

ESTUDIO Y APLICACION DEL ALGORITMO DE DAVIDON A LA OPTIMIZACION DEL GOBIERNO EN TIEMPO MINIMO DE SISTEMAS LINEALES

Notaciones vectoriales.

- Vector columna: $|x\rangle$.
- Vector fila: $\langle x|$.
- Producto escalar: $\langle x|y\rangle$.
- Producto vectorial: $|x\rangle\langle y|$.

Las matrices se designan con letras mayúsculas, por ejemplo: $A = [A_{ij}]$. Por tanto:

- Vector columna: $A|x\rangle$.
- Vector fila: $\langle x|A$.
- Escalar: $\langle x|A|y\rangle$.

Cuando es indiferente, se trata de un vector fila o vector columna, se subraya la variable: $f(\underline{x})$.

Primera parte

ALGORITMO DE DAVIDON

1. El problema de la minimización, considerado como una aproximación de segundo grado.

1.1. Generalidades.

Sea:

$$f(\underline{x}) = f_0 + \langle x|b\rangle + \frac{1}{2} \langle x|A|x\rangle \quad (1)$$

la forma cuadrática típica referida a un vector \underline{x} en un espacio métrico de n dimensiones de norma euclídea, donde:

- $|x\rangle$ es un vector invariable ($n \times 1$).
- $|b\rangle$ es un vector constante ($n \times 1$).

A : una matriz constante, simétrica, definida estrictamente positiva (es decir, de autovalores positivos) ($n \times n$).

Derivando (1) respecto de \underline{x} :

$$|g(\underline{x})\rangle = |b\rangle + A|x\rangle \quad (2)$$

que es el gradiente ($n \times 1$) en un punto $|x\rangle$, y aplicando la condición de estacionaridad $|g(\underline{x})\rangle = |0\rangle$ se encuentra, puesto que A está definida estrictamente positiva, que la función (1) tiene un mínimo en

$$|x_{\min}\rangle = -A^{-1}|b\rangle \quad (3)$$

para el cual:

$$|g(\underline{x}_{\min})\rangle = |0\rangle$$

Los contornos de (1) son hiperelipsoides cuyos ejes principales son los vectores propios de A , de longitudes inversamente proporcionales a los autovalores; $|x_{\min}\rangle$ es su centro de simetría.

Propiedad 1.

Tomando como punto de partida un punto $|x\rangle$ de (1) se alcanza el mínimo (3) por un desplazamiento igual al vector $-A^{-1}|g(\underline{x})\rangle$. En efecto, premultiplicando (2) por A^{-1} y teniendo en cuenta (3),

$$\begin{aligned} A^{-1}|g(\underline{x})\rangle &= A^{-1}|b\rangle + |x\rangle = - \\ &= -|x_{\min}\rangle + |x\rangle \\ \Rightarrow |x_{\min}\rangle &= |x\rangle - A^{-1}|g(\underline{x})\rangle \end{aligned} \quad (4)$$

Propiedad 2.

Tomando como punto de partida un punto $|x\rangle$ de (1) se alcanza el mínimo (3) por n desplazamientos sucesivos a lo largo de n direcciones conjugadas respecto de A , linealmente independientes. El punto de partida x_{i-1} para el desplazamiento i -ésimo sería el mínimo de la función (1) sobre la dirección $(i-1)$ -ésima. En particular, los vectores propios son direcciones conjugadas linealmente independientes.

Los métodos que utilizan las dos propiedades enunciadas se llaman de convergencia cuadrática.

1.2. Convergencia cuadrática.

Consideremos ahora el caso general en que $f(\underline{x})$ es cualquiera y posee un mínimo definido. Junto a dicho mínimo $f(\underline{x})$ puede quedar suficientemente descrita por una aproximación de segundo grado como la ecuación (1); en tal caso $|b\rangle$ y A son las matrices de las derivadas primeras y segundas de la función.

(*) Bull-General Electric, S.A.

(**) Laboratorios I.T.T. de España.

En la medida en que nos encontremos en un punto suficientemente próximo al mínimo, la propiedad (4) nos permite localizar este último de un solo golpe. Sin embargo, la mayoría de las veces no estamos en un caso tan favorable y resulta antieconómico evaluar la matriz A^{-1} (inversa de la de derivadas segundas) en puntos alejados del mínimo. Y lo que es peor, este proceder sería contraproducente puesto que, no tratándose realmente de una hipercuadrada, la aplicación de (4) puede alejarnos y no acercarnos.

En resumen, un método algorítmico de minimización será eficaz cuando esté concebido de manera que converja en todo momento y que, al llegar a la vecindad del mínimo, se adapte a la geografía de segundo grado para converger ya con rapidez cuadrática. El método de Davidon pertenece a esta clase.

2. Algoritmo de Davidon.

El algoritmo ha sido elaborado por W. C. Davidon en 1959 y descrito en un informe (1), prácticamente imposible de conseguir. Fletcher y Powell, en 1963, lo han presentado bajo una forma ligeramente distinta en un artículo (2) mucho más difundido.

2.1. Principio del método.

El método elabora iterativamente una sucesión de matrices $(S_0, S_1, S_2, \dots, S_k \dots)$ simétricas y definidas estrictamente positivas, con S_0 cualquiera, para empezar. Si A es constante, se demuestra que, después de $N \leq n$ iteraciones (siendo n la dimensión del espacio), el método sitúa el punto mínimo y $\{S\} \rightarrow A^{-1}$. Si A depende de $|x\rangle$ se demuestra que el método converge siempre hacia el punto mínimo y, por último, se llega a un punto donde A representa con aproximación suficiente a los términos de grado superior a uno en el desarrollo de Taylor de $f(x)$, a partir de cuyo momento se alcanza el mínimo en $N \leq n$ iteraciones.

2.2. Organigrama (ver figura).

S_0 debe ser preferentemente una estimación de A^{-1} , si ello es posible, o cualquiera otra (1 por ejemplo).

En (2) se prueba que:

a) El algoritmo es estable ($f(x_{i+1}) \leq f(x_i)$), por tanto el método es válido para cualquier función definida y diferenciable. Es lo mismo que demostrar que S_i es siempre estrictamente positiva.

b) En el caso de una hipercuadrada:

$$f(|x_0\rangle + |\sigma_0\rangle + |\sigma_1\rangle + \dots + |\sigma_K\rangle + \dots + |\sigma_N\rangle)$$

es el valor mínimo de la función ($N \leq n$).

2.3. Observaciones.

2.3.1. El método, en su secuencia teórica, supone satisfecha por parte de $|\sigma_i\rangle$ la condición de tangencias a una superficie de nivel o, lo que es igual, la condición de ortogonalidad con el gradiente:

$$\langle \sigma_i | g_{i+1} \rangle = 0,$$

condición asociada al bloque tres del organigrama o

programa de minimización a lo largo de una dirección en un hiperespacio.

Sáez (3) ha puesto de manifiesto cómo el método, con ser extraordinariamente rápido y preciso, es sensible a la eficacia del programa unidimensional y puede fallar con el fallo de éste, con una probabilidad que depende de la función de trabajo.

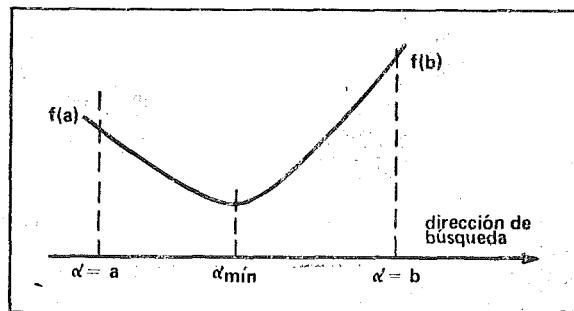
2.3.2. El método presenta un interés adicional, puesto que produce una matriz S que contiene toda la información descriptiva de la geografía de segundo grado del sistema alrededor del óptimo, cuestión importante en relación con la sensibilidad de éste a los parámetros.

3. Minimización sobre una dirección.

Hemos considerado dos métodos, el primero propuesto por Davidon en el mismo informe de referencia (1) y otro basado en la obra de Fibonacci y refundido por Kiefer (7). Aquí presentamos brevemente las ideas más importantes que resumen su contenido.

3.1. Davidon.

Supone que el perfil de los valores de la función sobre la dirección de búsqueda es de la forma indicada en la figura.



Si el valor óptimo está situado en el interior del intervalo escogido:

Conociendo $f(a)$, $f(b)$ y las pendientes de la función en esta dirección en los puntos a y b (gradiente proyectado sobre la dirección) se interpola con la curva menos abrupta que satisfaga estas condiciones de frontera. Es la curva que minimiza:

$$\int_a^b \left(\frac{d^2 f}{d\alpha^2} \right)^2 d\alpha.$$

De hecho, Davidon hace las hipótesis siguientes:

- 1.º Un intervalo inicial.
- 2.º La función, unimodal a todo lo largo de cada dirección.

El método es adaptativo, en el sentido que aprovecha la información obtenida en cada medida para reducir o aumentar el intervalo, aproximándose siempre al punto óptimo.

3.1.1. Método:

- a) Peso inicial = h .
- b) Desplazamiento y ampliación del intervalo. Se examina f' (derivada de f) en los puntos $\alpha = 0, h, 2h$,

4 h, ... a, b, donde α se duplica cada vez, y b es el primer punto para el cual f' es no negativa, o f no decrece:

$$\Rightarrow \alpha < \alpha_{\min} \leq b.$$

c) Interpolación cúbica.

Se define:

$$z = 3 \frac{f(a) - f(b)}{b - a} + f'(a) + f'(b),$$

$$w = (z^2 - f'(a) \cdot f'(b))^{1/2},$$

$$\alpha_e = b - \left(\frac{f'(b) + w - z}{f'(b) - f'(a) + 2w} \right) (b - a)$$

es una estimación de α_{\min} .

Si $f(\alpha_e)$ es menor que $f(a)$ y $f(b)$ se acepta $\alpha_{\min} = \alpha_e$. En caso contrario se pasa a d).

d) Reducción del intervalo.

Si $f'(\alpha_e) > 0$, se vuelve a c) para el intervalo (a, α_e) .

Si $f'(\alpha_e) < 0$, se vuelve a c) para el intervalo (α_e, b) .

3.2. Fibonacci.

Supone:

- 1.º Un intervalo inicial.
- 2.º La función unimodal (no necesariamente continua) todo a lo largo de dicho intervalo.
- 3.º El óptimo está situado en el interior del intervalo considerado.

y establece un plan minimax de búsqueda, que consiste en situar secuencialmente las medidas de manera que al final de la ejecución el punto mínimo queda al interior de un intervalo de incertidumbre (de precisión), que se fija a priori tan pequeño como se quiera.

El método puede jugar con tres parámetros:

- intervalo inicial,
- número de medidas,
- precisión deseada.

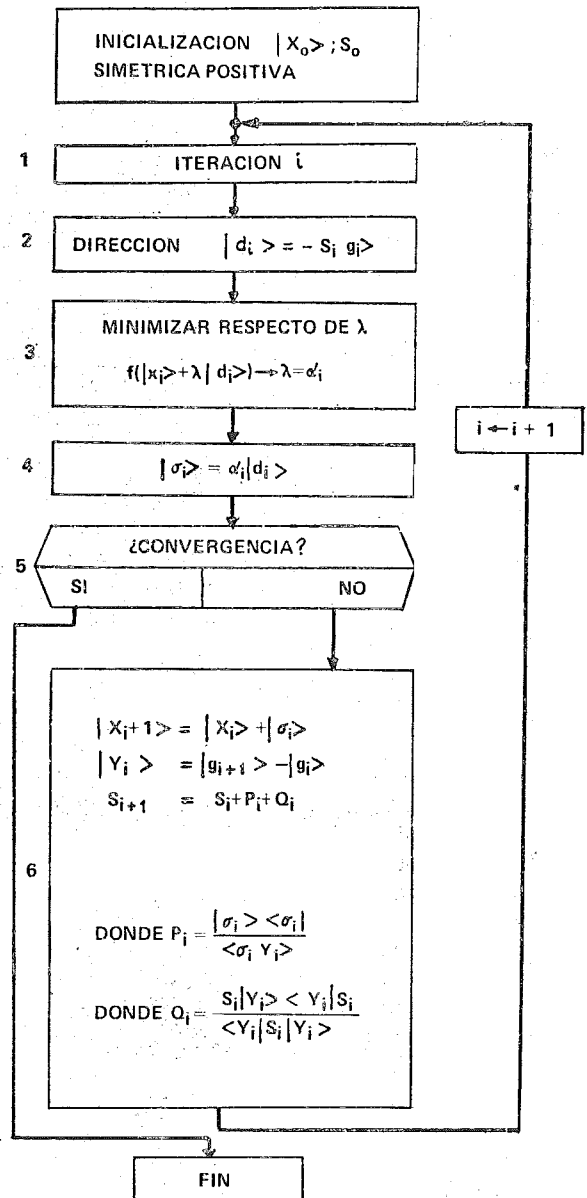
Fijando dos de estos parámetros se fija automáticamente el tercero. Por ejemplo, con 24 medidas de la función se reduce el intervalo de incertidumbre en una proporción del orden de 10^{-5} .

3.3. Observaciones.

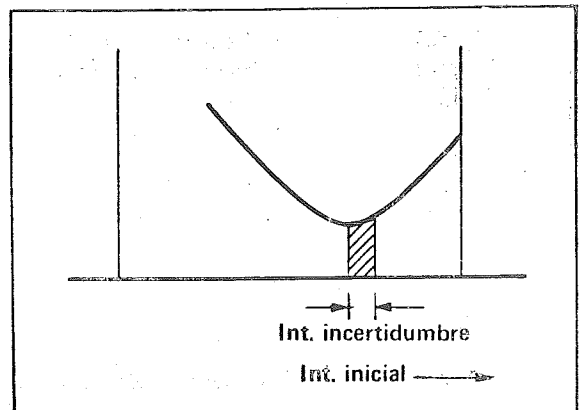
No es obvio que uno de estos métodos sea mejor que el otro y la comparación entre ellos da unos resultados claramente dependiente del criterio escogido. Sáez (3) ha hecho un estudio detallado de la cuestión, analizando las debilidades de cada uno de estos métodos desde el punto de vista práctico en relación con:

- falta de unimodalidad,
- elección de longitud de los intervalos,
- coste en tiempo de cálculo.

y propuesto diferentes estrategias y modificaciones en los dos métodos citados, que mejoran su eficacia y evitan un cierto porcentaje de fallos. No es la finalidad de esta conferencia el precisar este estudio. Por lo que a ella



Algoritmo de Davidon.



se refiere, nos interesa resaltar que las conclusiones no son absolutamente favorables a uno de los dos, lo que ha dejado a Caballero (4) las manos libres para decidirse por cualquiera, en este caso el de Fibonacci.

OPTIMIZACION PARAMETRICA DE SISTEMAS LINEALES MULTIVARIABLES EN TIEMPO MINIMO CON CRITERIO TERMINAL

1. Planteamiento del problema.

Consideremos un sistema lineal multivariable estacionario, definido por su ecuación de estado (*):

$$\dot{x} > = A |x > + B |u >.$$

En general, pueden existir ecuaciones de condición sobre las variables de gobierno, $|u >$, o sobre el vector de estado $|x >$: es decir estas variables deben pertenecer a un dominio fijado a priori. En nuestro estudio haremos las siguientes hipótesis:

- No existe condición alguna sobre el vector de estado del sistema; en consecuencia, partiendo de un estado inicial se podrá llegar a un estado final, de forma tal que todos los estados intermedios no deberán satisfacer otra condición que la ecuación de estado.
- La condición sobre las variables de gobierno será de la forma:

$$|u_i| \leq M; \quad 1 < i \leq m.$$

Las variables de gobierno o mandos que satisfagan esta condición se llaman "admisibles".

Por fin, tanto en el instante inicial, t_i , como en el instante final, t_f , el vector de estado deberá satisfacer las siguientes condiciones en los límites:

$$\begin{aligned} |x(t_i) > &= |x_i >, \\ |x(t_f) > &= |x_f >. \end{aligned}$$

Siendo $|x_i >$ el vector de estado inicial y $|x_f >$ el vector de estado final.

El problema que nos proponemos resolver lo podemos plantear en la forma siguiente:

"Dado el sistema que acabamos de definir, encontrar entre todas las variables de gobierno $|u(t) >$ admisibles y que transfieren el sistema del estado inicial al estado final; es decir, que satisfacen las condiciones en los límites, aquella que efectúa esta transferencia en tiempo mínimo."

Supondremos que el sistema es gobernable, es decir que, dado un instante cualquiera t_0 y dos estados cualesquiera $|x_0 >$ y $|x_1 >$, es posible encontrar un instante t_1 ($t_1 \geq t_0$) y un mando admisible $|u(t) >$ en el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ que transfiere el sistema del estado $|x_0 >$ en el instante t_0 al estado $|x_1 >$ en el instante t_1 .

Al mando $|u(t) >$ que realiza la transferencia en tiempo mínimo le llamaremos "mando óptimo" y a la curva integral $|x(t) >$ correspondiente a este mando, "trayectoria óptima", definida dentro del espacio de n dimensiones llamado "de estado".

(*) Esta matriz A no tiene nada que ver con la matriz A de la primera parte.

2. Optimización paramétrica.

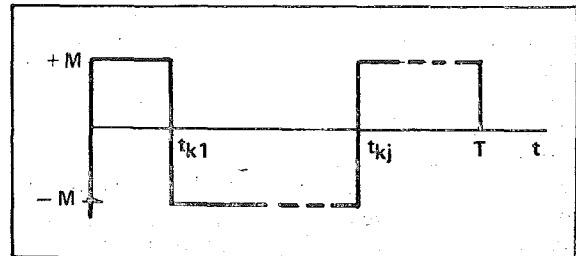
Utilizando el "principio del máximo" de Pontrjagin, se puede llegar a la estructura del mando óptimo (ver (4) y (5)). Esta es del tipo "bang-bang", es decir:

$$|u(t) > = M \text{ signo } (\langle \psi | B >),$$

donde ψ es el vector adjunto del vector de estado, definido por:

$$|\dot{\psi} > = -A^T |\psi >.$$

Por tanto, el mando óptimo está constituido por una serie de conmutaciones sobre cada uno de sus componentes, entre sus valores máximo y mínimo, es decir, entre $+M$ y $-M$; esta forma de gobierno es conocida como "bang-bang".



En la figura hemos representado la componente K del mando, en donde t_{kj} representa el instante en que se efectúa la conmutación j -ésima en dicho componente K , y T representa el instante en que todos los componentes del mando se anularán, es decir, el instante final.

Supongamos que el sistema parte en el instante inicial, que haremos igual a cero sin restricción de generalidad, de un punto en el espacio de estado $|x_i >$; definido el mando por un conjunto arbitrario de instantes de conmutación t_{kj} y un instante final T , el sistema, al cabo de este tiempo T habrá alcanzado un determinado punto $|x(T) >$ en el espacio de estado, que será, en general, diferente del punto $|x_f >$ que define la condición en los límites correspondientes al instante final.

Nuestro propósito es encontrar un conjunto de instantes de conmutación y un instante final T , tales que:

$$|x(T) > = |x_f >,$$

se satisfaga y T sea mínimo. Para ello definiremos la función criterio, C , siguiente:

$$C = T + \frac{K}{2} \langle \varepsilon(T) | \varepsilon(T) \rangle$$

constituido por dos términos, el primero, el instante final T , el segundo, una función de penalización sobre la desviación:

$$|\varepsilon(T) > = |x(T) > - |x_f >,$$

en el instante final. Como se ve en la expresión de C , la función de penalización sobre la desviación final es el producto de un factor de penalización, $K/2$, por el cuadrado del módulo de la desviación.

Definida la función criterio en la forma anterior, proponemos para resolver el problema planteado el siguiente

método de optimización paramétrica: encontrar el mínimo del criterio, dependiente de los parámetros t_{k_j} y T , para valores del factor de penalización lo más altos posible. La solución que obtengamos se aproximará tanto más a la solución optimal, cuanto el factor de penalización tenga un valor más elevado. En el límite ($K/2$ infinito) ambas soluciones coincidirán.

La búsqueda de los parámetros t_{k_j} y T se hará de la siguiente forma: partiendo de unos valores estimados y con un factor de penalización pequeño se determinará el mínimo del criterio con el algoritmo iterativo de Davidon; encontrado el mínimo, se aumentará el valor del factor de penalización y partiendo de los valores de los parámetros obtenidos, se iterará de nuevo hasta encontrar un nuevo mínimo. Así se continuará hasta que el módulo de la desviación $|\epsilon|$ sea menor que la precisión requerida.

3. Número de conmutaciones.

Existe un problema previo en la iniciación del procedimiento propuesto: la determinación del número de conmutaciones en cada uno de los componentes del mando. Este número no se puede conocer, en general, a priori. En realidad, basta con conocer el número máximo de conmutaciones, porque, partiendo de este número, se puede llegar al número correspondiente al mando optimal, ya que cuando dos instantes de conmutación intermedios en una componente del mando llegan a ser iguales, de hecho, el número de conmutaciones sobre dicha componente disminuye en dos, y cuando el primer instante de conmutación llega a ser igual al instante inicial o el último instante de conmutación llega a ser igual al instante final, el número de conmutaciones sobre la componente considerada disminuye en uno.

En el caso en que los valores propios de la matriz A de la ecuación de estado son reales, se sabe que el número máximo de conmutaciones sobre cada componente del mando es igual al orden del sistema menos uno.

Si los valores propios de A no son reales, sería necesario comenzar con un número de conmutaciones elevado o hacer un estudio previo del sistema por otro procedimiento.

4. Trayectoria.

En la minimización de la función criterio C mediante el algoritmo de Davidon es necesario conocer el valor de la función para cada conjunto de parámetros t_{k_j} y T . Para ello es necesario integrar la ecuación de estado para cada conjunto t_{k_j} y T , con el fin de conocer el estado del sistema en el instante T , de lo que depende directamente el criterio. Por otra parte, una vez obtenido el mando optimal, es de gran importancia el conocimiento de la trayectoria del sistema en el espacio de las fases, para dicho mando.

En lo que sigue, veremos la forma de cálculo de la trayectoria y del estado final. Consideremos de nuevo la ecuación de estado:

$$\dot{x} > = A |x > + B |u >.$$

Puesto que el gobierno optimal es del tipo "bang-bang", la ecuación anterior puede integrarse sucesivamente en cada uno de los intervalos en que los componentes del mando permanecen constantes, partiendo

del instante inicial, y tomando como estado inicial de cada intervalo, el final del inmediato anterior.

La solución general de la ecuación de estado se puede escribir:

$$|x(t^+) > = e^{A(t^+ - t)} |x(t) > + \int_t^{t^+} e^{A(t^+ - \tau)} B |u(\tau) > d\tau.$$

La matriz exponencial $e^{A(t^+ - t)}$ queda definida por la serie:

$$e^{A(t^+ - t)} = 1 + A(t^+ - t) + \dots + \frac{A^n (t^+ - t)^n}{n!} + \dots$$

Se puede demostrar que esta serie converge para todo $(t^+ - t)$. Nótese que si A es una matriz diagonal, $[\lambda_j]$, $e^{A(t^+ - t)}$ es la matriz diagonal $[e^{\lambda_j (t^+ - t)}]$.

La matriz $e^{A(t^+ - t)}$ es la "matriz de transición"; es decir, la solución de la ecuación homogénea:

$$\dot{x} > = A |x > ,$$

como se puede comprobar fácilmente.

El cálculo de esta matriz no es, en general, inmediato, salvo en el caso en que la matriz A es diagonal. La utilización para su cálculo de su definición por una serie no es práctica, sobre todo si se desea una solución literal. El teorema de Sylvester, que da un método de cálculo de una función matriz, cuando esta función se puede desarrollar en serie y se conocen los valores propios de la matriz, es el que hemos utilizado. La fórmula de Sylvester, aplicada a $e^{A(t^+ - t)}$ se puede escribir:

$$e^{A(t^+ - t)} = \sum_{i=1}^n \left\{ e^{\lambda_i (t^+ - t)} \prod_{j \neq i} \left[\frac{A - \lambda_j I}{\lambda_i - \lambda_j} \right] \right\}$$

para una función de una matriz A con n valores propios distintos. En el caso en que A tiene valores propios múltiples, se puede obtener la función de matriz con una expresión semejante a la anterior, aunque de mayor complejidad.

Haciendo:

$$w_k = \prod_{j \neq k} \left[\frac{A - \lambda_j I}{\lambda_k - \lambda_j} \right]$$

La integral de la ecuación de estado entre dos instantes, entre los cuales $|u >$ ha sido constante, se puede escribir:

$$|x(t^+) > = \left\{ \sum_{k=1}^n e^{\lambda_k (t^+ - t)} w_k \right\} |x(t) > + \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{e^{\lambda_k (t^+ - t)} - 1}{\lambda_k} w_k \right\} \cdot B |u >$$

Nota. — Cuando la matriz A posee valores propios complejos se han modificado las expresiones entre llaves de la expresión anterior, con el fin de no trabajar con expresiones complejas.

Se puede demostrar (ver (4)) las matrices w_k correspondientes a una pareja de valores propios complejos conjugados $\lambda_k = a + b_j$ y $\lambda_{k+1} = a - b_j$ son

de la forma:

$$w_k = w_{kr} + j w_{ki}$$

$$w_{k+1} = w_{kr} - j w_{ki}$$

Los sumandos correspondientes a estas raíces se pueden escribir:

$$\sum_{k=1}^n e^{\lambda_k(t^+ - t)} = \dots w_k^c e^{a \Delta t} \cos b \Delta t + w_{k+1}^c e^{a \Delta t} \sin b \Delta t$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{e^{\lambda_k(t^+ - t)} - 1}{\lambda_k} w_k = \dots \frac{w_k^c}{a^2 + b^2} [-a + e^{a \Delta t} (a \cos b \Delta t + b \sin b \Delta t)] + \frac{w_{k+1}^c}{a^2 + b^2} [b - e^{a \Delta t} (b \cos b \Delta t - a \sin b \Delta t)] \dots$$

en donde:

$$2 w_{kr} = w_k^c, 2 w_{ki} = -w_{k+1}^c \quad \Delta t = t^+ - t$$

5. Sensibilidad de la desviación.

Llamamos sensibilidad $|\sigma\rangle$ de la desviación final:

$$|\varepsilon\rangle = |x(T)\rangle - |x_j\rangle,$$

con relación al tiempo t , a:

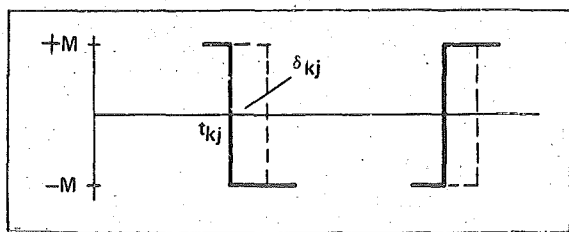
$$|\sigma\rangle = \frac{\partial}{\partial t} |\varepsilon\rangle.$$

Distinguiremos en el cálculo de las sensibilidades dos casos, según se trate de sensibilidades con relación a los instantes intermedios o con relación al instante final T :

a) Sensibilidad con relación a t_{kj} .

Por definición:

$$|\sigma_{kj}\rangle = \frac{\partial}{\partial t_{kj}} |\varepsilon\rangle = \frac{\partial}{\partial t_{kj}} |x(T)\rangle.$$



Teniendo en cuenta que $|x(T)\rangle$ es:

$$|x(T)\rangle = e^{A(T-t_0)} |x(t_0)\rangle + \int_{t_0}^T e^{A(T-\tau)} \cdot B \cdot |u(\tau)\rangle d\tau$$

una variación δt_{kj} en el parámetro t_{kj} provoca la siguiente variación sobre $|x(T)\rangle$:

$$\delta |x(T)\rangle = \int_{t_0}^T e^{A(T-\tau)} \cdot B \cdot |\delta u_{kj}\rangle d\tau,$$

donde δu_{kj} es una impulsión de área:

$$2 M \delta t_{kj} \text{ signo } u_{kj} \text{ (ver figura).}$$

Por tanto:

$$\delta |x(T)\rangle = e^{A(T-t_{kj})} \cdot |B_k\rangle \cdot 2 M \text{ signo } u_{kj} \delta t_{kj}$$

donde $|B_k\rangle$ es el vector columna k de la matriz B . La sensibilidad será:

$$|\sigma_{kj}\rangle = \frac{\partial}{\partial t_{kj}} |x(T)\rangle = 2 M e^{A(T-t_{kj})} \cdot |B_k\rangle \text{ signo } u_{kj}$$

La matriz $e^{A(T-t_{kj})}$ se calculará en la forma que se ha descrito en el párrafo anterior.

b) Sensibilidad con relación a T .

Se tiene que:

$$|\sigma_T\rangle = \frac{\partial}{\partial T} |\varepsilon\rangle = \frac{\partial}{\partial T} |x(T)\rangle = A |x(T)\rangle + B |u(T)\rangle$$

6. Minimización mediante el algoritmo de Davidon.

Acordemos, según hemos visto en la primera parte, que la expresión iterativa del algoritmo de Davidon es:

$$|t^+\rangle = |t\rangle - h G^{-1} |C_t\rangle$$

donde $|t\rangle$ es el vector de los instantes t_{kj} y $\nabla |C_t\rangle$ es el vector gradiente en el punto $|t\rangle$.

El vector $|C_t\rangle$, de acuerdo con lo expuesto en el párrafo anterior, se puede calcular:

$$\frac{\partial C}{\partial t_j} = k < \varepsilon | \sigma_j \rangle \text{ para todo } t = t_j \neq T$$

y

$$\frac{\partial C}{\partial T} = 1 + k < \varepsilon | \sigma_T \rangle \text{ para } t = T$$

El cálculo del mínimo del criterio a lo largo de una línea se ha realizado utilizando el algoritmo de Fibonacci. El cálculo de la función criterio en cada punto $|t\rangle$ se realiza según se ha visto en el párrafo 4 de la segunda parte.

7. Comentarios finales.

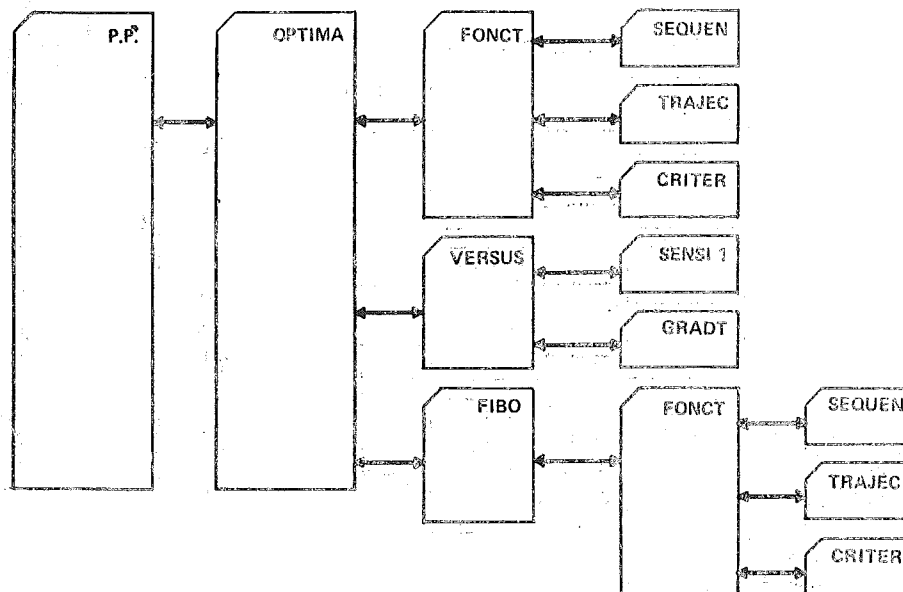
El sistema de optimización de sistemas lineales expuesto en todo lo anterior ha sido codificado en FORTRAN IV, dando lugar a un programa de unas 600 instrucciones FORTRAN.

El subprograma de cálculo de la trayectoria del sistema en el espacio de estado está limitado al caso en que los valores propios de la matriz de evolución libre del sistema son diferentes.

Por lo demás, el programa es absolutamente general. Por razones de limitación de memoria, los programas se han limitado a sistemas de ecuación de estado de cuarto orden y dos componentes de mando.

La utilización del algoritmo de Davidon en la minimización del criterio da al procedimiento una gran po-

Estructura del programa.



tencia en cuanto al tiempo de ejecución para la determinación del mando óptimo (del orden de cinco minutos en un ordenador del tipo IBM 360/44). El uso del algoritmo de Davidon presenta la ventaja sobre otros procedimientos de minimización (tal como el de Gauss-Newton) de que no existe restricción alguna en el número de conmutaciones que se pueden introducir *a priori* sobre cada componente del gobierno.

8. Organización del programa.

La estructura general del programa está esquematizada en la figura.

Las funciones principales de cada uno de los subprogramas se indican a continuación.

a) Programa principal.

Lee los datos de entrada.
Llama a OPTIMA.

b) Subrutina OPTIMA.

Realiza el algoritmo de Davidon.
Llama a FONCT y VERSUS.

c) Subrutina FONCT.

Sirve de charnela entre la subrutina OPTIMA y las SEQUEN, TRAJEC y CRITER

d) Subrutina SEQUEN.

Suministra la secuencia de los instantes de conmutación y la matriz de gobierno correspondiente.

e) Subrutina TRAJEC.

Calcula la trayectoria y el instante final.

f) Subrutina CRITER.

Suministra el criterio y la desviación en el instante final.

g) Subrutina VERSUS.

Sirve de charnela entre la subrutina OPTIMA y las SENSI 1 y GRADT.

h) Subrutina SENSI 1.

Calcula las sensibilidades primeras.

i) Subrutina GRADT.

Calcula el vector gradiente.

j) Subrutina FIBO.

Calcula mediante algoritmo de Fibonacci el mínimo de una función monovariante unimodal.

REFERENCIAS

1. W. C. Davidon: "Variable metric method for minimization". A.E.C. Research and Development Report, ANL-5990 (Rev.), 1959.
2. R. Fletcher y Powell: "A rapidly convergent descent method for minimization". Computer Journal, 6, 1963.
3. F. Sáez Vacas: "Etude d'une méthode de recherche d'un minimum dans un espace a N dimensions sans contraintes + quelques considerations sur deux méthodes de minimisation le long d'une direction dans l'espace". Rapport en el Centre d'Etudes et de Recherches en Automatisme, 1968.
4. P. A. Caballero: "Optimisation parametrique des systèmes lineaires multivariables en temps minimum". Thèse pour l'obtention du diplôme de Maître ès-Sciences Aéronautiques. ENSA. Paris, 1968.
5. Jay, C.; Hsu and A. U. Meyer: "Modern control principles and applications". McGraw-Hill. New York, 1968.
6. R. Boudarel, J. Delmas et P. Guichet: "Concepts fondamentaux de l'Automatique". Dunod, Paris, 1967.
7. D. J. Wilde: "Méthodes de recherche d'un optimum". Dunod, 1966. Traducción francesa de "Optimum seeking methods": Prentice Hall, 1964.