Resolución numérica de un problema de valor óptimo de una opción

A. BERMÚDEZ de CASTRO*

C. MORENO†

A. SAMARTÍN‡

*Departamento de Matematicas Aplicadas, Universidad de Santiago, c/e bermudez@zmat.usc.es

†Departamento de Matemática e Informática Aplicadas a la Ingeniería Civil (E.T.S.I Caminos), Universidad Politécnica de Madrid, c/e mal1@dumbo.caminos.upm.es

‡Departamento de Mecánica y Medios Continuos (E.T.S.I. Caminos), Universidad Politécnica de Madrid, c/e samartin@caminos.upm.es

Resumen

The option value problem with two costs is written as a variational inequality. The advantage of this formulation is that it takes place in a fixed domain. Thus no front tracking is needed for numerical approximation of the free boundary. An iterative algorithm is proposed which can be used to solve the nonlinear system obtained by finite differences or finite elements procedures. Especial care has to be taken in the design of differences finites schemes o finite elements due to the degeneracy of the differential operator. These schemes can be absortion or convection dominated nearly to the axis. This is a preliminary note to the study of this kind of problems.

1 Introducción

Un problema de interés en Teoría Económica consiste en obtener el valor de una opción de compra o de venta, es decir, el valor adicional que se produce al existir por parte del comprador o del vendedor la libertad de elegir o no la transacción, o postponerla. McDonald and Siegel (1986) presentaron una solución al problema de valorar la oportunidad de una inversión utilizando el siguiente modelo.

Sea S el valor de una acción en el mercado de valores. El valor buscado de la opción de venta de esta acción en un instante t se expresará como una función $V = V(t, S(t))$. Se admite que el valor de S varía de acuerdo con un movimiento browniano, es decir

$$dS = \alpha S dt + \sigma S dZ$$

siendo Z una variable aleatoria normalmente distribuida de media nula y desviación típica σ. El lema de Ito supone los siguientes valores de las correlaciones:

$$< dt^2 >= 0; \qquad < dtdZ >= 0; \qquad < dZ^2 >= dt$$

Si se tienen en cuenta estas relaciones, en el caso de que V sea suficientemente regular se obtiene:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}(\alpha S dt + \sigma S dZ)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(dt)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(\alpha S dt + \sigma S dZ)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial S}dt(\alpha S dt + \sigma S dZ) + \cdots$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \alpha S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dZ$$

Se considera la siguiente gestión de cartera consistente en comprar una opción y vender n acciones en el mercado de valores inmediatamente. El valor de esta cartera es P, definido por la expresión

$$P = V - nS$$

El beneficio o variación del valor de la cartera al transcurrir el lapso de tiempo dt, desde el instante t al $t + dt$, es:

$$dP = dV - ndS = (\frac{\partial V}{\partial t} + \alpha S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 - n\alpha S)dt + \sigma S(\frac{\partial V}{\partial S} - n)dZ$$

Si se elige el número de acciones que se venden n, tal que $n = \frac{\partial V}{\partial S}$, entonces el valor de la cartera no tiene riesgo ya que se eliminaría el último término del segundo miembro de la última relación, es decir el término estocástico. Resulta entonces, que en el equilibrio, el beneficio de la cartera sin riesgo ha de coincidir con el interés sin riesgo r, es decir, se cumple

$$dP = rPdt$$

En este caso se tiene que

$$(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2) = r(V - nS)dt$$

o bien

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0$$

2 Planteamiento del problema

El modelo anterior es aplicable al estudio del valor de una opción $V(P,F)$ de venta de un inmueble que genera un coste F y que tiene un beneficio o valor de venta P aleatorio a lo largo del tiempo. Si bien es en general difícil concebir la existencia de un mercado continuo de inmuebles con valores de beneficio y coste, P y F, se puede suponer que existe un conjunto de acciones expandido que reproduce exactamente el proceso estocástico de P y F, es decir, acciones P y F en el mercado expandido

$$dP = \alpha_0 P dt + \sigma_0 P dZ$$

$$dF = \alpha_1 F dt + \sigma_1 F dZ_1$$

con P y F variables aleatorias normales de media nula y desviación típica $4\sigma_0$ y σ_1 respectivamente.

El problema del cálculo del valor de la opción para P y F es idéntico al de la acción en el mercado de valores que se estudia a continuación:

En un mercado en equilibrio, el rendimiento de una acción x es de acuerdo con CAPM

$$r_x = r + \frac{\rho_{xm}\sigma_x\sigma_m}{\sigma_m^2}(r_m - r) = r + \lambda\rho_{xm}\sigma_x$$

siendo r el rendimiento sin riesgo, r_m el valor medio de la cartera de valores en el mercado, $\rho_{xm}\sigma_x\sigma_m$ la correlación existente entre la acción x y la cartera m. El valor de λ corresponde a la pendiente del mercado, es decir

$$\lambda = \frac{r_m - r}{\sigma_m}$$

En el caso que se estudia se tiene

$$r_0 = r + \lambda\rho_{0m}\sigma_0$$

$$r_1 = r + \lambda\rho_{1m}\sigma_1$$

Los dividendos esperados son

$$\overline{d}_0 = r_0 - \alpha_0$$

$$\overline{d}_1 = r_1 - \alpha_1$$

La estrategia ahora consiste en adquirir una opción y vender inmediatamente n_0 unidades de P y n_1 unidades de F. El valor de la cartera anterior es

$$Q = V - n_0 P - n_1 F$$

El beneficio de Q al transcurrir el tiempo desde t a $t + dt$ y considerar el caracter browniano de P y F es:

$$dQ = dV - n_0 dP - n_1 dF - (n_0 P\overline{d}_0 - n_1 F\overline{d}_1)$$

es decir

$$dQ = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial P} + \frac{\partial V}{\partial F}dF + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial P^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial P \partial F} - n_0 dP - n_1 dF - (n_0 P\overline{d}_0 + n_1 F\overline{d}_1)dt$$

$$= \frac{\partial V}{\partial t} + \alpha_0 P V_0 + \alpha_1 F\frac{\partial V}{\partial F} + \frac{1}{2}\sigma_0^2 P\frac{\partial^2 V}{\partial P^2} + \frac{1}{2}\sigma_0\sigma_1\rho_{01}PF\frac{\partial^2 V}{\partial P\partial F}$$

$$-n_0\alpha_0 P - n_1\alpha_1 F_1 - n_0 P\overline{d}_0 - n_1 F_1\overline{d}_1)dt + (\sigma_0 P\frac{\partial V}{\partial P} - \sigma_0 n_0 P)dZ_0$$

$$+(\sigma_1 F\frac{\partial V}{\partial F} - n_1\sigma_1 F)dZ_1$$

Se elige

$$n_0 = \frac{\partial V}{\partial P}, \qquad n_1 = \frac{\partial V}{\partial F}$$

con lo que el valor de la cartera es sin riesgo y además igual a

$$dQ = r(V - n_0 P - n_1 F)dt$$

con lo que resulta

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \overline{d}_0 P\frac{\partial V}{\partial P} - \overline{d}_1 F\frac{\partial V}{\partial F} + \frac{1}{2}\sigma_0^2 P^2\frac{\partial^2 V}{\partial P^2} + \frac{1}{2}\sigma_0\sigma_1\rho_{01}PF\frac{\partial^2 V}{\partial P\partial F}$$

$$+rV + r\frac{\partial V}{\partial P} + rF\frac{\partial V}{\partial F} = 0$$

o bien

$$\frac{\partial V}{\partial t} + d_0 P\frac{\partial V}{\partial P} + d_1 F\frac{\partial V}{\partial F} + \frac{1}{2}\sigma_0^2 P\frac{\partial^2 V}{\partial P^2} + \frac{1}{2}\sigma_0\sigma_1\rho_{01}PF\frac{\partial^2 V}{\partial P\partial F} - rV = 0$$

donde

$$d_0 = r - \overline{d}_0 = \alpha_0 - \lambda\rho_{0m}\sigma_0$$

$$d_1 = r - \overline{d}_1 = \alpha_1 - \lambda\rho_{1m}\sigma_1$$

En el caso estacionario, el valor de la opción no depende del tiempo. Además se deben considerar las siguientes condiciones de contorno

$$V = 0 \qquad \text{para } \frac{F}{P} \mapsto \infty$$

y

$$V = P - F$$

para los valores de P y F que satisfacen la curva de realización de la opción

$$H(P, F) = 0$$

Se supone que las condiciones son de gran contacto en el punto P, F_1 de realización de la opción. Es decir que cumple las igualdades

$$\frac{\partial V}{\partial P} = 1$$

$$\frac{\partial V}{\partial F} = -1$$

Se puede demostrar que basta satisfacer dos de las tres condiciones anteriores para que la tercera se satisfaga obligatoriamente si se tiene en cuenta que $V = V(P, F)$ es una función homogénea de grado 1.

La homogeneidad de la solución permite reducir la dimensión del problema usando el siguiente cambio de variable:

$$u(x) = PV(1, x), \qquad \text{donde } x = \frac{F}{P}$$

a fin de simplificar las expresiones se introducen las siguientes constantes

$$a_0 = d_0 - r < 0; \qquad a_1 = d_1 - d_0; \qquad a_2 = h_{01}$$

con

$$h_{01} = \frac{1}{2}\sigma_0^2 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 - \rho_{01}\sigma_0\sigma_1 > 0$$

De este modo se puede establecer el problema como:

Buscar x^* de modo que exista una solución u de la ecuación diferencial

$$a_0 u + a_1 x \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

en el intervalo $[x^*, \infty)$, que verifique las condiciones de contorno

$$u = 0 \qquad \text{para } x \mapsto \infty$$

$$u = 1 - x \qquad \text{para } x = x^*$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -1 \qquad \text{para } x = x^*$$

La búsqueda del valor de la frontera libre x^* es la parte esencial del problema. Se puede determinar la solución por técnicas analíticas como la que se muestra en el siguiente apartado.

3 Solución analítica del problema unidimensional

Se ensaya como solución la función potencial

$$u(x) = x^\beta$$

Obviamente si $\beta < 0$, u satisface la condición en el infinito. Además si es solución de la ecuación diferencial en $[x^*, \infty)$ cumple que

$$a_0 x^\beta + a_1 x^\beta \beta + a_2 x^\beta \beta(\beta - 1) = 0$$

de donde se deduce que

$$\beta_\pm = \frac{a_2 - a_1 \pm \sqrt{(a_1 - a_2)^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2}$$

Puesto que $a_0 < 0$ y $a_2 > 0$ se tiene en este caso

$$\beta_\pm = \frac{a_2 - a_1 \pm |a_2 - a_1|}{2a_2} \pm \varepsilon$$

donde $\varepsilon > 0$. Por consiguiente $\beta_+ > 0$ y $\beta_- < 0$, por lo que se escoge

$$\beta = \frac{a_2 - a_1 - \sqrt{(a_1 - a_2)^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2}$$

Obviamente también kx^β es una solución de la ecuación. Se busca ahora k de modo que el corte con el obstáculo $w = 1 - x$ sea suave:

$$kx^\beta = 1 - x$$

$$k\beta x^{\beta - 1} = -1$$

Dividiendo la primera ecuación por la segunda se obtiene

$$x^* = \frac{\beta}{\beta - 1}$$

$$k = (1 - x^*)(x^*)^{-\beta}$$

Asi pues, una solución de la ecuación es

$$u(x) = kx^\beta$$

En orden a utilizar este resultado en la resolución del problema de dos costes que se describe en la sección siguiente se extiende la solución al intervalo $[0, \infty)$ del modo siguiente:

$$u(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < x^* \\ u(x) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De las condiciones de contorno se deduce que u es continua y tiene derivadas continuas en x^*.

4 El problema de la opción con dos costes

El modelo del valor de la opción, descrito en los anteriores apartados, puede extenderse incluyendo más costes. En este apartado se considera el caso de dos costes.

Se supone que P y $F_i(i = 1, 2)$ siguen un movimiento browniano

$$dP = \alpha_0 P dt + \sigma_0 P dZ_0$$

$$dF_i = \alpha_i F_i dt + \sigma_i F_i dZ_i$$

donde Z_i es una variable aleatoria con distribución normal $N(0, \sigma_i)$. Los coeficientes de correlación entre ellas se designan por ρ_{0i} y ρ_{12}. La tasa de retorno libre de riesgo se indica por r. Las siguientes variables d_0 y d_i son introducidas y definidas como sigue

$$d_i = \alpha_i - \lambda \rho_{im} \sigma_i, \qquad i = 0, 1, 2$$

donde

$$\lambda = \frac{r_m - r}{\sigma_m}$$

siendo r_m es el retorno de la cartera, σ_m su desviación típica y ρ_{im} los coeficientes de correlación del retorno en P y F_i.

El valor de la opción se expresa ahora mediante una función homogénea V que depende de las tres variables P y F_i. Usando argumentos similares al caso de un solo coste, se obtiene que V verifica la ecuación de los precios tridimensional[1]

$$\frac{1}{2}\sigma_0^2 P^2 \frac{\partial^2 V}{\partial P^2} + \frac{1}{2}\sigma_i \sigma_j F_i F_j \frac{\partial^2 V}{\partial F_i \partial F_j} + d_0 P \frac{\partial V}{\partial P} + d_i F_i \frac{\partial V}{\partial F_i} - rV = 0$$

Además el valor de la opción debe satisfacer la siguiente condición de contorno

$$\lim_{\frac{F_i}{P} \mapsto \infty} V(P, F_1, F_2) = 0$$

El problema consiste en determinar la curva de indiferencia definida por las ecuaciones

$$V(P, F_1, F_2) = P - F_1 - F_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial P}(P, F_1, F_2) = 1$$

$$\frac{\partial V}{\partial F_i}(P, F_1, F_2) = -1$$

La curva de indiferencia corresponde al *contacto* suave de la gráfica de la solución V y el hiperplano $V = P - F_1 - F_2$.

El estudio de este problema se hará en las siguientes etapas

[1]Se usa la notación de índices mudos

1. Reducir la dimensión del problema.
2. Completar las condiciones de contorno.
3. Formular el problema mediante una inecuación variacional.
4. Resolver numéricamente el problema mediante un algoritmo iterativo.

5 Reducción a un problema bidimensional

Como en el caso de un coste, se considera el cambio de variable

$$u(x_1, x_2) = V(1, x_1, x_2), \qquad x_i = \frac{F_i}{P}$$

De acuerdo con este cambio de variable, la ecuación de la opción con dos costes se transforma en

$$a_{ij} x_i x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + a_i x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = 0$$

donde

$$a_0 = d_0 - r$$

$$a_i = d_i - d_0$$

$$a_{ii} = \frac{1}{2}(\sigma_0^2 + \sigma_i^2 - 2\sigma_0 \sigma_i \rho_{0i})$$

$$a_{12} = \frac{1}{2}(\sigma_0^2 - \sigma_0(\rho_{01}\sigma_1 + \rho_{02}\sigma_2) + 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12})$$

Si se tiene en cuenta que

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} x_i x_j \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = a_{ij} x_i x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij} x_i x_j) \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

la ecuación reducida de los precios se puede expresar en la forma de divergencia

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} x_i x_j \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \overline{a}_i x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = 0$$

donde

$$\overline{a}_i = a_i - \sum_j a_{ij}$$

El cambio de variable definido por $x_i = e^{-y_i}$ permite transformar la ecuación en una de coeficientes constantes. No obstante, la contrapartida está en que el nuevo dominio sería todo el plano.

6 Condiciones de contorno absorbentes y frontera libre

Si se traza la anterior ecuación en derivadas parciales sobre cada uno de los ejes coordenadas se obtienen sendas ecuaciones del valor de la opción con un solo coste como la estudiada en los apartados anteriores. Concretamente, para $x_2 = 0$ se deduce la ecuación

$$a_{11}x_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_1 x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_0 u = 0$$

y análogamente para $x_1 = 0$ se deduce

$$a_{22}x_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + a_2 x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + a_0 u = 0$$

De este modo, se puede considerar que la ecuación de los precios con dos costes impone sus propias condiciones de contorno en cada uno de los ejes. En una primera aproximación se considera el dominio como un rectángulo acotado $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ con $a = 0$, $c = 0$ y b, d suficientemente grandes. Se imponen las siguientes condiciones de contorno

$$u(x_1, c) = uc(x_1)$$

$$u(x_1, d) = uc(x_1)ua(d)$$

$$u(a, x_2) = ua(x_2)$$

$$u(b, x_2) = ua(x_2)uc(b)$$

que se pueden expresar en forma abreviada como sigue

$$u = u_0 \qquad \text{en } \partial\Omega$$

Además de estas condiciones, se debe considerar la condición de frontera libre consistente en exigir a la solución que contacte suavemente con el plano $u = 1 - x_1 - x_2$. El hecho de que el valor de una opción deba ser siempre superior al valor efectivo implica una condición de unilateralidad de la solución respecto al mencionado plano que puede traducirse en imponerle que pertenezca al siguiente conjunto admisible de soluciones

$$K = \{u : u(x_1, x_2) \geq 1 - x_1 - x_2 \text{ para todo } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

7 Formulación variacional

Se considera el operador diferencial definido por

$$Au = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}x_i x_j \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \overline{a}_i x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u$$

y la forma bilineal

$$a(u,v) = \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_1 dx_2$$

Se plantea el problema de determinar la función

$$u \in \overline{K} = \{v \in H^1(\Omega) : v(x_1,x_2) \in K, v = u_0 \text{ en } \partial\Omega\}$$

que minimize el funcional

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v)$$

en $\overline{K}$. Aparentemente, no parece que el funcional J tenga una propiedad de crecimiento en el infinito, debido a la degeneración del operador elíptico en los ejes coordenados. Por ello, hasta el momento no se dispone de ninguna evidencia matemática de existencia y unicidad de solución para este problema, por parte de los autores. No obstante con el fin de conjeturar el comportamiento de una posible solución se intenta a continuación aproximarse mediante una solución de *difusión mínima* minimizando el funcional

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) + \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla v dx_1 dx_2$$

con ε un valor próximo a cero.

8 Linealización del problema

Puesto que el problema ha sido formulado como un problema variacional podemos utilizar diversos métodos para el cálculo numérico de la solución. A continuación se analiza el uso un método de multiplicadores de Lagrange introducido en Bermudez-Moreno[1] en donde se prueba su convergencia. La idea es como sigue: Sea p definido por

$$p = -Au \qquad \text{en } \Omega$$

De las condiciones de Euler-Lagrange para el funcional J se deducen las condiciones

$$u \geq 0, \qquad p \geq 0, \qquad p(u-w) = 0, \qquad \text{en } \Omega$$

Estas ecuaciones implican que para cualquier constante positiva λ, la siguiente ecuación se verifica

$$u - w = (u - w - \lambda p)^+$$

donde se introduce la notación

$$x^+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Este hecho sugiere el uso del siguiente algoritmo iterativo para resolver la inecuación variacional

- Sea p_0 una función arbitraria no negativa.
- En la iteración n, se conoce p_{n-1}. Entonces u_n y p_n se calculan como

$$u_n = Arg.Min.\frac{1}{2}a(v,v) - \int_\Omega p_{n-1} v dx_1 dx_2$$

que es un problema planteado sobre un dominio fijo.

- $$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} + \frac{\rho}{\lambda}\left(u_n - w - (u_n - w + \lambda p_{n-1})^+\right) \\ &= (1-\rho)p_{n-1} + \frac{\rho}{\lambda}(u_n - w + \lambda p_{n-1})^-, \end{aligned}$$

donde ρ es un parámetro de relajación entre 0 y 1.

La velocidad de convergencia de este algoritmo depende de la elección de los parámetros λ y ρ. De hecho, λ tiene que ser suficientemente grande dependiendo de los autovalores de la matriz a y ρ debe tomarse entre 0.8 y 0.9.

9 Soluciones numéricas basadas en el uso de diferencias finitas

La presencia de derivadas mixtas en el operador diferencial A hace que no sea en general posible garantizar el buen condicionamiento de la matriz de coeficientes de operador discreto usando un esquema en diferencias finitas centrado 9-puntos. Mas eficiente parece el uso de un esquema 7-puntos basado en las aproximaciones que en caso de una red homogénea se reduce a

$$A_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j} : h^{-2}\begin{bmatrix} 0 & A_{22}-A_{12} & A_{12} \\ A_{11}-A_{12} & 2(A_{12}-A_{11}-A_{22}) & A_{11}-A_{12} \\ A_{12} & A_{22}-A_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_i\frac{\partial}{\partial x_i} : h^{-1}\begin{bmatrix} 0 & A_2 & 0 \\ 0 & -A_1-A_2 & A_1 \\ 0 & -A_2 & 0 \end{bmatrix}$$

El gráfico 15 muestra una una visión tridimensional de la solución aproximada por este esquema

El gráfico 16 muestra el área de contacto de la solución con el plano así como algunas curvas de nivel del error.

Los autores agradecen a Ake Gunnelin de la Universidad de Estocolmo por plantearnos el estudio matemático de este modelo y sus continuas sugerencias en orden a mejorar su resolución numérica.

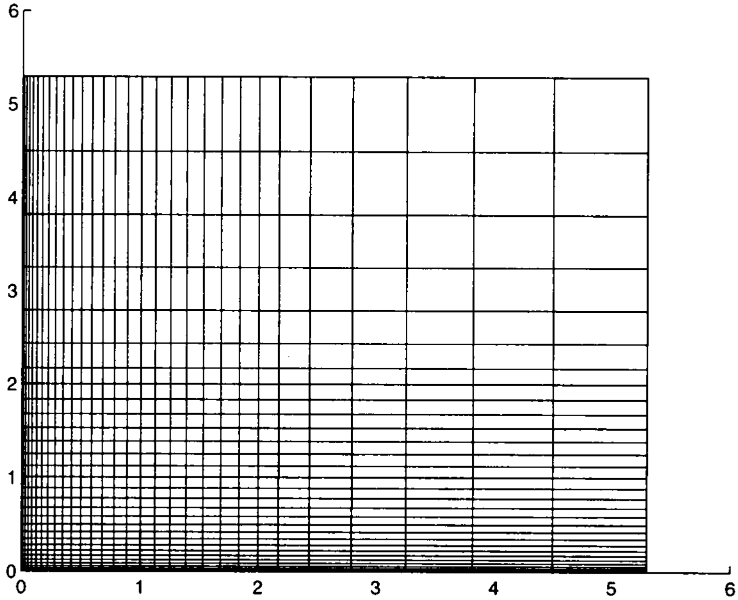

Figura 1: Red no homogénea.

Referencias

[1] A. Bermudez y C. Moreno,*Duality methods for solving variational inequalities*, Comp. and Math. with Applic., 1981.

[2] R.MacDonald y D.Siegel, *The value of waiting to invest*, The Quartely Journal of Economics, 1996.

[3] P.Childs, T. Riddiough y A.J.Triantis, *Mixed uses and the redevelopment option*, Real Estate Economics, Vol. 24 3,pp.317-339, 1996.

[4] G.Barnes, J.Burdeau, M.Romano y N.Samsoen, *Estimation de la frontiere libre des options americaines au voisinage de l'echeance*, C.R. Acad. Sci. Paris, t316, Serie I,p. 171-174,1993.

[5] J.N.Dewynne, S.D.Howison, I.Rupf y P.Wilmott,*Some Mathematical results in the pricing of american options*, European Journal of Applied Mathematics, vol. 4, pp 381-398.

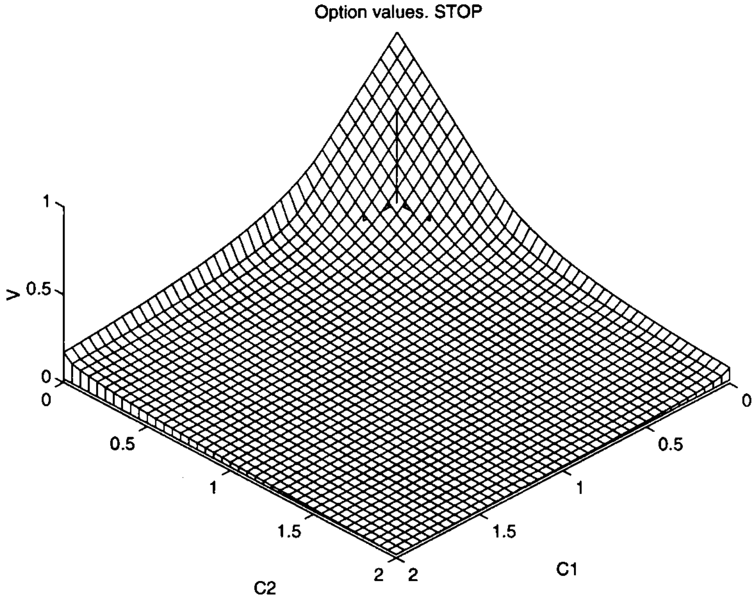

Figura 2: Solución.

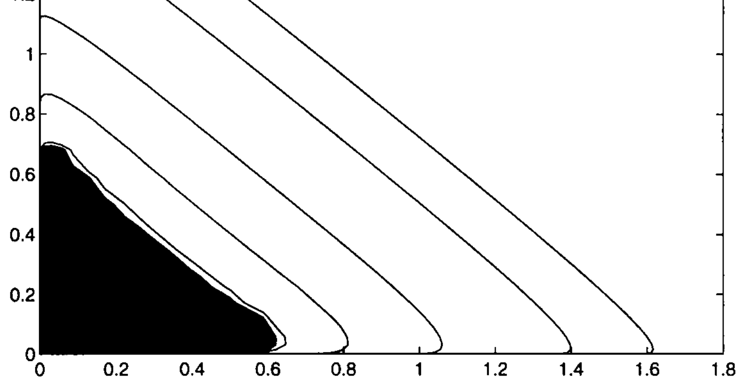

Figura 3: Curvas de nivel de la solución.