UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE TELECOMUNICACIÓN

**ANÁLISIS, MODELADO E
IGUALACIÓN NO LINEAL DE ARRAYS
PARAMÉTRICOS ACÚSTICOS.**

TESIS DOCTORAL

VIRGINIA YAGÜE JIMÉNEZ
Ingeniero de Telecomunicación

2016

**DEPARTAMENTO DE SEÑALES, SISTEMAS Y
RADIOCOMUNICACIONES**

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE TELECOMUNICACIÓN

ANÁLISIS, MODELADO E IGUALACIÓN NO LINEAL DE ARRAYS PARAMÉTRICOS ACÚSTICOS.

TESIS DOCTORAL

Autor: VIRGINIA YAGÜE JIMÉNEZ
Ingeniero de Telecomunicación

Director: FCO. JAVIER CASAJÚS QUIRÓS
Doctor Ingeniero de Telecomunicación

Madrid, 2016

Departamento: Señales, Sistemas y Radiocomunicaciones
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación
Universidad Politécnica de Madrid (UPM)

Título: **Análisis, modelado e igualación no lineal
de arrays paramétricos acústicos.**

Autor: **Virginia Yagüe Jiménez.**
Ingeniero de Telecomunicación (UPM)

Director: **Dr. Fco. Javier Casajús Quirós.**
Doctor Ingeniero de Telecomunicación (UPM)

Año: 2016

Tribunal nombrado por el Mgfc. Rector de la Universidad Politécnica de Madrid, a de 2016.

Tribunal: **Dr. Mariano García Otero**
Universidad Politécnica de Madrid

Dr. José Parera Bermúdez
Universidad Politécnica de Madrid

Dr. José Javier Anaya Velayos
Consejo Superior de Investigaciones Científicas

Dra. Soledad Torres Guijarro
Universidad de Vigo

Dr. José Javier López Monfort
Universidad Politécnica de Valencia

Suplentes: **Dra. Margarita González Hernández**
Consejo Superior de Investigaciones Científicas

Dr. Manuel A Sobreira Seoane
Universidad de Vigo

Tras la defensa de la Tesis doctoral el día de 2016, en la E.T.S.I. de Telecomunicación, el tribunal acuerda la siguiente calificación:

.....

PRESIDENTE

SECRETARIO

MIEMBROS

Resumen

La presente Tesis analiza y desarrolla metodología específica que permite la caracterización de sistemas de transmisión acústicos basados en el fenómeno del *array paramétrico*. Este tipo de estructuras es considerado como uno de los sistemas más representativos de la acústica no lineal con amplias posibilidades tecnológicas. Los *arrays paramétricos* aprovechan la no linealidad del medio aéreo para obtener en recepción señales en el margen sónico a partir de señales ultrasónicas en emisión.

Por desgracia, este procedimiento implica que la señal transmitida y la recibida guardan una relación compleja, que incluye una fuerte ecualización así como una distorsión apreciable por el oyente. Este hecho reduce claramente la posibilidad de obtener sistemas acústicos de gran fidelidad. Hasta ahora, los esfuerzos tecnológicos dirigidos al diseño de sistemas comerciales han tratado de paliar esta falta de fidelidad mediante técnicas de preprocesado fuertemente dependientes de los modelos físicos teóricos. Estos están basados en la ecuación de propagación de onda no lineal.

En esta Tesis se propone un nuevo enfoque: la obtención de una representación completa del sistema mediante series de Volterra que permita inferir un sistema de compensación computacionalmente ligero y fiable.

La dificultad que entraña la correcta extracción de esta representación obliga a desarrollar una metodología completa de identificación adaptada a este tipo de estructuras. Así, a la hora de aplicar métodos de identificación se hace indispensable la determinación de ciertas características iniciales que favorezcan la parametrización del sistema. En esta Tesis se propone una metodología propia que extrae estas condiciones iniciales.

Con estos datos, nos encontramos en disposición de plantear un sistema completo de identificación no lineal basado en señales pseudoaleatorias, que aumenta la fiabilidad de la descripción del sistema, posibilitando tanto la inferencia de la estructura basada en bloques subyacente, como el diseño de mecanismos de compensación adecuados.

A su vez, en este escenario concreto en el que intervienen procesos de modulación, factores como el punto de trabajo o las características físicas del transductor, hacen inviables los algoritmos de caracterización habituales. Incluyendo el método de identificación propuesto. Con el fin de eliminar esta problemática se propone una serie de nuevos algoritmos de corrección que permiten la aplicación de la caracterización.

Las capacidades de estos nuevos algoritmos se pondrán a prueba sobre un prototipo físico, diseñado a tal efecto. Para ello, se propondrán la metodología y los mecanismos de instrumentación necesarios para llevar a cabo el diseño, la identificación del sistema y su posible corrección, todo ello mediante técnicas de procesamiento digital previas al sistema de transducción.

Los algoritmos se evaluarán en términos de error de modelado a partir de la señal de salida del sistema real frente a la salida sintetizada a partir del modelo estimado. Esta estrategia asegura la posibilidad de aplicar técnicas de compensación ya que éstas son sensibles a errores de estima en módulo y fase. La calidad del sistema final se evaluará en términos de fase, coloración y distorsión no lineal mediante un test propuesto a lo largo de este discurso, como paso previo a una futura evaluación subjetiva.

Abstract

This Thesis presents a specific methodology for the characterization of acoustic transmission systems based on the parametric array phenomenon. These structures are well-known representatives of the nonlinear acoustics field and display large technological opportunities. Parametric arrays exploit the nonlinear behavior of air to obtain sonic signals at the receptors' side, which were generated within the ultrasonic range.

The underlying physical process redounds in a complex relationship between the transmitted and received signals. This includes both a strong equalization and an appreciable distortion for a human listener. High fidelity, acoustic equipment based on this phenomenon is therefore difficult to design. Until recently, efforts devoted to this enterprise have focused in fidelity enhancement based on physically-informed, pre-processing schemes. These derive directly from the nonlinear form of the wave equation. However, online limited enhancement has been achieved.

In this Thesis we propose a novel approach: the evaluation of a complete representation of the system through its projection onto the Volterra series, which allows the posterior inference of a computationally light and reliable compensation scheme.

The main difficulty in the derivation of such representation strives from the need of a complete identification methodology, suitable for this particular type of structures. As an example, whenever identification techniques are involved, we require preliminary estimates on certain parameters that contribute to the correct parameterization of the system. In this Thesis we propose a methodology to derive such initial values from simple measures.

Once these information is made available, a complete identification scheme is required for nonlinear systems based on pseudorandom signals. These contribute to the robustness and fidelity of the resulting model, and facilitate both the inference of the underlying structure, which we subdivide into a simple block-oriented construction, and the design of the corresponding compensation structure.

In a scenario such as this where frequency modulations occur, one must control exogenous factors such as devices' operation point and the physical properties of the transducer. These may conflict with the principia behind the standard identification procedures, as it is the case. With this idea in mind, the Thesis includes a series of novel correction algorithms that facilitate the application of the characterization results onto the system compensation.

The proposed algorithms are tested on a prototype that was designed and built for this purpose. The methodology and instrumentation required for its design, the identification of the overall acoustic system and its correction are all based on signal processing techniques, focusing on the system front-end, i.e. prior to transduction.

Results are evaluated in terms of input-output modelling error, considering a synthetic construction of the system. This criterion ensures that compensation techniques may actually be introduced, since these are highly sensible to estimation errors both on the envelope and the phase of the signals involved. Finally, the quality of the overall system will be evaluated in terms of phase, spectral color and nonlinear distortion; by means of a test protocol specifically devised for this Thesis, as a prior step for a future, subjective quality evaluation.

A mi familia y amigos

“ [...] Quiero advertirles, de paso, que la realidad, aunque
sometida a leyes invariables, casi siempre parece inverosímil.
A veces una cosa es tanto más real cuanto más inverosímil parece.”

Fiódor Dostoyevski
El idiota (1869)

Agradecimientos

Durante este largo proceso he contado con la ayuda inestimable de muchas personas, que han permitido desarrollar este trabajo, y a las cuales quiero agradecer su esfuerzo y apoyo. En primer lugar, agradecer a mi tutor, el Dr. Fco. Javier Casajús por el aporte de las ideas que han fundamentado esta Tesis, al igual que por sus sabias directrices, que me han permitido llegar a los objetivos presentados en esta memoria. A su vez, agradecerle el gran esfuerzo que ha realizado durante estos años para obtener la financiación que ha posibilitado realizar este trabajo.

Agradecer a aquellos que desinteresadamente han permitido la utilización de los equipos e instalaciones necesarios para llevar a cabo la parte experimental de esta Tesis. En primer lugar, agradecer al equipo del IDETIC, en especial a Laura Melián Gutiérrez y a Javier Pérez Mato, por permitirme mecanizar el frontal de mi prototipo con su máquina de corte láser. También a Juan, que me enseñó a utilizar las máquinas de conformado de metales disponibles en la Escuela. Por otro lado, agradecer al Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones de la EUITT, muy especialmente a Elena Blanco y a los maestros de laboratorio del departamento por poner a mi disposición la sala anecoica de su centro.

No puedo olvidar mencionar aquí a todos aquellos docentes que a lo largo de mi formación académica me han permitido adquirir los conocimientos necesarios para realizar este trabajo. Mi sincero agradecimiento a mis profesores de la EUITT, que me enseñaron casi todo lo que sé de transducción y acústica. Por otro lado, destacar los conocimientos recibidos a lo largo de estos últimos años en la ETSIT, que me han permitido obtener una visión más rigurosa de estos campos.

Aprovecho esta oportunidad para agradecer a mis compañeros de carrera todos los buenos ratos que hemos disfrutado compartiendo conocimientos: he aprendido tanto con vosotros como en las propias clases.

Gracias a todos los doctorandos que han pasado por este proceso junto a mí: Nelson, Laura, Ana, Qifei. . . Sin mi grupo de investigación esto no habría sido posible. A pesar de que muchos ya no forméis parte del Grupo, se os echa de menos. Siempre habéis estado allí apoyándome y no sabéis cuanto lo aprecio. Aunque cada uno hayamos desarrollado líneas de investigación diferentes, siempre estuvisteis allí para animarme y ofrecerme diferentes puntos de vista.

Destacar aquí la inestimable ayuda de mi compañero José Luis Blanco. Tu trabajo es preciso e inspirador, eres el mejor ejemplo de lo que significa el proceso investigador: curiosidad, capacidad resolutive y esfuerzo. Durante los dos últimos años, en los que hemos formado un pequeño grupo de trabajo, he aprendido mucho de ti, y parte de este trabajo ha sido resultado de este esfuerzo conjunto.

Finalmente, agradecer a mi familia y amigos el apoyo inestimable que he recibido por su parte a lo largo de estos años. Sin vuestros ánimos jamás habría sido capaz de llegar hasta este punto. Sé que ha sido duro y espero que el esfuerzo haya merecido la pena. Prometo compensar con creces todas las veces que no he podido estar junto a vosotros o prestaros la atención que realmente merecíais.

Índice

1	Introducción	1
1.1	Motivación.....	1
1.2	Aplicaciones de los arrays paramétricos	2
1.3	Objetivos y ámbito	3
1.4	Estructura de la Tesis.....	3
2	Modelo físico del array paramétrico. Premisa	7
2.1	Limitaciones de los altavoces para conseguir zonas de audiencia delimitada.....	8
2.2	Principio del <i>array paramétrico</i>	10
2.2.1	Zonas de transmisión de un <i>array paramétrico</i>	11
2.2.2	Comportamiento del <i>array paramétrico</i> en presencia de dos tonos puros	12
2.2.3	Aproximación de Berklay.....	14
2.3	Técnicas de modulación	16
2.3.1	Técnicas basadas en la inversión de la expresión de Berklay.....	16
2.3.2	Técnicas basadas en modulaciones en cuadratura.....	18
2.3.3	Comparativa y características de las técnicas de modulación.....	20
2.4	Conclusiones: modelo de sistema	29
3	Identificación orientada a las estructuras de arrays paramétricos	31
3.1	Planteamiento inicial del problema de identificación	32
3.1.1	Modelos de caja blanca, gris y negra	33
3.1.2	Clasificación y elección de los métodos de identificación no lineal	34
3.1.3	Las series de Volterra como representación de los sistemas no lineales.....	37
	Ventajas y desventajas del modelo de Volterra	38
	El array paramétrico representado como series de Volterra	38
3.1.4	Señales de test para la identificación de sistemas.....	40
3.2	Comportamiento de los sistemas no lineales de memoria y orden finitos frente a senos del frecuencia variable exponencial.....	42
3.2.1	Determinación informal de la memoria y el orden del sistema bajo estudio	43
3.2.2	Identificación del sistema suponiendo una estructura generalizada de Hammerstein	50
3.2.3	Evaluación de modelos de caja negra mediante tonos de frecuencia variable exponencial	59
	Parámetro de distorsión basados en el test del tonos de frecuencia variable exponencial.....	61
	Diagnosis de estructuras.....	62
	Comparación con otros sistemas de identificación similares.....	64
3.3	Obtención de las series de Volterra completas mediante excitación pseudoaleatoria.....	70
3.3.1	Reformulación del problema: estudio matricial de la simetría de los núcleos de Volterra.....	73
3.3.2	Sistema de identificación mediante secuencias MLS.....	77
	Coste computacional del algoritmo de identificación mediante MLS y estrategias de indentación.....	79
	Pérdida de la ortogonalidad debido a la componente continua.....	84
	Relación entre los coeficientes estimados y reales	85
3.3.3	Corrección de la desviación de los coeficientes.....	91
3.3.4	Evaluación del sistema de identificación mediante MLS para sistemas de entrada de media no nula	94
3.3.5	Ámbito de aplicación del algoritmo y limitaciones.....	97
3.4	Conclusiones	98
4	Técnicas de compensación	101
4.1	Compensación de p -orden	102

4.2	Compensación basada en la proyección LNL de los núcleos de Volterra	112
4.2.1	Extracción de la estructura LNL a partir de los núcleos de Volterra	114
	Análisis del módulo de los filtros LNL	117
	Análisis de la fase de los filtros LNL	118
4.2.2	Compensación de las no linealidades a partir de la proyección LNL	124
4.3	Conclusiones	127
5	Diseño de prototipos y estructura bajo estudio	131
5.1	Estado del arte de los transductores orientados a las estructuras de <i>arrays paramétricos</i>	132
5.2	Productos comerciales	134
5.3	Consideraciones preliminares para el diseño del prototipo orientado a la caracterización	135
5.4	Transductor seleccionado	136
5.5	Modelo electromecánico del transductor	138
5.6	Sistemas de amplificación y polarización	143
5.6.1	Pasivo	144
5.6.2	Activo	147
5.7	Prototipo orientado a la caracterización	149
5.8	Material de medición y caracterización	150
5.8.1	Medidas acústicas	152
5.8.2	Medidas de intensidad	153
5.8.3	Medidas de vibración	154
	Fundamentos de la captación de vibraciones mediante láseres	154
	Metodología de medición con sistemas de captación de movimiento	157
5.8.4	Medidas de tensión	157
5.9	Configuración del sistema de generación y adquisición de datos	158
5.9.1	Adaptación de impedancias y margen dinámico del DAQ	158
5.9.2	Tasa de muestreo de las señales involucradas en el proceso	161
5.9.3	Preprocesado del fichero de test	163
5.10	Sistemas de sincronización y segmentación	165
5.10.1	Sincronización del sistema de generación y adquisición de datos mediante modelos productor/consumidor	165
	Sistema de ficheros para la adquisición y generación de señales	166
5.10.2	Estrategias de segmentación y síntesis empleadas en los experimentos	167
	Síntesis de señales tonales de frecuencia creciente exponencial y sincronización entrada/salida	167
	Sincronización mediante preámbulos: entradas MLS	169
5.11	Conclusiones	170
6	Experimentos sobre la estructura	173
6.1	Clasificación de los experimentos realizados	173
6.2	Medidas previas relacionadas con el diseño del <i>array</i>	174
6.2.1	Calibración de la sonda de corriente	174
6.2.2	Estimación de la impedancia eléctrica del transductor	178
6.2.3	Estimación de la impedancia mecánica del transductor	181
6.2.4	Corrección del efecto del micrófono empleado en la toma de medidas	181
6.3	Caracterización mediante tonos de frecuencia variable	184
6.3.1	Obtención del orden y la memoria del sistema	186
6.3.2	Influencia de la distorsión a lo largo de la distancia	188
6.3.3	Directividad frente a la distorsión del sistema	191
6.4	Identificación mediante MLS	195
6.5	Compensación de los coeficientes estimados aplicando la proyección LNL	203
6.5.1	Proyección LNL de los núcleos de Volterra estimados	204
6.5.2	Diseño del sistema de precompensación a partir de la estructura LNL	210
6.6	Conclusiones	215
7	Conclusiones y trabajos futuros	217
7.1	Resumen final de la Tesis	217
7.2	Contribuciones de la Tesis	219
7.3	Trabajos futuros	221
7.4	Contribuciones relacionadas	221

7.5 Conclusiones generales	222
A Algoritmos de generación y recuperación de las señales	225
A.1 Convolución rápida no lineal basada en FFT	225
A.2 Caracterización de sistemas lineal mediante aproximaciones de respuesta al impulso	227
A.2.1 Estimación espectral y caracterización de sistemas lineales.	228
A.2.2 Identificación basada en ARX	230
B Anexos a los sistemas de identificación propuestos	231
B.1 Aclaraciones, propiedades y demostraciones referentes a los sistemas de identificación tonales estudiados	231
B.1.1 Propiedades de las señales envueltas en el test del barrido tonal de frecuencia variable	231
B.1.2 Evaluación eficiente de $C_i(x)$ y $S_i(x)$	237
B.2 Invertibilidad de la matriz que relaciona los coeficientes h y $\tilde{h}$	237
C Consideraciones anejas al diseño del array paramétrico	241
C.1 Teoría básica de <i>arrays</i> acústicos.	241
C.2 Constantes relacionadas con la transmisión del sonido en el medio aéreo	243
C.2.1 Velocidad de propagación del aire	243
C.2.2 Absorción del aire	244
C.2.3 Constantes de no linealidad β y relación B/A	244
C.3 Tolerancia a la exposición del ser humano a los ultrasonidos.	246
Bibliografía	260

Índice de figuras

1	Introducción	1
1.1	Fases de desarrollo del estudio planteado, e interrelaciones existentes entre las mismas	4
2	Modelo físico del array paramétrico. Premisa	7
2.1	Geometría básica del pistón radiante sobre un plano infinito	8
2.2	Diagrama de relaciones entre ángulos de cobertura, tamaño y rango de frecuencia de trabajo para fuentes comerciales	9
2.3	Proceso de transmisión de un <i>array paramétrico</i> , visto como la generación de fuentes secundarias que forman un array virtual <i>end-fire</i>	12
2.4	Geometría básica del problema de Westervelt	14
2.5	Técnicas de preprocesado y modulación para <i>arrays paramétricos</i> basadas en la inversión de la <i>expresión de Berklay</i>	17
2.6	Comparación entre las señales transmitidas para las modulaciones SRAM y SSB-AM	18
2.7	Esquema básico de los sistemas de preprocesado para estructuras de <i>arrays paramétricos</i> basados en la modulación en cuadratura	19
2.8	Esquema implementado para la simulación de las posibles modulaciones aplicables a las estructuras de <i>arrays paramétricos</i>	21
2.9	Distorsión introducida en la onda secundaria empleando la modulación AM	24
2.10	Distorsión introducida en la onda secundaria empleando la modulación SRAM	25
2.11	Distorsión introducida en la onda secundaria empleando la modulación SSB-AM	27
2.12	Distorsión introducida en la onda secundaria empleando la modulación MSRAM	28
3	Identificación orientada a la estructuras de <i>arrays paramétricos</i>	31
3.1	Procedimiento general a la hora de escoger e identificar un sistema genérico	33
3.2	Clasificación de los sistemas no lineales orientada a la identificación	35
3.3	Estructuras de Hammerstein y Wiener descriptivas de la demodulación de la onda sonora en estructuras de <i>arrays paramétricos</i>	39
3.4	Espectros de las principales señales de test empleadas en los procesos de identificación propuestos	42
3.5	Diagrama de bloques del procedimiento de estima de memoria y orden de un sistema	45
3.6	Esfera de radio $\frac{1}{2}$ centrada en $\frac{1}{2}$ procedente del $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ -espacio proyectada en el espacio de análisis para $k = 1.5$	47
3.7	Resultado de la transformación inversa de dos cubos desplazados $\phi_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $s \in [0, \frac{2}{5}]$: $s \in [0, \frac{3}{5}]$, centrados en θ_1	47
3.8	Señales obtenidas del test de memoria y orden para un sistema sin memoria, otro de Hammerstein y otros de Wiener con distintos valores de memoria Θ que comparten no linealidad	48
3.9	Estructura de Hammerstein generalizada	51
3.10	Valores obtenidos para las constantes τ_n , c_n y s_n , contemplando como orden superior $N = 6$	52
3.11	Resultado del primer preprocesado en el test de un tono de frecuencia variable exponencial	53
3.12	Funciones $k_+(t)$ y $k_-(t)$ para $n = 1$	55
3.13	Señales que componen las bases que fundamentan el test del tono de frecuencia variable exponencial	56

3.14	Señales envueltas en el proceso de filtrado para la mejora de la concentración de energía: bases iniciales y filtradas.	58
3.15	Metodología propuesta para la validación e identificación de un sistema generalizado de Hammerstein mediante el test de el tono de frecuencia variable exponencial	60
3.16	Modelos analógicos empleados para evaluar el procedimiento de diagnosis del test de tono de frecuencia variable exponencial	62
3.17	Resultados de la identificación del MODELO 1 de la Figura 3.16.	63
3.18	Resultado de la convolución de la salida sistema correspondiente al MODELO 2 de la Figura 3.16 con la versión invertida temporalmente de la señal de test, $e(-t) * y(t)$, y su versión filtrada $z(t)$	64
3.19	Modelo discreto empleado para la verificación del sistema de identificación de modelos de Hammerstein a partir de barridos exponenciales.	65
3.20	Resultado del test propuesto sobre el sistema especificado en la Figura 3.19 y la Tabla 3.7.	66
3.21	Resultados de aplicar el proceso completo de identificación sobre el sistema propuesto en la Figura 3.19 y la Tabla 3.7.	67
3.22	Error de estimación calculado para el método propuesto en la Sección 3.2.2 y los expuestos en la literatura.	68
3.23	Error de estimación y varianza del mismo para la metodología propuesta	69
3.24	Modelado de Wiener para sistemas no lineales de orden y memoria decrecientes.	71
3.25	Conjuntos ordenados de las secuencias pertenecientes a $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ y $\mathcal{Q}(\mathcal{M})$ y sus correspondientes índices para $M = 3$ y $N = 3$	74
3.26	Conjunto ordenado de las secuencias pertenecientes a $\mathcal{U}(\mathcal{M})$ y sus correspondientes índices para $M = 3$ y $N = 3$	80
3.27	Representación del reparto del coste computacional del algoritmo de identificación por grados	81
3.28	Avance de la carga computacional dependiente de los parámetros M y N , debida únicamente al cálculo de los coeficientes $\mathbf{g}$	83
3.29	Matrices $K_{T1,2}$ (arriba, izquierda), $K_{T1,3}$ (arriba, derecha) y $K_{T2,3}$ (parte inferior), que relacionan la influencia de los órdenes superiores en los inferiores.	91
3.30	Diagrama de bloques empleado en el ejemplo de identificación mediante MLS.	95
3.31	Respuestas temporales y en frecuencia de los tres filtros empleados en ejemplo de la Figura 3.30.	95
3.32	Núcleos de Volterra simétricos estimados mediante el algoritmo de identificación basado en MLS.	96
3.33	Salida sintetizada a partir de los coeficientes de Volterra estimados mediante MLS.	98
4	Técnicas de compensación	101
4.1	Sistema de postinversión $\mathbf{Q}$, formado por la conexión en <i>tándem</i> de los sistemas $\mathbf{H}$ y $\mathbf{K}_{\{p\}}$	102
4.2	Diagrama de bloques del operador $\mathbf{Q}_2$	105
4.3	Cálculos previos para determinar $\mathbf{K}_2$	105
4.4	Operador $\mathbf{K}_2$ de $\mathbf{H}_{\{p\}}^{-1}$	105
4.5	Diagramas de bloques que componen el operador $\mathbf{Q}_3$	106
4.6	Operador $\mathbf{K}_3$ de $\mathbf{H}_{\{p\}}^{-1}$	106
4.7	Sistema de preinversión $\mathbf{R}$, formado por la conexión en <i>tándem</i> de los sistemas $\mathbf{H}_{\{p\}}^{-1}$ y $\mathbf{H}$	106
4.8	Núcleos de Volterra $\mathbf{H}$ del sistema a compensar mediante el sistema del p -inversor.	108
4.9	Diagramas de bloques para la estrategia de p -compensación de un sistema definido por sus núcleos de Volterra $\mathbf{H}$	108
4.10	Análisis de las contribuciones de cada uno de los órdenes de la serie de Volterra a la salida del sistema de la Figura 4.9.	109
4.11	Contenido espectral de la salida del sistema formado por la cadena p -inversor-sistema, para la entrada definida mediante los parámetros de la Tabla 4.1	110
4.12	Test de no linealidad aplicado a la salida del sistema de ejemplo y a la salida de la cadena del p -inversor con el sistema.	111
4.13	Modelo a emplear tras la extracción del sistema inverso completo $\mathbf{K}_{(p)}$, obviando la modulación AM.	112

4.14	Estructura típica de sándwich Wiener-Hammerstein o LNL.....	113
4.15	Filtros que componen la estructura LNL del ejemplo de la Figura 4.14	118
4.16	Obtención de los módulos de la estructura LNL a partir de los módulos de los núcleos de Volterra del sistema bajo estudio.....	119
4.17	Recuperación de los filtros de la proyección LNL sin corrección de fase.	120
4.18	Recuperación de fase de los filtros de la estructura LNL	121
4.19	Predistorsionador basado en la estructura LNL.....	124
4.20	Señal recuperada a la salida del sistema propuesto en la Figura 4.19, aplicando la entrada especificada en la Tabla 4.1.	126
4.21	Test de no linealidad aplicado a la salida del sistema LNL y a la salida de la cadena de predistorsionador con el sistema.	127
5	Diseño de prototipos y estructura bajo estudio	131
5.1	Estructuras básicas de los principales transductores recomendados para implementar sistemas de <i>arrays paramétricos</i>	133
5.2	Principales productos comerciales que implementan las técnicas de <i>arrays paramétricos acústicos</i>	134
5.3	Arquitecturas típicas de altavoces electroacústicos, para sistemas de carga constante.	137
5.4	Esfuerzos, flujos y estados involucrados en el sistema.	139
5.5	Analogías electromecánicas que describen el funcionamiento del sistema de transducción elegido.	143
5.6	Amplificador de instrumentación WMA-280 de FALCO SYSTEMS empleado en el sistema de medición.....	144
5.7	Circuito de polarización pasiva del array de transductores.....	145
5.8	Comportamiento del circuito de polarización pasiva de los transductores, para constantes RC bajas.	146
5.9	Comportamiento del circuito de polarización pasiva de los transductores, para constantes RC altas.	147
5.10	Circuito de polarización activa del array de transductores.	147
5.11	Topología del polarizador activo implementado.....	148
5.12	Polarizador implementado para la realización de los experimentos que requieren la polarización activa del array.....	149
5.13	Disposición de los transductores en el array empleado en los experimentos expuestos en la Tesis.	150
5.14	Patrones polares iniciales del diseño basados en las características ofrecidas por el fabricante.	151
5.15	Sistema de instrumentación electroacústico empleado en las medidas efectuadas en los experimentos presentados.	153
5.16	Sonda BCP-200/511 con las espiras empleadas en la medida.....	154
5.17	Esquema del funcionamiento básico de un vibrómetro	155
5.18	Sistema de medición de vibraciones.....	156
5.19	Topología básica de una arquitectura Sallen-Key.....	159
5.20	Topología del circuito de adaptación de impedancia de entrada al amplificador de instrumentación, mostrado en la Figura 5.21.	160
5.21	Adaptador de impedancias y banco de filtrado previo al amplificador de instrumentación.....	161
5.22	Esquema básico del flujo de las señales en el sistema de medición	162
5.23	Representación esquemática de la transmisión y recepción mediante las técnicas de conformado de pulso.....	163
5.24	Respuesta al impulso de sistema de filtrado coseno alzado.	164
5.25	Procedimiento para la extracción de los parámetros de excitación en el test de tonos de frecuencia de variación exponencial.....	168
5.26	Procedimiento para la extracción de los parámetros de excitación en el test de tonos de frecuencia de variación exponencial.	170
6	Experimentos sobre la estructura	173
6.1	Montaje para la calibración de la sonda de corriente.....	175
6.2	Impedancia de transferencia estimada de la sonda.....	176

6.3	Respuesta al impulso y frecuencial del filtro empleado para el estudio del comportamiento de la sonda en la región de interés.....	176
6.4	Medidas relacionadas con la admitancia de la sonda de corriente empleada para caracterizar el elemento básico de transducción del array.....	177
6.5	Error cometido por los modelos de compensación propuestos para la sonda de corriente empleada en las medidas relacionadas con la caracterización del transductor.....	179
6.6	Montaje para determinar la impedancia eléctrica de los elementos de transducción.....	180
6.7	Impedancia eléctrica del transductor caracterizada mediante el montaje de la Figura 6.6.....	180
6.8	Montaje para determinar la impedancia electromecánica de los elementos de transducción.....	182
6.9	Comparación entre las impedancias mecánica y eléctrica inferidas mediante las medidas realizadas en las Secciones 6.2.2 y 6.2.3.....	182
6.10	Sensibilidad del micrófono de instrumentación empleado en las medidas.....	183
6.11	Respuesta en frecuencia del transductor en emisión de onda primaria.....	183
6.12	Montaje empleado para caracterizar el sistema mediante el análisis del tono de frecuencia variable exponencial.....	185
6.13	Etapas de procesamiento previo al análisis del sistema de caracterización basado en el empleo de tonos de frecuencia variable exponencial.....	185
6.14	Niveles obtenidos por el micrófono de medida para el test de memoria y orden.....	187
6.15	Estimación del orden y la memoria del sistema a caracterizar.....	187
6.16	Resultado de la separación por órdenes de la señal captada por el micrófono, a 1.18 m, con un elemento activo habiendo sido excitado el sistema con un barrido tonal lineal.....	189
6.17	Relación existente entre la norma de la salida correspondiente al núcleo de segundo y primer orden para diferentes índices de modulación m , a lo largo de la distancia.....	190
6.18	Patrones polares obtenidos para los dos primeros órdenes.....	192
6.19	Caracterización de los núcleos en el dominio de la frecuencia para diferentes índices de modulación y ángulos de escucha.....	194
6.20	Montaje empleado para realizar la caracterización mediante MLS del sistema, empleando un módulo DAQ para generar y adquirir las señales de interés.....	196
6.21	Núcleos de Volterra $\hat{H}$ estimados mediante la técnica de la identificación de las MLS tras haber sufrido el proceso de corrección de continua.....	198
6.22	Respuesta en frecuencia de las diagonales de los núcleos identificados para $m = 0.6$, frente al comportamiento ideal presentado por la <i>aproximación de Berkley</i>	199
6.23	Diagrama de las señales involucradas en el proceso de identificación mediante MLS y señales procedentes del proceso de síntesis a partir de los núcleos $\hat{H}$	199
6.24	Resultados obtenidos mediante el análisis tonal, confrontando las medidas realizadas en sala frente a las sintetizadas mediante los núcleos de Volterra estimados.....	200
6.25	Espectrogramas normalizados obtenidos mediante medición y síntesis aplicado a la entrada una combinación de tonos variables lineales.....	201
6.26	Respuesta en frecuencia de las diagonales de los núcleos identificados para diferentes profundidades de modulación, aplicando el algoritmo basado en MLS.....	202
6.27	Síntesis de la señal de salida del sistema mediante los núcleos de Volterra identificados y mediante la proyección LNL calculada.....	204
6.28	Obtención de los módulos de la estructura LNL a partir de los módulos de los núcleos de Volterra del sistema identificado mediante MLS.....	206
6.29	Memoria resultado de la proyección LNL de los núcleos de Volterra estimados en la Sección 6.4.....	207
6.30	Resultado de la prueba tonal aplicado al array paramétrico bajo las condiciones impuestas en la Tabla 6.4A, contrastado con las salidas sintetizadas a partir de los núcleos identificados y su correspondiente proyección LNL.....	207
6.31	Espectrogramas normalizados obtenidos mediante medición y a partir de la síntesis de la señal $\tilde{y}$ para una entrada formada por una batería tonal.....	208

6.32	Respuesta en frecuencia de los filtros que componen las proyecciones LNL a distinto índices de modulación.	209
6.33	Esquemas aplicados para comprobar la síntesis de señal aplicando el precompensador a la estructura del array paramétrico.	210
6.34	Filtros inversos estimados para el diseño de la estructura precompensadora.	211
6.35	Densidades espectrales de potencia de las principales señales involucradas en el proceso de precompensación.	212
6.36	Espectrogramas normalizados obtenidos mediante síntesis a partir de los modelos presentados en la Figura 6.33, para una entrada compuesta por las señales descritas mediante los parámetros de la Tabla 6.5 B.	213
6.37	Test de no linealidad aplicado a la salida del sistema definido por los núcleos de Volterra $\hat{H}$ y a la salida de la cadena de predistorsionador con este mismo sistema.	214
6.38	Resultado de la aplicación de una prueba tonal, mediante una batería de tonos puros para las distintas estructuras precompensadas.	215
B. Anexos a los sistemas de identificación propuestos		231
B.1	Distribuciones $\gamma_{0,m}(t)$ para $m = 1, \dots, 4$ centradas en $\tau_1 = 0$ para el término de primer orden ($n = 1$), derivadas de la expresión general de $\tilde{u}_n(t)$, (B.4).	232
C Consideraciones anejas al diseño del array paramétrico.		241
C.1	Geometría básica para el estudio del patrón de directividad de un <i>array</i> , para el caso de una geometría dispuesta sobre el plano XY	242

Índice de tablas

2	Modelo físico del array paramétrico. Premisa	7
2.1	Parámetros característicos de cada una de las técnicas de modulación presentadas.	22
2.2	Parámetros empleados para determinar la THD_R y la IMD de cada una de las modulaciones propuestas.	23
2.3	Parámetros empleados para caracterizar los distintos esquemas de modulación de las estructuras de arrays paramétricos mediante señales tonales variables en frecuencia.	29
3	Identificación orientada a la estructuras de arrays paramétricos	31
3.1	Clasificación de los problemas de identificación atendiendo a los conocimientos previos del SUT	34
3.2	Pros y contras del empleo de análisis temporal y frecuencial en el problema de identificación	41
3.3	Principales características de la señales de test empleada en los algoritmos de identificación propuestos.	42
3.4	Transformaciones N -dimensionales aplicadas sobre los hiperespacios definidos en el test de memoria y orden de sistemas no lineales.	46
3.5	Parámetros empleados en la simulaciones que ejemplifican el test de memoria y orden propuesto en la Sección 3.2.1.	49
3.6	Parámetros empleados en los ejemplos que ilustran los sistemas descartados por la metodología de la Sección 3.2.3.	62
3.7	Especificaciones para el diseño del ejemplo expuesto en la Figura 3.19.	65
3.8	Número de operaciones para el cálculo de los coeficientes g	84
3.9	Operaciones relacionadas con la proyección de los coeficientes de Wiener a los de Volterra.	84
4	Técnicas de compensación	101
4.1	Parámetros de la señal de entrada para evaluar el sistema de compensación LNL.	107
4.2	Parámetros de la señal de entrada para evaluar el sistema de p -inversión mediante el test del tono de frecuencia variable exponencial.	111
5	Diseño de prototipos y estructura bajo estudio	131
5.1	Analogías eléctricas de un sistema electromecánico empleadas en este trabajo.	142
5.2	Características de las medidas y magnitudes envueltas en las diferentes medidas realizadas a lo largo de la Tesis.	152
6	Experimentos sobre la estructura	173
6.1	Parámetros empleados para la estimación de la impedancia eléctrica del transductor.	178
6.2	Parámetros empleados en los experimentos de la Sección 6.3.	184
6.3	Parámetros de diseño de los filtros que componen el preprocesado de los experimentos de la Sección 6.3.	186
6.4	Parámetros empleados para la obtener los núcleos de Volterra representativos del sistema mediante MLS.	195
6.5	Parámetros empleados para evaluar la presencia de distorsión armónica y de intermodulación en el sistema precompensado de manera informal.	212
6.6	Parámetros empleados en el test que valora el rechazo de la distorsión para el sistema de precompensación propuesto.	214
C	Consideraciones anejas al diseño del array paramétrico.	241

C.1	Constantes relacionadas con la transmisión del sonido en el medio aéreo y el funcionamiento de los transductores empleadas a lo largo de Tesis	243
C.2	Valores tolerables en exposición continua a los ultrasonidos.....	246

Acrónimos

- A/D** *Analog-to-digital conversion*, conversión analógica digital. 164
- ACGIH** *American Congress of Governmental Industrial Hygiene*. 236
- AM** *Amplitude modulation*, modulación de amplitud. 2, 10, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 24, 26, 30, 38, 132, 143, 186, 206, 213
- ARX** *Autoregressive Exogenous*, modelo autorregresivo de variables exógenas. 220
- ATC** *American Technology Corporation*. 131, 133
- c-MUT** *Capacitive Micromachined Ultrasonic Transducers*, transductores ultrasónicos micromecanizados capacitivos. 131, 155
- D/A** *Digital-to-analog conversion*, conversión digital analógica. 164
- DAQ** *Data acquisition*, adquisición de datos. También puede referirse al módulo de adquisición. 41, 150, 156, 157, 163, 164, 193
- DFT** *Discrete Fourier Transform*, transformada discreta de Fourier. 218
- DPDT** *Double pole, double throw*, interruptor de doble puerto y doble vía. 147
- DPnT** *Single pole, n throw*, interruptor de puerto único y n-vías. 147
- DSBAM** *Double sideband modulation*, modulación de doble banda lateral. 16, 17
- FFT** *Fast Fourier Transform*, transformada rápida de Fourier. 40, 215, 217–219
- FIR** *Finite Impulse Response*, respuesta finita al impulso. 43, 68, 94, 175, 220
- FM** *Frequency modulation*, modulación de frecuencia.. 20
- IMD** *Inter Modulation Distortion*, distorsión de intermodulación. 21, 22, 24, 26, 29, 42
- IRPA** *International Radiation Protection Association*. 236
- KZK** *Ecuación de onda parabólica Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov*. 12, 29, 235
- LNL** *Linear-nonlinear-linear cascade model*, modelo en cascada de sistemas: lineal-no lineal-lineal. 2, 3, 105, 110, 112–116, 121–123, 126, 127, 199, 201–203, 205, 206, 208, 212–214
- MIMO** *Multiple-input, Multiple-output*, sistema de salidas y entradas múltiples. 220
- MINT** *Multipoint Linearization of Parametric Loudspeakers*, linealización multipunto de arrays paramétricos. 100
- MLS** *Maximum length sequence*, secuencia de máxima longitud. 70, 76, 84, 94, 98, 159, 161, 184, 193
- MSRAM** *Modified Square root amplitude modulation*, modulación de amplitud de la raíz cuadrada en cuadratura. 19, 20, 26, 29
- MUT** *Micromachined Ultrasonic Transducers*, transductores ultrasónicos micromecanizados. 131
- OSHA** *Occupational Safety and Hygiene Association*.. 236
- p-MUT** *Piezoelectric Micromachined Ultrasonic Transducer*, transductores ultrasónicos piezoeléctricos micromecanizados. 131
- PA** *Public Address*, sistema de refuerzo de sonido empleado para dirigir el sonido principal de una actuación. 129
- PRBS** *Pseudorandom binary sequence*, secuencia binaria pseudoaleatoria. 42
- PVDF** *Polyvinylidene fluoride*, polivinilo de difluoruro. 131
- RMS** *Root mean square*, valor eficaz. 41
- SISO** *Single-input, single-output*, sistema de salida y entrada únicas.. 220
- SONAR** *Sound Navigation And Ranging*, navegación por sonido. 10, 16

- SRAM** *Square root amplitude modulation*, modulación de amplitud de la raíz cuadrada. [16](#), [17](#), [19](#), [20](#), [24](#), [26](#), [29](#)
- SSB-AM** *Single-sideband amplitude modulation*, modulación en amplitud de banda lateral única. [17–20](#), [24](#), [29](#)
- SUT** *System under test*, sistema bajo estudio. [31](#), [43](#), [44](#)
- SVD** *Singular Value Decomposition*, descomposición en valores singulares. [228](#)
- THD** *Total Harmonic Distortion*, distorsión armónica total. [21](#), [31](#), [42](#), [188](#)
- THD_R** *Total Harmonic Distortion, root mean square*, distorsión armónica de valor cuadrático medio. [22](#), [24](#), [26](#), [187](#), [213](#)
- VCVS** *Voltage Control Voltage Source*, Fuente de Tensión Controlada por Tensión. [156](#)

Nomenclatura

En esta tesis se ha procurado seguir una notación matemática estándar. A pesar de ello, a continuación se enumera tanto los símbolos empleados como variables que permanecen invariantes a lo largo de la Tesis.

Constantes físicas

α	Constante de atenuación 0.2606 Np/m
β	Constante de no linealidad 1.2 adim.
ρ_0	Densidad del aire 1.2041 kg/m ³
ε_0	Ordinal de.
c_0	Velocidad de propagación del sonido en el aire 343.21 m/s

Conjuntos y secuencias

$\mathbb{N}$	Conjunto de los naturales
$\mathcal{M}$	Conjunto formado por los enteros $\{0, \dots, M-1\}$
$\{x_n(t)\}_{n \in \{1, \dots, N\}}$	Base formada por N señales $x_n(t)$
$\mathfrak{B}_x(\mathcal{X})$	Combinaciones sin repetición de tamaño x de los elementos del conjunto $\mathcal{X}$.
$\mathfrak{D}(\mathcal{M})$	Variaciones con repetición de longitudes 1 hasta N ordenadas.
$\mathfrak{D}_p(\mathcal{M})$	Variaciones con repetición de longitud p ordenadas.
$\mathfrak{S}(\mathfrak{q})$	Grupo de todas las permutaciones posibles de la secuencia $\mathfrak{q}$
$\Omega(\mathcal{M})$	Combinaciones con repetición de longitudes 1 hasta N ordenadas.
$\Omega_p(\mathcal{M})$	Combinaciones con repetición de longitud p ordenadas.
I	Grupo de índices de $\Omega(\mathcal{M})$
I_p	Grupo de índices, pertenecientes a I , que indexan $\Omega_p(\mathcal{M})$
$\mathcal{I}$	Grupo de índices de $\mathfrak{D}(\mathcal{M})$
$\mathcal{I}_p$	Grupo de índices, pertenecientes a $\mathcal{I}$, que indexan $\mathfrak{D}_p(\mathcal{M})$

$\mathcal{K}_p$	Grupo de índices, que indexan $\mathfrak{D}_p(\mathcal{M})$
$\mathcal{L}_p$	Grupo de índices, que indexan $\Omega_p(\mathcal{M})$

Modificadores

$\hat{x}(t)$	Señal $x(t)$ estimada. Válido para secuencias, matrices, señales y vectores
$\tilde{x}(t)$	Señal $x(t)$ perturbada. Válido para secuencias, matrices, señales y vectores
$\hat{\mathbf{g}}$	Coefficientes $\mathbf{g}$ triangulados según las simetrías de los núcleos de Volterra.

Operadores

(Q_x)	Módulo de orden x .
$\#$	Ordinal de.
$*$	Convolución lineal y no lineal de Volterra.
$\otimes$	Convolución circular de dos secuencias.
$\#$	Concatenación de secuencias/conjuntos ordenados.
$\mathbf{u}$	Cardinalidad del vector $\mathbf{u}$, entendida como el número de elementos diferentes dentro del vector.
$\circ$	Producto de Hadamard.
$\kappa(\mathbf{A})$	Número de condición de la matriz $\mathbf{A}$
$\otimes$	Producto de Kroneker.
$[\mathbf{X}]_{\bullet, \mathcal{W}}$	Selección de las columnas indexadas por $\mathcal{W}$ de la matriz $\mathbf{X}$
$[\mathbf{X}]_{\mathcal{W}, \bullet}$	Selección de las filas indexadas por $\mathcal{W}$ de la matriz $\mathbf{X}$
$\lfloor x \rfloor$	Redondeo al entero más cercano a x .
$\mathcal{F}\{x(t)\}$	Transformada de Fourier de la señal $x(t)$
$\mathcal{F}\{x(t)\}$	Transformada de Fourier de la señal $x(t)$
$\mathcal{M}^p$	Producto de cartesiano reiterado r -veces sobre el conjunto $\mathcal{M}$

$\bigoplus_{s=1}^p \mathbf{a}$	Sumatorio cartesiano del vector $\mathbf{a}$, p -dimensional.
$\bigotimes_{s=1}^p \mathbf{a}$	Productorio cartesiano del vector $\mathbf{a}$, p -dimensional.
$\prec$	Menor que en base a un criterio de ordenación.
$\star$	Correlación cruzada.
$\succ$	Mayor que en base a un criterio de ordenación.
$\times$	Producto de cartesiano.
$ x(t) $	Valor absoluto $x(t)$. En secuencias, valor absoluto punto a punto o longitud de la secuencia. En el texto se detalla la diferencia según el caso.
$\mathbf{A}^\top$	Transpuesta de $\mathbf{A}$
$\mathbf{u}^{[r]\circ}$	Producto de Hadamard reiterado sobre el vector $\mathbf{u}$
$\mathbf{u}^{[r]\otimes}$	Producto de Kroneker reiterado sobre el vector $\mathbf{u}$

INTRODUCCIÓN

1.1. Motivación

En la actualidad, y debido a la importancia que día a día están adquiriendo los contenidos audiovisuales en espacios públicos, la necesidad de sistemas refuerzo de sonido con capacidades especiales se ha convertido en un hecho. Uno de los mayores desafíos a los que se enfrenta este sector es la mejora de la fidelidad unida a un control definido del área de escucha, garantizado la recepción homogénea del sonido en la zona de interés. Para ello es necesario desarrollar sistemas acústicos ligeros, de fácil instalación y que permitan garantizar estos dos factores. Como algunas de las alternativas empleadas para la obtención de estas regiones definidas de escucha o manchas sonoras se pueden citar:

- *Sistemas de bocinas:* Proporcionan buenos patrones de directividad y son la opción más habitual en sistemas de megafonía de baja calidad. El principal problema que presentan es el índice de distorsión que añaden a la fuente, en este caso el actuador, y que en la mayoría de las ocasiones provocan su inviabilidad como sistemas de audio de calidad.
- *Altavoces parabólicos:* Emplean cúpulas con geometrías diseñadas para reflejar el sonido procedente de una fuente localizada en el foco de las mismas. A pesar de no introducir tanta distorsión como los sistemas de bocinas, dependen de la capacidad de reflexión del domo y no garantizan una zona sonora confinada. Además estas estructuras son extremadamente aparatosas, lo que las hace inviable en la mayor parte de las aplicaciones y dificulta su instalación.
- *Arrays tradicionales:* El patrón de directividad de una fuente se puede conformar a partir de asociaciones determinadas de fuentes. Teniendo en cuenta las sumas coherentes de estas fuentes, se puede calcular un patrón que cubra ciertas áreas predeterminadas. Esta solución es válida siempre y cuando el tamaño de las fuentes que componen el array sea mayor que la mayor de las longitudes de onda a transmitir. Esto supone que los patrones correspondientes a la muy baja frecuencia nunca podrán ser conformados mediante esta técnica por motivos físicos. Además, al igual que en el caso de los altavoces parabólicos, son de difícil instalación y pueden resultar excesivamente voluminosos en la mayoría de las aplicaciones.

Los arrays paramétricos solventan en parte todos estos problemas. De hecho, ya existen opciones comerciales tales como ACOUSPADE, AUDIOSPOTLIGHT, AUDIOBEAM o SOUNDLAZER. Todas ellas son ligeras y de fácil instalación. Las tres primeras se centran en aplicaciones de megafonía, con mejor o peor fortuna y la cuarta se emplea a modo de altavoz personal. Sin embargo, la tecnología en la que se basan complica el diseño de preprocesado necesario para obtener un resultado de alta fidelidad. Básicamente, los *arrays paramétricos* aprovechan la no linealidad del medio aéreo para obtener en recepción señales en el margen sónico a partir de señales ultrasónicas en emisión. Por desgracia, este procedimiento implica que la relación existente entre la señal transmitida y la recibida guardan una relación compleja, que incluye una fuerte ecualización así como una distorsión apreciable por el oyente. A pesar de los esfuerzos realizados en el desarrollo de los sistemas comerciales existentes, incluso la opción de mayor fidelidad, Audiospotlight, presenta graves deficiencias de fidelidad, así como niveles de distorsión apreciables.

Con el fin de eliminar estos problemas, hemos desarrollado un nuevo procedimiento que incluye la mejora de la identificación del proceso de transmisión de los *arrays paramétricos*. Este sistema permite la obtención de una representación completa del sistema mediante series de Volterra. Hasta ahora, las mejores identificaciones realizadas sobre estos sistemas no obtenían de forma completa o fiel esta representación, y se basaban en las aproximaciones físicas existentes, lo que limitaba la capacidad de compensación del sistema. El proceso de identificación propuesto se basa en el empleo de señales pseudoaleatorias para la obtención de los núcleos de Volterra. Por desgracia, este procedimiento es muy complejo y requiere medidas complejas de larga duración para ser aplicado. A partir de éste, se obtiene una representación sumamente fiel que permite recuperar el par transmitido-recibido con distorsiones menores a 1 dB. Además, los núcleos de Volterra aportan información exacta y extensa del sistema bajo análisis. Estas medidas han sido realizadas aplicando técnicas de modulación tradicionales (AM), pero pueden ser aplicadas a cualquier preprocesado de los propuestos en la literatura.

De estos núcleos, que refleja fielmente el funcionamiento del array, se desprenden conclusiones novedosas: la distorsión presente no coincide con el modelo teórico empleado en la actualidad (distorsión de segundo orden, armónica pura procedente de una estructura de Hammerstein simple), sino que posee información relevante fuera de la diagonal de los núcleos, así como una distorsión de mayor orden que, a pesar de no ser perceptible por el oyente, perturba los procesos de compensación necesarios para obtener un sistema de alta fidelidad.

Con el fin de obtener un sistema de compensación previo, y a partir de la representación de los núcleos de Volterra, hemos desarrollado una técnica de proyección de estos sobre una estructura más simple del tipo LNL. Esta proyección es consistente tanto con la naturaleza de los núcleos de Volterra obtenidos como con el sistema de transmisión general.

1.2. Aplicaciones de los arrays paramétricos

A continuación se citan algunas de las aplicaciones más destacables de los altavoces basados en estructuras de *array paramétrico*:

- *Entretenimiento*: Con los *arrays paramétricos* se pueden generar zonas acústicas para cada pasajero dentro de un vehículo, permitiendo a estos escuchar contenidos diferentes sin molestar al resto.
- *Publicidad dirigida*: Los sistemas acústicos directivos se pueden emplear para proyectar información sobre clientes concretos, sin necesidad de molestar a otros compradores, dentro de centros comerciales. Actualmente, estos mensajes sólo se pueden transmitir mediante pantallas sin sonido, ya que con la tecnología actual, los mensajes acústicos procedentes de diferentes fuentes interferirían creando un ambiente acústico desagradable. Confinando el sonido en zonas concretas se puede captar mejor la atención del cliente asociándola a una zona concreta. Si a este tipo de sistemas se añaden sistemas de videocámara con software de identificación de personas, se realizar publicidad dirigida a cierto tipo de población concreta. Además, algunos restaurantes temáticos están instalando sistemas de altavoces directivos con el fin de obtener ambientes musicales personalizados para los clientes e incluso permitiendo la reproducción de música que traigan los propios clientes. Las ferias comerciales también pueden emplear estos sistemas para evitar interferir con los mensajes de otras casetas. La posibilidad de ofrecer mensajes directivos disminuiría los ruidos globales en los centros comerciales o en las áreas multi-compartidas como las ferias.
- *Sistemas de inmersión para videojuegos*: Este tipo de ambientes acústicos pueden servir de soporte a sistemas de realidad aumentada, mejorando la experiencia del juego.

- *Sistemas de multiconferencia plurilingüe*: Los *arrays paramétricos* permiten crear zonas acústicas diferenciadas, dentro de las cuales se pueden proyectar diferentes canales, y por tanto implementar un sistema plurilingüe en la misma sala sin necesidad de emplear auriculares. Estos sistemas también se pueden aplicar en pequeñas salas de cine, permitiendo la emisión dual en una misma sala.
- *Espectáculos*: Permitiendo a los artistas crear efectos sonoros. Así, por ejemplo permite la posibilidad de sincronizar haces luminosos a haces acústicos. También aplicado sobre paredes, se pueden crear zonas sonoras progresivas, en las que a medida que el público varía de posición, también varía su percepción sonora (*loudness*, timbre o *pitch*).

Estas aplicaciones se ven limitadas debido a la distorsión que presentan este tipo de altavoces. Por este motivo planteamos aquí una metodología concreta que permita analizar y aportar soluciones de compensación que permitan expandir estas aplicaciones.

1.3. Objetivos y ámbito

Este estudio se puede dividir en dos partes diferenciadas, dependiendo de la filosofía seguida, y que determinan dos objetivos claramente diferenciados: (i) el estudio y proposición de nuevos algoritmos generalistas que permitan identificar y compensar sistemas no lineales con memoria y (ii) la aplicación de éstos sobre una estructura concreta, el *array paramétrico* acústico.

Este primer enfoque generalista permite ampliar el ámbito fundamental de esta Tesis, ya que las técnicas aportadas en este estudio en esta fase se basan en proponer algoritmos que amplían la casuística de los empleados habitualmente. Tanto es así, que estas técnicas pueden emplearse en campos tan diversos como la linealización de sistemas de instrumentación, caracterización de procesos físicos estáticos o dinámicos de variación temporal lenta, siempre y cuando se tenga acceso a la entrada y la salida del mismo. De hecho las técnicas de diagnóstico se pueden aplicar para descartar este tipo de sistemas imponiendo únicamente la restricción del acceso a la entrada y la salida.

Una vez aplicados los algoritmos de diagnóstico a la estructura implementada reducimos el ámbito a todos aquellos sistemas que se ajustan a una estructura *LNL*. En realidad, muchos de los sistemas que presentan no linealidades se pueden ajustar a estructuras de este tipo o aproximarse a la misma. En cualquier caso, a partir de este punto se puede considerar que el ámbito de la Tesis se ve reducido al estudio del comportamiento de los *arrays paramétricos* acústicos.

El desarrollo de un prototipo para ensayar estas técnicas se puede considerar la tarea más específica de este estudio, ya que como se verá en el Capítulo 5, todo éste depende de la elección inicial del transductor base elegido. Este impone tanto los sistemas de amplificación como de instrumentación concretos. A su vez requiere un tipo de polarización concreta, que ha de ser diseñada ex profeso para este sistema.

Así, también se considera objetivo clave de este estudio la implementación de un sistema completo de *array paramétrico* acústico, así como la elección de la instrumentación más adecuada para poder llevar a cabo los algoritmos de diagnóstico, identificación y compensación propuestos.

Por tanto este estudio se puede considerar multidisciplinar, aunque la aplicación última sea la del diseño de un sistema acústico y su posterior caracterización y compensación.

1.4. Estructura de la Tesis

Dados los objetivos anteriormente expuestos, esta Tesis engloba diferentes facetas que implican en desarrollo de distintas actividades en paralelo. Es importante destacar la interrelación existente entre los diferentes bloques expuestos en esta disertación, ya que el orden presentado aquí no se corresponde directamente con la cronología de las diferentes fases.

En la Figura 1.1 se muestra un gráfico en el que se representan las distintas actividades desarrolladas para elaborar este estudio, así como las interrelaciones existentes entre ellas. Cada una de estas fases se documenta en

FIGURA 1.1: Fases de desarrollo del estudio planteado, e interrelaciones existentes entre las mismas

los Capítulos especificados en los márgenes de los bloques.

- **Premisas físicas:** Se toma como punto de partida todos aquellos estudios basados en la transmisión de las ondas acústicas en el medio aéreo, teniendo en cuenta su comportamiento no lineal para niveles elevados de presión. Estos estudios pretenden describir el funcionamiento de los *arrays paramétricos* aportando modelos aproximados del comportamiento de estas estructuras aplicando diferentes técnicas de preproceso y modulación de la señal a transmitir.
- **Sistemas de diagnóstico e identificación:** Basándose en las limitaciones de los modelos físicos propuestos, debido a las aproximaciones empleadas para obtenerlos, se hace necesario el planteamiento de una metodología completa que permita obtener un modelo fiable del sistema. Este modelo ha de describir por completo la estructura y permitir caracterizar las relaciones tanto no lineales como lineales existentes entre la entrada al sistema y la señal percibida por el oyente. Teniendo en cuenta la complejidad de estas relaciones podemos desglosar esta metodología en dos fases: en la primera se ha de dirimir que tipo de modelo es el más adecuado para la descripción del sistema y en la segunda se han de estimar los parámetros correspondientes al modelo propuesto. Por tanto nos encontramos con un proceso clásico de identificación no lineal, cuyo éxito depende en gran medida de la capacidad de clasificación del mismo. Esta clasificación se realiza a partir de las premisas físicas propuestas en la fase anterior y de un sistema de diagnóstico propio.
- **Técnicas de compensación:** El objetivo final es el de obtener una metodología completa que permita compensar aquellas distorsiones que introduce el sistema entre la señal de excitación y la percibida por el oyente. Basándonos en el modelo propuesto e identificado en la fase anterior, demostraremos la posibilidad de plantear un sistema de ecualización no lineal que permite la compensación tanto de la distorsión como de la coloración perceptible. Para obtener un sistema viable, es necesario que esta compensación se realice de forma previa a la transmisión, siendo transparente al usuario, pero asegurando la estabilidad del sistema.
- **Diseño del prototipo y del sistema de medición:** Toda esta metodología va a ser verificada y puesta a prueba sobre una estructura física diseñada para tal fin. Este prototipo a su vez sienta las bases para un diseño industrial futuro.
- **Aplicación de la metodología sobre el prototipo diseñado:** Debido a la complejidad de la relación existente entre la señal de excitación y la señal percibida por el oyente, este tipo de estructuras necesitan de una metodología propia para su diseño y caracterización. En esta fase de la Tesis se describirán todos aquellos experimentos necesarios tanto para el diseño como para la caracterización de la estructura. Muchas de estas mediciones se corresponden a experimentos aplicados a altavoces ordinarios, sobre todo aquellos relacionados con el diseño de la propia estructura en sí. Sin embargo, la complejidad de la estructura obliga a aplicar una metodología propia, expuesta y diseñada en las fases anteriores y que se pone en práctica en ésta.

Es importante destacar las relaciones existentes entre estas fases y ya expuestas en la Figura 1.1. Así, podemos destacar dos líneas de trabajo diferenciadas: (i) el diseño de la metodología completa de caracterización y compensación del sistema y (ii) el diseño de una estructura física que sirva para poner a prueba esta metodología.

Evidentemente, la complejidad de este tipo de estructuras y de sistemas de caracterización fuerza una interdependencia entre ambas líneas. Así, el diseño del prototipo a caracterizar y compensar depende, en primera instancia, de las premisas físicas, sin embargo, experimentos intermedios permiten definir por completo tanto la estructura como los elementos que conforman el prototipo. Por su parte, las técnicas de identificación y compensación abren el camino para el diseño de un prototipo industrial de alta fidelidad, basándose en el diseño del prototipo de caracterización. A su vez estas técnicas ponen en evidencia el alcance y la capacidad factible de este tipo de prototipo.

MODELO FÍSICO DEL ARRAY PARAMÉTRICO. PREMISA

En este Capítulo vamos a realizar un breve inciso en el estudio del comportamiento físico de los *arrays paramétricos* y en las investigaciones previas realizadas por diversos autores sobre esta estructura. A partir de estas premisas obtendremos la información previa necesaria para plantear un sistema de identificación adecuado a éste proceso físico concreto.

Normalmente, la transmisión de ondas acústicas se suele tratar como un proceso lineal ya que, bajo ciertas condiciones, esta suposición es cierta. Sin embargo, si tratamos este proceso de forma estricta, es necesario reformular la ecuación de onda, teniendo en cuenta la parte no lineal de la transmisión. La influencia de esta no linealidad depende del nivel de emisión. Normalmente los transductores suelen trabajar en un punto en el que la amplitud no es suficientemente alta como para que el efecto de la no linealidad sea apreciable y, dado que tener en cuenta este efecto complica considerablemente los cálculos, se suele obviar este fenómeno.

Sin embargo, el caso de las estructuras de *arrays paramétricos* es especial. Para describir el comportamiento de este tipo de estructuras se tratarán éstas como un nuevo sistema de proyección sonora que solamente se produce a causa de las no linealidades presentes en la propagación sonora cuando la amplitud generada por los transductores es alta. Este mecanismo provoca que la combinación entre una portadora tonal y otra señal de banda ancha, emitidas en el espectro ultrasónico, produzca mediante interacción no lineal señal apreciable dentro de la banda espectral audible. Por tanto, estas nuevas señales no provienen directamente del transductor, como las ondas primarias, si no que se generan en el medio, debido a la deformación de la onda primaria causada las propiedades no lineales del medio.

La peculiaridad fundamental de estas estructuras es el aumento de la directividad percibida por el oyente, ya que la onda secundaria generada en el medio hereda ciertas propiedades de la onda primaria, como el haz de propagación. En primer lugar, se expondrán las limitaciones existentes en estructuras acústicas tradicionales, para argumentar la utilidad de explotar este fenómeno para obtener haces directivos en rango frecuencial audible.

Todos los estudios físicos realizados sobre estas estructuras parten de una misma simplificación planteada por Westervelt. En este Capítulo se expondrán tanto un breve resumen de este estudio, así como las técnicas de modulación y preprocesado derivadas del mismo y de la aproximación de Berkay que se suele emplear como referencia para facilitar los cálculos. Como resultado de estos planteamientos se obtienen modelos teóricos que

relacionan la señal generada en el transductor con la que es perceptible por el oyente a cierta distancia del mismo.

Dada la complejidad de los estudios relacionados con los *arrays paramétricos* desde el punto de vista físico, la pretensión de este Capítulo es la de esbozar un punto de partida sobre el que trabajar posteriormente, sentando las bases de un modelo físico que acote el problema de identificación.

También se aporta un pequeño estudio de elaboración propia, en el que se contrastan los datos presentados por diferentes autores, así como las posibles expectativas referentes a cada uno de los esquemas de modulación aplicados en estas estructuras. Como primeros descriptores del sistema se proponen los parámetros clásicos aportados para describir la distorsión predecible a partir del modelo teórico.

Todos estos datos sirven de guía en el diseño propio de array empleado en esta Tesis y que será presentado en el Capítulo 5. También van a ser empleados como referencia para acotar el funcionamiento de la estructura, delimitando las regiones en las que el comportamiento del array no cumple con las aproximaciones teóricas.

2.1. Limitaciones de los altavoces para conseguir zonas de audiencia delimitada

La mayoría de los altavoces disponibles en el mercado, con excepción de los transductores iónicos y los de "flame", posee un diafragma móvil, que se alimenta mediante distintos tipos de transducción. Los diafragmas acústicos pueden fabricarse con distintas formas: cónica, en forma de cúpula o *domo*, plana circular a modo de pistón... También se ofrecen distintos modos de suspensión del diafragma dependiendo del efecto deseado: sujeciones rígidas, amortiguadas simples o múltiples.

Tradicionalmente, a pesar de la gran variedad de altavoces existentes, su funcionamiento se compara con la estructura del pistón rígido para obtener una primera aproximación de su patrón de directividad, para así predecir, en base a su tamaño y frecuencia de trabajo, su ángulo de cobertura. En realidad, la forma del diafragma influye relativamente poco en el patrón de directividad pero sí resulta ser un parámetro fundamental en la determinación de las frecuencias de corte y el ancho de banda en el que el transductor se comporta de forma lineal.

Para analizar la directividad de esta geometría simple, se divide el pistón en elementos infinitesimales que radian a modo de fuentes puntuales. La presión ejercida en un punto determinado del espacio situado a una distancia r del centro del pistón sobre un plano infinito y con un ángulo de inclinación θ se corresponde con:

$$p(r, \theta, t) = j\rho c \frac{Qk}{2\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \left(\frac{2J_1(ka \sin\theta)}{ka \sin\theta} \right) \quad (2.1)$$

Donde a es el radio del pistón, k el número de onda ($k = \omega/c = 2\pi/\lambda$) y λ la longitud de onda de la fuente en metros, como se expone en la Figura 2.1.

Con el fin de centrarnos únicamente en la diferencia de comportamiento de la presión frente a un cambio de ángulo con respecto al punto de observación, se define el patrón de directividad de la fuente como el cociente entre la presión ejercida por la fuente a una determinada distancia y ángulo, frente a la presión a la misma distancia en el eje de radiación. En unidades logarítmicas, este patrón, para el caso de un pistón que radia sobre un plano

FIGURA 2.1: Geometría básica del pistón radiante sobre un plano infinito.

FIGURA 2.2: Diagrama de relaciones entre ángulos de cobertura, tamaño y rango de frecuencia de trabajo para fuentes comerciales. En los tres últimos ejes se compara el tamaño de la fuentes, trabajado en su frecuencia central, con el ángulo de radiación de -3 dB y -6 dB respectivamente, tomando como referencia el patrón de directividad de un pistón circular plano.

infinito se corresponde con:

$$D = 20 \log_{10} \left| \frac{p(r, \theta)}{p(r, 0)} \right| = 20 \log_{10} \left| \frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right| \quad (2.2)$$

Así, conceptualmente podemos asegurar que la directividad de una fuente está íntimamente relacionada con la frecuencia de trabajo y las dimensiones de la misma. Básicamente, a medida que aumenta el producto ka , mayor es la directividad de la fuente. Esta dependencia se considera como una gran limitación en el desarrollo de sistemas acústicos, ya que el tamaño de una fuente también influye en la respuesta en frecuencia de la misma. Así, para obtener patrones de directividad con haces estrechos sería necesario construir fuentes de grandes dimensiones que normalmente se asocian a la baja frecuencia.

En la Figura 2.2 se observa la relación existente entre la frecuencia, el tamaño del diafragma y como dato orientativo, se aporta el ángulo de -6 dB y de -3 dB con el que radiaría un pistón circular a la frecuencia de trabajo habitual para un altavoz comercial de un tamaño determinado. Así mismo, se aportan las aplicaciones habituales relacionadas de cada uno de estos rangos frecuenciales. Las elipses representan el ancho de banda que comprenden, de media, los altavoces comerciales comunes.

De este escenario podemos desprender las siguientes conclusiones:

- En un principio, ninguna de estas configuraciones obtendría un ángulo de cobertura lo suficientemente estrecho como para considerarse altamente directivo.
- Cuánto menor es el diámetro del altavoz, cubre un mayor margen de frecuencias, siempre y cuando nos refiramos al ancho de banda en términos lineales y no en escalas logarítmicas.
- El sistema auditivo humano comprende aproximadamente diez octavas, cubriendo el margen existente entre 20 Hz y 20 kHz. Esto supone longitudes de onda de entre 17.2 m hasta 17.2 mm. Para cubrir todo

el margen de frecuencias es necesario diseñar un sistema de varias vías, cada una de ellas responsable de cierta parte del espectro.

Ciertas aplicaciones requieren patrones de directividad no variantes con la frecuencia, como por ejemplo aquellas relacionadas con sistemas de megafonía, en las que al menos hay que proporcionar regiones de radiación delimitadas para asegurar la inteligibilidad de la voz. En la actualidad existen diseños de geometrías que permiten conformar el patrón de directividad de los altavoces, y por tanto modificar la características representadas en la Figura 2.2, algunas de ellas son:

- *Sistemas de bocinas*: Proporcionan buenos patrones de directividad y son la opción más habitual en sistemas de megafonía de baja calidad. El principal problema que presentan es el índice de distorsión que añaden a la fuente, en este caso el actuador, y que en la mayoría de las ocasiones provocan su inviabilidad como sistemas de audio de calidad.
- *Arrays tradicionales*: El patrón de directividad de una fuente se puede conformar a partir de asociaciones determinadas de fuentes. Teniendo en cuenta las sumas coherentes de estas fuentes, se puede calcular un patrón que cubra ciertas áreas predeterminadas. Esta solución es válida siempre y cuando el tamaño de las fuentes que componen el array sea mayor que la mayor de las longitudes de onda a transmitir. Esto supone que los patrones correspondientes a la muy baja frecuencia nunca podrán ser conformados mediante esta técnica por motivos físicos.
- *Altavoces parabólicos*: Emplean cúpulas con geometrías diseñadas para reflejar el sonido procedente de una fuente localizada en el foco de las mismas. A pesar de no introducir tanta distorsión como los sistemas de bocinas, dependen de la capacidad de reflexión del domo y no garantizan una zona sonora confinada. Además estas estructuras son extremadamente aparatosas, lo que las hace inviable en la mayor parte de las aplicaciones y dificulta su instalación.
- *Arrays paramétricos*: Son las estructuras sobre las que versa este documento.

2.2. Principio del *array paramétrico*

El principio del *array paramétrico* ha sido explotado a lo largo de los últimos sesenta años en múltiples aplicaciones, una de las más relevantes es la que aplica este principio para obtener altavoces directivos.

La primera aplicación documentada de este tipo de estructuras se relaciona con los sistemas *SONAR* y empleando el agua como medio de transmisión. De hecho, no se comprobó la viabilidad de estos sistemas en el medio aéreo hasta la década de los ochenta. El primer estudio teórico de relevancia en este área es el propuesto en Westervelt [1963], en el que se deriva la relación existente entre la onda secundaria y la primaria en presencia de dos tonos (véase Sección 2.2.2). Este estudio recopila información elaborada por el mismo autor sobre la dispersión del sonido Westervelt [1957] y aproximaciones cuasi-lineales de la propagación de la onda acústica, corroborando resultados experimentales anteriores, aportados en Bellin y Beyer [1962].

Debido a las limitaciones para poder realizar medidas más complejas de campo, las aproximaciones de Westervelt se dieron por válidas hasta la publicación del estudio de Berkay Berkay y Smith [1965]. En éste se extiende la aproximación de Westervelt, incluyendo nuevas aproximaciones relativas a la difusión del sonido tanto en coordenadas esféricas como cilíndricas. Este autor propone el empleo de estas estructuras para el escaneo submarino en bajas frecuencias, así como para calibrar hidrófonos sonar.

El gran salto para la aplicación de estas estructuras en el aire se produce con la publicación de Bennett y Blackstock [1975], que construyeron el primer *array paramétrico* aéreo, empleando transductores de pistón. Su experimento consistía en emitir dos tonos y observar el patrón de directividad de la onda secundaria (en este caso de frecuencia diferencia de los tonos originarios) producida por el fenómeno no lineal de transmisión de la onda por el aire. Después de esta evidencia, otros investigadores trataron de explotar esta capacidad de transmisión para diseñar estructuras con el fin de emitir en la banda de audio tradicional. El primer prototipo que perseguía este objetivo es el presentado en Yoneyama et al. [1983], en el que, aprovechando las conclusiones extraídas por Berkay y Westervelt, se deduce que para poder excitar toda la banda de audio, se puede emplear una modulación en amplitud (AM). El sonido producido cumple la expresión de Berkay y por tanto existe una relación no lineal

entre la señal moduladora y el sonido recibido. Añadida a esta distorsión se aprecia una coloración considerable, de tendencia paso alto.

Con el fin de eliminar esta distorsión, diferentes autores han propuesto nuevas técnicas de preprocesado del sonido, la más conocida es la expuesta en [Kite et al. \[1998\]](#) (véase Figura 2.5 c), que fue aplicada posteriormente en los productos comerciales de *Holosonics*, invención de Pompei (véase Sección 5.2). Los estudios posteriores se encuentran centrados en la aplicación de distintas modulaciones y técnicas de preprocesado que persiguen la disminución tanto del color como de la distorsión.

En la siguientes secciones presentaremos un pequeño resumen que describe el funcionamiento teórico del *array paramétrico* así como la principales técnicas de modulación empleadas en este tipo de estructuras. Buscamos con ello describir el marco que nos permita elegir el sistema de identificación que mejor se adecue a estas premisas, de ahí que sea necesaria esta presentación.

2.2.1. Zonas de transmisión de un *array paramétrico*

Existen dos zonas diferenciadas en el proceso de transmisión paramétrico cuyas fronteras vienen definidas por dos distancias: la de Rayleigh y la de absorción. En estas zonas, la onda presenta comportamientos diferentes, que son tenidos en cuenta a la hora de aplicar las aproximaciones que simplifican el modelado del proceso de transmisión no lineal:

- *Distancia de Rayleigh*: es la frontera que separa el campo cercano del lejano, y por tanto es la distancia a partir de la cual podemos considerar que la onda pasa de comportarse como una onda plana a una onda esférica. A partir de esta distancia la onda se atenúa mediante la conocida relación de 6 dB al duplicar la distancia a la fuente.
- *Distancia de absorción*: a partir de la cual deja de existir la interacción no lineal entre las ondas. Esta distancia define la longitud ficticia del array *end-fire* virtual que forma este fenómeno (véase Figura 2.3. Superada esta distancia no se generar más sonidos en la banda audible a partir de la interacción de la portadora con el resto de tonos. Este proceso de intermodulación dentro del haz primario provoca que las moléculas vibren a frecuencias audibles y podemos tratar el sistema como un conjunto de fuentes virtuales. Esta demodulación, que sucede a lo largo de la zona de absorción se puede visualizar conceptualmente como una fuente sonora a frecuencias audibles.

La teoría de Berkay asume que la distancia de absorción es siempre menor que la distancia de Rayleigh, para la onda primaria (la transmitida). Esto asegura que la absorción no lineal se encuentra confinada en el haz primario, otorgando a los altavoces que se basan en este principio su alto índice de directividad.

Dado que la distancia de Rayleigh se define como:

$$R_a = \frac{\pi f_c a^2}{c} \quad (2.3)$$

siendo f_c la frecuencia de la portadora, a el radio efectivo del transductor y c la velocidad de propagación de la onda.

Por su parte, la distancia de absorción se define como:

$$l_a = 1/\alpha \quad (2.4)$$

Por ejemplo, en [Brooks et al. \[2005\]](#) se realiza un pequeño estudio sobre estas zonas. Para los parámetros de su aplicación, ambas son de 9.9 m y 4.3 m haciendo que la relación de Berkay se cumpla a partir de la distancia de Rayleigh. En nuestro caso, y una vez se plantee el diseño final, estos valores son considerablemente menores (véanse Secciones 5.7 y 6.3.2).

FIGURA 2.3: Proceso de transmisión de un *array paramétrico*, visto como la generación de fuentes secundarias que forman un array virtual *end-fire*, según el modelado propuesto en [Smith \[1971\]](#), [Berkay \[1972\]](#)

2.2.2. Comportamiento del *array paramétrico* en presencia de dos tonos puros

Los primeros estudios referentes al comportamiento de las alinealidades en la transmisión de ondas acústicas, parten de la ecuación *KZK* (Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov). Ésta sirve como base para plantear el comportamiento de los *arrays paramétricos*.

La ecuación de onda parabólica *KZK* recoge simultáneamente los efectos de la absorción, difracción y la no linealidad para los haces directivos de sonido (definiendo éstos como aquellos en los que se cumple que las dimensiones de las fuentes son mucho mayores que las longitudes de onda que están emitiendo [Bakhvalov et al. \[1982\]](#)):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial \tau} = \frac{c_0}{2} \nabla_r^2 p + \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3} + \frac{\beta}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2} \quad (2.5)$$

Donde p es la presión sonora, z es la coordenada a través del eje de transmisión del haz (asumiendo que éste se propaga en sentido $+z$), $\tau = t - z/c_0$ es el tiempo de retardo, c_0 la velocidad del sonido, r la distancia desde el eje z hasta el punto de estudio, δ la dispersión del medio (que depende de la absorción del medio y de la temperatura), β es el coeficiente de no linealidad y ρ_0 la densidad del ambiente.

La ecuación 2.5 ofrece una descripción bastante fiable del campo sonoro en regiones cercanas al eje z y en campo lejano. Para simplificar su estudio, se toma como referencia de fuente una onda plana $p = \rho_0 c_0 u$, donde u es la componente z de la velocidad. Esta última transformación permite poner en términos de velocidad la expresión 2.5.

Nuestro modelo de partida se centra en la aplicación de esta expresión sobre una estructura concreta: el *array paramétrico*. Estas estructuras de transductores de alta frecuencia, en un principio se destinaron a fines de acústica ultrasónica marina [Westervelt \[1957, 1963\]](#) pero estudios posteriores demostraron su utilidad para generar haces controlados de ondas sonoras en el aire, como ya se mencionó con anterioridad.

Para implementar un *array paramétrico* es necesario contar con al menos dos señales tonales de diferentes frecuencias para generar la onda primaria. Para el estudio se presume que estos haces son muy estrechos y que generan frecuencias sin derivaciones. Añadimos a esta aproximación el hecho de que la atenuación para la onda generada, de frecuencia diferencia, es prácticamente nula, ya que las ondas originales emitidas son de uno o varios órdenes superiores a la onda secundaria generada por el proceso no lineal.

Se parte del estudio de las ecuaciones de dinámica de fluidos de [Lighthill \[1958\]](#), para obtener la interacción no lineal producida por las dos onda:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial^2 t} - c_0^2 \nabla^2 \rho = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.6)$$

Donde:

$$T_{ij} = \rho u_i u_j + p_{ij} - c_0^2 \rho \delta_{ij} + D_{ij} \quad (2.7)$$

Siendo T_{ij} el tensor completo y D_{ij} la viscosidad del fluido. A partir de esta expresión, y eliminando los términos que no contribuyen de forma significativa al campo de segundo orden dentro de la región de interacción de las dos ondas primarias, se llega la expresión obtenida por [Lighthill \[1958\]](#):

$$\nabla^2 P_s - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial P_s^2}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial q}{\partial t} \quad (2.8)$$

En esta expresión, q representa la densidad de presión resultante de las ondas primarias p_i , definidas por [Westervelt \[1963\]](#) como (véase Apéndice [C.2.3](#) para obtener la relación con el coeficiente de no linealidad, β):

$$q = \frac{1}{\rho_0^2 c_0^4} \left[1 + \frac{1}{2} \rho_0 c_0^2 \frac{d^2 p}{d \rho^2} \Big|_{\rho=\rho_0} \right] \frac{\partial}{\partial t} p_i^2 = \frac{\beta}{\rho_0^2 c_0^4} \frac{\partial}{\partial t} p_i^2 \quad (2.9)$$

Si asumimos que las fuentes primarias son dos tonos puros de frecuencias f_1 y f_2 e igual amplitud podemos sustituir p_i por:

$$p_i = P_0 e^{-\alpha x} [\cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x)] \quad (2.10)$$

Siendo $\omega_s = |\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 \approx \omega_2$, $k_s = \omega_s / c_0$, $k_1 = \omega_1 / c_0$ y $k_2 = \omega_2 / c_0$.

Además se presupone que la atenuación sobre ambas señales es aproximadamente la misma. Si sustituimos en (2.9) el valor de la presión de las fuentes primarias, (2.10), obtenemos la forma compleja:

$$q = \frac{1}{\rho_0^2 c_0^4} \left[1 + \frac{1}{2} \rho_0 c_0^{-2} \frac{d^2 p}{d \rho^2} \Big|_{\rho=\rho_0} \right] P_0^2 (-j \omega_s) \times e^{-j \omega_s t + j(k_s + 2\alpha)x} \quad (2.11)$$

Para calcular la presión debida al término de segundo orden es necesario dar una solución a (2.8) que se corresponde con la siguiente integral de volumen:

$$p_s(r) = -\frac{j \omega_s \rho_0}{4\pi} \int_V \frac{q e^{jk_s |r-r'|}}{|r-r'|} dV \quad (2.12)$$

donde V representa la región de interacción no lineal.

Si se emplea la geometría definida en la Figura 2.4, la expresión anterior se simplifica considerablemente. En (2.13) $\rho_0 S_0$ representa el volumen despejado por el pistón (ya que los transductores son de área S_0). Este volumen se distribuye a lo largo del eje x , por tanto:

$$p_s(r) = -\frac{j \omega_s \rho_0 S_0}{4\pi} \int_0^l \frac{q e^{jk_s r}}{r} dx \quad (2.13)$$

Suponiendo $l \rightarrow \infty$, ya que nos encontramos en estudio de campo lejano y $R_0 > \omega_s / (\alpha^2 c_0)$ y tras varios pasos detallados en [Westervelt \[1963\]](#) se obtiene una expresión que define el campo acústico lejano:

FIGURA 2.4: Geometría básica del problema propuesto en Westervelt [1963]

$$p_s(r) = \frac{\omega_s^2 \rho_0 S_0}{8\pi R_0} \frac{1}{j\alpha + k_s \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{j(k_s R_0 - \omega_s t)} \quad (2.14)$$

Es fácil desprender de esta expresión el ángulo de -6 dB que determina la directividad. Este se aproxima a:

$$\theta_{\frac{1}{2}} \approx 2\sqrt{\frac{\alpha}{k_s}} \quad (2.15)$$

En caso de tener en cuenta la directividad de la propia fuente, es necesario replantear el problema abordándolo como en Muir y Willette [1972], en donde se toma como ejemplo el patrón de radiación de un pistón plano.

2.2.3. Aproximación de Berkta

La aproximación de Berkta, Berkta y Smith [1965], surge al extender el estudio anterior, aplicando señales de banda ancha al sistema. En este caso se sustituye la entrada por una modulación AM, en la que la señal moduladora se corresponde con $g(t)$. A una distancia x y para un índice de modulación m tendremos que la onda primaria se corresponde con:

$$\begin{aligned} p_i(t) &= P_0 \left[1 + m g\left(t - \frac{x}{c_0}\right) \right] e^{-\alpha x} \sin\left(\omega_0 \left(t - \frac{x}{c_0}\right)\right) = \\ &= P_0 E(t) e^{-\alpha x} \sin\left(\omega_0 \left(t - \frac{x}{c_0}\right)\right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Si aplicamos esta entrada en la expresión (2.9), para obtener la densidad de presión causada por la no linealidad tenemos que:

$$q(t) = \frac{\beta P_0^2}{\rho_0^2 c_0^4} e^{-2\alpha x} \frac{\partial}{\partial t} \left[\underbrace{m g\left(t - \frac{x}{c_0}\right)}_{\text{Parte lineal}} + \underbrace{\frac{1}{2} m^2 g^2\left(t - \frac{x}{c_0}\right)}_{\text{Parte cuadrática}} \right] \quad (2.17)$$

Centrándonos únicamente en la presión generada a lo largo del eje perpendicular a la fuente, si aplicamos ahora las siguientes aproximaciones: $\omega_1 \ll \omega_0$ y $\omega_2 \ll \omega_0$, siendo ω_1 y ω_2 las frecuencia mínima y máxima de la señal $g(t)$, podemos extraer la relación entre la señal secundaria y la primaria, siempre y cuando cumplamos la condición de campo lejano $R_0 > \omega_s/(\alpha^2 c_0)$. Para ello, solucionamos simultáneamente (2.8) y (2.17), obteniendo la solución de campo lejano de Berkta o expresión de Berkta:

$$p_s(t) = \frac{\beta P_0^2 S_0}{16\pi \rho_0 c_0^4 \alpha x} \frac{\partial^2 E^2(\tau)}{\partial t^2} \quad (2.18)$$

siendo $\tau = t - x/c_0$.

Observando la expresión anterior, que va a servir de supuesto en nuestro estudio, podemos obtener las siguientes conclusiones preliminares:

- El sistema es claramente no lineal, ya que la salida es proporcional al cuadrado de la envolvente de la entrada. Por tanto, para caracterizarlo será necesario emplear técnicas de identificación no lineal.
- Para obtener esta repuesta es necesario introducir en el sistema una variante modulada de la señal de entrada original. Esto implica que en realidad tenemos dos sistemas en cascada no lineales: uno que en un principio se corresponderá a una señal modulada y posteriormente la demodulación producida por el efecto de la transmisión del ultrasonido en el aire.

En Yoneyama et al. [1983] se centran en aplicar esta expresión y desglosarla del mismo modo que en (2.17), con el fin de obtener una relación entre la parte lineal del sistema y la cuadrática. Esta relación aporta una idea sobre la distorsión presente en el sistema. De este modo obtenemos que la presión que se corresponde con la envolvente de la señal de entrada mediante una relación lineal se aproxima, si aplicamos la *expresión de Berkley*, a:

$$p_{\text{lin}} = \frac{\beta P_0^2 S_0 m}{8\pi \rho_0 c_0^4 \alpha x} \frac{\partial^2}{\partial t^2} g\left(t - \frac{r}{c_0}\right) \quad (2.19)$$

Por otro lado, el término cuadrático se corresponde con:

$$p_{\text{cuad}} = \frac{\beta P_0^2 S_0 m^2}{16\pi \rho_0 c_0^4 \alpha x} \frac{\partial^2}{\partial t^2} g^2\left(t - \frac{r}{c_0}\right) \quad (2.20)$$

Centrándonos únicamente en el término lineal, si analizamos la onda de presión debida a esta contribución en el dominio transformado:

$$P_{\text{lin}}(\omega) = \frac{\beta P_0^2 S_0 m}{8\pi \rho_0 c_0^4 \alpha r} \omega^2 e^{-j\frac{r}{c_0}\omega} G(\omega) \quad (2.21)$$

De (2.21) podemos extraer la siguiente conclusión: la señal demodulada es proporcional a $\omega^2 G(\omega)$. Esto implica que la señal obtenida es el resultado de amplificar la señal de audio $g(t)$ con un relación de 12 dB/oct. Evidentemente, para evitar esta alinealidad del proceso bastaría con añadir a la cadena un filtrado de -12 dB/oct previo a la modulación, en el caso de que el término cuadrático no existiese. En este estudio se ofrece además un parámetro que relaciona el término cuadrático con el lineal, ofreciendo una idea de la distorsión que presenta el sistema. Como entrada, se aplica una señal tonal y únicamente se tiene en cuenta la relación entre p_{lin} y p_{cuad} :

$$p_{\text{lin}}(t) = -\frac{\beta P_0^2 S_0 m \omega^2}{8\pi \rho_0 c_0^4 \alpha x} \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{c_0}\right)\right) \quad (2.22)$$

$$p_{\text{cuad}}(t) = \frac{\beta P_0^2 S_0 m^2 \omega^2}{8\pi \rho_0 c_0^4 \alpha x} \cos\left(2\omega\left(t - \frac{x}{c_0}\right)\right) \quad (2.23)$$

Para estas ecuaciones es posible definir la relación de distorsión producida para el segundo armónico como:

$$\epsilon = \left[\frac{|p_s(t)|}{|p_d(t)|} \right] \times 100\% = m \times 100\% \quad (2.24)$$

Teniendo en cuenta que la distorsión del segundo armónico es proporcional a m , lo ideal es emplear índices de modulación AM bajos. Si observamos (2.22) y (2.23) es fácil comprobar que la distorsión es proporcional a m^2 mientras que la señal de interés lo es a m . Teniendo en cuenta que el índice de modulación ha de ser menor que

la unidad, esto nos asegura que la señal de interés siempre será mayor que la correspondiente a la distorsión.

Aunque la *expresión de Berkta*y se tome como patrón a la hora de simplificar el comportamiento de los *arrays paramétricos* es importante no olvidar que el comportamiento de estas estructuras es mucho más complejo, ya que en realidad nos encontramos ante un problema de ondas moduladas de Riemann. Si además añadimos que no es necesario aplicar una modulación tan sencilla como la AM, sino que podemos recurrir a esquemas más complejos que aseguren la interacción de la señal de interés $g(t)$ con una portadora, el problema se complica aún más. Aunque algunos autores proponen métodos numéricos con el fin de dar una solución más exacta al problema (Mellen y Moffett [1978], Naze Tjøtta et al. [1990], Campos-Pozuelo et al. [1999], Barriere y Royer [2001]), en esta Tesis se plantea un esquema de identificación de sistemas, ya que el fin es el de obtener una señal fiel en la zona de escucha, no definir de forma exhaustiva el campo acústico.

2.3. Técnicas de modulación

Las técnicas de modulación, aplicadas a la señal de entrada de los *arrays paramétricos*, son vitales para disminuir la distorsión y obtener una señal, en la medida de lo posible, lo más fiel a la entrada original. Los primeros *arrays paramétricos* empleados en aplicaciones SONAR, que revelaron la presencia de ondas de presión sónica debida a las no linealidades del medio, aplicaban una simple modulación AM (véase Figura 2.5 A), que el ámbito del análisis de las estructuras de *arrays paramétricos* se denomina como DSBAM.

El resultado de la modulación AM es poco satisfactorio, ya que adolece de una respuesta en frecuencia pobre con un alto índice de distorsión. A medida que se empezó a barajar este tipo de estructuras en aplicaciones de sonorización directiva, comenzó el interés por aplicar otras técnicas de modulación con el fin de reducir tanto la coloración como la distorsión presentes en este tipo de modulación. Con el estudio de Yoneyama et al. [1983] se hace patente la necesidad de nuevos mecanismos de predistorsión, que asociados a la modulación permitan ecualizar el sistema.

2.3.1. Técnicas basadas en la inversión de la expresión de Berkta

El primer intento de compensación de distorsión no lineal basado directamente en la inversión de la expresión de Berkta lo encontramos en Kamakura et al. [1984]. En este estudio se verifica la viabilidad de esta aplicación en el aire partiendo de la modulación AM, pero añadiendo un sistema de predistorsión como el planteado en la Figura 2.5 B. Este tipo de preprocesado se conoce como SRAM y se obtiene al invertir directamente la *expresión de Berkta*y. El problema fundamental que presenta es tipo de estructuras es que, a pesar de suponer una inversión teórica perfecta del proceso no lineal, son de orden infinito. Así, si imponemos la condición de que el producto $0 \leq mx(t) \leq 1$, tenemos que aplicando la descomposición en series de Taylor:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + mx(t)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)(n!)^2 (4^n)} m^n x^n(t) = \\ &= 1 + \frac{m}{2} x(t) - \frac{m^2}{8} x^2(t) + \frac{m^3}{16} x^3(t) - \frac{5m^4}{128} x^4(t) + \dots \end{aligned} \quad (2.25)$$

aparecen términos de orden superior.

Esto implica que, al no estar acotadas en banda, a pesar de presentar una THD pequeña, pueden ocasionar que la señal primaria interceda en el ancho de banda correspondiente al margen audible. De hecho, la capacidad de este tipo de correcciones se basa en la fidelidad con la que el transductor pueda emitir la señal $\sqrt{1 + mx(t)}$ modulada, que en teoría es de ancho de banda infinito.

Otro posible riesgo a tener en cuenta es que el sistema puede contener desviaciones con respecto al cuadrado de la señal de entrada, con lo que el resultado final podría resultar desastroso.

En este estudio no se hace referencia a la posibilidad de introducir una ecualización previa que elimine la coloración introducida por la derivada segunda de la expresión de Berkta, si no que persigue únicamente reducir

A: Diagrama de bloques de AM convencional, más conocida como técnica DSBAM.

B: Diagrama de bloques de SRAM convencional

C: Diagrama de bloques del preprocesado propuesto en Kite et al. [1998]

D: Modulación SSB-AM, propuesta en Sakai y Kamakura [2008].

FIGURA 2.5: Técnicas de preprocesado y modulación para arrays paramétricos basadas en la inversión de la expresión de Berkta.

la distorsión armónica presente en el sistema de transmisión.

Todos estos problemas se pretenden solventar con un nuevo mecanismo de preprocesado, hasta ahora el más popular en los pocos sistemas comerciales existentes: el conocido como *preprocesado de Kite* (Kite et al. [1998]). Éste se basa en la técnica SRAM, pero introduce una compensación de la coloración, así como un filtrado paso banda previo a la modulación que asegura el ancho de banda de la señal a modular y por tanto el margen de trabajo del transductor en frecuencia. Así, el esquema general previo a la transmisión se refleja en la Figura 2.5 c.

La sencillez de este esquema de preprocesado ha hecho que se implante en sistemas comerciales tomados como referencia en el campo. Así, en Pompei [1998] presenta el primer esbozo de preprocesado basado en esta técnica, que sirvió como apoyo a su tesis doctoral [Pompei, 2002]. A su vez, en la patente de Phelps [2006] se recurre a esta estrategia. Estos esfuerzos se tradujeron en el producto comercial *Audiospotlight*, producto estrella de la empresa *Holosonics* (véase Sección 5.2).

Otro problema que presentan este tipo de esquemas es el consumo de energía, dado que es necesario transmitir la portadora de forma continua. En Sakai y Kamakura [2008] se demuestra que es posible obtener los mismos resultados empleando una modulación de banda lateral (SSB-AM) que aplicando la modulación AM tradicional. En la Figura 2.5 d se representa un esquema de la modulación. Esta se corresponde con una modulación en banda lateral única con portadora. La mayor ventaja que posee este esquema es que produce una envolvente similar a la producida por la técnica SRAM, pero empleando la mitad de la energía. Esta relación la podemos observar en la Figura 2.6. En realidad ambas modulaciones producen resultados en tiempo comparables, como se puede observar en la Figura 2.6 a. Esto supone que la envolvente de ambas modulaciones sea equivalente (véase 2.6 b). Sin embargo, las mayores diferencias se aprecian en el dominio espectral: mientras que la señal generada mediante la modulación SSB-AM se encuentra acotada en banda, la producida por SRAM contiene infinitos armónicos, debido al carácter no lineal introducido por la raíz cuadrada. Esto implica que la modulación SSB-AM es menos exigente

FIGURA 2.6: Comparación entre las señales transmitidas para las modulaciones SRAM y SSB-AM.

con el transductor y más eficiente energéticamente, como se observa en la Figura 2.6 c. Sin embargo, la envolvente de ambas señales es similar, aunque en el caso de la **SSB-AM** los armónicos decrecen más rápidamente que en el caso de la **SRAM**, como se observa en la Figura 2.6 d. Esta pequeña desviación hace que, si se cumple el *modelo de Berkay* fielmente, aparezca una ligera desviación entre el modelo deseado y el transmitido. En cualquier caso, estos armónicos, en caso de optar por la modulación **SRAM**, es muy probable que se pierdan debido a la función de transferencia del propio transductor. Evidentemente, las cosas se complican cuando aplicamos este tipo de técnica a señales de banda ancha. En este caso, la envolvente producida por la modulación **SSB-AM** se aleja del inverso de la *expresión de Berkay*, y por tanto la distorsión aumenta.

2.3.2. Técnicas basadas en modulaciones en cuadratura

La modulación **SSB-AM** esconde tras de sí una modulación en cuadratura. Este hecho hace que múltiples investigadores ([Tan et al. \[2010\]](#), [Shi y Gan \[2013\]](#)) se hayan inspirado en este esquema para obtener sistemas de mayor eficiencia, pero que disminuyan la distorsión introducida por la modulación **SSB-AM**.

La idea consiste en partir de un esquema como el mostrado en la Figura 2.7, en el que a partir de la señal de entrada se obtienen mediante diferentes expresiones las dos señales, $g_1(t)$ y $g_2(t)$, que posteriormente se modulan en cuadratura. Por ejemplo, en el caso de la **SSB-AM** tenemos que:

$$g_1(t) = \mathcal{H}[mx(t)] \quad g_2(t) = 1 + mx(t) \quad (2.26)$$

Otra ventaja que presentan los esquemas en cuadratura, como se argumenta en [Tan et al. \[2010\]](#), es la posibilidad de introducir mayor flexibilidad debido a la posibilidad de disponer de dos señales a las que se aplican

diferentes preprocesados, y que combinadas y moduladas en cuadratura se corresponden con:

$$\begin{aligned} y(t) &= g_1(t) \sin(2\pi f_c t) + g_2(t) \cos(2\pi f_c t) = \\ &= \sqrt{g_1^2(t) + g_2^2(t)} \cos \left[2\pi f_c t - \arctan \left(\frac{g_1(t)}{g_2(t)} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.27)$$

A partir de (2.27) se diseñan distintos esquemas para las funciones $g_1(t)$ y $g_2(t)$, teniendo en cuenta que la envolvente de la señal ha de ser lo más cercana a la inversa de la *expresión de Berkta*. Si tratamos la expresión (2.27) como una modulación AM y damos por válida la relación entre la envolvente y la señal de la onda de presión secundaria (2.18), podemos presuponer que la onda que se recibe en campo lejano en la banda sónica cumple que:

$$p_2(t) \propto \frac{\partial^2}{\partial t^2} [g_1^2(t) + g_2^2(t)] \quad (2.28)$$

A su vez, se busca intentar minimizar la modulación en frecuencia introducida por la expresión $\arctan(g_1(t)/g_2(t))$, ya que ésta afecta tanto al proceso de demodulación del *array paramétrico* como al ancho de banda exigido por el transductor.

La primera técnica de modulación en cuadratura procede de la propuesta realizada en Yang et al. [2007]. En esta técnica se intenta mejorar tanto la distorsión como el ancho de banda transmitido mediante la combinación de la SRAM y la SSB-AM. En primera estancia el autor propone la disminución de la distorsión armónica mediante dos tipos de modulaciones en cuadratura. Denomina a estos “Métodos Modificados de AM”.

FIGURA 2.7: Esquema básico de los sistemas de preprocesado para estructuras de *arrays paramétricos* basados en la modulación en cuadratura.

En el primero de ellos se impone:

$$g_1(t) = 1 + mx(t) \quad g_2(t) = 1 - \frac{1}{2}m^2x^2(t) \quad (2.29)$$

y en el segundo, se varía g_2 pasando a ser:

$$g_2(t) = 1 - \frac{1}{2}m^2x^2(t) - \frac{1}{8}m^4x^4(t) \quad (2.30)$$

En realidad, los valores de g_2 se corresponden con la descomposición en series de Taylor de la función $\sqrt{1 - m^2x^2(t)}$ de segundo y tercer orden respectivamente. De aquí surge la modulación MSRAM, en donde:

$$g_1(t) = 1 + mx(t) \quad g_2(t) = \sqrt{1 - m^2x^2(t)} \quad (2.31)$$

En Tan et al. [2010] se vuelve a revisar esta estrategia, pero en este caso se plantea el problema inicial: el ancho de banda de transductor se encuentra acotado, y por tanto, podemos aproximar $g_2(t)$ a la función deseada $\sqrt{1 - m^2x^2(t)}$, a partir de las series truncadas de la misma. En realidad, consiste en una formulación de la familia

de las modulaciones MAM_q, en donde q es el orden de la serie de Taylor a partir de la que se obtiene la señal $g_2(t)$. Por tanto, esta técnica no se puede considerar novedosa de por sí, aunque en esta publicación se realiza un exhaustivo análisis sobre la relación entre el orden de la serie y la distorsión producida.

2.3.3. Comparativa y características de las técnicas de modulación

A la hora de seleccionar una de estas técnicas es importante tener en cuenta diferentes parámetros. Básicamente, la técnica de preprocesado ideal obtendría una señal lo más lineal posible y de máxima potencia, acotando al máximo el ancho de banda exigido al transductor, así como una buena relación entre la amplitud de la portadora y la señal primaria obtenida.

Para hacer esta comparativa vamos a partir de dos suposiciones: (i) se cumple de forma perfecta la *expresión de Berkay*, a pesar de que en las técnicas en cuadratura tenemos una mezcla de modulación AM y FM en la portadora, (ii) y el transductor tiene un ancho de banda infinito.

Para simular el proceso de demodulación producido por el aire, hemos tenido en cuenta la expresión (2.18) directamente. A partir de ésta, obtenemos una señal dependiente de la envolvente transmitida. Como esta expresión no aporta una referencia clara de la distorsión obtenida, recurrimos a las definiciones empleadas en esta área de conocimiento para definir estos valores.

Así, para definir la distorsión armónica total empleamos la definición THD_R, recogida en Shmilovitz [2005]:

$$\text{THD}_R = \sqrt{\frac{T_2^2 + T_3^2 + T_4^2 + \dots + T_{N-1}^2 + T_N^2}{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + \dots + T_{N-1}^2 + T_N^2}} \times 100\% \quad (2.32)$$

donde T_n representa la amplitud del armónico n -ésimo obtenido al excitar el sistema con un tono puro. Se conoce esta definición como distorsión de valor cuadrático medio. Generalmente es más sencilla de obtener que la distorsión frente al fundamental, en la que sólo se compara la potencia de las contribuciones armónicas con la potencia del tono que se emplea como entrada del sistema.

Sin embargo, como el sistema a analizar es fuertemente no lineal, además de presentar distorsión armónica también genera distorsión de intermodulación. En este caso la señal de test empleada consiste en una mezcla de dos tonos de diferentes frecuencias, $f_1 = \omega_1/(2\pi)$ y $f_2 = \omega_2/(2\pi)$. A la salida del sistema se obtienen los productos de intermodulación $D_{n\omega_1 \pm m\omega_2}$ y los armónicos ($n \neq 1 \wedge m = 0$ y $m \neq 1 \wedge n = 0$), añadidos a los tonos excitados. En este caso definimos la distorsión de intermodulación como:

$$\text{IMD} = \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D_{n\omega_1 \pm m\omega_2}^2}}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D_{n\omega_1 \pm m\omega_2}^2}} \quad (2.33)$$

Para mantener la señal $x(t)$ dentro del margen $[-1,1]$ se ha aplicado un factor de normalización ς^{-1} .

Los resultados teóricos obtenidos para este tipo de modulaciones se encuentran resumidos en la Tabla 2.1. A la vista de estos resultados, llegamos a la conclusión de que ninguna de las modulaciones propuestas cumple con todas las condiciones necesarias. De hecho, las únicas modulaciones que alcanzan resultados de distorsión teóricos nulos son aquellas que requieren de un ancho de banda infinito. Esta condición es imposible de cumplir, ya que aunque empleásemos un transductor con un gran ancho de banda, nunca podríamos emitir en el margen audible. Además, tanto la modulación SRAM como la MSRAM dependen fuertemente de la no coloración del transductor en la banda de emisión.

Si optamos por la solución que necesita menos ancho de banda, la SSB-AM, a pesar de presentar distorsión armónica nula, la distorsión de intermodulación, al igual que sucede en el resto de las modulaciones en cuadratura, es fuertemente dependiente de la coloración del transductor en la banda de emisión. Sin embargo, como

ya se ha citado anteriormente, es la preferida en opciones comerciales, ya que la distorsión de intermodulación se suele considerar menos molesta que la distorsión armónica.

Sin embargo, cada una de estas modulaciones posee peculiaridades concretas, que vienen determinadas por la coloración del sistema, que, salvo en la modulación de Kite (véase Figura 2.5 c, no es compensada por ninguno de estos esquemas. Así tanto la distorsión armónica como la de intermodulación serán más acusadas en baja frecuencia, salvo excepciones.

Por ello se ha creído conveniente realizar un pequeño estudio referente a los valores de THD_R y de la IMD , para diferentes frecuencias e índices de modulación. Con el fin de simular un sistema que se acerque a la realidad, además de tener en cuenta la *expresión de Berkta* se ha aplicado dos filtros para modelar el sistema, como se puede observar en la Figura 2.8:

FIGURA 2.8: Esquema implementado para la simulación de las posibles modulaciones aplicables a las estructuras de arrays paramétricos.

En este esquema la señal de entrada $x(t)$ es normalizada entre $[-1,1]$ y posteriormente se le aplica la modulación concreta propuesta. Posteriormente, la señal es filtrada en el ancho de banda de interés para el transductor. El filtro $h_1(t)$ es un filtro con una banda de paso que comprende el intervalo $[f_c - 20 \text{ kHz}, f_c + 20 \text{ kHz}]$. En este caso se ha seleccionado como frecuencia de portadora 50 kHz. Aunque no todas las modulaciones necesitan este ancho de banda, se aplica el mismo filtrado a todas las pruebas para no perturbar las estimas de la distorsión.

El proceso de recepción se ha simulado teniendo en cuenta la expresión de Berkta. Para implementar el detector de envolvente, se ha recurrido a las propiedades de la transformada de Hilbert:

$$\text{Env}[z(t)] = \sqrt{z^2(t) + (\mathcal{H}[z(t)])^2} \quad (2.34)$$

Al resultado de esta envolvente se le aplica la no linealidad, seguida de la coloración correspondiente, en este caso un filtro diferenciador de segundo orden. A su vez, previo al análisis de la señal $y(t)$ se aplica el filtro paso bajo $y(t)$, encargado de limitar la señal al margen audible.

Bajo estas condiciones se han aplicado tres test diferentes: (i) una prueba tonal para comprobar la THD_R , (ii) otra bitonal, con un tono fijo de 1 kHz y otro variable que cubre todo el ancho de banda audible, (iii) una tercera en la que se han aplicado dos señales tonales de frecuencia variable, la primera de ellas simple y la segunda como combinación de dos *chirps*.

En la Tabla 2.2 se resumen los parámetros empleados para determinar la THD_R y la IMD para cada una de las modulaciones. Dado que el término buscado relaciona potencias a frecuencias concretas, es necesario aplicar un análisis en frecuencia de la señal $y(t)$ de la Figura 2.8. Es por ello que la duración del análisis para cada uno de los pares (m, f) es un múltiplo de la frecuencia más baja estudiada, que a su vez coincide con la granularidad en frecuencia del test, por tanto tenemos que $T_{\min} = 1/\Delta f$. De esta forma se asegura la periodicidad dentro de la ventana de análisis. A su vez se han añadido 100 muestras de guarda tanto al inicio como al final para asegurar la estabilidad del análisis de la envolvente realizado mediante (2.34). Para realizar el análisis de la THD_R sólo se ha contemplado la mitad del espectro audible por considerar que los armónicos quedan fuera de la banda audible a partir de este valor, si bien es cierto que estos armónicos pueden llegar a influir en el proceso de demodulación aéreo. En cuanto la estimación de la IMD , se ha escogido una combinación de un tono puro de 1 kHz, con una frecuencia variable, con la misma granularidad frecuencial que la empleada para el análisis de la THD_R . Este test es bastante exigente, debido a la coloración presente en el sistema, que potencia la alta frecuencia frente a la

Parámetro	AM	SRAM	SSB-AM	MSRAM
Envolvente	$1 + mx(t)$	$\sqrt{1 + mx(t)}$	$\sqrt{(1 + mx(t))^2 + \mathcal{K}[mx(t)]^2}$	$\sqrt{(1 + mx(t))^2 + 1 + m^2 x^2(t)}$
Amplitud de portadora	P_0	P_0	$\sqrt{2}P_0$	$\sqrt{2}P_0$
Amplitud de la fundamental	$\frac{\beta P_0^2 a^2 m}{8 \rho_0 c_0^4 a r} \frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2}$	$\frac{\beta P_0^2 a^2 m}{16 \rho_0 c_0^4 a r} \frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2}$	$\frac{\beta P_0^2 a^2 m}{16 \rho_0 c_0^4 a r} \frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2}$	$\frac{\beta P_0^2 a^2 m}{16 \rho_0 c_0^4 a r} \frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2}$
THD	$\sqrt{\frac{m^2}{1 + m^2}}$	0	0	0
IMD	$\frac{m \sqrt{\omega_1^4 + \omega_2^4 + 4\omega_1^2 \omega_2^2}}{\sqrt{(\omega_1^4 + \omega_2^4)(m^2 + \zeta^2) + (2m\omega_1 + \omega_2)^2}}$	0	$\frac{m(\omega_1 - \omega_2)^2}{\sqrt{\zeta^2 \omega_1^4 + \zeta^2 \omega_2^4 + m^2(\omega_1 - \omega_2)^4}}$	0
Ancho de banda	$2 \Delta B \{g(t)\}$	∞	$\Delta B \{g(t)\}$	∞

TABLA 2.1: Parámetros característicos de cada una de las técnicas de modulación presentadas. Tanto la **THD** como la **IMD** han sido calculadas de forma analítica, a partir de la expresión de *Berkley*. En el caso de la **THD** se parte de una señal monotonal, mientras que para el cálculo de la expresión de la **IMD** se parte de una señal compuesta por dos tonos de frecuencia ω_1 ω_2 radianes. Para señales compuestas se ha aplicado un factor de normalización ζ^{-1} , asegurando que $x(t)$ se encuentra en el intervalo $[-1, 1]$.

Parámetros	Valor	Unidades
f_s	400	kHz
$A_{\text{portadora}}$	1	u.a.
m	[0.5,1]	adim.
Δm	0.25	adim.
Duración test	$12 T_{\min}$	s
Guarda	100	muestras

A: Parámetros generales.

TEST (i)			TEST (ii)		
Parámetros	Valor	Unidades	Parámetros	Valor	Unidades
f	[250-10.000]	Hz	f_1	1	kHz
Δf	250	Hz	f_2	[250-10.000]	Hz
			Δf_2	250	Hz

B: Parámetros específicos de los Test (i) y (ii).

TABLA 2.2: Parámetros empleados para determinar la THD_R y la IMD de cada una de las modulaciones propuestas.

baja. Dado que la no linealidad presente en el sistema es de segundo orden,

En un principio, y guiándonos por los resultados teóricos expuestos en la Tabla 2.1, la modulación que presenta más distorsión es la **AM** simple. Estos datos se corroboran en las Gráficas A y B de la Figura 2.9. Según el modelo teórico, la distorsión armónica presente en el sistema es aproximadamente lineal con el índice de modulación. Esto implica que el resultado obtenido en la Figura 2.9 A se debería corresponder con un plano que pierde su linealidad a medida que aumente el índice de modulación. Sin embargo, se aprecia que la THD_R también se encuentra influenciada por la frecuencia. Esto se debe fundamentalmente a dos factores: (i) el sistema penaliza la baja frecuencia, y por tanto el denominador de la definición propuesta en (2.32) y (ii) a medida que aumentamos la frecuencia de entrada, existen menos armónicos dentro del margen frecuencial de estudio.

En cuanto a la **IMD**, dado que en este caso se tienen en cuenta todos los armónicos que se encuentran presentes en el ancho de banda comprendido entre 0 y 20 kHz, encontramos, dependiendo de la frecuencia dos regiones: (i) las frecuencias por debajo de 10 kHz, en las que las que el producto de intermodulación $\omega_1 + \omega_2$ entra dentro del margen y es de alta frecuencia, unido al armónico de segundo orden y (ii) la región por encima de este valor, en la que sólo se observan los productos de intermodulación, que a pesar de ser de alta frecuencia, no predominan tanto como el armónico de correspondiente a ω_2 . A su vez, este parámetro es ligeramente dependiente de m , pero como se puede observar en el cálculo teórico representado en la Tabla 2.1, se encuentra condicionado en mayor medida por las frecuencias de los tonos excitados a la entrada.

Para el caso de la modulación **SRAM**, que en el estudio teórico ofrece muy buenos resultados en cuanto a los dos parámetros de distorsión, se corrobora, aplicando el TEST (i) e (ii), que para la mayor parte del ancho de banda de interés, en la simulación también se obtienen valores cercanos a cero. Sin embargo, hay tener en cuenta dos problemas fundamentales: al haber introducido una no linealidad no polinómica a la entrada del modulador estamos exigiendo un gran ancho de banda al transductor; a su vez, cualquier pequeña desviación del *modelo de Berktay* supondría el conjunto completo de modulador-demodulador formase un sistema no lineal de orden infinito, y por tanto no existen garantías en una situación realista de que este tipo de modulación se encuentre libre de distorsión. En el caso del test aplicado para obtener las Gráficas A y B de la Figura 2.10, esta desviación no existe, de ahí que el resultado obtenido tanto para la THD_R como para la **IMD** sea considerablemente bueno, sobre todo en el caso de las altas frecuencias. Sin embargo, y al igual que se apreciaba para la modulación **AM**, en baja frecuencia, debido a la fuerte de coloración del sistema, se obtienen malos resultados, ya que la potencia de la señal a la frecuencia original es de muy bajo nivel. Es por ello, que todas las técnicas posteriores, basadas en modulaciones en cuadratura, obtengan peores resultados para estos dos parámetros. La siguiente modulación bajo estudio es la **SSB-AM**. Esta pretende obtener una envolvente similar a la de la modulación **SRAM**, pero a partir de un ancho de banda menor en el transductor, como ya se puede observar en los resultados de la Figura 2.6. Esta premisa se cumple siempre y cuando a la entrada del sistema sea una señal monocroma. En este

A: Distorsión armónica

B: Distorsión de intermodulación.

C: Espectrograma de la onda secundaria para un tono de frecuencia variable a la entrada.

D: Espectrograma de la onda secundaria para la combinación de dos tonos de frecuencia variable a la entrada.

E: Espectrograma de la onda primaria para un tono de frecuencia variable a la entrada.

FIGURA 2.9: Distorsión introducida en la onda secundaria empleando la modulación AM.

A: Distorsión armónica

B: Distorsión de intermodulación.

C: Espectrograma de la onda secundaria para un tono de frecuencia variable a la entrada.

D: Espectrograma de la onda secundaria para la combinación de dos tonos de frecuencia variable a la entrada.

E: Espectrograma de la onda primaria para un tono de frecuencia variable a la entrada.

FIGURA 2.10: Distorsión introducida en la onda secundaria empleando la modulación SRAM.

caso, la envolvente de las dos modulaciones es similar, como se puede apreciar claramente en la Figura 2.6 D, de ahí que en la Tabla 2.1 la THD_R teórica sea nula. Sin embargo, en presencia de una señal más compleja, como por ejemplo en el caso de un entrada bitonal, esta modulación potencia el producto de intermodulación debido correspondiente a $|\omega_1 - \omega_2|$. Esto se evidencia en las Gráficas A y B de la Figura 2.11: apreciamos una distorsión armónica muy baja, que se potencia ligeramente en baja frecuencia, debido al efecto de la coloración de la segunda derivada. Sin embargo, obtenemos una distorsión de intermodulación muy alta. En este caso, como el producto de intermodulación correspondiente a $|\omega_1 - \omega_2|$ se encuentra relativamente cercano a la frecuencia correspondiente a ω_2 , en alta frecuencia, este adquiere mucha importancia.

En cuanto a la otra modulación en cuadratura propuesta, la $MSRAM$, si observamos los parámetros teóricos de la Tabla 2.1, podemos esperar un comportamiento similar al obtenido con la $SRAM$. De hecho, si comparamos los resultados de las Figuras 2.10 A y 2.10 B con los obtenidos para esta modulación, Figuras 2.12 A y 2.12 B, obtenemos dependencias similares para m y f . Sin embargo, esta modulación reduce ligeramente ambos parámetros de distorsión.

Como ya se ha mencionado anteriormente, tanto el parámetro THD_R como la IMD no son realmente representativos de la distorsión que presenta este sistema ya que éste siempre se encontrará excitado por señales más complejas que simples combinaciones bitonales. Sin embargo, aplicado la misma filosofía de excitación tonal podemos realizar estudios que nos aporten más información referente a un sistema no lineal. Por ejemplo, en muchas ocasiones es preferible conocer la situación de los armónicos o los productos de intermodulación dentro de espectro que su relación con respecto al fundamental. Por ejemplo, en el caso de la onda primaria, esto determina el ancho de banda del transductor requerido para el diseño del sistema. En el caso de la onda secundaria, esta situación es importante para determinar si este tipo de distorsión se encuentra en el margen audible o bien aparece en la parte del espectro que se ve penalizada por la coloración introducida en la expresión de Berkay. Con el fin de obtener una idea sobre este tipo de parámetros más complejos, hemos propuesto otro test paralelo a los TEST (I) e (II).

En este caso hemos recurrido a excitaciones tonales de frecuencia variable. Como ya se verá más adelante, este tipo de excitación es recurrente en el mundo del audio, ya que posee propiedades que las hacen adecuadas para extraer información referente tanto a sistemas lineales como no lineales (véase Secciones 3.1.4 y 3.2). Si a su vez combinamos este tipo de señales con un análisis mediante espectrogramas, podemos inferir información referente a la distorsión relacionándola con la frecuencia de entrada, determinando así la posición dentro del espectro de los armónicos y productos de intermodulación más potentes en cada caso.

Los parámetros empleados para generar la señal de entrada en este caso se resumen en la Tabla 2.3. Dado que el sistema bajo estudio en todos los casos presenta no linealidades en la onda primaria o en la secundaria, o en ambas, se han ensayado dos sistemas con dos entradas: la primera de ellas formadas por un único barrido lineal, cuyos parámetros se corresponden con los descritos en la Tabla 2.3 B para el BARRIDO I y la segunda compuesta por una combinación de los BARRIDOS I y II, normalizados por el valor ζ^{-1} de tal forma que la señal de entrada se encuentre comprendida en el intervalo $[-1,1]$.

Como herramienta de análisis se han representados los espectrogramas normalizados de la señal de la onda primaria, para la primera señal de entrada (representados en las Gráficas E de las Figuras 2.9-2.12), la onda secundaria para esta misma entrada (véanse Gráficas C de las Figuras 2.9-2.12), así como la onda secundaria obtenida para combinación de los dos barridos (Gráficas E de las Figuras 2.9-2.12). En el caso de los espectrogramas correspondientes a la onda primaria, y dado que la portadora siempre se encuentra presente, se ha disminuido la potencia del espectrograma correspondiente a 50 kHz con la única finalidad de facilitar la visualización.

Los resultados que exponen estas Gráficas evidencian los cálculos recogidos en la Tabla 2.1. Así por ejemplo, en el caso de la modulación AM , tenemos un sistema que presenta distorsión polinómica de segundo orden perfecta en la onda secundaria. En cuanto al espectro de la onda primaria, éste se encuentra acotado y libre de armónicos (Figura 2.9 E), sin embargo, en la onda secundaria para misma señal de entrada observamos un claro armónico correspondiente a 2ω , como es de esperar, si tenemos en cuenta la expresión de Berkay. En presencia de los dos tonos variables, dada esta naturaleza del sistema, son apreciables los armónicos y productos de intermodulación correspondientes a $|\omega_1 \pm \omega_2|$, $2\omega_1$ y $2\omega_2$, como se observa claramente en la Figura 2.9 D.

A: Distorsión armónica

B: Distorsión de intermodulación.

C: Espectrograma de la onda secundaria para un tono de frecuencia variable a la entrada.

D: Espectrograma de la onda secundaria para la combinación de dos tonos de frecuencia variable a la entrada.

E: Espectrograma de la onda primaria para un tono de frecuencia variable a la entrada.

FIGURA 2.11: Distorsión introducida en la onda secundaria empleando la modulación SSB-AM.

A: Distorsión armónica

B: Distorsión de intermodulación.

C: Espectrograma de la onda secundaria para un tono de frecuencia variable a la entrada.

D: Espectrograma de la onda secundaria para la combinación de dos tonos de frecuencia variable a la entrada.

E: Espectrograma de la onda primaria para un tono de frecuencia variable a la entrada.

FIGURA 2.12: Distorsión introducida en la onda secundaria empleando la modulación MSRAM.

Parámetros	Valor	Unidades
f_s	400	kHz
$A_{\text{portadora}}$	1	u.a.
m	0.8	adim.
Duración test	7	s

A: Parámetros de la simulación.

BARRIDO I			BARRIDO II		
Parámetros	Valor	Unidades	Parámetros	Valor	Unidades
$f_{\min}$	100	Hz	$f_{\min}$	100	Hz
$f_{\max}$	20	kHz	$f_{\max}$	5	kHz

B: Parámetros de las dos señales tonales de frecuencia variable que componen la entrada del test.

TABLA 2.3: Parámetros empleados para caracterizar los distintos esquemas de modulación de las estructuras de arrays paramétricos mediante señales tonales variables en frecuencia.

El caso de la modulación **SRAM** se puede considerar contrario al anterior. Este tipo de preprocesado asegura la linealidad en la onda secundaria a costa de aumentar el ancho de banda que ha de emitir el transductor. Así, nos encontramos que debido al efecto que provoca la inserción de la raíz cuadrada previo al paso de la modulación, se obtiene un sistema no lineal polinómico de grado infinito, como ya se dedujo a partir de la expresión (2.25). Este fenómeno se observa claramente en el espectrograma de la Figura 2.10 E. Sin embargo, la onda secundaria tanto para el caso del barrido único (Figura 2.10 c) como para el compuesto (Figura 2.10 D) conservan la linealidad y la única diferencia apreciable con la señal original viene dada por la coloración introducida por la doble derivada.

En objetivo fundamental de la modulación **SSB-AM** es el de reducir al máximo el ancho de banda demandado al transductor. Como ya se comentó anteriormente, dado que la forma de la envolvente de este tipo de modulación se aproxima a la obtenida en el caso de la modulación **SRAM**, en el caso de encontrarnos con una entrada monoton, el test realizado para la entrada de barrido único arroja resultados esperanzadores: el sistema conserva su linealidad (véase Figura 2.11 c), sin embargo este tipo de modulación no se encuentra libre de **IMD**, ya que potencia la aparición del producto de intermodulación correspondiente a $|\omega_1 - \omega_2|$, como se pone de manifiesto en el espectrograma de la Figura 2.11 D.

En cuanto a la otra modulación en cuadratura propuesta, la **MSRAM**, posee características similares a la **SRAM**: en los espectrogramas que representan las ondas secundarias (Figuras 2.12 c y D) se aprecia claramente la ausencia casi en totalidad de distorsión armónica y de intermodulación, pero, al igual que en la **SRAM**, se exige al transductor un gran ancho de banda. Sin embargo, en este caso, podemos apreciar como este ancho de banda se concentra más que en el caso de la **SRAM** (véase 2.12 E frente a 2.10 E).

A la vista de los resultados obtenidos mediante estos test, así como los resultados teóricos recogidos en la Tabla 2.1 podemos afirmar que ninguno de los esquemas de modulación cumple las especificaciones exigidas simultáneamente. Unido a este problema además hay que tener en cuenta influencia de las posibles desviaciones frente al sistema del modelo físico analizado en secciones anteriores.

2.4. Conclusiones: modelo de sistema

En este Capítulo se han recogido los principales investigaciones que pretenden describir el funcionamiento de las estructuras de *arrays paramétricos*, a partir del estudio de la ecuación **KZK**, que describe la propagación de la onda acústica teniendo en cuenta fenómenos de no linealidad derivados del manejo de altos niveles de potencia acústica. Debido a la complejidad que entrañan este tipo de relaciones, se han tomado como punto de partida aquellos estudios que pretenden simplificar este sistema de transmisión complejo mediante el modelado de la relación existe entre la señal emitida por el transductor la recibida en el rango de frecuencias audibles.

Para ello, se ha presentado el estudio de Westervelt en el que se formaliza la interacción de dos tonos en este tipo de sistemas de transmisión. A partir de este resultado surge la *expresión de Berktaç* que se emplea como

referente en esta área.

Debido al mecanismo de generación de la onda secundaria, que depende de la interacción no lineal entre la señal a transmitir y una portadora, que sirve de referente del batido general, los investigadores han planteado diversas técnicas de modulación que producen en el margen audible señales que guardan una relación pseudolineal con la entrada. En este Capítulo se han presentado y simulado las principales técnicas de modulación, todas ellas basadas directamente en la *expresión de Berkay*, con el fin de facilitar la complejidad del sistema. Se ha creído conveniente reevaluar todas ellas desde un punto de vista teórico, dando por supuesta la *aproximación de Berkay* y analizando el comportamiento general de la estructura frente a señales tonales. A su vez, todas estas técnicas han sido simuladas sobre un sistema de transmisión perfecto, para evaluar la distorsión armónica y de intermodulación que se espera para cada una de ellas. Por desgracia, estos valores tienen un interés relativamente bajo, ya que a pesar de ofrecer información sobre el sistema, no aportan los datos suficientes para el diseño de un sistema final.

En esta Tesis se propone una metodología diferente para la caracterización de estas estructuras: la identificación del sistema de transmisión completo bajo ciertas premisas, obtenidas a partir de este estudio, pero que abren las puertas al planteamiento de modelos más complejos que describan este fenómeno. Así, a partir de lo expuesto en este Capítulo se acotarán los posibles modelos que sean capaces de describir de la forma más fiel posible el sistema al completo. No daremos por supuesta la *expresión de Berkay*, si no que nos servirá únicamente como punto de partida ya que el objetivo final es el de identificar la relación entre la envolvente y la señal secundaria recibida desde un punto de vista de modelados de sistemas.

En un principio esta perspectiva puede parecer ambiciosa, sin embargo, podemos desglosarla en dos objetivos: (i) plantear un sistema de diagnóstico que aporte información sobre qué tipo de estructura es la adecuada para caracterizar el problema y (ii) encontrar los mecanismos adecuados para obtener los parámetros que conformen el modelo.

Esta metodología se plantea desde un punto de vista genérico, ya que con ella pretendemos independizar la técnica de modulación empleada de la batería de algoritmos propuestos que conformen la misma, aunque el punto de partida sea emplear la modulación [AM](#).

A su vez, en este Capítulo se esbozan ciertas restricciones que pueden llegar a ser críticas a la hora de seleccionar los algoritmos de identificación, ya que las propias técnicas de modulación imponen un modo de trabajo concreto, acotando tanto el margen dinámico, frecuencial y el punto de trabajo del sistema. Este tipo de restricciones no son determinantes a la hora de identificar sistemas lineales, sin embargo en este caso condicionan por completo su funcionamiento y por tanto el modelo que lo describe.

IDENTIFICACIÓN ORIENTADA A LAS ESTRUCTURAS DE ARRAYS PARAMÉTRICOS

Uno de los principales retos a la hora de diseñar un altavoz paramétrico de altas prestaciones es el de caracterizar de forma adecuada el funcionamiento del mismo. A diferencia de los altavoces tradicionales, que persiguen la fidelidad mediante la mejora de los sistemas de transducción, el propio fenómeno del *array paramétrico* implica un proceso no lineal de transmisión que ha de ser caracterizado para poder ser compensado posteriormente.

A lo largo de este Capítulo se describirán las diferentes técnicas empleadas en la identificación del sistema bajo estudio (SUT), así como los métodos de discriminación entre las posibles estructuras que describen al mismo. El objeto de estos algoritmos es el de proporcionar una metodología de identificación completa, adaptada a esta problemática concreta. Dado que la identificación de sistemas forma un área completa de conocimiento por sí misma, en el texto se proponen únicamente algoritmos destinados a identificar el sistema en un laboratorio, con necesidad de procesamiento posterior; si bien es cierto que estos resultados pueden servir de parámetros de entrada a algoritmos más ligeros que se pueden ejecutar en tiempo real, actuando como calibradores in situ del producto final.

En general, la mayoría de las técnicas de identificación de sistemas no lineales se basan en la estimación de los parámetros que describen una cierta estructura impuesta partiendo del estudio de la salida del sistema obtenida a partir de una entrada concreta. Como resultado de este análisis, se obtiene un modelo del sistema que permite sintetizar el comportamiento del modelo físico real.

Este planteamiento deja abiertas las puertas a diferentes técnicas de identificación dependientes de la estructura escogida. En las primeras aproximaciones expuestas en la literatura, los modelos se basaban en caracterizar el comportamiento lineal de los sistemas, como por ejemplo en Müller y Massarani [2001], Stan et al. [2002], mientras que sólo aspiraban a cuantificar la influencia de la no linealidad presente en los mismos (Czerwinski et al. [2001]). Los métodos clásicos recurren a la determinación de distorsión armónica total (THD) y los productos de intermodulación para valorar la no linealidad, empleando para ello como entrada combinaciones de tonos puros. Sin embargo, estos parámetros no describen con fidelidad el sistema, ni permiten plantear estructuras de inversión factibles.

Otros métodos recurren a la formalización de la descripción del modelo a partir de las series Volterra. Esta representación implica la estimación de un gran número de coeficientes, sin embargo suele ser adecuada para la

mayoría de sistemas reales, siempre y cuando cumplan con una pequeña serie de requisitos. A lo largo de la literatura se han expuestos múltiples mecanismos de hallar este tipo de representaciones, ya sea a través del método de Wiener (Schetzen [1981]), aplicando métodos espectrales (Brillinger [1970]), o autorregresivos (Thouvez y Jezequel [1996]). También existen diversidad de estrategias atendiendo al tipo de excitación necesaria para obtener esta representación: señales pseudoaleatorias a la entrada del sistema (Nowák y Van Veen [1994]), secuencias multinivel (Chen et al. [1989], Reed y Hawksford [1996]), u ondículas (Prazenica y Kurdila [2006]). Las series de Volterra ofrecen información sobre la estructura subyacente del sistema caracterizado, lo que permite deducir un modelo más reducido que describa al mismo de manera fiable, sin necesidad de realizar premisas basadas en conocimientos físicos de su comportamiento.

Sea cual sea la estrategia elegida para la identificación del sistema, la mayor parte de estas metodologías requieren de conocimientos previos del sistema a identificar. En nuestro caso disponemos del modelo físico presentado en el Capítulo 2, que podemos tomar como punto de partida para elegir la técnica más adecuada. Además, dentro de la metodología propuesta se incluyen sistemas de diagnóstico que permiten facilitar la caracterización completa del *array paramétrico*, especialmente diseñados para la ocasión.

Dada la diversidad de algoritmos y estructuras posibles a aplicar a este tipo de sistemas, en este Capítulo se realizará un estudio exhaustivo tanto de representaciones posibles, señales de excitación, así como sistemas de diagnósticos. Dentro de este estudio se proponen dos metodologías propias diferentes para describir el sistema, así como algoritmos propios adaptados a la casuística del problema: la existencia de fenómenos no lineales conjugada con el empleo de modulaciones que restringen el margen dinámico de la entrada. Todos estos algoritmos serán puestos a prueba en sistemas sintéticos próximos al comportamiento descrito por el modelo físico, para corroborar su fiabilidad. A su vez, se presentarán nuevos mecanismos que permitan valorar la fiabilidad del proceso de identificación.

3.1. Planteamiento inicial del problema de identificación

En los últimos años, y debido al desarrollo de diferentes prototipos y productos industriales que aprovechan el efecto de los *arrays paramétricos* acústicos, se han propuesto diversas estrategias de identificación de estos sistemas. Casi todos ellos parten del mismo tipo de modulación (véase Sección 2.3) y de la suposición de que el sistema se comporta como describe la ecuación de Berkay, imponiendo una estructura de Hammerstein pura.

Los resultados más prometedores parten del empleo de filtros de Volterra adaptativos, identificando el modelo de forma iterativa (Ji et al. [2011], Ji y Gan [2012], Mu et al. [2013a, 2014b]). Otros autores se han decantado por el empleo de señales deterministas, como tonos variables decalados para obtener una aproximación de la distorsión introducida, como en el trabajo de Mu et al. [2014a]. En este trabajo se demuestra que es posible hallar modelos con coeficientes fuera de la diagonal a partir de excitaciones tonales. Si bien es cierto que en esta referencia se comete un grave error de concepto ya que se pretende extraer coeficientes no-Hammerstein asumiendo que se sigue cumpliendo una simplificación la relación expuesta en (3.53) cuando los núcleos se encuentran dispersos más allá de sus diagonales. Como ya se estudió en la Sección 3.2.1, los coeficientes estimados aplicando esta metodología resultarían deformados según las expresiones reflejadas en la Tabla 3.4 y por tanto esta estima se alejaría de la realidad en tanto y cuando no podemos aplicar tonos de suficiente longitud como para mitigar esta deformación.

Todos estos estudios obtienen resultados contradictorios, en los que el residuo de la estimación se puede considerar intolerable para plantear una estructura de inversión, e incluso muchos de ellos únicamente aportan medidas de distorsión obtenidas a partir de medidas tonales. Por ejemplo, en el caso de los métodos recursivos, uno de los motivos fundamentales que afectan a la bondad de la identificación es la imposición de que el sistema a identificar ha de contar con núcleos no dispersos para obtener una solución válida, o bien redefinir la función de coste del problema (Shi y Shi [2011]) y es de suponer que esta premisa no tiene por qué cumplirse.

Esto nos plantea un escenario en el que, a pesar de disponer de aproximaciones físicas teóricas, no queda clara cuál es la estructura o modelado más adecuado para la descripción del sistema. Si bien todos estos análisis coinciden en dos características: tanto la memoria como el orden de la no linealidad inherente parecen ser decrecientes, con gran predominancia del segundo orden frente a los siguientes.

FIGURA 3.1: Procedimiento general a la hora de escoger e identificar un sistema genérico, basado en Eykhoff [1984]. La metodología se puede extrapolar al caso concreto de la identificación de *arrays paramétricos*.

Con el fin de mejorar estos resultados, el planteamiento del problema se ha modificado radicalmente frente a las investigaciones anteriores: se ha optado por una estrategia generalista, intentando aplicar técnicas de identificación que se encuentren mínimamente sujetas al modelo a identificar. La metodología propuesta se corresponde por tanto con la descrita en la Figura 3.1, en la que el modelado del sistema se inspira en un modelo físico aportado por investigaciones previas pero no se ciñe completamente a él.

3.1.1. Modelos de caja blanca, gris y negra

La identificación de sistemas no lineales se encuentra fuertemente influenciada por la información disponible sobre el sistema a identificar. Estos datos preliminares serán condicionantes a la hora de elegir la técnica más adecuada para obtener una mejor síntesis del sistema real a identificar.

La clasificación básica de esta situación preliminar es la conocida como modelos de caja blanca, negra y gris:

- **Modelo de caja blanca:** Se encuentran bajo esta categoría todos aquellos procesos que se rigen directamente por principios fundamentales y que se pueden describir por completo mediante modelado teórico. Dentro de esta categoría también podemos incluir aquellos fenómenos que, si bien dependen de un modelo teórico, es necesario determinar ciertos parámetros de este modelo a partir de datos procedentes de una medición.
- **Modelo de caja negra:** Se basan únicamente en datos extraídos del sistema. Tanto la estructura como los parámetros de la misma se determinan a través de modelado experimental. No es necesario un conocimiento previo del sistema y el modelo no ha de concordar con leyes físicas o procesos fundamentales.
- **Modelo de caja gris:** Representa el compromiso entre los dos modelos anteriores. Se permiten suposiciones arbitrarias, pero se parte de alguna suposición física y de los datos obtenidos a partir de mediciones. Así, la estructura elegida para identificar el sistema ha de corresponderse o ser descriptiva de un modelo físico conocido con anterioridad, mientras que los parámetros estimados se obtienen a partir de las medidas.

La Tabla 3.1 resume las diferencias entre estos tres modelos. En el caso del modelo de la caja gris, aparecen

	Caja blanca	Caja gris	Caja negra
Fuentes de información	Principios fundamentales. Conocimiento profundo.	Conocimiento cualitativo (reglas). Datos del sistema disponibles.	Experimentos. Datos.
Ventajas	Buena extrapolación. Alto conocimiento. Alta fiabilidad. Escalabilidad del sistema.		Tiempo de estudio pequeño. Pocos conocimientos previos de la materia a tratar. Se pueden emplear a pesar de no describir correctamente los fenómenos.
Inconvenientes	Gran consumo de tiempo de estudio. Requiere de un experto en la materia. Su conocimiento restringe su precisión. Sólo para procesos ampliamente estudiados.		Extrapolaciones poco fiables. Ausencia de escalabilidad. Fiabilidad restringida por la calidad/cantidad de los datos. Bajo conocimiento del proceso.
Áreas de aplicación	Planificación. Construcción. Descripción de procesos físicos fundamentales. Elección preferente para procesos sencillos.		Sólo para procesos reales de los que se puedan extraer datos. Elección preferente en sistemas complejos.

TABLA 3.1: Clasificación de los problemas de identificación atendiendo a los conocimientos previos del SUT, inspirada en Nelles [2001]

intencionadamente en blanco aquellas casillas en las que, dependiendo del caso concreto, podemos aplicar las características expuestas para el modelo de caja blanca o negra.

Los modelos de caja blanca o negra son escasos en el área de la ingeniería. En concreto el problema inicial que trata de resolver esta Tesis se puede clasificar como problema de *caja gris clara*. Por tanto el planteamiento es el siguiente: a partir de los modelos físicos conocidos (véase Sección 2.2.2), es necesario encontrar una estructura que permita describirlos e identificarlos.

Esta clasificación coincide con la importancia que tienen, a la hora de aplicar un procedimiento de identificación, las distintas ramas que se contemplan en el diagrama de la Figura 3.1. Dependiendo del tipo de problema al que nos enfrentemos, las ramas laterales derechas adquieren mayor o menor importancia, ya que el tipo de modelo escogido se verá afectado por el proceso de modelado proveniente de las leyes físicas que gobiernen el sistema. En el caso de sistemas bien definidos mediante leyes físicas, las ramas del lateral izquierdo adquieren más importancia, mientras que si la incertidumbre frente al comportamiento del sistema es alta, el grueso del problema recae en los bloques centrales, así como en los procesos de validación de modelo.

3.1.2. Clasificación y elección de los métodos de identificación no lineal

A la hora de identificar un sistema no lineal uno de los problemas fundamentales que se plantea es el de elegir un sistema de identificación adecuado al problema. Por desgracia, no existe un método general que garantice una identificación exitosa.

En la Figura 3.2 se muestra una clasificación de los métodos de identificación basada en el tipo de premisas necesarias para identificar un sistema. A priori, en ésta se distinguen tres categorías diferenciadas: *métodos paramétricos*, *métodos no paramétricos* y *métodos semi-paramétricos*.

Un método de identificación se considera *paramétrico* si busca un modelo con un número finito de parámetros

FIGURA 3.2: Clasificación de los sistemas no lineales orientada a la identificación.

desconocidos que se adapta a una representación concreta del sistema no lineal. Estos métodos se asocian con aquellos problemas que encajan en la clasificación de *caja blanca* o *gris clara*, ya que el error del modelo obtenido está directamente relacionado con la correcta elección de los parámetros.

Por otro lado, las aproximaciones no paramétricas se basan en algoritmos más pesados computacionalmente, que asintóticamente se encuentran libres de error. Sin embargo, los métodos no paramétricos no se suelen explotar en la práctica debido a las siguientes razones: (i) dependen de varios parámetros de ajuste, como por ejemplo la selección de los núcleos, el ancho de banda o las bases ortonormales escogidas, que son críticos a la hora de obtener un buen resultado, (ii) se descarta el conocimiento previo del sistema, basándose únicamente en las medidas realizadas, esto implica que la fiabilidad del sistema se puede ver comprometida por el número de datos de los que se dispone; (iii) se han de calcular un gran número de estimas para modelos de gran complejidad.

Los métodos *semi-paramétricos* surgen como solución de compromiso para solventar los problemas de ambos métodos. Dependen de observaciones entrada-salida, pero permiten añadir supuestos iniciales que se conozcan del sistema. En la actualidad son los métodos más populares.

Inicialmente el sistema bajo estudio se puede clasificar como problema de *caja gris*. Según el modelo físico planteado (Sección 2.2.2), los sistemas de *array paramétricos* se comportan como sistemas lineales cuya entrada ha sufrido una no linealidad cuadrática sin memoria. Esto implica, que dentro de la clasificación expuesta se encontraría en la categoría de Hammerstein simple de segundo orden y, por tanto, podemos aplicar técnicas paramétricas para identificarlo, similares a las propuestas en Pearson et al. [1996].

Desgraciadamente, esta suposición se ajusta únicamente al modelo físico que describe la propagación en el aire. Algunos intentos de identificación completa de sistemas paramétricos han puesto en evidencia la aplicación de este modelo sobre estructuras reales, como por ejemplo en los estudios presentados en Lee et al. [2002] y Ji y Gan [2012]. Los niveles de error cometidos en estos casos se pueden considerar no aptos para un proceso de compensación o de linealización posterior, que es el objetivo final de esta Tesis.

A pesar de estas desviaciones, existen evidencias de que el sistema bajo estudio cumple ciertas restricciones que lo hacen favorable para aplicar determinadas técnicas de identificación:

- I El sistema se encuentra acotado en memoria y orden. Existen técnicas que permiten acotar estos dos parámetros claves en la identificación a partir de pruebas preliminares.
- II Si las condiciones acústicas no varían (recinto, posición de percepción...), podemos considerar el sistema estático.

Estas dos cualidades del sistema nos hacen llegar a la conclusión de que las series de Volterra pueden llegar a ser una buena representación del mismo.

Como se muestra en la Figura 3.2, las series de Volterra pueden determinarse de forma paramétrica o no paramétrica, en el dominio continuo y discreto. En el caso que nos atañe, cuya finalidad es la de proponer estructuras linealizables o compensables mediante procesamiento de señal, nos centraremos en la identificación discreta. En cuanto a la elección de la técnica, partiremos de técnicas no paramétricas basadas en series de Volterra, que permiten describir todos aquellos modelos considerados en la Figura 3.2 como *modelos representados por series funcionales*, siempre y cuando sean convergentes en memoria y orden.

Otra característica que hace singular al problema de identificación de *arrays paramétricos* es que la señal de entrada se ve expuesta a ciertas técnicas de modulación inicial (véase 2.3). Por tanto, la señal de entrada se encuentra acotada en margen dinámico, ancho de banda y punto de trabajo. Esto imposibilita el empleo de aquellas técnicas que imponen un tipo de entrada determinada (ruidos de gran ancho de banda con media nula, entradas multitonales estudiadas en el dominio temporal...) y que por desgracia suponen la mayor parte de las técnicas consideradas *no paramétricas* y propuestas hasta ahora.

3.1.3. Las series de Volterra como representación de los sistemas no lineales

La representación de los sistemas no lineales mediante núcleos de Volterra surge de la necesidad de encontrar una caracterización cómoda que relacione la entrada y la salida de estos sistemas. En diversas publicaciones como Schetzen [1980a,b] se relacionan estas dos señales mediante el uso de un operador no lineal $\mathbf{H}[x]$ al que se le puede aplicar un desarrollo en series de Taylor, en donde $\mathbf{H}_n$ representa un operador no lineal de orden n . El término $\mathbf{H}_0$ está asociado con la componente constante de la salida del sistema, $\mathbf{H}_1$ se corresponde con la parte lineal, $\mathbf{H}_2$ con la cuadrática y así sucesivamente.

$$y(t) = \mathbf{H}[u(t)] = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1[u(t)] + \mathbf{H}_2[u(t)] + \cdots + \mathbf{H}_N[u(t)] \quad (3.1)$$

El método para determinar el operador $\mathbf{H}_r$ de orden r fue propuesto por Volterra y en la actualidad es conocido como el método de las series de Volterra. De acuerdo con esta aproximación un sistema no lineal con memoria está gobernado por los operadores $\mathbf{H}$. Como esos operadores se derivan de la serie de Taylor, a menudo se les denomina series de Taylor con memoria.

En la definición de las series de Volterra, la salida de un sistema no lineal con memoria se calcula a través de:

$$y(t) = h_0 + \sum_{r=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_r(\theta_1, \dots, \theta_r) u(t - \theta_1) \cdots u(t - \theta_r) d\theta_1 \dots d\theta_r \quad (3.2)$$

donde $h_r(\theta_1, \dots, \theta_r)$ es el núcleo de Volterra de orden r . Aplicando una analogía con la convolución para describir el comportamiento de sistemas lineales, podemos llamar a esta operación convolución generalizada.

$$h_r(\theta_1, \dots, \theta_r) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_r(\theta_1, \dots, \theta_r) u(t - \theta_1) \cdots u(t - \theta_r) d\theta_1 \dots d\theta_r \quad (3.3)$$

El siguiente paso sería trasladar este concepto a sistemas de tiempo discreto, causales y de memoria y orden acotados. Los primeros estudios que relacionan el mundo discreto con el continuo, para la expresión (3.2), fueron realizados por Boyd et al. [1984], reformulando el teorema de Stone–Weierstrass, en donde se afirma que mediante:

$$y(t) = \sum_{r=0}^N (\Delta t)^r \sum_{k_1=0}^T \cdots \sum_{k_r=0}^T h_r(\theta_{k_1}, \dots, \theta_{k_r}) u(t - \theta_{k_1}) \cdots u(t - \theta_{k_r}) \quad (3.4)$$

podemos aproximar a un sistema no lineal mediante una serie finita de núcleos de Volterra discretos de memoria finita. Sin embargo, esta afirmación no conlleva que el problema sea tratable computacionalmente. Por tanto, si existe una serie de Volterra que converja, causal y de memoria acotada de longitud M , podremos definir los núcleos de Volterra discretos desde el orden 0 hasta el N tales que generen la señal de salida muestreada $y[n]$ mediante:

$$y[n] = h_0 + \sum_{r=1}^N \sum_{k_1=0}^{M-1} \cdots \sum_{k_r=0}^{M-1} h_r[k_1, \dots, k_r] u[n - k_1] \cdots u[n - k_r] \quad (3.5)$$

Debido a la complejidad de la expresión generalizada de la convolución discreta, a menudo se emplean la notación matricial para tratar el problema. Para representar la ecuación (3.5) en forma matricial, se elimina el término de componente continua de la salida correspondiente a h_0 , ya que éste se puede obtener de forma directa. La señal de entrada pasa a representarse mediante vector fila $\mathbf{u}_n = [u(n), u(n-1), \dots, u(n-M+1)]$, y los núcleos $\mathbf{H}_r$ se representan como hipermatrices vectorizadas mediante un sistema de ordenación que se expone posteriormente. El resultado de esta vectorización de los elementos $h_r[k_1, \dots, k_r]$ que forman la hipermatriz $\mathbf{H}_r$ se denotará mediante $\mathbf{h}_r$. La operación de convolución discreta generalizada se puede tratar entonces como el producto mixto de Kronecker de estos dos vectores. Para representar el producto de Kronecker aplicado r veces

sobre el mismo vector, emplearemos la siguiente notación: $\mathbf{u}_n \otimes \mathbf{u}_n \otimes \dots \otimes \mathbf{u}_n = \mathbf{u}_n^{[r] \otimes}$. Así la ecuación (3.4) en su forma compacta se corresponde con:

$$y[n] = \sum_{r=1}^N \mathbf{u}_n^{[r] \otimes} \mathbf{h}_r \quad (3.6)$$

Ventajas y desventajas del modelo de Volterra

Los modelos de Volterra están especialmente indicados para caracterizar alinealidades representables por series de bajo orden. Por ejemplo, en nuestro modelo, si las suposiciones del modelo físico son correctas, el modelo de Volterra sería adecuado, ya que sabemos que el orden máximo que debería alcanzar el sistema es dos.

Otra de las grandes ventajas de los coeficientes del Volterra es que si tenemos un modelo determinado mediante una expresión matemática, es sencillo extraer de él los núcleos de Volterra. En nuestro caso esto es importante, ya que los autores hasta ahora se han valido del modelo determinista propuesto por Berkta.

El modelo de Volterra se puede emplear incluso en los casos en los que no existe una expresión algebraica que relacione la entrada y la salida del sistema o ésta sea muy compleja, ya que se pueden extraer mediante simulaciones numéricas.

El mayor problema que presenta el modelo de series de Volterra es que los resultados se presentan en forma de sumatorio de infinitos términos. Estos sumatorios pueden converger o no, hecho que tiene numerosas implicaciones:

- Si la suma converge, lo hace a un único valor, por tanto, este método no será válido para caracterizar sistemas que puedan obtener valores diferentes de salida para una misma entrada, como sucede en procesos de histéresis. Concretamente, en nuestro caso esto no supone un problema, ya que, en un principio nuestro sistema es estático.
- También es posible que, aunque exista convergencia, el sistema requiera de memoria infinita, ya que este puede contener fuertes transitorios. Aunque el modelo físico del que partimos no contemple esta posibilidad, nosotros hemos de tenerla en cuenta.
- Si el sumatorio diverge, las series de Volterra no nos ofrecen información útil, ya que la mayor parte de la carga de éste se encontrará en órdenes superiores, y por tanto no serán calculables.

Una serie de Volterra diverge si:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} h(\tau_1, \dots, \tau_n) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \right| \\ & \leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} |h(\tau_1, \dots, \tau_n) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_n)| d\tau_1 \dots d\tau_n \\ & \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|h_n\| \|\mathbf{u}\|^n = f(\|\mathbf{u}\|) < \infty \end{aligned} \quad (3.7)$$

Donde $\|\mathbf{u}\|$ es la norma de la entrada $\mathbf{u}$, f es la función a caracterizar por los coeficientes de Volterra.

El array paramétrico representado como series de Volterra

Partiendo del modelo propuesto por Berkta, resumido en la expresión (2.18)¹, vamos a modelar los coeficientes de Volterra para un *array paramétrico*. Evidentemente, si observamos la ecuación y teniendo en cuenta lo comentado en la sección anterior, es fácil observar que el sistema bajo estudio es un sistema de orden dos, ya que la salida es una función del cuadrado de la entrada.

¹A partir de aquí, la expresión 2.18 va a ser simplificada mediante $p_s(t) \propto \frac{\partial^2 E^2(t)}{\partial t^2}$ ya que el primer término de la ecuación se puede considerar una constante para un punto determinado del espacio, manteniendo las condiciones de la fuente y del medio de transmisión. Por sencillez, la constante no va a ser arrastrada en las siguientes demostraciones.

FIGURA 3.3: Estructuras de Hammerstein y Wiener descriptivas de la demodulación de la onda sonora en estructuras de arrays paramétricos.

Para simplificar el cálculo, y como primera aproximación partimos de una modulación AM con portadora. Por tanto:

$$E(t) = 1 + mx(t) \quad (3.8)$$

Aplicado la aproximación de Berktaý tenemos que en un punto dado la onda de presión secundaria es proporcional a:

$$y(t) = \frac{\partial^2 E^2(t)}{\partial t^2} \quad (3.9)$$

Reescribiendo la expresión anterior en términos de potencias de $x(t)$:

$$y(t) = \frac{\partial^2 (2mx(t) + m^2x^2(t))}{\partial t^2} \quad (3.10)$$

Esta expresión se relaciona directamente con 3.1, siendo $h_0 = 0$ y reinterpretando la derivada de segundo orden como un sistema lineal representado por $h(t)$:

$$y(t) = h(t) * [2mx(t)] + h(t) * [m^2x^2(t)] \quad (3.11)$$

Por tanto, podemos encuadrar los arrays paramétricos como sistemas con un comportamiento que encaja en el modelo de Hammerstein simple o en el de Wiener generalizado, como se puede observar en los modelos representados en la Figura 3.3. La estructura de Hammerstein simple se compone de una parte no lineal seguida de un único filtro lineal, mientras que la estructura de Wiener generalizada aplica la no linealidad a una red de filtros previa. Ambas estructuras se pueden obtener fácilmente a partir de los núcleos de Volterra que definen el sistema.

Esto nos lleva a concluir que podemos recurrir a sistemas de identificación no paramétricos para modelar el sistema, partiendo de la representación en series discretas de Volterra (véase Figura 3.2).

Sin embargo, partir de estas suposiciones implica que nos encontramos ante un escenario de *caja gris claro*, cuando en realidad el sistema completo se encuentra formado por diferentes subsistemas de naturaleza desconocida. Para representar estas posibles discrepancias con el modelo físico teórico, optaremos por el empleo de técnicas que permitan obtener las series de Volterra características del sistema al completo, sin restringir este estudio a

modelos de Hammerstein simples derivados directamente de la expresión de Berkta.

Los núcleos de Volterra correspondientes a un sistema de Hammerstein simple como el mostrado en la Figura 3.3A, sólo poseen elementos no nulos en la diagonal (Ecuación 3.11) y su orden viene delimitado por el orden de la no linealidad previa. Por tanto, cualquier desviación de estas dos premisas implicaría una aberración con respecto al modelo físico de partida.

Aunque emplear series de Volterra como descriptores de modelo permita mayor flexibilidad para estas desviaciones, si seguimos optando por un sistema no paramétrico de identificación necesitaremos al menos una buena estima del orden y la memoria del sistema.

3.1.4. Señales de test para la identificación de sistemas

La mayoría de las aplicaciones reales de análisis de sistemas obtiene sus resultados a base de monitorizar el par entrada-salida. A veces la entrada viene impuesta por la propia aplicación como es el caso de los sistemas biológicos, sin embargo, en el problema que pretende resolver esta Tesis, disponemos de la flexibilidad que nos permite elegir la señal de excitación del sistema, ya que no nos encontramos sujetos a premisas muy exigentes:

- I *Ancho de banda acotado*: hemos de tener en cuenta el ancho de banda limitado por nuestro sistema de instrumentación, añadiendo la limitación superior introducida a causa del proceso de modulación implícito en los sistemas de *arrays paramétricos*.
- II *Margen dinámico*: al igual que en el caso del parámetro anterior, el margen dinámico de la señal de test viene impuesto por las limitaciones del sistema de amplificación, de polarización (véase § 5.6) y la modulación aplicada.

Uno de los métodos más habituales de identificación de sistemas desde los años sesenta es el empleo de señales sinusoidales de frecuencia variable. Sin embargo, la mejora de los algoritmos de cálculo de FFTs así como la flexibilidad introducida en los sistemas de medición han contribuido a la utilización de señales más complejas para desarrollar esta tarea. En vez de excitar instantáneamente un único tono, la mayoría de los sistemas de identificación actuales emplean señales de gran ancho de banda, reduciendo el tiempo de análisis requerido. Sin embargo esta reducción temporal se suele traducir en una pérdida de fiabilidad en la identificación.

La fiabilidad de las estimas en los sistemas de identificación no sólo es dependiente de la duración de las señales de test, sino que además depende de características intrínsecas a la señal de excitación empleada en el proceso. Los principales factores a tener en cuenta con respecto a la fiabilidad de la medida son:

- *Factor de cresta*: Éste parámetro sirve para aportar una estima de la influencia del ruido presente en la señal de entrada en la calidad de la estimación final. Todo proceso de identificación se ve afectado por el ruido inherente al sistema pero también el presente en la señal de test empleada. Desafortunadamente, a pesar de existir amplios estudios sobre la influencia del ruido a la entrada en la caracterización de sistemas lineales (un buen ejemplo de este tipo de estudios lo podemos encontrar en Bendat y Piersol [1980]) el cálculo de la influencia de este parámetro en la identificación de sistemas no lineales es mucho más complejo y fuertemente dependiente de la metodología empleada. En este caso tendremos únicamente en cuenta el factor de cresta para valorar la calidad de la señal, ya que este parámetro siempre es representativo de la calidad de las señales empleadas como entradas en los sistemas de identificación y otros estudios requerían un esfuerzo considerable.

El factor de cresta depende del valor RMS y del de pico de la señal. Se define como:

$$\text{Factor de cresta} = \frac{|x(t)|_{\text{pico}}}{\text{RMS}\{x(t)\}} \quad (3.12)$$

Cuanto más cercano a 1 se encuentra este valor, más adecuada es la señal para un proceso de identificación. Este valor da una idea del margen dinámico en el que se mueve la señal así como de su dispersión por el mismo. Si la señal es de naturaleza impulsiva el valor del factor de cresta aumenta, y por tanto la influencia del ruido puede llegar a ser determinante.

Identificación en frecuencia	Identificación temporal
PROS	
Propiedades apropiadas en cuanto al ruido (mayormente incorrelados)	A menudo lineales frente a los parámetros a estimar.
Señales de tamaño compacto.	Sin problemas de <i>leakage</i>
Comportamiento claro frente a la distorsión no lineal.	Es posible la identificación en tiempo real.
Aplicables a sistemas continuos y discretos.	
Medidas posibles en ambos dominios.	
CONTRAS	
No lineales frente a los parámetros a estimar.	Sólo para medidas en el dominio temporal.
Señales de test limitadas (debido a los problemas de <i>leakage</i>).	Representaciones de sistemas continuos no fiables.
Comportamiento claro frente a la distorsión no lineal.	Presencia de ruido correlado.
A menudo no es posible la identificación en tiempo real.	Distorsiones no lineales confusas.

TABLA 3.2: Pros y contras del empleo de análisis temporal y frecuencial en el problema de identificación

- *Habilidad para generar espectros bajo demanda del usuario*: En todos los procesos de identificación, para mantener cierta consistencia en la estima del modelo es necesario asegurar una riqueza espectral que abarque el ancho de banda bajo estudio. En caso de que unas bandas se encuentren excitadas con mayor insistencia que otras, la estima para éstas será más fiable. Desafortunadamente, si se desea realizar un experimento acotado en el tiempo, lo ideal es emplear señales con espectros lo más blancos posibles (en caso de encontrarnos con sistemas que introduzcan ruido de este tipo a la entrada), asegurando así una mayor coherencia de la señal.

Con la popularización de los sistemas conversores digitales analógicos, *DAQs*, las posibilidades en el diseño de señales de test se han visto incrementadas. A lo largo de esta Tesis se emplearán señales que demandan este tipo de dispositivos, pero también se contemplarán experimentos que empleen señales tradicionales que puedan ser generadas mediante instrumentación básica.

- *Leakage* o fugas espectrales: Este parámetro es de interés en el caso de realizar estudios basados en el análisis espectral. En nuestro caso, evitaremos aquellos sistemas de identificación que se basen en el dominio espectral, centrándonos en aquellos que pretenden determinar la respuesta al impulso o similares, ya que el objetivo final es buscar una estructura que represente lo más fielmente al sistema y que además permita la posibilidad de linealizarla.

Por tanto nos centraremos en señales de test que permitan extraer en el dominio temporal una estructura que describa el sistema. En la Tabla 3.2 podemos encontrar un resumen de los pros y contras que presentan ambas estrategias. El planteamiento temporal presenta desventajas que pueden ser solventadas aplicando técnicas concretas de identificación de sistemas no lineales. Así, por ejemplo, las distorsiones no lineales que a priori no se muestran de forma directa en un análisis temporal, pueden ser inducidas mediante algoritmos específicos, incluso obteniendo un descripción más precisa que la que pueda aportar un análisis tonal tradicional.

Los algoritmos presentados a continuación se basan únicamente en dos tipos de entradas concretas: tonos de frecuencia variable exponencial (*sweeps* exponenciales) y combinaciones de secuencias pseudoaleatorias binarias. Ambas señales son típicas de sistemas de identificación en los que se tiene acceso tanto a la salida del sistema como a su entrada.

Las *sweeps* exponenciales son señales tonales, cuya frecuencia varía a lo largo del tiempo siguiendo una relación exponencial y periódica con éste. Estas señales pueden ser periódicas si tanto la duración T como la tasa de variación de la *sweep* toman valores concretos que permiten que la fase inicial y final de señal sea la misma, lo que asegura la continuidad de la señal entre períodos así como su periodicidad en fase y frecuencia. Las *sweeps*, sea cual sea el tipo de variación frecuencial que contengan, siempre tienen un factor de cresta bajo, de

FIGURA 3.4: Espectros de las principales señales de test empleadas en los procesos de identificación propuestos. Las secuencias generadas contienen en los tres casos 1023 muestras, para una frecuencia de muestreo de 44.1 kHz. Los barridos abarcan un ancho de banda comprendido entre 100 Hz y 20 kHz. La MLS representada es una secuencia binaria de grado 10.

1.45, comparable al de un tono puro, sin embargo no presentan un espectro plano. En la Figura 3.4 se representa el espectro este tipo de señales cuando presentan una variación lineal y exponencial respectivamente. Por desgracia, esta coloración supone que la relación señal a ruido del análisis no será equivalente para todo el espectro. Otro aspecto a tener en cuenta es que a pesar de ser una señal que abarca un determinado ancho de banda seleccionado por el usuario, no es posible generar espectros de amplitud arbitraria, salvo aplicando coloraciones previas, que han de ser corregidas con posterioridad.

Una secuencia binaria pseudoaleatoria (PRBS) es una secuencia determinista que toma únicamente dos valores, típicamente -1 y $+1$ y cuyas transiciones sólo pueden suceder en instantes temporales periódicos, $k T_c$ con $k \in \mathbb{N}$, siendo T_c el periodo del reloj que controla el sistema de generación de símbolos. Esto implica que el espectro de este tipo de señales continuas se encuentra conformado siguiendo una función *sinc*, con un nulo para la frecuencia $f = 1/T_c$. Otra característica es no se pueden generar secuencias de este tipo de cualquier tamaño M sino que se encuentran sujetas a ciertas reglas, dependiendo del algoritmo de generación seleccionado.

Una buena referencia para más información acerca del diseño de señales orientadas a la identificación de sistemas la podemos encontrar en Pintelon y Schoukens [2012].

Tonos de frecuencia variable	Secuencias PRBS
Señal periódica de periodo T , sin <i>leakage</i> . Resolución en frecuencia $1/T$. La mayor parte de la potencia se encuentra distribuida entre las frecuencias seleccionadas por el usuario. El factor de cresta es igual a 1.45.	Señal periódica de periodo $T = M T_c$, sin <i>leakage</i> . Resolución en frecuencia $1/T$. La mayor parte de la energía se encuentra por debajo de $0.4 f_c$. El factor de cresta es igual a 1.

TABLA 3.3: Principales características de la señales de test empleada en los algoritmos de identificación propuestos.

3.2. Comportamiento de los sistemas no lineales de memoria y orden finitos frente a senos del frecuencia variable exponencial

Las señales sinusoidales variables han supuesto unas buenas candidatas como posibles entradas de excitación en sistemas de identificación lineales, por su sencillez de generación, así como por sus características (señales deterministas, con un buen factor de cresta, acotadas en frecuencia...). Sin embargo, su comportamiento frente a sistemas no lineales no evidencia directamente el comportamiento del sistema a evaluar, aunque su utilidad como señal de entrada para la estimación de funciones de transferencia en sistemas acústicos sea común (como por ejemplo en la aplicación expuesta en Müller y Massarani [2001]).

Por ejemplo, en el caso de la evaluación de la distorsión armónica, sólo es necesario introducir un tono

para realizar el test, sin embargo, para estudiar distorsiones de intermodulación es necesario recurrir a señales multitonales. Esto nos lleva a pensar que este tipo de barridos resultan insuficientes para caracterizar sistemas no lineales más complejos, aunque ciertos estudios han demostrado que si añadimos a los estudios tonales la posibilidad de aplicar barridos más complejos, aunque éstos sean monocromos, se pueden obtener parámetros de no linealidad que contienen una mayor información que la [THD](#) o que la [IMD](#), únicos parámetros que aportaban otros estudios anteriores como en [Thomsen et al. \[1975\]](#).

3.2.1. Determinación informal de la memoria y el orden del sistema bajo estudio

Con el fin de obtener los datos previos para una identificación no paramétrica basada en series de Volterra (véase Sección 3.1.3), se propone un test sencillo que nos aporta información relacionada con el orden y la memoria del sistema. Éstos dos parámetros son vitales para dimensionar o inicializar la mayoría de los algoritmos de identificación existentes.

A pesar de que en la literatura existen una gran variedad de test que estiman el grado de no linealidad de un sistema, muchos de ellos no permiten dirimir la naturaleza de esa no linealidad. En nuestro caso, como el objetivo es alcanzar una representación en series de Volterra que permita describir el funcionamiento del *array paramétrico*, sólo serán de utilidad aquellos test que aporten información referente al grado máximo que hay que tener en cuenta para describir el sistema con un determinado nivel de error. Por tanto, es necesario aplicar un test previo que complemente las suposiciones argumentadas en el Capítulo 2 para plantear un modelo de Volterra discreto.

Los estudios tradicionales sobre no linealidades en sistemas acústicos tratan de parametrizar cuánto se desvía el sistema de un modelo lineal a través de un test de linealidad ([Billings y Voon \[1986\]](#)). Típicamente este test se aplica a transductores piezoeléctricos para determinar la influencia de ciclo de histéresis, como por ejemplo en [Ferguson-Pell et al. \[2000\]](#), pero los parámetros aportados son claramente limitados y no tienen una relación directa con el orden que ha de alcanzar una serie de Volterra para poder considerarse representativa del sistema.

En este caso, recurrir a los métodos clásicos que interpretan la memoria del sistema como la duración de la función de transferencia en tiempo, definida ésta como el filtro [FIR](#) de mínimo orden que representa al sistema cumpliendo una especificación dada de distorsión, no son viables, dado el carácter no lineal del sistema que nos atañe. Esta solución es válida únicamente si el carácter lineal del [SUT](#) es predominante.

Por ello, y basándose en el estudio presentado en [Farina \[2000\]](#), se presenta aquí una modificación de este test, diseñada específicamente para determinar estos dos parámetros en estructuras de *arrays paramétricos*, partiendo de la restricción mínima de que éstas pueden ser representadas mediante series de Volterra convergentes. Aunque ya existían estudios que corroboraban la eficacia de este algoritmo para la identificación de sistemas que se ajusten a la estructura de Hammerstein, en esta Sección demostramos que este test, si bien no proporciona la estimación de las series de Volterra buscadas, sí que es representativo tanto del orden y de la memoria mínima necesarios para que la serie sea representativa del sistema.

Partimos para ello de la expresión que relaciona la salida del sistema, supuesto es de memoria y orden finitos a partir de su serie de Volterra:

$$y(t) = h_0 + \sum_{n=1}^N \int_0^{+\infty} h_n(\theta_1, \dots, \theta_n) \prod_{i=1}^n x(t - \theta_i) d\bar{\theta} \quad (3.13)$$

La señal escogida para realizar este test es un tono de frecuencia variable exponencial. Este tipo de señal tonal suele ser habitual en los equipos de medición de audio, ya que tradicionalmente se empleaba para simular la percepción acústica humana. De forma general esta se puede definir como:

$$e(t) = \cos(\phi(t)), \quad \phi(t) = \frac{2\pi f_0}{\ln(k)}(k^{t-t_0} - 1) + \phi_0 \quad (3.14)$$

donde t_0 y ϕ_0 son los valores iniciales de tiempo y fase. La velocidad de crecimiento de la frecuencia viene definida por:

$$k = (f_1/f_0)^{1/T} \quad (3.15)$$

siendo el ancho del banda comprendido entre f_0 y f_1 el de interés para el estudio del sistema.

Partiendo de la definición de Volterra (3.13), en donde la entrada aparece reflejada como productorio de sus versiones desplazadas y aplicando la relación de este productorio como sumatorio de cosenos Abramowitz y Stegun [1964]:

$$\frac{\prod_{i=1}^n x(t - \theta_i)}{2^{1-n}} = \sum_{\bar{\varepsilon} \in \mathcal{S}_n} \cos \left(\frac{2\pi f_0}{\ln(k)} k^t \sum_{i=1}^n \varepsilon_i k^{-(\theta_i + t_0)} + \phi_{0,\bar{\varepsilon}} \right) \quad (3.16)$$

donde $\bar{\varepsilon} \in \mathcal{S}_n$ es un vector formado por todas las posibles combinaciones binarias de tamaño n , cuyos elementos cumplen: $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $1 < i \leq n$; y siendo la fase inicial de tonos:

$$\phi_{0,\bar{\varepsilon}} = \phi_0 - \frac{2\pi f_0}{\ln(k)} \sum_{i=2}^n \varepsilon_i \quad (3.17)$$

Si la duración del tono de frecuencia variable cumple lo que denominan en Rébillat et al. [2011] como propiedad fundamental:

$$T_m = \left(2m\pi - \frac{\pi}{2} \right) \frac{\ln(f_1/f_0)}{2\pi f_0} \quad \text{con } m \in \mathbb{N}^* \quad (3.18)$$

entonces podemos expresar las fases de cada uno de los cosenos del sumatorio como:

$$\phi_{\bar{\varepsilon}}(t) = \frac{2\pi f_0}{\ln(k)} k^{t-\tau_{\bar{\varepsilon}}} + \phi_{0,\bar{\varepsilon}} \quad (3.19)$$

habiendo introducido un retardo definido como:

$$\tau_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\theta}) = -t_0 + \log_k \sum_{i=1}^n \varepsilon_i k^{-\theta_i} \quad (3.20)$$

Con estas relaciones en mente podemos reescribir la Ecuación 3.13 como una combinación lineal de tonos variables:

$$y(t) = h_0 + \sum_{n=1}^N \int_0^{+\infty} h_n(\bar{\theta}) \sum_{\bar{\varepsilon} \in \mathcal{S}_n} \cos \left(\frac{2\pi f_0}{\ln(k)} k^{t-\tau_{\bar{\varepsilon}}} + \phi_{0,\bar{\varepsilon}} \right) d\bar{\theta} \quad (3.21)$$

Esta formulación es excesivamente compleja como para poder extraer información del SUT. Para ello, inspirado en el método de Farina [2000], aplicamos la estructura propuesta en la Figura 3.5. El procedimiento consiste en filtrar la salida $y(t)$ con una versión invertida de la señal de entrada, decolorada mediante el filtro $v(t)$:

Como primer paso del análisis, obviamos el filtro $v(t)$, siendo $\tilde{z}(t) = y(t) * e(-t)$:

FIGURA 3.5: Diagrama de bloques del procedimiento de estima de memoria y orden de un sistema: $e(t)$ es la señal de excitación, que sirve como entrada del dispositivo a evaluar, y $v(t)$ es la respuesta al impulso que compensa la respuesta en frecuencia de la entrada, dentro de la banda de interés.

$$\tilde{z}(t) = h_0 + \sum_{n=1}^N \int_0^{+\infty} h_n(\bar{\theta}) \cdot \sum_{\bar{\varepsilon} \in \mathcal{S}_n} u_{\bar{\varepsilon}}(t, \bar{\theta}) d\bar{\theta} \quad (3.22)$$

en donde la distribuciones $u_{\bar{\varepsilon}}(t, \bar{\theta})$ toman la forman la forman:

$$u_{\bar{\varepsilon}}(t, \bar{\theta}) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(\tau - t) \cdot \cos(\phi(\tau - t)) \cdot w^i(\tau) \cdot [c_{\bar{\varepsilon}} \cos(\phi(\tau - \tau_{\bar{\varepsilon}})) + s_{\bar{\varepsilon}} \sin(\phi(\tau - \tau_{\bar{\varepsilon}}))] d\tau \quad (3.23)$$

siendo $c_{\bar{\varepsilon}} = \cos \phi_{0,\bar{\varepsilon}}$ y $s_{\bar{\varepsilon}} = \sin \phi_{0,\bar{\varepsilon}}$. A su vez $w(t)$, es una ventana rectangular comprendida entre 0 y T , y que representa la restricción temporal impuesta a la la entrada (T como duración de la señal de entrada). Operando la forma integral de $u_{\bar{\varepsilon}}(t, \bar{\theta})$, observamos que esta se puede expresar mediante la combinación de dos distribuciones con propiedades claramente diferenciadas:

$$u_{\bar{\varepsilon}}(t, \bar{\theta}) = \tilde{u}_{\bar{\varepsilon}}(t, \bar{\theta}) + \varrho_{\bar{\varepsilon}}(t, \bar{\theta}) \quad (3.24)$$

Teniendo esto en mente y definiendo las siguientes funciones dependientes de una nueva variable temporal, $\beta_{\bar{\varepsilon}}(t) = (t - \tau_{\bar{\varepsilon}})/2$:

$$k_+(t) = 2\pi f_0 (k^{-\beta_n} + k^{+\beta_n}) / \ln(k) \quad k_-(t) = 2\pi f_0 (k^{-\beta_n} - k^{+\beta_n}) / \ln(k) \quad (3.25)$$

El término correspondiente a $\varrho_{\bar{\varepsilon}}(t, \bar{\theta})$, se puede considerar despreciable frente a $\tilde{u}_{\bar{\varepsilon}}(t, \bar{\theta})$ en la banda de interés determinada por f_0 y f_1 :

$$\tilde{u}_{\bar{\varepsilon}}(t, \bar{\theta}) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\tau, t) \left(\frac{c_{\bar{\varepsilon}}}{2} \cos(k_- k^{\tau+\beta_{\bar{\varepsilon}}-t}) - \frac{s_{\bar{\varepsilon}}}{2} \sin(k_- k^{\tau+\beta_{\bar{\varepsilon}}-t}) \right) d\tau \quad (3.26)$$

donde $W(\tau, t) = w(\tau - t) \cdot w(\tau)$. Esta integral puede expresarse en términos de coseno integral y seno integral, basándose en Abramowitz y Stegun [1964], p. 231.

Las distribuciones $\tilde{u}_{\bar{\varepsilon}}(t, \bar{\theta})$ son señales de naturaleza impulsiva (en el sentido temporal), con un máximo de energía en $\tau_{\bar{\varepsilon}}$. Estas distribuciones son similares a la función *sinc*, ya que no presentan ceros en el rango frecuencial de interés. Desafortunadamente estas funciones poseen una coloración relacionada con el contenido espectral de la entrada del sistema, $x(t)$.

A partir de aquí nos centraremos en la parte *coseno*, afectada por $c_{\bar{\varepsilon}}$, refiriéndonos a ella a como $\tilde{u}_{c,\bar{\varepsilon}}(t)$. Las mismas conclusiones se pueden aplicar a la parte *seno* de (3.26). En realidad, como hemos impuesto (3.18), $s_{\bar{\varepsilon}} = 0, \forall \bar{\varepsilon}$.

Asumiendo que se dan las condiciones necesaria para definir un filtro inverso en la banda de interés, y teniendo en cuenta que $\tilde{u}_{s,\bar{\varepsilon}}(t)$ sólo se diferencia de $\tilde{u}_{c,\bar{\varepsilon}}(t)$ en su fase, entonces, si definimos un filtro inverso de $\tilde{u}_{c,\bar{\varepsilon}}(t)$, $v_{\bar{\varepsilon}}(t)$ que aplicaremos a (3.22). Si la inversión es suficientemente precisa: $v_{\bar{\varepsilon}}(t) * \tilde{u}_{c,\bar{\varepsilon}}(t)$ se puede aproximar por versiones desplazadas en el tiempo de la delta de Dirac, $\delta_{\bar{\varepsilon}}(t)$. En esta situación la parte *coseno* ideal de la señal de salida queda como:

$$z_c(t) = \sum_{n=1}^N \sum_{\bar{\varepsilon} \in \mathcal{S}_n} c_{\bar{\varepsilon}} \int_0^{+\infty} h_n(\bar{\theta}) \delta \left(t - t_0 + \log_k \sum_{i=1}^n \varepsilon_i k^{-\theta_i} \right) d\bar{\theta} \quad (3.27)$$

El resultado es una expresión cerrada para la salida de un sistema representable mediante series de Volterra del test propuesto. Pese a la presencia de las funciones delta de Dirac presentes en la expresión, se sigue tratando de una convolución no lineal con respecto a $\bar{\theta}$. Sin embargo, si es posible reformular (3.27) para obtener una forma de la misma que permita obtener una estima informal de los parámetros buscados: memoria y orden del sistema.

Para ello es necesario redefinir el espacio de integración. En este nuevo espacio, los desplazamientos introducidos dentro de las funciones de Dirac guardan una relación lineal con el orden.

Debido a las propiedades de los núcleos de Volterra, en su forma simétrica, podemos asumir que la variable θ_1 es la dimensión en la que la memoria es más persistente. Esta suposición no implica una pérdida de generalidad, debido a las simetrías existentes en la propia definición del núcleo. La primera transformación consiste en sustraer esta variable del resto de las presentes en el núcleo, con ello obtenemos un nuevo grupo de variables que denominaremos $\Delta_i = (\theta_1 - \theta_i)$.

Como segunda transformación y basándose en la naturaleza exponencial del espacio inicial, aplicamos una transformación inspirada en un sistema n -dimensional esférico, en donde r representa la magnitud de la desviación temporal. El resto de las magnitudes representan los ángulos que posicionan en el espacio el punto ($\bar{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_{n-1})$). Esta representación resulta conveniente porque hace prevalecer en la magnitud más obvia (el radio r) la desviación temporal máxima que posee el núcleo. El tercer sistema de coordenadas propuesto es igual que el anterior, con la salvedad de que la coordenada radial se expresa de forma logarítmica.

Todas estas transformaciones se recogen en la Tabla 3.4, y su efecto aparece ejemplificado en las Figuras 3.6 y 3.7.

Si el núcleo de Volterra se representa en su forma simétrica (para otras formas de representación véase [Parker y Perry \[1981\]](#)) y representa a un sistema causal, la región de interés (en la que los coeficientes son no nulos) se podría acotar dentro de una esfera. En este caso se ha escogido una esfera de radio $\frac{1}{2}$ centrada en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, en el espacio original en el que se representan los núcleos de Volterra. En la figura se puede observar que este tipo de regiones se mapean en el espacio transformado en regiones cerradas pertenecientes al primer cuadrante, ya que representan a sistemas causales. Por otro lado, en la Figura 3.7 se muestra el resultado de aplicar la transformación inversa a dos cubos desplazados. A medida que la velocidad de variación de la frecuencia en el tono k aumenta, el cubo pasa de una forma cilíndrica a una cuña cilíndrica cuyo eje se encuentra en la diagonal θ_1 .

Sistema de coordenadas	Transformación	Intervalo
$(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$		$\theta_i \in (0, \infty)$
$(\theta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$	$\Delta_i = \theta_i - \theta_1, \forall i > 1$	$\theta_1, \Delta_i \in (-\infty, \infty)$
$(\theta_1, r, \phi_1, \dots, \phi_{n-1})$	$\begin{cases} k^{\Delta_1/2} = r \cos(\phi_1) \\ k^{\Delta_j/2} = r \prod_{m=1}^{j-2} \sin(\phi_m) \cos(\phi_{j-1}) \\ k^{\Delta_n/2} = r \sin(\phi_1) \cdots \sin(\phi_{n-1}) \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_1 \in (0, \infty) \\ r \in (1, \infty) \\ \phi_i \in (0, \pi/2) \end{cases}$
$(\theta_1, s, \phi_1, \dots, \phi_{n-1})$	$\begin{cases} s = 2 \log_k(r) \\ \sigma_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\phi}) = \log_k \left(\cos^2(\phi_1) + \varepsilon_n \prod_{m=1}^{n-1} \sin^2(\phi_m) + \sum_{i=2}^n \varepsilon_i \cdot \cos^2(\phi_{i-1}) \cdot \prod_{m=1}^{i-2} \sin^2(\phi_m) \right) \end{cases}$	$\begin{cases} \theta_1 \in (0, \infty) \\ s \in (0, \infty) \\ \phi_i \in (0, \pi/2) \end{cases}$

TABLA 3.4: Transformaciones N -dimensionales aplicadas sobre los hiperespacios definidos en el test de memoria y orden de sistemas no lineales.

Aplicando estas transformaciones sobre (3.27) tenemos que $\tau_{\bar{\varepsilon}} = -\theta_1 + s - \sigma_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\phi})$, en donde $\sigma_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\phi})$ los efectos combinados de $\{\phi_i\}$. Pasamos entonces de una integral de n -volumen en $\bar{\theta}$ a:

FIGURA 3.6: Esfera de radio $\frac{1}{2}$ centrada en $\frac{1}{2}$ procedente del $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ -espacio proyectada en el espacio de análisis para $k = 1.5$

FIGURA 3.7: Resultado de la transformación inversa de dos cubos desplazados $\phi_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $s \in [0, \frac{2}{5}]$: $s \in [0, \frac{3}{5}]$, centrados en θ_1 .

$$z_c(t) = \sum_{n=1}^N \sum_{\bar{\varepsilon} \in \mathcal{S}_n} \hat{c}_{\bar{\varepsilon}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \frac{h_n(\theta_1, s, \bar{\phi}) \cdot \delta(t - t_0 - \theta_1 + s + \sigma_{\bar{\varepsilon}})}{\sin(2\phi_1) \cdots \sin(2\phi_{n-1})} d\theta_1 d\bar{\phi} ds \quad (3.28)$$

Esta expresión se puede calcular de forma sencilla aplicando la propiedad de la convolución para la delta multidimensional:

$$z_c(t) = \sum_{n=1}^N \sum_{\bar{\varepsilon} \in \mathcal{S}_n} \hat{c}_{\bar{\varepsilon}} \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{h_n(t - t_0 + s + \sigma_{\bar{\varepsilon}}, s, \bar{\phi})}{\sin(2\phi_1) \cdots \sin(2\phi_{n-1})} d\bar{\phi} \right] ds \quad (3.29)$$

donde las constantes $\hat{c}_{\bar{\varepsilon}}$ son proporcionales a $c_{\bar{\varepsilon}}$ y $(\ln k)^{1-n}$. En esta expresión se elimina la función delta, ya que se considera que todos los puntos a lo largo de θ_1 reconstruyen el núcleo transformado.

A partir de (3.29), e integrando con respecto a $\bar{\phi}$ y s obtenemos una combinación lineal de señales impulsivas correspondientes a todas las posibles combinaciones de tamaño $(n-1)$. Éstas se encuentran centradas en instantes temporales relacionados con $(t_0 - s)$ y $\bar{\varepsilon}$, las cuales dependen del orden del sistema y de la velocidad de variación de frecuencia k . Estas señales impulsivas contienen información relacionada con los núcleos de Volterra del sistema

FIGURA 3.8: Señales obtenidas del test de memoria y orden para un sistema sin memoria, otro de Hammerstein y otros de Wiener con distintos valores de memoria Θ que comparten no linealidad.

a prueba, siempre y cuando cumpla las condiciones necesarias para aplicarle este modelo.

Para el caso de los sistemas de Hammerstein, en los que los únicos elementos no nulos se encuentran en las diagonales de los núcleos de Volterra: $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n$. Como no existen desviaciones frente a la diagonal, $\Delta_i = 0$, $s = \log_k(n)$ y $\sigma_{\bar{\epsilon}} = 0$. Esto provoca que en la salida $e(t)$, en los instantes temporales definidos por $s_n = \log_k(n)$; aparezcan unas distribuciones $g_{c,\bar{\epsilon}}(t - t_0 + s_n, s_n)$, iguales a una combinación lineal de las diagonales de los núcleos de Volterra.

En un caso más general, en el que no sólo las diagonales contienen información del sistema, es necesario analizar (3.29) y aplicar las transformaciones reflejadas en la Tabla 3.4. En este caso s se comporta como una variable causal (no negativa) y $\sigma_{\bar{\epsilon}}$ representa una desviación frente a s dependiendo de las combinaciones $\bar{\epsilon} \in \mathcal{S}_n$.

En particular, cuando $\bar{\epsilon}$ es todo unos (sistemas de Hammerstein, entonces, $\sum_{i=1}^n \epsilon_i = n$, $\sigma_{\bar{\epsilon}} = 0$ y las distribuciones aparecen alrededor de las marcas temporales ya mencionadas: $\bar{s}_n = \log_k(\sum_{i=1}^n k^{\Delta_i}) = \log_k(n)$. Para $\bar{\epsilon} \in \mathcal{S}_n$ arbitrarios, se esperan pequeños desplazamientos temporales alrededor de estas marcas temporales. Sin embargo, estas desviaciones son pequeñas, debido a la concentración de $\{\sigma_{\bar{\epsilon}}\}$ derivada de la formulación expuesta anteriormente. En cualquier caso, el test propuesto para calcular el orden y la memoria del sistema se puede considerar válido.

Con el fin de ejemplificar la validez de este algoritmo, hemos evaluado la salida del sistema propuesto en la Figura 3.5. Los sistemas simulados se corresponden con:

- *Un sistema no lineal polinómico sin memoria*, simulado por el polinomio $\mathcal{N}(x[n]) = x[n]^4 + x[n]^3 + x[n]^2 + 1$. En la gráfica de la Figura 3.8 se observa que, al someter a este sistema bajo el test de la Figura 3.5 se obtienen una serie de ondículas diferenciadas y que rodean instantes temporales concretos. Más adelante, se demostrará que estas ondículas forman una base concreta que permite la identificación de ciertos sistemas no lineales estáticos (véase Sección 3.2.2).

Parámetros generales		Característica de la Memoria	
T	800 ms	Tipo	Butterworth
f_0	100 Hz	Orden	61
f_1	24 kHz	f_{c1}	100 Hz
f_s	100 kHz	f_{c2}	24 kHz

TABLA 3.5: Parámetros empleados en la simulaciones que ejemplifican el test de memoria y orden propuesto en la Sección 3.2.1.

- *Un sistema de Hammerstein simple*, cuya no linealidad se corresponde con el polinomio anteriormente propuesto seguido de un filtro de Butterworth que cumple las especificaciones de la Tabla 3.5 y que en su versión discretizada representaremos por el vector $\mathbf{h}$. En la Sección 3.2.2 se tratará este caso y el de sistemas de Hammerstein generalizados aplicándoles este tipo de test. Como se demostrará a continuación si acotamos los sistemas bajo estudio únicamente a los que se pueden englobar dentro de esta caracterización, este test sirve además como método de identificación del mismo.
- *Sistemas con memoria y orden finitos de núcleo de Volterra dispersos*: El caso más extremo bajo el que se puede comprobar la eficacia de este test es aquel en el que la representación mediante núcleos de Volterra del sistema bajo estudio se corresponde con una familia de hipermatrices de coeficientes dispersos. En este caso el resultado obtenido se relaciona con la proyección de estos mismos coeficientes sobre la diagonal de cada núcleo, obteniéndose en la señal resultado del test una combinación lineal de estas proyecciones, desplazadas instantes de tiempo fijos.

Para obtener el resultado de la Figura 3.8 se ha partido del mismo filtro empleado en el caso de la simulación de Hammerstein. Como se indica en la Tabla 3.5 al ser este filtro de tipo Butterworth, se encuentra acotado en banda. Sin embargo, para extremar el caso de estudio propuesto, el tamaño de la memoria se ha simulado seleccionando un determinado número de coeficientes, partiendo del centro del filtro. Al aplicar a éste ventanas rectangulares, dejamos de asegurar que el sistema está acotando en banda. Una vez seleccionados estos coeficientes, cuyos índices dentro del filtro denotaremos por el conjunto I cada uno de los núcleos de Volterra del sistema se generarán a partir del producto cartesiano de este vector, por tanto:

$$\mathbf{H}_n = \bigotimes_{j=1}^n \mathbf{h}_j$$

En realidad este tipo de estructuras se corresponden con sistemas de Wiener puros, en los que la no linealidad es precedida por la memoria, como se analizará más tarde en el Capítulo 4.

Una vez generados estos núcleos dispersos, pero decrecientes en potencia, obtenemos la señal $y(t)$ de la Figura 3.5 aplicando una convolución lineal rápida (véase Apéndice A.1). El resultado del aplicar el filtrado inverso a este conjunto de señales se puede observar en la Figura 3.8. Si nos centramos en cada uno de los instantes temporales τ_n a partir de los cuales se formaban las óndículas correspondientes al sistema de Hammerstein, obtenemos las cuatro gráficas inferiores. En ellas se aprecia que es posible acotar la memoria del sistema subyacente. Sin embargo, en este caso el resultado del test ofrece señales más complejas, que pueden resultar anticausales con respecto de estas marcas.

En cualquier caso, éstas ofrecen una clara información referente a la memoria y al orden, siempre y cuando se hayan escogido unos parámetros para la señal de excitación adecuado. Más adelante, en la Sección 3.2.3, se propondrá un protocolo completo que permitirá la evaluación de sistemas de caja negra mediante este método, así como se incluirá una metodología que facilite la elección de estos parámetros. Bajo esta premisa podemos apreciar que el número de impulsos localizados en las inmediaciones de $\bar{s}_n - t_0$ coincide con el valor de la no linealidad y podemos realizar una estima aproximada (Θ) de la memoria del sistema. Esta aproximación se calcula en base a la duración de las señales impulsivas, escogiendo la mayor de ellas. Aunque estos impulsos son el resultado de una proyección unida a una combinación lineal de los núcleos que definen el sistema, es válida como aproximación de la memoria general de los núcleos de Volterra, a pesar de que éstos puedan contener información fuera de la diagonal.

Con esto queda demostrado que los tonos de frecuencia variable exponencial son una herramienta perfecta para determinar parámetros que son necesarios en la mayoría de las técnicas de estimación de los núcleos de Volterra. Hasta ahora, existían test basados en esta idea que únicamente aplicaban sobre sistemas de Hammerstein

(Rébillat et al. [2011]) o simplemente pretendían valorar la distorsión existente en los mismos (Farina [2000]). Sin embargo, mediante esta demostración queda claro que este mismo test se puede aplicar a cualquier sistema representable mediante series de Volterra.

En el caso del *array paramétrico*, y teniendo en cuenta las evidencias expuestas por el modelo físico, este test se adecua especialmente, ya que nos encontramos ante una estructura que se acerca al modelo expuesto en la Figura 3.3 A. Otra gran ventaja de este test la ofrecen las características de la señal empleada: su margen dinámico se encuentra acotado por ser una señal tonal, y el ancho de banda es limitado y conocido. Esto hace que este test sea una de las mejores opciones a la hora de evaluar el tamaño de la memoria y orden en situaciones en las que estos dos parámetros han de encontrarse perfectamente acotados, como es el caso de las modulaciones impuestas en el propio *array paramétrico*. Cabe destacar que al emplear esta técnica los parámetros iniciales para configurar el test suelen ser conocidos, salvo la velocidad k , que puede ser ajustada en base al ancho de banda.

3.2.2. Identificación del sistema suponiendo una estructura generalizada de Hammerstein

En la subsección anterior se ha presentado un método informal de determinar la memoria y el orden del sistema. Sin embargo, publicaciones anteriores (Bennett y Blackstock [1975], Pompei [2002], Krim y Viberg [1996]) apuntan que el sistema bajo estudio se corresponde con una estructura similar a la presentada en la Figura 3.3 A. Con esta premisa, y teniendo en mente trabajos como los presentados por Rébillat et al. [2011] y Novák et al. [2010] podemos considerar el estudio anterior como una buena opción para determinar una buena aproximación del sistema. Los estudios clásicos sobre esta estructura explotaban algoritmos recursivos para determinar los parámetros que las conformaban (Boutayeb et al. [1993], Boutayeb y Darouach [1995]), que habían demostrado ser más eficientes y rápidos que los algoritmos de parametrización no recursivos.

Sin embargo, si damos por válida la estructura de Hammerstein simple para describir el sistema, este método, además de ofrecer los parámetros de memoria y orden, permite obtener las respuestas al impulso del sistema para diferentes órdenes.

En este caso el estudio se basa en intentar extraer la combinación lineal que aparece en los instantes temporales ya citados en la sección anterior. Aunque en Rébillat et al. [2011] y en Novák et al. [2010] se presentan buenas aproximaciones del problema, estas adolecen de ciertas deficiencias: se acotan a valores discretos la duración de los tonos posibles y la fase inicial se encuentra impuesta. Para ello enfocamos el problema de forma diferente: sintetizando una base que describe la convolución presentada en la Figura 3.5. A su vez, la restricción impuesta sobre el sistema permite reescribir el desarrollo expuesto en la Sección anterior, desembocando en un proceso de identificación directa de los núcleos.

La señal de test empleada es la misma que se presentaba en (3.14), y la velocidad a la que varía la frecuencia viene determinada por k , (véase (3.15)), sin embargo, en este caso no imponemos un valor determinado para ϕ_0 ni T . La estructura a identificar se corresponde con el diagrama expuesto en la Figura 3.9, esto implica que este sistema de identificación solamente es aplicable a sistemas de Hammerstein generalizados.

Si excitamos la estructura de la Figura 3.9 con la señal de test $e(t)$, la salida obtenida se corresponde con:

$$y(t) = \sum_{i=1}^N h_i(t) * e^i(t) = \sum_{i=1}^N h_i(t) * \cos^i \phi(t) \quad (3.30)$$

en donde se observa que el efecto de cada una de las ramas que componen la estructura se ve reflejada en la salida. Esta salida ya ha sido estudiada con anterioridad en Rébillat et al. [2011], donde los autores emplean identidades trigonométricas para expresar las potencias $\cos^i \phi(t)$ como combinaciones lineales de funciones coseno. Así, los coeficientes que representan esta relación c_{in} se pueden extraer de los coeficientes de los polinomios de Chebychev, y su número se encuentra acotado por el orden del sistema bajo estudio, i .

Si expresamos esta combinación lineal de forma matricial, tenemos que para un sistema cuyo orden máximo sea $N = 6$, la ecuación que relaciona esta identidad se puede definir como:

FIGURA 3.9: Estructura de Hammerstein generalizada, que permite ser identificada aplicado el método del tono de frecuencia exponencial, expuesto en la Sección 3.2.2.

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -8 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Siendo $[c_{in}] = \mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}$, una potencia i de la función coseno se puede expresar como:

$$\cos^i \phi(t) = \sum_{n=1}^i c_{in} \cos(n \cdot \phi(t)) \quad (3.32)$$

Si imponemos la *propiedad fundamental de fase* propuesta en Rébillat et al. [2011], (condición que más tarde se verá flexibilizada):

$$n \cdot \phi(t) = \phi \left(t + \frac{\ln(n)}{\ln(k)} \right) - (n-1) \cdot \left(\frac{2\pi f_0}{\ln(k)} - \phi_0 \right) \quad (3.33)$$

Entonces, cada uno de los términos $\cos(n \cdot \phi(t))$ puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \cos(n \cdot \phi(t)) = & \cos \left(\phi \left(t + \frac{\ln(n)}{\ln(k)} \right) \right) \cdot \cos \left((n-1) \cdot \left(\frac{2\pi f_0}{\ln(k)} - \phi_0 \right) \right) + \\ & + \sin \left(\phi \left(t + \frac{\ln(n)}{\ln(k)} \right) \right) \cdot \sin \left((n-1) \cdot \left(\frac{2\pi f_0}{\ln(k)} - \phi_0 \right) \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

En esta expresión se aprecian señales que se encuentran separadas mediante retardos temporales correspondientes a $\tau_n = -\ln(n)/\ln(k)$, donde n representa el número de orden de cada uno de los retardos. Si hacemos corresponder estos retardos con $\tau_n = -\ln(n)/\ln(k)$ e introducimos unas nuevas constantes c_n y s_n , podemos reescribir (3.34) de forma compacta como:

$$\cos(n \cdot \phi(t)) = c_n \cdot \cos(\phi(t - \tau_n)) + s_n \cdot \sin(\phi(t - \tau_n)) \quad (3.35)$$

En donde τ_n , c_n y s_n juegan un papel importante en el análisis propuesto y todas ellas dependen del orden n al que pertenecen. Los instantes temporales alrededor de los cuales encontraremos los máximos de energía de la

 FIGURA 3.10: Valores obtenidos para las constantes τ_n , c_n y s_n , contemplando como orden superior $N = 6$

señal de salida se encuentran en:

$$\tau_n = -\frac{T}{\ln\left(\frac{f_1}{f_0}\right)} \cdot \ln(n) \quad (3.36)$$

La Figura 3.10 A muestra el valor de estos instantes temporales, normalizados con respecto a T , para un análisis en el que se contemple hasta orden 6. Estos instantes siguen una tendencia exponencial. A la hora de diseñar un experimento basándose en esta metodología hay que tener en cuenta que estos instantes temporales influyen en el resultado del análisis ya que:

- Los instantes temporales (τ_n) relacionados con los órdenes superiores se encuentran más alejados del origen de coordenadas.
- La dispersión de estos instantes temporales es proporcional a la duración de la señal de test, T .
- Sin embargo, esta es inversamente proporcional a la velocidad de barrido del tono k .

Las constantes c_n y s_n varían con respecto a n dependiendo de la fase inicial elegida, y la velocidad de barrido de la frecuencia, según:

$$c_n = \cos\left((n-1) \cdot \left(\frac{2\pi f_0}{\ln(k)} - \phi_0\right)\right) \quad (3.37)$$

$$s_n = \sin\left((n-1) \cdot \left(\frac{2\pi f_0}{\ln(k)} - \phi_0\right)\right) \quad (3.38)$$

Con el fin de simplificar (3.35), en Rébillat et al. [2011] se impone implícitamente que $|c_n| = 1$ y $s_n = 0$:

$$\phi_0 = \frac{2\pi f_0 T}{\ln(f_1/f_0)} - m\pi, \forall T, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (3.39)$$

lo cual deriva en:

$$\begin{aligned} \phi_0 &= -\frac{\pi}{2} \\ T_m &= (2\pi m + \phi_0) \frac{\ln(f_1/f_0)}{2\pi f_0}, \quad m \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Sin embargo, en este estudio, y teniendo en cuenta la expresión (3.35), flexibilizamos tanto la fase inicial como la duración de la señal de test, si bien es cierto que estos dos valores han de ser conocidos con precisión, para determinar las constantes c_n y s_n . En la Figura 3.10 B se pone en evidencia la relación existente entre c_n y s_n .

FIGURA 3.11: Resultado del primer preprocesado en el test de un tono de frecuencia variable exponencial: $e(-t) * y(t)$; el resultado se encuentra relacionado con las respuestas al impulso de los distintos subsistemas que forman la parte lineal de la estructura representada en la Figura 3.9

Para facilitar la comprensión de la misma, se ha disminuido la oscilación hasta la frecuencia más baja que permite la visualización de los valores de las constantes. Esta oscilación hace que sea tan importante la determinación previa de ϕ_0 y T .

Reescribiendo (3.32) en términos de $\cos(n \cdot \phi(t))$, dada (3.34), y sin imponer ninguna restricción sobre la fase inicial y la duración de las señales de test, tenemos que:

$$\cos^i \phi(t) = \sum_{n=1}^i c_{in} [c_n \cdot \cos(\phi(t - \tau_n)) + s_n \cdot \sin(\phi(t - \tau_n))] \quad (3.41)$$

Esto permite separar temporalmente las contribuciones de cada rama de la estructura representada en la Figura 3.9, dada una entrada $e(t)$ como la definida en (3.14):

$$y(t) = \sum_{i=1}^N h_i(t) * \left(\sum_{n=1}^i c_{in} [c_n \cdot \cos(\phi(t - \tau_n)) + s_n \cdot \sin(\phi(t - \tau_n))] \right) \quad (3.42)$$

Como se puede observar en (3.42) la salida del sistema consiste en la combinación lineal de diferentes señales trigonométricas conformadas por la convolución de las respuestas al impulso que forman la estructura de la Figura 3.9. Aplicando un filtrado conveniente, será posible separar cada una de ellas y recuperar así la estructura completa que forma el sistema.

Inspirándose en el estudio de Farina, Farina [2000], podemos reconstruir la información referente a esas respuestas al impulso aplicado un filtrado que consista en una versión coloreada del inverso temporal de la señal de excitación.

$$e(-t) = \cos(\phi(-t)) \quad (3.43)$$

En nuestro caso, vamos a centrarnos por simplicidad en un sistema de filtrado inverso que no contemple el color, por tanto la señal tomada como filtro será $e(-t)$, con el fin de obtener una separación que permita extraer las diferentes repuestas al impulso envueltas en el proceso.

$$e(-t) * y(t) = \cos(\phi(-t)) * \sum_{i=1}^N h_i(t) * \sum_{n=1}^i c_{in} \cos(n \cdot \phi(t)) \quad (3.44)$$

En la Figura 3.11 se puede observar el resultado de aplicar este primer preprocesado sobre la salida del sistema bajo estudio. Como era de esperar, se pueden apreciar señales impulsivas en los alrededores de las marcas temporales determinadas por (3.36), como ya se menciona en estudios anteriores Farina [2000], Novák et al. [2010], Rébillat et al. [2011] y que resultan de la descomposición en forma de $\cos(n \cdot \phi(t))$ descrita en (3.34). Los valles energéticos presentes entre estas marcas temporales permitirán una separación del problema. A diferencia de la Figura 3.8, aquí el filtro empleado no ha sido previamente decolorado y por tanto podemos obtener información referente al orden, pero no a la longitud de la memoria.

El sistema de identificación ha de permitir extraer las respuestas al impulso expuestas en la Figura 3.9. Si observamos (3.44), teniendo en cuenta que hemos partido de una relación no lineal, pero hemos llegado a una expresión lineal, podemos sintetizar una base que, aprovechando la separación temporal permita extraer la información deseada.

Como la convolución es una operación lineal y conmutativa, (3.44) se puede reescribir como:

$$e(-t) * y(t) = \sum_{i=1}^N h_i(t) * \sum_{n=1}^i c_{in} \cos(\phi(-t)) * [c_n \cos(\phi(t - \tau_n)) + s_n \sin(\phi(t - \tau_n))] \quad (3.45)$$

De esta forma queda independizado el comportamiento del sistema de la señal de test empleada. Podemos ahora introducir una serie de funciones que sirven de base al estudio. Estas resultan de aplicar la expresión (3.35) y el filtro invertido temporalmente:

$$u_n(t) = \cos(\phi(-t)) * [c_n \cdot \cos(\phi(t - \tau_n)) + s_n \cdot \sin(\phi(t - \tau_n))] \quad (3.46)$$

Estas funciones dependen de relaciones coseno-seno y de la distribución de fase. Como era de esperar (véase la Figura 3.11), éstas se encuentran retardadas con respecto del origen en τ_n . Sin embargo, en cada instante τ_n aparecen contribuciones de órdenes superiores i , determinados por la relación de Chebychev, mediante c_{in} . Esta relación se muestra en forma de matriz triangular superior:

$$e(-t) * y(t) = \sum_{i=1}^N h_i(t) * \sum_{n=1}^i c_{in} u_n(t) = \sum_{n=1}^N u_n(t) * \left(\sum_{i=1}^N \alpha_{in} h_i(t) \right) \quad (3.47)$$

$$\alpha_{in} = \begin{cases} c_{in} & : i \geq n \\ 0 & : i < n \end{cases}$$

Con el fin de evaluar las señales $\{u_n(t)\}$, es necesario acotarlas temporalmente. Para facilitar este cálculo, se propone el empleo de ventanas rectangulares $w(t)$ de duración T , al igual que en el caso del estudio anterior. Este enventanado da como lugar a una aproximación de estas bases que denominaremos $\hat{u}_n(t)$:

$$\hat{u}_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(\tau - t) \cos(\phi(\tau - t)) \cdot w^i(\tau) [c_n \cos(\phi(\tau - \tau_n)) + s_n \sin(\phi(\tau - \tau_n))] d\tau \quad (3.48)$$

Esta expresión, de relativa complejidad, ha sido reducida por autores anteriores (véase Rébillat et al. [2011]) a base de condicionar los parámetros iniciales del test. Sin embargo, si dejamos un grado de libertad absoluto en la fase inicial y la duración de la señal de test, se hace necesario calcular una aproximación adecuada a $u_n(t)$. Aplicando ciertas transformaciones trigonométricas tenemos que:

FIGURA 3.12: Funciones $k_+(t)$ y $k_-(t)$ para $n = 1$. La primera toma siempre valores positivos mientras que la segunda siempre es de naturaleza impar con respecto a τ_n , en este caso, 0

$$\begin{aligned} \hat{u}_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\tau, t) & \left(\frac{c_n}{2} [\cos \Delta \phi \cos(k_+ k^{\tau+\beta_n-t}) - \sin \Delta \phi \sin(k_+ k^{\tau+\beta_n-t})] + \right. \\ & + \frac{s_n}{2} [\cos \Delta \phi \sin(k_+ k^{\tau+\beta_n-t}) + \sin \Delta \phi \cos(k_+ k^{\tau+\beta_n-t})] + \\ & \left. + \frac{c_n}{2} \cos(k_- k^{\tau+\beta_n-t}) - \frac{s_n}{2} \sin(k_- k^{\tau+\beta_n-t}) \right) d\tau \end{aligned} \quad (3.49)$$

donde:

$$\begin{aligned} W(\tau, t) &= w^i(\tau) \cdot w(\tau - t) & s_n &= \sin((1-n) \cdot \Delta \phi) \\ \Delta \phi &= 2[\phi_0 - 2\pi f_0 / \ln(k)] & \beta_n(t) &= (t - \tau_n) / 2 \\ c_n &= \cos((1-n) \cdot \Delta \phi) & k_+(t) &= 2\pi f_0 (k^{-\beta_n} + k^{+\beta_n}) / \ln(k) \\ & & k_-(t) &= 2\pi f_0 (k^{-\beta_n} - k^{+\beta_n}) / \ln(k) \end{aligned}$$

La naturaleza par de $k_+(t)$ e impar de $k_-(t)$ hace posible reducir la expresión (3.49) (véase Figura 3.12). Cada una de las integrales de convolución que forman (3.49), dependen de τ . De las cuatro integrales que forman (3.49), sólo aquellas en las que $k_-(t)$ es relevante, son significativas en el rango de frecuencias de interés $f_0 < f < f_1$ (véase Sección B.1.1, Propiedades 2 y 5), por tanto la siguiente aproximación es lícita:

$$\hat{u}_n(t) = \tilde{u}_n(t) + \varrho_n(t) \quad (3.50)$$

$$\tilde{u}_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\tau, t) \cdot \left(\frac{c_n}{2} \cos(k_- k^{\tau+\beta_n-t}) - \frac{s_n}{2} \sin(k_- k^{\tau+\beta_n-t}) \right) d\tau \quad (3.51)$$

El efecto de esta aproximación se puede cuantificar observando las gráficas que componen la Figura 3.13. En todo el rango de frecuencias de interés se cumple que $|\varrho_n(t)| \ll |\tilde{u}_n(t)|$. Una forma alternativa de simplificar (3.49) es obligar a la fase inicial a tomar valores que anulen la parte en seno de la expresión, siendo $\phi_0 = -\pi/2$, como se impone en el estudio de Rebillat Rébillat et al. [2011], aun así, las distribuciones $\varrho_n(t)$ no se anulan.

Por ello escogemos la forma completa (3.26), en la que no se impone ningún valor previo sobre ϕ_0 . Teniendo en cuenta una integración sobre una ventana rectangular, y reescribiendo la solución en función de coseno y seno integrales se obtiene que:

FIGURA 3.13: Señales que componen las bases que fundamentan el test del tono de frecuencia variable exponencial.

$$\tilde{u}_n(t) = \begin{cases} c_n (T + \tau_n) / 2, & \text{if } t = \tau_n \\ \frac{1}{2 \ln(k)} \left(\begin{array}{l} c_n [\text{Ci}(k_- k^{T-2t+\beta_n}) - \text{Ci}(k_- k^{\beta_n-t})] - \\ -s_n [\text{Si}(k_- k^{T-2t+\beta_n}) - \text{Si}(k_- k^{\beta_n-t})] \end{array} \right), & \text{if } -T < t < 0 \\ \frac{1}{2 \ln(k)} \left(\begin{array}{l} c_n [\text{Ci}(k_- k^{T-t+\beta_n}) - \text{Ci}(k_- k^{\beta_n})] - \\ -s_n [\text{Si}(k_- k^{T-t+\beta_n}) - \text{Si}(k_- k^{\beta_n})] \end{array} \right), & \text{if } 0 \leq t < T \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad (3.52)$$

Por comodidad, en la expresión anterior, a pesar de que $\{\tilde{u}_n(t)\}$ no se encuentre acotada en tiempo, en la aproximación anterior, se presuponen nulos todos aquellos valores que se encuentren fuera del rango $-T < t < T$.

Desafortunadamente (3.52) no se puede expresar en términos de funciones elementales. Sin embargo las integrales senoidales y cosenoidales son empleadas habitualmente en el ámbito de la ingeniería, las matemáticas y la física, y por tanto existen aproximaciones que permiten operar con ellas con relativa comodidad Abramowitz y Stegun [1964].

Otra desventaja a considerar es el comportamiento impulsivo que se traduce en la separabilidad del problema. A pesar de que las funciones $\{\tilde{u}_n(t)\}$ posean energía concentrada alrededor de los instantes τ_n , presentan oscilaciones a los lados de estos valores, lo que dispersa la información relativa a los núcleos en la señal de salida del test, $e(-t) * y(t)$. Por ello, como en el test presentado en la Sección anterior § 3.2.1, es necesario introducir un filtrado previo que concentre estas ondículas.

Estudios anteriores Rébillat et al. [2011], Novák et al. [2010] se centran en diseñar este filtro para mitigar su coloración y limitación en banda. En todos ellos el filtro empleado es común para todos los órdenes, sin embargo ha quedado demostrado que, a pesar de ser de naturaleza similar, las funciones $\{\tilde{u}_n(t)\}$ no son versiones desplazadas de la misma señal. Esto imposibilita que a través de un único filtrado se puedan obtener las funciones desplazadas que contengan combinaciones lineales de los filtros $h_n(t)$ (véase Figura 3.9).

En el presente estudio, y con las bases ya definidas, se ha optado por diseñar un filtro cuya finalidad sea la de mejorar la separabilidad temporal del sistema. Por tanto, el objetivo es proponer una función $v(t)$ con este único propósito:

$$(v(t) * e(-t)) * y(t) = \sum_n \left(v(t) * u_n(t) \right) * \left(\sum_i \alpha_{in} h_i(t) \right) = \sum_n d_n(t) * \left(\sum_i \alpha_{in} h_i(t) \right) \quad (3.53)$$

haciendo que $d_n(t)$ tenga un comportamiento lo más próximo posible a $\delta(t - \tau_n)$. Teniendo en cuenta la información espectral que contienen las funciones $\{\tilde{u}_n(t)\}$, proponemos el inverso de $\tilde{u}_1(t)$ como candidato, ya que es, de las funciones que forman la base, la más rica espectralmente, como se puede observar en la Figura 3.13 D:

$$v(t) = \tilde{u}_1^{-1}(t) \quad (3.54a)$$

$$v_n(t) = v(t) * \tilde{u}_n(t) = \frac{1}{2 \ln(k)} \left[c_n \delta(t - \tau_n) + s_n b(t - \tau_n) \right] \quad (3.54b)$$

La expresión anterior contiene una nueva función, $b(t)$. Ésta se comporta como una delta de Dirac limitada en banda, cubre el mismo ancho de banda que la señal de test y posee una densidad espectral aproximadamente plana (véase Propiedad 5, del Apéndice B.1.1). Si $v(t)$ se aproxima al filtro inverso ideal de $u_1(t)$, entonces $d_n(t)$ se comportará como un impulso coloreado mediante una combinación lineal de los filtros que componen la red de Hammerstein generalizada.

Lamentablemente, el cálculo del inverso perfecto $u_1(t)$ es analíticamente complejo, debido a su formulación dependiente de integrales senoidales y cosenoidales, si bien es cierto que la ausencia de ceros en el margen de interés ($f_0 < f < f_1$) posibilita una buena aproximación a dicho inverso en la banda.

FIGURA 3.14: Señales envueltas en el proceso de filtrado para la mejora de la concentración de energía: bases iniciales y filtradas.

La Figura 3.14 se muestra el resultado de aplicar el filtro inverso $v(t)$ a las bases $\{\tilde{u}_n(t)\}_{n \in \{1, \dots, 6\}}$. Como se puede observar en la gráfica de la Figura 3.14 c, el filtro concentra la energía, mitigando las oscilaciones laterales que aparecen en las bases originales.

Una vez mostrado el camino para obtener las funciones que forman la base a partir de la cual se pueden estimar los filtros que componen la estructura de Hammerstein generalizada (véase la Figura 3.9), se ha de proceder a aplicar la separabilidad de los impulsos, y así, obtener las funciones que representan la combinación de los filtros buscados. Podemos ahora representar la salida del test $z(t)$ (véase Figura 3.5) en términos de $v(t) * e(-t)$:

$$z(t) = [v(t) * e(-t)] * y(t) = \sum_n z_n(t) \quad (3.55)$$

donde cada $z_n(t)$ se formula como:

$$z_n(t) = v_n(t) * g_n(t + \tau_n) \quad (3.56)$$

Observación 3.2.1: Del análisis previo se desprende que cada señal $z_n(t)$:

1. Está relacionada con un único $v_n(t)$, por tanto se encuentra centrada alrededor de $t = \tau_n + t_0$,

2. Se puede reinterpretar como un *sistema lineal* excitado por $v_n(t)$ cuya respuesta es $g_n(t)$. Estas respuestas se pueden obtener a través de (3.56) mediante un proceso de deconvolución. A partir de ellas se pueden extraer los filtros $\{h_i(t)\}_{i \in \{1, \dots, N\}}$ de la estructura general de Hammerstein.

$$g_n(t) = \sum_i \alpha_{in} h_i(t) \quad (3.57)$$

3. Si se cumple la condición de que todos los filtros de la estructura de Hammerstein tienen una memoria de menor longitud que la separación temporal existente entre los impulsos de las señales $v(t)$, podemos aplicar separabilidad temporal, obteniendo los diferentes $z_n(t)$ presentes en (3.55).

Teniendo en cuenta la Observación 3.2.1 y habiendo asegurado previamente las condiciones de los parámetros iniciales (véase § 3.2.1), nos encontramos en disposición de inventanar los diferentes impulsos de tal forma que obtengamos $\{z_n(t)\}$ a partir de la señal de salida del test $z(t)$.

Para extraer las funciones $\{g_n(t)\}_{n \in \{1, \dots, N\}}$ sólo es necesario aplicar algún algoritmo de identificación sobre los pares $v_n(t)$ $z_n(t)$ sabiendo que se cumple (3.56). En Aström y Eykhoff [1971] se recoge una buena selección de posibles algoritmos de identificación lineal aplicables en este caso.

Finalmente, a partir $\{\hat{g}_n(t)\}_{n \in \{1, \dots, N\}}$, estimados y deshaciendo la combinación debida a la descomposición expresada en (3.32), podemos obtener la estima de los filtros de la estructura generalizada de Hammerstein, $\{\hat{h}_n(t)\}_{n \in \{1, \dots, N\}}$:

$$\begin{pmatrix} h_1(t) \\ \vdots \\ h_N(t) \end{pmatrix} = \mathbf{C} \cdot \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_N(t) \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

3.2.3. Evaluación de modelos de caja negra mediante tonos de frecuencia variable exponencial

En secciones anteriores (véase § 3.2.1) se validó este test para conseguir obtener dos parámetros críticos que definen a un sistema representable mediante series de Volterra: la memoria y el orden, si bien es cierto que partíamos de la base de que ambos parámetros eran acotados. Cuando nos enfrentamos a un modelo de caja negra esta suposición puede ser falsa, pero este test también puede servir como descarte de otras estructuras no lineales.

A continuación se presenta una metodología que permite diagnosticar, y en el caso de ajustarse al modelo de Hammerstein generalizado, identificar sistemas no lineales.

■ Excitación del sistema

En esta etapa se ha de aplicar el conocimiento previo del sistema a identificar para elegir los parámetros que determinan el test. Estos parámetros se muestran reflejados en la entrada de la Figura 3.15. Como ya se comentó en § 3.2.1, la duración del barrido depende del sistema a identificar, y como se muestra en la Figura 3.15, este parámetro puede tener que ser reajustado a partir de alguna medida inicial, ya que en un principio la memoria del sistema es desconocida, y no podemos asegurar la separabilidad necesaria para la identificación.

En cuanto a la frecuencia de muestreo, hay que asegurar Nyquist a la entrada del sistema, pero a su salida, teniendo en cuenta que el sistema es no lineal, ésta ha de ser aumentada N veces, como mínimo, para asegurar la identificación, asegurando entonces los requisitos expuestos en Frank [1996].

Como las alinealidades del sistema, así como su descomposición polinómica dependen del margen dinámico de trabajo, hemos de asegurar que éste es el habitual en la aplicación del uso del sistema.

■ Preprocesado de impulsos

En esta etapa, se obtiene la ventana temporal de estudio (en la Sección 5.10.2 se detalla la implementación aplicada en este caso para realizar la segmentación de forma adecuada) así como la señal de entrada

FIGURA 3.15: Metodología propuesta para la validación e identificación de un sistema generalizado de Hammerstein supuesto un escenario de caja negra. El método se divide en tres fases: (i) Elección de los parámetros y excitación del sistema. (ii) A partir de la señal de salida del sistema y de la excitación empleada se prepara el procesamiento del test, generando una base adecuada y el filtrado inverso correspondiente. (iii) En la tercera fase se descartan aquellos modelos que no encajan con la representación de series de Volterra, se procede a la identificación y al posterior descarte de sistemas que no encajan con el modelo generalizado de Hammerstein.

sintetizada. A su vez obtenemos las bases y el filtro inverso que permiten la identificación una vez realizada la segmentación temporal.

■ Diagnóstico, Identificación y Validación

Como ya se demostró en la Sección 3.2.1, la señal resultante del filtrado de la salida del sistema ofrece información referente a la estructura mediante la cual se puede describir el mismo. Así, en esta fase se pueden descartar todos aquellos sistemas que no se correspondan con una serie de Volterra acotada. Así mismo, en esta fase se pueden realizar ajustes en el tiempo de barrido T , en caso necesario.

Posteriormente se procede a aplicar la separabilidad temporal, en caso de no haber descartado el sistema para su identificación. Aplicando cualquier técnica que permita la identificación lineal de un sistema, teniendo acceso a la entrada y a la salida (en Aström y Eykhoff [1971] se nos ofrece una panorámica completa de métodos posibles que se ajustan a esa situación), obtenemos la combinación lineal de las distintas memorias implicadas en la estructura en la que mapeamos el sistema. Aplicado (3.58) obtenemos los filtros buscados, $\{\hat{h}_n(t)\}_{n \in \{1, \dots, N\}}$.

Desafortunadamente, como el sistema en realidad nos aporta una proyección del núcleo de Volterra sobre su diagonal, si el sistema contiene elementos no nulos en sus núcleos fuera de diagonal la reconstrucción generada a partir de la síntesis de la salida teniendo en cuenta los filtros $\{\hat{h}_n(t)\}_{n \in \{1, \dots, N\}}$ no se aproximará a la salida medida del sistema a identificar. Llegado a este punto, aunque el sistema deje de ser candidato a una estructura de Hammerstein generalizada, siempre conoceremos el orden y memoria que le corresponden.

Parámetro de distorsión basados en el test del tonos de frecuencia variable exponencial.

Como ya se expuso en la Sección 3.2.1, la salida de este tipo de test también se encuentra relacionada con los núcleos de Volterra que representan al sistema bajo estudio, a pesar de no encajar estrictamente con el modelo de Hammerstein. De hecho, dado que los impulsos obtenidos para sistemas estáticos de orden acotado son reflejo de las proyecciones de estos núcleos sobre su diagonal, aportan información directa sobre la distorsión presente en el sistema.

Es importante destacar que las funciones $\{g_n(t)\}_{n \in \{1, \dots, N\}}$ sí cumplen con la propiedad de ortonormalidad, ya que en este caso la base de la descomposición se encuentra formada por de Chebyshev. Esto se traduce en que la información referente a la parte puramente lineal, aunque proceda de la contribución del núcleo de orden superior, se refleja en la función $g_1(t)$. Lógicamente esto se cumple de forma estricta únicamente para aquellos sistemas cuyo modelo de Volterra sólo contenga información en las diagonales de los núcleos. Sin embargo dado que la información del sistema, sean cuales sean los núcleos de Volterra que lo definan $\mathbf{H}$, se proyecta en cada una de las funciones $g_n(t)$ que le corresponda podemos plantear un nuevo estimador de distorsión, referido a la potencia relativa entre estos impulsos. Para ello es necesario realizar una nueva suposición: si imponemos que estas funciones son incoherentes entre sí, podemos relacionar la potencia de la parte lineal del sistema con la distorsión mediante el estimador:

$$\Psi[\mathbf{H}\{x(t)\}] = \frac{\sum_{n=2}^N \|g_n(t)\|^2}{\|g_1(t)\|^2} \quad (3.59)$$

Es importante destacar que estas normas se han de calcular empleando ventanas equivalentes, para que los valores de las mismas sean relevantes y comparables.

Aunque este estimador se basa en múltiples suposiciones, sí tiene en cuenta tanto la distorsión armónica, la de intermodulación y la debida a las combinaciones de retardos que conllevan las convoluciones no lineales siempre y cuando contengan elementos fuera de la diagonal.

Parám.	Valor	Unidad
T	800	ms
f_0	100	kHz
f_1	24	kHz
ϕ_0	$-\frac{\pi}{2}$	rad
f_s	100	kHz

A: Parámetros generales

Polinomio	
$\mathcal{N}(x)$	$x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$

B: No-linealidad

	f_{e1}	f_{e2}	Orden
$h_a(t)$	1 kHz	4 kHz	10
$h_b(t)$	2 kHz	3 kHz	20
h_{alias}	50 kHz		20

C: Filtros de Butterworth

TABLA 3.6: Parámetros empleados en los ejemplos que ilustran los sistemas descartados por la metodología de la Sección 3.2.3

Diagnos de estructuras

Como ya se mencionó en las Secciones anteriores, una de las aplicaciones más versátiles de este algoritmo es el de su capacidad de testear el funcionamiento de un sistema de caja negra, descartando estructuras posibles, y que aporta información útil en caso de un desconocimiento total del modelo físico subyacente en el sistema.

Con el fin de ilustrar este proceso de diagnosis, vamos a analizar la metodología propuesta para dos estructuras que no se corresponden con el modelo de la Figura 3.9. Concretamente analizamos los modelos propuestos en la Figura 3.16. En la Tabla 3.6 se recogen los datos de ambas simulaciones. En ambos ejemplos se incluye un filtro *antialiasing* que asegura la fiabilidad de la simulación². Durante el proceso de simulación se emplean técnicas que cumplen el criterio de muestreo de Kramer (Martin [1999]).

En el primer modelo a testar, se propone una estructura de Wiener clásica: un sistema lineal con memoria seguido de una no linealidad polinómica. La descomposición en series de Volterra de este tipo de sistemas poseen, por definición coeficientes no nulos fuera de la diagonal en todos los núcleos representativos.

A pesar de que los modelos de Wiener y de Hammerstein no son equivalentes, siempre es posible encontrar una representación de modelo generalizado de Hammerstein en el que las diagonales obtenidas se encuentran relacionadas con una proyección de los coeficientes no nulos del núcleo sobre éstas. Estos coeficientes aportan una componente no despreciable que compromete el resultado de la identificación. En Schetzen [1980a], en las secciones 12.5 y 13.8 y en Rugb [1980], más concretamente el Teorema 5.3 de la Sección *The Wiener Orthog-*

²En ambos ejemplos se ha empleado la *toolbox* de MATHWORKS®. Para mayor información concerniente a la simulación de sistemas continuos analógicos visite la página del producto: <http://www.mathworks.com/products/simulink/>

FIGURA 3.16: Modelos analógicos empleados para evaluar el procedimiento de diagnosis del test de tono de frecuencia variable exponencial

A: Resultado de la convolución de la salida del sistema con la señal de test invertida temporalmente, $e(-t) * y(t)$, y su versión filtrada $z(t)$.

B: Respuestas $\{\hat{h}_i(t)\}$ estimadas de acuerdo con el modelo de Hammerstein generalizado.

C: Comparación entre la señal de salida del sistema, la señal regenerada a partir del modelo sintetizado y el error existente entre ambas.

FIGURA 3.17: Resultados de la identificación del MODELO 1 de la Figura 3.16.

onal Representation se puede encontrar información sobre la relación existe entre los modelos de Wiener y de Hammerstein que aclaran este fenómeno.

Siguiendo el esquema planteado en la metodología (véase Figura 3.15), la salida de los bloques que conforman el estudio va proporcionando información referente a la estructura del sistema. En la Figura 3.17A se representa la salida obtenida tras el bloque de "Preprocesado de impulsos", formada por el par $e(-t) * y(t)$ y $z(t)$. En ambas se observan seis impulsos diferenciados, localizados en los instantes temporales $t = \tau_n$. En este caso, la duración de la señal de test T permite realizar un enventanado lo suficientemente fiable como para aplicar la estimación de núcleos $\{\hat{h}_i\}$. Este resultado se refleja en la Figura 3.17B. Sin embargo, este modelado no supera la fase de Validación. En la Figura 3.17C se puede apreciar como la desviación producida por los elementos no nulos que se encuentran fuera de la diagonal en los núcleos de Volterra, al ser proyectados sobre ésta, dan como resultado un sistema que obtiene una salida errónea.

A pesar de no haber obtenido un modelo válido para el sistema, sí hemos conseguido extraer información valiosa del mismo, que facilitaría otros métodos de identificación con condiciones más exigentes:

- i) Se conoce la memoria y el orden del sistema (véase § 3.2.1).
- ii) Aseguramos que el sistema se puede descomponer en series de Volterra de manera fiable. En este caso es necesario aplicar otras técnicas de representación, que permitan obtener esta descomposición o representaciones adecuadas al mismo.

Como contraejemplo se propone la estructura presentada en la Figura 3.16B. En este caso, el sistema no se

FIGURA 3.18: Resultado de la convolución de la salida sistema correspondiente al MODELO 2 de la Figura 3.16 con la versión invertida temporalmente de la señal de test, $e(-t) * y(t)$, y su versión filtrada $z(t)$.

corresponde con un modelo de memoria y orden decrecientes, si no que presenta una realimentación no lineal. Este tipo de sistemas son muy frecuentes en el ámbito del control Levine [1996], aunque ciertas aberraciones pueden llegar a provocar que sistemas que en un principio no debían presentar este comportamiento, adolezcan de realimentación, situación común en los sistemas acústicos.

La presencia de lazos de realimentación causa respuestas de orden y memoria no acotados, pudiendo poner en compromiso la estabilidad del sistema. Este test puede servir como una buena alternativa para detectar estas posibles degradaciones.

En la Figura 3.18 se muestra el resultado de la convolución de la salida del sistema con la versión invertida temporalmente de la señal de test empleada, así como su versión filtrada, $z(t)$. Se observa que, en vez de los seis impulsos presentes en el resultado de la Figura 3.17 A, aparecen múltiples impulsos, que no se encuentran necesariamente situados en los instantes temporales deseados, τ_n . Sin embargo, como el sistema simulado asegura la estabilidad mediante la atenuación del lazo de realimentación ($A = 20$ dB) y un retardo (en la simulación 10 ms), se observan pequeños impulsos posteriores a los instantes τ_n . De este modo, el sistema se descarta automáticamente después del bloque de *Preprocesado de impulsos* de la metodología expuesta en la Figura 3.15. Sin embargo, este test proporciona información relativa a la presencia de realimentación, que facilitará la aplicación de otras técnicas de identificación.

Pese a que este test no arroje resultados válidos para identificar el sistema, sí supone una buena herramienta para discriminar modelos, más sencilla de implementar que test anteriores que perseguían el mismo propósito, como el propuesto Haber y Unbehauen [1990].

Comparación con otros sistemas de identificación similares.

Con el fin de ejemplificar la fiabilidad de este método, y las mejoras propuestas en la metodología, en esta Sección se presenta un ejemplo que se ajusta de forma completa a la un sistema de Hammerstein generalizado. El sistema propuesto se refleja en la Figura 3.19. Se trata de un sistema de orden $N = 4$ (véase Tabla 3.7 B) en el que dos filtros distintos procesan las no linealidades $\mathcal{N}_1(x)$ y $\mathcal{N}_2(x)$. Esto implica que la diagonal de los núcleos de Volterra de órdenes 1, 2 y 4 comparten diagonales ($h_a[m]$), mientras que la diagonal de orden dos es proporcional a $h_b[m]$. En este escenario es fácil comprobar la fiabilidad de la separación de las diferentes estimas de los núcleos.

Para el diseño de los filtros se emplea la herramienta de MATLAB[®] Signal Processing Toolbox³, empleando las especificaciones descritas en la Tabla 3.7 C. Ambos filtros muestran ceros fuera de la banda de interés ($f_0 < f < f_1$). En el caso del filtro $h_a[m]$ se parte de un espectro plano, de módulo 1, al que se añade un ruido gaussiano de media cero y varianza 0.25. Para destacar la separación de órdenes el filtro $h_b[m]$ se diseña del mismo modo, salvo que se parte de una pendiente descendente. En las Figuras 3.21 A, 3.21 B y 3.21 C se representan la magnitud, la fase y la respuesta al impulso de ambos filtros por medio de marcas cuadradas y redondas respectivamente. Al modelo se le ha añadido un filtro de Nyquist ($f_c \geq 2f_{\max}$) y un posterior remuestreo que adecua f_s con la

³MATLAB[®] es una marca registrada por MATHWORKS[®]. Para más información consulte <http://www.mathworks.com/products/matlab/>.

FIGURA 3.19: Modelo discreto empleado para la verificación del sistema de identificación de modelos de Hammerstein a partir de barridos exponenciales. En el modelo se parte de una frecuencia de muestreo $f_s = 2f_{\max}$ que aumenta en la simulación hasta $f_s = 2Nf_{\max}$, para mantener la integridad del ejemplo.

Parámetro	Valor	Unidad
T	974.89	ms
f_0	20	Hz
f_1	24	kHz
ϕ_0	$-\frac{\pi}{2}$	rad

A: Parámetros generales

	Polinomio
$\mathcal{N}_1(x)$	$x + x^3 + x^4$
$\mathcal{N}_2(x)$	x^2

B: No-linealidad

Parámetro	Valor	Unidad
A_{stop}	>40	dB
Orden	401	
$f_{\min}$	20	Hz
$f_{\max}$	24	kHz
Método de diseño	Remuestreo frecuencial	

C: Especificaciones de los filtros

TABLA 3.7: Especificaciones para el diseño del ejemplo expuesto en la Figura 3.19.

empleada a la entrada del sistema. El resto de detalles para la implementación del ejemplo se exponen en las Tablas 3.7.

Asumiendo que, en este caso, la longitud de los filtros y el orden del sistema es conocido, ya que hemos aplicado el test expuesto en § 3.2.1, a la salida del bloque *Preprocesado de impulsos* de la metodología expuesta en la Figura 3.15 obtenemos las señales $e[-m] * y[m]$ y su versión filtrada $z[m]$. El resultado se muestra en la Figura 3.20. En la primera gráfica se muestra la disposición de los impulsos calculados, mientras que en la parte inferior aparecen ventanas ampliadas alrededor de los instantes τ_n . Como era de esperar, los impulsos obtenidos llegan hasta el orden $N = 4$ (véase la definición de $\mathcal{N}_1(x)$ en la Tabla 3.7 B). De estos fragmentos y de las señales $v_n[m]$, aplicando técnicas de deconvolución, obtenemos $\{\hat{g}_n[m]\}_{n \in \{1, \dots, 4\}}$. Ya en estas señales se observa la diferencia provocada por la memoria correspondiente al orden dos frente al resto. Ésta respuesta se encuentra presente en el orden 4 en menor medida (véase (3.58) y la definición de la matriz C , definida en (3.31)).

En la Figura 3.21 se observa el resultado del proceso de identificación para obtener esta familia de filtros que, una vez proyectados, proporcionan las estimaciones $\{\hat{h}_n[m]\}_{n \in \{1, \dots, 4\}}$. Para constatar la verosimilitud de estas estimas, se han representado la funciones $\{\hat{g}_n[m]\}_{n \in \{1, \dots, 4\}}$ frente a los filtros simulados por el modelo reflejado en la Figura 3.19, $h_a[m]$ y $h_b[m]$, tanto en el dominio espectral como en tiempo. Los ejes representan el tiempo sin discretizar para facilitar la visualización.

En las Figuras 3.21 D y 3.21 E se puede observar el éxito del sistema de identificación, ya que las señales recuperadas mediante la síntesis del modelo y la de las estimaciones muestran un error despreciable. Este error es prácticamente plano en la banda de interés si se tiene en cuenta la naturaleza espectral de la señal de test, ya que sigue la misma tendencia espectral que la señal de test introducida (véase Error de estimación en la gráfica de la Figura 3.21 E).

Además el algoritmo propuesto permite flexibilizar el parámetro ϕ_0 como ya se observó anteriormente. Esto supone una mejora frente a los algoritmos en los que se encuentra inspirado este método (Rébillat et al. [2011] y

Novák et al. [2010]). Dado que estos dos autores ofrecen un versión de su test, disponible en M. Rébillat [2011], se han confrontado los resultados arrojados por esta herramienta para el sistema propuesto y los obtenidos por el algoritmo propuesto.

En la Figura 3.22, se muestra el error relativo cometido por el método propuesto frente a los métodos existentes. Este error ha sido calculado en base a la definición propuesta en Rébillat et al. [2011] definido en (3.60):

$$\Xi_n(f) = 20 \log_{10} \left| \frac{H_n(f) - \hat{H}_n(f)}{H_n(f)} \right| \quad (3.60)$$

En primera instancia se ha escogido esta definición de error para obtener una comparativa similar a la expuesta por los autores en Novák et al. [2010] y Rébillat et al. [2011].

Las primeras cuatro gráficas muestran el error, siguiendo esta definición, con la señal de test cumpliendo las condiciones impuestas para los métodos de Novák et al. [2010] y Rébillat et al. [2011], respectivamente. En el caso del método propuesto se ha escogido una fase inicial trivial, $\phi_0 = -\pi/2$. Se observa que en la banda de interés todos los métodos ofrecen un error despreciable. El caso más favorable se observa para la metodología expuesta en Novák et al. [2010], sin embargo, éste método calcula núcleos ampliamente desviados fuera de la banda de interés, así como desviaciones notables en fase. Tampoco asegura un resultado real para filtros reales, lo que en muchas ocasiones es un error intolerable.

Las doce gráficas siguientes que conforman la Figura 3.22 representan este mismo error cometido por estos tres métodos, aplicando ligeras variaciones frente al parámetro ϕ_0 de la señal de entrada ($|\Delta\phi_0| \leq 2/100 \cdot \phi_0$). Es evidente que el único método que se muestra consistente frente a esta variación es el propuesto en esta tesis, ya que los anteriores son altamente sensibles a pequeñas variaciones de ϕ_0 . Siempre y cuando la estima del parámetro ϕ_0 empleado sea correcta, el método propuesto es más robusto que los anteriores.

Otro parámetro que en los métodos anteriores sólo podía tomar valores discretos es la duración de la señal de test, T . Con la metodología propuesta este parámetro se flexibiliza, dando la oportunidad al usuario de elegir un tiempo que sea acorde con su sistema de medición son restricciones previas.

Asumiendo que el valor de partida en los siguientes análisis es el impuesto por los autores, y en el método propuesto se parte de una fase inicial de $-\pi/2$, calculamos el error cometido en la estimación de los filtros FIR correspondientes a las diagonales de los núcleos de Volterra teóricos. Para ello, definimos tanto el error medio cometido, como su varianza mediante las siguientes expresiones:

FIGURA 3.20: Resultado del test propuesto sobre el sistema especificado en la Figura 3.19 y la Tabla 3.7.

A: Magnitudes de los filtros estimados $\{\hat{h}_n\}$ en el dominio espectral, frente a las originales.

B: Fases de los filtros estimados $\{\hat{h}_n\}$ en el dominio espectral, frente a las originales.

C: Respuestas temporales $\{\hat{h}_n\}$ estimadas para el sistema, frente a las originales.

D: Salida de la prueba de validación: $y(t)$ frente a $\hat{y}(t)$ en el dominio temporal.

E: Salida de la prueba de validación: $y(t)$ frente a $\hat{y}(t)$ en el dominio espectral.

FIGURA 3.21: Resultados de aplicar el proceso completo de identificación sobre el sistema propuesto en la Figura 3.19 y la Tabla 3.7.

$$\bar{\xi}_n(T) = \frac{\sum_m |h_n[m] - \hat{h}_n[m]|}{\sum_m |h_n[m]|} \quad (3.61)$$

$$\|\xi_n(T)\|^2 = \frac{\sum_m (h_n[m] - \hat{h}_n[m])^2}{\sum_m h_n^2[m]} \quad (3.62)$$

FIGURA 3.22: Error de estimación calculado para el método propuesto en la Sección 3.2.2 y los expuestos en Novák et al. [2010] y Rébillat et al. [2011]. La definición de error empleada para obtener estos resultados se corresponde con la de la expresión (3.60). La cuatro primeras gráficas muestran el error relativo aplicando los parámetros detallados en la Tabla 3.7, así como las limitaciones en la fase inicial impuestas por los autores. En las siguientes gráficas se muestra la variabilidad del error para los otros métodos al modificar la fase inicial, así como la independencia de este parámetro para el resultado del método propuesto.

A: Error normalizado absoluto, véase (3.61).

B: Error normalizado cuadrático, véase (3.62).

c: Zoom sobre la Figura 3.23 B centrado en el intervalo de 4 s a 5 s. Se incluyen los tamaños de barrido requeridos por Novák et al. [2010] y Rébillat et al. [2011]. La fiabilidad del método queda reflejada para valores intermedios de este parámetro.

FIGURA 3.23: Comparación de los errores cometidos por la metodología propuesta y por algoritmos que proponen métodos similares (véase Novák et al. [2010] y Rébillat et al. [2011]). En la Figura se refleja la versatilidad de la elección del parámetro T , así como la estabilidad de la estimación mediante el método propuesto.

Los resultados de este análisis se muestran en la Figura 3.23 para valores de T comprendidos entre 92.6 ms y 6.143 s, que se corresponden con valores de m en la expresión (3.40) comprendidos entre 1 y 50. En este caso encontramos que ambas definiciones de error obtienen buenos resultados aún en el caso de valores pequeños de m .

Para corroborar la flexibilidad introducida mediante el nuevo análisis en la Figura 3.23 c se han representado los errores relativos obtenidos para valores intermedios a los propuestos por autores anteriores, poniendo en evidencia la consistencia del método a pesar de haber flexibilizado el parámetro T . En la gráfica se han destacado con marcas aquellos valores temporales propuestos en Novák et al. [2010] y Rébillat et al. [2011].

En resumen, si observamos los resultados expuestos en las gráficas de la Figura 3.23, tanto el error relativo absoluto como el cuadrático arrojan resultados claramente mejores que los métodos propuestos anteriormente. Por tanto, se desprende de este ejemplo que el método propuesto además de otorgar mayor flexibilidad en cuanto a los parámetros de entrada también es más preciso si el objetivo es obtener una representación temporal de las diagonales de los núcleos de Volterra en ausencia de términos cruzados.

3.3. Obtención de las series de Volterra completas mediante excitación pseudoaleatoria

Hasta aquí se ha propuesto una metodología basada en señales tonales variables que permite el diagnóstico de sistemas no lineales así como la identificación de un modelo concreto de sistemas: el modelo de Hammerstein generalizado. Dado que el modelo físico barajado hasta ahora en la literatura puede clasificarse dentro de este grupo, no es necesario plantear algoritmos de identificación que aporten información sobre los coeficientes de los núcleos de Volterra que se encuentran fuera de la diagonal. Sin embargo, medidas iniciales sobre el prototipo diseñado a tal efecto (véase Capítulo 5) inducen a pensar que es necesario obtener una representación completa de los núcleos de Volterra para obtener una estructura representativa del *array paramétrico* real.

Supuesta esta generalización y que se ha decidido aplicar técnicas no paramétricas para no imponer condiciones iniciales al sistema real, se propone aquí un método que permite obtener directamente una buena representación del sistema en series de Volterra de forma completa. El mayor problema que presentan los sistemas de identificación no paramétricos con esta pretensión es el gran número de coeficientes necesarios para describir el sistema. Esto implica que tanto la longitud de las señales de prueba, así como el grado de complejidad computacional, son altos, sea cual sea la técnica elegida.

Otro problema a tener en cuenta en el caso de optar por este tipo de sistemas de identificación es la imposibilidad de elegir el margen dinámico ni el punto de trabajo de la señal de excitación, lo que en este caso supone una grave limitación, debido a las conciones impuestas por la propia estructura del *array paramétrico*, y la necesidad de aplicar modulaciones a la entrada del sistema.

En esta Sección partimos de las técnicas no paramétricas clásicas, basadas en entradas ruidosas, para luego centrarnos en algoritmos que aplican señales de test de menor tamaño basadas en secuencias pseudoaleatorias. A su vez, se propone una reformulación del problema que aporta las herramientas matemáticas necesarias para poder ampliar este tipo de algoritmos y permitir al usuario seleccionar el punto de trabajo de la entrada al sistema. Esta reformulación, junto con el algoritmo de corrección propuesto, amplían el ámbito de este tipo de sistemas de identificación, permitiendo tanto forzar el sistema en sí, como ceñirse a especificaciones concretas.

Los primeros sistemas de identificación no paramétrica se basan en estructuras de bloques determinadas que se excitan mediante señales aleatorias. En estas estructuras se impone la necesidad de generar una base ortonormal mediante un banco de filtros lineales sobre la que se aplica una red no lineal posterior. En todas estas técnicas, el resultado obtenido corresponde a los coeficientes de Wiener, a partir de los cuales se pueden obtener los núcleos de Volterra mediante un cambio de base. Esta correspondencia se expone en Rugh [1981a]. Uniendo esta idea con la recogida en Schetzen [1980a] para determinar los coeficientes Wiener a partir de ruido aleatorio, se obtiene una estructura similar a la presentada en la Figura 3.24, con una red no lineal formada por polinomios de Hermite (Barrett [1964]), y un banco de filtrado compuesto por funciones de Laguerre (Akçay y Ninness [1999]).

FIGURA 3.24: Modelado de Wiener para sistemas no lineales de orden y memoria decrecientes.

Con el fin de minimizar el tamaño de las señales de entrada necesarias para identificar el sistema, diversos autores han explotado la posibilidad de emplear secuencias pseudoaleatorias. En Nowák y Van Veen [1994] se presenta una primera aproximación a esta posibilidad y además se extrae la idea de representar la ecuación (3.5) de forma compacta mediante el uso del producto de Kronecker. Sobre esta forma matricial se puede aplicar el algoritmo de mínimos cuadrados para obtener una aproximación del valor de los núcleos de Volterra.

Uniendo el método de M. Schetzen [1981], junto con la representación matricial de la convolución no lineal empleada en Nowák y Van Veen [1994] surge el sistema de identificación de núcleos de Volterra mediante señales combinaciones lineales de secuencias MLS, de Reed y Hawksford [1996]. Este tipo de señales ya fue presentado en las investigaciones de Dunn y Hawksford [1993] para caracterizar el impacto de la distorsión de las alinealidades del sistema bajo estudio, más que a la no linealidad en sí.

Por el contrario, Reed y Hawksford proponen ortogonalizar la entrada mediante un banco de filtrado compuesto por secuencias MLS. Como señal de excitación se emplean combinaciones de estas mismas secuencias invertidas temporalmente. La red polinómica en este caso consiste en combinaciones mediante productorios de todas las posibles variaciones de las secuencia obtenidas a partir de la red de filtrado, como se observa en la Figura 3.24. La filosofía fundamental de esta técnica es la de minimizar al máximo la longitud de señal de entrada para la identificación del sistema, así como mejorar el condicionamiento del problema.

La salida del sistema representado en la Figura 3.24 es el resultado de aplicar tantos operadores no lineales ($\mathcal{Z}_r$) como órdenes sean necesarios para determinar el comportamiento del sistema. Estos operadores se traducen en el sumatorio generado a partir de la red polinómica sin memoria. En un principio, si no se tiene en cuenta la redundancia de los coeficientes a determinar, la red polinómica deberá contener todas las posibles productorios que se correspondan con todas las secuencias que forman parte del conjunto de las variaciones de M elementos de tamaños desde 1 hasta el máximo orden, N (véase sección 3.3.1).

$$y[n] = \sum_{r=0}^N \mathcal{Z}_r[u[n]] = \sum_{r=1}^N g_{i_1, \dots, i_r} \sum_{i_1=0}^{M-1} \cdots \sum_{i_r=0}^{M-1} \prod_{j=1}^r z_{i_j}[n] \quad (3.63)$$

Para determinar las salidas de una red multiplicativa como la reflejada en la parte no lineal sin memoria del sistema reflejado en la Figura 3.24, teniendo en cuenta que sus entradas proceden de las salidas del banco de filtros $\mathbf{f}$ y aplicando las reglas de interconexión de sistemas no lineales en paralelo (cuarta sección de Rugh [1981b]), cada una de las ramas previa al banco de coeficientes se puede calcular como:

$$P_{\delta}(z) = y_{\delta}[n] = \sum_{v_1=0}^{M-1} \cdots \sum_{v_r=0}^{M-1} \prod_{s=1}^r f_{v_s}[v_s] u[n - v_s] \quad \text{siendo} \quad |\delta| = r \quad (3.64)$$

Si expresamos ahora las convoluciones que representan la actuación del banco de filtros por medio de multiplicaciones de matrices Toeplitz Golub y Van Loan [1996] e imponiendo una red no lineal que contemple todas las funciones polinómicas generadas por todas las secuencias δ (véase sección 3.3.1), la salida del sistema se puede calcular a partir de:

$$y[n] = \sum_{r=1}^N \mathbf{u}_n^{[r]} \mathbf{F}^{[r]} \mathbf{g}_r \quad (3.65)$$

Así pues encontramos una relación directa entre los vectores de coeficientes $\mathbf{g}_r$ y los núcleos de Volterra representados por los diferentes $\mathbf{h}_r$, si realizamos una analogía entre (3.6) y (3.65).

Aunque la representación mediante productos de Kronecker para convoluciones generalizadas es compacta, no tiene en cuenta la posible explotación de la redundancia de los coeficientes a determinar. Por la propia naturaleza del producto de Kronecker y debido a la propiedad conmutativa del producto escalar, nos encontramos con múltiples simetrías que, explotadas, se traducen en una simplificación considerable del problema de identificación

de núcleos. Estas simetrías se basan en las relaciones existentes entre las posibles variaciones y combinaciones con repetición que se encuentran implicadas en la red polinómica.

3.3.1. Reformulación del problema: estudio matricial de la simetría de los núcleos de Volterra

Partimos del conjunto $\mathcal{M} = \{0, \dots, M-1\}$, siendo M el tamaño en muestras de la memoria del sistema a identificar. Si este sistema se representa mediante núcleos de Volterra, cada núcleo estará formado por M^p coeficientes, que se corresponderán con las variaciones con repetición de tamaño p de los elementos que forman el grupo $\mathcal{M}$, resultado del producto cartesiano realizado p veces sobre el conjunto $\mathcal{M}$, por tanto $\mathcal{M}^p = \mathcal{M} \times \mathcal{M} \times \dots \times \mathcal{M}$.

Definiendo como criterio de unívoco de ordenación:

$$\left\{ S(\mathbf{e}) = \sum_{i=0}^{p-1} e[i]M^{p-i-1} \mid |\mathbf{e}| = p \right\} \quad \text{podemos asegurar que} \quad S(\mathbf{e}_1) > S(\mathbf{e}_2) \Leftrightarrow \mathbf{e}_1 \succ \mathbf{e}_2 \quad (3.66)$$

A este criterio de ordenación lo denotaremos por $\mathcal{O}$. Por tanto, el conjunto ordenado de todas las variaciones con repetición de tamaño p se denotará como:

$$\mathfrak{D}_p(\mathcal{M}) := \mathcal{O}(\mathcal{M}^p) \quad (3.67)$$

Definimos ahora $\mathfrak{D}(\mathcal{M})$ como el conjunto ordenado de todas las posibles combinaciones con repetición de tamaños de 1 hasta N , a partir de la operación concatenación:

$$\mathfrak{D}(\mathcal{M}) := [\mathfrak{D}_1(\mathcal{M}) \mathrel{++} \mathfrak{D}_2(\mathcal{M}) \dots \mathrel{++} \mathfrak{D}_N(\mathcal{M})] \quad (3.68)$$

Este conjunto ordenado de secuencias $\mathfrak{s} \in \mathfrak{D}(\mathcal{M})$ se indexa mediante el conjunto $\mathcal{J} := \{1, 2, \dots, \sum_{p=1}^N M^p\}$:

$$\{\mathfrak{s}_j := [\mathfrak{D}(\mathcal{M})]_j \mid \mathfrak{s}_j \in \mathfrak{D}(\mathcal{M}) \wedge j \in \mathcal{J}\} \quad (3.69)$$

El conjunto $\mathcal{J}$ se divide en N grupos diferentes, en los que cada uno indexa a aquellas secuencias de tamaño de un mismo tamaño p , $\mathcal{J}_p := [\mathcal{J}_1 \mathrel{++} \mathcal{J}_2 \mathrel{++} \dots \mathrel{++} \mathcal{J}_N]$ siendo:

$$\{j \in \mathcal{J}_p \mid \mathfrak{s}_j \in \mathfrak{D}_p(\mathcal{M}) \Rightarrow |\mathfrak{s}_j| = p\} \quad (3.70)$$

A su vez, cada conjunto $\mathfrak{D}_p(\mathcal{M})$ se indexará por separado mediante el conjunto $\mathcal{K}_p := \{1, 2, \dots, M^p\}$, como se puede observar en la Figura 3.25.

Sin embargo, estos coeficientes poseen ciertas propiedades de simetría. Esta redundancia se puede aprovechar para simplificar el sistema de identificación.

Teniendo en cuenta la definición de convolución discreta de orden superior empleada en la ecuación (3.4), podemos asegurar que si un sistema no lineal es representable mediante series de Volterra, existe una representación del mismo mediante núcleos simétricos. Así pues, podemos eliminar la redundancia del problema teniendo en cuenta estas simetrías.

Definimos ahora el conjunto de las combinaciones con repetición de orden p sobre el conjunto $\mathcal{M}$ como $\tilde{\mathfrak{D}}_p(\mathcal{M})$, al que se le aplica el criterio de ordenación $\mathcal{O}$ expuesto en (3.66):

$$\tilde{\mathfrak{D}}_p(\mathcal{M}) := \mathcal{O}(\tilde{\mathfrak{D}}_p(\mathcal{M})) \quad (3.71)$$

FIGURA 3.25: Conjuntos ordenados de las secuencias pertenecientes a $\mathfrak{D}(\mathcal{M})$ y $\mathfrak{Q}(\mathcal{M})$ y sus correspondientes índices para $M = 3$ y $N = 3$.

Aplicando de nuevo la concatenación para crear el conjunto de las combinaciones con repetición de tamaños del 1 al N :

$$\mathfrak{Q}(\mathcal{M}) := [\mathfrak{Q}_1(\mathcal{M}) ++ \mathfrak{Q}_2(\mathcal{M}) \cdots ++ \mathfrak{Q}_N(\mathcal{M})] \quad (3.72)$$

En este caso este conjunto de secuencias vendrá indexado por el conjunto: $I := \left\{ 1, 2, \dots, \sum_{s=1}^N \binom{M+s-1}{s} \right\}$

De tal forma que las secuencias $\mathfrak{q}$ se encuentren indexadas por dicho conjunto:

$$\{\mathfrak{q}_i := [\mathfrak{Q}(\mathcal{M})]_i \mid \mathfrak{q}_i \in \mathfrak{Q}(\mathcal{M}) \wedge i \in I\} \quad (3.73)$$

Al igual que en el caso anterior, podemos dividir el conjunto de indexación I atendiendo al tamaño p de la secuencia indexada: $I := [I_1 ++ I_2 ++ \dots ++ I_N]$ siendo:

$$\{i \in I_p \mid \mathfrak{q}_i \in \mathfrak{Q}_p(\mathcal{M}) \Rightarrow |\mathfrak{q}_i| = p\} \quad (3.74)$$

Si los datos que generan las secuencia $\mathfrak{d}$ y las secuencias $\mathfrak{q}$ no dependen del orden de aparición de los elementos en dichas secuencia, como es el caso de una red polinómica como la expuesta en la Figura 3.24, podemos aplicar matrices expansoras o reductoras para cambiar la indexación de los datos desde el conjunto de las secuencias $\mathfrak{Q}(\mathcal{M})$ al de las secuencias $\mathfrak{D}(\mathcal{M})$ y viceversa.

Para poder emplear las expresiones de la salida del sistema expuestas en (3.6) y (3.65) es necesario representar los núcleos a modo de vectores. Aplicaremos entonces el criterio de ordenación S definido en (3.66) para formarlos de modo que la posición κ -ésima de vector $\mathbf{h}_r$ que representa al núcleo de Volterra de orden r :

$$\{[\mathbf{h}_r]_{\kappa} = h_r[\mathfrak{d}_{\kappa}] \mid \mathfrak{d}_{\kappa} \in \mathfrak{D}_r(\mathcal{M}) \wedge \kappa \in \mathfrak{K}_r\} \quad (3.75)$$

El sistema completo se definirá apilando en un sólo vector todos los $\mathbf{h}_r$:

$$\mathbf{h} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{h}_N \end{bmatrix} \quad \text{y por tanto} \quad \left\{ [\mathbf{h}]_j = h_r [\delta_{j_r}] \mid \delta_{j_r} \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \wedge j_r \in \mathcal{J} \right\} \quad (3.76)$$

Si los núcleos de Volterra se encuentran representados en forma regular, se cumple que existen simetrías entre los elementos del núcleo tales que las variaciones que sean el producto de las permutaciones sobre una misma combinación, serán equivalentes:

$$\left\{ \forall \delta \in \mathfrak{G}(\mathbf{q}_i) \Rightarrow h_r [\delta_{\kappa}] = h_r [\mathbf{q}_l] \mid \delta_{\kappa} \in \mathcal{D}_r(\mathcal{M}) \wedge \mathbf{q}_l \in \mathcal{Q}_r(\mathcal{M}) \wedge \kappa \in \mathcal{K}_r \wedge l \in \mathcal{L}_r \right\} \quad (3.77)$$

En donde $\mathfrak{G}(\mathbf{q}_i)$ son todas las posibles permutaciones aplicadas sobre la secuencia $\mathbf{q}_i$.

Podemos optar por la versión triangular del núcleo de Volterra. En este caso sólo serán necesarios $|\mathcal{Q}_r(\mathcal{M})|$ coeficientes para definir el núcleo de orden r , teniendo entonces que:

$$[\hat{\mathbf{h}}]_i = |\mathfrak{G}(\mathbf{q}_i)| [\mathbf{h}]_j \mid \delta_j \in \mathfrak{G}(\mathbf{q}_i) \quad (3.78)$$

Para facilitar esta compresión de los vectores que forman los núcleos de Volterra, definimos la matriz $\mathbf{Q}_r$:

$$\exists! \mathbf{Q}_r \mid q_{\ell, \kappa} = \begin{cases} 1 & : \delta_{\kappa} \in \mathfrak{G}(\mathbf{q}_{\ell}) \\ 0 & : \delta_{\kappa} \notin \mathfrak{G}(\mathbf{q}_{\ell}) \end{cases} \quad \forall \ell \in \mathcal{L}_r \wedge \forall \kappa \in \mathcal{K}_r \quad (3.79)$$

Mediante el producto de esta matriz y el núcleo de Volterra en forma vectorial se obtiene por el vector que representa al núcleo de Volterra triangular comprimido:

$$\left\{ \mathbf{Q}_r : \mathbb{R}^{|\mathcal{D}_r(\mathcal{M})|} \rightarrow \mathbb{R}^{|\mathcal{Q}_r(\mathcal{M})|} \mid \hat{\mathbf{h}}_r = \mathbf{Q}_r \mathbf{h}_r \right\} \quad (3.80)$$

Por tanto, siguiendo la definición de un elemento del vector $\hat{\mathbf{h}}$ (3.77), podemos redefinir éste mediante un matriz particionada compuesta por estos vectores comprimidos:

$$\hat{\mathbf{h}} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_1 \\ \hat{\mathbf{h}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}_N \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

El vector $\hat{\mathbf{h}}$ es de longitud:

$$|\hat{\mathbf{h}}| = \sum_{r=1}^N |\mathcal{Q}_r(\mathcal{M})| = \sum_{r=1}^N \binom{M+r-1}{r} \quad (3.82)$$

Esta compresión podrá revertirse mediante $\mathbf{P}_r$:

$$\exists! \mathbf{P}_r \mid p_{\kappa, \ell} = \begin{cases} \frac{1}{|\mathfrak{G}(\mathbf{q}_{\ell})|} & : \delta_{\kappa} \in \mathfrak{G}(\mathbf{q}_{\ell}) \\ 0 & : \text{resto} \end{cases} \quad \forall \kappa \in \mathcal{K}_r \wedge \forall \ell \in \mathcal{L}_r \quad (3.83)$$

Por tanto:

$$\left\{ \mathbf{p}_r : \mathbb{R}^{|\Omega_r(\mathcal{M})|} \rightarrow \mathbb{R}^{|\mathcal{D}_r(\mathcal{M})|} \mid \mathbf{h}_r = \mathbf{p}_r \hat{\mathbf{h}}_r \right\} \quad (3.84)$$

A continuación se muestran a modo de ejemplo las matrices de compresión y expansión para $r = 3$ y $M = 2$:

$$\mathbf{Q}_3|_{M=2} = \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}}^{\mathcal{D}_3(\mathcal{M})} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} 000 \\ 001 \\ 011 \\ 111 \end{array} \end{array} \right\} \quad \mathbf{P}_3|_{M=2} = \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}}^{\Omega_3(\mathcal{M})} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} 000 \\ 001 \\ 011 \\ 111 \\ 001 \\ 011 \\ 111 \\ 000 \end{array} \end{array} \right\} \quad (3.85)$$

Estas matrices, a su vez, pueden servir para eliminar la redundancia generada en una matriz que es el resultado de un producto de Kronecker reiterado. Por ejemplo, partimos de cualquier matriz cuadrada $\mathbf{M}$ cuyos elementos podemos indexar mediante el par i y j . Si indexamos ahora los elementos de la matriz $\mathbf{Z} = \mathbf{M}^{[r]*}$ mediante secuencias $\mathfrak{d}$, que representan los índices de la matriz $\mathbf{M}$ que han contribuido en el producto realizado para el cálculo de ese elemento tenemos que los elementos de $\mathbf{Z}$:

$$z(i, j) = m(\mathfrak{d}_i[1], \mathfrak{d}_j[1]) m(\mathfrak{d}_i[2], \mathfrak{d}_j[2]) \dots m(\mathfrak{d}_i[r], \mathfrak{d}_j[r]) = m(\mathbf{r}_1) m(\mathbf{r}_2) \dots m(\mathbf{r}_r) \quad (3.86)$$

Siendo $\mathbf{r}_x$ el par formado por $(\mathfrak{d}_i[x], \mathfrak{d}_j[x])$, si indexamos ahora los elementos de $\mathbf{Z}$ mediante estos pares, $z(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_r)$, podemos asegurar que existe una simetría equivalente a la que existe en los núcleos de Volterra, ya que si:

$$\{z(\mathbf{v}) = z(\mathbf{u}) \mid \mathbf{v} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_r) \wedge \mathbf{u} \in \mathfrak{G}(\mathbf{v})\} \quad (3.87)$$

Si combinamos ahora (3.6) y (3.65), podemos obtener la relación entre los coeficientes de Volterra y los de Wiener, ya que:

$$\mathbf{h}_r = \mathbf{F}^{[r]*} \mathbf{g}_r \quad (3.88)$$

Si la matriz de filtrado $\mathbf{F}$ es ortonormal, sabemos que se cumple que su producto de Kronecker reiterado también cumple esta condición y por tanto su inversa se corresponde con su transpuesta:

$$\mathbf{g}_r = (\mathbf{F}^{[r]*})^\top \mathbf{h}_r \quad (3.89)$$

Como la condición de simetría expuesta en (3.87) se sigue cumpliendo en caso de transponer la matriz, podemos concluir que las simetrías que se cumplen para los coeficientes de Volterra, son equivalentes a las existentes en los coeficientes de Wiener, siempre y cuando la red de filtrado cumpla con la condición de ortonormalidad. Así pues:

$$\left\{ \forall \mathfrak{d} \in \mathfrak{G}(\mathbf{q}_i) \Rightarrow g_r[\mathfrak{d}_\ell] = g_r[\mathbf{q}_\ell] \mid \mathfrak{d}_\ell \in \mathcal{D}_r(\mathcal{M}) \wedge \mathbf{q}_\ell \in \Omega_r(\mathcal{M}) \wedge \ell \in \mathcal{X}_r \wedge \ell \in \mathcal{L}_r \right\} \quad (3.90)$$

Y podemos trabajar con su forma vectorizada y triangular:

$$\hat{\mathbf{g}} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{g}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{g}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{g}}_N \end{bmatrix} \quad [\hat{\mathbf{g}}]_i = |\mathfrak{G}(\mathbf{q}_i)|[\mathbf{g}]_j \mid \delta_j \in \mathfrak{G}(\mathbf{q}_i) \quad (3.91)$$

Además las matrices $\mathbf{Q}_r$ y $\mathbf{P}_r$ cumplen las siguientes propiedades:

$$\mathbf{Q}_r \mathbf{P}_r = \mathbf{I}_{|\mathfrak{Q}_r(\mathcal{M})|} \quad \mathbf{P}_r \mathbf{Q}_r = \mathbf{S}_r \quad \mathbf{S}_r \mathbf{h}_r = \mathbf{h}_r \quad \mathbf{S}_r \mathbf{g}_r = \mathbf{g}_r \quad (3.92)$$

Siendo $\mathbf{I}_{|\mathfrak{Q}_r(\mathcal{M})|}$ la matriz identidad de tamaño $|\mathfrak{Q}_r(\mathcal{M})| \times |\mathfrak{Q}_r(\mathcal{M})|$ y $\mathbf{S}_r$ la matriz de simetría del núcleo de Volterra de orden r .

3.3.2. Sistema de identificación mediante secuencias MLS

En [Reed y Hawksford \[1996\]](#) se propone un nuevo método de identificación, en el que mediante el control de la entrada $\mathbf{u}$ y explotando la simetría de los coeficientes de Volterra, es posible transformar el problema en una inversión matricial. En esta sección se reformula por completo este algoritmo basándose en lo expuesto en la Sección 3.3.1 y en la forma matricial de la convolución de Volterra.

Si se retoma la estructura expuesta en la Figura 3.24, el banco de filtros $\mathbf{f}$, que emplea secuencias [MLS](#), genera en este caso una base ortonormal definida por la matriz $\mathbf{M}$. Las filas de esta matriz se corresponden con secuencias [MLS](#) de tamaño M , obtenidas mediante registros de desplazamiento [Cohn y Lempel \[1977\]](#). Para asegurar que la matriz $\mathbf{M}$ cumple la propiedad de ortonormalidad, las filas de la matriz son el resultado del desplazamiento circular de la primera secuencia una posición para cada fila, $m_i[n] = m_0[(n+i)]$. Las secuencias están normalizadas de tal forma que cumplen que $\mathbf{m}_i \mathbf{m}_j^T = 1$ si $i = j$ y cero en el resto. De esta forma se consigue reducir la problemática de la identificación de sistemas no lineales a partir de los G-funcionales propuestos por Wiener.

Tenemos entonces que esta matriz se corresponde con:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_0 & \mathbf{m}_1 & \dots & \mathbf{m}_{M-1} \\ m_0[0] & m_0[1] & \dots & m_0[M-1] \\ m_0[1] & \dots & m_0[M-1] & m_0[0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_0[M-1] & m_0[0] & \dots & m_0[M-2] \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \mathbf{m}_0 \\ \mathbf{m}_1 \\ \dots \\ \mathbf{m}_{M-1} \end{matrix} \quad \mathbf{M} \mathbf{M}^T = \mathbf{I}_M \quad (3.93)$$

Para que el sistema quede completamente definido es necesario calcular $|\mathfrak{Q}(\mathcal{M})|$ coeficientes que forman $\mathbf{g}$. Por tanto, en un principio, serán necesarias al menos el mismo número de muestras de la salida $y[n]$ para determinar estos coeficientes y plantear la ecuación (3.65) en modo matricial:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{g}} \quad (3.94)$$

Por comodidad en la demostración posterior, no se contempla la posibilidad de aplicar una ganancia a la señal de entrada, aunque en [Reed y Hawksford \[1996\]](#) ya se contempla.

Para llegar a esta expresión se parte de (3.65), empleando la nueva base y las matrices de reducción y expansión definidas en (3.79) y en (3.83) :

$$y[n] = \sum_{r=1}^N \mathbf{u}_n^{[r]*} \underbrace{\mathbf{M}^{[r]*} \mathbf{P}_r \mathbf{Q}_r \mathbf{g}_r}_{\mathbf{h}_r} \quad (3.95)$$

La matriz $\mathbf{A}$ se corresponderá entonces con:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \mathbf{M} \mathbf{P}_1 & (\mathbf{u}_0 \mathbf{M})^{[2]*} \mathbf{P}_2 & \dots & (\mathbf{u}_0 \mathbf{M})^{[N]*} \mathbf{P}_N \\ \mathbf{u}_1 \mathbf{M} \mathbf{P}_1 & (\mathbf{u}_1 \mathbf{M})^{[2]*} \mathbf{P}_2 & & (\mathbf{u}_1 \mathbf{M})^{[N]*} \mathbf{P}_N \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{u}_{|\Omega(\mathcal{M})|-1} \mathbf{M} \mathbf{P}_1 & (\mathbf{u}_{|\Omega(\mathcal{M})|-1} \mathbf{M})^{[2]*} \mathbf{P}_2 & & (\mathbf{u}_{|\Omega(\mathcal{M})|-1} \mathbf{M})^{[N]*} \mathbf{P}_N \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

A partir de esta matriz es posible redefinir la expresión (3.95) mediante una multiplicación matricial:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{g} \quad \text{siendo} \quad \mathbf{h}_r = \mathbf{M}^{[r]*} \mathbf{g}_r \quad (3.97)$$

Queda ahora por determinar la generación de las $|\Omega(\mathcal{M})|$ secuencias $\mathbf{u}_i$ que servirán como excitación del sistema. En Reed y Hawksford [1996], para simplificar el análisis de la matriz $\mathbf{A}$, se opta por una matriz de excitación formada por $|\Omega(\mathcal{M})|$ filas de M muestras, a partir de las secuencias $\mathbf{m}$. Para disminuir la longitud de la señal de entrada del sistema, es posible explotar la redundancia existente entre estas filas.

$$\mathbf{x}_i = \sum_{k=1}^{|\mathbf{q}_i|} \mathbf{m}_{\mathbf{q}_i[k]} \quad \text{por tanto} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_0^\top \\ \mathbf{m}_1^\top \\ \dots \\ \mathbf{m}_{M-1}^\top \\ \hline \mathbf{m}_0^\top + \mathbf{m}_1^\top \\ \mathbf{m}_0^\top + \mathbf{m}_1^\top \\ \dots \\ \mathbf{m}_{M-1}^\top + \mathbf{m}_{M-1}^\top \\ \hline \mathbf{m}_0^\top + \mathbf{m}_0^\top + \mathbf{m}_0^\top \\ \dots \\ \mathbf{m}_{M-1}^\top + \mathbf{m}_{M-1}^\top + \mathbf{m}_{M-1}^\top \\ \hline \dots \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \mathbf{q}_i \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ M-1 \\ 00 \\ 01 \\ \dots \\ M-1 \ M-1 \\ 000 \\ \dots \\ M-1 \ M-1 \ M-1 \\ \dots \end{matrix} \quad (3.98)$$

Si observamos la definición de la matriz $\mathbf{A}$ expuesta en (3.96), e indexamos sus elementos mediante el conjunto I :

$$a_{ij} = \mathbf{x}_i^{[r]*} \bigotimes_{s=1}^r \mathbf{m}_{\mathbf{q}_j[s]} \quad \left| \quad i, j \in I \wedge r = |\mathbf{q}_j| \right. \quad (3.99)$$

A partir de la regla del producto mixto, siendo $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}_i$ vectores columna del mismo tamaño, se cumple que $(\mathbf{a}^\top)^{[r]*} (\mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{b}_r) = \mathbf{a}^\top \mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{a}^\top \mathbf{b}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{a}^\top \mathbf{b}_r$ y la expresión anterior queda reducida a:

$$a_{i,j} = \prod_{s=1}^{|\mathbf{q}_j|} \sum_{k=1}^{|\mathbf{q}_i|} \delta(\mathbf{q}_i[k] - \mathbf{q}_j[s]) \quad (3.100)$$

Esta matriz contiene un gran número de elementos nulos, lo que facilita su inversión para la posterior obtención de los coeficientes $\mathbf{g}$. Finalmente, a través de (3.97), obtenemos los núcleos de Volterra.

Coste computacional del algoritmo de identificación mediante MLS y estrategias de indexación.

El algoritmo propuesto trata de minimizar la carga computacional aprovechando la que la matriz $\mathbf{A}$ contiene dependencias que siguen un patrón determinado. Más concretamente, este algoritmo se divide en iteraciones en las que se calculan aquellos coeficientes que tienen k elementos diferentes en la secuencia que los indexa. Por ello, es necesario que definamos un nuevo grupo atendiendo a este tipo de clasificación y basándonos en la indexación propuesta en Kayran y Eksioglu [2005].

Denotamos como $\dot{\mathbf{u}}$ al número de elementos diferentes que se encuentran contenidos en la secuencia $\mathbf{u}$. Éste, evidentemente, no ha de coincidir necesariamente con su cardinalidad ($|\mathbf{u}|$), ya que nos encontramos clasificando un grupo de secuencias en el que está permitida la repetición de elementos.

Definimos ahora $\mathcal{U}_r(\mathcal{M})$ como el conjunto ordenado de todas las posibles combinaciones con repetición con un número de elementos diferentes r :

$$\{\mathbf{u} \in \mathcal{U}_r(\mathcal{M}) \mid \mathbf{u} \in \mathcal{Q}(\mathcal{M}) \wedge \dot{\mathbf{u}} = r\} \quad (3.101)$$

El criterio de ordenación en este caso será similar al empleado para ordenar los conjuntos $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ y $\mathcal{Q}(\mathcal{M})$, con una ligera variación para tener en cuenta la longitud de la secuencia. Así, para evitar la ambigüedad que supone el elemento 0 a la hora de diferenciar secuencias de distinta longitud, al inicio de la secuencia, se propone el siguiente criterio unívoco de ordenación:

$$\left\{ S(\mathbf{e}) = \sum_{i=0}^{p-1} (e[i] + 1) M^{p-i-1} \mid |\mathbf{e}| = p \right\} \quad \text{podemos asegurar que} \quad S(\mathbf{e}_1) > S(\mathbf{e}_2) \Leftrightarrow \mathbf{e}_1 \succ \mathbf{e}_2 \quad (3.102)$$

Cada uno de estos conjuntos ordenados $\mathcal{U}_r$ a su vez se puede dividir en grupos atendiendo a su cardinalidad:

$$\{\mathbf{u} \in \mathcal{U}_r^t(\mathcal{M}) \mid \dot{\mathbf{u}} = r \wedge |\mathbf{u}| = t\} \quad (3.103)$$

Debido al criterio de ordenación impuesto en (3.102), el grupo $\mathcal{U}_r(\mathcal{M})$ será el resultado de la siguiente concatenación:

$$\mathcal{U}_r(\mathcal{M}) := [\mathcal{U}_r^r(\mathcal{M}) \mathbin{++} \mathcal{U}_r^{r+1}(\mathcal{M}) \cdots \mathbin{++} \mathcal{U}_r^N(\mathcal{M})] \quad \{\mathcal{U}_r^t(\mathcal{M}) = \emptyset \mid t > r\} \quad (3.104)$$

Para formar el conjunto completo de todas las secuencias que conforman nuestros núcleos recurrimos de nuevo a la concatenación:

$$\mathcal{U}(\mathcal{M}) := [\mathcal{U}_1(\mathcal{M}) \mathbin{++} \mathcal{U}_2(\mathcal{M}) \cdots \mathbin{++} \mathcal{U}_N(\mathcal{M})] \quad (3.105)$$

Este conjunto ordenado de secuencias $\mathbf{u} \in \mathcal{U}(\mathcal{M})$ se indexa mediante el conjunto mediante el conjunto de enteros $\mathcal{S} := \left\{ 1, 2, \dots, \sum_{s=1}^N \binom{M+s-1}{s} \right\}$:

$$\{\mathbf{u}_s := [\mathcal{U}(\mathcal{M})]_s \mid \mathbf{u}_s \in \mathcal{U}(\mathcal{M}) \wedge s \in \mathcal{S}\} \quad (3.106)$$

El conjunto $\mathcal{S}$ se divide en N grupos diferentes, en los que cada uno indexa a aquellas secuencias que contienen

$$\begin{array}{c}
\mathcal{W}_1 \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \right\} \mathcal{S}_1 \left\{ \begin{array}{l} 1 : [0] \\ 2 : [1] \\ 3 : [2] \\ 4 : [0, 0] \\ 5 : [0, 0] \\ 6 : [1, 1] \\ 7 : [2, 2] \\ 8 : [0, 0, 0] \\ 9 : [1, 1, 1] \\ 10 : [2, 2, 2] \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{U}_1^1(\mathcal{M}) \\ \mathfrak{U}_1^2(\mathcal{M}) \\ \mathfrak{U}_1^3(\mathcal{M}) \end{array} \right\} \mathfrak{U}_1(\mathcal{M}) \\
\mathcal{W}_2 \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \right\} \mathcal{S}_2 \left\{ \begin{array}{l} 11 : [0, 1] \\ 12 : [0, 2] \\ 13 : [1, 2] \\ 14 : [0, 0, 1] \\ 15 : [0, 0, 2] \\ 16 : [0, 1, 1] \\ 17 : [1, 1, 2] \\ 18 : [1, 2, 2] \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{U}_2^2(\mathcal{M}) \\ \mathfrak{U}_2^3(\mathcal{M}) \end{array} \right\} \mathfrak{U}_2(\mathcal{M}) \\
\mathcal{W}_3 \left\{ 1 \right\} \mathcal{S}_3 \left\{ 19 : [0, 1, 2] \right\} \mathfrak{U}_3^3(\mathcal{M}) \mathfrak{U}_3(\mathcal{M})
\end{array}
\left. \vphantom{\begin{array}{c} \mathcal{W}_1 \\ \mathcal{W}_2 \\ \mathcal{W}_3 \end{array}} \right\} \mathfrak{U}(\mathcal{M})$$

FIGURA 3.26: Conjunto ordenado de las secuencias pertenecientes a $\mathfrak{U}(\mathcal{M})$ y sus correspondientes índices para $M = 3$ y $N = 3$.

el mismo número de elementos distintos $r, S := [s_1 \uparrow s_2 \uparrow \dots \uparrow s_N]$ siendo:

$$\{S \in \mathcal{S}_r \mid \mathbf{u}_s \in \mathfrak{U}_r(\mathcal{M}) \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_s = r\} \quad (3.107)$$

En la Figura 3.26 se muestra un pequeño ejemplo en el que se ilustra este tipo de clasificación y su correspondiente indexación. Este nuevo conjunto, contiene todos los elementos presentes en $\mathfrak{U}(\mathcal{M})$. Así, y sin tener en cuenta el criterio de ordenación⁴, podemos asegurar que $\tilde{\mathfrak{U}}(\mathcal{M}) = \tilde{\mathfrak{Q}}(\mathcal{M})$. Además contamos con la siguiente relación entre estos grupos y que determinará el orden en el que se calculan los núcleos dentro del algoritmo:

$$\tilde{\mathfrak{Q}}_t(\mathcal{M}) = [\tilde{\mathfrak{U}}_1^t(\mathcal{M}) \cup \tilde{\mathfrak{U}}_2^t(\mathcal{M}) \cup \dots \cup \tilde{\mathfrak{U}}_t^t(\mathcal{M})] \quad (3.108)$$

Esta relación queda demostrada por la identidad de Vandermonde. También se la conoce como convolución de Vandermonde y fue formulada a principios del s. XIV por Zhu Shijie. Una buena referencia sobre este particular y otros problemas relacionados con algoritmia la encontramos en Knuth [1973].

La cardinalidad de este conjunto se puede obtener mediante:

$$|\tilde{\mathfrak{Q}}_t(\mathcal{R}_M)| = \sum_{k=1}^{\min(M,t)} |\mathfrak{B}_k(\mathcal{R}_M)| |\mathfrak{Q}_k(\mathcal{R}_{t-k})| \quad (3.109)$$

Siendo el conjunto $\mathcal{R}_x = \{1, 2, \dots, x\}$. Por tanto se cumple que:

$$\binom{M+t-1}{N} = \sum_{k=1}^{\min(M,t)} \binom{M}{k} \binom{t-1}{t-k} \quad (3.110)$$

⁴Al igual que en el caso de las combinaciones, denotaremos como $\tilde{\mathfrak{U}}(\mathcal{M})$ al conjunto $\mathfrak{U}(\mathcal{M})$ sin atender a criterios de orden

FIGURA 3.27: Representación del reparto del coste computacional del algoritmo de identificación por grados

La interpretación conceptual de esta identidad es sencilla: si queremos determinar las secuencias con k elementos diferentes de tamaño t que pertenezcan a las combinaciones con repetición de tamaño t , es necesario calcular las posibles combinaciones de los k elementos y añadir las repeticiones posibles mediante las combinaciones con repetición de estos mismos k -s para los elementos de la secuencia restantes $(t - k)$. Si sumamos el número de secuencias de tamaño t y de k elementos distintos, contemplando $k = 1 \dots t$, obtenemos todas las combinaciones con repetición de tamaño t . Esto coincide con lo expuesto en (3.108).

En nuestro algoritmo, es importante determinar el tamaño de los conjuntos $\mathfrak{U}_r(\mathcal{M})$, ya que éstos representan el número de coeficientes calculados por cada iteración del algoritmo. Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, este número se puede calcular como:

$$|\mathfrak{U}_r(\mathcal{R}_M)| = \sum_{t=r}^N |\mathfrak{B}_r(\mathcal{R}_M)| |\Omega_r(\mathcal{R}_{t-r})| = \sum_{t=r}^N \binom{M}{r} \binom{t-1}{t-r} \quad (3.111)$$

El número de iteraciones necesarias es equivalente al máximo orden a determinar, ya que en cada iteración quedan definidos los coeficientes correspondientes a todas las combinaciones con repetición de tamaño $1, \dots, k$, más aquellas combinaciones, que perteneciendo a órdenes superiores no poseen más de k -elementos diferentes. Esta estrategia se refleja en la Figura 3.27. Así, cada iteración que supone un avance en el eje vertical del gráfico, implica la estimación de todos aquellos coeficientes contenidos en ese nivel. Este orden no ha de ser estricto, por ejemplo en Tyril et al. [2000] se demuestra que es posible obtener un núcleo de orden superior sin necesidad de conocer los anteriores, basándose en esta misma técnica. Sin embargo, si aplicamos el algoritmo de forma tradicional, una vez estimados k órdenes, éste se puede detener si se detecta que el sistema ha sido caracterizado de forma correcta teniendo en cuenta estos k órdenes, sin necesidad de aumentar considerablemente el coste computacional.

Al inicio de cada iteración k se genera el grupo ordenado de las combinaciones sin repetición de k elementos ($\mathfrak{B}_k(\mathcal{M})$). Este grupo se indexará mediante $\mathcal{R}$.

$$\{r \in \mathcal{R} \mid \mathbf{b}_r \in \mathfrak{B}_k(\mathcal{M})\} \quad \text{siendo} \quad \mathcal{R} = \left\{ 1, 2, \dots, \binom{M}{k} \right\} \quad (3.112)$$

También es necesario generar aquellas secuencias de los coeficientes que han sido calculados en iteraciones anteriores, y de los que vayan a depender los coeficientes correspondientes a la iteración k .

$$\mathfrak{V}_k(\mathcal{R}_k) := \mathcal{O} \left(\tilde{\mathfrak{U}}_1(\mathcal{R}_k) \cup \tilde{\mathfrak{U}}_2(\mathcal{R}_k) \cup \dots \cup \tilde{\mathfrak{U}}_{k-1}(\mathcal{R}_k) \right) \quad (3.113)$$

Nótese que estas secuencia se genera únicamente a través de k elementos diferentes, y servirán de patrón para acceder a los elementos de la salida correspondientes. El número de secuencias que forman este grupo se calcula

aplicando la misma filosofía que en (3.111).

$$|\mathfrak{V}_k(\mathcal{R}_k)| = \sum_{r=1}^{k-1} |\mathfrak{U}_r(\mathcal{R}_k)| = \sum_{r=1}^{k-1} \binom{k}{r} \sum_{t=1}^N \binom{t-1}{t-r} \quad (3.114)$$

La indexación de este grupo se realiza mediante el grupo de índices $\mathcal{V}'_k$:

$$\{v \in \mathcal{V}'_k \mid \mathbf{v}_v \in \mathfrak{V}_k(\mathcal{R}_k)\} \quad \text{siendo} \quad \mathcal{V}'_k = \{1, 2, \dots, |\mathfrak{V}_k(\mathcal{R}_k)|\} \quad (3.115)$$

El siguiente grupo patrón necesario es $\mathfrak{U}_k(\mathcal{R}_k)$ determinado a partir de (3.104). El grupo de índices en este caso se denotará tal y como se muestra reflejado en la Figura 3.26, mediante $\mathcal{W}'_k$:

$$\{w \in \mathcal{W}'_k \mid \mathbf{u}_w \in \mathfrak{U}_k(\mathcal{R}_k)\} \quad \text{siendo} \quad \mathcal{W}'_k = \{1, 2, \dots, |\mathfrak{U}_k(\mathcal{R}_k)|\} \quad (3.116)$$

La cardinalidad de este grupo se calcula a partir de (3.111), teniendo en cuenta que en este caso se forman secuencias con sólo k elementos posibles, en vez de M .

A partir de estos grupos patrones y del grupo $(\mathfrak{B}_k(\mathcal{M}))$ se obtienen los índices necesarios para acceder al vector de coeficientes $\mathbf{g}$ y al vector de salida $\mathbf{y}$. En cada iteración k se irán seleccionando las $\mathbf{b}_r$ secuencias que componen $(\mathfrak{B}_k(\mathcal{M}))$. A partir de cada una de estas secuencias $\mathbf{b}_r$ y de los patrones $\mathfrak{V}_k(\mathcal{R}_k)$ y $\mathfrak{U}_k(\mathcal{R}_k)$ se obtienen los dos que generan secuencia pertenecientes a $\Omega(\mathcal{M})$.

El primero de ellos selecciona las secuencias que indican los coeficientes calculados en iteraciones anteriores y que son necesarios para estimar los coeficientes de la nueva iteración:

$$\mathfrak{R}_{k,r}(\mathcal{M}) := \{\mathbf{r}_v = \{\mathbf{b}_r[\mathbf{v}_v[1]], \mathbf{b}_r[\mathbf{v}_v[2]], \dots, \mathbf{b}_r[\mathbf{v}_v[x]]\}, \forall v \in \mathcal{V}'_k \wedge x = |\mathbf{v}_v|\} \quad (3.117)$$

Siendo $\mathfrak{T}_{k,r}(\mathcal{M})$ el conjunto de las secuencias pertenecientes a $\Omega(\mathcal{M})$ que indican los coeficientes de Wiener a estimar $g(\mathbf{t}_w)$:

$$\mathfrak{T}_{k,r}(\mathcal{M}) := \{\mathbf{t}_w = \{\mathbf{b}_r[\mathbf{u}_w[1]], \mathbf{b}_r[\mathbf{u}_w[2]], \dots, \mathbf{b}_r[\mathbf{u}_w[x]]\}, \forall w \in \mathcal{W}'_k \wedge x = |\mathbf{u}_w|\} \quad (3.118)$$

El siguiente paso, es determinar la posición de estos coeficientes dentro de los vectores que contienen tanto la señal de entrada como los coeficientes de Wiener. Dependiendo del tipo de implementación, esta indexación será diferente. En el caso más obvio, la señal de salida se representa mediante un vector $\mathbf{y}$ diezmado de tal forma que se han extraído de la señal original las $|\Omega(M)|$ muestras útiles, ordenándolas siguiendo el criterio de ordenación expuesto en (3.102) y todos los coeficientes de Wiener han sido apilados en un sólo vector, respetando el mismo criterio de ordenación. Por tanto, estos dos vectores pueden ser indexados mediante el conjunto I (véase Figura 3.25).

Para extraer los coeficientes anteriores empleamos:

$$\mathcal{Q} := \{i \mid \exists! v, \mathbf{r}_v = \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_i \in \Omega(\mathcal{M}), \mathcal{Q} \subset I\} \quad (3.119)$$

E indexamos las posiciones de la salida necesarias mediante:

$$\mathcal{P} := \{i \mid \exists! w, \mathbf{t}_w = \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_i \in \Omega(\mathcal{M}), \mathcal{P} \subset I\} \quad (3.120)$$

FIGURA 3.28: Avance de la carga computacional dependiente de los parámetros M y N , debida únicamente al cálculo de los coeficientes $\mathbf{g}$.

Una vez indexados todos los coeficientes y las muestras necesarias, por cada combinación $\mathbf{b}_r$ se realiza la operación que se muestra esquemáticamente en (3.121). Durante la iteración k las matrices $\mathbf{A}_{(new)_k}$ y $\mathbf{A}_{(old)_k}$ permanecen invariantes, y que debido a la definición de la matriz $\mathbf{A}$ completa, sus elementos sólo dependerán de N . Esto implica que estas dos matrices pueden estar contenidas en la memoria del algoritmo y no es necesario su cálculo, así mismo, la inversión de $\mathbf{A}_{(new)_k}$ puede haber sido previamente calculada.

$$|\mathfrak{U}_k(\mathcal{R}_k)| \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_{\mathcal{P}} \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_{(new)_k}^{-1} \cdot \left(\begin{Bmatrix} \mathbf{y}_{\mathcal{P}} \end{Bmatrix} - \overbrace{\mathbf{A}_{(old)_k} \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_{\mathcal{Q}} \end{Bmatrix}}^{|\mathfrak{V}_k(\mathcal{R}_k)| = \sum_{r=1}^{k-1} |\mathfrak{U}_r(\mathcal{R}_k)|} \right) \quad (3.121)$$

Cada ejecución de (3.121) supone $2|\mathcal{P}||\mathcal{Q}| - |\mathcal{P}| + 2|\mathcal{P}|^2$ y de ella se obtienen $|\mathcal{P}|$ coeficientes. Por tanto, si denotamos como $|\mathcal{R}_k|$, $|\mathcal{P}_k|$ y $|\mathcal{Q}_k|$ a las cardinalidades⁵ de los conjuntos $\mathcal{R}$, $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$, tenemos que en cada iteración se produce el siguiente número de operaciones:

$$\#_{c,k} = |\mathcal{R}_k| \left(2|\mathcal{P}_k||\mathcal{Q}_k| - |\mathcal{P}_k| + 2|\mathcal{P}_k|^2 \right) \quad (3.122)$$

Aunque la expresión (3.122) es válida para obtener el número exacto de operaciones que implica cada iteración, es poco intuitiva y no permite obtener una relación directa entre la longitud de la memoria o el orden del sistema a caracterizar y el coste computacional.

Como referencia, en la Tabla 3.8 se muestra el coste computacional por iteración del algoritmo para parámetros de uso estándar en nuestra aplicaciones. Lógicamente, en ella no se incluye el sobrecoste adicional que implica el indexado de tablas. Con la implementación desarrollada para esta Tesis, este supone aproximadamente el 30 % del tiempo de ejecución, aunque este dato es mejorable.

Además de la carga computacional impuesta por la expresión (3.122), hay que añadir las operaciones necesarias para proyectar los coeficientes, y de este modo, obtener los coeficientes de Volterra reales. Así, en el mejor de los casos, esto es disponiendo de tablas de proyección en memoria y explotando la redundancia de los coeficientes, el número de operaciones que conlleva esta proyección se corresponde con:

⁵Aunque los conjuntos $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ varíen con r , su cardinalidad permanece constante para toda la iteración k .

$$\#_{p,k} = 2 |\Omega(\mathcal{M})|^2 + |\Omega(\mathcal{M})| \quad (3.123)$$

Por tanto, cada iteración del algoritmo supone $\#_{c,k} + \#_{p,k}$ operaciones. Desafortunadamente, el coste computacional asociado con la proyección de coeficientes es muy elevado, sin embargo, siempre se pueden aplicar estrategias de selección de cálculo de coeficientes representativos. Un ejemplo de estas estrategias de optimización computacional se presentan en [Tyril et al. \[2000\]](#), en donde los autores se centran en el cálculo de los núcleos de interés y además ajustan la memoria de éstos según conveniencia. En nuestro caso, es posible que esta estrategia no sea la más adecuada, porque, si el modelo real se aproxima al propuesto por el modelo físico, lo natural es seguir el orden tradicional del algoritmo, y obligando al mismo a arrojar valores nulos en aquellos coeficientes que superen una cardinalidad del tipo $|\hat{u}| > \text{cte}$.

Con el fin de aportar una expresión más intuitiva hemos evaluado la expresión (3.122) en un margen de trabajo optimista para así denotar claramente la interrelación existente entre estos tres parámetros y poder aportar una cota superior al algoritmo. La rejilla empleada contiene todos los elementos comprendidos entre 1 y 10 para el valor de N y se contemplan sistemas de memoria de hasta 10000 muestras. La razón de crecimiento de la expresión (3.122) impone resultados muy elevados para términos mínimamente grandes tanto para N como M , por ello es más razonable aportar una aproximación asintótica al logaritmo del número de operaciones.

Para obtener esta representación asintótica se ha aplicado un ajuste polinómico en dos dimensiones a la rejilla descrita anteriormente, mediante un algoritmo de mínimos cuadrados que ha aportado un ajuste adecuado siempre y cuando se empleen valores altos de M . El ajuste polinómico, debido a la gran variación presente en los datos no se adecua en caso de estimar el coste computacional para valores de M del orden de las decenas, pero sí sirve como primera aproximación y la mayor parte de los programas de cálculo matemático son capaces de abordar la expresión (3.122) en estos casos.

$$\begin{aligned} \log_2(\#_p) \approx & 2,052 \cdot 10^{-2} N^3 - 0,504 N^2 + 11,381 N + 1,1496 \cdot 10^{-3} N M - \\ & - 1,377 \cdot 10^{-6} M^2 + 5,513 \cdot 10^{-3} M - 6,761 \end{aligned} \quad (3.124)$$

Iteración (k)	$ Q_k $	$ P_k $	$ R_k $	$\#_c$
1	0	3	63	945
2	6	3	1953	99.603
3	18	1	39711	1.469.307
Total:				1.569.855

TABLA 3.8: Número de operaciones para el cálculo de los coeficientes $\mathbf{g}$

Orden (n)	$ \Omega(\mathcal{M}) $	$\#_p$
1	63	3.906
2	2.016	4.062.240
3	43.680	1.907.898.720
Total:		1.911.964.866

TABLA 3.9: Operaciones relacionadas con la proyección de los coeficientes de Wiener a los de Volterra.

Pérdida de la ortogonalidad debido a la componente continua

Debido a la configuración de nuestro sistema, es imposible asegurar el nivel de continua que existe a la entrada del bloque que queremos caracterizar, lo que en un principio hace que el sistema de identificación mediante composiciones de [MLS](#) sea inviable. Sin embargo, esta desviación sí puede ser estimada, y por lo tanto eliminada teniendo en cuenta ciertas premisas sobre el sistema.

Con el algoritmo propuesto aquí, disponemos de dos parámetros para controlar el punto y el margen de trabajo del sistema: α y ε .

El parámetro α nos permite jugar la amplitud de la señal de entrada al sistema a caracterizar, sin embargo las secuencias **MLS** imponen una entrada de media predeterminada. En un principio no debería suponer un problema, ya que la mayoría de los sistemas a caracterizar suelen admitir entradas que trabajan en un margen dinámico de media aproximada a las de las secuencias **MLS** normalizadas, sin embargo, en ciertas aplicaciones, como la de las estructuras de *arrays paramétricos*, esta limitación es determinante.

La señal de entrada para el análisis se encuentra desplazada en continua un valor normalizado de ε conocido, lo que implica que la salida generada por el sistema se corresponde con:

$$y(n) = \sum_{r=1}^N (1/\alpha)^r (\mathbf{u}_n + \varepsilon)^{[r]} \mathbf{h}_r \quad (3.125)$$

Esto implica que la matriz $\mathbf{A}$ empleada para obtener los coeficientes $\mathbf{g}$ en (3.97) se modificará, y por tanto obtendremos unos nuevos coeficientes $\tilde{\mathbf{g}}$, desviados. Al aplicar la ecuación que proyecta estos coeficientes, se obtienen unos núcleos de Volterra $\tilde{\mathbf{h}}_r$, desviados.

Teniendo en cuenta que la señal de salida y va a estar generada por una señal de entrada perturbada, al aplicar el sistema de medición estamos realizando la siguiente equivalencia:

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{g}} = \hat{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{g}} \quad (3.126)$$

La matriz que se invierte en este caso es $\mathbf{A}$, cuando en realidad debería ser $\tilde{\mathbf{A}}$. Se trata ahora de determinar la naturaleza de la perturbación que provoca esta desviación sobre los coeficientes de Volterra, y por tanto determinar la relación existente entre $\mathbf{h}$ y $\tilde{\mathbf{h}}$, para proponer posteriormente un algoritmo rápido de corrección.

Relación entre los coeficientes estimados y reales

En esta sección se realizará un estudio que determinará la desviación que provoca en la estimación de los coeficientes de Volterra la imposición de una componente continua a la entrada del sistema, asociada a la señal de excitación.

La matriz de excitación $\mathbf{X}$ definida en (3.98) pasa a ser $\tilde{\mathbf{X}}$, cuyas filas se corresponden con:

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \alpha \left(\varepsilon^T + \sum_{k=1}^{|\mathbf{q}_i|} \mathbf{m}_{\mathbf{q}_i[k]} \right) \quad (3.127)$$

Siendo ε el vector columna de tamaño M , formado por los elementos constantes ε , que representan el valor normalizado de continua presente a la entrada del sistema y α el factor que nos permite modificar la amplitud de la señal de entrada.

Por tanto, la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ que contiene la información de la entrada del sistema se redefine a partir de la expresión (3.96) y de las nuevas secuencias de entrada reflejadas en (3.127). El valor de sus elementos se corresponde con:

$$\tilde{a}_{ij} = \tilde{\mathbf{x}}_i^{[r]} \bigotimes_{s=1}^r \mathbf{m}_{\mathbf{q}_j[s]} = \alpha^r \left(\varepsilon^T + \sum_{k=1}^{|\mathbf{q}_i|} \mathbf{m}_{\mathbf{q}_i[k]} \right)^{[r]} \bigotimes_{s=1}^r \mathbf{m}_{\mathbf{q}_j[s]} \quad \left| \quad i, j \in I \wedge r = |\mathbf{q}_j| \right. \quad (3.128)$$

Aplicando de nuevo la propiedad del producto mixto de Kronecker, al igual que para obtener (3.100) y teniendo en cuenta que $\mathbf{1}_M^T \mathbf{M} = \mathbf{1}_M^T$ siendo $\mathbf{1}_M$ el vector columna de tamaño M cuyos elementos son iguales a la unidad:

$$\tilde{a}_{ij} = \alpha^r \prod_{s=1}^r \left(\varepsilon + \sum_{k=1}^{|\mathbf{q}_i|} \delta(\mathbf{q}_i[k] - \mathbf{q}_j[s]) \right) \left| i, j \in I \wedge r = |\mathbf{q}_j| \right. \quad (3.129)$$

Una vez definidas las matrices $\mathbf{A}$ y $\tilde{\mathbf{A}}$, a partir de la expresión (3.126), se puede hallar la relación entre los coeficientes proyectados reales ($\mathbf{g}$) y los perturbados ($\tilde{\mathbf{g}}$) por la continua y el cambio de amplitud a la entrada:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \tilde{\mathbf{g}}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \tilde{\mathbf{g}}_2 \\ \dots \\ \mathbf{Q}_N \tilde{\mathbf{g}}_N \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \mathbf{g}_2 \\ \dots \\ \mathbf{Q}_N \mathbf{g}_N \end{bmatrix} \quad (3.130)$$

A partir de aquí se denotará como subíndice $[\mathbf{X}]_{\mathcal{Y}\mathcal{Z}}$ a la selección de los elementos de la matriz $\mathbf{X}$ comprendidos por las filas indexadas mediante el conjunto de índices $\mathcal{Y}$ y las columnas indexadas mediante el conjunto $\mathcal{Z}$. La selección completa tanto de filas como de columnas se denotará mediante un punto ($\bullet$):

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \mathbf{x}_{11} & \mathbf{x}_{12} & \mathbf{x}_{13} & \mathbf{x}_{14} \\ \mathbf{x}_{21} & \mathbf{x}_{22} & \mathbf{x}_{23} & \mathbf{x}_{24} \\ \mathbf{x}_{31} & \mathbf{x}_{32} & \mathbf{x}_{33} & \mathbf{x}_{34} \\ \mathbf{x}_{41} & \mathbf{x}_{42} & \mathbf{x}_{43} & \mathbf{x}_{44} \end{matrix} \end{matrix} \end{matrix} \end{matrix} \end{bmatrix} [\mathbf{X}]_{\mathcal{W}\bullet} \quad \text{siendo} \quad \begin{matrix} \mathcal{W} = \{2, 3\} \\ \mathcal{Y} = \{1, 2\} \\ \mathcal{Z} = \{2, 3, 4\} \end{matrix} \quad (3.131)$$

Siguiendo con esta nomenclatura podemos expresar (3.130) aplicado la multiplicación matricial por partes:

$$\mathbf{Q}_r \tilde{\mathbf{g}}_r = \left[[\mathbf{A}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}]_{\bullet, I_1} \mathbf{Q}_1 \mathbf{g}_1 \mid [\mathbf{A}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}]_{\bullet, I_2} \mathbf{Q}_2 \mathbf{g}_2 \mid \dots \mid [\mathbf{A}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}]_{\bullet, I_N} \mathbf{Q}_N \mathbf{g}_N \right]_{I_r \bullet} \quad (3.132)$$

Sabemos que $\mathbf{P}_r \mathbf{Q}_r = \mathbf{S}_r$, siendo $\mathbf{S}_r$ la matriz de simetría correspondiente al orden r . Como los coeficientes $\tilde{\mathbf{g}}$ poseen la misma simetría que $\tilde{\mathbf{h}}$, se cumple que $\mathbf{S}_r \tilde{\mathbf{g}}_r = \tilde{\mathbf{g}}_r$, con lo que combinando (3.132) con la relación existente entre los coeficientes $\mathbf{g}$ y $\mathbf{h}$ (3.97), obtenemos que:

$$\tilde{\mathbf{h}}_r = \mathbf{M}^{[r]\bullet} \mathbf{P}_r \left[[\mathbf{A}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}]_{\bullet, I_1} \mathbf{Q}_1 \mathbf{M}^T \mid [\mathbf{A}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}]_{\bullet, I_2} \mathbf{Q}_2 (\mathbf{M}^T)^{[2]\bullet} \mid \dots \mid [\mathbf{A}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}]_{\bullet, I_N} \mathbf{Q}_N (\mathbf{M}^T)^{[N]\bullet} \right]_{I_r \bullet} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \\ \dots \\ \mathbf{h}_N \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

Para facilitar el análisis de del producto $\mathbf{A}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}$, y teniendo en cuenta que ambas matrices han sido generadas a partir de operaciones punto a punto, podemos descomponer la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ en sumas de matrices $\Upsilon_{\mathbf{t}}^{xz}$, donde z indica el orden de los coeficientes a proyectar y $\mathbf{t}$ es una secuencia de tamaño x , siendo $x \leq z$ y $\mathbf{t}$ perteneciente a la combinaciones sin repetición de tamaño x de z elementos. La indexación a nivel de columnas se realiza en este caso mediante el conjunto de índices $\mathcal{L}_r$ (véase la Figura 3.25), y denotamos $\mathfrak{B}_x(\mathcal{Z})$ como las combinaciones sin repetición de tamaño x de los elementos del conjunto $\mathcal{Z}$.

$$\exists! \Upsilon_{\mathbf{t}}^{xz} \left| v_{\mathbf{t}}^{xz}(i, l) = \prod_{n=1}^x \sum_{k=1}^{|\mathbf{q}_i|} \delta(\mathbf{q}_i[k] - \mathbf{q}_l[\mathbf{t}[n]]) \quad \begin{matrix} \forall \mathbf{q}_i \in \Omega(\mathcal{M}) & \forall \mathbf{q}_l \in \Omega_z(\mathcal{M}) \\ \mathbf{t} \in \mathfrak{B}_x(\mathcal{Z}) \text{ siendo } \mathcal{Z} := \{1, \dots, z\} \end{matrix} \quad (3.134)$$

Así, por ejemplo, según la definición anterior, para $M = 3$, $N = 3$ y $\mathbf{t} = \{1, 3\}$:

$$\mathbf{r}_{\{13\}}^{23} = \begin{matrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{array} \right] \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 00 \\ 01 \\ 02 \\ 11 \\ 12 \\ 22 \\ 000 \\ 001 \\ 002 \\ 011 \\ 012 \\ 022 \\ 111 \\ 112 \\ 122 \\ 222 \end{matrix} \end{matrix}$$

A partir de (3.72) y de la definición de los elementos de las matrices $\mathbf{r}_{\mathbf{t}}^{xz}$ podemos expresar $\mathbf{A}$ como

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{r}_{\{1\}}^{11} \mid \mathbf{r}_{\{1,2\}}^{22} \mid \mathbf{r}_{\{1,2,3\}}^{33} \mid \dots \right] \quad (3.135)$$

y su homóloga con perturbaciones debidas al factor de ganancia introducido y a la señal continua presente en la entrada como:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \alpha \mathbf{r}_{\{1\}}^{11} + \alpha \mathbf{E}_1 & \alpha^2 \mathbf{r}_{\{1,2\}}^{22} + \alpha^2 \varepsilon \mathbf{r}_{\{1\}}^{12} + \alpha^2 \varepsilon \mathbf{r}_{\{2\}}^{12} + \alpha^2 \mathbf{E}_2^{[2]_{\circ}} & \alpha^3 \mathbf{r}_{\{1,2,3\}}^{33} + \alpha^3 \varepsilon \mathbf{r}_{\{1,2\}}^{23} + \alpha^3 \varepsilon \mathbf{r}_{\{1,3\}}^{23} + \alpha^3 \varepsilon \mathbf{r}_{\{2,3\}}^{23} + \alpha^3 \varepsilon^2 \mathbf{r}_{\{1\}}^{13} + \alpha^3 \varepsilon^2 \mathbf{r}_{\{2\}}^{13} + \alpha^3 \varepsilon^2 \mathbf{r}_{\{3\}}^{13} + \alpha^3 \mathbf{E}_3^{[3]_{\circ}} & \dots \end{array} \right] \quad (3.136)$$

Donde $\mathbf{E}_z$ es una matriz cuyos elementos son constantes e iguales a ε y de $|\mathcal{Q}(\mathcal{M})|$ filas y $|\mathcal{Q}_z(\mathcal{M})|$ columnas. El producto Hadamard z veces sobre esta matriz se indica como $\mathbf{E}^{[z]_{\circ}}$.

Por tanto el producto $\mathbf{A}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}$ se puede descomponer en las siguiente suma de matrices:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} = & \overbrace{\begin{bmatrix} \alpha \mathbf{I}_{|I_1|} & \mathbf{0}_{|I_1|,|I_2|} & \mathbf{0}_{|I_1|,|I_3|} & \cdots & \mathbf{0}_{|I_1|,|I_N|} \\ \mathbf{0}_{|I_2|,|I_1|} & \alpha^2 \mathbf{I}_{|I_2|} & \mathbf{0}_{|I_2|,|I_3|} & \cdots & \mathbf{0}_{|I_2|,|I_N|} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{|I_N|,|I_1|} & \mathbf{0}_{|I_N|,|I_2|} & \cdots & \cdots & \alpha^N \mathbf{I}_{|I_N|} \end{bmatrix}}^{\hat{\alpha} \mathbf{I}} + \overbrace{\mathbf{A}^{-1} \left[\alpha \mathbf{E}_1 \mid \alpha^2 \mathbf{E}_2^{[2]_{\circ}} \mid \alpha^3 \mathbf{E}_3^{[3]_{\circ}} \mid \cdots \right]}^{\text{Componente de continuidad}} + \\
 & + \mathbf{A}^{-1} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{0}_{|\Omega(\mathcal{M})|,M} & \alpha^2 \varepsilon \left(\Upsilon_{\{1\}}^{12} + \Upsilon_{\{2\}}^{12} \right) & \alpha^3 \varepsilon \left(\Upsilon_{\{1,2\}}^{23} + \Upsilon_{\{1,3\}}^{23} + \Upsilon_{\{2,3\}}^{23} \right) + \\ & + \alpha^3 \varepsilon^2 \left(\Upsilon_{\{1\}}^{13} + \Upsilon_{\{2\}}^{13} + \Upsilon_{\{3\}}^{13} \right) & \cdots \end{array} \right]}_{\text{Intrusión de otros órdenes}}
 \end{aligned} \quad (3.137)$$

De la expresión (3.130) y de (3.137) se puede observar que los coeficientes $\tilde{\mathbf{g}}$ contienen los coeficientes $\mathbf{g}$ ponderados mediante la ganancia α más dos términos.

A partir de aquí se denotará como $\hat{\alpha} \mathbf{I}$ a la matriz identidad de tamaño $I \times I$ ponderada por α^r siendo r el orden correspondiente a los índices determinados por I , como se refleja en (3.137), y a su equivalente, indexada mediante J de tamaño $J \times J$ como $\alpha \mathbf{I}$.

El objetivo es definir una matriz de proyección que relacione ambos conjuntos de coeficientes. Debido a la naturaleza de los sumandos que integran la expresión (3.137), éstos se separaran en dos conjuntos. El primero de ellos, correspondiente al segundo sumando de (3.137), va a proyectar sobre los coeficientes $\tilde{\mathbf{h}}$ los coeficientes $\mathbf{h}$ reales, mediante la matriz de proyección $\mathbf{K}_{Er}$, mientras que el tercer sumando lo hará mediante $\mathbf{K}_{Tr}$.

A partir de (3.133), y teniendo en cuenta que tanto las sumas de las filas de las matrices que forman la base, como las de reducción y expansión de coeficientes, suman la unidad:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{Er} &= \mathbf{M}^{[r]_{\circ}} \mathbf{P}_r \left[\alpha \varepsilon \mathbf{A}^{-1} \mathbf{1}_{|I|} \mathbf{1}_{|I_1|}^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{M}^T \mid \cdots \mid \alpha^N \varepsilon^N \mathbf{A}^{-1} \mathbf{1}_{|I|} \mathbf{1}_{|I_N|}^T \mathbf{Q}_r (\mathbf{M}^T)^{[r]_{\circ}} \right]_{I_r} \bullet \\
 &= \mathbf{M}^{[r]_{\circ}} \mathbf{P}_r \left[\alpha \varepsilon \mathbf{A}^{-1} \mathbf{U}_{|I|,|J_1|} \mid \cdots \mid \alpha^N \varepsilon^N \mathbf{A}^{-1} \mathbf{U}_{|I|,|J_N|} \right]_{I_r} \bullet
 \end{aligned} \quad (3.138)$$

Siendo $\mathbf{1}_x$ el vector columna de tamaño x y $\mathbf{U}_{xz}$ la matriz de unos de tamaño $x \times z$. Por tanto:

$$\mathbf{K}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_{I_1}^{-1} \bullet \\ \mathbf{M}^{[2]_{\circ}} \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_{I_2}^{-1} \bullet \\ \vdots \\ \mathbf{M}^{[N]_{\circ}} \mathbf{P}_N \mathbf{A}_{I_N}^{-1} \bullet \end{bmatrix} \left[\alpha \mathbf{E}_1 \mid \alpha^2 \mathbf{E}_2^{[2]_{\circ}} \mid \alpha^3 \mathbf{E}_3^{[3]_{\circ}} \mid \cdots \right] \quad (3.139)$$

Siendo ahora $\mathbf{E}_x$ una matriz cuyos elementos son constantes e iguales a ε y de $|I|$ filas y $|J_x|$ columnas.

En un principio para calcular la contribución a los coeficientes, de $\mathbf{K}_{Er}$ de la expresión (3.138) es necesario calcular la matriz $\mathbf{A}^{-1}$. Sin embargo, podemos evitar esta operación teniendo en cuenta que:

$$\left[\mathbf{A}_{\bullet I_1} \mathbf{Q}_1 \mid \mathbf{A}_{\bullet I_2} \mathbf{Q}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{A}_{\bullet I_N} \mathbf{Q}_N \right] \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_{I_1}^{-1} \bullet \\ \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_{I_2}^{-1} \bullet \\ \vdots \\ \mathbf{P}_N \mathbf{A}_{I_N}^{-1} \bullet \end{bmatrix} = \mathbf{I}_{|I|} \quad (3.140)$$

Si multiplicamos a ambos lados de la expresión (3.140) por la matriz $\begin{bmatrix} \alpha \mathbf{E}_1 & \alpha^2 \mathbf{E}_2^{[2]_{\circ}} & \alpha^3 \mathbf{E}_3^{[3]_{\circ}} & \dots \end{bmatrix}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\bullet, l_1} \mathbf{Q}_1 & \dots & \mathbf{A}_{\bullet, l_N} \mathbf{Q}_N \end{bmatrix}}_{\text{Matriz 1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M} \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_{l_1}^{-1} \\ \mathbf{M}^{[2]_{\circ}} \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_{l_2}^{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{M}^{[N]_{\circ}} \mathbf{P}_N \mathbf{A}_{l_N}^{-1} \end{bmatrix}}_{\text{Matriz 2}} \begin{bmatrix} \alpha \mathbf{E}_1 & \dots & \alpha^N \mathbf{E}_N^{[N]_{\circ}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \mathbf{E}_1 & \dots & \alpha^N \mathbf{E}_N^{[N]_{\circ}} \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

La Matriz 1 de (3.141) tiene como propiedad que el sumatorio de los elementos que forman cada una de las filas de las particiones r es constante para todas las filas que pertenezcan a un i del mismo orden s , ya que:

$$\sum_{j \in \mathcal{J}_r} \prod_{l=1}^r \sum_{k=1}^{|\mathbf{q}_i|} \delta(\mathbf{q}_i[k] - \mathbf{b}_j[l]) = |\mathcal{D}_r(\mathcal{S})| = |\mathbf{q}_i|^r \quad \text{siendo } \mathcal{S} = \{1, \dots, |\mathbf{q}_i|\} \quad (3.142)$$

A pesar de desconocer a priori el primer factor del producto que compone la Matriz 2 de (3.141), podemos determinar que ésta se compondrá de filas cuyos elementos serán constantes. Teniendo en cuenta (3.141) y (3.142), la matriz $\mathbf{K}_E$ se encuentra prácticamente definida:

$$\mathbf{K}_{Er} = \begin{bmatrix} \epsilon_{r1} \mathbf{U}_{|\mathcal{J}_r|, |\mathcal{J}_1|} & \epsilon_{r2} \mathbf{U}_{|\mathcal{J}_r|, |\mathcal{J}_2|} & \dots & \epsilon_{rN} \mathbf{U}_{|\mathcal{J}_r|, |\mathcal{J}_N|} \end{bmatrix} \quad (3.143)$$

Donde ahora el problema se reduce a calcular un sistema de ecuaciones de N^2 incógnitas, ϵ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2^2 & & 2^N \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ N & N^2 & \dots & N^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \dots & \epsilon_{1N} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \epsilon_{N1} & & \dots & \epsilon_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \epsilon & \alpha^2 \epsilon^2 & \dots & \alpha^N \epsilon^N \\ \alpha \epsilon & \alpha \epsilon^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha \epsilon & & \dots & \alpha^N \epsilon^N \end{bmatrix} \quad (3.144)$$

Una vez definida la matriz $\mathbf{K}_{Er}$, queda ahora determinar la influencia de la matriz $\mathbf{K}_{Tr}$ sobre los coeficientes estimados.

El primer paso consiste en definir la matriz binaria $\hat{\Gamma}_{\mathbf{t}}^{\wedge xz}$. En esta matriz, todos los elementos son nulos excepto aquellos en los que todos los elementos indexados por filas $\mathbf{q}_i$ sean iguales a aquellos indexados por $\mathbf{q}_l$ y seleccionados mediante la secuencia $\mathbf{t}$:

$$\exists ! \hat{\Gamma}_{\mathbf{t}}^{\wedge xz} \left| \hat{\gamma}_{\mathbf{t}}^{\wedge xz}(i, l) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\mathbf{q}_i| \neq x \\ \prod_{n=1}^x \delta(\mathbf{q}_i[n] - \mathbf{q}_l[\mathbf{t}[n]]) & \text{si } |\mathbf{q}_i| = x \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall \mathbf{q}_i \in \mathcal{Q}(\mathcal{M}) \\ \forall l \in \mathcal{L}_z(\mathcal{M}) \mid \mathbf{q}_l \in \mathcal{Q}_z(\mathcal{M}) \\ \mathbf{t} \in \mathcal{B}_x(\mathcal{Z}) \text{ siendo } \mathcal{Z} := \{1, \dots, z\} \end{matrix} \quad (3.145)$$

Por ejemplo, para una secuencia $\mathbf{t} = \{1, 3\}$, con $x = 2$ y $z = 3$ en caso de tener un sistema de memoria $M = 3$,

FIGURA 3.29: Matrices $K_{T1,2}$ (arriba, izquierda), $K_{T1,3}$ (arriba, derecha) y $K_{T2,3}$ (parte inferior), que relacionan la influencia de los órdenes superiores en los inferiores.

tivamente, aplicando la misma lógica seguida para definir la matriz K_{Er} a partir de (3.133), podemos definir la matriz de proyección debida al tercer sumando de (3.137) sobre los coeficientes $\tilde{\mathbf{h}}_r$:

$$\mathbf{K}_{Tr} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \alpha^{r+1} \varepsilon \sum_{\mathbf{t} \in \mathcal{B}_r(\mathcal{R}_{r+1})} \Gamma_{\mathbf{t}}^{rr+1} & \alpha^{r+2} \varepsilon^2 \sum_{\mathbf{t} \in \mathcal{B}_r(\mathcal{R}_{r+2})} \Gamma_{\mathbf{t}}^{rr+2} & \dots & \alpha^N \varepsilon^{N-r} \sum_{\mathbf{t} \in \mathcal{B}_r(\mathcal{R}_N)} \Gamma_{\mathbf{t}}^{rN} \end{bmatrix} \quad (3.149)$$

Siendo $\mathcal{R}_x = \{1, 2, \dots, x\}$.

Una vez determinadas las matrices K_{Er} y K_{Tr} , se puede concluir que la relación existente entre los coeficientes estimados y los reales es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{h}}_1 \\ \tilde{\mathbf{h}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{h}}_N \end{bmatrix} = \left(\mathbf{I} + \begin{bmatrix} K_{E1} + K_{T1} \\ K_{E2} + K_{T2} \\ \vdots \\ K_{EN} + K_{TN} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{h}_N \end{bmatrix} \quad (3.150)$$

3.3.3. Corrección de la desviación de los coeficientes

La relación expuesta en (3.150) es útil para evaluar las desviaciones producidas por la componente continua presente a la entrada del sistema y además se puede asegurar que es invertible, como queda demostrado en el Apéndice B.2, sin embargo, la matriz que relaciona ambos grupos de coeficientes puede llegar a ser demasiado grande como para ser computacionalmente tratable. Este problema se puede reducir si aplicamos las matrices de expansión y compresión de coeficientes. Así, esta relación se puede trasladar a los núcleos de Volterra en su forma triangular mediante:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_1 \\ \hat{\mathbf{h}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}_N \end{bmatrix} = \left(\hat{\mathbf{I}} + \begin{bmatrix} Q_1 (K_{E1} + K_{T1}) \\ Q_2 (K_{E2} + K_{T2}) \\ \vdots \\ Q_N (K_{EN} + K_{TN}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_N \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_1 \\ \hat{\mathbf{h}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}_N \end{bmatrix} \quad (3.151)$$

Una vez determinada la matriz que relaciona $\hat{\mathbf{h}}$ con $\hat{\mathbf{h}}$ el problema se reduce a la inversión de una matriz de tamaño $|\Omega(\mathcal{M})| \times |\Omega(\mathcal{M})|$. Para implementar de manera más eficiente esta corrección, es más adecuado determinar el valor de la matriz de corrección directamente para los núcleos triangulados.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_1 \\ \hat{\mathbf{h}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}_N \end{bmatrix} = \left(\hat{\mathbf{I}} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\Upsilon 1} \\ \hat{\mathbf{K}}_{\Upsilon 2} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{K}}_{\Upsilon N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\text{E}1} \\ \hat{\mathbf{K}}_{\text{E}2} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{K}}_{\text{E}N} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_1 \\ \hat{\mathbf{h}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}_N \end{bmatrix} \quad (3.152)$$

que representaremos de forma compacta como:

$$\hat{\mathbf{h}} = \left(\hat{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{K}}_{\Upsilon} + \hat{\mathbf{K}}_{\text{E}} \right) \hat{\mathbf{h}} \quad (3.153)$$

En donde la matriz $\hat{\mathbf{K}}_{\text{E}}$ es el resultado de compactar las matrices definidas en (3.138) y triangularlas:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\text{E}r} = \left[\epsilon_{r1} \mathbf{p}_r \mathbf{1}_{|\mathcal{L}_1|}^T \mid \epsilon_{r2} \mathbf{p}_r \mathbf{1}_{|\mathcal{L}_2|}^T \mid \cdots \mid \epsilon_{rN} \mathbf{p}_r \mathbf{1}_{|\mathcal{L}_N|}^T \right] \quad (3.154)$$

Las constantes ϵ_{rx} se calculan a partir de (3.144) y los vectores $\mathbf{p}_r$ contienen información sobre el número de secuencias pertenecientes a las variaciones con repetición que se pueden obtener de la secuencia $\mathbf{q}_\ell$ indexada por los elementos de $\mathcal{L}_r$:

$$\{\exists! \mathbf{p}_r \mid p_\ell = |\mathfrak{G}(\mathbf{q}_\ell)|, \ell \in \mathcal{L}_r \wedge \mathbf{q}_\ell \in \Omega_r(\mathcal{M})\} \quad (3.155)$$

Para formar $\hat{\mathbf{K}}_{\Upsilon r}$ recurriremos a la formas compactas de $\hat{\Gamma}_{\mathbf{t}}^{xz}$, cuyos elementos se definieron en (3.145):

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Upsilon r} = \left[\mathbf{0}_{|\mathcal{I}_r|, \sum_{s=1}^r |\mathcal{I}_s|} \mid \alpha^{r+1} \epsilon \sum_{\substack{\forall \mathbf{t} \in \\ \mathfrak{B}_r(\mathcal{R}_{r+1})}} \hat{\Gamma}_{\mathbf{t}}^{r, r+1} \mid \alpha^{r+2} \epsilon^2 \sum_{\substack{\forall \mathbf{t} \in \\ \mathfrak{B}_r(\mathcal{R}_{r+2})}} \hat{\Gamma}_{\mathbf{t}}^{r, r+2} \mid \cdots \mid \alpha^N \epsilon^{N-r} \sum_{\substack{\forall \mathbf{t} \in \\ \mathfrak{B}_r(\mathcal{R}_N)}} \hat{\Gamma}_{\mathbf{t}}^{r, N} \right] \quad (3.156)$$

Particionamos ahora la matriz $\hat{\mathbf{K}}_{\Upsilon}$, resultado de apilar los N -órdenes definidos en (3.156), en $N \times N$ submatrices, correspondiéndose cada una de ellas con:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Upsilon r, s} = \begin{cases} \mathbf{0}_{|\mathcal{I}_r|, |\mathcal{I}_s|} & \text{si } r \geq s \\ \alpha^s \epsilon^{s-r} \sum_{\substack{\forall \mathbf{t} \in \\ \mathfrak{B}_r(\mathcal{R}_s)}} \hat{\Gamma}_{\mathbf{t}}^{r, s} & \text{resto} \end{cases} \quad (3.157)$$

Buscamos por tanto unos coeficientes $\hat{\mathbf{h}}$ que minimizan la relación $|\hat{\mathbf{h}} - \hat{\mathbf{h}}|$, sin necesidad de invertir la matriz que relaciona los coeficientes calculados y los reales en (3.153). El primer paso consistirá en realizar una estimación de los valores medios de los coeficientes reales a partir de los perturbados.

Los coeficientes de Volterra cumple que $\mathbf{1}^T \hat{\mathbf{h}}_r = \mathbf{1}^T \mathbf{h}_r$, debido a la definición de la matriz compresora $\mathbf{Q}_r$, por

tanto, a partir de (3.153) podemos obtener el valor medio de los coeficientes de Volterra reales:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_{|\mathcal{L}_1|}^\top \hat{\mathbf{h}}_1 \\ \mathbf{1}_{|\mathcal{L}_2|}^\top \hat{\mathbf{h}}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{1}_{|\mathcal{L}_N|}^\top \hat{\mathbf{h}}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{|\mathcal{L}_1|}^\top (\alpha \mathbf{I}_{I_1 \bullet} + \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{r}1}) \\ \mathbf{1}_{|\mathcal{L}_2|}^\top (\alpha^2 \mathbf{I}_{I_2 \bullet} + \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{r}2}) \\ \vdots \\ \mathbf{1}_{|\mathcal{L}_N|}^\top (\alpha^N \mathbf{I}_{I_N \bullet} + \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{r}N}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{|\mathcal{L}_1|}^\top \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{E}1} \\ \mathbf{1}_{|\mathcal{L}_2|}^\top \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{E}2} \\ \vdots \\ \mathbf{1}_{|\mathcal{L}_N|}^\top \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{E}N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_1 \\ \hat{\mathbf{h}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}_N \end{bmatrix} \quad (3.158)$$

Teniendo en cuenta lo anterior:

$$\begin{bmatrix} \overline{\hat{\mathbf{h}}_1} \\ \overline{\hat{\mathbf{h}}_2} \\ \vdots \\ \overline{\hat{\mathbf{h}}_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \alpha^2 \varepsilon \sum_{s=0}^1 |\mathcal{Q}_s(\mathcal{R}_M)| & \alpha^3 \varepsilon^2 \sum_{s=0}^2 |\mathcal{Q}_s(\mathcal{R}_M)| & \dots & \alpha^N \varepsilon^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} |\mathcal{Q}_s(\mathcal{R}_M)| \\ 0 & \alpha^2 & \alpha^3 \varepsilon \sum_{s=0}^1 |\mathcal{Q}_s(\mathcal{R}_{M+1})| & \dots & \alpha^N \varepsilon^{N-2} \sum_{s=0}^{N-2} |\mathcal{Q}_s(\mathcal{R}_{M+1})| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \alpha^N \end{bmatrix}}^{\mathbf{V}} \\ + \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_{11} |\mathcal{L}_1| \bar{\mathbf{p}}_1 & \epsilon_{12} |\mathcal{L}_2| \bar{\mathbf{p}}_1 & \dots & \epsilon_{1N} |\mathcal{L}_N| \bar{\mathbf{p}}_1 \\ \epsilon_{21} |\mathcal{L}_1| \bar{\mathbf{p}}_2 & \epsilon_{22} |\mathcal{L}_2| \bar{\mathbf{p}}_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \epsilon_{N1} |\mathcal{L}_1| \bar{\mathbf{p}}_N & & \dots & \epsilon_{NN} |\mathcal{L}_N| \bar{\mathbf{p}}_N \end{bmatrix}}^{\mathbf{W}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\hat{\mathbf{h}}_1} \\ \overline{\hat{\mathbf{h}}_2} \\ \vdots \\ \overline{\hat{\mathbf{h}}_N} \end{bmatrix} \quad (3.159)$$

Si denotamos $\overline{\hat{\mathbf{h}}} \overline{\hat{\mathbf{h}}} \overline{\hat{\mathbf{h}}}$ a los vectores de N elementos que contienen los valores medios de los núcleos de Volterra reales, perturbados y estimados respectivamente, podemos realizar la siguiente aproximación, invirtiendo únicamente una matriz de tamaño $N \times N$:

$$\overline{\hat{\mathbf{h}}} \simeq \overline{\hat{\mathbf{h}}} = (\mathbf{V} + \mathbf{W})^{-1} \overline{\hat{\mathbf{h}}} \quad (3.160)$$

Podemos eliminar la contribución de $\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{E}}$, teniendo en cuenta su definición en (3.154) y en (3.153) y conociendo únicamente el valor medio de los núcleos originales. Siendo la estima realizada en (3.160) correcta, esta contribución se descarta mediante:

$$\mathbf{b} = \overline{\hat{\mathbf{h}}} - \mathbf{W} \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{p}_{\mathcal{L}_1}} \overline{\hat{\mathbf{h}}_1} \\ \frac{1}{\bar{p}_{\mathcal{L}_2}} \overline{\hat{\mathbf{h}}_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{\bar{p}_{\mathcal{L}_N}} \overline{\hat{\mathbf{h}}_N} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_N \end{bmatrix} \quad (3.161)$$

Si observamos ahora (3.153), sólo necesitamos eliminar la contribución de $\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{r}}$. Teniendo en cuenta que la matriz $\hat{\mathbf{a}} \mathbf{I} + \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{r}}$ es una matriz triangular superior, con elementos identidad ponderados por α en la diagonal, el núcleo de Volterra de orden N de la estimación se corresponde directamente con los elementos de $\mathbf{b}$ indexados mediante I_N .

La relación entre $\mathbf{b}$ y la estimación deseada se puede expresar como:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \alpha \mathbf{I}_{|I_1|} & \hat{\mathbf{K}}_{T1,2} & \hat{\mathbf{K}}_{T1,2} & \dots & \hat{\mathbf{K}}_{T1,N} \\ \mathbf{0}_{|I_2|,|I_1|} & \alpha^2 \mathbf{I}_{|I_2|} & \hat{\mathbf{K}}_{T2,3} & \dots & \hat{\mathbf{K}}_{T2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{|I_N|,|I_1|} & \mathbf{0}_{|I_N|,|I_2|} & \dots & \dots & \alpha^N \mathbf{I}_{|I_N|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_1 \\ \hat{\mathbf{h}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}_N \end{bmatrix} \quad (3.162)$$

Así, el algoritmo que permite recuperar los núcleos de Volterra a partir los núcleos obtenidos mediante una entrada perturbada por una señal constante, se puede resumir en:

Algoritmo 1 Corrección de los núcleos de Volterra

```

 $\hat{\mathbf{h}} \leftarrow \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{h}}$  ▷ Triangular cada orden mediante (3.80) y apilar según (3.81)
 $\hat{\mathbf{h}} \leftarrow (\mathbf{V} + \mathbf{W})^{-1} \hat{\mathbf{h}}$  ▷ Inversión de matriz de  $N \times N$  elementos bien condicionada (ver apéndice B.2)
 $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{h}} - \hat{\mathbf{K}}_E \hat{\mathbf{h}}$  ▷ Del valor medio de los núcleos y de (3.161)
 $\hat{\mathbf{h}}_N \leftarrow \frac{1}{\alpha} \mathbf{b}_N$ 
for  $n \leftarrow N, 2$  do
     $\mathbf{b}_{n-1} \leftarrow \mathbf{b}_{n-1} - \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{T1,n} \\ \hat{\mathbf{K}}_{T2,n} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{K}}_{Tn-1,n} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_n$  ▷ Las matrices  $\hat{\mathbf{K}}_{Tn,n}$  se pueden generar por filas si  $M$  y  $N$  lo imponen
     $\hat{\mathbf{h}}_{n-1} \leftarrow \frac{1}{\alpha} \mathbf{b}_{n-1}$ 
end for

```

Si en vez de optar por este algoritmo de corrección recuperásemos los coeficientes reales a partir de la expresión (3.130), sería necesario invertir una matriz de tamaño $|\Omega(\mathcal{M})| \times |\Omega(\mathcal{M})|$. Este es un problema computacionalmente inabarcable, salvo que el orden máximo y la memoria del sistema a identificar sean muy pequeños.

Con esta solución simplemente es necesario invertir una matriz de tamaño $N \times N$ y generar las matrices $\hat{\mathbf{K}}_{T,s,r}$ adecuadas. Éstas matrices son muy simples de generar, ya que se obtienen mediante simples operaciones lógicas entre las secuencias adecuadas.

3.3.4. Evaluación del sistema de identificación mediante MLS para sistemas de entrada de media no nula

A continuación se propone un ejemplo para ilustrar el funcionamiento del algoritmo presentado, incluyendo las modificaciones aplicadas sobre la metodología propuesta en Reed y Hawksford [1996] y aplicando el algoritmo de corrección de media no nula a la entrada. Como se demostró con anterioridad (véase Sección 3.3.2), los resultados cambian dramáticamente si en la entrada se encuentra desplazada, por ejemplo en el caso de ser necesaria una modulación previa.

En la Figura 3.30 se muestra el sistema en el que se ha comprobado la validez de la metodología presentada. Este sistema se corresponde con una estructura cuya representación en núcleos de Volterra posee elementos no nulos fuera de la diagonal. Por tanto, a pesar de poder aplicar los métodos expuestos en la Sección 3.2 a modo de diagnóstico previo para analizar el orden y la memoria, corroborando su posible representación mediante series de Volterra, hemos de recurrir al método propuesto en la Sección 3.3.2 para obtener una estima fiable de esta representación.

El sistema se compone de una estructura multirrama, la primera de las cuales se corresponde con un sistema

FIGURA 3.30: Diagrama de bloques empleado en el ejemplo de identificación mediante MLS.

FIGURA 3.31: Respuestas temporales y en frecuencia de los tres filtros empleados en ejemplo de la Figura 3.30.

lineal al uso, la segunda con un sistema de Wiener simple retardado y la tercera con un sistema no lineal con memoria de tercer orden. Para facilitar la interpretación de los núcleos obtenidos, se ha escogido un grupo de filtros digitales FIR, uno de ellos paso-bajo y el resto banda eliminada. Los retardos añadidos en la estructura dispersan los coeficientes de la representación en series de Volterra, y por tanto facilitan la observación entre las posibles diferencias existentes entre los núcleos antes y después del algoritmo de corrección. En la Figura 3.31 A se muestra el valor de los coeficientes del numerador del filtro, mientras que en la Figura 3.31 B se encuentran representadas sus funciones de transferencia en el dominio espectral.

A partir de la estructura planteada en la Figura 3.30, es fácil deducir que el sistema se corresponde con una estructura de Wiener en su forma general, como la representada en la el esquema de la Figura 3.24, de tercer orden. Con estos datos, nos encontramos en disposición de aplicar el sistema de identificación no lineal basado en MLS, con un punto de trabajo de la entrada cualquiera. La secuencia base, a partir de la generamos la matriz de proyección $\mathbf{M}$, definida en (3.93) contiene los valores binarios -0.1111 y $+0.1389$, ajustados en base al tamaño de la secuencia.

En algoritmo exige la imposición del tamaño máximo de memoria. En nuestro caso, el número más pequeño de muestras para la MLS que evita el *aliasing* temporal del análisis es $M = 63$ (lo que implica un registro de desplazamiento en el generador de la secuencia de tamaño 6).

A partir de estas mismas secuencias, también se genera la matriz de excitación, $\mathbf{X}$ definida en (3.98).

Para evidenciar que el algoritmo funciona y es capaz de corregir las posibles desviaciones de la entrada, elegimos un valor de control de amplitud $\alpha = 13.3333$ y de desviación $\varepsilon = 0.3333$. Esto implica, que para un análisis que contemple hasta el tercer orden, la señal de test que alimenta al sistema se encuentra acotada entre 0 y 10.

FIGURA 3.32: Núcleos de Volterra simétricos estimados. En las tres primeras gráficas se encuentran representadas las diagonales de los núcleos antes y después de la corrección del valor medio de la entrada. En las Gráfica 3.32 F y 3.32 G sólo se han representado los valores que se debían de la moda del núcleo calculado para facilitar la visualización

El resultado de aplicar el algoritmo modificado de Reed [Reed y Hawksford \[1996\]](#) y la corrección propuesta se resume en la Figura 3.32. En las gráficas se evidencia el resultado que describe (3.150) para las formas simétricas de los núcleos de Volterra.

Como se resume en el Algoritmo 1, el núcleo que se corrige en primera instancia es el de orden superior, en este caso el núcleo de orden tres. El resultado obtenido por el algoritmo de identificación se muestra en la Figura 3.32 F, mientras que en la Figura 3.32 G se representa su versión corregida. Para facilitar la visualización, aquellos coeficientes que se alejan de la moda no son representados. Las marcas correspondientes al resto de los coeficientes poseen un tamaño proporcional al valor absoluto de su valor menos la moda del núcleo. De acuerdo con (3.150), la única diferencia entre ambos núcleos es un desplazamiento constante de la media y una mayor excursión debida al factor de ganancia α^N (véase Ecuación 3.162). Este fenómeno es más evidente si nos focalizamos en la diagonal de los núcleos $\tilde{h}_3[m_1, m_2, m_3]$ y $\hat{h}_3[m_1, m_2, m_3]$ representados en la Figura 3.32 C. Como el retardo que introduce la subrama superior de la tercera rama del modelo de la Figura 3.19 desplaza los coeficientes de mayor potencia fuera de la diagonal del núcleo, en la Figura 3.32 C se aprecia con mayor claridad el desplazamiento de la media del núcleo.

Los resultados obtenidos para el núcleo de orden dos se muestran en las Figuras 3.32 D y 3.32 E. En este caso, se puede apreciar que el desplazamiento en la señal de excitación provoca una estima completamente errónea del núcleo. El resultado inicial obtenido en $\tilde{h}_2[m_1, m_2]$ se encuentra contaminado por una proyección del núcleo de orden dos sobre el mismo. En este caso queda aún más evidenciado en la diagonal, mostrada en la Figura 3.32 B. En ella se puede observar que parte de la información espuria presente en $\tilde{h}_2[m_1, m_2]$ se corresponde con el filtro $c_3[m]$, que según el modelo estudiado sólo afectaría al núcleo de orden tres en la representación de series de Volterra. A su vez, igual que sucede en el caso del núcleo de orden tres, la estima presenta una desviación constante. En este caso es fácil apreciar la influencia de $c_3[m]$ y $c_2[m]$ en $\tilde{h}_2[m_1, m_2]$ debido a la colocación de los retardos escogidos el sistema de ejemplo. Es por ello que la versión corregida del núcleo $\hat{h}_2[m_1, m_2]$ contiene la información relativa a $c_2[m]$, desplazada por el retardo de la segunda rama del modelo.

Finalmente, el primer orden se ve afectado por la influencia del segundo y el tercer orden. Este hecho se evidencia en la Figura 3.32 A, en la que la versión no corregida del núcleo, $\tilde{h}_1[m]$ se encuentra perturbada por versiones de $c_2[m]$ y $c_3[m]$ lo que denota el drástico efecto introducido por la desviación de la señal de entrada.

Para verificar la fiabilidad del método, y teniendo en cuenta que la representación en núcleos de Volterra se puede obtener directamente desde el modelo, pero no es única, se ha introducido una test y se ha determinado la diferencia de la señal de salida del sistema, $y[m]$ frente a la señal obtenida mediante la estimación de los núcleos $\tilde{y}[m]$, en donde el error se calcula como $e[m] = y[m] - \tilde{y}[m]$.

La señal de prueba introducida en el sistema es una señal monotonal, de frecuencia variable exponencial de 1000 muestras, que cubre el ancho de banda comprendido entre $\Omega_s/10$ y $2\Omega_s/5$. A su vez, para verificar el algoritmo de corrección se ha sintetizado con los coeficientes sin corregir $\tilde{h}_1[m]$, $\tilde{h}_2[m_1, m_2]$ y $\tilde{h}_3[m_1, m_2, m_3]$, la señal $\tilde{y}[m]$.

En la Figura 3.33 A se muestra la señal de salida del sistema para esta señal de test, así como el error $e[m]$. Para facilitar la visualización se ha representado la envolvente, calculado mediante un filtro de máximos con una ventana de tamaño equivalente al período de la frecuencia mínima de la señal de test. Esta estrategia también se ha seguido para representar las contribuciones de los distintos órdenes a la salida del sistema, en la Figura 3.33 B. En la Figura 3.33 C se muestra la relación existente entre la señal de salida del sistema de la Figura 3.30 y las dos versiones de señal sintetizada: la obtenida a partir de los núcleos sin corregir ($\tilde{y}[m]$) y corregidos ($\hat{y}[m]$). En esta figura queda evidenciada la pérdida de linealidad en la estima sin corregir, mientras que se la señal obtenida a partir de los núcleos estimados y corregidos produce una señal sintetizada equivalente a la obtenida del sistema.

3.3.5. Ámbito de aplicación del algoritmo y limitaciones

De lo expuesto anteriormente concluimos que el algoritmo propuesto es idóneo para la identificación de todos aquellos sistemas no lineales que sean representables mediante series de Volterra, sea cual sea su margen dinámico de entrada o salida. Esto implica que el conocimiento previo del sistema no ha de ser especialmente exhaustivo: únicamente es necesario conocer una estima grosera de la memoria del sistema, así como el orden máximo a tener

FIGURA 3.33: Salida sintetizada a partir de los coeficientes de Volterra estimados mediante MLS para el modelo de la Figura 3.30, partiendo de una señal de entrada desviada en amplitud y media, frente a la señal salida obtenida mediante los coeficientes de Volterra corregidos.

en cuenta, dado una distorsión previa admisible. En las secciones anteriores se han aportado soluciones sencillas para obtener con fiabilidad estos parámetros, mediante pruebas pueden ser implementar con instrumentación básica y que implican un procesamiento simple.

Mediante el algoritmo propuesto es posible obtener de forma sólida todos aquellos coeficientes que componen los núcleos de Volterra que describen al sistema con suficiente fiabilidad como para interpretar nuevos modelos que se adecuen con mayor precisión a un *array paramétrico* que el propuesto por la simplificación de Berkta (véase (2.18) y los modelos de la Figura 3.3 que representan la reinterpretación de la presión de la onda secundaria como modelos de Hammerstein y Wiener). Además estos resultados permiten obtener una representación que no es invertible directamente, pero que si permite realizar aproximaciones que permitan obtener un sistema de compensación, mediante técnicas clásicas como la de los sistemas de p -compensación.

Desgraciadamente el empleo de señales que parten de secuencias binarias conlleva desventajas claras: estas señales se encuentran no acotadas en frecuencia, lo que implica que será necesario emplear estrategias de filtrado para adaptarlas a sistemas reales que contienen modulaciones. Estas etapas de prefiltrado, aunque no cambien el punto de trabajo de la señal de test, si afectan a su margen dinámico, circunstancia que es determinante en el caso de las modulaciones, en los que ambos parámetros, margen dinámico y ancho de banda han de estar claramente acotados. Con el fin de minimizar estos efectos podemos aplicar técnicas de filtrado en coseno alzado, como ya se verá en la Sección 5.9.3.

Otro factor a tener en cuenta es la importancia de la sincronización en la estima de los núcleos. En el caso que nos ocupa, de carácter acústico, el retardo introducido por el medio de propagación ha de ser calculado con precisión, ya que la memoria del sistema es de varios órdenes de magnitud menor. Por tanto será necesario introducir una señal de preámbulo que facilite esta tarea. Esta estrategia se explica con detalle en la Sección 5.10.2.

3.4. Conclusiones

En este Capítulo se ha planteado una metodología completa, que permite obtener una buena representación no paramétrica de los sistemas de *arrays paramétricos*, basándose mínimamente en las presunciones del modelo físico así como las estructuras básicas impuestas en otros estudios, en los que el planteamiento inicial consistía en

evaluar la calidad que se obtiene imponiendo modelos concretos basados en las aproximaciones física.

La diversidad de algoritmos de identificación para sistemas no lineales hace que recurramos al comportamiento descrito por el modelo físico de la estructura para decantarnos por un método u otro. Si presuponemos que las evidencias físicas descritas en la Sección “*El array paramétrico representado como series de Volterra*” se ajustan a la realidad, podemos clasificar el sistema de Hammerstein puro. Esto implica, que empleando la metodología expuesta en la Sección 3.2.2 el sistema quedaría completamente identificado. Sin embargo, si el efecto del transductor no es despreciable, considerando que tanto la memoria como la coloración de éste pueden ser obvias en el sistema total, obtendríamos coeficientes no nulos fuera de la diagonal, lo que implica tener que emplear técnicas más complejas para obtener éstos coeficientes.

La primera aportación relevante de este Capítulo es la metodología de diagnosis propuesta mediante el sistema de tonos variables. En la Sección 3.2.1 queda demostrado de forma exhaustiva que los algoritmos empleados hasta ahora para determinar la distorsión producida por sistemas de Hammerstein, son aplicables a sistemas más complejos para extraer parámetros de gran utilidad en posteriores sistemas de identificación, como la memoria y el orden. También sirven como test de modelado, descartando o corroborando modelos paramétricos impuestos.

Dada la posibilidad de la existencia de desviaciones claras en los modelos tradicionales, como segunda aportación relevante se plantea un algoritmo de identificación no paramétrica que permite extraer la serie de núcleos de Volterra. El algoritmo seleccionado se basa en señales pseudoaleatorias generadas mediante *MLS*, que únicamente restringen el sistema a caracterizar en cuanto a la memoria y el orden, datos que pueden ser extraídos mediante la anterior metodología. Este algoritmo mejora los existentes planteando un nuevo sistema de indexación de la secuencias necesarias para generar la excitación necesaria. A su vez, se ha formalizado el problema matricialmente y siguiendo la teoría de grupos y secuencias, lo que sienta las bases para poder plantear un algoritmo de corrección ligero, con dos objetivos claros: permitir al usuario seleccionar el punto de trabajo adecuado para la entrada de su sistema, así como evitar el empleo de matrices inversas de gran tamaño y mal condicionadas.

Con todas estas herramientas es posible aplicar un proceso de identificación completo a una estructura real basada en el principio del *array paramétrico*. Sólo quedan pequeños detalles como las estrategias de sincronización o la adaptación de la señal de entrada al canal que serán abordadas en Capítulos posteriores. Esta definición es tan amplia que permite modificar desde un principio el funcionamiento del *array paramétrico*, siendo válida incluso si en el diseño final se opta por otro tipo de modulaciones. Además, al haber flexibilizado las condiciones sobre la entrada, esta metodología es aplicable a cualquier sistema que presente alinealides y que sea de carácter estático.

Una vez obtenida esta definición generalista del sistema basada en series discretas de Volterra nos encontramos en condiciones de plantear un sistema de compensación aplicando algoritmos de p -compensación, pero también podemos extraer conclusiones más amplias sobre el sistema, que nos lleven a diseñar un modelo que realmente sea representativo del sistema, habiendo impuesto unas condiciones de partida mínimas y con un doble objetivo: encontrar un sistema de compensación fiable y que implique la menor carga computacional posible.

TÉCNICAS DE COMPENSACIÓN

Las técnicas de compensación abarcan disciplinas y aplicaciones muy variadas, que requieren soluciones específicas, dependientes básicamente de la estructura del sistema a compensar, así como de la técnica de identificación previa escogida. En nuestro caso, y dado que disponemos de herramientas que nos permiten describir el sistema bajo estudio mediante series discretas de Volterra, nos centraremos en las técnicas de compensación que parten de esta información.

Básicamente, los sistemas compensadores se pueden clasificar en dos grandes grupos: los ecualizadores y los predistorsionadores. Se conoce vulgarmente como ecualizador a aquel sistema que aplicado a la salida del dispositivo no lineal concreto, linealiza e iguala la salida, de tal forma que se obtiene una señal próxima a la entrada. Dado que en nuestro caso el objetivo es compensar el propio canal acústico, esta opción no es viable y se hace obligatorio el empleo de un predistorsionador que compense el efecto no lineal del aire como canal de transmisión.

El método más generalista para obtener un sistema predistorsionador a partir de una descripción de sistema realizada mediante series de Volterra es el conocido como filtro p -inverso (Schetzen [1976]). Sin embargo este sistema implica una complejidad notable, que además aumenta con el orden del sistema a compensar y depende de la fiabilidad de la identificación del sistema. Dado que en nuestro caso esto no supone un problema, ya que disponemos de técnicas de identificación suficientemente fiables para obtener esta descripción, esta solución genérica se puede barajar primera aproximación. De hecho, existen mecanismos que intentan paliar la complejidad de los procesos de identificación y que recurren al empleo de arquitecturas de aprendizaje indirecto, combinadas con filtrados p -inversos para obtener sistemas linealizados (Eun y Powers [1997]).

A pesar de que la distorsión es un tema recurrente en sistemas acústicos, ésta casi siempre suele ser paliada mediante la mejora de los transductores o los sistemas de amplificación. Los pocos ejemplos de corrección mediante técnicas de predistorsión que existen se basan en sistemas de compensación empleados en canales de transmisión (Brajál y Chouly [1994], Faulkner y Johansson [1994]). Las primeras técnicas de compensación aplicadas a sistemas acústicos se remontan al empleo de filtrados no lineales sobre canceladores de eco no lineales, aunque en estos casos se trata de sistemas de post-compensación. En Borys [2000] encontramos un detallado estudio acerca de estos sistemas.

Los primeros predistorsionadores digitales empleados en sistemas acústicos surgen de la necesidad de linealizar el comportamiento de bocinas (Klippel [1996], Schurer et al. [1995b], Reed y Hawksford [1997]) y los altavoces dinámicos (Frank et al. [1992]) y todos ellos recurren a variantes adaptativas del p -inversor.

Si nos centramos únicamente en las técnicas de compensación aplicadas a estructuras de *arrays paramétricos*, hasta ahora, todas ellas se basan en simplificaciones del modelo de Volterra que, con mayor o menor fortuna, intentan resolver el problema de la identificación y la predistorsión del sistema a la vez. Así, heredando los filtrados inversos aplicados a los canceladores de eco no lineales, y partiendo de la premisa de que los *arrays paramétricos* se ajustan a los modelos de Hammerstein, en Mu et al. [2014a] se propone una simplificación de la p -inversión, empleando únicamente filtros de Volterra unidimensionales. Esta técnica se puede ampliar empleando sistemas de altavoces complejos, como se propone en Mu et al. [2014b], y que es más conocida como sistema MINT.

El enfoque empleado en esta Tesis para abordar este problema se basa en una variante del filtro p -inversor, que explota las peculiaridades del sistema de transmisión presente en los *arrays paramétricos*. Dado que en nuestro caso disponemos de una buena descripción del sistema mediante núcleos de Volterra, no nos vemos en la necesidad de recurrir a técnicas adaptativas que imponen la estructura de bloques que describe al mismo, sino que podemos extraer directamente un modelo de bloques que se ajuste fielmente a la serie de Volterra obtenida mediante las técnicas presentadas en el Capítulo 3 y que permita aligerar el proceso de preinversión. Así mismo, este enfoque permite relajar las condiciones de un hipotético sistema adaptativo, ya que, como se verá más adelante, disponemos de una descripción por separado del sistema de transducción y del medio de transmisión. Es importante destacar que el comportamiento del transductor no es independiente por completo del sistema total, que incluye modulaciones y relaciones con la envolvente, lo que imposibilita desglosar el problema de identificación, independizando el transductor y caracterizándolo por separado, a pesar de que otros autores afirmen que el proceso de transducción es separable del sistema (véase modelo de Fig.14 en Croft et al. [2003]).

Previamente a la descripción del sistema de compensación propuesto en esta Tesis se presentará una breve descripción del sistema p -inversor, para posteriormente compararlo cualitativamente con el sistema propuesto.

4.1. Compensación de p -orden

Esta es la técnica más general de compensación de sistemas lineales dada una descomposición en series de Volterra de un sistema. Este algoritmo propuesto en Schetzen [1976] se ha aplicado a diversos campos, como por ejemplo la mejora de las transmisiones analógicas moduladas Xiao et al. [2014] o digitales Biglieri et al. [1988], así como a la reducción de no linealidades en altavoces dinámicos Frank [1995] como a la cancelación de eco no lineal

Con esta técnica, y una vez realizas las medidas pertinentes para caracterizar el sistema, dispondremos de la información necesaria sobre los núcleos de Volterra para aplicar una técnica de preinversión. Esta técnica consiste en introducir un bloque posterior al sistema para deshacer el efecto no lineal del mismo. Posteriormente, en Schetzen [1976] se demuestra que este mismo bloque puede servir a la vez de ecualizador y de preinversor, sin modificar su efectividad.

FIGURA 4.1: Sistema de postinversión Q , formado por la conexión en tándem de los sistemas H y $K_{\{p\}}$

Se parte entonces del estudio de dos sistemas no lineales conectados en tándem que forman una estructura de coeficientes de Volterra Q , uno de ellos, definido por los coeficientes de Volterra H se corresponde con el sistema a compensar de m orden, mientras que K son los coeficientes de Volterra que describen al módulo preinversor-ecualizador, como se representa en la Figura 4.1. El objetivo es suprimir a la salida la parte no lineal especificada en la siguiente expresión:

$$\mathbf{Q}[x(t)] = x(t) + \underbrace{\sum_{n=2}^{p \cdot m} \mathbf{Q}_n[x(t)]}_{\text{Parte no lineal}} \quad (4.1)$$

Donde p es el orden máximo elegido en el diseño del bloque de postinversión. Esto implica que este módulo de proceso será capaz de contrarrestar el efecto del sistema $\mathbf{H}$ hasta el grado p , por tanto la respuesta global sistema en tándem es una respuesta al impulso unidad seguido de un sistema no lineal, cuya contribución ha de ser mínima. Por desgracia, si tenemos en cuenta las reglas de concatenación de sistemas, el orden del sistema completo se corresponde con el producto de los órdenes de los sistemas que lo forman y por tanto tendremos $p(m-1)$ órdenes sin compensar.

La señal $z(t)$ será el resultado de:

$$z(t) = \mathbf{K}_{\{p\}}[y(t)] = \sum_{n=1}^p \mathbf{K}_n[y(t)] \quad (4.2)$$

Donde $\mathbf{K}_n$ es otro operador de Volterra cuyos núcleos se corresponden con $k_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$. El sistema $\mathbf{Q} = \mathbf{K}_{\{p\}}\mathbf{H}$ se puede caracterizar mediante series de Volterra, por tratarse de una conexión en tándem:

$$z(t) = \mathbf{Q}[x(t)] = \sum_{n=1}^{p \cdot m} \mathbf{Q}_n[x(t)] \quad (4.3)$$

Los núcleos del nuevo sistema se corresponderán con: $q_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$. Se trata ahora de determinar éstos en función de los núcleos h_n y k_n . Para satisfacer (4.2), el sistema $\mathbf{K}_{\{p\}}$ ha de ser el sistema postinverso de $\mathbf{H}$ y que se denota como $\mathbf{H}_{\{p\}}^{-1}$. Si transformamos (4.3) en suma de potencias, introduciendo como señal $cx(t)$:

$$z(t) = \mathbf{Q}[cx(t)] = \sum_{n=1}^{p \cdot m} c^n \mathbf{Q}_n[x(t)] \quad (4.4)$$

Sustituyendo:

$$y(t) = \mathbf{H}[x(t)] = \sum_{n=1}^m \mathbf{H}_n[x(t)] \quad (4.5)$$

Para (4.2), el resultado es otra serie de potencias en c . Como las dos serie de potencias son iguales, los operadores $\mathbf{Q}_n$ se calculan mediante un sistema de ecuaciones en ambas expresiones. Sustituyendo (4.5) en (4.3):

$$z(t) = \sum_{l=1}^p \mathbf{K}_l \left[\sum_{n=1}^m c^n y_n \right] \quad (4.6)$$

Si aplicamos la propiedad básica de la l -linealidad de los operadores de Volterra¹:

$$\mathbf{K}_l \left[\sum_{n=1}^{\infty} c^n y_n \right] = \sum_{n_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_p=1}^{\infty} c_{n_1} \cdots c_{n_l} \mathbf{K}_l \{y_{n_1}, \dots, y_{n_p}\} \quad (4.7)$$

1

$$y_p(t) = \mathbf{T}[x(t)] = \mathbf{T}_p \left[\sum_{n=1}^N c^n x_n t \right] = \sum_{n_1=1}^N \cdots \sum_{n_p=1}^N \mathbf{T}_p \{c_{n_1} x_{n_1}, \dots, c_{n_p} x_{n_p}\} = \sum_{n_1=1}^N \cdots \sum_{n_p=1}^N c_{n_1} \cdots c_{n_p} \mathbf{T}_p \{x_{n_1}, \dots, x_{n_p}\}$$

En donde $\mathbf{K}_l \{\cdot\}$ representa el operador l -lineal:

$$\mathbf{K}_l \{y_{n_1}, \dots, y_{n_l}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} k_l(\tau_1, \dots, \tau_l) y(t - \tau_1) \dots y(t - \tau_l) d\tau_1 \dots d\tau_l \quad (4.8)$$

Sustituyendo (4.7) en (4.6):

$$z(t) = \sum_{l=1}^p \sum_{n_1=1}^{\infty} \dots \sum_{n_l=1}^{\infty} c^{n_1+\dots+n_l} \mathbf{K}_l \{y_{n_1}, \dots, y_{n_l}\} \quad (4.9)$$

A partir de esta expresión, lo más sencillo es obtener los coeficientes de $\mathbf{Q}$ mediante el estudio de los diagramas de bloques y empleando sistemas de ecuaciones lineales. Si observamos (4.9), el valor posible más pequeño de la suma $n_1 + \dots + n_l$ es l . Por tanto la primera potencia en c de la ecuación (4.9) se corresponde con $l = 1$ y $n_1 = 1$ que se corresponde con el coeficiente $\mathbf{K}_1 [y_1]$. Para (4.9) y (4.9) si igualamos el término de primer grado de la potencia en c tenemos que:

$$\mathbf{Q}_1 [x] = \mathbf{K}_1 [y_1] = \mathbf{K}_1 \mathbf{H}_1 [x] \quad (4.10)$$

Para los coeficientes referentes a c^2 tenemos: $l = 1$ con $n_1 = 1$ y $l = 2$ con $n_1 = n_2 = 1$, por tanto:

$$\mathbf{Q}_2 [x] = \mathbf{K}_1 [y_2] + \mathbf{K}_2 [y_1] = \mathbf{K}_1 \mathbf{H}_2 [x] + \mathbf{K}_2 \mathbf{H}_1 [x] \quad (4.11)$$

Siguiendo la misma filosofía se puede extraer el orden tres:

$$\mathbf{Q}_3 [x] = \mathbf{K}_1 [y_3] + \mathbf{K}_2 \{y_1, y_2\} + \mathbf{K}_2 \{y_2, y_1\} + \mathbf{K}_3 [y_1] \quad (4.12)$$

Como el operador bilineal $\mathbf{K}_2$ es simétrico:

$$\mathbf{Q}_3 [x] = \mathbf{K}_1 [y_3] + 2\mathbf{K}_2 \{y_1, y_2\} + \mathbf{K}_3 [y_1] \quad (4.13)$$

Teniendo en cuenta que:

$$2\mathbf{K}_2 \{y_1, y_2\} = \mathbf{K}_2 [y_1 + y_2] - \mathbf{K}_2 [y_1] - \mathbf{K}_2 [y_2] \quad (4.14)$$

Podemos expresar $\mathbf{Q}_3$ en términos de $\mathbf{K}$ y de $\mathbf{H}$ como:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_3 [x] &= \mathbf{K}_1 [y_3] + \mathbf{K}_2 [y_1 + y_2] - \mathbf{K}_2 [y_1] - \mathbf{K}_2 [y_2] + \mathbf{K}_3 [y_1] \\ &= \mathbf{K}_1 \mathbf{H}_3 + \mathbf{K}_2 [\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2] - \mathbf{K}_2 \mathbf{H}_2 + \mathbf{K}_3 \mathbf{H}_1 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Y así sucesivamente para todos los órdenes a considerar.

Es fácil desprender de (4.1) que $\mathbf{Q}_1 [x(t)] = x(t)$ y por tanto el término:

$$\mathbf{K}_1(s) = \frac{1}{\mathbf{H}_1(s)} \quad (4.16)$$

Expresando los núcleos de $k_1(\tau_1)$ y de $h_1(\tau_1)$ mediante su transformada de Laplace y teniendo en cuenta la expresión (4.16), es obvio que no todos los sistemas van a poder ser invertidos. En primer lugar, el núcleo $k_1(\tau_1)$ ha de ser causal y estable. Esta premisa puede ser asumida en nuestro caso, ya que el modelo físico no indica lo contrario.

La segunda condición que hemos de cumplir según (4.16) es que $\mathbf{Q}_2 [x(t)] = 0$. Teniendo en cuenta la Figura 4.2 extraída de (4.11).

FIGURA 4.2: Diagrama de bloques del operador Q_2 .

Como ya hemos compensado el primer orden a través de K_1 , hemos de asegurar que si a la entrada del sistema expuesto en la Figura 4.2 tenemos $K_1[x(t)]$, seguimos obteniendo una respuesta nula, por tanto el operador K_2 ha de ser de tal forma que se cumplan las condiciones expuestas en la Figura 4.3, en donde el diagrama B se corresponde con una simplificación del representado en A.

A: Condición más restrictiva sobre Q_2 .

B: Simplificación del diagrama de A.

FIGURA 4.3: Cálculos previos para determinar K_2 .

Dado que se ha de cumplir que $z_a(t) = -z_b(t)$, entonces tenemos que:

$$K_2 = -K_1 H_2 K_1 \quad (4.17)$$

FIGURA 4.4: Operador K_2 de $H_{\{p\}}^{-1}$.

En la Figura 4.4 se puede observar que si K_1 cumple las condiciones de estabilidad y causalidad, el núcleo K_2 también las cumple.

Para obtener el resto de los núcleos del sistema inverso se procede de la misma forma: partimos de (4.13), para plantear las diferentes contribuciones que forman $Q_3[x]$, dado que ya son conocidos K_1 y K_2 . Cada una de estas contribuciones se representan en la Figura 4.5.

Si combinamos todas estas contribuciones y las igualamos a cero tenemos la siguiente relación:

$$K_3 = -K_1 H_3 K_1 - K_2 [H_1 + H_1] K_1 + K_2 H_1 K_1 + K_1 H_2 K_1 \quad (4.18)$$

Dado que conocemos el valor de K_2 a través de (4.17), a partir de (4.18) y simplificando el diagrama de bloques, de tal forma que obtengamos el mínimo número de elementos en el diagrama, podemos definir K_3 mediante el diagrama de la Figura 4.6.

 FIGURA 4.5: Diagramas de bloques que componen el operador Q_3 .

 FIGURA 4.6: Operador K_3 de H_{ip}^{-1} .

En nuestro caso, es de mayor interés el estudio de los sistemas preinversos, ya que el único lugar al que tenemos acceso es el procesado previo al envío al transductor como el que se muestra en la Figura 4.7. El sistema cumple que $\mathbf{R} = \mathbf{H}\mathbf{H}_{(p)}^{-1}$.

Si el sistema $\mathbf{H}$ se encuentra caracterizado por su serie de Volterra y el sistema $\mathbf{H}_{(p)}^{-1}$ es su preinverso, se puede expresar $\mathbf{R}$ en serie de Volterra:

$$z(t) = \mathbf{R}[x(t)] = \sum_{n=1}^{p \cdot m} \mathbf{R}_n[x(t)] \quad (4.19)$$

En Schetzen [1980a] se demuestra analíticamente que el sistema preinverso es equivalente al sistema postinverso, y por tanto:

$$\mathbf{H}_{(p)}^{-1} = \mathbf{K} \quad (4.20)$$

Bastará entonces con aplicar (4.16), (4.17) y (4.18) o su versión simplificada, reflejada en la Figura 4.6 para obtener el sistema $\mathbf{H}_{(p)}^{-1}$.

Para calcular los coeficientes de Volterra de nuestro sistema preinverso tendremos en cuenta las expresiones (4.10), (4.11) y (4.15).

 FIGURA 4.7: Sistema de preinversión $\mathbf{R}$, formado por la conexión en *tándem* de los sistemas $\mathbf{H}_{(p)}^{-1}$ y $\mathbf{H}$

En vista de la definición obtenida para los coeficientes del sistema inversor $\mathbf{K}$, y dado que este se conecta en

cascada, a la hora de su diseño es necesario tener en cuenta que este esquema siempre aumenta el orden general del sistema, y por tanto no es el más indicado para casos en los que la distorsión presente sea excesivamente alta. Para poner de manifiesto este fenómeno, plantearemos un ejemplo, que se asemeja desde un punto teórico a la cadena completa de transmisión de un *array paramétrico*:

Dado que el sistema final sobre el que se van a aplicar estas técnicas es de orden dos, para ejemplificar el funcionamiento del p -inversor, vamos a comprobar su viabilidad aplicándolo a una sistema definido por sus núcleos de Volterra. Como se verá en la Sección siguiente estos núcleos de Volterra en realidad definen un sistema concreto, que corresponde a una estructura [LNL](#).

Este sistema es fuertemente no lineal, y además posee una respuesta en frecuencia que disminuye seriamente ciertas bandas. Por tanto, podemos considerarlo como un ejemplo extremo de compensación, de hecho, es imposible recuperar al completo la señal de partida, aunque aplicando la técnica de p -inversión es posible disminuir considerablemente la distorsión y el color que introduce el sistema.

Para poner de manifiesto la distorsión y el color que presenta el sistema definido por $\mathbf{H}$ hemos excitado el mismo con una señal tonal de frecuencia variable, siguiendo las especificaciones expuestas en la Tabla 4.1:

Parámetros	Valor	Unidades
T	800	ms
f_0	100	Hz
f_1	20	kHz
f_s	60	kHz
Factor $\uparrow f_s$	4	u.a.
$\sup\{x(t)\}$	1	u.a.
$\inf\{x(t)\}$	-1	u.a.

TABLA 4.1: Parámetros de la señal de entrada para evaluar el sistema de compensación LNL.

Al excitar $\mathbf{H}$ mediante esta señal, $x(t)$ según se muestra en la Figura 4.9 A obtenemos las contribuciones de cada orden, en este caso, dado que el sistema es de orden dos obtenemos $y_1(t)$ e $y_2(t)$. Para este sistema en concreto, la contribución del segundo orden es mayor que la del primero, como se puede observar en la Figuras 4.10 A y 4.10 B.

Sin embargo, dada la falta de ortonormalidad entre las componentes de este tipo de proyección, en la contribución $y_2(t)$ podemos apreciar una parte lineal considerable. Los espectrogramas correspondientes a la salida de ambos núcleos, representados respectivamente en la Figuras 4.10 D y 4.10 E ponen de manifiesto este hecho. Concretamente, en este sistema, la estrategia de p -compensación desperdicia la información de la parte lineal de $y_2(t)$ ya que el algoritmo fuerza a su eliminación al completo.

Para compensar el sistema, obtenemos los núcleos $\mathbf{K}$, según (4.16) y (4.17). El diseño de este sistema implica únicamente la estima de un filtro inverso, correspondiente a la definición de $\mathbf{K}_1$. Sin embargo, el bloque formado por $\mathbf{K}$ se encuentra compuesto por tres filtrado lineales más una convolución de segundo orden de complejidad relativa (véase Anexo A.1). En este bloque preinversor es importante destacar la presencia de un cero espectral en el término de continua. Esto complica el diseño del p -inversor, ya que en todos los puntos de la cadena de preinversión es necesario controlar el punto de trabajo adecuado mediante constantes aditivas. Este cero, a su vez, implica un cuidadoso diseño del filtro inverso, en este caso recurriremos al algoritmo expuesto en [Bouchard et al. \[2006\]](#). Ambas ramas del p -inversor deben introducir un retardo equivalente para asegurar el buen funcionamiento del sistema, ya que la estrategia seguida en este caso es puramente sustractiva.

Para simplificar el sistema, y dado el gran coste computación que suponen las convoluciones de orden superior a uno, en este caso hemos optado por implementar el núcleo $\mathbf{K}_2$ mediante bloques separados, según el diagramas de la Figura 4.4. Esta estrategia suele ser la más común, ya que los filtros inversos FIR que pueden ser aplicados a estos sistemas requieren de un gran número de coeficientes, y la estructura completa de $\mathbf{K}_2$ expresada como un único núcleo de orden dos conllevaría una convolución no lineal de gran tamaño.

Otra consecuencia que se desprende de la presencia del cero espectral del sistema bajo estudio, es que al emplear $\mathbf{K}_{\{p\}}$ como bloque preinversor, para poder aplicar la relación expuesta en (4.20) se han de recalcular las

A: Núcleo de primer orden en el dominio temporal.

B: Módulo y fase del núcleo de primer orden transformado.

C: Núcleo de segundo orden en el dominio temporal.

D: Módulo del núcleo de segundo orden transformado.

 FIGURA 4.8: Núcleos de Volterra $\mathbf{H}$ del sistema a compensar mediante el sistema del p -inversor.

A: Sistema de ejemplo sin compensar.

 B: Señales envueltas en el proceso de p -compensación.

 FIGURA 4.9: Diagramas de bloques para la estrategia de p -compensación de un sistema definido por sus núcleos de Volterra $\mathbf{H}$.

A: Salida del sistema desglosada en las contribuciones de cada orden.

B: Densidad espectral de las contribuciones de cada orden.

c: Espectrograma correspondiente a la señal $y(t)$

D: Espectrograma de la contribución de primer orden.

E: Espectrograma de la contribución de segundo orden.

FIGURA 4.10: Análisis de las contribuciones de cada uno de los órdenes de la serie de Volterra a la salida del sistema de la Figura 4.9.

constantes aditivas que aseguran los correctos márgenes dinámicos en cada uno de los bloques propuestos.

Una vez diseñado al completo el bloque de preinversión, aplicamos éste según el diagrama de bloques de la Figura 4.9 B, con el fin de obtener una señal $\tilde{x}(t)$ con un contenido espectral similar al de $x(t)$ y de mínima distorsión no lineal.

En la Figura 4.11 se muestra este resultado al haber aplicado sobre el sistema de la Figura 4.9 B las señal $x(t)$ que atiende a las especificaciones de la Tabla 4.1. A pesar de que el contenido espectral de la señal recuperada $\tilde{x}(t)$ sea similar al de la señal de entrada, podemos observar en la Gráfica 4.11 A dos aberraciones: (i) parte de la señal de alta frecuencia del sistema se ha perdido debido a la respuesta del propio sistema, este fenómeno se pone de manifiesto en la Figura 4.8 B donde podemos observar que para $\Omega > \pi/2$ existe una fuerte pérdida de potencia, que no puede ser compensada si queremos mantener la estabilidad de la cadena que forma $K_{[p]}$ con el sistema, al igual que sucede con el cero espectral localizado en continua; (ii) se observa un rizado en la banda de paso del sistema diferente al presente en la señal de entrada.

Estas aberraciones se deben a la propia configuración del p -inversor: mínimos rizados del filtro inverso se traducen en distorsiones lineales apreciables. A su vez el sistema completo R es de orden superior al originario. Dado que nos encontramos ante una conexión serie de sistemas no lineales, el orden del sistema resultante es el producto de los órdenes de ambos sistemas. En este caso al haber empleado dos sistemas de orden dos, el sistema resultante es de cuarto orden. En el espectrograma de la salida $\tilde{x}(t)$ podemos observar la presencia de los armónicos generados por el sistema completo. En este caso son apreciables los armónicos de orden dos y tres. Sin embargo, si contrastamos este espectrograma con el obtenido para la salida del sistema sin compensar, representado en la Figura 4.10 c observamos que: (i) la componente principal presenta un color similar al de la entrada salvo las pérdidas debidas a los ceros del sistema a compensar, (ii) la potencia que se asociaría al armónico de segundo orden ha disminuido frente a la presente en el sistema original y (iii) se aprecia la contribución del tercer orden debido al sistema de precompensación.

El espectrograma de la salida de un sistema cuya entrada es un tono de frecuencia variable lineal es útil para valorar cualitativamente la distorsión debida a la no linealidad del sistema. Este análisis destaca las pequeñas aberraciones armónicas debido a pureza tonal de la entrada, sin embargo no es representativo de otro tipo de distorsiones, que se traducen en distorsiones de intermodulación, así como aquellas debidas a las combinaciones de las distribuciones de retardos que componen las convoluciones no lineales.

Con el fin de minimizar esta incertidumbre con respecto a la valoración del sistema de compensación diseñado,

A: Contenido espectral de la entrada del sistema y la salida de la cadena p -inversor-sistema.

B: Espectrograma correspondiente a la salida de la cadena p -inversor-sistema.

FIGURA 4.11: Contenido espectral de la salida del sistema formado por la cadena p -inversor-sistema, para la entrada definida mediante los parámetros de la Tabla 4.1 .

Parámetro†	Valor	Unidades
k	752.1206	adim.
ϕ_0	$-\frac{\pi}{2}$	rad

† Para el resto de parámetros aplica la Tabla 4.1

TABLA 4.2: Parámetros de la señal de entrada para evaluar el sistema de p -inversión mediante el test del tono de frecuencia variable exponencial.

FIGURA 4.12: Test de no linealidad aplicado a la salida del sistema de ejemplo y a la salida de la cadena del p -inversor con el sistema.

proponemos aquí en empleo del test presentado anteriormente para valorar la memoria y la no linealidad de los sistemas (véanse Secciones 3.2.1 y 3.2.2), aplicando el estimador propuesto en “*Parámetro de distorsión basados en el test del tonos de frecuencia variable exponencial*”, en (3.59).

Para realizar este test aplicamos a la entrada del sistema un tono de frecuencia variable exponencial con las características especificadas en el la Tabla 4.2, tanto al diagrama de la Figura 4.9 A como al de la Figura 4.9 B. De este modo obtendremos un buen estimador de la memoria, el orden y de la distorsión presente en ambos sistemas.

En la Figura 4.12 se muestra el resultado de este para ambos sistemas, en donde $v(t)$ se obtiene a partir de la expresión (3.54a), y el valor de ambas señales es normalizado entre -1 y 1, facilitando la normalizado su valor. Estas señales ponen de manifiesto que el sistema precompensador es útil para disminuir la distorsión procedente de la parte no lineal de la salida $y_2(t)$ (obsérvese la gráfica correspondiente al detalle temporal centrado en el instante τ_2), por el contrario si centramos nuestra atención en el instante τ_3 observamos la aparición de una distorsión de tercer orden que no existía en el sistema original representado en la Figura 4.9 A.

A partir de estas señales podemos calcular el estimador Ψ a través de (3.59) para los dos sistemas representados en Figura 4.9:

$$\Psi(\mathbf{H}[x(t)]) = 11.5486\% \quad \Psi(\mathbf{R}[x(t)]) = 4.5538\% \quad (4.21)$$

Si comparamos el valor del estimador $\Psi(\mathbf{H}[x(t)])$ con los resultados expuestos en la Figura 4.10 podemos observar que éste refleja mejor la presencia de distorsión que la relación entre las diferentes salidas de cada uno de los núcleos $y_n(t)$ con respecto a la salida $y_1(t)$. Concretamente, en este caso $\|y_2(t)\| > \|y_1(t)\|$, sin embargo, si observamos el espectrograma correspondiente a $y_2(t)$ podemos deducir esta señal también aporta potencia relacionada linealmente con la entrada, de ahí que el valor del estimador no sea tan elevado a pesar de la relación

de potencias del término lineal y el cuadrático.

Al introducir el sistema de p -inversión aumentamos al doble la relación entre la potencia de la señal de salida que se encuentra relacionada linealmente con la entrada frente a la no lineal. A su vez, el color del espectro resultante se asemeja al de la entrada como se puede observar en la Figura 4.11 A. Sin embargo, el espectrograma de la Figura 4.11 B pone de manifiesto el aumento del orden del sistema $\mathbf{R}[x(t)]$, frente al segundo orden que presentaba el sistema originario $\mathbf{H}[x(t)]$. Sin embargo, los test tradicionales como el cálculo de la distorsión armónica vía excitación monotonar, arrojan buenos resultados, lo que ha hecho que esta técnica de compensación sea aceptada como válida, pese a aportar una mayor distorsión de intermodulación.

Otra desventaja que presenta este sistema es la necesidad del control del punto de trabajo del sistema p -inversor. Debido al cero que presenta el sistema $\mathbf{H}[x(t)]$, es necesario introducir constantes que obliguen a cada rama del sistema a funcionar en el punto de trabajo adecuado. Añadidos a estos problemas comunes a todos los sistemas de precompensación, hemos de incluir aquí el poco control sobre el margen dinámico de la salida del preinversor, lo que imposibilita su uso en caso de enfrentarnos a un esquema como el presentado en la Figura 4.13, en el que se hace necesario el empleo de un sistema limitador para poder cumplir con la condición de no-sobremodulación.

FIGURA 4.13: Modelo a emplear tras la extracción del sistema inverso completo $\mathbf{K}_{(p)}$, obviando la modulación AM.

Todo esto nos hace plantearnos la necesidad de diseñar un sistema de p -compensación que explote las cualidades concretas del sistema, ya que el sistema de p -compensación sólo impone la condición de memoria y orden acotados. Sin embargo, su efectividad disminuye si la relación entre las potencias de las salidas asociadas a cada orden no es descendente con éste, como es el caso del ejemplo expuesto.

Una vez identificado el sistema que nos atañe (véase Sección 6.4) podemos extraer información que nos permita plantear un modelo sencillo que se adecue al planteamiento de una estructura de compensación previa. En este caso, el modelo que se ajusta a nuestras necesidades es una estructura LNL. En la siguiente sección plantearemos un sistema de proyección que nos permita obtener este tipo de estructuras a partir de los núcleos de Volterra identificados, así como una metodología completa para obtener el sistema de preinversión correspondiente a la misma. Con esta estrategia perseguimos una mayor capacidad de anulación de las no linealidades así como un coste computacional del preinversor que permita su ejecución en tiempo real.

4.2. Compensación basada en la proyección LNL de los núcleos de Volterra

En muchas ocasiones, la mejor manera de compensar un sistema es explotar su naturaleza en sí y no partir directamente de los núcleos de Volterra. Dado que la estructuras de compensación de p -orden aumenta el orden general del sistema, y en nuestro caso el objetivo es el de disminuir la distorsión al máximo, hemos de encontrar un sistema que facilite la compensación mediante estructuras sencillas, y de baja carga computacional, facilitando así la compensación en tiempo real en sistemas de baja complejidad pero alta distorsión.

Debido a los datos arrojados por el sistema de identificación (véase Sección 6.4) podemos afirmar, que para esta aplicación en concreto, podemos obtener una estructura LNL equivalente a nuestro sistema. Ya existen estudios que permiten inicializar el problema de la estimación de la estructura LNL, Crama y Schoukens [2004, 2005], pero dado que disponemos de la descripción completa en series de Volterra, el enfoque aplicado aquí es más robusto. Además este tipo de descripción nos ha permitido inferir la estructura LNL como un buen descriptor del problema subyacente.

Esta estructura se compone de dos filtros lineales y una no linealidad intermedia de carácter polinómico y sin memoria, como la representada en la Figura 4.14. Siempre y cuando la representación de series de Volterra convergente, $h_p[m_1, \dots, m_p]$, que define el sistema cumpla ciertas condiciones, podremos definir éste mediante este modelo, únicamente calculando los parámetros que describen la estructura: $g_1[n]$, $g_2[n]$ y el polinomio $\mathcal{N}(x)$.

FIGURA 4.14: Estructura típica de sándwich Wiener-Hammerstein o LNL que incluye que dos filtros lineales ($g_1[n]$ y $g_2[n]$) con una no linealidad intermedia sin memoria polinómica, $\mathcal{N}(x)$.

Para calcular esta proyección, partimos de la expresión general del sistema que relaciona la entrada y salida del mismo. Dado que la representación de origen del sistema es una serie de Volterra, la no linealidad intermedia de la estructura ha de ser, por definición, suave, continua y polinómica del mismo orden la serie de la que procede:

$$\mathcal{N}(x) = \sum_{p=1}^P a_p \cdot x^p \quad (4.22)$$

por tanto, la relación entre la entrada y la salida del sistema por viene definida por:

$$\begin{aligned} y[n] &= g_2[n] * \mathcal{N}(g_1[n] * x[n]) \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} g_2[m] \cdot \sum_{p=1}^P a_p \left(\sum_{t=0}^{M-1} g_1[n-m-t] \cdot x[n-t] \right)^p \end{aligned} \quad (4.23)$$

Se aplicamos la propiedad de linealidad de la convolución sobre (4.23) y el teorema multinomial sobre la serie de potencias, podemos establecer el siguiente teorema:

Teorema 1. Siendo $h_p[t_1, \dots, t_p]$ el núcleo de Volterra correspondiente a orden p -ésimo que representa a una estructura de Wiener-Hammerstein, no lineal que formada por dos sistemas lineales $g_1[n]$, $g_2[n]$ y una no linealidad polinómica de orden P , descrita en la Figura 4.14, entonces los núcleos de Volterra se pueden calcular basándose en estos tres elementos:

$$h_p[t_1, \dots, t_p] = a_p \cdot \sum_{m=0}^{M-1} g_2[m] \cdot \prod_{s=1}^p g_1[t_s - m] \quad (4.24)$$

Demostración. Comenzando con la función de transferencia definida en (4.23) tenemos que:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{p=1}^P a_p \cdot \sum_{m=0}^{M-1} g_2[m] \left(\sum_{t=0}^{M-1} g_1[n-m-t] \cdot x[n-t] \right)^p \\ &= \sum_{p=1}^P a_p \sum_{m=0}^{M-1} g_2[m] \left(\sum_{\sum k_i=p} \left(\frac{p!}{k_1! \dots k_M!} \right) \prod_{t=0}^{M-1} g_1^{k_t}[n-m+t] \cdot x^{k_t}[n-t] \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Esta última expresión se puede reescribir para separar el efecto de los filtros lineales sobre la entrada, obtenién-

dose:

$$y[n] = \sum_{p=1}^P \sum_{\sum k_i=p} \sum_{m=1}^M \left(\frac{a_p \cdot p!}{k_1! \dots k_M!} g_2[m] \cdot \prod_{t=1}^M g_1^{k_t}[n-m-t] \right) \cdot \prod_{t=1}^M x^{k_t}[n-t] \quad (4.26a)$$

$$= \sum_{p=1}^P \sum_{t_1} \dots \sum_{t_p} \left(\sum_{m=1}^M a_p \cdot g_2[m] \cdot \prod_{s=1}^p g_1[n-m-t_s] \cdot \prod_{s=1}^p x[n-t_s] \right) \quad (4.26b)$$

$$= \sum_{p=1}^P \sum_{t_1} \dots \sum_{t_p} \left(h_p[t_1, \dots, t_p] \cdot \prod_{s=1}^p x[n-t_s] \right) \quad (4.26c)$$

Comparando (4.26c), con la expansión en series discreta de núcleos de Volterra para definir un sistema (3.5) y (4.26b) podemos reformular la relación entre la entrada y la salida a modo de series de Volterra:

$$h_p[t_1, \dots, t_p] = \sum_{m=1}^M a_p \cdot g_2[m] \cdot \prod_{s=1}^p g_1[t_s - m] \quad (4.27)$$

□

En resumen, a partir de (4.24), tenemos una expresión que relaciona el núcleo de p -orden con los elementos estructurales del diagrama de la Figura 4.14 y por tanto podemos recurrir a una descripción del sistema mediante un pequeño número de parámetros, que proceden de las estimaciones previas de los núcleos de Volterra.

4.2.1. Extracción de la estructura LNL a partir de los núcleos de Volterra

A pesar de que el Teorema 1 nos proporciona una relación clara entre los elementos estructurales $g_1[n]$, $g_2[n]$ y $\mathcal{A}(x)$, la obtención de estos parámetros, dados los núcleos de Volterra es aún un problema abierto, ya que la relación entre ambos descriptores es compleja, tanto en el dominio temporal como el frecuencial.

Al igual que sucede con la respuesta al impulso, los núcleos de Volterra nos ofrecen una definición de los sistemas no lineales que aporta información directa del propio sistema: nos dan una idea de su comportamiento frecuencial, las contribuciones de cada uno de los órdenes a la salida, etc. Estos núcleos proceden de estimaciones complejas como ya se apuntó en el Capítulo 3, que pueden implicar estimaciones paramétricas o no paramétricas. Sin embargo, en la mayoría de la ocasiones, es imposible dilucidar la estructura interna que se esconde tras ellos. El caso de la estructura de Wiener-Hammerstein es relativamente común dentro de la gran familia forman los sistemas no lineales estáticos y de memoria y orden decreciente. Normalmente, en cualquier problema de ingeniería común en el que se vea envuelto un proceso de transmisión, las no linealidades son fruto de un proceso de amplificación, previo al sistema de transmisión, de ahí que la estructura propuesta sea habitual en este tipo de esquemas.

El caso particular que atañe a esta Tesis es un claro ejemplo de este tipo de estructuras, ya que añadido a la cadena de transmisión habitual, nos encontramos con un medio de transmisión fuertemente no lineal, típicamente modelado como un sistema de Hammerstein simple.

Teniendo en cuenta las técnicas expuestas en el Capítulo 3, y dado que nos encontramos en la situación de estimar de forma fiable la serie de Volterra que define el sistema, se hace necesario desarrollar técnicas que simplifiquen la definición del sistema, para así poder encontrar un sistema de compensación viable en la realidad.

A pesar de lo muy comunes que son las estructuras LNL en los problemas de ingeniería, sólo encontramos una referencia que aborde este problema. En Kibangou y Favier [2007] se propone una descomposición basada en la factorización Toeplitz-Vandermonde para resolver el problema conjunto que supone la extracción de los

coeficientes $g_1[n]$, $g_2[n]$ y $\mathcal{N}(x)$ a partir de (4.24). Más concretamente, los esfuerzos de esta publicación se centran en el diseño de una factorización que permita expresar esta convolución, seguida de un producto cartesiano multidimensional mediante dos matrices, una tipo Toeplitz y otra tipo Vandermonde. Por desgracia, una de las condiciones impuesta por los autores es el valor inicial de los filtros $g_1[n]$ y $g_2[n]$, y dado que nuestro algoritmo va a ser empleado en una situación real, esta suposición es inadmisibile. De hecho, en vista de los resultados obtenidos en el proceso de identificación, presentados en la Sección 6.4, los filtros $g_1[n]$ y $g_2[n]$ son los típicos que definen un sistema de transmisión acústico, con un tiempo pequeño de ataque y otro más prolongado de relajación. Es por ello que, en este caso, se hace necesaria otro tipo de descomposición más compleja.

A partir de aquí se plantea el problema desde dos puntos de vista: en el plano teórico, en el que todos los coeficientes de los núcleos de Volterra son representativos y se encuentran bien estimados, y desde el punto de vista práctico, en el que tanto las propias técnicas de identificación, como las potencias asociadas a los diferentes coeficientes nos indican que las diagonales de los núcleos son el candidato perfecto para este tipo de descomposición, debido a que su estimación suele ser más sencilla y robusta.

En cualquier caso, no hay que perder de vista que es necesario disponer de la definición completa de los núcleos para poder asegurar que esta descomposición se ajusta al sistema bajo estudio.

Dado que la relación existe entre los núcleos de Volterra en este tipo de estructuras y los valores a estimar, $g_1[n]$, $g_2[n]$ y $\mathcal{N}(x)$ implica una convolución y un producto cartesiano multidimensional, nos encontramos un problema mal condicionado, y por tanto, tenemos que recurrir al análisis del mismo en otro dominio, con el fin de simplificar esta factorización. El dominio de Fourier se muestra como un buen candidato para mejorar el condicionamiento del problema, ya que al dispersar la información existente por todo el núcleo, facilita la extracción de los coeficientes.

Partimos por tanto de la transformada de Fourier multidimensional. Definiendo:

$$W_{\mathbf{t}}^{(p)} = \prod_{s=1}^p e^{-2\pi i \frac{\mathbf{w}[s] \mathbf{t}[s]}{M}} \quad (4.28)$$

siendo $\mathbf{t} \in \mathfrak{D}_p(\mathcal{M})$ y por tanto $\mathbf{t} = [t[1], t[2], \dots, t[p]]$, al igual que sucede con $\mathbf{w}$, podemos obtener la transformada de Fourier de núcleo de orden p :

$$H_p[\mathbf{w}] = W_{\mathbf{t}}^{(p)} \cdot h_p[\mathbf{t}] = a_p \sum_{m=0}^{M-1} g_2[m] \left(W_{\mathbf{t}}^{(p)} \cdot \prod_{s=1}^p g_1[t[s] - m] \right) \quad (4.29)$$

Para simplificar el estudio de esta expresión, analizamos primero la influencia del filtro $g_1[n]$ en relación a su transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} W_{\mathbf{t}}^{(p)} \cdot \prod_{s=1}^p g_1[t[s] - m] &= \prod_{s=1}^p g_1[t[s] - m] e^{-2\pi i \mathbf{w}[s] \mathbf{t}[s] / M} = \prod_{s=1}^p G_1[\mathbf{w}[s]] \prod_{s=1}^p e^{-2\pi i \mathbf{w}[s] m / M} \\ &= \prod_{s=1}^p G_1[\mathbf{w}[s]] e^{-2\pi i (\sum_{s=1}^p \mathbf{w}[s]) m / M} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Por tanto el núcleo transformado de Fourier se relaciona con el primer filtro de la estructura, el dominio frecuencial mediante:

$$\begin{aligned} H_p[\mathbf{w}] &= a_p \sum_{m=0}^{M-1} \left(g_2[m] \circ \prod_{s=1}^p G_1[\mathbf{w}[s]] e^{-2\pi i (\sum_{s=1}^p \mathbf{w}[s]) m / M} \right) \\ &= a_p \prod_{s=1}^p G_1[\mathbf{w}[s]] \sum_{m=0}^{M-1} \left(g_2[m] e^{-2\pi i (\sum_{s=1}^p \mathbf{w}[s]) m / M} \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Teniendo en cuenta la periodicidad en fase:

$$e^{-2\pi i(\sum_{s=1}^p \mathfrak{w}[s])m/M} = e^{-2\pi i(\sum_{s=1}^p \mathfrak{w}[s] - aM)m/M} \quad (4.32)$$

podemos analizar la expresión anterior sustituyendo $\sum_{s=1}^p \mathfrak{w}[s]$ por $\sum_{s=1}^p \mathfrak{w}[s](Q_M)$. Esto implica que el segundo filtro de la estructura LNL en dominio frecuencial se refleja en el núcleo de orden p mediante una hipermatriz circulante a izquierdas:

$$\begin{aligned} H_p[\mathfrak{w}] &= a_p \circ \prod_{s=1}^p G_1[\mathfrak{w}[s]] \sum_{m=1}^M \left(g_2[m] e^{-2\pi i(\sum_{s=1}^p k_s)m/M} \right) \\ &= a_p \circ \prod_{s=1}^p G_1[k_s] \circ G_2 \left[\sum_{s=1}^p k_s(Q_M) \right] \end{aligned} \quad (4.33)$$

De esta expresión general para cualquier orden p no es posible extraer los valores que buscamos. De hecho, es necesario disponer de al menos dos núcleos de Volterra diferentes para poder realizar la proyección sobre la estructura LNL.

De la expresión (4.33) se extraen las siguientes conclusiones:

- (i) La expresión (4.33) no se puede plantear como un problema matricial tradicional, ya que se ven envueltos dos tipos de productos diferentes: el cartesiano y el de Hadamard.
- (ii) Para poder extraer $G_1[k]$ y $G_2[k]$ necesitamos al menos dos núcleos diferentes de Volterra.

En cuanto a la primera observación, esta combinación de productos nos lleva a realizar un análisis por separado del módulo y de la fase del sistema, para transformar así la expresión (4.33) en un problema de inversión matricial sencillo. La segunda observación es obligada ya que, con el fin de resolver el valor de los parámetros que definen la estructura LNL a partir de (4.33), lo ideal es disponer del núcleo de primer orden del sistema y cualquier otro de orden p . Esta restricción es mínima, e incluso favorable, ya que todos los procesos de identificación que obtienen como solución los núcleos de Volterra se simplifican notablemente en el caso del primer orden. Así mismo, como la propia base empleada para realizar la descomposición en serie de Volterra no es ortogonal, siempre proyecta información en el núcleo de primer orden, sea cual sea la no linealidad presente en el sistema LNL.

Dado que disponemos de la caracterización en núcleos de Volterra del sistema, se cumple que:

$$\begin{aligned} \frac{H_p[\mathfrak{w}]}{\prod_{s=1}^p H_1[\mathfrak{w}[s]]} &= \frac{a_p \circ \prod_{s=1}^p G_1[\mathfrak{w}[s]] \circ G_2 \left[\sum_{s=1}^p \mathfrak{w}[s](Q_M) \right]}{a_1^p \prod_{s=1}^p G_1[\mathfrak{w}[s]] \prod_{s=1}^p G_2[\mathfrak{w}[s]]} \\ &= \frac{a_p}{a_1^p} \cdot \frac{G_2 \left[\sum_{s=1}^p \mathfrak{w}[s](Q_M) \right]}{\prod_{s=1}^p G_2[\mathfrak{w}[s]]} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Si definimos:

$$F_p[\mathfrak{w}] = \frac{H_p[\mathfrak{w}]}{\prod_{s=1}^p H_1[\mathfrak{w}[s]]} \quad (4.35)$$

obtenemos la siguiente relación entre la función $F_p[\mathfrak{w}]$, dependiente únicamente de los núcleos de Volterra, para obtener el valor de la transformada del segundo filtro $G_2[k]$:

$$F_p[\mathfrak{w}] \circ \prod_{s=1}^p G_2[\mathfrak{w}[s]] = \left(\frac{a_p}{a_1^p} \right) \circ G_2 \left[\sum_{s=1}^p \mathfrak{w}[s](Q_M) \right] \quad (4.36)$$

Dado que estas relaciones existentes entre el núcleo de orden p y el núcleo de primer orden son de tipo producto de Hadamard, podemos plantear una solución de la ecuación anterior basada en un análisis homomórfico, que permite plantear el problema como un sistema matricial, que analizará por separado el módulo y la fase de los filtros.

Análisis del módulo de los filtros LNL

Partiendo de (4.34), y aplicando un análisis homomórfico sobre la expresión, podemos plantear un problema matricial equivalente. Si definimos $\mathbf{H}_p$ como la matriz que contiene todos los coeficientes discretos del núcleo de Volterra de orden p podemos reinterpretar (4.35):

$$\log(|\mathbf{F}_p|) = \log|\mathbf{H}_p| - \log \left| \bigotimes_{s=1}^p \mathbf{H}_1 \right| \quad (4.37)$$

y por tanto, a partir de (4.34):

$$\text{vec} \left\{ \log(|\mathbf{F}_p|) \right\} = \mathbf{A} \cdot \text{vec} \left\{ \log(|\mathbf{G}_2|) \right\} - \mathbf{B} \cdot \text{vec} \left\{ \log(|\mathbf{G}_2|) \right\} + \log \left(\frac{a_p}{a_1^p} \right) \quad (4.38)$$

en donde:

$$\mathbf{A} \cdot \log(|\mathbf{G}_2|) = \text{vec} \{ \mathbf{C} \} \quad (4.39)$$

siendo $\mathbf{C}$ la matriz circulante de $\log(|\mathbf{G}_2|)$ y la matriz $\mathbf{B}$ cumple que:

$$\mathbf{B} \cdot \log(|\mathbf{G}_2|) = \text{vec} \left\{ \log \left| \bigotimes_{s=1}^p \mathbf{G}_2 \right| \right\} = \text{vec} \left\{ \log \left| \mathbf{G}_2^{[p] \otimes} \right| \right\} \quad (4.40)$$

Dado que este análisis normalmente se hace sobre una única pareja de núcleos de Volterra, podemos simplificar (4.43), obligando a que a_p y a_1 sean iguales a la unidad.

Si definimos $\mathbf{P} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$, podemos obtener el valor de $\log(|\mathbf{G}_2|)$ a partir de la pseudoinversa de $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}^\dagger$, y (4.43):

$$\log(|\mathbf{G}_2|) = \mathbf{P}^\dagger \text{vec} \left\{ \log(|\mathbf{F}_p|) \right\} \quad (4.41)$$

Una vez conocido el módulo transformado del segundo filtro, podemos extraer fácilmente el del primer filtro a partir del núcleo de Volterra de primer orden, dado que suele ser el de estima más robusta:

$$\log(|\mathbf{G}_1|) = \log(|\mathbf{H}_1|) - \log(|\mathbf{G}_2|) \quad (4.42)$$

Este análisis es posible debido a la naturaleza de $\mathbf{P}$. Dado que esta matriz contiene las simetrías presentes en los núcleos de Volterra y que procede de una matriz combinación de matrices de permutación, posee un buen número de condición (1.7321), que hace que este análisis sea muy robusto.

Únicamente resaltar que en este tipo de transformaciones es necesario dar un tratamiento especial a los posibles ceros presentes en las funciones de transferencia de los núcleos de Volterra, dándoles valores acotados en la transformación homomórfica.

Para ilustrar la capacidad de esta proyección retomaremos el ejemplo del sistema a compensar planteado en la Sección 4.1. En realidad los núcleos de Volterra del sistema $\mathbf{H}$ presentados en la Figura 4.8 representan a una estructura LNL similar a la presentada en la Figura 4.14, con una no linealidad polinómica correspondiente a $\mathcal{N}(x) = x + x^2$ y dos filtros discretos $g_1[n]$ y $g_2[n]$ representados en la Figura 4.15.

Como se puede observar en su representación transformada (4.15 b), éstos se han escogido de tal forma que concuerdan con el modelo físico que estamos tratando, en donde el primer filtro se asemeja al comportamiento

FIGURA 4.15: Filtros que componen la estructura LNL del ejemplo de la Figura 4.14

de un transductor modélico (filtro paso bajo que abarca cierta zona del espectro) junto con un filtro derivador en el caso de $g_2[n]$.

Aplicando la regla de la concatenación en cascada [Rugh \[1981b\]](#) y la relación 4.24 obtenemos la representación en series de Volterra de la Figura 4.8. Tanto en su representación temporal como frecuencial podemos observar el efecto de la combinación Toeplitz y cartesiana de los filtros.

Hay que destacar estos los dos filtros que se han escogido en el ejemplo ponen dificultad la proyección, ya que en ambos existen ceros en la función de transferencia. De hecho, el filtrado paso bajo del primer filtro hace que la estima en esta banda sea menos robusta, ya que como se puede observar en el módulo del núcleo de primer orden de la Figura 4.8 B, la banda eliminada del primer filtro, a pesar de tener representación debido al carácter derivador del segundo filtro, muestra puntos en los que se puede considerar un cero del sistema general.

En la Figura 4.16 se muestra el resultado de esta proyección y las estimas de los módulos de los filtros, habiendo aplicado el análisis homomórfico sobre ellos. En la Figura 4.16 A se puede observar la fidelidad de la proyección en relación con los filtros seleccionados para la estructura LNL, así como la recuperación teórica del módulo del núcleo de primer orden. Como era de esperar, las principales fluctuaciones se producen en la banda anteriormente mencionada, sin embargo, la recuperación de ambos módulos $|\tilde{G}_1(\Omega)|$ y $|\tilde{G}_2(\Omega)|$ es muy próxima a la de los filtros originales. Así mismo se observa, realizado una comparativa entre la Figura 4.16 B y Figura 4.16 C que estas dos estimas permiten recuperar con la misma fidelidad el módulo del núcleo de segundo orden de Volterra.

Análisis de la fase de los filtros LNL

Dado que para plantear el sistema de compensación es necesario conocer los filtros de la estructura LNL en tiempo, como se verá en la Sección 4.2.2, hemos de realizar el mismo análisis en este caso, para la fase de los filtros. Por desgracia, la fase siempre es mucho más sensible que el módulo a los procesos de identificación, que es a fin de cuentas de donde procederá la información referente a los núcleos de Volterra. En cualquier caso, es posible que en algunos casos sea necesario realizar un proceso de ponderación mediante el módulo para obtener una estima más robusta en coeficientes procedentes de procesos de identificación no paramétricos.

Al igual que en el caso anterior partimos de (4.34), y nos centramos únicamente en las relaciones de fase. Dado que las fases se comportan igual que el módulo transformado mediante logaritmos, podemos afirmar que:

$$\text{vec}\{\angle F_p\}(Q_\pi) = A \cdot \text{vec}\{\angle G_2\} - B \cdot \text{vec}\{\angle G_2\}(Q_\pi) \quad (4.43)$$

en donde A y B son de la misma forma que en la subsección anterior. Sin embargo, en este caso aparece una

A: Módulo de los filtros proyectados sobre la estructura LNL mediante el análisis homomórfico planteado, junto con el módulo del núcleo de orden uno estimado.

B: Módulo del núcleo de orden dos empleado en la proyección.

C: Módulo del núcleo de orden dos recuperado mediante las estimas de $|G_1(\Omega)|$ y $|G_2(\Omega)|$.

FIGURA 4.16: Obtención de los módulos de la estructura LNL a partir de los módulos de los núcleos de Volterra del sistema bajo estudio.

A: Filtros obtenidos directamente de (4.45), sin corrección de fase.

B: Recuperación a partir de las estimas calculadas en (4.45) y desigualdad (4.55).

C: Comparativa de las funciones de fase los dos núcleos, desenrolladas, obligando a reflejar pendiente causal (negativa).

FIGURA 4.17: Recuperación de los filtros de la proyección LNL sin corrección de fase.

indeterminación debida a la periodicidad de la fase ya que existe una familia de valores que cumple al relación anterior. En este caso no podemos aplicar el criterio de la pseudoinversa ya que las relaciones implícitas en $\mathbf{P}$ suponen que en realidad se cumple que:

$$\text{vec}\{\mathcal{F}_p\} + 2\pi\mathbf{n} = \mathbf{A} \cdot \text{vec}\{\mathcal{G}_2\} - \mathbf{B} \cdot \text{vec}\{\mathcal{G}_2\} + 2\pi\mathbf{m} \quad (4.44)$$

en donde $\mathbf{n}$ y $\mathbf{m}$ son vectores de enteros ($\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^{M^p}$). Estos vectores dependen de la velocidad de fase relativa entre los dos filtros de la estructura LNL. En una primera aproximación podemos ensayar la solución trivial en la que $\mathbf{n} = \mathbf{m} = \mathbf{0}_{M^p}$:

$$\mathcal{G}_2^{(1)} = \mathbf{P}^\dagger \text{vec}\{\mathcal{F}_p\} \quad (4.45)$$

Si a partir de esta fase obtenemos la correspondiente al primer filtro:

$$\mathcal{G}_1^{(1)} = \mathcal{H}_1 - \mathcal{G}_2^{(1)} \quad (4.46)$$

nos encontramos en condiciones de recuperar el la forma temporal de ambos filtros:

$$\tilde{\mathbf{g}}_1^{(1)} = \mathcal{F}^{-1}\left\{|\tilde{\mathbf{G}}_1| \circ \exp\left(i\mathcal{G}_1^{(1)}\right)\right\} \quad \tilde{\mathbf{g}}_2^{(1)} = \mathcal{F}^{-1}\left\{|\tilde{\mathbf{G}}_2| \circ \exp\left(i\mathcal{G}_2^{(1)}\right)\right\} \quad (4.47)$$

A: Recuperación de los filtros en tiempo para un τ_{LIN} pequeño. B: Recuperación de los filtros en tiempo para un τ_{LIN} mayor.

C: Núcleo de primer orden recuperado mediante las estimas frente al real.

D: Diagonal del núcleo de segundo orden recupera mediante las estimas frente a la real.

E: Zoom centrado del núcleo de segundo orden recuperado mediante la primera pareja estimada.

F: Zoom centrado del núcleo de segundo orden recuperado mediante la segunda pareja estimada.

FIGURA 4.18: Recuperación de fase de los filtros de la estructura LNL y recuperación de los núcleos mediante las estimas calculadas.

Estos dos vectores tienen la peculiaridad de cumplir que:

$$g_1^{(1)}[n] \otimes g_2^{(1)}[n] = h_1[n] \quad (4.48)$$

pero no tienen por qué cumplir $g_1^{(1)}[n] * g_2^{(1)}[n] = h_1[n]$. Así, si aplicamos (4.45) y (4.46) en el ejemplo propuesto, al recuperar los valores de $g_1^{(1)}[n]$ y $g_2^{(1)}[n]$ mediante (4.47) obtenemos como resultado las aproximaciones reflejadas en la Figura 4.17 A. Estas secuencias se encuentran dispersas a lo largo de toda la memoria M , y como se puede observar en la Figura 4.17 B, el resultado de aplicar la convolución lineal de estas dos secuencias supera la memoria del sistema, a pesar de que su convolución circular coincida con el núcleo de orden uno.

Esto implica que solamente aquellas soluciones de (4.44) que concentren la energía, de tal forma que la convolución circular de tamaño M coincida con la convolución lineal de estas secuencias, serán solución válida. Por desgracia nos encontramos ante un problema de optimización entera, que en un principio requiere técnicas complejas para obtener un vector válido. Además es importante destacar que la naturaleza de $\mathbf{P}^T$ hace que el problema no sea convexo, ya que está compuesta por elementos de valor absoluto menor que uno que hacen que la variación entre una secuencia $\mathbf{m}$ que sea solución válida y ella misma con un sólo elemento diferente en una unidad haga que el resultado no sea una solución viable.

Dado la complejidad del problema, una de las posibilidades es reducir la dimensionalidad del mismo al máximo, y teniendo en cuenta los elementos más robustos de los núcleos de Volterra. Podemos aplicar una reducción en la redundancia de la información disponible seleccionando únicamente los elementos de la diagonal de los núcleos. A partir de (4.33), si seleccionamos los elementos de $\mathbf{w}$ que pertenecen a la diagonal del núcleo, y calculamos la fase de éste:

$$\text{diag}\{\angle \mathbf{H}_p\}(\mathbf{Q}_\pi) = p \angle \mathbf{G}_1 + \mathbf{R}_p \angle \mathbf{G}_2(\mathbf{Q}_\pi) \quad (4.49)$$

en donde $\mathbf{R}_p$ es una matriz de permutación con la siguiente propiedad:

$$\mathbf{R}_p \mathbf{a} = \mathbf{b} \quad b[k] = a[pk \pmod{M}] \quad (4.50)$$

Si observamos la Figura (4.17 c), en la que se han representado la fase desenrollada del núcleo de orden uno, así como la fase de únicamente la diagonal del núcleo transformado de orden dos, se aprecia que la velocidad de fase de la segunda es mucho mayor. Matricialmente, esto se refleja en la naturaleza de $\mathbf{R}_p$, que implícitamente aumenta p la velocidad de fase. Para poder observar este fenómeno hemos escogido la primera pendiente negativa que le corresponde a la fase de la diagonal del módulo transformado de segundo orden.

Si combinamos esta expresión para el primer orden y el p , y teniendo en cuenta la definición de (4.35):

$$\begin{aligned} \text{diag}\{\angle \mathbf{F}_p\}(\mathbf{Q}_\pi) &= \text{diag}\{\angle \mathbf{H}_p\} - p \angle \mathbf{H}_1(\mathbf{Q}_\pi) = \\ &= \mathbf{R}_p \angle \mathbf{G}_2 - p \angle \mathbf{G}_2(\mathbf{Q}_\pi) \\ &= \mathbf{P}_{pd} \angle \mathbf{G}_2(\mathbf{Q}_\pi) \end{aligned} \quad (4.51)$$

en donde $\mathbf{P}_{pd}$ es una reducción de la matriz $\mathbf{P}$ de tal forma que:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{pd} &= \mathbf{P} \mathbf{w}_\bullet \quad \forall \mathbf{w} = [w[1], \dots, w[p]] \quad \text{siendo} \\ w[1] &= w[2] = \dots = w[p] = k \quad \forall k \in \mathcal{M} = \{1, 2, \dots, M\} \end{aligned} \quad (4.52)$$

De nuevo aparece el mismo problema planteado por la expresión (4.43), salvo que en este caso los vectores enteros son de tamaño M .

$$\text{diag}\{\angle \mathbf{F}_p\} + 2\pi \mathbf{n} = \mathbf{P}_{pd} (\angle \mathbf{G}_2 + 2\pi \mathbf{m}) \quad (4.53)$$

Dado que:

$$2\pi \mathbf{P}_{pd} \mathbf{m} (Q_\pi) = \mathbf{0}_M \quad 2\pi \mathbf{P}_{pd}^{-1} \mathbf{m} (Q_\pi) \neq \mathbf{0}_M \quad (4.54)$$

y que existe una familia entera de vectores $\mathbf{m}$ que sí son solución del problema y además cumplen que:

$$g_1[n] \otimes g_2[n] = h_1[n] \quad [g_1[n] * g_2[n]]_{1,\dots,M} = h_1[n] \quad (4.55)$$

Para ello partimos del retardo constate, τ_{LIN} en el dominio transformado que se aproxima más a la fase del núcleo de orden uno y forzamos a que se cumpla la expresión (4.53) para un valor :

$$\angle \hat{G}_2(k) = -\frac{\tau_{LIN}\pi}{M-1}k \quad (4.56)$$

y otra estima que ofrece la solución trivial, $\mathbf{m} = \mathbf{n} = \mathbf{0}_M$

$$\angle \check{\mathbf{G}}_2 = \mathbf{P}_{pd}^{-1} \text{diag} \{ \angle \mathbf{F}_p \} \quad (4.57)$$

A partir de estas dos estimas podemos plantear un vector $\hat{\mathbf{m}} \in \mathbb{Z}^M$ que fuerce a la estima de la fase del segundo filtro a asemejarse a una fase lineal:

$$\hat{\mathbf{m}} = \left[\mathbf{P}_{pd} (\angle \check{\mathbf{G}}_2 - \angle \check{\mathbf{G}}_2) \right] \quad (4.58)$$

aplicando:

$$\angle \check{\mathbf{G}}_2 = \mathbf{P}_{pd}^{-1} (\text{diag} \{ \angle \mathbf{F}_p \} + 2\pi \hat{\mathbf{m}}) \quad (4.59)$$

En cualquier caso, esta solución es una de las posibles que cumplen las condiciones impuestas. Dependiendo del carácter más o menos lineal en fase de los filtros de origen o de las necesidades del problema, también es posible que sea más adecuado imponer la aproximación de filtro más lineal en fase a $g_1[n]$. También puede ser posible que haya que modificar el valor del retardo impuesto, pero al recuperar las estimas de los filtros en tiempo, así como el núcleo de primer orden mediante (4.46) y (4.47) es fácilmente detectable.

En la Figura 4.18 se muestran dos grupos de estimas de los filtros, basadas en retardos iniciales diferentes. La primera pareja, formada por $\tilde{g}_1^{(2)}[n]$ y $\tilde{g}_2^{(2)}[n]$ se muestra en la Figura 4.18 A, mientras que en la Figura 4.18 B aparece la pareja $\tilde{g}_1^{(3)}[n]$ y $\tilde{g}_2^{(3)}[n]$, cuya fase se asemeja a la de los filtros impuestos al inicio del ejemplo. En ambos casos, ambas parejas de filtros son soluciones válidas, ya la no linealidad intermedia carece de memoria, y la memoria total del sistema en ambos casos es la misma, por tanto ésta no influirá a la hora de plantear el sistema de compensación.

Para corroborar este fenómeno, se han recuperado los núcleos de primer y segundo orden para la estructura proyectada teniendo en cuenta la expresión (4.24). Tanto en la Figura 4.18 C como en 4.18 D se ha representado en tiempo el resultado de esta recuperación a partir de las dos estimas que contienen la corrección en fase propuestas. Así, $\tilde{h}_1^{(2)}[n]$ y $\tilde{h}_2^{(2)}[n, n]$ se corresponden con la proyección LNL de filtros $\tilde{g}_1^{(2)}$ y $\tilde{g}_2^{(2)}$, mientras que $\tilde{h}_1^{(3)}[n]$ y $\tilde{h}_2^{(3)}[n, n]$ se corresponden con $\tilde{g}_1^{(3)}$ y $\tilde{g}_2^{(3)}$.

En las Figuras 4.18 D y 4.18 E se representan los respectivos zooms correspondientes con la recuperación del núcleo de segundo orden. Si comparamos este resultado con el presentado en la Figura 4.8 C, podemos apreciar que la proyección refleja la estructura fielmente, ya que ambos núcleos se corresponden con el original.

En cualquier caso, dado que la estructura se va a emplear para plantear un sistema de compensación, lo más recomendable es forzar la linealidad de fase para el primer filtro y dejar libertad de fase al segundo. Esto es debido a la propia estructura de inversión empleada, como se verá en la siguiente sección.

4.2.2. Compensación de las no linealidades a partir de la proyección LNL

Una vez obtenidos tanto el polinomio característico de la no linealidad como los filtros de la estructura representada en la Figura 4.14, $g_1[n]$ y $g_2[n]$, nos encontramos en condiciones de compensar este sistema.

El objetivo es encontrar una estructura previa al sistema que asegure a la salida final del sistema una señal que conserve una relación lineal con la entrada y, en la medida de lo posible, con el mismo contenido frecuencial.

Por desgracia, y debido a que la no linealidad polinómica supone una pérdida irrecuperable de información de signo, en el caso de orden par, el primer reto es forzar el punto de trabajo de cada uno de los elementos de la cadena, sobre todo, el posterior al primer filtro de la estructura LNL, para asegurar que la compensación es efectiva. Por tanto, para que el sistema de compensación sea viable hay que exigir una limitación a la estructura LNL a compensar: es necesario que este filtro no contenga un cero en continua, ya que de ser así, el punto de trabajo no satisfará esta condición.

Como en cualquier sistema de inversión de filtros lineales, no se puede exigir la recuperación de la señal para aquellas frecuencias que sean intersección de ceros para los dos filtros.

A parte de estas consideraciones, como el objetivo fundamental de este sistema de compensación es mejorar la transmisión para un sistema real, hay que asegurar la estabilidad de los filtros lineales que compondrán el compensador. Con el fin de facilitar una posible implementación real, proponemos aquí el empleo de filtros inversos regularizados:

$$H^{-1}(\omega) \approx \frac{H^*(\omega)}{H^*(\omega)H(\omega) + B^*(\omega)B(\omega)} \quad (4.60)$$

en donde $B(\omega)$ es una función de ponderación que asegura las pérdidas necesarias para compensar los ceros presentes en el filtro a invertir o que anula una parte del espectro en concreto. También se pueden aplicar otras técnicas como la inversión mediante el ajuste de la curva compleja definida por la transformada de Fourier del filtro de origen (Levy [1959]) o, en el caso del segundo filtro, filtros adaptados a la acústica de salas (Miyoshi y Kaneda [1988]).

FIGURA 4.19: Predistorsionador basado en la estructura LNL

En el caso del diseño de la no linealidad intermedia del predistorsionador dependerá fundamentalmente de la naturaleza de la distorsión residual requerida. Por tanto en este punto se abre un amplio abanico de posibilidades: aproximaciones polinómicas de $\mathcal{N}^{-1}$, inversiones punto a punto... En cualquier caso el requisito más restrictivo a cumplir es que, en el punto destacado de la Figura 4.19 la señal ha de conservar el margen dinámico para el que se ha realizado el proceso de identificación. En el caso del ejemplo tratado, es de 0 a 1, ya que las estructuras obtenidas mediante MLS devolverían la no linealidad característica únicamente si el margen de trabajo está garantizado.

Las dos condiciones a cumplir por el sistema son:

$$\text{Margen dinámico:} \quad \begin{aligned} \sup \{g_1^{-1}[n] * \mathcal{N}_2(g_2^{-1}[n] * x[n])\} &= \sup \{x[n]\} \\ \inf \{g_1^{-1}[n] * \mathcal{N}_2(g_2^{-1}[n] * x[n])\} &= \inf \{x[n]\} \end{aligned} \quad (4.61a)$$

$$\text{Compresión-Expansión:} \quad \mathcal{N}_1(\mathcal{N}_2(x)) \simeq x \quad (4.61b)$$

Como ya se detalló en la Subsección anterior, cualquier pareja de filtros $\tilde{g}_1$ y $\tilde{g}_2$ que cumplan las condiciones de módulo y fase impuestas por la proyección LNL sirve como parámetro inicial del diseño de los filtros inversos de la estructura propuesta en la Figura 4.19.

Una vez aplicadas las condiciones impuestas en (4.61) se puede proceder a la preinversión del sistema. En nuestro caso hemos optado por aplicar una aproximación punto a punto de la no linealidad. Con este esquema se han obtenido los resultados expuestos en la Figura 4.20.

Para obtener los filtros inversos aplicamos (4.60) directamente sobre la pareja de filtros seleccionada, y una vez calculados éstos nos encontramos en disposición de calcular la no linealidad sin memoria central del predistorsionador. Dada la naturaleza del primer filtro impuesto en la estructura $g_1[n]$, y para mantener el margen dinámico dentro de los valores establecidos, se ha impuesto que la banda eliminada no sea amplificada en gran medida por el filtro inverso $g_1^{-1}[n]$.

Con los filtros inversos diseñados, disponemos de los datos suficientes para determinar la no linealidad $\mathcal{N}_2$, que en este caso tiene carácter expansivo en el margen dinámico de interés. Para su diseño, partimos de expresión (4.61b), comparando punto a punto la pareja de no linealidades $\mathcal{N}$ y $\mathcal{N}_2$, y asegurando que (4.61b) se cumple en todo el margen dinámico del sistema.

Una vez diseñado el sistema completo, analizamos ahora el resultado de aplicar la misma señal ahora, a la cadena predistorsionador-sistema para comprobar la efectividad del sistema propuesto como predistorsionador. Así, si introducimos en el esquema de la Figura 4.19 la señal descrita en la Tabla 4.1. El resultado de la señal $\tilde{x}(t)$ en este caso es el mostrado en las gráficas de la Figura 4.20. Por desgracia, y debido a la naturaleza del filtro $g_1[n]$ impuesto en el ejemplo, la señal recuperada abarca menor ancho de banda que la señal original, al igual que sucedía en el caso del p -inversor (véase Figura 4.11 A), sin embargo, como se puede observar en el espectrograma de la Figura 4.20 D, en comparación con el obtenido para la señal sin compensar (4.20 C) y con el obtenido para la otra estrategia de inversión (Figura 4.11 A), se ha disminuido considerablemente la distorsión. A su vez, si se compara la respuesta en frecuencia entre la señal obtenida sin aplicar el compensador, reflejada en la Figura 4.10 B y la obtenida a la salida del sistema propuesto 4.19, $\tilde{x}(t)$, el contenido espectral es similar al de la señal de la entrada, con excepción de la banda irrecuperable por efecto del filtrado de $g_1[n]$.

Al igual que en el caso anterior, el hecho de aplicar un test monotonal de frecuencia variable lineal no aparta información sobre todos los tipos de distorsión posibles.

Por tanto seguimos la estrategia planteada en el sistema anterior de compensación: aplicar el test de excitación tonal de frecuencia variable exponencial planteado en la Sección 3.2.1 siguiendo las directrices de diseño de la señal de entrada de la Tabla 4.2 y analizamos de nuevo la relación de potencias existentes entre las ondículas resultado de la expresión (3.53), siendo en este caso $e(t)$ la señal de entrada $x(t)$, e $y(t)$ la salida del sistema completo $\tilde{x}(t)$. Si representamos este resultado, normalizándolo igual que para obtener la representación de la Figura 4.12, y lo comparamos de nuevo con el mismo test, aplicado al sistema sin compensar, obtenemos el resultado expuesto en la Figura 4.21.

En este caso sólo es necesario representar las primeras dos ondículas, ya el sistema de compensación no eleva el orden del sistema original, como sucedía con la estrategia de p -compensación anteriormente propuesta. De hecho, si nos focalizamos en el resultado obtenido para la ondícula correspondiente al segundo orden, podemos observar la efectividad del sistema propuesto, ya que sólo se observa un ligero residuo en la señal $[v(t) * x(-t)] * \tilde{x}(t)$ alrededor de la marca temporal τ_2 .

Definimos ahora el operador no lineal $\mathbf{S}[x(t)]$ que representa el efecto del sistema completo representado en

A: Señal recuperada en tiempo.

B: Señal recuperada en el dominio espectral.

C: Espectrograma correspondiente a la señal $y(t)$ (véase Figura 4.14)

D: Espectrograma de la señal recuperada a la salida del sistema propuesto en la Figura 4.19

FIGURA 4.20: Señal recuperada a la salida del sistema propuesto en la Figura 4.19, aplicando la entrada especificada en la Tabla 4.1.

FIGURA 4.21: Test de no linealidad aplicado a la salida del sistema LNL y a la salida de la cadena de predistorsionador con el sistema.

la Figura 4.19. Hay que tener en cuenta que en este caso $\mathbf{S}$ no puede ser representado fielmente mediante núcleos de Volterra, ya que la no linealidad $\mathcal{N}_2$ no es de carácter polinómico. En base a la expresión (3.59) calculamos de nuevo el estimador para el sistema completo y la entrada $x(t)$:

$$\Psi(\mathbf{S}[x(t)]) = 0.4786\% \quad (4.62)$$

Si comparamos este resultado con el obtenido para el sistema sin compensar y con la estrategia de p -inversión mostrados en (4.21) observamos la mejora sustancial que supone la aplicación de la proyección LNL en este caso para obtener un buen sistema precompensador. Este sistema, además de presentar una menor distorsión no lineal general, obtiene una respuesta en frecuencia final mucho más ajustada a la de la señal de entrada que en el caso de la estrategia de p -compensación, hecho evidenciado en las gráficas de las Figuras 4.11 A y 4.20 B.

Cabe destacar que este resultado ha sido obtenido aplicando únicamente dos operaciones de convolución y una relación no lineal sin memoria sobre la señal de entrada, operaciones todas ellas ligeras computacionalmente. Esto pone de manifiesto la utilidad de explotar el modelo subyacente en los núcleos de Volterra estimados para este sistema en concreto. Por desgracia, el explotar esta estructura supone la pérdida de la flexibilidad del método de p -inversión clásico.

4.3. Conclusiones

En este Capítulo incluimos dos estrategias de precompensación claramente diferenciadas: la primera de ellas es la clásica de p -compensación, en la que la corrección de la estimación se realiza mediante sustracciones de las estimas del aporte de cada uno de núcleos de Volterra y la segunda de ellas explota la estructura subyacente del sistema inferida a partir de los resultados de los núcleos de Volterra devueltos por los sistemas de identificación propuestos. Ambas estrategias son sensibles al proceso de identificación anterior: cuanto mejores sean las estimas de los núcleos de Volterra obtenidos, más efectivas serán las estrategias de precompensación.

Hasta ahora, en la literatura referente a la compensación de no linealidades en sistemas acústicos sólo encontrábamos dos procedimientos diferenciados:

1. Los basados en la sustracción de las estimas de las salidas de cada una de las contribuciones de los núcleos de

orden de Volterra superior a uno. En esta clasificación se englobarían aquellas estrategias que parten de los núcleos de Volterra directos como es el caso del p -inversor presentado aquí (sirvan de ejemplo las siguientes publicaciones: Nam y Powers [1990], Frank et al. [1992], Schurer et al. [1995a, 1997], Farina et al. [1998]) y aquellas estrategias que extraen estas estimas mediante métodos adaptativos (Bellini et al. [1998], Klippel [1998]) y aplicando simplificaciones severas a los núcleos de Volterra que los determinan.

- ii. Y aquellos que parten de modelos físicos y que contrarrestan las no linealidades del sistema mediante redes no lineales sin memoria, como por ejemplo la estrategia de Kite et al. [1998], presentada en el Capítulo 2 (véase Figura 2.5 c).

En este Capítulo hemos presentado la estrategia de p -compensación en primer lugar por dos razones: este sistemas de compensación se puede considerar como la cota superior al mejor de los sistemas de compensación mediante redes de filtros de Volterra adaptativos sustractivos y además ésta estrategia se toma como estructura de inversión por defecto, ya que, en teoría es válido para todos aquellos sistemas que puedan representarse mediante series de Volterra discretas. En este estudio se ha demostrado que, presuponiendo una fiabilidad máxima en la estima de los núcleos de Volterra, esta opción no es la más adecuada para los sistemas de *arrays paramétricos* debido a dos características fundamentales de este tipo de transmisión: la no linealidad de partida es considerable con respecto a la parte lineal que forma la transmisión y el carácter “filtro paso alto” de este tipo de sistemas provoca la aparición de ceros en la respuesta generalizada del sistema que no facilitan el planteamiento de la estructura de p -compensación.

Este pequeño estudio nos sirve de guía para redefinir el problema. Una vez que hemos planteado una estrategia de identificación generalista en el Capítulo 3 para abordar un problema que en principio no está definido y hemos obtenido una definición de núcleos de Volterra que describe el sistema de transmisión completo, nos encontramos en una situación idónea para explotar posibles estructuras subyacentes en este proceso.

Datos arrojados por los experimentos expuestos en el Capítulo 6 corroboran que detrás de los núcleos de Volterra estimados se esconde una estructura LNL, que describe al sistema de una forma simple, y que además permite diseñar una estructura de precompensación de bajo coste computacional que permite su implementación en sistema de tiempo real de bajo coste.

El primer paso es por tanto encontrar el valor de los parámetros que componen la estructura LNL a partir de los núcleos estimados. En este Capítulo se ha presentado una metodología completa que permite tanto detectar por inspección la posibilidad de representar un sistema mediante esta simple estructura, así como obtener de forma fiable los parámetros que la definen mediante la definición de un nuevo algoritmo de factorización de matrices en pares Toeplitz–Vandermonde. Hasta ahora, en la literatura sólo encontrábamos la posibilidad de este tipo de descomposición bajo ciertas condiciones muy restrictivas (Kibangou y Favier [2007]), como por ejemplo la imposición de cierto número de coeficientes de los filtros que las componen. Sin embargo, con el algoritmo propuesto podemos obtener todos estos parámetros imponiendo únicamente que los núcleos de Volterra que describan el sistema procedan de un sistema LNL o de alguna estructura más compleja que se pueda reducir a ésta. Para obtener esta proyección es necesario emplear el dominio transformado y aplicar un análisis homomórfico, que permite transformar este tipo de problema en un doble problema matricial, en el que, por un lado se obtiene la magnitud de los coeficientes e ambos filtros y por otro sus fases. Con este planteamiento conseguimos transformar un complejo problema de proyección en un problema tradicional de inversión matricial.

Una vez definida la metodología para obtener la estructura LNL subyacente, es sencillo obtener un sistema de preinversión espejo de la misma, y por tanto de tipo LNL. En este caso la no linealidad no ha de ser polinómica. Únicamente es necesario controlar el punto de trabajo de toda la estructura garantizando así el correcto funcionamiento del sistema precompensador, así como asegurar la estabilidad de los filtros inversos diseñados.

Resultados expuestos a lo largo del Capítulo, basándonos en un ejemplo discreto que se asemeja al comportamiento esperable en una estructura de *array paramétrico*, aportan indicios suficientes para considerar esta técnica como una buena opción para precompensar estos sistemas. De hecho, hemos aplicado test de no linealidad diseñados a tal efecto, que indican que este sistema supone una mejora sustancial frente a la aplicación de redes de filtros de Volterra.

Otra ventaja que presenta este tipo de estrategia es que añade fiabilidad a la estima previa de los núcleos

de Volterra, siempre y cuando la suposición de una estructura LNL subyacente sea cierta. Al proyectar estos núcleos mediante una descomposición tipo Toeplitz–Vandermonde disminuimos el ruido de estima presente en los coeficientes estimados de los núcleos de Volterra mediante el proceso de identificación, mejorando la descripción del mismo.

La estructura LNL aporta dos claras ventajas: (i) el preprocesado necesario para obtener una señal fiel del sistema es muy ligero computacionalmente, ya que a partir de una estructura LNL hemos demostrado que se puede obtener un compensador casi perfecto a base de filtros lineales y compresores matemáticamente relacionados con la estructura LNL e (ii) independiza la influencia del transductor y el sistema electrónico previo del medio de transmisión, esto hace posible aligerar complejidad del sistema de identificación, hasta tal punto de permitir al propio usuario adaptarlo a la zona de uso escogida en tiempo real y sin necesidad de especialistas.

Esto abre la puerta para añadir funcionalidades al sistema como la autocalibración, sin necesidad de diseñar algoritmos específicos para realizar esta tarea. Sin embargo, esta estrategia adaptativa no es viable si no disponemos de un modelado previo como el propuesto a lo largo de estos dos últimos Capítulos. Por desgracia, la influencia del transductor en el sistema completo depende fuertemente del funcionamiento de la cadena completa que impone el propio *array paramétrico* (tipo de modulación, puntos de trabajo...) lo que implica la necesidad de un modelado entrada–salida completo, para poder definir el sistema.

Sin embargo es importante destacar que al igual que sucedía con la metodología propuesta para el sistema de identificación, las estrategias de compensación presentadas aquí son viables en otro tipo de sistemas. El mismo hecho de centrarnos en una estructura típica como la LNL centra el problema, si bien es cierto que una gran parte de los sistemas no lineales relacionados con problemas de transmisión e instrumentación pueden representarse mediante este tipo de estructura, y por tanto, esta metodología es extrapolable a los mismos, permitiendo linealizar procesos que impliquen etapas de amplificación que introduzcan no linealidades, algo muy habitual en este área de conocimiento.

A partir de aquí, presentaremos la aplicación de toda esta metodología sobre una estructura de *array paramétrico* real, diseñada con el fin de comprobar la efectividad de los algoritmos propuestos, centrándonos únicamente el sistema de estudio principal sobre el que versa este texto. Para ello será necesario plantear un diseño propio así como una estrategia de medición concreta, que únicamente será aplicable este tipo de problemas.

DISEÑO DE PROTOTIPOS Y ESTRUCTURA BAJO ESTUDIO

Como ya se mencionó de forma somera en la introducción de este texto, los *arrays paramétricos* forman un conjunto muy especial dentro de los sistemas de transducción electroacústicos. La principal peculiaridad que los caracteriza es su capacidad para generar señales a partir de procesos no lineales, lo que implica un punto de trabajo concreto, que se encuadra dentro de un contexto intermedio entre los procesos de transducción electroacústicos ultrasónicos y sónicos. Pasamos por tanto a centrarnos en aplicaciones que exigen procesos de transmisión paso banda. A su vez, los niveles manejados por estas estructuras superan con creces los normales en sistemas acústicos habituales, siendo incluso mayores que los manejados por sistemas de [PA](#) profesionales.

Todas estas circunstancias implican el desarrollo de sistemas de transducción orientados únicamente a este tipo de aplicaciones. Fundamentalmente, los transductores asociados al fenómeno del *array paramétrico* se basan en el principio piezoeléctrico o en el electrostático y conllevan el diseño de sistemas de polarización y amplificación propios, que aseguren un correcto funcionamiento del conjunto de la estructura.

Es por todo ello que en este Capítulo se hará una breve presentación de la tecnología existente hasta el momento aplicada a la generación de *arrays paramétricos* así como un breve esbozo del funcionamiento de los mismos a través de la teoría de transducción clásica. También se realizará un breve repaso de los productos comerciales existente en el mercado que basan su funcionamiento en esta tecnología.

Toda esta información servirá de base para la implementación de un sistema real básico, que ante todo persiga la fidelidad y que permita caracterizar el proceso de generación de ondas acústicas a partir de procesos no lineales. Básicamente, esta estructura servirá como sujeto de pruebas de los algoritmos propuestos a lo largo de los Capítulos [3](#) y [4](#).

Debido a las particularidades de los transductores capaces de adaptarse a esta aplicación concreta, los primeros esfuerzos de este diseño se han centrado en la elección del transductor. Este elemento determina el diseño tanto del sistema de polarización–amplificación como la disposición del mismo formando un *array* físico real, y por tanto la directividad predecible que ofrezca el sistema.

A su vez, en este Capítulo se presenta la electrónica asociada al *array* físico diseñado, asegurando así la posible reproducibilidad de todos y cada uno de los experimentos que se presentarán en el Capítulo [6](#). También

incorporamos la descripción de todos aquellos circuitos necesarios para poder emplear los sistemas de adquisición disponibles y que permiten la adaptación de impedancias y niveles necesaria para asegurar la fiabilidad de las medidas realizadas.

Dada la naturaleza de las medidas necesarias para caracterizar este proceso, se ha creído conveniente hacer una breve mención a los sistemas de instrumentación involucrados a lo largo de esta Tesis y que han permitido tanto el diseño del sistema como la caracterización del proceso físico bajo estudio aplicando los algoritmos de identificación y compensación propuestos ya a lo largo del texto. Algunas de ellas, como las medidas de vibración o acústicas requieren de ciertas precauciones que se detallarán a continuación.

Otro factor a destacar de la caracterización de estos sistemas de transmisión, en los que se ven involucrados procesos de modulación, es el tratamiento de las señales para adaptarlas a las bandas de trabajo frecuenciales. En este caso, tanto la frecuencia de muestreo como el margen dinámico vienen impuestos por los procesos de modulación. Como ya se comentó anteriormente, estos procesos de adaptación son triviales si las señales involucradas en el proceso se encuentran acotadas en banda, sin embargo, al aplicar a la entrada de los sistemas señales pseudoaleatorias hemos de emplear sistemas de adaptación ligeramente más complejos que salvaguarden tanto las limitaciones frecuenciales como de margen de trabajo, para asegurar que la profundidad de modulación permanece constante.

Con todo ello presentamos un marco general de trabajo que sirve como guía a los experimentos que presentaremos en el siguiente Capítulo.

5.1. Estado del arte de los transductores orientados a las estructuras de *arrays paramétricos*

Los transductores necesarios para este tipo de sistemas han de estar concebidos para acoplar el máximo de energía sonora al aire. Básicamente, la finalidad de estos dispositivos ha de ser la de transformar las señales eléctricas en señales acústicas dentro del rango de frecuencias de interés: los ultrasonidos.

El diseño de los transductores electroacústicos parte del condicionamiento de dos parámetros básicos: el margen de frecuencias de trabajo y el patrón de dispersión exigido al mismo. El transductor ideal para este tipo de aplicaciones debería tener un ancho de banda desde los 20 kHz hasta el infinito, un patrón muy directivo y una capacidad energética infinita. Desafortunadamente estas tres especificaciones son imposibles de cumplir. Para solventar este problema hemos de plantearnos la posición adecuada de la portadora, que nos permita trabajar al menos con un ancho de banda de 40 kHz en una parte del espectro más o menos plana. Esta característica nos aporta la capacidad de compensación necesaria para contrarrestar el proceso no lineal y la ecualización que conlleva el proceso de demodulación aéreo.

El objetivo final ha de ser conseguir en la banda de interés (de 20 Hz a 20 kHz) un espectro plano en la onda secundaria. Para ello, en la banda superior de la señal modulada se ha de producir una pendiente correspondiente a $20 \log 4$ dB por cada octava de audio (demodulada). Esto implica que si tenemos un tono a 1 kHz, de la portadora en la onda primaria, de 120 dB_{SPL} (120 dB_{SPL} @ $f_0 + 1$ kHz) y queremos que ese tono, al pasarlo a 2 kHz de la portadora, se reproduzca al mismo nivel, necesitaríamos una potencia de 107.96 dB_{SPL} (datos extraídos de [Barbagallo et al. \[2008\]](#)).

Como la banda de audio comprende al menos 10 octavas, para que el sistema conserve la respuesta plana necesitaríamos una ecualización muy severa. Evidentemente, si nuestro rango comprende de los 20 Hz a los 20 kHz, el tono de mayor potencia a transmitir será el que se corresponda a los 20 Hz demodulados. A partir de estos datos es fácil deducir que si colocamos la portadora en la frecuencia de resonancia del transductor conseguiremos los niveles necesarios de 200 dB_{SPL} o más. Sin embargo, aunque el transductor alcance estas potencias, hay que modelar el aire como medio de transmisión no perfecto y por tanto con un nivel de saturación propio, así como las recomendaciones internacionales al respecto de los niveles máximos permitidos (véase Apéndice C.3).

A la hora de diseñar *arrays paramétricos* también es conveniente tener en cuenta que la potencia recibida depende del área del haz primario, según la solución de Berkta. En [Croft y Norris \[2003\]](#) se recomienda que esta

superficie sea mayor a 0.15 m^2 . Es por ello que la mayor parte de las aplicaciones se componen de estructuras en forma de malla, lo que aumenta considerablemente el rendimiento del sistema.

Todos los sistemas diseñados antes de 1998 se basan en estructuras piezoeléctricas bimórficas. Estas se componen de dos capas con forma de oblea cóncava polarizadas, permitiendo grandes desplazamientos en el centro del elemento. Para conseguir una mayor adaptación con el aire, este sistema piezoeléctrico se une a un cono de aproximadamente 8 mm de diámetro. Estos conos se diseñan para que su frecuencia fundamental de resonancia coincida con la del transductor. Toda esta estructura se monta sobre una base para formar una cavidad con una altura equivalente a $\lambda/4$, siendo λ la longitud de onda correspondiente a la frecuencia de resonancia del sistema. En la Figura 5.1 A se muestra un esquema de la sección lateral de la estructura completa.

Estos dispositivos se comportan de forma adecuada, pero sus capacidades paramétricas se encuentran limitadas. A pesar de que su respuesta en frecuencia supera los 10 kHz, a partir de la frecuencia de resonancia disminuyen su sensibilidad. Este fenómeno los limita para la implementación de *arrays paramétricos* eficientes. Además son dispositivos muy frágiles y que generan subarmónicos con gran facilidad.

La ATC recoge en el informe técnico Croft y Norris [2003] el empleo de un nuevo tipo de transductor: el *Transductor Paramétrico de Capa Piezoeléctrica*. Estos transductores se basan en el empleo de una capa de polivinilo de difluorato (PVDF o también conocido como PVF2). Este material se utiliza ampliamente en la industria química, pero para esta aplicación en concreto ha de ser polarizado. La polarización se puede aplicar en una sola dirección o en dos. Para obtener una frecuencia de resonancia correspondiente a la deseada para la construcción de *arrays paramétricos* se practican unas pequeñas hendiduras en la placa de PVDF, como se puede observar en la Figura 5.1 B. Una vez polarizada y conformada la capa se monta sobre una capa de metal. Estos dispositivos se pueden diseñar con un rango de frecuencias de resonancia que puede abarcar desde los 25 kHz hasta los 100 kHz, lo que los hace perfectos para su empleo en estructuras de *array paramétrico*. Además cuentan con la ventaja de eliminar los subarmónicos que producían sus predecesores.

En Oksanen et al. [1997] se presenta una nueva versión de piezoeléctricos recomendados en este caso por Barbagallo et al. [2008]. La ventaja principal que presentan estos transductores es la adaptación de impedancias existente entre la membrana y el aire, debido a su diseño (véase Figura 5.1 c). Estos transductores resultan de por sí bastante directivos y trabajan con una frecuencia de resonancia mayor a los 20 kHz. En Barbagallo et al. [2008] se recomienda este tipo de transductores para sistemas que requieran un ancho de banda superior a 20 kHz y con frecuencias portadoras comprendidas entre los 150 a 200 kHz.

El futuro de las aplicaciones de *arrays paramétricos* apunta al empleo de un nuevo tipo de transductores, basados en la tecnología del silicio, los MUTs, que dependiendo de su diseño, y principalmente de su tamaño, permiten obtener rangos de frecuencias y niveles superiores a los transductores ultrasónicos basados en cerámicas piezoeléctricas. Dentro de este grupo encontramos dos categorías diferentes: los *c-MUTs* y los *p-MUTs* atendiendo

FIGURA 5.1: Estructuras básicas de los principales transductores recomendados para implementar sistemas de *arrays paramétricos*.

FIGURA 5.2: Principales productos comerciales que implementan las técnicas de *arrays paramétricos acústicos*.

al principio de su actuador. Básicamente estos procesos de fabricación permiten la obtención de *arrays* de pequeño tamaño que alcanzar los niveles adecuados para este tipo de aplicaciones. Aunque hasta ahora han demostrado su eficacia para implementar sistemas no invasivos de detección y generación de imágenes médicas mediante ultrasonidos [Oralkan et al. \[2002\]](#), sí han demostrado ser capaces de cubrir el margen frecuencial de interés para esta aplicación como demuestran las siguientes publicaciones: [Wygant et al. \[2008, 2009\]](#).

5.2. Productos comerciales

Como ya presentamos en la introducción de este texto, los sistemas de audio directivo son la única solución posible para ciertas aplicaciones de megafonía, entretenimiento etc. Debido a esta necesidad, en los últimos 25 años ha crecido el interés por este tipo de estructuras y algunas marcas comerciales han desarrollado productos de consumo basados en esta tecnología. Presentamos aquí las más destacadas:

- **Audiobeam:**

Esta es la solución propuesta por la casa *Sennheiser*. En un principio, se encuentra orientada a su aplicación en museos y teatros. Aunque el sistema no ofrece una gran calidad de audio, sí que consigue patrones de directividad bastante buenos.

El dispositivo se ha diseñado para emplearlo de forma directa o aprovechando reflexiones en superficies suaves.

La técnica de modulación empleada es la *AM* simple, por tanto la calidad obtenida se adecúa únicamente a la voz. Aunque en el catálogo no se especifica el ancho de banda de actuación, es de presuponer que éste se encuentra en el rango medio.

- **Audiospotlight:** Probablemente sea el producto comercial más desarrollado en este campo. Basado en los estudios de Joseph Pompei [Pompei \[2002\]](#) y con patente [Phelps \[2006\]](#). La marca *Holosonic*, creada por el mismo autor, ofrece múltiples soluciones que aseguran distorsiones menores a uno.

La mayor parte de los productos se basan en el empleo de la modulación *AM*, como ya se patentó en [Tanaka et al. \[1989\]](#), pero en este caso se incluye el procesamiento de la raíz cuadrada filtrada (véase procesamiento de [Kite et al. \[1998\]](#), y Figura 2.5 c). La marca ha realizado un esfuerzo considerable en el diseño y mejora

de los transductores que emplea para elaborar sus *arrays* Pompei [2013]. Debido a las características que se aportan en los catálogos, es de presuponer que se están incluyendo nuevos sistemas de preprocesado en los productos comerciales de esta marca, ya que ofrecen resultados que en un principio no pueden ser alcanzados con técnicas de procesamiento tan simples.

En la actualidad, la marca *Holosonic* también integra las tecnología propuestas por Elwood G. Woody Norris y plasmada en la propuesta *HyperSonic Sound*.

Prueba del éxito de estos sistemas es la amplia expansión de sus instalaciones a lo largo del mundo, incluyendo el Museo Smithsonian o la Tate Gallery de Londres. Incluso algunas empresas de gran envergadura, como Motorola han optado por estas soluciones de megafonía en sus dependencias.

- *Hypersound*TM:

Es la propuesta del fundador y director de la ATC. Es un dispositivo de uso doméstico, de alta calidad, basado en transductores piezoeléctricos. El esfuerzo principal de esta compañía se ha centrado en la mejora de los transductores existentes (plasmado en la patente Selfridge y Khuri-Yakub [2000]) así como en las técnicas de modulación Spencer et al. [2010] y el preprocesado previo (patente Norris [2015a]).

- *Acouspade*TM:

Es el producto estrella de la marca UTRASONICS AUDIO TECHNOLOGIES, que mejora ciertas prestaciones, como la directividad, frente a la propuesta de HOLOSONICS. Sin embargo está concebido para ofrecer calidad de voz, y por tanto se centra en aplicación de megafonía. Este dispositivo genera manchas acústicas que sirven tanto para producir áreas de audiencia reducida en exposiciones como fuentes virtuales.

A pesar de esta gama de productos comerciales, esta tecnología aún no se encuentra desarrollada por completo, debido a la complejidad del *hardware* necesario para su funcionamiento así como el procesamiento previo que implica el manejo de sistemas fuertemente no lineales.

5.3. Consideraciones preliminares para el diseño del prototipo orientado a la caracterización

A la hora de diseñar el prototipo que va a ser caracterizado se ha procurado mantener una fidelidad máxima, basándose en obtener ésta a partir de un buen sistema de amplificación conjugado con un sistema de transducción lo más lineal posible en el margen de interés. Se ha de resaltar en este punto que las medidas realizadas servirán de apoyo a la elaboración de un protocolo de medición que puede servir como fase previa de diseño de un prototipo industrial.

Con esta idea en mente, hemos seleccionado como elemento básico de transducción un altavoz electroacústico que centra su margen de actuación en la banda de interés para esta aplicación, esto es, que asegura un buen funcionamiento en la banda ultrasónica baja y media. El principal problema tecnológico al que nos enfrentamos es que los transductores han de ser capaces de alcanzar un nivel acústico relativamente alto, sea cual sea la técnica de modulación empleada (véase § 2.3). Por desgracia, la relación existente entre la onda primaria y secundaria obliga a que los *arrays paramétricos* no ofrezcan niveles muy altos en el margen audible, ya que para que se diese esta situación deberíamos incurrir en la superación de niveles recomendados para el ser humano en alta frecuencia. Aunque a menudo las normas y recomendaciones se suelen centrar en el margen sónico o se refieren a ruidos impulsivos, podemos encontrar una buena guía en la que basarnos en Lawton [2001], en donde se muestran diversas recomendaciones al respecto según la normativa vigente en diferentes países.

El objetivo fundamental en el diseño es el de proporcionar un prototipo adecuado a la identificación del fenómeno físico bajo estudio, por lo tanto, en esta fase no es necesario tener en cuenta parámetros como la portabilidad o la escalabilidad industrial del mismo. Sin embargo, sí que es determinante adaptar todo el conjunto a sistemas de instrumentación que aseguren la correcta monitorización y toma de medidas necesarias. Las principales exigencias a la hora de plantear este diseño orientado únicamente al análisis en laboratorio del fenómeno físico son:

- Tener en cuenta tanto el elemento acústico empleado como su forma geométrica para obtener en la medida de lo posible un haz estrecho.

- Diseñar una array con posibilidad de introducir diferentes señales en cada uno de los transductores, haciendo posible la opción de *beamforming*, ya que estudios anteriores han demostrado que esta posibilidad es viable (Yang et al. [2005]).
- Permitir la monitorización de las etapas claves del proceso: es necesario tener acceso a la señal de entrada, modulada/postprocesada, amplificada y polarizada. Esta monitorización ha de ser lo menos intrusiva posible y tener en cuenta los márgenes dinámicos de trabajo.
- Permitir polarizaciones adecuadas a las señales postprocesadas amplificadas.

Lógicamente, en la medida de lo posible, se van a emplear sistemas de instrumentación tradicionales para evitar incurrir en posibles aberraciones o no linealidades debido a cuestiones técnicas, no al fenómeno físico en sí.

5.4. Transductor seleccionado

La selección del transductor en el que se va a basar la estructura orientada a la caracterización condiciona todas las etapas de diseño posteriores (amplificación, polarización diseño de la disposición de los elementos del array...). Desafortunadamente las exigencias expuestas para el diseño reducen nuestra capacidad de elección a un pequeño abanico de transductores comerciales. Debido al ancho de banda requerido, así como a la frecuencia central de trabajo, la elección prácticamente queda acotada al uso de altavoces electrostáticos.

Teniendo en cuenta estas limitaciones referentes a nivel y a margen dinámico, hemos decidido basar el prototipo en los transductores comerciales de SENSComp¹. Esta elección determina el resto de los parámetros del diseño del array: distancia entre transductores, frecuencia de portadora de las modulaciones y la electrónica asociada al elemento acústico que depende fundamentalmente del principio de transducción en el que están basados.

Este transductor se basa en el principio electrostático que permite construir altavoces con mejores prestaciones que los altavoces dinámicos tradicionales ya que éstos poseen una coloración menor, una respuesta a los transitorios rápida y baja distorsión no lineal. Sus diagramas de radiación son simples y flexibles, debido a que las fuerzas eléctricas que actúan sobre ellos se transfieren directamente al diafragma para generar las ondas de presión sonoras.

Aunque los principios que rigen el funcionamiento de los altavoces electrostáticos son sencillos, presentan ciertas características que dificultan su uso en sistemas domésticos: para su correcto funcionamiento, es necesario (i) proporcionar tensiones elevadas, y (ii) mantener un control adecuado de las impedancias implicadas en el proceso de transducción. Por tanto, la electrónica asociada a estos dispositivos es única, y no es compartida con aplicaciones de audio habituales. También esconden problemas mecánicos relacionados con la elección del material del diafragma y la tensión sobre la que debe estar sometido.

Otro problema a tener en cuenta es el nivel de presión sonora que pueden alcanzar este tipo de sistemas de transducción. En los primeros diseños, esta falta de sensibilidad se compensaba con el tamaño del diafragma, pero actualmente, los niveles alcanzados son suficientes para satisfacer las necesidades concretas de nuestro sistema.

Por desgracia, los costes de fabricación de estos altavoces superan con creces los de los altavoces electrodinámicos. Por esta razón el mercado aún se encuentra copado por estas arquitecturas, aunque ciertas marcas han apostado por los sistemas electrostáticos, ya que además de poseer mejores prestaciones acústicas también ofrecen mayores posibilidades de diseño. Además, los transductores electrostáticos ha jugado un importante papel el desarrollo de todos los diseños electroacústicos, ya que han servido como patrón de referencia debido a su fidelidad.

Pese a que las arquitecturas más comunes en el mercado son las de “doble plato perforadas y diafragma intermedio”, debido a nuestra elección de diseño, nos centraremos en los transductores de capa y diafragma, que facilitar tanto el diseño como el análisis de nuestra estructura. En la Figura 5.3 se pueden apreciar las diferencias entre estos dos sistemas. El segundo (Figura 5.3 B), es el que ofrece mayor seguridad, ya que el sistema se encuentra balanceado. En nuestro caso, como la finalidad del sistema propuesto es la fidelidad y la sencillez del análisis, hemos optado por una arquitectura de capa simple como la reflejada en la Figura 5.3 A.

¹Datos del fabricante disponibles en: <http://www.senscomp.com/pdfs/series-600-instr-grade-ultrasonic-sensor-spec.pdf>

FIGURA 5.3: Arquitecturas típicas de altavoces electroacústicos, para sistemas de carga constante.

En ambas, la fuerza electrostática generada entre platos es igual a:

$$F = \epsilon_0 \frac{V_{sig}^2 S_0}{2d^2} \quad (5.1)$$

En donde F se corresponde con la fuerza en newtons a la que están sometidas las placas, ϵ_0 es la permitividad del medio interplaca, en este caso aire, S_0 es el área en m^2 cubierta por un plato y V_{sig} la diferencia de potencial existente entre las dos placas en voltios. La distancia d se aplica en metros y se corresponde con la distancia interplaca representada en las dos arquitecturas de la Figura 5.3.

La ecuación (5.1) revela que existe una relación cuadrática entre la fuerza y la distancia interplacas. Esto supone una gran desventaja, ya que la presión generada se relaciona linealmente con el desplazamiento de la placa d . Para solucionar este problema, se parte de polarizaciones altas en los diafragmas. La solución expuesta en la Figura 5.3 B se emplea desde 1924 y consiste en cargar la placa intermedia móvil mediante una fuente de alimentación continua hasta un valor Q_D . Por tanto, esta carga Q_D pasa a estar sometida a una fuerza linealmente proporcional a la señal de excitación:

$$F = Q_D \frac{V_{sig}}{2d} \quad (5.2)$$

Del mismo modo, la solución expuesta en la Figura 5.3 impone el empleo de una polarización externa para el buen funcionamiento de sistema, ya que si las placas no se encuentran correctamente polarizadas, además de una pérdida considerable de la sensibilidad, aparecen efectos no lineales severos (Streng [1990]) y que provocan anomalías en el comportamiento del diafragma (Mellow y Kärkkäinen [2008]).

En esta Tesis, no nos centraremos en el diseño de transductores en sí, si bien es cierto que es necesario tener presente el tipo de arquitectura escogida, ya que esta puede condicionar las medidas realizadas, así como la electrónica necesaria para su funcionamiento. Para más información referente al funcionamiento de este tipo de transductores se puede recurrir a Borwick [2001].

A continuación se presentará una breve descripción del funcionamiento de la estructura escogida desde un punto de vista de análisis de cuadripolos. Este estudio clásico, sirve de guía de diseño y sienta las bases de ciertos experimentos presentados en el siguiente Capítulo, aunque no deja de ser una simplificación del sistema real.

5.5. Modelo electromecánico del transductor

Los modelos electromecánicos de los transductores permiten relacionar las variaciones de las señales eléctricas a las que se somete un transductor y la fuerzas provocadas por éstas. En caso de transductores recíprocos, esta relación se cumple en ambas direcciones.

En comportamiento de los transductores se rige por las ecuaciones diferenciales de movimiento que describen a cada miembro de su estructura, así como condiciones frontera impuesta por el problema y la estructura, sin embargo, esta representación en ocasiones suele ser poco manejable y los diseñadores de transductores recurren a la estructura de circuitos equivalentes para simplificar el análisis. Para ello, se seleccionan componentes eléctricos que representen de forma adecuada el comportamiento de cada uno de los elementos de la estructura.

En nuestro caso, se puede asumir un modelo electromecánico de resonancia única, ya que se trata de una arquitectura sencilla, aunque se pueden asumir un mayor número de resonancias para estructuras más complejas o frecuencias de trabajo superiores a las impuestas en el diseño Skudrzyk [1958].

La conversión electromecánica se basa en la interacción de las magnitudes eléctricas y mecánicas que intervienen en un transductor. En nuestro caso, este transductor se compone, en primera instancia, de un condensador plano con una capa fija y otra variable. Debido a la sencillez de este esquema, podemos aplicar un estudio de interacción entre magnitudes similar al propuesto en Rossi [1988] para altavoces electrostáticos.

La cara móvil del transductor se encuentra a un potencial impuesto por una fuente de tensión determinada con respecto a la placa estática. La distancia que separa ambas placas, es ausencia de ese potencial, d_0 . Si los desplazamientos de la placa móvil son pequeños con respecto a d_0 y obviamos el efecto de bordes del condensador plano formado por ambas placas, podemos determinar la capacidad del condensador como:

$$C(t) = \frac{\epsilon S_0}{d_0 + x(t)} \quad (5.3)$$

teniendo en cuenta que según la arquitectura de la Figura 5.4, un desplazamiento positivo implica un alejamiento de las placas. La distancia entre placas en un momento dado será igual a:

$$d(t) = d_0 + x(t) \quad (5.4)$$

Así podemos determinar la relación entre la capacidad del transductor en un momento dado, $C(t)$, y su capacidad inicial, C_0 :

$$C(t) = \frac{C_0}{1 + \frac{x(t)}{d_0}} \quad (5.5)$$

La relación existente entre la tensión entre las placas del condensador y la carga $q_c(t)$ almacenada en ellas se puede calcular mediante:

$$v_c(t) = \frac{\left(1 + \frac{x(t)}{d_0}\right) q_c(t)}{C_0} = \frac{q_c(t)}{C_0} + \frac{x(t) q_c(t)}{C_0 d_0} \quad (5.6)$$

El primer término se corresponde con el comportamiento del sistema en reposo, y el segundo representa su acoplamiento electromecánico, ya que este término depende tanto de la magnitud eléctrica $q_c(t)$ como de la mecánica $x(t)$.

De acuerdo con la ley de Coulomb, existe una fuerza electrostática entre las placas, F_e , que puede deducirse del principio de conservación de la energía. Si la carga $q_c(t)$ permanece constante:

$$dW = dW_e + F_e dx = 0 \quad (5.7)$$

se cumple por tanto que:

$$F_e = -\frac{\partial W_e}{\partial x} \quad (5.8)$$

A: Diagrama de esfuerzos y flujos que describen el funcionamiento del transductor.

B: Magnitudes involucradas en los puertos del cuadripolo equivalente.

FIGURA 5.4: Esfuerzos, flujos y estados involucrados en el sistema.

La energía almacenada en el condensador atiende a las leyes físicas que gobiernan el comportamiento de los componentes eléctricos, así tenemos que:

$$W_e(t) = \int_0^{q_c(t)} \frac{q'}{C(t)} dq' = \frac{1}{2} \frac{q_c^2(t)}{C(t)} = \frac{1}{2} C(t) v_c^2(t) \quad (5.9)$$

Sustituyendo en (5.8) las expresiones mostradas en (5.5), (5.6) y (5.9), podemos obtener la fuerza electrostática a la que se encuentra sometido el diafragma móvil:

$$F_e(t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial (q_c^2(t)/C(t))}{\partial x} = -\frac{q_c^2(t)}{C_0 d_0} \quad (5.10)$$

Además de esta fuerza electrostática, en el diafragma se genera una fuerza mecánica de sentido contrario debida a la compliancia mecánica del diafragma. Éste fenómeno se refleja en la Figura 5.4 mediante muelles laterales. Evidentemente, la realidad es que toda la membrana posee esta característica elástica, que se tratará con más detalle en el estudio de la radiación del transductor. Teniendo en cuenta la aproximación de condensador plano, la compliancia mecánica del diafragma sigue la ley de Hooke:

$$F_{m_1} = k_i x(t) \quad (5.11)$$

Nótese que en esta relación sólo se tiene en cuenta el desplazamiento no correspondiente al equilibrio. Además de esta fuerza, hay que tener en cuenta la fuerza inversa que supone un desplazamiento de la membrana en ausencia corriente, y por tanto, sin cambios en la carga del diafragma. Un desplazamiento $x(t)$ supone una variación de potencial con respecto a la tensión a una distancia de d_0 en la membrana de:

$$\Delta V = -q_0 \frac{x(t)}{\epsilon_0 S_0} \quad (5.12)$$

Esta diferencia de tensión se asocia a su vez con una fuerza que depende del desplazamiento, ya que:

$$F_{m_2} = q_0 \frac{\Delta V}{d} = -\frac{q_0^2}{d_0 \epsilon_0 S_0} x(t) = -\frac{C_0^2 V_{pol}^2}{d_0^2 \epsilon_0 S_0} x(t) = -\frac{V_{pol}^2 \epsilon_0 S_0}{d_0^3} x(t) \quad (5.13)$$

Desafortunadamente, las relaciones entre las magnitudes mecánicas y eléctricas reflejadas en (5.6) y (5.10) implican que el sistema de transducción no ofrece un comportamiento lineal, ya que en la primera expresión se encuentra involucrado el producto $x(t)q_c(t)$ y en la segunda aparece el término $q_c^2(t)$. La única solución posible frente a este problema es linealizar ambas expresiones obligando al sistema a funcionar en un punto de trabajo que reduzca esta no linealidad en la medida de lo posible. Para ello, los diseñadores de transductores electrostáticos

introducen una tensión de polarización constante. Esta polarización aporta una carga constante $q_0 = V_{\text{pol}}/C_0$:

$$q_c(t) = q_0 + q(t) \quad (5.14)$$

Si aseguramos que $\max\{|q(t)|\} \ll q_0$, podemos aproximar la primera relación de transducción, (5.6) a:

$$v_c(t) \approx V_{\text{pol}} + \frac{V_{\text{pol}}}{d_0} x(t) + \frac{q(t)}{C_0} = V_{\text{pol}} + v(t) \quad (5.15)$$

en donde $v(t)$ representa la parte variable con el tiempo de la señal de tensión en bornes del condensador. Además, en este tipo de transducción se opta por diseños que cumplen $\max\{|v(t)|\} \ll V_{\text{pol}}$ y por tanto $\max\{|q(t)|\} \ll q_0$ y $\max\{|x(t)|\} \ll d_0$. Teniendo en cuenta esto, la relación de transducción (5.10) pasa a ser:

$$F_e(t) = -\frac{(q_0 + q(t))^2}{2C_0 d_0} \approx -\frac{q_0^2}{2C_0 d_0} - \frac{q_0 q(t)}{C_0 d_0} = -\frac{V_{\text{pol}} q_0}{2d_0} - \frac{V_{\text{pol}}}{d_0} q(t) \quad (5.16)$$

Lógicamente la fuerza electrostática generada por el transductor es de sentido opuesto a la fuerza definida en la Figura 5.4, ya que se trata de una fuerza de atracción.

Si añadimos el efecto de la complancia mecánica del diafragma, las fuerzas involucradas en el sistema, reflejadas en la Figura 5.4 cumplen que:

$$F_0 + F(t) = \left(k_i - \frac{\varepsilon_0 S_0}{d_0^3} V_{\text{pol}}^2 \right) x(t) - \frac{V_{\text{pol}} q_0}{2d_0} - \frac{V_{\text{pol}}}{d_0} q(t) \quad (5.17)$$

Con estas aproximaciones podemos definir las ecuaciones que rigen el comportamiento de las señales que dependen del tiempo. Si definimos la velocidad de la membrana a partir del desplazamiento, $u(t) = \dot{x}(t)$ y la corriente a partir de la variación de la carga en el diafragma, $i(t) = \dot{q}(t)$, se obtienen las ecuaciones de acoplamiento electrostático linealizadas:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{C_0} \int_{-\infty}^t i(t) dt + \frac{V_{\text{pol}}}{d_0} \int_{-\infty}^t u(t) dt \\ F(t) &= -\frac{V_{\text{pol}}}{d_0} \int_{-\infty}^t i(t) dt + \left(k_i - \frac{\varepsilon_0 S_0}{d_0^3} V_{\text{pol}}^2 \right) \int_{-\infty}^t u(t) dt \end{aligned} \quad (5.18)$$

Una vez linealizado el sistema es posible trabajar con estas relaciones asumiendo el régimen sinusoidal permanente, adaptándolas así para definir el circuito electromecánico equivalente, podemos reescribir la expresión anterior en forma de fasores:

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{j\omega C_0} i + \frac{V_{\text{pol}}}{j\omega d_0} u \\ F &= -\frac{V_{\text{pol}}}{j\omega d_0} i + \frac{k_i - k'}{j\omega} u \end{aligned} \quad (5.19)$$

Siendo $k' = \frac{\varepsilon_0 S_0}{d_0^3} V_{\text{pol}}^2$ y F , v , i y u los fasores que representan a la fuerza, la tensión, la intensidad y el desplazamiento respectivamente.

Nos encontramos por tanto en situación enunciar las relaciones que definen el cuadripolo equivalente de la estructura representada por la Figura 5.4. De hecho, las relaciones expuestas en (5.19) se corresponden directamente con la definición de los parámetros de impedancia (parámetros-z) de un cuadripolo. Esta estrategia empleada para definir el comportamiento de transductores electrostáticos es conocida desde hace mucho tiempo, y simplifica notablemente su análisis Lampton [1978]. Partiendo de las relaciones de la expresión (5.19) obtenemos

la conversión directa del transductor a una red tipo T.

$$\begin{bmatrix} v \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ u \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$z_{11} \triangleq \left. \frac{v}{i} \right|_{u=0} \quad z_{12} \triangleq \left. \frac{v}{u} \right|_{i=0} \quad z_{21} \triangleq \left. \frac{F}{i} \right|_{u=0} \quad z_{22} \triangleq \left. \frac{F}{u} \right|_{i=0} \quad (5.21)$$

Lo que supone una matriz de impedancias simétrica, salvo por el signo del parámetro z_{21} , fruto de la convención de signos escogida para las fuerzas y corrientes:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \frac{1}{j\omega C_0} & \frac{V_{pol}}{j\omega d_0} \\ -\frac{V_{pol}}{j\omega d_0} & \frac{k_i - k'}{j\omega} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Esta simetría indica que el sistema se comporta como un transductor recíproco. El parámetro fundamental que define el comportamiento de estos sistemas es el factor de transducción que se define como [Borwick \[2001\]](#):

1. La fuerza generada por unidad de tensión en ausencia de desplazamiento de la membrana.
2. La corriente generada por unidad de desplazamiento del diafragma con los terminales del altavoz cortocircuitados.

Según la definición expuesta en 1 y teniendo en cuenta las relaciones expuestas en (5.19):

$$\Gamma \triangleq \left. \frac{F}{v} \right|_{u=0} = -\frac{V_{pol}C_0}{d_0} = -\frac{\varepsilon_0 S_0 V_{pol}}{d_0^2} \quad (5.23)$$

Si por el contrario, optamos por la definición expuesta en 2, y recurriendo a la primera relación de (5.19):

$$\Gamma \triangleq \left. \frac{i}{u} \right|_{v=0} = -\frac{V_{pol}C_0}{d_0} = -\frac{\varepsilon_0 S_0 V_{pol}}{d_0^2} \quad (5.24)$$

De nuevo queda demostrada la reciprocidad del transductor, teniendo en cuenta que las dos relaciones de transducción son coincidentes, hecho conocido desde hace décadas [Foldy y Primakoff \[1945\]](#), [Primakoff y Foldy \[1947\]](#). Habitualmente, y por comodidad, la matriz de impedancias de los transductores se representa en función de esta relación:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \frac{1}{j\omega C_0} & -\frac{\Gamma}{j\omega C_0} \\ \frac{\Gamma}{j\omega C_0} & \frac{k_i - k'}{j\omega} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Estas relaciones tienen como objeto caracterizar el comportamiento final del transductor frente a una señal de excitación eléctrica. Esto implica, que el cuadripolo representado en la Figura 5.4 será excitado por medio de un generador de tensión y a la salida, el cuadripolo se encontrará cargado por un circuito equivalente acústico que representará la influencia del aire y la impedancia de radiación ofrecida por éste. Por esta razón, en la mayoría de las ocasiones es más útil definir el cuadripolo equivalente por medio de la matriz de transmisión, que relaciona las magnitudes de entrada del cuadripolo con las de salida, permitiendo así un estudio sencillo del sistema cuando el transductor se encuentra conectado con el mundo real.

La matriz de transmisión $\mathbf{T}$ se define como:

$$\begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ u \end{bmatrix} \quad \text{por tanto:} \quad t_{11} \triangleq \left. \frac{v}{F} \right|_{u=0} \quad t_{12} \triangleq \left. \frac{v}{u} \right|_{F=0} \quad t_{21} \triangleq \left. \frac{i}{F} \right|_{u=0} \quad t_{22} \triangleq \left. \frac{i}{u} \right|_{F=0} \quad (5.26)$$

Estos parámetros se pueden deducir de las relaciones expuestas en (5.19) y en función de la relación de transducción:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Gamma} & \frac{1}{j\omega\Gamma} \left[-(k_i - k') - \frac{\Gamma^2}{C_0} \right] \\ \frac{j\omega C_0}{\Gamma} & -\frac{(k_i - k')C_0}{\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Gamma} & \frac{-k_i}{j\omega\Gamma} \\ \frac{j\omega C_0}{\Gamma} & -\frac{(k_i - k')C_0}{\Gamma} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Y tratarse como tres cuadripolos en cascada que representan las diferentes partes que componen el transductor:

$$\mathbf{T} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_0 & 1 \end{bmatrix}}^{\text{Parte eléctrica}} \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\Gamma} & 0 \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix}}^{\text{Transducción}} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & -k_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\text{Parte mecánica}} \quad (5.28)$$

Una vez realizado este análisis podemos recurrir a las analogías electroacústicas para plantear un modelo eléctrico del sistema, basándose en las ecuaciones de movimiento y fuerzas, haciéndolas equivaler a componentes eléctricos. En la Tabla 5.1 se resumen estas analogías.

Magnitud mecánica	Magnitud eléctrica
Fuerza (F)	Tensión (v)
Velocidad (u)	Corriente (i)
Desplazamiento (x)	Carga (q)
Masa (m)	Inductancia (L)
Compliance elástica ($\frac{1}{k_i}$)	Capacidad (C)
Resistencia viscosa (c)	Resistencia (R)

TABLA 5.1: Analogías eléctricas de un sistema electromecánico, [Tilmans \[1996\]](#). No reflejamos el carácter vectorial de las magnitudes por simplicidad.

Los valores de estos componentes dependen de los parámetros iniciales de diseño del transductor:

- La distancia interplacas d .
- La tensión de polarización V_{pol} .
- El factor de transducción electromecánico, $\Gamma(\text{NV}^{-1})$ como la relación existente entre la tensión ejercida entre bornes del sistema y la fuerza a la que está sometido:

$$\Gamma = \frac{q_0}{d - x_0} = \epsilon_0 \frac{S_0 V_{\text{pol}}}{(d - x_0)^2} \quad (5.29)$$

A partir de los cuales se puede plantear el sistema eléctrico equivalente que describe su funcionamiento. En la Figura 5.5 se representa un modelo simplificado de circuito análogo al funcionamiento de un altavoz electrostático.

En este circuito, Z_M representa la impedancia mecánica en circuito abierto del diafragma. Por tanto, siguiendo esta analogía podemos representar este fenómeno de transducción a partir de la matriz de impedancias, como en (5.20), pero teniendo en cuenta los elementos eléctricos incorporados a la analogía:

FIGURA 5.5: Analogías electromecánicas que describen el funcionamiento del sistema de transducción elegido.

$$\begin{bmatrix} v \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_E & \frac{-1}{j\omega C_{EM}} \\ \frac{-1}{j\omega C_{EM}} & Z_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ u \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

donde Z_E es la impedancia eléctrica y C_{EM} la compilancia electromecánica, dadas por:

$$Z_E = \frac{1}{j\omega C_0} \quad C_{EM} = \frac{\varepsilon_0 S C_0}{V_{pol}} \quad (5.31)$$

La impedancia Z_M representa la impedancia mecánica en circuito abierto del sistema y compone la impedancia mecánica en circuito cerrado junto con compilancia negativa que imprime estabilidad en el sistema.

$$Z_{ms} = Z_M - \frac{\Gamma^2}{j\omega C_0} \quad (5.32)$$

A nivel de diseño del sistema, en una primera aproximación es necesario conocer el valor de los componentes que forman el circuito eléctrico equivalente de la Figura 5.5 B. Dado que este tipo de sistemas tienen un factor de transducción electromecánico muy pequeño, al trasladar la impedancia mecánica en circuito cerrado Z_{ms} al dominio eléctrico ($Z_{me} = Z_{ms}/\Gamma^2$), obtenemos una impedancia que puede aproximarse a un circuito abierto. Esto facilita el cálculo de la exigencia de potencia al sistema de amplificación que alimentará al transductor así como la determinación de estos parámetros experimentalmente.

Lógicamente, este modelo supone una simplificación del transductor real bajo estudio. Otro problema al que nos enfrentamos es que los datos aportados por el fabricante no permiten plantear la matriz de impedancias necesaria para completar este modelo, ni siquiera de forma parcial. Para solventar esta falta de datos es necesario incluir medidas previas que facilitarán el diseño posterior del *array* (véanse Secciones 6.2.2 y 6.2.3).

5.6. Sistemas de amplificación y polarización

Teniendo en cuenta el transductor seleccionado, y en vista de la necesidad de linealizar su comportamiento, es necesario suministrar al conjunto una polarización adecuada que asegure que el sistema funciona el punto de trabajo correcto. Para este transductor en concreto, este punto es relativamente exigente (150~200 V). Una opción consistiría en exigir esta tensión al propio amplificador. Dado que debido a la naturaleza capacitiva de los transductores electroacústicos esto no supondría un aumento de la potencia activa requerida. Sin embargo, esto obligaría al amplificador a trabajar en un margen asimétrico, así como tensiones de salida que alcancen los 400 V. Por tanto, lo ideal es conseguir independizar la tensión de alimentación de la señal a transmitir en la medida de lo posible.

Por un lado, tanto la portadora como la señal a transmitir se amplificarán mediante un amplificador de instrumentación que cumple con las exigencias requeridas por el sistema. El amplificador seleccionado es el WMA-280

FIGURA 5.6: Amplificador de instrumentación WMA-280 de FALCO SYSTEMS empleado en el sistema de medición.

de FALCO SYSTEMS² (véase Figura 5.6), que asegura tanto los niveles de potencia y tensión exigidos por alimentar el array, así como la adaptación de impedancias necesarias.

Este amplificador cumple las características para esta aplicación: (i) aporta altas tensiones de salida, (ii) cubre un margen de actuación de entre los 25~100 kHz y (iii) ofrece la potencia necesaria para alimentar los trece transductores que componen el array que se propone en la Sección 5.7, al menos para obtener el fenómeno del *array paramétrico*.

En el caso de la arquitectura correspondiente al transductor elegido, representada esquemáticamente en la Figura 5.3 A, la carga necesaria para poder considerar el sistema linealizado se obtiene mediante la inserción de una tensión de polarización continua en la señal V_{sig} . Teniendo en cuenta que la arquitectura seleccionada no posee una borna específica para la inserción de esta tensión de polarización, como en el caso de la estructura de la Figura 5.3 B, hemos de plantear circuitos que aporten a la salida la señal a transmitir ya desviada en continua. De ahí la necesidad de añadir circuitos de polarización que permitan elevar la señal de entrada de manera constante y a alta tensión (dependiendo del transductor, estas tensiones de polarización pueden ir desde la decenas a las centenas de voltios). Lógicamente, el transductor se comporta básicamente como una carga capacitiva, lo que permite mantener el diafragma con una carga constante, sobre la que fluctúa la señal de alterna asociada a la entrada.

Para el buen funcionamiento del transductor, el circuito de polarización ha de ofrecer las siguientes prestaciones:

- Mantener constante la tensión de polarización.
- Asegurar pérdidas mínimas sobre esa carga, básicamente ofreciendo una impedancia de salida del circuito de polarización lo suficientemente alta en continua como para que el diafragma no se descargue.

Tanto la primera como la segunda arquitectura reflejadas en la Figura 5.3 asumen la existencia de una fuente externa de continua. De ahí que los amplificadores asociados a los altavoces electrostáticos sean más complejos que los empleados en los altavoces dinámicos convencionales.

En esta Sección proponemos dos esquemas diferentes para poder obtener esta desviación en continua necesaria para el funcionamiento del transductor seleccionado.

5.6.1. Pasivo

Una posible solución que puede resolver este problema es la de aplicar redes pasivas de gran capacidad a la señal de entrada del altavoz, para conseguir una desviación en continua determinada. Este tipo de esquemas introducen elementos no lineales en el estudio: los diodos, que en este caso actúan como rectificadores de la señal.

²Manual de usuario del equipo disponible en: http://www.falco-systems.com/Amplifier_wma-280_manual.pdf

Básicamente consisten en circuitos rectificadores de onda que alimentan redes capacitivas, inspirados en la patente de Norris [2015b]. Este tipo de soluciones son adecuadas en nuestro caso, ya que en una primera aproximación se va a emplear una modulación AM para excitar el circuito, por tanto, siempre se dispondrá de una señal a una frecuencia determinada que mantendrá su potencia a lo largo de la duración de la señal.

FIGURA 5.7: Circuito de polarización pasiva del array de transductores.

En la Figura 5.7 se muestra un ejemplo de este tipo de configuraciones, más concretamente, el circuito empleado en una previa aproximación al sistema de amplificación usado finalmente. La red formada por los componentes D_1 , D_2 , D_3 , C_1 y C_2 sirve de circuito elevador de tensión, mientras que los condensadores C_{e_n} y la resistencia R_1 actúa como circuito integrador.

Los condensadores C_1 y C_2 forman una red rápida de elevación de tensión. La velocidad de este circuito es debida a la pequeña capacidad de estos elementos. Los diodos provocan un proceso de saturación en la señal que elimina el margen dinámico que supera el valor eficaz de su envolvente. Así tenemos que si la señal de entrada se corresponde con una modulación AM tal que:

$$v_{in}(t) = A_c \sin(2\pi f_c t) (1 + mE_{in}(t)) \quad (5.33)$$

siendo $E_{in}(t)$ la envolvente de entrada normalizada, m el índice de modulación y A_c . La amplitud de la portadora, la señal que será la encargada de cargar los condensadores electrolíticos se corresponderá con:

$$v_{carga}(t) = \begin{cases} 0, & v_{in}(t) > V_{ef} \{mA_c E_{in}(t)\} \\ -2V_{ef} \{mA_c E_{in}(t)\}, & v_{in}(t) < -V_{ef} \{mA_c E_{in}(t)\} \\ v_{in}(t) - V_{ef} \{mA_c E_{in}(t)\}, & |v_{in}(t)| < V_{ef} \{mA_c E_{in}(t)\} \end{cases} \quad (5.34)$$

En el margen frecuencia de audio se cumple que los valores eficaces representados en la expresión anterior pueden aproximarse a un valor eficaz instantáneo, que se calcula con una ventana temporal que supera el mayor de los períodos si acotamos la señal a transmitir desde los 75 Hz.

Finalmente, a la salida del circuito obtendremos una señal similar al de entrada, con un cierto factor de pérdidas, más una señal que constituirá la tensión de polarización:

$$v_{out}(t) = \alpha v_{in}(t) + v_{POL}(t) \quad (5.35)$$

$$v_{POL}(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} E(t) dt \quad (5.36)$$

siendo $E(t)$ la envolvente de la señal de entrada. Por tanto, la constante RC del circuito, τ , determina la tensión de polarización del transductor. Lo ideal en estos casos es conseguir una tensión en continua elevada y constante a lo largo del tiempo. Por desgracia, estas dos necesidades son contradictorias entre sí. En el caso de una constante RC baja, la señal fluctuará con la envolvente, ya que τ será menor o del orden del período máximo observado en la señal de audio. Por el contrario, una constante alta implica un tiempo de carga mayor del sistema y un nivel de

A: Salida para una modulación AM de $f_c = 50\text{ kHz}$ para un tono puro de 1 kHz

B: Comportamiento de la tensión de polarización para diferentes señales de entrada.

FIGURA 5.8: Salida del circuito de la Figura 5.7, siendo el valor de R_1 igual a $1\text{ k}\Omega$. En la gráfica de la Figura 5.8 A se puede observar la salida del circuito, $v_{\text{out}}(t)$, para una entrada con una señal portadora de 50 kHz de 75 V_p y una moduladora de 100 Hz, con índice de modulación de 100 %.

tensión de polarización final menor.

Este fenómeno se puede observar en las Figuras 5.8 y 5.9, en donde se muestra el comportamiento del circuito para constantes RC diferentes³.

En las gráficas de las Figuras 5.8 A y 5.9 A se representa la salida $v_{\text{out}}(t)$ del circuito de la Figura 5.7 para una entrada con una señal portadora de 50 kHz de 75 V_p y una moduladora de 100 Hz, con índice de modulación de 100 %. En estas gráficas se muestra tanto la envolvente de esta señal como el resultado de un filtro de media de anchura mayor a tamaño del período correspondiente a la frecuencia portadora. Si tomamos este valor como el de la tensión de polarización aplicada, observamos en ambos casos un pequeño rizado relacionado directamente con la señal moduladora. Lógicamente este rizado es más acusado para la gráfica de la Figura 5.8 A. Por el contrario, si la constante RC es mayor, este rizado disminuye pero el sistema pierde un tiempo no despreciable en cargarse. Este tipo de configuraciones imposibilitan el control de volumen del sistema final mediante el nivel de portadora, y obligan a que el amplificador trabaje aun en los pasajes silenciosos.

En el caso de las Figuras 5.8 B y 5.9 B, en las que sólo se representa la salida del filtro de media, observamos claramente la dependencia de esta polarización. Así, si en vez de alimentar el circuito con una senoide lo hacemos con una onda cuadrada, el rizado se ve afectado por esta modificación. La única señal que obtiene una tensión de polarización constante es la correspondiente a la portadora sin modular. Por tanto, dado que la tensión de polarización marca la linealidad del transductor, este tipo de circuitos añade un factor más de no linealidad al sistema completo.

De este pequeño estudio se desprende una conclusión una clara: la tensión de polarización en estas condiciones es variable y como consecuencia directa, el sistema final pierde linealidad. Sin embargo esta solución aporta ventajas considerables:

- No se necesitan ni transformadores ni fuentes de continua externas para implementar el circuito. Éstos elementos encarecerían el prototipo de llevarse a la comercialización.
- Todos los componentes del circuito representado en la Figura 5.7 son muy ligeros y de pequeñas dimensiones, lo que permite integrarlos directamente en el panel en el que se montan los transductores, reduciendo el tamaño del dispositivo final.
- Adicionalmente, se reduce la peligrosidad del dispositivo, al acercar la fuente de continua al máximo al transductor.

³El resultado de estas gráficas ha sido obtenido mediante PSpice, como valoración previa del funcionamiento de las redes pasivas de polarización

A: Salida para una modulación AM de $f_c = 50\text{ kHz}$ para un tono puro de 1 kHz

B: Comportamiento de la tensión de polarización para diferentes señales de entrada.

FIGURA 5.9: Salida del circuito de la Figura 5.7, siendo el valor de R_1 igual a 430 k Ω . Las gráficas representan la misma información recogida en la Figura 5.8, salvo el cambio de la constante RC sobre el circuito pasivo representado en la Figura 5.7.

FIGURA 5.10: Circuito de polarización activa del array de transductores.

En el caso que nos atañe, estas ventajas parecen insuficientes, ya que la finalidad de nuestro diseño se centra en obtener un sistema que independice el fenómeno de transmisión del *array paramétrico*, minimizando, en la medida de lo posible, la influencia del sistema de transducción empleado. A pesar de estas desventajas, se ha creído conveniente la implementación de esta solución como primera aproximación y como complemento para un posible desarrollo industrial posterior.

5.6.2. Activo

El diseño de polarizadores activos es relativamente simple: únicamente es necesario implementar una solución estable para un sumador analógico de una fuente de señal continua y para la señal que alimenta los transductores. La única consideración a tener en cuenta es que es necesario independizar el circuito polarizador de la salida del amplificador empleado. Este punto es muy importante, ya que las tensiones de trabajo son muy altas, e incluso alcanzan niveles peligrosos. Otro punto a tener en cuenta es que, a pesar de la necesidad de esta tensión de polarización, la impedancia de los transductores en continua es muy alta, debido a su naturaleza capacitiva. Esto implica que la potencia continua consumida en el transductor será mínima.

El esquema básico que se suele emplear en este tipo de configuraciones se muestra en la Figura 5.10. En esta topología la tensión de polarización es independiente de la señal entrada, $v_{in}(t)$. La red compuesta por C y R_1 asegura la independencia de la tensión procedente del circuito de polarización y la señal suministrada por el amplificador, mientras que el resto de los componentes forman el propio circuito polarizador. La tensión continua suministrada a la red de transductores se controla mediante el divisor de tensión formado por R_3 y R_4 ya que, con el fin de minimizar el consumo, hacemos cumplir $R_2 \ll R_4$.

FIGURA 5.11: Topología del polarizador activo implementado.

La constante de tiempo del circuito viene dada en este caso por el conjunto R_4 y C_e . Este parámetro no es determinante, ya que la red se carga únicamente al inicio del encendido del sistema, y por tanto ha de cumplir que el tiempo de espera no sea excesivamente largo como para perturbar las mediciones ni demasiado lento como para que los condensadores se comporten como cortocircuitos que eleven peligrosamente las intensidades en los transitorios.

En cuanto a las precauciones a tener en cuenta para evitar picos de corriente debido a las altas tensiones implicadas, hay que asegurar que R_3 es suficientemente alta como para no forzar a la fuente de continua. Con el fin de aumentar la impedancia que se observa desde esta fuente, los valores de todos elementos de la red han de ser significativamente altos y consecuentemente se obtendrán constantes de tiempo prolongadas. Estos valores inducen al diseñador a escoger condensadores electrolíticos, sin embargo, al no poder asegurar el signo de polarización inicial entre la entrada y la salida, estamos obligados a emplear condensadores sin polaridad predeterminada en este punto.

Al orientar el uso del polarizador diseñado a la experimentación se ha creído adecuado realizar un diseño más flexible que permita, en la medida de lo posible, seleccionar la tensión de polarización. La fuente⁴ empleada es un módulo AC/DC en modo conmutado que ofrece una tensión continua de 380V entre la borna positiva y la negativa, pero se encuentra limitada en intensidad a un valor inferior al especificado por el fabricante (en torno a los 2A), y dentro de este mismo rango se comporta de manera irregular dependiendo de la impedancia de carga. Teniendo en cuenta este fenómeno y que es necesario asegurar un buen comportamiento de la fuente durante el proceso de carga de los condensadores, se propone el diseño mostrado en la Figura 5.11.

En el circuito se pueden seleccionar tres parámetros mediante interruptores:

- *Tensión de fuente seleccionable*: No se encuentra representada en el circuito, ya que es un parámetro de la propia fuente. Cuando el circuito se encuentra en este modo, permite mediante un potenciómetro disminuir el margen dinámico ofrecido por la fuente. Aunque este modo permite seleccionar de forma precisa la tensión de la misma, no resulta conveniente ya que potencia las no linealidades la fuente frente a la impedancia de salida impuesta. Por tanto, se ha creído conveniente permitir la regulación de tensión controlando la relación entre las resistencias que juegan un papel equivalente a R_3 y R_4 en el circuito de la Figura 5.10. Si la fuente se encuentra en este modo, se advierte con un indicador situado en la parte frontal, cercano a los controles relacionados con este modo.
- *Polarización positiva-negativa o ciclo de descarga*: Como este circuito se conecta directamente a la salida

⁴Información técnica del fabricante, ASTEC, disponible en: http://www.artesyn.com/power/power-supplies/product-docs/42/aif04zpf/aif_-_pfc_trn_rev10_1399856917_techref.pdf

FIGURA 5.12: Polarizador implementado para la realización de los experimentos que requieren la polarización activa del array.

del amplificador, estos dos elementos están obligado a compartir masa, por tanto queda descartada la posibilidad de aprovechar todo el margen dinámico ofrecido por la fuente. Si bien es cierto que ambas bornas de la misma pueden actuar como generador por separado.

Debido a la cantidad de carga acumulada en los condensadores, es necesario proporcionar al polarizador un ciclo de descarga controlado, para ello se ha incluido un circuito adicional, no representado en la Figura 5.11, y que se conecta el punto: “0” mediante la segunda vía del interruptor (SP3T) de la derecha.

- *Margen de trabajo:* Si el primer selector se encuentra en la posición fija pero se desea trabajar a una tensión de polarización menor, disponemos de dos circuitos seleccionables mediante el segundo interruptor de tipo DPDT. Esta opción de implementación permite que los condensadores de una y otra rama actúen de manera independiente y con seguridad, y por tanto podamos conmutar entre el modo “medio margen dinámico”–“margen completo” sin peligro, a diferencia del cambio de signo en la polarización que requiere un ciclo de descarga controlado. Para mejorar la granularidad del circuito, los potenciómetros indicados en la Figura 5.11 en realidad están formados por un *tándem* 20 % – 80 %, en el que el control más fino posee recorrido triple angular.

En la Figura 5.12 se puede apreciar el sistema de selección de la polarización para el array bajo estudio. En el diseño final también se ha incluido un panel de monitorización que sirve para determinar la tensión de polarización real y los procesos de carga–descarga del mismo.

De los dos esquemas de polarización presentados, emplearemos el segundo para caracterizar el sistema, ya que es el único que asegura la polarización independizándola de la señal de entrada. Sin embargo, el primer método de polarización puede ser una buena opción para abaratar los costes en caso de diseñar un prototipo industrial.

5.7. Prototipo orientado a la caracterización

Los objetivos perseguidos por este diseño son dos: estrechar el haz de emisión y obtener una mayor potencia acústica. En un principio sólo disponemos de la información ofrecida por el fabricante, esto es el valor de su directividad a 50 kHz. Los datos se aproximan a los mostrados en la Figura 5.14 A, aunque éstos se complementarán en la Sección 6.3.3. Sin embargo, para el diseño previo del sistema se ha partido únicamente del patrón polar a la frecuencia portadora. Debido a la falta de datos, para el cálculo del patrón polar completo se ha supuesto simetría de revolución en el mismo. Esta suposición es lícita teniendo en cuenta la geometría exterior del transductor. Como resultado obtenemos el patrón polar de la Figura 5.14 B.

Dado que a esta frecuencia la longitud de onda es de un orden de magnitud menor que la distancia que imponen físicamente los transductores, el patrón polar del conjunto es más complejo. En estas situaciones, la estrategia común es la de disponer los transductores de tal forma que se encuentren lo más cercanos posible. Por tanto hemos optado por una rejilla triangular en la que se han dispuesto 13 elementos, como se aprecia claramente en la imagen de la Figura 5.13.

Estos elementos pueden activarse o no según un panel de interruptores colocado en la parte superior del array. Con esta disposición en mente y los datos ofrecidos por el fabricante, si aplicamos los cálculos expuestos en el Apéndice C.1, obtenemos el patrón complejo reflejado en las Figuras 5.14 c y 5.14 D. Si observamos los cortes

FIGURA 5.13: Disposición de los transductores en el array empleado en los experimentos expuestos en la Tesis.

en elevación y azimutal, representados en la Figura 5.14 y sus ángulos de -6 dB , el índice de directividad del sistema ha aumentado, a costa de hacer más complejo el patrón polar. El patrón obtenido ha perdido la simetría simetría axial.

Es importante destacar que este patrón polar no es el correspondiente a la onda secundaria, pero sí se encuentra relacionado directamente con la propagación de la misma (Muir y Willette [1972], Bjørnø et al. [1976], Moffett y Mellen [1977], Moffett et al. [1978], Yoneyama et al. [1983]). Aunque la caracterización de este patrón no es objetivo directo de esta Tesis, este tema será tratado en los experimentos, para corroborar o no la presencia uniforme de las no linealidades en la zona de estudio.

Interiormente, el prototipo se ha diseñado teniendo en cuenta la posibilidad de aplicar señales independientes al sistema, dotándolo por tanto de mayor flexibilidad, posibilitando con ello una futura aplicación de “*beamforming*” sin introducir grandes modificaciones en el interior del soporte, ya que existen evidencias de que se puede aplicar esta técnica a este tipo de estructuras, (Shi et al. [2014], Wong et al. [2011]), incluso obteniendo sistemas de control de ruido en zonas concretas.

El array puede alimentarse a través de dos entradas diferentes, que se seleccionan mediante un conmutador. La primera de ellas se encuentra conectada directamente con el panel y por tanto ha de contener la señal a transmitir polarizada. La segunda es la entrada del circuito de polarización pasivo que se encuentra en el interior del array (véase Figura 5.7). Estas dos señales se pueden monitorizar a la entrada del array mediante una salida implementada a tal efecto.

Todas estas salidas y entradas portan tensiones elevadas. Es por ello que se ha tenido especial cuidado en el aislamiento del array, empleando conectores específicos.

5.8. Material de medición y caracterización

Debido a que el objetivo principal de esta Tesis es el de modelar el fenómeno del *array paramétrico* completo, controlando toda la cadena de transducción, es necesario emplear diferentes elementos de instrumentación que nos permitan extraer datos acerca de las diferentes magnitudes físicas a caracterizar.

En la Tabla 5.2 se ofrece un resumen de la mismas, así como sus características fundamentales dentro del contexto de los experimentos a realizar. Éstas serán determinantes a la hora de escoger los sistemas de instrumentación adecuados.

Como ya se verá en detalle en el Capítulo 6, dependiendo del tipo de experimento que involucre a cada una de

A: Corte azimutal del patrón polar de un único elemento. En la zona sombreada se destaca el ángulo de radiación de -6 dB.

B: Patrón polar extrapolado a tres dimensiones a partir de las características de simetría del transductor y empleado en el diseño previo del array.

C: Corte azimutal y en elevación del patrón polar del array diseñado, con todos los elementos activos, a partir de una estimación previa.

D: Patrón polar en tres dimensiones obtenido mediante la suma coherente de fuentes con el patrón reflejado en 5.14 B y dispuesto según la estructura elegida.

FIGURA 5.14: Patrones polares iniciales del diseño basados en las características ofrecidas por el fabricante. Todos ellos muestran el comportamiento del elemento y la estructura completa a 50 kHz. Los patrones de las Figuras B, C y D han sido inferidos a partir de los datos expuestos en A.

	Intensidad	Tensión	Vibración	Presión Acústica
Margen dinámico	decenas/centenas (mA)	centenas (V)	decenas (μm)	decenas/centenas (dB_{SPL})
Margen frecuencial	decenas/centenas (kHz) ^{††}	decenas/centenas (kHz) [†]	decenas/centenas (kHz) ^{††}	decenas/centenas (kHz) [†]
Duración	decenas/centenas (ms)	decenas/millares (ms)	decenas/centenas (ms)	decenas/millares (ms)
Proceso de transducción	Lineal	Lineal No lineal	Lineal No lineal	Lineal No lineal

[†] Incluyendo la continua.
^{††} No es necesario contemplar la banda sónica.

TABLA 5.2: Características de las medidas y magnitudes envueltas en las diferentes medidas realizadas a lo largo de la Tesis

las magnitudes, éstas reunirán diferentes requisitos. Básicamente nos encontramos ante una clasificación inicial de experimentos en los que se encuentran envueltos procesos lineales y no lineales. Para todos aquellos procesos de transducción considerados lineales, se emplear señales de corta duración y que no requieren sobremuestreo. Así mismo, será necesario emplear sistemas de transducción y almacenaje de datos complejos en el caso del modelado de procesos no lineales, de ahí que las magnitudes de tensión y presión serán las más exigentes en cuanto a parámetros temporales.

Las bandas de interés en cada una de estas magnitudes también varían dependiendo del fenómeno a caracterizar. Podemos clasificar estos márgenes frecuenciales en dos grupos, que pueden mostrarse conjuntamente o no: (i) la banda ultrasónica, relacionada con el proceso de transmisión y centrada a la frecuencia portadora, y (ii) la banda sónica, relacionada con la percepción acústica del fenómeno en sí. La presencia de estas dos bandas determina el margen de trabajo de los transductores y de los sistemas de adquisición asociados a cada medida, junto con el tipo de proceso de transducción a caracterizar (véase Sección 5.9.2).

5.8.1. Medidas acústicas

A pesar de estar trabajando en dos bandas de audio claramente diferenciadas, dado que la banda de frecuencias de interés es la banda sónica, nos hemos centrado en elegir un micrófono de instrumentación orientado a este tipo de medidas. En la Figura 5.15 se muestran el micrófono seleccionado⁵ y el acondicionador de señal⁶ adjunto al mismo para obtener las mediciones.

En caso de ser necesario adquirir información referente a la bandas no especificadas por el fabricante (éste sólo aporta información en el informe de calibración de hasta los 20 kHz) se realizará la corrección expuesta en la Sección 6.2.4. Esta aproximación es lícita porque en este caso el objetivo es caracterizar la cadena completa, y por tanto sólo se emplearán mediadas de señales acústicas ultrasónicas para monitorizar el proceso.

Dependiendo del tipo de experimento, la generación y adquisición de datos se podrá realizar mediante un DAQ o por medio de un par generador-osciloscopio. En el segundo caso, el margen recibido por osciloscopio no es determinante, sin embargo, en el caso de emplear un DAQ hemos de asegurar que los niveles a la entrada se adapten al fondo de escala configurado previamente. Lo ideal, es intentar aprovechar el margen de entrada completo del sistema de adquisición, en este caso $\pm 10\text{V}$. Por ello hemos creído conveniente emplear un acondicionador que incluya un sistema de amplificación seleccionable, en el que podemos jugar con tres ganancias distintas, acondicionando la señal a los niveles admitidos por el DAQ.

⁵La hoja de características y el manual de usuario del modelo se encuentran disponible en: http://www.pcb.com/contentstore/docs/PCB_Corporate/Vibration/Products/Manuals/377B02.pdf

⁶Información del fabricante y especificaciones detalladas en: http://www.pcb.com/ContentStore/DOCS/PCB_CORPORATE/ELECTRONICS/PRODUCTS/MANUALS/482B11.pdf

A: Micrófono de instrumentación modelo 377B02 de PCB.

B: Acondicionador de señal modelo 482B11 de PCB.

FIGURA 5.15: Sistema de instrumentación electroacústico empleado en las medidas efectuadas en los experimentos presentados. El conjunto de ambos sistemas proporciona un nivel de señal adecuado a los sistemas de recogida de datos propuesto en los montajes de las Figuras 6.12 y 6.20.

5.8.2. Medidas de intensidad

A la hora de estimar la impedancia eléctrica de un transductor es necesario determinar la corriente que lo atraviesa. Una de las opciones barajadas para determinar esta magnitud es la de añadir una impedancia conocida en serie con el transductor y determinar mediante la caída de tensión que se produce en bornas de ésta la impedancia eléctrica del transductor. Un buen ejemplo de este tipo de caracterización lo podemos encontrar en Bai et al. [2009]. Sin embargo esta metodología se considera intrusiva, ya que modifica el comportamiento del amplificador. En este tipo de montaje, el amplificador se ve cargado con una impedancia de salida mayor que la que tendría en condiciones normales de trabajo y por tanto menos forzado. En nuestro caso este factor es determinante, ya que hemos de asegurar que toda la potencia que aporta el amplificador se consume, en la medida de lo posible, en el transductor.

La mayoría de las sondas de corriente son de carácter inductivo, y por tanto no necesitan conectarse directamente al circuito bajo prueba. Básicamente se encuentran formadas por un núcleo de material magnético, alrededor del cual se encuentra una espira que funciona como el secundario de un transformador. Se presentan en formas toroidales cuadrangulares separables, de tal forma que la conexión bajo estudio se pueda posicionar como primario del transformador, creando una tensión proporcional a la corriente que lo atraviesa. Un estudio más exhaustivo sobre el empleo de este tipo de sistemas de transducción se puede encontrar en Bakshi y Bakshi [2009]. Precisamente debido al carácter inductivo de este tipo de transductores, no son adecuados para caracterizar sistemas acústicos, pero en nuestro caso, una frecuencia superior de trabajo los transforma en una buena opción.

En nuestro caso el modelo escogido es el BCP-200/511 de A. H. SYSTEMS, que permite estimar la corriente que atraviesa un determinado elemento de la cadena del sistema propuesto⁷. Los fabricantes de esta sonda aseguran la no coloración de la medida en un rango de de 100 kHz a los 100 MHz, sin embargo, tras un proceso de recalibración, se ha considerado apta para la caracterización del transductor en la banda ultrasónica de emisión del caso que nos atañe (véase Sección 6.2.1).

Como la mayoría de los sistemas de transducción, las sondas de corriente son muy sensibles al paso del tiempo y pueden modificar sus propiedades de transducción de equipo en equipo. En nuestro caso, la estimación de la intensidad que recorre el transductor es un parámetro muy sensible, por ello se hace necesaria la recalibración del equipo. En concreto, el fabricante de la sonda empleada asegura la fiabilidad de la calibración únicamente por un año.⁸

⁷La hoja de características y el manual de usuario del modelo se encuentran disponible en: http://www.ahsystems.com/Datasheets/BCP-511_Broadband_Current_Probe_Datasheet.pdf y http://www.ahsystems.com/catalog/data/pdf/Operation_Manuals/BCP_Operation_Manual.pdf

⁸La fecha de calibración de la sonda empleada data de noviembre de 1996.

FIGURA 5.16: Sonda BCP-200/511 con las espiras empleadas en la medida.

Las corrientes a caracterizar nunca superan el orden de los miliamperios, por tanto los valores de tensión ofrecidos por la sonda son demasiado bajos si ésta se emplea de forma tradicional. Para potenciar el fenómeno inductivo hemos intercalado un número elevado de espiras en la conexión bajo test, como se refleja en la Figura 5.16. En la Sección 6.2.1 realizaremos un proceso de recalibración de la sonda para caracterizar la función de transferencia de la misma y que posteriormente se empleará para caracterizar la impedancia eléctrica del transductor bajo estudio.

5.8.3. Medidas de vibración

Aunque las medidas de vibración en sistemas acústicos son de gran utilidad, en nuestro caso restringiremos su uso a la determinación de la impedancia mecánica en un punto (véase Sección 6.2.3) y para comprobar la linealidad del transductor empleado, descartando así la presencia de órdenes superiores al propuesto por el modelo físico debido a causas externas al propio fenómeno del *array paramétrico*.

Como ya se mencionó anteriormente, a la hora de modelar un transductor electroacústico es fundamental disponer de medidas fiables del desplazamiento de la membrana que forma la parte móvil del mismo. Para ello, se recurre a dispositivos basados en tecnología láser que permiten obtener señales de tensión proporcionales a estos desplazamientos. En nuestro caso hemos empleado un vibrómetro láser Doppler.

En esta Sección se detallará una metodología para el empleo de estos dispositivos, así como su funcionamiento básico.

Fundamentos de la captación de vibraciones mediante láseres

Los vibrómetros Doppler son dispositivos que captan las variaciones de frecuencia que se producen al rebotar la onda láser sobre un cuerpo en movimiento. Concretamente, la variación de frecuencia que produce un cuerpo en movimiento a velocidad v depende de la longitud de onda emitida por el láser, siendo de $\Delta f = 2v/\lambda$. Para determinar esta variación de frecuencia, se emplean interferómetros láser.

Los vibrómetros Doppler basan su funcionamiento en el análisis de las interferencias ópticas. Se requiere por tanto la captura de dos señales coherentes procedentes de dos haces de luz, cada uno de ellos con su intensidad lumínica correspondiente (I_1 e I_2). Estas intensidades se combinan en un detector, que recibe la siguiente intensidad:

$$I_{\text{TOT}} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(2\frac{\pi(r_1 - r_2)}{\lambda}\right) \quad (5.37)$$

en donde el tercer término se corresponde con el denominado *término de interferencia*. Éste se relaciona con la

FIGURA 5.17: Esquema del funcionamiento básico de un vibrómetro. En la figura se muestran los componentes fundamentales que forman un vibrómetro funcionado en modo dispositivo láser de efecto Doppler. En el caso de aplicarse el sistema a modo de interferómetro, se elimina del esquema la red de Bragg.

diferencia entre las longitudes recorridas por ambos haces (r_1 y r_2). Si esta diferencia se corresponde con un múltiplo de la longitud de onda del haz, la intensidad resultante se multiplica por cuatro, en caso de ser ambas intensidades equivalentes. Por el contrario, si los dos caminos recorridos se diferencian en media longitud de onda, la intensidad resultante es nula.

En la Figura 5.17 se representa en funcionamiento básico, de manera esquemática, de estos dispositivos. El haz generado por láser de He-Ne se bifurca en dos haces, el de referencia y el de medida, por medio del Bifurcador 1. El haz de medida atraviesa el Bifurcador 2 y se enfoca mediante una lente sobre el objeto bajo estudio. Este objeto lo refleja de nuevo sobre la lente, y se ve reconducido por el Bifurcador 2 sobre el Bifurcador 3 en donde se suma con el haz de referencia. Esta suma se dirige al detector.

Como el camino recorrido por el haz de referencia (r_2) permanece constante y el camino recorrido por el haz de medida es variable con el tiempo y depende de la posición del objeto bajo estudio, la señal que recibe el detector contendrá información referente a ese movimiento siguiendo la relación expuesta en la ecuación (5.37). Concretamente, si en el detector se recoge un ciclo completo entre máximo y mínimo de señal recibida, el objeto habrá sufrido un desplazamiento correspondiente a la mitad de la longitud de onda de los haces. En nuestro caso, esta longitud de onda se corresponde con 632 nm.

Este cambio de trayectorias también se manifiesta mediante el efecto Doppler, así, a medida que el objeto se aleja del vibrómetro, se genera un patrón de interferencia como el descrito anteriormente, junto con una variación en la frecuencia del haz de medida. Por desgracia el efecto Doppler refleja el movimiento del objeto, pero no puede terminar su sentido. Para solucionar esta deficiencia, se emplea un acoplador optoacústico denominado red de Bragg. Este acoplador funciona como demodulador de la señal de referencia, bajando su frecuencia fundamental de los $4.47 \cdot 10^{14}$ a los 40 MHz. Cuando el objeto está en reposo, en el detector se aprecia una señal modulada a 40 MHz, mientras que si el objeto se acerca, esta señal se modula a una frecuencia inferior. En caso de que el objeto se aleje, esta frecuencia aumenta. Con este artificio, se puede detectar además de la amplitud del movimiento, su sentido.

El vibrómetro empleado en la medición ofrece la posibilidad de utilizar estos dos fenómenos para captar el movimiento de un objetivo. Con el primer mecanismo se obtiene una señal de tensión proporcional a la velocidad del objeto, mientras que en el caso del efecto Doppler el resultado obtenido es proporcional al desplazamiento. Como en nuestro caso se ven involucradas frecuencias que se consideran bajas para el rango de trabajo de estos dispositivos, es más adecuado realizar la detección mediante este segundo método, ya que a mayor frecuencia de trabajo la velocidad aumenta, siendo menos relevante el desplazamiento.

A: Montaje para la adquisición de medidas de vibración de las membranas del array.

B: Módulo Polytec CLV-1000 chasis: laser CLV-M000.L, output CLV-M0001.

C: Vibrómetro sobre posicionador micrométrico.

FIGURA 5.18: Sistema de medición de vibraciones y posicionamiento aplicado para la determinación de las mismas en el array bajo estudio.

Metodología de medición con sistemas de captación de movimiento

Por desgracia, las medidas realizadas por los vibrómetros son fuertemente dependientes de la metodología empleada, sin embargo, aplicando unas sencillas reglas podemos aumentar la fiabilidad de estas medidas considerablemente.

En nuestro caso concreto, en el que la membrana del transductor se encuentra tras una rejilla metálica, hay que asegurar que el haz se encuentra centrado en la perforación concreta bajo estudio. Para ello es necesario emplear un posicionador de precisión xyz y disponer tanto el *array* como el vibrómetro de tal forma que podamos controlar las inclinaciones relativas de los mismos. En la Figura 5.18 se refleja la instrumentación empleada a tal efecto.

La primera condición a cumplir es la de la ortogonalidad del haz. Una vez realizado un ajuste del foco grueso, se juega con ambos elementos hasta conseguir que el ligero reflejo del haz sobre el *array* desaparezca de la superficie plana, tal y como se indica en la Figura 5.18 A. Teniendo en cuenta que la sombra del propio vibrómetro es relativamente grande, el ajuste obtenido es grosero, pero suficientemente bueno como para la obtención de una medición fiable y cumplir las condiciones que se suelen imponer en la literatura (sirvan de ejemplo: Fukushima et al. [2009], Halkon et al. [2003]).

Si observamos la configuración expuesta en la Figura 5.18 A, con las coordenadas *y* y *z* seleccionamos se reservan para configurar el posicionamiento, mientras que *x* se emplea como un ajuste fino del foco.

Este sistema va a ser empleado para determinar la impedancia mecánica de la membrana (véase Sección 6.2.3), así como el funcionamiento de la misma, del mismo modo que se describe en Buhrdorf et al. [2003], donde se caracterizan transductores de tipo *c-MUTs*.

5.8.4. Medidas de tensión

Como se verá más adelante, en esta Tesis se realizan básicamente dos tipos de experimentos atendiendo a la longitud de las señales de test que condicionan el protocolo de medida y la instrumentación necesaria.

Todos aquellos experimentos referentes al comportamiento del sistema frente a señales tonales pueden ser obtenidos empleando el par generador–osciloscopio. Las medidas realizadas con este propósito (valoración de la no linealidad, memoria etc.) no requieren señales de gran longitud, aunque sí que es necesario asegurar una frecuencia de muestreo adecuada para capturar la señal en generación tras la modulación, lo que implica trabajar a frecuencias de muestreo superiores a las habituales en aplicaciones tradicionales de audio. En este caso, y dado que nos encontramos ante sistemas de instrumentación complejos, sólo es necesario asegurar que los márgenes dinámicos de la señal no dañan los equipos, ya que las tensiones empleadas para alimentar los transductores son altas. Para prevenir este problema es necesario emplear sondas de atenuación. En el caso de la salida directa del amplificador se ha de aplicar una atenuación de $\times 10$, mientras que para la señal polarizada la atenuación necesaria es de $\times 100$. Dado que todos los equipos necesarios para este tipo de medidas presentan impedancias de salida bajas y de entrada altas, no es necesario emplear ningún sistema intermedio que asegure la transferencia de potencia entre el generador y el amplificador.

Por otro lado nos encontramos las pruebas que implican señales de test considerablemente largas. En estos casos es necesario recurrir a un sistema síncrono de generación y recogida de datos. Dado que trabajamos en dos banda diferentes, el sistema de adquisición de datos ha de ser capaz de generar y recoger datos síncronamente a frecuencia de muestreo, al menos superior a 200 kHz. Por desgracia, estos elementos suelen presentar problemas de adaptación de impedancias, ya que al contrario de lo que sucede al realizar medidas mediante el par generador–osciloscopio, la impedancia de entrada del sistema no es configurable. Por tanto, para asegurar un adaptación de impedancias adecuada se ha de intercalar circuitería específica, como se verá a continuación.

5.9. Configuración del sistema de generación y adquisición de datos

Una de las tareas fundamentales a la hora de identificar procesos físicos es la de adecuar los sistemas de generación y adquisición de señales. En el proceso que nos atañe se involucran señales con características diversas, ya que estas provienen de diferentes sistemas de transducción y equipos eléctricos.

Básicamente, nos encontramos con un sistema en el que es necesario generar una única señal y monitorizar varias. La sincronización en todos los casos es crítica, y a pesar de introducir mecanismos, como preámbulos, que garantizan esta sincronía, hemos de aplicar un reloj común a la toma y generación de datos. En secciones posteriores se pormenorizará este tipo de adquisición de datos, ya sea con equipamiento convencional o basado en sistemas [DAQ](#).

Como ya se ha mencionado, una de las características específicas de la problemática planteada en este Tesis es la diversidad de magnitudes y tipos de señales a monitorizar. En el caso del material de instrumentación, esto no supone un gran problema, porque estos equipos presentan bajas impedancias de salida y no modifican sustancialmente el proceso de transmisión. Sin embargo, la salida del [DAQ](#) no garantiza el filtrado *antialiasing* adecuado ni una impedancia de salida correcta. Además, el hecho de trabajar con dos bandas frecuenciales de análisis (ultrasónica y sónica) nos obliga a diseñar un sistema de remuestreo que asegure la fiabilidad de la medición. En esta Sección se ofrecen soluciones adecuadas para solventar estos dos problemas.

5.9.1. Adaptación de impedancias y margen dinámico del DAQ

Como el objetivo de todo el prototipo es identificar únicamente el sistema de *array paramétrico*, este preamplificador/adaptador de impedancias ha de ser lo más transparente posible a la medida. El objetivo es conseguir un sistema que ofrezca una impedancia de entrada considerablemente más alta que la de salida, y a su vez, que elimine completamente la componente continua, así como asegurar un filtrado *antialiasing* adecuado.

En nuestro caso hemos elegido los filtros activos, principalmente por tres razones:

- El diseño de filtros activos prescinde de la utilización de inductores. Esto supone una gran ventaja, ya que los condensadores que los sustituyen poseen propiedades físicas mejores, dado que presentan menores desviaciones con respecto a su comportamiento ideal.
- La resistencia de salida de los amplificadores operacionales es muy baja, sobre todo cuando trabajan en modo realimentado. Normalmente, esta impedancia es mucho menor que la de los componentes activos que la siguen. Esto permite diseñar filtros por etapas, lo que simplifica mucho el diseño.
- Como las etapas son independientes, podemos diseñar filtros complejos que no se restringen a los habituales presentes en las tablas. Por tanto, en un principio, con esta metodología podríamos adaptarnos a cualquier tipo de gálibo inicial.

La mayor restricción que presenta este tipo de arquitecturas es que no pueden emplearse en sistemas de alta potencia ni a altas frecuencias. Como en nuestro caso funcionan como sistema de adaptación previo al paso de amplificación, no se demandarán tensiones muy elevadas a la salida de este dispositivo, y por tanto esta restricción no nos afecta.

Como base del diseño, hemos optado por la arquitectura Sallen-Key, debido a las ventajas estructurales que presenta [Su \[1996\]](#). Esta topología es la más conocida y empleada en la elaboración de filtros activos. También se conoce como fuente de tensión controlada por tensión o por su acrónimo: [VCVS](#). R.P. Sallen y E.L. de los Laboratorios Lincoln la presentaron por primera vez en 1955. Permite construir filtros paso-bajo, paso-alto, paso banda, banda eliminada y paso-todo, sin necesidad de incluir bobinas en el circuito. Otra propiedad que hace a esta topología tan popular es que minimiza la dependencia del filtro del producto del ancho de banda por la ganancia del operacional, así, para un mismo operacional y con otra topología conseguiríamos cubrir un ancho de banda menor. Como además tanto las resistencias como los condensadores que son necesarios para implementar el filtro no varían mucho entre sí, su fabricación en serie es considerablemente sencilla.

FIGURA 5.19: Topología básica de una arquitectura Sallen-Key.

La topología genérica Sallen-Key se muestra en la Figura 5.19, a la que corresponde la función de transferencia:

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = \left(1 + \frac{R_{g1}}{R_{g2}} \right) \frac{Z_3 Z_4}{Z_1 Z_2 + Z_3 (Z_1 + Z_2) + Z_3 Z_4} \quad (5.38)$$

En nuestro caso los objetivos del sistema de filtrado son:

- Eliminar la componente continua procedente del sistema de generación/adquisición de datos. Lamentablemente, el sistema de generación de señal aportado por el DAQ empleado para este sistema, no garantiza la ausencia de continua, aunque la señal a reproducir carezca ésta.
- Garantizar la presencia de un filtrado *antialiasing* a la entrada del amplificador.
- Proporcionar un control de volumen analógico. Este control de volumen permitirá mayor flexibilidad en el proceso de medición como la posibilidad de emplear el mismo sistema con otro amplificador de prestaciones superiores en cuanto a ganancia se refiere.

En la Figura 5.20 se muestra el diseño escogido para esta aplicación. Podemos dividir este en tres etapas:

- *Filtrado paso alto*: Teniendo en cuenta que la mayoría de las señales que se van a generar con este sistema se encuentran comprendidas en una banda desde los 26 hasta los 74 kHz, hemos escogido un filtro paso alto de segundo orden. Con esta configuración, la frecuencia de corte del sistema se corresponde con:

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (5.39)$$

En nuestro caso, dados los elementos escogidos, esta se corresponde con 61.88 Hz. Esto nos asegura la eliminación del ruido de alimentación y las posibles fluctuaciones en continua aportadas por el DAQ.

- *Filtrado antialiasing*: En este caso se han incluido dos etapas Sallen-Key que conforman un sistema de filtrado paso bajo de cuarto orden. La frecuencia de corte se calcula también mediante (5.39), aunque la disposición de los elementos sea la contraria (véase Figura 5.20). Esta se corresponde con 112.54 kHz. Se ha escogido una frecuencia muy superior a los 74 kHz para permitir diferentes frecuencias de portadora al sistema, pero que asegura un correcto filtrado *antialiasing* para todas las frecuencias de muestreo empleadas en la generación de señal de este sistema.
- *Control de volumen*: Una de las desventajas que presentan los DAQs a la hora de generar señales es la falta de control del volumen por medio directo del hardware. En un principio, esta peculiaridad provee al sistema de robustez en la medida, pero dado que en el caso que nos atañe las medidas son de larga duración es útil disponer de un control de volumen, ya que el sistema de amplificación carece de él. Por ello hemos diseñado la última etapa del sistema como un seguidor de ganancia variable, controlado por el par formado por las resistencias R_p y R_a (véase Figura 5.20). Las resistencias R_{S_a} y R_{S_b} cumplen la misma funcionalidad que R_{g1} y R_{g2} de la Figura 5.19 y por tanto, según (5.38) la ganancia base del circuito se acerca a la unidad, ya que $R_{S_a} \gg R_{S_b}$. Por otro lado, el par R_p - R_a funciona como un divisor de tensión, variando R_p de 0 a 1 MΩ

FIGURA 5.20: Topología del circuito de adaptación de impedancia de entrada al amplificador de instrumentación, mostrado en la Figura 5.21.

FIGURA 5.21: Adaptador de impedancias y banco de filtrado previo al amplificador de instrumentación.

proporcionando un control de ganancia desde el 9% aproximadamente el 100% de la tensión a la entrada de esta etapa.

En el diseño final, encapsulado a modo de dispositivo único (véase Figura 5.21), se ha incluido un sistema de atenuación activo, que sirve para monitorizar las salidas de alta tensión sin necesidad de sondas específicas, y que será empleado únicamente de forma auxiliar en los experimentos presentados en el Capítulo 6. Para otorgar más flexibilidad a esta funcionalidad del adaptador de impedancias, el circuito seguidor cuenta con un *trimmer* que ajusta la atenuación del mismo variando el valor de R_a .

5.9.2. Tasa de muestreo de las señales involucradas en el proceso

Una vez superados los problemas asociados a estos procesos de transducción (adaptación de impedancias, diferentes márgenes dinámicos, etc. mediante soluciones que involucran diseños electrónicos), el factor determinante para la elección de estos sistemas es la tasa de adquisición y generación de datos, junto con el sincronismo de las señales que intervienen en el proceso.

Partiendo de la *expresión de Berkley* (véase Capítulo 2), el objetivo es encontrar un modelo no paramétrico que relacione la envolvente de la señal de excitación del transductor con el sonido producido por la onda secundaria, producto de la demodulación ejercida por el aire. En este escenario y atendiendo a este criterio, nos encontramos con tres tipos de señales, como ya se indicó en la Tabla 5.2:

- **Señales sónicas:** En el sistema bajo estudio se encuentran en esta categoría tanto la señal de test como la onda secundaria recibida en el micrófono. Finalmente la identificación del sistema se realizará a partir de estas dos señales.
- **Señales ultrasónicas:** Todas aquellas que se encuentran por encima del rango frecuencial de audición humana. En nuestro caso, estas señales serán producto de la modulación previa a la emisión del transductor.
- **Señales que abarcan el espectro completo entre la banda sónica y ultrasónica de interés:** Una vez emitida la señal por el transductor, la onda de presión sonora, al cabo de una distancia determinada, contendrá información en ambas bandas. La onda primaria carecerá de interés en el resultado final del sistema de audio, aunque puede resultar útil su monitorización. Sin embargo el propósito final del sistema de caracterización será en de encontrar las relaciones existentes entre estas dos bandas. Por ello, estas señales son de gran interés.

En la Figura 5.22 se refleja la frecuencia de muestreo y la naturaleza de las señales/datos empleados con un código de colores. La frecuencia de muestreo f_{s1} ha de ser lo suficientemente alta como para cubrir el espectro audible, mientras que f_{s2} y f_{s3} tienen que cumplir el teorema de Nyquist sobre la señal modulada, por tanto:

$$f_{s1} > 2f_{\max} \quad f_{s2} > 2(f_{\max} + f_c) \quad f_{s3} > 2(f_{\max} + f_c) \quad (5.40)$$

siendo $f_{\max}$ la máxima frecuencia a caracterizar por el sistema de identificación y f_c la frecuencia de la señal portadora de la modulación.

FIGURA 5.22: Esquema básico del flujo de las señales en el sistema de medición. En la figura se muestran los sistemas de sincronización empleados: el suministro de señal mediante una cola sincronizada y el sincronismo interno aplicada tanto a la generación como a la adquisición de señales.

FIGURA 5.23: Representación esquemática de la transmisión y recepción mediante las técnicas de conformado de pulso.

5.9.3. Preprocesado del fichero de test

El hecho de vernos obligados a tener dos frecuencias de muestreo, una de generación y otra de análisis no suele suponer un problema en aplicaciones normales: basta con realizar un proceso de remuestreo que asegure la adaptación de las frecuencias de muestreo, asegurando que no se pierde información en el camino. Sin embargo, en el caso de aplicar sistemas de identificación basados en secuencias [MLS](#) asociados a modulaciones este proceso se complica. Por un lado nos encontramos con las características propias de estas señales (véase Sección 3.1.4) y por otro, con un margen dinámico acotado por la propia modulación.

Para asegurar que no se producen efectos de sobremodulación en la generación de la señal de excitación es necesario conocer previamente toda la señal de test. Por ello, el diseño de sistema de generación de señal se divide en dos partes fundamentales: la primera maneja información de baja frecuencia y que está relacionada con la señal de test mientras que la segunda se encuentra acotada tanto en banda como en margen dinámico. La señal de baja frecuencia sufre un proceso de filtrado y posteriormente de sobremuestreo. El bloque de filtrado asegurará que la onda primaria no interfiere en la banda sónica. Al implicar el sobremuestreo hemos de asegurar el margen dinámico. La señal modulada estará acotada en frecuencia y el sobremuestreo adaptará la frecuencia de muestreo de la envolvente a la de la salida final.

Otro punto clave para asegurar el éxito de la medida es la normalización de la señal moduladora. Así pues, tras el proceso de adaptación de la señal anteriormente descrito es necesario aplicar una normalización que asegure que la señal se encuentra acotada en el intervalo $[-1,1]$. El principal problema que presenta este esquema es que si el factor de cresta de la señal se modifica en el proceso de sobremuestreo, perderemos la referencia del índice de modulación.

Como ya se mencionó en la Sección 3.1.4, una de las particularidades fundamentales que poseen las señales multinivel generadas a partir de la combinación de señales [MLS](#) es que su ancho de banda no se encuentra acotado, ya que son generadas mediante repeticiones de pulsos rectangulares con diferentes niveles. Esta es la principal característica que en muchas ocasiones hace que este tipo de señales no sean las más adecuadas en la identificación de sistemas complejos. Para solventar este problema se ha propuesto el empleo de técnicas de conformación de pulsos y filtrado adaptado, heredadas de los sistemas tradicionales de transmisión de señales digitales.

Básicamente, nos encontramos con el problema clásico de transmitir una señal a través de un canal con ancho de banda limitado y a su vez con un margen dinámico determinado. Partimos de la base de una arquitectura “*box car*”, en el que la señal a transmitir consiste en una serie de pulsos con amplitudes discretas y que se puede definir mediante:

$$s(t) = \sum_k s_k \delta(t - kT) \quad (5.41)$$

donde s_k es el valor de amplitud discreto correspondiente a ese instante en la señal. Si a este tren de deltas se le aplica un filtro de conformado de pulso, la señal transmitida pasa a ser:

$$x(t) = \sum_k s_k p(t - kT) \quad (5.42)$$

El pulso $p(t)$ se escoge teniendo en cuenta el criterio de Nyquist de interferencia de símbolo nula [Honig y Barton \[2012\]](#). El filtro más empleado en estos casos el de coseno alzado, cuya respuesta en frecuencia se

A: Respuesta al impulso del filtro transmisor.

B: Respuesta al impulso del filtro receptor.

FIGURA 5.24: Respuesta al impulso de sistema de filtrado coseno alzado. En la primera gráfica se muestran las respuestas de los filtros transmisor y receptor, y en la segunda, el resultado de concatenar ambos. En este ejemplo se ha elegido una duración de impulso de 6 símbolos de período 1 s, 8 muestras por símbolo y un factor de “roll-off” de 0.5.

corresponde con:

$$P(f) = \begin{cases} T & 0 \leq |f| \leq \frac{1-\beta}{2T} \\ \frac{T}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi T}{\beta} \left(|f| - \frac{1-\beta}{2T} \right) \right) \right) & \frac{1-\beta}{2T} < |f| \leq \frac{1+\beta}{2T} \\ 0 & |f| > \frac{1+\beta}{2T} \end{cases} \quad (5.43)$$

donde T es la duración del pulso. Aplicando la transformada inversa de Fourier se obtiene la forma del pulso:

$$p(t) = \frac{\frac{\pi t}{T}}{\pi} \frac{\cos \left(\frac{\pi \beta}{T} \right)}{1 - \frac{4\beta^2 t^2}{T^2}} \quad (5.44)$$

Este impulso es de duración infinita y no causal. Normalmente este pulso se retarda un número entero de períodos, mT y se trunca en a lo largo de $2mT$. El valor m se selecciona mediante un criterio de conveniencia entre la precisión y la complejidad de cálculo. Este pulso se discretiza a una frecuencia de muestreo que contiene k -muestras por pulso T : $T = kT_s$, siendo T_s el período de muestreo. Reemplazando t por $t - mT$ y discretizando el eje temporal mediante $t = nT_s$, obtenemos la respuesta discreta al impulso del filtro de conformado de pulso:

$$p[n] = \frac{\frac{\pi \left(\frac{n}{k} - m \right)}{\pi}}{\pi \left(\frac{n}{k} - m \right)} \frac{\cos \left(\pi \beta \left(\frac{n}{k} - m \right) \right)}{1 - 4\beta^2 \left(\frac{n}{k} - m \right)^2}, \quad 0 \leq n \leq 2m \quad (5.45)$$

En nuestro caso, esa transmisión se producirá mediante los dos sistemas situados en cascada y representados en la Figura 5.23. Cada uno de estos sistemas tiene una función de transferencia correspondiente a la raíz cuadrada de $P(f)$, que en tiempo se corresponde con:

$$p_{SQRC}(t) = 4\beta \frac{\cos\left((1+\beta)\frac{\pi t}{T}\right) + \frac{\sin\left((1+\beta)\frac{\pi t}{T}\right)T}{4\beta t}}{\pi\sqrt{T}\left(1 - \frac{16\beta^2 t^2}{T^2}\right)} \quad (5.46)$$

Aplicando los mismos criterios que en (5.45) se obtiene su respuesta en tiempo discretizada:

$$p_{SQRC}[n] = 4\beta \frac{\cos\left[(1+\beta)\pi\left(\frac{n}{k} - m\right)\right] + \frac{\sin\left[(1+\beta)\pi\left(\frac{n}{k} - m\right)\right]}{4\beta\left(\frac{n}{k} - m\right)}}{\pi\sqrt{T}\left(1 - 16\beta^2\left(\frac{n}{k} - m\right)^2\right)} \quad (5.47)$$

En la Figura 5.24 podemos observar la respuesta al impulso de estos dos filtros, transmisor y receptor, y la respuesta general obtenida de la concatenación de ambos. En la primera figura queda reflejado que la interferencia entre símbolos consecutivos no es nula. Sin embargo, el resultado obtenido de la combinación en cascada de ambos cumple este requisito. Podemos observar, a sí mismo, que el retardo introducido por este sistema completo es equivalente a la longitud del filtro escogido, en el caso del ejemplo, 6 muestras.

El éxito de esta estrategia dependerá del valor de β seleccionado, ya que éste determina si se da prioridad al mantenimiento del margen dinámico o al ancho de banda requerido por el sistema.

Por desgracia, nuestro sistema es muy sensible a la profundidad de modulación y por tanto hemos de perseguir una conformación de pulso que minimice la variación del factor de cresta de la señal. Como la elección del valor β depende de una solución de compromiso entre el ancho de banda de la señal final y el margen dinámico, en nuestro caso primará este último.

5.10. Sistemas de sincronización y segmentación

Uno de los principales problemas que presentan los sistemas de identificación reales se debe a la necesidad de una sincronización adecuada en el proceso de generación y adquisición de los datos. Podemos desglosar este problema en dos partes diferenciadas:

- Sincronización entre los relojes que controlan el proceso de muestreo de ambas señales: Esta depende fundamentalmente del tipo de instrumentación que se vea involucrada en el proceso. Al igual que sucede en el caso de la adaptación de impedancias, si empleamos como sistema de generación y adquisición de datos instrumentación general como el par generador-osciloscopio, esta sincronía se asegura únicamente obligando a los equipos a compartir reloj maestro. Sin embargo, en los sistemas DAQ de calidad media esto puede suponer un problema, sobre todo en el caso del manejo de señales de gran envergadura.
- Segmentación de la señal: Es un problema típico de la identificación de los sistemas acústicos. Como siempre existe un retardo constante entre la señal emitida y la adquirida mucho mayor que la memoria general del sistema, se hace necesario un sistema de segmentación de la señal adquirida previa al análisis.

En esta Sección se presentan los mecanismos empleados a la hora de realizar los experimentos propuesto en el Capítulo 6 con el fin de identificar el sistema bajo estudio. Por un lado nos centraremos en asegurar el correcto funcionamiento del sistema dúplex que se esconde tras el proceso de generación y adquisición de datos y por otro aportaremos los mecanismos que permitirán la correcta segmentación de las señales acústicas.

5.10.1. Sincronización del sistema de generación y adquisición de datos mediante modelos productor/consumidor

Como ya se comentó anteriormente, los experimentos a realizar en base a la estructura analizada se pueden clasificar en dos grupos atendiendo y al tipo de señales empleadas que determinan la instrumentación involucrada. Dado que el par generador-osciloscopio permite la sincronización de relojes maestros, asegurar este sincronismo no supone ningún problema. Sin embargo, la necesidad de emplear secuencias de larga duración nos obliga a utilizar sistemas de generación y adquisición de datos que aseguran el sincronismo entre los relojes de ambos

procesos pero no los paralelizan de forma adecuada. Esto es debido a una incorrecta gestión de la memoria por parte del sistema DAQ.

Para resolver esta problemática, partimos del modelo de productor/consumidor, diseñado con el fin de facilitar la compartición de datos entre iteradores que trabajan a diferentes frecuencias. Al igual que sucede en el modelo maestro/esclavo, éste desacopla los procesos en dos categorías: aquella que genera los datos y otra que los consume. Entre estos dos procesos se emplean sistemas de colas sincronizadas como medio de comunicación.

Este modelo es el más adecuado en nuestro escenario, ya que a la vez que se procesa la señal que sirve de entrada al sistema, se adquieren los datos referentes a la salida del mismo.

Teniendo en cuenta nuestras necesidades, se ha optado por un diseño en el que el proceso productor es el encargado de generar los datos a depositar en la cola y el proceso consumidor recoge éstos y los transforma en la señal de excitación. Con este modelo, el sistema de adquisición nos permite sincronizar el proceso consumidor con la adquisición de las señales de control y de salida del sistema a caracterizar.

En la Figura 5.22 se representa el funcionamiento básico del sistema de medición. En concreto la medida a realizar tiene dos particularidades inherentes a nuestro problema:

- La sincronización entre la señal de excitación y las recogidas por el sistema de adquisición ha de ser fiable, aunque la frecuencia de muestreo empleada sea diferente.
- La modulación ha de estar completamente controlada, esto implica una normalización inicial de la señal de test.
- Es necesario monitorizar la cadena de amplificación para detectar posibles anomalías acontecidas durante el proceso de medición. A su vez, estas señales servirán como referencia a la hora de corregir las desviaciones introducidas por el sistema de identificación, por tanto hemos de otorgar al sistema la posibilidad de monitorizar múltiples señales de entrada.

Debido a las limitaciones del sistema de adquisición de datos elegido, hemos optado por obligar al sistema trabajar con ficheros ya preprocesados, incluyendo la modulación elegida. Como contraprestación a este esquema hemos de manejar ficheros de gran tamaño tanto para la generación como para la adquisición de señales, pero por otro lado descongestionamos la capacidad de cómputo del propio DAQ y mediante el sistema de doble cola sincronizada aseguramos una sincronización perfecta.

Sistema de ficheros para la adquisición y generación de señales

Además de las necesidades anteriormente expuestas, el bloque de adquisición de datos ha de proporcionar cierta flexibilidad. Así se le exige la posibilidad de monitorizar varios canales a elección del usuario con un margen dinámico y frecuencia de muestreo adecuados. Otro parámetro importante a tener en cuenta es el tamaño de los ficheros obtenido en el proceso de adquisición así como la precisión más alta posible. Por ello, en el diseño hemos optado por gestionar la adquisición de datos mediante ficheros *.tdms⁹. Estos ficheros contienen estructuras que permiten gestionar las señales capturadas ocupando un mínimo espacio en disco. Adicionalmente incorporan metadatos que pueden ser de gran utilidad, como el momento de captura de datos, así como la base temporal empleada.

Con el modelo de productor/consumidor propuesto en § 5.10.1 aseguramos la sincronía en el reloj del sistema, y por tanto minimizamos la influencia del *jitter* en la medida. Sin embargo, dado que en este sistema se recogen medidas acústicas, que introducen retardos considerables, será necesario aplicar técnicas de segmentación de señales posteriores. Éstas se detallarán a continuación.

⁹Para más información sobre este formato de ficheros, propiedad de NATIONAL INSTRUMENTS visite: <http://www.ni.com/white-paper/3727/en/>

5.10.2. Estrategias de segmentación y síntesis empleadas en los experimentos

Como ya se comentó en secciones anteriores, más concretamente cuando se expuso el tipo de señales empleadas como entradas en los procesos de identificación (véase § 3.1.4) la naturaleza de las mismas depende del tipo de test a realizar. Esta naturaleza obliga a que las estrategias de sincronización (sobre todo en el caso de las medidas acústicas) sean claramente diferentes.

A pesar de que mediante los sistemas de adquisición y generación expuestos en este Capítulo se asegura la sincronía de relojes en los procesos D/A y A/D, todas las medidas acústicas conllevan un retardo debido a la distancia existente entre el micrófono y el array, que en la mayoría de los casos es necesario conocer con exactitud para poder aplicar los algoritmos de identificación expuestos en el Capítulo 3.

Distinguimos aquí dos posible casos: todos aquellos experimentos en los que se involucren tonos variables y test que tengan como excitación señales pseudoaleatorias. En el primer caso, el objetivo perseguido, además de determinar el retardo de la señal, es el de obtener una síntesis adecuada a la señal de entrada, ya que en el caso de medidas persistentes, la fase inicial de los tonos variables es indeterminada. En el segundo, y teniendo en cuenta que en nuestro caso se interpone entre la entrada y la salida un sistema acústico no lineal, el único recurso disponible para sincronizar el sistema es la inclusión de un preámbulo robusto frente a este tipo de sistemas.

Síntesis de señales tonales de frecuencia creciente exponencial y sincronización entrada/salida

Como ya se apreció en el el Capítulo 3 (véanse Sección 3.2.3 y Figura 3.15), la determinación de los parámetros iniciales de la señal tonal es imprescindible para la determinación de las bases necesarias para la obtención del sistema a identificar. A pesar de los avances presentes en los sistemas de generación de señales en instrumentación, es usual encontrarse en situaciones en las que una selección de ciertos parámetros es imposible. Por ejemplo, en el caso del test de la excitación tonal nos encontramos con que la imposición de una fase inicial, como proponen en Rébillat et al. [2011], Novák et al. [2010], imposibilita una medida continuada. Esta situación se puede dar, por ejemplo, en sistemas de medición que incluyan mecanismos controlados por motores continuos. La mayor parte de los sistemas de generación aseguran la continuidad de las señales temporalmente, esto implica que al concatenar tonos seguidos, la imposición de la fase inicial sólo condicionará a la primera señal de test, mientras que las siguientes se verán impuestas por la condición de continuidad. Otro gran problema que plantean en este tipo de mediciones (continuadas) es la propia segmentación de la señal de test.

La técnica descrita a continuación necesariamente implica una monitorización de la entrada para obtener una buena referencia de la señal de test, para su posterior descripción analítica. Así, partimos de un montaje como el propuesto en la Figura 6.12. El objetivo es definir completamente la señal de entrada de forma paramétrica, lo que implica una correcta estima t_0 y ϕ_0 . Si conocemos los valores impuestos de f_0 , f_1 y T nos encontramos en disposición de sintetizar la señal de test. La medida de la señal de referencia $x(t)$ ha de encontrarse libre de ruido en la medida de lo posible, y ser tomada previamente a las etapas de amplificación, que son susceptibles de introducir distorsiones no lineales (básicamente armónicas) que darían al traste con la medida.

El algoritmo propuesto realiza análisis multirresolución en dos fases diferentes, debido a la precisión necesaria para calcular el instante inicial de la señal de test:

- En la primera fase realiza una estimación grosera mediante una transformada de Hilbert. Esta transformación nos proporciona información sobre la fase instantánea, sin un gran coste computacional, por lo que se puede aplicar a varios tramos de la señal de test.

Los puntos candidatos para limitar la señal de test se reflejan en esta transformación como puntos de inflexión de la fase. Para enfatizar este fenómeno, previo a la obtención de los puntos máximos, se extrae la componente lineal de la señal. En la Figura 5.25 B se muestra el resultado de la fase de la transformada de Hilbert estimada, una vez eliminada su tendencia lineal. Los posibles candidatos se obtienen a partir de los máximos relativos de esta señal.

Estas estimaciones permite realizar un estudio de mayor resolución y revierte un mayor coste computa-

cional, pero centrado en una pequeña ventana. Si la velocidad de barrido de frecuencias k es suficientemente alta, y la frecuencia superior f_1 es muy inferior a la frecuencia de muestreo, con este paso se obtiene una buena estima de los candidatos a puntos iniciales de la señal.

- En la segunda fase aprovechamos que las transiciones entre diferentes señales ofrecen un cambio abrupto en la varianza de la señal, debido a la transición brusca en la frecuencia de la señal. Esta variación se puede apreciar aplicando un filtro de varianza y umbralizando su salida. Por desgracia esta técnica sólo es aplicable a cambios abruptos en la frecuencia, por tanto requiere candidatos previos que indiquen dónde centrar la ventana de análisis. Sin embargo, en condiciones normales de medición (esto es con relaciones entre f_s y f_1 razonables para la identificación de sistemas no lineales de orden acotados) esta estrategia permite obtener valores de t_0 con una desviación de $\pm \frac{1}{2}$ duración de una muestra.

A: Diagrama de bloques propuesto para la sintetización de la señal de entrada.

B: Salida del módulo de baja resolución.

C: Salida del módulo de alta resolución.

FIGURA 5.25: Procedimiento para la extracción de los parámetros de excitación en el test de tonos de frecuencia de variación exponencial.

Una vez obtenida la referencia inicial, se pasa a la fase de síntesis de la señal de excitación, a partir de la cual se obtendrán el sistema de bases que emplea el algoritmo de identificación. Esta estrategia permite identificar el proceso completo, ya que como entrada del sistema se emplea una señal sintética ideal, no la señal de referencia obtenida del sistema de medición.

Para obtener esta señal sintética, partimos de la fase de la transformada de Hilbert segmentada $\tilde{\phi}(t)$, repre-

sentada sobre un eje logarítmico, k^t . Si la velocidad de cambio de frecuencia k es suficientemente precisa, forma una línea recta:

$$\tilde{\phi}(k^{t-t_0}) = \frac{2\pi f_0}{\ln(k)}(k^{t-t_0}) + \phi_0$$

de la que se extrae la fase inicial. A partir de aquí, ya nos encontramos en disposición de sintetizar la señal de entrada.

Sincronización mediante preámbulos: entradas MLS

Este tipo de sincronización será la empleada en el caso de aquellos test que involucren señales pseudoaleatorias para la identificación, más concretamente, para el algoritmo expuesto en la Sección 3.3. En este caso, además de ser necesaria una sincronía perfecta entre los relojes del sistema de generación y el de adquisición, es fundamental determinar el instante de llegada de la onda acústica al micrófono.

En estos casos sólo disponemos de una ventana de M muestras para determinar los diferentes núcleos de Volterra. Por ejemplo, para el caso de una frecuencia de muestreo de 50 kHz y una ventana de 255 muestra, el margen temporal de 5.12 ms, a los que hay que restar la duración máxima de impulso para cada uno de los sistemas. Otro dato importante a tener en cuenta es que el tamaño de la ventana influye crucialmente en la duración de la señal de test así como en el coste computación al para determinar los núcleos (véase Sección “*Coste computacional del algoritmo de identificación mediante MLS y estrategias de indexación*”), por tanto, inicialmente se ha implementado un sistema de determinación de memoria y orden, en el caso que nos atañe, aplicado las técnicas expuestas en la Sección 3.2.1 el margen de error permitido para la sincronización es relativamente pequeño.

Habitualmente, este tipo de sincronización se realiza mediante cálculos de correlación cruzada entre la señal de excitación y la señal medida. Por desgracia, en este caso como la relación existente entre estas dos señales no es lineal, esta solución no es viable. Si añadimos a esto que la señal de excitación necesaria es pseudoaleatoria y las componentes no lineales en este caso son relativamente predominantes, no podemos aprovechar esta estrategia para una sincronización adecuada.

Por el contrario, si añadimos un preámbulo de contenido monotonal esta tarea se simplifica. Mediante algunos test previos se puede asegurar que los *arrays paramétricos* contienen una fuerte componente Hammerstein (la mayor parte de la información de los núcleos se encuentra contenida en su diagonal) y por tanto, sabemos que frente a una señal monotonal de entrada, obtendremos una señal que en gran medida contiene señales lineales a los armónicos de la entrada. Este hecho facilita la sincronización mediante el empleo de preámbulos monotonaes variables.

En la Figura 5.26 se describe cómo se realiza esta sincronización en el caso de una medida real. La señal de test introducida en el sistema viene precedida de un tono de frecuencia variable lineal que abarca el margen comprendido entre los 100 Hz y la mitad de la frecuencia de muestreo escogida para la transmisión de audio. Una duración de 300 ms se considera adecuada en este caso para conseguir un resultado satisfactorio. La elección de una *sweep* lineal se debe a que en este caso concreto, al ser un sistema de carácter paso alto (véase § 2.2.2), es adecuado escoger una señal que contenga tonos de alta frecuencia, ya que la baja frecuencia se ve fuertemente ecualizada. Tras esta señal tonal se transmite una banda de guarda del doble de duración.

Al igual que en el caso anterior, para agilizar el proceso de sincronización, el análisis se realiza en dos pasos: en primero y de más baja resolución, se localiza el preámbulo de forma gruesa, buscando el máximo de $r(t) \star x(t)$, donde $x(t) = s(t) + s^2(t) + s^3(t)$ menos su valor medio, siendo $s(t)$ la *sweep* lineal escogida como preámbulo. El máximo de esta señal determina la posición aproximada de esta señal. en el segundo paso, se repite este análisis, ya con la señal segmentada mediante una ventana de menor tamaño (aproximadamente 1.75 el tiempo de la señal de preámbulo) y de máxima resolución temporal. El máximo del módulo de la señal analítica de esta correlación, determina el instante inicial de la señal de medición.

Teniendo en cuenta que la frecuencia de muestreo empleada es mucho mayor que la frecuencia de transmisión de los pulsos MLS (en una proporción de entre 5 y 10 veces mayor), la tolerancia de este método se encuentra en el orden de entre un 1 % y 2 % del tiempo de estos impulsos.

A: Señal captada por el micrófono en la banda sónica. Únicamente se ha aplicado un filtro paso bajo para eliminar la banda ultrasónica.

B: Salida del módulo de baja resolución.

C: Salida del módulo de alta resolución.

FIGURA 5.26: Procedimiento para la extracción de los parámetros de excitación en el test de tonos de frecuencia de variación exponencial.

Con esta estrategia garantizamos el éxito de la estimación posterior de los núcleos de Volterra mediante el algoritmo de identificación expuesto en la Sección 3.3.

5.11. Conclusiones

En este Capítulo se ha planteado el marco necesario para la implementación y caracterización de un *array paramétrico*. Tanto la instrumentación, la electrónica como la metodología presentadas son aplicable a los experimentos que se presentarán en el siguiente Capítulo.

A pesar de la existencia de productos comerciales que ya aprovechan este fenómeno para obtener sistemas de alta directividad, dado que nuestro objetivo es el de caracterizar el fenómeno en sí, se ha diseñado un prototipo con el fin de tener control absoluto sobre los parámetros de funcionamiento así como acceso directo a todas las señales de interés, sea cual sea su magnitud física. Para ello ha sido necesario diseñar circuitería específica que alimente al sistema y permita esta monitorización.

También se adjunta un resumen de la teoría básica que describe el funcionamiento del transductor selecciona-

do para la realización del *array*, en base a la naturaleza del proceso de transducción del mismo. Este modelo determina el proceso de diseño de las necesidades específicas del *array*, como el consumo de potencia o el punto de trabajo adecuado y que será corroborado mediante los experimentos previos al diseño descritos en el siguiente Capítulo 6. En base a estos resultados y teniendo en cuenta las especificaciones previas del transductor, también se ha presentado aquí la circuitería diseñada ex profeso para alimentar el *array* propuesto. Asociado a este diseño se plantean los sistemas de instrumentación necesarios para caracterizar tanto el prototipo como el fenómeno acústico bajo estudio. Este sistema de instrumentación incluye sistemas de transducción variados, transductores que permiten caracterizar intensidades, tensiones, desplazamientos de membranas así como señales acústicas.

A su vez, en este Capítulo se han esbozado las primeras pautas metodológicas que permiten la realización de los experimentos que serán presentados en el Capítulo 6. Estos experimentos se dividirán en tres categorías diferentes: (i) experimentos que permiten el diseño del *array*, (ii) aquellos relacionados con la determinación del tipo de no linealidad presente en sistema, así como la determinación de la memoria y (iii) experimentos que requieren de señales de larga duración y diseño específico. Cada una de estas categorías implica una dificultad diferente: los primeros son problemas de instrumentación básica, de metodología ampliamente conocida, pero indispensables para las etapas de diseño. La segunda categoría implica una metodología sencilla acompañada de un postprocesado de las medidas relativamente complejo. Sin embargo la tercera categoría implica tanto la utilización de sistemas de generación y adquisición así como un postprocesado complejo.

Por ello hemos creído de vital importancia presentar la metodología asociada al uso de los mismos para la realización de los experimentos que expondremos a lo largo del siguiente Capítulo, que implica: (i) el diseño de un sistema de adaptación de impedancias adecuado, así como el correspondiente filtro *antialiasing* analógico; (ii) sistemas que permitan ajustar la frecuencia de muestreo de manera fiable y adaptándose a las necesidades del proceso de modulación impuesto, tanto en margen dinámico como frecuencial; (iii) técnicas complejas de sincronización de colas y manejo de grandes ficheros, así como un postprocesado complejo que realiza cálculos por bloques por obstrucción de memoria (véase Sección “*Coste computacional del algoritmo de identificación mediante MLS y estrategias de indexación*”); (iv) y por último, un sistema de segmentación fiable que permita determinar el retado generalizado de la señal adquirida así como la síntesis de la señal de entrada en caso de ser necesario.

Con todo ello se consigue plantear tanto una metodología como un marco completo para el diseño y la caracterización de un sistema real de *array* paramétrico. En este punto, en el que tanto la instrumentación como la estructura bajo estudio se encuentran claramente definidas, nos encontramos en condiciones de aplicar los algoritmos propuestos en los Capítulos 3 y 4, así como en el de obtener parámetros acústicos clásicos que definan el comportamiento de la cadena de transducción.

EXPERIMENTOS SOBRE LA ESTRUCTURA

Uno de los principales retos a la hora de diseñar un altavoz paramétrico de altas prestaciones es el de caracterizar de forma adecuada el funcionamiento del mismo. A diferencia de los altavoces tradicionales, que persiguen la fidelidad mediante la mejora de los sistemas de transducción, el propio fenómeno del *array paramétrico* implica un proceso no lineal. En este escenario, la caracterización adecuada del proceso de transmisión es clave para plantear un sistema de igualación y linealización que permita obtener un sistema final de calidad.

Es este Capítulo pondremos a prueba los algoritmos de identificación y compensación presentados en los Capítulos 3 y 4, aplicándolos sobre la estructura física diseñada y analizada en el Capítulo 5.

Además de perseguir este objetivo principal, a lo largo del Capítulo se presentarán medidas relativas al transductor base empleado, así como a la calibración del sistema de instrumentación propuesto, que han permitido el diseño del prototipo sobre el que se ha planteado el sistema completo. Todos estos datos, junto con los algoritmos de identificación y compensación aportados, ofrecen información necesaria para el diseño de un sistema de alta fidelidad basado en esta tecnología.

Es importante recordar que los algoritmos propuestos en este trabajo proporcionan una metodología de identificación completa, adaptada a esta problemática concreta. Dado que la identificación de sistemas forma un área completa de conocimiento por sí misma, en el texto se proponen únicamente algoritmos destinados a identificar el sistema en un laboratorio, con necesidad de procesamiento posterior, si bien es cierto que estos resultados pueden servir de parámetros de entrada a algoritmos más ligeros que pueden ejecutarse en tiempo real, actuando como calibradores *in situ* del producto final.

6.1. Clasificación de los experimentos realizados

Al igual que sucede en el caso del diseño de cualquier tipo de sistema de transducción, plantear una estructura de *array paramétrico* implica la necesidad de determinar ciertos parámetros inherentes al transductor base, que serán claves a la hora de asegurar su correcto funcionamiento. Unido a esta problemática común en este ámbito, aparece la necesidad de describir el proceso de transmisión de una forma rigurosa. Estas dos vertientes suponen una división clara de los experimentos necesarios para diseñar por completo una estructura de este tipo: (i) una

primera batería de pruebas que aporta datos fundamentales como el consumo de potencia o la sensibilidad del sistema, y (ii) medidas complejas que permitan caracterizar el proceso de transmisión de la onda, permitiendo el diseño de un sistema de igualación y precompensación adecuado a este tipo de estructuras.

La metodología empleada para realizar el primer tipo de experimentos es ampliamente conocida, y se aporta en este texto como información adicional. Todos estos experimentos pueden ser realizados con instrumentación básica y no requieren la aplicación de algoritmos complejos posteriores para obtener los parámetros deseados.

Por otro lado caracterizar el sistema de transmisión de manera fiable implica la utilización tanto de instrumental como de señales de test diseñadas a tal efecto. Además supone la aplicación de algoritmos complejos que aportan las estimas necesarias para describir el proceso al completo.

Estos dos enfoques obligan a emplear sistemas de instrumentación adecuados a cada tipo de experimento, planteando una clasificación basada en el tipo de señales necesarias para llevar a cabo el mismo:

- *Experimentos preliminares*: Podemos incluir en esta categoría todos aquellos experimentos que se llevan a cabo excitando el sistema mediante señales clásicas de instrumentación o combinaciones de éstas. Esto implica que pueden ser obtenidas mediante generadores tradicionales con patrones comunes. Por lo general este tipo de medidas no necesitan señales de test de larga duración, permitiendo emplear el sistema de monitorado como sistema de captura.
- *Experimentos con patrones concretos*: Éstos emplean señales diseñadas *ex profeso* para determinar alguna característica del sistema bajo estudio. En estos casos suele ser necesaria una sincronía perfecta entre el sistema de generación y el de adquisición. Por tanto es obligada la utilización de un reloj en común, así como sistemas de adquisición que permitan la grabación en tiempo real de señales de larga duración.

En el caso que nos atañe, para poder plantear los experimentos de patrones concretos se han de conocer características del sistema que proporcionan experimentos básicos, ya sean los realizados en el proceso de diseño, que determinan frecuencias de trabajo o márgenes dinámicos, como las características intrínsecas del sistema (véase Sección 3.2.1).

6.2. Medidas previas relacionadas con el diseño del *array*

En esta Sección se exponen todas aquellas medidas que, aunque no tienen entidad como experimento, han permitido realizar el diseño a caracterizar. Éstas nos permiten definir márgenes de trabajo así como acotar el alcance del array. Estos experimentos también aportan conocimiento sobre la instrumentación empleada en las mediciones más complejas, permitiendo determinar la influencia de instrumentación en el proceso de identificación.

A su vez, los datos aportados aquí forman un marco adecuado para la posible implementación de sistemas basados en el transductor seleccionado o similares, con un fin de prototipado preindustrial.

6.2.1. Calibración de la sonda de corriente

Como ya se citó en la Sección 5.8.2, para asegurar un método no invasivo de caracterización de la impedancia de entrada del transductor, teniendo en cuenta el modelo de cuadripolo expuesto en la Sección 5.5, es necesario emplear una sonda de corriente encargada de registrar la intensidad que fluye entre la bornas del mismo. La fiabilidad de esta medida se basa en un proceso de recalibrado del instrumento. Esta calibración permite obtener un modelo que define la influencia de la propia sonda en el proceso de medición.

El objetivo fundamental de esta medida es el de proponer un sistema de compensación que minimice, en la banda de interés, la coloración que introduce este dispositivo, así como estimar la sensibilidad del mismo para una posterior corrección. Para ello se tratará de encontrar un modelo de filtrado que pueda aplicarse a la señal de tensión ofrecida por la sonda para obtener, de la manera más fiel posible, la señal de intensidad asociada. Este tipo de transductores ofrece buenas propiedades de linealidad, por tanto se ha considerado adecuado modelar el sistema inverso a éste como un sistema lineal no causal, debido a que se ha de tener en cuenta el posible retardo que introduce el proceso de transducción.

FIGURA 6.1: Montaje para la calibración de la sonda de corriente. Para determinar la intensidad se ha empleado una resistencia de precisión de 510Ω , un generador de señales, un osciloscopio digital y un ordenador que controla la mediada.

El primer paso, por tanto, consiste en corroborar este carácter inductivo de la sonda, valorando la coloración que introduce. Para ello se emplea el esquema reflejado en la Figura 6.1. Si suponemos que la resistencia ofrece una impedancia real pura, mucho mayor que la impedancia introducida por las espiras que intercalamos en la sonda, se puede afirmar que $i_{\text{sonda}}(t) = v_{\text{gen}}(t)/Z_{\text{test}}$. La impedancia de transferencia de la sonda relaciona la tensión ofrecida por ésta (v_{gen}), frente a la intensidad que recorre las espiras. Podemos afirmar, por tanto, que en el dominio frecuencial se cumple que:

$$\mathfrak{Z}_{\text{sonda}}(f) = \frac{V_{\text{sonda}}(f)}{I_{\text{sonda}}(f)} (\Omega) \quad (6.1)$$

Esta relación se puede obtener partiendo del montaje expuesto en la Figura 6.1 y excitando el sistema mediante una señal determinista que cubra todo el espectro de frecuencias a tener en cuenta. Concretamente, en este caso se ha empleado el método de estimación de espectros expuesto en el Apéndice A.2. La banda a caracterizar se encuentra entre 0 Hz y 200 kHz, pero aplicando el montaje de la Figura 6.1, podemos alcanzar fácilmente los 500 kHz sin superar la frecuencia de adquisición y la memoria del sistema, asegurando además un barrido lo suficientemente lento como para no introducir artefactos considerables en la estima del espectro.

El montaje empleado trata de minimizar el efecto de los restantes elementos que formarán la cadena final. Desafortunadamente, el generador aplicado a la cadena no cumple con las especificaciones de potencia ofrecidas por el amplificador final y por tanto no es posible caracterizar la sonda en el margen dinámico en el que finalmente será empleada. Para no forzar el generador de señales, hemos considerado buena elección una resistencia de precisión de 510Ω como impedancia de test y $3V_p$ en bornas.

La señal de test empleada es un seno de amplitud constante y frecuencia variable, con un barrido lineal que abarca de los 100 Hz a los 500 kHz y que se repite con un periodo de 800 ms.

La Figura 6.2 muestra los resultados obtenidos de esta calibración. Claramente el comportamiento del transductor es inductivo, pero en el margen frecuencial de interés se aprecia una coloración tolerable para la medición. A su vez, en este margen también se puede considerar que la respuesta en fase es lineal. Sin embargo, al proponer el sistema de compensación de la sonda se tendrá que tener en cuenta este fenómeno para asegurar su estabilidad.

Para valorar tanto la fidelidad de los modelos propuestos como el sistema de inversión, es necesario discriminar las frecuencias que se encuentran fuera del margen frecuencial de interés. Para ello hemos propuesto el empleo de un filtrado paso banda, reflejado en la Figura 6.3. Este filtro se ha implementado mediante un diseño Butterworth en el que el gálibo a cumplir asegura una atenuación mínima de 60 dB en las bandas eliminadas. Éstas se encuentran comprendidas en los intervalos $[0, 10]$ y $[90, 500]$ kHz. En la banda de paso, comprendida entre 20 y 80 kHz, se exige un rizado máximo de 1 dB. Al ser empleado como un filtro de análisis de errores, se ha planteado un diseño no causal para evitar el retardo introducido por el proceso de filtrado¹.

¹Este filtrado sólo se empleará a la hora de estimar la cuantía de los errores cometidos, con el fin de minimizar los efectos de la conformación del ruido de medida, al compensar el efecto de la sonda

FIGURA 6.2: Impedancia de transferencia estimada de la sonda. La medida se ha realizado teniendo en cuenta el montaje de la Figura 6.1 y las especificaciones detalladas en el texto. Para la estimación de la función de transferencia espectral se ha empleado el método de Welch, con ventanas de análisis Hamming de 1024 muestras, con un solapamiento del 50%.

FIGURA 6.3: Respuesta al impulso y frecuencial del filtro empleado para el estudio del comportamiento de la sonda en la región de interés. En la segunda gráfica la región de interés aparece sombreada.

Para estimar esta función de transferencia hemos aplicado el método de Welch y un método regresivo (véase Apéndice A.2). El criterio elegido para discriminar el modelo más adecuado de entre los dos métodos es el de minimizar el error cometido por la señal de intensidad compensada frente a la teórica que atraviesa las espiras.

Si comparamos ahora la relación existente entre los filtros propuestos y el análisis espectral efectuado para la estimación de la admitancia de transferencia de la sonda (primera gráfica de la Figura 6.4), observamos que el filtro $h_1(t)$ se adecúa mejor a la admitancia de transferencia. Además, teniendo en cuenta la condición de selección impuesta en (6.2) y que las señales involucradas en la medición sufren un proceso de muestreo, se ha de buscar un filtro $\mathbf{h}$ tal que:

$$\left\{ \mathbf{h} \left| \operatorname{argmin}_{\mathbf{h}} \left\langle \left| \mathbf{h}_b * \left(\frac{\mathbf{v}_{\text{gen}}}{Z_{\text{test}}} \right) - \mathbf{h} * \mathbf{v}_{\text{sonda}} \right|^2 \right\rangle \right. \right\} \quad (6.2)$$

El sistema a modelar ha de compensar el efecto de la impedancia de transferencia de la sonda. Así, los modelos de inversión más adecuados serían aquellos que reflejasen más fielmente la admitancia de transmisión de la sonda, $\mathfrak{A}(f)$, en la banda de interés. Esta se puede estimar mediante el método de Welch a partir de las medidas obtenidas

A: Admitancia de la sonda de intensidad determinada mediante el inverso de la expresión (6.1).

B: coherencia entre las señales confrontadas para obtener la función de transferencia de la sonda de corriente.

FIGURA 6.4: Medidas relacionadas con la admitancia de la sonda de corriente empleada para caracterizar el elemento básico de transducción del array.

con el montaje de la Figura 6.1.

Como era de esperar, y debido al carácter inductivo de la sonda, el análisis espectral de coherencia refleja que la baja frecuencia requeriría de una ecualización excesiva para ver compensado el efecto de transducción. En la Figura 6.4 queda reflejado este hecho.

Teniendo en cuenta que para definir el filtro FIR de compensación mediante el método de Welch hay que asegurar que la respuesta al impulso obtenida mediante el algoritmo de mínimos cuadrados es fiel al sistema en la banda de interés, se tomará este dato como discriminador a la hora de obtener los coeficientes del filtro. Más concretamente, se ha tomado como referencia un valor de 0.9 como umbral. Como se puede observar en la Figura 6.4, la mayor parte del espectro a considerar posee buenas propiedades para garantizar una buena estimación del modelo de compensación. De hecho, en todo la banda de interés se cumple el criterio impuesto a la coherencia entre ambas señales.

Para el segundo método, en el que los coeficientes se calculan mediante un algoritmo de predicción de coeficientes (véase Apéndice A.2.2), se ha empleado la totalidad de la señal en el dominio temporal. En este caso, la mayor deficiencia que presenta el método es la longitud del filtro FIR que compensará el comportamiento de la sonda, ya que la complejidad computacional del mismo se encuentra relacionada directamente con el número de coeficientes estimados para el filtro. Además, al aumentar este parámetro el algoritmo se vuelve más inestable.

Mediante la aplicación de estos dos métodos se han obtenido los dos sistemas lineales, encargados de compensar los efectos de la sonda, reflejados en la Figura 6.4. Al igual que en caso del filtro discriminador de la banda de trabajo, ambos sistemas son no causales, para no introducir retardos en la señal de análisis. Tanto la respuesta en amplitud como en fase obtenidas son similares, sin embargo, la posibilidad de ampliar el número de coeficientes del filtro FIR sin gran coste computacional por parte del método de estimación de Welch, otorga más fiabilidad a éste. En el caso del método regresivo, al contar con coeficientes limitados se aprecia un rizado proporcional a la longitud del filtro FIR, que produce máximos aproximadamente cada 10 kHz.

Si comparamos ahora la relación existente entre los filtros propuestos y el análisis espectral efectuado para la estimación de la admitancia de transferencia de la sonda (Figura 6.4A), observamos que el filtro $h_1(t)$ se adecua

mejor a la admitancia de transferencia.

Para aplicar el criterio de selección impuesto en (6.2), se han aplicado ambos filtros a la señal de tensión generada por la sonda, obteniéndose el error cometido por ambos sistemas con respecto a la intensidad teórica que recorre las espiras. El error representado en la Figura 6.5 se ha calculado mediante:

$$e(t) = h_b(t) * \left(\frac{v_{\text{gen}}(t)}{Z_{\text{test}}} - h(t) * v_{\text{sonda}}(t) \right) \quad (6.3)$$

Como era de esperar, en vista del de las gráficas anteriores, el error introducido por el modelo regresivo es claramente superior al obtenido a partir de la estimación espectral. Es por ello que el filtrado escogido para estimar la intensidad que atraviesa el transductor será el reflejado en la Figura 6.5 A como $h_1(t)$.

6.2.2. Estimación de la impedancia eléctrica del transductor

Una vez caracterizada la relación existente entre la tensión devuelta por la sonda de corriente y la intensidad que atraviesa el transductor, nos encontramos en condiciones de determinar la impedancia eléctrica del transductor. Esta magnitud relaciona, precisamente, la tensión a la que se encuentra sometido el transductor y la intensidad que la atraviesa. A partir de este dato, se puede definir un sistema de amplificación que se adecue a las necesidades del sistema. También nos permite encontrar una primera aproximación al modelo de cuádrupolos (véase Figura 5.4) mediante el cual se suele analizar este tipo de sistemas.

En la Sección 5.5 desglosamos la definición e influencia de las impedancias que caracterizan los transductores electrostáticos. Más concretamente, y debido a la baja eficiencia de transducción Γ presente en estos dispositivos, podemos realizar medidas simples que nos aporten aproximaciones a los parámetros electromecánicos propuestos con anterioridad.

Para realizar este experimento es necesario emplear el montaje de la Figura 6.6. Los parámetros elegidos para la excitación se reflejan en la Tabla 6.1 A. Al igual que en el experimento anterior, y presuponiendo la linealidad del sistema para no complicar el estudio, calculamos la función de transferencia existente entre la tensión aplicada en bornas del transductor y la corriente que circula por él, teniendo en cuenta el factor de corrección del efecto de la sonda, $\mathfrak{A}(f)$. De nuevo hemos aplicado el método de Welch sobre el par entrada-salida para calcular la función de transferencia existente entre estas dos señales, aplicando a la entrada del sistema un tono variable lineal, cuyos parámetros se muestran en la Tabla 6.1 A.

Parámetro	Valor	Unidad
V_{pol}	158.6	V
$V_{\text{pp,ampli}}$	154.6575	V
T_{chirp}	800	ms
f_0	100	Hz
f_1	500	kHz
f_s	1	MHz

A: Parámetros del experimento.

Parámetro	Valor	Unidad
Radio	1.9215	cm
Capacidad †	400 ~ 500	pF

† Medido a 1 kHz y V_{pol} 150 V

B: Parámetros del fabricante y geométricos.

TABLA 6.1: Parámetros empleados para la estimación de la impedancia eléctrica del transductor.

Dado que partimos de un modelo de cuádrupolos que posteriormente se representa como un sistema electromecánico equivalente, podemos recurrir al concepto de matriz de impedancias propuesto en (5.20) e identificar cada elemento de esta matriz con los componentes a determinar, a través de (5.30). Siguiendo esta estrategia, el parámetro más sencillo a determinar en el modelo propuesto en la Figura 5.5 es la impedancia eléctrica Z_E .

El primer elemento de la matriz de impedancias se corresponde directamente con la impedancia eléctrica del sistema. Este elemento se calcula anulando el valor de $u(t)$ como se indica en (5.21). Con el montaje planteado en la Figura 6.6 no tenemos acceso a la membrana del transductor para detenerla, sin embargo si tenemos en cuenta el circuito en el dominio temporal (véase Figura 5.5 B) y la relación:

A: Respuesta temporal de la función de transferencia de compensación de la sonda.

B: Respuesta en frecuencia de la función de transferencia de compensación de la sonda.

C: Error cometido por ambos métodos para la señal de excitación.

D: Respuesta en frecuencia de los errores cometidos por la estimación de la función de transferencia de la sonda.

FIGURA 6.5: Error cometido por los modelos de compensación propuestos para la sonda de corriente empleada en las medidas relacionadas con la caracterización del transductor.

FIGURA 6.6: Montaje para determinar la impedancia eléctrica de los elementos de transducción.

$$Z_{me} = \frac{Z_{ms}}{\Gamma^2} \quad (6.4)$$

podemos aproximar la rama correspondiente a esta impedancia como un circuito abierto, ya que en este tipo de estructuras siempre se cumple que $Z_{me} \gg Z_E$. Esta estrategia es la empleada en Bai et al. [2009], pero de forma intrusiva, ya que la intensidad que circula por el transductor se calcula por medio de una resistencia intercalada. Aquí optamos por el empleo de la sonda de corriente, aplicando el modelo de admitancia de la misma estimada en la Sección 6.2.1.

Dado el carácter capacitivo de la estructura, el resultado esperado es el de una impedancia similar a la de un condensador. En la Figura 6.7 se muestra el resultado obtenido para este parámetro en función de la frecuencia de excitación. Hay que tener en cuenta que la estima de la intensidad en baja frecuencia es pobre, ya que, como se observó en la sección anterior, la calidad del par tensión-intensidad es mala (véase Figura 6.4 B), por tanto la estima es poco fiable. Sin embargo, si observamos la respuesta en la zona de transmisión del sistema, sombreada en azul claro en la Figura 6.7, esta coincide plenamente con el carácter capacitivo esperado.

La capacidad que representa con el mínimo error la función de transferencia obtenida es de aproximadamente

FIGURA 6.7: Impedancia eléctrica del transductor caracterizada mediante el montaje de la Figura 6.6. Se añade a esta medida un ajuste al modelo capacitivo teórico junto con los datos suministrados por el fabricante.

650 pF. En la Figura 6.7 el efecto de esta capacidad se muestra en línea discontinua. Este valor se aproxima al ofrecido por el fabricante, también representado a modo de región en la misma Figura 6.7. Cabe destacar que este parámetro ha sido estimado en unas condiciones que no son adecuadas a nuestra zona de trabajo (véase Tabla 6.1 B).

El valor de esta capacidad inferida es el que se ha tomado como referencia para la estimación del consumo de potencia del sistema completo. A su vez éste sirve para estimar otros parámetros necesarios para obtener el modelo electromecánico aproximado.

A partir de este valor de Z_E estimado podemos inferir el valor de ciertos parámetros que no han sido especificados por el fabricante y que sirven para complementar el modelo electromecánico del sistema. Así por ejemplo, si asumimos la aproximación del condensador plano, podemos obtener la distancia equivalente entre placas del transductor, a partir de la relación (5.3), y tomando por válido el valor de 650 pF para la capacidad del condensador:

$$d = \frac{\epsilon_0 S}{C_0} = 2.5833 \text{ mm} \quad (6.5)$$

A partir de éste valor y (5.29) podemos inferir el factor de transducción Γ :

$$\Gamma = \frac{\epsilon_0 S E_0}{d^2} = 39.907 \mu\text{NV}^{-1} \quad (6.6)$$

Dado que este valor es mucho menor que la unidad si se expresa en unidades del Sistema Internacional, podemos dar por válida la suposición inicial $Z_{me} \gg Z_E$, ya que el factor de transducción impondrá un valor alto de Z_{me} (véase (6.4)).

6.2.3. Estimación de la impedancia mecánica del transductor

La impedancia mecánica de un transductor relaciona la velocidad a la que se mueve la membrana del mismo con la fuerza ejercida sobre él. Tradicionalmente, este parámetro se puede inferir a partir de la presión acústica en eje y presuponiendo ciertas características del patrón de directividad del sistema, pero en nuestro caso mediremos con la ayuda de un vibrómetro el punto central de la membrana.

En realidad, esto supone una simplificación del problema, que presupone un movimiento de la membrana unimodal, si bien es cierto que mediante el montaje expuesto en la Figura 6.8 es posible determinar tanto la impedancia mecánica basada en cada punto y su influencia en el patrón de directividad, como la manipulación de la tensión de polarización del mismo. Dado que en este trabajo nos centramos en las medidas previas al diseño del array, bastará con tomar como referencia al punto central.

A partir de este parámetro, siempre y cuando se encuentre presentado de forma exhaustiva, podemos inferir la impedancia acústica de sistema aplicando un estudio similar al empleado en Dalmont [2001].

6.2.4. Corrección del efecto del micrófono empleado en la toma de medidas

Debido a la singularidad del problema propuesto y, como ya mencionamos en la Sección 5.8, los experimentos expuestos a continuación requieren la captación de medidas de presión acústica en diferentes bandas frecuenciales de trabajo. Por simplicidad, se ha optado por emplear el mismo micrófono de instrumentación para esta tarea, sin embargo esta decisión conlleva la necesidad de una corrección previa en la banda superior a la audible, ya que el transductor empleado está orientado a las aplicaciones acústicas tradicionales. En el caso que nos atañe, esta corrección es lícita ya que las mediciones de la banda ultrasónica son de carácter orientativo.

FIGURA 6.8: Montaje para determinar la impedancia electromecánica de los elementos de transducción.

La sensibilidad del micrófono, según las teorías clásicas (véase Zuckerwar [1978]), se corresponde con:

$$\mathcal{S}(\omega) = \frac{AE_0}{(d - X_0) \sqrt{\left(\omega^2 m_M - \frac{1}{C_M}\right)^2 + \omega^2 R_M}} \quad (6.7)$$

en donde: C_M es la compilancia mecánica, E_0 la tensión de polarización, X_0 la posición de la membrana a la tensión de polarización, d la distancia entre placas, m_M la masa de la membrana y A es la superficie de cada uno de los electrodos. Esto implica una respuesta plana que abarca las frecuencias que se encuentran por debajo de la frecuencia de resonancia y una caída de 12 /oct por encima de ella.

FIGURA 6.9: Comparación entre las impedancias mecánica y eléctrica inferidas mediante las medidas realizadas en las Secciones 6.2.2 y 6.2.3.

FIGURA 6.10: Sensibilidad del micrófono de instrumentación empleado en las medidas. La línea continua representa el modelo de sensibilidad aplicado a lo largo de los siguientes experimentos y las marcas, los datos ofrecidos por el fabricante.

FIGURA 6.11: Respuesta en frecuencia del transductor en emisión de onda primaria. La zona sombreada indica el ancho de banda de transmisión. La presión se encuentra referida a 1 m de distancia y el nivel de presión sonora se ha corregido de manera que se simule una señal persistente tonal a la entrada.

De los datos proporcionados por el certificado de calibración del micrófono podemos extraer el valor correspondiente de la frecuencia de resonancia del sistema ($f_0 = 23.5 \text{ kHz}$), que según este modelo se corresponde con:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{m_M C_M}} \quad (6.8)$$

Dado que los datos de certificación aportan valores a la frecuencia de resonancia, es posible obtener el valor de la resistencia mecánica R_M del sistema a partir del valor de la sensibilidad a f_0 , ya que ésta determina la amortiguación del micrófono. En la Figura 6.10 se representa el resultado de la aplicación del modelo de (6.7) frente a los datos ofrecidos por el fabricante en el informe de certificación.

Lógicamente, esta corrección sólo será aplicada en aquellas medidas de presión que involucren la banda ultrasónica, ya que el fabricante asegura en su informe de calibración la fiabilidad del sistema completo.

6.3. Caracterización mediante tonos de frecuencia variable

En este apartado se recogen los experimentos realizados sobre el array que aplican las técnicas de identificación expuestas en la Sección “*Comportamiento de los sistemas no lineales de memoria y orden finitos frente a senos del frecuencia variable exponencial*”. Por tanto, todos los experimentos que se exponen a continuación se basan en medidas acústicas realizadas empleando como excitación tonos de frecuencia variable exponencial. Como montaje de referencia, se ha empleado el mostrado en la Figura 6.12. Los parámetros aplicados en la realización de estas medidas se presentan en la Tabla 6.2.

Parámetro	Valor	Unidad
T	800	ms
f_0	100	Hz
f_1	24	kHz
f_s	500	kHz
f_c	50	kHz
$V_{pp, ampli}$	90	V_{pp}
V_{pol}	407	mV
$\sigma(V_{pol})$	407	mV

TABLA 6.2: Parámetros empleados en los experimentos de la Sección 6.3.

Como objetivos finales de estos experimentos podemos citar la caracterización previa de orden y memoria, corroborar el modelo subyacente del sistema (véase “*Diagnosis de estructuras*”), o al menos acotarlo a sistemas de memoria y orden finitos, así como obtener de forma efectiva la relación existente entre la onda de presión primaria y secundaria mediante un modelado del sistema basado en estructuras generalizadas de Hammerstein (véase Sección 3.2.2).

En los siguientes apartados se aportará una visión generalizada de la distribución espacial de la distorsión, así como la influencia del índice de modulación escogido para realizar las mediciones. Este factor es de suma importancia a la hora de plantear una estrategia de predistorsión viable para un sistema comercial, ya que lo ideal es que la relación entre la distorsión y la parte lineal de la onda de presión sonora se mantenga constante en el área de escucha.

Para facilitar el análisis del sistema, se plantea aquí una nueva definición de la distorsión. El hecho de disponer de los núcleos de Volterra, o al menos de una proyección de éstos sobre sus diagonales, permite obtener un mecanismo de separabilidad entre las componentes que conforman la onda de presión recibida. Esta nueva definición se inspira en los estudios realizados en Farina [2000], pero con la peculiaridad de aplicar un nuevo sistema de bases que permiten esta separación. Estrictamente, si el sistema se ajustara a un modelo generalizado de Hammerstein, como indica la teoría física propuesta en Berkta y Smith [1965] y en Westervelt [1963], la identificación obtenida mediante este algoritmo aportaría una definición completa del mismo. Sin embargo, posteriormente se demostrará que el sistema no sólo posee información en la diagonal de los núcleos de Volterra (véase Sección 6.4).

Con el fin de simplificar las relaciones existentes en el sistema, todos los núcleos obtenidos se han referido a una entrada teórica normalizada. Esto es debido a que en realidad, el comportamiento del sistema depende de dos factores simultáneamente: el índice de modulación y de la amplitud de la portadora, que conforman finalmente el margen dinámico de la envolvente de la señal de la que, según el modelo propuesto por Berkta, depende la onda de presión sonora recibida en la banda sónica. Es importante destacar este hecho debido a que, al encontrarnos en presencia de un sistema no lineal, la sensibilidad de cada uno de los órdenes conlleva relaciones lineales, cuadráticas o cúbicas.

Como la finalidad de los experimentos es tratar de modelar la relación existente entre la envolvente de la señal de entrada al transductor y la onda de presión en la banda sónica, previamente al estudio se ha de aplicar una etapa de filtrado, que en este caso se realiza en dos etapas: (i) filtrado paso bajo a la frecuencia de muestreo original mediante el filtro $h_a[m]$, (ii) filtrado paso alto para eliminar la componentes de baja frecuencia asociadas a las mediciones acústicas. Este último filtrado ($h_b[m]$) se realiza a una frecuencia de muestreo adecuada a la banda sónica y posteriormente retornamos a la frecuencia original.

FIGURA 6.12: Montaje empleado para caracterizar el sistema mediante el análisis del tono de frecuencia variable exponencial

FIGURA 6.13: Etapa de procesado previo al análisis del sistema de caracterización basado en el empleo de tonos de frecuencia variable exponencial.

Por tanto, el preprocesado aplicado a la señal de medición, asegura que sólo se va a identificar el proceso concerniente a la envolvente y a la onda de presión sonora en la banda sónica. En la Tabla 6.3 se detallan los parámetros empleados en el diseño de este preprocesado para todas las medidas presentadas en este apartado.

	$h_a[m]$		$h_b[m]$
f_c	26 kHz	f_{stop}	50 Hz
f_{stop}	28 kHz	f_c	125 Hz
Atenuación	150 dB	Atenuación	100 dB
f_s	500 kHz	f_s	50 kHz
Forma	FIR directa	Forma	FIR directa
Orden	1121	Orden	437

TABLA 6.3: Parámetros de diseño de los filtros que componen el preprocesado de los experimentos de la Sección 6.3.

6.3.1. Obtención del orden y la memoria del sistema

Como ya se argumentó previamente, el éxito de cualquier sistema de identificación depende en gran medida del conocimiento previo del mismo. En el caso de los métodos de identificación propuestos, sobre todo en el caso del basado en señales *MLS*, es crucial disponer de una estima aproximada de la memoria y el orden, ya que estos parámetros influyen en la capacidad de cómputo notablemente. Además, es necesario recordar que estimas previas excesivamente bajas de orden y memoria arrojan resultados con *aliasing* inter-intra núcleos.

Este experimento aplica el algoritmo presentado en la Sección “*Determinación informal de la memoria y el orden del sistema bajo estudio*” a toda la cadena a caracterizar. Para ello partimos del montaje mostrado en la Figura 6.12, aplicando los parámetros indicados en la Tabla 6.2.

Aplicando una analogía entre las señales implicadas en este experimento y la señales que conforman la Figura 3.5 tenemos que:

- Como entrada del sistema $e(t)$, se toma la envolvente de la señal modulada, extraída como referencia del generador de funciones, como se puede observar en la Figura 6.12. En realidad, aplicamos un proceso de síntesis y sincronizado de señal como el descrito en la Sección 5.10.2, mediante el cual obtenemos un tono de frecuencia variable de amplitud normalizada y con la fase adecuada. En este caso, para asegurar la correcta polarización del sistema, en el experimento se capturan ventanas que posteriormente se segmentan (véase Sección “*Síntesis de señales tonales de frecuencia creciente exponencial y sincronización entrada/salida*”). Otra alternativa posible es configurar el sistema para que se dispare con un único barrido frecuencial, pero se ha demostrado que las condiciones de polarización pueden variar ligeramente.
- La señal $y(t)$ de la Figura 3.5 se corresponde con una versión filtrada ($s(t)$) en la banda sónica de la señal capturada por el micrófono, $\hat{s}(t)$, según el esquema propuesto en la Figura 6.12.

En la Figura 6.14 se observan los niveles recogidos por el sistema en la medición, antes y después del filtrado de propuesto en la Figura 6.13 y en la Tabla 6.3. En este caso, debido a que la medida ha sido obtenida con un único elemento activo, los niveles recogidos por el micrófono son bastante bajos. Aun así, existen evidencias que demuestran la valía de este tipo de sistemas de modelado bajo condiciones de señal a ruido desfavorables, incluso en procesos de identificación, como se pone de manifiesto en Rébillat et al. [2011].

Como el sistema es de orden desconocido, empleamos la mayor frecuencia de muestreo disponible (véase Tabla 6.2) y una longitud de barrido considerable, tratándose de este tipo de transductores, asegurando así la separabilidad temporal entre impulsos.

En la Figura 6.15 se ha desglosado el sistema de filtrado expuesto en la Figura 3.5 en dos pasos: (i) $e(-t)*s(t)$ y (ii) el resultado de aplicar el filtrado $v(t)$ a la señal obtenida en el proceso anterior que se correspondería con $z(t)$ en el diagrama de la Figura 3.5.

En la primera gráfica se representan estas dos señales y aparecen las marcas temporales definidas como τ_n ,

FIGURA 6.14: Niveles obtenidos por el micrófono de medida para el test de memoria y orden, con un elemento activo a 1.18 m del array, para un índice de modulación del 100 %, con los parámetros indicados en la Tabla 6.2. Se ha tomado como constante de integración 125 ms ("FAST"). Se ha tomado como primera estimación el valor del fabricante de sensibilidad (52.68 mV/Pa con un factor de ganancia de 100 en el preamplificador), tomándolo como plano en la banda de interés.

FIGURA 6.15: Estimación del orden y la memoria del sistema a caracterizar. El punto reflejado es el mismo empleado para obtener las gráficas representadas en la Figura 6.14.

para los parámetros del barrido escogidos (véase Ecuación (3.36)). A su vez, en las siguientes gráficas se detallan los resultados de este test alrededor de las marcas temporales τ_n para los tres primeros órdenes.

A la vista de estos resultados, podemos asegurar que nos encontramos ante un sistema de memoria finita, de entono a los 2 ms de longitud, lo que equivaldría a 100 muestras a una frecuencia de muestreo de 50 kHz, y con distorsión apreciable de segundo orden. Si bien es cierto que esta prueba se ha realizado con un único elemento activo; esto implica que es probable que al encontrarnos a niveles de presión sonora relativamente bajos, el impulso de tercer orden quede enmascarado bajo el ruido inherente del sistema.

6.3.2. Influencia de la distorsión a lo largo de la distancia

En este experimento se tratará de corroborar los resultados físico expuestos en el Capítulo 2, más concretamente para confirmar el comportamiento del sistema ante una entrada compuesta por una modulación AM (véase Sección 2.2.3). A la hora de evaluar el sistema para un posible prototipo industrial es necesario conocer el comportamiento del mismo a lo largo de diferentes distancias, así como tener un conocimiento previo de la influencia del índice de modulación en estas regiones. Para evaluar esta influencia se ha recurrido al sistema de identificación expuesto en la Sección 3.2, pero aplicando un estudio espacial que separa las contribuciones de cada uno de los órdenes, como en Humphrey [2000]. Este estudio es similar al realizado en Aanonsen et al. [1984], vía simulación para un transductor de características similares al que se encuentra bajo estudio, pero que transmite en el medio acuático.

Aunque este método presuponga una estructura generalizada de Hammerstein y teniendo en cuenta que hasta aquí solo se ha demostrado que el sistema se puede clasificar como de orden y memoria finitos, esta estrategia puede servir como buena aproximación para modelar la distorsión introducida por el segundo orden del núcleo de Volterra, que en última instancia es la más representativa y la que de ser compensada al inicio de la cadena para obtener un sistema de comportamiento razonablemente lineal.

Por ello, y cómo la predistorsión a diseñar es única, es necesario verificar si la distorsión introducida se muestra consistente en la región de interés, cumpliéndose así las premisas expuestas por el modelo físico.

Para evaluar este fenómeno se parte del montaje de la Figura 6.12, en donde se varían los parámetros referentes a la distancia d y al índice de modulación m . Para simplificar el estudio, sólo se ha activado el elemento central del array. En la Tabla 6.2 se resumen los parámetros empleados en la medición.

Inspirado en el estudio realizado en Hsieh y Grochowski [1995], se propone una nueva definición de distorsión, basada en lo que los autores denominan “*distorsión basada en los núcleos de Volterra simplificados*”. Esta nueva definición de núcleo simplificado se corresponde únicamente con los coeficientes que representan las diagonales de los mismos. A pesar de la argumentación expuesta en Hsieh y Grochowski [1995] y Hsieh et al. [1995], el simplificar estos núcleos mediante algoritmos adaptativos básicos no asegura la identificación correcta del sistema, ya que se han de cumplir dos condiciones básicas: (i) que el sistema bajo estudio se comporte como un sistema generalizado de Hammerstein y (ii) que los algoritmos propuestos para obtener las diagonales de núcleos converjan hacia un valor adecuado. Por tanto, es necesaria una comprobación más exhaustiva del modelado de estas diagonales, para obtener así una representación de la distorsión fiable.

Aquí proponemos una definición basada en el algoritmo expuesto en la Sección 3.2.2 y, más concretamente, en ciertos pasos argumentados en la evaluación de modelos de *caja negra* (véase “*Evaluación de modelos de caja negra mediante tonos de frecuencia variable exponencial*”). En la Figura 3.15, en donde se describe paso a paso el algoritmo de identificación basado en barridos tonales exponenciales, destacan dos subbloques que forman el bloque denominado “*Diagnóstico, Identificación y Validación*”. Una vez realizada la segmentación correspondiente a cada uno de los impulsos, así como la proyección que relaciona las funciones $\{\hat{g}_n(t)\}$ con los núcleos estimados $\{\hat{h}_i(t)\}$ mediante la relación (3.58), se ha de realizar un proceso de validación del modelo estimado. La forma más directa de realizar esta validación es a través de una recuperación de la señal de entrada:

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^N \hat{h}_i(t) * x^i(t) = \sum_{i=1}^N \hat{y}_i(t) \quad (6.9)$$

A: Comparativa entre: (i) la densidad de potencia espectral de la señal capturada por el micrófono, (ii) su versión filtrada tras el procesamiento de la Figura 6.13, (iii) la señal recuperada tras el proceso de validación y (iv) el error cometido en la estima.

B: Contribución de los tres primeros órdenes frente a la señal original captada por el micrófono y la señal preprocesada según el esquema de la Figura 6.13

C: Contribución relativa de los tres primeros órdenes recuperados frente a la señal medida.

FIGURA 6.16: Resultado de la separación por órdenes de la señal captada por el micrófono, a 1.18 m, con un elemento activo habiendo sido excitado el sistema con un barrido tonal lineal.

El éxito de la identificación depende de la similitud entre esta señal recuperada y la obtenida por el sistema, así como de su naturaleza. En nuestro caso, al tener acceso a la entrada del sistema y poder reevaluar éste, lo ideal es emplear una señal de entrada más adecuada que la señal impuesta por el algoritmo de la Sección 3.2.2. En este caso, dado que el modelo sólo contempla la distorsión armónica pura, solo es necesario evaluar las combinaciones lineales de $\{\hat{h}_i(t)\}$ con potencias de la entrada. La mejor estima posible de la THD_R se obtendría al aplicar una batería de tonos como entrada $x(t)$ al sistema. Teniendo en cuenta que esta medida es en parte una estima informal de la distorsión, esta prueba se puede simplificar aplicando un barrido tonal lineal.

En la Figura 6.16 A se muestra el resultado obtenido por este proceso de identificación-validación para el sistema bajo estudio. Al igual que en el apartado anterior, se parte del montaje de la Figura 6.12, bajo las condiciones expuestas en la Tabla 6.2 y aplicando el preprocesado indicado en la Figura 6.13 y en la Tabla 6.3.

En este caso, como disponemos de frecuencia de muestreo superior a la impuesta por el propio proceso de modulación, disponemos de una referencia del piso de ruido del conjunto. Concretamente, a una distancia

FIGURA 6.17: Relación existente entre la norma de la salida correspondiente al núcleo de segundo y primer orden para diferentes índices de modulación m , a lo largo de la distancia, suponiendo que la mayor concentración de información de los núcleos se encuentra centrada a lo largo de su diagonal y por tanto es aplicable la simplificación de modelo de Hammerstein generalizado.

de 1.18 m, y para los siete elementos centrales activos, la señal de tensión recogida por el micrófono, $\hat{s}(t)$, es relativamente pequeña comparada con el ruido inherente al sistema. Sin embargo, a pesar de estas condiciones adversas, se observa que la señal recuperada, $\hat{y}(t)$ es similar a $s(t)$.

Al no tener acceso a los núcleos reales del sistema, a diferencia de los estimadores empleados en la Sección 3.2.3 definidos en (3.60), (3.61) y (3.62), valoraremos la calidad de la medida a partir de este error:

$$\Xi(f) = \text{PSD}\{s(t) - \hat{y}(t)\} \quad (6.10)$$

En vista del resultado obtenido, mostrado en la Figura 6.16 A, $\Xi(f)$ es del orden del ruido del sistema, con lo cual se puede dar por satisfecho el proceso de validación del algoritmo. Si consideramos aceptable el error de estima, nos encontramos en condiciones de separar las contribuciones de cada orden y compararlas con la señal original de salida:

$$\zeta_i(f) = \frac{|\hat{Y}_i(f)|}{|S(f)|} \quad (6.11)$$

Por desgracia, debido a que $\{x^i(t)\}$ no forma una base ortonormal, esta separación no es completamente lícita, aunque sí cumple los requisitos exigidos en el cálculo de THD clásico, aportado información adicional. A la vista de los resultados obtenidos en las Figuras 6.16 B y 6.16 C podemos afirmar que la mayor parte de la contribución se concentra en los dos primeros órdenes, ya $\zeta_1(f)$ se aproxima a 0 dB en gran parte de la banda y $\zeta_2(f)$ no es despreciable en ningún caso. Sin embargo, a la vista de $\hat{y}_3(t)$ y de $\zeta_3(f)$ la contribución de tercer orden se puede considerar despreciable o enmascarada por el ruido de la medición.

Teniendo en cuenta estos datos, podemos proceder a calcular una distribución espacial de la relación existe entre la parte de la onda secundaria lineal y la correspondiente a la distorsión de segundo orden. De nuevo, recurrimos a la señal recuperada mediante las diagonales de los núcleos de Volterra estimados para sintetizar la salida correspondiente a una entrada tonal de frecuencia variable lineal en el ancho de banda de interés (de 100 Hz a 24 kHz). Con esto garantizamos que ambas señales son comparables, ya que pertenecen al mismo dominio. A su vez, garantizamos una señal de entrada determinista que permite excitar el margen de forma adecuada, aproximándose a una respuesta plana. Como estas señales son comparables, podemos presentar la norma de ambas como un buen estimador de la relación entre las contribuciones de primer y segundo orden en el margen de frecuencias bajo estudio.

En la Figura 6.17 se representa el resultado obtenido para este estudio. Según el modelo teórico, superada la

distancia de absorción, que en este caso se puede estimar en 3.8373 m, a partir de los datos de la Tabla C.1 y aplicando la expresión (2.4). Este es el límite a partir del cual la interacción no lineal desaparece. Si observamos la Figura 6.17, este fenómeno se refleja en una estabilización de la relación entre la norma de la salida del núcleo de Volterra de segundo orden y el de primer orden. A su vez, podemos comparar este resultado con la distancia de Rayleigh, estimada a partir de (2.3), que en este caso se encuentra en torno a 3.8738 m². Como se cumple que esta es ligeramente mayor que la distancia de absorción, nos encontramos en el margen de actuación normal del *array paramétrico*.

Otro parámetro a tener en cuenta para determinar la viabilidad de una compensación generalizada del sistema es la estabilidad de la relación de las distorsiones al variar el ángulo de escucha. Hemos de comprobar si a diferentes ángulos la relación entre las potencias aportadas por los cada uno de los núcleos se mantiene estable. De no ser así, sería necesario introducir regiones de compensación diferentes, lo cual complicaría notablemente un posible diseño industrial con aplicación a la megafonía de alta calidad.

6.3.3. Directividad frente a la distorsión del sistema

Este mismo tipo de test puede ser empleado para comprobar si la distribución espacial de la distorsión es o no uniforme. En el experimento anterior hemos demostrado que a partir de la distancia de absorción, en el eje de radiación del altavoz, esta relación permanece constante. Sin embargo, para que sea viable un proceso de precompensación, es necesario que esta relación también permanezca constante con el ángulo de incidencia.

Para ello se ha realizado el siguiente análisis: hemos excitado la estructura con una señal cuyos parámetros se indican en la Tabla 6.2, empleando un montaje como el de la Figura 6.12. Manteniendo estos parámetros, hemos modificado los valores tanto del ángulo de escucha como de profundidad de modulación.

La estrategia para caracterizar la distorsión es similar a la seguida anteriormente: realizamos un análisis del sistema mediante tonos de frecuencia variable exponencial y presuponemos una estructura de Hammerstein generalizada. A pesar de que, como veremos a continuación, esta no es la estructura de bloques real que se esconde tras este sistema, si es cierto que posee suficiente información en las diagonales de los núcleos como para que este análisis ofrezca una idea relativamente acertada.

Tras haber aplicado la excitación empleamos un esquema de análisis como el propuesto en la Figura 6.13. De nuevo se hace necesario el uso de los filtros especificados en la Tabla 6.3. De esta forma únicamente tenemos en cuenta el efecto de la banda sónica. Como la excitación se produce de forma continuada, optamos por el sistema de sincronización detallado en la Sección 5.10.2. Una vez segmentadas tanto la entrada como la salida de excitación, y determinando el retardo relativo entre la fuente y el punto de escucha, nos encontramos en condiciones de estimar los parámetros que definen la estructura de la Figura 3.9, aplicando el análisis propuesto en la Sección 3.2.3.

Como se ya se demostró en el análisis realizado en la Sección 6.3.1, podemos considerar que el máximo orden a tener en cuenta para este sistema completo es el tercero, aunque, como se aprecia en la Figura 6.15 este último no es especialmente relevante y se encuentra perturbado por el nivel de ruido de la medida. Por tanto, nos centraremos en caracterizar las tres primeras ramas de la estructura de la Figura 3.9. Una vez obtenidos los parámetros que caracterizan estas ramas, nos encontramos en disposición de realizar un análisis frecuencial de cada uno de los bloques de memoria que componen este banco de filtrado, obteniendo así un estudio de la contribución de cada uno de los órdenes al variar el ángulo de observación del oyente.

En este caso hemos optado por excitar un único elemento, para poder relacionar el patrón de directividad ofrecido por el fabricante, a la frecuencia de portadora, con la directividad que posee la onda secundaria del *array paramétrico*. Al analizar la estructura de esta forma independizamos el análisis de la directividad del tipo de señal de entrada, ya que disponemos de la respuesta en frecuencia de cada uno de los órdenes sin necesidad de realizar un análisis tonal.

En las gráficas representadas en la Figura 6.18 se muestran los patrones de directividad obtenidos mediante este método para un índice de modulación $m = 100\%$ y con el elemento central del array activo. Aunque no

²Empleando las constantes reflejadas en la Tabla C.1, y estimando un radio efectivo de 9.2 cm.

A: Patrón de directividad para el primer orden a diferentes frecuencias, comparado on el patrón polar ofrecido por el fabricante a la frecuencia de portadora, 50 kHz.

B: Patrón de directividad para el segundo orden a diferentes frecuencias. De nuevo, se toma como referencia el patrón polar de 50 kHz

FIGURA 6.18: Patrones polares obtenidos para los dos primeros órdenes. El análisis expuesto se ha realizado para un coeficiente de modulación de 100 %, aplicando la configuración expuesta en la Tabla 6.2, y el preprocesado de la Figura 6.13, con los parámetros de la Tabla 6.3.

sea objetivo principal de esta Tesis determinar el comportamiento exhaustivo de esta estructura en cuanto a la directividad, este estudio sirve para corroborar la premisa de que un sistema de compensación único es viable en la zona de escucha.

Para ello, procedemos a analizar, por cada ángulo de escucha, cada una de las contribuciones de los dos órdenes más representativos. En caso de ser viable la aplicación de un único compensador, los patrones de directividad deberían ser similares. En la Figura 6.18 A se representa el valor de estos patrones de directividad para el primer orden, frente al patrón de directividad de la onda primaria a la frecuencia portadora. Podemos observar que el patrón obtenido a bajas frecuencias es inconsistente, mientras que a partir de 3 kHz aproximadamente, este patrón se acerca al obtenido en la onda primaria a la frecuencia portadora. Es importante destacar que, dado que estos patrones han sido determinados sin compensación alguna y con un único elemento activo, debido a la fuerte coloración del sistema, los niveles de baja frecuencia no son suficientemente representativos, de ahí la inconsistencia del patrón de directividad para la zona de graves.

Por otro lado, en la Figura 6.18 B se ha realizado el mismo análisis, en este caso para la contribución dependiente del segundo orden. Podemos observar aquí el mismo fenómeno que en el caso anterior, si bien es cierto que a alta frecuencia podemos considerar los patrones pertenecientes a la onda primaria y secundaria como similares.

De nuevo, es importante destacar que debido a la no ortogonalidad de la base empleada, el núcleo de segundo orden no es representativo de la respuesta a la frecuencia seleccionada. Es por ello, que aquí se muestra la respuesta en frecuencia de los núcleos de primer y segundo orden, que se corresponden con $h_1(t)$ y $h_2(t)$ del esquema de la Figura 3.9, ya que las medidas tradicionales de directividad no se pueden aplicar en este caso. Habitualmente excitamos el sistema con una señal monotonal y observamos el nivel obtenido para cada ángulo. Sin embargo en este caso, si procedemos de este modo, obtendríamos el nivel correspondiente a esta frecuencia de análisis, más el proporcionado por sus armónicos. Por todo ello hemos creído más conveniente la representación elegida.

Para realizar el análisis representado en la Figura 6.19 hemos procedido de distinta forma. En este caso hemos aplicado a la entrada del sistema un ruido blanco en la banda de interés. Se ha analizado la respuesta en frecuencia de cada uno de las ramas del modelo del Hammerstein generalizado estimado. Estas estimas se han realizado a diferentes ángulos y aplicando diferentes índices de modulación. Así tras haber obtenido, para cada par $m-\theta$ la estima de este tipo de modelo mediante el test descrito en la Sección 3.2.2, realizamos la excitación ruidosa y obtenemos señales sintetizadas que permiten extraer los valores representados en la Figura 6.19.

En las Gráficas A, C y D se muestra la respuesta en frecuencia obtenida para este análisis en cada una de las ramas del modelo de Hammerstein generalizado para cada uno de los ángulos estudiados, fijando el índice de modulación al 100 %. De ellas podemos extraer las siguientes conclusiones:

- I El núcleo de tercer orden es mucho menos representativo que los dos primeros, sea cual sea el ángulo de incidencia. Esto confirma el resultado obtenido en el test de memoria y orden expuesto en la Sección 6.3.1.
- II La contribución de $\hat{Y}_3(f)$ sigue la misma tendencia que las contribuciones de primer y segundo orden. Esto implica que es plausible tenerlo en cuenta a la hora de proponer el sistema de compensación.

Por otro lado, en las Gráficas B, D y F se analiza la influencia del índice de modulación sobre cada una de estas tres contribuciones. Así, para cada índice de modulación m representamos el valor en frecuencia de cada $Y_n(f)$ en los ángulos analizados. En este caso comprobamos que existe consistencia entre cada una de las medidas. Esto indica que la estrategia de compensación es factible y además podemos encontrar un compensador que incluso tenga en cuenta la profundidad de modulación como control de nivel del sistema. Sin embargo, debido a la característica de memoria y orden finitos que presenta el sistema, junto con la pérdida de potencia general que supone la disminución de la profundidad de modulación, este análisis deja de ser consistente para la contribución de tercer orden.

A: $\hat{Y}_1(f)$ para $m = 100\%$ a diferentes ángulos.

B: Diferencial del primer núcleo a otros índices m .

C: $\hat{Y}_2(f)$ para $m = 100\%$ a diferentes ángulos.

D: Diferencial del segundo núcleo a otros índices m

E: $\hat{Y}_3(f)$ para $m = 100\%$ a diferentes ángulos.

F: Diferencial del tercer núcleo a otros índices m

FIGURA 6.19: Caracterización de los núcleos en el dominio de la frecuencia para diferentes índices de modulación y ángulos de escucha.

Parámetro	Valor	Unidad
$V_{\text{portadora}}$	150	V_{pp}
V_{pol}	149.5	V
$\sigma_{V_{\text{pol}}}^2$	407	mV
f_c	50	kHz
f_s	400	kHz
m	60	%
d	3.78	m

A: Parámetros físicos del experimento.

Parámetro	Valor	Unidad
N	3	adim.
M	255	muestras
f_{MLS}	40	kHz

B: Parámetros del algoritmo de identificación.

TABLA 6.4: Parámetros empleados para la obtención de los núcleos de Volterra representativos del sistema mediante MLS.

6.4. Identificación mediante MLS

Para realizar este experimento aplicaremos la metodología expuesta en el Capítulo 5, ya que este tipo de identificación conlleva el uso de patrones diseñados a tal efecto y, por tanto, es necesario emplear tanto estrategias de sincronización complejas como una adaptación en frecuencia adecuada para conseguir una estima de los núcleos de Volterra correcta.

Al ser necesaria la intervención de un sistema de adquisición y generación de señales, el montaje empleado pasa a ser el mostrado en la Figura 6.20. Como ya se expuso en la Sección 5.9.1, debido a las deficiencias del sistema de generación de datos, es necesario intercalar: (i) un sistema de filtrado *antialiasing* analógico y (ii) un sistema de adaptación de impedancias que asegure la transmisión de potencia óptima entre la salida del DAQ y el amplificador. Para ello agregamos a la cadena de transmisión el circuito propuesto en la Figura 5.20. Al igual que en el montaje propuesto en la Sección 6.3, aplicamos a la salida, ya amplificada, una tensión de polarización continua aportada por el circuito de la Figura 5.11.

Es posible añadir a este montaje, a modo de monitorización externa, un osciloscopio que sirva de guía para mantener el margen dinámico de la medida del micrófono dentro de los valores deseables en el proceso de captación de la señal, aunque el instrumento virtual que controla el dispositivo de adquisición contiene su propio sistema de monitorización.

Es importante destacar en este punto que, dado que tanto el sistema de generación como el de adquisición han variado con respecto al experimento realizado en la Sección 6.3, el modelo identificado en este caso será diferente, ya que la fidelidad del sistema de instrumentación empleado en este montaje es menor.

Debido a la sensibilidad que presenta este algoritmo frente a las desviaciones de sincronización, aplicaremos lo expuesto en la Sección “*Sincronización mediante preámbulos: entradas MLS*”. Esto asegura que el sistema mantiene la sincronía en la señal de medición y la capturada por el micrófono. Mediante esta estrategia conseguimos que la ventana de análisis correspondiente a los núcleos a identificar recoja la información temporal adecuada.

A su vez, hemos aplicado los resultados de la Sección 6.3.1 para asegurar que la ventana es la adecuada, sin necesidad de sobrecargar el sistema (véase “*Coste computacional del algoritmo de identificación mediante MLS y estrategias de indexación*”). En nuestro caso, dadas las características especiales de este problema, no podemos excitar el sistema a la frecuencia de muestreo adecuada. Esto implicaría aplicar una $f_s = 2Nf_{\text{max}}$, y por tanto si quisiéramos analizar el sistema hasta el tercer orden necesitaríamos aplicar la señal MLS a una frecuencia de muestreo correspondiente a 120 kmuestras. Sin embargo, dado que la portadora se encuentra a tan sólo 50 kHz, aplicar este ancho de banda de excitación es inviable.

En este escenario, podemos optar por dos alternativas: trabajar a frecuencias de identificación correspondientes a las empleadas tradicionalmente en sistemas lineales, o bien acotar el ancho de banda de la señal de excitación a 20 kHz, aplicando filtros conformadores que aseguren el margen dinámico. En esta primera aproximación hemos optado por la primera vía, y pese a ser formalmente incorrecta, permite obtener una buena aproximación del sistema.

FIGURA 6.20: Montaje empleado para realizar la caracterización mediante MLS del sistema, empleando un módulo DAQ para generar y adquirir las señales de interés.

Como ejemplo, expondremos aquí los resultados obtenidos de aplicar este proceso de identificación a la estructura presentada en el Capítulo 5. Para realizar este experimento hemos escogido los siguientes parámetros:

- $M = 255$: Permite analizar la ventana de memoria que impusimos en la Sección 6.3.1, incluso aplicando una frecuencia de muestreo acorde con el sistema $N = 3$.
- $N = 2$ y $N = 3$: También hemos empleado aquí el otro parámetro obtenido mediante el experimento presentado en la Sección 6.3.1. En este caso, la aportación del tercer orden existe pero es mínima. Sin embargo, esta ha sido calculada para evitar el *aliasing* internúcleos.
- *Parámetros del filtro de conformador*: Se ha comprobado experimentalmente que, para este problema en concreto, prima la conservación del ancho de banda frente a la preservación del margen dinámico original. Ésto implica escoger valores de β pequeños a la hora de diseñar el filtro de conformador (véase Sección 5.9.3).

El resultado de este experimento, para los dos primeros órdenes, se refleja en la Figura 6.21. De estos resultados podemos extraer dos conclusiones principales: (i) el sistema no se comporta como sistema Hammerstein puro, (ii) ni se corresponde con un derivador de segundo orden con respecto a la envolvente de la entrada del sistema.

Los sistemas Hammerstein simples no contienen información relevante fuera de la diagonal. A su vez, todas las diagonales de estos núcleos se corresponden con réplicas perfectas ponderadas del núcleo de Volterra de primer orden. Sin embargo, en las Gráficas 6.21 c y d se observa que el los núcleos identificados no se corresponden con este tipo de estructuras. Más concretamente, los núcleos de segundo orden de los sistemas Hammerstein en el dominio transformado se corresponden con una matriz Toeplitz, que proviene de la transformada de Fourier de su diagonal. Sin embargo, la respuesta obtenida en la Gráfica 6.21 d pone en evidencia la existencia de una coloración previa que conforma esta respuesta. Este hecho, ya se había evidenciado en Ji y Gan [2012]. Sin embargo, con este experimento podemos corroborar este comportamiento sin necesidad de recurrir a estructuras adaptativas, que en un principio, únicamente persiguen la identificación de los núcleos pero con una estructura inicial impuesta.

El núcleo de tercer orden no ha sido representado debido a su poca relevancia en cuanto a su contribución a la salida, pero es importante recordar que éste ha debido ser calculado para poder aplicar el algoritmo de corrección (véase Yagüe-Jiménez et al. [2015]), así como para evitar el *aliasing* “internúcleos”.

Tradicionalmente los *arrays paramétricos* se han aproximado a sistemas de Hammerstein simples o generalizados. Esta suposición simplifica notablemente el proceso de identificación, ya que disminuye drásticamente el número de coeficiente a determinar. Además, se ha demostrado que esta primera simplificación facilita el proceso de igualación, permitiendo aplicar técnicas de *p*-compensación sin necesidad de recurrir a la aplicación de convoluciones no lineales (véase Apéndice A.1), lo que imposibilita su aplicación en sistemas de tiempo real. Si el sistema de identificación aplicado al *array paramétrico* impone una estructura de Hammerstein simple o generalizada y empleamos un algoritmo paramétrico adaptativo, como en el caso de Mu et al. [2013b], se obtiene un modelo que refleja la estructura de forma correcta si se emplean señales tonales en el test a la hora de verificar el modelado. Esto se debe fundamentalmente a dos fenómenos: (i) la memoria que conforma el núcleo de Volterra de segundo causante de la pérdida de su forma Toeplitz suele ser de menor longitud que la presente en el proceso de demodulación y además, (ii) la energía se concentra fundamentalmente en las diagonales del núcleo.

Es por ello, que al plantear el modelo paramétrico, éste obtiene como resultado una representación del sistema relativamente fiel. De hecho, en la Gráfica 6.21 d se puede observar la similitud entre el núcleo de Volterra de primer orden y la diagonal del segundo. Por el contrario, si imponemos señales complejas a la entrada de la estructura, se aprecian desviaciones considerables. Así mismo, esta aproximación introduce graves aberraciones a la hora de aplicar un sistema de precompensación.

Otra de las aproximaciones que suelen ser habituales a la hora de compensar el comportamiento de los *arrays paramétricos* es presuponer que la coloración que aplican estas estructuras a la entrada del sistema se corresponde con una derivada de segundo orden, partiendo directamente de la *expresión de Berktaç*. Sin embargo, en la Figura 6.22, en la que se encuentran representadas las diagonales de los núcleos identificados, en el dominio transformado, se aprecia claramente la desviación existente entre este modelo simplificado y la estimación realizada en este experimento. Lógicamente, esta desviación se debe en gran medida al propio comportamiento del transductor, así como del propio camino seguido por la onda sonora.

A: Núcleo de primer orden estimado, en el dominio temporal.

B: Módulo y fase del núcleo de primer orden estimado y transformado.

C: Núcleo de segundo orden estimado en el dominio temporal.

D: Módulo del núcleo de segundo orden estimado y transformado.

E: Núcleo de primer orden vs. diagonal del núcleo de segundo orden.

FIGURA 6.21: Núcleos de Volterra $\hat{\mathbf{H}}$ estimados mediante la técnica de la identificación de las MLS tras haber sufrido el proceso de corrección de continua.

FIGURA 6.22: Respuesta en frecuencia de las diagonales de los núcleos identificados para $m = 0.6$, frente al comportamiento ideal presentado por la *aproximación de Berkay*.

A: Señales involucradas en la medida.

B: Diagrama de bloques de las señales sintetizadas.

FIGURA 6.23: Diagrama de las señales involucradas en el proceso de identificación mediante MLS y señales procedentes del proceso de síntesis a partir de los núcleos $\hat{\mathbf{H}}$.

FIGURA 6.24: Resultados obtenidos mediante el análisis tonal, confrontando las medidas realizadas en sala frente a las sintetizadas mediante los núcleos de Volterra estimados.

Dado que el modelo no coincide exactamente con los modelos teóricos, es necesario realizar una evaluación objetiva que permita corroborar estos resultados. Para asegurar que los núcleos estimados en este experimento son adecuados, hemos recogido datos aplicando este mismo montaje, pero registrando la salida producida por señales de diferente naturaleza a la empleada en el proceso de identificación. En la Figura 6.23 se muestra la nomenclatura asociada a estas medidas y señales sintetizadas.

En este caso, hemos empleado señales tonales, ya que permiten observar la capacidad del algoritmo para identificar no linealidades, empleando herramientas de análisis sencillas sobre la señal medida y sintetizada.

En primer lugar se han aplicado señales tonales puras, en la banda de audio de interés (100 Hz a 20 kHz, en intervalos de 250 Hz), durante 500 ms. El resto de los parámetros para configurar el experimento se reflejan en la Tabla 6.4 A. Para comprobar la veracidad del modelo identificado, contrastamos el nivel obtenido en la medición, $y(t)$ y el sintetizado mediante los coeficientes de Volterra estimados, $\hat{y}$. Los resultados de este experimento se recogen en la Figura 6.24 A. En ésta, podemos observar que, en principio, el ajuste entre ambos sistemas es correcto dentro de la banda de interés. Es importante destacar que en este gráfico se recoge, para cada tono, tanto el valor de la señal a la frecuencia bajo estudio, como el valor de la frecuencia doble. El resultado obtenido es el del espectro acumulado con respecto a cada par de frecuencias. En la Figura 6.24 B se representan las contribuciones aportadas por cada núcleo identificado. En este caso, la potencia aportada por el núcleo de orden dos es baja debido al bajo índice de modulación aplicado. Aun así, esta distorsión es apreciable.

Sin embargo, este test no es suficientemente representativo como para validar al completo el sistema, ya que no refleja la influencia de la distorsión de intermodulación que aporta el sistema. Para validar si el modelo estimado representa adecuadamente al sistema aplicamos a la estructura una señal ligeramente más compleja, formada la combinación de dos señales tonales de frecuencia variable lineal, de 800 ms de duración. La primera de ellas excita el intervalo comprendido entre los 500 Hz y los 20 kHz, mientras que la segunda presenta una variación menor, de 500 Hz a 15 kHz. Como herramienta de análisis emplearemos el espectrograma, ya que nos permite observar la aparición de la distorsión armónica así como la distorsión de intermodulación que produce el sistema.

En la Figura 6.25 A se muestra el resultado de aplicar este tipo de análisis sobre la señal recogida directamente por el micrófono. En esta gráfica es patente tanto la aparición de la distorsión armónica de segundo orden así como la distorsión de intermodulación entre ambos tonos. A su vez, se aprecia ligeramente la presencia de distorsión armónica de tercer orden, sin embargo, ésta no es representativa dentro del sistema. Por ello, a partir de aquí no será tenida en cuenta. En la gráfica adyacente (Figura 6.25 B) se muestra el resultado sintetizado a partir de esta misma entrada, pero aplicándolo al modelo identificado para este índice de modulación, según el esquema de la Figura 6.23 B. Si observamos el resultado de ambos análisis, no se aprecian diferencias significativas.

Por tanto, a partir de estos dos test podemos asegurar que el modelo obtenido mediante este sistema de identificación es suficientemente fiable como para plantear un sistema de precompensación adecuado.

FIGURA 6.25: Espectrogramas normalizados obtenidos mediante medición y síntesis aplicado a la entrada una combinación de tonos variables lineales.

Este proceso de identificación se ha repetido para corroborar la consistencia de este modelo al variar el índice de modulación aplicado al array. Para ello, se ha realizado el mismo análisis que se ha descrito anteriormente, variando el índice de modulación desde el 60 % hasta el 100 %, con una granularidad de 5 %.

A modo de resumen, para analizar la consistencia del modelo, se presentan en la Figura 6.26 las diagonales de los núcleos de Volterra estimados para cinco índices de modulación diferentes. A partir de estos resultados, podemos asegurar que la estructura se comporta de forma similar al variar este parámetro. Este mismo análisis se puede repetir para toda la información al completo de los núcleos, tanto en su versión temporal como transformada, corroborando que la estructura subyacente en todos los casos es equivalente.

Todas estas estimas permiten proponer esquemas de p -compensación como el presentado en la Sección 4.1. Este tipo de estrategias ya ha sido verificado en diferentes publicaciones (véase Lee y Gan [2006], Mu et al. [2013b], Hatano et al. [2014], entre otras), todas ellas mediante simulación.

En este texto proponemos aprovechar la información disponible a partir de las estimas de los núcleos de Volterra del sistema para inferir la estructura subyacente del mismo. Por desgracia, no existe una metodología que permita extraer la estructura de bloques más simple que define al sistema a partir de estos núcleos. Sin embargo, en este caso, el núcleo de segundo orden presenta características concretas que permiten desprender esta estructura. Dado que existen coeficientes representativos fuera de la diagonal, podemos asegurar la existencia de memoria previa a la no linealidad y por tanto, la estructura más sencilla mediante la que se puede representar este sistema es la LNL.

Retomamos aquí lo expuesto en el Teorema 1, que se resume en la expresión (4.24). Si observamos detenidamente esta expresión y la confrontamos con las Gráficas 6.21 c y d podemos describir el comportamiento de este núcleo como el resultado del producto de Hadamard de dos matrices claramente diferentes: una Toeplitz y otra resultado del producto cartesiano de un vector. A partir del núcleo de segundo orden, podemos apreciar que el comportamiento de la primera memoria L se corresponderá con un suave filtrado paso banda, mientras que el color global del sistema se deberá principalmente al segundo bloque L.

Por otro lado la consistencia mostrada por los núcleos de Volterra estimados para los diferentes índices de modulación refleja la posibilidad de extender esta proyección a todos estos modelos, para así poder plantear un esquema de precompensación genérico.

A: Respuesta en frecuencia de los núcleos de primer orden identificados.

B: Respuesta en frecuencia de la diagonal del núcleo de segundo orden identificado.

C: Respuesta en frecuencia de la diagonal del núcleo de tercer orden identificado.

FIGURA 6.26: Respuesta en frecuencia de las diagonales de los núcleos identificados para diferentes profundidades de modulación, aplicando el algoritmo basado en MLS.

6.5. Compensación de los coeficientes estimados aplicando la proyección LNL

A la luz de los datos que arrojan los sistemas de identificación aplicados en este trabajo, los *arrays paramétricos* presentan un comportamiento que se considera inadecuado para su uso en sistemas acústicos de alta fidelidad. Básicamente, tanto el alto índice de distorsión así como la fuerte coloración presente en la onda secundaria hacen inviables estas estructuras para aplicaciones de altas prestaciones.

A lo largo de las últimas dos décadas diversos estudios han planteado tanto estrategias de modulación como de precompensación que minimizan estas aberraciones. Sirvan de ejemplo los trabajos expuestos a continuación: Lee y Gan [2006], Mu et al. [2013b], Hatano et al. [2014]. En estos estudios se presentan soluciones basadas en el empleo de versiones más o menos sofisticadas del sistema de p -compensación presentado en la Sección 4.1 de este trabajo. Como ya se mencionó en el Capítulo 4 esta estrategia presenta ciertas deficiencias, entre ellas, podemos mencionar: (i) la alta complejidad computacional exigida al sistema de compensación, ya que este método aplica múltiples filtrados de Volterra que, en la mayoría de los escenarios, impiden su uso en aplicaciones de tiempo real; por otro lado, (ii) los sistemas de p -compensación siempre aumentan el orden global de la estructura, causando productos de intermodulación y distorsiones armónicas de orden superior, que pueden ser apreciables por el oyente; además (iii) este tipo de estructuras de compensación requieren de una estima fiable de los núcleos de Volterra asociados al *array paramétrico* que en la mayor parte de los casos se estiman mediante algoritmos paramétricos adaptativos que imponen modelos que no encajan de forma adecuada con la estructura.

Aunque, como ya se mencionó en la Sección 6.4 y en el Capítulo 4, esta solución puede llegar a ser viable, siempre y cuando dispongamos de unas estimas robustas de $\hat{H}$, los datos arrojados por el proceso de identificación apuntan a la existencia de un modelo subyacente más propicio para plantear un esquema de compensación. En este punto, nos encontramos en condiciones de afirmar que las estimas de los núcleos de Volterra halladas mediante el método propuesto son lo suficientemente fiables como para servir de parámetro de diseño de un sistema de precompensación completo.

A su vez, el estudio realizado en la Sección 6.3 refleja que el comportamiento de esta estructura es lo suficientemente uniforme en la zona de escucha como para poder plantear un sistema de precompensación común para toda la región: una vez superadas las distancias que determinan la aparición del comportamiento del *array paramétrico*, las relaciones entre los núcleos de diferentes órdenes son lo suficientemente constantes como para plantear un sistema de compensación global, hecho que no había sido demostrado hasta ahora.

Partiendo de estas premisas y teniendo en cuenta que la variación de las relaciones existentes entre cada una de las aportaciones del sistema por los distintos núcleos dependen, principalmente, del índice de modulación, plantearemos aquí las distintas proyecciones LNL correspondientes a cada uno de los modelos identificados, dependientes de m , a una determinada distancia y en el eje de radiación del sistema.

Por desgracia, la fuerte coloración que presenta el sistema implica la necesidad de un aumento de la potencia de emisión del mismo. Por tanto, para llevar a cabo este tipo de compensación sería necesario rediseñar por completo el prototipo bajo prueba. Sin embargo, a continuación se presentarán distintas simulaciones que servirán como guía para demostrar la capacidad de este algoritmo para compensar tanto la distorsión como el color presentes en la estructura.

En primer lugar, se realizan las correspondientes proyecciones LNL de los núcleos estimados para, posteriormente, diseñar y analizar un sistema de compensación adecuado para uno de estos modelos en concreto.

Esta metodología implica dos pasos: (i) definir la estructura LNL adecuada partiendo del algoritmo propuesto en la Sección 4.2.1 y (ii) calcular la estructura de compensación adecuada siguiendo el protocolo expuesto en la Sección 4.2.2.

6.5.1. Proyección LNL de los núcleos de Volterra estimados

El primer paso a la hora de diseñar el sistema de precompensación basado en la estructura LNL es obtener los parámetros $g_1(t)$, $g_2(t)$ y $\mathcal{N}(x)$ que la definen. Esta proyección ha de asegurar que mantiene la fidelidad del modelo propuesto, ya que podemos aplicar este tipo de proyección a cualquier sistema descrito mediante sus núcleos de Volterra $\mathbf{H}$, sin embargo, si este no esconde una estructura subyacente de este tipo no describirá de forma adecuada al sistema bajo estudio.

Por tanto, para verificar la hipótesis planteada partiremos de un esquema de síntesis como el expuesto en la Figura 6.27: daremos por válida la proyección si conseguimos cumplir el objetivo $\hat{y}(t) \approx \tilde{y}(t)$, ya que esta suposición implicará que la proyección LNL es representativa del sistema.

FIGURA 6.27: Síntesis de la señal de salida del sistema mediante los núcleos de Volterra identificados y mediante la proyección LNL calculada.

Para ejemplificar la veracidad de este proceso partiremos de la estima de los núcleos de Volterra expuesta en la Sección 6.4; por tanto, bajo las condiciones impuestas en la Tabla 6.4 A. Como quedó demostrado en los resultados expuestos en las Figuras 6.24 A, 6.25 A y 6.25 B podemos considerar que estos núcleos de Volterra identificados, $\hat{\mathbf{H}}$, cumplen con la condición de veracidad en la síntesis, ya que se cumple que la señal recogida por el micrófono en estas condiciones, $y(t)$, es aproximadamente igual que la señal sintetizada, $\tilde{y}(t)$.

Por tanto, a partir de estos datos nos encontramos en condiciones de aplicar el algoritmo expuesto en la Sección 4.2.1, que permite extraer los parámetros que definen la estructura LNL mediante la proyección de los núcleos de Volterra que definen a un sistema. Debido a la particularidad del problema, que implica una factorización del tipo Toeplitz–Vandermonde, hemos de recurrir a un estudio de los núcleos de Volterra transformados en dos fases: (i) en la primera de ellas se estimará tanto el módulo de los dos bloques lineales, $|G_1(f)|$ y $|G_2(f)|$, como los coeficientes de la no linealidad, $\mathcal{N}(x)$, mientras que (ii) en la segunda se determinará la fase de ambas memorias de la estructura, $\angle\{G_1(f)\}$ y $\angle\{G_2(f)\}$.

Como ya se mencionó en la Sección 4.2.1, esto supone una extensión del algoritmo propuesto en Kibangou y Favier [2007], ya que relajamos todas las condiciones impuestas por estos autores y que imposibilitan la aplicación de su algoritmo en nuestro caso.

Tras el análisis realizado en la Sección 6.4, y observando los resultados obtenidos en las Figuras 6.25 A y 6.26 C, podemos obviar la presencia del núcleo de tercer orden, debido a la baja representatividad que supone a la salida del sistema real. Por tanto, únicamente emplearemos las estimas de los núcleos de Volterra de primer y segundo orden, y ajustaremos la no linealidad de la estructura LNL, mediante un polinomio de segundo grado definido por: $\mathcal{N}(x) = ax + bx^2$.

Bajo todas estas premisas procedemos a determinar el módulo de los filtros que componen los bloques que contienen la información de memoria en la estructura LNL. Para ello recurrimos a las relaciones expuestas en la Sección “Análisis del módulo de los filtros LNL”. Dado que sólo tendremos en cuenta los dos primeros órdenes, para obtener los módulos buscados aplicamos la expresión (4.37), particularizada para $p = 2$:

$$\log(|\mathbf{F}_2|) = \log|\hat{\mathbf{H}}_2| - \log \left| \bigotimes_{s=1}^2 \hat{\mathbf{H}}_1 \right| = \log|\hat{\mathbf{H}}_2| - \bigoplus_{s=1}^2 \log|\hat{\mathbf{H}}_1| \quad (6.12)$$

en donde $\log|\hat{\mathbf{H}}_1|$ y $\log|\hat{\mathbf{H}}_2|$ representan el análisis homomórfico aplicado sobre los dos núcleos de Volterra estimados en la Sección 6.4.

Como quedó demostrado en la Sección “Análisis del módulo de los filtros LNL”, existe una matriz $\mathbf{P}$ que relaciona

$\log(|F_2|)$ con el módulo del segundo bloque lineal de la estructura LNL, mediante la expresión (6.13):

$$\log(|G_2|) = \mathbf{P}^\dagger \text{vec} \{ \log(|F_2|) \} \quad (6.13)$$

Dado que el núcleo de primer orden de esta estructura se corresponde con la convolución de los dos filtros $g_1(t)$ y $g_2(t)$, ponderados por el coeficiente a , aplicando la relación (4.42) obtenemos el valor el módulo del primer bloque lineal:

$$\log(|G_1|) = \log(|H_1|) - \log(|G_2|) - \log|a| \mathbf{1}_M \quad (6.14)$$

Como tenemos un grado de libertad en cuanto a la determinación de los coeficientes de la no linealidad, a y b , imponemos que $a = 1$.

Para comprobar si la premisa de la estructura subyacente del sistema se corresponde con una cadena LNL, al menos a nivel de módulos en el dominio transformado, hemos de recuperar los núcleos de Volterra que se corresponderían a la cadena LNL. Por tanto, aplicamos la relación (4.33), particularizada para $p = 2$, para obtener el módulo del nuevo coeficiente de Volterra correspondiente a la estructura LNL. Esta expresión, en su versión simplificada matricial, se puede reescribir como:

$$\log|\tilde{H}_2| = \bigoplus_{s=1}^2 \log(|G_1|) + S [\log(|G_2|)] + \log|b| \mathbf{U}_{M,M} \quad (6.15)$$

en donde $\mathbf{U}_{M,M}$ representa a la matriz cuadrada “todo unos” de tamaño $M \times M$ y $S [\log(|G_2|)]$ es la versión reflejo de la matriz Toeplitz del vector $\log(|G_2|)$, según su eje vertical. Aplicando (6.15) podemos obtener el valor del coeficiente b , que en este caso concreto se corresponde con un valor de 2.1989.

En la Figura 6.28 se muestran los resultados obtenidos mediante este análisis. La Gráfica 6.28 A representa, por un lado las estimas calculadas para $\log|G_1(f)|$ y $\log|G_2(f)|$ imponiendo $a = 1$, frente al valor de núcleo de primer orden identificado en la Sección 6.4 y transformado homórficamente, $\log|\tilde{H}_1(f)|$, y el núcleo de primer orden correspondiente a la proyección LNL, equivalente en este caso a $\log|\tilde{H}_1(f)| = \log|G_1(f)| + \log|G_2(f)|$. En la Gráfica 6.28 A podemos observar el ajuste existente entre los valores de estos dos núcleos de primer orden $\log|\tilde{H}_1(f)|$ y $\log|\tilde{H}_1(f)|$.

Sin embargo, y dado que el valor de $\log|G_1(f)|$ se obtiene de la relación trivial (6.14), es más interesante estudiar el ajuste existente entre el núcleo de segundo orden identificado y transformado, $\log|\tilde{H}_2(f_1, f_2)|$ y el correspondiente a la estructura LNL $\log|\tilde{H}_1(f_1, f_2)|$. Para ello, observamos las Gráficas 6.28 B y C, en donde se representan las transformaciones de estos dos núcleos. Teniendo en cuenta que los valores obtenidos mediante ambos métodos, podemos dar por válida esta proyección, al menos, en cuanto al módulo se refiere.

Con estos elementos, queda únicamente determinar la fase de los dos filtros que componen la estructura LNL para obtener la proyección completa. Por desgracia, como en este caso el objetivo perseguido es el de realizar un sistema de compensación que permita, en la medida de lo posible, hacer transparente el sistema completo, la caracterización de estas fases es determinante. Como ya se observó en la Sección 4.2.2, para plantear los filtros inversos necesarios para construir la estructura de compensación, es obligado disponer tanto de los datos de módulo como de fase de ambos filtros L.

Para ello aplicaremos lo expuesto en la Sección “Análisis de la fase de los filtros LNL”. El principal problema que plantea la extracción de estos datos es la propia periodicidad implícita en la fase. Por tanto, aquí no es posible definir un sistema matricial para recuperar los valores necesarios. Para solventar este problema emplearemos la estrategia de la diagonal de los núcleos de Volterra combinada con la pseudolinealidad de $g_2(t)$, impuesta en la expresión 4.56.

Aplicamos, por tanto, la relación impuesta en la expresión 4.35, particularizada para $p = 2$. Empleamos en análisis únicamente las relaciones de fase existente entre los núcleos de primer y segundo orden:

A: Módulo de los filtros de la estructura LNL calculados para los núcleos estimados en la Sección 6.4.

 B: Análisis homomórfico del núcleo de segundo orden a partir de las estimas de $|G_1(f)|$ y $|G_2(f)|$ mediante (6.15).

 C: Módulo del núcleo de orden dos recuperado a partir de las estimas de $|G_1(f)|$ y $|G_2(f)|$ mediante (6.15).

FIGURA 6.28: Obtención de los módulos de la estructura LNL a partir de los módulos de los núcleos de Volterra del sistema identificado mediante MLS en la Sección 6.4.

$$\angle \{F_2\} (Q_\pi) = \angle \{\hat{H}_2\} - \bigoplus_{s=1}^2 \angle \{\hat{H}_1\} (Q_\pi) \quad (6.16)$$

en donde la relación definida mediante las sumas de módulo π refleja la indeterminación de la fase debida a su periodicidad.

Obtenida la matriz $\angle \{F_2\}$, extraemos su diagonal para imponer la condición (4.53). Ésta condición, unida a la condición de pseudolinealidad (véase (4.56)) permite obtener una estima adecuada de la fase del segundo filtro. A partir de este dato, $\angle G_2(f)$, podemos inferir directamente el valor de la fase del primer filtro, $\angle G_1(f)$ dada la relación existente entre la fase de estos dos bloques y la presente en el núcleo de Volterra de primer orden:

$$\angle \{\hat{H}_1(f)\} = \angle \{G_1(f)\} + \angle \{G_2(f)\} \quad (6.17)$$

Es importante destacar que este par de funciones es una de las múltiples soluciones válidas para este problema, ya que la periodicidad de la fase junto con el condicionamiento del problema permite la generación de una familia de soluciones válidas que cumplen con la condición impuesta mediante la igualdad de la convolución circular y lineal (véase (4.55)).

FIGURA 6.29: Memoria resultado de la proyección LNL de los núcleos de Volterra estimados en la Sección 6.4.

FIGURA 6.30: Resultado de la prueba tonal aplicado al array paramétrico bajo las condiciones impuestas en la Tabla 6.4.A, contrastado con las salidas sintetizadas a partir de los núcleos identificados y su correspondiente proyección LNL

En la Figura 6.29 se refleja una de estas posibles soluciones, en las que a partir de las definiciones tanto en módulo como en fase de los filtros propuestos, así como de los coeficientes de la no linealidad, a y b , nos encontramos en disposición de definir por completo la estructura LNL.

Al igual que en el caso del proceso de identificación, es necesario realizar un test de fidelidad sobre la estructura proyectada. Para ello procedemos del mismo modo que en la Sección 6.4: sintetizaremos aplicando el modelo de la Figura 6.27 B con los parámetros $g_1(t)$, $g_2(t)$, a y b calculados para obtener la señal $\hat{y}(t)$, confrontándola con la medida real. De nuevo aplicamos aquí dos test basados en señales tonales.

El primero de ellos se corresponde con el análisis realizado para calcular la respuesta en frecuencia mediante una batería de tonos (véase Sección 6.4). Los resultados se recogen siguiendo la misma metodología aplicada en la Sección 6.4. Si contrastamos las tres gráficas obtenidas y comparamos el valor de las salidas sintetizadas observamos que la señal recuperada mediante la proyección LNL se ajusta correctamente a los valores obtenidos mediante la mediación. De hecho, los valores obtenidos mediante esta síntesis se ajustan mejor que los obtenidos mediante los núcleos de Volterra. Este fenómeno es debido a que, al realizar la proyección sobre la estructura, y dado que la premisa de una estructura de sándwich es correcta, eliminamos cierto ruido existente en los núcleos identificados $\hat{\mathbf{H}}$.

Para realizar el segundo test, aplicamos de nuevo a la proyección LNL la señal compuesta por dos barrios tonales empleada en la Sección 6.4. De este modo, volvemos a verificar mediante el espectrograma de la señal sintetizada la valía del modelo.

El resultado de este análisis se muestra en la Figura 6.31. Con el fin de facilitar la comparativa entre los

FIGURA 6.31: Espectrogramas normalizados obtenidos mediante medición y a partir de la síntesis de la señal $\tilde{y}$ para una entrada formada por una batería tonal.

espectrogramas se ha representado de nuevo el análisis aplicado a la señal procedente de la medición en la Gráfica 6.31 A.

Al igual que en el análisis representado en la Figura 6.25 podemos observar que la señal sintetizada a partir de la batería tonal, aplicando el esquema de la Figura 6.27 B, con los parámetros obtenidos aquí, representa con suficiente fidelidad el comportamiento real del *array paramétrico* caracterizado. Debido a la simplificación propuesta en el caso de la distorsión de tercer orden, ésta es ligeramente apreciable en la Gráfica 6.31 A pero no se encuentra representada mediante este modelo. Como ya se comentó anteriormente, esta aproximación puede considerarse lícita debido a la poca importancia de la contribución del núcleo de tercer orden a la salida.

Gracias a la proyección LNL conseguimos simplificar considerablemente la representación del sistema no lineal subyacente bajo la estructura del *array paramétrico*, lo que permite plantear esquemas de precompensación ligeros y de fácil diseño.

Al igual que en el caso del proceso de identificación presentado en la Sección 6.4, y dada la similitud existente entre las estimas de $\hat{\mathbf{H}}$ para diferentes profundidades de modulación m (véase Figura 6.26), podemos extender este mismo estudio para calcular las proyecciones LNL correspondientes a diferentes valores de este parámetro.

Los resultados obtenidos en este caso se encuentran resumidos en la Figura 6.32, en donde se muestran los valores de los filtros estimados al variar este parámetro. A su vez, se ha representado la relación existente entre los coeficientes a y b de la no linealidad intermedia. Como se observa en las Figuras 6.32 B y C, esta proyección aporta datos consistentes, lo que apunta a una validez del modelo propuesto siempre y cuando mantengamos el tipo de modulación AM.

Sin embargo, es necesario destacar que tanto los núcleos de Volterra estimados como sus proyecciones correspondientes pierden fidelidad a la hora de sintetizar la señal de salida a medida que aumenta la profundidad de modulación. Esto es debido, en su mayor parte, al proceso de filtrado necesario para ajustar el margen frecuencial a las condiciones de modulación impuestas. Sin embargo, estas estimas presentan un comportamiento lo suficientemente consistente para asegurar que la proyección LNL supone una buena representación de la estructura a pesar de la variación del índice de modulación. Básicamente, podemos asegurar que los sistemas lineales que compondrían esta estructura $g_1(t)$ y $g_2(t)$ permanecen prácticamente constantes, mientras que la variación más significativa se aprecia, principalmente, en el carácter de la no linealidad, ya que a medida que aumentamos el índice de modulación adquiere mayor importancia el término cuadrático dentro de la red.

A: Relación entre los primeros dos coeficientes de la no linealidad de la proyección LNL para distintos índices de modulación.

B: Módulo de la respuesta en frecuencia del primer filtro de la estructura LNL.

C: Módulo de la respuesta en frecuencia del primer filtro de la estructura LNL.

FIGURA 6.32: Respuesta en frecuencia de los filtros que componen las proyecciones LNL a distinto índices de modulación.

6.5.2. Diseño del sistema de precompensación a partir de la estructura LNL

Un vez se dispone de los datos correspondientes a la proyección LNL de los núcleos de Volterra identificados que describen el funcionamiento del array con cierta fiabilidad, nos encontramos en condiciones de diseñar el precompensador adecuado que elimine, en la medida de lo posible, la distorsión introducida por la no linealidad presente en el *array paramétrico*. Para realizar este diseño se tendrán en cuenta las estrategias expuestas en la Sección 4.2.2.

Uno de los problemas fundamentales que presentan estas estructuras es la fuerte ecualización que sufre la baja frecuencia. Por desgracia este fenómeno condiciona el funcionamiento completo de la estructura. En esta Sección planteamos un modelo de compensación teórico, debido a la imposibilidad de alcanzar los niveles necesarios para aplicar la precompensación a la estructura real. Sin embargo, existe la posibilidad de acotar el margen frecuencial del sistema, como se discutirá más adelante.

Si observamos detenidamente los resultados presentados en las Figuras 6.32 B y B, aunque la tendencia seguida por $g_1(t)$ y $g_2(t)$, en términos generales, posea una coloración complementaria, en baja frecuencia ambos filtros aplican una fuerte ecualización a la señal de entrada. Para contrarrestar esta pérdida de potencia será necesario generar señales a la salida del precompensador con un realce de bajos considerable.

Para ejemplificar el diseño de la estructura de precompensación partiremos de nuevo de la proyección generada a partir de los núcleos identificados cuando el sistema ha sido configurado a partir de los datos de la Tabla 6.4 A. Evaluaremos la capacidad de precompensación aplicando los modelos descritos en la Figura 6.33. Como ya se demostró en la Sección 6.5.1 mediante los experimentos resumidos en las Figuras 6.30 y 6.31, la estructura definida por los coeficientes de Volterra $\hat{\mathbf{H}}$ y la proyectada poseen comportamientos similares, si bien es cierto que la primera de ellas contempla la existencia de una ligera contribución de tercer orden.

El primer paso a la hora de plantear sistema precompensador consiste en diseñar los filtros inversos correspondientes a los bloque lineales que forman la estructura LNL. Éstos determinan tanto el color como el margen dinámico exigido al sistema para poder plantear un modelo libre de distorsión y con el menor color posible. Para diseñar este par de filtros partiremos de la expresión (4.60) que sirve para determinar la respuesta en frecuencia del filtro inverso regularizado. Mediante este tipo de diseño de filtrado inverso aseguramos una recuperación de la señal tanto en módulo como en fase. En la Figura 6.34 se muestra el resultado obtenido para los filtros estimados en la Sección 6.5.1. Debido a las características especiales de los *arrays paramétricos*, que obligan a acotar el margen frecuencial de la entrada del sistema para impedir que la onda primaria interceda en el margen audible, es recomendable diseñar el filtro correspondiente a $g_1^{-1}(t)$ de tal forma que elimine las frecuencias superiores al margen audible. Sin embargo, a la hora de diseñar $g_2^{-1}(t)$ es importante no conformar las frecuencias superiores a los 20 kHz, ya que la no linealidad del módulo precompensador tiene en cuenta este margen frecuencial.

El comportamiento de estos dos filtros inversos propuestos en módulo pone en evidencia la necesidad de amplificar la baja frecuencia. Sin embargo el control del margen dinámico impuesto en la Sección 4.2.2 introduce como nuevo parámetro de diseño la aplicación de una frecuencia de corte que impida la transmisión en baja frecuencia. Este parámetro se encuentra sujeto a las capacidades de amplificación del sistema real. En este caso, y

FIGURA 6.33: Esquemas aplicados para comprobar la síntesis de señal aplicando el precompensador a la estructura del array paramétrico.

A: Filtro inverso $g_1^{-1}(t)$ en el dominio temporal. B: Filtro inverso $g_1^{-1}(t)$ en el dominio transformado. C: Filtro inverso $g_2^{-1}(t)$ en el dominio temporal. D: Filtro inverso $g_2^{-1}(t)$ en el dominio transformado.

FIGURA 6.34: Filtros inversos estimados para el diseño de la estructura precompensadora.

Parámetros	Valor	Unidades
f_s	80	kHz
m	60	%
T	800	ms

A: Parámetros generales.

1 ^{er} tono variable			2 ^o tono variable		
Parámetros	Valor	Unidades	Parámetros	Valor	Unidades
f_0	500	Hz	f_0	500	Hz
f_1	20	kHz	f_1	15	kHz

B: Parámetros de las señales tonales de frecuencia variable.

TABLA 6.5: Parámetros empleados para evaluar la presencia de distorsión armónica y de intermodulación en el sistema precompensado de manera informal.

A: Densidad espectral de potencia a la entrada del sistema y a la salida del sistema precompensador.

B: Salidas correspondientes a los modelos de las Figuras 6.33 A y B.

FIGURA 6.35: Densidades espectrales de potencia de las principales señales involucradas en el proceso de precompensación, siguiendo los modelos expuestos en la Figura 6.35 y para una entrada tonal de frecuencia creciente linealmente, comprendida entre los 500 Hz y los 20 kHz.

dado que aquí planteamos un diseño teórico, cuyo único objetivo es el de reflejar las capacidades de disminución de distorsión de este modelo, no acotaremos este margen, sin embargo, en un diseño realista se ha de tener en cuenta.

Para que la estructura del precompensador quede definida por completo falta determinar el comportamiento de la no linealidad $\mathcal{N}_2$. Debido a las condiciones impuestas referentes al margen dinámico, tanto la entrada del *array paramétrico* como a la salida del filtro $g_1(t)$, que aseguran que la señal de entrada al bloque $\mathcal{N}_1$ es estrictamente positiva (supuesto se han cumplido las condiciones impuestas en (4.61a) y (4.61b)), basta con imponer la condición $\mathcal{N}_1(\mathcal{N}_2(x)) = x$ para diseñar el bloque $\mathcal{N}_2$.

Para corroborar la efectividad del sistema de compensación propuesto aplicaremos señales de distinta naturaleza a los modelos propuestos en la Figura 6.33. A partir de estas señales sintetizadas podremos determinar las capacidades de este sistema de precompensación.

En primer lugar, para valorar la capacidad de ecualización del sistema, se aplica una señal tonal de frecuencia variable lineal. De este modo podemos analizar si esta estructura permite diseñar un sistema “acústicamente transparente”, al menos en un margen frecuencial considerable, con respecto a los límites auditivos humanos. Además, este test nos permite valorar las pérdidas introducidas por el sistema de precompensación. Para realizar esta prueba aplicaremos la señal definida mediante los parámetros expuestos en la Tabla 6.5 para el “1^{er} tono variable”.

A: Espectrograma correspondiente al modelo de la Figura 6.33 A. B: Espectrograma correspondiente al modelo de la Figura 6.33 B.

FIGURA 6.36: Espectrogramas normalizados obtenidos mediante síntesis a partir de los modelos presentados en la Figura 6.33, para una entrada compuesta por las señales descritas mediante los parámetros de la Tabla 6.5 B.

Esta señal se introduce en los dos modelos propuestos en la Figura 6.33, obteniéndose las señales $z(t)$, $\tilde{x}(t)$ y $\hat{x}(t)$. La Gráfica 6.35 A permite realizar una comparativa entre la señal de entrada al sistema completo y la envolvente³ que excitaría el *array paramétrico*. Para facilitar la visualización se han normalizado mediante la misma constante los niveles de ambas señales. Queda aquí patente la necesidad de una coloración previa en la señal $z(t)$ que permita compensar la equalización que sufre la señal en el proceso de demodulación acústico.

Debido a la coloración introducida por el array, esta señal de entrada $z(t)$ presenta un acusado refuerzo en los graves. Lógicamente, estos niveles no son admisibles en circunstancias normales. A la vista de estos datos, en una situación realista se debería comenzar el proceso de igualación a partir de 1 kHz, aproximadamente. Esto implicaría una pérdida progresiva de graves por debajo de este valor. Sin embargo, dada la naturaleza de la no linealidad $\mathcal{N}_2$, esta pérdida frecuencial no disminuye considerablemente el rechazo de la distorsión no lineal. Mediante la relación existe entre las señales $z(t)$ y $x(t)$ podemos inferir una pérdida de aproximada de 15 dB en el sistema final, dependiendo de la frecuencia de corte escogida para aplicar el proceso de igualación y sin exigir al transductor final un aumento de potencia sonora mayor 6 dB. En cualquier caso, estos valores son orientativos, ya que sería necesario reevaluar el proceso de identificación para la cadena completa con el fin de obtener datos fiables de consumo.

Sin embargo, este experimento sirve para evaluar las condiciones de funcionamiento del sistema completo a nivel teórico. En la Gráfica 6.35 B se representa la densidad espectral de potencia normalizada correspondiente a la salida de los sistemas de la Figura 6.33 frente a la entrada propuesta en este test. Estos datos demuestran la fiabilidad de este proceso de equalización no lineal y la capacidad de igualación del sistema propuesto. De hecho, en la Figura 6.35 B se puede observar que, para el caso de la señal sintetizada mediante el modelo de la Figura 6.33 B, $\hat{x}(t)$, las diferencias son mínimas, en la banda de interés.

Otra de las exigencias claves que ha de cumplir la estructura de precompensación es la de la reducción de la distorsión no lineal que genera el *array paramétrico*. Al igual que en el caso de la evaluación del sistema de identificación propuesto, recurriremos al empleo de los espectrogramas de las señales sintetizadas $\tilde{x}(t)$ y $\hat{x}(t)$, siendo la señal de entrada una combinación de tonos variables, para poner de manifiesto las posibles distorsiones armónicas y de intermodulación presentes en el sistema global. En este caso emplearemos como entrada la combinación de los dos tonos descritos mediante los parámetros de la Tabla 6.5 B, ponderada por 0.5, con el fin de mantener el margen dinámico a la entrada del sistema.

El resultado de este análisis se recoge en la Figura 6.36. Aquí se aprecia que la señal $\tilde{x}(t)$ se encuentra prácticamente libre de distorsión no lineal, mientras que $\hat{x}(t)$ únicamente presenta productos relacionados con el

³En esta prueba se enfrentan la envolvente y la entrada con el fin de facilitar la comparativa, obligando así a ambas señales a permanecer en banda base.

FIGURA 6.37: Test de no linealidad aplicado a la salida del sistema definido por los núcleos de Volterra $\hat{\mathbf{H}}$ y a la salida de la cadena de predistorsionador con este mismo sistema.

tercer orden, que pueden considerarse por debajo del nivel de ruido en una situación realista.

Como prueba final para comprobar la fiabilidad de este diseño compensador, aplicaremos aquí el test de no linealidad propuesto en la Sección 3.2.1. Como ya se corroboró en las Secciones 4.2.2 y 6.3.1, este test asegura la detección de no linealidades en cualquier sistema de memoria y orden acotado. Este test es idóneo para valorar la capacidad de rechazo de órdenes superiores mediante esta estructura, ya que este diseño cumple con estas dos condiciones. Para realizar el test de no linealidad aplicaremos una señal que cumple con los parámetros especificados en la Tabla 6.6.

Parámetros	Valor	Unidades
T	800	ms
f_0	500	Hz
f_1	20	kHz
f_s	80	kHz

TABLA 6.6: Parámetros empleados en el test que valora el rechazo de la distorsión para el sistema de precompensación propuesto.

El resultado se muestra en la Figura 6.37. En estas gráficas se compara la salida de este test, aplicado al sistema definido por los núcleos de Volterra estimados en la Sección 6.5.1 para una profundidad de modulación del 60 %, $\hat{\mathbf{H}}$, con la salida del sistema precompensado. Por tanto, contrastamos la no linealidad de la salida del sistema planteado en el modelo de la Figura 6.27 A con la del modelo de la Figura 6.33 B.

Como se puede observar en la gráfica centrada alrededor de la marca temporal τ_2 , que recordemos, representa la potencia de la distorsión de segundo orden, la disminución de la distorsión es considerable. De hecho, podemos aproximar esta atenuación de los términos no lineales mediante la relación existente entre la norma de la ventana representativa (2 ms alrededor de τ_2) para ambas señales. Estos datos son comparables ya que los resultados de ambos test han sido previamente normalizados con respecto de la potencia relacionada con el término lineal. Esta relación arroja una pérdida de alrededor de -21 dB, lo que indica que este compensador es capaz de disminuir la distorsión de tal forma que ésta sea del orden del piso de ruido. Este fenómeno ya se evidenciaba en los espectrogramas representados en la Figura 6.36.

Para comprobar la consistencia de este tipo de metodología al variar el índice de modulación del sistema, se ha repetido este diseño para las estructuras LNL representadas en la Figura 6.32. Una vez diseñados estos

A: Mínima diferencia entre el nivel del segundo armónico y el tono fundamental en el margen frecuencial de estudio.

B: Máximo valor absoluto del rizado observado a la salida del sistema global en la prueba tonal.

FIGURA 6.38: Resultado de la aplicación de una prueba tonal, mediante una batería de tonos puros para las distintas estructuras precompensadas.

precompensadores han sido verificados aplicando un estudio tonal similar al empleado en la comparativa expuesta en la Sección 2.3.3 para determinar la THD_R .

En la Gráfica 6.38 A se representa la diferencia existente entre el nivel determinado para el tono principal, frente a su armónico. Como modelo de referencia se ha empleado la estructura de la Figura 6.33 B. Con el fin de simplificar los datos representados, se ha escogido el valor más desfavorable de este parámetro para cada uno de los márgenes estudiados: [500 Hz, 10kHz] y [2.5 kHz, 10kHz]. Lógicamente, el rechazo al segundo armónico a baja frecuencia es más desfavorable, a pesar de la estrategia de igualación empleada. Este dato también empeora al aplicar índices de modulación mayores. Sin embargo es importante destacar que todos estos valores desprendidos de la simulación indican que la distorsión armónica, en presencia de tonos puros a la entrada permanecerá cercana al piso de ruido del sistema. A su vez se ha analizado el nivel obtenido para cada uno de los tonos fundamentales. En la Gráfica 6.38 B se representa el valor absoluto del máximo rizado obtenido para la banda comprendida en el intervalo [750 Hz, 19.5 kHz]. De estos datos se desprende que la estrategia de igualación del espectro ha sido exitosa.

Estos experimentos basados en la síntesis de señales mediante los modelos representados tanto por los núcleos de Volterra como por la estructura LNL nos permiten afirmar que este tipo de compensación puede resultar ser una buena opción para convertir las estructuras de *arrays paramétricos* en sistemas de alta fidelidad, al menos en las bandas de los medios y los agudos. Todo ello mediante algoritmos que pueden implementarse en tiempo real y a muy bajo coste.

6.6. Conclusiones

En este Capítulo hemos presentado los experimentos, basados en medidas de campo que ponen a prueba los algoritmos presentados a lo largo de la Tesis. A su vez, también hemos presentado las medidas prácticas necesarias para diseñar el array propuesto en el Capítulo 5.

Los experimentos presentan un nuevo procedimiento que incluye la mejora de la identificación del proceso de transmisión de los *arrays paramétricos*. Este sistema permite la obtención de una representación completa del sistema mediante series de Volterra. Hasta ahora, las mejores identificaciones realizadas sobre estos sistemas no obtenían de forma completa o fiel de esta representación, y se basaban en las aproximaciones físicas existentes, lo que limita la capacidad de compensación del sistema. El proceso de identificación propuesto se basa en el empleo de señales pseudoaleatorias para la obtención de los núcleos de Volterra. Por desgracia, este procedimiento es muy complejo y requiere medidas de larga duración para ser aplicado. A partir de éste, se obtiene una representación sumamente fiel que permite recuperar el par transmitido-recibido con distorsiones menores a 1 dB. Además, los núcleos de Volterra aportan información exacta y extensa del sistema bajo análisis. Estas medidas han sido realizadas aplicando técnicas de modulación tradicionales (AM), pero pueden ser aplicadas a cualquier preprocesado de los propuestos en la literatura.

De estos núcleos, que refleja fielmente el funcionamiento del array, se desprenden conclusiones novedosas: la distorsión presente no coincide con el modelo teórico empleado en la actualidad (distorsión de segundo orden, armónica pura procedente de una estructura de Hammerstein simple), sino que posee información relevante fuera de la diagonal de los núcleos, así como una distorsión de mayor orden que, a pesar de no ser perceptible por el oyente, perturba los procesos de compensación necesarios para obtener un sistema de alta fidelidad.

Con el fin de obtener un sistema de compensación previo, y a partir de la representación de los núcleos de Volterra, hemos desarrollado una técnica de proyección de estos sobre una estructura más simple del tipo [LNL](#). Este mapeado es consistente tanto con la naturaleza de los núcleos de Volterra obtenidos como con el sistema de transmisión general. A partir de esta proyección es posible diseñar un sistema precompensador que permita igualar y reducir considerablemente la distorsión del sistema de transmisión.

A la luz de estos datos podemos asegurar que es factible plantear un sistema de altas prestaciones basado en sistemas de *arrays paramétricos*.

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

7.1. Resumen final de la Tesis

A largo de esta Tesis se ha presentado una metodología completa de identificación que permite caracterizar estructuras de *arrays paramétricos*. Para desarrollar este trabajo, se han simultaneado dos líneas paralelas: el desarrollo de algoritmos adaptados a este tipo de estructuras y el diseño de un prototipo físico sobre el cual comprobar la veracidad de la metodología presentada.

Como en toda proposición de algoritmos orientados a la instrumentación, la estrategia seguida en este trabajo ha sido la de corroborar la casuística de todos métodos propuestos, mediante simulaciones de sistemas sintéticos controlados. Con ello se limita el ámbito de aplicación de cada uno de los sistemas propuestos, limitando así el ámbito de cada uno ellos. Esta información es de vital importancia a la hora de predecir el comportamiento de la estructura real una vez se han realizado las medidas de campo pertinentes.

El problema de identificación de sistemas no lineales se encuentra fuertemente sujeto al modelo subyacente del sistema. Al contrario de lo que sucede a la hora de identificar sistemas que poseen un comportamiento lineal y sobre los cuales se pueden aplicar múltiples estrategias de identificación, en este caso, el propio planteamiento del modelo subyacente supone un paso determinante. La primera suposición seguida en este trabajo es la de partir de un modelo físico conocido, planteando el problema como un *modelado de caja gris*. Según este modelo, al aplicar una modulación AM con suficiente nivel como para que los términos no lineales de la ecuación de onda sean representativos, se obtiene una señal demodulada que guarda una relación lineal con el cuadrado de la señal moduladora. Si damos por válida esta premisa y por tanto suponemos que este modelo físico guarda una íntima relación con las medidas reales nos encontramos en condiciones de clasificar el sistema como modelable a partir de una serie de Volterra. Esto implica que este es estático y de orden y memoria finitos.

Uno de los mayores esfuerzos que ha implicado este trabajo es de plantear un test que permitiera demostrar esta afirmación. Éste ha sido aplicado sobre la estructura física real (véase Sección 3.2.3) con el fin de acotar, en la medida de lo posible, el comportamiento del sistema, relajando la dependencia del modelo físico tradicional. El resultado de este test clasifica el *array* diseñado como un sistema representable mediante series de Volterra, si bien es cierto, que en la última fase de diagnóstico de este protocolo surgen indicios que hacen sospechar que el

modelo propuesto en la *aproximación de Berkley* es, en ciertos aspectos, insuficiente.

Implícitamente, la *expresión de Berkley* presupone que tras este sistema de transmisión se esconde un modelo de Hammerstein básico. Dada la simplicidad de este modelo, las estrategias a seguir para su identificación disminuyen en complejidad frente al conjunto de los sistemas modelables mediante series de Volterra, ya que éstos poseen núcleos que contienen información únicamente en su diagonal en el dominio temporal. Sin embargo, el test propuesto aquí, que es capaz de discriminar este subconjunto, lo sitúa fuera de él.

A partir de aquí se ha optado por abandonar por completo el modelo físico teórico, centrándonos únicamente en los resultados obtenidos mediante mediciones sobre la estructura. A diferencia de las estrategias más habituales, en las que se parte de una estructura concreta, en este caso se ha preferido obtener la representación en series completa para determinar posteriormente la estructura subyacente. Esta estrategia asegura la obtención de un modelo fiable en cualquier caso pero conlleva el planteamiento de algoritmos complejos y de gran coste computacional.

Una particularidad concreta, que condiciona todo el proceso de identificación, es la forma de generación de la señal sónica. En este caso, en el que en realidad modelamos un proceso completo de modulación–demodulación, nos encontramos con una nueva peculiaridad a tener en cuenta: el margen de trabajo de la entrada se encuentra acotado, siempre y cuando queramos obtener una relación real entre la señal obtenida en recepción y la propia señal moduladora. En los escenarios habituales, este factor no es de gran importancia, dada la relación trivial entre la señal moduladora y la envolvente transmitida.

Por desgracia, esta relación que únicamente supone un escalado de la señal normalizada junto con una desviación en continua afecta al proceso de demodulación de este sistema de transmisión. Esto implica que el modelo obtenido depende de la profundidad de modulación, y como entrada real al sistema sólo pueden ser aplicadas señales normalizadas $[-1,1]$. Debido a esta restricción, el algoritmo seleccionado en el proceso de identificación ha de permitirnos tener un control del punto de trabajo de la señal de entrada completo, tanto en amplitud como en media.

Aparece aquí una nueva clasificación de los sistemas de identificación atendiendo al acceso de la señal de entrada. Como ya se ha argumentado a lo largo del texto, los algoritmos de identificación de sistemas no lineales más habituales suelen trabajar de forma adaptativa. En estos casos sólo se tiene acceso a la entrada para obtener observaciones de la misma. Sin embargo, para que el algoritmo obtenga un modelo viable, la entrada ha de cumplir ciertas características que, debido al proceso de modulación, en nuestro caso no se cumplen. A su vez, el resultado de este tipo de estrategias depende de la viabilidad del modelo previo escogido. Estos modelos han de contar con un número limitado de parámetros para asegurar la convergencia del algoritmo. En este caso, como el objetivo es obtener las series completas de Volterra, que poseen un número elevado de coeficientes, esta limitación no puede cumplirse, de ahí que para resolver el problema se recurra a otras estrategias.

Teniendo en cuenta estas restricciones específicas, se ha diseñado una entrada concreta que evita estos problemas. La incertidumbre que provoca la imposición del modelo al inicio de los algoritmos adaptativos ha sido solventada mediante la caracterización de los núcleos completos de la serie de Volterra. El algoritmo diseñado a tal efecto se inspira en el formulado en [Reed y Hawksford \[1996\]](#), en el que a partir de combinaciones de secuencias [MLS](#) a la entrada de un sistema se pueden inferir los coeficientes de los núcleos de Wiener asociados. A partir de éstos, conocida la entrada al sistema, se infiere la representación buscada: los coeficientes de los núcleos de la serie de Volterra.

En este trabajo se ha propuesto una nueva formulación matemática que permite la mejora de la generación de las secuencias de test frente a las propuestas en algoritmos anteriores. A su vez se ha propuesto un sistema de corrección de los núcleos que permite trabajar tanto con márgenes dinámicos como con puntos de trabajo a escoger por el usuario y que explota las relaciones existentes entre la representación de Wiener y de Volterra.

Tanto el sistema de identificación propuesto como el algoritmo de corrección han sido evaluados en sistemas sintéticos, corroborando su correcto funcionamiento, con el fin de evitar incongruencias en las medidas posteriormente realizadas.

El principal problema que presenta esta metodología de identificación es el alto coste computacional. Como ha quedado demostrado en el texto, ésta se incrementa con la memoria del sistema a identificar así como con el orden a considerar. En este punto surgió la necesidad de plantear un test fiable que permitiera acotar al máximo estos dos parámetros sin perder fiabilidad en la representación. Una extensión del test propuesto como sistema de diagnóstico de estructuras ha solventado estas dos dudas, permitiendo aplicar el algoritmo de identificación partiendo de un modelo consistente.

Todas estas herramientas van acompañadas de sistemas de adaptación que permiten llevar a cabo una medida en el campo real. Esto implica tanto el despliegue de un sistema de instrumentación completo que asegure la sincronización, como la implementación de sistemas de adaptación de señales que adecuan la señal multinivel al escenario real. En esta Tesis se aporta una metodología propicia para la realización de estas dos tareas sobre el prototipo implementado.

Los núcleos de Volterra obtenidos mediante este análisis presentan una geometría concreta que permite inferir la estructura de bloques subyacente. Por desgracia no existe una metodología que permita extraer modelos de bloques a partir de los núcleos de Volterra en un caso generalizado. Sin embargo, el resultado obtenido en las medidas realizadas sobre la estructura es un claro ejemplo de una conexión en tándem del tipo LNL. Este tipo de concatenación de sistemas produce unos patrones muy concretos en los núcleos, resultado de la combinación de productos cartesianos y núcleos de simetría Toeplitz, tanto en su versión temporal como frecuencial. Para extraer los coeficientes de la estructura LNL de los núcleos de Volterra estimados se ha planteado un nuevo algoritmo de proyección propio.

Toda esta información referente al sistema ha permitido el planteamiento de una estructura de precompensación posibilita la obtención de un sistema de alta fidelidad a partir de una estructura de *array paramétrico*. Hasta ahora, en sistemas acústicos el referente de las estrategias de igualación es la aplicación de los sistemas de *p*-compensación, propuesto en Schetzen [1976]. Este esquema ha sido ampliamente explotado para compensar las distorsiones de los transductores electroacústicos ya que es de gran utilidad si el sistema presenta un comportamiento cuasilineal. Sin embargo, dado que la estructura de *array paramétrico* no cumple esta condición, su eficacia se ve comprometida. De hecho, en este trabajo se ha demostrado esta debilidad. Además esta estrategia de compensación requiere la aplicación de varias convoluciones no lineales que aumentan considerablemente la carga computacional frente a otras posibles estrategias.

En este caso concreto, en el que la estructura LNL ha demostrado ser una buena candidata para describir el modelo subyacente del sistema, podemos partir de la misma, para obtener un sistema de compensación fiable. Este tipo de proyección aporta dos claras ventajas: (i) el preprocesado necesario para obtener una señal fiel del sistema es muy ligero computacionalmente, ya que a partir de una estructura LNL hemos demostrado que se puede obtener un compensador casi perfecto a base de filtros lineales y compresores matemáticamente relacionados con la estructura LNL e (ii) independiza la influencia del transductor y el sistema electrónico previo del medio de transmisión, esto hace posible aligerar complejidad del sistema de identificación, hasta tal que, aportando una mínima complejidad, permita al propio usuario adaptarlo a la zona de uso escogida en tiempo real y sin necesidad de especialistas. Debido a deficiencias tecnológicas, esta estrategia de precompensación no ha sido probada en la estructura real, si bien es cierto que la simulación completa del sistema la hace una alternativa viable.

A su vez se ha realizado un estudio exhaustivo sobre el comportamiento de la estructura fuera del eje de transmisión. Este estudio revela que el proceso de demodulación no se comporta de forma uniforme en el área de escucha, pero existe únicamente una pequeña deriva en la relación existente entre la linealidad y la no linealidad cuando nos alejamos del eje. Por tanto queda demostrada la capacidad del compensador para reducir la distorsión no sólo en el eje de propagación, si no en la zona de interés.

7.2. Contribuciones de la Tesis

Como ha quedado demostrado a lo largo de esta disertación, a pesar de que estas estructuras son conocidas desde hace varias décadas, su uso en sistemas de alta fidelidad es muy limitado y se encuentra reducido al ámbito de la investigación. Esta ralentización del desarrollo es debida a la falta de metodología a la hora de caracterizar este tipo de sistemas. La mayoría de los sistemas propuestos se basan en el modelo físico que a su vez se cimienta en aproximaciones de dudoso rigor.

La primera contribución de esta Tesis es un estudio de las distintas técnicas de modulación y preprocesado propuestas a lo largo de la literatura. Este estudio se ha realizado tanto de forma teórica como mediante simulaciones, para comprobar la distorsión y coloración esperables del sistema. Este estudio sirve como patrón para la posterior comparación con los resultados experimentales obtenidos.

La segunda contribución de elaboración propia es la proposición y verificación del diagnóstico de estructuras no lineales estáticas o cuasi-estáticas con memoria. Este algoritmo aporta información vital a la hora de proponer un sistema de identificación posterior. Además, debido a su versatilidad es aplicable a sistemas que van más allá del ámbito acústico. Con el fin de comprobar la funcionalidad de este método, se ha propuesto una batería de pruebas que verifican su viabilidad mediante simulaciones.

En esta Tesis además se propone un algoritmo de identificación específico para estructuras de *arrays paramétricos*, que tiene en cuenta peculiaridades propias como el punto de trabajo del sistema así como la importancia del análisis de dos bandas diferenciadas: la de transmisión y la de recepción. Esto supone un cambio en el paradigma de la identificación de este tipo de sistemas, ya que evita el empleo del modelado paramétrico, que impone premisas discutibles a la hora de su aplicación en sistemas reales. Al igual que en el caso de las pruebas de diagnóstico, este algoritmo ha sido comprobado mediante simulación. De esta forma verificamos los parámetros estimados teniendo una referencia clara del modelo que se esconde detrás del par entrada-salida. La comparación entre estos datos nos permite cuantificar con que fiabilidad somos capaces de determinar el modelo que se esconde detrás del sistema bajo estudio.

Para conservar la generalidad del descriptor del sistema, se ha elegido una proyección en series de Volterra. Éstas, sirven para describir sistemas no lineales de memoria y orden finito, por tanto son aplicables a un gran número de estructuras y, al igual que sucede con el sistema de diagnóstico propuesto, este método de identificación es aplicable a numerosas áreas que impliquen la necesidad de descriptores de sistemas, ya sea a la hora de caracterizar procesos físicos, funcionamiento de sistemas de transducción complejos etc.

Para determinar las series de Volterra se ha implementado un algoritmo de identificación basado en señales pseudoaleatorias. Este algoritmo es una modificación más eficiente computacionalmente que su referente. Para realizar estas modificaciones se ha propuesto una nueva reformulación del problema. A su vez, este algoritmo se ha flexibilizando permitiendo elegir el punto de trabajo de la entrada del sistema, así como su margen dinámico. Ante un esquema como éste, es crítico reevaluar el proceso entero de identificación para corregir la desviación introducida en las estimas a causa de las condiciones impuestas por el propio sistema a la entrada. Trabajo recogido en la publicación [Yagüe-Jiménez et al. \[2015\]](#).

Una vez demostrada la fiabilidad de esta metodología mediante simulación, se ha dispuesto un sistema de instrumentación que permite la aplicación del mismo en un entorno real. Este sistema permite llevar a cabo esta metodología de identificación sobre una estructura de *array paramétrico* e incluye procesos de adaptación e frecuencia, impedancia, condiciones de adquisición de datos etc.

A partir de las estimas reales obtenidas mediante una batería de medidas, que comprueba tanto profundidades de modulación como la localización del oyente con respecto a la fuente, se ha conseguido extraer la estructura de bloques subyacente que describe con fidelidad el modelo. Para obtener los parámetros que describen esta estructura se ha propuesto un algoritmo propio de proyección.

A la vista de estos resultados, no expuestos anteriormente en la literatura, nos encontramos en disposición de plantear una estructura que permita dotar al sistema de las condiciones necesarias para su uso en aplicaciones de alta fidelidad. Para hacer viable este escenario en un sistema comercial se hace indispensable el diseño de una estructura de precompensación que procese la señal antes de la emisión no paramétrica.

Otra contribución destacable de este trabajo es la deducción de la estructura subyacente a partir de los núcleos obtenidos mediante el proceso de identificación. Esta elección viene dada por la propia física del problema y la deducción del comportamiento de los mismos a la vista de la especie personal.

Para obtener los coeficientes que describen la estructura propuesta, LNL, se ha diseñado un algoritmo propio de proyección, que permite sintetizar a muy bajo coste computacional el comportamiento del array paramétrico.

A su vez esta estrategia ha permitido diseñar la estructura de precompensación deseada, teniendo en cuenta las limitaciones que imponen los sistemas no lineales y la modulación que interviene en el proceso.

Para poner a prueba esta metodología de diagnóstico, identificación y compensación del sistema se ha implementado una estructura de *array paramétrico* a modo de prototipo de laboratorio. Debido a las peculiaridades del transductor base elegido para implementar el array, ha sido necesario desarrollar circuitería específica que permita la correcta polarización de los transductores así como sistemas de adaptación de impedancias y filtrado analógico que aseguran la correcta transmisión de potencia. Además, como esta estructura opera en un margen de trabajo específico de este tipo de aplicaciones, también ha sido necesario implementar un protocolo de medición propio, que no se ajusta a los empleados habitualmente en sistemas acústicos. Todos estos elementos facilitan la tarea futura de desarrollar un prototipo industrial basado en estos conocimientos.

7.3. Trabajos futuros

La metodología propuesta abre las puertas a nuevos trabajos ya que, una vez enunciado un sistema completo de identificación y compensación generalista, nos encontramos en situación de extender este trabajo a sistemas acústicos mucho más potentes.

A partir de este escenario se pueden abrir nuevas líneas tanto con una orientación industrial como puramente teórica. Entre otras muchas podemos enunciar las siguientes propuestas al respecto:

- Diseño de un sistema completo que permita poner en práctica las técnicas de compensación, sobre el que se puede realizar una batería de pruebas subjetivas ajustando la coloración y la distorsión del sistema a gusto del oyente. Dado que una de las aplicaciones estrella de este tipo de estructuras es la de la megafonía de calidad, el sistema al completo se puede diseñar de tal forma que el proyector adopte una discreta y ligera forma (de menos de 1 cm de grosor y no más de un metro cuadrado de superficie), independizando el sistema de amplificación así como el sistema de preprocesado previo en otro dispositivo, también de pequeño tamaño y que pueda situarse a metros de distancia del proyector. Otra gran ventaja de este esquema es la posibilidad de aportar conectividad al dispositivo y, por tanto, facilitar el manejo de los usuarios tanto en un entorno doméstico como en sistemas de megafonía complejos.
- Mejorar la eficiencia del sistema aplicado nuevas modulaciones, ya que al disponer de una metodología completa podemos reevaluar el sistema y obtener de nuevo un nuevo modelo que permita la compensación mediante técnicas [SRAM](#), ya que tenemos indicios de que la estructura subyacente también se puede proyectar en una estructura [LNL](#).
- Otra posible ventaja que aportan estos sistemas, formados por varios transductores, es la aplicación de “*beamforming*”, permitiendo al usuario adaptar la forma y posición de la mancha acústica según sus necesidades. Esta aplicación puede incorporarse sin necesidad de añadir mucha complejidad al sistema. Bastaría con incorporar un software de instalación sencillo, asegurando la independencia total del usuario de instaladores especializados.
- Implementar un sistema que permita al usuario adaptar el sistema a su zona de escucha. Para añadir esta funcionalidad al sistema, se propone una estructura adaptativa, en la que los valores de los bloques que describen la transmisión aérea se modifican, adaptando en pocos segundos los valores que caracterizan el sistema de preprocesado interno. La referencia en la zona de escucha se puede realizar con un micrófono de calidad media y que opere en la banda sónica, abaratando el coste de esta funcionalidad adicional. A pesar de la simplicidad de este modelo, la convergencia se asegura a partir de los valores iniciales obtenidos de los núcleos de Volterra que definen el sistema, así como el aumento de la fidelidad frente a otros esquemas presentes en la literatura.

7.4. Contribuciones relacionadas

El análisis desarrollado a lo largo de este trabajo proporciona una metodología extrapolable a múltiples áreas de conocimiento. La mayoría de las aplicaciones que implican un proceso de transmisión presentan procesos no lineales similares a los estudiados en este trabajo.

La única restricción impuesta es la del acceso a la entrada del sistema, condición que se cumple en todo proceso de diseño. Este algoritmo de identificación se puede emplear en sistema con cualquier punto de trabajo y margen dinámico, al haber flexibilizado las condiciones de la señal de entrada.

El test diseñado con el fin de evaluar la no linealidad se puede emplear como paso previo para evaluar la calidad de cualquier sistema, típicamente aquellos que involucren procesos de amplificación o de transducción que presenten memoria y no linealidades.

A su vez se ha desarrollado un método de igualación que también es extrapolable a otros sistemas y que asegura la disminución de la distorsión, siempre y cuando esta sea modelable mediante una estructura LNL. Así mismo, esta estructura se puede ampliar en redes paralelas LNL sobre las que se puede aplicar la misma estrategia de compensación, logrando linealizar sistema más complejos, ampliando el ámbito de este sistema de eliminación de distorsión.

Durante los dos últimos años hemos empleado estas mismas técnicas en sistemas de análisis no invasivo basado en la caracterización de la transmisión electromagnética de amplio espectro. En sistema de banda ultra ancha para aplicaciones de análisis multiespectral resultan críticos los errores de modelado en cadena. Especial atención requieren aquellos relacionados con la no linealidad presente en todos los elementos que conforman el canal de transmisión.

Estos métodos han aportado resultados prometedores ya que tanto estas estrategias de identificación y compensación son de gran utilidad cuando el sistema conlleva procesos de modulación-demodulación. Este entorno se relaciona con el estudiado en este trabajo, ya que la transmisión electromagnética, bajo las condiciones impuestas por los sistemas de análisis no invasivo, no dispone de modelos paramétricos sencillos que describan proceso.

7.5. Conclusiones generales

En este trabajo se ha puesto de manifiesto la utilidad de sistemas no paramétricos de identificación para la caracterización de procesos físicos de transmisión complejos. Esta filosofía permite obtener modelos genéricos de los sistemas, que pueden ajustarse o no a los modelos teóricos propuestos con anterioridad. La aplicación de estos algoritmos aporta información que sirve como apoyo para garantizar la convergencia de algoritmos adaptativos, ya que todos estos datos ponen de manifiesto la estructura de bloques subyacente del sistema, así como posibles parámetros de inicialización. Hasta ahora, todos los algoritmos de identificación aplicados a los *arrays paramétricos* partían de modelos concretos y obtenían estimas desviadas. Estas diferencias son determinantes para poder plantear estructuras de precompensación.

A pesar de la generalidad de estas técnicas, a la hora de aplicar cualquier método de identificación no lineal, es necesario analizar y seleccionar la técnica adecuada dependiendo del problema concreto. En este caso, en el que se ven envueltos procesos de modulación, ha sido necesario desarrollar algoritmos concretos que permiten obtener las estimas deseadas.

Estas técnicas han sido aplicadas sobre un prototipo desarrollado a tal efecto, que permite obtener los datos necesarios para poder desarrollar tanto la metodología necesaria para obtener un modelo fiable así como para extraer la información necesaria para precompensar el sistema. Este diseño permite comprobar el funcionamiento de toda la cadena electroacústica, y por tanto, descartar las posibles fuentes de no linealidad como, por ejemplo, todos los procesos de amplificación.

Asociado a este prototipo se hace indispensable desplegar un sistema de instrumentación complejo que permita caracterizar el sistema. Este sistema conlleva el desarrollo de técnicas de sincronización muestra a muestra. En este trabajo se ha solventado este problema asegurando la sincronía entre los relojes de generación y adquisición de datos. A su vez, se ha desarrollado un algoritmo de sincronización acústica, que permite determinar el retardo introducido por el camino de transmisión acústica con la precisión necesaria para emplear algoritmos de identificación basados en muestras temporales.

El resultado obtenido tras el proceso de identificación se desvía ligeramente de los resultados obtenidos por otros autores, así como del modelo teórico. Sin embargo, tras sintetizar la señal captada por el micrófono a partir

de los coeficientes estimados, se ha demostrado que el modelo obtenido es correcto. Éste, posee coeficientes no nulos fuera de la diagonal principal. A su vez se aprecia una coloración menor que la presente en el modelo de Berkay. Lógicamente estos resultados variarán dependiendo de la estructura caracterizada. En el caso bajo estudio, la memoria presente en el transductor se refleja en el comportamiento de la onda. Es por ello que los coeficientes no se concentran únicamente en las diagonales.

La disposición de los coeficientes no nulos en los núcleos estimados pone de manifiesto la existencia de memoria, previa al propio fenómeno del array paramétrico. Esto se traduce en una estructura en bloques del tipo LNL. Esta estructura es ligera computacionalmente y viene definida por un número acotado de parámetros. Para extraer estos ha sido necesario desarrollar un algoritmo de proyección que calcula la estructura LNL más cercana a los núcleos identificados. De nuevo, al aplicar la síntesis para obtener la estima de la salida, se ha obtenido un resultado más aproximado al obtenido mediante medidas reales. Esto implica que al aplicar la proyección eliminamos las pequeñas desviaciones de estima presentes en los núcleos de Volterra. Otra ventaja que posee este tipo de estructuras es que permiten el diseño de un sistema previo de precompensación, mitigando tanto la coloración del sistema general como su no linealidad. De esta forma es posible diseñar un sistema de alta fidelidad.

En este trabajo se pone en evidencia la necesidad de nuevos criterios que evalúen la influencia de la distorsión lineal y no lineal de forma precisa. A su vez se han aportado una metodología propia que aporta información extra frente a los parámetros tradicionales de THD e IMD.

Los algoritmos y la metodología expuesta en este trabajo permiten el diseño de un sistema completo de *array paramétrico* compensado y de altas prestaciones. Al desvelar la estructura subyacente del sistema, se abre el camino para aplicar técnicas de compensación efectivas y de bajo coste computacional, que permiten la implementación sobre estructuras de bajo coste de este tipo de sistemas.

Apéndice

A

ALGORITMOS DE GENERACIÓN Y RECUPERACIÓN DE LAS SEÑALES

Este Apéndice se encuentra dedicado a todos aquellos algoritmos aplicados tanto a la señal de entrada del sistema, para adaptarla al margen frecuencial deseado, como a la regeneración de la salida, una vez conocidos los coeficientes de Volterra. Así mismo, presentamos de manera informal los algoritmos de identificación lineal empleados de forma accesoria en la caracterización de ciertos elementos básicos en el desarrollo de la Tesis.

A.1. Convolución rápida no lineal basada en FFT

Uno de los inconvenientes más destacables de la definición de un proceso no lineal mediante coeficientes de Volterra es el gran coste computacional que requiere la recuperación de la señal de salida mediante la convolución no lineal. Al igual que en el caso de la convolución lineal, podemos recurrir a algoritmos basados en FFTs.

Para ello partimos de la expresión (3.5):

$$y[n] = h_0 + \sum_{r=1}^N \sum_{k_1=0}^{M-1} \cdots \sum_{k_r=0}^{M-1} h_r[k_1, \dots, k_r] x[n - k_1] \cdots x[n - k_r] \quad (\text{A.1})$$

que relaciona la entrada discreta $x[n]$ con la salida $y[n]$. En esta expresión, las matrices $\mathbf{h}$ representan los coeficientes de Volterra discretizados, M la longitud de la memoria del sistema, y N es el orden el orden máximo del mismo. Con el fin de disminuir la complejidad de esta operación recurrimos al algoritmo descrito en Morhac [1991], pero reduciendo aún más su complejidad, ya que disponemos de los núcleos triangulados $\{\hat{\mathbf{h}}_r\}_{r=1 \dots N}$, según (3.80).

Para calcular la convolución rápida mediante este método, primero se ha de reorganizar cada uno de los núcleos mediante la secuencias $\mathfrak{Z}(\mathfrak{Q}_r)$. Estas secuencias se encuentran formadas por $r - 1$ elementos y coinciden con $\mathfrak{Q}_{r-1}$, ya que, dada una secuencia $\mathfrak{q}_i$ se puede generar una secuencia $\mathfrak{z}_\kappa$ mediante el siguiente criterio:

$$\mathfrak{z}[n]|\mathfrak{q}_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathfrak{q}[n] - \mathfrak{q}[n+1] < 0 \\ \mathfrak{q}[n] - \mathfrak{q}[n+1] & \text{si } \mathfrak{q}[n] - \mathfrak{q}[n+1] > 0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Así pues, para un orden dado, primero hemos de reorganizar éste generando todas las secuencias $\mathfrak{z}_\kappa$ correspondientes y agruparlas en vectores $\mathbf{h}_{\mathfrak{z}_\kappa}$. Por ejemplo, si disponemos de un núcleo de orden dos, y $M = 4$, el conjunto $\mathfrak{Z}_2 = \{0, 1, 2, 3\}$. En este caso, el núcleo ordenado según estas secuencias se corresponde con:

$$\check{\mathbf{h}}_0 = \begin{bmatrix} h(0,0) \\ h(1,1) \\ h(2,2) \\ h(3,3) \end{bmatrix} \quad \check{\mathbf{h}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ h(0,1) \\ h(1,2) \\ h(2,3) \end{bmatrix} \quad \check{\mathbf{h}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h(0,2) \\ h(1,3) \end{bmatrix} \quad \check{\mathbf{h}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ h(0,3) \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Estos vectores, en la convolución no lineal se corresponden con los siguientes productos de la entrada:

$$\check{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} x^2(0) \\ x^2(1) \\ x^2(2) \\ x^2(3) \end{bmatrix} \quad \check{\mathbf{h}}_1 = \begin{bmatrix} x(0)x(1) \\ x(1)x(2) \\ x(2)(3) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \check{\mathbf{h}}_2 = \begin{bmatrix} x(0)x(2) \\ x(1)x(3) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \check{\mathbf{h}}_3 = \begin{bmatrix} x(0)x(3) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Si aplicamos la transformada de Fourier a cada uno de los anteriores vectores, obtenemos una nueva definición de la convolución no lineal, donde el coeficiente i -ésimo de la transformada de Fourier de la salida de segundo orden se puede expresar como:

$$Y_2(i) = \check{H}_0(i)\check{X}_0(i) + 2 \sum_{j=1}^{M-1} \check{H}_j(i)\check{X}_j(i) \quad (\text{A.5})$$

siendo $Y_2 = \mathcal{F}\{y_2(t)\}$, $\check{\mathbf{H}}_j = \mathcal{F}\{\check{\mathbf{h}}_j\}$ y $\check{\mathbf{X}}_j = \mathcal{F}\{\check{\mathbf{x}}_j\}$. En esta expresión, el factor 2 se debe a la repetición de los coeficientes debido a la simetría de los núcleos de Volterra en su forma común.

Podemos generalizar (A.5) para un orden superior r aplicando:

$$Y_r(i) = \sum_{\mathfrak{z}_\kappa[0]=0}^{M-1} \sum_{\mathfrak{z}_\kappa[1]=\mathfrak{z}_\kappa[0]}^{M-1} \cdots \sum_{\mathfrak{z}_\kappa[r-1]=\mathfrak{z}_\kappa[r-2]}^{M-1} S(\mathfrak{z}_\kappa) \cdot \check{\mathbf{H}}_{\mathfrak{z}_\kappa} \check{\mathbf{X}}_{\mathfrak{z}_\kappa} \quad (\text{A.6})$$

donde $\mathfrak{z}_\kappa = [\mathfrak{z}[r-1], \mathfrak{z}[r-2], \dots, \mathfrak{z}[0]]$ y $S(\mathfrak{z}_\kappa)$ es el valor de repetición de los coeficientes en el núcleo. Para calcular este factor seleccionamos cualquiera de las $\mathbf{q}_i$ que determinan $\mathfrak{z}_\kappa$ en la expresión (A.2) y aplicas el mismo criterio que en (3.83):

$$S(\mathfrak{z}_\kappa) = |\mathcal{O}(\mathbf{q}_i)| \quad (\text{A.7})$$

Generalizando tenemos que:

$$\check{\mathbf{h}}_{\mathfrak{z}_\kappa} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(0, \quad \quad \quad \delta[1], \quad \quad \quad , \dots, \quad \delta[r-1]) \\ h(1, \quad \quad \quad \delta[1]+1, \quad \quad \quad , \dots, \quad \delta[r-1]+1) \\ \vdots \\ h(M-\mathfrak{z}[r-1]-1, \quad M-\mathfrak{z}[r-1]-1+\delta[1], \quad , \dots, \quad M-1) \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$\check{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}_\kappa} = \begin{bmatrix} x(0) & x(\mathfrak{z}[1]) & \cdots & x(\mathfrak{z}[r-1]) \\ x(1) & x(\mathfrak{z}[1]+1) & \cdots & x(\mathfrak{z}[r-1]+1) \\ \vdots & & & \\ x(M-\mathfrak{z}[r-1]-1) & x(M-\mathfrak{z}[r-1]-1+\mathfrak{z}[1]) & \cdots & x(M-1) \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Una vez calculados estos vectores se puede proceder a aplicar el Algoritmo 2, basado en la aplicación de FFTs. Sin embargo, esta transformación se puede sustituir por cualquiera que cumpla la propiedad de convolución.

Algoritmo 2 Cálculo de la convolución no lineal basada en núcleos de Volterra y FFT.

```

Indexar los coeficientes de Volterra y la entrada.                                ▷ (véase Sección 3.3.1)
for  $r \leftarrow 1, N$  do
  for  $\forall \mathfrak{z}_\kappa$  do
    Calcular  $\check{\mathbf{h}}_{\mathfrak{z}_\kappa}$  y  $\check{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}_\kappa}$  según (A.8) y (A.8).
     $\check{\mathbf{H}}_{\mathfrak{z}_\kappa} \leftarrow \mathcal{F} \left\{ \check{\mathbf{h}}_{\mathfrak{z}_\kappa} \right\}$ 
     $\check{\mathbf{X}}_{\mathbf{y}_\kappa} \leftarrow \mathcal{F} \left\{ \check{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}_\kappa} \right\}$ 
    Calcular  $S(\mathfrak{z}_\kappa)$  según (A.7).
  end for
  for  $i \leftarrow 1, 2M-1$  do
     $Y_r(i) = \sum_{\mathfrak{z}_\kappa[0]=0}^{M-1} \sum_{\mathfrak{z}_\kappa[1]=\mathfrak{z}_\kappa[0]}^{M-1} \cdots \sum_{\mathfrak{z}_\kappa[r-1]=\mathfrak{z}_\kappa[r-2]}^{M-1} S(\mathfrak{z}_\kappa) \cdot \check{\mathbf{H}}_{\mathfrak{z}_\kappa} \check{\mathbf{X}}_{\mathbf{y}_\kappa}$                                 ▷ Aplicar (A.6)
  end for
   $\mathbf{y}_r = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathbf{Y}_r \}$ 
end for
 $\mathbf{y} = \sum_{r=1}^N \mathbf{y}_r$ 

```

Este algoritmo de recuperación sólo será empleado en caso de encontrarnos con sistemas de Volterra que no puedan ser representables mediante estructuras de Hammerstein, ya que en ese caso la convolución no lineal se simplifica ya que sólo dispone de coeficientes no nulos en sus diagonales, quedando reducida (A.1) a:

$$y(t) = h_0 + \sum_{r=1}^N h_r(t, t, \dots, t) * x^r(t) \quad (\text{A.10})$$

Por tanto, para todas aquellos sistemas de identificación que impongan un modelo de Hammerstein se aplicará la versión de (A.10) en el dominio transformado.

A.2. Caracterización de sistemas lineal mediante aproximaciones de respuesta al impulso

A pesar de que el objetivo central de esta Tesis es el de caracterizar un proceso de transmisión acústica, que conlleva procesos no lineales, ciertos algoritmos (véase por ejemplo el algoritmo de identificación no lineal presentado en 3.2.2) o calibraciones previas de equipos de medición (como por ejemplo en el experimento “*Calibración de la sonda de corriente*”) hacen necesaria la aplicación métodos de estima de respuesta al impulso lineales.

Como es habitual en los sistemas de audio, y debido a las necesidades específicas de los transductores que se ven envueltos en el proceso electroacústico, éstos suelen estar compuestos por diferentes elementos que intro-

ducen sus propias distorsiones en el proceso global. Por eso es decisivo, a la hora de caracterizar un proceso físico complejo como el que nos atañe, caracterizar todos estos elementos por separado y de la forma más exhaustiva posible.

Por tanto se busca una definición de sistema mediante su respuesta al impulso tal que:

$$y(t) = h(t) * x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (\text{A.11})$$

Para la elaboración de estos experimentos sólo se han aplicado dos técnicas diferentes, que han demostrado ser suficientemente robustas para los casos en los que han sido empleadas. Así mismo, en el texto se especifica cada una de las técnicas aplicadas según el caso.

A.2.1. Estimación espectral y caracterización de sistemas lineales.

La identificación de sistemas supone una de las áreas de aplicación más importantes de la estimación espectral de señales. Habitualmente, el objetivo perseguido es el de obtener respuestas del sistema a partir de la aplicación inversa de (A.11). Ello conlleva la necesidad de estimar los espectros envueltos en (A.11) de forma precisa y con la mayor resolución en frecuencia posible. Por desgracia, obtener estos espectros con este nivel de resolución y detalle implica experimentos costosos.

Los requisitos necesarios para generar una señal que permita caracterizar un sistema mediante su repuesta al impulso son sencillos de cumplir. Básicamente estas señales han de contener suficiente energía a lo largo de todas las componentes espectrales que comprenden su ancho de banda, como para superar el nivel pedestal de ruido inherente en el sistema. Como se puede deducir de la expresión (A.11), si tenemos acceso a la entrada y la salida del sistema en estas condiciones, podemos obtener la respuesta en frecuencia del sistema simplemente dividiendo los espectros de estas dos señales. A estas técnicas se las conoce como técnicas de análisis FFTs duales.

La gran ventaja que presentan es que no es necesario introducir en el sistema una señal determinista, aunque si es obligatorio que la señal de entrada y de salida se encuentren sincronizadas. El principal dilema que plantean estas técnicas es la estimación del espectro a emplear y la elección de la señal de excitación apropiada.

Como ya se trató en la Sección 3.1.4, dado que en nuestro caso nos encontramos en disposición de elegir la entrada de excitación, así como de monitorizar de forma sincronizada el par entrada-salida, en este estudio nos centraremos en el empleo de señales sinusoidales variables con el tiempo, aunque en las dos últimas décadas se han propuesto señales más complejas y optimizadas para la caracterización de sistemas Pintelon y Schoukens [2012].

La técnica más sencilla para calcular una estimación de función de autocovarianza, $P_{xx}(f)$ es la obtención del periodograma.

$$\hat{P}_{xx}^{\text{PER}}(f) = \frac{1}{N\Delta t} \left| \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi f n \Delta t} \right|^2 \text{ definida en el intervalo } -\frac{1}{2\Delta t} \leq f \leq \frac{1}{2\Delta t} \quad (\text{A.12})$$

En donde para obtener un estimador de la función de autocorrelación se ha recurrido a la definición de autocorrelación muestral sesgada.

Si ordenamos estas muestras y las apilamos formando el vector $\mathbf{x}$, podemos definir los elementos de la transformada discreta de Fourier (DFT) $\mathcal{X} = \mathcal{F}_{\mathcal{D}}\{\mathbf{x}\}$ como:

$$X[m] \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi mn/N} \quad (\text{A.13})$$

La expresión (A.12) evaluada en aquellas frecuencias discretas $f_m = m\Delta f$, cuya resolución en frecuencia se

encuentra relacionada con la resolución temporal de la secuencia $\mathbf{x}$ mediante $\Delta f = 1/(N\Delta t)$, se corresponde con:

$$\hat{P}_{xx}^{\text{PER}}[m] = \hat{P}_{xx}^{\text{PER}}(f_m) = \frac{1}{N\Delta t} |\mathcal{X}[m]|^2 \quad (\text{A.14})$$

A pesar de que el periodograma se presenta a priori como un buen estimador de la densidad de la potencia espectral, ya que reduce el coste computacional frente al cálculo de ésta mediante estimadores de la función de autocorrelación, ofrece una elevada dispersión espectral y excesiva varianza si aumentamos el número de muestras disponibles de la señal. Se puede calcular el sesgo introducido por este estimador, teniendo en cuenta que la función de autocorrelación ha sido estimada mediante el estimador sesgado:

$$\mathbb{E}\{\hat{R}_x(k)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} \mathbb{E}\{x[n+k]x^*[n]\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} R_x[k] = \frac{N-k}{N} R_x[k] \quad (\text{A.15})$$

Como en nuestro caso, la mayor parte de las excitaciones se basan en medidas tonales, es aconsejable emplear el enventanado de Hamming para minimizar este efecto.

Para estimar la respuesta al impulso mediante periodogramas recurrimos al algoritmo de Welch [Welch \[1967\]](#), en el que se aplican [FFTs](#) a ventanas solapadas o no, tanto de la entrada como de la salida, con el fin de obtener una estima del espectro cruzado entre ambas.

Por tanto, si definimos una función de enventanado $\mathbf{w}$ de tamaño N , cuya norma cumple que:

$$\|\mathbf{w}\| := \sqrt{w^2[1] + \dots + w^2[n]} = 1$$

y $\mathbf{x}_k$ como el segmento k -ésimo de la señal $x(t)$ discretizada y segmentada, ya sea con solapamiento o sin él, obtenemos la expresión:

$$X_k(\Omega) = \mathcal{F}\{\mathbf{x}_k\} = \frac{1}{2\pi N} \sum_{n=1}^N x_k[n]w[n]e^{-j\Omega n} \quad (\text{A.16})$$

Siendo Ω la pulsación discreta de Fourier, $\Omega = 2\pi \frac{f}{f_s}$. Podemos obtener la densidad de potencia espectral de la señal:

$$P_{xx}(\Omega) = \sum_{k=1}^K X_k^*(\Omega)X_k(\Omega) \quad (\text{A.17})$$

Del mismo modo, es posible obtener la densidad espectral de la señal de salida $y(t)$, P_{yy} .

A partir de la estimación de la densidad de potencia espectral de la salida y la entrada del sistema, P_{xx} y P_{yy} obtenidas mediante el enventanado, solapamiento y estimación media de L periodogramas, obtenemos que:

$$\hat{P}_{xx}(f) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L |\hat{X}_l(f)|^2 \quad \hat{P}_{yy}(f) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L |\hat{Y}_l(f)|^2 \quad (\text{A.18})$$

La relación entre P_{xx} y P_{yy} nos aporta el espectro cruzado:

$$\hat{P}_{xy}(f) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \hat{X}_l^*(f) \hat{Y}_l(f) \quad (\text{A.19})$$

Este se encuentra relacionado con la respuesta al impulso del sistema mediante:

$$H(f) = \frac{P_{xy}(f)}{P_{xx}(f)} \quad (\text{A.20})$$

Otro parámetro de interés que podemos extraer de estas estimas espectrales es la coherencia existente entre la entrada y la salida. Este parámetro estima el grado de linealidad existente entre estas dos señales. Oscila entre 0, en caso de no existir relación alguna y 1 en el caso opuesto. Este parámetro se define como:

$$C_{xy}(f) = \frac{P_{xy}(f)}{P_{xx}(f)P_{yy}(f)} \quad (\text{A.21})$$

En nuestro caso emplearemos este parámetro para comprobar si la suposición de una relación lineal se cumple en las bandas de trabajo de interés en nuestros transductores, así como en la determinación de las respuestas al impulso de los mismos.

A.2.2. Identificación basada en ARX

Planteamos este método de estimación de repuesta al impulso como alternativa accesoria, ya que, en la mayor parte de los casos disponemos de accesibilidad a la entrada y a la salida del sistema. Limitaremos el empleo de estimas basadas en [ARX](#) a situaciones en las que la señal de entrada sea excesivamente corta como para considerar eficaces los métodos propuestos en la sección anterior.

El método [ARX](#) más sencillo se basa en plantear una estructura de polos n_a y n_b ceros para un sistema [SISO](#) tradicional:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_{n_a} y(t-n_a) = b_1 x(t-n_k) + \dots + b_{n_b} x(t-n_k-n_b) + e(t) \quad (\text{A.22})$$

donde n_k es el retardo inicial supuesto entre la entrada y la salida, y $e(t)$ es un ruido blanco que simula las desviaciones de las estimas.

En nuestro caso, por tratarse de un método accesorio, aplicaremos el sistema sin regularización y por tanto, se resolverá como un problema de mínimos cuadrados, en el que θ representa el vector de incógnitas y J es la matriz de regresores. Aplicando mínimos cuadrados obtendremos:

$$\theta = (J^T J)^{-1} J^T y \quad (\text{A.23})$$

Lógicamente, este método es mucho más potente y posee múltiples variantes que incluso contemplan la identificación de sistemas [MIMO](#) no lineales. En cualquier caso, el ámbito de esta Tesis restringe este tipo de sistemas de identificación a ocasiones específicas y en la mayoría de los casos a constituir sistemas sencillos de tipo [FIR](#).

ANEXOS A LOS SISTEMAS DE IDENTIFICACIÓN PROPUESTOS

Con el fin de simplificar la argumentación de los algoritmos propuestos en el Capítulo 3, en este Anexo adjuntamos aquellas demostraciones, que si bien son necesarias para explicar su funcionamiento a nivel teórico, no son indispensables para su implementación.

Estos Anexos se dividen en dos secciones, la primera de ellas dedicada al comportamiento de los sistemas no lineales de memoria y orden finitos frente a señales de tonales de frecuencia variable, y la segunda a la viabilidad del algoritmo de corrección propuesto en la Sección 3.3, encargado del control del punto de trabajo del mismo.

B.1. Aclaraciones, propiedades y demostraciones referentes a los sistemas de identificación tonales estudiados

En esta Sección se recogen todas aquellas aclaraciones que apoyan al algoritmo de estimación de la memoria y orden (véase Sección 3.2.1), así como el método del barrido tonal de frecuencia variable exponencial presentado en la Sección 3.2.2.

B.1.1. Propiedades de las señales envueltas en el test del barrido tonal de frecuencia variable

Propiedad 1. Las distribuciones $\{\tilde{u}_n(t)\}$ son acotadas en energía. La envolvente de $\tilde{u}_n(t)$ decrece a lo largo del eje temporal transformado en función de k a medida que nos alejamos de $t = \tau_n$, debido a las siguientes propiedades heredadas de las integrales trigonométricas:

$$\text{comportamiento asintótico} \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma_{n,2}(t) = 0 \quad (\text{B.1a})$$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \gamma_{n,4}(t) = 0 \quad (\text{B.1b})$$

FIGURA B.1: Distribuciones $\gamma_{0,m}(t)$ para $m = 1, \dots, 4$ centradas en $\tau_1 = 0$ para el término de primer orden ($n = 1$), derivadas de la expresión general de $\tilde{u}_n(t)$, (B.4).

$$\text{máximo centrado} \quad \gamma_{n,2}(\tau_n) \geq \gamma_{n,2}(t) \quad \forall t \quad (\text{B.2})$$

$$\text{límites de la envolvente espectral} \quad |\Gamma_{n,1}(f)|, |\Gamma_{n,3}(f)| \ll |\Gamma_{n,2}(f)|, |\Gamma_{n,4}(f)| \quad f_0 \leq f \leq f_1 \quad (\text{B.3})$$

DEMOSTRACIÓN: Basándose en la definición integral de las funciones $\tilde{u}_n(t)$:

$$\tilde{u}_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\tau, t) \cdot \left(\frac{c_n}{2} \cos(k_- k^{\tau+\beta_n-t}) - \frac{s_n}{2} \text{sen}(k_- k^{\tau+\beta_n-t}) \right) d\tau \quad (\text{B.4})$$

donde:

$$\begin{aligned} W(\tau, t) &= w^i(\tau) \cdot w(\tau - t) & s_n &= \text{sen}((1-n) \cdot \Delta\phi) \\ k &= \left(\frac{f_1}{f_0} \right)^{1/T} & \beta_n(t) &= (t - \tau_n) / 2 \\ \Delta\phi &= 2[\phi_0 - 2\pi f_0 / \ln(k)] & k_+(t) &= 2\pi f_0 (k^{-\beta_n} + k^{+\beta_n}) / \ln(k) \\ c_n &= \cos((1-n) \cdot \Delta\phi) & k_-(t) &= 2\pi f_0 (k^{-\beta_n} - k^{+\beta_n}) / \ln(k) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

y asumiendo que se emplea una ventana rectangular normalizada, y por tanto $w^i(\tau) = w(\tau)$, podemos

reescribir (B.4) en términos de integrales senoidales y cosenoidales:

$$\tilde{u}_n(t) = \begin{cases} c_n (T + \tau_n) / 2, & \text{si } t = \tau_n \\ \frac{1}{2 \ln(k)} \begin{pmatrix} c_n [\text{Ci}(k_- k^{T-2t+\beta_n}) - \text{Ci}(k_- k^{\beta_n-t})] - \\ -s_n [\text{Si}(k_- k^{T-2t+\beta_n}) - \text{Si}(k_- k^{\beta_n-t})] \end{pmatrix}, & \text{si } -T < t < 0 \\ \frac{1}{2 \ln(k)} \begin{pmatrix} c_n [\text{Ci}(k_- k^{T-t+\beta_n}) - \text{Ci}(k_- k^{\beta_n})] - \\ -s_n [\text{Si}(k_- k^{T-t+\beta_n}) - \text{Si}(k_- k^{\beta_n})] \end{pmatrix}, & \text{si } 0 \leq t < T \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Evaluando el comportamiento asintótico de estas funciones fuera del punto singular ($t = \tau_n$), por ejemplo, para $\beta_n = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \text{Ci}(k_- k^{T-2t+\beta_n}) &= 0 & \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Ci}(k_- k^{T-t+\beta_n}) &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \text{Ci}(k_- k^{\beta_n-t}) &= 0 & \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Ci}(k_- k^{\beta_n}) &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \text{Si}(k_- k^{T-2t+\beta_n}) &= \pi/2 & \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Si}(k_- k^{T-t+\beta_n}) &= \pi/2 \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \text{Si}(k_- k^{\beta_n-t}) &= \pi/2 & \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Si}(k_- k^{\beta_n}) &= \pi/2 \end{aligned}$$

cuando combinamos por pares estas expresiones, como en (B.6), para cualquier valor positivo de T el resultado es:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \text{Ci}(k_- k^{T-2t+\beta_n}) - \text{Ci}(k_- k^{\beta_n-t}) &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Ci}(k_- k^{T-t+\beta_n}) - \text{Ci}(k_- k^{\beta_n}) &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \text{Si}(k_- k^{T-2t+\beta_n}) - \text{Si}(k_- k^{\beta_n-t}) &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Si}(k_- k^{T-t+\beta_n}) - \text{Si}(k_- k^{\beta_n}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Por tanto, salvo para ciertos valores que puedan tomar los parámetros iniciales, la base formada por $\{\tilde{u}_n(t)\}$ tiende a 0 a medida que se alejan de $t = \tau_n$. Podemos considerar que las funciones $\{\tilde{u}_n(t)\}$ son acotadas en energía, ya que no existen singularidades en su envolvente.

Si analizamos todos los pares de interés de las integrales senoidales y cosenoidales, que se encuentran presentes en la definición general de $\hat{u}_n(t)$:

$$\begin{aligned} \gamma_{n,1}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} W(\tau, t) \cos(k_+ k^{\tau+\beta_n-t}) d\tau = \frac{1}{\ln(k)} \begin{cases} \text{Ci}(k_+ k^{T-2t+\beta_n}) - \text{Ci}(k_+ k^{\beta_n-t}), & -T < t < 0 \\ \text{Ci}(k_+ k^{T-t+\beta_n}) - \text{Ci}(k_+ k^{\beta_n}), & 0 \leq t < T \end{cases} \\ \gamma_{n,2}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} W(\tau, t) \cos(k_- k^{\tau+\beta_n-t}) d\tau = \frac{1}{\ln(k)} \begin{cases} \text{Ci}(k_- k^{T-2t+\beta_n}) - \text{Ci}(k_- k^{\beta_n-t}), & -T < t < 0 \\ \text{Ci}(k_- k^{T-t+\beta_n}) - \text{Ci}(k_- k^{\beta_n}), & 0 \leq t < T \end{cases} \\ \gamma_{n,3}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} W(\tau, t) \text{sen}(k_+ k^{\tau+\beta_n-t}) d\tau = \frac{1}{\ln(k)} \begin{cases} \text{Si}(k_+ k^{T-2t+\beta_n}) - \text{Si}(k_+ k^{\beta_n-t}), & -T < t < 0 \\ \text{Si}(k_+ k^{T-t+\beta_n}) - \text{Si}(k_+ k^{\beta_n}), & 0 \leq t < T \end{cases} \\ \gamma_{n,4}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} W(\tau, t) \text{sen}(k_- k^{\tau+\beta_n-t}) d\tau = \frac{1}{\ln(k)} \begin{cases} \text{Si}(k_- k^{T-2t+\beta_n}) - \text{Si}(k_- k^{\beta_n-t}), & -T < t < 0 \\ \text{Si}(k_- k^{T-t+\beta_n}) - \text{Si}(k_- k^{\beta_n}), & 0 \leq t < T \end{cases} \end{aligned}$$

De acuerdo con § B.1.2, cada una de estas integrales puede ser aproximada por partes. Para fases de valor absoluto menores a 4, la integral senoidal se puede aproximar a un polinomio de primer orden más una función par, mientras que la integral cosenoidal se puede aproximar a la suma de un logaritmo y una función par. En la Figura B.1 se representan estas funciones para $n=0$.

Con esto en mente, es posible analizar la envolvente espectral de $\{\tilde{u}_n(t)\}$ y $\{\varrho_n(t)\}$ observando la definición de $\{\gamma_{n,m}(t)\}$ y como se ven afectadas por la distribución de fase:

A partir de la definición de $k_-(t)$ y $k_+(t)$ (véase (3.49)), para cualquier función lineal $r(t)$ se cumple que:

$$k_+ k^{r+\beta_n} = k_- k^{r+\beta_n} + \frac{4\pi f_0}{\ln(k)} k^r \quad (\text{B.8})$$

que relaciona las distribuciones de fase de las formas integrales $\gamma_{n,1}(t)$, $\gamma_{n,3}(t)$ con las de $\gamma_{n,2}(t)$ y $\gamma_{n,4}(t)$.

Basándose en el comportamiento asintótico de las integrales senoidales y cosenoidales (véase § B.1.2, para más detalles), estas se pueden aproximar a:

$$\text{Ci}(x) = p(x) \sin(x) - q(x) \cos(x) \quad (\text{B.9})$$

$$\text{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - p(x) \cos(x) - q(x) \sin(x) \quad (\text{B.10})$$

Estas son combinaciones de senos y cosenos de funciones arbitrarias, que incorporan una modulación en amplitud. Además, de la definición de $|p(x)|$ y $|q(x)|$ sabemos que: (i) ambas tienden a un valor constante cuando $t \rightarrow \pm\infty$, (ii) tienen un máximo en $x = 0$, y (iii) son monótonas decrecientes a medida que nos alejamos de $x = 0$.

De estas aproximaciones y basándose en Cohen [2000], se puede aplicar un análisis espectral similar al empleado por Novák et al. [2010] a las funciones $\{\gamma_{n,m}(t)\}$. Para ello nos focalizamos en una forma general tal que:

$$z(t) = a(\theta(t)) \cdot \sin(\theta(t)) \quad (\text{B.11})$$

Considerando la señal analítica de $z(t)$ obtenida a partir de su transformada de Hilbert, $z_s(t) = z(t) + \mathcal{H}[z(t)]$, obtenemos su espectro como:

$$|Z_s(f)| = \frac{a_s(\theta(t_f))}{\sqrt{\frac{1}{2\pi} \left| \frac{d^2 \theta_s(t_f)}{dt^2} \right|}} \quad (\text{B.12})$$

Este planteamiento se puede aplicar a las envolventes espectrales de las integrales que forman (B.9) y (B.10). Sin embargo, si tenemos en cuenta la inecuación (B.16) y las propiedades de $|p(x)|$ y $|q(x)|$, podemos extraer información relevante de los espectros de $\{\gamma_{n,m}(t)\}$, a los que denominaremos $|\Gamma_{n,m}(f)|$:

1. A medida que los valores absolutos de las distribuciones de fase aumentan, la amplitud de las funciones de modulación $p(x)$ y $q(x)$ disminuyen, por tanto:

$$|p(k_+ k^{r+\beta_n})| < |p(k_- k^{r+\beta_n})| \quad (\text{B.13})$$

$$|q(k_+ k^{r+\beta_n})| < |q(k_- k^{r+\beta_n})| \quad (\text{B.14})$$

2. De la ecuación (B.8), una vez calculada la segunda derivada de la fase obtenemos:

$$\frac{d^2 k_+ k^{r+\beta_n}}{dt^2} = \frac{d^2 k_- k^{r+\beta_n}}{dt^2} + 4\pi f_0 \ln(k) \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 k^r \quad (\text{B.15})$$

donde las derivadas segundas de las distribuciones de fase en k_+ y k_- son no negativas, y la variación en el

tiempo es siempre positiva. Por tanto:

$$\left| \frac{d^2 k_- k^{r+\beta_n}}{d t^2} \right| < \left| \frac{d^2 k_+ k^{r+\beta_n}}{d t^2} \right| \quad (\text{B.16})$$

3. En (B.9) y (B.10) siempre se aplican sumas coherentes, por tanto los resultados espectrales se corresponden con la suma de los espectros:

En conclusión, basándonos en (B.12) y en estas propiedades tenemos que:

$$|\Gamma_{n,1}(f)|, |\Gamma_{n,3}(f)| \ll |\Gamma_{n,2}(f)|, |\Gamma_{n,4}(f)| \quad \text{for } f_0 \leq f \leq f_1. \quad (\text{B.17})$$

□

Propiedad 2. A partir de la expresión $k_-(t) \cdot k^{\tau+\beta_n-t}$, de la cual depende la aproximación de las funciones $\tilde{u}_n(t)$, para valores específicos de t , como por ejemplo los límites de la integral de convolución podemos aplicar las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} k_- k^{T-2t+\beta_n} &= -\frac{2\pi f_0}{\ln(k)} \left(k^{+(t-\tau_n)} - 1 \right) = [\phi_0 - \phi(t - \tau_n)] \cdot k^{T-2t} \\ k_- k^{\beta_n-t} &= -\frac{2\pi f_0}{\ln(k)} \left(k^{+(t-\tau_n)} - 1 \right) k^T = [\phi_0 - \phi(t - \tau_n)] \cdot k^{-t} \\ k_- k^{T-t+\beta_n} &= -\frac{2\pi f_0}{\ln(k)} \left(k^{+(t-\tau_n)} - 1 \right) = [\phi_0 - \phi(t - \tau_n)] \cdot k^{T-t} \\ k_- k^{\beta_n} &= -\frac{2\pi f_0}{\ln(k)} \left(k^{+(t-\tau_n)} - 1 \right) k^T = [\phi_0 - \phi(t - \tau_n)] \end{aligned}$$

Por tanto, estas funciones en t pueden escribirse en términos de funciones de fase desplazadas τ . Por tanto, las funciones trigonométricas contenidas en (3.49) son tonos de frecuencia variable exponencial íntimamente relacionadas con la entrada de test.

Propiedad 3. Los senos y cosenos contenidos en la definición de las funciones $u_n(t)$, están relacionados mediante una derivación en tiempo:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(k_- k^{\tau+\beta_n-t}) d\tau = \left(-\frac{1}{2} \ln(k) \cdot k_+(t) \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sen}(k_- k^{\tau+\beta_n-t}) d\tau \quad (\text{B.18})$$

DEMOSTRACIÓN: Esta relación se demuestra de forma directa a partir de una derivada elemental:

$$\frac{d}{dt} k_-(t) = -\frac{1}{2} \ln(k) \cdot k_+(t) \quad (\text{B.19})$$

□

Propiedad 4. Las aproximaciones $\hat{u}_n(t)$ de $\tilde{u}_n(t)$ son viables. Basándonos en la descomposición $\hat{u}_n(t) = \tilde{u}_n(t) + \varrho_n(t)$ (véase (3.26)), suponemos que $\tilde{u}_n(t)$ es aceptable, siempre y cuando se cumpla que $|P_n(f)| \ll |U_n(f)|$ en el ancho de banda de interés $f_0 \leq f \leq f_1$:

La desviación existente ente $\hat{u}_n(t)$ de $\tilde{u}_n(t)$ se define como:

$$\begin{aligned} \varrho_n(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} W(\tau, t) \left(\cos(k_+ k^{\tau+\beta_n-t}) [c_n \cos(2\Delta\phi) + s_n \text{sen}(2\Delta\phi)] + \right. \\ \left. + \text{sen}(k_+ k^{\tau+\beta_n-t}) [s_n \cos(2\Delta\phi) - c_n \text{sen}(2\Delta\phi)] \right) d\tau \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

y el término de aproximación como:

$$\tilde{u}_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\tau, t) \cdot \left(\frac{c_n}{2} \cos(k_- k^{\tau+\beta_n-t}) - \frac{s_n}{2} \text{sen}(k_- k^{\tau+\beta_n-t}) \right) d\tau$$

DEMOSTRACIÓN: En ambos, el término de aproximación y el de desviación se pueden expresar en función de las distribuciones $\{\gamma_{n,m}(t)\}_{m \in \{1,2,3,4\}}$, definidas en la Propiedad 1. Considerando las constantes c_n y s_n :

$$\begin{aligned}\varrho_n(t) &= \frac{1}{2} \cos((3-n) \cdot \Delta\phi) \cdot \gamma_{n,1}(t) + \frac{1}{2} \sin((-1-n) \cdot \Delta\phi) \cdot \gamma_{n,3}(t) \\ \tilde{u}_n(t) &= \frac{1}{2} \cos((1-n) \cdot \Delta\phi) \cdot \gamma_{n,2}(t) + \frac{1}{2} \sin((1-n) \cdot \Delta\phi) \cdot \gamma_{n,4}(t)\end{aligned}$$

donde $\varrho_n(t)$, teniendo en cuenta las relaciones trigonométricas, puede reescribirse como:

$$\begin{aligned}\varrho_n(t) &= \cos((1-n) \cdot \Delta\phi)/2 \cdot \left[\cos(2\Delta\phi) \cdot \gamma_{n,1}(t) - \sin(2\Delta\phi) \cdot \gamma_{n,3}(t) \right] + \\ &+ \sin((1-n) \cdot \Delta\phi)/2 \cdot \left[\sin(2\Delta\phi) \cdot \gamma_{n,1}(t) + \cos(2\Delta\phi) \cdot \gamma_{n,3}(t) \right]\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la propiedad de linealidad de la transformada de Fourier:

$$\begin{aligned}P_n(f) &= \cos((1-n) \cdot \Delta\phi)/2 \cdot \left[\cos(2\Delta\phi) \cdot \Gamma_{n,1}(f) - \sin(2\Delta\phi) \cdot \Gamma_{n,3}(f) \right] + \\ &+ \sin((1-n) \cdot \Delta\phi)/2 \cdot \left[\sin(2\Delta\phi) \cdot \Gamma_{n,1}(f) + \cos(2\Delta\phi) \cdot \Gamma_{n,3}(f) \right] \\ U_n(f) &= \cos((1-n) \cdot \Delta\phi)/2 \cdot \Gamma_{n,2}(f) + \sin((1-n) \cdot \Delta\phi)/2 \cdot \Gamma_{n,4}(f)\end{aligned}$$

Dado que la Propiedad 1 se cumple, $|\Gamma_{n,1}(f)|, |\Gamma_{n,3}(f)| \ll |\Gamma_{n,2}(f)|, |\Gamma_{n,4}(f)|$; y teniendo en cuenta que las constantes c_n y a_n se encuentran acotadas:

$$|P_n(f)| \ll |U_n(f)|$$

□

Propiedad 5. La función $b(t)$, resultado de filtrar las distribuciones $\{u_n(t)\}$ por $v(t)$, tiene naturaleza impulsiva.

DEMOSTRACIÓN: En el dominio temporal $b(t)$ se define como:

$$b(t) = \frac{-2}{\ln(k)} \cdot \left[v(t) * \frac{v^{-1}(t)}{k_+(t)} \right] \quad (\text{B.21})$$

Teniendo en cuenta que $1/k_+$ es continua, de baja frecuencia, monomodal y simétrica (véase Figura 3.12), la transformada de Fourier de $b(t)$ se corresponderá con:

$$\mathcal{F}\{b(t)\} = \frac{-2}{\ln(k)} \cdot \mathcal{F}\{v(t)\} \cdot \left(\mathcal{F}\left\{ \frac{1}{k_+(t)} \right\} * \frac{1}{\mathcal{F}\{v(t)\}} \right) \quad (\text{B.22})$$

Para simplificar el análisis tomaremos como referencia el comportamiento para el primer orden: $n = 0$ ($\tau_n = 0, \beta_n = t/2$). Para otros valores de n tenemos que contar únicamente con un retardo, que solamente influye en nuestro análisis de forma lineal.

$$\mathcal{F}\left\{ \frac{1}{k_+(t)} \right\} = \frac{\ln(k)}{2\pi f_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k^{-t/2}}{1+k^{-t}} e^{-i2\pi f t} dt = \frac{\ln(k)}{2\pi f_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t/2 \ln(k)}}{1+e^{-t \ln(k)}} e^{-i2\pi f t} dt \quad (\text{B.23})$$

Aplicando la sustitución $s = e^t$:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{k_+(t)}\right\} = \frac{\ln(k)}{2\pi f_0} \int_0^{+\infty} \frac{s^{-\frac{1}{2}\ln(k)-i2\pi f-1}}{1+s^{-\ln(k)}} ds \quad (\text{B.24})$$

La integral expuesta en (B.24) converge a:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{k_+(t)}\right\} = \frac{1}{2f_0} \csc\left(\pi\left(\frac{1}{2} + i\frac{2\pi f}{\ln(k)}\right)\right) = \frac{1}{2f_0 \cosh\left(\frac{2\pi^2 f}{\ln(k)}\right)} \quad (\text{B.25})$$

La expresión resultante de la transformada Fourier de $1/k_+(t)$ se aproxima al comportamiento de una delta de Dirac. Como (B.22) es comparable a $-[1/f_0 \ln(k)]$, por tanto, $b(t)$ se puede considerar de naturaleza impulsiva.

□

B.1.2. Evaluación eficiente de $\text{Ci}(x)$ y $\text{Si}(x)$

Las integrales trigonométricas $\text{Ci}(x)$ y $\text{Si}(x)$ aparecen recurrentemente en el ámbito de la física, las matemáticas y la señales. Han sido ampliamente estudiadas y existen diferentes aproximaciones matemáticas que permiten obtener resultados fiables. En este caso se ha optado por aplicar una aproximación polinómica, debido al tratamiento de estas dos funciones a lo largo de esta Tesis.

La *integral senoidal* es esencialmente el resultado de la convolución de un seno con una función de Heaviside, causante del fenómeno de Gibbs en la aproximación mediante series de Fourier truncadas de las señales.

$$\text{Ci}(x) = \begin{cases} p(x)\sin(x) - q(x)\cos(x) & \text{si } |x| > 4 \\ 0.577215664901532861 + \ln(x) + \\ + \frac{\begin{pmatrix} -0.25 + 7.51851524438898291 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 & -1.27528342240267686 \cdot 10^{-4} \cdot x^4 & + \\ + 1.05297363846239184 \cdot 10^{-6} \cdot x^6 & -4.68889508144848019 \cdot 10^{-9} \cdot x^8 & + \\ + 1.06480802891189243 \cdot 10^{-11} \cdot x^{10} & -9.93728488857585407 \cdot 10^{-15} \cdot x^{12} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 + 1.1592605689110735 \cdot 10^{-2} \cdot x^2 & + 6.72126800814254432 \cdot 10^{-5} \cdot x^4 & + \\ + 2.55533277086129636 \cdot 10^{-7} \cdot x^6 & + 6.97071295760958946 \cdot 10^{-10} \cdot x^8 & + \\ + 1.38536352772778619 \cdot 10^{-12} \cdot x^{10} & + 1.89106054713059759 \cdot 10^{-15} \cdot x^{12} & + \\ & - 1.39759616731376855 \cdot 10^{-18} \cdot x^{14} \end{pmatrix}} & \text{en el resto} \end{cases} \quad (\text{B.26})$$

$$\text{Si}(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - p(x)\cos(x) - q(x)\sin(x) & \text{si } |x| > 4 \\ x \cdot \frac{\begin{pmatrix} 1 - 4.54393409816329991 \cdot 10^{-2} \cdot x^2 & + 1.15457225751016682 \cdot 10^{-3} \cdot x^4 & - \\ - 1.41018536821330254 \cdot 10^{-5} \cdot x^6 & + 9.43280809438713025 \cdot 10^{-8} \cdot x^8 & - \\ - 3.53201978997168357 \cdot 10^{-10} \cdot x^{10} & + 7.08240282274875911 \cdot 10^{-13} \cdot x^{12} & - \\ & - 6.05338212010422477 \cdot 10^{-16} \cdot x^{14} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 + 1.01162145739225565 \cdot 10^{-2} \cdot x^2 & + 4.99175116169755106 \cdot 10^{-5} \cdot x^4 & + \\ + 1.55654986308745614 \cdot 10^{-7} \cdot x^6 & + 3.28067571055789734 \cdot 10^{-10} \cdot x^8 & + \\ + 4.5049097575386581 \cdot 10^{-13} \cdot x^{10} & + 3.21107051193712168 \cdot 10^{-16} \cdot x^{12} \end{pmatrix}} & \text{en el resto} \end{cases} \quad (\text{B.27})$$

B.2. Invertibilidad de la matriz que relaciona los coeficientes $\mathbf{h}$ y $\tilde{\mathbf{h}}$

La recuperación de los coeficientes reales $\mathbf{h}$, a partir de las estimas $\tilde{\mathbf{h}}$ depende tanto de la determinación absoluta del producto $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ como de la posibilidad de la invertir dicha matriz. Si reescribimos la expresión (3.137):

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) \quad (\text{B.28})$$

Como:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \varepsilon \mathbf{1}_{|I_1|,|I_1|} & \varepsilon^2 \mathbf{1}_{|I_1|,|I_2|} & \dots & \varepsilon^N \mathbf{1}_{|I_1|,|I_N|} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{|I_1|,|I_1|} & \mathbf{Y}_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{B.29})$$

Podemos asegurar que la matriz $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})$ es singular, conteniendo al menos $|I_1|$ columnas iguales. Por tanto:

$$\det(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X} + \mathbf{Y})) = \det(\mathbf{A}) \underbrace{\det(\mathbf{X} + \mathbf{Y})}_0 = 0 \quad (\text{B.30})$$

Representamos entonces el producto $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ como la suma de una matriz identidad y un matriz $\mathbf{B}$, normalizada con respecto a la norma de Frobenius, α :

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} + \alpha \mathbf{B} \quad (\text{B.31})$$

Sea $\mathbf{U}^* \mathbf{S}_B \mathbf{V}$ la descomposición en valores singulares de la matriz $\mathbf{B}$, se cumple que:

$$\kappa(\mathbf{I} + \alpha \mathbf{B}) = \kappa(\mathbf{U}^*(\mathbf{I} + \alpha \mathbf{B})\mathbf{V}) \quad (\text{B.32})$$

Por la definición de la descomposición [SVD](#), las matrices $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ son unitarias. Para asegurar que se cumple [\(B.32\)](#) partimos de la premisa:

$$\lambda(\mathbf{C}^* \mathbf{C}) = \lambda(\mathbf{C})^2 \quad (\text{B.33})$$

Para cualquier matriz cuadrada $\mathbf{C}$, los autovalores, si aplicamos la descomposición de Schur, cumplen que:

$$\lambda(\mathbf{C}^* \mathbf{C}) = \lambda(\mathbf{Q}^* \mathbf{D} \mathbf{Q}) = \lambda(\mathbf{D}) \quad (\text{B.34})$$

Si realizamos el mismo procedimiento, esta vez para determinar los autovalores de $\mathbf{U}^*(\mathbf{C}^* \mathbf{C})\mathbf{V}$:

$$\lambda(\mathbf{U}^* \mathbf{C}^* \mathbf{C} \mathbf{V}) = \lambda(\underbrace{\mathbf{U}^* \mathbf{Q}^*}_{\text{unitaria}} \underbrace{\mathbf{D} \mathbf{Q} \mathbf{V}}_{\text{unitaria}}) = \lambda(\mathbf{D}) \quad (\text{B.35})$$

Mediante [\(B.33\)](#), [\(B.34\)](#) y [\(B.35\)](#) queda demostrada [\(B.32\)](#), lo que nos permite afirmar que siendo:

$$\mathbf{U}^*(\mathbf{I} + \alpha \mathbf{B})\mathbf{V} = \alpha \mathbf{S}_B + \mathbf{U}^* \mathbf{V} = \alpha \underbrace{\mathbf{S}_B}_{\text{diagonal}} + \underbrace{\mathbf{W}}_{\text{unitaria}} \quad (\text{B.36})$$

Y además es normal:

$$\begin{aligned} (\alpha \mathbf{S}_B + \mathbf{W})(\alpha \mathbf{S}_B + \mathbf{W})^* &= \alpha^2 \mathbf{S}_B^2 + \alpha \mathbf{S}_B^* \mathbf{W} + \alpha \mathbf{S}_B \mathbf{W}^* + \mathbf{I} \\ (\alpha \mathbf{S}_B + \mathbf{W})^*(\alpha \mathbf{S}_B + \mathbf{W}) &= \alpha^2 \mathbf{S}_B^2 + \alpha \mathbf{S}_B \mathbf{W}^* + \alpha \mathbf{S}_B^* \mathbf{W} + \mathbf{I} \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Por tanto se puede aplicar que:

$$\kappa(\alpha \mathbf{S}_B + \mathbf{W}) = \left| \frac{\lambda_{\text{MAX}}(\alpha \mathbf{S}_B + \mathbf{W})}{\lambda_{\text{MIN}}(\alpha \mathbf{S}_B + \mathbf{W})} \right| \quad (\text{B.38})$$

Si denominamos ahora $\mathbf{Z} = \alpha \mathbf{S}_B + \mathbf{W}$ los números de condición:

$$\kappa(\mathbf{Z}) = \left| \frac{\lambda_{\text{MAX}}(\mathbf{Z})}{\lambda_{\text{MIN}}(\mathbf{Z})} \right| \quad \kappa(\alpha \mathbf{S}_B) = \left| \frac{\lambda_{\text{MAX}}(\alpha \mathbf{S}_B)}{\lambda_{\text{MIN}}(\alpha \mathbf{S}_B)} \right| \quad (\text{B.39})$$

Suponemos ahora que $\kappa(\mathbf{Z}) > \kappa(\alpha \mathbf{S}_B)$, por tanto:

$$|\lambda_{\text{MAX}}(\mathbf{Z})| \cdot |\lambda_{\text{MIN}}(\alpha \mathbf{S}_B)| > |\lambda_{\text{MAX}}(\alpha \mathbf{S}_B)| \cdot |\lambda_{\text{MIN}}(\mathbf{W})| \quad (\text{B.40})$$

Como $\alpha \mathbf{S}_B$ es una matriz diagonal, cuyas últimas filas son nulas, su determinante es 0, de lo que se deduce que necesariamente $\kappa(\alpha \mathbf{S}_B) = \infty$ y $\lambda_{\text{MIN}}(\alpha \mathbf{S}_B) = 0$:

$$0 \geq |\lambda_{\text{MAX}}(\alpha \mathbf{S}_B)| \cdot |\lambda_{\text{MAX}}(\mathbf{W})| \quad (\text{B.41})$$

Por reducción al absurdo, podemos asegurar que $\kappa(\mathbf{Z}) < \kappa(\alpha \mathbf{S}_B)$. Por tanto, siempre y cuando el factor α se encuentre acotado, la matriz que relaciona los coeficientes perturbados y reales es invertible, y por tanto podemos recuperar la información de unos contenida en los otros.

Apéndice

C

CONSIDERACIONES ANEJAS AL DISEÑO DEL ARRAY PARAMÉTRICO

En este Apéndice se detallan consideraciones anejas al diseño del *array paramétrico*, tales como la aproximación del patrón de directividad del *array*, el cálculo de constantes acústicas relacionadas con la transmisión no lineal acústica, así como el esbozo de la normativa actual referente a la tolerancia del ser humano a los niveles de señales acústicas ultrasónicas.

C.1. Teoría básica de *arrays* acústicos.

Como primera aproximación de la directividad global del array propuesto partimos de la teoría básica de superposición. Si el punto de observación se encuentra a cierta distancia del array cada una de las contribuciones de los elementos se puede expresar como:

$$p(r, \theta, \phi) = \frac{P_0}{r} D(\theta, \phi) e^{-j\omega r} \quad (\text{C.1})$$

En nuestra geometría, los elementos empleados en formación del array tienen simetría de rotación con respecto al eje de propagación z , por tanto, la directividad de cada uno de los elementos sólo depende de θ , por tanto $D_0(\theta, \phi) = D_0(\theta)$.

Para simplificar el estudio del problema, definimos la estructura del array en el plano XY y posicionamos todos los elementos del array de tal forma que su eje de radiación principal (z') sea paralelo al eje z . Cada uno de estos elementos se situará en un punto $\mathbf{q}_n$ cuyas coordenadas esféricas se corresponderán con $\langle q_{r,n}, q_{\theta,n}, q_{\phi,n} \rangle$. El punto de observación vendrá definido por: $\mathbf{p} = \langle p_r, p_\theta, p_\phi \rangle$.

La distancia entre el punto de observación y el transductor n -ésimo se puede hallar mediante la siguiente relación trigonométrica:

$$r_n = \sqrt{p_r^2 + q_r^2 - 2q_r p_r \psi_n} \quad (\text{C.2})$$

Siendo ψ_n el ángulo que forman los vectores $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}_n$, como se muestra en la Figura C.1

FIGURA C.1: Geometría básica para el estudio del patrón de directividad de un *array*, para el caso de una geometría dispuesta sobre el plano XY

Si el punto de observación se encuentra a una distancia lo suficientemente grande con respecto del *array*, ($p_r \gg q_r$), podemos realizar la siguiente aproximación:

$$r_n \simeq p_r - q_r \cos(\psi_n) = p_r - q_r (\mathbf{q}_n \cdot \mathbf{p}) \quad (\text{C.3})$$

Expresando los vectores $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ mediante coordenadas cartesianas tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_n &= \mathbf{x} \cos(q_{\phi,n}) + \mathbf{y} \sin(q_{\phi,n}) \\ \mathbf{p} &= \mathbf{x} \sin(p_{\theta}) \cos(p_{\phi}) + \mathbf{y} \sin(p_{\theta}) \sin(p_{\phi}) + \mathbf{z} \cos(p_{\theta}) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Entonces el valor de la distancia entre el transductor y el punto de observación se puede expresar como:

$$r_n \simeq p_r - q_r \sin(p_{\theta}) (\cos(q_{\phi,n}) \cos(p_{\phi}) + \sin(q_{\phi,n}) \sin(p_{\phi})) = p_r - q_r \sin(p_{\theta}) \cos(p_{\phi} - q_{\phi,n}) \quad (\text{C.5})$$

Además ($p_r \gg q_r$) implica que el vector que une el origen con $\mathbf{p}$ es prácticamente paralelo al vector que une los puntos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$, por tanto podemos realizar la aproximación $\varphi \simeq p_{\theta}$ y asegurar que la amplitud en el punto $\mathbf{p}$ es similar a la que se recibiría si el transductor se encontrase en el origen, viéndose sólo afectada la fase de llegada de la onda.

Por tanto, podemos aproximar la contribución de cada transductor a la presión en el punto $\mathbf{p}$ como:

$$P_n(r, \theta, \phi) = \frac{e^{-jkr}}{r} D_n(\theta) a_n e^{jk q_{r,n} \sin(\theta) \cos(\phi - q_{\phi,n})} \quad (\text{C.6})$$

Donde a_n es un número complejo que indica la fase y la amplitud de presión p_0 emitida por el transductor n -ésimo. Suponiendo que todos los transductores emitan en fase, como es el caso de la geometría que se ha propuesto, y todos dispongan de un patrón de directividad similar, con simetría de rotación con respecto al eje de propagación, si aplicando el principio de superposición tenemos que:

$$P(r, \theta, \phi) = \frac{P_0 e^{-jkr}}{r} D(\theta) \sum_{n=1}^N a_n e^{jkq_{r,n} \sin(\theta) \cos(\phi - q_{\phi,n})} \quad (C.7)$$

Esta expresión permite relacionar la directividad de la estructura completa con la de un único elemento, mediante el *factor de array*:

$$D_{\text{array}}(\theta, \phi) = D(\theta) AF(\theta, \phi) \quad \text{siendo el factor de array} \quad AF(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^N a_n e^{jkq_{r,n} \sin(\theta) \cos(\phi - q_{\phi,n})} \quad (C.8)$$

Esta aproximación se puede emplear como guía de diseño, sin embargo, la peculiar forma de propagación de este tipo de estructuras hace que este patrón de directividad se tome como referencia de radiación únicamente para la frecuencia portadora. En el caso de la onda secundaria, diversos autores han propuesto modelos que aproximan el patrón de directividad global a partir de este modelo de radiación (Rolleigh [1975], Moffett y Mellen [1977], Moffett et al. [1978]).

C.2. Constantes relacionadas con la transmisión del sonido en el medio aéreo

Todas las constantes empleadas a lo largo de esta Tesis referentes al aire como sistema de transmisión han sido calculadas imponiendo las condiciones de Estándar Métrico Internacional para gases naturales, siguiendo la norma ISO 13443 (véanse [International Organization for Standardization \[1993\]](#) y [Asociación Española de Normalización y Certificación \[2006\]](#)).

En la Tabla C.1 se detallan los valores empleados a lo largo de la Tesis como constantes referentes a la transmisión en el aire de las ondas acústicas, aunque más adelante se detallan aspectos importantes para poder recalcular estos valores si las condiciones de partida no son las especificadas en la Tabla C.1 B.

A: Constantes empleadas a lo largo de Tesis			
Símbolo	Parámetro	Valor [†]	Unidad
c_0	Velocidad de propagación	343.21	m/s
ρ_0	Densidad del aire	1.2041	kg/m ³
α	Constante de atenuación	0.2606	Np/m
β	Constante de no linealidad	1.2 ^{††}	adimensional
B/A	Coefficiente de no linealidad	0.4 ^{††}	adimensional
ϵ_0	Permitividad dieléctrica	$8.854 \cdot 10^{-12}$	F/m

[†] Para los parámetros ambientales de la Tabla B.
^{††} Extraído de [Hamilton y Blackstock \[1998\]](#).

B: Condiciones atmosféricas de partida.		
Parámetro	Valor	Unidad
Presión atmosférica	1	atm
Temperatura	20	C°
Humedad relativa	20	%

TABLA C.1: Constantes relacionadas con la transmisión del sonido en el medio aéreo y el funcionamiento de los transductores empleadas a lo largo de Tesis

C.2.1. Velocidad de propagación del aire

La velocidad de propagación del sonido en el aire depende de diversos factores ambientales: la presión, la temperatura, la humedad, la velocidad del viento, etc. Siendo rigurosos este parámetro se expresa en términos de

las propiedades termodinámicas de los fluidos:

$$c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\text{medio adiabático}} \quad (\text{C.9})$$

donde ρ es la densidad del fluido y P la presión a la que se encuentra sometido.

Esta ecuación se puede simplificar para un gas ideal como:

$$c^2 = \gamma \frac{P_0}{\rho_0} \quad (\text{C.10})$$

donde γ es el índice adiabático.

C.2.2. Absorción del aire

El coeficiente de absorción de las ondas sonoras es un parámetro complejo que depende de magnitudes tales como la presión atmosférica, la temperatura o la composición del aire. Para calcular este valor, en el caso de la transmisión de un tono puro de frecuencia f , se toma como referencia la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{a}{p_s} = & \frac{20}{\ln 10} \frac{F^2}{p_{s0}} \left\{ 1.84 \times 10^{-11} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1/2} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-5/2} \left[0.01278 \frac{e^{-\frac{2239.1}{T}}}{F_{r,O} + \frac{F^2}{F_{r,O}}} + 0.1068 \frac{e^{-\frac{3352}{T}}}{F_{r,N} + \frac{F^2}{F_{r,N}}} \right] \right\} \left(\frac{\text{dB}}{\text{m} \cdot \text{atm}} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

donde $F = f/p_s$, $F_{r,O} = f_{r,O}/p_s$, y $F_{r,N} = f_{r,N}/p_s$, y p_s es la presión atmosférica en atmósferas, p_{s0} es la presión de referencia (1 atm.), T es la temperatura ambiental en K°, T_0 es la temperatura de referencia (293.15 K°). La composición molecular del aire influye en esta expresión ya que las frecuencias de relajación del oxígeno y el nitrógeno se modifican mediante:

$$F_{r,O} = 24 + 4.04 \cdot 10^4 h \frac{0.02 + h}{0.391 + h} \quad F_{r,N} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-1/2} 9 + 280 h e^{-4.17 \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^{-1/3} - 1 \right]} \quad (\text{C.12})$$

Donde h es la concentración molar del agua en tanto por ciento.

C.2.3. Constantes de no linealidad β y relación B/A

Dado los altos niveles de presión sonora involucrados en el ámbito de esta Tesis, es necesario recurrir a las expresiones no lineales que describen el comportamiento de los gases y el movimiento de las partículas en los mismos, así tenemos estas tres principales expresiones:

$$\text{Ecuación de movimiento:} \quad \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p' = 0 \quad (\text{C.13a})$$

$$\text{Ecuación de continuidad:} \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{C.13b})$$

$$\text{Ecuación de estado:} \quad p' = c_0^2 \rho' \quad c_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (\text{C.13c})$$

Donde $\mathbf{v}$ es la velocidad de las partículas, ρ la densidad del medio, p la presión, s la entropía del medio y T la temperatura. Como presión y densidad de equilibrio de medio se toman p_0 y ρ_0 y $p' = p - p_0$ y $\rho' = \rho - \rho_0$.

Para facilitar su estudio, las ecuaciones C.13 pueden representarse en función del potencial de la velocidad de

las partículas:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \varphi = 0 \quad (\text{C.14})$$

en donde:

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi \quad p' = -\rho'_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{y} \quad \rho' = -\frac{\rho'}{c_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (\text{C.15})$$

Todas estas ecuaciones no tienen en cuenta los fenómenos no lineales de disipación, variación de temperatura o viscosidad. Tradicionalmente, todos estos efectos se consideran poco relevantes, y complican el estudio del comportamiento de las ondas de presión. Sin embargo, si tenemos en cuenta la presencia de la no linealidad hasta el segundo orden, la ecuación de estado (C.13c) pasa a contar con un término adicional:

$$p' = c_0^2 \rho' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial c}{\partial \rho} \right)_s \rho'^2 \quad (\text{C.16})$$

Esta fórmula a menudo se representa como:

$$p' = A \left(\frac{\rho'}{\rho_0} \right) + \frac{B}{2} \left(\frac{\rho'}{\rho_0} \right)^2 \quad (\text{C.17})$$

Siendo B/A el cociente que caracteriza el índice de no linealidad del medio y ρ'/ρ_0 es el número de Mach, M . Por tanto:

$$\frac{B}{A} = \frac{\rho_0 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_{\rho_0, s_0}}{c_0^2} \quad (\text{C.18})$$

Si se tiene en cuenta las no linealidades del medio, este ya no se rige por la ecuación de los medios adiabáticos en la forma de Poisson¹, si no que se ha de emplear la fórmula empírica de Tate:

$$p = A_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - A_1 \quad (\text{C.19})$$

donde A_0 , A_1 y γ son constantes dependientes de la temperatura y $A_0 - A_1 = p_0$, siendo p_0 la presión hidrostática. Se cumple entonces que:

$$c_0^2 = \frac{\gamma A_0}{\rho_0}, \quad \left(\frac{\partial c^2}{\partial \rho} \right)_s = \frac{c_0^2 (\gamma - 1)}{\rho_0} \quad (\text{C.20})$$

Comparando (C.17), (C.14) y (C.20) se puede relacionar el coeficiente adiabático con los el parámetro B/A:

$$\frac{B}{A} = \gamma - 1 \quad (\text{C.21})$$

El parámetro B/A se relaciona a su vez con la constante de no linealidad de transmisión del medio mediante:

$$\beta = 1 + \frac{B}{2A} \quad (\text{C.22})$$

siendo β la constante que relaciona la onda de presión primaria y secundaria mediante la expresión de Berkay (véase (2.18)) y que determina la parte no lineal de la transmisión de la onda en la ecuación KZK, (2.5).

¹ $\frac{p}{\rho_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$ siendo el coeficiente adiabático $\gamma = C_p/C_v$, tomada la presión C_p y el volumen C_v a una temperatura específica

C.3. Tolerancia a la exposición del ser humano a los ultrasonidos.

Debido a la naturaleza del *array paramétrico*, en el que los niveles de trabajo son superiores a los niveles emitidos por los altavoces estándar, es necesario apuntar los efectos que estos niveles pueden provocar en el ser humano. Como la mayoría de la energía acústica se refleja en la piel humana, la mayor parte de los efectos indeseables de la exposición niveles altos para estas frecuencias se relacionan con efectos nocivos para el oído. A pesar de que existen pocas referencias concretas sobre los efectos de los ultrasonidos para estas aplicaciones en concreto, si existen referencias que corroboran la presencia de fatiga acústica en los oyentes para frecuencias cercanas al rango empleado en este sistema [Norris \[1997\]](#), aunque estos síntomas varían de persona a persona.

f (kHz) [†]	Japón (1971)	Australia (1981)	Francia (1985)	EE.UU. (1981)	Canadá (1991)	Suecia (1992)	IRPA (1984)
31.5	110	110	110	115	110	115	110
40	110	110	110	115	110	115	110
50	110	110	110	115	110	110	115
63					110	110	115
80					110	110	115
100					110	110	115

[†] Frecuencia central de la bandas de tercio de octava.

TABLA C.2: Valores tolerables en exposición continua a los ultrasonidos. Datos extraídos de [Gan et al. \[2012\]](#) y [Smagowska y Pawlaczyk-Luszczynska \[2013\]](#)

La mayor parte de los efectos nocivos son temporales, y desaparecen una vez se elimina la exposición. Sin embargo, no existen evidencias que relacionen la exposición a los ultrasonidos con la pérdida auditiva.

Las recomendaciones y normativa vigente es fruto del esfuerzo de asociaciones internacionales de salud así como de los estados. Estas guías se centran en el ámbito industrial, ya que en el ambiente fabril se producen ultrasonidos en los procesos de limpieza fabricación de piezas o soldado. La mayoría de estas guías recomiendan límites que van desde los 110 a 115 dB para frecuencias superiores a los 20 kHz ya que con estos niveles no se aprecia pérdida auditiva.

En la Tabla C.2 se muestran los niveles permitidos en estas bandas según ciertos países y organizaciones. Estos niveles se basan en exposiciones de ocho horas, ya que en algunos informes estos niveles se incrementan si la exposición es más corta. Por ejemplo, el comité de la [IRPA](#) incrementa estos niveles en 3 dB para exposiciones de dos a cuatro horas. Sin embargo, otras asociaciones, como por ejemplo la *Asociación de Salud Canadiense* no contemplan esta diferencia [Bly y Morison \[1991\]](#).

Actualmente no existe regulación específica gubernamental acerca de esta banda acústica, ni estadounidense, ni europea. Sin embargo, la [OSHA](#) ha publicado informes que sugieren ciertos límites basados en las sugerencias del expuestas en el [ACGIH](#). En este congreso se añaden hasta 30 dB por encima de las recomendaciones habituales, alcanzando los 145 dB.

La falta de datos concretos, junto con la dispersión de los mismos, indica la clara necesidad de un estudio sobre estos efectos en el ser humano para que la aplicación de los *arrays paramétricos* se convierta en común. Un grupo de expertos, liderado por el profesor Martin Lenhardt, especialista en bioacústica y en los efectos de los ultrasonidos en los seres humanos, supervisado por Richard Wilson del Centro de Análisis de Riesgos de la Universidad de Harvard realizaron un estudio para complementar el trabajo de Pompei en su Tesis Doctoral², previo a la realización de su patente [Pompei \[2013\]](#). En el estudio se concluye que los riesgos de emplear este tipo de estructuras son similares a los provocados por la exposición a altavoces convencionales, concluyendo que los efectos de los ultrasonidos no son nocivos para los sujetos, siempre y cuando se trabaje a una banda superior a los 30 kHz.

Debido al desarrollo de estas estructuras en los últimos años podemos añadir a este estudio otros más recientes como [Howard et al. \[2005\]](#) y [Tan y Tanaka \[2006\]](#), que prácticamente exponen las mismas conclusiones.

²Este trabajo se puede consultar como apéndice la Tesis en [Pompei \[2002\]](#)

Los riesgos asociados a la exposición de este tipo de altavoces se agrupan en tres áreas principales:

- *Efectos directos sobre la piel:* Dado que en este tipo de sistemas se manejan niveles elevados de presión sonora, no es descabellado suponer que éstos pueden llegar a producir calor si se enfrentan al absorbente adecuado. Sin embargo, ni la piel humana, ni la mayoría de los tejidos habituales poseen una impedancia adecuada para que se dé este fenómeno, al extremo de aumentar la temperatura de forma apreciable.
- *Efectos en el sistema auditivo:* Como ya se ha mencionado con anterioridad, todos los estudios centrados en este campo provienen de área de riesgos laborales. Se han detectado pérdidas auditivas temporales cuando los niveles superan 145 dB, entre los 17 y los 37 kHz, lo que apunta la necesidad de aumentar la frecuencia de la portadora. Algunos estudios apuntan a la posible aparición de subarmónicos en el oído medio, sin embargo estos niveles aún no han sido evaluados con rigor.
- *Efectos subjetivos:* en algunos sujetos se han dado evidencias de mareos, zumbidos o dolor temporal de oído, pero sólo a frecuencias inferiores a los 40 kHz.

Dado que los niveles recomendables para obtener niveles adecuados de en la onda secundaria rondan los 120 dB en campo cercano, aunque a distancias normales de escucha no superen los 100 dB, según la Tabla C.2 pueden considerarse peligrosos. Sin embargo, estudios recientes como [Lee et al. \[2012\]](#) y [Lee et al. \[2010\]](#), realizados por psicólogos y neurólogos han demostrado que estas estructuras pueden incluso ser menos estresantes que los altavoces convencionales, aplicando siempre este sistema a test de frases cortas e incluso pueden favorecer la inteligibilidad en sujetos con pérdidas auditivas [Mehta \[2015\]](#).

A pesar de todas estas evidencias, sería recomendable aplicar otro tipo de modulaciones que disminuyan la presencia de portadora y por tanto aplicando una exposición menor al oyente a niveles altos ultrasónicos tonales.

Bibliografía

A continuación se enumeran las referencias bibliográficas citadas en esta Tesis. A final de cada entrada se indican los números de página en los que ha sido empleada dicha cita.

- SIGURD IVAR AANONSEN, TOR BARKVE, JACQUELINE NAZE TJØTTA, Y SIGVE TJØTTA. Distortion and harmonic generation in the nearfield of a finite amplitude sound beam. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 75(3):749–768, 1984. doi: 10.1121/1.390585. URL <http://scitation.aip.org/content/asa/journal/jasa/75/3/10.1121/1.390585>. 188
- MILTON ABRAMOWITZ Y IRENE A. STEGUN. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, New York, 1964. doi: 10.1119/1.1972842. 44, 45, 57
- HÜSEYİN AKÇAY Y BRETT NINNESS. Orthonormal basis functions for modelling continuous-time systems. *Signal Processing*, 77:261 – 274, 1999. ISSN 0165-1684. doi: 10.1016/S0165-1684(99)00039-0. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168499000390>. 70
- ASOCIACIÓN ESPAÑOLA DE NORMALIZACIÓN Y CERTIFICACIÓN. UNE-EN ISO 13443: Gas natural: condiciones de referencia normalizadas:(ISO 13443:1996 incluyendo Corrigendum 1:1997), 2006. 243
- KARL JOHAN ASTRÖM Y PETER EYKHOFF. System identification—a survey. *Automatica*, 7(2):123–162, 1971. doi: 10.1016/0005-1098(71)90059-8. 59, 61
- MINGSIAN R. BAI, RONG-LIANG CHEN, Y CHUN-JEN WANG. Electroacoustic analysis of an electret loudspeaker using combined finite-element and lumped-parameter models. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 125(6):3632–3640, 2009. doi: 10.1121/1.3117377. URL <http://scitation.aip.org/content/asa/journal/jasa/125/6/10.1121/1.3117377>. 153, 180
- N S BAKHVALOV, YA M ZHILEIKIN, Y E A ZABOLOTSKAYA. *Nelineinaya Teoriya Zvukovykh Puchkov (Nonlinear Theory of Sound Beams)*. Moscow, 1982. 12
- U.A. BAKSHI Y A.V. BAKSHI. *Electronic Instrumentation*. Technical Publications, 2009. ISBN 9788184314465. 153
- MATHIAS BARBAGALLO, MENDEL KLEINER, Y AUGUSTO SARTI. Modulation and demodulation of steerable ultrasound beams for audiotransmission and rendering. En *Proc. of the 11th Int. Conference on Digital Audio Effects (DAFx-08)*, Espoo, Finland, páginas 1–4, 2008. URL <http://www.acoustics.hut.fi/dafx08/papers/dafx08-41.pdf>. 132, 133
- J. F. BARRETT. Hermite Functional Expansions and the Calculation of Output Autocorrelation and Spectrum for any Time-invariant Non-linear System with Noise Input. *Journal of Electronics and Control*, 16(1):107–113, 1964. doi: 10.1080/00207216408937627. 70
- C. BARRIERE Y D. ROYER. Diffraction effects in the parametric interaction of acoustic waves: application to measurements of the nonlinearity parameter B/A in liquids. *Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 48(6):1706–1715, noviembre de 2001. ISSN 0885-3010. doi: 10.1109/58.971724. 16

- J. L. S. BELLIN Y R. T. BEYER. Experimental investigation of an end-fire array. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 34(8):1051–1054, 1962. doi: 10.1121/1.1918243. 10
- A. BELLINI, G. CIBELLI, E. UGOLOTTI, A. FARINA, Y C. MORANDI. Non-linear digital audio processor for dedicated loudspeaker systems. *Consumer Electronics, IEEE Transactions on*, 44(3):1024–1031, agosto de 1998. ISSN 0098-3063. doi: 10.1109/30.713229. 128
- J.S. BENDAT Y A.G. PIERSON. *Engineering applications of correlation and spectral analysis*. Wiley, 1980. ISBN 9780471058878. 40
- MARY BETH BENNETT Y DAVID T. BLACKSTOCK. Parametric array in air. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 57(3):562–568, 1975. doi: 10.1121/1.380484. URL <http://scitation.aip.org/content/asa/journal/jasa/57/3/10.1121/1.380484>. 10, 50
- H.O. BERKTAY. Near-field effects in parametric end-fire arrays. *Journal of Sound and Vibration*, 20(2): 135 – 143, 1972. ISSN 0022-460X. doi: 10.1016/0022-460X(72)90417-8. 12
- H.O. BERKTAY Y B.V. SMITH. End-fire array of virtual acoustic sources produced by the interaction of cylindrically spreading acoustic waves. *Electronics Letters*, 1(7):202–, septiembre de 1965. ISSN 0013-5194. doi: 10.1049/el:19650185. 10, 14, 184
- EZIO BIGLIERI, S. BARBERIS, Y M. CATENA. Analysis and compensation of nonlinearities in digital transmission systems. *Selected Areas in Communications, IEEE Journal on*, 6(1):42–51, enero de 1988. ISSN 0733-8716. doi: 10.1109/49.192728. 102
- S.A. BILLINGS Y W.S.F. VOON. Correlation based model validity tests for non-linear models. *International journal of Control*, 44(1):235–244, 1986. doi: 10.1080/00207178608933593. URL <http://dx.doi.org/10.1080/00207178608933593>. 43
- L. BJØRNØ, B. CHRISTOFFERSEN, Y M. P. SCHREIBER. Some Experimental Investigations of the Parametric Acoustic Array. *Acta Acustica united with Acustica*, 35(2):99–106, mayo de 1976. 150
- STEPHEN BLY Y DEIRDRE MORISON. Guidelines for the safe use of ultrasound, part ii: Industrial and commercial applications. 1991. 246
- J. BORWICK. *Loudspeaker and Headphone Handbook*. Taylor & Francis, 2001. ISBN 9780240515786. 137, 141
- A. BORYS. *Nonlinear Aspects of Telecommunications: Discrete Volterra Series and Nonlinear Echo Cancellation*. Electronic Engineering Systems. CRC Press, 2000. ISBN 9781420038446. 101
- MARTIN BOUCHARD, SCOTT G. NORCROSS, Y GILBERT A. SOULODRE. Inverse filtering design using a minimal-phase target function from regularization. En *Audio Engineering Society Convention 121*, octubre de 2006. URL <http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=13763>. 107
- M. BOUTAYEB Y M. DAROUACH. Recursive identification method for miso Wiener-Hammerstein model. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 40(2):287–291, febrero de 1995. ISSN 0018-9286. doi: 10.1109/9.341794. 50
- M. BOUTAYEB, M. DAROUACH, H. RAFARALAHY, Y G. KRZAKALA. A new technique for identification of MISO Hammerstein model. En *American Control Conference, 1993*, páginas 1991–1992, junio de 1993. 50
- STEPHEN BOYD, L. O. CHUA, Y C. A. DESOER. Analytical foundations of Volterra series. *Journal of Mathematical Control and Information*, 1:243–282, 1984. 37
- A. BRAJAL Y A. CHOULY. Compensation of nonlinear distortions for orthogonal multicarrier schemes using predistortion. En *Global Telecommunications Conference, 1994. GLOBECOM '94. Communications: The Global Bridge., IEEE*, Volumen 3, páginas 1909–1914, noviembre de 1994. doi: 10.1109/GLOCOM.1994.513202. 101

- DAVID ROSS BRILLINGER. The identification of polynomial systems by means of higher order spectra. *Journal of Sound and Vibration*, 12(3):301–313, 1970. doi: [10.1016/0022-460X\(70\)90074-X](https://doi.org/10.1016/0022-460X(70)90074-X). 32
- LAURA A BROOKS, ANTHONY C ZANDER, Y COLIN H HANSEN. Investigation into the feasibility of using a parametric array control source in an active noise control system. En *Proceedings of ACOUSTICS*, páginas 39–45, 2005. 11
- A. BUHRDORF, A. LOHFINK, S. JUNGE, P.-C. ECCARDT, Y W. BENECKE. Fabrication and characterization of a new capacitive micromachined ultrasonic transducer (cmut) using polysilicon as membrane and sacrificial layer material. En *Ultrasonics, 2003 IEEE Symposium on*, Volumen 2, páginas 1951–1954 Vol.2, octubre de 2003. doi: [10.1109/ULTSYM.2003.1293299](https://doi.org/10.1109/ULTSYM.2003.1293299). 157
- C. CAMPOS-POZUELO, B. DUBUS, Y J. A. GALLEGUO-JUÁREZ. Finite-element analysis of the nonlinear propagation of high-intensity acoustic waves. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 106(1): 91–101, 1999. doi: [10.1121/1.427038](https://doi.org/10.1121/1.427038). 16
- SHENG CHEN, STEPHEN A BILLINGS, Y WAN LUO. Orthogonal least squares methods and their application to non-linear system identification. *International Journal of Control*, 50(5):1873–1896, 1989. doi: [10.1080/00207178908953472](https://doi.org/10.1080/00207178908953472). 32
- LEON COHEN. Instantaneous frequency and group delay of a filtered signal. *Journal of the Franklin Institute*, 337(4):329 – 346, 2000. ISSN 0016-0032. doi: [10.1016/S0016-0032\(00\)00039-9](https://doi.org/10.1016/S0016-0032(00)00039-9). 234
- MARTIN COHN Y A. LEMPEL. On fast M-sequence transforms (Corresp.). *Information Theory, IEEE Transactions on*, 23(1):135–137, 1977. ISSN 0018-9448. doi: [10.1109/TIT.1977.1055666](https://doi.org/10.1109/TIT.1977.1055666). 77
- PHILIPPE CRAMA Y JOHAN SCHOUKENS. Hammerstein-Wiener system estimator initialization. *Automatica*, 40(9):1543–1550, 2004. ISSN 0005-1098. doi: [10.1016/j.automatica.2004.03.018](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2004.03.018). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109804001153>. 112
- PHILIPPE CRAMA Y JOHAN SCHOUKENS. Computing an initial estimate of a Wiener-Hammerstein system with a random phase multisine excitation. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, 54(1):117–122, febrero de 2005. ISSN 0018-9456. doi: [10.1109/TIM.2004.838130](https://doi.org/10.1109/TIM.2004.838130). 112
- JAMES J. CROFT Y JOSEPH O. NORRIS. Theory, history, and the advancement of parametric loudspeakers: A technology overview. HSS White Paper 98-10006-1100, American Technology Corporation, 2003. URL <http://www.atcsd.com/pdf/HSSWHTPAPERRevE.pdf>. 132, 133
- J.J. CROFT, M.E. SPENCER, Y J.O. NORRIS. Modulator processing for a parametric speaker system, julio de 2003. URL <http://patft.uspto.gov/netacgi/nph-Parser?Sect1=PTO1&Sect2=HITOFF&d=PALL&p=1&u=205&RS=PN/6584205>. US Patent 6,584,205. 102
- EUGENE CZERWINSKI, ALEXANDER VOISHVILLO, SERGEI ALEXANDROV, Y ALEXANDER TEREKHOV. Multitone Testing of Sound System Components: Some Results and Conclusions, Part 2: Modeling and Application. *J. Audio Eng. Soc.*, 49(12):1181–1192, 2001. 31
- J.-P. DALMONT. Acoustic impedance measurement, Part I: A review. *Journal of Sound and Vibration*, 243(3):427 – 439, 2001. ISSN 0022-460X. doi: [10.1006/jsvi.2000.3428](https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3428). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X0093428X>. 181
- CHRIS DUNN Y MALCOLM J. HAWKSFORD. Distortion Immunity of MLS-Derived Impulse Response Measurements. *J. Audio Eng. Soc.*, 41(5):314–335, 1993. URL <http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=7004>. 72
- CHANGSOO EUN Y E.J. POWERS. A new Volterra predistorter based on the indirect learning architecture. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 45(1):223–227, enero de 1997. ISSN 1053-587X. doi: [10.1109/78.552219](https://doi.org/10.1109/78.552219). 101

- P. EYKHOFF. Identification theory: Practical implications and limitations. *Measurement*, 2(2):75 – 85, 1984. ISSN 0263-2241. doi: 10.1016/0263-2241(84)90036-8. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0263224184900368>. 33
- ANGELO FARINA. Simultaneous measurement of impulse response and distortion with a swept-sine technique. En *Audio Engineering Society Convention 108*, febrero de 2000. URL <http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=10211>. 43, 44, 50, 53, 54, 184
- ANGELO FARINA, EMANUELE UGOLOTTI, ALBERTO BELLINI, GIANFRANCO CIBELLI, Y CARLO MORANDI. Inverse numerical filters for linearisation of loudspeaker's response. En *Proc. DAFX-98, November*, páginas 12–16, 1998. 128
- M. FAULKNER Y M. JOHANSSON. Adaptive linearization using predistortion-experimental results. *Vehicle Technology, IEEE Transactions on*, 43(2):323–332, mayo de 1994. ISSN 0018-9545. doi: 10.1109/25.293651. 101
- MARTIN FERGUSON-PELL, SATSUE HAGISAWA, Y DUNCAN BAIN. Evaluation of a sensor for low interface pressure applications. *Medical Engineering & Physics*, 22(9):657 – 663, 2000. ISSN 1350-4533. doi: 10.1016/S1350-4533(00)00080-1. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1350453300000801>. 43
- LESLIE L. FOLDY Y HENRY PRIMAKOFF. A general theory of passive linear electroacoustic transducers and the electroacoustic reciprocity theorem. i. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 17(2): 109–120, 1945. doi: 10.1121/1.1916305. URL <http://scitation.aip.org/content/asa/journal/jasa/17/2/10.1121/1.1916305>. 141
- W. FRANK, R. REGER, Y U. APPEL. Loudspeaker nonlinearities-analysis and compensation. En *Signals, Systems and Computers, 1992. 1992 Conference Record of The Twenty-Sixth Asilomar Conference on*, Volumen 2, páginas 756–760, octubre de 1992. doi: 10.1109/ACSSC.1992.269094. 102, 128
- W.A. FRANK. Sampling requirements for Volterra system identification. *Signal Processing Letters, IEEE*, 3(9):266–268, septiembre de 1996. ISSN 1070-9908. doi: 10.1109/97.536597. 59
- WALTER A. FRANK. An efficient approximation to the quadratic volterra filter and its application in real-time loudspeaker linearization. *Signal Processing*, 45(1):97 – 113, 1995. ISSN 0165-1684. doi: 10.1016/0165-1684(95)00044-E. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016516849500044E>. 102
- Y. FUKUSHIMA, O. NISHIZAWA, Y H. SATO. A performance study of a laser doppler vibrometer for measuring waveforms from piezoelectric transducers. *Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 56(7):1442–1450, julio de 2009. ISSN 0885-3010. doi: 10.1109/TUFFC.2009.1199. 157
- WOON-SENG GAN, JUN YANG, Y TOMOO KAMAKURA. A review of parametric acoustic array in air. *Applied Acoustics*, 73(12):1211 – 1219, 2012. ISSN 0003-682X. doi: 10.1016/j.apacoust.2012.04.001. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003682X12000904>. Parametric Acoustic Array: Theory, Advancement and Applications. 246
- G.H. GOLUB Y C.F. VAN LOAN. *Matrix Computations*. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, 1996. ISBN 9780801854149. 72
- R. HABER Y H. UNBEHAUEN. Structure identification of nonlinear dynamic systems—a survey on input/output approaches. *Automatica*, 26(4):651 – 677, 1990. ISSN 0005-1098. doi: 10.1016/0005-1098(90)90044-I. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/000510989090044I>. 64
- B J HALKON, S R FRIZZEL, Y S J ROTHBERG. Vibration measurements using continuous scanning laser vibrometry: velocity sensitivity model experimental validation. *Measurement Science and Technology*, 14(6):773, 2003. URL <http://stacks.iop.org/0957-0233/14/i=6/a=310>. 157

- M.F. HAMILTON Y D.T. BLACKSTOCK. *Nonlinear Acoustics*. Academic Press, 1998. ISBN 9780123218605. 243
- YUTA HATANO, CHUANG SHI, Y YOSHINOBU KAJIKAWA. A study on linearization of nonlinear distortions in parametric array loudspeakers. En *International Workshop on Smart Info-Media Systems in Asia, Ho Chi Minh City, Vietnam*, 2014. 201, 203
- MICHAEL L. HONIG Y MELBOURNE BARTON. Baseband Signalling and Pulse Shaping. En *The Communications Handbook*, The Electrical Engineering Handbook Series, páginas 321–341. Taylor & Francis, 2012. ISBN 9781420041163. 163
- CARL Q HOWARD, COLIN H HANSEN, Y ANTHONY C ZANDER. A review of current ultrasound exposure limits. *The Journal of Occupational Health and Safety of Australia and New Zealand*, 21(3):253–257, 2005. 246
- L.S.L. HSIEH Y A. GROCHOWSKI. THD and SNR tests using the simplified Volterra series with adaptive algorithms. En *Test Conference, 1995. Proceedings., International*, páginas 364–369, octubre de 1995. doi: 10.1109/TEST.1995.529861. 188
- LUKE SL HSIEH ET AL. Total harmonic distortion measurement using the simplified volterra series with the lms adaptive algorithm. *IEICE TRANSACTIONS on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 78(1):111–116, 1995. 188
- VICTOR F. HUMPHREY. Nonlinear propagation in ultrasonic fields: measurements, modelling and harmonic imaging. *Ultrasonics*, 38(1–8):267 – 272, 2000. ISSN 0041–624X. doi: 10.1016/S0041-624X(99)00122-5. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0041624X99001225>. 188
- INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. ISO 9613-1: 1993, Acoustics : attenuation of sound during propagation outdoors. Calculation of the absorption of sound by the atmosphere, 1993. 243
- WEI JI Y WOON-SENG GAN. Identification of a parametric loudspeaker system using an adaptive Volterra filter. *Applied Acoustics*, 73(12):1251–1262, 2012. 32, 36, 197
- WEI JI, EE-LENG TAN, Y WOON-SENG GAN. Baseband Distortion Modeling for a Parametric Loudspeaker System Using Volterra Kernels. En *Proc. ASIPA Annual Summit and Conference*, 2011. 32
- TORNOO KAMAKURA, MASAHAIDE YONEYAMA, Y KAZUO IKEGAYA. Developments of parametric loudspeaker for practical use. En *Proc. 10th International Symposium on Nonlinear Acoustics*, páginas 147–150, 1984. 16
- AHMET H. KAYRAN Y ENDER M. EKŞIOĞLU. Nonlinear system identification using deterministic multilevel sequences. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 24(2):151–181, 2005. ISSN 0278-081X. doi: 10.1007/s00034-004-0126-z. 79
- A.Y. KIBANGOU Y G. FAVIER. Toeplitz–Vandermonde Matrix Factorization With Application to Parameter Estimation of Wiener–Hammerstein Systems. *Signal Processing Letters, IEEE*, 14(2):141–144, febrero de 2007. ISSN 1070-9908. doi: 10.1109/LSP.2006.882101. 114, 128, 204
- THOMAS D. KITE, JOHN T. POST, Y MARK F. HAMILTON. Parametric array in air: Distortion reduction by preprocessing. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 103(5):2871–2871, 1998. doi: 10.1121/1.421645. URL <http://link.aip.org/link/?JAS/103/2871/2>. 11, 17, 128, 134
- WOLFGANG KLIPPEL. Compensation for nonlinear distortion of horn loudspeakers by digital signal processing. *J. Audio Eng. Soc*, 44(11):964–972, 1996. URL <http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=7878>. 102

- WOLFGANG KLIPPEL. Direct feedback linearization of nonlinear loudspeaker systems. *J. Audio Eng. Soc.*, 46(6):499–507, 1998. URL <http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=12142>. 128
- D.E. KNUTH. *The Art of Computer Programming*, Volumen 1: Fundamental Algorithms of Addison-Wesley Series in Computer Science & Information Processing. Addison-Wesley, 1973. ISBN 9780201038095. 80
- H. KRIM Y M. VIBERG. Two decades of array signal processing research: the parametric approach. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 13(4):67–94, julio de 1996. ISSN 1053-5888. doi: 10.1109/79.526899. 50
- M LAMPTON. Transmission matrices in electroacoustics. *Acta Acustica united with Acustica*, 39(4):239–251, 1978. 140
- B.W. LAWTON. *Damage to human hearing by airborne sound of very high frequency or ultrasonic frequency*. HSE contract research report. HSE Books, 2001. ISBN 9780717620197. URL www.hse.gov.uk/research/crr_pdf/2001/crr01343.pdf. 135
- KELVIN CHEE-MUN LEE Y WOON-SENG GAN. Bandwidth-efficient recursive pth-order equalization for correcting baseband distortion in parametric loudspeakers. *Audio, Speech, and Language Processing, IEEE Transactions on*, 14(2):706–710, March 2006. ISSN 1558-7916. doi: 10.1109/TSA.2005.855830. 201, 203
- KELVIN CHEE-MUN LEE, JUN YANG, WOON SENG GAN, Y MENG-HWA ER. Modeling nonlinearity of air with Volterra kernels for use in a parametric array loudspeaker. En *Audio Engineering Society Convention 112*. Audio Engineering Society, 2002. 36
- SOOMIN LEE, TETSUO KATSUURA, TOMOKO TOWATARI-UENO, Y YOSHIHIRO SHIMOMURA. The effects of parametric speaker sound on salivary hormones and a subjective evaluation. *Neuroendocrinology Letters*, 31(4):524, 2010. 247
- SOOMIN LEE, YOSHIHIRO SHIMOMURA, Y TETSUO KATSURA. Physiological responses at short distances from a parametric speaker. *Journal of physiological anthropology*, 31(1):16, 2012. 247
- WILLIAM S LEVINE. *The control handbook*. CRC press, 1996. 64
- E. C. LEVY. Complex-curve fitting. *Automatic Control, IRE Transactions on*, AC-4(1):37–43, mayo de 1959. ISSN 0096-199X. doi: 10.1109/TAC.1959.6429401. 124
- M.J. LIDTHILL. On sound generated aerodynamically. *Math. Revs.*, 19:915, 1958. 12, 13
- A. NOVAK M. RÉBILLAT, R. HENNEQUIN. Hammerstein toolbox. http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/30897-hammerstein-toolbox/content/MAJ_Hammerstein_ToolBox, marzo de 2011. 66
- R.J. MARTIN. Volterra system identification and Kramer’s sampling theorem. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 47(11):3152–3155, noviembre de 1999. ISSN 1053-587X. doi: 10.1109/78.796453. 62
- RP MEHTA. Novel ultrasonic sound carrier significantly improves speech discrimination in subjects with hearing loss. En *Otology/Neurotology Scientific Session presented at the Combined Sections Meeting of the Triological Society*, enero de 2015. 247
- ROBERT H. MELLEN Y MARK B. MOFFETT. A numerical method for calculating the nearfield of a parametric acoustic source. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 63(5):1622–1624, 1978. doi: 10.1121/1.381858. 16

- TIM MELLOW Y LEO KÄRKKÄINEN. On the forces in single-ended and push-pull electret transducers. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 124(3):1497–1504, 2008. doi: 10.1121/1.2951601. URL <http://link.aip.org/link/?JAS/118/1311/1>. 137
- M. MIYOSHI Y Y. KANEDA. Inverse filtering of room acoustics. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, 36(2):145–152, febrero de 1988. ISSN 0096-3518. doi: 10.1109/29.1509.124
- MARK B. MOFFETT Y ROBERT H. MELLEN. Model for parametric acoustic sources. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 61(2):325–337, 1977. doi: 10.1121/1.381310. 150, 243
- MARK B. MOFFETT, ROBERT H. MELLEN, Y WILLIAM L. KONRAD. Parametric acoustic sources of rectangular aperture. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 63(5):1326–1331, 1978. doi: 10.1121/1.381885. 150, 243
- M. MORHAC. A fast algorithm of nonlinear Volterra filtering. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 39(10):2353–2356, octubre de 1991. ISSN 1053-587X. doi: 10.1109/78.91194. 225
- YONGSHENG MU, PEIFENG JI, WEI JI, MING WU, Y JUN YANG. On the linearization of a parametric loudspeaker system by using third-order inverse Volterra filters. En *Signal and Information Processing (ChinaSIP), 2013 IEEE China Summit International Conference on*, páginas 570–574, julio de 2013a. doi: 10.1109/ChinaSIP2013.6625405. 32
- YONGSHENG MU, PEIFENG JI, WEI JI, MING WU, Y JUN YANG. On the linearization of a parametric loudspeaker system by using third-order inverse volterra filters. En *Signal and Information Processing (ChinaSIP), 2013 IEEE China Summit International Conference on*, páginas 570–574, July 2013b. doi: 10.1109/ChinaSIP2013.6625405. 197, 201, 203
- YONGSHENG MU, PEIFENG JI, WEI JI, MING WU, Y JUN YANG. Modeling and Compensation for the Distortion of Parametric Loudspeakers Using a One-Dimension Volterra Filter. *Audio, Speech, and Language Processing, IEEE/ACM Transactions on*, 22(12):2169–2181, diciembre de 2014a. ISSN 2329-9290. doi: 10.1109/TASLP.2014.2363414. 32, 102
- YONGSHENG MU, PEIFENG JI, WEI JI, MING WU, Y JUN YANG. Multipoint linearization of parametric loudspeakers using Volterra filters. En *Asia-Pacific Signal and Information Processing Association, 2014 Annual Summit and Conference (APSIPA)*, páginas 1–6, diciembre de 2014b. doi: 10.1109/APSIPA.2014.7041756. 32, 102
- T. G. MUIR Y J. G. WILLETTE. Parametric acoustic transmitting arrays. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 52(5B):1481–1486, 1972. doi: 10.1121/1.1913264. 14, 150
- SWEN MÜLLER Y PAULO MASSARANI. Transfer-Function Measurement with Sweeps. *J. Audio Eng. Soc*, 49(6):443–471, 2001. 31
- SWEN MÜLLER Y PAULO MASSARANI. Transfer-function measurement with sweeps. *J. Audio Eng. Soc*, 49(6):443–471, 2001. URL <http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=10189>. 42
- S.W. NAM Y E.J. POWERS. On the linearization of Volterra nonlinear systems using third-order inverses in the digital frequency-domain. En *Circuits and Systems, 1990., IEEE International Symposium on*, Volumen 1, páginas 407–410, mayo de 1990. doi: 10.1109/ISCAS.1990.112059. 128
- JACQUELINE NAZE TJØTTA, SIGVA TJØTTA, Y ERLEND H. VEFRING. Propagation and interaction of two collinear finite amplitude sound beams. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 88(6):2859–2870, 1990. doi: 10.1121/1.399690. 16
- O. NELLES. *Nonlinear System Identification: From Classical Approaches to Neural Networks and Fuzzy Models*. Engineering online library. Springer, 2001. ISBN 9783540673699. 34

- E.G. NORRIS. Parametric signal processing systems and methods, abril de 2015a. URL <http://patft.uspto.gov/netacgi/nph-Parser?Sect1=PTO1&Sect2=HITOFF&d=PALL&p=1&u=002,032&RS=PN/9,002,032>. US Patent 9,002,032. 135
- E.G. NORRIS. Self-bias emitter circuit, marzo de 2015b. URL <http://patft.uspto.gov/netacgi/nph-Parser?Sect1=PTO1&Sect2=HITOFF&d=PALL&p=1&u=911&RS=PN/8988911>. US Patent 8,988,911. 145
- ELWOOD G NORRIS. The creation of audible sound from ultrasonic energy: A fundamental paradigm shift. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 101(5):3072–3072, 1997. 246
- A NOVÁK, L. SIMON, F. KADLEC, Y P. LOTTON. Nonlinear System Identification Using Exponential Swept-Sine Signal. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, 59(8):2220–2229, agosto de 2010. ISSN 0018-9456. doi: 10.1109/TIM.2009.2031836. 50, 54, 57, 66, 68, 69, 70, 167, 234
- R.D. NOWÁK Y B.D. VAN VEEN. Random and pseudorandom inputs for Volterra filter identification. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 42(8):2124–2135, 1994. ISSN 1053-587X. doi: 10.1109/78.301847. 32, 72
- MARKKU OKSANEN, JUSSI VANS, JARMO HIETANEN, Y JUNRU WU. Quantitative theory for V-groove capacitive transmitting transducers. *Ultrasonics*, 35(3):205 – 211, 1997. ISSN 0041-624X. doi: 10.1016/S0041-624X(96)00110-2. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0041624X96001102>. 133
- O. ORALKAN, A.S. ERGUN, J.A. JOHNSON, MUSTAFA KARAMAN, U. DEMIRCI, K. KAVIANI, T.H. LEE, Y B.T. KHURI-YAKUB. Capacitive micromachined ultrasonic transducers: next-generation arrays for acoustic imaging? *Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 49(11):1596–1610, noviembre de 2002. ISSN 0885-3010. doi: 10.1109/TUFFC.2002.1049742. 134
- S. PARKER Y F. PERRY. A discrete arma model for nonlinear system identification. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 28(3):224–233, marzo de 1981. ISSN 0098-4094. doi: 10.1109/TCS.1981.1084976. 46
- R.K. PEARSON, B.A. OGUNNAIKE, Y III DOYLE, F.J. Identification of structurally constrained second-order volterra models. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 44(11):2837–2846, Nov 1996. ISSN 1053-587X. doi: 10.1109/78.542441. 36
- ANDREW PHELPS. Audio apparatus, 03 2006. URL <http://patft.uspto.gov/netacgi/nph-Parser?Sect2=PTO1&Sect2=HITOFF&p=1&u=/netahtml/PTO/search-bool.html&r=1&f=G&l=50&d=PALL&RefSrch=yes&Query=PN/7016508>. 17, 134
- R. PINTELON Y J. SCHOUKENS. Design of Excitation Signals. En *System Identification: A Frequency Domain Approach*, páginas 177–224. Wiley, 2 edición, 2012. ISBN 9781118287392. 42, 228
- F. JOSEPH POMPEI. The use of airborne ultrasonics for generating audible sound beams. En *Audio Engineering Society Convention 105*, Sep 1998. URL <http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=8327>. 17
- E.J. POMPEI. Ultrasonic transducer for parametric array, 2 2013. URL <http://patft.uspto.gov/netacgi/nph-Parser?Sect1=PTO1&Sect2=HITOFF&d=PALL&p=1&u=546&RS=PN/8369546>. US Patent 8,369,546. 135, 246
- FRANK JOSEPH POMPEI. *Sound from ultrasound : the parametric array as an audible sound source*. Tesis doctoral por, Massachusetts Institute of Technology, 2002. 17, 50, 134, 246
- RICHARD J PRAZENICA Y ANDREW J KURDILA. Multiwavelet constructions and Volterra kernel identification. *Nonlinear dynamics*, 43(3):277–310, 2006. doi: 10.1007/s11071-006-8323-x. 32

- HENRY PRIMAKOFF Y LESLIE L. FOLDY. A general theory of passive linear electroacoustic transducers and the electroacoustic reciprocity theorem. II. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 19(1): 50–58, 1947. doi: <http://dx.doi.org/10.1121/1.1916402>. URL <http://scitation.aip.org/content/asa/journal/jasa/19/1/10.1121/1.1916402>. 141
- MARC RÉBILLAT, ROMAIN HENNEQUIN, ÉTIENNE CORTEEL, Y BRIAN F.G. KATZ. Identification of cascade of Hammerstein models for the description of nonlinearities in vibrating devices. *Journal of Sound and Vibration*, 330(5):1018 – 1038, 2011. ISSN 0022-460X. 44, 50, 51, 52, 54, 55, 57, 65, 66, 68, 69, 70, 167, 186
- M. J. REED Y MALCOLM J. HAWKSFORD. Non-linear error correction of horn transducers using a volterra filter. En *Audio Engineering Society Convention 102*, Mar 1997. URL <http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=7311>. 102
- M.J. REED Y M.O.J. HAWKSFORD. Identification of discrete Volterra series using maximum length sequences. *Circuits, Devices and Systems, IEE Proceedings -*, 143(5):241 –248, October 1996. ISSN 1350-2409. 32, 72, 77, 78, 94, 97, 218
- RICHARD L. ROLLEIGH. Difference frequency pressure within the interaction region of a parametric array. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 58(5):964–971, 1975. doi: <http://dx.doi.org/10.1121/1.380781>. URL <http://scitation.aip.org/content/asa/journal/jasa/58/5/10.1121/1.380781>. 243
- MARIO ROSSI. *Acoustics and electroacoustics*. The Artech House Acoustics Library. Artech House, Incorporated, 1988. ISBN 9780890062555. 138
- WILSON JOHN RUGH. *Nonlinear system theory: the Volterra/Wiener approach*, Capítulo 5. Response characteristics of stationary systems, páginas 243 – 246. In *Johns Hopkins Series in Information Sciences and Systems* Rugh [1981a], 1980. ISBN O-8018-2549-0. 62
- W.J. RUGH. *Nonlinear system theory: the Volterra/Wiener approach*. Johns Hopkins Series in Information Sciences and Systems. Johns Hopkins University Press, 1981a. ISBN O-8018-2549-0. 70, 257
- W.J. RUGH. *Nonlinear system theory: the Volterra/Wiener approach*, Capítulo Input/Output Representations in the Time Domain, páginas 22–27. In *Johns Hopkins Series in Information Sciences and Systems* Rugh [1981a], 1981b. ISBN O-8018-2549-0. 72, 118
- SHINICHI SAKAI Y TOMOO KAMAKURA. Dynamic single sideband modulation for realizing parametric loudspeaker. *AIP Conference Proceedings*, 1022(1):613–616, 2008. doi: 10.1063/1.2956299. 17
- M. SCHETZEN. Theory of pth-order inverses of nonlinear systems. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 23(5):285–291, mayo de 1976. ISSN 0098-4094. doi: 10.1109/TCS.1976.1084219. 101, 102, 219
- M. SCHETZEN. Nonlinear system modeling based on the wiener theory. *Proceedings of the IEEE*, 69(12): 1557–1573, Dec 1981. ISSN 0018-9219. doi: 10.1109/PROC.1981.12201. 32, 72
- MARTIN SCHETZEN. *The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems*. Wiley, New York :, 1980a. 37, 62, 70, 106
- MARTIN SCHETZEN. *Orthogonal Development of the Wiener α G-Functionals*, Capítulo 7, páginas xvi, 531 p. Wiley, New York :, 1980b. 37
- H. SCHURER, CORNELIS H. SLUMB, Y OTTO E. HERRMANN. Second order Volterra inverses for compensation of loudspeaker nonlinearity. En *Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics, 1995., IEEE ASSP Workshop on*, páginas 165–168, octubre de 1995a. doi: 10.1109/ASPAA.1995.482982. 128

- HANS SCHURER, ARTHUR P. BERKHOFF, CORNELIS H. SLUMB, Y OTTO E. HERRMANN. Modeling and compensation of nonlinear distortion in horn loudspeakers. *J. Audio Eng. Soc.*, 43(7/8):592–598, 1995b. URL <http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=7935>. 102
- HANS SCHURER, ALEX G. J. NIJMEIJER, MARK BOER, CORNELIS H. SLUMB, OTTO E. HERRMANN, ET AL. Identification and compensation of the electrodynamic transducer nonlinearities. En *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1997. ICASSP-97., 1997 IEEE International Conference on*, Volumen 3, páginas 2381–2384. IEEE, 1997. 128
- A.R. SELFRIDGE Y P. KHURI-YAKUB. Piezoelectric film sonic emitter, January 4 2000. URL <http://patft.uspto.gov/netacgi/nph-Parser?Sect1=PTO1&Sect2=HITOFF&d=PALL&p=1&u=.&OS=PN/6011855+OR+PN/A000000&RS=PN/6011855+OR+PN/A000000>. US Patent 6,011,855. 135
- CHUANG SHI Y WOON-SENG GAN. A preprocessing method to increase high frequency response of a parametric loudspeaker. En *Signal and Information Processing Association Annual Summit and Conference (APSIPA), 2013 Asia-Pacific*, páginas 1–5. IEEE, 2013. 18
- CHUANG SHI, YOSHINOBU KAJIKAWA, Y WOON-SENG GAN. An overview of directivity control methods of the parametric array loudspeaker. *APSIPA Transactions on Signal and Information Processing*, 3:20, 2014. 150
- KUN SHI Y PENG SHI. Adaptive sparse Volterra system identification with l_0 -norm penalty. *Signal Processing*, 91(10):2432 – 2436, 2011. ISSN 0165-1684. doi: 10.1016/j.sigpro.2011.04.028. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168411001381>. 32
- D. SHMILOVITZ. On the definition of total harmonic distortion and its effect on measurement interpretation. *Power Delivery, IEEE Transactions on*, 20(1):526–528, enero de 2005. ISSN 0885-8977. doi: 10.1109/TPWRD.2004.839744. 20
- EUGEN J. SKUDRZYK. Vibrations of a system with a finite or an infinite number of resonances. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 30(12):1140–1152, 1958. doi: 10.1121/1.1909485. URL <http://scitation.aip.org/content/asa/journal/jasa/30/12/10.1121/1.1909485>. 138
- BOŻENA SMAGOWSKA Y MAŁGORZATA PAWLACZYK-ŁUSZCZYŃSKA. Effects of Ultrasonic Noise on the Human Body-ABibliographic Review. *International Journal of Occupational Safety and Ergonomics*, 19(2): 195–202, 2013. 246
- B.V. SMITH. An experimental study of a parametric end-fire array. *Journal of Sound and Vibration*, 14 (1):7 – 21, 1971. ISSN 0022-460X. doi: 10.1016/0022-460X(71)90504-9. 12
- M.E. SPENCER, J.J. CROFT, Y J.O. NORRIS. Modulator processing for a parametric speaker system, enero de 2010. URL <http://patft.uspto.gov/netacgi/nph-Parser?Sect1=PTO1&Sect2=HITOFF&d=PALL&p=1&u=729,498&RS=PN/7,729,498>. US Patent 7,729,498. 135
- GUY-BART STAN, JEAN-JACQUES EMBRECHTS, Y DOMINIQUE ARCHAMBEAU. Comparison of Different Impulse Response Measurement Techniques. *J. Audio Eng. Soc.*, 50(4):249–262, 2002. 31
- JOHANNES H. STRENG. Charge movements on the stretched membrane in a circular electrostatic push-pull loudspeaker. *J. Audio Eng. Soc.*, 38(5):331–339, 1990. 137
- K.L. SU. *Analog Filters*. Chapman & Hall, 1996. ISBN 9780412638404. doi: 10.1007/b101926. 158
- ALFRED CH TAN Y NOBUO TANAKA. The safety issues of intense airborne ultrasound: parametric array loudspeaker. En *Proceedings of the Thirteenth International Congress on Sound and Vibration (ICSV13)*, páginas 2–6, julio de 2006. 246

- EE-LENG TAN, PEIFENG JI, Y WOON-SENG GAN. On preprocessing techniques for bandlimited parametric loudspeakers. *Applied Acoustics*, 71(5):486 – 492, 2010. ISSN 0003-682X. doi: 10.1016/j.apacoust.2009.11.006. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003682X09002576>. 18, 19
- T. TANAKA, M. IWASA, Y. KIMURA, Y. A. NAKAMURA. Directional loudspeaker system, 3 1989. URL <http://patft.uspto.gov/netacgi/nph-Parser?Sect1=PTO1&Sect2=HITOFF&d=PALL&p=1&u=.&OS=PN/4823908+OR+PN/A000000&RS=PN/4823908+OR+PN/A000000>. US Patent 4,823,908. 134
- C. THOMSEN, H. MØLLER, Y BRÜEL OG KJAER A-S. *Swept Measurements of Harmonic, Difference-frequency and Intermodulation Distortion*. Application notes. Brüel & Kjær, 1975. URL <https://books.google.es/books?id=Wao-mwEACAAJ>. 43
- F. THOUVEREZ Y L. JEZEQUEL. Identification of NARMAX models on a modal base. *Journal of Sound and Vibration*, 189(2):193 – 213, 1996. ISSN 0022-460X. doi: 10.1006/jsvi.1996.0015. 32
- HARRIE AC TILMANS. Equivalent circuit representation of electromechanical transducers: I. Lumped-parameter systems. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 6(1):157, 1996. doi: 10.1088/0960-1317/6/1/036. 142
- MARNI TYRIL, JAN ABILDGAARD PEDERSEN, Y PER RUBAK. Identification of Discrete Volterra Series solving for one kernel at a time. En *Audio Engineering Society Convention 108*, febrero de 2000. URL <http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=9216>. 81, 84
- PETER D. WELCH. The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms. *Audio and Electroacoustics, IEEE Transactions on*, 15(2):70–73, 1967. ISSN 0018-9278. doi: 10.1109/TAU.1967.1161901. 229
- PETER J. WESTERVELT. Scattering of sound by sound. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 29(2):199–203, 1957. doi: 10.1121/1.1908830. URL <http://link.aip.org/link/?JAS/29/199/1>. 10, 12
- PETER J. WESTERVELT. Parametric acoustic array. *Journal of the Acoustical Society of America*, 35:4, 1963. 10, 12, 13, 14, 184
- C. H. WONG, ZW SIEW, ISMAIL SAAD, C. F. LIAU, Y KENNETH TZE KIN TEO. Performance analysis on beam-steering algorithm for parametric array loudspeaker application. 2011. 150
- I.O. WYGANT, M. KUPNIK, J.C. WINDSOR, W.M. WRIGHT, M.S. WOCHNER, G.G. YARALIOGLU, M.F. HAMILTON, Y B.T. KHURI-YAKUB. 50 kHz capacitive micromachined ultrasonic transducers for generation of highly directional sound with parametric arrays. *Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, IEEE Transactions on*, 56(1):193–203, enero de 2009. ISSN 0885-3010. doi: 10.1109/TUFFC.2009.1019. 134
- IRA O. WYGANT, MARIO KUPNIK, JEFFRY C. WINDSOR, WAYNE M. WRIGHT, MARK S. WOCHNER, GOKSEN G. YARALIOGLU, MARK F. HAMILTON, Y BUTRUS (PIERRE) T. KHURI-YAKUB. Capacitive micromachined ultrasonic transducers for generation of highly directional sound with a parametric array. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 123(5):3375–3375, 2008. doi: 10.1121/1.2934001. URL <http://scitation.aip.org/content/asa/journal/jasa/123/5/10.1121/1.2934001>. 134
- YUXIANG XIAO, ERNI ZHU, Y ANDING ZHU. Predistortion correction method, predistortion correction apparatus, transmitter, and base station, noviembre de 2014. US Patent App. 14/552,056. 102
- VIRGINIA YAGÜE-JIMÉNEZ, J. L. BLANCO-MURILLO, Y FCO. JAVIER CASAJÚS-QUIRÓS. Compensation of biased excitation effects for MLS-based nonlinear systems' identification. *Signal Processing*, páginas 176 – 194, 2015. doi: 10.1016/j.sigpro.2015.03.014. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168415001152>. 197, 220

- JUN YANG, WOON-SENG GAN, KHIM-SIA TAN, Y MENG-HWA ER. Acoustic beamforming of a parametric speaker comprising ultrasonic transducers. *Sensors and Actuators A: Physical*, 125(1):91 – 99, 2005. ISSN 0924-4247. doi: 10.1016/j.sna.2005.04.037. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S092442470500364X>. 136
- JUN YANG, PEIFENG JI, Y WOON-SENG GAN. Distortion reduction for the parametric loudspeaker. *19th international congress on acoustics, Madrid*, 2007. 19
- MASAHIDE YONEYAMA, JUN-ICHIROH FUJIMOTO, YU KAWAMO, Y SHOICHI SASABE. The audio spotlight: An application of nonlinear interaction of sound waves to a new type of loudspeaker design. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 73(5):1532–1536, 1983. doi: 10.1121/1.389414. URL <http://scitation.aip.org/content/asa/journal/jasa/73/5/10.1121/1.389414>. 10, 15, 16, 150
- ALLAN J. ZUCKERWAR. Theoretical response of condenser microphones. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 64(5):1278–1285, 1978. doi: 10.1121/1.382112. URL <http://scitation.aip.org/content/asa/journal/jasa/64/5/10.1121/1.382112>. 182