**.

Las figuras 3 y 4, acompañadas de las tablas 3 y 4, muestran la evolución de los residuos en las caras del cubo para las etapas lineal y parabólica, respectivamente, observándose de nuevo la rápida convergencia del método propuesto.

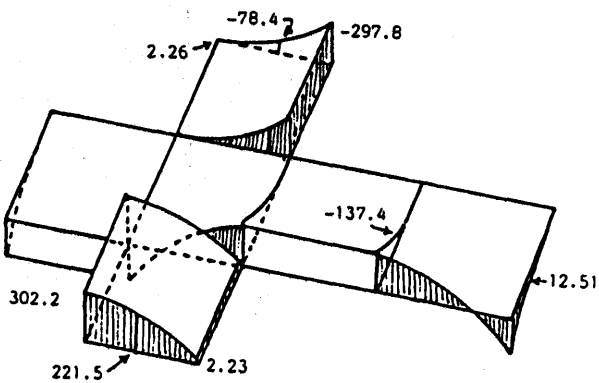


Fig. 2c. Refinamiento parabólico

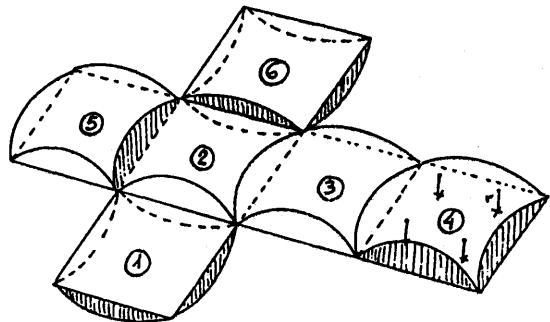


Fig. 3. Residuos en etapa lineal

Elem	1	2	3	4	5	6
r	-10.42	10.07	10.81	20.30	10.73	-13.65
	-10.42	20.30	20.04	10.07	10.73	-13.82
	-10.36	10.03	10.81	20.55	19.84	-13.65
	-10.36	20.55	20.04	10.37	19.84	-13.82

Tabla 3. Residuos en etapa lineal

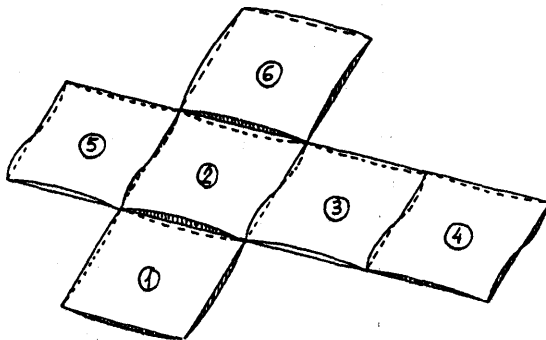


Fig. 4. Residuos en refinamiento parabólico

Elem	1	2	3	4	5	6
r	-1.57	-4.02	-3.92	3.89	-4.01	1.38
	-1.57	3.89	4.27	-4.02	-4.01	1.21
	-1.53	-4.06	-3.92	4.14	4.07	1.38
	-1.53	4.14	4.27	-4.06	4.07	1.21

Tabla 4. Residuos en refinamiento parabólico

El segundo caso analizado corresponde a la distribución de temperaturas en un cilindro hueco de radios interno/externo iguales a 4/10 y sometido a temperaturas interna/externa de 100/20. Las figuras 5 y 6 muestran, respectivamente, las condiciones de contorno y la solución teórica de la cuña cilíndrica utilizada para el análisis.

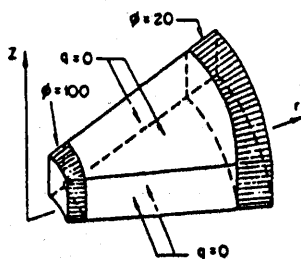


Fig. 5. Geometría de la cuña cilíndrica

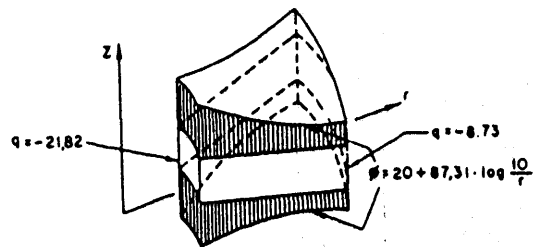


Fig. 6. Solución teórica del cilindro

Este ejemplo fue analizado utilizando la convergencia-p y convergencia-h del MEC.

La figura 7 ilustra la evolución logarítmica del estimador propuesto (caso A) versus al logaritmo de 1/NEI (NEI es el número total de ecuaciones integrales en cada etapa del refinamiento).

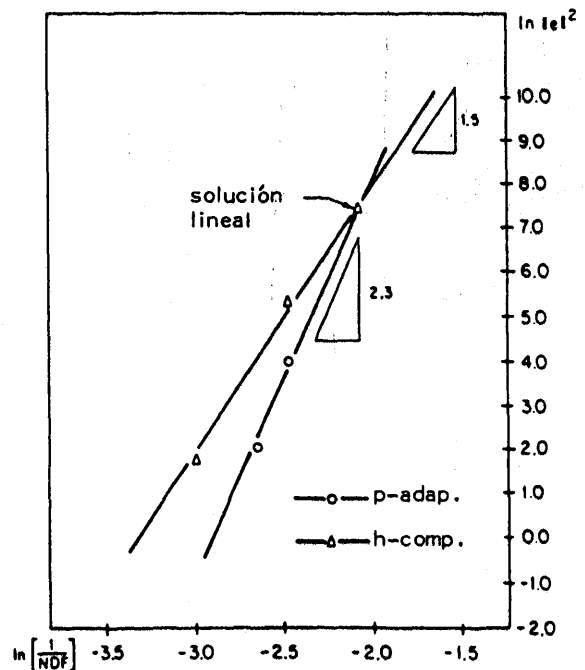


Fig. 7. Evolución del estimador \hat{A} en el cilindro.

Obsérvese que la convergencia p-adaptable es al menos 1,5 veces más rápida que la convergencia h-completa, lo cual constituye un hecho prometedor.

La figura 8 muestra la evolución de la suma de flujos en el contorno (en escala logarítmica y elevada al cuadrado para evitar el efecto del signo) versus el logaritmo de 1/NEI. Como era de esperarse, la convergencia p-adaptable es más rápida que la h-completa. Esta figura

pone de relieve la necesidad de utilizar un indicador local apropiado que seleccione adecuadamente las zonas del contorno que deben ser refinadas. En este caso, la convergencia p-completa es aproximadamente 1,25 veces más lenta que la h-completa y 1,92 veces más lenta que la p-adaptable.

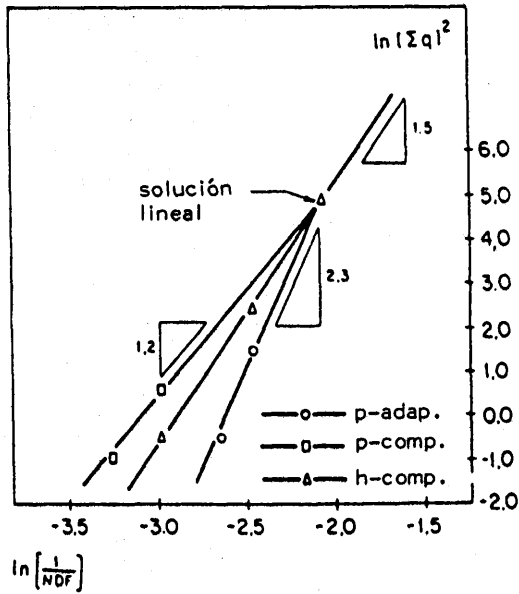
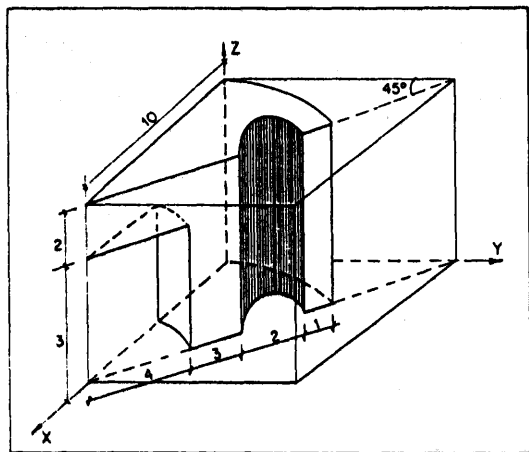


Fig. 8. Evolución de la sumatoria de flujos en el cilindro.

El tercer ejemplo presentado consiste en la determinación de la distribución de temperaturas y flujos en un recipiente a presión.

La geometría del sólido es "extraída" de un paralelepípedo en el cual se conocen los campos de temperaturas y flujo. La figura 9 ilustra la geometría y la solución teórica del sólido en estudio.



$$\phi = 3[x^2 - y^2]$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 6x$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -6y$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

Fig. 9. Geometría del recipiente a presión

El problema se analizó utilizando interpolación bi-lineal sobre los elementos de contorno mostrados en la figura 10.

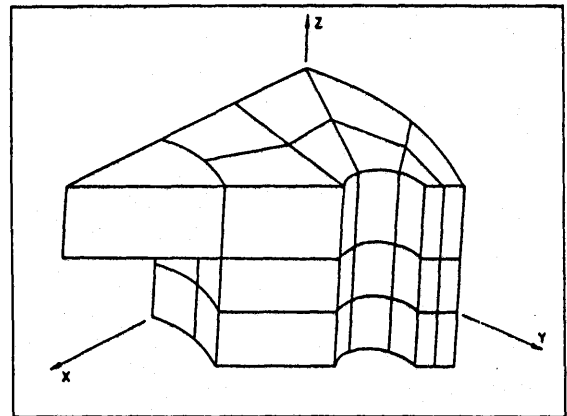


Fig. 10. Malla-h para recipiente a presión: 82 nodos y 56 elementos.

A continuación, se analizó el mismo sólido utilizando la malla simplificada (malla-p), que se muestra en la figura 11.

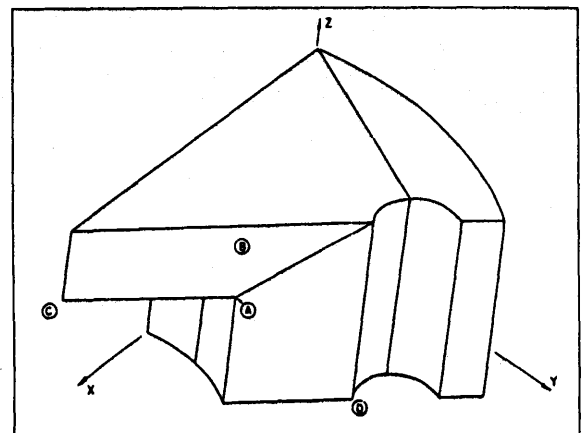


Fig. 11. Malla-p para vaso de presión: 28 nodos y 16 elementos.

La tabla 5 recoge los resultados de ambos análisis, contrastados con la solución teórica. Como puede verse, los sucesivos refinamientos sobre la malla-p (fig. 11) convergen rápidamente a la solución teórica en puntos críticos del sólido, siendo en algunos casos más precisos que los obtenidos con la malla-h (fig. 10).

NODO	Variable	refinamiento p-adaptable			Malla-h	Teoría
		Bilineal	Cúbico	Cuártico		
A	ϕ	139.72	125.61	130.81	132.14	130.32
B	ϕ	123.96	106.93	112.65	114.06	112.20
C	ϕ	297.62	297.92	299.54	300.38	300.00
D	$\partial\phi/\partial n$	-55.75	-40.10	-42.37	-45.32	-42.42
Nº de ecuaciones		18	41	52	56	-
Nº de elementos		16	16	16	56	-

Tabla 5. Comparación de resultados en vaso de presión con sucesivos refinamientos.

7. CONCLUSIONES

Se ha presentado la versión p-adaptable del MEC para el análisis de problemas de potencial 3-D. Los resultados numéricos demuestran la efectividad del método aquí propuesto, consiguiéndose velocidades de convergencia mayores que en la versión convencional del MEC.

Aún cuando los indicadores y estimadores propuestos han sido utilizados con éxito, resta todavía una gran cantidad de investigación a realizar para afianzar y consolidar los criterios de convergencia en esta versión del MEC.

8. AGRADECIMIENTOS

Deseamos agradecer a la Comisión Asesora de Investigación Científica y Técnica (CAICYT) y al Instituto de Cooperación Iberoamericana (ICI) por la colaboración prestada en el desarrollo de este trabajo.

9. REFERENCIAS

1. Alarcón, E., Abia, L. y Reverter, A.: "On the possibility of adaptive boundary elements", in Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in F.E. Comp. (ARFEC), Lisboa, 1984.
2. Alarcón, E., Reverter, A. y Molina, J.: "Hierarchical Boundary Elements". Comp. Struct. 20(1-3) 151-156.
3. Alarcón, E. y Reverter, A.: "p-Adaptive Boundary Elements". Int. Journ. Num. Meth. Eng. (1986).

4. Alarcón, E.: "Sobre el establecimiento de estimadores e indicadores para los métodos de contorno p-adaptables en problemas de potencial", en "Seminario de Análisis Numérico". Ed. F. Michavila. Servicio Publicaciones E.T.S.I. Minas. U.P.M. (1986).
5. Cerrolaza, M. y Alarcón, E.: "P-adaptive Boundary Elements in 3-D potential problems", a ser publicado en: Communications in Applied Numerical Methods.
6. Babuska, I: The selfadaptive approach in FEM. En "Mathematics of F.E. and Appl.". Ed. J. Whiteman. (1975).
7. Friberg, P.O: "An error indicator for the generalized eigenvalue problem using the hierarchical finite element method". Int. Journ. Num. Meth. Eng. 23, 91-98 (1986).
8. Peano, A., Riccioni, A., Pasini, A. y Sardella, L.: "Adaptive F.E.M." en Applied Numerical Modelling. Ed. E. Alarcón. 1979.