

# ¿Qué función representa mejor la distribución granulométrica de la roca fragmentada?

José A. Sanchidrián

*Universidad Politécnica de Madrid – ETSI Minas y Energía, Madrid, España*

## RESUMEN

Se estudia la capacidad para representar la granulometría de la roca en un amplísimo conjunto de datos granulométricos de roca volada y molida de diferentes orígenes. Se evalúan las funciones de Weibull, Grady, log-normal, log-logística, Gilvarry y sus variedades truncadas y bimodales; las distribuciones Swebrec de tres y cinco parámetros también se estudian. La distribución de Weibull es la mejor de las de dos parámetros en cuanto a coeficiente de determinación; entre las truncadas de tres parámetros, Swebrec y Weibull lideran, e igualmente lo hacen sus variedades bimodales de cinco parámetros. Las distribuciones truncadas de tres parámetros superan a sus correspondientes bimodales de cinco parámetros (excepto la Swebrec ampliada, ella misma truncada) en el ajuste de la zona gruesa y también se comportan muy bien en la zona central si bien en esta zona ya algunas bimodales son mejores. En general, las distribuciones de Weibull, Swebrec y Grady son las mejores truncadas. En los finos, las truncadas son aún aceptables aunque pueden esperarse errores altos (por ejemplo del 100 %) mientras que las mejores bimodales (Swebrec ampliada y Weibull) tienen errores máximos generalmente menores de un 30 %. En los muy finos, los errores son casi siempre grandes, si bien moderados con la Swebrec ampliada y, en menor medida, las bimodales Weibull y Grady.

## 1 Introducción

La evaluación de la fragmentación por voladura y en los subsiguientes machaqueo y molienda es una cuestión importante en minería. El control y la optimización de la operación necesita de la descripción de la granulometría en las distintas etapas ya que ella afecta la productividad de la carga, la producción y el consumo energético de la machacadora, los rendimientos de la planta, sus leyes y tasas de recuperación, y el

precio mismo del producto final en el caso de áridos y minerales industriales. Los modelos, las especificaciones y los datos de proceso de fragmentación por voladura [1-9], machacadoras, molinos, cribas, cintas, mineroductos, tolvas, ciclones, y los datos de operación de planta en general [10-20] emplean la granulometría del material. Sin embargo, el intervalo de tamaños o fracción pasa en que una distribución dada representa realmente la granulometría de la roca es algo frecuentemente ignorado. Este trabajo aborda este punto examinando los errores que pueden esperarse cuando la granulometría de la roca se representa por diferentes distribuciones.

La granulometría de la roca se ha venido representando a lo largo de los años, casi exclusivamente, mediante la distribución de Rosin-Rammler (o Weibull) [21-23]; en los últimos años, la función Swebrec [24,25] ha alcanzado un perfil relativamente alto al demostrar que representa a la roca fragmentada mejor que la Weibull tanto en los extremos fino y grueso. La eficacia de las distribuciones Weibull, Swebrec y otras, junto con sus formas bimodales, ha sido evaluada en varios intervalos de pasas: gruesos (>80 %), central (80-20 %), finos (20-2 %) y muy finos (<2 %). La distribución Swebrec resultó con errores comparables a las mejores bimodales en las zonas gruesa y central; otras funciones truncadas como la Swebrec, especialmente la Weibull truncada, prácticamente iguala el comportamiento de la Swebrec en los cuatro intervalos de pasa antes indicados.

Este trabajo extiende la comparación a las distribuciones truncadas frente a las bimodales, encaminado a evaluar el beneficio real que aportan estas últimas cuyo mayor número de parámetros hace que su ajuste sea más complicado.

## 2 Funciones

Las distribuciones evaluadas se muestran en la Tabla 1. Sus expresiones, en forma de distribución acumulada, son:

### *Monocomponentes*

- Weibull-Rosin-Rammler (abreviada aquí WRR [21-23]):

$$F_{WRR} = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{x_c}\right)^n\right], \quad 0 \leq x < \infty \quad (1)$$

donde  $x_c$  y  $n$  son parámetros de escala y de forma, respectivamente.

Tabla 1. Distribuciones.

Distribución	Dominio	Nº de parámetros	Abreviatura
Weibull o Rosin-Rammler	Semi-infinito $[0, \infty)$	2	WRR
Grady	Semi-infinito $[0, \infty)$	2	GRA
Lognormal	Semi-infinito $[0, \infty)$	2	LGN
Log-logística	Semi-infinito $[0, \infty)$	2	LGL
Gilvarry	Semi-infinito $[0, \infty)$	3	GIL
Weibull truncada	Finito $[0, x_{max}]$	3	TWRR
Grady truncada	Finito $[0, x_{max}]$	3	TGRA
Lognormal truncada	Finito $[0, x_{max}]$	3	TLGN
Log-logística truncada	Finito $[0, x_{max}]$	3	TLGL
Swebrec	Finito $[0, x_{max}]$	3	SWE
Gilvarry truncada	Finito $[0, x_{max}]$	4	TGIL
Weibull bimodal	Semi-infinito $[0, \infty)$	5	BiWRR
Grady bimodal	Semi-infinito $[0, \infty)$	5	BiGRA
Lognormal bimodal	Semi-infinito $[0, \infty)$	5	BiLGN
Log-logística bimodal	Semi-infinito $[0, \infty)$	5	BiLGL
Swebrec ampliada	Finito $[0, x_{max}]$	5	ExSWE
Gilvarry bimodal	Semi-infinito $[0, \infty)$	7	BiGIL

– Grady (abreviada GRA [26,27]):

$$F_{GRA} = 1 - \left[ 1 + \left( \frac{x}{x_g} \right)^\alpha \right] \exp \left[ - \left( \frac{x}{x_g} \right)^\alpha \right], \quad 0 \leq x < \infty \quad (2)$$

donde  $x_g$  y  $\alpha$  son parámetros de escala y de forma, respectivamente.

– Lognormal (LGN):

$$F_{LGN} = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{t} \exp \left[ - \frac{(\log t - x_m)^2}{2s^2} \right] dt, \quad 0 \leq x < \infty \quad (3)$$

donde  $x_m$  y  $s$  son parámetros de posición y de escala (la media y la desviación estándar del logaritmo natural de  $x$ ).

– Log-logística (LGL):

$$F_{LGL} = \frac{1}{1 + \left( \frac{x}{x_{50}} \right)^{-\gamma}}, \quad 0 \leq x < \infty \quad (4)$$

donde  $x_{50}$  (el tamaño mediano) y  $\gamma$  son parámetros de escala y de forma, respectivamente.

– Gilvarry (GIL [28-31]):

$$F_{GIL} = 1 - \exp \left\{ - \left[ \left( \frac{x}{x_1} \right) + \left( \frac{x}{x_2} \right)^2 + \left( \frac{x}{x_3} \right)^3 \right] \right\}, \quad 0 \leq x < \infty \quad (5)$$

donde  $x_1, x_2$  y  $x_3$  son parámetros de escala de primer, segundo y tercer orden.

### Truncadas

Las funciones de las ecuaciones 1 a 5 se pueden transformar escalando la abscisa con un tamaño máximo  $x_{max}$  y forzando y valor infinito de la variable en ese punto, de modo que la función valga 1 en ese punto; esto se consigue sustituyendo la variable  $x$  por  $\xi$ :

$$\xi = \frac{x/x_{max}}{1-x/x_{max}} = \frac{x}{x_{max}-x}, \quad 0 \leq x \leq x_{max} \quad (6)$$

Como ejemplo, la distribución de Weibull truncada es, de las ecuaciones 1 y 6:

$$F_{TWRR} = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\xi}{\xi_c}\right)^n\right] = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{x_c} \frac{x_{max}-x_c}{x_{max}-x}\right)^n\right], \quad 0 \leq x \leq x_{max} \quad (7)$$

Y análogo para las otras distribuciones. Las funciones truncadas se abrevian en lo que sigue con las letras de su distribución de origen precedidas por una T. Estas funciones tienen un parámetro más que sus distribuciones de origen.

Otra distribución truncada, sin una distribución semi-infinita relacionada, es la Swebrec (SWE [24,25]):

$$F_{SWE} = \frac{1}{1 + \left[\frac{\log(x_{max}/x)}{\log(x_{max}/x_{50})}\right]^b}, \quad 0 \leq x \leq x_{max} \quad (8)$$

donde  $x_{50}$  es un parámetro de escala (el tamaño mediano) y  $b$  un parámetro de forma.

### Bimodales o bi-componentes

Las funciones bi-componentes, normalmente representando distribuciones bimodales, pueden formarse como combinación lineal de dos distribuciones monocomponentes:

$$F_{Bi} = (1-f)F(x, \bar{\pi}_1) + fF(x, \bar{\pi}_2), \quad 0 \leq x < \infty \quad (9)$$

donde  $F$  es cualquier función de las Ecuaciones 1 a 5;  $f$  ( $0 \leq f \leq 1$ ) es la fracción de la modalidad cuyo juego de parámetros es  $\bar{\pi}_2$ , de modo que  $1-f$  es la fracción de la modalidad  $\bar{\pi}_1$ . Por ejemplo, la log-logística bi-componente es:

$$F_{BiLGL} = (1-f)F_{LGL} + fF_{LGL} = (1-f) \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{x_{50,1}}\right)^{-\gamma_1}} + f \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{x_{50,2}}\right)^{-\gamma_2}}, \quad 0 \leq x < \infty \quad (10)$$

Las funciones bi-componente se denotan aquí con la abreviatura de su función de origen precedida por Bi.

Para la Swebrec, existe una versión llamada extendida (ExSWE) [24-25] similar a las bi-componentes pero, al igual que la Swebrec, de intervalo finito:

$$F_{ExSWE} = \frac{1}{1 + a \left[ \frac{\log(x_{\max} / x)}{\log(x_{\max} / x_{50})} \right]^b + (1 - a) \left[ \frac{(x_{\max} / x) - 1}{(x_{\max} / x_{50}) - 1} \right]^c}, \quad 0 < x \leq x_{\max} \quad (11)$$

### 3 Datos

Se han utilizado datos de roca fragmentada por voladura tanto en mina, a gran escala, como en bloques de laboratorio; de roca machacada y molida en planta y en laboratorio; datos de fragmentos en ensayo de rotura de partícula única, de rotura entre partículas, de martillo de caída, de impacto, de ensayo de compresión y de descompresión tras choque. En total el número de curvas de fragmentación es de 1234, todas obtenidas por cribado [32-34]. Para su estudio, se han agrupado como sigue:

- 1 Fragmentación por voladura, mina.
- 2 Fragmentación por voladura, laboratorio
- 3 Machacado primario, secundario y terciario, planta
- 4 Trituración y molienda, planta
- 5 Trituración y molienda, laboratorio
- 6 Fragmentación monopartícula, interpartículas, caída de peso, impacto y compresión.
- 7 y fragmentación por descompresión de choque.

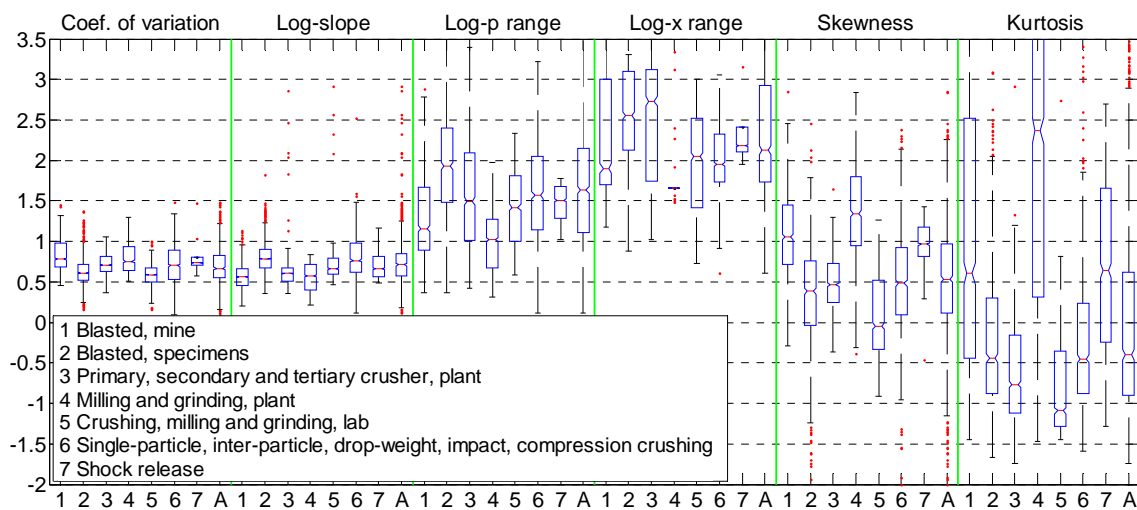


Figura 1. Parámetros descriptivos de los datos granulométricos. Los números 1 a 7 en el eje horizontal se refieren al tipo de datos, que se relacionan en la leyenda; “A” indica todos los datos juntos.

En la Figura 1 se muestran las distribuciones de los principales parámetros descriptivos de los datos: coeficiente de variación, (CV, ratio de la desviación estándar a la media), coeficiente de asimetría, curtosis, intervalos logarítmicos de pasas y tamaños, y pendiente media logarítmica. Estos tres últimos se definen como sigue:

- Intervalo de tamaños logarítmico:  $r_x = \log_{10}(x_{\max}/x_{\min})$
- Intervalo de pasas logarítmico:  $r_p = \log_{10}(p_{\max}/p_{\min})$
- Pendiente media logarítmica:  $s_L = r_p / r_x$

#### 4 Resultados y discusión

Las diecisiete distribuciones descritas en el apartado 2 se han ajustado a las 1234 curvas granulométricas empleando un esquema de mínimos cuadrados ordinario. La programación se hizo en Matlab [35]. Se han utilizado dos algoritmos de optimización no lineal: Levenberg-Marquardt (L-M) [36,37] y método simplex de búsqueda Nelder-Mead [38]. Cada problema se ha ejecutado hasta 1000 veces el número de variables variando el punto de partida, generado aleatoriamente dentro de un intervalo factible. La solución con menor suma de cuadrados se ha tomado como solución final.

En la Tabla 2 se dan las medianas de los coeficientes de determinación,  $R^2$ , (en **negrita y subrayados** los más altos y los que no son diferentes de aquéllos con significación 0.05). De las funciones de dos parámetros, WRR es la que tiene un  $R^2$  más alto (0.9886), significativamente por encima de GRA (0.9848) al 0.05. El  $R^2$  de GIL es más alto (0.9894, no distinto del WRR al 0.05 de significación) pero hay que recordar que es una función de tres parámetros. Entre las funciones truncadas, SWE y TWRR están en cabeza con  $R^2$  0.9976 y 0.9975 respectivamente, no distintos al 0.05 de significación). Como cabría esperar, las funciones truncadas superan sus versiones semi-infinitas ya que las primeras tienen un parámetro más que las segundas. A su vez, las bi-componentes, en general con dos parámetros más, alcanzan  $R^2$  mayores; la mediana de  $R^2$  mayor la obtiene BiWRR (0.99931), casi igual que ExSWE (0.99926); BiGRA resulta 0.9990, próxima a las dos anteriores pero ya diferente al 0.05 de significación. BiGIL, que tiene siete parámetros, cae detrás de éstas.

Tabla 2. Coeficientes de determinación. Medianas.

	$R^2$			$1-R^2$			Ratio I/T*	Ratio T/Bi**
	Semi-infinitas	Truncadas	Bi-componentes	Semi-infinitas	Truncadas	Bi-componentes		
WRR	<b><u>0.9886</u></b>	<b><u>0.9975</u></b>	<b><u>0.9993</u></b>	0.0114	0.0025	0.00069	3.72	3.25
GRA	0.9848	0.9969	0.9990	0.0152	0.0031	0.00097	4.19	2.89
LGN	0.9726	0.9945	0.9978	0.0274	0.0055	0.00217	4.05	2.40
LGL	0.9729	0.9952	0.9976	0.0271	0.0048	0.00242	4.65	1.85
SWE	—	<b><u>0.9976</u></b>	<b><u>0.9993</u></b>	—	0.0024	0.00074	—	2.29
GIL	<b><u>0.9894</u></b>	0.9927	0.9988	0.0106	0.0073	0.00124	1.00	4.81

\* Medianas de los ratios de  $1-R^2$  de las funciones semi-infinitas a las análogas truncadas.

\*\* Medianas de los ratios de  $1-R^2$  de las funciones truncadas a las análogas bi-componentes.

Junto al coeficiente de determinación, la Tabla 2 da las medianas de  $1-R^2$ , que representan la fracción de varianza no explicada por los ajustes. El truncado divide esta varianza por un factor de más o menos cuatro en todas las funciones menos GIL, para la que el truncado no es eficaz. El paso a bi-componentes divide nuevamente esta varianza por un factor de entre dos y tres excepto para la GIL, en la que ese factor es casi cinco. Aunque el coeficiente de determinación es la calificación canónica de un ajuste, en él influye sobre todo la zona de mayores valores de las ordenadas, mientras que los valores pequeños tienen poco valor; esto es importante cuando los datos se extienden a lo largo de un intervalo grande, como es el caso de las distribuciones granulométricas, en el que los valores pasas varían frecuentemente varios órdenes de magnitud.  $R^2$  es pues una medida global que no dice nada de la calidad del ajuste en las diferentes zonas de datos. Una forma conveniente de evaluar el comportamiento de las diferentes funciones ajustadas en todo el rango es calcular las diferencias entre los tamaños experimentales y los calculados por los ajustes para diferentes valores y zonas de pasas; se han empleado diferencias logarítmicas:

$$e_L = \log(x_p^* / x_p) \quad (13)$$

donde (Figura 2)  $x_p$  es el tamaño de una curva granulométrica para un pasa  $p$  y  $x_p^*$  el tamaño calculado por una distribución ajustada a ella,  $F_{CDF}$ :

$$x_p^* = F_{CDF}^{-1}(p) \quad (14)$$

Los errores logarítmicos  $e_L$  y relativos  $e_r$  se relacionan por las expresiones:

$$e_r = (x_p^* - x_p) / x_p = x_p^* / x_p - 1 = \exp(e_L) - 1 \quad (15)$$

$$e_L = \log(e_r + 1) \quad (16)$$

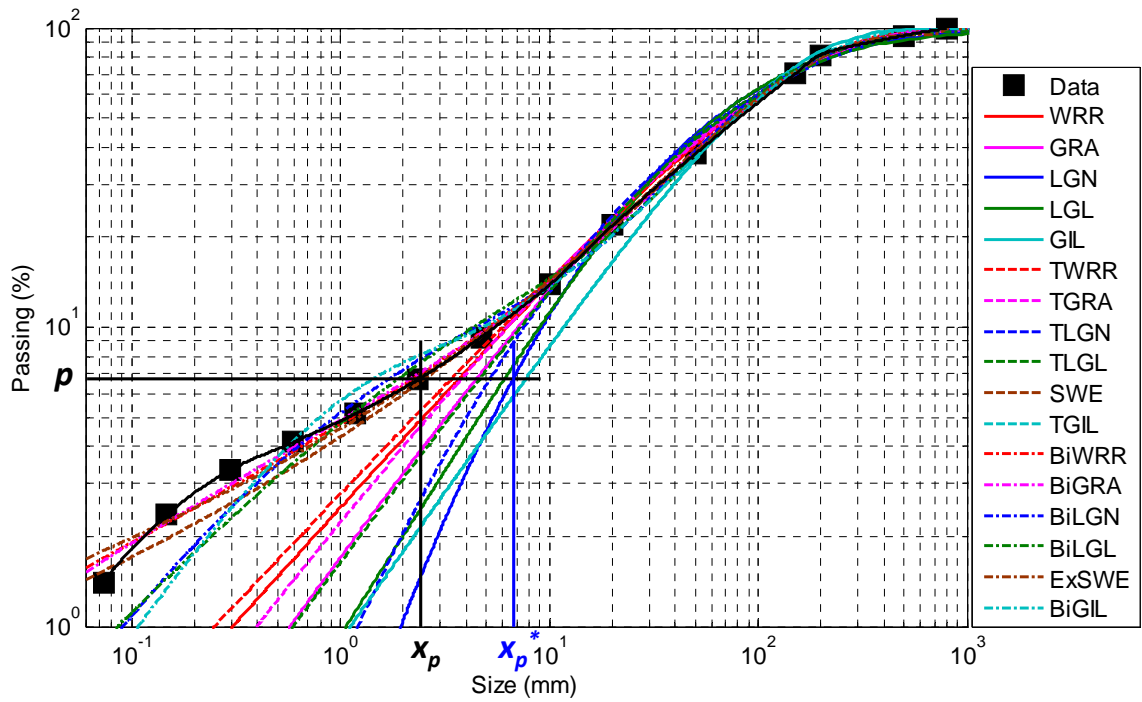


Figura 2. Ejemplo de ajustes a una cierta curva granulométrica. La línea continua que pasa por los puntos de datos es la curva interpolada para el cálculo de errores.

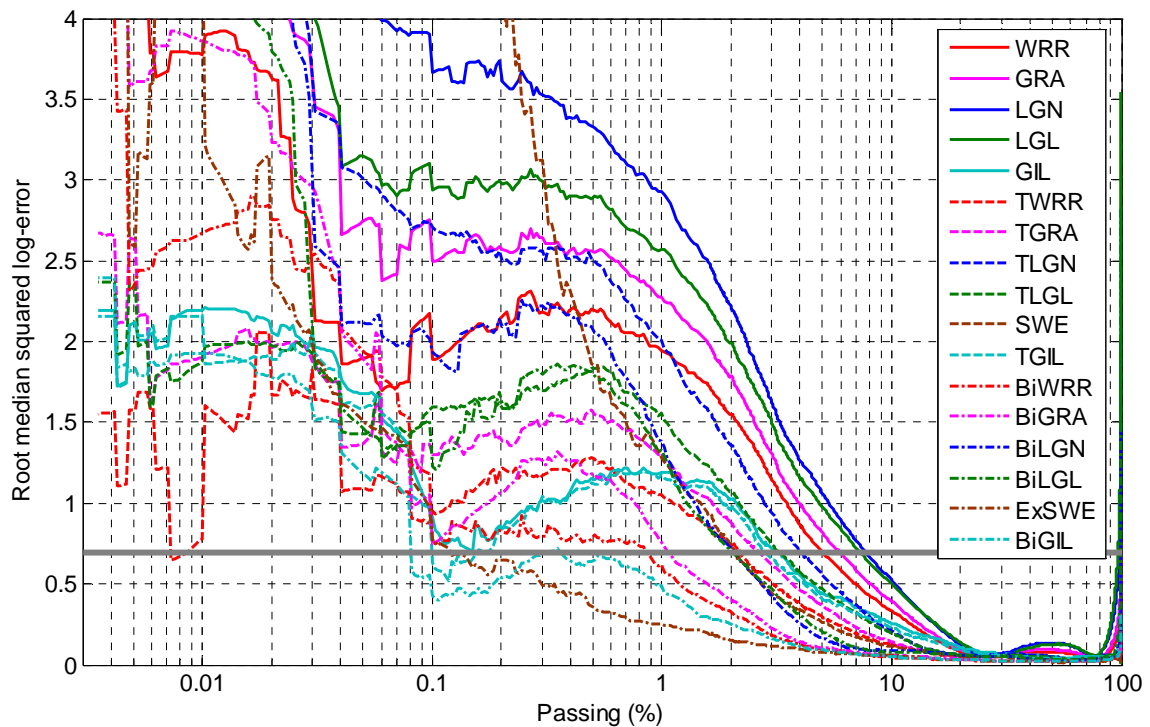


Figura 3. Errores logarítmicos: raíz cuadrada de la mediana de los errores logarítmicos cuadráticos de todos los datos para cada pasa. La línea gris horizontal indica error log 2, que corresponde a un error relativo del 100 % o del - 50 % (valor calculado doble o mitad del dato).



Los datos originales se han interpolado mediante polinomios de Hermite en un soporte de dos mil valores  $p$  elegidos de modo que su distribución replica la distribución de pasas de todos los datos experimentales en su conjunto; los  $x_p$  son los valores interpolados en los nodos  $p$ . Este procedimiento permite emplear un único conjunto de pasas al conjunto de pasas para todos los datos granulométricos (dentro del intervalo cubierto por cada uno). La curva interpolada se muestra en el ejemplo de la Figura 2.

Aunque hay grandes diferencias entre unas y otras distribuciones, la apariencia general de los errores se ve claramente en la Figura 3, en la que se representa la raíz de la mediana de los errores logarítmicos cuadráticos de todos los datos en función del porcentaje pasa: errores pequeños en la zona central (20-80 %), aumentando tanto hacia el extremo superior (80-100 %) como hacia los finos (2-20 %), y comportamiento errático, con valores generalmente muy elevados, en los muy finos (por debajo del 2 %). Para cada una de estas zonas y cada curva granulométrica, se calcula error el máximo y el medio:

$$e_L^{\max} = \max|e_L(p)| \quad , \quad p_{\inf} \leq p \leq p_{\sup} \quad (17)$$

$$e_L^{\text{rms}} = \left[ \frac{1}{(p_{\sup} - p_{\inf})} \int_{p_{\inf}}^{p_{\sup}} e_L^2(p) dp \right]^{1/2} \quad (18)$$

donde  $p_{\inf}$  y  $p_{\sup}$  son respectivamente los límites inferior y superior de cada zona ( $p_{\inf}$  para los muy finos es el mínimo pasa de la curva en cuestión y  $p_{\sup}$  para los gruesos es el máximo pasa). Las medianas de  $e_L^{\max}$  y  $e_L^{\text{rms}}$  (que pueden considerarse estimadores de los errores máximos y medio esperados para cada distribución y zona de pasas) se representan en la Figura 4. La Tabla 3 muestra las mismas medianas en forma de errores relativos en porcentaje; la función para la cual la mediana de  $e_L^{\text{rms}}$  es la menor para cada grupo de datos y zona de pasas aparece la primera, seguida por aquellas en las que dicha mediana no es diferente para una significación de 0.05 o, entre corchetes y cursiva, hasta tres distribuciones con errores significativamente diferentes en orden creciente de error. La mejor función truncada de tres parámetros se relaciona también, caso de que no haya ninguna de esas funciones entre las mejores.

La Tabla 4 da la relación de  $e_L^{\text{rms}}$  de cada función con ese mismo valor para la función del mismo tipo con menos parámetros: truncadas a semi-infinitas y bi-componentes a truncadas; se dan las medianas de dichas relaciones para cada grupo de datos.

Según lo esperado en razón del análisis de los  $R^2$ , las funciones truncadas generalmente dan mejores ajustes que sus versiones semi-infinitas. La excepción es TGIL, que no

aporta ninguna mejora significativa a su homóloga semi-infinita. Los errores máximos esperable en las funciones truncadas son (excepto TGIL) son generalmente menores 25 % y 10 % en los gruesos y zona central, creciendo en los finos hasta el 100 % y más; los errores medios esperables de las truncadas están bien por debajo dl 10 % en los gruesos y zona central, y entre 15 y 40 % en los finos. En la zona muy fina, los errores son muy altos en todas las funciones excepto algunas bi-componentes. El grupo 5 (molienda en laboratorio) resulta especialmente sensible al truncado para todas las funciones y en todas las zonas de pasa.

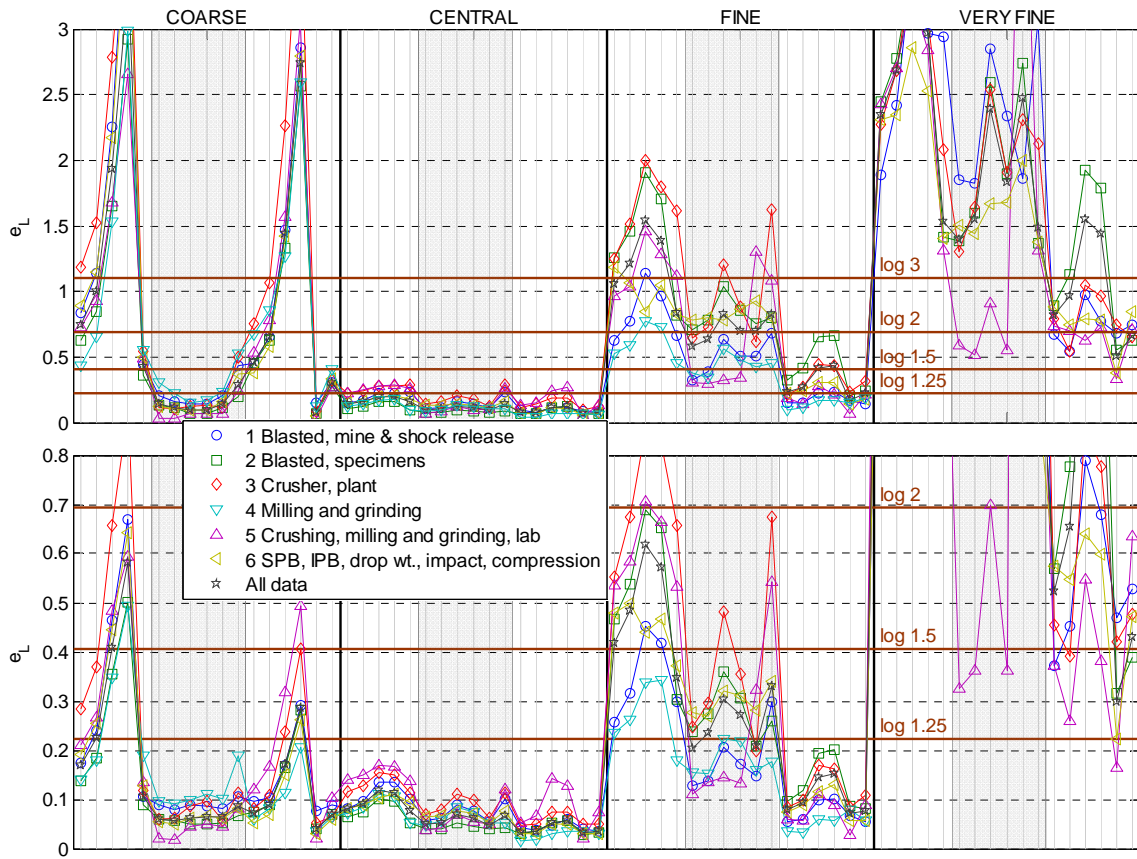


Figura 4. Errores logarítmicos para diferentes zonas de pasa. Gráfico superior: medianas de los errores máximos en valor absoluto para cada grupo de datos; gráfico inferior: medianas de la raíz de los errores cuadráticos medios. Para cada zona, el orden de las funciones es el mismo que en la Tabla 1: WRR, GRA, LGN, LGL, GIL, TWRR, TGRA, TLGN, TLGL, SWE, TGIL, BiWRR, BiGRA, BiLGN, BiLGL, ExSWE y BiGIL. Las áreas de funciones truncadas se han sombreado. Las líneas horizontales marcan niveles de error log 1.25, log 1.50, log 2 y log 3, que corresponden a errores relativos 25, 50, 10 y 200 % respectivamente.

Tabla 3. Medianas de  $e_L^{\text{rms}}$  y  $e_L^{\text{max}}$  (estimadores de los errores medio y máximos esperable); se expresan en forma de error relativo, en tanto por ciento.

Group	COARSE		CENTRAL			FINE			VERY FINE		
1	ExSWE	8 17	BiGIL	4 8	BiWRR	6 16	BiWRR	45 96			
	TGRA	8 18	BiGRA	4 8	BiGIL	6 15	BiGRA	57 72			
	SWE	9 23	ExSWE	4 9	BiGRA	6 16	ExSWE	60 97			
	TLGL	9 15	BiWRR	4 10	ExSWE	7 19	BiGIL	70 112			
	TLGN	9 15									
	BiGIL	9 36									
	TWRR	9 23									
			SWE	6 12	TWRR	14 39	SWE	234 544			
2	ExSWE	4 8	ExSWE	3 6	BiGIL	9 27	ExSWE	37 74			
	[TLGL]	5 7	[BiWRR]	3 7	ExSWE	9 23	BiGIL	47 87			
	[TLGN]	5 7	[BiGIL]	3 7	BiWRR	10 39	[BiWRR]	77 143			
			SWE	4 8	SWE	23 113	TWRR	174 300			
3	ExSWE	5 9	BiWRR	5 12	ExSWE	9 26	BiGRA	48 73			
	SWE	6 12	ExSWE	5 10	BiWRR	9 24	ExSWE	52 112			
	TWRR	6 12	BiGIL	5 13	BiGRA	10 31	BiWRR	58 120			
	TGRA	6 11	BiGRA	5 15	BiGIL	12 37	BiGIL	61 93			
	BiGIL	7 38					BiLGL	117 163			
							BiLGN	133 184			
			SWE	6 14	SWE	22 85	TWRR	192 269			
4	ExSWE	4 13	BiWRR	2 4	BiGRA	3 12	Few data				
	[BiWRR]	6 97	BiGRA	2 4	BiWRR	4 10					
	[BiGIL]	7 50	[BiGIL]	3 6	[BiLGL]	6 18					
	TGRA	10 25	TWRR	5 9	TGRA	17 41					
5	TGRA	2 3	ExSWE	2 5	ExSWE	3 7	ExSWE	18 39			
	ExSWE	2 3	[TWRR]	4 7	[BiGRA]	6 15	[BiGRA]	30 101			
	TWRR	2 3	[TGRA]	4 9	[BiWRR]	6 20	[TWRR]	39 80			
					TWRR	12 36					
6	ExSWE	3 5	BiWRR	3 7	ExSWE	6 16	ExSWE	25 46			
	[TGRA]	5 11	BiGRA	3 7	BiGIL	6 19	[BiGIL]	60 133			
	[BiWRR]	5 46	ExSWE	3 6	[BiWRR]	8 25	[BiGRA]	73 111			
			BiGIL	3 7							
		SWE	5 12	TGRA	31 123	TWRR	174 352				
All data	ExSWE	4 8	ExSWE	3 7	ExSWE	8 18	ExSWE	35 67			
	[TGRA]	6 12	[BiWRR]	3 8	BiGIL	8 25	[BiGIL]	54 94			
	[TWRR]	6 15	[BiGIL]	4 8	BiWRR	8 26	[BiWRR]	69 127			
		SWE	5 10	TWRR	23 79	TWRR	171 302				

Para cada grupo y zona de pasas, se dan en letra normal las distribuciones cuyas medianas de  $e_L^{\text{rms}}$  no son diferentes con un 0.05 de significación; si lo son, se ponen en cursiva y entre corchetes las distribuciones que siguen a la mejor, hasta completar tres distribuciones. La mejor función truncada de tres parámetros se relaciona también, caso de que no haya ninguna de esas funciones entre las mejores.

Tabla 4. Ratio (medianas) de  $e_L^{\text{rms}}$  de las semi-infinitas a las truncadas y de las truncadas a las bi-componentes.

		SEMI-INFINITE/TRUNCATED				TRUNCATED/BI-COMPONENT			
		CO	CE	FI	VF	CO	CE	FI	VF
WRR	Group 1	1.8	1.2	1.7	1.4	0.9	1.5	2.3	2.8
	Group 2	2.6	1.5	1.9	1.8	0.8	1.3	2.2	1.6
	Group 3	4.0	1.4	2.2	1.8	0.8	1.6	2.4	1.8
	Group 4	1.1	1.3	1.5	-	1.7	2.5	3.6	-
	Group 5	9.6	3.8	5.3	4.7	0.2	0.5	1.7	0.7
	Group 6	3.0	1.2	1.6	1.5	1.1	2.3	3.6	2.0
	All	2.7	1.4	1.8	1.8	0.9	1.5	2.6	1.7
GRA	Group 1	2.8	1.3	1.9	1.4	0.7	1.5	2.1	3.6
	Group 2	3.7	1.7	1.9	1.7	0.7	1.3	2.3	1.5
	Group 3	4.6	1.4	2.0	1.7	0.6	1.6	2.6	2.7
	Group 4	1.6	1.3	1.5	-	1.0	2.6	5.5	-
	Group 5	17.6	3.1	4.2	5.1	0.1	0.5	1.4	0.6
	Group 6	4.0	1.3	1.6	1.6	0.8	2.2	3.3	2.0
	All	3.8	1.5	1.9	1.7	0.7	1.5	2.6	1.6
LGN	Group 1	5.5	1.5	1.8	1.3	0.5	1.6	2.7	2.7
	Group 2	6.7	1.7	1.7	1.4	0.3	1.1	2.0	1.3
	Group 3	7.0	1.4	1.7	1.4	0.4	1.4	2.4	2.4
	Group 4	3.5	1.2	1.6	-	0.7	2.4	3.8	-
	Group 5	14.5	2.5	3.9	2.8	0.1	0.4	1.1	0.7
	Group 6	7.9	1.4	1.6	1.3	0.4	1.7	2.5	1.9
	All	6.8	1.6	1.7	1.4	0.4	1.3	2.3	1.4
LGL	Group 1	7.3	1.6	2.0	1.5	0.3	1.3	2.0	2.2
	Group 2	9.6	1.9	1.8	1.6	0.2	0.9	1.6	1.1
	Group 3	8.9	1.5	1.8	1.6	0.2	1.3	2.3	1.9
	Group 4	4.6	1.3	1.6	-	0.4	2.0	3.6	-
	Group 5	18.7	3.1	4.0	5.0	0.1	0.3	1.1	0.6
	Group 6	10.2	1.5	1.7	1.5	0.3	1.5	2.6	1.9
	All	9.5	1.8	1.8	1.6	0.2	1.2	2.0	1.2
SWE	Group 1	-	-	-	-	1.0	1.1	1.7	2.4
	Group 2	-	-	-	-	1.0	1.1	1.8	4.4
	Group 3	-	-	-	-	1.0	1.1	1.5	2.4
	Group 4	-	-	-	-	1.3	1.1	1.9	-
	Group 5	-	-	-	-	1.6	2.2	12.0	25.6
	Group 6	-	-	-	-	1.5	1.5	4.7	5.8
	All	-	-	-	-	1.0	1.2	2.2	4.5
GIL	Group 1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.5	2.3	4.6	2.6
	Group 2	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.4	2.8	1.5
	Group 3	1.0	1.0	1.0	1.0	1.8	2.2	6.1	2.7
	Group 4	1.0	1.0	1.0	-	2.4	2.5	6.3	-
	Group 5	1.0	1.0	1.0	1.0	0.9	1.5	5.6	3.1
	Group 6	1.0	1.0	1.0	1.0	1.7	2.9	5.9	1.7
	All	1.0	1.0	1.0	1.0	1.2	1.8	4.3	1.9

Notas:

- Los blancos corresponden al Grupo 4 en la región muy fina, que solo tiene tres curvas, y a las relaciones semi-infinitas/truncadas, no aplicable a la Swebrec.
- Los colores corresponden a los intervalos:  $\infty$ -5-2-1.05 (verdes), 1.05-0.95 (gris), y 0.95-0.5-0.2-0 (rojos); más intensos cuanto más alejados de 1.

Tabla 5. Resumen de errores; los esperados son medianas de  $e_L^{rms}$  y los máximos son medianas de  $e_L^{max}$  de todos los datos; se expresan en forma de errores relativos (%).

Zona	Funciones	Nº de param.	Error esperado (%)	Error máximo (%)
Gruesos (100-80 %)	· ExSWE	5	4	8
	· Todas las truncadas de 3 p: TGRA, TWRR, TLGN, SWE, TLGL	3	6-7	10-15
	· BiGIL	7	7	35
	· BiWRR, BiGRA	5	7-9	58-92
	· TGIL	4	9	34
	· GIL	3	11	53
	· WRR	2	18	111
	· BiLGN	5	19	320
Central (80-20 %)	· ExSWE	5	3	7
	· BiWRR, BiGRA	5	3-4	8
	· BiGIL	7	4	8
	· Todas las truncadas de 3 p: SWE, TWRR, TGRA, TLGL, TLGN	3	5-7	10-15
	· TGIL	4	7	15
	· BiLGN, BiLGL	5	6	12-13
	· GIL	3	8	17
	· WRR	2	8	15
Finos (20-2 %)	· ExSWE, BiWRR	5	8	18-26
	· BiGIL	7	8	25
	· Otras bi-componentes de 5 p: BiGRA, BiLGN, BiLGL	5	10-16	31-54
	· TWRR, SWE, TGRA	3	23-26	79-101
	· Otras truncadas de 3 p: TLGL, TLGN	5	31-36	102-129
	· TGIL	4	39	128
	· GIL	3	42	132
	· WRR	2	52	187
Muy finos (<2 %)	· ExSWE	5	35	67
	· BiGIL	7	54	94
	· BiWRR, BiGRA	5	69-93	127-163
	· TWRR	3	171	302
	· BiLGL, BiLGN	5	189-198	321-370
	· TGIL	4	219	342
	· TGRA	3	227	370

Las funciones bi-componentes semi-infinitas no son mejores que las truncadas en la zona gruesa, probablemente debido a la asíntota de las primeras a tamaño infinito, que se transforma en una tangente en el punto de tamaño máximo en las truncadas; la ExSWE, que es en sí misma truncada, mejora un poco a su homóloga SWE en esta zona, siendo la que mejor la ajusta. La mayor parte de las funciones truncadas de tres parámetros están entre las mejores en la zona gruesa para la mayor parte de tipos de datos, con errores desde los 8-9 % en el grupo 1 a 2 % en el grupo 5. Esta ventaja se difumina en la importante zona central donde algunas bi-componentes son muy exactas, con errores medios y máximos de 5 % y 10 % respectivamente; estos valores, sin

embargo, no son mucho menores que los de algunas truncadas: SWE, TWRR y TGRA son generalmente una buena opción en la zona central si se considera el esfuerzo adicional de ajustar una función de cinco parámetros. Para el grupo 5, TWRR y TGRA quedan inmediatamente detrás de ExSWE, incluso en la zona central. La razón de este especialmente buen comportamiento de las truncadas en este grupo es que es el menos sesgo hacia la derecha tiene (de hecho más de la mitad de las curvas granulométricas de ese grupo son sesgadas a la izquierda).

Las ventajas de las bi-componentes se hacen evidentes en el intervalo fino en el que los errores (máximo y medio generalmente menores del 30 y el 10 % respectivamente en los mejores casos) son frecuentemente menores de la mitad de las truncadas. También en la zona de muy finos los errores medios son moderados para algunas bi-componentes (pueden esperarse valores del orden del 50 % para las mejores funciones en algunos grupos) aunque los errores máximos superan a menudo el 100 %, incluso en los mejores casos. La ExSWE es claramente la mejor en esta zona, seguida por BiGIL (que tiene siete parámetros) y BiWRR. De hecho, ExSWE está entre las mejores en todos los grupos y zonas; otras bi-componentes con buen comportamiento en general son BiGIL, BiWRR y, en menor medida, BiGRA. Los resultados de BiLGN y BiLGL son mediocres, con errores sistemáticamente mayores que las demás de su tipo.

La Tabla 5 resume los errores en las diferentes zonas; los errores esperados son las medianas de  $e_L^{rms}$  y los máximos las medianas de  $e_L^{max}$ .

A la vista de los resultados anteriores, en que las funciones truncadas dan buen juego en las zonas gruesa y central, puede plantearse la cuestión de hasta qué punto podrían emplearse si los pasas de interés están por debajo del 20 %. La Figura 5 trata de resolver esta cuestión; en ella se representan los errores máximos (medianas de todas las curvas granulométricas) para las ditribuciones truncadas y bi-componentes, en función del porcentaje pasa. Las mejores truncadas, SWE, TWRR y TGRA, tienen errores máximos esperables menores de un 15 % a 10 % pasa, mientras que a 20 % pasa el error es de sólo un 6 %. Por debajo del 10 % pasa, los errores máximos esperables aumentan rápidamente: al 8 % pasa son entre el 15 (SWE) y el 20 % (TGRA), y al 5 % pasa son entre el 30 % (SWE) y el 45 % (TGRA): el uso de bi-componentes debe ya considerarse seriamente.

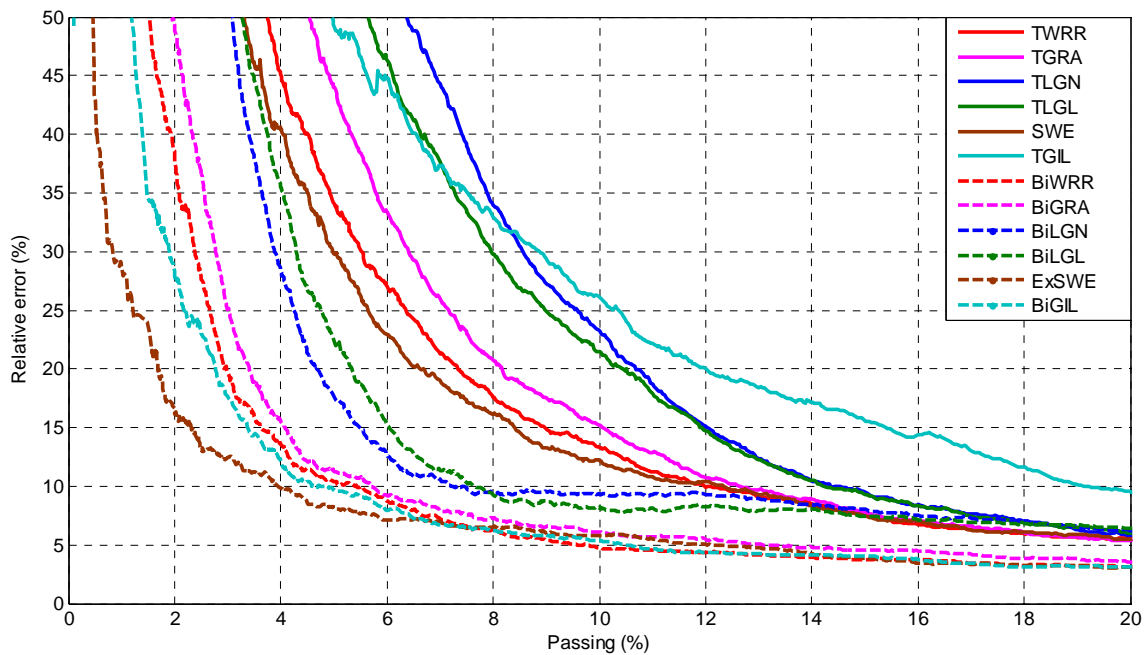


Figura 5. Errores locales máximos: medianas de todos los datos.

Se ha tratado de buscar alguna relación entre las mejores funciones que ajustan una determinada curva granulométrica y los estadísticos descriptivos mencionados en el apartado 2: coeficiente de variación, pendiente logarítmica, intervalos logarítmicos de pasas y tamaños, coeficiente de asimetría y curtosis. En la Figura 6 se han dibujado diagramas de caja (las barras indican el espacio intercuartil) de esos parámetros para las curvas granulométricas que se ajustan mejor con una cierta distribución en cada zona de pasas; se han dibujado sólo las distribuciones mejores en cada zona, considerando tales aquellas que al menos son las que mejor ajustan un 4 % de los casos; las distribuciones que son las mejores en más del 10 % de los casos se resaltan con los diagramas rellenos. Los dos gráficos superiores analizan la dispersión; en general, los datos para los que las distribuciones truncadas funcionan mejor tienen dispersiones bajas (excepto en los gruesos para la TWRR), mientras que las bi-componentes tienden a ser mejores si la dispersión es alta. Hay que decir que las mejores funciones (las que ajustan mejor más del 10 % de los casos) suelen estar centradas con la media global (marcada por las líneas horizontales), lo que quiere decir que funcionan bien con dispersiones grandes y pequeñas. Esto también es aplicable a otros indicadores.

No hay tendencias en los intervalos logarítmicos de  $x$  y  $p$ .

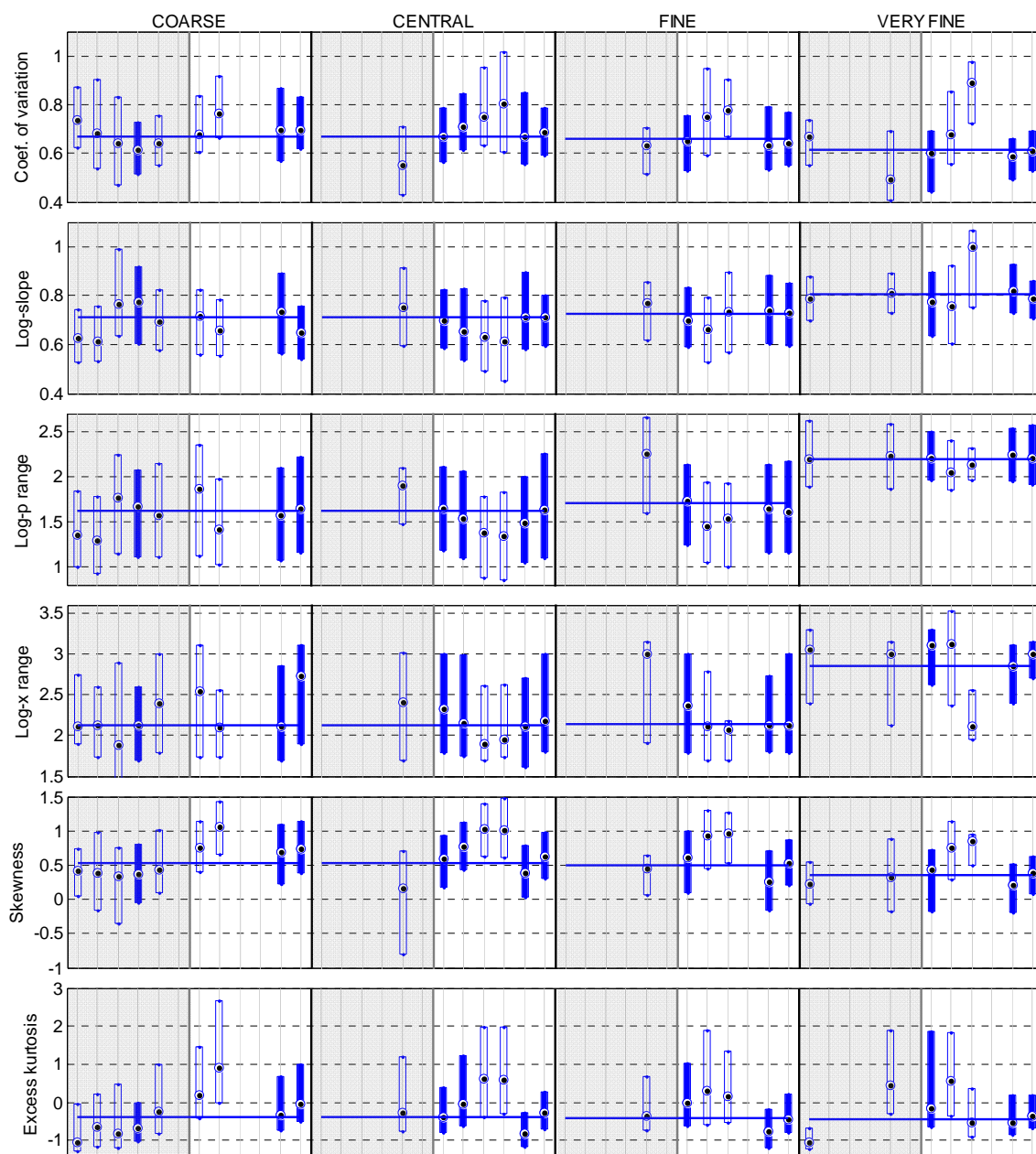


Figura 6. Parámetros descriptivos de las curvas granulométricas mejor ajustadas por cada una de las distribuciones. Sólo se muestran las truncadas y las bi-componentes. Las barras corresponden al rango intercuartil del parámetro de las curvas mejor ajustadas por cada distribución. La posición de las distribuciones es, de izquierda a derecha en cada zona: TWRR, TGRA, TLGN, TLGL, SWE, TGIL, BiWRR, BiGRA, BiLGN, BiLGL, ExSWE, BiGIL. Las áreas de funciones truncadas se han sombreado. Las líneas horizontales son las medianas de los parámetros para todas las curvas granulométricas con datos en el intervalo que corresponda.

El buen comportamiento de las funciones truncadas en los gruesos se asocia a granulometrías con bajo coeficiente de asimetría, como se observó con el comportamiento peculiar del grupo 5; esto parece lógico ya que coeficientes de asimetría bajos o negativos conllevan pequeñas colas derechas, apropiadas para



funciones que no tienen cola derecha, como las truncadas. Incluso la ExSWE (que es truncada), la mejor función en la mayor parte de los casos, tiene cierta tendencia a bajos coeficientes de asimetría (colas a la izquierda), mientras que todas las demás bi-componentes se comportan mejor con coeficiente de asimetría alto (colas a la derecha). La kurtosis no añade nada al análisis ya que replica las tendencias del coeficiente de asimetría, con el que tiene relación en distribuciones asimétricas como son las granulométricas. Kurtosis alta puede ser un signo de bimodalidad por lo que parece natural una cierta preferencia de estas funciones en esos casos.

## **6 Conclusiones**

Se ha presentado una evaluación a gran escala de diecisiete distribuciones: Weibull (WRR), Grady (GRA), log-normal (LGN), log-logística (LGL) y Gilvarry (GIL), en su forma simple de dominio semi-infinito, en una forma transformada de tipo truncada, y en forma bi-componente; junto a ellas, la distribución Swebrec (SWE) y su extensión bi-componente (ExSWE) completan la lista. La base de datos de fragmentación es de 1234 curvas granulométricas obtenidas por cribado.

En términos de coeficiente de determinación, WRR es la distribución de dos parámetros que mejor describe la granulometría de los fragmentos de roca. Entre las truncadas, SWE y TWRR son las mejores, y entre las bi-componentes de cinco parámetros, BiWRR y ExSWE. En términos de varianza no explicada, el truncado la divide generalmente por un factor de alrededor de cuatro, y las distribuciones bi-componente la vuelve a dividir respecto a las truncadas por un factor de entre 2 y 3, en la mayor parte de los casos.

Se han calculado los errores en la estimación de tamaños por las distribuciones ajustadas en cuatro zonas: gruesos, central, finos y muy finos, definidas arbitrariamente por los porcentajes pasa 100-80-20-2-0 %. Los errores son bajos en la zona central, y aumentan hacia los extremos gruesos y finos. Se extraen las siguientes conclusiones:

- Las funciones bi-componentes no son mejores que las truncadas en la zona gruesa para la mayor parte de los datos; esto no reza para la ExSWE, que en sí misma es truncada.
- Las distribuciones truncadas de tres parámetros trabajan también muy bien en la zona central, con errores no mucho mayores que las mejores bi-componentes (ExSWE, BiWRR y BiGRA) y, en algunos casos, menores que su correspondiente

bi-componente (BiLGL y BiLGN). TWRR, TGRA y SWE son generalmente las mejores funciones truncadas en todos tipos de material; estas funciones aún pueden usarse si se aceptan errores de un 25 % en los finos, aunque el error máximo puede llegar a ser mayor del 100 %.

- El valor de las funciones bi-componentes se hace patente en los finos, donde los errores medios y máximos esperables son a menudo menores que la mitad de los de las truncadas. También en los muy finos, los errores son moderados para algunas bi-componentes (ExSWE y, en menor medida, BiWRR y BiGRA), aunque los errores máximos pueden ser muy grandes.
- ExSWE es en general la mejor función, para casi todos los grupos de datos y en todo el intervalo de pasas. Le siguen BiWRR y BiGRA (excepto en los gruesos, donde las truncadas son preferibles). BiLGN y BiLGL son generalmente las peores funciones bi-componentes. Excepto en los gruesos, BiGIL suele estar a la par de la ExSWE como mejor función de ajuste pero, dado que tiene siete parámetros, no hay razones para utilizarla en lugar de alguna de las mejores funciones de cinco parámetros.

No pueden darse indicaciones claras sobre qué características de una curva granulométrica conducen a un mejor ajuste por una u otra distribución, si bien se han observado las siguientes tendencias:

- Las bi-components son más apropiadas para dispersiones grandes.
- El buen comportamiento de las distribuciones truncadas de tres parámetros en los gruesos está asociada a granulometrías con coeficiente de asimetría y curtosis bajos, habiendo cierta preferencia por algunas bi-componentes (BiGR, BiLGN y BiLGL) para asimetrías y curtosis altas.

Dado que ajustar una función de cinco parámetros es significativamente más difícil que ajustar una de tres parámetros, las distribuciones truncadas son la mejor elección si los datos de interés no van más allá del 20 % pasa. Si se tiene interés en el material más fino, algunas distribuciones truncadas pueden aun servir (TWRR, SWE, TGRA) hasta aproximadamente 8-10 % pasa, pero debe considerarse seriamente el uso de distribuciones bi-componentes, especialmente ExSWE, BiWRR y BiGRA. Estas funciones son imprescindibles si se desea ajustar con cierta exactitud por debajo de esos valores.

## Referencias

- [1] Cunningham CVB. The Kuz-Ram model for prediction of fragmentation from blasting. In: Proceedings of the 1st international symposium on rock fragmentation by blasting, Luleå, Sweden, 22-26 August 1983; 1983. p. 439-52.
- [2] Cunningham CVB. Fragmentation estimations and the Kuz-Ram model – four years on. In: Proceedings of the 2nd international symposium on rock fragmentation by blasting, Keystone, Colorado, USA, 23-26 August 1987; 1987. p. 475-87.
- [3] Ouchterlony F, Niklasson B, Abrahamsson S. Fragmentation monitoring of production blasts at MRICA. In: Proceedings of the 3rd international symposium on rock fragmentation by blasting, Brisbane, Australia, 26-31 August 1990; 1990. p. 283-9.
- [4] Otterness RE, Stagg MS, Rholl SA, Smith NS. Correlation of shot design parameters to fragmentation. In: Proceedings of the 7th annual symposium on explosives and blasting research, Las Vegas, Nevada, USA, 6-7 February 1991; 1991. p. 179-90.
- [5] Kou S, Rustan A. Computerized design and result prediction of bench blasting. In: Rossmann HP, editor. Proceedings of the 4th international symposium on rock fragmentation by blasting (FRAGBLAST 4), Vienna, 5-8 July 1993; 1993. p. 263-71.
- [6] Djordjevic N. Two-component model of blast fragmentation. In: Proceedings of the 6th international symposium on rock fragmentation by blasting, Johannesburg, South Africa, 8-12 August 1999; 1999. p. 213-9.
- [7] Kanchibotla SS, Valery W, Morrell S. Modelling fines in blast fragmentation and its impact on crushing and grinding. In: Proceedings of Explo'99 – A conference on rock breaking, Kalgoorlie, Australia, 7-11 November 1999; 1999. p. 137-44.
- [8] Chung SH, Katsabanis PD. Fragmentation prediction using improved engineering formulae. *Int J Blasting and Fragmentation* 2000; 4(3-4):198-207.
- [9] Thornton DM, Kanchibotla SS, Esterle JS. A fragmentation model to estimate ROM size distribution of soft rock types. In: Proceedings of the 27th annual conference on explosives and blasting technique, Orlando, Florida, 28-31 January 2001; 2001. p. 41-53.

- [10] Lynch AJ (Ed.). Mineral crushing and grinding circuits – Their simulation, optimisation, design and control. Developments in Mineral Processing. New York: Elsevier Scientific Publishing; 1977.
- [11] Karra VK. Development of a model for predicting the screening performance of a vibrating screen. CIM Bulletin 1979;72(804):167–71.
- [12] Napier-Munn TJ, Lynch AJ. The modelling and computer simulation of mineral treatment processes – current status and future trends. Minerals Engineering 1992;5(2):143–67.
- [13] Napier-Munn TJ, Morrell S, Morrison RD, Kojovic T. Mineral comminution circuits: their operation and optimisation. JKMRRC Monograph Series in Mining and Mineral Processing. Brisbane, QLD: The University of Queensland; 1996.
- [14] Marlin TE. (Ed.). Process control – designing processes and control systems for dynamic performance. New York: McGraw-Hill; 2000.
- [15] King RP. Modeling and simulation of mineral processing systems. Oxford: Butterworth-Heinemann; 2001.
- [16] Fuerstenau MC, Han KN. Principles of mineral processing. Littleton, CO: Society for Mining, Metallurgy and Exploration; 2003.
- [17] Liu Y, Spencer S. Dynamic simulation of grinding circuits. Minerals Engineering 2004;17(11-12):1189–98.
- [18] Smith H. Process simulation and modelling. In: Mike DA, Wills BA, editors, Developments in mineral processing, vol. 15, Advances in gold ore processing. Philadelphia, Pennsylvania: Elsevier; 2005. p. 109–21.
- [19] Wills BA, Napier-Munn TJ. Mineral processing technology: An introduction to the practical aspects of ore treatment and mineral recovery. London: Elsevier; 2006.
- [20] Gupta A, Yan DS. Mineral processing design and operations. Amsterdam: Elsevier; 2006.
- [21] Rosin P, Rammler E. The laws governing the fineness of powdered coal. J Inst Fuel 1933; 7:29-36.
- [22] Weibull W. A statistical theory of the strength of materials. Ingeniörvetenskapsakademiens Handlingar 1939; 151:1-45.
- [23] Weibull W. A statistical distribution function of wide applicability. J Appl Mech ASME 1951; 18:293-7.

- [24] Ouchterlony F. The Swebrec© function, linking fragmentation by blasting and crushing. *Mining Technology (Trans Inst Min Metal A)* 2005; 114:A29-44.
- [25] Ouchterlony F. What does the fragment size distribution of blasted rock look like? In: Holmberg R, editor. *Proceedings of the 3rd world conference on explosives and blasting, Brighton, 13–16 September 2005; 2005.* p. 189-99.
- [26] Grady DE, Kipp ME. Geometric statistics and dynamic fragmentation. *J Appl Phys* 1985; 58(3):1210-1222.
- [27] Grady DE. Particle size statistics in dynamic fragmentation. *J Appl Phys* 1990; 68(12):6099-6105.
- [28] Gilvarry JJ. Fracture of brittle solids. I. Distribution function for fragment size in single fracture (Theoretical). *J Appl Phys* 1961; 32(3):391-9.
- [29] Gilvarry JJ, Bergstrom BH. Fracture of brittle solids. II. Distribution function for fragment size in single fracture (Experimental). *J Appl Phys* 1961; 32(3):400-10.
- [30] Sil'vestrov VV. Fragmentation of a steel sphere under a high-velocity impact on a highly porous thin bumper. *Combust Expl Shock Waves* 2004; 40(2):238-52.
- [31] Sil'vestrov VV. Application of the Gilvarry distribution to the statistical description of fragmentation of solids under dynamic loading. *Combust Expl Shock Waves* 2004; 40(2):225-37.
- [32] Sanchidrián JA, Ouchterlony F, Moser P, Segarra P, López LM. Performance of some distributions to describe rock fragmentation data. *Int J Rock Mech Mining Sci* 2012; 53:18–31.
- [33] Sanchidrián JA, Segarra P, López LM, Ouchterlony F, Moser P. On the performance of truncated distributions to describe rock fragmentation. In: Sanchidrián JA, Singh AK, editors. *Measurement and Analysis of Blast Fragmentation*, New Delhi, India, 24-25 November 2012. London: Taylor and Francis; 2013. p. 87-96.
- [34] Sanchidrián JA, Ouchterlony F, Segarra P, Moser P. Size distributions of fragmented rock: truncated or bi-component? *Int J Rock Mech Mining Sci* (submitted).
- [35] Matlab 7.13. Natick, MA: The MathWorks Inc; 2011.
- [36] Coleman TF, Li Y. On the convergence of reflective Newton methods for large-scale nonlinear minimization subject to bounds. *Mathematical Programming* 1994; 67(2): 189-224.

- [37] Coleman TF, Li Y. An interior, trust region approach for nonlinear minimization subject to bounds. *SIAM Journal on Optimization* 1996; 6(2):418-45.
- [38] Lagarias JC, Reeds JA, Wright MH, Wright PE. Convergence properties of the Nelder-Mead Simplex method in low dimensions. *SIAM Journal of Optimization* 1998; 9(1): 112-47.