IMPLEMENTACIÓN DE UN ALGORITMO DE BÚSQUEDA DE POSICIONES DE EQUILIBRIO PONDERADO

Lantarón, Sagrario (sagrario.lantaron@upm.es)
López, Mª Dolores (marilo.lopez@upm.es)
Departamento de Matemática e Informática Aplicadas a la Ing Civil
Universidad Politécnica de Madrid
Rodrigo, Javier (jrodrigo@upcomillas.es)
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Pontificia Comillas de Madrid

RESUMEN

En esta ponencia se presenta un algoritmo que determina las posiciones de equilibrio en un juego de competición política entre dos partidos representados en el plano de políticas por dos puntos. Para modelar una situación que se ajuste lo más posible a la realidad política de los diferentes países, se considera que los votantes están distribuidos en tipos posicionados en el plano por puntos que representan sus preferencias políticas y que dichos tipos no están equidistribuidos (se les asigna un peso). El estudio teórico de la existencia y unicidad de posiciones de equilibrio en el sentido clásico de Nash se hace aplicando herramientas geométricas como son los cierres convexos. El algoritmo de búsqueda de dichas posiciones de equilibrio cuando existen, se implementa en un caso práctico de la política en España, basado en el estudio 2742 (BARÓMETRO NOVIEMBRE 2007) realizado por el CIS.

***Palabras claves*:**

Economía Política; Teoría de juegos; Programación; Geometría Computacional

***Clasificación JEL (Journal Economic Literature)*:**

C61, C70, C90, C44

***Área temática*:** Matemática Aplicada a los métodos cuantitativos.

1. INTRODUCCIÓN

El problema que se trata es el siguiente: dos jugadores eligen su posición sobre el plano, en el cual se encuentran situados n puntos dados por sus dos coordenadas. Consideramos que cada jugador atrapa aquellos puntos que están más próximos a él que al contrario. Para contabilizar los puntos ganados por cada jugador, trazamos la mediatriz del segmento que une las posiciones de los dos jugadores. Cada uno se llevará, por tanto, los puntos situados en su semiplano. El ganador será el jugador que consigue más puntos (Serra y Revelle, 1994; Smid, 1997; Aurenhammer y Klein, 2000; Okabe y otros, 2000).

Este sencillo juego puede traducirse en términos de Economía Política: se pueden considerar los dos jugadores como dos partidos políticos p y q, cuyas posiciones vienen dadas por las políticas ofrecidas, t_1 y t_2, del espacio de políticas bidimensional $T=R^2$, y la nube de puntos $v_i=(v_{i1}, v_{i2})$ con $i=1,\dots,n$, las correspondientes posiciones de los votantes de una cierta población, con v_i perteneciente al conjunto de tipos $H=\{v_1 ,\dots, v_n\}\subset R^2$ que clasifican a los votantes según esas políticas (Roemer, 2001; Abellanas y otros, 2006).

Para modelar una situación que se ajuste lo más posible a la realidad política de los diferentes países, debemos considerar que esos tipos v_i que representan las posiciones de los votantes, no están equidistribuidos. Es decir, existirán posiciones respecto a ciertas políticas que serán respaldadas por tipos de votantes que serán más numerosos que las posturas tomadas por otros tipos. A modo de ejemplo decir que tipos que representan posiciones extremas sobre la mayoría de acciones políticas suelen tener representaciones menos numerosas que aquellas que representan posiciones más moderadas. Por todo ello, parece razonable plantear una distribución de los tipos ponderada.

Una vez fijado el modelo teórico la idea es encontrar las posiciones de equilibrio en el sentido clásico de Nash. Se presentará una metodología novedosa para ello basada en herramientas de la Geometría Computacional. Dicha metodología puede implementarse a través de un algoritmo que se pone en práctica en un problema concreto de la política nacional basado en el estudio 2742 (BARÓMETRO NOVIEMBRE 2007) realizado por el Centro de Investigaciones Sociológicas (CIS).

Esta puesta en práctica permite sacar conclusiones e interpretaciones que se adaptan a la situación política actual.

2. MODELO TEÓRICO

Se define en el juego planteado la función de utilidad para cada tipo v_i como:

$$\gamma(t,v_i) = -d(t,v_i)^{2}$$

donde $d(t,v_i)$ representa la distancia entre la política t y el tipo v_i, consideramos una distribución de los diferentes tipos según una medida de probabilidad F dada por:

$$F(\{v_i\})=k_i \text{ con } k_1+k_2+...+k_n=1,\ k_i\geq 0$$

Con estas consideraciones el juego planteado se modela de la siguiente forma: Representamos t^1, t^2, $v_1,...,v_n$ como los puntos del plano ya introducidos anteriormente, trazamos la mediatriz entre t^1 y t^2 (suponiendo $t^1\neq t^2$) y consideramos los dos semiplanos que define dicha mediatriz. Llamamos $\Omega(t^1,t^2)$ al conjunto de tipos que prefieren a t^1 frente a t^2, es decir, aquellos que pertenecen al semiplano en el que esté t^1, supongamos que sean $v_{i_1},...,v_{i_{n_{t_1}}}$, donde n_{t_1} es el número de tipos que pertenecen al semiplano que contiene a t^1. Se tiene que la fracción de votantes que elegiría la política t^1 será:

$$\rho(t^1,t^2) = F(\Omega(t^1,t^2)) = \sum_{j=1}^{n_{t1}} k_{i_j} \qquad \text{si} \quad t^1 \neq t^2$$

siendo k_{i_j} j=1,...n_{t1}, la medida de $\{v_{i_j}\}$.

Nota: Se ha considerado que los elementos equidistantes entre t^1 y t^2, es decir los que están en la mediatriz, prefieren a t^1. Así no existen puntos indiferentes entre las dos políticas si $t^1\neq t^2$.

Con todo ello, las funciones de ganancia quedan de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{r} \Pi^1(t^1,t^2) = n\sum_{j=1}^{n_{t1}} k_{i_j} \\ \Pi^2(t^1,t^2) = n - \Pi^1(t^1,t^2) \end{array}\right\} \text{ si } t^1 \neq t^2 \quad \text{y} \qquad \Pi^1(t^1,t^2) = \Pi^2(t^1,t^2) = \frac{n}{2} \quad \text{si } t^1 = t^2$$

Es decir, en el caso $t^1\neq t^2$, si definimos el peso del tipo v_{i_j} como $n\,k_{i_j}$, la ganancia de la política t^1 será la suma de los pesos de los tipos que están en el mismo semiplano que t^1 (incluyendo los de la mediatriz). Análogo para t^2.

Se cumple que $\sum_{i=1}^{n} peso(v_1) = \sum_{i=1}^{n} nk_i = n$.

2.1. Estudio del equilibrio

Se estudian condiciones que garanticen la existencia de posiciones de equilibrio de Nash en el juego planteado, así como la unicidad de éste.

2.1.1 Existencia de equilibrio

a) Condición necesaria de existencia

Proposición 1: Si las ganancias de un juego son complementarias y, si dada una posición *t* de un jugador, existe una estrategia del otro para conseguir una ganancia de $\frac{n}{2}$, necesariamente las posiciones de equilibrio han de ser posiciones (t^1,t^2) con $\Pi^1(t^1,t^2) = \Pi^2(t^1,t^2) = \frac{n}{2}$.

b) Condición necesaria y suficiente de existencia

Definición 1: El peso de un conjunto $\{v_{i_1},...,v_{i_k}\}$ es $\sum_{j=1}^{k} peso\,(v_{i_j})$.

Definición 2: Un conjunto minimal de puntos de la nube de peso superior a $\frac{n}{2}$ es un subconjunto de puntos de la nube de peso mayor que $\frac{n}{2}$ que no contiene a otro subconjunto de puntos de peso mayor que $\frac{n}{2}$.

Proposición 2: Sean todos los posibles conjuntos minimales de puntos de la nube de peso superior a $\frac{n}{2}$. Entonces existen posiciones de equilibrio en el juego con ponderaciones si y sólo si la intersección de los cierres convexos (de Berg y otros, 1997) de esos conjuntos de puntos es no vacía. En este caso, las únicas posiciones de equilibrio son cualquier posición (t^1,t^2) con t^1 y t^2 pertenecientes a esa intersección.

2.1.2 Unicidad

Puede verificarse que esta intersección de cierres convexos es, en general, a lo más en un punto:

Eliminado: 4

Proposición 3: La intersección de los posibles cierres convexos de conjuntos minimales de peso mayor que $\frac{n}{2}$ es a lo más en un punto si no están los n puntos de la nube alineados.

De esta forma se puede concluir que:

Proposición 4: El equilibrio en el juego con ponderaciones si existe es único y de la forma (t, t), es decir con los dos partidos eligiendo la misma política, salvo en algunos casos en los que todos los puntos están alineados.

3. ALGORITMO

Desarrollamos un algoritmo que permite encontrar la posición de equilibrio en el juego planteado cuando existe, basado en las técnicas que se usan para demostrar la unicidad del equilibrio:

Se pretende encontrar la intersección de los cierres convexos de los subconjuntos minimales de peso mayor que $\frac{n}{2}$, en un conjunto de n puntos.

Input: Conjunto de n puntos en el plano no todos alineados, con sus pesos.

- Paso 1 (localización del punto candidato):
  Se toman dos rectas no paralelas que unen cada una de ellas dos puntos del conjunto, y que dejan en cada semiplano cerrado un conjunto de puntos de la nube de peso mayor que $\frac{n}{2}$ (se puede demostrar que siempre existen esas dos rectas). Se intersecan. Sea p el punto intersección.
- Paso 2 (inicialización de los pesos):
  Se traza la vertical que pasa por p y se determina el peso (l) de los puntos de la nube en la semirrecta abierta debajo de p unión con el semiplano abierto de la izquierda, y el peso (k) de los puntos de la semirrecta superior de p unión con el semiplano abierto a la derecha de p. Si p es de la nube $k+l+(\text{peso de } p)=n$ si no lo es $k+l=n$.
- Paso 3 (ordenación del resto de puntos de la nube en torno al candidato):
  Ordenamos angularmente desde p los puntos de la nube, si hay, en la semirrecta de abajo unión con el semiplano de la izquierda tomando como origen la semirrecta de abajo, y los puntos de la nube, si hay, en la semirrecta de arriba unión con el

semiplano de la derecha, tomando como origen la semirrecta de arriba. Sean $\{v_1,...,v_{n-1}\}$ los puntos de la nube que no sean *p* con ese orden (v_1 es el punto de menor ángulo entre las dos ordenaciones, v_2 es el segundo punto de menor ángulo entre las dos ordenaciones, y así sucesivamente).

- Paso 4 (actualización de los pesos):

  Definimos para i=1,...,n-1:

  - k_i como el peso de los puntos de la nube en la semirrecta abierta izquierda desde *p*, unión con el semiplano abierto debajo de la recta que une v_i y *p*.
  - *li* como el peso de los puntos de la nube en la semirrecta abierta derecha desde *p*, unión con el semiplano abierto encima de la recta que une v_i y *p*.

  Nota: Si v_i está en la misma vertical que *p*, los conjuntos que determinan k_i, l_i son los mismos que determinaban *k, l*, por lo que k_i=*k*, l_i=*l*. Siempre se cumple que $k_i+l_i=k+l$.

  k_i, l_i se pueden obtener recursivamente de k_{i-1}, l_{i-1} para i=1,...,n-1 (los valores de k_1, l_1 se determinan tomando k_0 y l_0 como *k* y *l*) de la siguiente forma:

  k_i es igual a k_{i-1} sumado con el peso de los puntos de la nube en la semirrecta abierta a la izquierda de *p* contenida en la recta que une v_i y *p* y restado con el peso de los puntos de la nube en la semirrecta abierta a la derecha de *p* contenida en la recta que une v_i y *p*.

  l_i es igual a l_{i-1} sumado con el peso de los puntos de la nube en la semirrecta abierta a la derecha de *p* contenida en la recta que une v_i y *p* y restado con el peso de los puntos de la nube en la semirrecta abierta a la izquierda de *p* contenida en la recta que une v_i y *p*.

Output: Si $k_i, l_i \le \frac{n}{2}$ para todo $i = 1,...,n-1$, la intersección buscada es $\{p\}$ (la única posición de equilibrio sería entonces $(p,\, p)$), en caso contrario la intersección es vacía, y no existiría entonces equilibrio.

La complejidad total del algoritmo presentado es O(*n*log*n*).

4. APLICACIÓN PRÁCTICA A UN CASO DE POLÍTICA NACIONAL

En este apartado se implementa el algoritmo de la sección 2 en un caso práctico relativo a estudios de opinión realizados en España y reflejados en el estudio 2742 (BARÓMETRO NOVIEMBRE 2007) llevado a cabo por el CIS.

4.1. Características del estudio

FICHA TÉCNICA:

Ámbito: Nacional. Universo: Población de ambos sexos de 18 años o más.Tamaño de la muestra: Diseñada: 2500 entrevistas. Realizada: 2472 entrevistas. Puntos de muestreo: 236 municipios y 47 provincias. Procedimiento: Selección de las unidades de muestreo de forma aleatoria por rutas aleatorias y cuotas de sexo y edad. Los cuestionarios se han aplicado mediante entrevista personal en domicilios Error muestral: Para un nivel de confianza del 95,5%, el error es de ±2.0% para el conjunto de la muestra y en el supuesto de muestreo aleatorio simple. Fecha de realización: Del 18 al 27 de Diciembre del 2007.

Las respuestas a las preguntas realizadas están clasificadas según la inclinación ideológica en la que se considera situado el encuestado dentro de cinco clasificaciones que van desde la izquierda más radical a la derecha más extrema.

Entre las preguntas realizadas destacamos la que hace referencia a ¿Cuál es, a su juicio, el principal problema que existe actualmente en España? ¿Y el segundo? ¿Y el tercero? Destacamos que todos los bloques en los que se clasifica a los encuestados consideran EL TERRORISMO DE ETA, LA INMIGRACIÓN, LA VIVIENDA y EL PARO como los más preocupantes. Con estos resultados parece adecuado que la clase política se plantease la posibilidad de buscar una postura de equilibrio en estos temas.

Con los datos numéricos de esta parte de la encuesta se pone en práctica el algoritmo enfrentando las posibles posturas a tomar en dos de estos ítems de actual importancia social: EL TERRORISMO y LA INMIGRACIÓN

4.2. Implementación del algoritmo

4.2.1. Datos de entrada

- Establecimiento de los pesos a cada uno de los cinco tipos de votantes distribuidos según su ideología política:

Derecha		→		Izquierda
1/10	33/20	27/20	7/4	3/20

Dichos pesos se han asignado según los porcentajes de la encuesta donde los encuestados se han clasificado según su ideología política y preferencias. Se ha tenido en cuenta también el reparto de escaños de las diferentes ideologías en las últimas elecciones generales

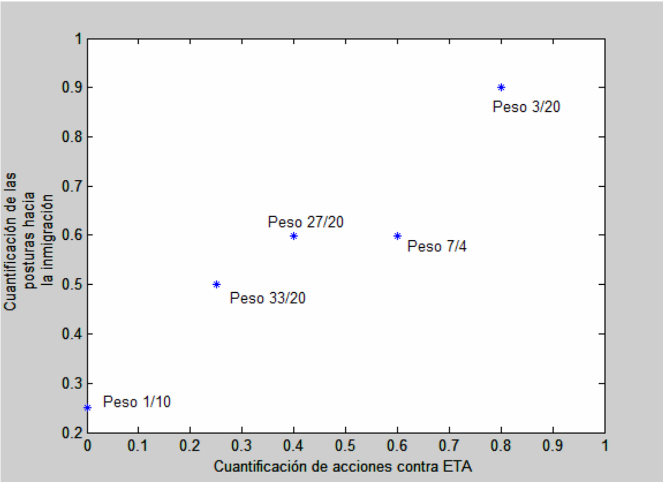


Figura 1: Localización de los tipos y ponderación

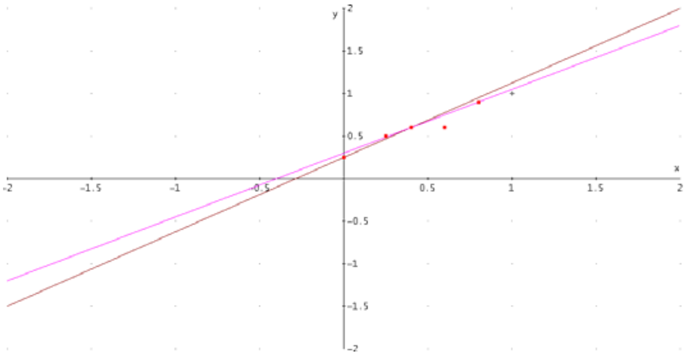
- Posicionamiento de las posturas de cada uno de los tipos en los dos ítems elegidos. La cuantificación de estos se ha realizado según las respuestas dadas por los encuestados en la línea siguiente:

Terrorismo: - Desde: Pena de muerte a los terroristas: 0
- Hasta: Amnistía para los terroristas: 1

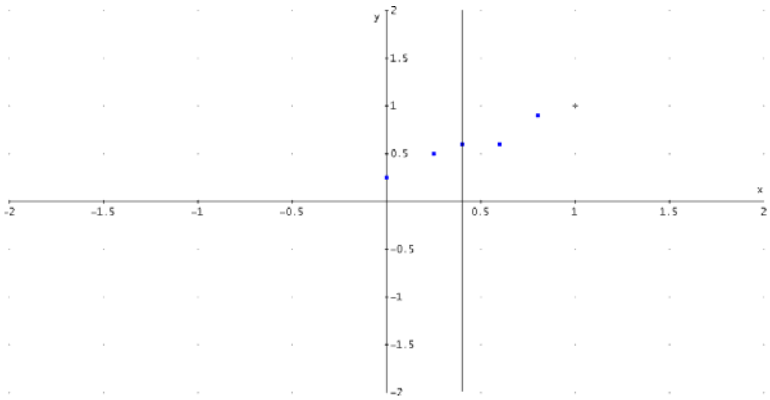
Inmigración: - Desde: Ningún tipo de aceptación de la inmigración: 0
- Hasta: Ninguna condición a imponer para la inmigración: 1

Derecha		→		Izquierda
(0, 0.25)	(0.25, 0.5)	(0.4, 0.6)	(0.6, 0.6)	(0.8,0.9)

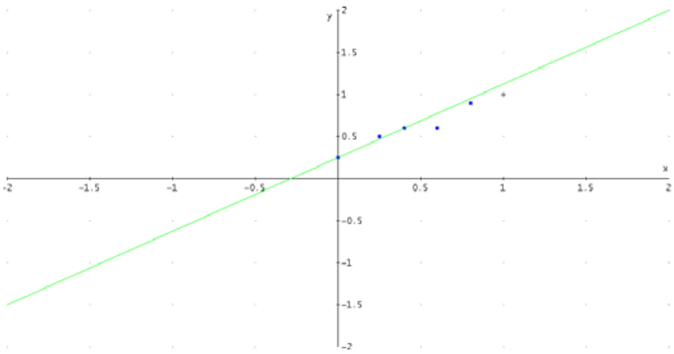
La representación gráfica de los tipos de votantes con sus pesos se representa en la figura 1 y el desarrollo del algoritmo en la figura 2 :



Paso 1: Selección de candidato: (0.4, 0.6)



Paso 2: Inicialización: $l = \frac{35}{20}$, $k = \frac{38}{20}$



Pasos 3 y 4: Se actualizan k y l a partir de (0, 0.2)

Figura 2: Representación gráfica de los pasos del algoritmo

4.2.2. Datos de salida

Posicionamiento del punto de equilibrio si existe según el tratamiento anterior.

4.3. Resultados

Como era de esperar, según los resultados teóricos obtenidos, no existe punto de equilibrio para este ejemplo, es decir, no existe una política a elegir por los partidos que les garantice que moviéndose de ella no obtendrían mejores resultados. En esta situación, cualquier decisión política por parte de un partido puede provocar respuesta por parte del otro que le haga ganar adeptos.

En el ejemplo de la situación de España en las fechas en las que se trabaja (próximas a las elecciones del 2008) estas consecuencias se han podido verificar en decisiones tomadas en precampaña como por ejemplo:

- Materia de inmigración (nuevas propuestas ofrecidas por el Partido Popular)
- Actuaciones con respecto a la banda terrorista ETA y su entorno por parte del gobierno.

Dichas decisiones han generado respuestas, críticas y propuestas de acción por parte del otro partido que, en general, les han resultado beneficiosas, al menos aparentemente.

Por otra parte, la no existencia de equilibrio genera la separación de los programas políticos. Es evidente que, cuando existe una situación de equilibrio, al ser ésta única, los partidos políticos deben encaminar sus propuestas hacia esa situación. Esto hace que los programas políticos sean esencialmente iguales con algunos matices. En la actualidad, puede comprobarse que esta situación está dejando de ser así. Las propuestas de los principales partidos del país están siendo cada vez más distintas en los elementos en los que se ha trabajado (terrorismo, materia de inmigración).

5. CONCLUSIONES

Se ha presentado un algoritmo eficiente basado en novedosas técnicas geométricas que determina, si existe, la posición de equilibrio para un juego de competición política en el caso en que se clasifican a los votantes en tipos que no están igualmente distribuidos. Dicho algoritmo se ha programado en C y se ha puesto en practica sobre un ejemplo de política nacional basado en resultados reales del barómetro de Noviembre de 2007. Dicho ejemplo puede resultar de interés para posibles estudios de la situación política actual.

No hemos pretendido tener en cuenta todos los elementos que pueden determinar una postura política ni la decisión de votarla ya que eso sería imposible por el gran número que pueden llegar a alcanzar. La idea es restringirse a aquellas que en ciertos momentos se detectan, a través de las encuestas de opinión, como suficientemente relevantes para considerarlas determinantes en la elección de voto.

La no existencia de punto de equilibrio para el ejemplo presentado puede interpretarse como un alejamiento de las posturas, que no tienden a la convergencia que marcaría la existencia de un único punto de equilibrio (t, t) con propuestas similares, entre los partidos mayoritarios del país. Situación ésta que resulta palpable en los temas y en el momento en los que se ha desarrollado el estudio.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abellanas M, Lillo I, López M, Rodrigo, J. (2006). Electoral strategies in a dynamical democratic system. Geometric models. European Journal of Operational Research 175: 870-878.
- Aurenhammer R, Klein R. (2000). Voronoi Diagrams. In J.-R-Sack and Urrutia, editors, Handbook of Computational Geometry Elsevier Science Publishers B.V. North-Holland, Amsterdam.
- de Berg M, van Kreveld M, Overmars M, Schwarzkopf O. (1997). Computational Geometry-Algorithms and Applications (Second edition).Springer, New York.
- CIS: Centro de Investigaciones Sociológicas: Barómetro de Noviembre de 2007. Estudio nº 2742. Disponible en: http://www.cis.es.
- Okabe A, Boots B, Sugihara K, Chiu S. (2000). Spatial Tessellations Concepts and Applications of Voronoi diagrams. John Wiley & Sons. Chichester.
- Roemer J. (2001). Political Competition. Harvard University Press.

- Serra D, Revelle C. (1994). Market Capture by two Competitors: The preemptive location problem. Journal of regional Science 34 (4): 549-561.
- Smid M. 1997. Closest point problems in Computational Geometry, In J.-R. Sack and J. Urrutia, editors, Handbook on Computational Geometry, Elsevier Science.