

INFLUENCIA DE LOS EFECTOS DE SEGUNDO ORDEN EN PIEZAS ESBELTAS SOMETIDAS A FLEXION

A. Bautista; M.S. Gómez Lera; E. Alarcón

E.T.S.I. Industriales. Universidad Politécnica de Madrid

Resumen.- En este trabajo se presenta un cálculo analítico no lineal de las deformaciones y tensiones en piezas esbeltas sometidas a flexión. Los resultados se comparan con los obtenidos por un método matricial "paso a paso", en el que los efectos de segundo orden se tienen en cuenta aplicando las cargas por etapas, y actualizando la geometría en cada etapa. Por último, se comparan los resultados de ambos métodos con los de un método matricial habitual, en una sola etapa.

Abstract.- This paper presents an analytical non-linear method for the calculation of deformations and stresses in warped beams under flexion. Results are compared with those obtained through a matrix method where the second order effects are considered applying the loads step-by-step and updating the geometry in every step. In addition to that the results obtained through both methods are compared with those got by usual matrix one-step methods.

1. INTRODUCCION

El cálculo de estructuras por el método habitual de la matriz de rigidez requiere que se cumplan hipótesis geométricas que aseguren el desacoplamiento de los esfuerzos e hipótesis de linealidad en el comportamiento del material. En piezas esbeltas sometidas a flexión y compresión combinadas, los esfuerzos axiales y los de flexión están acoplados, y se produce el fenómeno de pandeo. La inestabilización que sufre la estructura por el efecto de los esfuerzos de compresión puede tenerse en cuenta empleando una matriz de rigidez modificada. La no linealidad debida a las grandes deformaciones se modeliza cargando la estructura por etapas.

2. CALCULO ANALITICO

Método de cálculo

La figura 2.1 muestra una pieza esbelta, de forma troncocónica y perfectamente empotrada, sometida a flexión y compresión, que modeliza un poste macizo para transmisión de electricidad con los efectos de viento y hielo acumulado en los conductores [Peyrot, 1982].

La ecuación de campo (Ec. 2.1) se deduce en el Apéndice (A1).

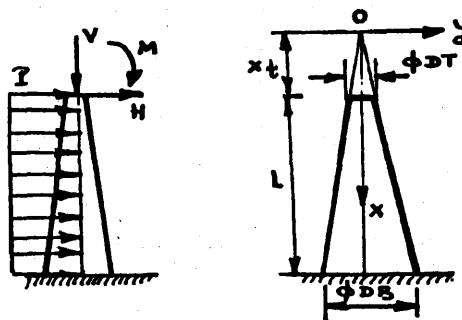


Fig. 2.1. Dimensiones geométricas, cargas aplicadas y sistema de referencia adoptado para el cálculo analítico de la deformada y los momentos flectores.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right] + V \frac{d^2 y}{dx^2} = p \quad (2.1)$$

La ecuación 2.1 se puede reducir a la ecuación 2.4 teniendo en cuenta la simbología empleada (Ec. 2.2 y 2.3).

$$EI(x) = \frac{E}{64} \left(\frac{DB-DT}{L} x \right)^4 = C x^4 \quad (2.2)$$

$$k^2 = \frac{V}{C} \quad (2.3)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} (x^4 \frac{d^2 y}{dx^2}) + k^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{p}{C} \quad (2.4)$$

Una primera integración de la ecuación 2.2 da la ecuación 2.5, en la que la constante de integración A puede expresarse en función de las cargas y las características geométricas (Ec. 2.6 y 2.7).

$$\frac{d}{dx} (x^4 \frac{d^2 y}{dx^2}) + k^2 \frac{dy}{dx} = \frac{p}{C} x + A \quad (2.5)$$

$$\left[-Q(x) + V \frac{dy}{dx} \right] (xt + L) = p(xt + L) + AC \quad (2.6)$$

$$\frac{A}{k^2} = \frac{H}{V} - \frac{p}{V} xt \quad (2.7)$$

Análogamente, integrando la ecuación 2.5 se obtiene la ecuación 2.8, pudiendo expresarse la constante de integración B en función de los parámetros del problema (Ec. 2.9 y 2.10).

$$x^4 \frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = \frac{p}{2C} x^2 + \left(\frac{H}{C} - \frac{p}{C} xt \right) x + B \quad (2.8)$$

$$\left[M(x) + Vy(x) \right] (xt) = \left(\frac{H}{C} - \frac{p}{2C} xt \right) xt + B \quad (2.9)$$

$$\frac{B}{k^2} = \frac{M}{V} + \Delta + \frac{p}{V} \frac{xt^2}{2} - \frac{H}{V} xt \quad (2.10)$$

La ecuación 2.11 es una ecuación diferencial de segundo orden, completa y con coeficientes variables.

$$x^4 \frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = \frac{p}{2C} x^2 + Ax + B \quad (2.11)$$

La solución general de la ecuación homogénea (Ec. 2.12) se obtiene mediante el cambio de variable dado en la ecuación 2.13 (Ec. 2.14).

$$x^4 \frac{d^2 y_h}{dx^2} + k^2 y_h = 0 \quad (2.12)$$

$$x = \frac{k}{t} \quad (2.13)$$

$$y_h(x) = C_1 x \operatorname{sen} \frac{k}{x} + C_2 x \cos \frac{k}{x} \quad (2.14)$$

Una solución particular de la ecuación completa se obtiene como suma de dos soluciones particulares, una correspondiente a la ecuación 2.15 y otra a la

ecuación 2.17, por variación de constantes a partir de la solución general (Ec. 2.14) de la ecuación homogénea (Ec. 2.16, 2.18, 2.19 y 2.20).

$$x^4 \frac{d^2 y_{p1}}{dx^2} + k^2 y_{p1} = Ax + B \quad (2.15)$$

$$y_{p1}(x) = \frac{A}{k^2} x + \frac{B}{k^2} \quad (2.16)$$

$$x^4 \frac{d^2 y_{p2}}{dx^2} + k^2 y_{p2} = \frac{p}{2C} x^2 \quad (2.17)$$

$$y_{p2}(x) = \frac{1}{k} \frac{p}{2C} \left[\operatorname{CI}(-) x \operatorname{sen} \frac{k}{x} - \operatorname{SI}(-) x \cos \frac{k}{x} \right] \quad (2.18)$$

$$\operatorname{CI}(x) = \int_a^x \frac{\cos u}{u} du \quad (2.19)$$

$$\operatorname{SI}(x) = \int_a^x \frac{\operatorname{sen} u}{u} du \quad (2.20)$$

La solución general de la ecuación completa (Ec. 2.4), por tanto es la siguiente (Ec. 2.21):

$$y(x) = \left[C_1 + \frac{1}{k} \frac{p}{2C} \operatorname{CI}(-) \frac{k}{x} \right] x \operatorname{sen} \frac{k}{x} + \left[C_2 - \frac{1}{k} \frac{p}{2C} \operatorname{SI}(-) \frac{k}{x} \right] x \cos \frac{k}{x} + \frac{M}{V} + \Delta + \frac{H}{V} (x - xt) + \frac{p}{V} xt \left(\frac{xt}{2} - x \right) \quad (2.21)$$

Las constantes de integración C_1 y C_2 y el valor de la flecha, Δ , se eliminan imponiendo las condiciones de contorno (Ec. 2.22, 2.23 y 2.24).

$$y(xt) = \Delta \quad (2.22)$$

$$y(xt + L) = 0 \quad (2.23)$$

$$\frac{dy}{dx} (xt + L) = 0 \quad (2.24)$$

Conocida la ecuación de la deformada puede calcularse la ley de momentos flectores (Ec. 2.25).

$$M(x) = EI(x) \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{p}{2} x^2 + H(x - xt) + pxt \left(\frac{xt}{2} - x \right) + M + V \left[\Delta - y(x) \right] \quad (2.25)$$

Asímismo puede obtenerse la ley de tensiones máximas de compresión en la superficie del poste (Ec. 2.26), y la coordenada del punto con tensión de compresión máxima a lo largo del poste, x_m (Ec. 2.27).

$$\sigma(x) = \frac{V}{A(x)} + \frac{M(x) \cdot d(x)/2}{I(x)} = \frac{4VL^2}{\pi(DB-DT)^2 x^2} + \frac{32L^3 M(x)}{\pi(DB-DT)^3 x^3} \quad (2.26)$$

$$\frac{d\sigma}{dx}(x_m) = 0 \quad (2.27)$$

Programa de ordenador

Para concretar en la práctica los resultados teóricos anteriores, se ha preparado el programa de ordenador "ANA POSTE", en el que son entradas los datos geométricos del poste modelizado (DB,DT, L), el módulo de elasticidad (E) y las cargas (M,V,H,p), y salidas los desplazamientos horizontales y las leyes de momentos flectores y de tensiones máximas de compresión a lo largo del poste, y la máxima tensión de compresión, así como la coordenada x_m del punto donde se produce. Para el cálculo el poste se ha dividido en diez tramos.

Las integrales indefinidas de la ley de desplazamientos horizontales (Ec. 2.19 y 2.20) no pueden calcularse de forma cerrada. Sus límites inferiores de integración pueden elegirse, ya que generaran términos de la misma forma que la solución de la ecuación homogénea (Ec. 2.14). Sustituyendo las funciones trigonométricas por sus desarrollos en serie de Taylor, se obtienen al integrar series alternantes convergentes, lo que permite acotar el error.

Para calcular la tensión normal máxima hay que tener en cuenta que puede producirse en alguno de los extremos del poste, o a lo largo de él, lo que se determina comparando los signos de la derivada de la tensión máxima de compresión respecto a x en ambos extremos. Si el punto con la máxima tensión de compresión se encuentra entre el extremo empotrado y el extremo libre del poste, su abscisa puede determinarse por el procedimiento de iteración de Newton.

A continuación se muestra el diagrama N-S del programa "ANAPOSTE". El poste se ha dividido en 10 elementos, por lo que los cálculos se realizan en 11 secciones.

Dimensionamiento de matrices	
Diccionario	
Introducción de datos: DT, DB, L, E, M, V, H, p.	
Cálculo de $x_d, C, k.$	
Para J=1	
hasta	Cálculo de X(J) (coordenada x de la sección J) D(J) (diámetro de la sección J) CI(J) (integral $CI(\frac{k}{x})$ en la sección J) SI(J) (integral $SI(\frac{k}{x})$ en la sección J)
J=11	
Cálculo de las constantes C_1, C_2 y Δ imponiendo las condiciones de contorno.	
Para J=1	
hasta	Cálculo de Y(J) (desplazamiento horizontal de la sección J) M(J) (momento flector en la sección J) $\sigma(J)$ (tensión normal máxima en la sección J)
J= 11	
Cálculo de x_{max} y σ_{max} (coordenada x de la sección con la máxima tensión normal de compresión máxima y valor de ésta).	
Impresión de resultados	

3. CALCULO MATRICIAL "PASO A PASO"

Método de la matriz de rigidez modificada

La aplicación del método de elementos finitos al cálculo de deformaciones y esfuerzos en piezas esbeltas sometidas a flexión combinada con compresión, permite tener en cuenta la disminución de rigidez que sufre la estructura mediante el empleo de matrices de rigidez modificadas.

Consideremos la ecuación de campo correspondiente a la flexión en el plano xy de un elemento del poste considerado en el apartado 2., cuyo módulo de elasticidad es E, sometido a una carga de compresión N (que define la dirección del eje local x) y a una carga repartida horizontal p_y en la dirección del eje local y (Ec. 3.1). El momento de inercia del elemento respecto al eje local z es I_z .

$$\frac{d^2}{dx^2} (EI_z \frac{d^2 y}{dx^2}) - N \frac{d^2 y}{dx^2} = p_y \quad (3.1)$$

Si se admite comportamiento lineal del material, entonces si las funciones

$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ son solución de la ecuación 3.1 también lo es una combinación lineal de ellas (Ec. 3.2).

$$y = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i \quad (3.2)$$

Sustituyendo la ecuación 3.2 en la 3.1 y ponderándola a lo largo del elemento con cada una de las funciones ψ_i se obtiene la ecuación 3.3.

$$\sum_{i=1}^n a_j \left[\begin{matrix} 1 & 1 \\ \psi_i & \frac{d^2}{dx^2} (EI_z \psi_j) - N \psi_i \psi_j'' \\ 0 & 0 \end{matrix} \right] = \int_0^1 \psi_i p_y \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.3)$$

Integrando por partes dos veces la primera integral y una vez la segunda, y definiendo k_{ij}^n, k_{ij}^g y f_i como indican las ecuaciones 3.4, 3.5 y 3.6, se obtiene la ecuación 3.7, que en notación matricial es la 3.8.

$$k_{ij}^n = \int_0^1 \psi_i'' EI_z \psi_j'' \quad (3.4)$$

$$k_{ij}^g = \int_0^1 \psi_i' \psi_j' \quad (3.5)$$

$$f_i = \int_0^1 \psi_i p_y \quad (3.6)$$

$$\sum_{j=1}^n a_j (k_{ij}^n - N k_{ij}^g) = f_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3.7)$$

$$(k_{ij}^n - N k_{ij}^g) a = f \quad (3.8)$$

Si las funciones $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ se definen dando un desplazamiento unitario al elemento en la dirección positiva de uno de sus grados de libertad correspondientes a la ecuación de campo que estamos considerando, y manteniendo nulos los demás, entonces las matrices y vectores de la ecuación 3.8 tienen los siguientes significados:

- k_{ij}^n es la matriz de rigidez "normal" del elemento, que relaciona los desplazamientos con las cargas cuando no se produce inestabilización de la estructura por esfuerzos acoplados.

- k_{ij}^g es la matriz de rigidez "geométrica" del elemento, que representa una disminución de la rigidez de la estructura a causa de una geometría y una disposición de las cargas especiales. La matriz de rigidez "efectiva" es la dada por la ecuación 3.9.

$$k_{ij}^e = k_{ij}^n - N k_{ij}^g \quad (3.9)$$

- \hat{a} es el vector de desplazamientos de los extremos del elemento en las direcciones de sus grados de libertad.

- \hat{f} es el vector de cargas del elemento.

Para calcular los desplazamientos y los esfuerzos en piezas esbeltas sometidas a flexión, considerando cargas aplicadas en tres dimensiones, por el método de los elementos finitos, hay que utilizar, además de la ecuación de campo 3.1, correspondiente a la flexión en el plano xy, la ecuación de campo de la flexión en el plano xz (Ec. 3.10), que es análoga a la anterior, la ecuación de campo de la compresión en la dirección del eje x (Ec. 3.11) y la ecuación de la torsión alrededor del eje x (Ec. 3.12).

$$\frac{d^2}{dx^2} (EI_y \frac{d^2 z}{dx^2}) - N \frac{d^2 z}{dx^2} = p_z \quad (3.10)$$

$$\frac{d}{dx} (EA \frac{du}{dx}) = p_x \quad (3.11)$$

$$\frac{d}{dx} (G I_x \frac{d\theta_x}{dx}) = 0 \quad (3.12)$$

En las secciones 3.10, 3.11 y 3.12 I_y es el momento de inercia del elemento respecto al eje y local, p_z la carga repartida en la dirección del eje z, A el área de la sección del elemento, G el módulo de elasticidad transversal, I_x el momento de inercia polar, y θ_x el giro alrededor del eje x.

En total hay 6 grados de libertad por nudo, 3 desplazamientos y 3 giros, lo que supone 12 grados de libertad por elemento. En la figura 3.1 están representados los grados de libertad.

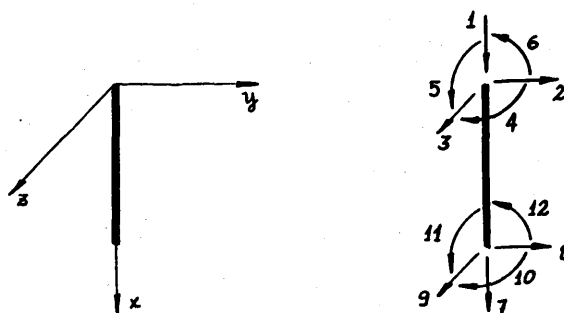


Fig. 3.1. Sistema de referencia del elemento y grados de libertad.

Razonando con la ecuación 3.10 de forma análoga que con la ecuación 3.1, se obtiene una expresión matricial similar a la 3.8, correspondiente a la flexión en el plano xz. Las ecuaciones

3.11 y 3.12 dan lugar a matrices de rigidez no modificadas. La superposición de los elementos de las distintas matrices de rigidez obtenidas genera una matriz de rigidez elemental de 12x12 términos, modificada por el efecto de acoplamiento del esfuerzo de compresión con las flexiones en los planos xy y xz.

El procedimiento de cálculo una vez obtenida la matriz de rigidez modificada es el habitual. De la relación matricial elemental 3.8, en coordenadas locales, hay que obtener una relación matricial global, en coordenadas globales (Ec. 3.13).

$$K^e A = F \tag{3.13}$$

En la ecuación 3.13 K^e es la matriz de rigidez global efectiva, A el vector de desplazamientos de la estructura y F el vector de cargas.

Para obtener los vectores A y F se van multiplicando los vectores elementales a y f por las matrices de cambio de ejes locales a globales correspondientes a cada elemento Ec. 3.14 y 3.15, y se montan en los vectores globales. La matriz K^e se obtiene montando las matrices de rigidez elementales en globales, k^e_g , calculadas utilizando la relación de contragradencia dada en la ecuación 3.16. La matriz T se obtiene como indica la ecuación 3.17, en la que R es la matriz de cambio de ejes globales a locales. Esta matriz equivale a dos giros, uno alrededor del eje y otro alrededor del eje z, ya que, al tener los elementos simetría axial respecto al eje x, no es necesario un tercer giro.

$$a_g = T^T a \tag{3.14}$$

$$f_g = T^T f \tag{3.15}$$

$$k^e_g = T^T k^e T \tag{3.16}$$

$$T = \begin{bmatrix} R & 0 & & \\ \sim & \sim & & \\ 0 & R & & \\ \sim & \sim & & \\ & & R & 0 \\ & & \sim & \sim \\ 0 & & & \\ \sim & & 0 & R \\ & & \sim & \sim \end{bmatrix}$$

El montaje de los vectores y matrices elementales para dar los globales es muy simple, ya que se trata de una estructura lineal. Por el mismo motivo el ancho de banda es 12 y no mayor, lo que facilita la resolución del sistema de ecuaciones.

La condensación de los grados de libertad correspondientes al extremo empotrado da lugar a un sistema de 6N ecuaciones lineales con 6N incógnitas, si N es el número de elementos, que son los 6 desplazamientos por nudo.

Una vez obtenidos los desplazamientos, los esfuerzos se calculan como habitualmente, multiplicando el vector de desplazamientos del elemento en locales por la matriz de rigidez elemental, también en locales.

El conocimiento de los esfuerzos en locales permite hacer, en el sistema global, un equilibrio de fuerzas nudo a nudo. En los nudos no coaccionados este equilibrio indica la calidad de la resolución. En los coaccionados, permite obtener las reacciones.

Método "paso a paso"

El método de la matriz de rigidez modificada no es aplicable cuando se producen grandes deformaciones, pues entonces el efecto de la no linealidad deja de ser despreciable. El método de cálculo "paso a paso", en el cual la carga se aplica por etapas, intenta resolver los problemas derivados de las grandes deformaciones. Este método requiere actualizar la geometría de la estructura y de las cargas en cada etapa.

En el primer paso se parte de la estructura sin deformar, a la que se aplica un incremento de la carga total. La matriz de rigidez de cada elemento en esta etapa es la "normal", es decir, no se considera que en este paso inicial la estructura haya perdido rigidez por el esfuerzo axial de compresión. Se calculan de esta manera los desplazamientos y los esfuerzos.

Con los desplazamientos se actualiza la geometría de la estructura y de las cargas, y a partir de los esfuerzos axiales de compresión de cada elemento se calculan sus matrices de rigidez modificadas, teniendo en cuenta la disminución de la rigidez.

Los pasos se van sucediendo hasta que la suma de los incrementos de carga aplicados sea igual a la carga real. Los desplazamientos reales y las reacciones, así como los esfuerzos en los elementos, se calculan sumando los de todas las etapas. La figura 3.2 representa la secuencia de etapas de este método.

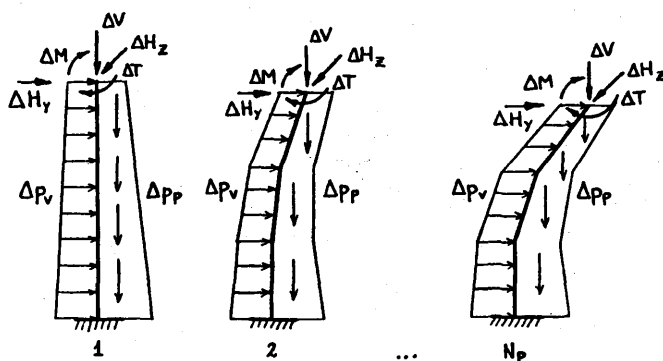


Fig. 3.2. El método de cálculo matricial "paso a paso".

Programa de ordenador

Para aplicar el método de cálculo matricial "paso a paso" a postes macizos para líneas eléctricas, se preparó el programa "MATPOSTE" en el cual se admiten cargas repartidas debidas al viento y al peso propio, y cargas concentradas en el extremo libre del poste causadas por el efecto del viento y de la acumulación del hielo sobre los conductores. La figura 3.3 muestra la modelización del poste, con cargas en tres dimensiones. El programa admite también secciones del poste huecas, de espesor constante.

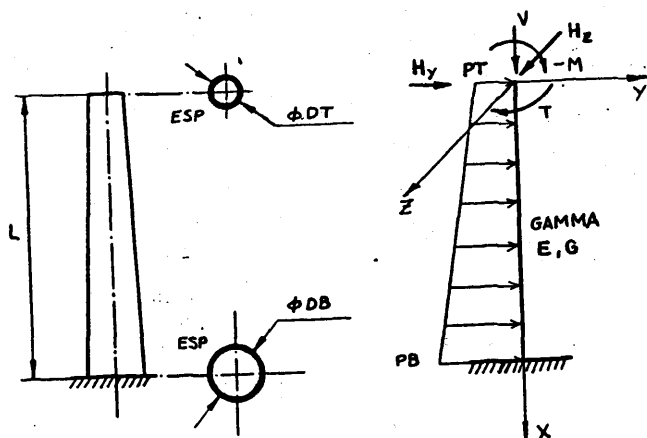


Fig. 3.3. Modelización del poste para el programa "MATPOSTE".

Como entradas al programa están los datos geométricos (longitud del poste - modelizado, L; diámetros exteriores, DB y DT; espesor, ESP), las características del material (módulo de elasticidad, E; módulo de rigidez, G; densidad, GAMMA), las cargas aplicadas (vertical concentrada en el extremo libre, V; horizontal - concentrada en el extremo libre en la dirección del eje Y, H_y ; horizontal concentrada en el extremo libre en la dirección del eje Z, H_z ; momento flector concentrado en el extremo libre, M; momento torsor concentrado en el extremo libre;

carga repartida horizontal en la dirección del eje Y debida al viento, dada - por sus valores en los extremos del poste, PT y PB), y otros datos para el cálculo (número de elementos, N; número de etapas, NP).

Como resultados se obtienen, en cada paso y globalmente, los desplazamientos de los nodos, los esfuerzos en los elementos y las reacciones en el extremo empotrado.

En la actualización de las cargas en cada etapa se tiene en cuenta que la carga repartida debida al viento se debe a su presión sobre la superficie proyectada del poste en el plano perpendicular a él, por lo que la proyección longitudinal al elemento no se considera.

Diccionario.
Introducción de datos. Impresión.
Dimensionamiento de matrices.
Cálculo de coordenadas y giros iniciales de los nodos, diámetros medios, áreas y momentos de inercia en las secciones medias de los elementos e incrementos de cargas. Impresión.
Desde 1
Desde 1
Cálculo de la longitud del elemento.
Cálculo de la matriz de cambio de globales a locales y su traspuesta para el elemento.
Cálculo de la matriz de rigidez elemental en locales.
hasta Cálculo de la matriz de rigidez elemental en globales
Montaje en la matriz de rigidez total.
Cálculo del vector de cargas elemental en locales.
Cálculo del vector de cargas elemental en globales.
Montaje en el vector de cargas total.
número de elementos.
Resolución del sistema de ecuaciones.
Cálculo de las coordenadas y giros en los nodos.
Impresión de los desplazamientos.
Desde 1
hasta Cálculo del vector de desplazamientos elemental en globales.
Cálculo de la longitud del elemento.
hasta Cálculo de la matriz de cambio de globales a locales y su traspuesta para el elemento.
hasta Cálculo de la matriz de rigidez elemental en globales.
Cálculo del vector de desplazamientos elemental en locales.
Cálculo del vector de esfuerzos elemental en locales.
Impresión de los esfuerzos.
Cálculo del vector de esfuerzos elemental en globales.
Montaje en el vector de esfuerzos total.
número de elementos.
Almacenamiento de las reacciones.
Impresión de la comprobación del equilibrio en los nodos.
Impresión de las reacciones.
Puesta a cero de matrices y vectores.
número de pasos.
Cálculo de las reacciones totales.
Impresión de las reacciones totales.
Impresión de los desplazamientos totales.

4. COMPARACION DE RESULTADOS

Para comparar los métodos de cálculo aplicados a evaluar la influencia de los efectos de segundo orden en piezas esbeltas sometidas a flexión descritos en los apartados anteriores, se ha procesado un ejemplo con el programa "ANAPOSTE", que emplea el método analítico, y con el programa "MATPOSTE", que utiliza el método de la matriz de rigidez modificada con cálculo por etapas. Las deformaciones del poste y las leyes de momentos flectores obtenidos por estos procedimientos se van a comparar también con los obtenidos por el método matricial habitual, realizado en una sola etapa.

El ejemplo procesado se trata de un poste macizo con las dimensiones geométricas, características del material y cargas aplicadas dadas en las ecuaciones 4.1 a 4.8 (ver figura 2.1).

$$DT = 0'2 \text{ m} \quad (4.1)$$

$$DB = 0'4 \text{ m} \quad (4.2)$$

$$L = 10 \text{ m} \quad (4.3)$$

$$E = 120.000 \text{ kg/cm}^2 \quad (4.4)$$

$$M = 2000 \text{ mkg} \quad (4.5)$$

$$V = 1500 \text{ kg} \quad (4.6)$$

$$H = 1000 \text{ kg} \quad (4.7)$$

$$p = 10 \text{ kg/m} \quad (4.8)$$

El desplazamiento horizontal máximo y el máximo momento flector (producido en el extremo empotrado del poste) obtenidos por el cálculo analítico son los dados en las ecuaciones 4.9 y 4.10.

$$Y_{\max} = 70'1 \text{ cm} \quad (4.9)$$

$$M_{\max} = 13550 \text{ mkg} \quad (4.10)$$

Las ecuaciones 4.11 y 4.12 dan la flecha y el momento flector máximo obtenidos por el método matricial "paso a paso", en un cálculo en 10 etapas.

$$Y_{\max} = 61'7 \text{ cm} \quad (4.11)$$

$$M_{\max} = 12170 \text{ mkg} \quad (4.12)$$

Por el método matricial habitual, en una etapa, se han obtenido los siguientes valores del desplazamiento horizontal máximo y máximo momento flector (Ec. 4.13 y 4.14):

$$Y_{\max} = 63'7 \text{ cm} \quad (4.13)$$

$$M_{\max} = 12500 \text{ mkg} \quad (4.14)$$

Los resultados anteriores se representan en la figura 4.1.

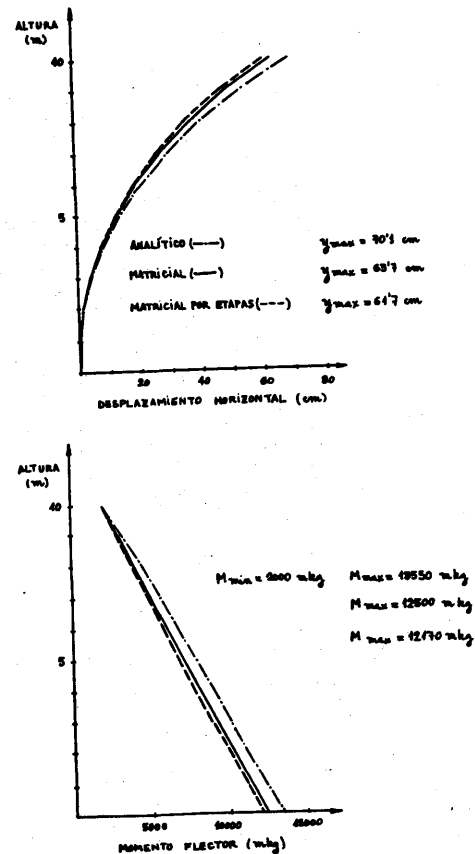


Fig. 4.1. Desplazamientos horizontales y leyes de momentos flectores - calculados por el método analítico, el método matricial "paso a paso" y el método matricial en una etapa.

Con el procedimiento matricial en varias etapas se obtienen valores inferiores de la flecha y el momento flector máximo que con el método matricial habitual, debido a que en el primer caso se va actualizando etapa por etapa la geometría de la estructura, y se considera que las cargas van siguiendo a la estructura deformada. Como el viento sólo ejerce presión en la dirección normal del poste, al ir deformándose éste, su efecto va disminuyendo, lo que no se tiene en cuenta en el cálculo en una etapa. Por este motivo se observa que las deformaciones y los momentos flectores van disminuyendo etapa por etapa, por lo cual los valores totales son inferiores que los correspondientes al cálculo matricial en una etapa. Las diferencias son del 3'1 % para la flecha y del 2'6 % para el momento flector máximo, referidas a los valores obtenidos en varias etapas.

La diferencia en las flechas entre el método analítico y el matricial en una etapa se debe a que este último no tiene en cuenta el acoplamiento de esfuerzos flectores y de compresión que se produce si hay grandes deformaciones. Referida al resultado analítico, esta diferencia es del 9'1%.

El momento flector en la base del poste se calcula en el método matricial imponiendo la condición de equilibrio de fuerzas en la posición indeformada de la estructura. En el método analítico, por el contrario, se impone la condición de equilibrio en la posición deformada, de forma que el momento flector en la base del poste incluye el producido por la carga vertical de compresión. Esto supone una diferencia del 7'7%, referida al resultado del cálculo analítico.

La diferencia entre la flecha calculada analíticamente y la obtenida por el método matricial "paso a paso" puede explicarse teniendo en cuenta que el primer método considera que la disminución de rigidez de la estructura debida al efecto de la carga vertical se produce en la posición indeformada del poste, en tanto que en el método matricial por etapas la inestabilización va incrementándose a medida que el poste se va deformando. Por este motivo son mayores los desplazamientos horizontales en el primer caso que en el segundo. La diferencia, referida al valor calculado analíticamente, es del 12%.

La diferencia en los momentos flectores máximos se explica de manera similar que la observada entre los obtenidos por el método analítico y el matricial en una etapa, pero teniendo en cuenta que en este caso el cálculo matricial se realiza en varias etapas. El método analítico de la ley de momentos flectores en la estructura deformada, teniendo en cuenta, por tanto, el momento producido por la carga vertical. En el método matricial por etapas se obtienen en cada paso los momentos flectores imponiendo las condiciones de equilibrio de fuerzas en la situación indeformada de ese paso, y luego se suman para obtener los momentos flectores totales. Referida al valor analítico la diferencia es del 10%.

Hay que tener en cuenta que en el ejemplo procesado la flecha es superior al 4% de la altura, por lo que los efectos no lineales son importantes.

5. REFERENCIAS

1. ALARCON, E.; ALVAREZ, R. Y GOMEZ-LERA, S.
"Cálculo matricial de estructuras". Ed. Reverté.
2. BAUTISTA, A. (1989).
"Fiabilidad estructural de elementos soporte esbeltos en voladizo". Proyecto fin de carrera. E.T.S.I.I. Madrid.
3. CHAJES, A. (1974).
"Principles of structural stability theory". Ed. Prentice-Hall.
4. HORNE, M.R. AND MERCHANT, W. (1965).
"The stability of frames". Ed. Pergamon Press.
5. PEYROT, A.H.; CRISWELL, M.E.; FOLSE, M.D. AND AZNAVOUR, J.P. (1982).
"Reliability analysis of wood transmission poles". ASCE. Vol. 108, No. ST9.

A1. APENDICE

La ecuación de campo y las condiciones de contorno de la estructura representada en la figura 2.1 pueden deducirse aplicando el principio de los desplazamientos virtuales (Ec. A1.1), donde (σ^*, p^*) es el sistema real de tensiones y cargas y $(\delta \varepsilon^{**}, \delta u^{**})$ una variación del sistema de alargamientos y desplazamientos reales.

$$\int_{\Omega} \sigma^* : \delta \varepsilon^{**} = \int_{\Omega} p^* \cdot \delta u^{**} \quad (A1.1)$$

En nuestro caso, los valores de δu y $\delta \varepsilon$ son los dados por las ecuaciones A1.3 y A1.5, obtenidos, respectivamente, de las A1.2 y A1.4 (ver figura A1.1).

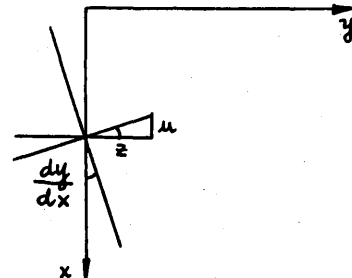


Fig. A1.1. Determinación del desplazamiento u producido por el giro de una sección del poste a una distancia z del eje neutro.

$$u = -z \frac{dy}{dx} \quad (A1.2)$$

$$\delta u = -z \frac{d}{dx} (\delta y) \quad (A1.3)$$

$$\epsilon = \frac{du}{dx} = -z \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (A1.4)$$

$$\delta \epsilon = -z \frac{d^2}{dx^2} (\delta y) \quad (A1.5)$$

Si además se tiene en cuenta la posibilidad de pandeo (Fig. Al.2), aparece un nuevo término a incluir en la ecuación Al.2 (Ec. Al.6, Al.7 y Al.8).

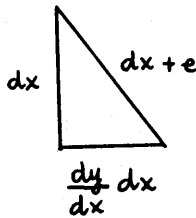


Fig. Al.2. Determinación del término de alargamiento (ϵ) producido por el pandeo.

$$(dx)^2 + 2edx + e^2 = (dx)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx^2 \quad (A1.6)$$

$$\epsilon = \frac{e}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad (A1.7)$$

$$\delta \epsilon = \frac{dy}{dx} \frac{d}{dx} (\delta y) \quad (A1.8)$$

Sustituyendo las expresiones Al.3, Al.5 y Al.8 en la ecuación Al.1 (Ec. Al.9 y Al.10) se obtiene la ecuación Al.11, siendo p'_x y p'_y son las cargas volumétricas en las direcciones x e y , y p es la carga por unidad de longitud en la dirección y .

$$\int_{\Omega} \sigma^* : \delta \epsilon^{**} = \int_{\Omega} \sigma \left[-z \frac{d^2}{dx^2} (\delta y) \right] + \int_{\Omega} \sigma \frac{dy}{dx} \frac{d}{dx} (\delta y) = \int_0^L M \frac{d^2}{dx^2} (\delta y) + \int_0^L N \frac{dy}{dx} \frac{d}{dx} (\delta y) \quad (A1.9)$$

$$\int_{\Omega} p^* \cdot \delta u^{**} = p'_x \left[-z \frac{d}{dx} (\delta y) \right] + \int_{\Omega} p'_y \delta y = \int_0^L p \delta y \quad (A1.10)$$

$$\int_0^L M \frac{d^2}{dx^2} (\delta y) + \int_0^L N \frac{dy}{dx} \frac{d}{dx} (\delta y) = \int_0^L p \delta y \quad (A1.11)$$

Integrando por partes dos veces la primera integral de la ecuación Al.11 y una vez la segunda se llega a la ecuación Al.12.

$$\int_0^L \left[\frac{d^2 M}{dx^2} - \frac{d}{dx} \left(N \frac{dy}{dx} \right) - p \right] \delta y + \left[M \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) - \frac{dM}{dx} \delta y + N \frac{dy}{dx} \delta y \right]_0^L = 0 \quad (A1.12)$$

La ecuación de campo y las condiciones de contorno se obtienen imponiendo la condición de que los dos sumandos de la ecuación Al.12 sean nulos (Ec. Al.13 y Al.14).

$$\int_0^L \left[\frac{d^2 M}{dx^2} - \frac{d}{dx} \left(N \frac{dy}{dx} \right) - p \right] \delta y = 0 \quad (A1.13)$$

$$\left[M \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) - \frac{dM}{dx} \delta y + N \frac{dy}{dx} \delta y \right]_0^L = 0 \quad (A1.14)$$

Sustituyendo en la ecuación Al.13 la ley de comportamiento del material (Ec. Al.15), se obtiene la ecuación de campo (Ec. Al.16), para N constante.

$$M = EI \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (A1.15)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) - N \frac{d^2 y}{dx^2} = p \quad (A1.16)$$

La ecuación Al.14 da lugar a dos igualdades (Ec. Al.17 y Al.18). De ellas se obtienen las condiciones de contorno, que son de tipo geométrico (condiciones esenciales) y de tipo dinámico (condiciones naturales). En nuestro caso las tres condiciones de contorno a aplicar (Ec. Al.19, Al.20 y Al.21) son de tipo geométrico. (Ver figura 2.1)

$$\left[M \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) \right]_0^L = 0 \quad (\text{A1.17})$$

$$\left[\left(N \frac{dy}{dx} - \frac{dM}{dx} \right) \delta y \right]_0^L = 0 \quad (\text{A1.18})$$

$$y(xt) = \Delta \quad (\text{A1.19})$$

$$y(xt + L) = 0 \quad (\text{A1.20})$$

$$\frac{dy}{dx}(xt + L) = 0 \quad (\text{A1.21})$$

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado dentro del marco del proyecto de investigación "Determinación Experimental de Impedancias Dinámicas de Zapatas Rígidas". Subvencionado por la CICYT con número C-89-555-02.