

ESTUDIO DE LAS TRAYECTORIAS DE UNA RADIACION MONOCROMATICA  
A TRAVES DE UN CAPILAR CON CRISTAL LIQUIDO ESMECTICO.

por

M.A. MURIEL Y J.A. MARTIN PEREDA

Departamento de Tecnología Electrónica y Electrónica Cuántica  
E.T.S. Ingenieros de Telecomunicación. - Madrid. -

Recibido el 31 de Marzo de 1980.

Summary.- The thin lens method, used for the interpretation of interferometric data - obtained from smectic liquid crystals, has been modified. The analysis employed has - been derived from the one presented by Granjean. The theoretical results are in a - good agreement with the experimental values from other authors.

Introducción.-

Uno de los métodos más comunmente utilizados para determinar las variaciones en el índice de refracción de un cierto material ha sido el basado en el interferómetro de Mach-Zehnder. Este interferómetro, empleado por ejemplo de forma usual para la observación de diferencias en la densidad de flujos de gases dentro de túneles aerodinámicos, ha sido empleado recientemente también para determinar la distribución de moléculas de los cristales líquidos en capilares (1) y, consecuentemente, de su índice de refracción. La importancia de esta aplicación se basa en el hecho de que, mediante el calibrado con un líquido de referencia adecuado, puede inferirse cuál es la configuración geométrica adoptada ante diferentes agentes externos, como pueden ser campos eléctricos o magnéticos, hecho que, de otra forma, puede resultar en cierta forma complejo.

Pero una correcta aplicación de los resultados experimentales obtenidos por este método requiere, como es lógico, el conocer de forma lo más exacta posible, cuales son las trayectorias de los rayos que atraviesan el material. En el caso de muestras de cristal líquido, y en el caso particular presentado en (1), la suposición de partida adoptada ha sido la de "lente delgada" que, aunque siendo correcta dentro de sus límites de aplicación, puede presentar inconvenientes cuando la separación del rayo con respecto al eje pasa de unos ciertos márgenes.

En el presente artículo se desarrollará una ampliación de los resultados obtenidos por el método de la lente delgada, llegándose a un mayor acuerdo con las observaciones experimentales. El estudio se centrará en el caso de los cristales líquidos del tipo esméctico, contenidos en un capilar. La aplicación al caso de los nemáticos, cuya configuración en análogas circunstancias es notoriamente más compleja, será objeto de un artículo posterior.

Estudio de las trayectorias seguidas por rayos transversales al capilar.-

El método adoptado en el presente trabajo, como ampliación del de lente delgada usado por Scudieri (1) en el suyo, se basa en el principio de Fermat aplicado a medios anisótropos, tal y como ha sido sugerido por Granjean (2) y otros autores (3)-(10). El medio anisótropo es, en este caso, el cristal líquido esméctico introducido en un capilar. Mediante el tratamiento químico adecuado, y que ya ha sido ampliamente tratado en la literatura del tema, se puede imponer alineamiento homotrópico a sus moléculas. Con ello, éstas se dispondrán en forma de capas de cilindros concéntricos en la manera indicada en (11) y

(12). Así, si se adopta la nomenclatura indicada en la Figura 1, con  $\hat{n}$  (director) como vector unitario según el eje de cada molécula, el alineamiento impuesto verificará.

$$\hat{n} = \hat{\rho} \quad /1/$$

Por otra parte, el principio de Fermat aplicado a medios anisótropos es, como ya se sabe

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} n_r \, dS = 0 \quad /2/$$

con  $n_r$  = índice de refracción de rayo

$dS$  = elemento de longitud a lo largo de la trayectoria del rayo o vector de Poynting.

Siguiendo la notación adoptada convencionalmente en estos casos, serán estudiadas dos situaciones:

- a).- Polarización perpendicular al eje z (eje del capilar)
- b).- Polarización paralela al eje z.

Los rayos propagándose en el primer caso serán designados como rayos extraordinarios mientras que los en el segundo serán los ordinarios.

Rayos extraordinarios .-

Asumiendo que la polarización del rayo es, en todo momento, perpendicular al eje z y que además,  $\hat{E}_i \cdot \hat{\theta} = \cos \alpha$  (Fig. 1), la expresión /2/ queda en la forma :

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} \frac{\sqrt{n_o^2 + n_e^2 (\rho \dot{\theta})^2}}{1 + (\rho \dot{\theta})^2} \sqrt{1 + (\rho \dot{\theta})^2 + z^2} \, d\rho = 0 \quad /3/$$

siendo

$n_o$  = índice de refracción ordinario

$n_e$  = índice de refracción extraordinario

$\tan \alpha = - \rho \dot{\theta}$

$\dot{\theta} = d\theta/d\rho$

$\dot{z} = dz/d\rho$

Las trayectorias de los rayos de luz podrán calcularse, como es obvio, mediante los extremales de la

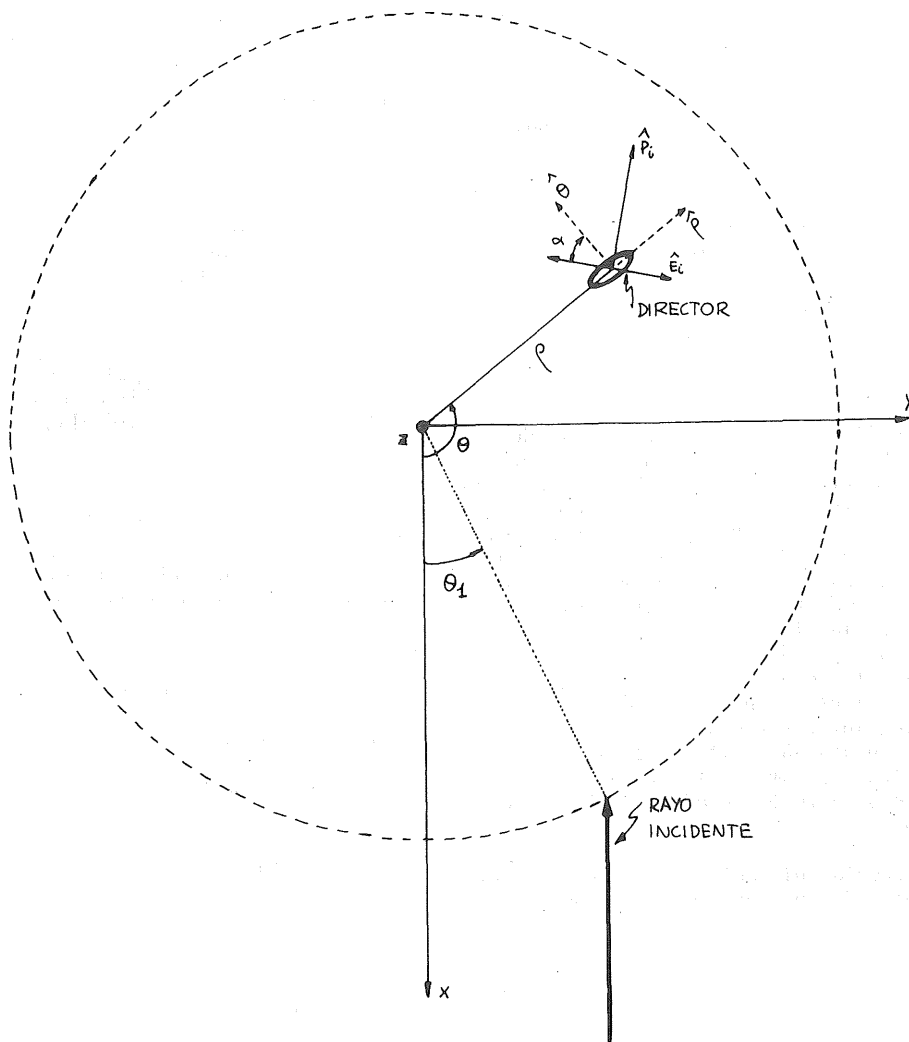


Figura 1

Configuración geométrica adoptada.

expresión /3/ obtenidos por los métodos convencionales de Cálculo variacional.

En las ecuaciones de Euler

$$\frac{d}{dp} \left( \frac{\partial G}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial G}{\partial \theta} = 0 \quad /4,a/$$

$$\frac{d}{dp} \left( \frac{\partial G}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad /4,b/$$

es, en este caso :

$$G = \sqrt{\frac{n_0^2 + n_e^2(\rho\dot{\theta})^2}{1 + (\rho\dot{\theta})^2}} \sqrt{1 + (\rho\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}$$

Imponiendo ahora la condición de incidencia perpendicular del vector de Poynting ( $\hat{P}_i \perp \hat{z}$ ) en la expresión /4,b/, se llega a  $z = 0$  en todo el recinto, lo que implica que dicho vector de Poynting (rayo de luz) está contenido en el plano  $(\rho, \theta)$ . Esto reduce nuestro estudio a un simple problema bidimensional.

La expresión /3/ queda así como

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{n_0^2 + n_e^2(\rho\dot{\theta})^2} dp = 0 \quad /5/$$

La trayectoria del rayo vendrá dada, en consecuencia, por :

$$\frac{d}{dp} \left( \frac{\partial (\sqrt{n_0^2 + n_e^2(\rho\dot{\theta})^2})}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial (\sqrt{n_0^2 + n_e^2(\rho\dot{\theta})^2})}{\partial \theta} = 0 \quad /6/$$

y simplificando queda :

$$\frac{n_e^2 \rho^2 \dot{\theta}}{\sqrt{n_0^2 + n_e^2(\rho\dot{\theta})^2}} = C_1 \quad /7/$$

Si ahora se impone la condición  $\hat{P}_i \parallel \hat{x}$  para todos los rayos incidentes, se obtiene :

$$C_1 = - R \text{ sen } \theta_1 \quad /8/$$

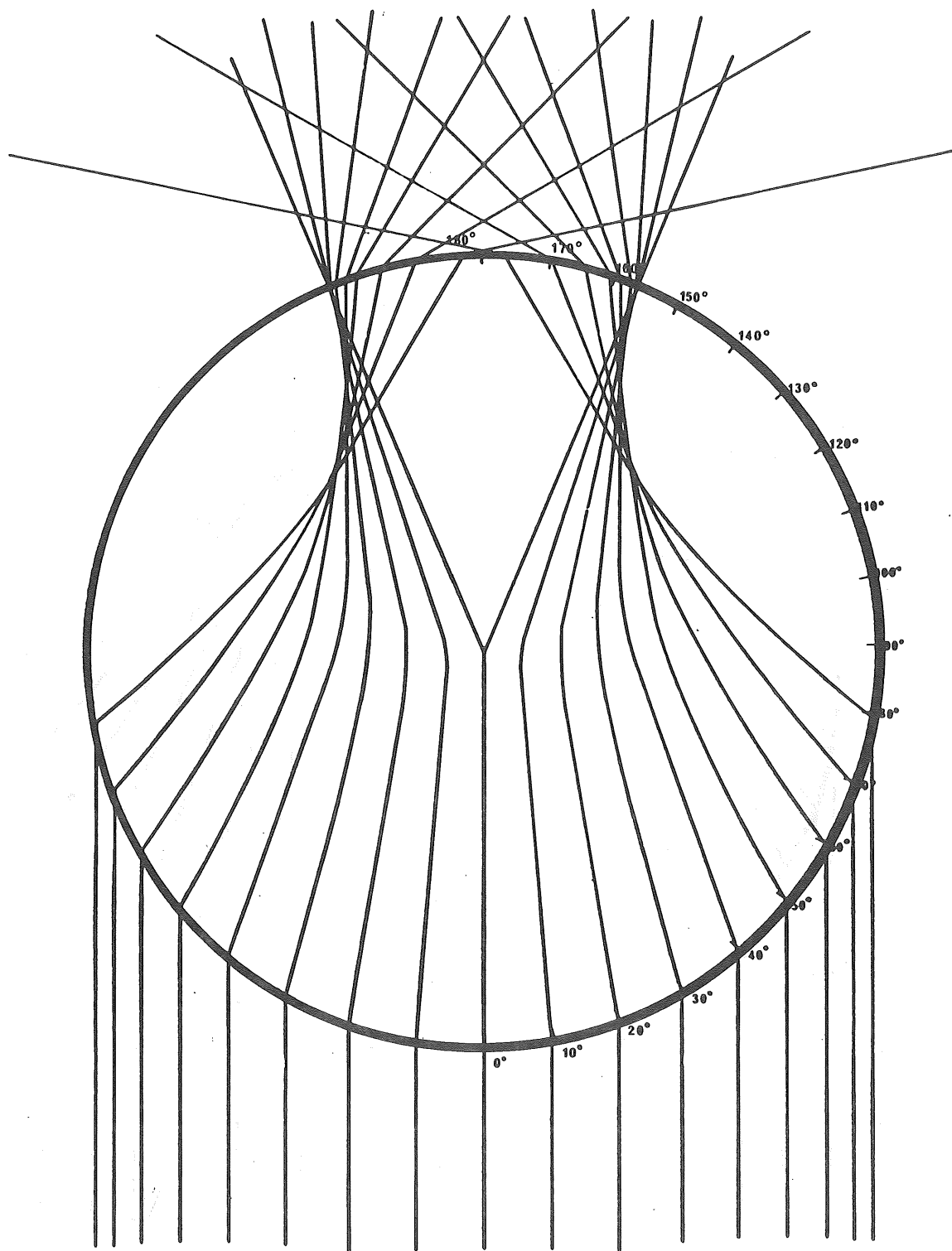


Figura 2

Trayectorias de los rayos extraordinarios.

siendo

$R$  = radio del capilar

$\theta_1$  = ángulo formado por el vector (0, punto de incidencia del rayo en el capilar) con el eje  $x$  (Fig. 1).

Llevando la expresión /8/ a /7/ e integrando, -

se obtiene la forma de la trayectoria del rayo :

$$\rho = \frac{R \operatorname{sen} \left( \frac{n_e}{n_o} \omega_1 \right)}{\operatorname{sen} \left( \frac{n_e}{n_o} [\theta - \theta_1 + \omega_1] \right)} \quad /9/$$

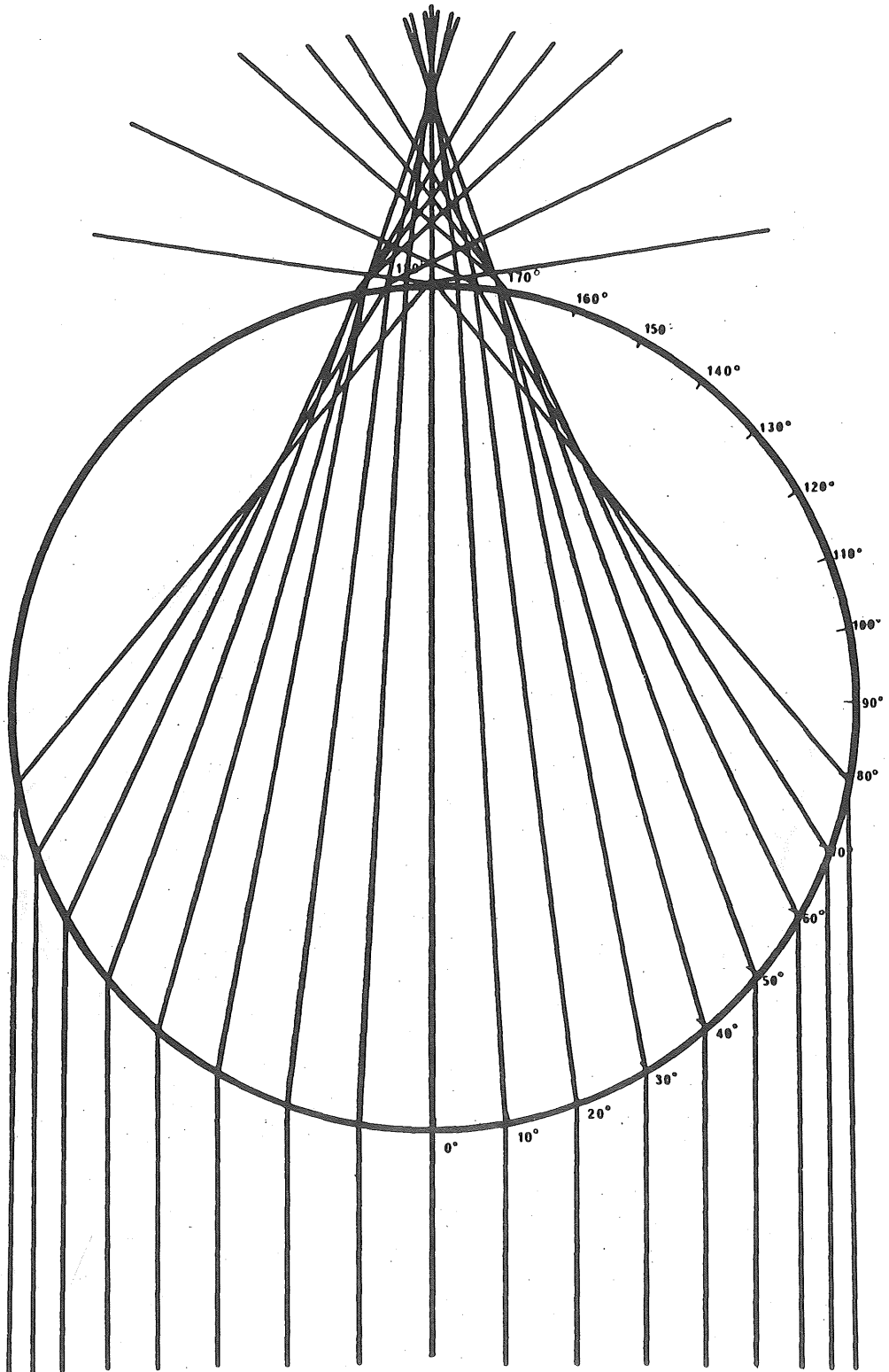


Figura 3

Trayectorias de los rayos ordinarios.

siendo

$$\omega_1 = \frac{n_0}{n_e} \arctg \left( \frac{\text{sen } \theta_1}{\sqrt{n_e^2 - \text{sen}^2 \theta_1}} \right)$$

La distancia mínima de la trayectoria del rayo al centro ( $\rho_{\text{MINIMO}}$ ), viene dada por :

$$\dot{\theta} = \infty$$

/10/

Operando se llega a

$$\rho_{\text{MINIMO}} = \frac{R \operatorname{sen} \theta_1}{n_e} \quad /11/$$

Estos resultados teóricos han sido aplicados al caso particular del esméctico conocido como CB00A - (N-(p-Cianobencilideno)-p-octiloxianilina) que presenta fase esméctica en el margen de 73° a 83° y cuyos índices de refracción son  $n_o = 1,53$  y  $n_e = 1,75$ . Las curvas obtenidas se muestran en la Figura 2.

Para el caso particular de  $\theta_1 \approx 0$  ( $\omega_1 \approx 0$ ), la expresión /9/ queda en la forma

$$\rho = \frac{\pm n_e R \theta_1}{\operatorname{sen}\left(\frac{n_e}{n_o} \theta\right)} \quad /12/$$

que corresponde a los dos rayos deflectados en el centro del capilar.

El ángulo,  $\delta$ , que forma cada uno de estos dos rayos con el eje x, después de la deflexión, es

$$\delta = \pi - \frac{n_o \pi}{n_e} \quad /13/$$

de donde se obtiene

$$\frac{n_e}{n_o} = \frac{\pi}{\pi - \delta} \quad /14/$$

Este resultado coincide con el obtenido experimentalmente por Cladis y White (13), lo que confirma la validez del modelo presentado.

Por otra parte, el camino óptico recorrido por cada rayo es:

$$\text{Camino óptico} = 2 \int_{\rho_{\text{MINIMO}}}^R \sqrt{n_o^2 + n_e^2 (\rho \theta)^2} d\rho \quad /15/$$

Sustituyendo /7/ con la condición /8/ en /15/, se obtiene:

$$\text{Camino óptico} = \frac{2 R n_o}{n_e} \sqrt{n_e^2 - \operatorname{sen}^2 \theta_1} \quad /16/$$

#### Rayos ordinarios.-

Asumiendo que la polarización del rayo es, en todo momento, paralela al eje z (eje del capilar), el rayo siempre "verá" el índice de refracción ordinario, quedando el principio de Fermat en la forma:

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} n_o \sqrt{1 + (\rho \theta)^2} d\rho = 0 \quad /17/$$

Aplicando la ecuación de Euler con las mismas condiciones que en el caso anterior llegamos a que la expresión de la trayectoria es:

$$\rho = \frac{R \operatorname{sen}(\omega_2)}{\operatorname{sen}(\theta - \theta_1 + \omega_2)} \quad /18/$$

siendo

$$\omega_2 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\sqrt{n_o^2 - \operatorname{sen}^2 \theta_1}} \right)$$

Esta expresión es la de una recta en polares, como cabía esperar.

Todos los resultados del caso anterior son válidos para éste con tal de sustituir  $n_e$  por  $n_o$  y hacer las simplificaciones pertinentes.

Las curvas obtenidas para el mismo cristal líquido esméctico (CB00A) se muestra en la Figura 3.

#### Conclusiones.-

En el presente artículo se ha desarrollado un modelo para el estudio de las trayectorias de los rayos luminosos que atraviesan transversalmente un capilar líquido esméctico con orientación homeotrópica. Este modelo, en cierta forma más amplio y elaborado que los usados convencionalmente, se ha basado en un tratamiento de aproximación geométrica que estimamos es el más idóneo para el estudio de este tipo de fenómenos. Sus ventajas con respecto al más riguroso de cálculo del campo propagado como campo electromagnético, estriban en su innegable sencillez y en que proporciona de forma directa, toda la información que se pretendía obtener. Las ecuaciones completas con modos acoplados, que pueden plantearse como una reformulación de las ecuaciones de Maxwell, darían lugar a soluciones en principio exactas. Sin embargo, para las condiciones establecidas como objetivo de nuestro trabajo, estas soluciones contendrían mucha más información que la requerida y, en consecuencia, se habría complicado el problema de forma innecesaria. Una serie de fenómenos de carácter intrínseco con la propagación, como puede ser el indicado anteriormente de acoplamiento entre las componentes del campo, quedan ocultos con nuestro modelo. Pero como éstas no eran el objeto fundamental del presente estudio, se ha preferido soslayar y obtener únicamente lo que se pretendía, esto es, la justificación teórica de los resultados experimentales que dan los ángulos de salida de los rayos de luz que atraviesan transversalmente un capilar con cristal esméctico orientado homeotrópicamente.

Las curvas teóricas obtenidas coinciden con las experimentales de otros autores. Con una adecuada ampliación pueden permitir una más correcta interpretación de los datos empíricos que puedan obtenerse bajo condiciones diferentes a las planteadas. Esta ampliación no es complicada para el caso esméctico, pero para el nemático sería preciso un tratamiento algo más elaborado. Ello se debe, entre otras razones, a que en el caso homeotrópico las moléculas de cristal líquido nemático adoptan una configuración bastante especial y que se conoce como "escape en la tercera dimensión". Este estudio será presentado por nosotros en un próximo artículo. Igualmente, la presencia de campos externos, tanto eléctricos como magnéticos, puede ser tratada de forma análoga a la expuesta aquí.

#### Agradecimientos.-

Los autores desean expresar su agradecimiento al Sr. Trell por la realización de las figuras.

El presente trabajo fué realizado con parte de

una ayuda concedida por la Comisión Asesora de Investigación Científica y Técnica.

Bibliografía.-

- (1).- Scudieri, F.; Applied Optics, 18, 1455 (1979)
- (2).- Granjean, F.; Bull. Soc. Fr. Mineral., 42, 42 (1919).
- (3).- Kline, M. and Kay, I.W.; Electromagnetic Theory and Geometrical Optics, Wiley, 1965.
- (4).- Schaefer, C.; Einführung in die Theoretische Physik, Vol. 3, Part I, W. de Gruyter, 1950.
- (5).- Sommerfeld, A.; Optik, Akademische Verlagsgesellschaft, 1959.
- (6).- Born, M. and Wolf, E.; Principles of Optics, Pergamon, 1970.
- (7).- Bremmer, H.; Propagation of Electromagnetic Waves. Handbuch der Physik, Springer-Verlag, 1958.
- (8).- Chako, N.; Compt. Rend., 251, 852 (1960).
- (9).- Eytov, S.M.; Compt. Rend. (Doklady) Acad. Sci URSS, 18, 263 (1958).
- (10).- Stavroudis, O.N.; J. Opt. Soc. Am., 52, 187 (1962).
- (11).- Cladis, P.E.; Philos. Mag., 29, 641 (1975).
- (12).- Torza, S. and Cladis, P.E.; Phys. Rev. Lett., 32, 1406 (1974).
- (13).- Cladis, P.E. and White, A.E.; Appl. Phys., 47, 1256 (1976).