

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES



**MODELOS PARA EL ANÁLISIS DINÁMICO Y LA
PREDICCIÓN A CORTO PLAZO DE LOS PRECIOS DE
LA ELECTRICIDAD EN MERCADOS
LIBERALIZADOS**

Tesis Doctoral

Damián López Asensio
Ingeniero Industrial

2015

DPTO. MATEMÁTICA APLICADA A LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES

**MODELOS PARA EL ANÁLISIS DINÁMICO Y LA
PREDICCIÓN A CORTO PLAZO DE LOS PRECIOS DE
LA ELECTRICIDAD EN MERCADOS
LIBERALIZADOS**

Tesis Doctoral

Autor: Damián López Asensio
Ingeniero Industrial

Directores: Jaime Carpio Huertas
Dr. Ingeniero Industrial por la Universidad Politécnica de Madrid

Jesús Juan Ruiz
Dr. Ingeniero Industrial por la Universidad Politécnica de Madrid

2015

Tribunal nombrado por el Excmo. y Magfco. Sr. Rector de la Universidad Politécnica de Madrid, el día ____ de _____ de 2015.

Presidente: D. Daniel Peña Sánchez de Rivera

Vocal: D^a. María Jesús Sánchez Naranjo

Vocal: D. Francisco Javier Prieto Fernández

Vocal: D. Josep Ginebra Molins

Secretario: D. Eduardo Caro Huertas

Suplente: D^a. Eva Senra Díaz

Suplente: D^a. María del Pilar Poncela Blanco

Realizado el acto de defensa y lectura de la tesis el día ____ de _____ de 2015 en la E.T.S. de Ingenieros Industriales.

CALIFICACIÓN:

EL PRESIDENTE

LOS VOCALES

EL SECRETARIO

The world ain't all sunshine and rainbows. It's a very mean and nasty place, and I don't care how tough you are, it will beat you to your knees and keep you there permanently if you let it. You, me, or nobody is gonna hit as hard as life. But it ain't about how hard you hit. It's about how hard you can get hit and keep moving forward; how much you can take and keep moving forward. That's how winning is done! Now, if you know what you're worth, then go out and get what you're worth. But you gotta be willing to take the hits.

Rocky Balboa

*A Elsa y Darío
Porque un día comprenderán*

Índice general

AGRADECIMIENTOS	VII
RESUMEN	IX
ABSTRACT	XI
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Contexto	1
1.2. Objetivos	2
1.3. Estructura del texto	2
2. MERCADO ELÉCTRICO Y PRECIOS DE LA ELECTRICIDAD	5
2.1. Un poco de historia	5
2.1.1. Nacimiento del sector, a finales del siglo XIX	5
2.1.2. Crecimiento: del lujo al servicio público	5
2.1.3. Madurez y crítica. Razones para la liberalización	6
2.1.4. Hacia la liberalización	6
2.2. Estructura del sector eléctrico	9
2.2.1. Generadores	9
2.2.2. Transportistas	11
2.2.3. Distribuidores	11
2.2.4. Comercializadores	11
2.2.5. Consumidores	12
2.3. <i>Pool</i> eléctrico y bolsa eléctrica	12
2.3.1. Teoría económica de subastas	13
2.3.2. Mecanismos de casación en mercados eléctricos	14
2.3.3. Precio nodal y precio zonal	15
2.3.4. Estructura del mercado	16
2.3.5. Productos negociados	17
2.4. <i>Nord Pool, Omel y Pownext</i> : hacia un mercado único europeo	18
2.4.1. Noruega, Suecia, Finlandia y Dinamarca	19
2.4.2. España y el Mercado Ibérico	21
2.4.3. Francia	23
2.4.4. Conclusión	24
3. ALISADO EXPONENCIAL MULTIVARIANTE	27
3.1. Técnicas estadísticas para la predicción de precios de electricidad	27
3.2. Alisado exponencial multivariante	29
3.3. Análisis factorial dinámico	31

3.4.	Representación en el espacio de los estados del modelo de alisado exponencial	32
3.5.	Máxima verosimilitud con algoritmo EM	36
3.6.	Conclusiones	39
4.	FACTORES DINÁMICOS	41
4.1.	Factores dinámicos	41
4.2.	Modelo de factores comunes	44
4.3.	Caso especial	45
4.4.	Aplicación al análisis de la dinámica de precios de la electricidad	46
5.	ORDEN DEL MODELO Y EXTENSIONES	51
5.1.	Modelo con días de la semana	51
5.2.	Criterios alternativos para la selección de orden	54
5.3.	Conclusión	59
6.	PREDICCIÓN	61
6.1.	Precisión de las predicciones con el modelo de alisado exponencial (varios órdenes)	61
6.2.	Comparación de los errores de predicción de los modelos de alisado exponencial de distinto orden	62
6.3.	Comparación con otras metodologías	63
6.3.1.	Modelos ARIMA estacionales para series horarias	65
6.3.2.	24 modelos independientes, uno para cada hora	66
6.3.3.	Comparación	66
6.4.	Conclusiones	68
7.	CONCLUSIONES	71
	REFERENCIAS	73
	APÉNDICES	80
A.	MODELOS EN EL ESPACIO DE LOS ESTADOS	83
A.1.	Series temporales multivariantes y modelo en espacio de los estados	83
A.2.	Proceso VAR de orden finito	85
A.3.	Proceso VARMA(p, q)	86
A.4.	El Modelo VARX	87
A.5.	Modelos estructurales de series temporales	87
A.6.	Modelos analíticos factoriales	89
A.7.	Conclusión	90
B.	MÁXIMA VEROSIMILITUD CON ALGORITMO EM	91
B.1.	Paso E: computación de $E[l_{\mathbf{z}_N}(\theta) \mathbf{Y}_N, \hat{\theta}_j]$	92
B.2.	Paso M: maximización de $E[l_{\mathbf{z}_N}(\theta) \mathbf{Y}_N, \hat{\theta}_j]$	92
C.	FILTRADO Y ALISADO DE KALMAN	95

D. MATERIAL COMPLEMENTARIO	97
D.1. Datos	97
D.2. Listado de Funciones <i>MATLAB</i>	97
D.2.1. Función dfa	97
D.2.2. Función dfa_nuevo	98
D.2.3. Función em_algorithm	100
D.2.4. Función kalman_filter2s	102
D.2.5. Función kalman_smoother2s	103
D.2.6. Función run_models	104
D.3. Instrucciones de uso de los programas en <i>MATLAB</i>	105
D.4. Listado de los programas en R	107
D.4.1. Predicción con el Modelo A	107
D.4.2. Predicción con el Modelo B	108

AGRADECIMIENTOS

Este apartado no podría comenzar de otra forma sino por Jesús y Jaime, Jaime y Jesús, primero maestros y ya amigos, quienes inasequibles al desaliento durante esta larga travesía en la que se ha convertido mi tesis habéis logrado llevar a buen puerto esta nave. A pesar de la distancia, siempre estuvisteis no sólo cuando os necesité, sino más allá de lo que hubiese cabido esperar. Es un tópico repetido, pero nunca fue más cierto que esta tesis no habría sido posible sin vosotros. Un millón de gracias de todo corazón.

También quisiera agradecer a mis padres, Damián y Sara, todos los sacrificios que habéis hecho siempre para hacer posible que vuestros hijos alcanzaran aquello que nunca os habríais atrevido a soñar para vosotros mismos. Gracias Papá, por enseñarme a montar en bicicleta, a ser honesto y a luchar ante la adversidad y por servirme de ejemplo para mis pequeños. Gracias Mamá, por tu amor incondicional, por enseñarme a ser libre a cualquier precio y por animarme a llevar a cabo todo aquello que me propuse. Gracias Sandra, por devolverme siempre mucho más de lo que recibes de mí, por tu paciencia conmigo y por hacer magia con una lira. Gracias Elsa, por permitirme que te enseñara a dormirte “solita”, por iluminar mi alma con tu sonrisa y por dejarme finalmente sin respuestas ante tu curiosidad infantil. No la pierdas nunca porque siempre hay y habrá una respuesta esperándote. Gracias Darío, por tu inocente mirada azul y por querer imitarme a mí casi tanto como a *Spiderman* o a Cristiano Ronaldo. El mundo necesita muchos superhéroes como tú. Gracias Ariadna, por nuestro primer abrazo, por hacerme vivir cada momento como el mejor de mi vida y por querer caminar junto a mí para siempre. . .

Durante todos estos años he sido alumno de muchos profesores y a todos ellos sin excepción les debo el haber aprendido algo. Por supuesto, gracias por su dedicación en los cursos de doctorado a todos mis profesores del Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad Politécnica de Madrid. En especial, gracias Juan Antonio por tus ánimos durante las comidas a lo largo de este tiempo.

En definitiva, mi gratitud eterna a todos aquellos que a lo largo de mi vida me habéis ayudado de un modo u otro a llegar hasta aquí. Gracias.

RESUMEN

En esta tesis se va a describir y aplicar de forma novedosa la técnica del alisado exponencial multivariante a la predicción a corto plazo, a un día vista, de los precios horarios de la electricidad, un problema que se está estudiando intensivamente en la literatura estadística y económica reciente.

Se van a demostrar ciertas propiedades interesantes del alisado exponencial multivariante que permiten reducir el número de parámetros para caracterizar la serie temporal y que al mismo tiempo permiten realizar un análisis dinámico factorial de la serie de precios horarios de la electricidad.

En particular, este proceso multivariante de elevada dimensión se estimará descomponiéndolo en un número reducido de procesos univariantes independientes de alisado exponencial caracterizado cada uno por un solo parámetro de suavizado que variará entre cero (proceso de ruido blanco) y uno (paseo aleatorio). Para ello, se utilizará la formulación en el espacio de los estados para la estimación del modelo, ya que ello permite conectar esa secuencia de modelos univariantes más eficientes con el modelo multivariante. De manera novedosa, las relaciones entre los dos modelos se obtienen a partir de un simple tratamiento algebraico sin requerir la aplicación del filtro de Kalman. De este modo, se podrán analizar y poner al descubierto las razones últimas de la dinámica de precios de la electricidad.

Por otra parte, la vertiente práctica de esta metodología se pondrá de manifiesto con su aplicación práctica a ciertos mercados eléctricos *spot*, tales como *Omel*, *Powernext* y *Nord Pool*. En los citados mercados se caracterizará la evolución de los precios horarios y se establecerán sus predicciones comparándolas con las de otras técnicas de predicción.

ABSTRACT

This thesis describes and applies the multivariate exponential smoothing technique to the day-ahead forecast of the hourly prices of electricity in a whole new way. This problem is being studied intensively in recent statistics and economics literature.

It will start by demonstrating some interesting properties of the multivariate exponential smoothing that reduce drastically the number of parameters to characterize the time series and that at the same time allow a dynamic factor analysis of the hourly prices of electricity series.

In particular this very complex multivariate process of dimension 24 will be estimated by decomposing a very reduced number of univariate independent of exponentially smoothing processes each characterized by a single smoothing parameter that varies between zero (white noise process) and one (random walk). To this end, the formulation is used in the state space model for the estimation, since this connects the sequence of efficient univariate models to the multivariate model. Through a novel way, relations between the two models are obtained from a simple algebraic treatment without applying the Kalman filter. Thus, we will analyze and expose the ultimate reasons for the dynamics of the electricity price.

Moreover, the practical aspect of this methodology will be shown by applying this new technique to certain electricity spot markets such as *Omel*, *Powernext* and *Nord Pool*. In those markets the behavior of prices will be characterized, their predictions will be formulated and the results will be compared with those of other forecasting techniques.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Contexto

Desde su irrupción en nuestra sociedad, la electricidad ha tenido un gran impacto. Hoy en día es imposible imaginar nuestras vidas sin electricidad. Con el fin de abastecer de energía a los hogares y a las fábricas, se crearon empresas eléctricas. Inicialmente, se dedicaban a suministrar electricidad a todos los consumidores de una determinada zona geográfica, ya que se consideraba que era imprescindible una regulación centralizada para garantizar la seguridad del suministro y una producción eficiente. La eficiencia se lograba a través de economías de escala. El sector eléctrico se caracterizó por una fuerte integración vertical de su estructura de mercado con muy poca competencia. Sin embargo, durante los últimos treinta años han acaecido grandes cambios en la estructura del mercado eléctrico en todo el mundo.

La industria eléctrica ha experimentado una transformación significativa en todo el mundo en las últimas décadas. El precio de la electricidad ha pasado de ser fijado por el Consejo de Ministros cada año a ser enteramente determinado por el mercado cada día. En la mayor parte de los países el precio de la electricidad viene dado a través de una subasta diaria para cada una de las 24 horas del día siguiente. Este mecanismo de fijación de precios introduce una gran incertidumbre, lo que significa un riesgo económico para los agentes participantes en el mercado: generadores, comercializadores, bancos y consumidores. Para todos ellos, aunque de maneras muy distintas, es muy útil tener una idea tan precisa como sea posible de los precios futuros.

La situación inicial de monopolio ha dado paso a unos mercados liberalizados competitivos, donde los consumidores son libres, en principio, para elegir suministrador. Con el fin de facilitar las transacciones de este tipo, se crearon mercados o *pools* donde pueden negociarse desde contratos a tiempo real y *spot* hasta contratos derivados (futuros, opciones, etc...). Sin embargo, un mercado eléctrico organizado no es una necesidad imperativa para que funcione un mercado liberalizado. De hecho, en la mayoría de países la mayor parte de la contratación, especialmente a medio y largo plazo, se efectúa de manera bilateral en el denominado mercado OTC (*over-the-counter*). A pesar de ello, se acepta que un mercado eléctrico organizado contribuye a fomentar la competencia y aumentar la actividad de negociación como se puede ver, por ejemplo, en el mercado escandinavo *Nord Pool*. Además, el mercado eléctrico organizado es una fuente de información de buena calidad, independiente y actualizada del mercado.

En un mercado eléctrico se puede comprar y vender electricidad a precios de mercado como cualquier otra *commodity*. En consecuencia, el riesgo asumido por los productores y por

los consumidores ha crecido notablemente. Moverse correctamente hoy en estos mercados requiere de una buena dosis de análisis estadístico y de estimaciones fundamentadas, las cuales requieren a su vez del desarrollo de técnicas estadísticas específicas y del manejo de grandes cantidades de datos para el modelado, la predicción y la fijación de precios.

Cuando el sector eléctrico estaba regulado, las empresas monopolísticas efectuaban predicciones a corto plazo de la demanda para asegurar la fiabilidad del suministro y predicciones a medio y largo plazo para la planificación e inversión en nueva capacidad productiva. En los mercados liberalizados estas predicciones ya no tienen objeto. Los enormes costes de producir o de consumir por encima o por debajo de lo contratado y por tanto, de tener que comprar o vender el exceso o la falta de energía en un mercado de ajustes pueden llegar a comprometer la viabilidad económica del productor o del consumidor. Por tanto, minimizar el riesgo nunca había sido tan importante como en la actualidad y la predicción de la demanda o de la producción se ha convertido en un tema central para las compañías eléctricas, los consumidores y los operadores del sistema.

Por otra parte, la volatilidad extrema de los precios de la electricidad, mucho mayor que la de otras *commodities* o de instrumentos financieros, ha obligado a los productores y a los consumidores a cubrirse no sólo ante el riesgo de volumen sino también frente a las oscilaciones de precio. Las predicciones de precio se han convertido en la piedra angular de la gestión empresarial de las empresas eléctricas y de su planificación estratégica.

1.2. Objetivos

El objetivo primordial de esta tesis es el de establecer un método novedoso de predicción a corto plazo de los precios de la electricidad basado en el modelo de alisado exponencial.

La mayor dificultad que habrá que salvar es la estimación del elevado número de parámetros que configuran el modelo. Tan elevado que aparece de forma natural la necesidad de simplificación del modelo, dado que su complejidad compromete inevitablemente su potencial aplicación práctica.

Por otra parte, se desea describir la dinámica de distintos mercados a partir de la metodología aquí presentada y mediante el desarrollo de algoritmos numéricos en *MATLAB*. En particular, se desea comprobar que el modelo es válido para cualquier mercado, que detecta las diferencias entre ellos y que es útil para efectuar predicciones en todos los casos.

1.3. Estructura del texto

En el Capítulo 2 se expondrá el desarrollo histórico global de los mercados eléctricos desde los inicios del aprovechamiento de la electricidad como vector energético hasta nuestros días, así como su estructura. Se prestará especial atención a los mercados español, francés y escandinavo por ser objeto de la aplicación práctica de los resultados de esta tesis.

El estado del arte de la predicción a corto plazo de los precios de la electricidad se presenta en el Capítulo 3. Además, en este mismo capítulo se presenta el modelo de alisado exponencial y se explicará el papel del modelo en el espacio de los estados en el alisado exponencial. Se detallará el procedimiento iterativo necesario para determinar los parámetros del modelo mediante el algoritmo EM.

1.3 Estructura del texto

En el Capítulo 4, se demostrará a través de la Proposición 2, resultado central de esta tesis, que la estimación del modelo en el espacio de los estados presenta ciertas ventajas y que es posible conectar una secuencia de modelos más eficientes con menos parámetros que arrojen luz sobre algunos aspectos de la dinámica de precios. Como aplicación práctica, se utilizarán los resultados hallados para caracterizar la evolución de los precios en tres mercados eléctricos distintos: *Powernext* (Francia), *Nord Pool* (Dinamarca, Finlandia, Noruega y Suecia) y *Omel* (España). Finalmente, se discutirá el comportamiento del modelo en función de los factores comunes obtenidos.

Se abordará en el Capítulo 5 la selección de orden del modelo y sus potenciales extensiones. En el Capítulo 6 se evaluará la capacidad predictiva del modelo propuesto y se comparará con la precisión de algunos otros modelos univariantes. Por último, se presentarán las conclusiones en el Capítulo 7.

Capítulo 2

MERCADO ELÉCTRICO Y PRECIOS DE LA ELECTRICIDAD

2.1. Un poco de historia

2.1.1. Nacimiento del sector, a finales del siglo XIX

En los primeros tiempos de la industria eléctrica se trataba de un sector fragmentado y disperso, dadas las necesidades del momento. Las centrales eléctricas eran de pequeño tamaño y en muchas ocasiones respondían a las necesidades concretas de un determinado cliente, tanto que frecuentemente productor y consumidor coincidían en la misma figura, los autoprodutores. En muchos países la industria eléctrica no estaba sujeta a regulación y en la mayor parte de los casos se trataba de empresas de carácter local y privado.

2.1.2. Crecimiento: del lujo al servicio público

Con el tiempo y con la introducción de economías de escala en la generación y del concepto de “servicio público”, se consideró al sector eléctrico como un monopolio natural.

Durante la primera mitad del siglo XX, se inició la construcción de grandes centrales hidroeléctricas, se constituyeron numerosas compañías eléctricas públicas o privadas y la electrificación llegó más allá de las grandes ciudades.

Después de la II Guerra Mundial, el tamaño mínimo eficiente de las centrales creció y se completaron las redes de distribución y de transporte de energía eléctrica en los países industrializados. El hecho de que esas antiguas compañías locales de pequeño tamaño dejaran de ser rentables facilitó su concentración en una única compañía como monopolio nacional o en unas pocas compañías con monopolios regionales. En los gobiernos de la época surge la convicción de que el mejor modo de asegurar un servicio público fiable, de calidad y sin comportamientos abusivos es poniéndolo en manos públicas. A esta creencia, ya había llegado Gran Bretaña en 1926 cuando nacionalizó todo el sector eléctrico. Francia decide crear EDF en 1946 a la que seguirían otros hasta llegar a Italia, que crea ENEL en 1962.

Además de las leyes de nacionalización, muchos países europeos introdujeron también disposiciones que impedían explícitamente la entrada de nuevos actores en el sector o que hacían excepciones a las leyes de la competencia. Sin embargo, al otro lado del Atlántico, en EE.UU., el modelo predominante fue el de monopolio privado regulado por una entidad independiente donde en ocasiones también existían un buen número de compañías locales o federales.

2.1.3. Madurez y crítica. Razones para la liberalización

A partir de la década de 1980, se constató que existían múltiples ineficiencias en el modelo de monopolio y se inició un proceso de reestructuración hacia modelos de libre mercado.

Para encontrar las primeras dudas sobre la eficiencia del monopolio en el sector eléctrico, hay que remontarse a la década de 1970. Antes, Averch y Johnson (1962) demostraron que un monopolio privado remunerado según el modelo de coste o de tasa de retorno tiene incentivos para sobreinvertir en sus activos.

La crisis del petróleo de 1973 hizo aumentar el coste de la materia prima principal para la generación de energía eléctrica, lo cual desembocó en importantes proyectos de desarrollo de energía nuclear y de uso del carbón.

El coste de la energía nuclear creció como consecuencia de la necesidad de incrementar su seguridad tras el accidente en la central nuclear norteamericana de *Three Mile Island* en 1979. Mientras, la reducción del coste del gas natural llevó a que se redujeran las economías de escala de forma notable. Todo ello contribuyó a que surgiera la cuestión de si el sector eléctrico debía seguir considerándose como un monopolio natural.

En las décadas de 1980 y de 1990, factores de índole económica, técnica y política desembocaron finalmente en la liberalización de la industria eléctrica en diversos países como señala Sánchez Tembleque (2000).

Desde el punto de vista económico, los mercados energéticos habían aumentado su tamaño gracias a la globalización de los productos energéticos y a la mayor capacidad de interconexión de los sistemas eléctricos y gasistas.

Desde el punto de vista técnico, la irrupción de las centrales de ciclo combinado con rendimientos elevados significó la aparición de una nueva tecnología candidata para la generación de energía eléctrica en base. Hasta ese momento, el rendimiento del ciclo simple de turbina de gas sólo permitía su operación en punta.

Las nuevas tecnologías de la información facilitaron la posibilidad del suministro descentralizado por la reducción de costes que implican en la medición y el control.

Finalmente, desde un punto de vista político, sea cual fuere el ciclo económico, la liberalización se vio favorecida. En los países desarrollados, el hecho de que las ineficiencias del monopolio quedaran a la vista y el ejemplo de la liberalización en otros sectores contribuyeron a la creación de un marco competitivo. En aquellos países en vías de desarrollo o en recesión, se vio la apertura del sector eléctrico como una oportunidad para obtener recursos a través de las privatizaciones o para que se acometieran nuevas inversiones que ni el Estado ni las eléctricas podían afrontar.

2.1.4. Hacia la liberalización

Al comienzo de la década de 1990, comenzaron una serie de cambios en los sectores eléctricos de numerosos países, entre ellos España. Estos cambios en general se basaban en romper la integración vertical de las empresas mediante la separación de actividades (entre actividades reguladas y no reguladas), liberalización de la normativa de las transacciones económicas entre los agentes para las actividades no reguladas y privatización de las empresas públicas, en

2.1 Un poco de historia

su caso. Con pequeñas diferencias entre países, la liberalización del sector eléctrico en todo el mundo tiene en común las mismas razones ideológicas y políticas.

En primer lugar, aparece la fuerte creencia de que el éxito de la liberalización en otros sectores podía trasladarse al sector eléctrico y la necesidad, real o no, de romper la estructura verticalmente integrada del monopolio que se había encargado tradicionalmente de la generación, el transporte y la distribución eléctrica. La introducción de la competencia se justificó por los beneficios esperados al introducir a las fuerzas del mercado en una industria que hasta aquel momento se había visto como un monopolio natural. La quiebra de este concepto de monopolio natural, a su vez, hay que buscarla en los cambios en las tecnologías de generación y en las mejoras en el transporte. Por tanto, los motivos últimos de la liberalización eléctrica son impulsar la mejora de eficiencia, estimular la innovación tecnológica e incentivar las inversiones rentables.

La primera liberalización eléctrica tuvo lugar en Chile. La reforma, que comenzó en 1982, se basaba en la idea de compañías de generación y de distribución separadas donde la energía se pagaba conforme a una fórmula basada en el coste, en un sistema de despacho con precio de coste marginal y en un sistema de transacciones entre productores para atender los contratos con sus clientes. La privatización a gran escala comenzó en 1986 y llevó hacia una desintegración vertical parcial del sector y hacia la formación de un mecanismo de negociación mayorista.

La reforma chilena fue seguida por la reorganización del sector eléctrico británico en 1990. El mercado mayorista sólo incluía a Inglaterra y a Gales hasta 2005 y posteriormente a Escocia también. El mercado escandinavo abrió en 1992, inicialmente en Noruega, después en Suecia, Finlandia y Dinamarca. En Australia, los mercados de Victoria y de Nueva Gales del Sur comenzaron sus operaciones en 1994, y seguidos por la apertura del mercado eléctrico nacional australiano (NEM) en 1998. Nueva Zelanda reformó su sector eléctrico durante el mismo periodo, abriendo el mercado en 1996. En Norteamérica, un buen número de mercados del noreste (Nueva Inglaterra, Nueva York, Pennsylvania-Nueva Jersey-Maryland (PJM)) se liberalizaron a finales de los noventa. California siguió la tendencia en 1998 y Texas y Alberta (Canadá) tres años después. El número de mercados eléctricos liberalizados crece continuamente en todo el mundo, aunque la transformación es más visible en Europa.

Algunos de los pioneros en la reforma del mercado eléctrico operan con éxito desde hace más de diez años. Otros han llevado a cabo cambios sustanciales en su diseño para mejorar su comportamiento. E incluso algunas reformas han fracasado estrepitosamente. El *crack* del mercado eléctrico de California entre 2000 y 2001, la bancarrota de *Enron* que le siguió y los numerosos apagones en Norteamérica y Europa en 2003 se utilizan como argumentos contra la liberalización de los mercados eléctricos. Sin embargo, esos fracasos no cabe atribuirlos exclusivamente a la liberalización del mercado. La crisis de California se debió a la coincidencia de distintos factores, entre los que estuvo un diseño erróneo del mercado. Igualmente, la liberalización del mercado eléctrico allanó el camino hacia la bancarrota de *Enron* y los apagones de 2003, pero no fue la raíz de estos problemas.

No obstante, muchos otros aplauden la liberalización eléctrica por su impacto positivo en la economía. Entre sus beneficios está una clara tendencia a la baja de los precios de la electricidad y un uso más eficiente de los activos del sector eléctrico. A pesar de todo, ambos beneficios son cuestionables. Los precios netos de la electricidad han disminuido en general, pero los nuevos impuestos sobre la electricidad han neutralizado el efecto. En particular, la tendencia

a la baja en los precios no se aprecia, si es que existe, para los pequeños y medianos consumidores industriales y para los consumidores domésticos. Es preciso recordar que los precios pagados por algunos grupos de consumidores no reflejan necesariamente los costes de producir y transportar la electricidad, lo que da lugar al denominado “déficit tarifario”. En los mercados regulados los consumidores industriales frecuentemente subvencionan a los consumidores domésticos.

Las empresas eléctricas verticalmente integradas, que habían operado tradicionalmente en el sector, habían tendido a sobredimensionar su capacidad productiva. La liberalización del mercado en general ha contribuido a reducir esa sobrecapacidad. Esto se ha señalado como una muestra de la mejora de eficiencia en la operación de los servicios de generación, transporte y distribución. Pero dado que se espera que la liberalización traiga beneficios económicos a largo plazo, en el corto plazo ciertos grupos, como los consumidores domésticos previamente subvencionados, puede que no experimenten beneficios inmediatos e incluso puede que experimenten pérdidas.

Otro punto controvertido es la capacidad de los mercados eléctricos liberalizados para proporcionar suficientes incentivos para la inversión en nueva capacidad de generación o de transmisión. En el nuevo marco, las decisiones de inversión ya no están planificadas de forma central sino que se mueven por las fuerzas del mercado competitivo. En consecuencia, se evitan en general las tecnologías intensivas en capital y con tiempos largos de construcción, aunque sus costes marginales sean bajos, como las centrales nucleares. En su lugar, se prefiere invertir en plantas con periodos de construcción cortos, como los ciclos combinados. Pero incluso en ese caso, la esperanza de precios más bajos puede provocar que los inversores privados pospongan sus planes de nueva capacidad de generación o de transmisión. Esto presiona a los reguladores a intervenir. En consecuencia, existe un debate sobre la conveniencia de establecer un pago por “garantía de potencia”, como en buena parte de Latinoamérica y en España, organizar mercados de capacidad como en el noreste de Estados Unidos o tener mercados de “sólo energía” como en Australia y Nueva Zelanda.

La idea básica tras la “garantía de potencia” es otorgar a cada productor un pago diario que es una medida de su contribución a la fiabilidad del sistema eléctrico. La experiencia internacional sugiere, por el contrario, que los pagos por capacidad crean pocos incentivos para mitigar el problema de capacidad y pueden incluso llegar a empeorarlo. Por ejemplo, los productores pueden intentar incrementar los pagos por capacidad al poner como disponibles menos recursos de generación e incrementando, en lugar de disminuir, la probabilidad de apagón.

Los sistemas de pago por capacidad han adoptado generalmente la forma de mercados de capacidad instalada. El principal propósito subyacente de estos mercados ha sido asegurar que se compromete diaria o estacionalmente una capacidad suficiente como para cumplir con la demanda del sistema y con sus requerimientos de reserva. Los distribuidores que venden energía a los consumidores finales deben cumplir con sus obligaciones de capacidad, las cuales son la demanda pico esperada mensual más un margen de reserva. Pueden cumplir con ello mediante transacciones internas o bilaterales o a través del mercado de capacidad en el que los productores venden el derecho a que el operador del sistema les haga producir en caso de necesidad.

En los mercados de “sólo energía” o de “sólo un precio” el precio mayorista de la electricidad compensa tanto los costes variables como los costes fijos. El “precio” que hay que pagar por ello son los saltos o picos de precio, es decir, grandes cambios abruptos y generalmente no

esperados en el precio *spot* que en casos extremos puede suponer la quiebra de las compañías eléctricas que no estén preparadas antes tal riesgo. Los picos de precio deberían entenderse por los inversores como señales de que se necesita nueva capacidad de generación. Sin embargo, si los saltos de precio no son frecuentes y no son demasiado grandes puede que no supongan un incentivo suficiente. En tal caso pueden ser necesarios incentivos regulatorios, pagos por capacidad para atraer inversiones a tiempo y adecuadas. Un problema relacionado es si los consumidores están dispuestos a aceptar los picos de precios. Si no, hay que imponer un tope de precios, que requiere de incentivos regulatorios para la inversión en nueva capacidad.

Por la complejidad intrínseca del sector eléctrico y por la aparición de competencia, fue necesario crear unos entes reguladores independientes con los fines de velar por la competencia y de resolver las disputas que pudieran surgir entre los agentes.

Los agentes del mercado, los generadores, los consumidores cualificados y las comercializadoras, pueden realizar transacciones económicas con total libertad a través de contratos o de un mercado *spot*.

2.2. Estructura del sector eléctrico

Se enumeran a continuación los actores típicos del sector eléctrico.

2.2.1. Generadores

Los generadores o productores son aquellos agentes que producen energía eléctrica en sus centrales y la ofrecen al mercado. En función de la tecnología de producción empleada se pueden clasificar en:

- **Generación nuclear:** Las centrales nucleares tienen una capacidad de respuesta a la demanda y de regulación de su producción muy limitada. Por ello, son centrales de base por definición y en general el precio de sus ofertas de energía en un mercado liberalizado (no el precio que recibirán finalmente) tiende a ser próximo a cero con el fin de asegurarse su casación. Además, sus costes variables de generación son relativamente bajos, aunque se cuestiona habitualmente el hecho de que en general no se englobe dentro de los costes de generación el elevado coste del ciclo de vida del combustible nuclear.
- **Generación con carbón.** Las centrales térmicas clásicas que emplean carbón, si bien tienen una mayor flexibilidad en su capacidad de regular la producción, responden lentamente a la demanda cuando parten desde parada. Se requiere en general entre 8 y 12 horas para poner en marcha una central térmica de carbón, aunque sólo del orden de minutos para subir o para bajar la producción desde una carga parcial. Este hecho condiciona también el modo en que estas instalaciones ofertan su energía al mercado y es habitual que estas instalaciones operen de lunes a viernes.
- **Generación con biomasa.** Sus características son equivalentes a las de la generación con carbón. Sin embargo, el hecho de consumir como combustible biomasa les otorga en algunos países el derecho de recibir primas por la energía producida.
- **Generación con fueloil.** Las centrales térmicas clásicas que emplean fueloil tienen un comportamiento semejante al de las térmicas de carbón ante los mercados eléctricos, si

bien el precio del combustible (en general más elevado que el del carbón) hace que su operación se limite en muchos países a las horas punta o de mayor demanda.

- Generación con gas natural mediante ciclo simple de turbina de gas o ciclo combinado. Mayor flexibilidad operativa que las térmicas clásicas de carbón, pero con un coste del combustible generalmente más elevado. Tendencia a funcionar de lunes a viernes sólo en horas punta.
- Generación hidráulica. La más flexible de todas las tecnologías. Con un coste variable de generación prácticamente nulo, suele ser la tecnología que marca precio en el mercado diario durante las horas punta. De hecho, a las centrales hidroeléctricas se las considera dentro del mercado eléctrico el equivalente a las opciones sobre acciones de los mercados financieros. El propietario de la generación hidráulica tiene el derecho, pero no la obligación, de producir electricidad si el precio de la electricidad le resulta lo suficientemente atractivo, o mejor dicho, si su previsión del precio de la electricidad a un día vista lo es.
- Generación eólica. También con un coste de generación muy reducido, la mayor dificultad para los productores eólicos estriba en la previsibilidad de su producción. Las ofertas de generación al mercado eléctrico consisten esencialmente en indicar hora a hora para el día siguiente el precio mínimo al que se estaría dispuesto a vender y la cantidad de energía que se va a producir. En esto último es donde los productores eólicos tienen que recurrir a modelos que permitan predecir con suficiente precisión su producción del día siguiente, so pena de incurrir en importantes penalizaciones. El exceso o la falta de producción de una central debe compensarse en tiempo real a través de la producción de otra central por cuyo servicio, llamado de regulación, cobra un precio sensiblemente mayor que el del mercado diario.
- Generación termosolar. Este tipo de generación comparte las características de velocidad de respuesta con las centrales térmicas clásicas. Por otro lado, la previsibilidad de su producción no resulta excesivamente problemática, más si cabe si se trata de centrales híbridas que cuentan con un combustible fósil de apoyo. La energía solar recogida de día también puede almacenarse en medio líquido, sólido o de cambio de fase como sal fundida, cerámica o cemento. Por la noche, se puede extraer del medio de almacenamiento para hacer funcionar la central de generación eléctrica. Estas centrales se pueden diseñar para generación sólo solar, idealmente para satisfacer demanda de punta diurna, y con sistemas de almacenamiento futuros, podrían extender su operación a cubrir la carga base.
- Generación solar fotovoltaica. No tiene capacidad de regulación de la producción y su predictibilidad tiene limitaciones.
- Generación geotérmica, hidrotérmica, aerotérmica, oceanotérmica, con energía de las olas, de las mareas, de las rocas calientes y secas y de las corrientes marinas. Tratándose de tecnologías en fase de desarrollo o experimentales, son centrales de pequeña potencia con capacidad de regulación limitada y predictibilidad más o menos compleja.
- Cogeneración y valorización de residuos. La cogeneración consiste en la generación simultánea de electricidad mediante cualquiera de las tecnologías antes mencionadas (típicamente turbinas de gas y motores diesel) y de calor útil para un proceso industrial o para climatización. El calor útil puede utilizarse en forma de vapor de agua, de aire caliente o de fluido térmico. Al tratarse de instalaciones ligadas a un proceso industrial, la generación eléctrica siempre debe seguir a la demanda térmica. Ello condiciona notablemente su

capacidad de regular la producción eléctrica cuando concurren al mercado. Sólo aquellas plantas de cogeneración que cuentan con una fuente alternativa de generación de calor útil, una caldera convencional normalmente, pueden plantearse optimizar su producción eléctrica. Este tipo de instalaciones normalmente se limita a aceptar el precio resultante del mercado ya que ofertarán su producción eléctrica a precio cero para garantizar la casación.

2.2.2. Transportistas

Los transportistas son aquellos que transportan la energía eléctrica a largas distancias a través de sus redes de alta tensión (a partir de 220 kV) desde la generación hasta las redes de distribución o hasta los consumidores en alta tensión. Aun en mercados liberalizados, la actividad de transporte es una actividad regulada por razones de economía. Pueden ejercer también el papel de Operador del Sistema Eléctrico.

2.2.3. Distribuidores

Los distribuidores son los agentes que distribuyen la energía eléctrica a través de sus redes de distribución hasta los consumidores en media y baja tensión. También se trata de una actividad regulada por razones prácticas. También pueden ejercer el papel de “comercializador de último recurso” ante aquellos consumidores que no contraten su suministro con ningún comercializador.

La distribución de energía eléctrica se realiza en dos etapas. La primera etapa es la de reparto, formada por anillos con tensiones entre 25 y 132 kV alrededor de los grandes centros de consumo. La segunda etapa es la etapa de distribución propiamente dicha, con tensiones comprendidas entre 3 y 30 kV hasta llegar a los centros de transformación y de 125 a 400 V en las líneas de baja tensión para suministro a clientes. Su diseño es mayoritariamente radial.

2.2.4. Comercializadores

Los comercializadores son aquellos que adquieren la energía eléctrica en el mercado eléctrico para ofrecérsela a sus clientes. Para ello deben pagar un peaje a la empresa transportista y/o a la empresa distribuidora por utilizar sus redes.

Los comercializadores de energía eléctrica deben prever la demanda de sus clientes y realizar las pertinentes ofertas de compra hora a hora en el mercado. En general, el precio de compra que se indica en estas ofertas será el máximo posible en los mercados donde se ha establecido un precio techo o un precio suficientemente alto como para asegurarse de que la oferta de compra sea casada siempre.

En algunos países existen los denominados “comercializadores de último recurso” quienes suministran la energía a los consumidores que no desean o no logran firmar un contrato con un comercializador al uso a un precio libremente pactado. En estos casos, el precio de la energía eléctrica es fijado a través de subastas específicas extraordinarias o en última instancia por el regulador.

2.2.5. Consumidores

Los consumidores son aquellos que reciben la energía eléctrica para su consumo en virtud de un contrato con un comercializador o adquiriéndola directamente en el mercado.

Durante el período de transición entre un mercado regulado y un mercado liberalizado, se distingue entre consumidores cualificados y consumidores no cualificados en función de su volumen de consumo y de la tensión de suministro. Sólo los primeros tienen el derecho a contratar su suministro con un comercializador a un precio libre. En un mercado plenamente liberalizado, todos los consumidores deben tener la consideración de consumidor cualificado.

2.3. *Pool* eléctrico y bolsa eléctrica

Sin que sea imprescindible, todos los países con sistemas liberalizados han establecido algún tipo de mercado organizado con transacciones estandarizadas y generalmente de carácter anónimo. Como mínimo, los mercados organizados constan de un mercado *spot* en el que se efectúa la casación de ofertas de generación y de demanda y que es gestionado por el Operador del Mercado. Independientemente del Operador del Mercado o no, existirá un Operador del Sistema cuya misión principal será la de verificar la viabilidad física en la red eléctrica de las transacciones comerciales fijadas en el mercado, teniendo en cuenta la seguridad y la fiabilidad del sistema.

La liberalización del sector eléctrico ha creado la necesidad de mercados organizados a nivel mayorista. Existen dos tipos principales de mercado eléctrico: los mercados *pool* de energía y los mercados bolsa de energía. Las diferencias entre ellos pueden explicarse utilizando dos criterios: la iniciativa y la participación. Los *pool* eléctricos y las bolsas eléctricas comparten muchas características y no siempre es evidente su distinción. De hecho, a la bolsa eléctrica más antigua y una de las más consolidadas del mundo se la denomina *Nord Pool*.

Existen dos tipos de *pool* eléctrico: los técnicos y los económicos. Los primeros siempre han existido. Las compañías eléctricas verticalmente integradas utilizaban un sistema de tipo *pool* para optimizar su generación en función de criterios de optimización económica y de despacho técnico óptimo. En tal sistema, se ordena a las centrales por sus costes de producción. Así, los costes de generación y las restricciones de la red eran los que determinaban su despacho. Las actividades de intercambio de energía se limitaban a transacciones entre compañías de diferentes zonas, mientras que el intercambio transfronterizo de energía estaba limitado por la baja capacidad de interconexión.

Los *pool* económicos o simplemente *pool* eléctricos se establecieron para facilitar la competencia entre generadores. Se crearon por los reguladores que deseaban introducir la competencia en la generación. Este sistema se ha utilizado en todo el mundo, por ejemplo, en Inglaterra y Gales, en España, en Alberta y en PJM (Pennsylvania-New Jersey-Maryland).

La participación en un *pool* económico es obligatoria, esto es, no se permiten las transacciones fuera de él. Además, dado que el intercambio tiene que tener en cuenta numerosas limitaciones técnicas, como la disponibilidad de las plantas y el compromiso de las unidades, los participantes sólo pueden ser generadores. Ofertan a un precio al cual están dispuestos a producir con su central eléctrica. El precio de casación se establece a través de una subasta unilateral como la intersección de la curva de generación, construida mediante la agregación de todas las

ofertas de producción, y la demanda estimada, que define automáticamente el volumen de casación del mercado. Como también hay aspectos técnicos implicados, estas ofertas pueden llegar a ser muy complejas. De manera que el mecanismo de determinación del precio supone una optimización con restricciones computacionalmente exigente que lleva usualmente a un bajo nivel de transparencia.

Por otra parte, una bolsa eléctrica es generalmente promovida por iniciativa privada, por ejemplo, un conjunto de generadores, distribuidores y comercializadores. La mayor parte de los mercados europeos recientemente desarrollados (Holanda, Alemania, Polonia, Francia, Austria) se basan en este modelo. Sus participantes son generadores, compañías de distribución, comercializadores y grandes consumidores. La participación en la bolsa eléctrica es voluntaria, aunque han existido excepciones. En California (*CalPX*) la participación fue obligatoria durante sus primeros años con el fin de aumentar su liquidez. *Nord Pool* es un mercado voluntario a nivel nacional pero es obligatorio para las transacciones internacionales. En Holanda, la participación en APX es obligatoria para los agentes que obtienen capacidad de interconexión en la subasta diaria.

El papel genuino de una bolsa eléctrica es casar la oferta y la demanda de electricidad para determinar públicamente el precio de casación. Generalmente, el precio de casación no se establece de manera continua sino una vez al día en una subasta bilateral (vendedores y compradores). Tal y como se indica en la Figura 2.1, el precio viene dado por la intersección de la curva de oferta (construida por agregación de las ofertas de suministro) y la curva de demanda (construida por agregación de la demanda). Los compradores y los vendedores realizan ofertas para cada hora del día siguiente y se fija un precio de casación horario tras equilibrar oferta y demanda.

En las subastas de precio marginal, los consumidores cuyas ofertas están por encima de ese precio (o son iguales) compran al precio de casación y los generadores cuyas ofertas están por debajo (o son iguales) venden a ese mismo precio. Por el contrario, en una subasta de precio discriminado un generador recibiría exactamente el precio al cual ofertó, que se supone es una cantidad más cercana a sus costes marginales. Sin embargo, aparece el problema de qué hacer con el dinero de más que pagan los consumidores pero que no reciben los productores, lo cual no sucede en las subastas de precio marginal. En la práctica, la mayor parte de los mercados ha adoptado la subasta de precio marginal.

Dependiendo de la función técnica (Operador del Sistema), la función económica (Operador del Mercado) y la función de transporte, el mercado eléctrico toma diversas formas si el operador del mercado es independiente del operador del sistema y/o de la empresa transportista, si es único o no en el sistema, si hay o no más de un transportista o de quién ostenta la propiedad del Operador del Mercado/Operador del Sistema/Transportista.

El cómo se determina el precio de la electricidad también es una decisión de diseño del mercado. Normalmente, se determinará mediante una subasta organizada por el Operador del Mercado o mediante contratos bilaterales.

2.3.1. Teoría económica de subastas

Antes de abordar cómo se efectúan las subastas de energía eléctrica, se van a describir los principales tipos de subasta.

Existen cuatro tipos principales de subastas de bienes únicos:



Figura 2.1: Intersección de las curvas agregadas de oferta y demanda para la determinación del precio horario de casación

- Subasta inglesa. El tipo más conocido de subasta es el que efectúan las casas de arte. Partiendo de un precio de salida mínimo, los pujadores realizan ofertas progresivamente con precios crecientes. El ganador es aquel que no es sobrepujado y el precio de compra es el último ofrecido.
- Subasta holandesa. Es también muy conocida la subasta del pescado fresco en las lonjas. El vendedor partiendo de un precio muy alto va cantando precios decrecientes hasta que un comprador acepta un precio. Ése es el ganador que compra al precio en el que se detuvo la subasta.
- Subasta de primer precio. En ella todos los pujadores efectúan simultáneamente ofertas en sobre cerrado con la cantidad que están dispuestos a pagar por el bien subastado. El ganador es aquel que ofrece el precio más alto, que es también el precio al que se realiza la transacción.
- Subasta de segundo precio. Con la misma mecánica que en la subasta de primer precio, el ganador es aquel que ofrece el precio más alto. Sin embargo, el precio de venta es el segundo precio más alto, es decir, el precio más caro de entre todas las ofertas no aceptadas.

2.3.2. Mecanismos de casación en mercados eléctricos

Se considera que una cierta cantidad de potencia eléctrica a suministrar durante un cierto período, típicamente 1 MW en una hora, es un bien múltiple y homogéneo y que puede ser negociado sin distinción de su calidad. Es necesario además que exista suficiente liquidez o profundidad de mercado.

El modelo de casación que se emplea mayoritariamente en los mercados eléctricos está basado en la subasta de primer precio. Los compradores/vendedores envían sus ofertas al mercado

con indicación de las cantidades que desean comprar/vender y de los precios máximos/mínimos que estarían dispuestos a pagar/cobrar. Según el precio, las ofertas de compra se ordenan de forma decreciente y las ofertas de venta se ordenan de forma creciente. En el fondo se construyen las curvas de demanda y de oferta y el punto de intersección de las curvas determina el resultado de la subasta: cantidad total de energía negociada y precio resultante. Aquellos compradores que ofrecieron un precio superior al precio resultante de la casación ven casadas sus ofertas de compra. Del mismo modo, aquellos vendedores que ofrecieron un precio inferior al precio resultante también ven casadas sus ofertas. En cualquier caso, toda la energía “casada” se negocia exclusivamente al precio resultante de la casación.

En los mercados eléctricos existen diversos modelos de casación:

- **Casación simple.** Es la forma más sencilla de efectuar la casación. A cada hora le corresponde una casación independiente de las anteriores basada en la subasta de primer precio. La mayor ventaja de este procedimiento es su simplicidad y su transparencia. Sin embargo, presenta el inconveniente de no reflejar las restricciones técnico-económicas de la producción en las ofertas de cada generador, ya que sólo se incluye un coste proporcional a la cantidad producida y un máximo producible. No están internalizados los costes no lineales, como los de puesta en marcha, ni las restricciones técnicas de la operación (por ejemplo, la imposibilidad técnica de una central térmica clásica de carbón de producir a la carga máxima durante una hora, no producir durante la hora siguiente y volver a producir a plena carga en la siguiente). Esto obliga a los generadores a asumir riesgo de una casación no satisfactoria, lo que se traduce en un incremento de los precios.

Debido a esta circunstancia, se suelen combinar las ofertas simples con alguno de los modelos alternativos siguientes.

- **Casación compleja.** Se permite a los agentes aumentar la cantidad de información técnico-económica que pueden trasladar al mercado y, en definitiva, al algoritmo de casación. Este modelo llevado al extremo es el despacho centralizado que se efectuaba antes de la liberalización del mercado. La ventaja principal de la casación compleja es que se maximiza la eficiencia, sin embargo, ello es a costa de sacrificar la transparencia de la casación.
- **Casación iterativa.** Los agentes van modificando sus posiciones a la vista de los resultados de las casaciones provisionales que se van efectuando. La casación definitiva ocurre cuando ninguno de los participantes tiene interés en modificar su posición. Esa última iteración es la única relevante para el mercado. Este método ofrece una mayor seguridad a los agentes, aunque ello supone la necesidad de que el Operador del Mercado cuente con personal altamente cualificado y con tecnología de comunicaciones avanzada.
- **Casación sucesiva.** Se trata de establecer un conjunto de mercados de casaciones firmes con diferentes horizontes temporales de manera que permita a los agentes corregir sus posiciones. La posición final de un agente es la suma de todas las casaciones de los distintos mercados. En España éstos son los mercados denominados “intradarios”.

2.3.3. Precio nodal y precio zonal

Cuando no hay saturación en el transporte, el precio marginal es el único precio para todo el sistema. Sin embargo, cuando sí ocurre tal saturación, se pueden emplear el precio marginal

localizado o el precio marginal zonal. El primero es la suma del coste marginal de generación, el coste de la saturación de transporte y el coste de las pérdidas marginales y puede ser distinto para distintos nodos incluso dentro de una misma zona. Los precios nodales son la referencia ideal ya que el valor de la electricidad se basa en dónde se genera y dónde se entrega. No obstante, los costes de transacción son más altos y los mecanismos de formación de precios son más complejos. En cuanto al precio marginal zonal, éste puede ser distinto para varias zonas, pero es el mismo dentro de una misma zona, es decir, una parte de la red en la que no se espera que se produzca saturación habitualmente o que tiene costes de gestión de restricciones técnicas relativamente bajos. Curiosamente, estos precios pueden llegar a ser negativos.

Los precios nodales se desarrollaron en Norteamérica, cuyas redes están fuertemente mallas y sus líneas de transporte entrelazan el sistema eléctrico. En Australia, donde la estructura de la red es más simple, se implementó con éxito el sistema de precios zonales. En Europa, aunque su red es muy compleja y está evolucionando hacia un mercado zonal, normalmente cada país constituye una única zona. Esto puede tener un impacto negativo al omitir las señales de precio y limitar la eficiencia.

2.3.4. Estructura del mercado

El precio marginal del mercado se denomina comúnmente como precio *spot*. El mercado eléctrico *spot* es en realidad un mercado del día antes, ya que la negociación finaliza el día anterior a la entrega. El término *spot* para los activos financieros y para la mayor parte de las *commodities* define un mercado para entrega inmediata y con liquidación hasta dos días después. Tal mercado *spot* clásico no sería posible para la electricidad, ya que el Operador del Sistema necesita conocer con antelación las transacciones para verificar su viabilidad frente a las restricciones técnicas.

La función principal del Operador del Mercado es la de gestionar el mercado *spot* o mercado a corto plazo. En él se realiza la subasta de la energía para un horizonte temporal corto, en general, de un día. En la subasta se determinan las ofertas de compra/venta aceptadas y el precio en cada periodo del día siguiente, normalmente, una hora.

El mercado *spot* es el núcleo del modelo liberalizado. La tendencia es que los mercados *spot* cumplan las siguientes características:

- Papel Activo de la Demanda.
- Participación Voluntaria en el Mercado
- Modelos de casación simple

Para horizontes temporales muy cortos antes de la entrega, el Operador del Sistema opera el denominado mercado de ajustes. Este mercado técnico se utiliza para dar precio a las desviaciones del suministro o de la demanda respecto al mercado *spot* o a los contratos a largo plazo. El Operador del Sistema necesita poder ordenar producción extra con muy poca antelación, dado que las desviaciones deben ser corregidas en minutos o incluso en segundos para asegurar el suministro físico y mantener el sistema equilibrado. Los mercados *spot* y los mercados de ajuste tienen distintos objetivos y son complementarios. Los primeros serán el objeto de estudio en esta tesis.

El mercado de ajustes no es el único mercado técnico. Para minimizar el tiempo de respuesta en caso de desequilibrio entre la oferta y la demanda, el operador del sistema organiza un mercado de servicios complementarios que normalmente incluye el servicio de regulación a la baja, los servicios de reserva rodante y no rodante y el servicio de respuesta de reserva. En algunos mercados, el Operador del Sistema opera también el mercado de capacidad de generación y/o el mercado de capacidad de transporte. El mercado de capacidad de generación puede paliar el problema de los incentivos a la inversión en nueva capacidad de generación. La negociación en tal mercado puede tomar la forma de imponer la obligación de compra de cierta capacidad de generación a los comercializadores mayoristas y a los grandes consumidores directamente conectados a las líneas de transporte.

2.3.5. Productos negociados

El comercio de la electricidad ha conducido hacia el desarrollo de nuevos tipos de contratos para su negociación. Estos contratos pueden ser negociados bien en transacciones bilaterales bien en mercados organizados. Pueden ser también contratos físicos (para suministro) o contratos financieros (para cobertura o especulación). Todos los contratos tienen en común cuatro características bien definidas: periodo de entrega, lugar de entrega, volumen y precio. El resto de características pueden diferir notablemente.

Los contratos físicos pueden clasificarse en contratos a largo plazo (futuros, *forwards* y acuerdos bilaterales con vencimientos de años incluso) y contratos *spot*, a corto plazo. Como la electricidad no puede ser almacenada de manera económica, este abanico de contratos es necesario para poder mantener el equilibrio entre oferta y demanda. Los agentes del mercado necesitan contratos diarios, e incluso horarios, para cumplir con la demanda variable y sólo hasta cierto punto predecible. Los contratos *spot* a corto plazo generalmente se negocian a través de un mercado organizado, pero la cuota de mercado difiere entre países.

Para cubrir la demanda futura, las compañías eléctricas compran electricidad con antelación mediante contratos mensuales o anuales. Muchos mercados eléctricos han creado un mercado de contratos financieros a largo plazo, como futuros y opciones. No obstante, los contratos a largo plazo son generalmente negociados de forma bilateral. La razón de ello es la relativamente baja liquidez de esos mercados. En la actualidad sólo en *Nord Pool* el volumen de los contratos financieros supera la demanda del mercado. Sin embargo, cuando se tiene en cuenta la negociación OTC (*over-the-counter*) o bilateral, otros mercados como el alemán, están cerca de ese umbral de liquidez.

Un tipo especial de contratos a largo plazo son los denominados “Acuerdos de Compra de Energía”. En algunos países todavía representan una parte considerable del mercado. Como la mayor parte de estos acuerdos comenzaron antes del inicio del proceso de liberalización pueden obstaculizar al mercado. En general, no están en línea con los principios de un mercado liberalizado y en general si se rescinden suponen un coste extra para el sistema.

Otro tipo interesante de contratos a largo plazo en los mercados eléctricos son los derechos de emisión de CO₂. Un generador que produzca más electricidad y que por tanto contamine más es obligado a comprar derechos de emisión adicionales para un determinado año. A la inversa, un generador que produzca menos electricidad (o lo haga mediante fuentes más limpias) durante un determinado año puede vender los derechos sobrantes para obtener un beneficio económico adicional.

2.4. *Nord Pool, Omel y Powernext*: hacia un mercado único europeo

El punto de partida del proceso liberalizador en Europa debe buscarse en la Directiva 1996/92/CE sobre normas comunes para el mercado interior de la electricidad. Este proceso tiene tres pilares fundamentales: la sostenibilidad medioambiental, la seguridad del suministro y la introducción de competencia que redunde en una reducción de los precios de la electricidad para el consumidor final. En los últimos veinte años se ha asistido a una evolución desde unos sistemas eléctricos regulados y planificados hasta unos sistemas liberalizados en los que los agentes compiten en el despacho de sus centrales y en el suministro de electricidad a los clientes finales. Estos sistemas liberalizados se encuentran ahora en una fase de integración progresiva, cuyo último fin debería ser un mercado único de electricidad en toda Europa.

Como un primer paso hacia ese mercado único de la electricidad, el Grupo de Reguladores Europeos para Electricidad y Gas (ERGEG), establecido en 2003 por la Comisión Europea como su grupo asesor oficial en materia energética, estableció en 2006 las denominadas “Iniciativas Regionales”. Se trata de una iniciativa que persigue la creación de siete mercados regionales europeos de electricidad (ERI), como una etapa intermedia hacia el mercado único de la electricidad. El propósito de las ERI es, por tanto, acelerar la integración de los mercados eléctricos europeos.

Las siete iniciativas de mercados eléctricos regionales europeos son:

- Región Báltica: Estonia, Letonia y Lituania.
- Región Centro-Este: Alemania, Austria, Eslovaquia, Eslovenia, Hungría, República Checa y Polonia.
- Región Centro-Sur: Alemania, Austria, Eslovenia, Francia, Grecia e Italia.
- Región Centro-Oeste: Alemania, Bélgica, Francia, Luxemburgo y Países Bajos.
- Región Norte: Alemania, Dinamarca, Finlandia, Noruega, Polonia y Suecia.
- Región Sur-Oeste: España, Francia y Portugal.
- Francia-Reino Unido-Irlanda.

En nuestro caso, se han seleccionado para esta tesis tres mercados que a priori presentan características muy diferenciadas:

- *Nord Pool*: El mercado integrado por Noruega, Suecia, Finlandia y Dinamarca se aproxima al paradigma de lo que debiera ser un mercado eléctrico. Se trata de un mercado con gran número de agentes, de elevada participación, de gran liquidez y que suele ponerse como ejemplo de mercado donde ningún agente tiene poder dominante.
- *Powernext*: El mercado eléctrico francés, que nació como un mercado virtual para romper el monopolio de *Electricité de France* (EDF) es un mercado poco líquido y con escasos agentes. Su interés estriba en que vendría a ser el mercado antagónico del primero, especialmente durante el período objeto de este estudio.

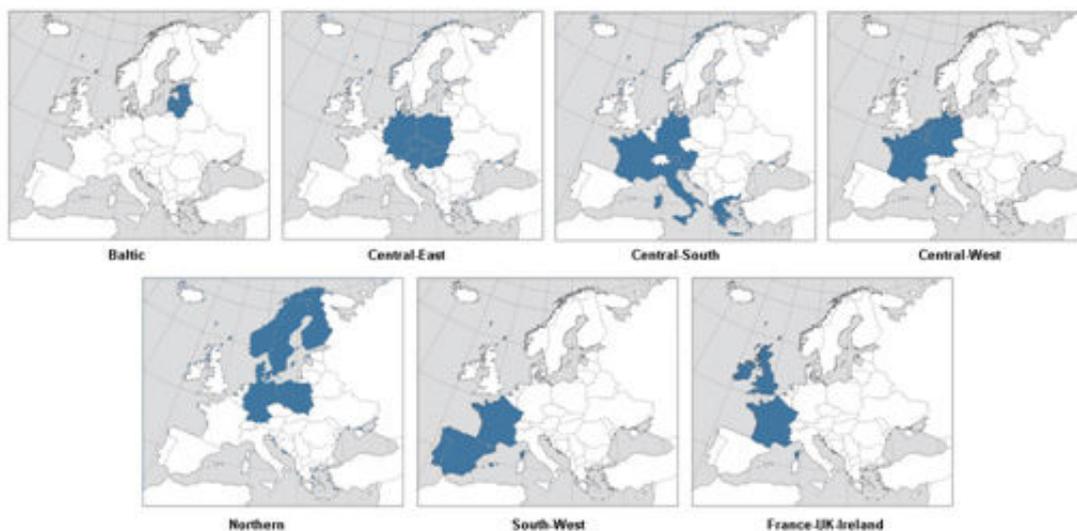


Figura 2.2: Iniciativas Europeas Regionales de mercados eléctricos impulsadas por el Grupo de Reguladores Europeos para Electricidad y Gas (ERGEG)

- *Omel*: El mercado español es estudiado por razones de cercanía en primer lugar y sobre todo, por tratarse de un mercado de alta liquidez, convulso, con cambios regulatorios frecuentes y aparentemente concentrado en manos de pocas empresas eléctricas.

La selección de estos mercados en concreto ha buscado probar la consistencia de las herramientas de predicción de precios en entornos diferentes, de manera que pudieran apreciarse las peculiaridades de cada uno y describir cuantitativamente las diferencias que se observan en la dinámica de los precios debidas a las grandes diferencias en liquidez y en grado de liberalización.

En particular, se buscará comprobar que:

- El modelo es válido para los tres mercados, que son muy diferentes.
- El modelo detecta la diferencia entre un mercado y otro.
- El modelo es útil para hacer predicciones en los tres casos.

2.4.1. Noruega, Suecia, Finlandia y Dinamarca

El mercado escandinavo para la electricidad se denomina *Nord Pool*. Comenzó sus operaciones en 1992 como consecuencia de la ley noruega de la energía de 1991 que formalmente abrió el camino hacia la liberalización del sector eléctrico en Noruega. En aquel momento surgió un mercado noruego, pero pronto se unieron Suecia (1996), Finlandia (1998) y Dinamarca (2000). Realmente, sólo a partir de ese momento se puede hablar de un mercado escandinavo.

Nord Pool fue el primer mercado eléctrico internacional en el mundo. En este mercado, los agentes de fuera de Escandinavia pueden participar en las mismas condiciones que los agentes locales. Para participar en el mercado *spot* físico, llamado *Elspot*, se requiere de una conexión

que permita suministrar o recibir de la red principal. Alrededor de un 40 % del consumo total de la región se negocia en este mercado y su cuota ha ido creciendo año tras año desde su creación en los años 90. Además, en Finlandia, Suecia y este de Dinamarca opera un mercado de ajustes denominado *Elbas*.

En el mercado financiero *Eltermin* se negocian *forwards* (hasta con tres años de antelación), futuros, opciones y contratos por diferencias (*CfD*).

- Un contrato *forward* es un acuerdo privado entre dos partes para comprar o vender un bien en un determinado momento futuro a un cierto precio.
- Los futuros, al igual que los *forward* son acuerdos entre dos partes para comprar o vender un activo en un determinado momento futuro a un cierto precio. Sin embargo, los futuros se negocian en una bolsa y para hacer posible la negociación, la bolsa especifica ciertas características estándar de los contratos.
- Las opciones son de dos de tipos básicos. Las opciones de compra otorgan el derecho a su poseedor a comprar un activo en una determinada fecha a un cierto precio. Las opciones de venta dan el derecho a su poseedor a vender un activo en una determinada fecha a un precio convenido con antelación. Debe insistirse en que una opción da el derecho a su poseedor, pero no lo obliga. Ésa es la diferencia fundamental entre las opciones y los *forwards* y los futuros, donde el poseedor está obligado a comprar o vender el activo subyacente. Sin embargo, firmar un contrato *forward* o un futuro es gratuito, al contrario que adquirir una opción que sí tiene un coste.
- Los contratos por diferencias son contratos por los que se intercambia la diferencia de precio de un activo subyacente en el momento de apertura del contrato y su precio en el momento de cierre del mismo.

En 2004 los derivados negociados en *Nord Pool* representaron un volumen de 590 TWh, que es más del 150 % del consumo total de electricidad de Escandinavia (389 TWh). Además de sus propios contratos, *Nord Pool* ofrece un servicio de compensación para contratos financieros OTC, que permite a los agentes evitar el riesgo de crédito de la contraparte. Además, en 2005 *Nord Pool* se convirtió en el primer mercado del mundo en comenzar a negociar derechos de emisión de dióxido de carbono de la Unión Europea.

En la actualidad participan más de 300 agentes de más de 10 países en *Nord Pool*, entre los que se encuentran generadores, comercializadores, distribuidores, grandes consumidores e instituciones financieras. El éxito de *Nord Pool* puede explicarse por distintos motivos. El primero es que la estructura de la industria está muy fragmentada con más de 350 compañías de generación. El mayor agente (*Vattenfall*) tiene una cuota de mercado de sólo el 20 %. Tal estructura facilita obviamente la competencia. En segundo lugar, la gran cantidad de energía hidráulica permite el almacenamiento y la flexibilidad de la producción. En tercer lugar, la estructura de la red es relativamente simple comparada con la de Europa continental, lo cual simplifica la gestión de restricciones. Finalmente, el nivel de colaboración entre los operadores del sistema, los gobiernos y los reguladores es muy alto en comparación con los numerosos conflictos de interés que surgen entre los países de Europa continental.

El precio *spot* en *Nord Pool* es el resultado de la subasta bilateral de precio marginal para intervalos horarios. Se determina a partir de las diferentes ofertas presentadas al operador del mercado hasta el momento en que se cierra la subasta. El mercado físico para la negociación

de la electricidad para entrega física se denomina *Elspot*, que es un mercado del día antes. Lo que se negocian son contratos físicos de electricidad de una hora de duración con un volumen mínimo de 0,1 MWh. A mediodía de cada día, los agentes del mercado envían al operador del mercado (*Nord Pool*) sus ofertas (de compra y de venta) para los siguientes 24 horas a partir de la 1 a.m. del día siguiente. La información se proporciona a través de página web (*Elweb*) para cada hora del día siguiente. Tal información debe contener el precio y el volumen.

Para ser exactos, existen tres modos de ofertar en *Elspot*. La oferta horaria consiste en pares de precio y de volumen para cada hora. En la oferta de bloque, el precio y el volumen ofertados se fijan para un número de horas consecutivas. La oferta horaria flexible es una oferta de precio y de volumen fijos donde la hora de la venta es flexible y determinada por el precio más alto del día siguiente que esté por encima del precio indicado en la oferta.

Los agentes del mercado son libres para estratificar sus ofertas de compra o de venta para cada hora. Por ejemplo, un generador podría estar interesado en vender mayor cantidad de electricidad cuando el precio es alto que cuando es bajo. Por otra parte, los generadores pueden comprar electricidad si lo desean. Normalmente, los generadores se han comprometido al suministro de energía a largo plazo a un precio pactado con grandes consumidores. Estos contratos deben ser respetados en todo momento durante la vigencia del mismo. Pero el generador buscará la optimización de su beneficio comprando electricidad en los periodos de bajos precios y por tanto ahorrando potencial de producción para cuando el precio sea mayor. Tal estrategia puede ser rentable especialmente en *Nord Pool* donde una cuota importante de la producción proviene de centrales hidroeléctricas que son fácilmente regulables.

A las 12 del mediodía *Nord Pool* cierra la recepción de ofertas para el día siguiente y para cada hora procede a la construcción de las curvas acumuladas de oferta y de demanda. Ya que tiene que haber equilibrio entre producción y consumo, el precio *spot* del sistema para cada hora en particular se determina como el precio donde las curvas de oferta y de demanda se cortan. De ahí el término casación de mercado o punto de equilibrio. La negociación basada en este método se denomina negociación de equilibrio, subasta de casación o fijación simultánea de precio. Si los datos no dan lugar a un punto de equilibrio, no se produce ninguna transacción para esa hora.

Tras haber determinado el precio del sistema para cada una de las 24 horas del día siguiente, *Nord Pool* prosigue analizando las posibles restricciones técnicas en la red de transporte que podría ocasionar este precio del sistema. Si no se hallan cuellos de botella, el precio del sistema será el precio *spot* para toda la zona *Nord Pool*. Si no, se tendrán que determinar precios *spot* zonales. La idea tras la introducción de los precios zonales es la de ajustar los precios de la electricidad dentro de una región geográfica con el fin de favorecer la negociación local hasta el punto que no se exceda la capacidad límite de la red de transporte. Debe tenerse en cuenta que el precio del sistema se determina por el precio de equilibrio independientemente de las potenciales restricciones de transporte. Los precios zonales sólo son distintos de este precio para aquellas horas en que la capacidad de la red de transporte está limitada. Por tanto, el precio del sistema es mucho menos volátil que los precios zonales. En esta tesis los precios del sistema serán objeto de estudio.

2.4.2. España y el Mercado Ibérico

A finales del siglo XIX nace la industria eléctrica en España. Como en el resto de Europa, se trata de instalaciones que producen corriente continua, a pequeña escala y cerca de los

núcleos urbanos. Se trata de pequeñas empresas privadas que aspiran al monopolio regional. El uso de la electricidad se limitaba al alumbrado.

Con la dictadura de Primo de Rivera se realizan grandes inversiones estatales para el desarrollo de instalaciones hidroeléctricas y de las necesarias instalaciones de transporte de energía eléctrica desde los embalses hasta los puntos de consumo. Sin embargo, durante la II República, se paralizan las inversiones estatales en el sector motivado por la crisis económica internacional. La Guerra Civil no supuso un gran revés para las instalaciones eléctricas y, concluida la confrontación, se recuperó la normalidad del servicio con relativa rapidez.

Durante el régimen de Franco, se producen importantes restricciones y racionamientos eléctricos por la falta de inversiones y la pobre interconexión entre los sistemas regionales. A pesar de todo, en España no se produjo la nacionalización del sector a diferencia de lo ocurrido en la mayoría de países de nuestro entorno. El gobierno crea en 1944 ENDESA y ENHER, impulsando de este modo al sector. Quizá la razón hay que buscarla en los esfuerzos de *lobby* que se hicieron en su momento por parte de UNESA, la patronal del sector eléctrico que nace ese mismo año.

La intervención del Estado se limitó fundamentalmente a la fijación de tarifas máximas. Su congelación impidió nuevas inversiones y el sector se cerró a la entrada de nuevos competidores, favoreciéndose la integración vertical y horizontal de las compañías. A partir de 1975 se elaboran los Planes Energéticos Nacionales (PEN) que dictan las políticas a cumplir. En la década de 1980, se instaura la explotación unificada del sistema eléctrico para Red Eléctrica de España (REE) y se configura el denominado “marco legal y estable”, que es el sistema vigente hasta la liberalización del sector.

España fue el primer país de la Europa continental en desarrollar un mercado organizado para la electricidad. En 1997, la Ley 54/97 del Sector Eléctrico y el Real Decreto 2019/97, crearon la Compañía Operadora del Mercado Español de Electricidad (OMEL) para gestionar el mercado eléctrico organizado. Dicha ley sufrió posteriormente diversas modificaciones en virtud de la Ley 53/2002 de 30 de diciembre, de la Ley 24/2005 de 18 de noviembre y de la Ley 17/2007 de 4 de julio. Ha sido derogada mediante la nueva ley del Sector Eléctrico 24/2013 aprobada en diciembre de 2013 que, no obstante, mantiene la estructura básica del sector.

OMEL es denominado oficialmente como bolsa eléctrica, aunque es una solución híbrida ya que los pagos por garantía de potencia son típicos de un *pool* eléctrico.

El mercado español de la electricidad comenzó sus operaciones en enero de 1998 con negociación del día antes. Es un mercado voluntario, pero en la práctica las transacciones bilaterales son penalizadas dado que los pagos por garantía de potencia sólo se producen dentro de OMEL. Además, los distribuidores tienen la obligación de comprar todas sus necesidades de energía en el *pool*. Así, la liquidez del mercado, medida como el porcentaje de energía negociada frente a la demanda total es muy alta y llegó a representar aproximadamente el 80 % entre 2002 y 2004. En los últimos años el mercado OTC, tanto registrado como no registrado, ha ganado cuota y así, en abril de 2014 la liquidez del mercado había descendido hasta el 64 % de la demanda eléctrica total.

El mercado español está francamente aislado del resto de Europa debido a la limitada capacidad de transporte internacional, aunque se mejoró con el fin de establecer el mercado ibérico (MIBEL). OMEL cambió su denominación a Operador del Mercado Ibérico de Energía

2.4 Nord Pool, Omel y Powernext: hacia un mercado único europeo

- Polo Español (OMIE) y se encarga de la gestión del mercado del día anterior del MIBEL. El *pool* común es un mercado voluntario de día anterior y un mercado *forward* para contratos físicos y para contratos financieros. Se permiten los contratos bilaterales en el interior de cada país o entre países.

Algunos consideran que, a pesar del optimismo inicial, la liberalización del sector eléctrico en España ha sido un fracaso. Dos razones principales que suelen darse son la estructura oligopolística de la industria y los múltiples defectos regulatorios. Justo antes de la liberalización, la estructura cambió con una serie de fusiones. En 1998, las dos mayores compañías, Endesa e Iberdrola, generaban el 82 % de la producción española y suministraban el 80 % de la demanda. Otras dos compañías verticalmente integradas, Unión Fenosa e Hidrocantábrico, completaban el resto de la producción. Una década y media después la situación parece haber mejorado algo con la entrada de nuevos agentes, como E-On y Gas Natural, pero aún dista mucho de lo que sería deseable.

Los defectos regulatorios se han acumulado a lo largo de los años, culminando en 2003 con crecientes precios mayoristas de la electricidad que resultaron en la aparición del déficit tarifario y que todavía en 2014 no ha sido totalmente resuelto. Uno de los mayores problemas regulatorios es el mecanismo actual de garantía de potencia. En primer lugar, no ofrece a los generadores un incentivo para estar disponibles y producir electricidad cuando la demanda sea alta. Si un generador no está disponible un día en el que no hay suficiente capacidad de generación en el sistema para cubrir la demanda, sólo pierde el pago de garantía de potencia de ese día. En todo el año, un solo día no supone prácticamente nada. En segundo lugar, no garantiza que habrá suficiente capacidad instalada para atender a la demanda en todo momento. El *Libro Blanco sobre la Reforma del Marco Regulatorio de la Generación Eléctrica en España* de Pérez Arriaga et al. (2005) puso de manifiesto éstas y otras deficiencias del sistema eléctrico español. Uno de las asignaturas pendientes del mercado español que parece estar en vías de solución es la limitadísima capacidad de interconexión eléctrica internacional, apenas del 3 % cuando lo recomendado por la Unión Europea es de al menos un 10 %.

2.4.3. Francia

El mercado francés de la electricidad antes denominado *Powernext* en la actualidad se denomina *EPEX Spot* tras su integración con el mercado alemán.

En primer lugar, cabe destacar que Francia tiene su generación eléctrica basada casi íntegramente en centrales nucleares con una flexibilidad muy reducida. Durante las horas valle sólo producen las nucleares y el excedente de energía es exportado a los países vecinos, mientras que en las horas punta suelen cubrir la demanda adicional mediante centrales hidráulicas, carbón e importaciones.

El mercado eléctrico francés, *Powernext Day-ahead*, comenzó a operar el 26 de noviembre de 2001. En sus inicios se trataba de un mercado voluntario poco líquido en el que un número limitado de agentes efectuaban sus ofertas. Dada la situación de posición dominante de EDF, buena parte de la energía negociada en este mercado procedía del ejercicio de la capacidad de producción adquirida a EDF por los agentes mediante subastas de capacidad. Estos primeros años del mercado francés serán objeto de estudio aquí.

Buena prueba de que la liberalización del sector eléctrico francés ha sido dificultosa la constituye el hecho de que a Francia se le abrieran dos procedimientos de infracción a finales

de la pasada década por parte de la Comisión Europea. El primero tiene que ver con la transposición incompleta de la directiva europea en cuanto a la competencia en el sector doméstico. El segundo trata de las ayudas de Estado encubiertas en algunas de las tarifas eléctricas. Como respuesta a todo ello, se promulga a finales de 2010 la nueva ley del sector denominada NOME (*Nouvelle Organisation du Marché de l'Electricité*), cuyo aspecto más destacable es la creación de un acceso regulado a la energía nuclear histórica (ARENH), mediante el que se pretende beneficiar a los suministradores alternativos de una parte de la renta del parque nuclear histórico con el fin de que puedan ofrecer a sus clientes precios tan competitivos como los de EDF. Además se suprimen las tarifas eléctricas para los medianos y grandes consumidores.

El mecanismo del ARENH (*Accès Régulé à l'Electricité Nucléaire Historique*) impone la obligación transitoria a EDF, el antiguo monopolio público convertido en sociedad anónima, de vender a sus competidores hasta un cuarto de la energía eléctrica que se produzca en las centrales nucleares existentes hasta diciembre de 2025 a un precio fijado por el Estado, que en enero de 2012 se fijó en 42 €/MWh. De este modo se garantiza que los suministradores alternativos tienen acceso a la electricidad de base durante un periodo transitorio.

La justificación del reparto de la “renta nuclear” está en que las centrales nucleares de EDF se construyeron con fondos públicos hace varias décadas. Si bien las centrales nucleares tienen costes de inversión muy elevados, sus costes de explotación son más baratos que los de otras centrales que emplean combustibles fósiles. La explotación de estas centrales amortizadas desde hace tiempo genera, por tanto, importantes beneficios económicos denominados “renta nuclear”. EDF y sus clientes eran los principales beneficiados de esta “renta nuclear”, ya que la primera disfrutaba de márgenes suficientes y los segundos se beneficiaban de tarifas eléctricas muy competitivas. A partir de la entrada de vigor del ARENH, la “renta nuclear” es compartida y permite a los suministradores alternativos ofrecer precios competitivos a sus clientes y obtener beneficios suficientes como para prepararse para el escenario post-NOME, a partir de 2026, en el que deberán disponer de medios de producción propios o bien abastecerse a través del mercado.

Para hacerse una idea del largo camino hacia la competencia que debe aún recorrer el mercado francés, baste señalar que a 31 de diciembre de 2012, la cuota de mercado de los suministradores alternativos a EDF era de sólo el 6,9 % para los consumidores domésticos y del 7,6 % para el resto.

2.4.4. Conclusión

En este capítulo se ha descrito el funcionamiento típico de los mercados eléctricos liberalizados, así como el proceso de liberalización del sector eléctrico, en particular de los mercados español, francés y escandinavo, que serán objeto de análisis más adelante. Los dos últimos representan ejemplos antagónicos de mercado eléctrico. El mercado escandinavo es un mercado maduro, líquido y nada concentrado. Por el contrario, el mercado francés representa a un mercado joven, poco líquido y muy concentrado. El caso español, aparte de por su cercanía, tiene el interés de ser un mercado frecuentemente bajo sospecha de intervención y propenso a los cambios regulatorios.

El procedimiento que siguen los tres mercados para fijar los precios de la electricidad es similar, subasta horaria con un día de antelación. Los resultados de la subasta son una serie horaria de precios de la electricidad que presenta ciertas peculiaridades y diferencias respecto a las series temporales univariantes.

2.4 Nord Pool, Omel y Powernext: hacia un mercado único europeo

Los capítulos que siguen tienen como objetivo plantear un modelo estadístico que describa la dinámica de los precios de la electricidad, identificando las diferencias entre los distintos mercados y utilizar el modelo como herramienta para hacer predicciones a corto plazo.

Capítulo 3

ALISADO EXPONENCIAL MULTIVARIANTE

3.1. Técnicas estadísticas para la predicción de precios de electricidad

La literatura sobre modelización y análisis de precios de la electricidad es abundante y crece día a día. Gran parte de la literatura inicial está encuadrada dentro del campo financiero y se centra en el desarrollo de modelos realistas de los precios *spot*, tratables analíticamente para el propósito de valoración de derivados y gestión de riesgos.

Por el lado estadístico, durante los últimos veinte años se han desarrollado muchas técnicas y modelos para la predicción de los precios al por mayor, especialmente para la predicción a corto plazo. Algunos importantes artículos que incluyen aspectos estadísticos del problema son Lucia et al (2002), Escribano et al (2002) y Koopman et al (2007). Bunn y Karakatsani (2008) desarrollaron un estudio detallado del mercado de Reino Unido y concluyeron que los modelos estocásticos eran incompletos: buenos para el modelado pero no tanto para la predicción.

La complejidad de la dinámica de los precios de la electricidad puede verse en uno de los estudios más completos sobre la materia (Koopman, et al., 2007) cuyo título es “Modelos Periódicos Estacionales Reg-ARFIMA-GARCH para los Precios *Spot* Diarios de la Electricidad”. El título indica por un lado la complejidad del problema y por el otro, la gran cantidad de efectos que los autores han tenido que considerar con el fin de representar la dinámica de los precios.

El libro de Weron (2006) hace una revisión detallada de los enfoques establecidos para el modelado, la predicción de los precios y la demanda eléctrica. Este libro y muchos otros artículos resumen los factores que influyen en el comportamiento del precio y comparan distintos enfoques, tales como Redes Neuronales Artificiales, Modelos Autorregresivos Integrados de Media Móvil, regresiones dinámicas, modelos de Support Vector Machine, Wavelets y métodos que combinan diferentes modelos. Básicamente, estos trabajos llegan a la conclusión que los modelos de series temporales son los que generalmente proporcionan los mejores resultados (Conejo et al, 2005 y Weron, 2008).

La incorporación de variables explicativas (demanda, meteorología, etc...) en algunos casos (no siempre) mejora las predicciones pero casi nunca justifica la mayor complejidad del modelo a emplear, especialmente en las predicciones a muy corto plazo, que son las de interés en esta tesis. La razón para ello hay que buscarla en que las variables adicionales tampoco están

disponibles y también hay que predecirlas. Existe un amplio acuerdo en que los errores de los datos no son homocedásticos y muchos autores han estudiado el efecto de incluir en el modelo un ajuste de la heterocedasticidad. Para el propósito de la predicción de precios a corto plazo el modelo heterocedástico no ha logrado una mejora clara aunque sí mejora la precisión de los intervalos de confianza obtenidos (véase Weron, 2009 como ejemplo).

Centrándose específicamente en los modelos de series univariantes de series temporales, se distinguen dos enfoques diferentes en la literatura, dado que un solo modelo no es suficiente para recoger todas las peculiaridades de la dinámica de los precios:

- Una opción es considerar una única serie que incluya todas las horas del día y emplear modelos con múltiples estacionalidades. En este caso, cambiando el modelo para distintas estaciones del año. Conejo et al. (2005), uno de los artículos más citados sobre la materia, utiliza un modelo distinto para cada estación (invierno, primavera, verano y otoño). La estructura del modelo y los parámetros son diferentes para cada estación. El modelo para una semana de primavera es:

$$(1 - \phi_1 B^1 - \phi_2 B^2 - \phi_3 B^3)(1 - \phi_{23} B^{23} - \phi_{24} B^{24} - \phi_{48} B^{48} - \phi_{72} B^{72} - \phi_{96} B^{96} - \phi_{120} B^{120} - \phi_{144} B^{144} - \phi_{168} B^{168})(1 - B^1)(1 - B^{24}) \log(p_h) = c + (1 - \theta_1 B^1 - \theta_2 B^2 - \theta_3 B^3)(1 - \theta_{24} B^{24} - \theta_{48} B^{48})(1 - \theta_{168} B^{168}) \varepsilon_h$$

Estos modelos corresponden a la interconexión PJM (Pennsylvania - Nueva Jersey - Maryland), aunque para otro mercado se requiere la identificación y la estimación de sus modelos específicos.

- Otro enfoque, que es el preferido por varios autores, es utilizar modelos distintos para cada una de las 24 horas del día (Weron y Misiorek, 2005). En algunos casos se recomienda distinguir entre días laborables y fines de semana, con la consecuencia de tener que utilizar 48 modelos (García-Martos et al. 2007). La estructura de estos modelos varía para cada hora.

Por tanto, cuando la literatura emplea el término “modelo univariante” realmente se refiere a múltiples modelos univariantes.

En el caso de los precios de la energía eléctrica, tenemos un vector de observación con gran número de componentes, $n = 24$, correspondiente a las 24 horas del día. Al considerar el análisis conjunto de las 24 horas en un modelo multivariante, el tratamiento se unifica. Por ejemplo, la aplicación directa de modelos ARIMA multivariantes, uno de los modelos más simples, requiere un número de parámetros grande. El IMA (1,1) de la ecuación (3.1) requiere la estimación de una matriz cuadrada 24×24 más la matriz de covarianzas 24×24

$$\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{y}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} - \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \text{var}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \boldsymbol{\Sigma}. \quad (3.1)$$

Si además se incluyese el efecto estacional del día de la semana, se necesita adicionalmente una nueva matriz 24×24 con lo que el modelo final acumulará un enorme número total de parámetros. Pero aunque el modelo requiera muchos parámetros, la estimación de modelos multivariantes no presenta dificultad computacional. En esta tesis se proporciona el algoritmo

3.2 Alisado exponencial multivariante

en *MATLAB*. La implementación en el paquete R también es simple y directa, especialmente si se aprovecha el paquete de series temporales (véase por ejemplo, Shumway y Stoffer, 2006). El uso de un solo modelo para todos los mercados facilita las comparaciones entre ellos y permite destacar los rasgos comunes, así como sus diferencias.

El análisis conjunto de la serie de 24 horas se justifica por la necesidad de proporcionar predicciones específicas para cada una de las 24 horas del día siguiente. La tentación de agrupar las horas para reducir la dimensión del ARIMA multivariante tiene la gran ventaja de reducir el número de parámetros, pero se necesitaría un segundo paso que requeriría la definición de las predicciones para cada una de las 24 horas del día. Nótese que, en último término, el objetivo del análisis es precisamente encontrar las combinaciones (lineales) de horas que reducen la dimensión del problema y al mismo tiempo recoger tanta información como sea posible sobre la dinámica de la serie de 24 horas. Utilizar precios bihorarios sería una manera sencilla de reducir el tamaño del problema y posiblemente útil para estudiar la dinámica de los precios de la electricidad. Esta tesis es sólo otra forma más sofisticada para reducir la dimensión. Tiene las propiedades del análisis clásico de factores: se obtiene la máxima reducción con la mínima pérdida de información. Los nuevos factores, unos pocos, permiten simplificar la descripción de la evolución dinámica de las 24 series. En último término, el objetivo de la tesis es desarrollar un método para reducir la dimensión. Se toma el ejemplo de los precios horarios de la electricidad, pero la metodología puede ser extendida a otros problemas donde no se es capaz de establecer una agregación a priori como la bihoraria.

Concretamente, se cree que la simple agregación de horas contiguas tiene varios inconvenientes. Por ejemplo, la decisión de qué horas agrupar y qué peso dar a cada hora es algo arbitrario. Como se indica en el apartado siguiente, las dependencias entre variables no tienen por qué corresponderse en orden temporal. Finalmente, una razón práctica, teniendo en cuenta que una importante aplicación práctica del método es hacer predicciones para cada una de las próximas 24 horas: si el análisis se hace bihorariamente, el modelo dará predicciones bihorarias que tendrían que ser convertidas posteriormente a una predicción horaria. El análisis de las 24 horas evita este paso.

3.2. Alisado exponencial multivariante

Un modelo sencillo multivariante que pretende ser válido para todas las horas y los mercados estudiados es el alisado exponencial multivariante.

Jones (1966) introdujo el alisado exponencial multivariante y demostró su potencial para la predicción de series temporales múltiples. Su propuesta fue la generalización multivariante del método EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*) cuya utilidad y simplicidad ha sido ampliamente mostrada en la literatura sobre predicción desde los primeros trabajos de Holt (1957), Brown (1959) y Winters (1960). La más sencilla y famosa recursión del alisado exponencial para hacer predicciones es

$$\hat{\mathbf{y}}_{t+1} = \hat{\mathbf{y}}_t + \mathbf{B}(\mathbf{y}_t - \hat{\mathbf{y}}_t), \quad (3.2)$$

donde $\mathbf{y}_t \in \mathbb{R}^n$ es el vector de observación en el instante t , $\hat{\mathbf{y}}_t$ es el valor predicho para \mathbf{y}_t con la información disponible hasta el instante $t - 1$ y $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la versión matricial del peso del alisado exponencial. Los errores de predicción $\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{y}_t - \hat{\mathbf{y}}_t$, también llamados innovaciones,

son una secuencia de variables aleatorias independientes con media cero y matriz de varianza estacionaria $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Tomando la ecuación (3.2) y escribiendo $\hat{y}_t = y_t - \varepsilon_t$, obtenemos el proceso multivariante IMA(1,1)

$$y_{t+1} = y_t + \varepsilon_{t+1} - \Theta \varepsilon_t, \quad var(\varepsilon_t) = \Sigma, \quad (3.3)$$

donde $\Theta = I - B$ es la matriz $n \times n$ correspondiente a la componente MA(1) e I es la matriz identidad. El alisado exponencial multivariante o IMA(1,1) es un modelo básico común a los dos enfoques más extendidos de las series temporales: los modelos VARIMA (Box, Jenkins y Reinsel, 1994) y los modelos en el espacio de los estados (Harvey, 1989). Como se verá más detenidamente en las próximas secciones, este modelo presenta diferencias importantes en cada uno de los dos enfoques citados. En esta tesis se analizan las características del modelo (3.3) desde el enfoque de los modelos en el espacio de los estados. Eso implica ciertas restricciones en los parámetros y frecuentemente se denomina modelo restringido. El modelo presenta ventajas cuando se pretende modelizar un vector de observaciones de gran dimensión. En este caso, los precios horarios de la electricidad tienen dimensión $n = 24$ y, por tanto, el análisis implica estimar matrices de grandes dimensiones, 24×24 .

Con el fin de mantener el modelo tan simple como sea posible y, al mismo tiempo, para resolver el problema con más dificultad, se han realizado algunas simplificaciones. Analizando cuidadosamente el proceso de formación de precios, deben notarse los siguientes consideraciones:

1. Los 24 precios horarios de cada día se establecen y obtienen al mismo tiempo y de una sola vez. Es decir, los precios no se generan secuencialmente, hora a hora. De modo que las correlaciones internas (dependencias) entre los 24 precios no tienen por qué seguir una lógica temporal. De hecho, las correlaciones entre horas igualmente espaciadas son distintas para distintos pares de horas. Estos inconvenientes no recomiendan el empleo de modelos ARIMA multivariantes para la serie completa. Como se verá, estos modelos presentan baja precisión en sus predicciones. La misma observación fue formulada por Huisman et al. (2007).
2. Las subastas en realidad sólo se celebran entre semana, de lunes a viernes. La subasta para el martes se celebra el lunes, la del miércoles el martes y así sucesivamente hasta la del viernes, donde los precios se fijan para los tres días siguientes, sábado, domingo y lunes. Dicho de otro modo, para establecer los precios del lunes los agentes no pueden usar la información de los dos días inmediatamente anteriores porque no disponen de ella. Realizan su oferta del lunes con la información de precios hasta el viernes inclusive. Por ello, los datos correspondientes a sábados y domingos pueden (o deben) ser eliminados de la secuencia sin que ello suponga discontinuidades. Por lo anterior, tiene más sentido trabajar con la serie de días laborables (de lunes a viernes) y eliminar sábados y domingos, lo cual simplifica enormemente la dinámica del proceso. Además, el estudio de los precios en día laborable es el más relevante por el volumen económico que supone.

Conforme a los dos puntos anteriores, en esta tesis se realiza el análisis de la dinámica de los precios de la electricidad como un modelo multivariante de 24 horas. La función de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial de los incrementos de precios de la

serie logarítmica de cada hora muestran que el MA(1) univariante es un modelo adecuado para todas las horas en los tres mercados estudiados. Así, las 24 series horarias de logaritmos de los precios pueden ser consideradas conjuntamente como un proceso multivariante IMA(1,1) (3.3). Aunque el modelo requiere muchos parámetros, la estimación de modelos multivariantes no presenta dificultad desde el punto de vista computacional. Comenzando con un simple – pero exigente modelo en cuanto al número de parámetros– se podría obtener un modelo más “parsimonioso” con una estructura más rica que revelará algunos aspectos interesantes de la dinámica del proceso de precios.

3.3. Análisis factorial dinámico

La reducción del espacio de parámetros es esencial para modelar con éxito. El problema se resuelve en la literatura de series temporales mediante reducción de la dimensión empleando modelos de factores dinámicos. Los modelos de factores dinámicos han sido estudiados por Engle y Watson (1981), Peña y Box (1987), Stock y Watson (1988), Peña y Poncela (2004, 2006), entre otros.

¿Podrían no recogerse todas las dependencias tomando las correlaciones internas entre los 24 precios? Si la serie sigue un modelo IMA(1,1), las dependencias entre variables, las dependencias estáticas (entre horas del mismo día) y las dinámicas (entre horas de distintos días) están completamente contenidas en los parámetros del modelo. La reducción de dimensión que se propone con este análisis de factores dinámicos sí captura las relaciones de dependencia completamente. En resumen, la propuesta es hacer una transformación lineal simple $\mathbf{z}_t = \mathbf{T}\mathbf{y}_t$ que desacople las dependencias entre variables. Cada componente del nuevo vector \mathbf{z}_t sigue un proceso independiente IMA(1,1).

Existen varios artículos dedicados al análisis multivariante de los precios de la electricidad. En concreto, dos de ellos se basan en el análisis dinámico factorial. Härdle y Trück (2010) utilizan para la representación de conjuntos de datos de elevada de dimensión combinaciones de cargas no paramétricas, linealización con *B-splines* y parametrización de factores comunes. En el artículo se examina el *European Energy Exchange* (EEX). Alonso et al. (2011) investigan modelos factoriales para la difícil tarea de predecir a largo plazo los precios del mercado español. En ambos artículos se desea reducir el tamaño de datos multivariantes, pero los procedimientos y los modelos que se utilizan son distintos en cada caso. El método que se propone en esta tesis se basa en las propiedades del modelo de alisado exponencial y es distinto de las soluciones que se proponen en los trabajos antes citados. Finalmente, Huisman et al. (2007) considera los precios como un panel de 24 *cross-sectional hours* que varía día a día.

En cuanto al “análisis dinámico factorial”, se está de acuerdo en que es una materia de gran interés en estadística, economía y otros campos. Se piensa que es la mejor manera de enfocar el análisis de series temporales de gran dimensión.

El modelo utilizado en Ng, Engle y Rothschild (1992) no corresponde exactamente con el modelo clásico de series temporales múltiples que se estudia en esta tesis. Bajo el mismo nombre de “modelos dinámicos factoriales” coexisten varios modelos que difieren sustancialmente. Algunos de ellos se dirigen al problema en el que el número de variables n es típicamente grande, posiblemente mayor que el número T de observaciones a lo largo del tiempo. Como algunos autores han señalado, en este caso, “*las técnicas clásicas para series temporales multivariantes son totalmente inútiles*”. La mayor parte de las referencias que se proporcionan en

otras áreas corresponden a este modelo factorial, esto es, Ng, Engle y Rothschild (1992) y Bai y Ng (2002, 2007). Por ejemplo, en un resumen representativo de la economía de EE.UU. estudiado en varios artículos, los datos consisten en $n = 132$ series temporales mensuales con sólo $T = 588$ observaciones. Los modelos VAR o VARMA no son adecuados para este caso, ya que implican la estimación de demasiados parámetros. Aunque su objetivo es similar al de esta tesis, los modelos y técnicas difieren en gran medida. Otras publicaciones bajo el mismo nombre de “análisis dinámico factorial” están dirigidas a reducir la dimensión series temporales múltiples. Una publicación seminal al respecto es Peña y Box (1984). Este problema se trata en libros sobre series temporales multivariantes tales como los arriba mencionados, Harvey (1989) o Reinsel (1993). Como ejemplo ilustrativo de las diferencias entre los dos grupos de publicaciones, se pueden comparar las referencias de los dos artículos. Existen 26 referencias listadas en el artículo de Ng, Engle y Rothschild (1992) y 36 referencias listadas en el artículo de Escribano y Peña (1994), pero no hay ninguna referencia en común. Esta tesis se encuadra dentro del segundo grupo, correspondiente a las *técnicas clásicas de análisis multivariante*.

El artículo de Lopes, Salazar y Gamerman (2008) realiza un análisis espacio-temporal desde una perspectiva Bayesiana. Pone un énfasis especial en la componente espacial y la inferencia Bayesiana se realiza mediante un algoritmo de salto reversible de cadena de Markov Monte Carlo.

3.4. Representación en el espacio de los estados del modelo de alisado exponencial

El proceso multivariante de alisado exponencial (Jones, 1966; Harvey, 1989) se escribe comúnmente en la forma del espacio de los estados mediante un modelo de paseo aleatorio más ruido, cuyas ecuaciones son:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t, & \text{var}(\mathbf{w}_t) = \mathbf{Q}, \\ \mathbf{y}_t = \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t, & \text{var}(\mathbf{v}_t) = \mathbf{R}, \end{cases} \quad (3.4)$$

donde se ha añadido \mathbf{x}_t , el vector de estado no observado; \mathbf{w}_t la excitación que es una secuencia de vectores aleatorios independientes con media cero y matriz de varianza \mathbf{Q} ; y \mathbf{v}_t , denominado el error, una secuencia de vectores aleatorios independientes con media cero y matriz de varianza \mathbf{R} , estos errores que también son independientes de \mathbf{w}_t . Los vectores \mathbf{x}_t , \mathbf{w}_t , \mathbf{v}_t tienen la misma dimensión n , como \mathbf{y}_t , y la dimensión de ambas matrices de varianza \mathbf{Q} , \mathbf{R} es $n \times n$.

Nótese, sin embargo, que cada una de estas matrices contiene $n(n + 1)/2$ parámetros, mientras el modelo (3.3) tiene $n^2 + n(n + 1)/2$ parámetros: los elementos de las matrices Θ y Σ . En el caso multivariante, $n > 1$, el número de parámetros del modelo (3.3) es superior al del modelo (3.4). Como se verá más adelante, para hacer que (3.3) y (3.4) sean modelos equivalentes, es necesario imponer ciertas restricciones sobre la matriz Θ . Ello significa que el modelo (3.3) y el modelo (3.4) no son idénticos; cualquier modelo del tipo (3.4) puede ser escrito como (3.3), pero no viceversa.

Existe otra alternativa para representar la dinámica en el espacio de los estados que subyace en las predicciones dadas por la ecuación de alisado exponencial (3.2) como, por ejemplo, el modelo de innovaciones (véase Hyndman et al., 2008).

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t + \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}_t, & \text{var}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \boldsymbol{\Sigma}, \\ \mathbf{y}_t = \mathbf{x}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, & \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \end{cases} \quad (3.5)$$

El modelo (3.5) es equivalente a un modelo IMA(1,1) no restringido:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{t+1} - \mathbf{y}_t &= \mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{x}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ &= \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} - (\mathbf{I} - \mathbf{B})\boldsymbol{\varepsilon}_t, \end{aligned} \quad (3.6)$$

El uso del modelo tradicional en el espacio de los estados, modelo (3.4), en lugar del modelo de innovaciones en el espacio de los estados (3.5), permite reducir el número de parámetros a ser estimados y realizar el análisis de factores dinámicos como se verá a continuación.

Para realizar predicciones con este modelo la ecuación más sencilla es (3.2). Por tanto, es útil obtener las matrices \mathbf{B} y $\boldsymbol{\Sigma}$ de (3.2) a partir de las matrices \mathbf{Q} y \mathbf{R} del modelo (3.4). Se podría utilizar con este fin la metodología empleada por Jones (1966) o Harvey (1989). No obstante, se va a mostrar una nueva manera de obtener \mathbf{B} y $\boldsymbol{\Sigma}$ a partir de \mathbf{Q} y \mathbf{R} .

Proposición 1: Las matrices $\boldsymbol{\Theta}$ y $\boldsymbol{\Sigma}$ del modelo (3.3) son unívocamente determinadas por los parámetros \mathbf{Q} y \mathbf{R} del modelo (3.4) empleando las relaciones:

$$\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{R}(\mathbf{P} + \mathbf{R})^{-1} \quad (3.7)$$

y

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{P} + \mathbf{R}, \quad (3.8)$$

donde \mathbf{P} verifica

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}(\mathbf{P} + \mathbf{R})^{-1}\mathbf{P} + \mathbf{Q}. \quad (3.9)$$

Demostración: A partir de (3.4),

$$\mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t-1} = \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{v}_t - \mathbf{v}_{t-1} = \mathbf{w}_t + \mathbf{v}_t - \mathbf{v}_{t-1},$$

es fácil ver que $\mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t-1}$ tiene la siguiente estructura de covarianza

$$\Gamma_1(h) = \begin{cases} \mathbf{Q} + 2\mathbf{R} & h = 0 \\ -\mathbf{R} & h = 1 \\ -\mathbf{R} & h = -1 \\ \mathbf{0} & |h| \geq 2. \end{cases}$$

La función de autocovarianza de $\mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t-1}$ según (3.3) es

$$\Gamma_2(h) = \begin{cases} \Sigma + \Theta\Sigma\Theta^T & h = 0 \\ -\Theta\Sigma & h = 1 \\ -\Sigma\Theta^T & h = -1 \\ 0 & |h| \geq 2. \end{cases}$$

$\Gamma_2(h)$ no es necesariamente simétrica, pues $\Theta\Sigma$ no tiene por qué ser igual a $\Sigma\Theta^T$. Sin embargo, $\Gamma_1(h)$ sí lo es. Igualando $\Gamma_1(h)$ y $\Gamma_2(h)$ las relaciones entre parámetros en las dos formas del modelo son

$$\mathbf{Q} + 2\mathbf{R} = \Sigma + \Theta\Sigma\Theta^T, \quad (3.10)$$

y

$$\mathbf{R} = \Theta\Sigma = \Sigma\Theta^T. \quad (3.11)$$

Las relaciones (3.10) y (3.11) determinan unívocamente Θ y Σ en función de \mathbf{Q} y \mathbf{R} , o expresándolo en una forma mucho más útil, se pueden deducir los parámetros del alisado exponencial $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \Theta$ y Σ , a partir de \mathbf{Q} y \mathbf{R} .

Llamando $\mathbf{P} = \Sigma - \mathbf{R}$, donde \mathbf{P} corresponde a la matriz de covarianza del error estacionario asociada a la predicción del vector de estado en el filtro de Kalman, véase por ejemplo Shumway y Stoffer (2006), se puede escribir la ecuación (3.11) como

$$\mathbf{R} = \Theta(\mathbf{P} + \mathbf{R}),$$

de la cual se obtiene Θ , que es el resultado (3.7), $\Theta = \mathbf{R}(\mathbf{P} + \mathbf{R})^{-1}$.

Por último, sustituyendo

$$\mathbf{R} = \Theta\Sigma = \Sigma\Theta^T \quad (3.12)$$

en (3.10) y teniendo en cuenta que

$$\mathbf{P}(\mathbf{P} + \mathbf{R})^{-1} + \mathbf{R}(\mathbf{P} + \mathbf{R})^{-1} = \mathbf{I}, \quad (3.13)$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= (\mathbf{I} - \Theta)\Sigma(\mathbf{I} - \Theta)^T \\ &= \mathbf{P}(\mathbf{P} + \mathbf{R})^{-1}\mathbf{P} \\ &= \mathbf{P} - \mathbf{R}(\mathbf{P} + \mathbf{R})^{-1}\mathbf{P}, \end{aligned}$$

que es el resultado (3.9). ■

3.4 Representación en el espacio de los estados del modelo de alisado exponencial

Dadas \mathbf{Q} y \mathbf{R} , el cálculo de \mathbf{P} puede obtenerse a partir de (3.9) de manera iterativa. Empezando en $\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}$, la aplicación sucesiva de $\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{R}(\mathbf{P}_k + \mathbf{R})^{-1}\mathbf{P}_k + \mathbf{Q}$, en unas pocas iteraciones converge a la solución del problema. Estas iteraciones son equivalentes a los pasos realizados en el filtro de Kalman que Jones (1966) aplica para obtener las matrices \mathbf{B} y $\mathbf{\Sigma}$ a partir de (3.7) y (3.8), respectivamente.

Para que el modelo (3.4) sea equivalente a la forma restringida del modelo (3.3) se requiere que el producto $\mathbf{\Theta}\mathbf{\Sigma}$ sea una matriz simétrica y definida positiva. Ello garantiza que $\mathbf{R} = \mathbf{\Theta}\mathbf{\Sigma}$ es una matriz de varianza. Como $\mathbf{\Sigma}$ es una matriz definida positiva, esto supone que los valores propios de $\mathbf{\Theta}$ deben ser también positivos. A lo largo del tratamiento se ha supuesto que la matriz \mathbf{R} tiene rango completo, implicando que tanto $\mathbf{\Theta}$ como $\mathbf{\Sigma}$ deben tener rango completo. Si los valores propios de $\mathbf{\Theta}$ son menores que la unidad el modelo es inversible. Dadas \mathbf{Q} y \mathbf{R} , la proposición permite obtener el modelo inversible (3.3) equivalente al modelo (3.4).

Es posible reescribir el modelo (3.4) introduciendo una matriz \mathbf{H} para dotarlo de mayor generalidad y que se utilizará en adelante. Si definimos:

$$\mathbf{x}'_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_t \quad (3.14)$$

Partiendo de un modelo inicial igual a (3.4) en \mathbf{x}'_t :

$$\begin{cases} \mathbf{x}'_{t+1} = \mathbf{x}'_t + \mathbf{w}'_t, & \text{var}(\mathbf{w}'_t) = \mathbf{Q}', \\ \mathbf{y}_t = \mathbf{x}'_t + \mathbf{v}_t, & \text{var}(\mathbf{v}_t) = \mathbf{R}, \end{cases} \quad (3.15)$$

se sustituye \mathbf{x}'_t y llamando $\mathbf{w}'_t = \mathbf{H}\mathbf{w}_t$ se obtiene:

$$\begin{cases} \mathbf{H}\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{H}\mathbf{x}_t + \mathbf{H}\mathbf{w}_t, & \text{var}(\mathbf{w}_t) = \mathbf{Q}, \\ \mathbf{y}_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t, & \text{var}(\mathbf{v}_t) = \mathbf{R}, \end{cases} \quad (3.16)$$

con $\mathbf{Q}' = \mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{H}^T$.

Finalmente, el modelo resulta:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t, & \text{var}(\mathbf{w}_t) = \mathbf{Q}, \\ \mathbf{y}_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t, & \text{var}(\mathbf{v}_t) = \mathbf{R}. \end{cases} \quad (3.17)$$

Conviene destacar que la elección de \mathbf{H} puede hacerse de tal manera que se reduzca la dimensión del problema, como se verá más adelante.

3.5. Máxima verosimilitud con algoritmo EM

El algoritmo EM (*Expectation-Maximization*) (Shumway y Stoffer, 2006) en su aplicación en este contexto es un procedimiento iterativo para estimar por máxima verosimilitud el valor de los parámetros desconocidos del modelo en el espacio de los estados. Aquí consideraremos el modelo dado por la siguiente expresión:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t, & \text{var}(\mathbf{w}_t) = \mathbf{Q}, \\ \mathbf{y}_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t, & \text{var}(\mathbf{v}_t) = \mathbf{R}, \end{cases} \quad (3.18)$$

donde los parámetros a estimar serán $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{H})$, donde $\boldsymbol{\mu}_0$ y $\boldsymbol{\Sigma}_0$ corresponden al vector de medias y a la matriz de varianzas, respectivamente, del estado inicial $\mathbf{x}_0 \sim N(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$. La información de la que se dispone para estimar el conjunto de parámetros $\boldsymbol{\theta}$ son los vectores de observación \mathbf{y}_t para los instantes de tiempo $t = 1, \dots, N$, que pueden ser almacenados en el conjunto \mathbf{Y}_N definido como:

$$\mathbf{Y}_N = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_N\}. \quad (3.19)$$

Considerando también los vectores de estado no observados $\mathbf{X}_N = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$, se define el conjunto de vectores $\mathbf{Z}_N = \{\mathbf{X}_N, \mathbf{Y}_N\}$. El algoritmo EM proporciona un método iterativo para hallar los estimadores maximoverosímiles de los parámetros $\boldsymbol{\theta}$, mediante una maximización sucesiva de la esperanza condicionada de la función de verosimilitud definida como:

$$f(\mathbf{Z}_N | \boldsymbol{\theta}) = f_{\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0}(\mathbf{x}_0) \prod_{t=0}^{N-1} f_{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t) \prod_{t=1}^N f_{\mathbf{R}, \mathbf{H}}(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t). \quad (3.20)$$

Para trabajar más comodamente con la función de verosimilitud, y ya que su objetivo final será maximizarla, se prefiere trabajar con una transformación monótona de la función tal como es el logaritmo de la verosimilitud $l_{\mathbf{Z}_N}(\boldsymbol{\theta}) = 2 \log f(\mathbf{Z}_N | \boldsymbol{\theta})$, resultando la suma de tres funciones desacopladas

$$l_{\mathbf{Z}_N}(\boldsymbol{\theta}) = l_0(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0) + l_1(\mathbf{Q}) + l_2(\mathbf{R}, \mathbf{H}), \quad (3.21)$$

donde asumiendo la hipótesis de normalidad para cada uno de los vectores que componen \mathbf{Z}_N , la expresión concreta de cada sumando es:

$$\begin{aligned} l_0(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0) &= -\log |\boldsymbol{\Sigma}_0| - (\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\mu}_0). \\ l_1(\mathbf{Q}) &= -N \log |\mathbf{Q}| - \sum_{t=0}^{N-1} (\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{x}_t)^T \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{x}_t). \\ l_2(\mathbf{R}, \mathbf{H}) &= -N \log |\mathbf{R}| - \sum_{t=1}^N (\mathbf{y}_t - \mathbf{H}\mathbf{x}_t)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}_t - \mathbf{H}\mathbf{x}_t). \end{aligned} \quad (3.22)$$

3.5 Máxima verosimilitud con algoritmo EM

El algoritmo EM es un método iterativo que consiste fundamentalmente en dos pasos: el primero (paso E) supone $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_j$ conocido (los valores estimados del parámetro $\boldsymbol{\theta}$ en la iteración previa j) y calcula la esperanza condicionada

$$E[l_{\mathbf{Z}_N}(\boldsymbol{\theta})|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j]. \quad (3.23)$$

El segundo paso (paso M) consiste en maximizarla. La principal ventaja del algoritmo EM se debe al hecho de que los parámetros desconocidos pueden hallarse a partir de fórmulas de regresión explícitas en cada iteración.

Paso E: computación de $E[l_{\mathbf{Z}_N}(\boldsymbol{\theta})|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j]$

Aquí, dados los valores de los parámetros $\hat{\boldsymbol{\theta}}_j = (\hat{\boldsymbol{\mu}}_{0,j}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{0,j}, \hat{\mathbf{Q}}_j, \hat{\mathbf{R}}_j, \hat{\mathbf{H}}_j)$ (matrices estimadas en la iteración previa j) e \mathbf{Y}_N , los únicos términos que permanecen como datos aleatorios en la ecuación (3.22) son los estados \mathbf{X}_N . Entonces, para calcular los valores esperados de (3.22) con la información de \mathbf{Y}_N y $\hat{\boldsymbol{\theta}}_j$ hay que proporcionar para $t = 0, 1, 2, 3, \dots, N$ los valores

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t|N} &= E[\mathbf{x}_t|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j], \\ \mathbf{P}_{t|N} &= E[(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t|N})(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t|N})'|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j], \\ \mathbf{P}_{t+1,t|N} &= E[(\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{x}_{t+1|N})(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t|N})'|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j], \end{aligned} \quad (3.24)$$

que se obtienen aplicando el filtro de Kalman alisado, véase Kalman (1960) y Kalman y Bucy (1961). Para ello, se debe ejecutar el filtro de Kalman hacia adelante en el tiempo y tras ello, aplicar el filtro de Kalman alisado hacia atrás (véase para más detalle el Apéndice C). A partir de estos valores (3.24), es posible calcular $E[l_{\mathbf{Z}_N}(\boldsymbol{\theta})|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j]$ como la suma de las siguientes tres expresiones:

$$E[l_{\mathbf{Z}_N}(\boldsymbol{\theta})|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j] = E[l_0(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j] + E[l_1(\mathbf{Q})|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j] + E[l_2(\mathbf{R}, \mathbf{H})|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j], \quad (3.25)$$

de valor:

$$E[l_0(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j] = -\log |\boldsymbol{\Sigma}_0| - \text{tr} \left\{ \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} [\mathbf{P}_{0|N} + (\mathbf{x}_{0|N} - \boldsymbol{\mu}_0)(\mathbf{x}_{0|N} - \boldsymbol{\mu}_0)^T] \right\}.$$

$$E[l_1(\mathbf{Q})|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j] = \begin{cases} -N \log |\mathbf{Q}| - \text{tr} \left\{ \mathbf{Q}^{-1} \sum_{t=0}^{N-1} [\mathbf{P}_{t+1|N} + \mathbf{P}_{t|N} - \mathbf{P}_{t+1,t|N} - \right. \\ \left. - \mathbf{P}_{t+1,t|N}^T + (\mathbf{x}_{t+1|N} - \mathbf{x}_{t|N})(\mathbf{x}_{t+1|N} - \mathbf{x}_{t|N})^T \right\}. \end{cases}$$

$$E[l_2(\mathbf{R}, \mathbf{H})|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j] = \begin{cases} -N \log |\mathbf{R}| - \text{tr} \left\{ \mathbf{R}^{-1} \sum_{t=1}^N [\mathbf{H}\mathbf{P}_{t|N}\mathbf{H}^T + \right. \\ \left. + (\mathbf{y}_t - \mathbf{H}\mathbf{x}_{t|N})(\mathbf{y}_t - \mathbf{H}\mathbf{x}_{t|N})^T \right\}, \end{cases} \quad (3.26)$$

donde $\text{tr}\{\}$ es el operador traza de una matriz.

Paso M: maximización de $E[l_{\mathbf{Z}_N}(\boldsymbol{\theta})|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j]$

El paso M consiste en maximizar $E[l_{\mathbf{Z}_N}(\boldsymbol{\theta})|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j]$ respecto a los parámetros $\boldsymbol{\theta}$, en la iteración $j + 1$ y es análogo al enfoque de la regresión multivariante.

- El máximo de $E[l_0(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j]$ se obtiene para:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{0,j+1} = \mathbf{x}_{0|N}, \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{0,j+1} = \mathbf{P}_{0|N}.$$

- El máximo de $E[l_1(\mathbf{Q})|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j]$ se obtiene para:

$$\hat{\mathbf{Q}}_{j+1} = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \left[\mathbf{P}_{t+1|N} + \mathbf{P}_{t|N} + \mathbf{P}_{t+1,t|N} + \mathbf{P}_{t+1,t|N}^T + (\mathbf{x}_{t+1|N} - \mathbf{x}_{t|N}) (\mathbf{x}_{t+1|N} - \mathbf{x}_{t|N})^T \right]. \quad (3.27)$$

- El máximo de $E[l_2(\mathbf{R}, \mathbf{H})|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j]$, se obtiene para:

$$\hat{\mathbf{H}}_{j+1} = \left[\sum_{t=1}^N \mathbf{y}_t \mathbf{x}_{t|N}^T \right] \left[\sum_{t=1}^N \mathbf{P}_{t|N} + \mathbf{x}_{t|N} \mathbf{x}_{t|N}^T \right]^{-1}. \quad (3.28)$$

$$\hat{\mathbf{R}}_{j+1} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[\hat{\mathbf{H}}_{j+1} \mathbf{P}_{t|N}^T \hat{\mathbf{H}}_{j+1}^T + (\mathbf{y}_t - \hat{\mathbf{H}}_{j+1} \mathbf{x}_{t|N}) (\mathbf{y}_t - \hat{\mathbf{H}}_{j+1} \mathbf{x}_{t|N})^T \right]. \quad (3.29)$$

Este algoritmo se resume en el siguiente procedimiento iterativo:

Algoritmo EM

Dado un número máximo de iteraciones $j_{\text{máx}}$, una tolerancia ε , y un conjunto inicial de parámetros $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 = (\hat{\boldsymbol{\mu}}_{0,0}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{0,0}, \hat{\mathbf{Q}}_0, \hat{\mathbf{R}}_0, \hat{\mathbf{H}}_0)$.

$j = 1$

$\delta l = 10^{10}$

Mientras ($\delta l > \varepsilon$ o $j < j_{\text{máx}}$):

- Realizar el paso E:

Aplicar el Filtro de Kalman y el Filtro de Kalman Smoother para obtener $\mathbf{x}_{t|N}$, $\mathbf{P}_{t|N}$ and $\mathbf{P}_{t+1,t|N}$, para $t = 0, 1, \dots, N$, con los parámetros $\hat{\boldsymbol{\theta}}_j$ conocidos.

- Realizar el paso M:

Usar la fórmula explícita (3.27), (3.28), y (3.29) para calcular $\hat{\boldsymbol{\theta}}_j = (\hat{\boldsymbol{\mu}}_{0,j}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{0,j}, \hat{\mathbf{Q}}_j, \hat{\mathbf{R}}_j, \hat{\mathbf{H}}_j)$ y actualizar el valor de los parámetros estimados.

- Calcular:

$$\delta l = |l_{\mathbf{Z}_N}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{j+1}) - l_{\mathbf{Z}_N}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_j)| / |l_{\mathbf{Z}_N}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{j+1})|.$$

$$j = j + 1.$$

Fin

3.6. Conclusiones

En este capítulo se ha introducido el análisis exponencial multivariante o IMA(1,1), uno de los modelos básicos tanto de los modelos VARIMA Box-Jenkins como de los modelos en el espacio de los estados. El análisis de la dinámica de los precios de la electricidad se realizará como un modelo multivariante de 24 horas.

Se ha mostrado que es posible aprovechar algunas ventajas que presenta la representación en el espacio de los estados del modelo de alisado exponencial con ciertas restricciones. En concreto, se puede reducir el número de parámetros a determinar del modelo si se impone que en el modelo de partida el producto $\theta\Sigma$ sea una matriz simétrica y definida positiva para garantizar que \mathbf{R} sea una matriz de varianzas.

Además se ha presentado el algoritmo EM como procedimiento iterativo para calcular la estimación por máxima verosimilitud de los parámetros desconocidos del modelo propuesto.

Capítulo 4

FACTORES DINÁMICOS

4.1. Factores dinámicos

Bajo este epígrafe se mostrará un modo de obtener las matrices \mathbf{B} y Σ del modelo (3.3) aprovechando las propiedades de diagonalización de las matrices \mathbf{Q} y \mathbf{R} que proporcione más información sobre el proceso. Una transformación lineal del vector \mathbf{y}_t descompone el proceso multivariante en procesos univariantes independientes de alisado exponencial. La transformación revela algunos aspectos significativos e interesantes del modelo dinámico multivariante y, al mismo tiempo, muestra el modo de reducir el número de parámetros del modelo.

Asumiendo que la matriz \mathbf{R} es definida positiva, es bien conocido que existe una matriz \mathbf{T} no singular que diagonaliza simultáneamente a \mathbf{Q} y a \mathbf{R} , por lo que

$$\mathbf{TQT}^T = \Lambda \quad \text{y} \quad \mathbf{TRT}^T = \mathbf{I}, \quad (4.1)$$

siendo Λ una matriz diagonal con todos sus elementos λ_i positivos $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, \mathbf{I} la matriz identidad. Estos valores son los valores propios de la matriz $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}$ que se supondrán ordenados, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.

Multiplicando por \mathbf{T} las ecuaciones de estado y de observación (3.4) se obtienen nuevos estados $\mathbf{f}_t = \mathbf{T}\mathbf{x}_t$ y nuevas observaciones $\mathbf{z}_t = \mathbf{T}\mathbf{y}_t$,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{t+1} &= \mathbf{f}_t + \mathbf{a}_t, \\ \mathbf{z}_t &= \mathbf{f}_t + \mathbf{e}_t, \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde los vectores de ruido \mathbf{a}_t y \mathbf{e}_t están constituidos por variables aleatorias independientes con matrices de varianza Λ e \mathbf{I} , respectivamente. La ecuación (4.2) subraya las características de la transformación. Los nuevos estados $f_{i,t}$ evolucionan conforme a paseos aleatorios independientes, cada uno de ellos con varianza distinta, λ_i . Este valor λ_i mide la contribución de $f_{i,t}$ a la variabilidad del proceso multivariante. Siguiendo el análisis factorial estos nuevos estados pueden denominarse factores dinámicos. Este factor dinámico está normalizado, de manera que los valores propios permanecen invariables ante un cambio de escala y rotación de las observaciones \mathbf{y}_t . Como se verá en los ejemplos más adelante, sólo unos pocos de entre los 24 factores obtenidos de los precios de la electricidad son responsables de la mayor parte de la variabilidad observada.

Las matrices \mathbf{T} y $\mathbf{\Lambda}$ proporcionan también una manera de obtener \mathbf{P} , \mathbf{B} y $\mathbf{\Sigma}$ distinta a la dada por la Proposición 1. Este resultado se recoge en la siguiente proposición.

Proposición 2: Si \mathbf{R} es una matriz simétrica definida positiva, entonces existe una matriz no singular \mathbf{T} tal que $\mathbf{TRT}^T = \mathbf{I}$, y

- (a) $\mathbf{TQT}^T = \mathbf{\Lambda}$, con $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \geq 0$.
- (b) $\mathbf{TPPT}^T = \mathbf{\Omega}$, con $\mathbf{\Omega} = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, $\omega_i \geq 0$ y $\omega_i = \left(\lambda_i + \sqrt{\lambda_i^2 + 4\lambda_i}\right) / 2$.
- (c) $\mathbf{T\Sigma T}^T = \mathbf{\Delta}$, con $\mathbf{\Delta} = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$, $\delta_i > 0$ y $\delta_i = \left(2 + \lambda_i + \sqrt{\lambda_i^2 + 4\lambda_i}\right) / 2$.
- (d) $\mathbf{TBT}^{-1} = \mathbf{D}$, con $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, $0 \leq d_i < 1$ y $d_i = \left(-\lambda_i + \sqrt{\lambda_i^2 + 4\lambda_i}\right) / 2$.

Demostración: El apartado (a) se obtiene al emplear la descomposición (4.1). Dada la matriz \mathbf{T} no singular,

$$(\mathbf{P} + \mathbf{R})^{-1} = \mathbf{T}^T(\mathbf{TPPT}^T + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{T} \quad (4.3)$$

y sustituyendo en (3.9) se tiene

$$\mathbf{P} = \mathbf{RT}^T(\mathbf{TPPT}^T + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{TP} + \mathbf{Q}.$$

Premultiplicando por \mathbf{T} , postmultiplicando por \mathbf{T}^T y denotando $\mathbf{\Omega} = \mathbf{TPPT}^T$, se obtiene

$$\mathbf{\Omega} = (\mathbf{\Omega} + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{\Omega} + \mathbf{\Lambda} \quad (4.4)$$

que puede ser escrita como $\mathbf{\Omega}^2 - \mathbf{\Lambda}\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Lambda} = 0$. Esta ecuación tiene una solución que es diagonal con todos sus elementos positivos, la cual se obtiene de resolver las n ecuaciones cuadráticas desacopladas que son las que se indican en el punto (b) de la proposición.

Sustituyendo ahora (4.3) en (3.7), premultiplicando por \mathbf{T} , postmultiplicando por \mathbf{T}^{-1} y llamando $\mathbf{D} = \mathbf{TBT}^{-1}$ se tiene

$$\mathbf{D} = \mathbf{TPPT}^T(\mathbf{TPPT}^T + \mathbf{I})^{-1} = \mathbf{\Omega}(\mathbf{\Omega} + \mathbf{I})^{-1},$$

de manera que \mathbf{D} es también diagonal, con valores positivos comprendidos entre cero y uno. Las columnas de \mathbf{T} son los vectores propios de \mathbf{B} . Además, dada (4.4) puede escribirse $\mathbf{\Omega} = \mathbf{D} + \mathbf{\Lambda}$, por lo que cada elemento diagonal de \mathbf{D} es dado por el apartado (d).

Finalmente, la matriz de varianza de las innovaciones cumple $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{P} + \mathbf{R}$, y llamando $\mathbf{\Delta} = \mathbf{T\Sigma T}^T$, puede escribirse como

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{I} + \mathbf{\Omega} = \mathbf{I} + \mathbf{D} + \mathbf{\Lambda}$$

y por tanto $\delta_i = 1 + \omega_i$ que demuestra el apartado (c). ■

La Proposición 2 permite pasar del modelo (3.4) al modelo (3.3). Conocidas \mathbf{Q} y \mathbf{R} , se obtienen \mathbf{T} y $\mathbf{\Lambda}$, y a partir de estas matrices y de los resultados (c) y (d) de la Proposición 2 se puede obtener $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{\Delta}(\mathbf{T}^T)^{-1}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{T}$. Además, ahora las observaciones \mathbf{y}_t pueden ser vistas como una combinación lineal $\mathbf{y}_t = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{z}_t$ de procesos univariantes de alisado exponencial, y la componente i del vector de observación $\mathbf{z}_{i,t}$ puede ser predicha por una ecuación independiente obtenida a partir de la ecuación (3.2)

$$\hat{z}_{i,t+1} = \hat{z}_{i,t} + d_i(z_{i,t} - \hat{z}_{i,t}). \quad (4.5)$$

Cada proceso de alisado exponencial tiene un grado distinto de suavizado $1 - d_i$, obtenido por medio del apartado (d) de la Proposición 2, cuyo valor está comprendido entre 0 y 1. Si $d_i = 0$, la componente $z_{i,t}$ es sólo una constante observada con ruido, y cuando $d_i = 1$, la componente $z_{i,t}$ es un paseo aleatorio puro. Ésta última componente determina el comportamiento a largo plazo del proceso multivariante. Las innovaciones $\varepsilon'_{i,t} = z_{i,t} - \hat{z}_{i,t}$ corresponden a errores aleatorios que son independientes con varianza δ_i , que permite escribir la ecuación (4.5) en la forma de un IMA(1,1) como la ecuación (3.3), aunque ahora también desacoplada

$$z_{i,t+1} = z_{i,t} + \varepsilon'_{i,t+1} - (1 - d_i)\varepsilon'_{i,t}, \quad var(\varepsilon'_{i,t}) = \delta_i = \frac{1}{1 - d_i}. \quad (4.6)$$

Nótese que en las ecuaciones anteriores, los cuatro valores λ_i, d_i, ω_i y δ_i están relacionados y sólo uno entre ellos es verdaderamente independiente. En la Proposición 2, los parámetros d_i, ω_i y δ_i se obtienen a partir de λ_i . Pueden escribirse los parámetros en función de d_i , ya que λ_i puede escribirse en función de d_i como:

$$\lambda_i = \frac{d_i^2}{(1 - d_i)} \quad (4.7)$$

Se pueden deducir fácilmente las siguientes relaciones:

$$\delta_i = \frac{1}{1 - d_i}, \quad (4.8)$$

$$\omega_i = \frac{d_i}{1 - d_i}. \quad (4.9)$$

Además, la dinámica de cada proceso independiente $z_{i,t}$ está totalmente caracterizada por un único parámetro d_i , $0 < d_i < 1$.

En efecto, la serie \mathbf{z}_t se define como una combinación lineal de las observaciones \mathbf{y}_t , tal que $z_{i,t}$ son procesos independientes univariantes de alisado exponencial, con pesos exponenciales $0 < d_i < 1$. Esto significa que una componente i con mayor valor d_i explica una parte importante de la dinámica de los precios de la electricidad. La evolución de $z_{i,t}$ está relacionada con factores comunes no observados $f_{i,t}$.

4.2. Modelo de factores comunes

La aplicación de los análisis previos a los precios horarios de la electricidad, donde la serie temporal está constituida por vectores de dimensión $n = 24$, proporciona, como se verá más adelante, muchos valores λ_i prácticamente cero, más de 8 en cualquiera de los tres mercados estudiados. Éste es un caso de gran interés práctico, en el que la dinámica del proceso multivariante \mathbf{y}_t de dimensión n está gobernado por un número menor de factores $r < n$.

Se puede dividir el vector de estado \mathbf{f}_t de (4.2) en dos partes: \mathbf{g}_t de dimensión r correspondiente a las componentes de varianza no nula, y \mathbf{o}_t de dimensión $n - r$, correspondiente a las componentes de varianza cero; es decir, $\mathbf{f}'_t = (\mathbf{g}'_t, \mathbf{o}'_t)$, con $\mathbf{o}_{t+1} = \mathbf{o}_t = \mathbf{c}$, donde \mathbf{c} es un vector constante. Las componentes de la serie transformada \mathbf{z}_t en (4.2) están ordenadas del mismo modo, de manera que las últimas $n - r$ componentes son ruido blanco con media constante \mathbf{c} . El vector de observaciones transformado se obtiene a partir de:

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{T}\mathbf{y}_t. \quad (4.10)$$

Nótese que \mathbf{T} es una matriz no singular, por lo que:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}_t. \quad (4.11)$$

Para simplificar la notación, se llama $\mathbf{H} = \mathbf{T}^{-1}$, y \mathbf{H}_r a la matriz de dimensión $n \times r$ formada por las r primeras columnas de \mathbf{H} , y $\bar{\mathbf{H}}_{n-r}$ a la matriz $n \times (n - r)$ formada con el resto de las columnas. Llamando $\mathbf{\Lambda}_r$ a la matriz diagonal de dimensión $r \times r$ formada por los valores λ_i no nulos, se tiene que:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{H}_r \mathbf{\Lambda}_r \mathbf{H}_r^T \quad (4.12)$$

y

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{f}_t = \mathbf{H}_r \mathbf{g}_t + \bar{\mathbf{H}}_{n-r} \mathbf{o}_t = \mathbf{H}\mathbf{g}_t + \boldsymbol{\mu}_0 \quad (4.13)$$

y el modelo (3.4) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{t+1} &= \mathbf{g}_t + \mathbf{b}_t & \text{var}(\mathbf{b}_t) &= \mathbf{\Lambda}_r, \\ \mathbf{y}_t &= \mathbf{H}_r \mathbf{g}_t + \boldsymbol{\mu}_0 + \mathbf{v}_t & \text{var}(\mathbf{v}_t) &= \mathbf{R}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde \mathbf{g}_t es un vector de paseo aleatorio de menor dimensión $r \times 1$ y la matriz de varianza de error del término \mathbf{b}_t es $\mathbf{\Lambda}_r$. Nótese que multiplicando la ecuación de estado en (4.14) por la izquierda por \mathbf{H}_r y llamando

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{H}_r \mathbf{g}_t + \boldsymbol{\mu}_0, \quad (4.15)$$

se obtiene la ecuación de estado del modelo (3.4). Estos factores \mathbf{g}_t se denominan “factores comunes” y representan un número reducido de “tendencias comunes” entre las componentes de la serie \mathbf{y}_t del vector de observación (Engle y Yoo, 1987; Stock y Watson, 1988; Harvey, 1989 y Reinsel, 1993).

El parámetro $\boldsymbol{\mu}_0$ es nuevo en la formulación anterior y su aparición puede parecer sorprendente. Sin embargo, este vector está en todas las formulaciones previas (3.3), (3.4) y (3.2) implícitamente. Nótese que si se desea aplicar la fórmula de recurrencia, es necesario un punto de partida para todas ellas. En el modelo (4.14), $\boldsymbol{\mu}_0$ representa el nivel de precios inicial para cada hora del día, si se considera nulo el vector de estado inicial $\mathbf{g}_0 = 0$. Jones (1966) recomendó tomar el primer dato del vector observación \mathbf{y}_1 como una estimación del nivel inicial. En esta tesis, se va a estimar $\boldsymbol{\mu}_0$ conjuntamente con \mathbf{Q} y \mathbf{R} , aunque su valor será próximo a \mathbf{y}_1 . Afortunadamente, la elección del vector inicial no es crucial si la serie temporal es suficientemente larga como es el caso de los precios de la electricidad. Su influencia sobre la estimación de las matrices conocidas \mathbf{Q} y \mathbf{R} es despreciable. Más aún, este vector constante $\boldsymbol{\mu}_0$ puede reemplazarse por un vector $\boldsymbol{\mu}_t$ determinísticamente variable en el tiempo y puede ser utilizado para introducir variables explicativas o regresores como se verá más adelante.

Aparte de $\boldsymbol{\mu}_0$, el modelo (4.14) tiene tres matrices desconocidas, las matrices de varianza $\boldsymbol{\Lambda}_r$ y \mathbf{R} y la matriz \mathbf{H}_r . Este modelo ofrece algunas ventajas cuando r , el número de factores comunes, es pequeño. En ese caso, el número de parámetros se reduce considerablemente, en especial si n es grande como sucede en el caso de los precios de la electricidad. En el caso de rango incompleto de \mathbf{Q} , la ecuación de observación del modelo (4.14) tiene un vínculo directo con el concepto de cointegración (ver Engle y Yoo, 1987; Reinsel, 1993; y Escribano y Peña, 1994). Existe una matriz \mathbf{V} de dimensión $n \times (n - r)$ que satisface $\mathbf{V}^T \mathbf{H}_r = 0$ y por tanto, multiplicando la ecuación de observación del modelo (4.14) por \mathbf{V}^T se llega a $\mathbf{V}^T \mathbf{y}_t$, la cual es una constante más un proceso de ruido blanco de dimensión $n - r$. Esto es, aunque cada una de las n series del vector \mathbf{y}_t es no estacionaria, $n - r$ combinaciones de ellas son estacionarias. Esto impone ciertas restricciones al desarrollo de los precios, estableciendo relaciones lineales entre ellos con objeto de evolucionar conjuntamente y limitar las diferencias entre ellos. Por otro lado, si r es mucho más pequeño que n , el número de parámetros a ser estimados se reduce enormemente. Desde el punto de vista de la predicción, el evitar la sobrecaracterización puede mejorar las predicciones. Como se verá en los ejemplos de la electricidad, las tendencias comunes llevan a interesantes interpretaciones de la dinámica del proceso.

4.3. Caso especial

Otro caso que ha recibido cierta atención en la literatura (Enns et al. 1982; Harvey, 1986, 1989) es aquel en el que la matriz de varianza de estado es proporcional a la matriz de varianza de observación, $\mathbf{Q} = \lambda \mathbf{R}$, con $\lambda > 0$.

De manera interesante, si se cuenta el número de parámetros del modelo en este caso se obtiene $n(n + 1)/2$ para \mathbf{R} y sólo uno más para λ y, como este número debería coincidir con el número de parámetros de las ecuaciones de alisado exponencial (3.2), el número de grados de libertad para la matriz \mathbf{B} es ¡sólo uno! La matriz de valores propios generalizados en este caso es $\boldsymbol{\Lambda} = \lambda \mathbf{I}$, de manera que es trivial comprobar de acuerdo a las expresiones anteriores que $\mathbf{B} = d \mathbf{I}$ con $d = (-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda})/2$. Por tanto, la matriz de pesos en (3.2) es diagonal con todos sus elementos iguales a d , la matriz completa \mathbf{B} se reduce a un solo parámetro d , como era de esperar según el número de parámetros e $\hat{\mathbf{y}}_{t+1} = \hat{\mathbf{y}}_t + d(\mathbf{y}_t - \hat{\mathbf{y}}_t)$. Nótese que en este

caso, las observaciones originales se actualizan independientemente con el mismo parámetro de alisado. Como \mathbf{Q} es proporcional a \mathbf{R} , las matrices \mathbf{P} y $\mathbf{\Sigma}$ también son proporcionales a \mathbf{R} , $\mathbf{P} = \omega\mathbf{R}$ y $\mathbf{\Sigma} = (1 + \omega)\mathbf{R}$, donde $\omega = (\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda})/2$. En este caso, el proceso dinámico multivariante se caracteriza por idénticos n paseos aleatorios independientes, todos ellos con la misma varianza λ . Esta propiedad no es aplicable a los precios de la electricidad, por lo que no se hará uso de ella en esta tesis.

4.4. Aplicación al análisis de la dinámica de precios de la electricidad

Con los datos de precios de la electricidad de los mercados *Omel*, *Powernext* y *Nord Pool* se ha estimado el modelo (3.4). Se ha realizado la diagnosis del modelo utilizando las 24 series de residuos obtenidos en cada ejemplo. Es importante señalar que para los tres casos la función de autocorrelación, en general, no muestra coeficientes significativamente distintos de cero. En algunas horas aparece un coeficiente ligeramente significativo en el intervalo 5 debido al efecto semanal. (Se verán algunas modificaciones en el capítulo 5 para eliminar este efecto semanal). El análisis factorial dinámico ha sido realizado para los tres mercados y la varianza λ_i de los factores no observados $f_{i,t}$ (paseos aleatorios) del modelo (4.2) se muestran en la tabla 4.1. En esta tabla también se tienen los valores d_i para ayudar a la interpretación del análisis de factores, aunque un solo parámetro sea suficiente para caracterizar la dinámica, como se vio en la Proposición 2.

Tabla 4.1: Parámetros λ_i y d_i (con $i = 1$ a 24) para los tres mercados estudiados en esta tesis.

	OMEL		POWERNEXT		NORD POOL	
	λ_i	d_i	λ_i	d_i	λ_i	d_i
1	2.9727	0.79	2.7742	0.78	30.212	0.97
2	1.3199	0.66	0.9314	0.61	10.954	0.92
3	0.9982	0.62	0.5421	0.51	2.4577	0.76
4	0.5459	0.51	0.3974	0.46	0.5611	0.52
5	0.3971	0.46	0.1774	0.34	0.3347	0.43
6	0.3522	0.44	0.1276	0.30	0.2552	0.39
7	0.2480	0.39	0.0844	0.25	0.1513	0.32
8	0.1594	0.33	0.0764	0.24	0.1150	0.29
9	0.1150	0.29	0.0535	0.21	0.0600	0.22
10	0.0987	0.27	0.0407	0.18	0.0443	0.19
11	0.0457	0.19	0.0320	0.16	0.0401	0.18
12	0.0220	0.14	0.0102	0.10	0.0120	0.10
13	0.0143	0.11	0.0081	0.09	0.0010	0.03
14	0.0097	0.09	0.0007	0.03	1×10^{-29}	0.00
15	0.0014	0.04	2×10^{-30}	0.00	5×10^{-30}	0.00
16	6×10^{-31}	0.00	9×10^{-31}	0.00	3×10^{-30}	0.00
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
24	4×10^{-35}	0.00	4×10^{-35}	0.00	1×10^{-33}	0.00
	7.3001		5.2550		45.1987	

A partir de los datos de la Tabla 4.1, se llega a las siguientes conclusiones respecto a los tres mercados.

1. Según las varianzas mostradas, *Nord Pool* tiene un comportamiento completamente diferente al de los otros dos mercados. *Nord Pool* tiene una varianza total de 45,19 en con-

4.4 Aplicación al análisis de la dinámica de precios de la electricidad

traste con los valores de 7,30 y 5,25 obtenidas para *Omel* y *Powernext*, respectivamente. Por tanto, *Nord Pool* presenta una mayor volatilidad que los otros dos mercados.

2. El primer factor es siempre el más importante y determina las características principales de la evolución de precios a medio y largo plazo. Para *Nord Pool*, esta componente parece ser un paseo aleatorio ($d_1 = 0,97$, virtualmente 1). Sin embargo, para los otros dos mercados, las varianzas del primer factor indican una evolución más suave de los precios, con un grado de alisado $1 - d_1$ cercano a 0,2 en ambos casos.
3. También se observan diferencias entre los tres mercados si se evalúa el porcentaje de variabilidad total explicada con los primeros factores. En *Nord Pool*, el 91,4 % se explica con los dos primeros factores y el 96,6 % con los primeros tres. Sin embargo, en *Powernext* sólo el 70,5 % se explica con dos factores y un 80,8 % se explica con tres. En *Omel*, las diferencias son aún más acusadas, ya que los primeros dos y tres factores explican el 58,2 % y el 72,1 % de variabilidad, respectivamente.
4. La evolución del precio en *Nord Pool* se explica en su mayor parte (91,4 % de la varianza total) tomando los dos primeros factores, cuyos valores $d_1 = 0,97$ y $d_2 = 0,92$ son similares a los de paseos aleatorios. De acuerdo con la teoría económica, la evolución del precio de un producto en un mercado perfecto debería evolucionar como un paseo aleatorio. Dado que *Nord Pool* es un mercado con un mayor volumen de negociación, abierto y competitivo, esto explicaría, al menos hasta cierto punto, el comportamiento obtenido.
5. La Tabla 4.1 muestra un cambio abrupto en las varianzas de los factores a partir del decimocuarto factor en *Nord Pool*, el decimoquinto en *Powernext* y el decimosexto en *Omel*. Los factores finales presentan una varianza despreciable, prácticamente cero (valores inferiores a 10^{-29}), correspondientes a combinaciones lineales de los precios que permanecen constantes en el tiempo. El modelo puede reducirse en buena medida al suprimir estos factores constantes y rebajar el número de parámetros a estimar. El número final de factores a emplear depende del fin último del estudio. Diez factores son un número inusualmente alto para este tipo de análisis. Para un modelo simplificado explicativo de la evolución multivariante de los precios, típicamente se elegirían dos o tres factores (o componentes). Este punto se desarrollará en el capítulo 5.

Los valores de las dos primeras columnas de la matriz H para cada mercado se representan en la Figura 4.1. En el análisis factorial clásico estos 24 valores se denominan cargas o pesos. La primera columna (línea continua) representa el peso del primer factor para cada una de las 24 horas. Son positivos en los tres mercados, aunque ligeramente distintos. Un cambio en el primer factor $f_{1,t}$, el cual es el más relevante en términos de la variabilidad explicada, afecta a las 24 horas en la misma dirección. Ello significa que un aumento en el primer factor lleva a un incremento en los precios de la electricidad para todas las horas del día. El peso del segundo factor (línea discontinua), que es menos importante que el primero, tiene un comportamiento característico de cada mercado. Por ejemplo, en *Omel* este vector de pesos toma valores negativos para las primeras y las últimas horas del día y toma valores positivos a partir de la hora 9. Sin embargo, en *Powernext* los pesos negativos sólo tienen lugar durante las primeras horas del día, con valores positivos importantes en un pico alrededor de la hora 19. Esta forma implica que un incremento en el segundo factor $f_{2,t}$ agudiza la diferencia entre las horas con pesos positivos y aquéllas con pesos negativos, manteniéndose el precio constante durante las horas con peso despreciable.

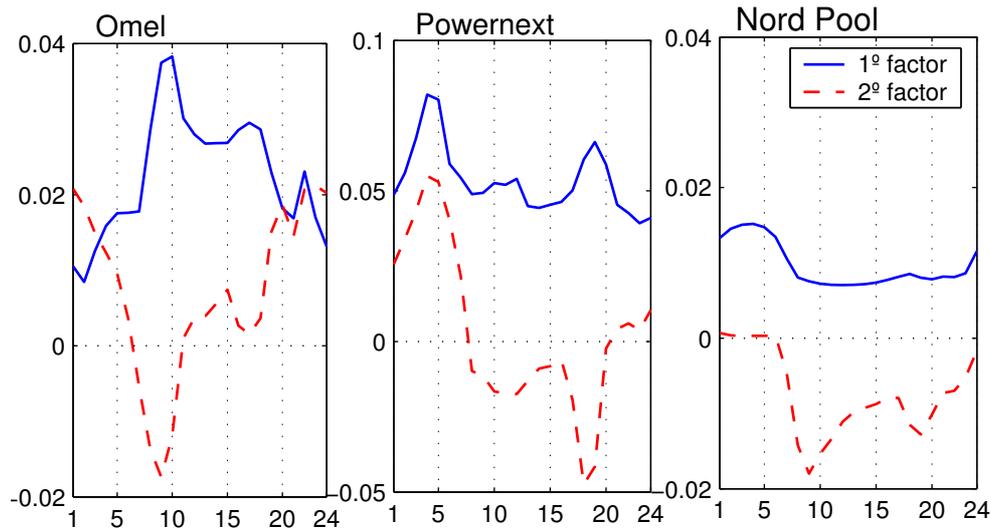


Figura 4.1: Representación de los pesos asociados al primer factor en línea continua y al segundo factor en línea discontinua (las dos primeras columnas de la matriz \mathbf{H}) para los tres mercados eléctricos analizados en esta tesis.

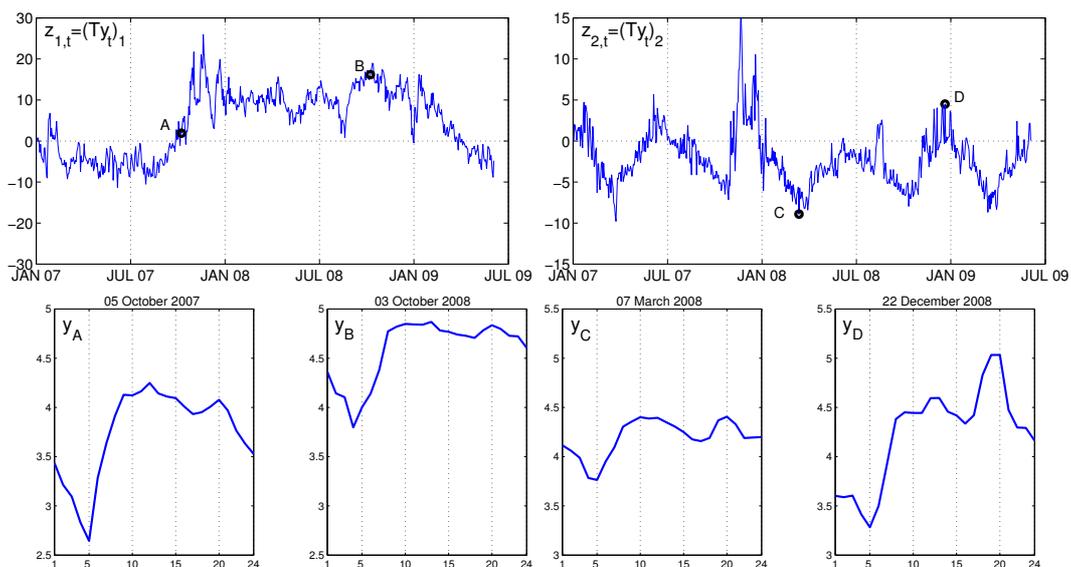


Figura 4.2: Evolución de las primeras dos componentes del vector observación $\mathbf{z}_t = \mathbf{T}\mathbf{y}_t$ en *Powernext* y su impacto sobre los precios

Como ejemplo de la explicación anterior, se han representado en la parte superior de la Figura 4.2 las dos primeras componentes del vector de observación $\mathbf{z}_t = \mathbf{T}\mathbf{y}_t$ para el mercado eléctrico francés *Powernext*. Ello da una idea de la evolución del primer factor no observado $f_{1,t}$ y del segundo $f_{2,t}$ mediante la ecuación (4.2). La evolución del primer factor $f_{1,t}$ es casi un paseo aleatorio, donde el alza de este valor, por ejemplo, del día *A* al día *B* en la gráfica superior izquierda de la Figura 4.2 (donde el primer factor crece y el segundo factor permanece prácticamente constante), supone un incremento en los precios de la electricidad para las 24 horas. Este efecto puede ser visto en detalle en la parte inferior izquierda de la Figura 4.2. El segundo factor $f_{2,t}$, mostrado en la parte superior derecha de la Figura 4.2, demuestra un

4.4 Aplicación al análisis de la dinámica de precios de la electricidad

comportamiento claramente estacional, con mayores valores en invierno y verano y menores en otoño y primavera. De acuerdo con esto y con los pesos del segundo factor en la Figura 4.1, durante la primavera y el otoño las diferencias entre precios pico y precios valle se reducen, mientras que estas diferencias se acrecientan durante los meses de verano y los de invierno. Por ejemplo, el ir del día C al día D representado en la gráfica superior derecha (donde el segundo factor aumenta y el primer factor permanece prácticamente constante), significa que durante las primeras horas del día los precios disminuyen mientras que durante las horas pico alrededor de la hora 19 los precios aumentan. Esto puede verse en la parte inferior derecha de la Figura 4.2. Por consiguiente, el primer factor representa un cambio global en el nivel de precios, mientras que el segundo factor determina la forma de los cambios en el perfil diario de precios. La explicación de estos factores comunes para los otros dos mercados es similar.

La magnitud del cambio que supone cada uno de los factores es proporcional a la raíz cuadrada de λ_i , de manera que conforme aumenta el orden del factor, su contribución es menor. A partir del tercero, la interpretación de cada factor se hace más compleja.

La estrategia que se seguirá en el capítulo 5 es la siguiente: en primer lugar, se estimará el modelo (3.4) de orden completo para los tres mercados en los días laborables desde el 1 de enero de 2007 al 29 de Mayo de 2009 (126 semanas de 5 días). El estudio de los vectores y valores propios de la matriz $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}$ permite analizar la dinámica de los precios de la electricidad. Como siempre, sólo unos pocos factores comunes determinan la mayor parte de la variabilidad total del proceso multivariante. El análisis de factores dinámicos explicado en este capítulo es muy útil para reducir el orden del modelo. Puede reestimarse el modelo reducido final utilizando la formulación (4.14) o simplemente eliminando los factores que sean despreciables y reescribir el modelo consecuentemente.

Capítulo 5

ORDEN DEL MODELO Y EXTENSIONES

5.1. Modelo con días de la semana

Una simple inspección de los valores λ_i de la Tabla 4.1 indica que la dinámica del proceso multivariante puede ser aproximado por un número r de factores muy inferior a la dimensión n del proceso. Dado r , la estimación de este nuevo modelo (4.14) puede ser realizada usando directamente el algoritmo EM para hallar las tres matrices requeridas Λ_r , \mathbf{R} y \mathbf{H}_r . El modelo de factores comunes (4.14) rebaja significativamente el número de parámetros a estimar, los cuales en principio y teniendo en cuenta el criterio de simplicidad es beneficioso desde el punto de vista de la predicción.

El modelo (4.14) de factores comunes es un buen punto de partida y sirve como germen de modelos más sofisticados que incorporan las particularidades del problema a estudiar. Por ejemplo, en el problema de precios de la electricidad, la influencia del día de la semana tiene un importante efecto en el error de predicción. Si se analizan los residuos del modelo se puede comprobar que el lunes es el día de la semana con mayor error, lo que parece consistente con la lógica de las subastas, donde las medias de precios de las primeras horas son significativamente mayores para el lunes que para el resto de días de la semana. Algo similar ocurre para las últimas horas del viernes. Se puede aprovechar la constante μ_0 de la ecuación de observación del modelo (4.14) para considerar una constante distinta para cada día de la semana, de lunes a viernes. Desde el punto de vista predictivo, la información del día de la semana mejora los resultados, aunque con la desventaja de un significativo incremento del número de parámetros del modelo. Por tanto, la ecuación observacional puede ser ligeramente modificada para incorporar un vector de $p = 5$ variables explicativas $\mu_t = \mathbf{G}\mathbf{m}_t$ o términos deterministas,

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{t+1} &= \mathbf{g}_t + \mathbf{b}_t & \text{var}(\mathbf{b}_t) &= \Lambda_r, \\ \mathbf{y}_t &= \mathbf{H}_r \mathbf{g}_t + \mathbf{G}\mathbf{m}_t + \mathbf{v}_t & \text{var}(\mathbf{v}_t) &= \mathbf{R}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

con una nueva matriz \mathbf{G} de dimensión $n \times p$. Así, creando una variable indicadora (*dummy*) para cada día de la semana, $j = 1$ para el lunes, $j = 2$ para el martes y así sucesivamente hasta $j = 5$ para el viernes, se puede definir $\mathbf{m}_t = (m_{1,t}, m_{2,t}, \dots, m_{5,t})$ con

$$m_{j,t} = \begin{cases} 1, & \text{mod}(t - j, 5) = 0, \\ 0, & \text{mod}(t - j, 5) \neq 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

donde $\text{mod}(t - j, 5)$ es el módulo tras la división de $t - j$ entre 5. Por tanto, las $p = 5$ columnas de la matriz \mathbf{G} están relacionadas con el precio inicial de la electricidad de lunes a viernes en las $n = 24$ horas del día. El análisis de los residuos muestra de nuevo que el modelo es bastante adecuado y ahora los coeficientes alrededor del retardo 5, correspondientes al efecto semanal, en la función de autocorrelación dejan de ser significativos para casi todas las horas del modelo multivariante.

Dado el modelo (5.1), el siguiente paso es seleccionar el orden r más adecuado. El orden r puede determinarse por inspección de los valores propios λ_i . Este resultado es consistente con un estudio teórico realizado por Billah et al. (2005), donde se aplica el enfoque del criterio de información para la selección automática del modelo. El orden r seleccionado es aquel que minimiza el Criterio de Información de Akaike (AIC),

$$AIC_r = -2 \log \left[L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_r, \mathbf{Y}_N) \right] + 2K_r, \quad (5.3)$$

donde K_r es el número de parámetros desconocidos.

El primer término del miembro derecho de (5.3) es el logaritmo de la función de verosimilitud en $\hat{\boldsymbol{\theta}}_r = \{\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_r, \hat{\mathbf{R}}, \hat{\mathbf{H}}_r, \hat{\mathbf{G}}\}$ con los datos $\mathbf{Y}_N = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$. Este término es una medida de la bondad de ajuste de un modelo de orden r a los datos y puede calcularse como

$$-2 \log \left[L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_r, \mathbf{Y}_N) \right] = (N - 1) \log \left| \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \right| + \sum_{t=2}^N \boldsymbol{\varepsilon}_t^T \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (5.4)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{y}_t - \hat{\mathbf{y}}_t$ son las innovaciones, $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ sus matrices de varianza estacionaria estimadas, y N la longitud de la serie temporal. El segundo término, el término de penalización, es una medida de la complejidad del modelo empleado

$$K_r = \left(\frac{2n - r + 1}{2} \right) r + np + \frac{n(n + 1)}{2}, \quad (5.5)$$

con $p = 5$ el número de variables explicativas y $n = 24$. El criterio adolece de una desventaja observada habitualmente: tiene tendencia a favorecer los modelos de alta dimensión. Ejemplos que ilustran lo anterior pueden encontrarse en Shumway (1988), p. 169, Cavanaugh y Shumway (1997) y Linhart y Zucchini (1986), quienes comentan que “en algunos casos el criterio continúa decreciendo mientras el número de parámetros del modelo sigue creciendo”. Así, con el fin de salvar el problema de sobreestimación de AIC, Shumway (1988) recomienda el uso del Criterio de Información de Schwarz (SIC),

$$SIC_r = -2 \log \left[\mathbf{L}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_r, \mathbf{Y}_N) \right] + K_r \log(N), \quad (5.6)$$

donde el término de penalización en AIC se sustituye por $K_r \log(N)$ (Schwarz, 1978). Un estudio de simulación de Lütkepohl (1985) muestra que este criterio, también conocido como Criterio de Información Bayesiano (BIC), conduce con frecuencia a estimaciones correctas del

5.1 Modelo con días de la semana

modelo y tiene el menor error de predicción para autorregresiones multivariantes. El SIC impone un mayor “factor de penalización”. También se ha considerado el criterio propuesto por Bai y Ng (2002) para modelos factoriales de dimensión grande. Sin embargo, como veremos en la sección siguiente, un estudio de simulación muestra que este criterio aplicado a problemas de dimensión 24 tiende a subestimar el orden del modelo.

Para cada mercado se han analizado todos los órdenes desde $r = 1$ a $r = 24$. En la Figura 5.1 se representan el AIC y el SIC para los tres mercados. El AIC adolece de los inconvenientes antes citados. El SIC ofrece resultados similares a los que se obtienen por simple inspección de los valores propios λ_i de la Tabla 4.1, donde los valores correspondientes a los índices 10 u 11 son despreciables.

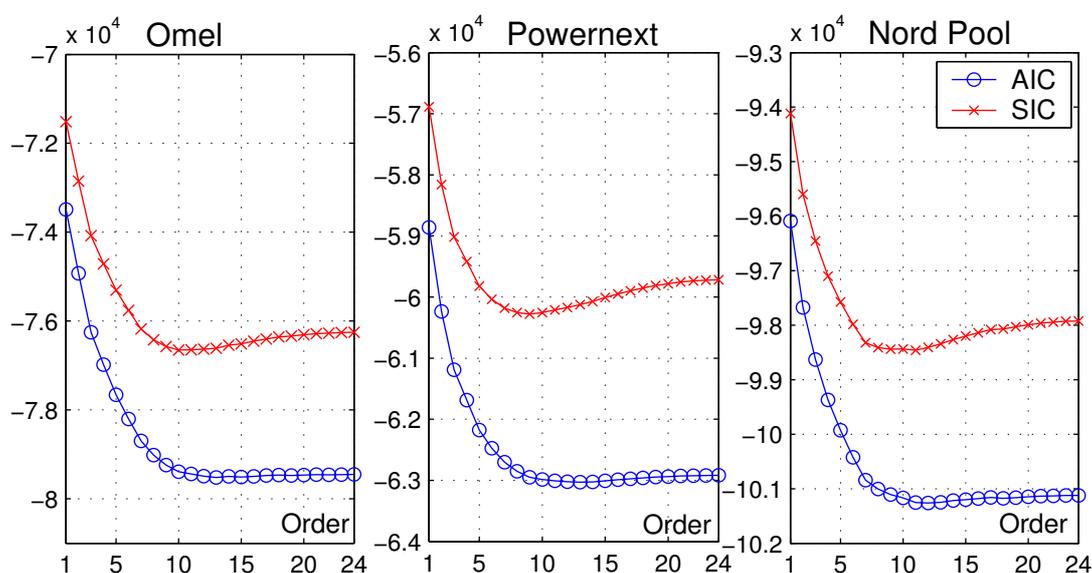


Figura 5.1: Criterios AIC y SIC de Selección de Orden para el modelo aplicado a los mercados de *Omel*, *Powernext* y *Nord Pool*

El modelo seleccionado con el AIC es óptimo si se está interesado en minimizar el error de predicción. Una forma común y sencilla de comprobar la adecuación de un modelo de serie temporal es probar su capacidad de predecir observaciones futuras. Esto se desarrolla en el siguiente apartado y los resultados demuestran que el orden seleccionado por ambos procedimientos es similar.

Los criterios AIC y SIC fueron desarrollados originalmente en unos contextos específicos. La efectividad del método en aquellos contextos llevó a una rápida expansión de su aplicación a muchos otros modelos (Linhart y Zucchini, 1986). Los criterios comentados en este apartado son criterios generales para estimar la dimensión de un modelo.

Aparte de Cavanaugh y Shumway (1997) quienes investigaron una versión basada en *bootstrap* de AIC, el desarrollo de criterios de selección explícitamente para aplicaciones en el espacio de los estados ha recibido poca atención en la literatura. El artículo más reciente es el de Billah et al. (2005) que habla de su uso en modelos de series temporales estructurales. Sin embargo, en nuestro caso se trata más bien de un problema de selección de orden en el

análisis clásico de factores no dinámicos. La aplicación del AIC al análisis de factores por máxima verosimilitud se describe en un libro de texto de análisis estadístico multivariante (Press, 1982). Una revisión de la numerosa literatura relacionada con los criterios de selección muestra versiones múltiples que han aparecido en diferentes contextos para evitar los inconvenientes de la fórmula simple originalmente propuesta por Akaike.

5.2. Criterios alternativos para la selección de orden

Establecer el mejor criterio para seleccionar el modelo no es sencillo. La mayoría de los estudios teóricos desarrollados se basa en resultados asintóticos y se adapta a la estructura especial de cada modelo. Por ejemplo, el caso más estudiado es el correspondiente al modelo VAR(p), véase Lütkepohl (2005). En la citada referencia se menciona que en general no tiene por qué coincidir el mejor método para seleccionar el orden del modelo con el modelo que proporciona las mejores predicciones.

Está ampliamente mencionado en la literatura (Lütkepohl, 2005) que los criterios con mejores resultados asintóticos (tamaño de muestra grande) no tienen por qué ser los mejores cuando se aplican a datos reales con tamaños muestrales moderados. Estas diferencias aumentan con la dimensión del problema. En este caso, ante la dificultad de un tratamiento analítico del problema, la solución consiste en un estudio de simulación.

En esta sección se va a realizar un estudio de Monte Carlo de los criterios mencionados en la sección anterior y se van a incluir otros recomendados para otros modelos de análisis factorial dinámico (Bai y Ng, 2002, 2007).

El problema de selección de orden del modelo es una cuestión que surge naturalmente en este marco. En esta tesis se ha determinado de dos maneras:

1. Como un problema de selección de modelo, utilizando la metodología típica basada en criterios de información (AIC y SIC).
2. Estudiando los errores de predicción para cada modelo: utilizando un conjunto de datos para estimar y otro conjunto para validar.

Los dos métodos se han aplicado a los tres mercados objeto de análisis y ambos ofrecieron resultados similares. Merece la pena comentar que en los tres mercados el número de factores es sorprendentemente alto, superior a 8. Determinar el número de factores es un importante aspecto del modelo. Aquí se han empleado dos criterios, el criterio de AIC y el criterio de SIC. Existen criterios alternativos dados en Bai y Ng (2002, 2007) con los que se ha llevado a cabo una comparación.

Para realizar este estudio comparativo, los criterios AIC y SIC pueden reescribirse como sigue (véase Lütkepohl (2005), p. 149):

$$AIC(r) = \log |\hat{\Sigma}(r)| + K(r) \frac{2}{N}, \quad (5.7)$$

$$SIC(r) = \log |\hat{\Sigma}(r)| + K(r) \frac{\log(N)}{N}. \quad (5.8)$$

5.2 Criterios alternativos para la selección de orden

Aquí $\hat{\Sigma}(r)$ denota al estimador de máxima verosimilitud de Σ obtenido para un modelo con r factores y $K(r)$ parámetros del modelo (los resultados no varían en exceso si se sustituye en las expresiones anteriores $K(r)$ por $n \cdot r$. El número de observaciones en la serie temporal múltiple es N y la dimensión del vector de observación es n . Es bien conocido que asintóticamente el criterio AIC sobreestima el orden y que el criterio SIC es asintóticamente insesgado. Bai y Ng desarrollan algunos criterios originales para la determinación del número de factores “dentro del marco de grandes dimensiones (n) y de grandes dimensiones temporales (N)”. Allí se utilizan funciones de penalización distintas que llevan a considerar los siguientes tres criterios:

$$IC_1(r) = \log |\hat{\Sigma}(r)| + K(r) \left(\frac{n+N}{nN} \right) \log \left(\frac{nN}{n+N} \right), \quad (5.9)$$

$$IC_2(r) = \log |\hat{\Sigma}(r)| + K(r) \left(\frac{n+N}{nN} \right) \log C_{nN}^2, \quad (5.10)$$

$$IC_3(r) = \log |\hat{\Sigma}(r)| + K(r) \left(\frac{\log C_{nN}^2}{C_{nN}^2} \right), \quad (5.11)$$

donde $C_{nN} = \min(\sqrt{n}, \sqrt{N})$. Los criterios propuestos difieren de los criterios de información utilizados en el análisis de series temporales en que la penalización es función tanto de n como de N . Para un modelo dinámico factorial distinto, Bai y Ng muestran que asintóticamente (cuando $N, n \rightarrow \infty$) los tres criterios seleccionan el orden correcto. En los ejemplos estudiados, $N = 630$ y $n = 24$, por lo que el término de penalización en los tres casos es aproximadamente $\log(24)/24 = 0,132$ en lugar de $\log(630)/630 = 0,010$ utilizado en el SIC. Por tanto, los tres criterios IC tenderán a reducir el número de factores. Se puede demostrar fácilmente, utilizando el Lema 4.1 de Lütkepohl (2005), que el número de factores elegido mediante criterios IC es siempre menor o igual que el obtenido mediante los criterios SIC y AIC en este caso.

Bai y Ng (2002) realizaron un completo estudio de simulación utilizando valores de N entre 10 y 8000 y valores de n entre 10 y 8000. Los autores concluyen que (pp. 203) “cuando el $\min(n, N)$ es 40 o superior, los tests propuestos dan estimadores precisos del número de factores. Dado que nuestra teoría se basa en n y N grandes, no es sorprendente que para n y N muy pequeños, los criterios propuestos sean inadecuados”.

Con el fin de comprobar la adecuación de los criterios propuestos se ha realizado un pequeño experimento. Se utiliza el modelo (3.4) con $n = 24$ y $N = 630$. Además, $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{Q} = k\mathbf{Q}_r$, donde k es un número positivo y \mathbf{Q}_r es una matriz diagonal con r valores no nulos. El valor k es una medida de la relación señal ruido. Los valores grandes de k permiten identificar el número de factores fácilmente. La Tabla 5.1 muestra el resultado correspondiente a $r = 6$ y la Tabla 5.2 para $r = 10$, donde la matriz diagonal \mathbf{Q}_r tiene r valores en la diagonal iguales a 1. La Tabla 5.3 toma $r = 10$, pero los r valores en la diagonal de \mathbf{Q}_r son 1, 0,9, 0,8, ..., 0,1. En todos los casos, los criterios IC subestiman el número de factores. Nótese que estos resultados coinciden con los comentarios mencionados por los autores. Y sorprendentemente, el mejor criterio es el AIC (bastante similar al SIC). Este hecho es conocido en la literatura de series temporales. Por ejemplo, Paulsen y Tjostheim (1985, p.224) concluyen que el criterio AIC selecciona el orden correcto si la serie temporal múltiple subyacente tiene una dimensión elevada, superior a tan sólo 5.

Se han realizado más simulaciones incrementando el número de dimensiones n hasta 100 (véase la Tabla 5.4) con resultados parecidos.

$r = 6$	$k = 0,2$			$k = 1$			$k = 5$		
	AIC	SIC	IC ₃	AIC	SIC	IC ₃	AIC	SIC	IC ₃
1			50			1			
2			50			18			
3						28			
4		2				3		5	7
5	1	35						17	17
6	48	13		49	50		50	24	22
7	1			1				4	4
									5

Tabla 5.1 Número de simulaciones 50, número de factores $r = 6$, número de variables $n = 24$ y número de observaciones $N = 630$. Parámetros $R = I, Q = kQ_r, Q_r = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$. Valores de $k = 0, 2, 1$ y 5 .

$r = 10$	$k = 0,2$			$k = 1$			$k = 5$		
	AIC	SIC	IC ₃	AIC	SIC	IC ₃	AIC	SIC	IC ₃
1			49			49			
2			1			1			
3						16			
4						26			
5						8			
6								5	7
7	0	3						20	19
8	6	27						18	17
9	37	19						7	7
10	7	1		49	50		50	50	1
11				1					

Tabla 5.2 Número de simulaciones 50, número de factores $r = 10$, número de variables $n = 24$ y número de observaciones $N = 630$. Parámetros $R = I, Q = kQ_r, Q_r = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$. Valores de $k = 0, 2, 1$ y 5 .

$r = 10$	$k = 0,2$			$k = 1$			$k = 5$				
	AIC	SIC	IC ₃	AIC	SIC	IC ₃	AIC	SIC	IC ₃		
1		50	50			47			15	16	5
2						3			21	22	20
3		3							12	10	21
4		16							2	2	4
5	3	29									
6	27	2			13						
7	20				34						
8				8	3						
9				38					10		
10				4			50	40			

Tabla 5.3 Número de simulaciones 50, número de factores $r = 10$, número de variables $n = 24$ y número de observaciones $N = 630$. Parámetros $R = I, Q = kQ_r, Q_r = \text{diag}(1, 0, 9, 0, 8, \dots, 0, 2, 0, 1, 0, 0, \dots, 0)$. Valores de $k = 0, 2, 1$ y 5 .

$r = 10$	$k = 0,2$			$k = 1$			$k = 5$				
	AIC	SIC	IC ₃	AIC	SIC	IC ₃	AIC	SIC	IC ₃		
1		50	50								
2		35				29			30	27	
3		15				21			20	22	
4	8										7
5	36										19
6	6										15
7											9
8				1	11						18
9				25	38						16
10				24	1		50	50			7

Tabla 5.4 Número de simulaciones 50, número de factores $r = 10$, número de variables $n = 100$ y número de observaciones $N = 630$. Parámetros $R = I, Q = kQ_r, Q_r = \text{diag}(1, 0, 9, 0, 8, \dots, 0, 2, 0, 1, 0, 0, \dots, 0)$. Valores de $k = 0, 2, 1$ y 5 .

Conviene destacar que la elección del término de penalización en todos los criterios es bastante ad hoc y no está motivada realmente desde un punto de vista teórico y parece que habría necesidad de investigar a fondo este asunto. De acuerdo con el estudio de simulación aquí realizado y las recomendaciones dadas por otros autores, parece que los criterios AIC y SIC deberían ser aceptados.

En los últimos años ha existido un gran interés en el campo de las series temporales por lo relacionado con la selección del orden y los criterios de información. Una referencia utilizada es el libro de Lütkepohl (2005), *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. En este libro hay un capítulo titulado *Comparison of Order Selection Criteria* y en él se utilizan cuatro criterios estándar AIC, SIC, FPE (*Final Prediction Error*, ver Akaike (1969)) y HQ (*Hannan-Quinn*, ver Hannan y Quinn, 1978) para seleccionar el orden de un modelo. El autor realiza una simulación de un modelo VAR y llega a la conclusión de que “todavía no se tiene una respuesta clara a la pregunta de qué criterio emplear en el caso de muestras pequeñas (pp. 156). En resumen, el autor indica que “se ha visto que el criterio SIC funciona bastante bien para elegir el orden correcto de un VAR, pero para tamaños de muestra moderados el AIC puede ofrecer mejores resultados en cuanto a precisión de las predicciones”. En el libro “*Forecasting with Exponential Smoothing: the State Space Approach*” de Hyndman et al. (2008), los autores emplean los mismos criterios antes mencionados (con versiones modificadas) y finalmente recomiendan utilizar el criterio AIC. Un artículo reciente titulado “*Dynamic Orthogonal Components for Multivariate Time Series*” de Matteson et al. (2011) en el *Journal of the American Statistical Society*, recomienda el criterio AIC para seleccionar el número de componentes: “se recomienda emplear el Criterio de Información de Akaike (AIC) para ajustar un modelo vectorial autorregresivo a los datos”. Aunque es cierto que ha habido avances recientes en el campo de los criterios de selección de modelos, en el ámbito de las series temporales multivariantes los criterios AIC y SIC siguen utilizándose. El problema de selección del orden en el contexto del modelo en el espacio de los estados es determinar el orden del vector estado. Aparte de Cavanaugh y Shumway (1997), quienes justifican e investigan una versión del AIC basada en *bootstrap*, la literatura no ha prestado mucha atención al desarrollo de criterios de selección de modelo expresamente diseñados para aplicaciones en el espacio de los estados. Los criterios empleados por los autores son, de nuevo, el AIC y el SIC y los resultados y recomendaciones son similares a las ya mencionadas.

5.3. Conclusión

El número de factores habitualmente utilizados en la literatura de análisis factorial dinámico suele ser bajo, dos o tres. Véase por ejemplo Alonso et al (2011) en el que hacen un estudio de los precios de la electricidad con dos factores. En muchos casos, desde el punto de vista descriptivo, un número bajo de factores es suficiente y deseable.

Sin embargo, los resultados obtenidos del modelo aquí presentado indican un número de factores sorprendentemente alto. En este capítulo se ha intentado justificar y seleccionar los criterios más convenientes para elegir el orden en el modelo de alisado exponencial multivariante. En la aplicación a los precios de la electricidad, el número de factores que recomiendan los criterios AIC y SIC está por encima de 8. En el capítulo siguiente, veremos que este resultado se confirma desde el punto de vista de las predicciones.

Capítulo 6

PREDICCIÓN

6.1. Precisión de las predicciones con el modelo de alisado exponencial (varios órdenes)

Cuando se elige un modelo, los economistas y los estadísticos desean evaluar la capacidad de la técnica para predecir adecuadamente. Como se mencionó previamente, los modelos fueron estimados con los datos correspondientes a los días laborables entre el 1 de enero de 2007 y el 29 de mayo de 2009 (126 semanas de 5 días). Para examinar la capacidad de predicción del modelo, se va a tomar un subconjunto de los datos para que sirva como control (desde el 1 de junio de 2009 al 25 de diciembre de 2009, 30 semanas de 5 días). En todos los casos, se ha desechado el 1 % de las observaciones atípicas con el fin de evitar el efecto de observaciones extremas en la evaluación del comportamiento del modelo.

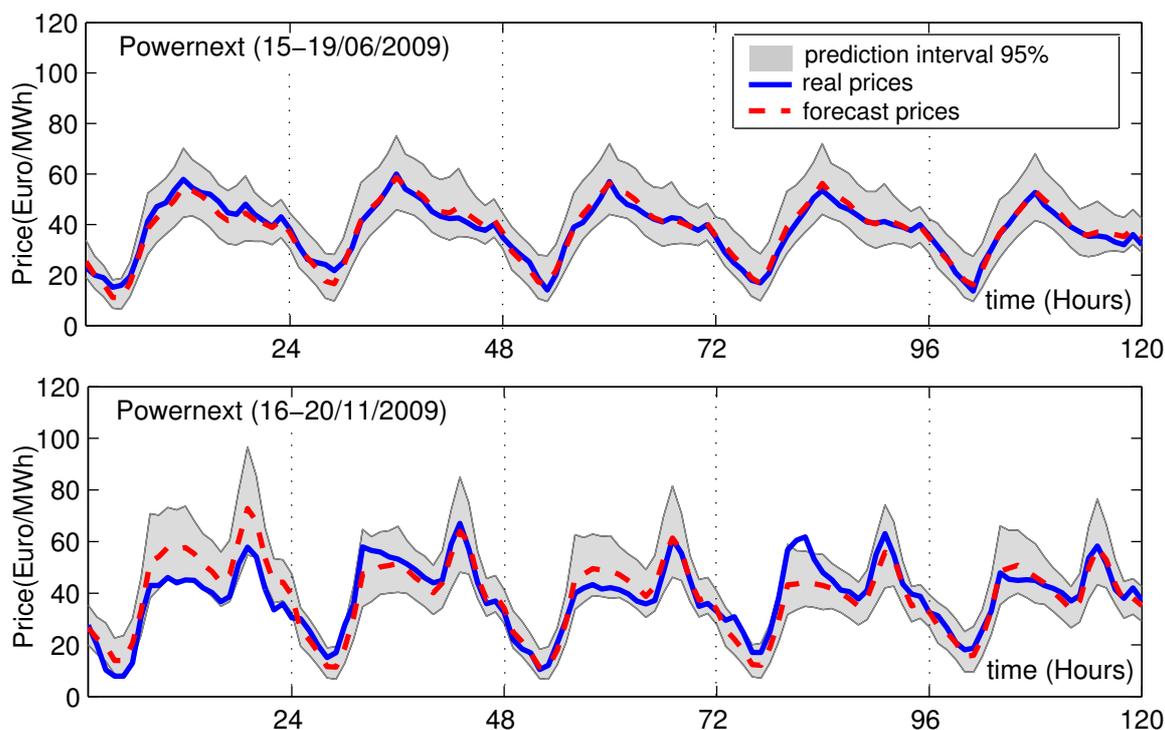


Figura 6.1: Resultado de las predicciones a corto plazo para dos semanas en *Powernext*

Para hacerse una idea de la precisión de las predicciones del modelo, la Figura 6.1 muestra las predicciones en dos semanas muy distintas en el mercado *Powernext* y sus intervalos de confianza del 95 %. Las gráficas corresponden a precios horarios y cada día está delimitado por líneas verticales discontinuas. Los precios reales se indican con una línea continua y las predicciones, con una línea discontinua (los intervalos de predicción están basados en la distribución normal de los errores del modelo, $\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t \sim N(0, \Sigma)$). La parte superior de la gráfica muestra un ajuste muy aceptable, que se corresponde con una semana donde los precios mantuvieron un perfil estable.

Por el contrario, en la parte inferior de la Figura 6.1, la predicción es mucho peor que la de la parte superior, ya que los precios experimentaron grandes cambios de un día a otro. Sin embargo, esta figura sirve para ilustrar una de las propiedades del alisado exponencial, su robustez. Al principio el método reacciona ante el dato atípico y ofrece una predicción errónea, pero tras un corto periodo de tiempo, el alisado exponencial actúa ignorando las señales falsas representadas por los atípicos. Al final de la semana mostrada en la parte inferior de la Figura 6.1, la predicción vuelve a seguir un patrón una vez más. Estos diferentes comportamientos se repiten en los tres mercados analizados. Se piensa que la robustez del modelo es una propiedad especialmente destacable del mismo.

6.2. Comparación de los errores de predicción de los modelos de alisado exponencial de distinto orden

Se ha estimado el modelo multivariante de alisado exponencial (5.1) para los tres mercados *Powernext*, *Omel* y *Nord Pool* y para todos los órdenes comprendidos entre $r = 0$ y $r = 24$.

Nótese que $r = 0$ es un caso muy especial, es un modelo de regresión pura en el que la parte dinámica se elimina. Este modelo es $\hat{y}_t = \mathbf{G}m_t$, y en la forma del espacio de los estados (3.4), $\mathbf{Q} = 0$.

Dados los regresores seleccionados (5.2), el procedimiento simplemente calcula una media para los $5 \times 24 = 120$ periodos horarios de la semana.

Además, se ha considerado al igual que otros autores hicieron en su momento, otro modelo trivial, el que predice para mañana los valores observados hoy, que es $\hat{y}_t = y_{t-1}$. Nótese que este modelo trivial es también un caso especial del modelo completo, en (3.2) se corresponde con $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ (la matriz identidad) y en la forma en el espacio de los estados (3.4) el modelo implica que $\mathbf{R} = 0$.

En la Tabla 6.1 se comparan las predicciones obtenidas con los diferentes modelos utilizando la raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE)

$$RMSE = \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_t' \varepsilon_t \right)^{1/2}. \quad (6.1)$$

Una vez más, el modelo con $r = 10$ parece ser el mejor, en consonancia con los análisis de valores propios del apartado 4.4 y con los criterios AIC y SIC empleados en el capítulo anterior.

6.3 Comparación con otras metodologías

Tabla 6.1: Error cuadrático medio (RMSE) para los tres mercados y para distintos modelos.

	$r = 3$	$r = 7$	$r = 10$	$r = 15$	$r = 20$	$r = 24$	$\hat{y}_t = y_{t-1}$	$\hat{y}_t = \mathbf{Gm}_t$
OMEL	0.306	0.261	0.256	0.259	0.259	0.258	0.299	0.748
POWERNEXT	0.457	0.423	0.417	0.416	0.416	0.416	0.506	1.024
NORD POOL	0.198	0.183	0.182	0.180	0.180	0.180	0.205	0.799

Los dos modelos triviales muestran en los tres mercados un peor comportamiento, tal y como cabía esperar por estar estos dos modelos ya incluidos entre los candidatos durante el proceso de optimización. El buen comportamiento del modelo $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ puede parecer sorprendente. Este resultado se menciona por otros autores (Conejo et al., 2005; Weron, 2006 y Alonso et al., 2011) y es consistente con los modelos estimados y con el análisis de valores propios del modelo completo: en el contexto de los mercados de la electricidad, la consecución de un 10 % de mejora al predecir supone un beneficio económico considerable.

El procedimiento más común y sencillo para comprobar las hipótesis del modelo es a través de gráficas de residuos. En los ejemplos analizados, las funciones de autocorrelación de los residuos horarios no muestran una estructura significativa de correlación, lo cual es suficiente para aceptar que los residuos no están correlacionados. Ello no significa, no obstante, que las observaciones sean independientes o que la distribución de las innovaciones sea normal. Aparece la necesidad de incorporar ajustes al modelo mediante el empleo de términos de heterocedasticidad condicionada o considerando para las innovaciones distribuciones *heavy-tailed*. Sin embargo, desde el punto de vista de la predicción a corto plazo estas correcciones no mejoran los resultados significativamente. La bondad de ajuste de los tests de tipo Ljung-Box en este caso no es adecuada. El estudio de este problema es muy complejo y queda más allá del alcance de este trabajo. La alternativa para comprobar la bondad del ajuste es utilizar validación cruzada, empleando observaciones distintas de aquellas tomadas en la etapa de estimación para comprobar la capacidad predictiva del modelo.

No se detecta ningún patrón de comportamiento sistemático en los errores. Se ha calculado la raíz del error cuadrático medio para los errores de predicción obtenidos con diferentes modelos. Se han considerado alisados exponenciales multivariantes de diferentes órdenes r así como otros modelos triviales, incluidos en la formulación general del modelo de alisado exponencial.

6.3. Comparación con otras metodologías

Para comparar las predicciones del modelo con los resultados obtenidos con los modelos univariantes empleados para la predicción del precio horario a corto plazo, se necesitan algunos criterios para medir la precisión de la predicción. Algunas medidas comúnmente empleadas que se basan en errores relativos son engañosas al aplicarse a los precios de la electricidad. En particular, cuando los precios de la electricidad caen hasta cero, los errores relativos son muy grandes independientemente del error absoluto real. Se han propuesto normalizaciones alternativas en la literatura; por ejemplo, sean y_h e \hat{y}_h los logaritmos del precio observado y del precio predicho para cada una de las 120 horas de la semana, se define el error medio semanal (MWE) como

$$MWE = \frac{1}{120} \frac{\sum_{h=1}^{120} |y_h - \hat{y}_h|}{\bar{y}}, \quad (6.2)$$

donde \bar{y} es el precio medio logarítmico de la semana. En este análisis se mantienen todos los datos tal y como se produjeron, sin eliminar ninguno de los atípicos, para ilustrar las grandes variaciones observadas entre semanas. Como se describe en este trabajo y también se menciona ampliamente en la literatura, algunos días son muy difíciles de predecir.

En la Figura 6.2 se muestran los resultados obtenidos con modelos ARX aparecidos en los artículos de Misiorek, Truck y Weron (2006) y Weron (2009) para la Interconexión JPM.

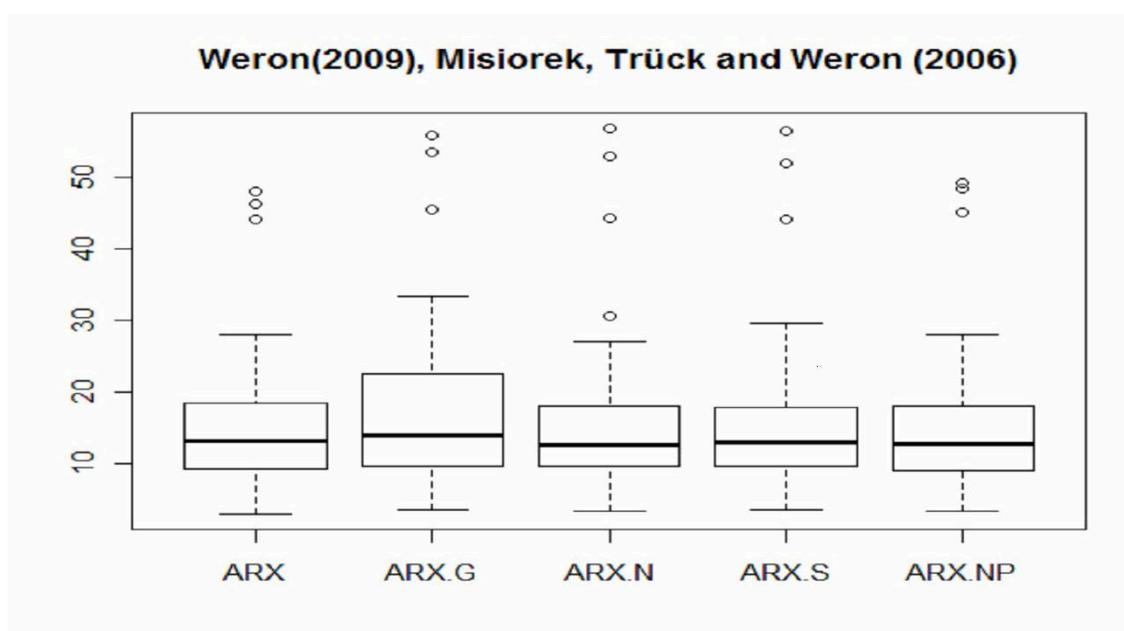


Figura 6.2: Error medio semanal (MWE) de las predicciones de precios de la electricidad mediante distintos modelos ARX

Las diferencias en el MWE (error medio semanal) no son relevantes para ninguno de los modelos como puede verse en la Figura 6.2 y no es un buen indicador de la capacidad de predicción del precio. Se calcula simplemente con el fin de compararlo con el obtenido por otros autores.

Con el fin de comparar los resultados con los obtenidos por los modelos univariantes, en la literatura se han hallado algunos resultados relativos al mercado de *Omel*: Contreras et al. (2003) proporciona la media de los valores de MWE para cada mes del año 2000 y que oscilan entre un 7,75 y un 14,68 %. Conejo et al. (2005) indica un MWE entre un 6,32 y un 13,78 % y García-Martos et al. (2007) muestra valores de MWE entre un 4,46 y un 14,90 % para las semanas elegidas en el año 2002. La comparación es muy compleja de llevar a cabo, ya que la información proporcionada es distinta en cada publicación y los periodos de tiempo estudiados no coinciden. Además, los resultados son fuertemente dependientes del tratamiento de atípicos. Una referencia útil que describe este problema es el libro de Weron (2006) donde se

recomienda evaluar el comportamiento de los modelos durante semanas “tranquilas”, así como durante periodos de alta volatilidad. La precisión varía obviamente para cada mercado. No se han encontrado publicaciones que permitan la comparación con los resultados obtenidos para los mercados de *Powernext* y *Nord Pool*. Para llegar a conclusiones definitivas en cuanto a la capacidad de predicción de los distintos modelos propuestos en la literatura, es necesario llevar a cabo un estudio específico que tenga en cuenta las consideraciones anteriores.

Un análisis más en detalle nos lleva a presentar también en este apartado un estudio comparativo de la metodología desarrollada frente a otras dos técnicas de predicción a corto plazo de precios de la electricidad con el objetivo de analizar la capacidad predictiva del modelo. Mirando específicamente a los modelos univariantes de series temporales se pueden distinguir dos enfoques distintos en la literatura que veremos en las siguientes apartados.

6.3.1. Modelos ARIMA estacionales para series horarias

En este apartado se considera una sola serie consistente en los precios horarios. Existen varios artículos que siguen este enfoque. Algunos de ellos utilizan variables explicativas o regresores. Los resultados y recomendaciones varían de un trabajo a otro. Nogales et al. (2006) aplicaron funciones de transferencia y regresión dinámica a la predicción de precios de la electricidad. Contreras et al. (2003) predijeron precios de la electricidad en los mercados español y californiano aplicando modelos ARIMA. Troncoso et al. (2002) compararon la técnica kWNN (*Weighted Nearest Neighbours*) con la regresión dinámica. Crespo-Cuaresma et al. (2004) sugieren un grupo de modelos univariantes para predecir precios de la electricidad en el mercado de Leipzig (LPX), el mercado *spot* más importante de Alemania en aquel momento. Conejo et al. (2005) comparan varios métodos incluyendo la aproximación wavelet, los modelos ARIMA y las redes neuronales. Nogales et al. (2006) predicen los precios en la *PJM Interconnection* a través de funciones de transferencia, mostrando que la inclusión de variables explicativas no reduce significativamente los errores de predicción.

Dados los datos disponibles en el estudio comparativo, se considera un modelo ARIMA con estacionalidad. Algunos estudios incluyen una doble estacionalidad, una diaria con una periodicidad de 24 horas y otra semanal con una periodicidad de 168 horas. Como se explica y justifica en este trabajo, los datos de los fines de semana se han eliminado, lo que implica una reducción de la estacionalidad semanal. Los modelos seleccionados mediante procedimientos de estimación automática son:

$$\begin{aligned} \text{Omel:ARIMA}(6, 1, 4) \times (4, 0, 5)_{24} \\ \text{Powernext:ARIMA}(5, 1, 3) \times (5, 0, 4)_{24} \\ \text{Nord Pool:ARIMA}(4, 1, 3) \times (3, 0, 3)_{24} \end{aligned}$$

Se producen pequeñas modificaciones al modificar los criterios de búsqueda, pero desde el punto de vista de la precisión de los resultados no varían sustancialmente.

Como ejemplo, el modelo estimado para *Nord Pool* es el siguiente:

```

ARIMA(4,1,3)(3,0,3)[24]

Coefficients:
      ar1      ar2      ar3      ar4      ma1      ma2      ma3      sar1
0.782 -0.2885  0.352  -0.1355  -0.6241  0.1014  -0.3905  0.8781
s.e.   NaN      NaN      NaN      NaN      NaN      NaN      NaN      0.0037
      sar2      sar3      sma1      sma2      sma3
-0.5938  0.6777  -0.5832  0.6500  -0.5349
s.e.     NaN      NaN      0.0124  0.0034      NaN

sigma^2 estimated as 0.001181:  log likelihood=29488.7
AIC=-58949.4  AICC=-58949.37  BIC=-58842.66
    
```

Figura 6.3: Modelo ARIMA estimado para *Nord Pool*.

6.3.2. 24 modelos independientes, uno para cada hora

Este procedimiento se recomienda en García-Martos et al. (2007) y es también mencionado en Weron (2006) y en Misiorek et al. (2006). Dentro de esta modalidad se proponen dos estrategias alternativas. En el primer caso, los modelos se estiman para cada una de las 24 horas, sin distinguir días laborables y fines de semana y en el segundo caso, se consideran modelos diferentes en función del tipo de día, lo que conlleva 48 modelos. En este caso, como ya se ha mencionado los fines de semana se han eliminado de la serie, por lo que sólo se estiman 24 modelos para los días laborables. Para una mayor flexibilidad, se permite que los modelos automáticos tengan una estructura diferente para cada día. El patrón de estacionalidad semanal se considera con una periodicidad de 5 días.

Tabla 6.3.2. Estructura de modelo para 5 horas escogidas en el mercado *Nord Pool*.

Hour	Model
4	ARIMA (0, 1, 2) × (0, 0, 1) ₅
8	ARIMA (1, 1, 1)
12	ARIMA (1, 1, 2)
16	ARIMA (0, 1, 1) × (2, 0, 1) ₅
20	ARIMA (1, 1, 2) × (2, 0, 3) ₅

La Tabla 6.3.2 presenta los modelos correspondientes a algunas horas del mercado *Nord Pool*. Como en los modelos estimados en el apartado anterior, se modificaron los criterios de búsqueda y las diferencias de precisión entre los modelos no fueron significativas. Los modelos incluyen parámetros *intercept* y *drift*.

6.3.3. Comparación

Es importante señalar que la comparación de precisión de la predicción es bastante compleja, ya que el comportamiento de los modelos depende en buena medida de su implementación particular, que normalmente incluye muchos pequeños detalles. Un aspecto que puede parecer secundario para la metodología pero que es de importancia capital para la comparación es el tratamiento de los atípicos. Frecuentemente, un mercado en su evolución anual presenta un número de días, o incluso semanas, con precios que distorsionan completamente el modelo; en la etapa de estimación es esencial identificar y filtrar estas observaciones. Una vez que el modelo se establece, si se quiere medir la precisión de la predicción con nuevas observaciones,

6.3 Comparación con otras metodologías

el problema de qué hacer con los atípicos vuelve a aparecer. Como se mencionó con anterioridad, se han mantenido los atípicos en este trabajo para mostrar las diferencias en los errores de predicción para distintas semanas.

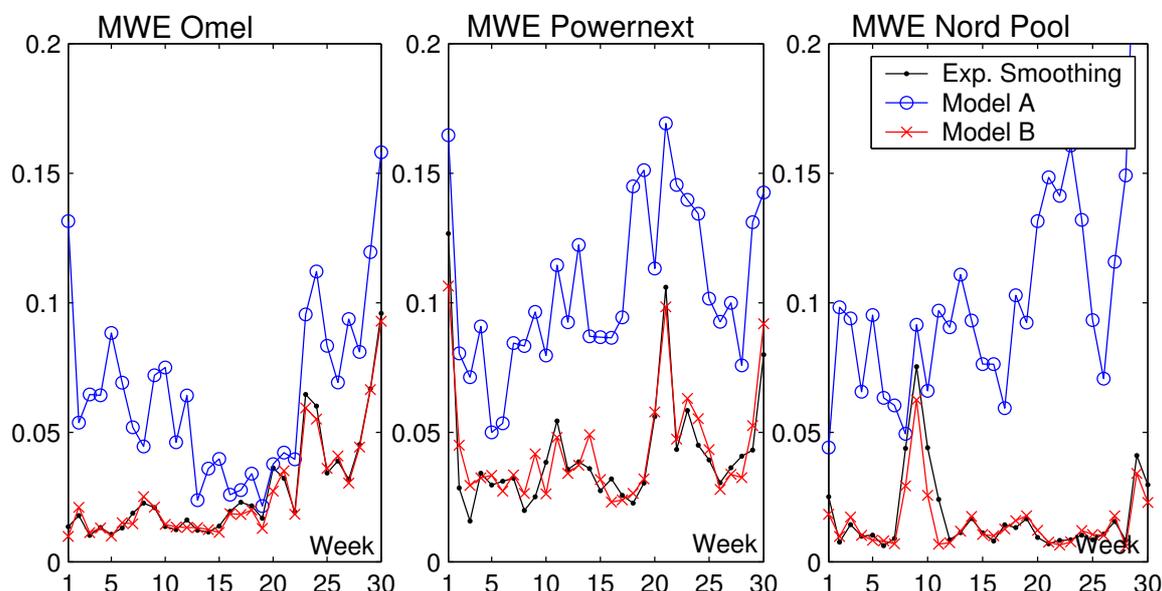


Figura 6.4: Errores medios semanales para el modelo A, el modelo B y el alisado exponencial en los tres mercados estudiados durante el periodo comprendido entre el 1 de junio y el 25 de diciembre de 2009.

La Tabla 6.2 y la Figura 6.4 muestran los valores MWE correspondientes a las 30 semanas predichas para cada mercado. En este análisis se mantiene los datos tal como fueron registrados sin descartar atípicos con el fin de mostrar las grandes variaciones observadas entre semanas. Se ha mantenido la comparación logarítmica para simplificar las gráficas.

Como se puede apreciar en la Figura 6.4, el modelo que se comporta peor en los tres mercados es el Modelo A, que analiza el proceso entero en una sola ecuación. El Modelo B, que estudia cada hora separadamente, y la técnica del alisado exponencial ofrecen resultados muy similares.

Para hacerse una idea del grado de ajuste logrado con esta metodología, se han representado en la Figura 6.5 los precios reales $P_h = \exp(y_h)$ y los precios predichos $\hat{P}_h = \exp(\hat{y}_h)$ para *Omel*, *Powernext* y *Nord Pool*. En la figura se ha seleccionado la semana “mediana” para cada mercado, que es la semana a la que le corresponde un MWE igual a la mediana de estos valores.

Las medianas de los 30 valores de MWE son 1,1 %, 1,9 % y 3,6 % para *Nord Pool*, *Omel* y *Powernext*, respectivamente. La Figura 6.5 sirve para tener una idea del grado de ajuste alcanzado con los modelos. En este caso se ha elegido la semana cuyo MWE es igual al de la mediana del periodo estudiado.

Tabla 6.2: Error medio semanal MWE correspondiente a 30 semanas (01/06 - 25/12 2009) para cada mercado. AE: Modelo alisado exponencial, MA: Modelo A, MB: Modelo B

	OMEL			POWERNEXT			NORD POOL		
	AE	MA	MB	AE	MA	MB	AE	MA	MB
1	0.0135	0.1315	0.0098	0.1267	0.1647	0.1065	0.0251	0.0441	0.0184
2	0.0178	0.0537	0.0210	0.0285	0.0804	0.0450	0.0076	0.0983	0.0098
3	0.0102	0.0646	0.0112	0.0157	0.0712	0.0294	0.0144	0.0940	0.0173
4	0.0132	0.0643	0.0130	0.0342	0.0909	0.0324	0.0099	0.0657	0.0102
5	0.0106	0.0883	0.0099	0.0296	0.0500	0.0334	0.0103	0.0952	0.0083
6	0.0131	0.0692	0.0151	0.0311	0.0535	0.0273	0.0062	0.0633	0.0081
7	0.0187	0.0519	0.0147	0.0322	0.0844	0.0335	0.0090	0.0604	0.0070
8	0.0226	0.0445	0.0251	0.0198	0.0833	0.0264	0.0438	0.0494	0.0293
9	0.0209	0.0720	0.0211	0.0251	0.0964	0.0416	0.0753	0.0915	0.0625
10	0.0136	0.0750	0.0144	0.0384	0.0797	0.0263	0.0440	0.0660	0.0256
11	0.0124	0.0461	0.0134	0.0543	0.1146	0.0480	0.0241	0.0969	0.0068
12	0.0162	0.0642	0.0132	0.0356	0.0925	0.0341	0.0085	0.0905	0.0074
13	0.0121	0.0238	0.0132	0.0386	0.1223	0.0373	0.0113	0.1108	0.0118
14	0.0115	0.0360	0.0124	0.0360	0.0870	0.0491	0.0167	0.0931	0.0175
15	0.0138	0.0397	0.0113	0.0275	0.0867	0.0318	0.0112	0.0763	0.0105
16	0.0195	0.0259	0.0186	0.0320	0.0865	0.0230	0.0080	0.0763	0.0100
17	0.0230	0.0277	0.0183	0.0256	0.0944	0.0239	0.0142	0.0593	0.0127
18	0.0216	0.0340	0.0199	0.0226	0.1449	0.0264	0.0132	0.1029	0.0159
19	0.0167	0.0215	0.0129	0.0304	0.1512	0.0320	0.0166	0.0923	0.0178
20	0.0362	0.0377	0.0273	0.0560	0.1132	0.0579	0.0094	0.1315	0.0122
21	0.0322	0.0421	0.0352	0.1059	0.1692	0.0984	0.0069	0.1484	0.0076
22	0.0193	0.0396	0.0183	0.0434	0.1455	0.0473	0.0083	0.1413	0.0064
23	0.0646	0.0955	0.0594	0.0584	0.1397	0.0631	0.0085	0.1607	0.0077
24	0.0601	0.1121	0.0551	0.0450	0.1344	0.0552	0.0103	0.1320	0.0121
25	0.0343	0.0834	0.0360	0.0393	0.1016	0.0433	0.0085	0.0933	0.0105
26	0.0389	0.0692	0.0408	0.0306	0.0926	0.0279	0.0107	0.0707	0.0102
27	0.0318	0.0937	0.0303	0.0363	0.0999	0.0338	0.0155	0.1158	0.0178
28	0.0453	0.0810	0.0443	0.0408	0.0758	0.0325	0.0083	0.1492	0.0059
29	0.0668	0.1196	0.0664	0.0432	0.1311	0.0526	0.0410	0.2692	0.0341
30	0.0959	0.1581	0.0928	0.0800	0.1426	0.0919	0.0297	0.2999	0.0229

6.4. Conclusiones

El análisis y la predicción de precios de la electricidad es un problema que se está estudiando intensivamente en la literatura estadística y económica. Se han propuesto muchos y muy distintos modelos y métodos en esos estudios para formular predicciones, pero no es posible concluir que un método sea superior a otro. En el contexto de los modelos de series temporales, para los mercados analizados con la información disponible, los errores de predicción del nuevo modelo son similares a los errores de predicción de otros modelos de predicción.

Aparte de una buena capacidad predictiva, la ventaja del nuevo modelo es su simplicidad conceptual. El nuevo enfoque permite el análisis de la dinámica factorial del proceso, el cual es útil para la descripción del comportamiento del mercado.

6.4 Conclusiones

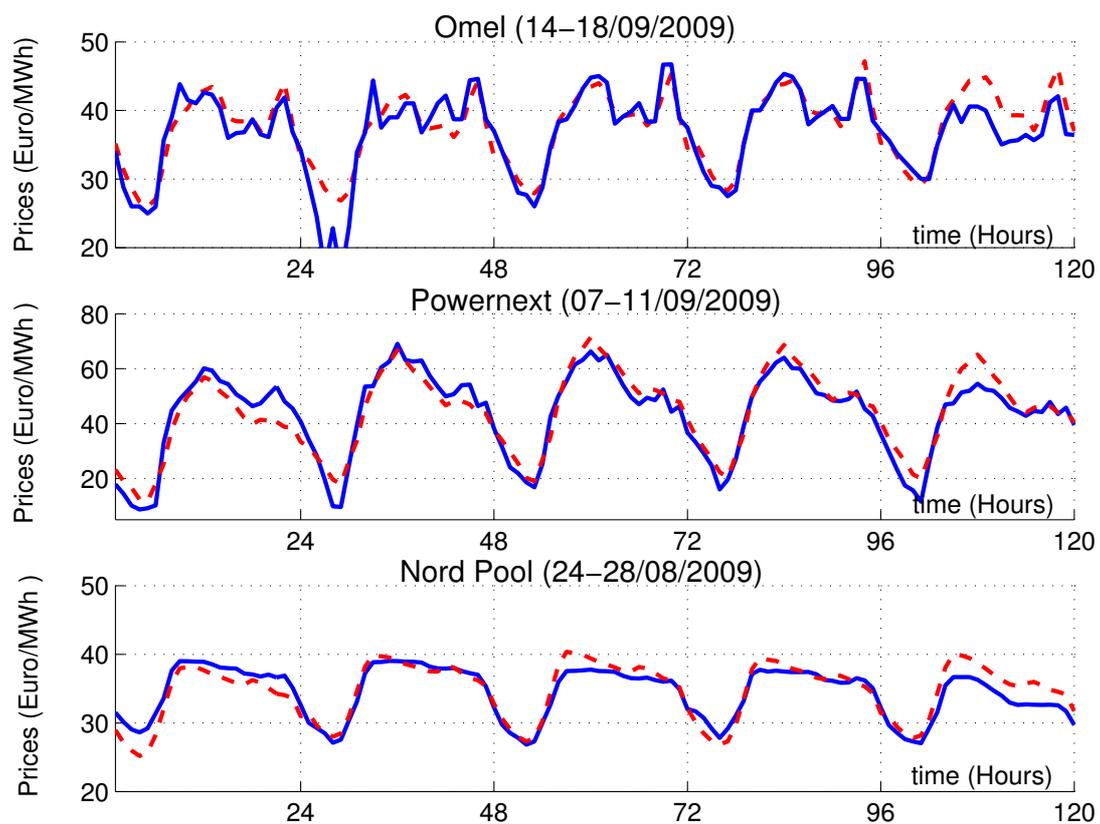


Figura 6.5: Resultados de predicción para la semana mediana MWE para los tres mercados en el período entre el 1 de junio y el 25 de diciembre de 2009. En línea continua los precios reales y en línea discontinua las predicciones formuladas el día anterior empleando el modelo (5.1) de orden $r = 10$.

Capítulo 7

CONCLUSIONES

La predicción a corto plazo, a un día vista, de los precios de la electricidad es un problema de gran importancia en el mercado eléctrico liberalizado. Las empresas productoras y los grandes consumidores lo aplican a diario con el fin de tomar decisiones sobre su estrategia en el mercado *spot*. A lo largo de los últimos años se han propuesto varios modelos que se basan esencialmente en el análisis univariante de la serie de precios horarios. Esta estrategia presenta algunos inconvenientes, como se mencionó anteriormente en esta tesis. La mayor desventaja es la enorme complejidad de los modelos, que requieren distintas ecuaciones según la hora o la estación del año.

En esta tesis se ha presentado un modelo multivariante. Ese modelo se utiliza ampliamente para la predicción en algunos campos y se conoce como alisado exponencial. El modelo tiene unas propiedades excelentes en cuanto a robustez y versatilidad y su aplicación resulta sencilla. Entre los modelos multivariantes, éste es uno de los más sencillos de estimar. Se ha empleado el algoritmo EM para estimar los parámetros por máxima verosimilitud. La aplicación a vectores de dimensión 24, como en los precios de la electricidad, obliga a trabajar con un elevado número de parámetros, lo cual es una desventaja importante. Sin embargo, en esta tesis se ofrece un método para reducir la dimensión. Los modelos estimados dan pie a una interesante interpretación de la dinámica de los precios. Esta interpretación está relacionada con modelos de factores no observados, tendencias comunes y cointegración.

El modelo se ha aplicado al estudio del comportamiento de las tres series multivariantes: el mercado francés (*Powernext*), el mercado escandinavo (*Nord Pool*) y el mercado español (*Omel*). Los resultados obtenidos son consistentes para los tres. Los modelos permiten extensiones para añadir estacionalidad y efectos deterministas. Como pone de manifiesto el análisis de los residuos, los modelos estimados reflejan la dinámica de los precios.

Se ha aplicado el alisado exponencial multivariante para analizar y describir la evolución de los precios horarios de la electricidad en tres mercados distintos: *Powernext*, *Nord Pool* y *Omel*. Se toma el logaritmo de las series de precios observados y_1, y_2, \dots, y_N con el fin de reducir la heterocedasticidad de la serie temporal.

La forma más simple y conveniente para formular predicciones y calcular sus incertidumbres en el marco del modelo presentado en esta tesis es a través de la ecuación (3.2). Jones (1966) propone un método para obtener \mathbf{B} , utilizando las sucesivas estimaciones de modelos autorregresivos multivariantes. No obstante, ésta no es necesariamente la más adecuada en la etapa de estimación. La alternativa a ello es aprovechar la potencia y los recursos que proporciona la formulación en el espacio de los estados para la estimación de las matrices \mathbf{Q} y \mathbf{R}

en el modelo (3.4) o Λ_r , H_r y R para el modelo reducido de orden r (4.14) y seguidamente relacionarlos con las matrices B y Σ del modelo de alisado exponencial. Se han desarrollado varios algoritmos para estimar el modelo (3.4) o (4.14) por máxima verosimilitud (como se ha mencionado previamente, una referencia útil para ello puede hallarse en Harvey, 1989).

Probablemente el algoritmo más fácil de implementar sea el que se basa en el método EM (*Expectation-Maximization*). El algoritmo EM es un procedimiento bien conocido que tiene una forma especialmente concisa para el modelo multivariante de alisado exponencial. El principal inconveniente es su lenta convergencia cerca del máximo, aunque este inconveniente no llega a ser un problema crítico especialmente si se dispone de una buena solución de partida como es el caso. Una excelente descripción de este método puede consultarse en Shumway y Stoffer (2006) (véase su sección 2.2.1). Además, las funciones *MATLAB* están disponibles como material suplementario junto a los datos de series temporales utilizados en esta tesis.

Resumiendo esta tesis, se muestra que existe una transformación lineal $z_t = T y_t$, que desacopla las n series originales. Esta transformación es equivalente al análisis de factores dinámicos del proceso multivariante. Este resultado es completamente original.

Ciertamente, los resultados de la Proposición 1 son conocidos, como se menciona, y pueden ser encontrados en el trabajo original de Jones (1966). Sin embargo, la forma en que se obtienen las relaciones entre los dos modelos con un simple tratamiento algebraico sin requerir el filtro de Kalman es nuevo. Algunas de las relaciones deducidas en la Proposición 1 se necesitan en la siguiente proposición que es el núcleo del análisis y es esta Proposición 2 la que es completamente original. Hasta donde se sabe, estos hallazgos no han sido publicados en ningún otro lugar y revelan las características esenciales de este tipo de procesos.

Estos resultados son útiles para el análisis de uno de los modelos más versátiles para formular predicciones de datos de series temporales, el modelo univariante IMA(1,1) también conocido como alisado exponencial. La versión multivariante es mucho menos conocida y se cree que tiene un gran potencial para modelar series multivariantes de gran dimensión como en el caso de los precios de la electricidad. La Proposición 2 es el resultado crucial que permite acometer el análisis dinámico factorial de este modelo. Con este análisis se pueden comparar los comportamientos entre distintos mercados eléctricos, como se muestra en el ejemplo.

Esta tesis contribuye a los modelos multivariantes de series temporales en varios aspectos:

1. En primer lugar, se estudia el modelo de alisado exponencial multivariante desde el punto de vista del análisis dinámico factorial. Las proposiciones 1 y 2 son originales y muy útiles para en primer lugar reducir la dimensión del problema multivariante y, en segundo lugar, para describir la dinámica de la serie combinada. El modelo de alisado exponencial es uno de los modelos básicos en la literatura de series temporales multivariantes como se puede ver en los libros de Harvey (1986) y Reinsel (1993). Esta tesis añade algunas nuevas propiedades del modelo.
2. Por la simplicidad de los cálculos requeridos. Dadas Q y R , el cálculo de los valores propios y los vectores propios de la matriz QR^{-1} da el resto de las matrices implicadas en los dos modelos, incluyendo Θ (o B). A partir de este resultado se pueden deducir fácilmente propiedades importantes del modelo, tales como que los valores propios de Θ están comprendidos entre cero y uno. También se demuestra que si $Q = kR$, donde k es un número real positivo, Θ es diagonal con todos sus elementos iguales.

-
3. Por aplicarse a uno de los modelos básicos más importantes en el análisis de series temporales. Véase el espacio dedicado a este modelo en los libros de referencia entre los que se puede mencionar a Harvey (1989), Reinsel (1993), Lütkepohl (2005), Hyndman et al. (2008).
 4. Es extremadamente fácil hacer predicciones mediante la ecuación (3.3). Esta simplicidad fortalece su aplicabilidad. Se aplican los modelos al análisis de precios de la electricidad, un problema de gran interés práctico y económico. El tratamiento del problema es completamente original. Para recalcar la utilidad del modelo en el análisis de los mercados de la electricidad, el modelo es aplicado a tres mercados distintos, ampliamente comentados en la literatura. En los tres casos, el diagnóstico del modelo indica que es adecuado.
 5. Desde un punto de vista práctico, esta tesis proporciona los algoritmos numéricos para realizar un análisis completo. Se han incluido las implementaciones en *MATLAB*. Los programas son estables y pueden ser aplicados a un gran número de series.
 6. Finalmente, se muestra cómo aplicar la metodología en el análisis de la evolución de los precios de la electricidad. La importancia del problema se explica en esta tesis.

El aspecto más novedoso de la tesis es la capacidad de describir la evolución conjunta de un vector de dimensión grande. Desde este punto de vista, se puede reducir su dimensión desde 24 a un pequeño número de factores.

Los modelos ARIMA o VARIMA son métodos poderosos para la predicción a corto plazo debido a que ponen énfasis en el pasado reciente. Este énfasis en el pasado reciente hace que las predicciones a medio y largo plazo sean menos fiables por la acumulación de errores. La acumulación de errores es especialmente importante en procesos no estacionarios y el IMA(1,1) es un ejemplo de ello. La varianza del error de predicción crece sin límite conforme avanza el horizonte temporal y, por ejemplo, los intervalos de predicción tienden a ser demasiado amplios para su uso práctico. Por tanto, desde el punto de vista de la predicción, el método del alisado exponencial sólo es útil para la predicción a corto plazo. Nótese que este comportamiento se debe a la no estacionariedad del proceso y no es achacable al modelo (los resultados aparecidos en algunos artículos no son siempre consistentes con esta observación).

En el caso de los precios de la electricidad, más que en la predicción a largo plazo existe un gran interés en desarrollar modelos que representen su dinámica a medio y a largo plazo. En la formación de precios es necesario tener en cuenta un buen número de factores fundamentales que determinan su dinámica, por ejemplo, el precio de los futuros. Los consumidores y los productores entran en contratos de cobertura entre ellos para protegerse ante futuras fluctuaciones del precio. La forma más común y sencilla es un contrato de precio fijo a futuro. Según la teoría de mercados financieros, el precio *spot* y el precio *forward* están generalmente ligados con una fórmula analítica derivada de las condiciones de no arbitraje. Así, un modelo apropiado a largo plazo debería ser construido a partir de la teoría económica y financiera más que (sólo) a partir de la bondad de ajuste a los datos pasados. Es un problema diferente, pero estrechamente relacionado. La cuestión es objeto de enorme interés en el área financiera y el número de publicaciones en este campo es muy elevado. En esta tesis se dan algunas referencias y puede ser combinado con información sobre futuros para predecir el comportamiento a medio y a largo plazo, lo que podría ser una futura línea de investigación.

Referencias

- [1] Akaike, H. (1969). Fitting autoregressive models for prediction. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 21, 243–247.
- [2] Alonso, A., García-Martos, C., Rodríguez, J., and Sánchez, M.J. (2011). Seasonal dynamic factor analysis and bootstrap inference: application to electricity market forecasting. *Technometrics*, 53(2), 137–151.
- [3] Anderson, T.W. (1984). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. Wiley.
- [4] Averch, H., and Johnson, L.L. (1962). Behavior of the Firm Under Regulatory Constraint. *The American Economic Review* Vol. 52, No. 5, pp. 1052-1069
- [5] Bai, J., and Ng, S. (2002). Determining the number of factors in approximate factor models. *Econometrica*, 70(1), 191–221.
- [6] Bai, J. and Ng, S. (2007). Determining the Number of Primitive Shocks in Factor Models. *Journal of Business & Economic Statistics*, American Statistical Association, vol. 25, 52–60, January.
- [7] Billah, B., Hyndman, R.J., and Koehler, A.B. (2005). Empirical information criteria for time series forecasting model selection. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 75, 831–840.
- [8] Box, G. E. P., Jenkins, G. M. and Reinsel G. C. (1994). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Prentice Hall, Englewood Cliff, N.J., 3 edition.
- [9] Brown, R.G. (1959). *Statistical forecasting and prediction of discrete time series*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [10] Bunn, D.W., and Karakatsani, N. (2003). *Forecasting Electricity Prices*. Working Paper, London Business School.
- [11] Cavanaugh, J.E. and Shumway, R.H. (1997), “A Bootstrap Variant of AIC for State-Space Model Selection”, *Statistica Sinica*.
- [12] Conejo, A.J., Contreras, J., Espínola, R., and Plazas, M.A. (2005). Forecasting electricity prices for a day-ahead pool-based electric energy market. *International Journal of Forecasting*, 21(3), 435–462.
- [13] Conejo, A.J., Plazas, M.A., Espínola, R., and Molina, A.B. (2002). Day-ahead electricity price forecasting using wavelet transform and ARIMA models. *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 20, pp. 1035–1042.

- [14] Contreras, J., Espínola, R., Nogales, F.J., and Conejo, A.J. (2003). ARIMA models to predict next-day electricity prices. *IEEE Trans. Power Syst.*, 18, 1014–1020.
- [15] Crespo-Cuaresma, J., Hlouskova, J., Kossmeier, S., and Obersteiner, M. (2004). Forecasting electricity spot-prices using linear univariate time-series models. *Appl. Energy*, vol. 77.
- [16] Engle, R.F. and Watson, M. (1981). A one-factor multivariate time series model of metropolitan wage rates. *Journal of the American Statistical Association*, 76, 774–781.
- [17] Engle, R.F. and Yoo, B.S. (1987). Forecasting and Testing in co-integrated systems. *Journal of Econometrics*, 35, 143–159.
- [18] Enns, P.G., Machak, J.A., Spivey, W.A. and Wroblewski, W.J. (1982). Forecasting applications of an adaptive multiple exponential smoothing model. *Management Science*, 28(9), 1035–1044.
- [19] Escribano, A., and Peña, D. (1994). Co-integration and common factors. *Journal of Time Series Analysis*, 15, 577–586.
- [20] Escribano, A., Peña, J.I. and Villaplana, P. (2002). Modelling Electricity Prices: International Evidence. Working Paper 02-27, Economic Series, Universidad Carlos III de Madrid.
- [21] Escribano, A., Peña, J. I. and Villaplana P., (2011). Modelling Electricity Prices: International Evidence. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, Department of Economics, University of Oxford, vol. 73(5), pages 622-650, October.
- [22] Forni, M., Hallin, M., Lippi, M. and Reichlin, L. (2000). The Generalized Dynamic Factor Model: Identification and Estimation. *Review of Economics and Statistics*, MIT Press, vol. 82(4), 540–554, November.
- [23] García-Martos, C., Rodríguez, J. and Sánchez, M.J. (2007). Mixed models for short-run forecasting of electricity prices: application for the Spanish market. *IEEE Transactions on Power Systems*.
- [24] Geweke, J. (1977). The Dynamic Factor Analysis of Economic Time Series in Latent Variables in *Socio-Economic Models*, ed. by D.J. Aigner and A.S. Goldberger, Amsterdam: North-Holland.
- [25] Hannan, E. J. and Quinn, B. G., 1978. The determination of the order of an autoregression. *Journal of Royal Statistical Society*, 41, 190–195.
- [26] Härdle, W.K. and Trück, S. (2010). The dynamics of hourly electricity prices. Discussion Paper 2010-013, SFB 649 Economic Risk, Humboldt-University of Berlin, Germany
- [27] Harvey, A. C. and Todd, P. H. J., (1983). Forecasting economic time series with structural and Box-Jenkins models, (with discussion). *Journal of Business and Economic Statistics*, 1 (1983), 299–315.
- [28] Harvey, A.C. (1986). Analysis and generalization of a multivariate exponential smoothing model. *Management Science*, 32, 374–380.

REFERENCIAS

- [29] Harvey, A.C. (1989). *Forecasting Structural Time Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [30] Holt, C.C. (1957). *Forecasting trends and seasonals by exponentially weighted averages*. O.N.R. Memorandum 52, Carnegie Institute of Technology.
- [31] Huisman, R., Huurman, C. and Mahieu, R. (2007). Hourly electricity prices in day-ahead markets. *Energy Economics*, 29(2), 240–248.
- [32] Hull, J.C. (2000). *Options, Futures and Other Derivatives*. Prentice Hall.
- [33] Hyndman, R.J., Koehler, A.B., Ord, J.K. and Snyder, R.D. (2008). *Forecasting with Exponential Smoothing: the State Space Approach*. Berlin. Springer-Verlag.
- [34] Hyndman, R.J. (2008). *Forecasting Functions for Time Series: R package version 2.13*. URL <http://CRAN.R-project.org/package=forecasting>.
- [35] Jones, R.H. (1966). Exponential smoothing for multivariate time series. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 28, 241–251.
- [36] Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions ASME J. of Basic Eng.* Vol. 82, 35–45.
- [37] Kalman, R. E. and Bucy, R. S. (1961). New results in linear ltering and prediction theory. *Transactions ASME J. of Basic Eng.* Vol. 83, 95–108.
- [38] Kitagawa, G. (1981). A Nonstationary Time Series Model and Its Fitting by a Recursive Filter. *Journal of Time Series Analysis*, 2, 103–116.
- [39] Koopman, S.J., Ooms, M. and Carnero, M.A. (2007). Periodic Seasonal Reg-ARFIMA-GARCH Models for daily electricity spot prices. *Journal of the American Statistical Association*, 102, 16–27.
- [40] Linhart, H., and Zucchini, W. (1986). *Model Selection*. Wiley, New York.
- [41] Lopes, H.F., Salazar, E. and Gamerman, D. (2008). Spatial Dynamic Factor Analysis. *Bayesian Analysis*, Vol. 3, 4, 759–792.
- [42] Lucia, J.J. and Schwartz, E.S. (2002). Electricity Prices and Power Derivatives: Evidence from the Nordic Power Exchange. *Review of Derivatives Research*, 5(1), 5–50(46)
- [43] Lütkepohl, H. (1985). Comparison of criteria for estimating the order of a vector autoregressive processt. *Journal of Time Series Analysis*, 6, 35–52.
- [44] Lütkepohl, H. (2005), “New introduction to Multiple Time Series Analysis”, Springer.
- [45] Matteson, D.S. and Tsay, R.S. (2011) Dynamic Orthogonal Components for Multivariate Time Series. *Journal of the American Statistical Association*, 106:496, 1450-1463
- [46] Misiorek, A., Trück, S., Weron, R. (2006). Point and Interval Forecasting of Spot Electricity Prices: Linear vs. Non-Linear Time Series Models. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 10(3), Article 2.
- [47] Morrison, D.F. (1976). *Multivariate Statistical Methods*. Second Edition, New York. McGraw-Hill.

- [48] Ng, V., Engle, R.F. and Rothschild, M. (1992). A multi-dynamic-factor model for stock returns. *Journal of Econometrics*, Elsevier, vol. 52(1-2), 245–266.
- [49] Nogales, F.J. and Conejo, A.J. (2006). Electricity price forecasting through transfer function models. *J. Oper. Res. Soc.*
- [50] Paulsen, J. and Tjostheim, D. (1985) “On the estimation of the residual variance and order in autoregressive time series”, *Journal of the Royal Statistical Society B47*: 216-228.
- [51] Peña, D. and Box, G.E.P. (1987). Identifying a Simplifying Structure in Time Series. *Journal of the American Statistical Association*, 82, 836–843.
- [52] Peña, D. and Poncela, P. (2004). Forecasting with nonstationary dynamic factor models. *Journal of Econometrics*, 119, 291–321.
- [53] Peña, D. and Poncela, P. (2006). Nonstationary dynamic factor analysis. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 136, 1237–1257.
- [54] Peña, D. and Poncela, P. (2006). Dynamic reduction in multivariate time series. *Advances in distribution theory, order statistics and Inference*. Balakrishnan, Castillo and Sarabia (eds.), Chapter 28. Birkhanser.
- [55] Pérez-Arriaga, I.J., Batlle, C., Vázquez, C., Rivier, M., Rodilla, P. (2005). Libro blanco sobre la reforma del marco regulatorio de la generación eléctrica en España. Ed. Ministerio de Industria, Turismo y Comercio. Madrid, España, 2005.
- [56] Poncela, P., Rodríguez J., Sánchez-Mangas, R. and Senra, E. (2011). Forecast combination through dimension reduction techniques. *International Journal of Forecasting*, 22, 203–222.
- [57] Poncela, P., Senra, E. and Sierra, L. (2014). Common dynamics of nonenergy commodity prices and their relation to uncertainty. *Applied Economics*, vol. 46, 30, 3724–3735.
- [58] Press, S.J. (1982). *Applied Multivariate Analysis*. Krieger.
- [59] Proietti, T. (2002). Forecasting with structural time series models, in Clements and Hendry (eds) *A Companion to Economic Forecasting*, pp. 105-132. Prentice Hall.
- [60] Reinsel, G.C. (1993). *Elements of multivariate time series analysis*. Springer Verlag.
- [61] Sánchez Tembleque, L. J. (2000). Nuevos marcos reguladores para la energía. *Referencias internacionales: La nueva regulación eléctrica*. CNE, 2000.
- [62] Sargent, T.J. and Sims, C.A. (1977). *Business Cycle Modeling Without Pretending to Have Too Much A Priori Economic Theory*. Working Papers 55, Federal Reserve Bank of Minneapolis.
- [63] Schwarz, G. (1978). Estimating the Dimension of a Model. *The Annals of Statistics*, vol. 6, 2, 461–464.
- [64] Shumway, R.H. (1988). *Applied Statistical Time Series Analysis*. Prentice-Hall, New Jersey.
- [65] Shumway, R.H. and Stoffer, D.S. (2006). *Time Series Analysis and Its Applications*. Springer.

REFERENCIAS

- [66] Stock, J.H. and Watson, M.V. (1988). Testing for common trends. *Journal of the American Statistical Association*, 83, 1097–1107.
- [67] Tiao, G.C. and Grupe, M.R. (1980). Hidden Periodic Autoregressive Moving Average Models in Time Series Data. *Biometrika*, 67, 365–373.
- [68] Troncoso, A., Riquelme, J., Gómez, A., and Martínez, J.L. (2002) A comparison of two techniques for next-day electricity price forecasting. In *Proc. 13th Int. Conf. Database and Expert Systems Applications*, vol. 2453, Lecture Notes In Computer Science.
- [69] Weron, R. and Misiorek, A. (2005). Forecasting Spot Electricity Prices with Time Series Models. *Proceedings of the European Electricity Market EEM-05 Conference, Lodz*, 133–141.
- [70] Weron, R. (2006). *Modeling and Forecasting Electricity Load and Prices: A Statistical Approach*. The Wiley Finance Series.
- [71] Weron, R. and Misiorek, A., (2008). Forecasting spot electricity prices: A comparison of parametric and semiparametric time series models. *International Journal of Forecasting*, Elsevier, vol. 24(4), 744–763.
- [72] Weron, R. (2009). Forecasting wholesale electricity prices: A review of time series models. In: *Financial Markets: Principles of Modelling, Forecasting and Decision-Making*. W. Milo, P. Wdowinski (eds.), *FindEcon Monograph Series*, WU L, Lodz.
- [73] Winters, P.R. (1960). Forecasting sales by exponentially weighted moving averages. *Management Science*, 6, 324–342.

APÉNDICES

Apéndice A

MODELOS EN EL ESPACIO DE LOS ESTADOS

A.1. Series temporales multivariantes y modelo en espacio de los estados

Un modelo muy general que engloba a muchos otros modelos especiales en el ámbito de las series temporales, como por ejemplo los modelos ARIMA, es el denominado modelo en el espacio de los estados (*state-space model*). Fue introducido por Kalman (1960) y Kalman y Bucy (1961). Su denominación proviene del campo de la teoría de sistemas, las ciencias físicas y la ingeniería donde se han empleado con frecuencia. La idea fundamental de estos modelos es que una serie multivariante observada y_1, \dots, y_T depende de un estado no observado z_t movido por un proceso estocástico. La relación entre y_t y x_t viene dada por la denominada ecuación de observación o de medida:

$$y_t = H_t x_t + v_t, \quad (\text{A.1})$$

donde H_t es una matriz que puede depender del instante t y v_t es el error de observación que generalmente se supone que es un proceso de ruido. El vector de estado se genera a partir de:

$$x_t = B_{t-1} x_{t-1} + w_{t-1}, \quad (\text{A.2})$$

que normalmente se la denomina como ecuación de transición ya que describe el tránsito de un estado desde el periodo $t-1$ al periodo t . La matriz B_t es una matriz de coeficientes que pueden depender de t y w_t es un proceso de error. Las ecuaciones (A.1) y (A.2) definen el modelo en el espacio de los estados.

De manera más general, un modelo en el espacio de los estados puede escribirse como a continuación:

$$x_t = B_{t-1} x_{t-1} + F_{t-1} z_{t-1} + w_{t-1}, \quad (\text{A.3})$$

$$y_t = H_t x_t + G_t z_t + v_t, \quad (\text{A.4})$$

donde

- \mathbf{y}_t es un vector ($K \times 1$) de variables de salida observables,
- \mathbf{x}_t es un vector ($N \times 1$) de variables de estado,
- \mathbf{z}_t es un vector ($M \times 1$) de variables de entrada observables,
- \mathbf{v}_t es un vector ($K \times 1$) de errores de medida o de ruido de observación,
- \mathbf{w}_t es un vector ($N \times 1$) de errores o ruido de la ecuación de estado,
- \mathbf{H}_t es una matriz ($K \times N$) de medida,
- \mathbf{G}_t es una matriz ($K \times M$) de entradas de la ecuación de observación,
- \mathbf{B}_t es una matriz ($N \times N$) de estado o del sistema,
- \mathbf{F}_t es una matriz ($N \times M$) de entradas de la ecuación de estado.

El proceso que genera los \mathbf{x}_t y, por tanto, los \mathbf{y}_t comienza en un estado inicial \mathbf{x}_0 y se da una entrada inicial \mathbf{z}_0 . Las matrices $\mathbf{H}_t, \mathbf{G}_t, \mathbf{B}_t$ y \mathbf{F}_t pueden ser conocidas o no, pueden ser constantes, independientes de t o variables con el tiempo. Aunque se permite que puedan variar, normalmente algunas de ellas permanecen constantes. En la práctica generalmente al menos algunos de sus elementos son desconocidos y deben ser estimados. Nótese también que si \mathbf{H}_t depende de t , la variación de \mathbf{H}_t en general no tiene por qué ser a cada t de \mathbf{x}_t .

Para completar la descripción del modelo, se hacen las siguientes suposiciones estocásticas para los procesos de ruido y el estado inicial:

- El proceso conjunto $\begin{bmatrix} \mathbf{w}_t \\ \mathbf{v}_t \end{bmatrix}$ es un proceso de media cero de ruido no correlacionado con matrices de covarianza $\begin{bmatrix} \Sigma_{\mathbf{w}_t} & \Sigma_{\mathbf{w}_t \mathbf{v}_t} \\ \Sigma_{\mathbf{v}_t \mathbf{w}_t} & \Sigma_{\mathbf{v}_t} \end{bmatrix}$ que pueden ser variables en el tiempo.
- El estado inicial \mathbf{x}_0 no está correlacionado con $\mathbf{w}_t, \mathbf{v}_t$ para cualquier t y tiene una distribución con media $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}_0}$ y matriz de covarianza $\Sigma_{\mathbf{x}_0}$. La secuencia de entrada $\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots$ se supone no estocástica para simplificar.

Con estas hipótesis se pueden deducir las propiedades estocásticas de los estados y las salidas del sistema. La sustitución sucesiva en (A.3) proporciona:

$$\mathbf{x}_t = \Phi_{t,t} \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^t \Phi_{i-1,t} (\mathbf{F}_{t-i} \mathbf{z}_{t-i} + \mathbf{w}_{t-i}), \quad (\text{A.5})$$

donde:

$$\Phi_{0,t} := \mathbf{I}_N \text{ y } \Phi_{i,t} := \prod_{j=1}^i \mathbf{B}_{t-j} \quad i = 1, 2, \dots$$

De manera que

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}_t} := E(\mathbf{x}_t) = \Phi_{t,t} \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^t \Phi_{i-1,t} \mathbf{F}_{t-i} \mathbf{z}_{t-i} \quad (\text{A.6})$$

y

$$\begin{aligned} Cov(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+h}) &= E[(\mathbf{x}_t - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}_t})(\mathbf{x}_{t+h} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}_{t+h}})^T] = \\ &\boldsymbol{\Phi}_{t,t} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}_0} \boldsymbol{\Phi}_{t+h,t}^T + \sum_{i=1}^t \boldsymbol{\Phi}_{i-1,t} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{w}_{t-i}} \boldsymbol{\Phi}_{h+i-1,t}^T \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Con las mismas hipótesis estocásticas, es sencillo obtener las medias y las matrices de covarianza del proceso de salida:

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{y}_t} := E(\mathbf{y}_t) = \mathbf{H}_t E(\mathbf{x}_t) + \mathbf{G}_t \mathbf{z}_t \quad (\text{A.8})$$

y

$$Cov(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t+h}) = \mathbf{H}_t Cov(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+h}) \mathbf{H}_t^T \quad \text{para } h \neq 0. \quad (\text{A.9})$$

Generalmente, las medias y las autocovarianzas de los \mathbf{y}_t son dependientes del tiempo como cabía esperar. Por tanto y en general, \mathbf{y}_t es un proceso no estacionario. A partir de este modelo, pueden considerarse distintos casos especiales que se obtienen a partir de definiciones concretas del vector de estado, las entradas, los procesos de ruido y las matrices \mathbf{H}_t , \mathbf{G}_t , \mathbf{B}_t y \mathbf{F}_t . Con frecuencia estas matrices y las matrices de covarianza de los procesos de ruido no dependen de t , en cuyo caso se elimina el subíndice para simplificar.

A.2. Proceso VAR de orden finito

Un proceso VAR(p) tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{v} + \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \dots + \mathbf{A}_p \mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{u}_t. \quad (\text{A.10})$$

Dicho proceso puede representarse de más de una manera dentro del espacio de los estados. Una posibilidad de representación en el espacio de los estados viene dada al definir:

$$\mathbf{Y}_t := \begin{bmatrix} \mathbf{y}_t \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{t-p+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \cdot p}, \quad \mathbf{V} := \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \cdot p}, \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \dots & \mathbf{A}_{p-1} & \mathbf{A}_p \\ \mathbf{I}_K & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & & \mathbf{I}_K & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_t := \begin{bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Por tanto,

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{A} \mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{v} + \mathbf{U}_t, \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{y}_t = [\mathbf{I}_K : \mathbf{0} : \cdots : \mathbf{0}] \mathbf{Y}_t \quad (\text{A.14})$$

es un modelo en el espacio de los estados con vector de estado $\mathbf{x}_t := \mathbf{Y}_t$, $\mathbf{B} := \mathbf{A}$, $\mathbf{F} := \mathbf{V}$, $\mathbf{z}_t := \mathbf{1}$, $\mathbf{w}_t := \mathbf{U}_{t+1}$, $\mathbf{H} := [\mathbf{I}_K : \mathbf{0} : \cdots : \mathbf{0}]$, $\mathbf{G} := \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_t := \mathbf{0}$.

Una alternativa consiste en definir el vector de estado como:

$$\mathbf{x}_t := \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{y}_t \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{t-p+1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

y elegir

$$\mathbf{B} := \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{v} & \mathbf{A}_1 & \cdots & \mathbf{A}_{p-1} & \mathbf{A}_p \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_K & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{I}_K & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{w}_t := \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_{t+1} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.16})$$

de manera que

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{B}\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t \quad (\text{A.17})$$

$$\mathbf{y}_t = [\mathbf{0} : \mathbf{I}_K : \mathbf{0} : \cdots : \mathbf{0}] \mathbf{x}_t, \quad (\text{A.18})$$

lo cual describe el mismo proceso que (A.13)/(A.14).

A.3. Proceso VARMA(p, q)

Una representación en el espacio de los estados del proceso VARMA(p, q)

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{v} + \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \cdots + \mathbf{A}_p \mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{u}_t + \mathbf{M}_1 \mathbf{u}_{t-1} + \cdots + \mathbf{M}_q \mathbf{u}_{t-q} \quad (\text{A.19})$$

puede obtenerse a partir de establecer como vector de estado

$$\mathbf{x}_t := \begin{bmatrix} \mathbf{y}_t \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{t-p+1} \\ \mathbf{u}_t \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{t-q+1} \end{bmatrix}, \quad \text{ruido de transición } \mathbf{w}_t := \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{t+1} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_{t+1} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.20})$$

una secuencia de entrada $\mathbf{z}_t := \mathbf{1}$ como en (A.13), $\mathbf{B} := \mathbf{A}$, $\mathbf{F} := \mathbf{v}$ definido de forma parecida a (A.13), $\mathbf{H} := [\mathbf{I}_K : \mathbf{0} : \cdots : \mathbf{0}]$, $\mathbf{G} := \mathbf{0}$ y $\mathbf{v}_t := \mathbf{0}$.

A.4. El Modelo VARX

El modelo VARX

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + B_0 z_t + \dots + B_s z_{t-s} + u_t \quad (\text{A.21})$$

puede establecerse en el espacio de los estados al escoger el vector de estado tal que

$$x_t := \begin{bmatrix} y_t \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \\ z_t \\ \vdots \\ z_{t-s+1} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.22})$$

y la ecuación de transición

$$x_t = \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_{p-1} & A_p & | & B_1 & \dots & B_{s-1} & B_s \\ I & & 0 & 0 & | & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots & \vdots & | & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & I & 0 & | & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline & & & 0 & | & 0 & & 0 & 0 \\ & & & & | & I & & 0 & 0 \\ & & & & | & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & | & 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix} x_{t-1} + \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} z_t + \begin{bmatrix} u_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.23})$$

La ecuación de observación correspondiente es

$$y_t = [I_K : 0 : \dots : 0] x_t. \quad (\text{A.24})$$

A.5. Modelos estructurales de series temporales

En un modelo estructural de series temporales, la serie temporal observada se ve como la suma de componentes no observadas tales como una tendencia, una componente estacional y una componente irregular (véase Kitagawa (1981), Harvey y Todd (1983), Harvey (1989)). Por ejemplo, para una serie temporal univariante y_1, \dots, y_T el modelo estructural puede tener la forma

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + u_t, \quad (\text{A.25})$$

donde μ_t es la componente de tendencia y γ_t es la componente estacional. Harvey y Todd (1983) tomaron una aproximación local a la función de tendencia lineal para las cuales tanto el nivel como la pendiente varían. Postularon un proceso

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t \text{ con } \beta_t = \beta_{t-1} + \xi_t \quad (\text{A.26})$$

como mecanismo generador de tendencia. Aquí se supone que tanto η_t como ξ_t son procesos de ruido blanco. Este modelo de tendencia es la mezcla de dos paseos aleatorios. Para la componente estacional, se supone que la suma de todos los factores estacionales a lo largo de un año es aproximadamente cero,

$$\gamma_t = - \sum_{j=1}^{s-1} \gamma_{t-j} + \omega_t, \quad (\text{A.27})$$

donde s es el número de periodos estacionales y w_t es ruido blanco. Se supone que los tres procesos de ruido blanco η_t , ξ_t y w_t son independientes entre sí. Este modelo puede ser planteado en el espacio de los estados al definir el vector de estado tal que

$$\mathbf{x}_t := \begin{bmatrix} \mu_t \\ \beta_t \\ \gamma_t \\ \vdots \\ \gamma_{t-s+2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

y, por tanto, la ecuación de transición es

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ \hline & & & & 0 & \\ & & -1 & \dots & -1 & -1 \\ & & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ & 0 & & & \vdots & \vdots \\ & & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{t-1} + \begin{bmatrix} \eta_t \\ \xi_t \\ \omega_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.29})$$

La correspondiente ecuación de medida es

$$\mathbf{y}_t = [1, 0, 1, 0, \dots, 0] \mathbf{x}_t + u_t. \quad (\text{A.30})$$

Cabe destacar que estos modelos pueden ser vistos para describir procesos integrados especiales tipo ARMA. Por tanto, no es sorprendente que éstos puedan ser descritos en la forma del espacio de los estados. Son posibles generalizaciones multivariantes de este modelo (véase Harvey (1986) y Proietti (2002)).

A.6. Modelos analíticos factoriales

Dentro del análisis clásico factorial, se supone que un conjunto de K variables observadas \mathbf{y}_t depende linealmente de $N < K$ factores comunes \mathbf{f}_t no observados y de componentes individuales \mathbf{u}_t . Dicho de otro modo:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{L}\mathbf{f}_t + \mathbf{u}_t, \quad (\text{A.31})$$

donde \mathbf{L} es una matriz ($K \times N$) de factores de carga o pesos y las componentes de \mathbf{u}_t se suponen independientes, esto es, Σ_u es una matriz diagonal (Anderson (1984), Morrison (1976)). Un objetivo de un análisis de factores es la construcción o estimación de los factores \mathbf{f}_t no observados. Se puede interpretar (A.31) como la ecuación de medida de un modelo en el espacio de los estados y, si los factores \mathbf{f}_t y \mathbf{f}_s son independientes para $t \neq s$, es posible especificar una ecuación trivial de transición $\mathbf{f}_t = \boldsymbol{\omega}_{t-1}$.

Sin embargo, si \mathbf{y}_t está formado por series temporales variables, puede ser más razonable suponer que los factores están correlacionados. Por ejemplo, pueden ser generados por un proceso *VAR* o *VARMA*. Las componentes individuales \mathbf{u}_t también pueden estar autocorrelacionadas. Los modelos analíticos dinámicos factoriales de este tipo fueron considerados, por ejemplo, por Sargent y Sims (1977), Geweke (1977) y Engle y Watson (1981). Suponiendo que

$$\mathbf{f}_t = \mathbf{A}_1\mathbf{f}_{t-1} + \cdots + \mathbf{A}_p\mathbf{f}_{t-p} + \boldsymbol{\eta}_t \quad (\text{A.32})$$

y

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{C}_1\mathbf{u}_{t-1} + \cdots + \mathbf{C}_q\mathbf{u}_{t-q} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (\text{A.33})$$

donde $\boldsymbol{\eta}_t$ y $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ son procesos de ruido blanco, se puede construir un modelo en el espacio de los estados al definir un vector de estado,

$$\mathbf{x}_t := \begin{bmatrix} \mathbf{f}_t \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{t-p+1} \\ \mathbf{u}_t \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{t-q+1} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.34})$$

y una ecuación de transición

$$\mathbf{x}_t = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{A}_1 & \cdots & \mathbf{A}_{p-1} & \mathbf{A}_p & & & & \\ \mathbf{I} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & & \\ & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I} & \mathbf{0} & & & & \\ \hline & & \mathbf{0} & & & & & \\ & & & & \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_{q-1} & \mathbf{C}_q \\ & & & & \mathbf{I} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{array} \right] \mathbf{x}_{t-1} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_t \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

La correspondiente ecuación de medida es

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{L}\mathbf{f}_t + \mathbf{u}_t = \left[\mathbf{L} \quad \mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{I}_K \quad \mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0} \right] \mathbf{x}_t \quad (\text{A.36})$$

Si se añadieran variables exógenas al modelo original (A.31) y además los factores fueran procesos dinámicos, se obtienen los modelos dinámicos MIMIC de Engle y Watson (1981). Algunas referencias más recientes sobre modelos dinámicos factoriales son Stock & Watson (2002a,b) y Forni, Hallin, Lippi y Reichlin (2000).

A.7. Conclusión

En este apéndice se ha introducido el modelo en el espacio de los estados y se ha efectuado un recorrido por algunos de los diferentes modelos ARIMA y cómo éstos pueden escribirse en el espacio de los estados. También se han introducido los conceptos de modelos estructurales de series temporales y de modelos analíticos factoriales.

Apéndice B

MÁXIMA VEROSIMILITUD CON ALGORITMO EM

Este apéndice es una extensión de la sección 3.5 de la presente tesis, en la cual se generaliza el algoritmo EM (*Expectation-Maximization*) para estimar el valor de las matrices del modelo en el espacio de los estados escrito de la forma:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t, & \text{var}(\mathbf{w}_t) = \mathbf{Q}, \\ \mathbf{y}_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_t + \mathbf{G}\mathbf{m}_t + \mathbf{v}_t, & \text{var}(\mathbf{v}_t) = \mathbf{R}, \end{cases}$$

donde los parámetros a estimar serán $\theta = (\mu_0, \Sigma_0, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{H}, \mathbf{G})$, donde μ_0 y Σ_0 corresponden al vector de medias y a la matriz de varianzas, respectivamente, del estado inicial $\mathbf{x}_0 \sim N(\mu_0, \Sigma_0)$. Denotemos $\mathbf{X}_N = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ de vectores de estado no observado, $\mathbf{Y}_N = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_N\}$ el conjunto de vectores observación, y $\mathbf{M}_N = \{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_N\}$ el conjunto de variables explicativas del problema para los instantes de tiempo $t = 1, \dots, N$, se puede definir el conjunto de vectores $\mathbf{Z}_N = \{\mathbf{X}_N, \mathbf{Y}_N, \mathbf{M}_N\}$. La función de verosimilitud a maximizar sería:

$$f(\mathbf{Z}_N | \theta) = f_{\mu_0, \Sigma_0}(\mathbf{x}_0) \prod_{t=0}^{N-1} f_{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t) \prod_{t=1}^N f_{\mathbf{R}, \mathbf{H}, \mathbf{G}}(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t).$$

Tomando logaritmo de la función anterior $l_{\mathbf{Z}_N}(\theta) = 2 \log f(\mathbf{Z}_N | \theta)$, resulta

$$l_{\mathbf{Z}_N}(\theta) = l_0(\mu_0, \Sigma_0) + l_1(\mathbf{Q}) + l_2(\mathbf{R}, \mathbf{H}, \mathbf{G}),$$

donde asumiendo la hipótesis de normalidad para cada uno de los vectores que componen \mathbf{Z}_N , la expresión concreta de cada sumando es:

$$\begin{aligned} l_0(\mu_0, \Sigma_0) &= -\log |\Sigma_0| - (\mathbf{x}_0 - \mu_0)^T \Sigma_0^{-1} (\mathbf{x}_0 - \mu_0), \\ l_1(\mathbf{Q}) &= -N \log |\mathbf{Q}| - \sum_{t=0}^{N-1} (\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{x}_t)^T \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{x}_t), \\ l_2(\mathbf{R}, \mathbf{H}) &= -N \log |\mathbf{R}| - \sum_{t=1}^N (\mathbf{y}_t - \mathbf{H}\mathbf{x}_t - \mathbf{G}\mathbf{m}_t)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}_t - \mathbf{H}\mathbf{x}_t - \mathbf{G}\mathbf{m}_t), \end{aligned} \tag{B.1}$$

lo que permite definir los pasos del algoritmo iterativo EM.

B.1. Paso E: computación de $E[l_{\mathbf{Z}_N}(\boldsymbol{\theta})|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j]$

Aquí, dados los valores de los parámetros $\hat{\boldsymbol{\theta}}_j = (\hat{\boldsymbol{\mu}}_{0,j}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{0,j}, \hat{\mathbf{Q}}_j, \hat{\mathbf{R}}_j, \hat{\mathbf{H}}_j, \hat{\mathbf{G}}_j)$ (matrices estimadas en la iteración previa j), \mathbf{Y}_N , \mathbf{M}_N , los únicos términos que permanecen como datos aleatorios en la ecuación (3.22) son los estados \mathbf{X}_N . Entonces, para calcular los valores esperados de (B.1) con la información de \mathbf{Y}_N , \mathbf{M}_N y $\hat{\boldsymbol{\theta}}_j$ hay que proporcionar para $t = 0, 1, 2, 3, \dots, N$ los valores

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t|N} &= E[\mathbf{x}_t|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j], \\ \mathbf{P}_{t|N} &= E[(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t|N})(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t|N})'|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j], \\ \mathbf{P}_{t+1,t|N} &= E[(\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{x}_{t+1|N})(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t|N})'|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j], \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

obtenidos con el filtro de Kalman alisado (ver Kalman, 1960 y Kalman y Bucy, 1961). A partir de estos valores (B.2), es posible calcular $E[l_{\mathbf{Z}_N}(\boldsymbol{\theta})|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j]$ como la suma de las siguientes tres expresiones:

$$E[l_{\mathbf{Z}_N}(\boldsymbol{\theta})|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j] = E[l_0(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j] + E[l_1(\mathbf{Q})|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j] + E[l_2(\mathbf{R}, \mathbf{H}, \mathbf{G})|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j]$$

de valor:

$$\begin{aligned} E[l_0(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j] &= -\log |\boldsymbol{\Sigma}_0| - \text{tr} \left\{ \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} [\mathbf{P}_{0|N} + (\mathbf{x}_{0|N} - \boldsymbol{\mu}_0)(\mathbf{x}_{0|N} - \boldsymbol{\mu}_0)^T] \right\}. \\ E[l_1(\mathbf{Q})|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j] &= \begin{cases} -N \log |\mathbf{Q}| - \text{tr} \left\{ \mathbf{Q}^{-1} \sum_{t=0}^{N-1} [\mathbf{P}_{t+1|N} + \mathbf{P}_{t|N} - \mathbf{P}_{t+1,t|N} - \right. \\ \left. - \mathbf{P}_{t+1,t|N}^T + (\mathbf{x}_{t+1|N} - \mathbf{x}_{t|N})(\mathbf{x}_{t+1|N} - \mathbf{x}_{t|N})^T] \right\}. \end{cases} \\ E[l_2(\mathbf{R}, \mathbf{H}, \mathbf{G})|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j] &= \begin{cases} -N \log |\mathbf{R}| - \text{tr} \left\{ \mathbf{R}^{-1} \sum_{t=1}^N [\mathbf{H}\mathbf{P}_{t|N}\mathbf{H}^T + \right. \\ \left. + (\mathbf{y}_t - \mathbf{H}\mathbf{x}_{t|N} - \mathbf{G}\mathbf{m}_t)(\mathbf{y}_t - \mathbf{H}\mathbf{x}_{t|N} - \mathbf{G}\mathbf{m}_t)^T] \right\}. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

donde $\text{tr}\{\}$ es el operador traza de una matriz.

B.2. Paso M: maximización de $E[l_{\mathbf{Z}_N}(\boldsymbol{\theta})|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j]$

El paso M consiste en maximizar $E[l_{\mathbf{Z}_N}(\boldsymbol{\theta})|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j]$ respecto a los parámetros $\boldsymbol{\theta}$, en la iteración $j + 1$ y es análogo al enfoque de la regresión multivariante.

- El máximo de $E[l_0(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j]$ se obtiene para:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{0,j+1} = \mathbf{x}_{0|N}, \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{0,j+1} = \mathbf{P}_{0|N}.$$

B.2 Paso M: maximización de $E[l_{\mathbf{z}_N}(\boldsymbol{\theta})|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j]$

- El máximo de $E[l_1(\mathbf{Q})|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j]$ se obtiene para:

$$\hat{\mathbf{Q}}_{j+1} = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \left[\mathbf{P}_{t+1|N} + \mathbf{P}_{t|N} + \mathbf{P}_{t+1,t|N} + \mathbf{P}_{t+1,t|N}^T + (\mathbf{x}_{t+1|N} - \mathbf{x}_{t|N}) (\mathbf{x}_{t+1|N} - \mathbf{x}_{t|N})^T \right]. \quad (\text{B.4})$$

- El máximo de $E[l_2(\mathbf{R}, \mathbf{H}, \mathbf{G})|\mathbf{Y}_N, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j]$, se obtiene para:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{H}}_{j+1} \left[\sum_{t=1}^N (\mathbf{P}_{t|N} + \mathbf{x}_{t|N} \mathbf{x}_{t|N}^T) \right] + \hat{\mathbf{G}}_{j+1} \left[\sum_{t=1}^N \mathbf{x}_{t|N} \mathbf{m}_t^T \right] = \left[\sum_{t=1}^N \mathbf{y}_t \mathbf{x}_{t|N}^T \right], \\ \hat{\mathbf{H}}_{j+1} \left[\sum_{t=1}^N \mathbf{m}_t \mathbf{x}_{t|N}^T \right] + \hat{\mathbf{G}}_{j+1} \left[\sum_{t=1}^N \mathbf{m}_t \mathbf{m}_t^T \right] = \left[\sum_{t=1}^N \mathbf{y}_t \mathbf{m}_t^T \right]. \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

$$\hat{\mathbf{R}}_{j+1} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[\hat{\mathbf{H}}_{j+1} \mathbf{P}_{t|N}^T \hat{\mathbf{H}}_{j+1}^T + (\mathbf{y}_t - \hat{\mathbf{H}}_{j+1} \mathbf{x}_{t|N} - \hat{\mathbf{G}}_{j+1} \mathbf{m}_t) (\mathbf{y}_t - \hat{\mathbf{H}}_{j+1} \mathbf{x}_{t|N} - \hat{\mathbf{G}}_{j+1} \mathbf{m}_t)^T \right]. \quad (\text{B.6})$$

Este algoritmo se resume en el siguiente procedimiento iterativo:

Algoritmo EM

Dado un número máximo de iteraciones $j_{\text{máx}}$, una tolerancia ε , y un conjunto inicial de parámetros $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 = (\hat{\boldsymbol{\mu}}_{0,0}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{0,0}, \hat{\mathbf{Q}}_0, \hat{\mathbf{R}}_0, \hat{\mathbf{H}}_0, \hat{\mathbf{G}}_0)$.

$j = 1$

$\delta l = 10^{10}$

Mientras ($\delta l > \varepsilon$ o $j < j_{\text{máx}}$):

- Realizar el paso E:

Usar el Filtro de Kalman y el filtro de Kalman Smoother para obtener:

$\mathbf{x}_{t|N}$, $\mathbf{P}_{t|N}$ y $\mathbf{P}_{t+1,t|N}$, para $t = 0, 1, \dots, N$, con los parámetros $\hat{\boldsymbol{\theta}}_j$ conocidos.

- Realizar el paso M:

Usar la fórmula explícita (B.4), (B.5), y (B.6) para calcular

$\hat{\boldsymbol{\theta}}_j = (\hat{\boldsymbol{\mu}}_{0,j}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{0,j}, \hat{\mathbf{Q}}_j, \hat{\mathbf{R}}_j, \hat{\mathbf{H}}_j, \hat{\mathbf{G}}_j)$ y actualizar el valor de los parámetros estimados.

- Calcular:

$$\delta l = |l_{\mathbf{z}_N}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{j+1}) - l_{\mathbf{z}_N}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_j)| / |l_{\mathbf{z}_N}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{j+1})|.$$

$$j = j + 1.$$

Fin

Apéndice C

FILTRADO Y ALISADO DE KALMAN

Se muestra aquí el filtro de Kalman, sobre el que se basan las ecuaciones del algoritmo del apéndice anterior. El filtro de Kalman es una herramienta muy conocida y utilizada, pero que se incluye a continuación para completar el apartado. Además se incluyen dos propiedades adicionales que se necesitan en las ecuaciones.

En todas las expresiones derivadas del filtro de Kalman se ha empleado la siguiente notación. Dados los datos de salida para s pasos temporales $\mathbf{Y}_s = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_s\}$, se definen:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{t|s} &= E[\mathbf{x}_t | \mathbf{Y}_s], \\ \mathbf{P}_{t_1, t_2}^s &= E[(\mathbf{x}_{t_1} - \mathbf{x}_{t_1|s})(\mathbf{x}_{t_2} - \mathbf{x}_{t_2|s})^T | \mathbf{Y}_s],\end{aligned}$$

donde $E[\cdot | \cdot]$ es el operador esperanza condicionada.

Cuando $t_1 = t_2 = t$ se denotará $\mathbf{P}_{t|s}$:

$$\mathbf{P}_t^s = E[(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t|s})(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t|s})^T | \mathbf{Y}_s] = \text{Var}[\mathbf{x}_t | \mathbf{Y}_s].$$

Para el modelo en el espacio de los estados especificado:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t, & \text{var}(\mathbf{w}_t) = \mathbf{Q}, \\ \mathbf{y}_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_t + \mathbf{G}\mathbf{m}_t + \mathbf{v}_t, & \text{var}(\mathbf{v}_t) = \mathbf{R}, \end{cases}$$

con las condiciones iniciales $\mathbf{x}_{0|0} = \boldsymbol{\mu}_0$ y $\mathbf{P}_{0|0} = \boldsymbol{\Sigma}_0$, for $t = 1, 2, \dots, N$, se puede escribir

$$\mathbf{x}_{t|t-1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{t-1|t-1}, \tag{C.1}$$

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{t-1|t-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}, \tag{C.2}$$

con

$$\mathbf{x}_{t|t} = \mathbf{x}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t\epsilon_t, \tag{C.3}$$

$$\mathbf{P}_{t|t} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{H}]\mathbf{P}_{t|t-1}, \tag{C.4}$$

donde

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{H}^T \boldsymbol{\Sigma}_t^{-1}, \quad (\text{C.5})$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_t = \mathbf{y}_t - \mathbb{E}[\mathbf{y}_t | \mathbf{Y}_{t-1}] = \mathbf{y}_t - \mathbf{H} \mathbf{x}_{t|t-1} - \mathbf{G} \mathbf{m}_t, \quad (\text{C.6})$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_t = \text{Var}[\boldsymbol{\epsilon}_t] = \text{Var}[\mathbf{H}(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t|t-1}) + \mathbf{v}_t] = \mathbf{H} \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}, \quad (\text{C.7})$$

donde \mathbf{K}_t se denomina ganancia de Kalman y $\boldsymbol{\epsilon}_t$ son las innovaciones.

Para el modelo en el espacio de los estados especificado en (C) con las condiciones iniciales $\mathbf{x}_{N|N}$ y $\mathbf{P}_{N|N}$ obtenidas mediante (C.3) y (C.4), para $t = N, N-1, \dots, 1$,

$$\mathbf{x}_{t-1|N} = \mathbf{x}_{t-1|t-1} + \mathbf{J}_{t-1} (\mathbf{x}_{t|N} - \mathbf{x}_{t|t-1}), \quad (\text{C.8})$$

$$\mathbf{P}_{t-1|N} = \mathbf{P}_{t-1|t-1} + \mathbf{J}_{t-1} (\mathbf{P}_{t|N} - \mathbf{P}_{t|t-1}) \mathbf{J}_{t-1}^T, \quad (\text{C.9})$$

donde

$$\mathbf{J}_{t-1} = \mathbf{P}_{t-1|t-1} \mathbf{A}^T [\mathbf{P}_{t|t-1}]^{-1}, \quad (\text{C.10})$$

$$\mathbf{P}_{N,N-1|N} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_N \mathbf{H}) \mathbf{A} \mathbf{P}_{N-1|N-1} \quad (\text{C.11})$$

para $t = N, N-1, \dots, 2$

$$\mathbf{P}_{t,t-1|N} = \mathbf{P}_{t|t} \mathbf{J}_{t-1}^T + \mathbf{J}_t (\mathbf{P}_{t+1,t|N} - \mathbf{A} \mathbf{P}_{t|t}) \mathbf{J}_{t-1}^T. \quad (\text{C.12})$$

La demostración de las propiedades anteriores puede encontrarse en Shumway y Stoffer (2006).

Apéndice D

MATERIAL COMPLEMENTARIO

D.1. Datos

El conjunto de datos analizados en esta tesis puede encontrarse en el fichero “Data.zip”, que contiene el logaritmo de los precios horarios de la electricidad en los mercados *spot* de *Omel* (España), *Powernext* (Francia) y *Nord Pool* (Dinamarca, Finlandia, Noruega y Suecia) en “Omel.dat”, “Powernext.dat” y “Nordpool.dat”, respectivamente.

D.2. Listado de Funciones *MATLAB*

Las funciones de *MATLAB* utilizadas en esta tesis se encuentran en “Matlabfiles.zip”.

D.2.1. Función *dfa*

```
function [P,B,Sigma,T,Lambda] = dfa(Q,H,R)
% Inputs: Q, H and R
% Given the State Space model
%
%  $x(t+1) = x(t) + w(t)$ ,  $\text{var}\{w(t)\} = Q$ 
%  $y(t) = H*x(t) + v(t)$ ,  $\text{var}\{v(t)\} = R$ 
%
% dimension of  $x(t)$  is  $m$ , and dimension of  $y(t) = n$ , being  $n > m$ 
%  $C$  is  $n \times m$ ,  $Q$  is  $m \times m$  and  $R$  is  $n \times n$ 
%
% (1) Outputs: T and Lambda
%
% T is a non singular matrix that simultaneously
% diagonalizes  $HQH'$  and  $R$ , so that
%  $THQH'T' = \text{Lambda}$ 
%  $TRT' = \text{Identity}$ 
% and  $z(t) = T y(t)$ ,  $f(t) = THx(t)$  verify
%
%  $f(t+1) = f(t) + a(t)$ ;  $\text{var}\{a(t)\} = \text{Lambda}$ 
%  $z(t) = f(t) + e(t)$ ;  $\text{var}\{e(t)\} = \text{Identity}$ 
%
% Lambda is a diagonal matrix with  $n-m$  values equal to zero,
```

```

% is given as a vector with m positive values
%
% (2)Outputs: B, Sigma and D
%
% (yhat(t) is the predicted value for y(t))
% The exponential smoothing recursion
%
%  $yhat(t+1) = yhat(t) + B(y(t)-yhat(t))$ ,  $var(y(t)-yhat(t))=Sigma$ 
%
% Finally, D contains the eigenvalues of B
% P is de variance matrix of x(t)
% and Omega = TPT'
%
m = max(size(Q));
n = max(size(R));
% Computation of T and Lambda
L = chol(R)';
[V1,D1] = svd(Q);
M = L\H*V1*sqrt(D1);
[V,G] = svd(M);
G = G(1:m,1:m);
T = V'/L;
Lambda = (diag(G)).^2;
%
% Computation of D, P, B, Omega and Sigma
D = (-Lambda+sqrt(Lambda.^2+4*Lambda))/2;
Omega = D + Lambda;
%
Omegac = [Omega' zeros(1,n-m)]';
Dc = [D' zeros(1,n-m)]';
P = T \ diag(Omegac)/(T');
B = T \ diag(Dc)*T;
Sigma = P + R;

```

D.2.2. Función dfa_nuevo

```

function [P,B,Sigma,T,Lambda,yhat] = dfa_nuevo(y,Q,H,G,R)
% Inputs: Q, H and R
% Given the State Space model
%
%  $x(t+1) = x(t) + w(t)$ ,  $var\{w(t)\} = Q$ 
%  $y(t) = H*x(t) + G*m(t) + v(t)$ ,  $var\{v(t)\} = R$ 
%
% dimension of x(t) is m, and dimension of y(t) = n, being n>m
% C is n x m , Q is m x m and R is n x n
%
% (1) Outputs: T and Lambda
%

```

```

% T is a non singular matrix that simultaneously
% diagonalizes HQH' an R, so that
% THQH'T' = Lambda
% TRT' = Identity
% and z(t) = T y(t), f(t) = THx(t) verify
%
% f(t+1) = f(t) + a(t); var(a(t)) = Lambda
% z(t) = f(t) + e(t); var{e(t)} = Identity
%
% Lambda is a diagonal matrix with n-m values equal to zero,
% is given as a vector with m positive values
%
% (2)Outputs: B, Sigma and D
%
% (yhat(t) is the predicted value for y(t))
% The exponential smoothing recursion
%
% yhat(t+1) = yhat(t) + B(y(t)-yhat(t)), var(y(t)-yhat(t))=Sigma
%
% Finally, D contains the eigenvalues of B
% P is de variance matrix of x(t)
% and Omega = TPT'
%
m = max(size(Q));
n = max(size(R));
% Computation of T and Lambda
L = chol(R)';
[V1,D1] = svd(Q);
M = L\H*V1*sqrt(D1);
[V,G] = svd(M);
G = G(1:m,1:m);
T = V'/L;
Lambda = (diag(G)).^2;
%
% Computation of D, P, B, Omega and Sigma
D = (-Lambda+sqrt(Lambda.^2+4*Lambda))/2;
Omega = D + Lambda;
%
Omegac = [Omega' zeros(1,n-m)]';
Dc = [D' zeros(1,n-m)]';
P = T\diag(Omegac)/(T');
B = T\diag(Dc)*T;
Sigma = P + R;
%The exponential smoothing recursion
yhat(:,1)=G(:,1);
for i=1:length(y(1,:))
    yhat(:,i+1) = yhat(:,i) + B*(y(:,i)-yhat(:,i)); %var(y(t)-yhat(t))=Sigma
end

```

D.2.3. Función em_algorithm

```

function [AE,BE,CE,DE,QE,RE,init_xE,init_PE,k,logvec,xfilt]=em_algorithm(y,u,A,
B,C,D,Q,R,init_x,init_P,Tol,Nmax);
%This function estimates the matrices in the state space model AE, BE, CE,
%DE, QE, RE, init_xE, init_PE from initial guess values.
%  $x_{t+1} = A*x_t + B*u_t + w_t$  var{w_t} = Q
%  $y_t = C*x_t + D*u_t + v_t$  var{v_t} = R
%In this function A, B, init_x will be known
%We are going only to estimate Q, R, C, D.
%k is the number of iterations until convergence.
%Nmax is the maximum number of iterations allowed in the algorithm.
%logvec is the likelihood value in all the iterations of the EM algorithm.
%xfilt are the estimation of the state vector  $x_t$  knowing the values until  $y_{t-1}$  via
Kalman filter.
%Tol is the stop criterion of the EM algorithm
T=size(y,2);
ss=size(A,1);
ne=size(u,1);
AE=A;
BE=B;
CE=C;
DE=D;
QE=Q;
RE=R;
init_xE=init_x;
init_PE=init_P;
[LQE,a]=eig(QE);
i=find(((diag(a)<=0) | (imag(diag(a))~=0)));
for j=1:length(i)
    a(i(j),i(j))=0;
end
QE=LQE*a*LQE';
z=zeros(ss,1);
z(:,1)=eig(AE);
[LRE,a]=eig(RE);
i=find(((diag(a)<=0) | (imag(diag(a))~=0)));
for j=1:length(i)
    a(i(j),i(j))=0;
end
RE=LRE*a*LRE';
Suue=u(:,1)*u(:,1)'; %Sum((u_t-1)*(u_t-1)') for t=2:N
Syu=y(:,2)*u(:,2)'; %Sum((y_t)*(u_t)') for t=2:N
Syy=y(:,2)*y(:,2)'; %Sum((y_t)*(y_t)') for t=2:N
Suuo=u(:,2)*u(:,2)'; %Sum((u_t)*(u_t)') for t=2:N
for t=3:T
    Suue=Suue+u(:,t-1)*u(:,t-1)';
    Syu=Syu+y(:,t)*u(:,t)';

```

```

    Syy=Syy+y(:,t)*y(:,t)';
    Suuo=Suuo+u(:,t)*u(:,t)';
end
Suy=Syu';
k=0;
loglik_nueva=1e+7;
while( k<2 || ((abs(loglik_nueva-loglik_antigua)/abs(loglik_nueva))>Tol & k<Nmax) )
    %Step 1: Expectation
    %-----
    [init_xE,init_PE,Sub,Suxe,Sbb,Sbx,Sxx,Sxy,Suxo,loglik,xfilt]=kalman_smoother2s(y,u,
    AE,BE,CE,DE,QE,RE,init_xE,init_PE);
    init_xE=init_x; %Initial state of value zero.
    Sbu=Sub';
    Sxue=Suxe';
    Sxb=Sbx';
    Syx=Sxy';
    Sxuo=Suxo';
    loglik_antigua=loglik_nueva;
    loglik_nueva=loglik;
    logvec(k+1)=loglik;
    %Step 2: Maximization
    %-----
    %Estimation of CE and DE.
    if (sum(u(:))>1)
        %With inputs
        SZU=[Syx Syu]; SZZ=[Sxx Sxuo; Suxo Suuo];
        CDE=SZU/SZZ;
        CE=CDE(:,1:ss);
        DE=CDE(:,ss+1:ss+ne);
    else
        %Without inputs
        CE=(Syx-D*Suxo)/Sxx;
        DE=D; %D is known equal to zero.
    end
    %Estimation of QE
    QE=(Sxx-Sxb*AE'-AE*Sbx+AE*Sbb*AE'-Sxue*BE'+AE*Sbu*BE'-BE*Suxe+
    BE*Sub*AE'+BE*Suue*BE')/(T-1);
    [LQE,a]=eig(QE);
    i=find(((diag(a)<=0) | (imag(diag(a))~=0)));
    for j=1:length(i)
        a(i(j),i(j))=0;
    end
    QE=LQE*a*LQE';
    %Estimation of RE
    RE=(Syy-Syx*CE'-CE*Sxy-Syu*DE'-DE*Suy+CE*Sxuo*DE'+DE*Suxo*CE'+
    CE*Sxx*CE'+DE*Suuo*DE')/(T-1);
    [LRE,a]=eig(RE);
    i=find(((diag(a)<=0) | (imag(diag(a))~=0)));
    for j=1:length(i)

```

```

a(i(j),i(j))=0;
end
RE=LRE*a*LRE';
%-----
k=k+1;
end

```

D.2.4. Función kalman_filter2s

```

function [x,P,PP,loglik,x_one_step,P_one_step,P_ant]=kalman_filter2s(y,u,A,B,C,D,
Q,R,init_x,init_P);
%This function computes the standard steady-state Kalman filter
%for the model in the state space
%  $x_{t+1} = A*x_t + B*u_t + w_t$   $\text{var}\{w_t\} = Q$ 
%  $y_t = C*x_t + D*u_t + v_t$   $\text{var}\{v_t\} = R$ 
%in order to calculate:
% $x(:,t)=E[X(:,t)|y(:,1:t),u(:,1:t)]$   $t \geq 1$ 
% $P(:,t)=A*\text{Var}[X(:,t)|y(:,1:t),u(:,1:t)]*A + Q$ ;
% $PP=\text{Cov}[X(:,T),X(:,T-1)|y(:,1:T),u(:,1:T)]$  T the last time step
%loglik ; loglik is the likelihood function
[os T]=size(y);
ss=size(A,1); %state space dimension
%Kalman filtering outputs
x=zeros(ss,T);
P=zeros(ss,ss);
PP=zeros(ss,ss);
%For t==1
x(:,1)=init_x; %initial state
[P,L,G,rr]=dare(A',C',Q,R); %solver for the Riccati equation: P, L=eig(A'-C'*G,eye(ss)),
G=(A*K)', rr is the Frobenius norm of the residual matrix
K=A\G'; %Kalman gain matrix
S=C*P*C'+R; %innovation variance matrix
S_inv=inv(S);
loglik=log(det(S))*(T-1);
for t=2:T
prevx=x(:,t-1); %prevx=E[X(:,t-1)|y(:,1:t-1)]
xpred=A*prevx+B*u(:,t-1); %xpred=E[X(:,t)|y(:,1:t-1))]
e=y(:,t)-C*xpred-D*u(:,t); %innovations
x(:,t)=xpred+K*e; %x=E[X(:,t)|y(:,1:t)]
loglik=loglik+e'*S_inv*e;
end
loglik=-0.5*loglik;
%These matrices will be the initial matrices in the Kalman smoother filter
P_ant = (eye(ss)-K*C)*P;
PP=(eye(ss)-K*C)*A*P_ant; % PP=Cov[X(:,T),X(:,T-1)|y(:,1:T),u(:,1:T)]
x_one_step=A*x(:,T)+B*u(:,T); % x_one_step=E[X(:,T+1)|y(:,1:T))]
P_one_step=P; % P_one_step=Var[X(:,T+1)|y(:,1:T)]

```

D.2.5. Función `kalman_smoother2s`

```

function[init_xs,init_Ps,Sub,Suxe,Sbb,Sbx,Sxx,Sxy,Suxo,loglik,xfilt,xsmooth]=
kalman_smoother2s(y,u,A,B,C,D,Q,R,init_x,init_P);
%This function computes the standard Kalman smother filter
%for the model in the state space
%  $x_{t+1} = A*x_t + B*u_t + w_t$   $\text{var}\{w_t\} = Q$ 
%  $y_t = C*x_t + D*u_t + v_t$   $\text{var}\{v_t\} = R$ 
%in order to calculate:
% $x_{smooth}(:,t)=E[X(:,t)|y(:,1:T),u(:,1:T)]$   $t \geq 1$ 
% $P_{smooth}([:,t]=\text{Var}[X(:,t)|y(:,1:T),u(:,1:T)]$   $t \geq 1$ 
% $PP_{smooth}([:,t)=\text{Cov}[X(:,t),X(:,t-1)|y(:,1:T),u(:,1:T)]$   $t \geq 2$ 
%using as data the kalman filter information
[os T]=size(y);
ss=size(A,1); %state space dimension
%Kalman filtering outputs
xsmooth=zeros(ss,T);
Psmooth=zeros(ss,ss,T);
PPsmooth=zeros(ss,ss,T);
%forward pass
[xfilt,Pfilt,PPfilt,loglik,x_one_step,P_one_step,P_ant]=kalman_filter2s(y,u,A,B,C,D,Q,
R,init_x,init_P);
% $x_{filt}=E[X(:,t)|y(:,1:t),u(:,1:t)]$   $P_{filt}=\text{Var}[X(:,t)|y(t),u(:,1:t)]$  para  $t=1:T$ 
%backward pass
xsmooth(:,T)=xfilt(:,T);
Psmooth(:,T)=P_ant;
PPsmooth(:,T)=PPfilt;
xpred = A*xfilt(:,T-1) + B*u(:,T-1);
J= P_ant*A'/Pfilt;
for t=T:-1:3
xsmooth(:,t-1) = xfilt(:,t-1) + J*(xsmooth(:,t) - xpred); % $x_{smooth}=E[X(:,t-1)|y(:,(1:T))]$ 
Psmooth(:,t-1) = P_ant + J*(Psmooth(:,t) - Pfilt)*J'; % $P_{smooth}=\text{Var}[X(:,t-1)|y(:,(1:T))]$ 
xpred = A*xfilt(:,t-2) + B*u(:,t-2); % $x_{pred}=E[X(:,t-1)|y(:,1:t-2)]$ 
PPsmooth(:,t-1) = P_ant*J' + J*(PPsmooth(:,t) - A*P_ant)*J'; %the lag-one covariance
smoother
% $PP_{smooth}([:,t-1)=\text{Cov}[X(:,t-1),X(:,t-2)|y(:,1:T),u(:,1:T)]$   $t \geq 3$ 
end
xsmooth(:,1) = xfilt(:,1) + J*(xsmooth(:,2) - xpred);
Psmooth(:,1) = P_ant + J*(Psmooth(:,2) - Pfilt)*J';
init_xs=xsmooth(:,1);
init_Ps=Psmooth(:,1);
%Here we create the matrices Sub,Suxe,Sbb,Sbx,Sxx,Sxy,Suxo used in the EM
%algorithm in the maximization step.
Sub=u(:,1)*xsmooth(:,1)'; % $\text{Sum}((x_{t-1} | N)*(u_{t-1})')$  for  $t=2:N$ 
Suxe=u(:,1)*xsmooth(:,2)'; % $\text{Sum}((x_t | N)*(u_{t-1})')$  for  $t=2:N$ 
Sbb=Psmooth(:,1)+xsmooth(:,1)*xsmooth(:,1)'; % $\text{Sum}((P_{t-1} | N)+((x_{t-1} | N)*((x_{t-1} | N) | N)')$  for  $t=2:N$ 
Sbx=PPsmooth(:,2)+xsmooth(:,1)*xsmooth(:,2)'; % $\text{Sum}((PP_{t,t-1} | N)+((x_t | N)*((x_{t-1} | N) | N)')$  for  $t=2:N$ 

```

```

Sxx=Psmooth(:,2)+xsmooth(:,2)*xsmooth(:,2)'; %Sum((P_t|N)+(x_t|N)*(x_t|N)')
for t=2:N
Sxy=xsmooth(:,2)*y(:,2)'; %Sum((y_t|N)*(x_t|N)') for t=2:N
Suxo=u(:,2)*xsmooth(:,2)'; %Sum((x_t|N)*(u_t)') for t=2:N
Suuo=u(:,2)*u(:,2)'; %Sum((u_t)*(u_t)') for t=2:N
for t=3:T
Sub=Sub+u(:,t-1)*xsmooth(:,t-1)';
Suxe=Suxe+u(:,t-1)*xsmooth(:,t)';
Sbb=Sbb+Psmooth(:,t-1)+xsmooth(:,t-1)*xsmooth(:,t-1)';
Sbx=Sbx+PPsmooth(:,t)+xsmooth(:,t-1)*xsmooth(:,t)';
Sxx=Sxx+Psmooth(:,t)+xsmooth(:,t)*xsmooth(:,t)';
Sxy=Sxy+xsmooth(:,t)*y(:,t)';
Suxo=Suxo+u(:,t)*xsmooth(:,t)';
Suuo=Suuo+u(:,t)*u(:,t)';
end

```

D.2.6. Función run_models

```

function mc=run_models(y,r,ninputs)
%This function is the main function to estimate matrices in the state space model
%  $x_{t+1} = A*x_t + B*u_t + w_t$  var{w_t} = Q
%  $y_t = C*x_t + D*u_t + v_t$  var{v_t} = R
%With this function we define the initial guess to call the EM algorithm to
%estimate the unknown matrices Q, R, C and D in the state space.
%Finally, we define the data structure mc with all the relevant information given in the
paper.
%Inputs y, r, ninputs
%y are the data nxN (n=24 in the case of electricity prices)
%r is the order of the model
%ninputs: the number of inputs 1 or 5 in the paper.
%Outputs
%mc is a data structure with the most relevant information written in the paper.
epsilon=1e-4;
tol=1e-10;
niter=500;
[n,N]=size(y);
%Define the inputs of the problems, depending on the different kinds of days in the week.
if (ninputs==0)
ur=[0,0,0,0,0];
end
if (ninputs==1)
ur=[1,1,1,1,1]; %Every day is equal
end
if (ninputs==3)
ur=[1,0,0,0,0;0,1,1,1,0;0,0,0,0,1]; %There are three sets of days: Monday, Tuesday-Wednesday-
Thursday, Friday
end
if (ninputs==5)

```

D.3 Instrucciones de uso de los programas en *MATLAB*

```
ur=[1,0,0,0,0;0,1,0,0,0;0,0,1,0,0;0,0,0,1,0;0,0,0,0,1]; %The five days of the weeks are dif-
ferent
end
u=[];
for i=1:N/5
u=[u,ur];
end
%Initial guess for matrices in the state space model
A=(1-epsilon)*eye(r);
B=zeros(r,length(u(:,1)));
Q=eye(r);
C=eye(24,r);
D=y(:,1)*ones(1,length(u(:,1)));
R=eye(24);
init_P=1e-10*eye(r);
init_x=zeros(r,1);
%Estimate the matrices Q, R, C, and D with the EM algorithm.
[A,B,C,D,Q,R,init_x,init_P,k,logvec,xfilt]=em_algorithm(y,u,A,B,C,D,Q,R,init_x,init_P,
tol,niter);
%Extract the most important information with the same notation as the paper.
mc.H = C;
mc.G = D;
mc.Q = Q;
mc.R = R;
mc.xfilt=xfilt;
mc.loglikelihood = logvec;
mc.yp(:,1)=D(:,1);
for t=2:N
mc.yp(:,t) = C*xfilt(:,t-1)+D*u(:,t);
end
mc.np=12*(n+1)+0.5*r*(2*n-r+1)+n*ninputs;
mc.AIC=-2*logvec(end)+2*mc.np;
mc.SIC=-2*logvec(end)+mc.np*log(N);
%Compute the Mean Weekly Error (MWE)
P=exp(y(:)); %Real electricity prices
Ph=exp(mc.yp(:)); %Estimated electricity prices
nd=120; %number of hours in a week
for i=1:length(P)/nd;
ph=Ph((i-1)*nd+1:i*nd);
p=P((i-1)*nd+1:i*nd);
error(i)=mean(abs(p-ph))/mean(p);
end
mc.MWE=error;
```

D.3. Instrucciones de uso de los programas en *MATLAB*

Las instrucciones de uso de los programas y obtener los resultados presentados en esta tesis se indican a continuación. Se han analizado los precios horarios de la electricidad en

los mercados *spot* de *Omel* (España), *Powernext* (Francia) y *Nord Pool* (Dinamarca, Finlandia, Noruega y Suecia). Los datos de las series temporales se encuentran en “Omel.dat”, “Powernext.dat” y “Nordpool.dat”. Si se desea leer en *MATLAB* un fichero, por ejemplo los datos del mercado *Omel*, debe escribirse:

```
>> y = load('Omel.dat');
```

En los ficheros de datos se tiene el logaritmo de los precios horarios de la electricidad para cada mercado. y es una matriz, donde las filas contienen los precios para las $r = 24$ horas del día y en las columnas se tiene la longitud de la serie temporal, $N = 360$ días laborables, equivalentes a 126 semanas desde el 1 de enero de 2007 hasta el 29 de mayo de 2009. Estos datos se emplean para estimar los diferentes modelos presentados en esta tesis.

1. Con el fin de obtener los resultados presentados en el apartado 4.4 de esta tesis, se va a estimar el siguiente modelo:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t, & \text{var}(\mathbf{w}_t) = \mathbf{Q}, \\ \mathbf{y}_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_t + \boldsymbol{\mu}_0 + \mathbf{v}_t, & \text{var}(\mathbf{v}_t) = \mathbf{R}, \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

donde el vector de estado tiene dimensión $n = 24$. El modelo será estimado con el bien conocido algoritmo EM escrito en “em_algorithm.m”. Este programa hace uso del filtro de Kalman y del suavizado de Kalman en las funciones “kalman_filter2s.m” y “kalman_smoother2s.m”, respectivamente. El programa principal para estimar el modelo es “run_models.m”, el cual debe ejecutarse en *MATLAB* mediante la siguiente sentencia:

```
>> mc = run_models(y; 24; 1);
```

donde 24 es el orden del modelo y 1 es el número de variables explicativas o regresores.

La variable de salida mc es una estructura de datos, la cual almacena la información más relevante del modelo.

```
>> Q = mc.Q;
>> R = mc.R;
>> H = mc.H;
>> mu0 = mc.G;
```

y la predicción del logaritmo del precio horario de la electricidad se guarda en:

```
>> y_hat_t = mc.y_hat;
```

Las matrices $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{I} - \mathbf{B}$; $\boldsymbol{\Sigma}$ y \mathbf{P} dadas por las ecuaciones (3.7)-(3.9), requeridas para crear los modelos equivalentes (3.3) y (3.4), pueden ser obtenidas mediante la función “dfa.m”. La matriz no singular \mathbf{T} y la matriz diagonal de varianzas $\boldsymbol{\Lambda}$, útil para diagonalizar todas las matrices (como se indica en la Proposición 2) también vienen dadas por la misma función:

```
>> [P, B, Sigma, T, Lambda] = dfa(Q, H, R);
```

2. Para obtener los resultados presentados en el capítulo 4 y en el capítulo 5 de esta tesis, se va a estimar el modelo dado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t+1} &= \mathbf{x}_t + \mathbf{w}_t & \text{var}(\mathbf{w}_t) &= \mathbf{Q}, \\ \mathbf{y}_t &= \mathbf{H}_r \mathbf{g}_t + \mathbf{G} \mathbf{m}_t + \mathbf{v}_t & \text{var}(\mathbf{v}_t) &= \mathbf{R}, \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Ahora el vector de estado tiene dimensión desde $r = 1$ hasta 24. Los modelos también han sido calculados con la función “run_models.m”, pero en este caso se hizo para cada orden del modelo.

```
>> for r = 1 : 24
model(r) = run_models(y, r, 5);
end
```

Aquí 5 es el número de variables explicativas debido al diferente comportamiento de cada día de la semana. Las matrices estimadas para cada modelo de dimensión r pueden obtenerse en *MATLAB* mediante:

```
>> Q = model(r).Q;
>> R = model(r).R;
>> H = model(r).H;
>> G = model(r).G;
```

La estructura de datos tiene también las siguientes variables:

```
>>  $\hat{y}_t = mc.y_p$  : predicción del logaritmo del precio horario de la electricidad.
>>  $m(r).AIC$  : el Criterio de Información de Akaike dado por la ecuación (5.3).
>>  $m(r).SIC$  : el Criterio de Información de Schwarz dado por la ecuación (5.6).
>>  $m(r).np$  : el número total de parámetros dado por la ecuación (5.5).
>>  $m(r).loglikelihood$  : la función de verosimilitud dada por la ecuación (5.4) en cada iteración del algoritmo EM hasta alcanzar la convergencia.
```

Para cada modelo de orden r pueden obtenerse también las matrices $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{I} - \mathbf{B}$, $\boldsymbol{\Sigma}$, \mathbf{P} , \mathbf{T} y $\boldsymbol{\Lambda}$ mediante la función “dfa.m”.

D.4. Listado de los programas en R

Los datos se encuentran en formato de texto plano en los ficheros “nordpool.dat”, “power-next.dat” y “omel.dat”.

D.4.1. Predicción con el Modelo A

A continuación se muestran las instrucciones para la estimación y predicción del modelo A descrito en el apartado 6.3.3 de esta tesis:

```
yn <- read.table('nordpool.dat')
library(forecast)
yn <- ts(yn)
zn = yn[1 : 630,]
zn = as.vector(t(zn))
zn = ts(zn, frequency = 24)
```

```

mn = auto.arima(zn, d = NA, D = NA, max.p = 30, max.q = 30,
max.P = 3, max.Q = 3, max.order = 50, start.p = 5, start.q = 3,
start.P = 3, start.Q = 3, stationary = FALSE,
ic = c("aic", "aicc", "bic"), stepwise = TRUE, trace = TRUE,
test = c("kpss", "adf", "pp"), seasonal.test = "ocsb",
allowdrift = TRUE, lambda = NULL)

```

Los valores predichos se obtienen empleando $nord.fcastA = fcast(yn, mn, 631, 780)$ con la función:

```

fcast <- function(yn, m, ini, fin)
{
fcast = yn
for(kin(ini : fin))
{
print(k)
fit = Arima(window(y, end = c(k - 1, 24)), model = m)
fc = forecast(fit, h = 24)
fcast = c(fcast, fcmean)
}
fcast
}

```

D.4.2. Predicción con el Modelo B

A continuación se muestran las instrucciones para la estimación y predicción del modelo B descrito en el apartado 6.3.3 de esta tesis:

```

yn = read.table("nordpool.dat")
library(forecast)
nord.fcastB = pred24(t(yn))
fpred24function
pred24 <- function(yn) {
pred = matrix(0, 150, 24)
for(kin(1 : 24))
{
print(k)
z = ts(yn[1 : 630, k], frequency = 5)
m = auto.arima(z, d = NA, D = NA, max.p = 6, max.q = 6,
max.P = 6, max.Q = 6, max.order = 25, start.p = 2, start.q = 2,
start.P = 1, start.Q = 1, stationary = FALSE,
ic = c("aic", "aicc", "bic"), stepwise = TRUE, trace = FALSE,
test = c("kpss", "adf", "pp"), seasonal.test = "ocsb",
allowdrift = TRUE, lambda = NULL)
print(m)
m2 = Arima(yn[631 : 780, k], model = m)
fcast = fitted(m2)
pred[, k] = fcast
}
}

```

D.4 Listado de los programas en R

```
}  
pred = rbind(yn[1 : 630,], pred)  
pred  
}
```