UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONAUTICOS

**INFLUENCIA DE UN FLUIDO EN LAS
CARACTERISTICAS DINAMICAS DE PLACAS
CIRCULARES Y CASICIRCULARES**

Tesis Doctoral

Manuel Gascón Pérez
Ingeniero Aeronáutico

Madrid, Enero de 2015

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONAUTICOS

**INFLUENCIA DE UN FLUIDO EN LAS
CARACTERISTICAS DINAMICAS DE PLACAS
CIRCULARES Y CASICIRCULARES**

Tesis Doctoral

Manuel Gascón Pérez
Ingeniero Aeronáutico

Dirigida por
Pablo García-Fogeda Núñez
Doctor Ingeniero Aeronáutico

Madrid, Enero de 2015

Tribunal nombrado por el Mgfco. Y Excmo. Sr Rector de la Universidad Politécnica de Madrid, el día.....de.....de 2015

Presidente D.

Vocal D.

Vocal D.

Vocal D.

Secretario D.

Suplente D.

Suplente D.

Realizado el acto de defensa y lectura de la Tesis el día de

..... de 2015, en

Calificación.....

EL PRESIDENTE

LOS VOCALES

EL SECRETARIO

Dedicado a mi familia y seres queridos

INDICE

AGRADECIMIENTOS

LISTA DE SIMBOLOS

RESUMEN

ABSTRACT

1	INTRODUCCION.....	1
1.1	Introducción.....	1
1.2	Antecedentes históricos.....	2
1.3	Estado del arte. Análisis de interacción fluido-estructura.....	3
1.3.1	Mecanismo básico del acoplamiento dinámico fluido-estructura.....	5
1.4	Metodología.....	8
1.4.1	Método energético del factor NAVMI.....	8
1.4.2	Método de elementos de contorno BEM.....	9
1.5	Objetivos y desarrollo de la tesis.....	11
2	METODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO BEM PARA VIBRACION DE PLACAS CIRCULARES SUMERGIDAS EN UN FLUIDO.....	17
2.1	Vibración de una placa circular en un fluido compresible.....	17
2.2	Ecuación de la presión para pequeñas perturbaciones.....	19
2.3	Presión P en el fluido en función del salto de presión en la placa ΔP	21

2.3.1	Identidades de Green.....	21
2.3.2	Ecuación integral de Kirchhoff-Helmholtz.....	22
2.4	Frecuencias naturales de vibración de la placa sumergida en el fluido.....	26
2.5	Resultados.....	33
3	VIBRACION EN UN LIQUIDO DE PLACAS CIRCULARES	
	NAVMI FACTOR.....	47
3.1	Introducción.....	47
3.2	Modos de vibración.....	48
3.3	Ecuaciones para el potencial de velocidades del líquido.....	49
3.4	Cálculo del Potencial de velocidades sobre la placa.....	52
3.5	Energía cinética del líquido.....	58
3.6	Energía cinética de la placa.....	60
3.7	Relación entre frecuencias en vacío y en líquido. NAVMI factor.....	61
3.8	Resultados de los factores NAVMI.....	62
4	FRECUENCIAS EN VACIO PARA PLACA ELIPTICA CASI	
	CIRCULAR MEDIANTE UN METODO DE	
	PERTURBACIONES.....	65
4.1	Introducción.....	65
4.2	Ecuación de una elipse casi circular por el método de perturbaciones.....	65
4.3	Método de perturbaciones para el cálculo de las frecuencias en vacío.....	66
4.3.1	Ecuaciones y condiciones de contorno.....	66
4.3.2	Ecuación y condiciones de contorno para orden ε^0	70
4.3.3	Ecuación y condiciones de contorno para orden ε^1	71
4.3.4	Resumen de ecuaciones y condiciones de contorno.....	74
4.4	Frecuencias de vibración. Casos $m = 0$ y $m = 1$	75
4.5	Resultados.....	87

5	NAVMI FACTOR PARA PLACA ELÍPTICA CASI-CIRCULAR.....	91
5.1	Potencial de velocidades del líquido.....	91
5.2	Energía cinética del líquido.....	95
5.3	Energía cinética de la placa.....	101
5.4	Resultados.....	104
6	CONCLUSIONES.....	113
7	BIBLIOGRAFIA.....	117
APENDICE A	VIBRACIÓN DE PLACAS DELGADAS.....	125
A1	Introducción.....	125
A.2	Modelo de Kirchhoff-Love.....	125
A.3	Grados de libertad y desplazamientos globales.....	126
A.4	Deformaciones globales y locales.....	127
A.5	Esfuerzos globales y locales: flexión y torsión.....	129
A.6	Ecuaciones del movimiento transversal.....	130
A.7	Ecuación de la vibración de la placa.....	135
A.8	Condiciones de contorno.....	136
A.9	Aplicación al caso de coordenadas curvilíneas.....	137
A.10	Aplicación al caso de coordenadas cilíndricas.....	143
APENDICE B	VIBRACION EN VACIO DE PLACAS CIRCULARES.....	145
B.1	Solución general de ecuación de vibración en vacío de placas circulares...	145
B.1.1	Placa empotrada en su periferia.....	148
B.1.2	Placa simplemente apoyada.....	149
B.1.3	Placa libre.....	151

AGRADECIMIENTOS

Quisiera expresar mi agradecimiento al Dr. Pablo García-Fogeda Núñez, el director de tesis, por la dedicación, la paciencia y el apoyo que me ha brindado.

A mi familia, la memoria de mi padre, mi madre por estar siempre ahí, a mis hermanos, sobrinas, y demás seres queridos.

Madrid, Enero de 2015

LISTA DE SIMBOLOS

a	Radio de la placa. Semieje de la elipse
$\vec{A}$	Vector genérico definido en el desarrollo de las identidades de Green
$A(t_1, t_2)$	Acción entre dos tiempos t_1 y t_2
$A_{\varepsilon m}^n$	Constante asociada al modo de deformación $W_{\varepsilon m}^n$ de orden ε
A_j	Coeficientes del desarrollo de la solución particular del modo de deformación W_{1mp}^n en serie de la función de Bessel $J_m(\alpha_j \rho)$
b	semieje menor de la elipse
b_{jm}^n	Coeficientes del polinomio asociado al desarrollo en potencias de r de la solución particular del modo de deformación W_{1mp}^n de orden $\varepsilon = 1$
b_{jm0}^n, b_{jm1}^n	Contantes asociadas al coeficiente b_{jm}^n
$B_{\varepsilon m}^n$	Constante asociada al modo de deformación $W_{\varepsilon m}^n$ de orden ε
C_α	Línea curva en coordenadas curvilíneas de α constante
C_β	Línea curva en coordenadas curvilíneas de β constante
$[C]$	Matriz de constantes elásticas asociada al tensor de esfuerzos de la placa
D	Coeficiente de rigidez de la placa
E	Módulo de elasticidad del material
$\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta$	Vectores de la base en coordenadas curvilíneas ortogonales
$\vec{f}^e$	Fuerza exterior por unidad de superficie de la placa
f_z^e	Componente según z de la fuerza exterior sobre la placa
$F(r, \theta)$	Función escalar de las dos coordenadas cilíndricas
$f_\theta(\theta)$	Función de variación con θ del radio de la placa casicircular

$f_{\theta}'(\theta)$	Derivada respecto de θ de la función $f_{\theta}(\theta)$
$f(t)$	Función de variación temporal del potencial de velocidades del líquido
$\dot{f}(t)$	Derivada temporal de la función $f(t)$
$f_{\theta q}$	Coefficiente del desarrollo de Fourier de la función $f_{\theta}(\theta)$
$f_{\theta q}'$	Coefficiente del desarrollo de Fourier de la función $f_{\theta}'(\theta)$
$f_v, (f_v)_m^n$	Frecuencia de vibración en vacío de la placa, y asociada al modo W_m^n
$f_L, (f_L)_m^n$	Frecuencia de vibración en contacto con líquido de la placa, y asociada al modo W_m^n
$g_{\alpha} \quad g_{\beta}$	Coefficientes de Lamé en coordenadas curvilíneas ortogonales
$g_r \quad g_{\theta}$	Coefficientes de Lamé en coordenadas cilíndricas ortogonales
h	Espesor de la placa
$H_m^n(\xi)$	Transformada de Hankel del modo de deformación $W_m^n(r)$
$H_{Am}^n(\xi)$	Transformada de Hankel de la parte del modo de deformación $W_m^n(r)$ asociada a la constante A_m^n
$H_{Bm}^n(\xi)$	Transformada de Hankel de la parte del modo de deformación $W_m^n(r)$ asociada a la constante B_m^n
$H_{\varepsilon m}^n(\xi)$	Transformada de Hankel del modo de deformación $W_{\varepsilon m}^n(r)$
$\bar{H}_m^n(\xi)$	Transformada de Hankel casi-adimensional del modo de deformación $W_m^n(r)$
$H_{lmh}^n(\xi)$	Transformada de Hankel de la solución homogénea del modo de deformación $W_{lmh}^n(r)$

$H_{lmp}^n(\xi)$	Transformada de Hankel de la solución particular del modo de deformación $W_{lmp}^n(r)$
i	Unidad imaginaria
I_m	Función de Bessel modificada de primera especie de orden m
I_m', I_m''	Derivadas primera y segunda de I_m respecto de la variable de su argumento
J_m	Función de Bessel de primera especie de orden m
J_m', J_m''	Derivadas primera y segunda de J_m respecto de la variable de su argumento
k	Número de onda
$[K]$	Matriz de rigidez de la placa
K	Función integrando de influencia del salto de presión sobre la placa $\Delta P(\vec{\xi})$ sobre la presión en un punto $P(\vec{x})$
K_s	Parte singular de la función integrando de influencia del salto de presión sobre la placa $\Delta P(\vec{\xi})$ sobre la presión en un punto $P(\vec{x})$
K_{mu}^{nv}	Coeficiente de la matriz de rigidez asociado a los modos mn, uv
K_{0m}^n	Coeficiente conocido función de $\beta_{0m}^n a$ y $\lambda_{0m}^n a$ para determinar la raíz $\beta_{1m}^n a$
K_{1m0}^n	Coeficiente conocido función de $\beta_{0m}^n a$ y $\lambda_{0m}^n a$ para determinar la raíz $\beta_{1m}^n a$
K_{1m1}^n	Coeficiente conocido función de $\beta_{0m}^n a$ y $\lambda_{0m}^n a$ para determinar la raíz $\beta_{1m}^n a$
L_x, L_y	Longitudes de los lados de la placa rectangular
L	Lagrangiano
L_1, L_2	Operadores diferenciales lineales cuyo producto es igual al operador asociado a la deformación de la placa

m	Número de diámetros nodales
$\vec{M}$	Vector momento de flexión-torsión de la placa
$\bar{\bar{M}}$	Tensor momento de flexión-torsión de la placa
$M_{xx} \quad M_{yy}$	Componentes de momento de flexión de la placa
M_{xy}	Componente de momento de torsión de la placa
$\vec{M}^e$	Vector momento externo de fuerzas exteriores sobre la placa
$M_x^e \quad M_y^e$	Componentes del vector momento exterior sobre la placa
$M_{\alpha\alpha} \quad M_{\beta\beta}$	Componentes de momento de flexión de la placa en coordenadas curvilíneas
$M_{\alpha\beta}$	Componente de momento de torsión de la placa en coordenadas curvilíneas
$M_{rr} \quad M_{\theta\theta}$	Componentes de momento de flexión de la placa en coordenadas cilíndricas
$M_{r\theta}$	Componente de momento de torsión de la placa en coordenadas cilíndricas
$[M]$	Matriz de masa de la placa
M_{mu}^{nv}	Coeficiente de la matriz de masa de la placa asociado a los modos mn, uv
$[M_F]$	Matriz de masa fluida
M_{Fmu}^{nv}	Coeficiente de la matriz de masa fluida asociado a los modos mn, uv
$\vec{n}$	Vector normal a la superficie
n	Número de círculos nodales
N	Número de pasos de integración según el radio de la placa Número de coeficientes del polinomio de aproximación de la solución particular del modo de deformación $W_{1mp}^n(r)$
$p(\vec{x}, t)$	Campo de presión del fluido, función espacio-temporal

$\tilde{p}(r, \theta, z)$	Campo de presión del fluido, función espacial
p_∞	Presión del fluido no perturbado
$p_i(r, \theta, t)$	Presión del fluido sobre el intradós de la placa
$p_e(r, \theta, t)$	Presión del fluido sobre el extradós de la placa
$P_m^n(r, z)$	Campo de presión espacial asociado al modo $W_m^n(r)$
$\{q\}$	Autovector asociado al modo de deformación de la placa para el problema de autovalores de las frecuencias de vibración de ésta
q_m^n	Componente del autovector asociado al modo de deformación de la placa $W_m^n(r)$
$\vec{Q}$	Vector fuerza cortante de la placa
$Q_{xz} \quad Q_{yz}$	Componentes de la fuerza cortante de la placa en coordenadas cartesianas
$Q_{\alpha z} \quad Q_{\beta z}$	Componentes de la fuerza cortante de la placa en coordenadas curvilíneas
$Q_{rz} \quad Q_{\theta z}$	Componentes de la fuerza cortante de la placa en coordenadas cilíndricas
$\vec{r}$	Vector de posición de un punto
r	Radio genérico de la placa en coordenadas cilíndricas
r_j	Radio genérico de la placa en elemento de discretización j
r_{j+1}	Radio genérico de la placa en elemento de discretización $j+1$
r_i	Radio genérico de la placa en elemento de discretización i
$R = \vec{x} - \vec{\xi}$	Distancia entre puntos fuente y efecto
r_e	Radio exterior de la placa casi-circular
S	Superficie de integración
S_p	Superficie de la placa
S_{pi}	Superficie de intradós de la placa

S_{pe}	Superficie de extradós de la placa
S_s	Frontera del sólido
S_w	Pared mojada por el fluido
S_1	Superficie de la placa
S_2	Superficie infinita rígida que rodea la placa
S_∞	Superficie alejada de la placa en el infinito
t	Parámetro de tiempo
$\vec{t}_\alpha$	Vector unitario de la base en coordenadas curvilíneas
$\vec{t}_\beta$	Vector unitario de la base en coordenadas curvilíneas
$T(t)$	Función de variación temporal de la deformación de la placa $w(r, \theta, t)$
$T_p, (T_p)_m^n$	Energía cinética de la placa, y asociada al modo W_m^n
$T_L, (T_L)_m^n$	Energía cinética del líquido, y asociada al modo W_m^n
$\vec{v}$	Vector velocidad del fluido
V	Volúmen de integración
$V_{xz} \quad V_{yz}$	Fuerzas cortantes efectivas de Kirchhoff en coordenadas cartesianas
$V_{\alpha z} \quad V_{\beta z}$	Fuerzas cortantes efectivas de Kirchhoff en coordenadas curvilíneas
$V_{rz} \quad V_{\theta z}$	Fuerzas cortantes efectivas de Kirchhoff en coordenadas cilíndricas
$w(\vec{x}, t)$	Deformación de la placa función espacio-temporal
$\dot{w}(r, \theta, t)$	Derivada temporal de la deformación de la placa función espacio-temporal
w_{fV}	Trabajo de fuerzas exteriores sobre la placa por unidad de volumen
w_{fS}	Trabajo de fuerzas exteriores sobre la placa por unidad de superficie

w_e	Trabajo de fuerzas exteriores sobre la placa
$\tilde{w}(r, \theta)$	Función espacial de la deformación de la placa en coordenadas cilíndricas
$\tilde{w}_0(r, \theta)$	Función espacial de la deformación de la placa de orden $\varepsilon = 0$ en coordenadas cilíndricas
$\tilde{w}_1(r, \theta)$	Función espacial de la deformación de la placa de orden $\varepsilon = 1$ en coordenadas cilíndricas
$W_u^v(r)$	Modo de deformación de la placa uv
W_{mi}^n	Componente i según el radio del vector modo de deformación de la placa mn
$\{W_u^v\}$	Vector radial del modo de deformación uv de la placa W_u^v
$[W_m^n]$	Vector radial del modo de deformación mn de la placa W_m^n
$W_m^n(r)$	Modo de deformación de la placa de orden m, n
$W_{\varepsilon m}^n(r)$	Modo de deformación de la placa de orden ε, m, n
$W_{1mh}^n(r)$	Solución homogénea del modo de deformación de la placa de orden $\varepsilon = 1, m, n$
$W_{1mp}^n(r)$	Solución particular del modo de deformación de la placa de orden $\varepsilon = 1, m, n$
$W_{1mp}^{n'}(r)$	Derivada primera de la solución particular del modo de deformación de la placa de orden $\varepsilon = 1, m, n$ respecto del radio r
$\vec{x}$	Vector de posición de un punto de espacio
x	Coordenada cartesiana
$X(x, y, t)$	Componente de desplazamiento de un punto del plano medio de la placa según la coordenada x
$\vec{X}(x, y, t)$	Vector de desplazamiento de un punto del plano medio de la placa
$\ddot{\vec{X}}(x, y, t)$	Vector de aceleración de un punto del plano medio de la placa

$\vec{X}_f(\vec{r}, t)$	Vector campo de desplazamiento fluctuante del fluido
$\vec{X}_s(\vec{r}, t)$	Vector campo de desplazamiento fluctuante del sólido
$Y(x, y, t)$	Componente de desplazamiento de un punto del plano medio de la placa según la coordenada y
y	Coordenada cartesiana
z	Coordenada cartesiana en la dirección del espesor de la placa
$Z(x, y, t)$	Componente de desplazamiento de un punto del plano medio de la placa según la coordenada z normal al plano de la placa
$\dot{Z}(x, y, t)$	Velocidad de un punto del plano medio de la placa según la coordenada z normal al plano de la placa
$\ddot{Z}(x, y, t)$	Aceleración de un punto del plano medio de la placa según la coordenada z normal al plano de la placa
α	Coordenada curvilínea ortogonal
$\alpha_1 \quad \alpha_2$	Coordenadas límite de extremos de la placa según β constante
α_j	Raíces de la ecuación $J_m' = 0$
β	Coordenada curvilínea ortogonal
	Parámetro de frecuencia de vibración de la placa
$\beta_1 \quad \beta_2$	Coordenadas límite de extremos de la placa según α constante
β_m^n	Parámetro de frecuencia de vibración de la placa de orden mn asociado al modo de deformación W_m^n
$\beta_{\varepsilon m}^n$	Parámetro de frecuencia de vibración de la placa de orden $\varepsilon m n$ asociado al modo de deformación $W_{\varepsilon m}^n$
β_ε	Parámetro de frecuencia de orden ε de vibración de la placa asociado a la deformación de orden $\varepsilon \quad \tilde{w}_\varepsilon(r, \theta)$
γ	Coefficiente isentrópico

γ_m^n	Coeficiente de relación entre la energía cinética del líquido T_L y la energía cinética de la placa T_p asociado al modo de deformación W_m^n
Γ_m^n	Factor adimensional de incremento de masa añadida NAVMI factor asociado al modo de deformación W_m^n
$\gamma_{\varepsilon m}^n$	Constante compleja asociada a la variación con θ del modo de deformación radial $W_{\varepsilon m}^n(r)$
$\bar{\gamma}_{\varepsilon m}^n$	Constante compleja conjugada asociada a la variación con θ del modo de deformación $W_{\varepsilon m}^n(r)$
$\delta(\vec{x}, \vec{\xi})$	Función delta de Dirac
δ_{mn}	Coeficiente constante de valor $\pi, 2\pi$ si $m \neq n, m = n$
$\delta[\]$	Operador de variación en el cálculo variacional
Δ	Operador Laplaciana
Δ^2	Operador Bilaplaciana
$\Delta p(r, \theta, t)$	Salto de presión (función espacio-temporal) sobre la placa
$\Delta P_m^n(r)$	Salto de presión (función espacial) sobre la placa de orden m, n asociado al modo de deformación $W_m^n(r)$
ΔP_{mj}^n	Componente para el elemento de radio r_j del vector salto de presión sobre la placa asociado al modo de deformación W_m^n
$[\Delta S]$	Matriz discreta de elementos de superficie de la placa
$\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy}$	Componentes del tensor de deformación de la placa en coordenadas cartesianas
$\varepsilon_{xy} \ \varepsilon_{xz} \ \varepsilon_{yz}$	Componentes del tensor de deformación de la placa en coordenadas cartesianas
$\bar{\bar{\varepsilon}}$	Tensor de deformación de la placa

$\vec{\varepsilon}$	Vector de deformación de la placa
ε_c	Energía cinética de la placa por unidad de volumen
ε_e	Energía de deformación elástica de la placa por unidad de volumen
ε	Parámetro pequeño de perturbación $\varepsilon \ll 1$
ε^0	Parámetro de perturbación de orden $\varepsilon = 0$
ε^1	Parámetro de perturbación de orden $\varepsilon = 1$
ζ	Coordenada espacial del punto efecto
$\bar{\bar{\eta}}$	Tensor de deformación de membrana o plano medio de la placa
$\vec{\eta}$	Vector de deformación de membrana o plano medio de la placa
η	Coordenada espacial del punto efecto
	Coordenada variable adimensional $\eta = a \cdot \xi$
$\eta_{xx} \eta_{xy} \eta_{yy}$	Componentes del tensor de deformación de membrana o plano medio de la placa en coordenadas cartesianas
$d\eta$	Elemento diferencial según la coordenada η
Λ_{ij}	Coeficiente de la matriz asociada a la integral de influencia del salto de presión $\Delta P(\vec{\xi})$ sobre la placa, sobre la presión en un punto $P(\vec{x})$
$[\Lambda_{ij}]^{-1}$	Inversa de la matriz asociada a la integral de influencia del salto de presión $\Delta P(\vec{\xi})$ sobre la placa, sobre la presión en un punto $P(\vec{x})$
Λ_{ij}^{NS}	Coeficiente de la matriz asociada a la parte no singular de la integral de influencia del salto de presión $\Delta P(\vec{\xi})$ sobre la placa, sobre la presión en un punto $P(\vec{x})$
Λ_{ij}^S	Coeficiente de la matriz asociada a la parte singular de la integral de influencia del salto de presión $\Delta P(\vec{\xi})$ sobre la placa, sobre la presión en un punto $P(\vec{x})$

λ_{0m}^n	Parámetro asociado a la autofunción W_{0m}^n que viene determinada por las condiciones de contorno y depende de la raíz β_{0m}^n
λ_{1m}^n	Parámetro asociado a la autofunción W_{1m}^n que viene determinada por las condiciones de contorno y depende de la raíces β_{0m}^n , β_{1m}^n
ν	Módulo de Poisson
$\xi_x \xi_y \xi_z$	Componentes en coordenadas cartesianas del desplazamiento local de un punto material de la placa
ξ	Coordenada espacial del punto efecto Variable de dimensión inversa a la longitud utilizada en la transformación de Hankel
ρ_p	Densidad del material de la placa
ρ	Densidad del fluido Distancia radial adimensional con el radio de la placa
ρ_∞	Densidad del fluido no perturbado
ρ_L	Densidad del líquido
$\sigma_{xx} \sigma_{yy}$	Componentes del tensor de esfuerzos de la placa en coordenadas cartesianas
$\sigma_{xy} \sigma_{xz} \sigma_{yz}$	Componentes del tensor de esfuerzos de la placa en coordenadas cartesianas
$\bar{\bar{\sigma}}$	Tensor de esfuerzos
ϕ	Función escalar espacial utilizada en las identidades de Green
Φ	Potencial de velocidades del fluido función espacio-temporal
φ	Potencial de velocidades del fluido función espacial
$\phi_m^n(r, z)$	Potencial de velocidades del fluido función espacial asociado al modo de deformación $W_m^n(r)$

$\phi_m^{n'}$ $\phi_m^{n''}$	Derivada primera y segunda respecto de la variable radial del potencial de velocidades del fluido función espacial asociado al modo de deformación $W_m^n(r)$
$\phi_{Hm}^n(\xi, z)$	Transformada de Hankel del potencial de velocidades del fluido $\phi_m^n(r, z)$ asociado al modo de deformación $W_m^n(r)$
$\bar{\bar{\chi}}$	Tensor de deformación de flexión-torsión de la placa
χ_{xx} χ_{yy}	Componentes de flexión en coordenadas cartesianas del tensor de deformación de la placa
χ_{xy}	Componentes de torsión en coordenadas cartesianas del tensor de deformación de la placa
$\chi_{\alpha\alpha}$ $\chi_{\beta\beta}$	Componentes de flexión en coordenadas curvilíneas ortogonales del tensor de deformación de la placa
$\chi_{\alpha\beta}$	Componentes de torsión en coordenadas curvilíneas ortogonales del tensor de deformación de la placa
χ_{rr} $\chi_{\theta\theta}$	Componentes de flexión en coordenadas cilíndricas del tensor de deformación de la placa
$\chi_{r\theta}$	Componentes de torsión en coordenadas cilíndricas del tensor de deformación de la placa
ψ	Función escalar espacial utilizada en las identidades de Green
ψ_m	Parámetro constante de valor $\pi, 2\pi$ si $m = 0, 1$
$\vec{\psi}$	Vector de rotación de la placa
ψ_x ψ_y	Componentes del vector de rotación de la placa
$\Psi_m^n(a\xi)$	Constante de integración asociada a la transformada de Hankel del potencial de velocidad del fluido $\phi_{Hm}^n(\xi, z)$
ω_v ω_L	Frecuencias de vibración de la placa en vacío y en contacto con el líquido

$(\omega_v)_m^n (\omega_L)_m^n$	Frecuencias de vibración de la placa en vacío y en contacto con el líquido asociadas al modo de deformación W_m^n
$\omega_{\varepsilon m}^n$	Frecuencia de vibración de la placa asociada al modo de deformación $W_m^n(r)$ de orden ε, m, n
∇	Operador gradiente espacial
$\nabla \cdot$	Operador divergencia espacial

RESUMEN

La influencia de un fluido en las características dinámicas de estructuras se ha estudiado desde hace tiempo. Sin embargo muchos estudios se refieren a aplicaciones bajo el agua, como es el caso del sonar de un submarino por lo que el fluido circundante se considera líquido (sin efectos de compresibilidad). Más recientemente en aplicaciones acústicas y espaciales tales como antenas o paneles muy ligeros, ha sido estudiada la influencia en las características dinámicas de una estructura rodeada por un fluido de baja densidad. Por ejemplo se ha mostrado que el efecto del aire en el transmisor-reflector del Intelsat VI C-B con un diámetro de 3,2 metros y con un peso de sólo 34,7 kg disminuye la primera frecuencia en torno a un 20% con respecto a su valor en vacío. Por tanto es importante en el desarrollo de estas grandes y ligeras estructuras disponer de un método con el que estimar el efecto del fluido circundante sobre las frecuencias naturales de éstas. De esta manera se puede evitar el ensayo de la estructura en una cámara de vacío que para el caso de una gran antena o panel puede ser difícil y costoso.

Se ha desarrollado un método de elementos de contorno (BEM) para la determinación del efecto del fluido en las características dinámicas de una placa circular. Una vez calculados analíticamente los modos de vibración de la placa en vacío, la matriz de masa añadida debido a la carga del fluido se determina por el método de elementos de contorno. Este método utiliza anillos circulares de manera que el número de elementos para obtener unos resultados precisos es muy bajo. Se utiliza un procedimiento de iteración para el cálculo de las frecuencias naturales del acoplamiento fluido-estructura para el caso de fluido compresible. Los resultados del método se comparan con datos experimentales y otros modelos teóricos mostrando la precisión y exactitud para distintas condiciones de contorno de la placa.

Por otro lado, a veces la geometría de la placa no es circular sino casi-circular y se ha desarrollado un método de perturbaciones para determinar la influencia de un fluido incompresible en las características dinámicas de placas casi-circulares. El método se aplica a placas con forma elíptica y pequeña excentricidad. Por una parte se obtienen las frecuencias naturales y los modos de deformación de la placa

vibrando en vacío. A continuación, se calculan los coeficientes adimensionales de masa virtual añadida (factores NAVMI). Se presentan los resultados de estos factores y el efecto del fluido en las frecuencias naturales.

ABSTRACT

The influence of the surrounding fluid on the dynamic characteristics of structures has been well known for many years. However most of these works were more concerned with underwater applications, such as the sonar of a submarine and therefore the surrounding fluid was considered a liquid (negligible compressibility effects). Recently for acoustical and spatial applications such as antennas or very light panels the influence on the dynamic characteristics of a structure surrounded by a fluid of low density has been studied. Thus it has been shown that the air effect for the Intelsat VI C-B transmit reflector with a diameter of 3,2 meters and weighting only 34,7 kg decreases the first modal frequency by 20% with respect to the value in vacuum. It is important then, in the development of these light and large structures to have a method that estimates the effect that the surrounding fluid will have on the natural frequencies of the structure. In this way it can be avoided to test the structure in a vacuum chamber which for a large antenna or panel can be difficult and expensive

A BEM method for the determination of the effect of the surrounding fluid on the dynamic characteristics of a circular plate has been developed. After the modes of the plate in vacuum are calculated in an analytical form, the added mass matrix due to the fluid loading is determined by a boundary element method. This method uses circular rings so the number of elements to obtain an accurate result is very low. An iteration procedure for the computation of the natural frequencies of the couple fluid-structure system is presented for the case of the compressibility effect of air. Comparisons of the present method with various experimental data and other theories show the efficiency and accuracy of the method for any support condition of the plate.

On the other hand, sometimes the geometry of the plate is not circular but almost-circular, so a perturbation method is developed to determine the influence of an incompressible fluid on the dynamic characteristics of almost-circular plates. The method is applied to plates of elliptical shape with low eccentricity. First, the natural frequencies and the mode shapes of the plate vibrating in vacuum are obtained. Next, the nondimensional added virtual mass coefficients (NAVMI

factors) are calculated. Results of this factors and the effect of the fluid on the natural frequencies are presented.

1 INTRODUCCION

1.1 Introducción

El efecto de un fluido que rodea a una estructura en sus características dinámicas ha sido estudiado durante muchos años en la industria naval, sobre todo cuando se trataba de aplicaciones bajo el agua como ocurre en los sonares de los submarinos.

Todos los modelos matemáticos empleados por estos autores consideraban el agua como un fluido incompresible dada su alta densidad y velocidad del sonido.

En las últimas décadas la industria aeroespacial ha empezado a interesarse en la interacción fluido-estructura cuando el fluido es aire debido a que por un lado, las estructuras espaciales con la aparición de nuevas tecnologías como las placas sándwich de materiales compuestos, han disminuido ostensiblemente su peso y crecido en tamaño, con lo que la influencia de un fluido de baja densidad en sus frecuencias y modos propios empieza a tener importancia. El desarrollo de métodos precisos que tengan en cuenta este fenómeno, se hace necesario debido a que se trata de evitar por todos los medios el tener que ensayar estructuras en cámaras de vacío dado la gran dificultad de puesta a punto del ensayo y el alto coste económico.

Por otro lado, los nuevos requisitos acústicos que los lanzadores tipo Ariane imponen a las estructuras que viajan en ellos se han convertido en una especificación de diseño de las mismas, con lo cual es necesario conocer perfectamente las interacciones fluido estructura que aparecen en estos casos y disponer de los modelos matemáticos necesarios para analizar su comportamiento

Esta interacción fluido-estructura está presente en aplicaciones reales como son:

Vibraciones locales en los cascos de los barcos, submarinos.

Sonares de submarinos.

Antenas de satélites.

Contenedores de líquidos.

Transductores de presión utilizados en la industria aeronáutica también llamados sensores de presión por vibración.

1.2 Antecedentes históricos

Desde hace tiempo este problema, como se ha dicho, ha sido estudiado, siendo sus pioneros ya desde finales del siglo diecinueve y principios del veinte, Lord Rayleigh [52], Lamb [32], McLachlan [41], etc.

La solución analítica del problema fue estudiada primero por Lord Rayleigh que calculó el incremento de inercia de un disco rígido vibrando en una apertura circular. Lamb calculó el cambio en las frecuencias naturales de una placa circular de pequeño espesor empotrada a lo largo de un agujero en su frontera y colocada en contacto con agua en una apertura de una pared plana infinitamente rígida; en este estudio la aproximación utilizada es la de unos modos de deformación supuestos. En particular, Lamb consideró sólo dos modos polinómicos a lo largo del radio.

MacLachlan extendió el trabajo de Lamb a placas circulares con borde libre considerando sólo un modo de deformación axil-simétrico que supuso dado por un polinomio de segundo orden, y Peak y Thurston [50] consideraron los casos de placas circulares empotradas y simplemente apoyadas en su periferia. A su vez, Powell & Roberts [51] verificaron experimentalmente los resultados teóricos de Lamb

Por tanto, los resultados no se pueden aplicar a placas circulares inmersas completamente en agua ni tampoco colocadas en una superficie libre, porque las condiciones de contorno exteriores son distintas de la condición de pared infinita rígida. Por ejemplo los trabajos de Kwak y Kim [30] muestran que los factores NAVMI de masa añadida por el fluido para placas apoyadas y empotradas son considerablemente más bajos que los obtenidos por Lamb y los de Peake y Thurston.

Todos estos estudios tienen la idea común de que la solución analítica en términos de las frecuencias naturales depende de la elección de la función utilizada para describir el modo de deformación de la placa que se suponía de forma polinómica y en algunos casos no satisfacía del todo las condiciones de contorno de la placa, y por tanto no se dispone de una solución única

También se establece que el exterior de la placa circular es una pared infinitamente rígida por tanto, estos resultados no son aplicables a placas sumergidas por completo en un dominio fluido infinito ya que las condiciones de contorno son distintas y en tal caso se utilizan otras técnicas de resolución.

1.3 Estado del arte. Análisis interacción fluido-estructura

Las estructuras se encuentran en contacto generalmente con un fluido. Por tanto, el movimiento del fluido y el sólido no son independientes sino relacionados con unas condiciones cinemáticas y dinámicas que modelan su contacto. Es por lo que el fluido y estructura considerados como un conjunto se comportan como un sistema dinámico acoplado. El movimiento se puede desacoplar en una componente fluctuante asociada a la vibración de la estructura rodeada del fluido en reposo y otra permanente asociada a una corriente incidente de fluido sobre la estructura; esta distinción tiene profundas implicaciones respecto del comportamiento dinámico y el modelado matemático del sistema acoplado ya que cuando no hay movimiento permanente el sistema fluido-estructura acoplado es siempre dinámicamente estable, mientras que en el caso de que exista flujo permanente las inestabilidades dinámicas pueden existir con consecuencias desastrosas en la integridad mecánica de la estructura vibrante.

Esto conlleva a distinguir dos clases de problemas: el de interacción fluido-estructura con acoplamiento dinámico entre sólido y fluido en ausencia de un flujo permanente y, por otra parte, el de haber un flujo permanente sobre una estructura vibrante, llamado problema de vibración inducida por flujo.

Cuando se trata el problema de vibración inducida por flujo, se tiene en consideración primero el problema de interacción fluido-estructura tomando el valor del campo de velocidad de flujo permanente igual a cero y de esta forma, el comportamiento dinámico obtenido, sirve de estado de referencia para investigar las fuerzas de acoplamiento y la respuesta dinámica relacionada con la interacción entre el flujo permanente y la estructura vibrante.

El problema abordado en esta tesis, corresponde al primer caso, es decir, interacción fluido-estructura que trata del modelizado y análisis de las oscilaciones acopladas de un fluido y un sólido que ocurren alrededor de un estado de equilibrio que se supone estable y estático, por lo que el problema se restringe al dominio lineal más sencillo de analizar y modelizar que el problema de vibración inducida por flujo permanente. De esta manera, el movimiento del fluido queda restringido a oscilaciones de pequeña amplitud que se describen como flujo laminar, en contraste con la mayoría de flujos encontrados en problemas de ingeniería que son de naturaleza turbulenta. En la Figura 1.1 se muestra unas palas de aerogenerador en movimiento en donde aparecen fenómenos de acoplamiento fluido-estructura con flujo permanente.

Figura 1.1 Ejemplo de problema de acoplamiento fluido-estructura

Los problemas de interacción fluido-estructura tienen relevancia en el campo de la ingeniería en base a solucionar multitud de problemas que se plantean y que por lo tanto determinan y afectan al diseño de componentes estructurales como consecuencia de un exceso de vibraciones y ruido.

Desde un punto de vista cualitativo, son varios los aspectos físicos relacionados con los problemas de interacción fluido-estructura. El movimiento fluido inducido por una estructura vibrante resulta de diversos mecanismos de acoplamiento operando de forma conjunta con una importancia relativa que puede variar enormemente entre unos casos y otros. Como resultado importante del análisis teórico, ciertos parámetros adimensionales se definen que marcan la importancia relativa de cada mecanismo de acoplamiento en el proceso de interacción fluido-estructura .

1.3.1 Mecanismo básico del acoplamiento dinámico fluido-estructura

Se considera un cuerpo sólido inmerso en un fluido en reposo, como muestra la Fig. 1.2 y el interés es analizar las pequeñas vibraciones del sólido teniendo en cuenta los mecanismos físicos inducidos por el fluido. Se debe definir el estado de equilibrio respecto del cual el sistema fluido-estructura vibra. En el estado de reposo, el equilibrio del sólido depende del campo de presión estático $p_0(\vec{r})$, que actúa sobre las paredes del sólido. En este problema estático no existe acoplamiento, ya que $p_0(\vec{r})$ es la solución del problema hidroestático que se resuelve independientemente de la configuración de equilibrio del sólido. Sin embargo el problema dinámico fluido-estructura está acoplado y se entiende basado en el siguiente mecanismo de interacción dinámica:

Figura 1.2 Cuerpo sólido sumergido en fluido en casos estático y dinámico

1. Movimiento del sólido (campo de desplazamiento fluctuante $\vec{X}_s(\vec{r}, t)$) induce movimiento en el fluido (campo de desplazamiento fluctuante $\vec{X}_f(\vec{r}, t)$) que se supone en contacto con el sólido sin penetración.
2. Con el movimiento del fluido se generan esfuerzos fluctuantes $\vec{\sigma}_f(\vec{r}, t)$ (en particular un campo fluctuante de presión $p(\vec{r}, t)$), que actúa sobre el sólido con cargas fluctuantes sobre su superficie. Como consecuencia el movimiento del sólido se modifica. Este mecanismo de realimentación puede ser revertido, comenzando primero el movimiento fluido en lugar del sólido.

El acoplamiento fluido-estructura se modeliza analíticamente basándose en las ecuaciones de vibración del sólido y el fluido, complementándose con unas condiciones de acoplamiento en la interfase fluido-estructura, esto es en la pared mojada por el fluido S_w . Estas condiciones son:

1. Sobre S_w , el fluido y el sólido tienen el mismo movimiento, ya que el fluido se adhiere a la pared.
2. Los esfuerzos estructural y fluido ejercidos sobre S_w están en equilibrio, ya que S_w debe estar en equilibrio dinámico local.

Dependiendo de si el sólido está totalmente inmerso en el fluido, o no, S_w se define como toda la frontera del sólido (S_s) o como parte de ella. Cabe mencionar que las ecuaciones dinámicas de sólidos deformables se formulan dentro de la mecánica de medios continuos utilizando el punto de vista Lagrangiano. Por lo tanto, las cantidades físicas utilizadas para describir el movimiento están relacionadas con los puntos materiales o partículas del medio continuo. En su configuración inicial o no deformada el sólido ocupa un volumen V_s envuelto por una superficie cerrada S_s . El vector de posición $\vec{r}$ en su configuración inicial y en un tiempo t se utilizan como variables independientes. Por ejemplo $\vec{X}_s(\vec{r}, t)$ denota el vector campo de desplazamientos de una partícula localizada inicialmente en $\vec{r}$. Sin embargo mientras el análisis se restrinja a pequeñas vibraciones elásticas, se puede hacer basándose enteramente en la configuración inicial (la formulación Lagrangiana y Euleriana coinciden).

Las ecuaciones dinámicas del fluido se formulan igualmente dentro de la mecánica de medios continuos utilizando el punto de vista Euleriano, de acuerdo con las distintas propiedades del fluido como la densidad, presión, velocidad, etc, que se definen como campos fluctuantes referenciados a la posición en el espacio y no a las partículas de fluido. Esta es la aproximación clásica seguida en la dinámica de fluidos. La razón está en que, excepto la velocidad que se puede medir utilizando trazadores que siguen el flujo, la medición de la mayoría de las propiedades del fluido, por ejemplo la presión, densidad y temperatura sería muy difícil de imaginar con sondas móviles siguiendo las partículas. Sin embargo en caso de sólidos el caso contrario es cierto ya que las sondas como acelerómetros o extensiómetros están unidos al cuerpo sólido en movimiento. Además la descripción matemática del movimiento fluido utilizando coordenadas móviles es complicada. Sólo se utiliza para implementar técnicas numéricas en códigos computacionales de elementos finitos o volúmenes finitos. Estas técnicas conocidas como métodos Arbitrarios Lagrangianos Eulerianos ALE, se utilizan

para tratar problemas de grandes deformaciones o movimientos fluido-estructurales.

1.4 Metodología

1.4.1 Método energético del factor NAVMI

Un método analítico recientemente usado por distintos investigadores es el llamado del factor adimensional de masa añadida virtual incremental (NAVMI factor) que refleja el incremento de energía cinética debida al fluido y con el que se puede calcular el cambio en las frecuencias naturales de vibración. Es conocido que la vibración de estructuras en contacto con un fluido genera un movimiento en éste, incrementándose su energía cinética. La relación entre la energía cinética del fluido y de la estructura se conoce como factor de masa añadida virtual incremental, aunque su cálculo no siempre es posible dado que depende en gran medida, de las condiciones de contorno de la estructura y el fluido así como de su complejidad geométrica.

En los trabajos de Amabili, Kwak, Kim, Pasqualini, Dalpiaz y Santolini [1,2,3,4,5,29,30] se ha desarrollado este método para determinar las propiedades dinámicas de placas circulares inmersas en un líquido en un agujero de una pared infinita rígida. Se estudian las vibraciones libres de placas uniformes circulares que tienen condiciones de contorno axil-simétricas en contacto con agua y los factores de masa incremental, se obtienen analíticamente. Se supone que la placa circular está colocada en un agujero de una pared infinita rígida y el líquido se considera incompresible y no viscoso. Los modos de vibración en estos casos se toman los correspondientes a la vibración en vacío de la placa Leissa [34], que satisfacen de forma exacta las condiciones de contorno de la placa. Además en las referencias [1,11,23] se estudia la influencia del acoplamiento fluido-estructura sobre los modos de deformación, y se deduce que la diferencia respecto de los modos de deformación en vacío es despreciable, por lo tanto el uso de los modos

de deformación en vacío de la placa es una buena aproximación en todos los casos.

También hay otros trabajos en los que la geometría de la placa es rectangular [33,35,42]. Y en algunos trabajos recientemente se ha tenido en cuenta el efecto de la viscosidad [28].

En el caso de estructuras espaciales como antenas de satélite, la geometría de la placa no es circular aunque se puede considerar casi circular, es decir con forma elíptica de pequeña excentricidad. Basándose en el trabajo de Amabili y Kwak [1], se ha desarrollado en esta tesis un método de perturbación para determinar la influencia del fluido en las características dinámicas de placas casi-circulares. Aplicando la técnica de Lindstedt-Poincare [46] al método de perturbaciones se obtienen las frecuencias naturales y los modos de deformación de una placa elíptica empotrada en vacío. Los resultados de las frecuencias naturales son comparados con otros métodos de aproximación para este tipo de placas en función de la excentricidad, obteniéndose buenos resultados en todos los casos calculados. Posteriormente, los coeficientes adimensionales de masa virtual añadida se calculan utilizando el procedimiento de la transformación de Hankel [1]. Se estudia la influencia del coeficiente de masa añadida en función de la excentricidad de la placa elíptica para distintas frecuencias. Cuando el parámetro de perturbación tiende a cero, que es el caso de placa circular, se recuperan los resultados de Amabili y Kwak.

1.4.2 Método de elementos de contorno BEM

Las estructuras espaciales localizadas en el compartimento de carga de pago están sometidas a una vibración intensa durante el despegue. Estas cargas dinámicas excitan elementos estructurales del satélite como los reflectores de comunicaciones, paneles solares o paneles ligeros. Con las nuevas tecnologías y la aparición de estructuras tipo sándwich de material compuesto, su masa ha decrecido considerablemente produciendo un aumento en los niveles de

aceleración de manera que la influencia del fluido sobre la estructura tiene gran importancia, pudiéndose dañar partes sensibles de ésta así como los equipos electrónicos que van sobre ella. Es precisamente por esta razón por lo que las estructuras ligeras se someten a un intenso test acústico en grandes cámaras de reverberación, y se usan métodos analíticos en su diseño que garantizan que la estructura se adecúa a los requerimientos acústicos del lanzador para poder pasar a los test de calificación.

Hay dos efectos a tener en cuenta para obtener la respuesta dinámica de la estructura bajo cargas acústicas debidas a la presencia de aire, uno de ellos es el efecto del fluido que rodea la estructura que transmite al exterior del dominio las ondas de presión generadas por la vibración de la placa y el otro, por su parte, se trata de las ondas acústicas producidas por otras fuentes que inciden sobre la placa haciéndola vibrar [6,21,48].

La presencia del fluido afecta considerablemente a las frecuencias naturales de vibración de la placa, incluso en el caso del aire que es un fluido ligero, cuando las estructuras son de material compuesto tipo sándwich y por tanto ligeras. Las referencias [17,25,26,37,40,43,55] proporcionan buenos ejemplos de ello; estas estructuras principalmente rectangulares y circulares se modelan sumergidas en el fluido y van situadas en el agujero de una pared infinitamente rígida paralela al plano de la placa; lógicamente esta pared impide el movimiento del fluido en contacto con ella, no así la placa, cuya vibración induce un movimiento del fluido en su contacto. La radiación acústica de estas placas se ha estudiado en gran detalle [10,16,18,36,40] obteniendo la distribución de presión acústica empleando la ecuación integral de Rayleigh [24,53]. También se han estudiado el caso de placas libres, sin pared infinitamente rígida, sumergidas en un dominio fluido infinito [6,20,47,48].

Hay básicamente dos métodos capaces de determinar el comportamiento acústico de placas con geometrías complejas, el método de elementos de contorno BEM, y el método de elementos finitos FEM. La aplicación de este último a problemas acústicos necesita de la discretización del medio acústico, que para altas

frecuencias o dominios fluidos infinitos resultan unos sistemas algebraicos de gran tamaño incrementando el coste computacional, además, y habida cuenta de la condición de radiación de Sommerfield en el infinito, es difícil de imponer en la frontera exterior de la malla. Para solventar estos problemas el método de elementos de contorno BEM es un método alternativo apropiado para estudiar problemas de interacción fluido-estructura en los que el fluido presenta un dominio infinito [9,13,14,22,49]. Este método se adopta para resolver la formulación integral de la ecuación de Helmholtz para el campo de presiones calculando el salto de presión sobre la placa inducido por sus propias vibraciones, y está basado en la formulación integral de Kirchhoff de la ecuación de Helmholtz para el campo de presiones que utiliza una solución fundamental que satisface la condición de radiación de Sommerfield. La ecuación integral se resuelve por medio del método de colocación y la parte finita de la integral singular se obtiene analíticamente.

Las fuerzas generalizadas debidas a las cargas del fluido y a las cargas elastodinámicas de la placa se determinan utilizando los modos de deformación de ésta en vacío que son conocidos analíticamente como funciones base de la deformación estructural de la placa.

Finalmente, mediante un proceso de iteración se calculan las frecuencias naturales de vibración de la placa inmersa en el fluido compresible.

1.5 Objetivos y desarrollo de la tesis

En la presente tesis doctoral, se pretende estudiar las características de una estructura vibrante sumergida en un medio fluido (puede ser aire o agua), en particular, el efecto sobre las frecuencias de resonancia que van a variar respecto al caso de vibración en vacío en los siguientes casos:

- Vibración de placas circulares en un dominio fluido infinito compresible o incompresible con objeto de obtener las frecuencias propias de vibración

en los casos de placa empotrada en su periferia, placa apoyada en su periferia y placa libre.

- Vibración de placas casi-circulares en un agujero de pared rígida en contacto con un líquido sobre una cara con objeto de obtener las frecuencias propias de vibración en el caso de placa empotrada en su periferia.

El interés de este estudio se debe a su aplicación en estructuras espaciales muy ligeras que se encuentran sometidas a vibraciones por lo que, la influencia del aire que rodea estas estructuras en sus frecuencias de resonancia es apreciable y a tener en cuenta. También resulta interesante su aplicación en placas que vibran en contacto con un líquido como es el caso del sonar. Estas estructuras pueden tener diversas formas, entre las que están la forma circular y casi-circular.

A continuación se presentan los métodos que se proponen para resolver el problema de determinación de las frecuencias de vibración de placas sumergidas en un fluido: uno basado en el método de los elementos de contorno BEM para placas circulares tanto para fluido incompresible (agua) o compresible (aire) y otro de ellos es el método energético de los factores de masa incremental NAVMI junto con un método de perturbaciones para el caso de placas casi-circulares sumergidas en un fluido incompresible.

Un método de elementos de contorno BEM se ha desarrollado para la determinación del efecto del fluido en las características dinámicas de una placa circular. Una vez calculados analíticamente los modos de vibración de la placa en vacío, la matriz de masa añadida debido a la carga del fluido se determina por un método de elementos de contorno. Este método utiliza anillos circulares de manera que el número de elementos para obtener unos resultados precisos es muy bajo. Se utiliza un procedimiento de iteración para el cálculo de las frecuencias naturales del acoplamiento fluido-estructura para el caso del efecto de compresibilidad del aire. Los resultados del método se comparan con datos experimentales y otros modelos teóricos mostrando la precisión y exactitud del método para distintas condiciones de contorno de la placa.

Un método de perturbaciones se desarrolla para determinar la influencia de un fluido incompresible en las características dinámicas de placas casi-circulares. El método se aplica a placas con forma elíptica y pequeña excentricidad. Por una parte se obtienen las frecuencias naturales y los modos de deformación de la placa vibrando en vacío. A continuación, se calculan los coeficientes adimensionales de masa virtual añadida o factores NAVMI. Los resultados de los factores NAVMI y el efecto del fluido en las frecuencias naturales son presentados.

Este trabajo está estructurado en los siguientes capítulos que se resumen a continuación:

En el capítulo 2 se desarrolla el método de elementos de contorno que es aplicable a cualquier condición de contorno de la placa, ya sea empotrada, simplemente apoyada, o libre en su periferia. Para ello utiliza como modos de deformación los correspondientes a la vibración de ésta en vacío, que es una buena aproximación, ya que la introducción de los modos de deformación corregidos por la presencia del fluido presenta una influencia insignificante en los resultados, en particular, las frecuencias naturales de vibración, como ya han demostrado otros autores [1].

Este modelo se ha validado con los resultados obtenidos en comparación con los resultados de otros métodos analíticos y experimentales existentes para el caso de que el fluido sea incompresible, en concreto agua. Se aprecia una reducción bastante importante de las frecuencias de vibración de la placa en contacto con el líquido respecto de sus valores en vacío.

Para el caso de que la placa esté sumergida en un fluido compresible (aire) se han obtenido unos resultados que difieren poco respecto al caso de considerar el aire como fluido incompresible. Así mismo, en este caso de placa sumergida en aire, no se aprecia una reducción de frecuencia respecto al vacío tan importante como en el caso del agua. No obstante, en el caso de que la estructura de la placa sea muy ligera, como es el caso de los materiales compuestos utilizados para aplicaciones espaciales, como paneles solares, antenas, etc, y teniendo en cuenta que su diámetro es bastante apreciable - unos 2 o 3 metros- sí que se obtienen unos resultados donde la reducción de frecuencia respecto al vacío, en particular,

la fundamental, es importante, así como ejemplo de muestra es el caso de una antena ligera de 3 metros donde la reducción es del orden del 30%, como se corrobora en un ensayo experimental del reflector del Intelsat VI C-B [17]

En el capítulo 3 se describe el método energético del factor de masa incremental añadida o NAVMI factor por el fluido (agua) asociado al movimiento de vibración de la placa ya desarrollado por Amabili y Kwak [1]. Para ello se calculan la energía cinética de la placa y la del fluido inducida por la vibración de la placa, suponiendo fluido incompresible y no viscoso. La placa se considera colocada en un agujero de una pared rígida infinita y en contacto con dicho fluido sobre una de sus caras. De esta manera, se obtienen las frecuencias naturales de vibración de la placa en contacto con el fluido para distintas condiciones de contorno de ésta.

En el capítulo 4 se desarrolla un método de perturbaciones basado en el método de Lindsted-Poincaré [46] para obtener las frecuencias naturales de vibración en vacío de placas elípticas de pequeña excentricidad o casi-circulares empotradas en su periferia. Los resultados obtenidos se validan con otros métodos ya utilizados [27,34]. Para ello se desarrolla en potencias del parámetro de perturbación ε , asociado a la pequeña excentricidad de la elipse, la deformación de la placa así como su frecuencia de vibración, obteniéndose un conjunto de ecuaciones y condiciones de contorno asociadas a cada orden de potencia del parámetro de perturbación, que se resuelven obteniendo así las frecuencias naturales de la placa casi-circular asociadas a cada modo de deformación. Así mismo se obtiene analíticamente la expresión de los modos de deformación que se utilizan como funciones base para el cálculo de los factores NAVMI para la placa elíptica del siguiente capítulo.

En el capítulo 5 se aplica el método del factor NAVMI para el caso de la placa elíptica casi-circular desarrollado en el capítulo 4, dando como resultado las frecuencias naturales de vibración de dicha placa en contacto con un líquido, para lo que se tiene en cuenta el desarrollo en perturbaciones ya aplicado para el caso de vibración en vacío. Se obtienen los resultados de variación del factor NAVMI

en función de la excentricidad o parámetro de perturbación de la placa para valores pequeños de ésta para los distintos modos de deformación, observando y concluyendo que este factor disminuye al aumentar la excentricidad.

En el apéndice A se desarrolla la teoría de deformación de placas basada en las hipótesis de Kirchhoff-Love, desde un punto de vista variacional teniendo en cuenta el principio de Hamilton [7], obteniendo así la ecuación de deformación de una placa que contiene los términos de rigidez, inercia, y en su caso el efecto del fluido con un salto de presión sobre la placa.

En el apéndice B se obtiene la expresión de los modos de deformación en vacío para placas circulares con distintas condiciones de contorno, como soluciones de la ecuación de deformación, que resultan ser funciones de tipo Bessel, y son las que se usarán como funciones base de deformación, en el caso de vibración de la placa sumergida en un fluido, en el resto de los capítulos.

2 METODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO BEM PARA VIBRACION DE PLACAS CIRCULARES SUMERGIDAS EN UN FLUIDO

2.1 Vibración de una placa circular en un fluido compresible:

La ecuación (A.38) de deformación de la placa sumergida en el fluido se expresa [8]:

$$D\nabla^4 w(r, \theta, t) + \rho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \Delta p(r, \theta, t)$$

Siendo:

$$D, \text{ el coeficiente de rigidez de la placa } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

E , el módulo de elasticidad del material

h , el espesor de la placa

ν , el módulo de Poisson

ρ_p , la densidad del material

Donde Δp es el salto de presión a través de la placa, $\Delta p = p_i - p_e$ donde p_i y p_e son la presión en intradós (cara de abajo $z = 0^-$) y extradós (cara de arriba $z = 0^+$) de la placa.

Suponiendo oscilaciones armónicas a frecuencia ω se puede expresar la deformación de la placa y la presión como:

$$\begin{aligned} w(r, \theta, t) &= \tilde{w}(r, \theta) \cdot e^{-i\omega t} \\ p(r, \theta, z, t) &= \tilde{p}(r, \theta, z) \cdot e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Por lo que en variables espaciales queda la ecuación:

$$D\nabla^4 \tilde{w} - \rho_p h \omega^2 \tilde{w} = \Delta \tilde{p}(r, \theta) \quad (2.2)$$

La condición de contorno que se va a desarrollar es:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_{\infty} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{en la placa, } z = 0$$

A continuación se demuestra esta condición de contorno:

La ecuación de cantidad de movimiento para el fluido sin viscosidad es:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p \quad (2.3)$$

Para pequeñas perturbaciones (sonido) se tiene [53]:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{\infty} + \rho \\ p &= p_{\infty} + p \\ \vec{v} &= \vec{0} + \vec{v} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Siendo los términos de la derecha de los segundos miembros mucho menores que los del primer miembro salvo para el caso de la velocidad, aunque por comodidad se han escrito de la misma forma, es decir los términos del segundo miembro p , ρ y $\vec{v}$ son perturbaciones, y ρ_{∞} y p_{∞} son la densidad y presión del fluido no perturbado y por tanto constantes. La ecuación de cantidad de movimiento queda:

$$(\rho + \rho_{\infty}) \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p \quad (2.5)$$

Despreciando términos de un orden de magnitud inferior se tiene:

$$\rho_{\infty} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p \quad (2.6)$$

Por otra parte, en $z = 0$ la velocidad del fluido y la placa coinciden, es decir:

$$\vec{v} = \frac{\partial w}{\partial t} \vec{k} \quad \text{en } z = 0 \quad (2.7)$$

Con lo que finalmente se deduce de la ecuación (2.6):

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_{\infty} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{en la placa, } z = 0 \quad (2.8)$$

2.2 Ecuación de la presión para pequeñas perturbaciones:

Partiendo de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento sin viscosidad:

Continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.9)$$

Cantidad de movimiento:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p \quad (2.10)$$

Para pequeñas perturbaciones, de la ecuación (2.4), la ecuación de continuidad queda despreciando términos de menor orden de magnitud:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_{\infty} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.11)$$

De la misma manera, la ecuación de cantidad de movimiento, ecuación (2.6) resulta:

$$\rho_{\infty} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p$$

Derivando respecto del tiempo la ecuación de continuidad (2.11) se tiene:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \rho_{\infty} \nabla \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \quad (2.12)$$

Y combinando ésta última con la de cantidad de movimiento (2.6) resulta:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \rho_{\infty} \nabla \cdot \left(\frac{-\nabla p}{\rho_{\infty}} \right) = 0, \quad \text{es decir:}$$
$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \Delta p = 0 \quad (2.13)$$

A continuación se procede a deducir la relación entre la presión perturbada p y la densidad de perturbación ρ

De la relación de isentropía se tiene:

$$\frac{p_{\infty} + p}{(\rho_{\infty} + \rho)^{\gamma}} = \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}^{\gamma}} \quad (2.14)$$

Desarrollando en serie el denominador:

$$\frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}^{\gamma}} = (p + p_{\infty})(\rho_{\infty} + \rho)^{-\gamma} = (p + p_{\infty}) \left(\frac{1}{\rho_{\infty}^{\gamma}} - \frac{\gamma}{\rho_{\infty}^{\gamma+1}} \rho \right) \quad (2.15)$$

De donde se deduce:

$$\frac{p}{\rho} = \gamma \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}} \quad (2.16)$$

Despejando la densidad de la ecuación anterior:

$$\rho = \frac{p}{\gamma \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}}} = \frac{p}{a_{\infty}^2} \quad (2.17)$$

Donde a_{∞} es la velocidad del sonido en el fluido no perturbado.

Sustituyendo la expresión anterior de la densidad en la ecuación (2.13), se obtiene la ecuación para la presión perturbada o de las ondas sonoras:

$$\frac{1}{a_{\infty}^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = 0 \quad (2.18)$$

Suponiendo variación temporal de frecuencia ω , ecuación (2.1), se tiene:

$$p(r, \theta, z, t) = \tilde{p}(r, \theta, z) \cdot e^{-i\omega t}$$

Y sustituyendo en la ecuación (2.18) resulta finalmente la ecuación de la presión para pequeñas perturbaciones y oscilaciones armónicas de frecuencia ω :

$$\Delta \tilde{p} + k^2 \tilde{p} = 0 \quad (2.19)$$

Donde $k = \frac{\omega}{a_{\infty}}$ es el número de onda (2.20)

2.3 Presión P en el fluido en función del salto de presión en la placa ΔP :

Se va a proceder a deducir la ecuación integral de Kirchhoff-Helmholtz [24] que da la presión en cualquier punto del fluido en el que está sumergida la placa en función del salto de presión sobre la placa, y para ello se comienza deduciendo a continuación las identidades de Green.

La ecuación que se busca es:

$$\tilde{p}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_p} \Delta \tilde{p}(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) d\xi d\eta \quad (2.21)$$

Donde R es la distancia punto fuente y punto efecto, es decir:

$$R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \quad (2.22)$$

2.3.1 Identidades de Green:

Del teorema de la divergencia donde $\vec{A}$ es un vector cualquiera se tiene:

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS \quad (2.23)$$

Tomando $A_i = \phi \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$ siendo ϕ, ψ funciones escalares e $i=1,2,3$ las tres

componentes espaciales o vectoriales la ecuación anterior se convierte en:

$$\iiint_V \phi \Delta \psi dV + \iiint_V \nabla \phi \cdot \nabla \psi dV = \iint_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \quad (2.24)$$

Como variante de esta ecuación se puede reescribir intercambiando ϕ, ψ y restando los resultados para obtener:

$$\iiint_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) dV = \iint_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS \quad (2.25)$$

Estas dos últimas ecuaciones se conocen como 1ª y 2ª identidades de Green.

2.3.2 Ecuación integral de Kirchhoff-Helmholtz

En este apartado se deduce esta ecuación integral [24].

Sea (ξ, η, ζ) un punto fijo dentro de la región V del espacio y sea R la distancia entre dicho punto y cualquier otro punto (x, y, z) de manera que:

$$R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$$

Tomando ψ la función de Green g solución de la ecuación de Helmholtz:

$$\Delta g + k^2 g = \delta \quad (2.26)$$

Donde $\delta = \delta(\vec{x}, \vec{\xi})$ es la función delta de Dirac tridimensional, por lo tanto, de su definición se cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \Delta g + k^2 g &= 0 \quad \text{salvo en } \vec{x} = \vec{\xi} \\ \iiint_V (\Delta g + k^2 g) dV &= 1 \end{aligned} \quad (2.27)$$

La solución general de g es de la forma:

$$g = A \frac{e^{ikR}}{R} + B \frac{e^{-ikR}}{R} \quad (2.28)$$

Que además debe cumplir la condición de radiación de Sommerfield [24]

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial g}{\partial R} - ikg \right) = 0 \quad (2.29)$$

Que asegura que la expresión integral para la presión representa ondas viajando hacia el infinito, por lo que sustituyendo la ecuación (2.28) en (2.29) resulta que la constante B debe de ser nula.

$$\text{La solución de } g \text{ por tanto es de la forma } g = A \frac{e^{ikR}}{R} \quad (2.30)$$

Donde la constante $A = -\frac{1}{4\pi}$ como se va a demostrar a continuación:

Por una parte se tiene la integral de volumen del término $k^2 g$:

$$\begin{aligned}\iiint_V k^2 g dV &= 4\pi \int_0^a R^2 k^2 A \frac{e^{ikR}}{R} dR = 4\pi A \left[e^{ikR} (1 - ikR) \right]_0^a = \\ &= 4\pi A \left[e^{ika} (1 - ika) - 1 \right]\end{aligned}\quad (2.31)$$

Por otra parte, la integral de volumen del término Δg :

$$\iiint_V \Delta g dV = \iiint_V \nabla \cdot \nabla g dV = \iint_S \nabla g \cdot d\vec{S}$$

$$\text{Como } \nabla g = \frac{A}{R} e^{ikR} \left(ik - \frac{1}{R} \right)$$

Resulta:

$$\iiint_V \Delta g dV = \iint_S \nabla g \cdot d\vec{S} = \nabla g \Big|_{R=a} 4\pi a^2 = 4\pi a A e^{ika} \left(ik - \frac{1}{a} \right) \quad (2.32)$$

Y finalmente de la definición de la delta de Dirac resulta sustituyendo las expresiones anteriores:

$$\iiint_V (\Delta g + k^2 g) dV = 1 = -4\pi A \quad (2.33)$$

Con lo que $A = -\frac{1}{4\pi}$, y por lo tanto la función g

$$g = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \quad (2.34)$$

Haciendo $\phi = \tilde{p}$ (presión) y sabiendo que la presión cumple la ecuación (2.19):

$$\Delta \tilde{p} + k^2 \tilde{p} = 0$$

De la segunda identidad (2.25) se tiene:

$$\iiint_V (\tilde{p} \Delta g - g \Delta \tilde{p}) dV = \iint_S \left(\tilde{p} \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} \right) dS \quad (2.35)$$

Analizando cada término de la ecuación anterior se tiene:

$$\begin{aligned}
\iiint_V \tilde{p} \Delta g dV &= \iiint_V \tilde{p} (\delta - k^2 g) dV = \tilde{p}(\vec{x}) - \iiint_V k^2 \tilde{p} g dV \\
\iiint_V g \Delta \tilde{p} dV &= - \iiint_V k^2 \tilde{p} g dV
\end{aligned}
\tag{2.36}$$

Por lo que:

$$\iiint_V (\tilde{p} \Delta g - g \Delta \tilde{p}) dV = \tilde{p}(\vec{x})
\tag{2.37}$$

Por tanto la segunda identidad, ecuación (2.25) queda:

$$\tilde{p}(x, y, z) = \iint_S \left(\tilde{p} \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} \right) dS
\tag{2.38}$$

La superficie de contorno S la descomponemos en $S = S_\infty + S_p$ es decir la superficie de la placa y la del infinito del fluido que rodea la placa que es una superficie esférica como muestra la Fig. 2.1

Figura 2.1 Superficies de contorno de la placa y el infinito

En la superficie esférica S_∞ la integral de la ecuación (2.38) se anula, teniendo en cuenta la condición de radiación de Sommerfield para la presión

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial R} - ik \tilde{p} \right) = 0 \quad \text{y que la solución para la función } g \text{ es } g = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R},$$

resulta:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_\infty} \left(\tilde{p} \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} \right) dS &= \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 \left(\tilde{p} \frac{\partial g}{\partial R} - g \frac{\partial \tilde{p}}{\partial R} \right) = \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial R} - ik\tilde{p} \right) e^{ikR} + \lim_{R \rightarrow \infty} \tilde{p} e^{ikR} = 0
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Donde el segundo sumando es nulo ya que la presión disminuye con la distancia, por tanto la integral de superficie se toma sólo sobre la superficie de la placa S_p

Ahora bien, de la condición de contorno del fluido sobre la placa, ecuación (2.8) se cumple:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_\infty \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{es decir} \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} = \rho_\infty \omega^2 \tilde{w}$$

Pero al tener las normales a la placa distinto signo por arriba y por abajo como se observa en la Fig. 2.2, y considerando la aproximación para la vibración de la placa de que la normal coincide con la coordenada vertical z la integral

$$\iint_{S_p} g \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} dS = 0 \text{ se anula ya que } \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} \text{ en } S_{pe} \text{ y } \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} = +\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} \text{ en } S_{pi}$$

Figura 2.2 Contorno de la placa

Para deducir la integral que queda sobre la superficie de la placa S_p se descompone ésta en la superficie de extradós e intradós $S_p = S_{pe} + S_{pi}$ con lo que la integral resulta:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_p} \tilde{p} \frac{\partial g}{\partial n} dS &= -\iint_{S_{pe}} \tilde{p}_e \frac{\partial g}{\partial z} dS + \iint_{S_{pi}} \tilde{p}_i \frac{\partial g}{\partial z} dS = \\
&= \iint_S \Delta \tilde{p} \frac{\partial g}{\partial z} dS = \iint_{S_p} \Delta \tilde{p} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \right) d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Y finalmente se obtiene la ecuación integral de Kirchhoff-Helmholtz, ecuación (2.21), que nos da la presión en cualquier punto del fluido en el que está sumergida la placa en función del salto de presión sobre la placa.

$$\tilde{p}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_p} \Delta \tilde{p}(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) d\xi d\eta$$

2.4 Frecuencias naturales de vibración de la placa sumergida en el fluido

En este apartado se plantea un método de elementos de contorno BEM que permite el cálculo de las frecuencias de vibración de la placa circular sumergida en el fluido, para lo cual se parte de la ecuación y condición de contorno de acoplamiento fluido-estructura ya descritas y que se mencionan a continuación.

La ecuación de deformación de la placa sumergida en el fluido, ecuación (A.38) es:

$$D\nabla^4 w(r, \theta, t) + \rho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \Delta p(r, \theta, t)$$

Y la condición de contorno, ecuación (2.8)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_\infty \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{en la placa, } z = 0$$

Donde Δp es el salto de presión a través de la placa, $\Delta p = p_i - p_e$ donde p_i y p_e son la presión en intradós (cara de abajo) y extradós (cara de arriba) de la placa.

La deformación de la placa tiene por expresión, ecuación (B.16):

$$\tilde{w}(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} W_m^n(r) \cdot \cos(m\theta)$$

Siendo $W_m^n(r)$ los modos propios de deformación en vacío.

Cuya solución general es de la forma, ecuación (B.16):

$$\tilde{w}(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_m^n J_m(\beta_m^n r) + B_m^n I_m(\beta_m^n r) \right] \cos(m\theta)$$

Donde β_m^n es un parámetro que depende de las características dinámicas y elásticas de la placa y que nos da las frecuencias propias de la misma en el vacío.

Que se puede poner según (B.17) de la forma, siendo $B_m^n = -\lambda_m^n A_m^n$:

$$\tilde{w}(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_m^n \left[J_m(\beta_m^n r) - \lambda_m^n I_m(\beta_m^n r) \right] \cos(m\theta)$$

Se pueden estudiar los casos de caso de placa empotrada, apoyada y libre en su periferia:

La solución para la presión asociada a los modos de deformación por separación de variables en coordenadas cilíndricas se expresa:

$$\tilde{p}(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_m^n(r, z) \cdot \cos(m\theta) \quad (2.41)$$

Con lo que la ecuación diferencial de la presión queda:

$$\frac{\partial^2 P_m^n}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 P_m^n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_m^n}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} P_m^n + k^2 P_m^n = 0 \quad (2.42)$$

De la condición de contorno sobre la placa, ecuación (2.8), que nos da el acoplamiento fluido-estructura y suponiendo movimiento oscilatorio de frecuencia ω , resulta:

$$\frac{\partial P_m^n(r, z=0)}{\partial z} = \rho_{\infty} \omega^2 W_m^n(r) \quad \text{en } z=0 \quad \text{para } 0 < r < R \quad (2.43)$$

Aplicando la condición de acoplamiento fluido-estructura y teniendo en cuenta la ecuación integral de Kirchhoff-Helmholtz se tiene:

$$\left. \frac{\partial P_m^n}{\partial z} \right)_{z=0} = \rho_\infty \omega^2 W_m^n(r) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^R \Delta P_m^n(\rho, 0) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{e^{ikR}}{R} \right]_{z=0} 2\pi \rho d\rho \quad (2.44)$$

Siendo $R = |\rho - r|$

Por tanto:

$$\left. \frac{\partial P_m^n}{\partial z} \right)_{z=0} = \rho_\infty \omega^2 W_m^n(r) = -\frac{1}{2} \int_0^R \Delta P_m^n(\rho, 0) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{e^{ikR}}{R} \right]_{z=0} \rho d\rho \quad (2.45)$$

$$\text{Llamando } K = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right)_{z=0} \quad (2.46)$$

Que desarrollando en $z = 0$ resulta $K = e^{ikR} \left(\frac{ik}{R^2} - \frac{1}{R^3} \right)$

Desarrollando en serie e^{ikR} , se tiene para K una parte singular y otra no singular en el caso de que el punto fuente y efecto coincidan, es decir $K = (K - K_s) + K_s$ siendo:

$$K_s = -\frac{1}{R^3} - \frac{k^2}{2R} \quad (2.47)$$

Discretizando en N puntos r_i , $i = 1, 2, \dots, N$ la placa queda dividida en N anillos circulares. Sea $\Delta r_j = r_{j+1} - r_j$ el espesor del anillo j . En cada anillo una circunferencia de radio $\bar{r}_j = \frac{r_{j+1} + r_j}{2}$ se coloca donde la ecuación (2.45) debe de verificarse.

Esta ecuación se expresa por un método de colocación como:

$$\rho_\infty \omega^2 W_m^n(r_i) q_m^n = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \Delta P_m^n(\bar{\rho}_j) \int_{r_j}^{r_{j+1}} K(|\rho - r_i|, k) \rho d\rho \quad (2.48)$$

Finalmente se obtiene un sistema lineal de ecuaciones algebraicas para determinar el salto de presión en cada anillo circular $\Delta P_m^n(\bar{\rho}_j)$

Para mejorar la estabilidad del método de colocación los N anillos se dividen de manera que conserven el mismo área. Por tanto los valores de r_i , de la discretización en N puntos r_i , $i = 1, 2, \dots, N$, se obtienen de tal forma que el área de cada anillo sea igual a $\frac{\pi a^2}{N}$

$$\rho_\infty \omega^2 W_m^n(r_i) = \sum_{j=1}^N \Lambda_{ij} \Delta P_{mj}^n \quad (2.49)$$

Siendo
$$\Lambda_{ij} = -\frac{1}{2} \int_{r_j}^{r_{j+1}} K \cdot \rho \cdot d\rho \quad (2.50)$$

Para el cálculo de Λ_{ij} hay que distinguir dos casos: caso no singular: si r_i no está entre r_j y r_{j+1} ; caso singular: si r_i está entre r_j y r_{j+1}

A continuación se analiza cómo es Λ_{ij} en estos dos casos:

Caso No Singular: $r_{j+1} < r_i < r_j$

$$\Lambda_{ij} = -\frac{1}{2} \int_{r_j}^{r_{j+1}} K \cdot \rho \cdot d\rho = -\frac{1}{2} \int_{r_j}^{r_{j+1}} e^{ik|\rho-r_i|} \left(\frac{ik}{|\rho-r_i|^2} - \frac{1}{|\rho-r_i|^3} \right) \rho d\rho \quad (2.51)$$

Se integra numéricamente con un método de Euler.

Caso Singular: $r_{j+1} > r_i > r_j$

Se procede de esta manera:

$$\Lambda_{ij} = -\frac{1}{2} \int_{r_j}^{r_{j+1}} [(K - K_s) + K_s] \rho d\rho = \Lambda_{ij}^{NS} + \Lambda_{ij}^S \quad (2.52)$$

Siendo:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{ij}^{NS} &= -\frac{1}{2} \int_{r_j}^{r_{j+1}} (K - K_s) \rho d\rho = \\
&= -\frac{1}{2} \int_{r_j}^{r_{j+1}} \left[e^{ikR} \left(\frac{ik}{R^2} - \frac{1}{R^3} \right) + \frac{1}{R^3} + \frac{k^2}{2R} \right] \rho d\rho
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Que se integra numéricamente.

$$\Lambda_{ij}^S = -\frac{1}{2} \int_{r_j}^{r_{j+1}} K_s \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_{r_j}^{r_{j+1}} \left(\frac{1}{R^3} + \frac{k^2}{2R} \right) \rho d\rho \tag{2.54}$$

Para Λ_{ij}^S se toma el valor principal de Mangler [38], que resulta:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{ij}^S &= -\frac{1}{4} \left[\frac{r_i}{(r_{j+1} - r_i)^2} + \frac{r_i}{(r_i - r_j)^2} \right] + \\
&+ \frac{k^2}{4} \left[2r_i + r_i \operatorname{Ln} \left[\left(\frac{r_{j+1}}{r_i} - 1 \right) \left(1 - \frac{r_j}{r_i} \right) \right] \right]
\end{aligned} \tag{2.55}$$

La deformación de la placa por separación de variables y suponiendo oscilaciones armónicas se puede poner como:

$$w(r, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} q_m^n W_m^n (\beta_m^n r) \cos(m\theta) e^{-i\omega t} \tag{2.56}$$

Siendo β_m^n , $m = 0, 1, 2, \dots, \infty$ $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ las infinitas raíces que dan las frecuencias propias en vacío de la placa,

W_m^n , las autofunciones asociadas,

q_m^n , las constantes de amplitud de los modos que forman los autovectores.

Si ahora se plantea la ecuación diferencial de deformación de la placa, ecuación (A.38):

$$D \nabla^4 w(r, \theta, t) + \rho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \Delta p(r, \theta, t)$$

Expresando el trabajo generalizado de cada uno de los términos: de rigidez, inercia y salto de presión sobre la placa, sobre el modo de oscilación W_u^v resulta:

$$\iint_S D \nabla^4 W_m^n W_u^v q_m^n dS - \rho_p h \iint_S \omega^2 W_m^n W_u^v q_m^n dS = \iint_S \Delta P_m^n W_u^v dS \quad (2.57)$$

Por otra parte, discretizando se tiene para la condición de contorno fluido-estructura, suponiendo oscilaciones armónicas y teniendo en cuenta la ecuación integral de Kirchhoff-Helmholtz como se ha visto, de la ecuación (2.49):

$$\rho_\infty \omega^2 q_m^n W_{mi}^n = \Lambda_{ij} \Delta P_{mj}^n \quad (2.58)$$

Que en forma matricial:

$$\{\Delta P_{mi}^n\} = \rho_\infty \omega^2 q_m^n [\Lambda_{ij}]^{-1} \{W_{mj}^n\} \quad (2.59)$$

La ecuación del trabajo generalizado (2.57), se expresa en forma matricial una vez discretizadas las integrales:

$$\begin{aligned} D [\nabla^4 W_m^n] [\Delta S] \{W_u^v\} q_m^n - \rho_p h \omega^2 [W_m^n] [\Delta S] \{W_u^v\} q_m^n = \\ = \rho_\infty \omega^2 [W_m^n] [\Lambda^{-1}]^T [\Delta S] \{W_u^v\} q_m^n \end{aligned} \quad (2.60)$$

Esta es una ecuación escalar para cada valor m, n, u, v . Haciendo variar:

$$m, n, u, v = 0, 1, 2, \dots, N$$

Obtenemos el siguiente sistema:

$$[K] - \omega^2 ([M] + [M_F]) \{q\} = 0 \quad (2.61)$$

Donde:

$$K_{mu}^{nv} = D [\nabla^4 W_m^n] [\Delta S] \{W_u^v\} \quad (2.62)$$

$$M_{mu}^{nv} = \rho_p h [W_m^n] [\Delta S] \{W_u^v\} \quad (2.63)$$

$$M_{Fmu}^{nv} = \rho_\infty [W_m^n] [\Lambda^{-1}]^T [\Delta S] \{W_u^v\} \quad (2.64)$$

De esta manera se llega a un problema de autovalores que nos dan las frecuencias de vibración de la placa sumergida en el fluido.

Cabe decir que la matriz $[M_F]$ para el caso de un fluido compresible depende de las frecuencias naturales a través del número de onda $k = \frac{\omega}{a_\infty}$. Por tanto, la solución a la ecuación (2.61) para la determinación de las frecuencias naturales ω es de un problema no lineal de autovalores ya que $[M_F(\omega)]$. Se necesita usar un proceso de iteración para obtener las frecuencias naturales del sistema. El esquema del proceso de iteración que se ha seguido en esta tesis es el dado en [20] y es el siguiente:

1. Primero se calculan las frecuencias naturales del sistema suponiendo que el fluido que rodea la placa es incompresible. En este caso la matriz $[M_F]$ es independiente de ω y el cálculo de las frecuencias es por un método estándar de cálculo de autovalores.
2. De la solución para el caso incompresible se obtienen un conjunto de N frecuencias $\omega_{jincomp.}$ para el sistema acoplado fluido-estructura incompresible.
3. Para cada frecuencia del paso 2, se puede definir el número de onda correspondiente y calcular una matriz de masa fluida $[M_F(k_j)]$.
4. Para otros valores del número de onda k la matriz de masa fluida se obtiene por interpolación entre dos matrices calculadas $[M_F(k_j)]$ y $[M_F(k_{j+1})]$
5. Comenzando por el valor más pequeño del número de onda k_1 , se calculan las frecuencias naturales del sistema $[-\omega^2([M] + [M_F(k_1)]) + [K]]\{q\} = \{0\}$. Sea la frecuencia natural

calculada más pequeña ω_1^i . Si $\left| \frac{\omega_1^i}{a_\infty} - k_1 \right| < \varepsilon$, donde ε es un número pequeño, entonces se procede al cálculo de la siguiente frecuencia natural del sistema. Si la condición de arriba no se satisface entonces el paso 5 es repetido tomando una nueva matriz de masa fluida cercana al número de onda $\frac{\omega_1^i}{a_\infty}$ del conjunto obtenido en el paso 4.

Para cada frecuencia el procedimiento anterior converge en dos o tres iteraciones.

Cabe destacar que para el caso de fluido incompresible las frecuencias naturales se obtienen una a una mientras que para el caso incompresible todas se obtienen a la vez. Una vez que las frecuencias del sistema acoplado fluido-estructura son determinadas, los correspondientes modos de deformación se pueden calcular mediante los autovectores $\{q_i\}$ y expresarse como una combinación lineal de los modos de deformación de la estructura en vacío.

2.5 Resultados

Para el caso de la placa sumergida en agua (fluido incompresible), en las tablas 2.1, 2.2 y 2.3, las frecuencias f_{lm}^n y f_{vm}^n son comparadas con los resultados de otros autores, siendo f_{lm}^n la frecuencia asociada al modo de deformación W_m^n de la placa en contacto con el agua, y f_{vm}^n la correspondiente frecuencia en vacío, ambas en Hz

Tabla 2.1 Frecuencias naturales para placa circular libre de Aluminio (en vacío y en contacto con el líquido), de radio $a = 7,5cm$ y espesor $h = 3mm$

	Este método	Gallego-Juárez ref[44]		Amabili-Kwak ref[1]	Frecuencia en vacío f_{v0}^n
		exp	calc		
f_{10}^1	566	565	527	667	1181
f_{10}^2	3908	2700	2684	3336	5045
f_{10}^3	10018	6533	6875	8351	11515

En la tabla 2.1 se observa que para el primer modo las frecuencias naturales son semejantes. Para los modos segundo y tercero, existen diferencias notables entre los tres métodos. La diferencia puede ser debida a que las condiciones de contorno no son las mismas, en el método de esta tesis la placa está inmersa en el agua por ambas caras mientras que en los otros dos casos está situada en un agujero de una pared rígida infinita. La reducción de la frecuencia en contacto con el líquido respecto de su valor en vacío decrece con el orden del modo en el método de esta tesis y en el caso de Amabili-Kwak [1], mientras que esta reducción permanece constante con el orden del modo para el caso de Gallego-Juárez [44]

Tabla 2.2 Frecuencias naturales para placa circular empotrada de Aluminio (en vacío y en contacto con el líquido), de radio $a = 7.5cm$ y espesor $h = 3mm$

	Este método	Lamb [32]
f_{10}^0	500	500
f_{v0}^0	1327	1327

En la tabla 2.2 el resultado del presente método coincide con el obtenido por Lamb [32] para la frecuencia fundamental que fue la única calculada por éste.

Tabla 2.3 Frecuencias naturales para placa circular libre de Acero (en vacío y en contacto con el líquido), de radio $a = 17,5cm$ y espesor $h = 2mm$

	Este método	Amabili-Dalpíaz-Santolini [4]	Amabili-Kwak [1]	Frecuencia en vacío f_{vm}^n
f_{10}^1	64.4	67.8	76.7	145
f_{10}^2	468	314	386.6	619
f_{11}^1	211	159	187.3	324
f_{11}^2	797	512	634	960

En la tabla 2.3 se observa que en el caso de cero diámetros nodales, para el primer modo las frecuencias naturales son similares en los tres casos, es decir el método de esta tesis, Amabili-Dalpíaz-Santolini [4] y Amabili-Kwak [1] y en cambio para el segundo modo los resultados presentan diferencias más acusadas entre los tres casos; esto también es válido para el caso de un diámetro nodal aunque con diferencias más apreciables. Estas diferencias pueden ser debidas a que las condiciones de contorno no son las mismas en cada caso; en el método de esta tesis la placa está inmersa en un dominio infinito de agua, en el caso de Amabili-Kwak [1] está situada en un agujero de una pared rígida infinita, y en el caso de Amabili, Dalpiaz, Santolini [4] la placa está inmersa en un recipiente de dimensión finita que contiene el líquido y no en un dominio infinito de líquido. La reducción de la frecuencia en líquido con respecto a su valor en vacío, tanto en el caso de cero diámetros nodales como en el de un diámetro nodal, disminuye con el orden del modo en el método de esta tesis y en el caso de Amabili-Kwak [1],

mientras que esta reducción permanece constante con el orden del modo en el caso de Amabili, Dalpiaz, Santolini [4]

A continuación en las Tablas 2.4 y 2.5 se presentan los resultados para una placa circular empotrada y libre de aluminio de radio $a = 10\text{cm}$ y espesor $h = 3\text{mm}$

Tabla 2.4 Frecuencias naturales para placa circular empotrada de Aluminio (en vacío y en contacto con el líquido), de radio $a = 10\text{cm}$ y espesor $h = 3\text{mm}$

f_{v0}^0	f_{l0}^0	f_{v0}^1	f_{l0}^1	f_{v0}^2	f_{l0}^2
746.2	247.5	2905	2116	6508	5472

Tabla 2.5 Frecuencias naturales para placa circular libre de Aluminio (en vacío y en contacto con el líquido), de radio $a = 10\text{cm}$ y espesor $h = 3\text{mm}$

f_{v0}^1	f_{l0}^1	f_{v0}^2	f_{l0}^2	f_{v0}^3	f_{l0}^3
664.5	283.4	2838	2121	6477	5497

Se observa la gran reducción de frecuencia con respecto al valor en vacío que para el primer modo es del orden de tres veces, pero para los modos segundo y tercero ésta reducción disminuye.

Para el caso de la placa sumergida en aire (fluido compresible), dos condiciones de contorno distintas han sido consideradas: placa empotrada y placa libre. La placa está hecha de dos láminas de fibra de carbono y un núcleo de panal de abeja con las siguientes propiedades:

Radio $a = 1\text{ m}$ Espesor $h = 1\text{ cm}$ Módulo de elasticidad $E = 9 \times 10^9\text{ Pa}$

Densidad $\rho_p = 139 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ Módulo de Poisson $\nu = 0.3$

En las Figuras 2.3 y 2.4 se representa el coeficiente de masa fluida en función del

número de onda $k = \frac{\omega}{a_\infty}$. El coeficiente de masa fluida se define $C_{mf} = \frac{M_f}{4\pi a^3 \rho_\infty}$

donde M_f es el término diagonal de la parte real de la matriz de masa fluida que es el responsable de la reducción de frecuencia con respecto al valor en vacío. C_{mf} presenta un máximo para un valor intermedio del número de onda o frecuencia reducida k y para altos valores de dicha frecuencia reducida k tiende a anularse.

Este coeficiente de masa fluida se puede interpretar como una función de transferencia que da el efecto del fluido sobre la placa (salto de presión sobre ésta) asociado a su deformación.

Figura 2.3 Coeficiente de masa fluida en función de la frecuencia reducida k para placa empotrada

Figura 2.4 Coeficiente de masa fluida en función de la frecuencia reducida k para placa libre

En las Figuras 2.5 y 2.6 se representa la relación de amortiguamiento fluido en función del número de onda $k = \frac{\omega}{a_\infty}$. Esta relación de amortiguamiento fluido se

define $\xi = -\frac{(M_f)_{imag} \cdot \omega}{C_{cr}}$ donde $(M_f)_{imag}$ es el término diagonal de la parte

imaginaria de la matriz de masa fluida que es el responsable del amortiguamiento, y C_{cr} es el coeficiente de amortiguamiento crítico que se define $C_{cr} = 2\sqrt{K \cdot M}$ donde K y M son los términos de la diagonal principal de la matriz de rigidez y de la matriz de masa. La relación de amortiguamiento presenta un máximo para un valor intermedio del número de onda o frecuencia reducida k y para altos valores de dicha frecuencia reducida k decrece. Esta relación de amortiguamiento no es despreciable para ciertos valores de la frecuencia reducida k y debe ser tomada en cuenta ya que la relación de amortiguamiento estructural para este tipo de material de la placa tipo sándwich puede ser del orden de 0.15 [21]

Figura 2.5 Relación de amortiguamiento fluido en función de la frecuencia reducida k para placa empotrada

Figura 2.6 Relación de amortiguamiento fluido en función de la frecuencia reducida k para placa libre

En las Figuras 2.7 y 2.8 se presenta el coeficiente de masa fluida en función del radio de la placa a que obviamente es constante, ya que la matriz de masa fluida es proporcional al cubo del radio de la placa. Se observa una gran reducción de este coeficiente del segundo modo respecto del modo fundamental y esta

reducción es más acusada en el caso de placa empotrada que en el caso de placa libre.

Figura 2.7 Coeficiente de masa fluida en función del radio de la placa para placa empotrada

Figura 2.8 Coeficiente de masa fluida en función del radio de la placa para placa libre

En las Figuras 2.9, 2.10, 2.11 y 2.12 se presenta el parámetro de frecuencia definido como $C_\omega = \omega \cdot a^2 \sqrt{\frac{\rho_p}{D}}$, en función del radio de la placa a , para los modos 1 y 2. Este parámetro considerando espesor de la placa unitario es adimensional y se mantiene constante con el radio a de la placa en el caso de considerar la frecuencia de vibración de la placa en vacío.

Figura 2.9 Parámetro de frecuencia $C_{\omega 1}$ en función del radio de la placa para placa empotrada

Figura 2.10 Parámetro de frecuencia $C_{\omega 1}$ en función del radio de la placa para placa libre

Figura 2.11 Parámetro de frecuencia C_{w2} en función del radio de la placa para placa empotrada

Figura 2.12 Parámetro de frecuencia C_{w2} en función del radio de la placa para placa libre

Se observa que la reducción del parámetro de frecuencia con el radio de la placa es más importante para el primer modo de deformación que para el segundo modo. Y para el primer modo de vibración la reducción es más importante en el

caso de placa empotrada respecto del caso de placa libre, aunque para el segundo modo la reducción es similar en ambos casos.

En las Figuras 2.13, 2.14, 2.15 y 2.16 se representa el parámetro de frecuencia C_ω en función de la densidad relativa del fluido $\frac{\rho_\infty}{\rho_{\infty 0}}$, siendo para el vacío $\frac{\rho_\infty}{\rho_{\infty 0}} = 0$, para los modos 1 y 2

Figura 2.13 Parámetro de frecuencia $C_{\omega 1}$ en función de la densidad relativa para placa empotrada

Figura 2.14 Parámetro de frecuencia $C_{\omega 1}$ en función de la densidad relativa para placa libre

Figura 2.15 Parámetro de frecuencia $C_{\omega 2}$ en función de la densidad relativa para placa empotrada

Figura 2.16 Parámetro de frecuencia C_{w2} en función de la densidad relativa para placa libre

Se observa que la reducción del parámetro de frecuencia con la densidad relativa es más importante para el primer modo de deformación que para el segundo modo. Y para el primer modo de vibración la reducción es más importante en el caso de placa empotrada respecto del caso de placa libre, aunque para el segundo modo la reducción es similar en ambos casos

A continuación en las Tablas 2.6 y 2.7 se representan los resultados de las frecuencias naturales (en Hz) en aire (casos incompresible y compresible) y en vacío para la misma placa en los casos de empotrada y libre

Tabla 2.6 Frecuencias naturales para placa circular empotrada de honeycomb (en vacío y en aire incompresible y compresible) radio $a = 1m$, espesor $h = 1cm$

f_{v0}^0	$k = 0$	f_{a0}^0	$k \neq 0$	f_{v0}^1	$k = 0$	f_{a0}^1	$k \neq 0$	f_{v0}^2	$k = 0$	f_{a0}^2	$k \neq 0$
39.6		31.59	31.37	154.1		146.82	144.57	345.3		333.16	339.4

Tabla 2.7 Frecuencias naturales para placa circular libre de honeycomb (en vacío y en aire incompresible y compresible) radio $a = 1m$, espesor $h = 1cm$

f_{v0}^1	$k=0$	f_{a0}^1	$k \neq 0$	f_{v0}^2	$k=0$	f_{a0}^2	$k \neq 0$	f_{v0}^3	$k=0$	f_{a0}^3	$k \neq 0$
35.30		30.75	30.63	150.6		140.79	136.52	343.7		332.46	337.10

Se observa la importante reducción de la frecuencia natural de vibración de la placa en contacto con el aire que es alrededor de un 20% con respecto a su valor en vacío para el primer modo de vibración en el caso de placa empotrada, y disminuye alrededor de un 13% en el caso de placa libre. Para el segundo y tercer modos, la reducción de frecuencia no es tan importante. Los resultados obtenidos para el caso incompresible $k=0$ y compresible $k \neq 0$ son bastante similares, principalmente para el primer modo, presentando una diferencia algo mayor al incrementarse el orden del modo.

3 VIBRACION EN UN LIQUIDO DE PLACAS CIRCULARES NAVMI FACTOR

3.1 Introducción

El objetivo de este capítulo es presentar el método de cálculo de los factores adimensionales de masa incremental añadida por el fluido o factores NAVMI a la vibración de placas circulares que se describe en el artículo de Amabili & Kwak [1], que sirve de base para el desarrollo del capítulo 5 de esta tesis donde se calculan los factores Navmi para placas elípticas casi-circulares.

La vibración de estructuras en contacto con un líquido genera un movimiento en éste que resulta en un incremento en la energía cinética del sistema. Como ya se ha descrito en el capítulo 1, históricamente este problema ha sido estudiado por distintos autores. Y en todos estos estudios en los que una placa circular vibra sumergida en un fluido se supone que el exterior plano de la placa circular es una pared infinitamente rígida, y por tanto las condiciones de contorno son homogéneas y dan lugar a un problema tipo Neumann. Además presentan la idea común de que la solución analítica depende de la elección de la función utilizada para definir cada modo y por tanto no dan una única solución para todos los modos y condiciones de contorno de la placa, además están basados en la hipótesis de que los modos en seco y mojado son los mismos.

La relación entre la energía cinética del líquido y la energía cinética de la estructura se conoce con el nombre de factor adimensional de incremento de masa virtual añadida NAVMI factor [1]. Su cálculo no siempre es posible, dado que depende en gran medida de las condiciones de contorno, así como de la complejidad geométrica de la estructura y el dominio fluido.

En este apartado se estudian las vibraciones de placas circulares con condiciones de contorno axil-simétricas en contacto con un líquido, y se obtienen analíticamente los factores NAVMI [1]. Se supone que la placa circular está

colocada en un agujero de una pared infinita rígida y el líquido se considera incompresible y no viscoso.

Para ello se calcula el potencial de velocidades mediante el uso de las transformaciones directa e inversa de Hankel, suponiendo que los modos de vibración son los del vacío. Las condiciones de contorno deben ser uniformes en el borde de la placa.

Así mismo se calculan datos numéricos de los factores NAVMI para placas libres, simplemente apoyadas y empotradas.

3.2 Modos de vibración

Se considera una placa circular de radio a , de pequeño espesor h , densidad del material ρ_p , que es elástico lineal, homogéneo e isótropo.

La ecuación del movimiento en vacío está gobernada por la ecuación (B.1):

$$D\nabla^4 w + \rho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad w = w(r, \theta, t)$$

Donde:

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{es la rigidez a flexión de la placa; } \nu \text{ y } E \text{ son el módulo}$$

de Poisson y el módulo de elasticidad respectivamente. Además:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad \text{es el operador de Laplace en las coordenadas}$$

polares r y θ .

La solución de la ecuación anterior se obtiene por separación de variables, y toma en el caso de condiciones de contorno axilimétricas la forma, ecuaciones (B.3) y (B.13):

$$w(r, \theta, t) = \tilde{w}(r, \theta) \cdot e^{-i\omega t} = \sum_{m,n} \{ W_m^n(r) \cos(m\theta) e^{-i\omega t} \}$$

Siendo el modo de deformación $W_m^n(r) = A_m^n J_m(\beta_m^n r) + B_m^n I_m(\beta_m^n r)$

En donde m y n representan el número de diámetros nodales y círculos nodales, A_m^n y B_m^n son constantes cuya relación está determinada por las condiciones de contorno, y J_m e I_m son la función de Bessel de primera clase y función modificada de Bessel de primera clase.

$\beta_m^n a$ es el parámetro de frecuencia en vacío, que está determinado por las condiciones de contorno, y está relacionado con la frecuencia en vacío de la siguiente forma:

$$\omega_m^n = \beta_m^{n2} \sqrt{\frac{D}{\rho_p h}} \quad (3.1)$$

Los valores de $\beta_m^n a$, y la relación de las constantes A_m^n y B_m^n están calculados como ya se ha dicho en el apéndice B para placas empotradas, apoyadas y libres en vacío.

3.3 Ecuaciones para el potencial de velocidades del líquido

Se estudia el movimiento del líquido inducido por la vibración de la placa circular en contacto por una cara con éste, como muestra la Fig. 3.1

Figura 3.1 Placa en agujero de pared en contacto con el líquido en una cara

Se supone el líquido incompresible, no viscoso y además irrotacional, es decir el campo de velocidades deriva de un potencial.

Las ecuaciones del movimiento para pequeñas perturbaciones son:

Continuidad, ecuación (2.9):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Al ser la densidad ρ constante resulta:

$$\nabla \cdot (\vec{v}) = 0 \quad (3.2)$$

Cantidad de movimiento, ecuación (2.10), en el caso de líquido no viscoso:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p$$

Al ser movimiento perturbado, el término $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ es despreciable, resultando la ecuación (2.6):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho}$$

De la mecánica de fluidos, se sabe por el teorema de Kelvin, que para un fluido incompresible y no viscoso y en un instante irrotacional, continúa siendo irrotacional. Por tanto para movimiento irrotacional, la velocidad $\vec{v}$ deriva de un potencial

$$\vec{v} = \nabla \Phi \quad (3.3)$$

De la condición de contorno sobre la placa ecuación (2.7), se cumple:

$$\vec{v} = \frac{\partial w}{\partial t} \vec{k}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (B.3) y llamando $f(t) = e^{-i\omega t}$ separando la parte espacial de la temporal, la deformación de la placa se expresa:

$$w(r, \theta, t) = \tilde{w}(r, \theta) \cdot f(t) \quad (3.4)$$

Y entonces, la velocidad del fluido en contacto con la placa, de la ecuación (2.7) es:

$$\vec{v} = \tilde{w}(r, \theta) \cdot \dot{f}(t) \cdot \vec{k} \quad (3.5)$$

Por tanto en la superficie de la placa el potencial, teniendo en cuenta la ecuación (3.3), cumple:

$$\nabla\Phi = \tilde{w}(r, \theta) \cdot \dot{f}(t) \cdot \vec{k} \quad (3.6)$$

De la expresión anterior, se puede deducir que el potencial de velocidades tiene por expresión, separando la variación espacial y temporal:

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \varphi(r, \theta, z) \cdot \dot{f}(t) \quad (3.7)$$

Y a continuación, aplicando la ecuación de continuidad (3.2) y teniendo la expresión (3.3) que define el potencial de velocidad, resulta:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot \nabla\Phi = \Delta\Phi = 0$$

Por tanto, la ecuación para el potencial de velocidades es:

$$\Delta\Phi = 0 \quad (3.8)$$

Teniendo en cuenta esta última expresión y la ecuación (3.7), se deduce que la variación espacial del potencial espacial de velocidades del líquido cumple:

$$\Delta\varphi(r, \theta, z) = 0 \quad \text{en } L \text{ (dominio líquido)} \quad (3.9)$$

Que en coordenadas cilíndricas se expresa:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{en } L \quad (3.10)$$

El líquido está en contacto con la placa a través de la superficie S_2 y está en contacto con la pared infinita rígida a través de la superficie S_1 como muestra la Fig. 3.1. El dominio líquido no está limitado en r y z , es decir, llega al infinito, superficie S_∞ .

La condición de contorno para la placa-líquido es:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = \tilde{w}(r, \theta) \quad \text{en } S_2 \quad (3.11)$$

La condición de contorno de impermeabilidad de la pared rígida es:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } S_1 \quad (3.12)$$

Este es un problema de contorno de tipo Neumann.

Por otra parte está la condición de radiación, que dice:

El potencial de velocidades φ , y las velocidades del líquido en dirección radial y axial tienden a cero cuando la distancia a la placa tiende a infinito, es decir:

En S_∞ para $r, z \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta, z) &\rightarrow 0 \\ \frac{\partial \varphi(r, \theta, z)}{\partial r} &\rightarrow 0 \\ \frac{\partial \varphi(r, \theta, z)}{\partial z} &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.4 Cálculo del Potencial de velocidades sobre la placa

Para resolver el problema se hace la hipótesis de que los modos de vibración de la placa en vacío coinciden con los de vibración en contacto con el líquido [1].

Por separación de variables de la ecuación del potencial de velocidades y teniendo en cuenta la condición de contorno (3.11) y la expresión para los modos de deformación (B.13), se puede poner éste como:

$$\varphi(r, \theta, z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \phi_m^n(r, z) \cdot \cos(m\theta) \quad (3.14)$$

Donde ϕ_m^n cumple la siguiente ecuación en el dominio líquido L :

$$\frac{\partial^2 \phi_m^n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_m^n}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi_m^n}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2} \phi_m^n = 0 \quad \text{en } L \quad (3.15)$$

Por tanto, teniendo en cuenta las condiciones de contorno (3.11, 3.12 y 3.13), resulta para el potencial ϕ_m^n :

$$\left. \frac{\partial \phi_m^n(r, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad \text{en } S_1$$

$$\left. \frac{\partial \phi_m^n(r, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = W_m^n(r) \quad \text{en } S_2 \quad (3.16)$$

$$\phi_m^n(r, z), \quad \frac{\partial \phi_m^n(r, z)}{\partial r}, \quad \frac{\partial \phi_m^n(r, z)}{\partial z} \rightarrow 0 \quad r, z \rightarrow \infty \quad \text{en } S_\infty$$

Introduciendo a continuación la transformación de Hankel [54] para ϕ_m^n se tiene:

$$\phi_{Hm}^n(\xi, z) = \int_0^\infty r \phi_m^n(r, z) J_m(\xi r) dr \quad (3.17)$$

Aplicando la transformación de Hankel al primer, segundo y cuarto términos de la ecuación (3.15) del potencial ϕ_m^n en el dominio líquido L se expresa como:

$$\int_0^\infty r \left(\frac{\partial^2 \phi_m^n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_m^n}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \phi_m^n \right) J_m(\xi r) dr =$$

$$= -\xi^2 \int_0^\infty r \phi_m^n(r, z) J_m(\xi r) dr = -\xi^2 \phi_{Hm}^n(\xi, z) \quad (3.18)$$

Identidad que se demuestra a continuación:

***** Integrando por partes el primer término de la ecuación (3.18):

$$\int_0^\infty r \frac{\partial^2 \phi_m^n}{\partial r^2} J_m(\xi r) dr = r \frac{\partial \phi_m^n}{\partial r} J_m(\xi r) \Big|_0^\infty -$$

$$- \int_0^\infty \left(\phi_m^{n'} J_m(\xi r) + r J_m' \phi_m^{n'} \right) dr = - \int_0^\infty \left[\phi_m^{n'} J_m + r \phi_m^{n'} \left(\frac{m}{r} J_m - \xi J_{m+1} \right) \right] dr$$

Donde se ha tenido en cuenta de las condiciones de contorno que el primer término vale cero y además de las propiedades de las funciones de Bessel [12] se tiene:

$$J'_m(\xi r) = \xi \left(\frac{m}{\xi r} J_m - J_{m+1} \right)$$

$$\text{Siendo} \quad \phi_m^{n'} = \frac{\partial \phi_m^n(r, z)}{\partial r} \quad J'_m = \frac{dJ_m(\xi r)}{dr}$$

Por tanto, desarrollando el primer miembro de la ecuación (3.18) y teniendo en cuenta el desarrollo anterior para el primer término:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left(r \phi_m^{n''} + \phi_m^{n'} - \frac{m^2}{r} \phi_m^n \right) J_m dr = \\ & = - \int_0^\infty \left(r \phi_m^{n'} \frac{m}{r} J_m - r \phi_m^{n'} \xi J_{m+1} + \frac{m^2}{r} \phi_m^n J_m \right) dr = \\ & = \int_0^\infty \left[\phi_m^{n'} (r \xi J_{m+1} - m J_m) - \phi_m^n \frac{m^2}{r} J_m \right] dr \end{aligned}$$

E integrando de nuevo por partes el último miembro de la ecuación anterior:

$$= \left[(r \xi J_{m+1} - m J_m) \phi_m^n \right]_0^\infty - \int_0^\infty \phi_m^n \left(\xi J_{m+1} + r \xi J'_{m+1} - m J'_m + \frac{m^2}{r} J_m \right) dr =$$

El primer término se anula teniendo en cuenta la condición de contorno para el potencial en el infinito ∞ , ecuación (3.16) y las propiedades de las funciones de Bessel [12]. La integral del segundo término se puede poner utilizando las propiedades de las derivadas de las funciones de Bessel [12], de esta forma:

$$= - \int_0^\infty \phi_m^n \left[\xi J_{m+1} + r \xi \left(\xi \left(\frac{m+1}{\xi r} J_{m+1} - J_{m+2} \right) \right) - m \xi \left(\frac{m}{\xi r} J_m - J_{m+1} \right) + \frac{m^2}{r} J_m \right] dr =$$

Que reagrupando términos resulta:

$$= \xi^2 \int_0^\infty r \phi_m^n \left(J_{m+2} - \frac{2(m+1)}{\xi r} J_{m+1} \right) dr$$

Y utilizando la propiedad de las funciones de Bessel [12]

$\frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)$, resulta finalmente:

$$= \xi^2 \int_0^\infty r \phi_m^n \left(J_{m+2} - \frac{2(m+1)}{\xi r} J_{m+1} \right) dr = -\xi^2 \int_0^\infty r \phi_m^n J_m dr$$

Por tanto, queda demostrado que:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r \left(\frac{\partial^2 \phi_m^n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_m^n}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \phi_m^n \right) J_m(\xi r) dr = \\ = -\xi^2 \int_0^\infty r \phi_m^n(r, z) J_m(\xi r) dr = -\xi^2 \phi_{Hm}^n(\xi, z) \end{aligned} \quad ****$$

Y finalmente aplicando la transformación de Hankel a la ecuación completa del potencial ϕ_m^n en el dominio líquido L resulta:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r \left(\frac{\partial^2 \phi_m^n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_m^n}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \phi_m^n \right) J_m(\xi r) dr = \\ - \int_0^\infty r \frac{\partial^2 \phi_m^n}{\partial z^2} J_m(\xi r) dr = - \frac{d^2}{dz^2} \phi_{Hm}^n(\xi, z) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Por tanto la transformada de Hankel del potencial ϕ_{Hm}^n verifica la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d^2 \phi_{Hm}^n}{dz^2} - \xi^2 \phi_{Hm}^n = 0 \quad (3.20)$$

Aplicando las condiciones de contorno en S_∞ , la solución de esta ecuación debe decrecer con z , y por tanto es de la forma:

$$\phi_{Hm}^n(\xi, z) = \Psi_m^n(a\xi) \cdot e^{-\xi z}, \quad z \geq 0 \quad (3.21)$$

Donde $\Psi_m^n(a\xi)$ es una función que se debe aún determinar.

Aplicando la transformación inversa de Hankel [54] se tiene:

$$\phi_m^n(r, z) = \int_0^\infty \xi \phi_{Hm}^n(\xi, z) J_m(\xi r) d\xi \quad (3.22)$$

E insertando en esta última ecuación la expresión obtenida para ϕ_{Hm}^n :

$$\phi_m^n(r, z) = \int_0^\infty \xi \Psi_m^n(a\xi) \cdot e^{-\xi z} J_m(\xi r) d\xi \quad (3.23)$$

A continuación teniendo en cuenta esta expresión en las condiciones de contorno en S_1 y S_2 se verifica:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \xi^2 \Psi_m^n(a\xi) \cdot J_m(\xi r) d\xi &= -W_m^n(r) \quad \text{en } 0 \leq r \leq a \quad S_2 \\ \int_0^\infty \xi^2 \Psi_m^n(a\xi) \cdot J_m(\xi r) d\xi &= 0 \quad \text{en } r > a \quad S_1 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Definiendo a continuación las variables adimensionales:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{r}{a} \\ \eta &= a \cdot \xi \end{aligned} \quad (3.25)$$

Las ecuaciones integrales anteriores pueden ser reescritas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \eta^2 \Psi_m^n(\eta) J_m(\eta \rho) d\eta &= -a^3 W_m^n(a\rho) \quad 0 \leq \rho \leq 1 \\ \int_0^\infty \eta^2 \Psi_m^n(\eta) J_m(\eta \rho) d\eta &= 0 \quad \rho > 1 \end{aligned} \quad (3.26)$$

La solución para $\eta \Psi_m^n(\eta)$ se obtiene aplicando la transformación inversa de Hankel a la anterior ecuación integral, y queda de la forma:

$$\eta \Psi_m^n(\eta) = -a^3 \int_0^1 \rho W_m^n(a\rho) J_m(\eta \rho) d\rho \quad (3.27)$$

Utilizando las propiedades de las integrales de funciones de Bessel y teniendo en cuenta que los modos son, ecuación (B.13):

$$W_m^n(r) = A_m^n J_m(\beta_m^n r) + B_m^n I_m(\beta_m^n r)$$

Se puede poner:

$$\eta \Psi_m^n(\eta) = -a^3 H_m^n(\eta) \quad (3.28)$$

Siendo:

$$H_m^n(\eta) = \int_0^1 \rho W_m^n(a\rho) J_m(\eta\rho) d\rho \quad (3.29)$$

Donde la función:

$$H_m^n(\eta) = A_m^n H_{Am}^n(\eta) + B_m^n H_{Bm}^n(\eta) \quad (3.30)$$

Siendo [12,56]:

$$\begin{aligned} H_{Am}^n(\eta) &= \frac{\eta J_{m-1}(\eta) J_m(\beta_m^n a) - \beta_m^n a J_{m-1}(\beta_m^n a) J_m(\eta)}{\beta_m^{n2} a^2 - \eta^2} \\ H_{Bm}^n(\eta) &= \frac{\eta J_{m+1}(\eta) I_m(\beta_m^n a) + \beta_m^n a I_{m+1}(\beta_m^n a) J_m(\eta)}{\beta_m^{n2} a^2 + \eta^2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Para ello se han tenido en cuenta las siguiente propiedades de las funciones de Bessel [12]:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x J_m(\alpha x) J_m(\beta x) dx &= \frac{\alpha J_m'(\alpha) J_m(\beta) - \beta J_m'(\beta) J_m(\alpha)}{(\beta^2 - \alpha^2)} \\ \int_0^1 x J_m(\alpha x) I_m(\beta x) dx &= \frac{\beta I_m'(\beta) J_m(\alpha) - \alpha J_m'(\alpha) I_m(\beta)}{(\beta^2 + \alpha^2)} \end{aligned}$$

Donde:

$$I_m(x) = J_m(ix) \cdot i^{-n}$$

Insertando la expresión (3.28) de $\eta \Psi_m^n(\eta)$ en la expresión integral para el potencial de velocidades (3.23) evaluado en $z=0$ y tomando variables adimensionales, definidas en (3.25), se obtiene finalmente:

$$\phi_m^n(\rho, 0) = -a \int_0^\infty H_m^n(\eta) J_m(\eta\rho) d\eta \quad (3.32)$$

3.5 Energía cinética del líquido

La energía cinética del líquido se expresa como:

$$T_L = \iiint_V \frac{1}{2} \rho_L v^2 dV = \iiint_V \frac{1}{2} \rho_L (\nabla\Phi)^2 dV \quad (3.33)$$

Ahora bien, se cumple que:

$$(\nabla\Phi)^2 = \text{div}(\Phi\nabla\Phi) - \Phi\Delta\Phi, \quad \text{con lo que:}$$

$$T_L = \iiint_V \frac{1}{2} \rho_L (\text{div}(\Phi\nabla\Phi) - \Phi\Delta\Phi) dV \quad (3.34)$$

Teniendo en cuenta que en el campo fluido se cumple $\Delta\Phi = 0$, resulta:

$$T_L = \iiint_V \frac{1}{2} \rho_L \text{div}(\Phi\nabla\Phi) dV = \iiint_V \frac{1}{2} \rho_L \nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi) dV \quad (3.35)$$

Y por el teorema de la divergencia:

$$\iiint_V \nabla \cdot (\vec{v}) dV = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (3.36)$$

Resulta:

$$T_L = \iint_S \frac{1}{2} \rho_L \Phi \nabla\Phi \cdot \vec{n} dS \quad (3.37)$$

Donde:

$$S = S_\infty + S_1 + S_2$$

De las condiciones de contorno, ecuación (3.16) se tiene que:

$$\text{En } S_\infty \quad \Phi \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \nabla\Phi \rightarrow 0$$

$$\text{En la pared rígida } S_1 \quad \nabla\Phi \rightarrow 0$$

En la placa S_2 $\nabla\Phi = \sum_{m,n=0}^{\infty} W_m^n(r) \cos(m\theta) \dot{f}(t)$

Teniendo en cuenta que $\nabla\Phi \cdot \vec{n} = \frac{\partial\Phi}{\partial n} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}$

Y de las ecuaciones (3.7) y (3.14) se obtiene que:

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \varphi(r, \theta, z) \cdot \dot{f}(t) \quad \varphi(r, \theta, z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \phi_m^n(r, z) \cdot \cos(m\theta)$$

La integral de superficie, ecuación (3.37), de la componente de energía cinética $(T_L)_m^n$ asociada al modo de deformación W_m^n queda reducida a la superficie de la placa de la siguiente manera:

$$(T_L)_m^n = -\frac{1}{2} \rho_L \dot{f}(t)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\partial \phi_m^n(r, 0)}{\partial z} \phi_m^n(r, 0) \cos^2(m\theta) r dr d\theta \quad (3.38)$$

Integrando en θ , aplicando la condición de contorno sobre la placa, y teniendo en cuenta el cambio de variable $\rho = \frac{r}{a}$ resulta:

$$(T_L)_m^n = -\frac{1}{2} \rho_L \psi_m a^2 \dot{f}(t)^2 \int_0^1 W_m^n(a\rho) \phi_m^n(a\rho, 0) \rho d\rho \quad (3.39)$$

$$\text{Siendo } \psi_m = \int_0^{2\pi} \cos^2(m\theta) d\theta = \begin{cases} 2\pi & m=0 \\ \pi & m \neq 0 \end{cases}$$

Y sustituyendo el valor del potencial, ecuación (3.32):

$$\phi_m^n(\rho, 0) = -a \int_0^{\infty} H_m^n(\eta) J_m(\eta\rho) d\eta$$

Resulta:

$$(T_L)_m^n = -\frac{1}{2} \rho_L \psi_m a^2 \dot{f}(t)^2 \int_0^1 W_m^n(a\rho) \left[-a \int_0^{\infty} H_m^n(\eta) J_m(\eta\rho) d\eta \right] \rho d\rho \quad (3.40)$$

Intercambiando el orden de integración queda:

$$(T_L)_m^n = \frac{1}{2} \rho_L \psi_m a^3 \dot{f}(t)^2 \int_0^\infty H_m^n(\eta) d\eta \left[\int_0^1 W_m^n(a\rho) J_m(\eta\rho) \rho d\rho \right] \quad (3.41)$$

Y teniendo en cuenta que la función $H_m^n(\eta)$ tiene por expresión, ecuación (3.29):

$$H_m^n(\eta) = \int_0^1 \rho W_m^n(a\rho) J_m(\eta\rho) d\rho$$

Finalmente resulta:

$$(T_L)_m^n = \frac{1}{2} \rho_L a^3 \psi_m \dot{f}(t)^2 \int_0^\infty H_m^{n2}(\eta) d\eta \quad (3.42)$$

Que es la expresión de la energía cinética del líquido asociada al movimiento oscilatorio del modo de deformación W_m^n de la placa y como la integral impropia de primera especie es convergente, es evaluada numéricamente.

3.6 Energía cinética de la placa

La energía cinética de la placa es:

$$T_p = \frac{1}{2} \rho_p h \int_0^{r_e} \int_0^{2\pi} \dot{w}^2(r, \theta, t) r dr d\theta \quad (3.43)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (B.3) y (B.13) de la deformación de la placa

$$w(r, \theta, t) = \tilde{w}(r, \theta) \cdot e^{i\omega t} = \sum_{m,n} \{W_m^n(r) \cos(m\theta) e^{i\omega t}\}$$

Derivando respecto del tiempo, resulta:

$$\dot{w}(r, \theta, t) = \sum_{m,n} \{W_m^n(r) \cos(m\theta) i\omega e^{i\omega t}\} = \sum_{m,n} \{W_m^n(r) \cos(m\theta) \dot{f}(t)\}$$

E insertando en la expresión de la energía cinética de la placa asociada al modo mn , se obtiene:

$$(T_p)_m^n = \frac{1}{2} \rho_p h \dot{f}(t)^2 \int_0^{r_e} \int_0^{2\pi} W_m^{n2}(r) \cos^2(m\theta) r dr d\theta \quad (3.44)$$

Sustituyendo la expresión para el modo de deformación, ecuación (B.13):

$$(T_p)_m^n = \frac{1}{2} \psi_m \rho_p h a^2 \dot{f}(t)^2 \int_0^1 \left[A_m^n J_m(\beta_m^n a \rho) + B_m^n I_m(\beta_m^n a \rho) \right]^2 \rho d\rho \quad (3.45)$$

Que se integra numéricamente o bien analíticamente, pudiéndose poner en este último caso:

$$(T_p)_m^n = \frac{1}{4} \psi_m \rho_p h a^2 \dot{f}(t)^2 \delta_{mn}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \delta_{mn} = & A_m^{n2} \left[J_m'^2(\beta_m^n a) + \left(1 - \frac{m^2}{\beta_m^{n2} a^2} J_m'^2(\beta_m^n a) \right) \right] - \\ & - B_m^{n2} \left[I_m'^2(\beta_m^n a) - \left(1 + \frac{m^2}{\beta_m^{n2} a^2} I_m'^2(\beta_m^n a) \right) \right] + \\ & + \frac{2A_m^n B_m^n}{\beta_m^n a} \left[J_m(\beta_m^n a) I_{m+1}(\beta_m^n a) + I_m(\beta_m^n a) J_{m+1}(\beta_m^n a) \right] \end{aligned}$$

3.7 Relación entre frecuencias en vacío y en líquido. NAVMI factor

Se supone que se conserva la energía total del sistema vibrando en vacío o en contacto con el líquido, y también que los modos en vacío son los mismos que con líquido [32,57].

Esto implica la siguiente igualdad:

$$(T_p)_m^n \cdot \left((\omega_v)_m^n \right)^2 = \left[(T_p)_m^n + (T_L)_m^n \right] \cdot \left((\omega_L)_m^n \right)^2 \quad (3.46)$$

La relación de frecuencias es por tanto:

$$\frac{(\omega_L)_m^n}{(\omega_v)_m^n} = \frac{(f_L)_m^n}{(f_v)_m^n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(T_L)_m^n}{(T_p)_m^n}}} \quad (3.47)$$

Llamando γ_m^n el factor de masa virtual incremental añadida:

$$\gamma_m^n = \frac{(T_L)_m^n}{(T_p)_m^n} \quad (3.48)$$

Que se puede poner como:

$$\gamma_m^n = \Gamma_m^n \frac{\rho_L a}{\rho_p h} \quad (3.49)$$

Donde Γ_m^n el factor adimensional de masa virtual incremental añadida, factor NAVMI

Este factor NAVMI es independiente del radio y espesor de la placa y del material de la placa y la densidad del líquido.

Como ya se han obtenido anteriormente las expresiones de las energías cinéticas del líquido y la placa, se puede poner el resultado para el factor NAVMI, como:

$$\Gamma_m^n = \frac{2 \int_0^\infty H_m^{n2}(\eta) d\eta}{\delta_{mm}} \quad (3.50)$$

A continuación se presentan resultados del factor NAVMI para placas circulares empotradas, simplemente apoyadas y libres.

3.8 Resultados de los factores NAVMI

Factores NAVMI Γ_m^n para placa empotrada

En el apéndice B, apartado B.1.1 se calculan los modos de deformación y raíces

$\beta_m^n a$ para una placa circular empotrada.

Los resultados de los factores NAVMI se muestran en la tabla 3.1

Tabla 3.1 Factor Navmi Γ_m^n para placa empotrada

Γ_m^n	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$m = 0$	0.667	0.280	0.167
$m = 1$	0.299	0.169	0.116
$m = 2$	0.208	0.131	0.096

Factores NAVMI Γ_m^n para placa apoyada

En el apéndice B, apartado B.1.2 se calculan los modos de deformación y raíces $\beta_m^n a$ para una placa circular apoyada

Los resultados de los factores NAVMI se muestran en la tabla 3.3

Tabla 3.2 Factor Navmi Γ_m^n para placa apoyada

Γ_m^n	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$m = 0$	0.773	0.260	0.152
$m = 1$	0.332	0.170	0.113
$m = 2$	0.227	0.134	0.095

Factores NAVMI Γ_m^n para placa libre

En el apéndice B, apartado B.1.3 se calculan los modos de deformación y raíces $\beta_m^n a$ para una placa circular libre

Los resultados de los factores NAVMI se muestran en la tabla 3.2

Tabla 3.3 Factor Navmi Γ_m^n para placa libre

Γ_m^n	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$m = 0$	-----	0.2293	0.1381
$m = 1$	0.336	0.1768	0.1143
$m = 2$	0.2216	-----	0.0979

De las tablas de resultados, se observa que el factor NAVMI disminuye con el orden del modo, ya sea con el número de círculos nodales como el de diámetros nodales. Esta reducción es más intensa cuanto mayor es el orden del modo.

Los valores no indicados (---) en el caso de placa libre significan la no existencia de ese modo particular de deformación.

Como se ha indicado la relación de frecuencia $\frac{(f_L)_m^n}{(f_v)_m^n}$ en contacto con el líquido respecto del vacío en función del factor NAVMI Γ_m^n tiene por expresión

$$\frac{(\omega_L)_m^n}{(\omega_v)_m^n} = \frac{(f_L)_m^n}{(f_v)_m^n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \Gamma_m^n \frac{\rho_L a}{\rho_p h}}}, \text{ donde aparece también la relación de densidades}$$

del líquido y el material de la placa, así como la relación entre el radio y espesor de la placa. Por ejemplo al disminuir la densidad del material de la placa, disminuye también la frecuencia en húmedo; de la misma manera, al aumentar la densidad del fluido o bien al aumentar el radio de la placa o bien al disminuir su espesor también disminuye la frecuencia en húmedo, así como al aumentar el factor NAVMI.

4 FRECUENCIAS EN VACIO PARA PLACA ELIPTICA CASI CIRCULAR MEDIANTE UN METODO DE PERTURBACIONES

4.1 Introducción

En el caso de estructuras espaciales como antenas de satélite, la geometría de la placa no es circular aunque se puede considerar casi circular, es decir con forma elíptica de pequeña excentricidad.

En este capítulo se desarrolla un método de perturbaciones aplicando la técnica de Lindstedt-Poincare [46] para el cálculo de las frecuencias naturales de vibración y los modos de deformación en vacío de una placa elíptica de pequeña excentricidad empotrada en su periferia en los casos de cero y un diámetros nodales.

Los resultados de las frecuencias naturales son comparados con otros métodos de aproximación para este tipo de placas en función de la excentricidad, obteniéndose buenos resultados en todos los casos calculados.

Estos modos de deformación obtenidos de forma analítica son los utilizados como funciones base para el cálculo en el siguiente capítulo 5 de esta tesis de los factores NAVMI para una placa elíptica de pequeña excentricidad.

4.2 Ecuación de una elipse casi circular por el método de perturbaciones

Se trata de buscar una ecuación aproximada para una elipse en coordenadas polares de la forma:

$$r = R \cdot (1 + \varepsilon \cdot f_{\theta}(\theta)) \quad (4.1)$$

Donde ε es un parámetro pequeño $\varepsilon \ll 1$

Se va a determinar cómo debe ser la función $f_{\theta}(\theta)$

La ecuación de la elipse es en paramétricas y cartesianas:

$$x = a \cdot \cos(\theta) \quad y = b \cdot \sin(\theta) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4.2)$$

Y en coordenadas polares resulta $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}$

Para una elipse de pequeña excentricidad se puede expresar:

$$b = a \cdot \sqrt{1 - \varepsilon} \quad (4.3)$$

Sustituyendo $r = a \sqrt{\cos^2 \theta + (1 - \varepsilon) \sin^2 \theta} = a \sqrt{1 - \varepsilon \sin^2 \theta}$

Desarrollando en serie para $\varepsilon \ll 1$ se tiene $r = a \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \sin^2 \theta + \varepsilon^2 \dots \right)$

Tomando en primera aproximación el término en ε se obtiene

$$r = a \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \sin^2 \theta \right), \text{ y como se cumple } \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

Sustituyendo resulta finalmente:

$$r = a \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{4} \cdot (1 - \cos(2\theta)) \right) \quad (4.4)$$

Que es la expresión de la elipse de baja excentricidad en primera aproximación.

4.3 Método de perturbaciones para el cálculo de las frecuencias en vacío

4.3.1 Ecuaciones y condiciones de contorno

Como se ha desarrollado en el anterior apartado, la placa elíptica casi circular está definida por su ecuación en polares y los parámetros que se indican a continuación:

$$r = a \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{4} \cdot (1 - \cos(2\theta)) \right) = a + \varepsilon \cdot f_{\theta}(\theta)$$

$$f_{\theta}(\theta) = -\frac{a}{4} (1 - \cos 2\theta)$$

$$\varepsilon > 0 \quad b = a \cdot \sqrt{1 - \varepsilon}$$

Siendo a y b los semiejes mayor y menor de la elipse.

La ecuación para las pequeñas vibraciones en vacío de la placa es según el apéndice B, ecuación (B.1):

$$D \nabla^4 w(r, \theta, t) + \rho_p h \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial t^2} = 0$$

Donde D es la rigidez a flexión $D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$, h el espesor de la placa, E el módulo elástico del material de la placa, ν el módulo de Poisson, ρ_p la densidad del material de la placa y el operador laplaciana en coordenadas polares se expresa:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Si la placa está empotrada, las condiciones de contorno son:

$$w(r, \theta, t) = 0 \quad \text{en} \quad r = r_e(\theta) \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial w(r, \theta, t)}{\partial n} = \nabla w \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{en} \quad r = r_e(\theta) \quad (4.6)$$

Siendo $\vec{n}$ la normal en el contorno de la placa, que es un vector paralelo a ∇F

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \vec{u}_\theta \quad (4.7)$$

$$\text{Siendo} \quad F(r, \theta) = r - (a + \varepsilon \cdot f_\theta(\theta)) \quad (4.8)$$

Si la placa es casi-circular se puede expresar su contorno en primera aproximación como $r = a + \varepsilon \cdot f_\theta(\theta) = r_e(\theta)$

Donde ε es un parámetro pequeño de perturbación. Por tanto las condiciones de contorno para la placa quedan:

$$w(r, \theta, t) = 0 \quad \text{en} \quad r = a + \varepsilon \cdot f_\theta(\theta) \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial w(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \varepsilon \cdot f_\theta'(\theta) \frac{\partial w(r, \theta, t)}{\partial \theta} = 0 \quad \text{en} \quad r = a + \varepsilon \cdot f_\theta(\theta) \quad (4.10)$$

Suponiendo movimiento armónico de la placa de frecuencia ω resulta $w(r, \theta, t) = \tilde{w}(r, \theta)e^{-i\omega t}$, por lo que la ecuación diferencial y las condiciones de contorno se expresan:

$$D\nabla^4 \tilde{w}(r, \theta) - \rho_p \omega^2 h \tilde{w}(r, \theta) = 0 \quad (4.11)$$

$$\tilde{w}(r, \theta) = 0 \quad \text{en} \quad r = a + \varepsilon f_\theta(\theta) \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}(r, \theta)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \varepsilon f_\theta'(\theta) \frac{\partial \tilde{w}(r, \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad \text{en} \quad r = a + \varepsilon f_\theta(\theta) \quad (4.13)$$

Aplicando el método de perturbaciones de Lindsted-Poincaré [46] la vibración de la placa se expresa como:

$$\tilde{w}(r, \theta) = \tilde{w}_0(r, \theta) + \varepsilon \tilde{w}_1(r, \theta) + O(\varepsilon^2) \quad (4.14)$$

Y la frecuencia natural de vibración en función del término de perturbación:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + O(\varepsilon^2) \quad (4.15)$$

Con lo que identificando términos de orden ε^0 y ε^1 se obtienen las siguientes ecuaciones y condiciones de contorno, para lo cual se desarrolla la ecuación y condiciones de contorno en serie de ε

Ecuación y condiciones de contorno para orden ε^0

$$D\nabla^4 \tilde{w}_0(r, \theta) - \rho_p \omega_0^2 h \tilde{w}_0(r, \theta) = 0 \quad (4.16)$$

$$\tilde{w}_0(a, \theta) = 0 \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}_0(a, \theta)}{\partial r} = 0 \quad (4.18)$$

Ecuación y condiciones de contorno para orden ε^1

$$D\nabla^4 \tilde{w}_1(r, \theta) - \rho_p \omega_0^2 h \tilde{w}_1(r, \theta) = 2\rho_p h \omega_0 \omega_1 \tilde{w}_0 \quad (4.19)$$

$$\tilde{w}_1(a, \theta) + \frac{\partial \tilde{w}_0(a, \theta)}{\partial r} f_\theta(\theta) = 0 \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}_1(a, \theta)}{\partial r} - \frac{1}{a^2} f_\theta'(\theta) \frac{\partial \tilde{w}_0(a, \theta)}{\partial \theta} + f_\theta(\theta) \frac{\partial^2 \tilde{w}_0(a, \theta)}{\partial r^2} = 0 \quad (4.21)$$

Se define el parámetro $\frac{\rho_p h}{D} \omega^2 = \beta^4$ tal y como se hace en la ecuación (B.5) del apéndice B

Teniendo en cuenta el desarrollo en serie de ε para $\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \dots$ resulta:

$$\frac{\rho_p h}{D} \omega^2 = \frac{\rho_p h}{D} (\omega_0^2 + 2\varepsilon \omega_0 \omega_1 + \dots) = \beta^4 \quad (4.22)$$

Definiendo el desarrollo para β^2 de la forma $\beta^2 = \beta_0^2 + \varepsilon \beta_1^2 + \dots$ e identificando términos en ε^0 y ε^1 resulta:

$$\frac{\rho_p h}{D} \omega_0^2 = \beta_0^4 \quad (4.23)$$

$$\frac{\rho_p h}{D} \omega_0 \omega_1 = \beta_0^2 \beta_1^2 \quad (4.24)$$

Por lo que las ecuaciones y condiciones de contorno con el parámetro β en lugar de ω resultan:

Ecuación y condiciones de contorno para orden ε^0

$$\nabla^4 \tilde{w}_0(r, \theta) - \beta_0^4 \tilde{w}_0(r, \theta) = 0 \quad (4.25)$$

$$\tilde{w}_0(a, \theta) = 0 \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}_0(a, \theta)}{\partial r} = 0 \quad (4.27)$$

Ecuación y condiciones de contorno para orden ε^1

$$\nabla^4 \tilde{w}_1(r, \theta) - \beta_0^4 \tilde{w}_1(r, \theta) = 2\beta_0^2 \beta_1^2 \tilde{w}_0 \quad (4.28)$$

$$\tilde{w}_1(a, \theta) + \frac{\partial \tilde{w}_0(a, \theta)}{\partial r} f_\theta(\theta) = 0 \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}_1(a, \theta)}{\partial r} - \frac{1}{a^2} f_\theta'(\theta) \frac{\partial \tilde{w}_0(a, \theta)}{\partial \theta} + f_\theta(\theta) \frac{\partial^2 \tilde{w}_0(a, \theta)}{\partial r^2} = 0 \quad (4.30)$$

A continuación, utilizando separación de variables en r y θ se deduce como quedan las ecuaciones y condiciones de contorno.

Se busca la solución de orden ε^0 y ε^1 de la forma:

Solución de orden ε^0

$$\tilde{w}_0(r, \theta) = \sum_{m,n}^{\infty} W_{0m}^n(r) (\gamma_{0m}^n e^{im\theta} + \bar{\gamma}_{0m}^n e^{-im\theta}) \quad (4.31)$$

Donde la constante $\bar{\gamma}_{0m}$ es el complejo conjugado de γ_{0m}

Solución de orden ε^1

$$\tilde{w}_1(r, \theta) = \sum_{k,n}^{\infty} W_{1k}^n(r) (\gamma_{1k}^n e^{ik\theta} + \bar{\gamma}_{1k}^n e^{-ik\theta}) \quad (4.32)$$

Donde la constante $\bar{\gamma}_{1k}^n$ es el complejo conjugado de γ_{1k}^n

Los subíndices m o k indican el número de diámetros nodales y n el número de círculos nodales

4.3.2 Ecuación y condiciones de contorno para orden ε^0

Ecuación para ε^0

De las ecuaciones (4.25 y 4.31) se tiene:

$$\begin{aligned} & \nabla^4 \left[W_{0m}^n(r) (\gamma_{0m}^n e^{im\theta} + \bar{\gamma}_{0m}^n e^{-im\theta}) \right] - \\ & - \beta_{0m}^n W_{0m}^n(r) (\gamma_{0m}^n e^{im\theta} + \bar{\gamma}_{0m}^n e^{-im\theta}) = 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Multiplicando la ecuación por $e^{-is\theta}$ e integrando entre 0 y 2π e igualando $s = m$:

$$\nabla^4 W_{0m}^n(r) \left[\gamma_{0m}^n + \frac{\bar{\gamma}_{0m}^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i2m\theta} d\theta \right] - \beta_{0m}^n \nabla^4 W_{0m}^n(r) \left[\gamma_{0m}^n + \frac{\bar{\gamma}_{0m}^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i2m\theta} d\theta \right] = 0$$

Que para cualquier valor de m se reduce a:

$$\nabla^4 W_{0m}^n(r) - \beta_{0m}^n \nabla^4 W_{0m}^n(r) = 0 \quad (4.34)$$

Condiciones de contorno para ε^0

De las ecuaciones (4.26, 4.27 y 4.31) se tiene:

$$W_{0m}^n(a) = 0 \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial W_{0m}^n(a)}{\partial r} = 0 \quad (4.36)$$

4.3.3 Ecuación y condiciones de contorno para orden ε^1

Ecuación para ε^1

De las ecuaciones (4.28 y 4.32) se tiene:

$$\begin{aligned} & \nabla^4 \left[W_{1k}^n(r) (\gamma_{1k}^n e^{ik\theta} + \bar{\gamma}_{1k}^n e^{-ik\theta}) \right] - \beta_{0m}^n \nabla^4 W_{1k}^n(r) (\gamma_{1k}^n e^{ik\theta} + \bar{\gamma}_{1k}^n e^{-ik\theta}) \\ & = 2\beta_{0m}^n \beta_{1k}^n \nabla^4 W_{0m}^n(r) (\gamma_{0m}^n e^{im\theta} + \bar{\gamma}_{0m}^n e^{-im\theta}) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Multiplicando la ecuación por $e^{-is\theta}$ e integrando entre 0 y 2π e igualando $s = m$:

$$\begin{aligned} & \nabla^4 W_{1m}^n(r) \left[\gamma_{1m}^n + \frac{\bar{\gamma}_{1m}^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i2m\theta} d\theta \right] - \beta_{0m}^n \nabla^4 W_{1m}^n(r) \left[\gamma_{1m}^n + \frac{\bar{\gamma}_{1m}^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i2m\theta} d\theta \right] \\ & = 2\beta_{0m}^n \beta_{1m}^n \nabla^4 W_{0m}^n(r) \left[\gamma_{0m}^n + \frac{\bar{\gamma}_{0m}^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i2m\theta} d\theta \right] \end{aligned}$$

Igualando las constantes $\gamma_{1m}^n = \gamma_{0m}^n$ se reduce la ecuación para cualquier valor de m :

$$\nabla^4 W_{1m}^n(r) - \beta_{0m}^n W_{1m}^n(r) = 2\beta_{0m}^n \beta_{1m}^n W_{0m}^n(r) \quad (4.38)$$

Condiciones de contorno para ε^1

De las ecuaciones (4.29, 4.30 y 4.32) se tiene:

La primera condición de contorno es:

$$W_{1k}^n(a) (\gamma_{1k}^n e^{ik\theta} + \bar{\gamma}_{1k}^n e^{-ik\theta}) = 0 \quad \text{que se reduce a } W_{1k}^n(a) = 0 \quad (4.39)$$

La segunda condición de contorno es:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial W_{1k}^n(a)}{\partial r} (\gamma_{1k}^n e^{ik\theta} + \bar{\gamma}_{1k}^n e^{-ik\theta}) + \\ & \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left\{ f_{\theta q} e^{iq\theta} \frac{\partial^2 W_{0m}^n(a)}{\partial r^2} - f_{\theta q}' e^{iq\theta} i m W_{0m}^n(a) \right\} (\gamma_{0m}^n e^{im\theta} + \bar{\gamma}_{0m}^n e^{-im\theta}) = 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

Donde se ha tenido en cuenta el desarrollo en serie de Fourier para la función

$$f_{\theta}(\theta) = -\frac{a}{4}(1 - \cos 2\theta) \quad \text{y su derivada } f_{\theta}'(\theta) = -\frac{a}{2} \sin 2\theta \quad \text{de la forma:}$$

$$f_{\theta}(\theta) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} f_{\theta q} e^{iq\theta} \quad f_{\theta}'(\theta) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} f_{\theta q}' e^{iq\theta}$$

Estando definidos los coeficientes de la serie como:

$$f_{\theta q} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{\theta}(\theta) e^{-iq\theta} d\theta \quad f_{\theta q}' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{\theta}'(\theta) e^{-iq\theta} d\theta$$

Teniendo en cuenta que el último término de la ecuación (4.40), de la condición de contorno para orden ε^0 $W_{0m}^n(a) = 0$, es nulo y multiplicando la ecuación por $e^{-is\theta}$ e integrando entre 0 y 2π e igualando $s = m$ resulta:

$$\begin{aligned} & \left[\gamma_{1m}^n + \frac{\bar{\gamma}_{1m}^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i2m\theta} d\theta \right] \frac{\partial W_{1m}^n(a)}{\partial r} + \\ & f_{\theta 0} \cdot \gamma_{0m}^n \frac{\partial^2 W_{0m}^n(a)}{\partial r^2} + f_{\theta 2m} \cdot \bar{\gamma}_{0m}^n \frac{\partial^2 W_{0m}^n(a)}{\partial r^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

A continuación se presenta como queda la segunda condición de contorno particularizada para los casos $m=0$ y $m=1$

Caso $m=0$:

$$(\gamma_{10}^n + \bar{\gamma}_{10}^n) \frac{\partial W_{10}^n(a)}{\partial r} + f_{\theta 0} \cdot (\gamma_{00}^n + \bar{\gamma}_{00}^n) \frac{\partial^2 W_{00}^n(a)}{\partial r^2} = 0$$

E igualando las constantes $\gamma_{10}^n = \gamma_{00}^n$ resulta:

$$\frac{\partial W_{10}^n(a)}{\partial r} + f_{\theta 0} \cdot \frac{\partial^2 W_{00}^n(a)}{\partial r^2} = 0$$

Al ser $f_{\theta 0} = -\frac{a}{4}$ resulta finalmente:

$$\frac{\partial W_{10}^n(a)}{\partial r} - \frac{a}{4} \cdot \frac{\partial^2 W_{00}^n(a)}{\partial r^2} = 0 \quad (4.42)$$

Caso $m=1$:

$$\gamma_{11}^n \frac{\partial W_{11}^n(a)}{\partial r} + (\gamma_{01}^n f_{\theta 0} + \bar{\gamma}_{01}^n f_{\theta 2}) \frac{\partial^2 W_{01}^n(a)}{\partial r^2} = 0$$

De la segunda condición de contorno se obtienen dos ecuaciones, una para la parte real y otra para la parte imaginaria que son:

$$\text{Re}() \quad \text{Re}(\gamma_{11}^n) \frac{\partial W_{11}^n(a)}{\partial r} + \text{Re}(\gamma_{01}^n) (f_{\theta 0} + f_{\theta 2}) \frac{\partial^2 W_{01}^n(a)}{\partial r^2} = 0$$

$$\text{Im}() \quad \text{Im}(\gamma_{11}^n) \frac{\partial W_{11}^n(a)}{\partial r} + \text{Im}(\gamma_{01}^n) (f_{\theta 0} - f_{\theta 2}) \frac{\partial^2 W_{01}^n(a)}{\partial r^2} = 0$$

Igualando las constantes $\gamma_{11}^n = \gamma_{01}^n$ se obtiene:

$$\text{Re}() \quad \frac{\partial W_{11}^n(a)}{\partial r} + (f_{\theta 0} + f_{\theta 2}) \frac{\partial^2 W_{01}^n(a)}{\partial r^2} = 0$$

$$\text{Im}() \quad \frac{\partial W_{11}^n(a)}{\partial r} + (f_{\theta 0} - f_{\theta 2}) \frac{\partial^2 W_{01}^n(a)}{\partial r^2} = 0$$

Y teniendo en cuenta que el coeficiente de Fourier $f_{\theta_2} = \frac{a}{8}$ resulta finalmente:

$$\text{Re}() \quad \frac{\partial W_{11}^n(a)}{\partial r} - \frac{a}{8} \frac{\partial^2 W_{01}^n(a)}{\partial r^2} = 0 \quad (4.43)$$

$$\text{Im}() \quad \frac{\partial W_{11}^n(a)}{\partial r} - \frac{3a}{8} \frac{\partial^2 W_{01}^n(a)}{\partial r^2} = 0$$

Para este caso de un diámetro nodal $m=1$ sólo nos interesamos en la parte real de la segunda condición de contorno que es la correspondiente al desarrollo en el término $\cos(m\theta)$, ya que la parte imaginaria que es la correspondiente al desarrollo en el término $\sin(m\theta)$ daría una solución ligeramente distinta para el parámetro de frecuencia β_{11}^n correspondiendo a un diámetro nodal perpendicular al correspondiente a la parte real.

4.3.4 Resumen de ecuaciones y condiciones de contorno

A continuación, como resumen se reflejan las ecuaciones y condiciones de contorno para términos de orden ε^0 y ε^1 y para los casos $m=0$ y $m=1$, que son las ecuaciones :

Ecuación y condiciones de contorno de orden ε^0

De las ecuaciones (4.34, 4.35 y 4.36):

$$\nabla^4 W_{0m}^n(r) - \beta_{0m}^n W_{0m}^n(r) = 0$$

$$W_{0m}^n(a) = 0$$

$$\frac{\partial W_{0m}^n(a)}{\partial r} = 0$$

Ecuación y condiciones de contorno de orden ε^1

De las ecuaciones (4.38, 4.39 y 4.42-4.43):

$$\nabla^4 W_{1m}^n(r) - \beta_{0m}^n \nabla^4 W_{1m}^n(r) = 2\beta_{0m}^n \beta_{1m}^n W_{0m}^n(r)$$

$$W_{1m}^n(a) = 0$$

$$\frac{\partial W_{1m}^n(a)}{\partial r} - \frac{a}{\delta_m} \cdot \frac{\partial^2 W_{0m}^n(a)}{\partial r^2} = 0 \quad \text{con} \quad \delta_m = \begin{cases} 4 & m=0 \\ 8 & m=1 \end{cases}$$

A continuación se va a estudiar los casos $m=0$ y $m=1$ para determinar las frecuencias de vibración de la placa casi-circular

4.4 Frecuencias de vibración. Casos $m=0$ y $m=1$

Como ya se ha visto la ecuación y condiciones de contorno de orden ε^0 son, ecuaciones (4.34, 4.35 y 4.36):

$$\nabla^4 W_{0m}^n(r) - \beta_{0m}^n \nabla^4 W_{0m}^n(r) = 0$$

$$W_{0m}^n(a) = 0$$

$$\frac{\partial W_{0m}^n(a)}{\partial r} = 0$$

La solución de $W_{0m}^n(r)$ es conocida y se expresa:

$$W_{0m}^n(r) = A_{0m}^n J_m(\beta_{0m}^n r) + B_{0m}^n I_m(\beta_{0m}^n r) \quad (4.44)$$

Siendo J_m e I_m funciones de Bessel de primera especie de orden m y modificada de Bessel de primera especie de orden m respectivamente.

De la primera condición de contorno $W_{0m}^n(a) = 0$ se obtiene $B_{0m}^n = -A_{0m}^n \frac{J_m(\beta_{0m}^n a)}{I_m(\beta_{0m}^n a)}$

por lo que sustituyendo resulta, llamando: $\lambda_{0m}^n = \frac{J_m(\beta_{0m}^n a)}{I_m(\beta_{0m}^n a)}$ (4.45)

$$W_{0m}^n(r) = A_{0m}^n \left[J_m(\beta_{0m}^n r) - \lambda_{0m}^n I_m(\beta_{0m}^n r) \right] \quad (4.46)$$

De la segunda condición de contorno $\frac{\partial W_{0m}^n(a)}{\partial r} = 0$ se obtienen las raíces $\beta_{0m}^n a$ que se presentan en la siguientes tablas, que son las correspondientes a una placa circular empotrada con cero diámetros nodales y se deducen en el apéndice B ,tabla B.1. La siguiente notación $\beta_{\varepsilon m}^n$ donde ε es el parámetro de perturbación, m el número de diámetros nodales y n el número de círculos nodales, se usa en la presentación de los resultados.

Tabla 4.1 Parámetro de frecuencia de orden cero para distintos círculos nodales y sin diámetros nodales

n	0	1	2	3	4
$\beta_{00}^n a$	3.1962	6.3064	9.4395	12.5771	15.7

Tabla 4.2 Parámetro de frecuencia de orden cero para distintos círculos nodales y con un diámetro nodal

n	0	1	2	3	4
$\beta_{01}^n a$	4.6109	7.7993	10.9581	14.1086	17.2557

Por lo que como $\frac{\rho_p h}{D} \omega_{0m}^n = \beta_{0m}^n$, son conocidas las frecuencias ω_{0m}^n

El objetivo es buscar la solución de frecuencia $\omega_m^n = \omega_m^n = \omega_{0m}^n + \varepsilon \omega_{1m}^n$ para un valor del parámetro de perturbación $\varepsilon \ll 1$ por lo que se necesita determinar la frecuencia ω_{1m}^n o lo que es lo mismo β_{1m}^n

Para lo cual se emplean la ecuación y condiciones de contorno de orden ε^1 que son las ecuaciones (4.38, 4.39 y 4.42-4.43):

$$\nabla^4 W_{1m}^n(r) - \beta_{0m}^n \nabla^2 W_{1m}^n(r) = 2\beta_{0m}^n \beta_{1m}^n W_{0m}^n(r)$$

$$W_{1m}^n(a) = 0$$

$$\frac{\partial W_{1m}^n(a)}{\partial r} - \frac{a}{\delta_m} \cdot \frac{\partial^2 W_{0m}^n(a)}{\partial r^2} = 0 \quad \text{con} \quad \delta_m = \begin{cases} 4 & m=0 \\ 8 & m=1 \end{cases}$$

La solución de $W_{1m}^n(r)$ es la suma de la solución homogénea más la particular, es decir:

$$W_{1m}^n(r) = W_{1mh}^n(r) + W_{1mp}^n(r) \quad (4.47)$$

La solución de la homogénea como ya se sabe es:

$$W_{1mh}^n(r) = A_{1m}^n J_m(\beta_{0m}^n r) + B_{1m}^n I_m(\beta_{0m}^n r)$$

Y la solución particular $W_{1mp}^n(r)$ cumple la ecuación (4.38), que teniendo en cuenta el operador bilaplaciana ∇^4 para los casos $m=0$ y $m=1$, resulta:

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 W_{10p}^n}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 W_{10p}^n}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 W_{10p}^n}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d W_{10p}^n}{dr} - \beta_{00}^{n4} W_{10p}^n \\ & = 2\beta_{00}^{n2} \beta_{10}^{n2} A_{00}^n \left[J_0(\beta_{00}^n r) - \lambda_{00}^n I_0(\beta_{00}^n r) \right] \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 W_{11p}^n}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 W_{11p}^n}{dr^3} - \frac{3}{r^2} \frac{d^2 W_{11p}^n}{dr^2} + \frac{3}{r^3} \frac{d W_{11p}^n}{dr} - \frac{3}{r^4} W_{11p}^n - \beta_{01}^{n4} W_{11p}^n = \\ & = 2\beta_{01}^{n2} \beta_{11}^{n2} A_{01}^n \left[J_1(\beta_{01}^n r) - \lambda_{01}^n I_1(\beta_{01}^n r) \right] \end{aligned} \quad (4.49)$$

La solución particular se busca en forma de serie de potencias de r de la forma:

$$W_{1mp}^n(r) = b_{0m}^n + b_{1m}^n r + b_{2m}^n r^2 + \dots + b_{Nm}^n r^N + \dots \quad (4.50)$$

Para ello se tienen en cuenta los desarrollos de las funciones de Bessel J_0, I_0, J_1 e I_1 en serie de potencias que es:

$$\begin{aligned} J_0(x) &= 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} \dots \\ I_0(x) &= 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} \dots \end{aligned}$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{x^7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \frac{x^9}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10} \dots\dots\dots$$

$$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \frac{x^7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \frac{x^9}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10} \dots\dots\dots$$

Introduciendo estos desarrollos en la ecuación para la solución $W_{1mp}^n(r)$ e identificando términos en potencias de “ r ”, se obtienen los coeficientes $b_{0m}^n, b_{1m}^n, \dots\dots\dots b_{Nm}^n$ que definen la solución particular, que van a ser funciones de los parámetros β_{0m}^n (conocido) λ_{0m}^n (conocido) y β_{1m}^n (incógnita a determinar), es decir:

$$b_{jm}^n = b_{jm}^n(\beta_{0m}^n, \lambda_{0m}^n, \beta_{1m}^n) \quad j = 1, \dots\dots, N \quad (4.51)$$

Para asegurar la convergencia de la solución se han obtenido los $N = 47$ primeros términos de la serie, es decir $b_{0m}^n, b_{1m}^n, \dots\dots\dots b_{47m}^n$ que toman la siguiente forma:

$$b_{jm}^n = A_{0m}^n [b_{jm0}^n + b_{jm1}^n \cdot \beta_{1m}^{n\ 2}] \quad (4.52)$$

A continuación se expresan los coeficientes obtenidos para los casos $m=0$ y $m=1$

Coefficientes para el caso $m = 0$

Para el caso $m=0$ los términos impares resultan nulos $b_{j0}^n = 0 \quad \forall j \text{ impar}$:

$$b_{10}^n = b_{30}^n = b_{50}^n = \dots\dots\dots = b_{430}^n = 0$$

$$b_{00}^n = A_{00}^n [b_{000}^n + b_{001}^n \cdot \beta_{10}^{n\ 2}] \quad \begin{array}{l} b_{000}^n = 1 \\ b_{001}^n = 0 \end{array}$$

$$b_{20}^n = A_{00}^n [b_{200}^n + b_{201}^n \cdot \beta_{10}^{n\ 2}] \quad \begin{array}{l} b_{200}^n = \beta_{00}^{n\ 2} \\ b_{201}^n = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
b_{40}^n &= A_{00}^n \left[b_{400}^n + b_{401}^n \cdot \beta_{10}^{n^2} \right] & b_{400}^n &= \frac{1}{64} \beta_{00}^{n^4} b_{000}^n \\
b_{60}^n &= A_{00}^n \left[b_{600}^n + b_{601}^n \cdot \beta_{10}^{n^2} \right] & b_{401}^n &= \frac{1}{64} (1 - \lambda_{00}^n) \cdot b_{401p}^n \\
& & b_{401p}^n &= 2 \beta_{00}^{n^2} \\
& & b_{600}^n &= \frac{1}{576} \beta_{00}^{n^4} b_{200}^n \\
b_{80}^n &= A_{00}^n \left[b_{800}^n + b_{801}^n \cdot \beta_{10}^{n^2} \right] & b_{601}^n &= \frac{1}{576} \left[\beta_{00}^{n^4} b_{201}^n - (1 + \lambda_{00}^n) b_{601p}^n \right] \\
& & b_{601p}^n &= \frac{\beta_{00}^{n^2}}{2^2} b_{401p}^n \\
& & b_{800}^n &= \frac{1}{2304} \beta_{00}^{n^4} b_{400}^n \\
b_{100}^n &= A_{00}^n \left[b_{1000}^n + b_{1001}^n \cdot \beta_{10}^{n^2} \right] & b_{801}^n &= \frac{1}{2304} \left[\beta_{00}^{n^4} b_{401}^n + (1 - \lambda_{00}^n) b_{801p}^n \right] \\
& & b_{801p}^n &= \frac{\beta_{00}^{n^2}}{4^2} b_{601p}^n \\
& & b_{1000}^n &= \frac{1}{6400} \beta_{00}^{n^4} b_{600}^n \\
b_{120}^n &= A_{00}^n \left[b_{1200}^n + b_{1201}^n \cdot \beta_{10}^{n^2} \right] & b_{1001}^n &= \frac{1}{6400} \left[\beta_{00}^{n^4} b_{601}^n - (1 + \lambda_{00}^n) b_{1001p}^n \right] \\
& & b_{1001p}^n &= \frac{\beta_{00}^{n^2}}{6^2} b_{801p}^n \\
& & b_{1200}^n &= \frac{1}{14400} \beta_{00}^{n^4} b_{800}^n \\
& & b_{1201}^n &= \frac{1}{14400} \left[\beta_{00}^{n^4} b_{801}^n + (1 - \lambda_{00}^n) b_{1201p}^n \right] \\
& & b_{1201p}^n &= \frac{\beta_{00}^{n^2}}{8^2} b_{1001p}^n
\end{aligned}$$

.
.
.

.

.

$$b_{420}^n = A_{00}^n \left[b_{4200}^n + b_{4201}^n \cdot \beta_{10}^{n^2} \right]$$

$$b_{4200}^n = \frac{1}{2822400} \beta_{00}^{n^4} b_{3800}^n$$

$$b_{4201}^n = \frac{1}{2822400} \left[\beta_{00}^{n^4} b_{3801}^n - (1 + \lambda_{00}^n) b_{4201p}^n \right]$$

$$b_{4201p}^n = \frac{\beta_{00}^{n^2}}{38^2} b_{4001p}^n$$

$$b_{440}^n = A_{00}^n \left[b_{4400}^n + b_{4401}^n \cdot \beta_{10}^{n^2} \right]$$

$$b_{4400}^n = \frac{1}{3515104} \beta_{00}^{n^4} b_{4000}^n$$

$$b_{4401}^n = \frac{1}{3515104} \left[\beta_{00}^{n^4} b_{4001}^n + (1 - \lambda_{00}^n) b_{4401p}^n \right]$$

$$b_{4401p}^n = \frac{\beta_{00}^{n^2}}{40^2} b_{4201p}^n$$

Coefficientes para el caso $m = 1$

Para el caso $m = 1$ los términos pares resultan nulos $b_{j1}^n = 0 \quad \forall j \quad \text{par}$:

$$b_{01}^n = b_{21}^n = b_{41}^n = \dots = b_{461}^n = 0$$

$$b_{11}^n = A_{01}^n \left[b_{110}^n + b_{111}^n \cdot \beta_{11}^{n^2} \right]$$

$$b_{110}^n = \beta_{01}^n$$

$$b_{111}^n = 0$$

$$b_{31}^n = A_{01}^n \left[b_{310}^n + b_{311}^n \cdot \beta_{11}^{n^2} \right]$$

$$b_{310}^n = \beta_{01}^{n^3}$$

$$b_{311}^n = 0$$

$$b_{51}^n = A_{01}^n \left[b_{510}^n + b_{511}^n \cdot \beta_{11}^{n^2} \right]$$

$$b_{510}^n = \frac{1}{192} \beta_{01}^{n^4} b_{110}^n$$

$$b_{511}^n = \frac{1}{192} (1 - \lambda_{01}^n) \cdot b_{511p}^n$$

$$b_{511p}^n = \beta_{01}^{n^3}$$

$$b_{71}^n = A_{01}^n \left[b_{710}^n + b_{711}^n \cdot \beta_{11}^{n^2} \right]$$

$$b_{710}^n = \frac{1}{1152} \beta_{01}^{n^4} b_{310}^n$$

$$b_{711}^n = \frac{1}{1152} \left[\beta_{01}^{n^4} b_{311}^n - (1 + \lambda_{01}^n) b_{711p}^n \right]$$

$$b_{711p}^n = \frac{\beta_{01}^{n^2}}{2 \cdot 4} b_{511p}^n$$

$$b_{91}^n = A_{01}^n \left[b_{910}^n + b_{911}^n \cdot \beta_{11}^{n^2} \right]$$

$$b_{910}^n = \frac{1}{3840} \beta_{01}^{n^4} b_{510}^n$$

$$b_{911}^n = \frac{1}{3840} \left[\beta_{01}^{n^4} b_{511}^n + (1 - \lambda_{01}^n) b_{911p}^n \right]$$

$$b_{911p}^n = \frac{\beta_{01}^{n^2}}{4 \cdot 6} b_{711p}^n$$

$$b_{111}^n = A_{01}^n \left[b_{1110}^n + b_{1111}^n \cdot \beta_{11}^{n^2} \right]$$

$$b_{1110}^n = \frac{1}{9600} \beta_{01}^{n^4} b_{710}^n$$

$$b_{1111}^n = \frac{1}{9600} \left[\beta_{01}^{n^4} b_{711}^n - (1 + \lambda_{01}^n) b_{1111p}^n \right]$$

$$b_{1111p}^n = \frac{\beta_{01}^{n^2}}{6 \cdot 8} b_{911p}^n$$

$$b_{131}^n = A_{01}^n \left[b_{1310}^n + b_{1311}^n \cdot \beta_{11}^{n^2} \right]$$

$$b_{1310}^n = \frac{1}{20160} \beta_{01}^{n^4} b_{910}^n$$

$$b_{1311}^n = \frac{1}{20160} \left[\beta_{01}^{n^4} b_{911}^n + (1 - \lambda_{01}^n) b_{1311p}^n \right]$$

$$b_{1311p}^n = \frac{\beta_{01}^{n^2}}{8 \cdot 10} b_{1111p}^n$$

·
·
·
·

$$\begin{aligned}
b_{451}^n &= A_{01}^n \left[b_{4510}^n + b_{4511}^n \cdot \beta_{11}^{n^2} \right] & b_{4510}^n &= \frac{1}{3740352} \beta_{01}^{n^4} b_{4110}^n \\
& & b_{4511}^n &= \frac{1}{3740352} \left[\beta_{01}^{n^4} b_{4111}^n + (1 - \lambda_{01}^n) b_{4511p}^n \right] \\
& & b_{4511p}^n &= \frac{\beta_{01}^{n^2}}{40 \cdot 42} b_{4311p}^n \\
\\
b_{471}^n &= A_{01}^n \left[b_{4710}^n + b_{4711}^n \cdot \beta_{11}^{n^2} \right] & b_{4710}^n &= \frac{1}{4468992} \beta_{01}^{n^4} b_{4310}^n \\
& & b_{4711}^n &= \frac{1}{4468992} \left[\beta_{01}^{n^4} b_{4311}^n - (1 + \lambda_{01}^n) b_{4711p}^n \right] \\
& & b_{4711p}^n &= \frac{\beta_{01}^{n^2}}{42 \cdot 44} b_{4511p}^n
\end{aligned}$$

Como se ha dicho, a continuación se aplican las condiciones de contorno lo que va a permitir el cálculo del parámetro de frecuencia incógnita $\beta_{lm}^n a$

Las condiciones de contorno son, ecuaciones (4.39 y 4.42-4.43):

$$W_{lm}^n(a) = 0$$

$$\frac{\partial W_{lm}^n(a)}{\partial r} - \frac{a}{\delta_m} \cdot \frac{\partial^2 W_{lm}^n(a)}{\partial r^2} = 0 \quad \text{siendo} \quad \delta_m = \begin{cases} 4 & m = 0 \\ 8 & m = 1 \end{cases}$$

La solución para $W_{lm}^n(r)$ es de la ecuación (4.47):

$$W_{lm}^n(r) = A_{lm}^n J_m(\beta_{0m}^n r) + B_{lm}^n I_m(\beta_{0m}^n r) + W_{lmp}^n(r)$$

Por tanto, de la primera condición de contorno se cumple:

$$W_{lm}^n(a) = 0 = A_{lm}^n J_m(\beta_{0m}^n a) + B_{lm}^n I_m(\beta_{0m}^n a) + W_{lmp}^n(a)$$

Despejando la constante B_{lm}^n :

$$B_{lm}^n = -\frac{1}{I_m(\beta_{0m}^n a)} \left[A_{lm}^n J_m(\beta_{0m}^n a) + W_{lmp}^n(a) \right] \quad (4.53)$$

La solución particular $W_{lmp}^n(r)$ es conocida como se ha visto de la ecuación (4.50):

$$W_{1mp}^n(r) = \sum_{j=0}^N b_{jm}^n \cdot r^j$$

Donde $b_{jm}^n = A_{0m}^n [b_{jm0}^n + b_{jm1}^n \cdot \beta_{1m}^{n\ 2}]$, siendo los coeficientes b_{jm0}^n y b_{jm1}^n funciones conocidas de β_{0m}^n y λ_{0m}^n de la forma:

$$b_{jm0}^n = b_{jm0}^n \left[(\beta_{0m}^n)^j \right] \quad b_{jm1}^n = b_{jm1}^n \left[(\beta_{0m}^n)^{j-2}, \lambda_{0m}^n \right]$$

Por lo tanto, la solución particular en $r = a$ se expresa:

$$W_{1mp}^n(a) = \sum_{j=0}^N b_{jm}^n \cdot a^j = \sum_{j=0}^N A_{0m}^n [b_{jm0}^n + b_{jm1}^n \cdot \beta_{1m}^{n\ 2}] \cdot a^j \quad (4.54)$$

Suponiendo $A_{1m}^n = A_{0m}^n$ resulta la constante B_{1m}^n :

$$B_{1m}^n = -\frac{A_{0m}^n}{I_m(\beta_{0m}^n a)} \left[J_m(\beta_{0m}^n a) + \frac{W_{1mp}^n(a)}{A_{0m}^n} \right] = \\ -\frac{A_{0m}^n}{I_m(\beta_{0m}^n a)} \left[J_m(\beta_{0m}^n a) + \sum_{j=0}^N [b_{jm0}^n + b_{jm1}^n \cdot \beta_{1m}^{n\ 2}] \cdot a^j \right] \quad (4.55)$$

A continuación se aplica la segunda condición de contorno con lo que se obtiene una ecuación que permite calcular la incógnita “ $\beta_{1m}^n a$ ”

La segunda condición de contorno es, ecuación (4.42-4.43):

$$\frac{\partial W_{1m}^n(a)}{\partial r} - \frac{a}{\delta_m} \cdot \frac{\partial^2 W_{0m}^n(a)}{\partial r^2} = 0 \quad \text{siendo} \quad \delta_m = \begin{cases} 4 & m=0 \\ 8 & m=1 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta las propiedades de las derivadas de las funciones de Bessel [12] de orden m que se presentan a continuación:

$$J_m'(\beta_{0m}^n r) = \beta_{0m}^n \frac{J_{m-1}(\beta_{0m}^n r) - J_{m+1}(\beta_{0m}^n r)}{2}$$

$$I_m(\beta_{0m}^n r) = i^{-m} J_m(i\beta_{0m}^n r)$$

$$I_m'(\beta_{0m}^n r) = \beta_{0m}^n \frac{I_{m-1}(\beta_{0m}^n r) + I_{m+1}(\beta_{0m}^n r)}{2}$$

$$J_m''(\beta_{0m}^n r) = \beta_{0m}^{n^2} \frac{J_{m-2}(\beta_{0m}^n r) - 2J_m(\beta_{0m}^n r) + J_{m+2}(\beta_{0m}^n r)}{4}$$

$$I_m''(\beta_{0m}^n r) = \beta_{0m}^{n^2} \frac{I_{m-2}(\beta_{0m}^n r) + 2I_m(\beta_{0m}^n r) + I_{m+2}(\beta_{0m}^n r)}{4}$$

Donde se ha utilizado la notación $J_m' = \frac{dJ_m}{dr}$ $I_m' = \frac{dI_m}{dr}$ $J_m'' = \frac{d^2 J_m}{dr^2}$ $I_m'' = \frac{d^2 I_m}{dr^2}$

Siendo J_m e I_m las funciones de Bessel y modificada de Bessel de 1ª especie y orden m

Se va a analizar el primer término de la 2ª condición de contorno $\frac{\partial W_{1m}^n(a)}{\partial r}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{1m}^n(a)}{\partial r} &= A_{0m}^n \beta_{0m}^n \frac{J_{m-1}(\beta_{0m}^n r) - J_{m+1}(\beta_{0m}^n r)}{2} + \\ &+ B_{1m}^n \beta_{0m}^n \frac{I_{m-1}(\beta_{0m}^n r) + I_{m+1}(\beta_{0m}^n r)}{2} + W_{1mp}^{n'}(a) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Donde $W_{1mp}^{n'}(a) = \frac{dW_{1mp}^n(a)}{dr}$

Sustituyendo la constante B_{1m}^n de la ecuación (4.53) resulta:

$$\frac{\partial W_{1m}^n(a)}{\partial r} = A_{0m}^n \left[\beta_{0m}^n \frac{J_{m-1}(\beta_{0m}^n a) - J_{m+1}(\beta_{0m}^n a)}{2} - \frac{\beta_{0m}^n}{I_m(\beta_{0m}^n a)} \left[J_m(\beta_{0m}^n a) + \frac{W_{1mp}^n(a)}{A_{0m}^n} \right] \frac{I_{m-1}(\beta_{0m}^n a) + I_{m+1}(\beta_{0m}^n a)}{2} + \frac{W_{1mp}^{n'}(a)}{A_{0m}^n} \right] \quad (4.57)$$

Donde de la ecuación (4.54):

$$\frac{W_{1mp}^n(a)}{A_{0m}^n} = \sum_{j=0}^N \left[b_{jm0}^n + b_{jm1}^n \cdot \beta_{1m}^{n\ 2} \right] \cdot a^j$$

$$\frac{W_{1mp}^{n'}(a)}{A_{0m}^n} = \sum_{j=0}^N \left[b_{jm0}^n + b_{jm1}^n \cdot \beta_{1m}^{n\ 2} \right] \cdot j \cdot a^{j-1}$$

Por tanto $\frac{\partial W_{1m}^n(a)}{\partial r}$ es una función conocida de $\beta_{0m}^n a$, λ_{0m}^n y de la incógnita

$$\beta_{1m}^n a$$

A continuación se va a analizar el segundo término de la 2ª condición de contorno

$$\frac{\partial^2 W_{0m}^n(a)}{\partial r^2} :$$

Para ello teniendo en cuenta la expresión de la función de deformación, ecuaciones (4.44 y 4.55):

$$W_{0m}^n(r) = A_{0m}^n \left[J_m(\beta_{0m}^n r) - \lambda_{0m}^n I_m(\beta_{0m}^n r) \right]$$

$$\lambda_{0m}^n = \frac{J_m(\beta_{0m}^n a)}{I_m(\beta_{0m}^n a)}$$

Y las propiedades de las derivadas de las funciones de Bessel [12], resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W_{0m}^n(a)}{\partial r^2} = & \\ A_{0m}^n \frac{\beta_{0m}^{n\ 2}}{4} & \left[\frac{J_{m-2}(\beta_{0m}^n r) - 2J_m(\beta_{0m}^n r) + J_{m+2}(\beta_{0m}^n r)}{-\lambda_{0m}^n \left[I_{m-2}(\beta_{0m}^n r) + 2I_m(\beta_{0m}^n r) + I_{m+2}(\beta_{0m}^n r) \right]} \right] \end{aligned} \quad (4.58)$$

Por lo tanto, de la segunda condición de contorno $\frac{\partial W_{1m}^n(a)}{\partial r} = \frac{a}{\delta_m} \cdot \frac{\partial^2 W_{0m}^n(a)}{\partial r^2}$

resulta la ecuación que permite finalmente calcular la incógnita “ $\beta_{1m}^n a$ ” (parámetro de frecuencia perturbado):

$$\begin{aligned}
& \left[\beta_{0m}^n \frac{J_{m-1}(\beta_{0m}^n a) - J_{m+1}(\beta_{0m}^n a)}{2} - \right. \\
& \left. - \frac{\beta_{0m}^n}{I_m(\beta_{0m}^n a)} \left[J_m(\beta_{0m}^n a) + \frac{W_{1mp}^n(a)}{A_{0m}^n} \right] \frac{I_{m-1}(\beta_{0m}^n a) + I_{m+1}(\beta_{0m}^n a)}{2} + \right. \\
& \left. + \frac{W_{1mp}^{n'}(a)}{A_{0m}^n} \right] = \\
& = \frac{a \beta_{0m}^{n^2}}{4 \delta_m} \left[\frac{J_{m-2}(\beta_{0m}^n r) - 2J_m(\beta_{0m}^n r) + J_{m+2}(\beta_{0m}^n r) -}{- \lambda_{0m}^n \left[I_{m-2}(\beta_{0m}^n r) + 2I_m(\beta_{0m}^n r) + I_{m+2}(\beta_{0m}^n r) \right]} \right]
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Ecuación que se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{\partial W_{1m}^n(a)}{\partial r} = \frac{a}{\delta_m} \cdot \frac{\partial^2 W_{0m}^n(a)}{\partial r^2}$$

Llamando:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_{1m}^n(a)}{\partial r} &= K_{1m0}^n + K_{1m1}^n (\beta_{1m}^n a)^2 \\
\frac{a}{\delta_m} \cdot \frac{\partial^2 W_{0m}^n(a)}{\partial r^2} &= K_{0m}^n
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Donde los coeficientes K_{1m0}^n , K_{1m1}^n y K_{0m}^n son funciones de los parámetros conocidos $\beta_{0m}^n a$ y $\lambda_{0m}^n a$

Despejando la incógnita $\beta_{1m}^n a$

$$\beta_{1m}^n a = \sqrt{\frac{K_{0m}^n - K_{1m0}^n}{K_{1m1}^n}} \tag{4.61}$$

Donde los coeficientes K_{1m0}^n , K_{1m1}^n y K_{0m}^n se expresan como:

$$K_{0m}^n = \frac{(\beta_{0m}^n a)^2}{4 \delta_m} \frac{A_{0m}^n}{a} \left[\frac{J_{m-2}(\beta_{0m}^n a) - 2J_m(\beta_{0m}^n a) + J_{m+2}(\beta_{0m}^n a) -}{- \lambda_{0m}^n \left[I_{m-2}(\beta_{0m}^n a) + 2I_m(\beta_{0m}^n a) + I_{m+2}(\beta_{0m}^n a) \right]} \right]$$

$$K_{1m0}^n = \frac{A_{0m}^n}{a} \left\{ \begin{aligned} & \beta_{0m}^n a \frac{J_{m-1}(\beta_{0m}^n a) - J_{m+1}(\beta_{0m}^n a)}{2} - \\ & - \frac{\beta_{0m}^n a}{I_m(\beta_{0m}^n a)} \left[J_m(\beta_{0m}^n a) + \sum_{j=0}^N [b_{jm0}^n \cdot a^j] \right] \frac{I_{m-1}(\beta_{0m}^n a) + I_{m+1}(\beta_{0m}^n a)}{2} + \\ & + \sum_{j=0}^N [b_{jm0}^n \cdot j \cdot a^j] \end{aligned} \right\}$$

$$K_{1m1}^n = \frac{A_{0m}^n}{a} \left\{ - \frac{\beta_{0m}^n a}{I_m(\beta_{0m}^n a)} \left[\sum_{j=0}^N [b_{jm1}^n \cdot a^{j-2}] \right] + \sum_{j=0}^N [b_{jm1}^n \cdot j \cdot a^{j-2}] \right\}$$

Nota: los coeficientes b_{jm0}^n y b_{jm1}^n son proporcionales a:

$$b_{jm0}^n \propto (\beta_{0m}^n)^j \quad b_{jm1}^n \propto (\beta_{0m}^n)^{j-2}$$

4.5 Resultados

Para la frecuencia más baja se han obtenido los siguientes valores de los parámetros de frecuencia de orden cero y uno:

$$\beta_{00}^0 a = 3.1962 \quad \text{y} \quad \beta_{10}^0 a = 2.2601.$$

En la Tabla 4.3 se representan los valores del parámetro λ definido como

$$\lambda = \left(\frac{\rho_p \omega^2}{D} \right)^{\frac{1}{4}} a, \text{ donde } \omega \text{ es la frecuencia fundamental obtenida por Leissa [34]}$$

{páginas 37 y 38, según las expresiones (3.4), (3.6) and (3.8). Los valores en la tabla de la expresión (3.4*) es como la (3.4) pero reteniendo términos lineales en ε^2 . Las expresiones (3.4), (3.6) y (3.8) retienen términos hasta orden ε^4 }

Tabla 4.3 Comparación de la frecuencia fundamental entre el presente método y otras expresiones aproximadas dadas por Leissa [34] en función de la excentricidad de la placa

a/b	ε	Este método	Leissa [34] Eq.(3.4)	Leissa [34] Eq.(3.4*)	Leissa [34] Eq.(3.6)	Leissa [34] Eq.(3.8)
1.000	0.00	3.1962	3.1961	3.1961	3.2137	3.1979
1.0259	0.05	3.2359	3.2380	3.2361	3.2560	3.2400
1.0540	0.10	3.2751	3.2839	3.2760	3.3029	3.2867
1.0846	0.15	3.3139	3.3337	3.3160	3.3552	3.3387
1.1180	0.20	3.3522	3.3875	3.3560	3.4139	3.3971

Se observa que para la frecuencia fundamental, la comparación entre el método de esta tesis y (3.4*) es muy buena.

A continuación, las frecuencias naturales para la placa en vacío se comparan con los métodos presentados en Kaplunov et al. [27]

Para valores de $\frac{a}{b}=1.1$, $\varepsilon=0.181818$ y $\eta=\frac{h/2}{a}=0.05$, el parámetro de

frecuencia definido en Kaplunov et al. [27] como $\Omega = \frac{\omega a}{\sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho_p}}}$ se compara

para distintos diámetros nodales “ m ” y círculos nodales “ n ” en la tabla 4.4

Tabla 4.4. Comparación de las frecuencias naturales de una placa elíptica con $a/b = 1.1$

m	n	Rayleigh-Ritz Kaplunov [27]	Este método	Elementos finitos 3D Kaplunov [27]	Placa circular $\varepsilon = 0$
0	0	0.5519	0.5437	0.538	0.4983
1	0	1.093	1.0844	1.04	1.037
0	1	2.200	2.1165	2.01	1.94
1	1	2.707	3.096	2.43	2.967

Se observa que los resultados son bastante similares, excepto para el caso $m=1$ y $n=1$, sin embargo, para este caso la comparación del método presentado en esta tesis con el caso de placa circular $\varepsilon=0$ sigue una variación similar a las otras frecuencias, en contraste con el resultado obtenido por Kaplunov et al [27] en el que presenta una variación brusca respecto de las otras frecuencias.

En la siguiente Tabla 4.5 se presentan los resultados obtenidos de las raíces $\beta_{\varepsilon m}^n a$ para la placa elíptica empotrada para los distintos círculos nodales y los casos analizados de cero y un diámetro nodal.

Tabla 4.5 Parámetros $\beta_{\varepsilon m}^n a$ en los casos de ningún diámetro nodal $m=0$ y un diámetro nodal $m=1$ para placa elíptica empotrada

n	$\beta_{00}^n a$	$\beta_{10}^n a$	$\beta_{01}^n a$	$\beta_{11}^n a$
0	3.1962	2.2601	4.6109	2.3054
1	6.3064	4.4537	7.7903	3.8997
2	9.4305	6.6747	10.9581	5.4779
3	12.5771	8.8935	14.1086	7.3482

De estos resultados, se pueden calcular las frecuencias naturales para diferentes valores de la excentricidad ε .

Se observa de estos resultados, que al aumentar la excentricidad, la frecuencia de vibración en vacío aumenta respecto del caso de placa circular.

La ventaja del método presentado en esta tesis es que el modo de vibración se obtiene de forma explícita y puede utilizarse el método de Amabili and Kwak [1] para obtener los factores adimensionales de masa incremental añadida o factores NAVMI en el caso de una placa elíptica casi-circular.

5 NAVMI FACTOR PARA PLACA ELÍPTICA CASI-CIRCULAR

En este capítulo se desarrolla el método del factor NAVMI en base al método de perturbaciones aplicado en el capítulo anterior para obtener de forma analítica los modos de deformación en vacío de una placa elíptica de pequeña excentricidad que son usados como funciones base de la deformación de la placa para determinar los factores NAVMI y por tanto de las frecuencias naturales de vibración de dicha placa elíptica empotrada en su periferia colocada en un agujero de pared rígida en contacto con un líquido por una cara en los casos de cero y un diámetros nodales.

La placa elíptica se supone en contacto por una cara con un líquido incompresible y no viscoso inicialmente en reposo, como muestra la figura 5.1.

Figura 5.1 Placa elíptica colocada en un agujero de una pared rígida en contacto con un líquido

5.1 Potencial de velocidades del líquido

Si el movimiento del líquido debido a la vibración de la placa se supone irrotacional, al ser no viscoso e incompresible, existe un potencial de velocidades

y la ecuación diferencial que describe el movimiento del fluido es la ecuación de Laplace como ya se ha visto.

Si el modo de vibración de la placa se expresa suponiendo movimiento armónico de frecuencia ω , ecuación (B.3):

$$w(r, \theta, t) = \tilde{w}(r, \theta) \cdot e^{-i\omega t}$$

El potencial de velocidades se puede representar según (3.7):

$$\Phi(r, \theta, z, t) = -\varphi(r, \theta, z) \cdot i\omega \cdot e^{-i\omega t} = \varphi(r, \theta, z) \cdot \dot{f}(t)$$

El potencial $\varphi(r, \theta, z)$ verifica la ecuación de Laplace. Las condiciones de contorno para el potencial de velocidades son: de las ecuaciones (3.11, 3.12 y 3.13)

$$\left. \frac{\partial \varphi(r, \theta, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad \text{en } S_1 \text{ en la pared rígida} \quad (5.1)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi(r, \theta, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \sum_{m,n} \{W_m^n(r) \cos(m\theta)\} \quad \text{en } S_2 \text{ sobre la placa} \quad (5.2)$$

$$\varphi(r, \theta, z), \quad \frac{\partial \varphi(r, \theta, z)}{\partial r}, \quad \frac{\partial \varphi(r, \theta, z)}{\partial z} \rightarrow 0 \quad \text{en } S_\infty \quad r, z \rightarrow \infty \quad (5.3)$$

Por separación de variables r, θ el potencial se puede poner de la forma

$$\varphi(r, \theta, z) = \sum_{m,n} \{ \phi_m^n(r, z) \cdot \cos(m\theta) \} \quad (5.4)$$

Para cada modo de vibración de la placa $W_m^n(r)$ se le asocia un potencial $\phi_m^n(r, z)$.

Dicho potencial cumple la siguiente ecuación en el dominio líquido L

$$\frac{\partial^2 \phi_m^n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_m^n}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi_m^n}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2} \phi_m^n = 0 \quad \text{en } L \quad (5.5)$$

Siguiendo el procedimiento del capítulo 3 para placas circulares, la transformación de Hankel para dicho potencial se expresa:

$$\phi_{Hm}^n(\xi, z) = \int_0^\infty r \phi_m^n(r, z) J_m(\xi r) dr \quad (5.6)$$

Aplicando la transformación de Hankel a la ecuación del potencial de velocidades como se ha hecho en el apartado 3.4 del capítulo 3, se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 \phi_{Hm}^n}{dz^2} - \xi^2 \phi_{Hm}^n = 0 \quad (5.7)$$

Teniendo en cuenta la condición de contorno en S_∞ , la solución de esta ecuación debe decrecer con la variable z , por tanto es de la forma:

$$\phi_{Hm}^n(\xi, z) = \Psi_m^n(\xi) \cdot e^{-\xi z} \quad , \quad \text{para } z \geq 0 \quad (5.8)$$

Donde $\Psi_m^n(\xi)$ es una función a determinar con las otras condiciones de contorno.

Aplicando la transformada inversa de Hankel al potencial se tiene:

$$\phi_m^n(r, z) = \int_0^\infty \xi \phi_{Hm}^n(\xi, z) J_m(\xi r) d\xi \quad (5.9)$$

E insertando la expresión para $\phi_{Hm}^n(\xi, z)$:

$$\phi_m^n(r, z) = \int_0^\infty \xi \Psi_m^n(a\xi) e^{-\xi z} J_m(\xi r) d\xi \quad (5.10)$$

Aplicando separación de variables a las condiciones de contorno y utilizando la ecuación (5.10) resulta:

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} \left\{ \int_0^\infty \xi^2 \Psi_m^n(a\xi) J_m(\xi r) \cos(m\theta) d\xi \right\} &= \quad \text{en } S_2 \\ &= \sum_{m,n} \left\{ -W_m^n(r) \cos(m\theta) \right\} \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\sum_{m,n} \left\{ \int_0^\infty \xi^2 \Psi_m^n(a\xi) J_m(\xi r) \cos(m\theta) d\xi \right\} = 0 \quad \text{en } S_1 \quad (5.12)$$

La solución de estas dos últimas ecuaciones basada en las propiedades de la transformación de Hankel, Sneddon [54], es:

$$\sum_{m,n} \left\{ \xi \Psi_m^n(\xi) \cos(m\theta) \right\} = \sum_{m,n} \left\{ - \int_0^{r_e} r W_m^n(r) \cos(m\theta) J_m(r\xi) dr \right\} \quad (5.13)$$

Donde r_e es el radio exterior de la placa casi-circular, ecuación (4.4), que como se sabe es función del parámetro de perturbación ε :

$$r_e = a \left(1 - \frac{\varepsilon}{4} (1 - \cos 2\theta) \right)$$

Desarrollando en serie de potencias de ε la ecuación anterior (5.13) y teniendo en cuenta de las condiciones de contorno que $W_m^n(a) = 0$, la expresión de $\xi \Psi_m^n(\xi)$ resulta:

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} \left\{ \xi \Psi_m^n(\xi) \cos(m\theta) \right\} = \\ = \sum_{m,n} \left\{ \left[- \int_0^a r W_m^n(r) J_m(r\xi) dr + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[a W_m^n(a) J_m(\xi a) \right] \left(\frac{a}{4} \right) (1 - \cos 2\theta) \cdot \varepsilon \right] \cos(m\theta) \right\} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Por lo que:

$$\xi \Psi_m^n(\xi) = - \int_0^a r W_m^n(r) J_m(r\xi) dr \quad (5.15)$$

Y por tanto de la ecuación (5.10), el potencial en $z = 0$, $\phi_m^n(r, z = 0)$ es:

$$\phi_m^n(r, 0) = - \int_0^\infty \left[\int_0^a \sigma W_m^n(\sigma) J_m(\sigma\xi) d\sigma \right] J_m(\xi r) d\xi \quad (5.16)$$

Definiendo la función $H_m^n(\xi)$:

$$H_m^n(\xi) = \int_0^a \sigma W_m^n(\sigma) J_m(\sigma\xi) d\sigma \quad (5.17)$$

La expresión final para la componente del potencial de velocidad en $z = 0$ es

$$\phi_m^n(r, 0) = - \int_0^\infty H_m^n(\xi) J_m(\xi r) d\xi \quad (5.18)$$

5.2 Energía cinética del líquido

Como ya se estudió en el capítulo 3 la energía cinética del líquido se expresa:

$$T_L = \frac{1}{2} \rho_L \iint_S \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS \quad (5.19)$$

Donde $S = S_\infty + S_1 + S_2$. Ya que S_1 es la pared rígida $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$ y por tanto esta superficie no contribuye a la energía cinética. En S_∞ Φ y $\frac{\partial \Phi}{\partial n} \rightarrow 0$ por lo que S_∞ tampoco contribuye. Por tanto la energía cinética del fluido se expresa con la contribución de S_2 (superficie de la placa) como:

$$T_L = -\frac{1}{2} \rho_L \int_0^{2\pi} \int_0^{r_e} \Phi(r, 0, \theta) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} r dr d\theta \quad (5.20)$$

La componente mn de la energía cinética, teniendo en cuenta las expresiones del potencial ecuaciones (3.7 y 5.4) resulta:

$$(T_L)_m^n = -\frac{1}{2} \rho_L \dot{f}^2(t) \int_0^{2\pi} \int_0^{r_e} \phi_m^n(r, 0) \frac{\partial \phi_m^n}{\partial z} \Big|_{z=0} \cos^2(m\theta) r dr d\theta$$

Usando la condición de contorno, ecuación (5.2) que para

$0 \leq r \leq r_e$ $\frac{\partial \phi_m^n}{\partial z} \Big|_{z=0} = W_m^n(r)$, la energía cinética se expresa:

$$(T_L)_m^n = -\frac{1}{2} \rho_L \dot{f}^2(t) \int_0^{2\pi} \int_0^{r_e} \phi_m^n(r, 0) W_m^n(r) \cos^2(m\theta) r dr d\theta \quad (5.21)$$

Y teniendo en cuenta que el radio exterior de la placa $r_e = a \left(1 - \frac{\varepsilon}{4} (1 - \cos 2\theta) \right)$,

haciendo un desarrollo en serie en potencias de ε en la expresión (5.21) de la energía cinética resulta:

$$(T_L)_m^n = -\frac{1}{2}\rho_L \dot{f}^2(t) \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^a \phi_m^n(r,0) W_m^n(r) \cos^2(m\theta) r dr d\theta + \int_0^{2\pi} \left[\phi_m^n(a,0) W_m^n(a) \cdot a \right] \left(-\frac{a}{4} \right) (1 - \cos 2\theta) \cos^2(m\theta) \varepsilon d\theta \right\} \quad (5.22)$$

Pero como ya se estudió en el capítulo anterior de las condiciones de contorno para la placa el término $W_m^n(a) = W_{\varepsilon m}^n(a) = 0$, por lo tanto el segundo sumando del segundo miembro se anula y resulta:

$$(T_L)_m^n = -\frac{1}{2}\rho_L \dot{f}^2(t) \psi_m \int_0^a \phi_m^n(r,0) W_m^n(r) r dr \quad (5.23)$$

$$\text{Siendo } \psi_m = \int_0^{2\pi} \cos^2(m\theta) d\theta = \begin{cases} 2\pi & m=0 \\ \pi & m \neq 0 \end{cases}$$

Sustituyendo la expresión para el potencial de velocidad $\phi_m^n(r,0)$, ecuación

$$(5.18), \phi_m^n(r,0) = -\int_0^\infty H_m^n(\xi) J_m(\xi r) d\xi$$

La energía cinética resulta:

$$(T_L)_m^n = -\frac{1}{2}\rho_L \dot{f}^2(t) \psi_m \int_0^a \left\{ \int_0^\infty H_m^n(\xi) J_m(\xi r) d\xi \right\} W_m^n(r) r dr \quad (5.24)$$

Intercambiando el orden de integración en esta última ecuación:

$$(T_L)_m^n = \frac{1}{2}\rho_L \dot{f}^2(t) \psi_m \int_0^\infty H_m^n(\xi) \left[\int_0^a W_m^n(\sigma) J_m(\xi \sigma) \sigma d\sigma \right] d\xi \quad (5.25)$$

Y teniendo en cuenta la definición de $H_m^n(\xi)$, ecuación (5.17),

$$H_m^n(\xi) = \int_0^a \sigma W_m^n(\sigma) J_m(\sigma \xi) d\sigma$$

Se obtiene por finalmente la expresión de la energía cinética del fluido:

$$(T_L)_m^n = \frac{1}{2}\rho_L \dot{f}^2(t) \psi_m \int_0^\infty H_m^{n^2}(\xi) d\xi \quad (5.26)$$

De la definición de la función $H_m^n(\xi)$ y teniendo en cuenta el desarrollo en perturbaciones de ε para la deformación de la placa $W_m^n(r) = W_{0m}^n(r) + \varepsilon \cdot W_{1m}^n(r)$, ésta se puede expresar como un desarrollo en perturbaciones de ε , y en primera aproximación :

$$H_m^n(\xi) = H_{0m}^n(\xi) + \varepsilon \cdot H_{1m}^n(\xi) = \int_0^a (W_{0m}^n(r) + \varepsilon \cdot W_{1m}^n(r)) J_m(r\xi) r dr \quad (5.27)$$

Recordando las expresiones de la deformación de la placa elíptica del capítulo anterior generalizadas para distintos valores de m

Deformación de orden cero ε^0 , como ya se ha visto:

$$W_{0m}^n(r) = A_{0m}^n \left[J_m(\beta_{0m}^n r) - \lambda_{0m}^n I_m(\beta_{0m}^n r) \right] \quad (5.28)$$

$$\text{Siendo la constante } \lambda_{0m}^n = \frac{J_m(\beta_{0m}^n a)}{I_m(\beta_{0m}^n a)} \quad (5.29)$$

La deformación de orden ε^1 como ya se ha estudiado en el capítulo anterior, es la suma de la solución homogénea y la solución particular:

$$W_{1m}^n(r) = W_{1mh}^n(r) + W_{1mp}^n(r) \quad (5.30)$$

Las solución homogénea de orden ε^1 :

$$W_{1mh}^n(r) = A_{1m}^n J_m(\beta_{0m}^n r) + B_{1m}^n I_m(\beta_{0m}^n r) \quad (5.31)$$

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno estudiadas para esta solución en el capítulo anterior, se expresa:

$$W_{1mh}^n(r) = A_{0m}^n \left[J_m(\beta_{0m}^n r) - \lambda_{1m}^n I_m(\beta_{0m}^n r) \right] \quad (5.32)$$

Donde el parámetro λ_{1m}^n se obtiene de las condiciones de contorno y tiene por expresión:

$$\lambda_{1m}^n = -\frac{1}{I_m(\beta_{0m}^n a)} \left[J_m(\beta_{0m}^n a) + \frac{W_{1mp}^n(a)}{A_{0m}^n} \right] \quad (5.33)$$

Y por último recordando del capítulo anterior la solución particular conocida de la forma:

$$\frac{W_{1mp}^n(r)}{A_{0m}^n} = \sum_{j=0}^N \left[b_{jm0}^n + b_{jm1}^n \cdot \beta_{1m}^{n-2} \right] \cdot r^j \quad (5.34)$$

Siendo los coeficientes b_{jm0}^n y b_{jm1}^n funciones conocidas de β_{0m}^n y λ_{0m}^n

$$b_{jm0}^n = b_{jm0}^n \left[\left(\beta_{0m}^n \right)^j \right] \quad b_{jm1}^n = b_{jm1}^n \left[\left(\beta_{0m}^n \right)^{j-2}, \lambda_{0m}^n \right]$$

Por tanto, la solución particular es una función Ψ conocida de los parámetros $\beta_{0m}^n a$, $\beta_{1m}^n a$ y λ_{0m}^n

$$\frac{W_{1mp}^n(a)}{A_{0m}^n} = \Psi \left(\beta_{0m}^n a, \beta_{1m}^n a, \lambda_{0m}^n \right) \quad (5.35)$$

A continuación, se procede al cálculo de la energía cinética del fluido tomando variables adimensionales que se definen como:

$$\rho = \frac{r}{a} \quad \eta = a\xi \quad (5.36)$$

Sustituyendo en la función $H_m^n(\xi)$ de la ecuación (5.17):

$$H_m^n(\eta) = a^2 \int_0^1 \rho W_m^n(a\rho) J_m(\eta\rho) d\rho \quad (5.37)$$

$$\text{Llamando } \bar{H}_m^n = \frac{H_m^n}{a^2} \text{ se tiene } \bar{H}_m^n(\eta) = \int_0^1 \rho W_m^n(a\rho) J_m(\eta\rho) d\rho \quad (5.38)$$

Teniendo en cuenta la ecuación de la energía cinética ecuación (5.26) y sustituyendo:

$$(T_L)_m^n = \frac{1}{2} \rho_L \dot{f}^2(t) \psi_m a^3 \int_0^\infty \bar{H}_m^{n^2}(\eta) d\eta \quad (5.39)$$

Teniendo en cuenta el desarrollo en perturbaciones asociado al modo de deformación y la ecuación (5.27) para la función $H_m^n(\xi)$ que es

$$H_m^n(\xi) = H_{0m}^n(\xi) + \varepsilon \cdot H_{1m}^n(\xi) = \int_0^a (W_{0m}^n(r) + \varepsilon \cdot W_{1m}^n(r)) J_m(r\xi) r dr$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{H}_m^n(\eta) &= \bar{H}_{0m}^n(\eta) + \varepsilon \cdot \bar{H}_{1m}^n(\eta) = \\ &= \int_0^1 (W_{0m}^n(\rho) + \varepsilon \cdot W_{1m}^n(\rho)) J_m(\eta\rho) \rho d\rho \end{aligned} \quad (5.40)$$

Cálculo de $\bar{H}_{0m}^n(\eta)$:

Sustituyendo la solución conocida $W_{0m}^n(\rho)$ resulta:

$$\bar{H}_{0m}^n(\eta) = \int_0^1 A_{0m}^n [J_m(\beta_{0m}^n a \rho) - \lambda_{0m}^n I_m(\beta_{0m}^n a \rho)] J_m(\eta\rho) \rho d\rho \quad (5.41)$$

Esta integral tiene solución analítica [12,56] y vale:

$$\bar{H}_{0m}^n(\eta) = A_{0m}^n \left[\frac{\eta J_{m-1}(\eta) J_m(\beta_{0m}^n a) - \beta_{0m}^n a J_{m-1}(\beta_{0m}^n a) J_m(\eta)}{\beta_{0m}^{n^2} a^2 - \eta^2} - \lambda_{0m}^n \frac{\eta J_{m+1}(\eta) I_m(\beta_{0m}^n a) + \beta_{0m}^n a I_{m+1}(\beta_{0m}^n a) J_m(\eta)}{\beta_{0m}^{n^2} a^2 + \eta^2} \right] \quad (5.42)$$

Cálculo de $\bar{H}_{1m}^n(\eta)$:

Como se sabe la solución de orden ε^1 está compuesta de dos partes (homogénea y particular) $W_{1m}^n(r) = W_{1mh}^n(r) + W_{1mp}^n(r)$ por lo que la función $\bar{H}_{1m}^n(\eta)$ se descompone en dos partes:

$$\bar{H}_{1m}^n(\eta) = \bar{H}_{1mh}^n(\eta) + \bar{H}_{1mp}^n(\eta) \quad (5.43)$$

La solución homogénea de orden ε^1 es conocida, recordando la ecuación (5.32)

$$W_{1mh}^n(r) = A_{0m}^n [J_m(\beta_{0m}^n r) - \lambda_{1m}^n I_m(\beta_{0m}^n r)]$$

Resulta que para la parte homogénea:

$$\bar{H}_{1mh}^n(\eta) = \int_0^1 A_{0m}^n \left[J_m(\beta_{0m}^n a \rho) - \lambda_{1m}^n I_m(\beta_{0m}^n a \rho) \right] J_m(\eta \rho) \rho d\rho \quad (5.44)$$

Que como el caso de $\bar{H}_{0m}^n(\eta)$ tiene solución analítica, y vale:

$$\bar{H}_{1mh}^n(\eta) = A_{0m}^n \left[\frac{\eta J_{m-1}(\eta) J_m(\beta_{0m}^n a) - \beta_{0m}^n a J_{m-1}(\beta_{0m}^n a) J_m(\eta)}{\beta_{0m}^{n^2} a^2 - \eta^2} - \lambda_{1m}^n \frac{\eta J_{m+1}(\eta) I_m(\beta_{0m}^n a) + \beta_{0m}^n a I_{m+1}(\beta_{0m}^n a) J_m(\eta)}{\beta_{0m}^{n^2} a^2 + \eta^2} \right] \quad (5.45)$$

Por otro lado, la solución particular es conocida, ecuación (5.34):

$$W_{1mp}^n(\rho) = A_{0m}^n \sum_{j=0}^N \left[b_{jm0}^n + b_{jm1}^n \cdot \beta_{1m}^{n^2} \right] \cdot (a\rho)^j$$

Y por lo tanto la función $\bar{H}_{1mp}^n(\eta)$ asociada se expresa como:

$$\bar{H}_{1mp}^n(\eta) = \int_0^1 W_{1mp}^n(\rho) J_m(\eta \rho) \rho d\rho \quad (5.46)$$

Con objeto de obtener su expresión analítica desarrollamos la solución particular

$W_{1mp}^n(\rho)$ mediante una expansión de Dini [12] de orden m de la forma:

$$W_{1mp}^n(\rho) = \sum_{j=0}^N A_j J_m(\alpha_j \rho) \quad (5.47)$$

Con N lo suficientemente alto para asegurar la convergencia de la solución.

Donde los coeficientes A_j y α_j se definen con las expresiones:

$$A_j = \frac{2}{J_m^2(\alpha_j) - J_{m-1}(\alpha_j) J_{m+1}(\alpha_j)} \int_0^1 \rho W_{1mp}^n(\rho) J_m(\alpha_j \rho) d\rho \quad (5.48)$$

Los coeficientes α_j son las raíces de la ecuación $J_m'(\rho) = 0$

Con lo cual la función $\bar{H}_{1mp}^n(\eta)$ tiene por expresión analítica:

$$\bar{H}_{1mp}^n(\eta) = \sum_{j=0}^N A_j \frac{\eta J_{m-1}(\eta) J_m(\alpha_j) - \alpha_j J_{m-1}(\alpha_j) J_m(\eta)}{\alpha_j^2 - \eta^2} \quad (5.49)$$

Por tanto ya se obtiene la expresión de la energía cinética del líquido, ecuación (5.39):

$$(T_L)_m^n = \frac{1}{2} \rho_L \dot{f}^2(t) \psi_m a^3 \int_0^\infty \bar{H}_m^{n2}(\eta) d\eta$$

Siendo:

$$\bar{H}_m^n(\eta) = \bar{H}_{0m}^n(\eta) + \varepsilon \cdot [\bar{H}_{1mh}^n(\eta) + \bar{H}_{1mp}^n(\eta)] \quad (5.50)$$

Donde las expresiones de $\bar{H}_{0m}^n(\eta)$, $\bar{H}_{1mh}^n(\eta)$ y $\bar{H}_{1mp}^n(\eta)$ son conocidas y se han obtenido en (5.42), (5.45) y (5.49).

5.3 Energía cinética de la placa :

La energía cinética de la placa se expresa, ecuación (3.43):

$$T_p = \frac{1}{2} \rho_p h \int_0^{r_c} \int_0^{2\pi} \dot{w}^2(r, \theta, t) r dr d\theta$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (B.3 y B.16) para la función de deformación de la placa vibrante:

$$w(r, \theta, t) = \tilde{w}(r, \theta) \cdot e^{-i\omega t} = \sum_{m,n} \{W_m^n(r) \cos(m\theta) e^{-i\omega t}\} \quad (5.51)$$

Derivando respecto del tiempo y recordando que $f(t) = e^{-i\omega t}$, resulta:

$$\dot{w}(r, \theta, t) = \sum_{m,n} \{W_m^n(r) \cos(m\theta) \dot{f}(t)\} \quad (5.52)$$

E insertando en la expresión de la energía cinética de la placa asociada al modo mn :

$$(T_p)_m^n = \frac{1}{2} \rho_p h \dot{f}(t)^2 \int_0^{r_e} \int_0^{2\pi} W_m^{n2}(r) \cos^2(m\theta) r dr d\theta \quad (5.53)$$

Desarrollando en serie de Taylor en potencias de ε la expresión integral anterior, teniendo en cuenta que el radio exterior de la placa en función del parámetro de perturbación ε es $r_e = a \left(1 - \frac{\varepsilon}{4} (1 - \cos 2\theta) \right)$

$$(T_p)_m^n = \frac{1}{2} \rho_p h \dot{f}(t)^2 \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^a W_m^{n2}(r) r dr + \right. \\ \left. + W_m^{n2}(a) \cdot a \left[-\frac{a}{4} (1 - \cos 2\theta) \right] \cdot \varepsilon \right\} \cos^2(m\theta) d\theta \quad (5.54)$$

De las condiciones de contorno, como $W_m^n(a) = 0$, resulta integrando entre 0 y 2π :

$$(T_p)_m^n = \frac{1}{2} \rho_p h \dot{f}(t)^2 \psi_m \int_0^a W_m^{n2}(r) r dr \quad (5.55)$$

Del desarrollo de perturbaciones en ε de la función de deformación de la placa:

$$W_m^n(r) = W_{0m}^n(r) + \varepsilon \cdot W_{1m}^n(r)$$

Sustituyendo en la expresión (5.55) de la energía cinética de la placa:

$$(T_p)_m^n = \frac{1}{2} \rho_p h \dot{f}(t)^2 \psi_m \int_0^a [W_{0m}^n(r) + \varepsilon \cdot W_{1m}^n(r)]^2 r dr \quad (5.56)$$

Tomando la variable adimensional $\rho = \frac{r}{a}$ resulta:

$$(T_p)_m^n = \frac{1}{2} \rho_p h a^2 \dot{f}(t)^2 \psi_m \int_0^1 [W_{0m}^n(\rho) + \varepsilon \cdot W_{1m}^n(\rho)]^2 \rho d\rho \quad (5.57)$$

Recordando las expresiones conocidas de la funciones de deformación de orden cero ε^0 , $W_{0m}^n(\rho)$ y de orden uno ε^1 , $W_{1m}^n(\rho)$ ecuaciones (5.28, 5.30, 5.32 y 5.34)

$$W_{0m}^n(\rho) = A_{0m}^n [J_m(\beta_{0m}^n a \rho) - \lambda_{0m}^n I_m(\beta_{0m}^n a \rho)]$$

$$W_{1m}^n(\rho) = W_{1mh}^n(\rho) + W_{1mp}^n(\rho)$$

$$W_{1mh}^n(\rho) = A_{0m}^n [J_m(\beta_{0m}^n a \rho) - \lambda_{1m}^n I_m(\beta_{0m}^n a \rho)]$$

$$\frac{W_{1mp}^n(\rho)}{A_{0m}^n} = \sum_{j=0}^N [b_{jm0}^n + b_{jm1}^n \cdot \beta_{1m}^{n2}] \cdot (a\rho)^j$$

Se obtiene finalmente la energía cinética de la placa.

Considerando la hipótesis de que la energía total del sistema fluido-estructura es constante, la misma en vacío que en presencia de líquido [1,57], la relación de frecuencias en contacto con el líquido respecto del vacío asociada al modo mn viene dada por la expresión:

$$\frac{(f_L)_m^n}{(f_v)_m^n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(T_L)_m^n}{(T_P)_m^n}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma_m^n}} \quad (5.58)$$

Siendo γ_m^n la relación de energías cinéticas $\gamma_m^n = \frac{(T_L)_m^n}{(T_P)_m^n}$ que habida cuenta de

las expresiones de la energía cinética del líquido $(T_L)_m^n$ y la placa $(T_P)_m^n$ asociadas al modo de deformación W_m^n , que son las ecuaciones (5.39) y (5.57):

$$(T_L)_m^n = \frac{1}{2} \rho_L \dot{f}^2(t) \psi_m a^3 \int_0^\infty \bar{H}_m^{n2}(\eta) d\eta$$

$$(T_P)_m^n = \frac{1}{2} \rho_p h a^2 \dot{f}^2(t) \psi_m \int_0^1 [W_{0m}^n(\rho) + \varepsilon \cdot W_{1m}^n(\rho)]^2 \rho d\rho$$

Se puede expresar esta relación:

$$\gamma_m^n = \Gamma_m^n \frac{\rho_L a}{\rho_p h} \quad (5.59)$$

Donde Γ_m^n es el factor NAVMI adimensional de incremento de masa añadida, que se expresa como una función de ε

5.4 Resultados

A continuación, los resultados del factor NAVMI Γ_m^n en función de ε para los casos $m=0$ y $m=1$ and $n=0,1,2$ se presentan en las Figs. 5.2 y 5.3 También se presenta el resultado para placa circular obtenido por Amabili y Kwak [1]

Figura 5.2 (a),(b) y (c). Factor NAVMI en función de la excentricidad para los modos sin diámetros nodales

Figura 5.3 (a), (b) y (c) Factor NAVMI en función de la excentricidad para los modos con un diámetro nodal

De estos resultados se obtienen las siguientes conclusiones:

1. El valor del factor NAVMI siempre disminuye con la excentricidad.
2. La variación es mayor en los modos sin diámetro nodal (del orden del 2.5%) que para los modos con un diámetro nodal (menor que el 1%).
3. Para el mismo valor de diámetro nodal, la reducción se incrementa con el orden del modo, es decir, con el valor de n .

Como se ha indicado la relación de frecuencia $\frac{(f_L)_m^n}{(f_v)_m^n}$ en contacto con el líquido

respecto del vacío en función del factor NAVMI Γ_m^n tiene por expresión

$$\frac{(\omega_L)_m^n}{(\omega_v)_m^n} = \frac{(f_L)_m^n}{(f_v)_m^n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \Gamma_m^n \frac{\rho_L a}{\rho_p h}}}, \text{ donde aparece también la relación de densidades}$$

del líquido y el material de la placa, así como la relación entre el radio y espesor de la placa. Al aumentar el factor NAVMI, se reduce la frecuencia de vibración de la placa en contacto con el líquido respecto de su valor en vacío. Por lo tanto al aumentar la excentricidad, al reducirse el factor NAVMI, la reducción de frecuencia de vibración de la placa en contacto con el líquido respecto de su valor en vacío es menos importante, es decir con la elipticidad el efecto del fluido es menos apreciable respecto del caso de placa circular. Recordando los resultados del capítulo 4, al aumentar la excentricidad también aumenta la frecuencia de vibración en vacío.

A continuación se calcula la relación entre las frecuencias de la placa elíptica y la placa circular en contacto con el líquido. Esta relación se expresa como:

$$\frac{\left[(f_L)_m^n \right]_\varepsilon}{\left[(f_L)_m^n \right]_0} = \frac{\left[(f_v)_m^n \right]_\varepsilon}{\left[(f_v)_m^n \right]_0} \sqrt{\frac{1 + (\gamma_m^n)_0}{1 + (\gamma_m^n)_\varepsilon}} \quad (5.60)$$

Donde $\left[(f_L)_m^n \right]_\varepsilon$ representa la frecuencia natural de la placa elíptica en contacto con el líquido, $\left[(f_L)_m^n \right]_0$ la frecuencia natural de la placa circular en contacto con el líquido, $\left[(f_v)_m^n \right]_\varepsilon$ es la frecuencia natural de la placa elíptica en vacío y $\left[(f_v)_m^n \right]_0$ es la frecuencia natural de la placa circular en vacío

En las Figuras 5.4 y 5.5 se representan estas relaciones de frecuencias para los casos $m=0$ y $m=1$ and $n=0,1,2$

Figura 5.4 (a), (b) and (c). Influencia de la excentricidad en las frecuencias naturales de la placa sumergida en líquido para el caso sin diámetro nodal

Figura 5.5 (a), (b) and (c). Influencia de la excentricidad en las frecuencias naturales de la placa sumergida en líquido para el caso de un diámetro nodal

De las figuras, se observa que las frecuencias que dependen linealmente de ε , se incrementan con respecto al caso de placa circular.

Es decir al dar elipticidad a la placa circular como se ha visto en el capítulo 4 en la Tabla (4.3), se incrementa la frecuencia de vibración en vacío y en cambio el efecto amortiguador del fluido se reduce respecto al caso de placa circular.

Este incremento es mayor para los modos sin diámetro nodal respecto a los modos con un diámetro nodal.

Por ejemplo para el caso de cero diámetros y círculos nodales el que la placa tenga una elipticidad del 10% implica aumentar la frecuencia natural en contacto con el líquido del orden del 6% respecto del caso circular, es decir si la frecuencia natural para el caso de placa circular fuera de 500 Hz, la placa correspondiente casicircular tendría una frecuencia natural de 530 Hz.

De ahí el interés de conocer cómo afecta el efecto de la elipticidad en el diseño de una placa circular, ya que por un error de fabricación ésta puede no ser exactamente circular y de cara a conocer las resonancias de ésta, es importante tener en cuenta las posibles desviaciones en las frecuencias calculadas por tal efecto.

6 Conclusiones

En esta tesis se han presentado dos modelos con los que se estudia el comportamiento dinámico de placas inmersas en un fluido.

Se ha utilizado un método de elementos de contorno BEM para el cálculo de las frecuencias naturales de una placa circular sumergida en un dominio fluido infinito compresible de densidad arbitraria así como para calcular los coeficientes de amortiguamiento debidos al fluido.

Este método utiliza anillos circulares de manera que el número de elementos para obtener unos resultados precisos es muy bajo. Se utiliza un procedimiento de iteración para el cálculo de las frecuencias naturales del acoplamiento fluido-estructura para el caso del efecto de compresibilidad del aire. Para ello se calcula la matriz de masa añadida debido a la carga del fluido, así como los coeficientes de masa fluida y relación de amortiguamiento en función de la frecuencia reducida o número de onda que presenta un máximo para un valor intermedio del número de onda o frecuencia reducida k y para altos valores de dicha frecuencia reducida k tiende a anularse. Este coeficiente de masa fluida se puede interpretar como una función de transferencia que da el efecto del fluido sobre la placa (salto de presión sobre ésta) asociado a su deformación

Este método es válido para cualquier condición de contorno de la placa ya sea empotrada, apoyada o libre y utiliza como funciones base de deformación las calculadas analíticamente para el caso de vibración en vacío ya que su diferencia se puede obviar respecto a la funciones de deformación en el movimiento acoplado placa-fluido que no obstante, se pueden calcular con los autovectores del problema de autovalores.

Su validez ha sido contrastada con distintos datos experimentales y otros métodos numéricos para el caso en el que la compresibilidad del fluido es despreciable, en particular para el caso de que el fluido sea agua. En el caso de que el fluido sea

aire y que la estructura de la placa sea muy ligera, la reducción de frecuencia con respecto al vacío tiene un efecto considerable y por tanto no se puede despreciar.

Los efectos de la compresibilidad no afectan mucho a los resultados obtenidos en comparación con el caso incompresible.

Otro método utilizado basado en la transformación de Hankel, que fue utilizada primero por Magrab [39] y más tarde por Amabili y Kwak [1] para placas circulares, es ahora aplicado para resolver el problema de interacción fluido-estructura para placas elípticas empotradas de pequeña excentricidad. Para la aplicación del método se necesita una expresión explícita del modo de vibración de la placa. Por tanto, para placas con pequeña excentricidad se ha aplicado un método de perturbaciones reteniendo términos de primer orden, haciendo posible la obtención de los modos de deformación y las frecuencias naturales de la placa elíptica en vacío para los casos de cero y un diámetros nodales. Los resultados obtenidos muestran buena concordancia comparando las frecuencias naturales con otros métodos aproximados utilizados por otros autores.

Para los resultados con el efecto del fluido, los factores adimensionales de masa incremental NAVMI se han calculado para los casos de cero y un diámetros nodales. Los resultados muestran en todos los casos que la influencia de la elipticidad respecto del caso circular reduce el factor NAVMI, y esta reducción es mayor para los modos de mayor orden y para el caso de que no haya ningún diámetro nodal. También, se calcula la relación entre las frecuencias de la placa elíptica y la placa circular en contacto con el líquido, donde se observa que las frecuencias que dependen linealmente de la elipticidad ε , y se incrementan con respecto al caso de placa circular. Este incremento es mayor para los modos sin diámetro nodal respecto a los modos con un diámetro nodal.

Este método puede ser utilizado como test para chequear códigos numéricos basados en los métodos FEM o BEM para determinar la influencia del fluido en las características dinámicas de placas elípticas. También el método se puede aplicar a otro tipo de placas casi-circulares sin más que cambiar la función $f_{\theta}(\theta)$

que define el contorno o radio exterior de la placa en función de la coordenada polar θ .

7 BIBLIOGRAFIA

1. Amabili M. & Kwak M.K. (1996) Free vibrations of circular plates coupled with liquids:revising the Lamb problem. *Journal of Fluids and Structures* 10: 743-761
2. Amabili M., Frosali G. & Kwak M.K. (1996) Free vibrations of annular plates coupled with fluids. *Journal of Sound and Vibration* 191 (5), 825-846
3. Amabili M., Pascualini A. & Dalpiaz G. (1995) Natural frequencies and modes of free edge circular plates vibrating in vacuum or in contact with liquid. *Journal of Sound and Vibration* 188(5): 685-699
4. Amabili,M., Dalpiaz,G. & Santolini C. (1994) Free vibration of free edge circular plates immersed in water. *Proceedings of the 12th International Modal Analysis Conference* 2251: 349
5. Amabili M., Dalpiaz G. & Santolini C. (1995) Free-edge circular plates vibrating in water. *Modal Analysis: The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis* 10, 187-202
6. Atalla N., Nicolas J. & Gauthier C. (1966) Acoustic radiation of an unbaffled Vibrating plate with general elastic boundary conditions. *Journal of the Acoustical Society of America* Vol.99 N°3:1484-1495
7. Axisa F. & Trompette P. (2005) *Modelling of Mechanical Systems: Structural Elements*, Vol. 2. Elsevier Butterwoth-Heinemann
8. Axisa F. & Antunes J. (2007) *Modelling of Mechanical Systems: Fluid-Structure Interaction*, Vol. 3. Elsevier Butterwoth-Heinemann

9. Ben Mariem J. & Hamdi M.A. (1987) A new boundary finite element method for fluid-structure interaction problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.24, 1251-1267

10. Berry A., Guyader J.L. & Nicolas J. (1990) A general formulation for the sound radiation from rectangular, baffled plates with arbitrary boundary conditions. Journal of the Acoustical Society of America N°88 (6):2792-2802

11. Bokil VB. & Shirahatti US. (1994) A technique for the modal analysis of sound-structure interaction problems. Journal of Sound and Vibration; 173: 23-41

12. Bowman F. (1958), Introduction to Bessel Functions. (Dover Publications Inc, New York, USA).

13. Coyette J.P. (1994) A synthesis of Available Numerical Methods for Modelling Vibro-Acoustic Problems. Proc. Internat. Conf. Spacecraft Structures and Mechanical Testing; Paris, France

14. Coyette J.P. (1995) Finite element and boundary element models for predicting the vibro-acoustic behaviour of multi-layered structures. CEAS/AIAA-95-100. Proceedings of the first joint CEAS/AIAA Aeroacoustics conference. Munich , Pag: 721-728

15. Elsgoltz L. (1969) Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional. Ed. MIR Moscú

16. Filippi P.J.T., Lagarrigue O. & Mattei P.O. (1994) Perturbation method for sound radiation by a vibrating plate in a light fluid: comparison with the exact solution. Journal of Sound and Vibration, 177, 259-275.

17. Fowler J., Lagerquist N. & Leve H. (1987) Effect of air in modal tests. Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference, London
18. Frendi A., Maestrello L. & Bayliss A. (1994) Coupling between plate vibration and acoustic radiation. Journal of Sound and Vibration N^o 177 (2) Pag: 207-226
19. Fung Y.C. & Tong Pin (2001) Classical and Computational Solid Mechanics. World Scientific
20. García Fogeda P., Iglesia F., López Díez J. et al (1996) Effects of the surrounding fluid on the dynamic characteristics of rectangular plate. Machine Vibration 5:52-61
21. García Fogeda P., Iglesia F., Rioboo J.L. & Luengo,P. (1997) Análisis de estructuras frente a cargas acústicas. IAA, N^o 347, pag:13-26
22. Hamdi M.A. & Jean P. (1985) A mixed functional for the numerical resolution of fluid-structure interaction problems. Aero and hydroacoustics conference UTAM Symposium, Lyon
23. Hussain K.A. & Peat K.S. (1994) Boundary Element Analysis of Low Frequency Cavity Acoustical Problems. Journal of Sound and Vibration; 169; 197-209
24. Junger and Feit (1972) Sound, structures and their interaction. M.I.T. Press
25. Junger M.C. (1975) Radiation and Scattering by Submerged elastic Structures. Journal of Acoustical Society of America; 57;1318-1326

26. Junger M.C. (1987) Approaches to Acoustic Fluid-Elastic Structure Interactions. *Journal of Acoustical Society of America*; 82;1115-1121

27. Kaplunov J.D., Nolde E.V. & Shorr B.F. (2005) A perturbation approach for evaluating natural frequencies of moderately thick elliptic plates. *Journal of Sound and Vibration*, **281**, 905-919.

28. Kozlovsky Y. (2009) Vibration of plates in contact with viscous fluid: Extension of Lamb's model. *Journal of Sound and Vibration* Vol. 323(2): 332-339

29. Kwak K. (1991) Vibration of circular plates in contact with water. *Journal of Applied Mechanics* Vol. 58(2): 480-483

30. Kwak M.K. & Kim K.C. (1991) Axisymmetric vibration of circular plates in contact with fluid. *Journal of Sound and Vibration*, **146**, 381-389.

31. Lamb H. (1945) *Hydrodynamics*, p.46. New York: Dover

32. Lamb H. (1921) On the vibrations of an elastic plate in contact with water. *Proceedings of the Royal Society of London* 98: 205-216

33. Leissa A.W. (1973) The Free Vibration of Rectangular Plates. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 31, No.3, pp. 257-293

34. Leissa A.W. (1969) *Vibration of plates*. NASA SP 160

35. Lindholm U.S., Kana D.D., Chu W. & Abramson H.N. (1965) Elastic Vibration Characteristics of Cantilever Plates in Water. *Journal of Ship Research*; 11-22

36. Lomas N. S. & Hayek S.I. (1977) Vibration and Acoustic Radiation of Elastically Supported Rectangular Plates. *Journal of Sound and Vibration* Vol.52 N°1: 1-25

37. Maidanik G. (1996) The influence of Fluid Loading on the Radiation from Orthotropic Plates. *Journal of Sound and Vibration* 3, 288-199

38. Mangler K.W. (1952) Improper integrals in theoretical aerodynamics. *Aeronautical Research Council Current Papers*

39. Magrab E. B. (1979) *Vibration of Elastic Structural Members*. Germantown, MDSijthoff and Noordhoff.

40. Mattei (1996) A two-dimensional Tchebycheff Collocation Method for the Study of the Vibration of a Baffled Fluid-Loaded Rectangular Plate. *Journal of Sound and Vibration* 196, 407-427

41. McLachlan N.W. (1932) The accession to inertia of flexible discs vibrating in a fluid. *Proceeding of the Physical Society* 44: 546

42. Meyerhoff W.K. (1970) Added Masses of Thin Rectangular Plates Calculated from Potential Theory. *Journal of Ship Research*; 100-111

43. Mixson J.S. & Koval, L.R. (1974) On the Interaction of a Vibrating Plate with an Acoustic Medium. Presented at the 87th Meeting of The Acoustical Society of America; New York. EE.UU.

44. Montero Espinosa & Gallego Juárez J.A. (1984) On the resonance frequencies of water loaded circular plates. *Journal of Sound and Vibration* 94 (2): 217-222

45. Morse Philip M. & Ingard Uno (1987) Theoretical Acoustics. Princeton University Press
46. Nayfeh A. H. (1981) Introduction to Perturbation Techniques. John Wiley and Sons New York, USA.
47. Nelisse H., Beslin O. & Nicolas J. (1995) Panel dynamic response to a reverberant acoustic field. AIAA Journal. Vol.33, No.9
48. Nelisse H., Beslin O. & Nicolas J. (1996) Fluid-Structure Coupling for an Unbaffled Elastic Panel Immersed in a Diffuse Field. Journal of Sound and Vibration Vol.198(4). Pag:485-506
49. Niku S.M., Abey R.A., Klein M., Teichert W. & Kries M. (1991) Analysis of Fluid-Structure Interaction of Spacecraft's Fluid Tanks Using Combined Boundary Element and Finite Element Methods. Proc. Internat. Conf. Spacecraft Structures and Mechanical Testing, Noordwijk, The Netherlands
50. Peake W.H. & Thurston E.G. (1954) The lowest resonant frequency of a water-loaded circular plate. Journal of the Acoustical Society of America 26: 166-168
51. Powell J.H. & Roberts J.H.T. (1923) On the frequency of vibration of circular diaphragms. Proceedings of the Physical Society (London) 35, 170-182
52. Rayleigh Lord J.W.S. (1945) Theory of Sound. (2nd edition. Dover, New York, USA).
53. Skudrzyk E. (1971) The foundations of acoustics. Springer-Verlag
54. Sneddon I.N. (1966) Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory.

North-Holland, Amsterdam, Netherlands).

55. Wijker J.J. (1985) Acoustic Effects on the Dynamic Characteristics of Lightweight Structures. Presented at the MSC/NASTRAN European User's Conference; Munich, Germany.

56. Wheelon A.D. (1968) Tables of Summable Series and Integrals Involving Bessel Functions. San Francisco: Holden-Day

57. Zhu F. (1994) Rayleigh quotients for coupled free vibrations. Journal of Sound and Vibration 171, 641-649.

APENDICE A VIBRACIÓN DE PLACAS DELGADAS

A.1 Introducción

En este Anexo se desarrolla desde un punto de vista variacional el modelo de Kirchhoff-Love que define la ecuación de deformación de una placa [7].

Las placas son elementos estructurales que se modelizan como estructuras bidimensionales, ya que una de sus dimensiones, el espesor h , es mucho menor que las otras dos (los lados de longitudes L_x y L_y en una placa rectangular por ejemplo), caracterizadas por una geometría plana y un contorno que puede definirse con líneas rectas o curvas. Soportan varias condiciones de carga, que se clasifican en cargas en el plano y cargas fuera del plano, es decir cargas paralelas o perpendiculares al plano de la placa. Su respuesta a estas cargas se puede estudiar de forma separada o desacoplada dando lugar a movimientos en el plano o fuera del plano.

Las cargas en el plano paralelas al plano medio, se contrarrestan con los esfuerzos en el plano normales y tangenciales

Las cargas fuera del plano perpendiculares al plano medio se contrarrestan por momentos de flexión y torsión, y fuerzas cortantes transversales.

Nuestro estudio se refiere al movimiento y cargas fuera del plano es decir en dirección perpendicular al plano de la placa

A.2 Modelo de Kirchhoff-Love

Se pretende deducir la ecuación que cumple la vibración de una placa, para lo cual se aplica el modelo de Kirchhoff-Love

Simplificaciones de Love:

Se considera una placa rectangular de espesor uniforme h y de lados de longitudes L_x y L_y . Las coordenadas de un punto material se representan en un

sistema cartesiano $Oxyz$ donde xy es el plano medio de la placa. Dos secciones normales al plano medio de la placa se intersectan en una línea o fibra normal a la placa. Como el espesor h es mucho menor que las longitudes de los lados L_x y L_y se suponen las siguientes hipótesis para pequeñas deformaciones:

1. Las fibras normales se comportan como un cuerpo rígido
2. Tras la deformación del plano medio, las fibras normales permanecen perpendiculares a éste
3. Los esfuerzos normales que actúan sobre planos paralelos al plano medio son consistentes con la primera hipótesis de rigidez de las fibras normales

A.3 Grados de libertad y desplazamientos globales

De acuerdo con la primera hipótesis el movimiento de una fibra normal se puede describir usando cinco parámetros independientes, llamados desplazamientos globales, que se refieren a un punto cualquiera del plano medio $P(x, y)$, y se definen:

1. Desplazamiento longitudinal en la dirección Ox : $X(x, y, t)\vec{i}$
2. Desplazamiento lateral en la dirección Oy : $Y(x, y, t)\vec{j}$
3. Desplazamiento transversal en la dirección Oz : $Z(x, y, t)\vec{k}$ (A.1)
4. Rotación alrededor del eje Ox : $\psi_x(x, y, t)\vec{i}$
5. Rotación alrededor del eje Oy : $\psi_y(x, y, t)\vec{j}$

Tras la deformación el punto $P(x, y, 0)$ se transforma en $P(x + X, y + Y, Z)$

Movimiento fuera del plano transversal de la placa

El movimiento transversal de la placa es de gran importancia ya que su rigidez es mucho menor respecto de cargas normales al plano que las cargas en el plano.

Para modelizar los movimientos fuera del plano de la placa se aplican las hipótesis de Kirchhoff-Love, por tanto el movimiento transversal se describe en términos del desplazamiento transversal $Z(x, y, t)\vec{k}$ para el caso de placas rectangulares.

Desplazamientos locales

El desplazamiento local de un punto material M situado a una distancia z del plano medio se representa:

$$\vec{\xi}(x, y, z, t) = \vec{X} + \vec{\psi} \wedge \vec{r} \quad (\text{A.2})$$

Donde:

$$\vec{X} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \quad \vec{r} = z\vec{k} \quad \vec{\psi} = \psi_x\vec{i} + \psi_y\vec{j} \quad (\text{A.3})$$

Por tanto las componentes cartesianas de los desplazamientos locales son:

$$\xi_x = X + z\psi_y \quad \xi_y = Y - z\psi_x \quad \xi_z = Z \quad (\text{A.4})$$

De acuerdo con la segunda hipótesis de Kirchhoff-Love, las rotaciones se relacionan con las derivadas de los desplazamientos transversales:

$$\psi_x = +\frac{\partial Z}{\partial y} \quad \psi_y = -\frac{\partial Z}{\partial x} \quad (\text{A.5})$$

De las ecuaciones (A.3) y (A.4) los desplazamientos locales resultan:

$$\xi_x = X - z\frac{\partial Z}{\partial x} \quad \xi_y = Y - z\frac{\partial Z}{\partial y} \quad \xi_z = Z \quad (\text{A.6})$$

A.4 Deformaciones globales y locales

Deformaciones locales

Las deformaciones locales resultan:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial \xi_x}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x} - z \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial \xi_y}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial y} - z \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial y} + \frac{\partial \xi_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \right)
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Las componentes ε_{xz} y ε_{yz} son nulas por lo que resulta un modelo de flexión sin cortadura.

Deformaciones globales de flexión y torsión

Las deformaciones locales se pueden ver como suma de dos componentes: las deformaciones de membrana independientes de z , y las deformaciones de flexión y torsión proporcionales a z .

El tensor de deformación se puede escribir $\bar{\varepsilon} = \bar{\eta} + z \bar{\chi}$

Siendo $\bar{\eta}$ el tensor de deformación de membrana y $\bar{\chi}$ el tensor de deformación de flexión que se representa en forma matricial:

$$[\chi] = \begin{bmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} & -\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \end{bmatrix} \tag{A.8}$$

Los coeficientes de $[\chi]$ se interpretan como pequeñas curvaturas del plano medio deformado; los términos de la diagonal son curvaturas de flexión, mientras que los términos fuera de la diagonal representan la torsión de la placa que induce cortadura en las secciones transversales

Se puede representar en forma vectorial $\{\bar{\varepsilon}\} = \{\bar{\eta}\} + z \{\bar{\chi}\}$ donde:

$$\{\vec{\eta}\}^T = \{\eta_{xx} \quad \eta_{yy} \quad 2\eta_{xy}\} = \left\{ \frac{\partial X}{\partial x} \quad \frac{\partial Y}{\partial y} \quad \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \right\} \quad (\text{A.9})$$

$$\{\chi\}^T = \{\chi_{xx} \quad \chi_{yy} \quad 2\chi_{xy}\} = \left\{ -\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \right\} \quad (\text{A.10})$$

A.5 Esfuerzos globales y locales: flexión y torsión

Los esfuerzos globales se obtienen integrando los esfuerzos locales a través del espesor h de la placa. Si el material es isótropo, el modelo de Kirchhoff-Love restringe los esfuerzos a las tres componentes σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} que dependen linealmente de la coordenada z . De las relaciones esfuerzo deformación se puede poner:

$$\begin{aligned} \{\vec{\sigma}\} &= \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [C] \{\vec{\varepsilon}\} = \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = [C] \{[\vec{\eta}] + z[\vec{\chi}]\} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

La integración según z del esfuerzo anterior proporciona la expresión del vector momento que se representa:

$$\{\vec{M}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\vec{\sigma}\} z dz = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 [C][\vec{\chi}] dz = \frac{h^3}{12} [C][\vec{\chi}] \quad (\text{A.12})$$

Donde los momentos por unidad de longitud M_{xx} y M_{yy} son momentos de flexión y $M_{xy} = M_{yx}$ momento de torsión

También se puede representar en forma de tensor $\overline{\overline{M}}$:

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{bmatrix} \quad (A.13)$$

El equilibrio de la placa sometida a cargas externas normales a ella requiere la presencia de fuerzas transversales normales internas que resultan de esfuerzos locales de cortadura de acuerdo con las expresiones:

$$Q_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz \quad Q_{yz} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz \quad (A.14)$$

Aunque estos esfuerzos transversales no se pueden introducir con la ley esfuerzo-deformación ya que de acuerdo con el modelo de Kirchhoff-Love las deformaciones ε_{xz} y ε_{yz} son nulas. Se puede interpretar que el material de la placa posee un módulo de Young E y módulo de Poisson ν finitos en las direcciones del plano de la placa y en cambio en la dirección normal, E se considera infinito y $\nu = 0$

Figura A.1 Esquema de momentos y fuerzas trasversales en elemento de placa

A.6 Ecuaciones del movimiento transversal

En ausencia de cargas en el plano de la placa, los pequeños desplazamientos transversales de la placa dependen sólo de los momentos de flexión y torsión ya vistos.

Se va a utilizar el principio variacional de Hamilton para deducir la ecuación y condiciones de contorno que rigen el comportamiento de la placa en su movimiento transversal o fuera del plano.

El principio de Hamilton se expresa analíticamente:

$$\delta[A(t_1, t_2)] = \delta \left[\int_{t_1}^{t_2} L dt \right] = 0 \quad (A.15)$$

Donde $\delta[]$ denota el operador de variación. $A(t_1, t_2)$ es la acción entre dos tiempos arbitrarios t_1 y t_2 del Lagrangiano L definido como:

$$L = \int_{V(t)} (\varepsilon_c - \varepsilon_e + w_{fV}) dV + \int_{S(t)} w_{fS} dS \quad (A.16)$$

Por lo que el principio de Hamilton resulta:

$$\begin{aligned} \delta \left[\int_{t_1}^{t_2} L dt \right] &= 0 = \int_{t_1}^{t_2} \delta[L] dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta \left[\int_{V(t)} (\varepsilon_c - \varepsilon_e + w_{fV}) dV \right] dt + \delta \left[\int_{S(t)} w_{fS} dS \right] dt = 0 \\ \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{V(t)} (\delta[\varepsilon_c] - \delta[\varepsilon_e] + \delta[w_{fV}]) dV + \int_{S(t)} \delta[w_{fS}] dS \right] dt &= 0 \end{aligned} \quad (A.17)$$

Donde ε_c , ε_e , w_{fV} y w_{fS} son la densidad de energía cinética por unidad de volumen, la densidad de energía de deformación elástica por unidad de volumen, la densidad de trabajo de las fuerzas exteriores por unidad de volumen que actúan en el interior del sólido, y la densidad de trabajo de las fuerzas exteriores por unidad de superficie que actúan sobre la superficie del sólido.

Variación de energía cinética

La densidad de energía cinética si la inercia de rotación de las fibras normales se desprecia se representa:

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2} \rho_p h \dot{Z}^2 \quad (A.18)$$

Nota: la densidad de energía cinética considerada es por unidad de superficie, ya que su expresión implica haber integrado en z según el espesor.

Por tanto, integrando en el tiempo y espacio la variación de energía cinética se expresa:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{V(t)} \varepsilon_c dV dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{V(t)} \delta[\varepsilon_c] dV dt \quad (A.19)$$

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \varepsilon_c dx dy dt = \\ = \rho_p h \left[\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \dot{Z} \delta[Z] dx dy \right]_{t_1}^{t_2} = - \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \rho h \ddot{Z} \delta[Z] dx dy \right] dt \end{aligned} \quad (A.20)$$

Habiendo integrado por partes respecto del tiempo, teniendo en cuenta que $\delta[Z]=0$ en t_1 y t_2

$$\text{Con lo cual } \delta[\varepsilon_c] = -\rho h \ddot{Z} \delta[Z] \quad (A.21)$$

Variación de energía de deformación elástica

La energía de deformación elástica tiene por expresión:

$$\varepsilon_e = \frac{1}{2} \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} \quad (A.22)$$

Nota: la densidad de energía de deformación elástica considerada es por unidad de superficie, ya que su expresión implica haber integrado en z según el espesor.

Por lo que la variación de energía de deformación se expresa:

$$\delta[\varepsilon_e] = \bar{\sigma} : \delta[\bar{\varepsilon}] \quad (A.23)$$

Siendo $\bar{\sigma}$ y $\bar{\varepsilon}$ el tensor de esfuerzos y el tensor de deformación respectivamente

Particularizando para el movimiento transversal o fuera del plano de la placa la variación de energía de deformación elástica se puede expresar en notación tensorial o vectorial como:

$$\delta[\varepsilon_e] = \overline{\overline{M}} : \delta[\overline{\overline{\chi}}] = \{M\}^T \delta\{\bar{\chi}\} \quad (A.24)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (A.8 y A.12) de momento y deformación transversal se tiene:

$$-\delta[\varepsilon_e] = M_{xx} \frac{\partial^2 \delta Z}{\partial x^2} + (M_{xy} + M_{yx}) \frac{\partial^2 \delta Z}{\partial x \partial y} + M_{yy} \frac{\partial^2 \delta Z}{\partial y^2} \quad (A.25)$$

Como la variación con el tiempo no se considera, el cálculo de variaciones se limita al dominio espacial (en x e y). Por tanto, integrando cada término en este dominio, e integrando por partes resulta:

$$\begin{aligned} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} M_{xx} \frac{\partial^2 \delta Z}{\partial x^2} dx dy &= \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} \delta Z dx dy + \int_0^{L_y} \left[M_{xx} \frac{\partial \delta Z}{\partial x} - \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} \delta Z \right]_0^{L_x} dy \\ \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} M_{yy} \frac{\partial^2 \delta Z}{\partial y^2} dx dy &= \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} \delta Z dx dy + \int_0^{L_x} \left[M_{yy} \frac{\partial \delta Z}{\partial y} - \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \delta Z \right]_0^{L_y} dx \end{aligned}$$

Y los términos de torsión:

$$\begin{aligned} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} M_{xy} \frac{\partial^2 \delta Z}{\partial x \partial y} dx dy &= \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \delta Z dx dy + \int_0^{L_x} \left[M_{xy} \frac{\partial \delta Z}{\partial x} \right]_0^{L_y} dx - \int_0^{L_y} \left[\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \delta Z \right]_0^{L_x} dy \\ \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} M_{yx} \frac{\partial^2 \delta Z}{\partial x \partial y} dx dy &= \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} \delta Z dx dy + \int_0^{L_y} \left[M_{yx} \frac{\partial \delta Z}{\partial y} \right]_0^{L_x} dy - \int_0^{L_x} \left[\frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \delta Z \right]_0^{L_y} dx \end{aligned}$$

Como se verá de los términos que involucran las integrales dobles se obtendrán algunos de los términos correspondientes de la ecuación de la deformación de la placa, y de los términos que involucran las integrales simples se analizan y deducen los distintos tipos de condiciones de contorno

Variación del trabajo virtual de las cargas exteriores

Suponiendo que no existe cargas exteriores dentro del volumen del sólido, el trabajo $w_{fV} = 0$, y sólo existen cargas exteriores sobre la superficie del sólido, el trabajo $w_{fS} \neq 0$, que se va a representar con la notación $w_{fS} = w_e$

Las cargas externas superficiales se definen de forma vectorial:

$$\vec{f}^e(x, y, t) = f_z^e \vec{k} \quad (\text{A.26})$$

$$\vec{M}^e(x, y, t) = M_x^e \vec{i} + M_y^e \vec{j} \quad (\text{A.27})$$

El trabajo virtual de estas cargas exteriores se representa:

$$\int_{S(t)} \delta[w_e] dS = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left(f_z^e \delta Z + M_x^e \frac{\partial \delta Z}{\partial y} - M_y^e \frac{\partial \delta Z}{\partial x} \right) dx dy \quad (\text{A.28})$$

E integrando por partes resulta:

$$\int_{S(t)} \delta[w_e] dS = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left(f_z^e - \frac{\partial M_x^e}{\partial y} + \frac{\partial M_y^e}{\partial x} \right) \delta Z dx dy \quad (\text{A.29})$$

Aplicando el principio de Hamilton:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left[-\rho_p h \ddot{Z} + \left(\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} \right) + \left(f_z^e - \frac{\partial M_x^e}{\partial y} + \frac{\partial M_y^e}{\partial x} \right) \right] \delta Z dx dy dt = 0$$

De donde se obtiene la ecuación de equilibrio:

$$\rho_p h \ddot{Z} - \left(\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} \right) = f_z^e - \frac{\partial M_x^e}{\partial y} + \frac{\partial M_y^e}{\partial x} \quad (\text{A.30})$$

Que escrita de forma intrínseca:

$$\rho_p h \ddot{\vec{X}} \cdot \vec{k} - \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{M}) = (\vec{f}^e + \nabla \wedge \vec{M}^e) \cdot \vec{k} \quad (\text{A.31})$$

La fuerza cortante $\vec{Q}(Q_{xz}, Q_{yz})$ verifica $\vec{Q} = \text{div} \vec{M}$

Por lo que sus componentes son

$$Q_{xz} = \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \quad Q_{yz} = \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (\text{A.32})$$

A.7 Ecuación de la vibración de la placa

Los momentos de flexión y torsión se expresan:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E z^2}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ 2\chi_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{A.33})$$

Sustituyendo la expresión de la deformación de flexión, ecuación (A.8)

$$\{\chi\}^T = \{\chi_{xx} \quad \chi_{yy} \quad 2\chi_{xy}\} = \left\{ -\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \right\} \quad (\text{A.34})$$

Se obtienen las expresiones de los momentos:

$$\begin{aligned} M_{xx} &= -D \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right) \\ M_{yy} &= -D \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Donde D , coeficiente de rigidez a flexión de la placa, tiene por expresión:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{A.36})$$

Introduciendo estas expresiones en la ecuación (A.30), suponiendo que la carga exterior sobre la placa vibrando sumergida en un fluido es igual al salto de presión del fluido sobre ésta $f_z^e = \Delta p(x, y, t)$

$$D \left(\frac{\partial^4 Z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 Z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 Z}{\partial y^4} \right) + \rho_p h \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \Delta p \quad (\text{A.37})$$

Siendo $Z(x, y, t) = w(x, y, t)$ la deformación transversal de la placa

Y siendo $\Delta p(x, y, t)$ el salto de presión del fluido sobre la placa

Por tanto en forma compacta resulta la ecuación de vibración de la placa en el fluido:

$$\nabla^4 w + \frac{\rho_p h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \Delta p \quad (\text{A.38})$$

Siendo ∇^4 el operador bilaplaciana

Ecuación que es válida para cualquier sistema de coordenadas, por ejemplo cilíndrico como se verá en el caso de placa circular

A.8 Condiciones de contorno

Se va a centrar el estudio de las condiciones de contorno en tres tipos:

Placa empotrada, placa simplemente apoyada y placa libre

Las condiciones de contorno para estos tres casos van a ser: deformación Z nula, pendiente de la deformación $\frac{\partial Z}{\partial x}$, $\frac{\partial Z}{\partial y}$ nula, momento M_{xx} , M_{yy} nulo, y por último fuerza cortante efectiva de Kirchhoff V_{xz} , V_{yz} nula

Las fuerzas cortantes efectivas de Kirchhoff se deducen de los términos de las integrales simples de contorno como ya se ha visto de la expresión de la variación de energía elástica y resultan ser:

$$V_{xz} = \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_{xz} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \quad (\text{A.39})$$

$$V_{yz} = \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = Q_{yz} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (\text{A.40})$$

- Placa empotrada

Las condiciones de contorno son:

$$\begin{aligned}
Z(x, y=0, y=L_y) &= 0 & \frac{\partial Z}{\partial y}(x, y=0, y=L_y) &= 0 \\
Z(x=0, x=L_x, y) &= 0 & \frac{\partial Z}{\partial x}(x=0, x=L_x, y) &= 0
\end{aligned} \tag{A.41}$$

- **Placa simplemente apoyada**

Las condiciones de contorno son:

$$\begin{aligned}
Z(x, y=0, y=L_y) &= 0 & M_{yy}(x, y=0, y=L_y) &= 0 \\
Z(x=0, x=L_x, y) &= 0 & M_{xx}(x=0, x=L_x, y) &= 0
\end{aligned} \tag{A.42}$$

- **Placa libre**

Las condiciones de contorno son:

$$\begin{aligned}
V_{yz}(x, y=0, y=L_y) &= 0 & M_{yy}(x, y=0, y=L_y) &= 0 \\
V_{xz}(x=0, x=L_x, y) &= 0 & M_{xx}(x=0, x=L_x, y) &= 0
\end{aligned} \tag{A.43}$$

A.9 Aplicación al caso de coordenadas curvilíneas

Introducción

Se define un sistema coordenado curvilíneo ortonormal definido por las coordenadas α y β y los parámetros de Lamé g_α y g_β

Las curvas C_α definidas por α constante son ortogonales a las curvas C_β definidas por β constante, como se observa en la Fig. A.2

Figura A.2 Coordenadas curvilíneas ortonormales

Recordando la transformación de coordenadas curvilíneas a cartesianas:

$$x = x(\alpha, \beta) \quad y = y(\alpha, \beta)$$

El vector $\vec{e}_\alpha = \frac{\partial x}{\partial \alpha} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \vec{j} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}$ es tangente a C_β y normal a C_α

El vector unitario $\vec{t}_\alpha$ cumple $\vec{e}_\alpha = g_\alpha \vec{t}_\alpha$ donde $g_\alpha = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2}$

El vector $\vec{e}_\beta = \frac{\partial x}{\partial \beta} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \beta} \vec{j} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta}$ es tangente a C_α y normal a C_β

Y el vector unitario $\vec{t}_\beta$ cumple $\vec{e}_\beta = g_\beta \vec{t}_\beta$ donde $g_\beta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2}$

La longitud de un segmento infinitesimal no depende del sistema coordenado, por tanto:

$$\begin{aligned} ds^2 = dx^2 + dy^2 &= \begin{Bmatrix} dx & dy \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = g_\alpha^2 d\alpha^2 + g_\beta^2 d\beta^2 \\ ds^2 = g_\alpha^2 d\alpha^2 + g_\beta^2 d\beta^2 &= \begin{Bmatrix} d\alpha & d\beta \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} g_\alpha^2 & 0 \\ 0 & g_\beta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\alpha \\ d\beta \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Donde las matrices representan el tensor métrico en coordenadas cartesianas y curvilíneas ortonormales

Por lo que se cumple:

$$g_\alpha^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 \quad g_\beta^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 \quad (\text{A.45})$$

Con la condición de ortogonalidad de los vectores unitarios se demuestra que sus derivadas respecto de las coordenadas curvilíneas cumplen la siguiente relación, utilizando las siguientes identidades:

$$\vec{t}_\alpha \cdot \vec{t}_\alpha = 1 \quad \vec{t}_\beta \cdot \vec{t}_\beta = 1 \quad \vec{t}_\alpha \cdot \vec{t}_\beta = 0$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha}d\alpha + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\beta}d\beta = g_\alpha d\alpha\vec{t}_\alpha + g_\beta d\beta\vec{t}_\beta \quad (\text{A.46})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\vec{t}_\alpha}{\partial\alpha} & \frac{\partial\vec{t}_\alpha}{\partial\beta} \\ \frac{\partial\vec{t}_\beta}{\partial\alpha} & \frac{\partial\vec{t}_\beta}{\partial\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{g_\beta} \frac{\partial g_\alpha}{\partial\beta} \vec{t}_\beta & +\frac{1}{g_\alpha} \frac{\partial g_\beta}{\partial\alpha} \vec{t}_\beta \\ +\frac{1}{g_\beta} \frac{\partial g_\alpha}{\partial\beta} \vec{t}_\alpha & -\frac{1}{g_\alpha} \frac{\partial g_\beta}{\partial\alpha} \vec{t}_\alpha \end{bmatrix}$$

El elemento diferencial de superficie presenta un área $g_\alpha g_\beta d\alpha d\beta$

Por último la expresión del gradiente y divergencia de un vector de dos componentes $\vec{\xi}(\xi_\alpha, \xi_\beta)$ en coordenadas curvilíneas bidimensionales es:

$$\begin{aligned} \nabla \vec{\xi} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{g_\alpha} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\xi_\beta}{g_\alpha g_\beta} \frac{\partial g_\alpha}{\partial \beta} & \frac{1}{g_\alpha} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial \alpha} - \frac{\xi_\alpha}{g_\alpha g_\beta} \frac{\partial g_\alpha}{\partial \beta} \\ \frac{1}{g_\beta} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \beta} - \frac{\xi_\beta}{g_\alpha g_\beta} \frac{\partial g_\beta}{\partial \alpha} & \frac{1}{g_\beta} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial \beta} + \frac{\xi_\alpha}{g_\alpha g_\beta} \frac{\partial g_\beta}{\partial \alpha} \end{bmatrix} \\ \nabla \cdot \vec{\xi} &= \frac{1}{g_\alpha g_\beta} \left[\frac{\partial (g_\beta \xi_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (g_\alpha \xi_\beta)}{\partial \beta} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Desplazamientos y deformaciones de flexión y torsión

Sin tener en cuenta los desplazamientos en el plano medio, el desplazamiento de un punto situado a una distancia z del plano medio está dado por

$$\xi_\alpha = -\frac{z}{g_\alpha} \frac{\partial Z}{\partial \alpha} \quad \xi_\beta = -\frac{z}{g_\beta} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \quad (\text{A.48})$$

Teniendo en cuenta la expresión del gradiente de un vector ecuación (A.47) las componentes del tensor de deformación son:

$$\chi_{\alpha\alpha} = -\left\{ \frac{1}{g_\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{g_\alpha} \frac{\partial Z}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{g_\beta^2} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \frac{\partial g_\alpha}{\partial \beta} \right) \right\}$$

$$\chi_{\beta\beta} = - \left\{ \frac{1}{g_{\beta}} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{g_{\beta}} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{g_{\alpha}^2} \frac{\partial Z}{\partial \alpha} \frac{\partial g_{\beta}}{\partial \alpha} \right) \right\} \quad (\text{A.49})$$

$$\chi_{\alpha\beta} = - \frac{1}{2} \left\{ \frac{g_{\alpha}}{g_{\beta}} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{g_{\alpha}^2} \frac{\partial Z}{\partial \alpha} \right) \right) + \frac{g_{\beta}}{g_{\alpha}} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{g_{\beta}^2} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) \right) \right\}$$

Ecuación del movimiento

Análogamente al caso de coordenadas cartesianas, aplicando el principio de Hamilton, se obtiene la ecuación del movimiento transversal de la placa.

La variación de densidad de energía de deformación por unidad de volumen se expresa:

$$\delta e_e = - (M_{\alpha\alpha} \delta \chi_{\alpha\alpha} + M_{\alpha\beta} \delta \chi_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha} \delta \chi_{\beta\alpha} + M_{\beta\beta} \delta \chi_{\beta\beta}) \quad (\text{A.50})$$

Tras varias manipulaciones se deduce la ecuación para la deformación de la placa:

$$\begin{aligned} \rho_p h \ddot{Z} - \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{g_{\alpha}} \frac{\partial (g_{\beta} M_{\alpha\alpha})}{\partial \alpha} + \frac{1}{g_{\alpha}^2} \frac{\partial (g_{\alpha}^2 M_{\alpha\beta})}{\partial \beta} - \frac{M_{\beta\beta}}{g_{\alpha}} \frac{\partial g_{\beta}}{\partial \alpha} \right) \right) \right\} - \\ - \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{g_{\beta}} \frac{\partial (g_{\alpha} M_{\beta\beta})}{\partial \beta} + \frac{1}{g_{\beta}^2} \frac{\partial (g_{\beta}^2 M_{\beta\alpha})}{\partial \alpha} - \frac{M_{\alpha\alpha}}{g_{\beta}} \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial \beta} \right) \right) \right\} = \\ = f_z^e(\alpha, \beta, t) + \frac{1}{g_{\alpha}} \frac{\partial M_{\alpha}^e}{\partial \alpha} + \frac{1}{g_{\beta}} \frac{\partial M_{\beta}^e}{\partial \beta} \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Siendo las expresiones para los momentos:

$$\begin{Bmatrix} M_{\alpha\alpha} \\ M_{\beta\beta} \\ M_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E z^2}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{\alpha\alpha} \\ \chi_{\beta\beta} \\ 2\chi_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{A.52})$$

Que resulta:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\alpha} &= D(\chi_{\alpha\alpha} + \nu \chi_{\beta\beta}) \\ M_{\beta\beta} &= D(\chi_{\beta\beta} + \nu \chi_{\alpha\alpha}) \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

$$M_{\alpha\beta} = D(1-\nu)\chi_{\alpha\beta}$$

Donde D , coeficiente de rigidez a flexión de la placa, tiene por expresión:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{A.54})$$

Las fuerzas cortantes transversales al plano medio se definen:

$$\begin{aligned} Q_{\alpha z} &= \frac{1}{g_\alpha g_\beta} \left(\frac{\partial(g_\beta M_{\alpha\alpha})}{\partial\alpha} + \frac{1}{g_\alpha} \frac{\partial(g_\alpha^2 M_{\alpha\beta})}{\partial\beta} - \frac{M_{\beta\beta}}{g_\alpha} \frac{\partial g_\beta}{\partial\alpha} \right) \\ Q_{\beta z} &= \frac{1}{g_\alpha g_\beta} \left(\frac{\partial(g_\alpha M_{\beta\beta})}{\partial\beta} + \frac{1}{g_\beta} \frac{\partial(g_\beta^2 M_{\beta\alpha})}{\partial\alpha} - \frac{M_{\alpha\alpha}}{g_\beta} \frac{\partial g_\alpha}{\partial\beta} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

Con lo que la ecuación de deformación de la placa suponiendo que la única carga exterior es debida al salto de presión sobre ésta resulta:

$$\rho_p h \ddot{Z} - \frac{1}{g_\alpha g_\beta} \left\{ \frac{\partial(g_\alpha Q_{\alpha z})}{\partial\alpha} + \frac{\partial(g_\beta Q_{\beta z})}{\partial\beta} \right\} = \Delta p(\alpha, \beta, t) \quad (\text{A.56})$$

Y teniendo en cuenta las expresiones de los momentos y fuerzas cortantes se obtiene finalmente la ecuación para la deformación de la placa

Siendo $Z(\alpha, \beta, t) = w(\alpha, \beta, t)$ la deformación transversal de la placa

Y siendo $\Delta p(\alpha, \beta, t)$ el salto de presión del fluido sobre la placa

Por tanto en forma compacta resulta la ecuación de vibración de la placa en el fluido, ecuación (A.38):

$$\nabla^4 w + \frac{\rho_p h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \Delta p$$

Siendo ∇^4 el operador bilaplaciana $\nabla^4 = \Delta\Delta$ que resulta de aplicar dos veces el operador laplaciana.

La expresión del operador laplaciana en coordenadas curvilíneas es:

$$\Delta w = \frac{1}{g_\alpha g_\beta} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{g_\beta}{g_\alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{g_\alpha}{g_\beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \right] \quad (\text{A.57})$$

Condiciones de contorno

Se va a centrar el estudio de las condiciones de contorno en tres tipos:

Placa empotrada, placa simplemente apoyada y placa libre

Las condiciones de contorno $[\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \text{ ctes}]$ para estos tres casos van

a ser: deformación Z nula, pendiente de la deformación $\frac{\partial Z}{\partial \alpha}, \frac{\partial Z}{\partial \beta}$ nula,

momento $M_{\alpha\alpha}, M_{\beta\beta}$ nulo, y por último fuerza cortante efectiva de Kirchhoff

$V_{\alpha z}, V_{\beta z}$ nula

La fuerzas cortantes efectivas de Kirchhoff se deducen de los términos de las integrales simples de contorno de la expresión de la variación de energía elástica y resultan ser:

$$\begin{aligned} V_{\alpha z} &= Q_{\alpha z} + \frac{1}{g_\beta} \frac{\partial M_{\beta\alpha}}{\partial \beta} \\ V_{\beta z} &= Q_{\beta z} + \frac{1}{g_\alpha} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

- Placa empotrada

Las condiciones de contorno son:

$$\begin{aligned} Z(\alpha, \beta = \beta_1, \beta = \beta_2) &= 0 & \frac{\partial Z}{\partial \beta}(\alpha, \beta = \beta_1, \beta = \beta_2) &= 0 \\ Z(\alpha = \alpha_1, \alpha = \alpha_2, \beta) &= 0 & \frac{\partial Z}{\partial \alpha}(\alpha = \alpha_1, \alpha = \alpha_2, \beta) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

- Placa simplemente apoyada

Las condiciones de contorno son:

$$\begin{aligned}
Z(\alpha, \beta = \beta_1, \beta = \beta_2) &= 0 & M_{\beta\beta}(\alpha, \beta = \beta_1, \beta = \beta_2) &= 0 \\
Z(\alpha = \alpha_1, \alpha = \alpha_2, \beta) &= 0 & M_{\alpha\alpha}(\alpha = \alpha_1, \alpha = \alpha_2, \beta) &= 0
\end{aligned} \tag{A.60}$$

- **Placa libre**

Las condiciones de contorno son:

$$\begin{aligned}
V_{\beta z}(\alpha, \beta = \beta_1, \beta = \beta_2) &= 0 & M_{\beta\beta}(\alpha, \beta = \beta_1, \beta = \beta_2) &= 0 \\
V_{\alpha z}(\alpha = \alpha_1, \alpha = \alpha_2, \beta) &= 0 & M_{\alpha\alpha}(\alpha = \alpha_1, \alpha = \alpha_2, \beta) &= 0
\end{aligned} \tag{A.61}$$

A.10 Aplicación al caso de coordenadas cilíndricas

Los parámetros de Lamé en este caso son:

$$g_\alpha = g_r = 1 \quad g_\beta = g_\theta = r$$

Las componentes del tensor de deformación son:

$$\begin{aligned}
\chi_{rr} &= -\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} \\
\chi_{\theta\theta} &= -\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial r} \right\} \\
\chi_{r\theta} &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial Z}{\partial r} \right) + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial Z}{\partial \theta} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{A.62}$$

Los momentos resultan:

$$\begin{aligned}
M_{rr} &= D(\chi_{rr} + \nu \chi_{\theta\theta}) \\
M_{\theta\theta} &= D(\chi_{\theta\theta} + \nu \chi_{rr}) \\
M_{r\theta} &= D(1 - \nu) \chi_{r\theta}
\end{aligned} \tag{A.63}$$

Las fuerzas cortantes se expresan:

$$\begin{aligned}
Q_{rz} &= \frac{\partial M_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{M_{rr} - M_{\theta\theta}}{r} \\
Q_{\theta z} &= \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2M_{r\theta}}{r}
\end{aligned}
\tag{A.64}$$

Las fuerzas cortantes efectivas de Kirchhoff se deducen de los términos de las integrales simples de contorno de la expresión de la variación de energía elástica y resultan ser:

$$\begin{aligned}
V_{rz} &= Q_{rz} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta r}}{\partial \theta} \\
V_{\theta z} &= Q_{\theta z} + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r}
\end{aligned}
\tag{A.65}$$

Por tanto en forma compacta resulta la ecuación de vibración de la placa en el fluido:

Siendo $Z(r, \theta, t) = w(r, \theta, t)$ la deformación transversal de la placa, ecuación (A.38)

$$\nabla^4 w + \frac{\rho_p h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \Delta p$$

Siendo el operador laplaciana:

$$\nabla^2 w = \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$$

APENDICE B VIBRACION EN VACIO DE PLACAS CIRCULARES

B.1 Solución general de la ecuación de vibración en vacío de placas circulares

En este capítulo se deducen los modos o funciones de deformación en vacío [12,15,34] para placas circulares con distintas condiciones de contorno partiendo de la ecuación de deformación de la placa, suponiendo movimiento oscilatorio y aplicando separación de variables en las coordenadas cilíndricas r, θ

Se parte de la ecuación de vibración de la placa en vacío:

$$D\nabla^4 w(r, \theta, t) + \rho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{B.1})$$

Separando la variable tiempo, por separación de variables:

$$w(r, \theta, t) = \tilde{w}(r, \theta) \cdot T(t) \quad (\text{B.2})$$

Y suponiendo movimiento armónico, la solución es de la forma:

$$w(r, \theta, t) = \tilde{w}(r, \theta) \cdot e^{-i\omega t} \quad (\text{B.3})$$

Sustituyendo en la ecuación se deduce la ecuación que cumplen los modos de vibración:

$$\nabla^4 \tilde{w}(r, \theta) - \beta^4 \tilde{w}(r, \theta) = 0 \quad (\text{B.4})$$

Donde el parámetro de frecuencia β se define :

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 \rho_p h}{D} \quad (\text{B.5})$$

Siendo D , el coeficiente de rigidez, que ya se ha definido en la ecuación (A.36):

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

La ecuación (B.4) se puede poner de la forma:

$$(\nabla^2 + \beta^2)(\nabla^2 - \beta^2)\tilde{w} = 0 \quad (\text{B.6})$$

Y llamando los operadores L_1 y L_2

$$\begin{aligned} L_1 &= (\nabla^2 + \beta^2) \\ L_2 &= (\nabla^2 - \beta^2) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Por otra parte, llamando:

$$L_1\tilde{w} = \tilde{w}_1 \quad L_2\tilde{w} = \tilde{w}_2 \quad (\text{B.8})$$

De la ecuación (B.6) se debe cumplir:

$$\begin{aligned} L_2\tilde{w}_1 &= 0 \\ L_1\tilde{w}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Se supone que la solución es: $\tilde{w}(r, \theta) = \tilde{w}_1(r, \theta) + \tilde{w}_2(r, \theta)$ y se comprueba si efectivamente es así:

$$\begin{aligned} L_1(\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2) &= L_1\tilde{w}_1 + L_1\tilde{w}_2 = L_1\tilde{w}_1 = \tilde{w}_1 \\ L_2(\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2) &= L_2\tilde{w}_1 + L_2\tilde{w}_2 = L_2\tilde{w}_2 = \tilde{w}_2 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Por último, se comprueba que la ecuación se cumple aplicando los operadores L_1

y L_2 indistintamente

$$\begin{aligned} L_1L_2(\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2) &= L_1(L_2\tilde{w}_1 + L_2\tilde{w}_2) = L_1(L_2\tilde{w}_2) = L_1\tilde{w}_2 = 0 \\ L_2L_1(\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2) &= L_2(L_1\tilde{w}_1 + L_1\tilde{w}_2) = L_2(L_1\tilde{w}_1) = L_2\tilde{w}_1 = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Con lo cual la solución para el modo de deformación es $\tilde{w} = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2$ y se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - \beta^2)\tilde{w}_1 &= 0 \\ (\nabla^2 + \beta^2)\tilde{w}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Aplicando separación de variables de la forma:

$$\tilde{w}_1(r, \theta) = W_1(r) \cos(m\theta) \quad \tilde{w}_2(r, \theta) = W_2(r) \cos(m\theta) \quad (\text{B.13})$$

Las ecuaciones anteriores (B.12) para la solución radial, teniendo en cuenta el operador laplaciana en coordenadas polares y la separación de variables (B.13), quedan:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW_1}{dr} - \left(\beta^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) W_1 &= 0 \\ \frac{d^2 W_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW_2}{dr} + \left(\beta^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) W_2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Cuya solución son funciones de Bessel de la forma:

$$\begin{aligned} W_2(r) &= A \cdot J_m(\beta r) + C \cdot Y_m(\beta r) \\ W_1(r) &= B \cdot I_m(\beta r) + D \cdot K_m(\beta r) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Siendo J_m e I_m funciones de Bessel de 1ª especie y función de Bessel modificada de 1ª especie respectivamente, y A y B constantes arbitrarias.

Y siendo Y_m y K_m funciones de Bessel de 2ª especie y función modificada de Bessel de 2ª especie y C y D constantes que se impone que valgan cero $C = D = 0$ ya que estas funciones se hacen infinito en $r = 0$

Por tanto la solución general $\tilde{w}(r, \theta)$ en las variables teniendo en cuenta la separación de variables y que por las condiciones de contorno de la placa como se verá a continuación aparecen infinitas raíces del parámetro β :

$$\begin{aligned} \tilde{w}(r, \theta) &= \sum_{m,n} W_m^n(r) \cos(m\theta) = \\ &= \sum_{m,n} \left[A_m^n J_m(\beta_m^n r) + B_m^n I_m(\beta_m^n r) \right] \cos(m\theta) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

La ecuación (B.13) se puede poner de la forma:

$$\tilde{w}(r, \theta) = \sum_{m,n} A_m^n \left[J_m(\beta_m^n r) - \lambda_m^n I_m(\beta_m^n r) \right] \cos(m\theta) \quad (\text{B.17})$$

$$\text{Donde se ha definido el parámetro } \lambda_m^n \text{ que cumple } B_m^n = -\lambda_m^n A_m^n \quad (\text{B.18})$$

Se van a estudiar tres casos correspondiendo a distintas condiciones de contorno:

B.1.1 Placa empotrada en su periferia:

Las condiciones de contorno son deformación y su pendiente nulas:

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= 0 \\ \text{En } r = a \quad \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Con lo que se tiene de la primera condición:

$$B_m^n = -\frac{J_m(\beta_m^n a)}{I_m(\beta_m^n a)} A_m^n \quad \text{o bien} \quad \lambda_m^n = \frac{J_m(\beta_m^n a)}{I_m(\beta_m^n a)} \quad (\text{B.20})$$

Y de la segunda, utilizando la primera:

$$J_m'(\beta_m^n a) - \lambda_m^n I_m'(\beta_m^n a) = 0 \quad (\text{B.21})$$

Donde:

$$J_m'(x) = \frac{dJ_m(x)}{dx}$$

Con las propiedades de las derivadas de las funciones de Bessel [12] resulta:

$$J_{m-1}(\beta_m^n a) - J_{m+1}(\beta_m^n a) - \lambda_m^n (I_{m-1}(\beta_m^n a) + I_{m+1}(\beta_m^n a)) = 0 \quad (\text{B.22})$$

Que es la ecuación característica para determinar las raíces $\beta_m^n a$

Se obtienen estas primeras raíces para valores de m y n :

Tabla B.1 Raíces $\beta_m^n a$ de la placa empotrada en su periferia

$\beta_m^n a$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$m = 0$	3.1962	6.3064	9.4395	12.5771
$m = 1$	4.6109	7.7993	10.9581	14.1086
$m = 2$	5.9057	9.1969	12.4022	15.5795

Las autofunciones son:

$$W_m^n(r) = \left[J_m(\beta_m^n r) - \frac{J_m(\beta_m^n a)}{I_m(\beta_m^n a)} I_m(\beta_m^n r) \right] \quad (\text{B.23})$$

B.1.2 Placa simplemente apoyada:

Las condiciones de contorno son deformación y momento nulos:

$$\begin{aligned} \text{En } r = a \quad \tilde{w}(a, \theta) &= 0 \\ M_{rr}(a, \theta) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Donde el momento M_{rr} tiene la siguiente expresión:

$$M_{rr} = -D \left[\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad (\text{B.25})$$

De $\tilde{w}(a, \theta) = 0$ se obtienen las constantes de la ecuación (B.16):

$$B_m^n = -A_m^n \frac{J_m(\beta_m^n a)}{I_m(\beta_m^n a)} \quad \text{siendo} \quad \lambda_m^n = \frac{J_m(\beta_m^n a)}{I_m(\beta_m^n a)}$$

De la expresión de momento nulo $M_{rr}(a, \theta) = 0$ se obtiene:

$$\begin{aligned} & J_m''(\beta_m^n a) - \frac{J_m(\beta_m^n a)}{I_m(\beta_m^n a)} I_m''(\beta_m^n a) + \\ & + \frac{\nu}{a} \left(J_m'(\beta_m^n a) - \frac{J_m(\beta_m^n a)}{I_m(\beta_m^n a)} I_m'(\beta_m^n a) \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Teniendo en cuenta las propiedades de las derivadas de las funciones de Bessel [12] resulta:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{J_{m-2}(\beta_m^n a) - J_m(\beta_m^n a)}{2} - \frac{J_m(\beta_m^n a) - J_{m+2}(\beta_m^n a)}{2} \right) - \\ & - \frac{\lambda_m^n}{2} \left(\frac{I_{m-2}(\beta_m^n a) + I_m(\beta_m^n a)}{2} + \frac{I_m(\beta_m^n a) + I_{m+2}(\beta_m^n a)}{2} \right) + \\ & + \nu \left\{ \frac{1}{\beta_m^n a} \left(\frac{J_{m-1}(\beta_m^n a) - J_{m+1}(\beta_m^n a)}{2} - \lambda_m^n \frac{I_{m-1}(\beta_m^n a) + I_{m+1}(\beta_m^n a)}{2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{m^2}{(\beta_m^n a)^2} (J_m(\beta_m^n a) - \lambda_m^n I_m(\beta_m^n a)) \right\} = 0 \end{aligned}$$

Que es la ecuación característica para determinar las raíces $\beta_m^n a$.

Los modos propios son de la ecuación (B.16):

$$W_m^n(r) = \left[J_m(\beta_m^n r) - \frac{J_m(\beta_m^n a)}{I_m(\beta_m^n a)} I_m(\beta_m^n r) \right]$$

Se obtienen estas primeras raíces para valores de m, n :

Tabla B.2 Raíces $\beta_m^n a$ de la placa apoyada en su periferia

$\beta_m^n a$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$m = 0$	2.22	5.45	8.611	11.7609
$m = 1$	3.73	6.96	10.14	13.2967
$m = 2$	5.06	8.37	11.59	14.7717

B.1.3 Placa libre

Las condiciones de contorno son momento y fuerza cortante efectiva de Kirchhoff nulos:

$$\text{En } r = a \quad \begin{aligned} M_{rr}(a, \theta) &= 0 \\ V_{rz}(a, \theta) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Donde se cumplen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} M_{rr} &= -D \left[\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ V_{rz} &= Q_{rz} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} \\ Q_{rz} &= -D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 \tilde{w}) \\ M_{r\theta} &= -D(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

De la primera condición de contorno se obtiene λ_m^n es decir $B_m^n = -\lambda_m^n A_m^n$ que resulta:

$$B_m^n = -A_m^n \frac{J_m''(\beta_m^n a) + \frac{\nu}{a} J_m'(\beta_m^n a) - \frac{m^2}{a^2} J_m(\beta_m^n a)}{I_m''(\beta_m^n a) + \frac{\nu}{a} I_m'(\beta_m^n a) - \frac{m^2}{a^2} I_m(\beta_m^n a)} \quad (\text{B.29})$$

Teniendo en cuenta las propiedades de las derivadas de las funciones de Bessel [12] resulta:

$$\begin{aligned} \lambda_m^n &= \frac{\frac{\beta_m^{n2}}{4} (J_{m-2}(\beta_m^n a) - 2J_m(\beta_m^n a) + J_{m+2}(\beta_m^n a)) + \frac{\nu \beta_m^n}{2a} (J_{m-1}(\beta_m^n a) - J_{m+1}(\beta_m^n a)) - \frac{m^2}{a^2} J_m(\beta_m^n a)}{\frac{\beta_m^{n2}}{4} (I_{m-2}(\beta_m^n a) + 2I_m(\beta_m^n a) + I_{m+2}(\beta_m^n a)) + \frac{\nu \beta_m^n}{2a} (I_{m-1}(\beta_m^n a) + I_{m+1}(\beta_m^n a)) - \frac{m^2}{a^2} I_m(\beta_m^n a)} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Y por último, de la segunda condición de contorno se obtiene la ecuación característica para determinar las raíces $\beta_m^n a$

$$W_m^{n'''}(\beta_m^n a) + \frac{W_m^{n''}(\beta_m^n a)}{a} - \frac{1}{a^2}(1+m^2(2-\nu))W_m^{n'}(\beta_m^n a) + \frac{m^2}{a^3}(3-\nu)W_m^n(\beta_m^n a) = 0 \quad (\text{B.31})$$

Siendo las expresiones de las derivadas [12]:

$$W_m^n(\beta_m^n a) = A_m^n [J_m(\beta_m^n a) - \lambda_m^n I_m(\beta_m^n a)]$$

$$W_m^{n'}(\beta_m^n a) = \frac{A_m^n}{2} [(J_{m-1}(\beta_m^n a) - J_{m+1}(\beta_m^n a)) - \lambda_m^n (I_{m-1}(\beta_m^n a) + I_{m+1}(\beta_m^n a))]$$

$$W_m^{n''}(\beta_m^n a) = \frac{A_m^n}{4} [(J_{m-2}(\beta_m^n a) - 2J_m(\beta_m^n a) + J_{m+2}(\beta_m^n a)) - \lambda_m^n (I_{m-2}(\beta_m^n a) + I_m(\beta_m^n a) + I_{m+2}(\beta_m^n a))]$$

$$W_m^{n'''}(\beta_m^n a) = \frac{A_m^n}{8} [(J_{m-3}(\beta_m^n a) - 3J_{m-1}(\beta_m^n a) + 3J_{m+1}(\beta_m^n a) - 3J_{m+3}(\beta_m^n a)) - \lambda_m^n (I_{m-3}(\beta_m^n a) + 3I_{m-1}(\beta_m^n a) + 3I_{m+1}(\beta_m^n a) + I_{m+3}(\beta_m^n a))]$$

Se obtienen estas primeras raíces para valores de $m \leq n$:

Tabla B.3 Raíces $\beta_m^n a$ de la placa libre en su periferia

$\beta_m^n a$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$m = 0$	----	3.00	6.2	9.37
$m = 1$	0.918	4.488	7.721	10.901
$m = 2$	1.071	----	5.852	9.150

En la Fig. B.1 se representa como ejemplo un modo de vibración para una placa empotrada con dos círculos nodales y cero diámetros nodales

Figura B.1 Modo de vibración para placa empotrada $m=0$ $n=2$