UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS
AERONÁUTICOS

El Problema de Lambert
en el Contexto de Optimización de
Trayectorias Espaciales

Tesis Doctoral
por

Pedro Fuentes García
Ingeniero Aeronáutico
2015

Ciencia y Tecnología Aeroespaciales (130B)
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos
Universidad Politécnica de Madrid

El Problema de Lambert en el Contexto de Optimización de Trayectorias Espaciales
Autor: Pedro Fuentes García, Ingeniero Aeronáutico

Director: Miguel Ángel Gómez Tierno, Doctor Ingeniero Aeronáutico
Codirector: Jesús López Díez, Doctor Ingeniero Aeronáutico

Copyright © 2015 por Pedro Fuentes García
Todos los derechos reservados.

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

Tribunal nombrado por el Magfco. Y Excmo. Sr. Rector de la Universidad Politécnica de Madrid. El día _____ de _____ de 20 ____.

Presidente: _____

Vocal: _____

Vocal: _____

Vocal: _____

Secretario: _____

Suplente: _____

Suplente: _____

Realizado el acto de defensa y lectura de la Tesis el día ____ de _____ de 20____
en la E.T.S.I. Aeronáuticos.

Calificación _____

EL PRESIDENTE

LOS VOCALES

EL SECRETARIO

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi codirector de tesis Dr. Jesús López Díez, que en paz descanse, por sus buenos consejos, pero sobre todo por ese ánimo que conseguía transmitirme y que me ha ayudado siempre a seguir adelante, y a mi director de tesis Dr. Miguel Ángel Gómez Tierno, por su inestimable e indispensable ayuda para lograr el objetivo.

Agradezco a la empresa Indra la ayuda recibida a través de su plan de formación, en particular con el “Permiso Individual de Formación” al que permitió acogerme, y que me ha aportado una dedicación extra tan valiosa en la recta final.

Deseo expresar también mi sincero agradecimiento a todos mis amigos que me han animado continuamente, y en especial a mi compañero de la escuela, Pedro Aibar, por hacer el esfuerzo de leerse las revisiones y contribuir con valiosos comentarios.

Por último, siempre estaré en deuda con mi padre Calixto, que aunque me entristece que no esté hoy presente, estoy seguro de lo orgulloso que estaría, a mi madre Adoración, que siempre está animándome con su amor incondicional, a mis hermanos, Paqui, Jose Luis y Cristina, que siempre han estado conmigo en el camino, y especialmente a mi mujer Yolanda, por el amor que me impulsa cada día.

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS.....	i
ÍNDICE.....	iii
RESUMEN	vii
ABSTRACT	ix
LISTA DE FIGURAS.....	xi
LISTA DE TABLAS.....	xiii
SÍMBOLOS	xv
ACRÓNIMOS Y ABREVIATURAS	xix
1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 OBJETIVOS.....	2
1.2 ANÁLISIS PRELIMINAR.....	3
1.2.1 PROBLEMA DE LAMBERT.....	3
1.2.2 EFICIENCIA COMPUTACIONAL.....	17
1.2.3 ANTECEDENTES Y SITUACIÓN ACTUAL DEL PROBLEMA DE LAMBERT.....	26
1.2.4 MISIONES CARACTERÍSTICAS.....	30
1.3 ORGANIZACIÓN	31
2 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE LAMBERT.....	33
2.1 ECUACIÓN ELEMENTAL DEL PROBLEMA DE LAMBERT	33
2.1.1 DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN ELEMENTAL DE EXCENTRICIDAD TRANSVERSAL	34
2.1.2 DEPENDENCIA ENTRE LAS VARIABLES ELEMENTALES.....	51
2.1.3 DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN ELEMENTAL PRINCIPAL	52
2.1.4 DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN ELEMENTAL DOBLE DEPENDIENTE.....	56
2.1.5 ECUACIÓN ELEMENTAL BASICA.....	58

2.2	PROPIEDADES DEDUCIDAS DE LA ECUACIÓN ELEMENTAL PRINCIPAL	67
2.3	PROPIEDAD DE INVARIANCIA Y PROBLEMAS EQUIVALENTES	67
2.3.1	ECUACIÓN ELEMENTAL DEDUCIDA DEL PROBLEMA EQUIVALENTE SIMPLIFICADO 71	
2.4	CÁLCULO DE VARIABLES DEPENDIENTES DE LA SOLUCIÓN	72
2.5	FUNCIÓN ELEMENTAL DOBLE DEPENDIENTE.....	76
2.5.1	CÁLCULO DE DERIVADAS.....	76
2.5.2	FUNCIÓN FUNDAMENTAL DOBLE DEPENDIENTE	84
2.5.3	FUNCIÓN ESENCIAL DOBLE DEPENDIENTE.....	86
2.5.4	FUNCIÓN SUPLEMENTARIA DOBLE DEPENDIENTE	87
2.5.5	EFICIENCIA DE LA FUNCIÓN DOBLE DEPENDIENTE	89
2.6	FUNCIÓN ELEMENTAL PRINCIPAL	91
2.6.1	GRÁFICA DE LA FUNCIÓN ELEMENTAL PRINCIPAL.....	92
2.6.2	CÁLCULO DE DERIVADAS.....	94
2.6.3	FUNCIÓN FUNDAMENTAL PRINCIPAL	108
2.6.4	FUNCIÓN ESENCIAL PRINCIPAL	109
2.6.5	FUNCIÓN SUPLEMENTARIA PRINCIPAL.....	109
2.7	FUNCIÓN UNIVERSAL	111
2.7.1	CAMBIO DE VARIABLE ELEMENTAL A UNIVERSAL	111
2.7.2	FUNCIÓN UNIVERSAL BASADA EN $\mathcal{Q}$	116
2.7.3	FUNCIÓN UNIVERSAL BASADA EN λ	123
2.7.4	GRÁFICA DE LA FUNCIÓN UNIVERSAL.....	131
2.7.5	EFICIENCIA DE LA FUNCIÓN UNIVERSAL	134
2.8	SOLUCIONES CARACTERÍSTICAS.....	143
2.8.1	PARÁBOLA DE TIEMPO FINITO	143
2.8.2	ELIPSE FUNDAMENTAL.....	149
2.8.3	ELIPSE ESENCIAL	150

2.8.4	ELIPSE DE TIEMPO MÍNIMO	151
2.8.5	HIPÉRBOLA DE TIEMPO NULO.....	152
2.8.6	SOLUCIONES DE MEDIA VUELTA	152
2.8.7	SOLUCIONES DE VUELTAS COMPLETAS EXACTAS	153
2.9	NÚMERO DE SOLUCIONES	155
2.10	MÍNIMO TIEMPO EN MÚLTIPLE REVOLUCIÓN.....	157
2.10.1	PROXIMIDAD A N VUELTAS COMPLETAS ($q \rightarrow 1$)	164
2.10.2	PROXIMIDAD A $N+1$ VUELTAS COMPLETAS ($q \rightarrow -1$)	167
2.10.3	PROXIMIDAD A $(N+1/2)$ VUELTAS ($q \rightarrow 0$)	176
2.11	APROXIMACIÓN INICIAL DE LA SOLUCIÓN.....	181
2.11.1	APROXIMACIÓN SOLUCIÓN CASI-PARABÓLICA ($N = 0$).....	181
2.11.2	APROXIMACIÓN SOLUCIÓN HIPERBÓLICA	183
2.11.3	APROXIMACIÓN SOLUCIÓN ELÍPTICA ($N = 0$).....	184
2.11.4	APROXIMACIÓN SOLUCIÓN ELÍPTICA ($N > 0$).....	184
3	OTIMIZACIÓN DE TRAYECTORIAS ESPACIALES.....	189
3.1	TRANSFERENCIA DE HOHMANN	189
3.1.1	IMPULSO TOTAL	191
3.1.2	DEMOSTRACIÓN DE OPTIMALIDAD	196
3.2	TRANSFERENCIA BIELÍPTICA.....	200
3.3	SENSIBILIDAD DE LA SOLUCION CON LAS CONDICIONES INICIALES	206
3.3.1	DATOS INICIALES	206
3.3.2	VARIABLE INDEPENDIENTE.....	208
3.3.3	VARIABLES DEPENDIENTES DE LA SOLUCIÓN	209
3.3.4	VARIACIÓN DE LA SOLUCIÓN	210
4	RESULTADOS	215
4.1	COMPARACIÓN CON LAS SOLUCIONES EXISTENTES.....	215

4.1.1	SOLUCIÓN DE LANCASTER AND BLANCHARD	216
4.1.2	SOLUCIÓN DE BATE, MUELLER, AND WHITE	217
4.1.3	SOLUCIÓN DE SIMÓ	218
4.1.4	SOLUCIÓN DE FANG AND NGUYEN	219
4.1.5	SOLUCIÓN DE BATTIN	219
4.1.6	SOLUCIÓN DE ARORA AND RUSSELL	221
4.1.7	SOLUCIÓN DE IZZO	223
4.2	CONCLUSIONES	225
4.3	POSIBLES DESARROLLOS FUTUROS	225
BIBLIOGRAFIA		227
ANEXO A	FUNCIONES DE STUMPPF	1
ANEXO B	ECUACIÓN DIFERENCIAL GENÉRICA ASOCIADA AL PROBLEMA DE LAMBERT	9
ANEXO C	PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN λ_n	29
ANEXO D	PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN Q_n	33
ANEXO E	DERIVADAS ENÉSIMAS Y DESARROLLOS DE POTENCIAS DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES	35
ANEXO F	DERIVADAS ENÉSIMAS Y COEFICIENTES DEL DESARROLLO DE POTENCIAS DE UNA FUNCIÓN A PARTIR DE SU RELACIÓN CON OTRAS FUNCIONES CONOCIDAS	43
ANEXO G	TEOREMA DE LAMBERT	61
ANEXO H	ECUACIONES RELEVANTES EXISTENTES	67

RESUMEN

Esta tesis se basa en el estudio de la trayectoria que pasa por dos puntos en el problema de los dos cuerpos, inicialmente desarrollado por Lambert, del que toma su nombre.

En el pasado, el *Problema de Lambert* se ha utilizado para la determinación de órbitas a partir de observaciones astronómicas de los cuerpos celestes. Actualmente, se utiliza continuamente en determinación de órbitas, misiones planetaria e interplanetarias, encuentro espacial e interceptación, o incluso en corrección de orbitas. Dada su gran importancia, se decide investigar especialmente sobre su solución y las aplicaciones en las misiones espaciales actuales.

El campo de investigación abierto, es muy amplio, así que, es necesario determinar unos objetivos específicos realistas, en el contexto de ejecución de una Tesis, pero que sirvan para mostrar con suficiente claridad el potencial de los resultados aportados en este trabajo, e incluso poder extenderlos a otros campos de aplicación. Como resultado de este análisis, el objetivo principal de la Tesis se enfoca en el desarrollo de algoritmos para resolver el *Problema de Lambert*, que puedan ser aplicados de forma muy eficiente en las misiones reales donde aparece.

En todos los desarrollos, se ha considerado especialmente la eficiencia del cálculo computacional necesario en comparación con los métodos existentes en la actualidad, destacando la forma de evitar la pérdida de precisión inherente a este tipo de algoritmos y la posibilidad de aplicar cualquier método iterativo que implique el uso de derivadas de cualquier orden.

En busca de estos objetivos, se desarrollan varias soluciones para resolver el *Problema de Lambert*, todas ellas basadas en la resolución de ecuaciones trascendentes, con las cuales, se alcanzan las siguientes aportaciones principales de este trabajo:

- Una forma genérica completamente diferente de obtener las diversas ecuaciones para resolver el *Problema de Lambert*, mediante desarrollo analítico, desde cero, a partir de las ecuaciones elementales conocidas de las cónicas (geométricas y temporal), proporcionando en todas ellas fórmulas para el cálculo de derivadas de cualquier orden.
- Proporcionar una visión unificada de las ecuaciones más relevantes existentes, mostrando la equivalencia con variantes de las ecuaciones aquí desarrolladas.
- Deducción de una nueva variante de ecuación, el mayor logro de esta Tesis, que destaca en eficiencia sobre todas las demás (tanto en coste como en precisión).
- Estudio de la sensibilidad de la solución ante variación de los datos iniciales, y como aplicar los resultados a casos reales de optimización de trayectorias.
- También, a partir de los resultados, es posible deducir muchas propiedades utilizadas en la literatura para simplificar el problema, en particular la propiedad de invariancia, que conduce al Problema Transformado Simplificado.

ABSTRACT

This thesis is based on the study of the two-body, two-point boundary-value problem, initially developed by Lambert, from who it takes its name.

Since the past, *Lambert's Problem* has been used for orbit determination from astronomical observations of celestial bodies. Currently, it is continuously used in orbit determinations, for planetary and interplanetary missions, space rendezvous, and interception, or even in orbit corrections. Given its great importance, it is decided to investigate their solution and applications in the current space missions.

The open research field is very wide, it is necessary to determine specific and realistic objectives in the execution context of a Thesis, but that these serve to show clearly enough the potential of the results provided in this work, and even to extended them to other areas of application. As a result of this analysis, the main aim of the thesis focuses on the development of algorithms to solve the *Lambert's Problem* which can be applied very efficiently in real missions where it appears.

In all these developments, it has been specially considered the efficiency of the required computational calculation compared to currently existing methods, highlighting how to avoid the loss of precision inherent in such algorithms and the possibility to apply any iterative method involving the use of derivatives of any order.

Looking to meet these objectives, a number of solutions to solve the *Lambert's Problem* are developed, all based on the resolution of transcendental equations, with which the following main contributions of this work are reached:

- A completely different generic way to get the various equations to solve the *Lambert's Problem* by analytical development, from scratch, from the known elementary conic equations (geometrics and temporal), by providing, in all cases, the calculation of derivatives of any order.
- Provide a unified view of most existing relevant equations, showing the equivalence with variants of the equations developed here.
- Deduction of a new variant of equation, the goal of this Thesis, which emphasizes efficiency (both computational cost and accuracy) over all other.
- Estudio de la sensibilidad de la solución ante la variación de las condiciones iniciales, mostrando cómo aprovechar los resultados a casos reales de optimización de trayectorias.
- Study of the sensitivity of the solution to the variation of the initial data, and how to use the results to real cases of trajectories' optimization.
- Additionally, from results, it is possible to deduce many properties used in literature to simplify the problem, in particular the invariance property, which leads to a simplified transformed problem.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Geometría del <i>Problema de Lambert</i>	4
Figura 2. Inversa de la excentricidad ($1/e$) como función de ε (o χ).....	36
Figura 3. Familia de trayectorias cónicas, solución del <i>Problema de Lambert</i> , liberando el tiempo de transferencia, para el caso general $\Delta r \neq 0$, dependiendo de la posición del eje polar (χ).....	37
Figura 4. Geometría del <i>Problema de Lambert</i> , liberando el tiempo de transferencia, para el caso general $\Delta r \neq 0$, dependiendo de las combinaciones de S_r y S_δ	38
Figura 5. Familia de trayectorias cónicas, solución del <i>Problema de Lambert</i> , liberando el tiempo de transferencia, para el caso particular $\Delta r = 0$, dependiendo de la excentricidad transversal (e_T).	44
Figura 6. Lugar geométrico de los focos, manteniendo los puntos inicial y final, con el mismo valor del parámetro q (problemas equivalentes geoméricamente).	68
Figura 7. Configuración geométrica del <i>Problema Equivalente Simplificado</i>	68
Figura 8. Curvas de <i>Problemas Equivalentes</i> ($q = \cos f = \text{constante}$) y Recta de <i>Problemas Equivalentes Simplificados</i> ($\sigma = 1$).	69
Figura 9. <i>Función Temporal del Problema de Lambert</i> en función de ψ ó Ψ	93
Figura 10. <i>Función Temporal del Problema de Lambert</i> en función de x	133
Figura 11. Curvas de reducción $y_k = y_k(x)$, $k = 1-3$, para calcular $\lambda_0(x)$ en función de $\lambda_0(y_k)$, en el caso elíptico ($0 \leq x < 1$).	138
Figura 12. Precisión de bits (b) de $\lambda_n(x)$, para varios valores de n ($0, 3, \infty$), en función del número de términos (k) del desarrollo truncado para varios valores máximos (x_b) del argumento ($ x < x_b$).	141
Figura 13. Valores máximos (x_b) del argumento ($ x < x_b$) en función del número de términos (k) del desarrollo truncado de $\lambda_n(x)$, para varios valores de n ($0, 3, \infty$), para <i>simple</i> y <i>doble precisión</i>	141
Figura 14. Función $\psi_m(q;N)$ de valores ψ_m de ψ en función de q para distintos valores de N donde ocurre el mínimo de la función $\pi(\psi; q; N)$ en función de ψ	162
Figura 15. Función $x_m(q;N)$ de valores x_m de x en función de q para distintos valores de N donde ocurre el mínimo de la función $\pi(x; q; N)$ en función de x	163

Figura 16. Geometría de la Transferencia de Hohmann.	190
Figura 17. Impulsos Inicial, Final y Total, adimensionalizados con la velocidad circular inicial, para la Transferencia de Hohmann, en función de la relación de radiovectores.	194
Figura 18. Determinante de la matriz adimensional de derivadas segundas de cualquiera de los dos impulsos necesarios para la Transferencia de Hohmann.	199
Figura 19. Geometría de la Transferencia Bielíptica.	201
Figura 20. Impulso Total adimensional de la Transferencia Bielíptica (B) y Biparabólica (P), comparadas con la Transferencia de Hohmann (H).	203
Figura 21. Mínima relación de radiovectores donde la Transferencia Bielíptica mejora la Transferencia de Hohmann.	205
Figura 22. <i>Grafica de las Funciones de Stumpff</i> c_0 , c_1 , c_2 y c_3	4

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Coste adicional máximo de la derivada de orden m , relativo al coste total del método de mismo orden, $l(m)$, o relativo al coste medio de todas las derivadas anteriores, $m l(m)$, para que el método de un orden superior $(m+1)$ sea más eficiente.	22
Tabla 2. Coste medio (en sumas) de algunas funciones elementales.	25
Tabla 3. Principales acontecimientos relativos a la solución del <i>Problema de Lambert</i>	29
Tabla 4. Primeros coeficientes $p_{m,n}$ de los desarrollos de las funciones P_m	62
Tabla 5. Primeros coeficientes $A_{m,n}$ del desarrollo del cuadrado de la <i>Función Universal</i> en torno a la solución parabólica de tiempo finito ($\psi = \Psi = 0$), en función de q	144
Tabla 6. Primeros coeficientes $A_{s,m,n}$ del desarrollo del cuadrado de la <i>Función Universal</i> en torno a la solución parabólica de tiempo finito ($\psi = \Psi = 0$), en función de q_s	145
Tabla 7. Primeros coeficientes $A_{c,m,n}$ del desarrollo del cuadrado de la <i>Función Universal</i> en torno a la solución parabólica de tiempo finito ($\psi = \Psi = 0$), en función de q_c	145
Tabla 8. Primeros coeficientes $B_{m,n}$ del desarrollo del cuadrado de la <i>Función Universal</i> en torno a la solución parabólica de tiempo finito ($x = 0$), en función de q	147
Tabla 9. Primeros coeficientes $B_{s,m,n}$ del desarrollo del cuadrado de la <i>Función Universal</i> en torno a la solución parabólica de tiempo finito ($x = 0$), en función de q_s	148
Tabla 10. Primeros coeficientes $B_{c,m,n}$ del desarrollo del cuadrado de la <i>Función Universal</i> en torno a la solución parabólica de tiempo finito ($x = 0$), en función de q_c	148
Tabla 11. Valores de ψ_M y ξ_M para las 12 primeras vueltas.	170
Tabla 12. Grado de la aproximación en fracciones simples necesaria para obtener ξ_M con <i>doble precisión</i> , según el método elegido, para las 12 primeras vueltas.	170
Tabla 13. Valores de $\xi_{M(1)}$ para las 10 primeras vueltas.	172
Tabla 14. Valores de x_M , z_M para las 12 primeras vueltas.	175
Tabla 15. Valores de $z_{M(1)}$ para las 12 primeras vueltas.	176
Tabla 16. Valores de ψ_0 y ξ_0 para las 8 primeras vueltas.	178
Tabla 17. Valores de $\xi_{0(1)}$ para las 8 primeras vueltas.	179

Tabla 18. Coste (en sumas), estimado y real (entre paréntesis), de una iteración de algunos de los métodos desarrollados y de los existentes más relevantes.....	215
Tabla 19. Equivalencia de variables de la ecuación de Lancaster and Blanchard.....	216
Tabla 20. Equivalencia de variables con el método de Bate, Mueller, and White.....	217
Tabla 21. Equivalencia de variables con el método de Simó.....	218
Tabla 22. Equivalencia de variables con el método de Fang and Nguyen.....	219
Tabla 23. Equivalencia de variables con el método de Battin.....	220
Tabla 24. Equivalencia de variables con el método de Arora and Russel.....	222
Tabla 25. Equivalencia de variables de la ecuación de Izzo.....	224

SÍMBOLOS

Variables genéricas:

- t_P Tiempo de paso por el pericentro.
 μ Constante gravitacional del primario.

Variables que dependen de la cónica que contiene la trayectoria solución:

- N Revoluciones finalizadas (solo caso elíptico de múltiple revolución).
 e Excentricidad.
 e_C Excentricidad complementaria ($e^2 + e_C^2 = 1$).
 p Parámetro de la cónica (*semi-latus rectum*).
 a Semieje mayor (p/e_C^2).
 ζ Constante de energía ($V_v r$).

Variables que dependen del punto considerado de la trayectoria solución:

- t Tiempo de paso por el punto.
 r Radiovector (distancia desde el foco al punto).
 θ Posición angular en el plano orbital respecto a un origen fijo centrado en el foco.
 ν Anomalía verdadera.
 E Anomalía excéntrica.
 H Anomalía hiperbólica ($E = -i H$).
 X Coordenada X ($r \cos \nu$), eje desde el foco hacia el perigeo.
 Y Coordenada Y ($r \sin \nu$), eje desde el foco hacia el movimiento en el perigeo.
 V_r Velocidad radial.
 V_v Velocidad angular.

En las variables anteriores, el subíndice 0 es usado para indicar su valor en el punto inicial, y el subíndice 1 para el punto final (por ejemplo, v_0 y v_1 para la anomalía verdadera). el subíndice j es usado para indicar cualquiera de los dos subíndices, 0 o 1.

Adicionalmente, las siguientes expresiones son frecuentemente usadas para cualquier variable z (por ejemplo, Δt para el tiempo de transferencia y Δv para el ángulo de transferencia):

$$\Delta z = z_1 - z_0$$

$$\Sigma z = z_1 + z_0$$

Parámetros geométricos característicos, directamente dependientes de los datos geométricos del problema, fijos para todas las trayectorias cónicas de la familia que contiene todas las soluciones resultantes de fijar los datos geométricos y variar sólo el tiempo de transferencia (el subíndice F hace referencia a la *Ellipse Fundamental*):

δ	Semidiferencia angular sin contar vueltas completas ($\Delta\theta/2 = \Delta v/2 - N\pi$).
S_δ	$\text{sign}(\cos \delta)$.
S_r	$\text{sign}(\Delta r)$.
S_Y	$\text{sign}(\Delta Y)$.
a_F	Radiovector medio aritmético ($\Sigma r/2$) o semieje mayor de la <i>Ellipse Fundamental</i> .
c	Cuerda (distancia entre los puntos inicial y final).
r_R	Media cuadrática de radiovectores $((r_0 r_1)^{1/2})$.
r_S	Componente seno de la media cuadrática de radiovectores ($r_R \sin \delta$).
r_C	Componente coseno de la media cuadrática de radiovectores ($r_R \cos \delta$).
q	Principal parámetro geométrico adimensional del problema (r_C/a_F).
f	Ángulo característico del problema ($\cos f = q$, $\sin f = c/\Sigma r$, $0 \leq f \leq \pi$).
q_C	Parámetro geométrico definido como $\cos^2 \frac{1}{2}f = (1+q)/2 = \sin^2 f / (4q_S)$.
q_S	Parámetro geométrico definido como $\sin^2 \frac{1}{2}f = (1-q)/2 = \sin^2 f / (4q_C)$.
C_q	Parámetro geométrico definido como $\cos \frac{1}{2}f = q_C^{1/2}$.
S_q	Parámetro geométrico definido como $\sin \frac{1}{2}f = q_S^{1/2}$.
ε_F	Angulo de la bisectriz desde el eje X_F (eje X de la <i>Ellipse Fundamental</i>).
φ	Angulo entre el eje X de una solución parabólica y el eje X_F .

e_F	Excentricidad mínima ($\cos \varphi = \Delta r /c$) para la <i>Elipse Fundamental</i> .
e_{TP}	Excentricidad transversal parabólica ($\sin \varphi = (1 - e_F^2)^{1/2} = 2r_S/c$).
p_F	Parámetro de la cónica ($a_F e_{TP}^2$) de la <i>Elipse Fundamental</i> .
p_E	Parámetro de la cónica ($r_S^2/a_F = p_F \sin^2 f$) de la <i>Elipse Esencial</i> .
s	Semiperímetro del triángulo característico ($(\Sigma r + c)/2 = a_F + c/2$).
r_{0p}	Radio medio parabólico ($(a_F + r_C)/2$).

Parámetros no geométricos dependientes de algunos datos del problema:

V_{Cj}	Velocidad de la órbita circular con r_j de radio ($(\mu/r_j)^{1/2}$).
V_C	Velocidad característica ($(\mu/a_F)^{1/2}$) de la órbita circular de radio a_F .
T_C	Tiempo de transferencia característico (a_F/V_C).
τ	Tiempo de transferencia adimensional ($\Delta t/(2T_C)$).

Variables para una solución particular, fijando el tiempo de transferencia en la familia que contiene todas las soluciones resultantes de fijar los datos geométricos:

e_T	Excentricidad transversal ($e^2 = e_F^2 + e_T^2$).
ε	Semisuma de anomalía verdadera para la última vuelta ($\Sigma v/2 - N\pi$).
χ	Ángulo del eje X respecto al eje X_F (eje polar desde la <i>Elipse Fundamental</i>).
ϕ	Ángulo de excentricidad transversal ($\text{atan}(S_r e_C/e_T)$).
Φ	Anomalía de excentricidad transversal ($\phi = -i \Phi$).
ψ_N	Semidiferencia de anomalía excéntrica ($\Delta E/2$).
ψ	Semidiferencia de anomalía excéntrica sin contar vueltas completas ($\Delta E/2 - N\pi$).
Ψ	Semidiferencia de anomalía hiperbólica ($\Psi = \Delta H/2$; $\psi = -i \Psi$).
α	Semieje mayor adimensional (a/a_F).
γ	Variable adimensional definida como $(\cos f - \cos \psi) / \sin \psi$.
ρ	Variable adimensional definida como $(1 - \cos f \cos \psi)$.

R	Variable adimensional definida como $\rho^{1/2}$.
V_ρ	Velocidad característica definida como (V_C / R) .
x	<i>Variable Universal</i> definida como $(\sin^2 1/2 \psi)$ o $(-\sinh^2 1/2 \Psi)$.

Cualquier nombre de variable en negrita denota la función que devuelve el valor de la variable, en función de otras variables independientes o argumentos de la función. Como excepción a esta regla, el valor devuelto por la *Función Temporal* τ (definida posteriormente) no será nunca el valor τ , correspondiente siempre al tiempo de transferencia adimensional del problema, en cuyo caso, se usará una notación diferente para la variable que devuelve la función (negrita, paréntesis, subíndices o superíndices, dependiendo del contexto).

En muchas ocasiones se abusará de notación llamando igual a funciones diferentes que obtienen el mismo valor de una misma variable con diferentes argumentos, de modo similar a la llamada *sobrecarga* de funciones usada en programación.

No obstante, para evitar saturación en el uso de la notación en negrita, y siempre que por contexto, no exista ambigüedad en los argumentos de una función, se usará la variable que devuelve la función en su lugar.

ACRÓNIMOS Y ABREVIATURAS

CPU	Central Processing Unit.
DSM	Deep Space Maneuver.
MGA	Multiple Gravity Assist.

1 INTRODUCCIÓN

El *Problema de Lambert* es considerado el problema principal, imprescindible de resolver, en el cálculo de trayectorias orbitales debido a que aparece en multitud de misiones espaciales diferentes, como puede ser determinación de órbitas, misiones planetarias e interplanetarias, encuentros espaciales e interceptación, o incluso en corrección de órbitas. Es más, puede aparecer numerosas veces en una misma misión.

Las soluciones existentes en la actualidad para este problema son en general complejas desde el punto de vista computacional y presentan problemas de precisión cerca de algunas soluciones particulares, sobre todo las trayectorias parabólicas donde aparece una indeterminación de tipo $0/0$, que se resuelve parcialmente con desarrollos particulares también bastante complejos y poco eficientes.

Aunque la complejidad de cálculo no parece un grave problema hoy en día, sí que lo es la precisión, que puede provocar que los algoritmos iterativos tomen demasiadas iteraciones y sobre todo que el resultado no sea tan bueno como se desea.

En consecuencia, la incidencia de este problema básico en los problemas reales es de gran relevancia, poniéndose de manifiesto la conveniencia de encontrar métodos alternativos que eviten los problemas descritos y, con ello, obtener beneficio en todos y cada uno de los casos reales donde interviene.

A continuación, para completar la introducción, en primer lugar se exponen de forma detallada los objetivos de la Tesis Doctoral, centrados en el *Problema de Lambert*, en segundo lugar se realiza un análisis preliminar del *Problema de Lambert* y sus aplicaciones, y finalmente, se resume la organización de los diferentes capítulos de este documento, incluyendo el presente.

1.1 OBJETIVOS

Realizando un estudio previo de la situación actual de los desarrollos relativos al *Problema de Lambert*, se justifica la conveniencia de mejorar su solución y, por ello, se decide establecer como base de esta Tesis Doctoral el siguiente objetivo principal:

- Obtención de ecuaciones para resolver el *Problema de Lambert* que permitan reducir el coste computacional y, sobre todo, evitar los problemas de precisión ligados a este problema, en particular cerca de la solución parabólica.

La búsqueda de este objetivo conduce a las siguientes aportaciones:

- Obtención de las *Ecuaciones Elementales del Problema de Lambert*, con sus *Funciones Elementales* asociadas, mediante desarrollo analítico a partir de las ecuaciones conocidas de las cónicas, ligadas entre sí por la relación existente entre las denominadas *Variables Elementales*. Desarrollo de algoritmos recursivos para evaluar las *Funciones Elementales* y sus derivadas de cualquier orden. Estas ecuaciones son extremadamente simples y de ellas se deducen numerosas soluciones existentes.
- Obtención de las *Ecuaciones Universales del Problema de Lambert*, con sus *Funciones Universales* asociadas, deducidas a partir de la *Función Elemental Básica* mediante cambio a llamada *Variable Universal*. El resultado obtenido destaca por la determinación recursiva de la *Función Universal* y sus derivadas de cualquier orden con la máxima precisión posible (con solo error de redondeo), incluso en la proximidad de la solución parabólica.
- Muestra del potencial de aplicación de los resultados obtenidos, en particular, con la demostración analítica de la optimalidad de la *Transferencia de Hohmann* y, en general, analizando la sensibilidad de la solución para situarlo de forma práctica en el contexto de optimización de trayectorias espaciales que requieren resolver el *Problema de Lambert*.

Para demostrar el cumplimiento de los objetivos, se investiga intensivamente en las siguientes áreas:

- Estudio teórico de la eficiencia de los métodos, realizando un estudio de la precisión y del coste computacional de las operaciones elementales para poder compararlos entre sí de forma genérica, sin necesidad de programación específica de los métodos. Se realiza también un estudio de la dependencia del coste computacional con la precisión y del orden del método numérico iterativo para resolver las ecuaciones correspondientes, proporcionando además un método general de cualquier orden basado en inversión de desarrollos de potencias.
- Programación de algoritmos, usando software desarrollado específicamente, para evaluar la eficiencia real de los métodos más relevantes y proporcionar una comparación cuantitativa.

1.2 ANÁLISIS PRELIMINAR

Antes de realizar cualquier análisis, es necesario conocer en profundidad el *Problema de Lambert*. Para ello, se realiza una introducción general situándolo históricamente, se describe geoméricamente el problema, y se expone el planteamiento matemático general usado para resolverlo.

Una vez en situación, y para hacerse una idea suficientemente completa del escenario actual, se investigan las soluciones existentes en la literatura para resolver el problema, analizando y clasificando los métodos usados según la complejidad de las ecuaciones, número de ecuaciones, variables independientes, validez del rango de aplicación, coste computacional, etc, comparando después estos métodos entre sí, para revelar sus principales ventajas e inconvenientes.

Para terminar este análisis preliminar, se enumeran algunas misiones características donde aparece este problema.

1.2.1 PROBLEMA DE LAMBERT

El llamado *Problema de Lambert* consiste en la determinación de la trayectoria (órbita cónica de transferencia) que parte de un punto inicial conocido en un instante dado para llegar a otro punto final también conocido en otro instante dado, suponiendo la existencia de una única fuerza central de tipo gravitatorio hacia el foco de atracción caracterizada por la constante gravitacional del primario (μ).

Este problema es un clásico, usualmente asociado con el nombre de Lambert^[1], aunque Euler^[2] estudió antes el problema, pero sólo para órbitas parabólicas. Otros matemáticos célebres, como Lagrange^[3] y Gauss^[4], también se les relaciona con el problema y sus soluciones. En la actualidad destaca especialmente el trabajo de Battin^[5].

En el pasado, el problema aparece en la determinación de órbitas a partir de observaciones astronómicas. Durante los últimos 50 años se ha producido un aumento notable del interés por este problema, siendo usado continuamente en determinación de órbitas, misiones planetarias e interplanetarias, encuentros espaciales e interceptación.

Existen muchos desarrollos que conducen a una multitud de ecuaciones que resuelven este problema. Entre todas, destacan las soluciones que usan las funciones derivadas para mejorar la convergencia de los métodos numéricos iterativos necesarios para obtener la solución. Muchos autores, usan la primera derivada (Lancaster and Blanchard^[6]), algunos incluso la segunda (Gooding^[7], Arora and Russell^[8,9]), pero todas las soluciones revisadas tienen serios problemas en las soluciones cercanas a la órbita parabólica (algunos también alrededor de la media vuelta), agravándose especialmente en el cálculo sucesivo de las derivadas, principalmente debido a la indeterminación existente (0/0), que causa una pérdida acumulativa de precisión y a la complejidad creciente del cálculo, que causa un excesivo coste computacional por ciclo en comparación con el coste de una iteración sin uso de derivadas.

Algunos autores resuelven el problema de precisión para la función asociada a la ecuación (pero no para las derivadas) usando *variables universales*, llamadas así por ser válidas para todas las soluciones cónicas (elipses, parábolas e hipérbolas). En esta línea, destacan algunas publicaciones, tal como Bate, Mueller and White^[10], Fang and Nguyen^[11] y Arora and Russell^[9], que plantean, como en la presente Tesis, ecuaciones trascendentes con una única incógnita, usando al menos la segunda derivada.

En general, la resolución del *Problema de Lambert* implica los siguientes pasos:

1. Cálculo de los parámetros geométricos de la transferencia.
2. Obtención de una aproximación inicial de la variable de iteración elegida como incógnita.
3. Iteración sobre la ecuación trascendente, para el tiempo de transferencia particular, hasta conseguir la convergencia de la variable incógnita.
4. Cálculo de variables de interés sobre la trayectoria solución, normalmente las velocidades en los puntos inicial y final.

1.2.1.1 DESCRIPCIÓN GEOMÉTRICA DE LA TRANSFERENCIA

La figura 1 muestra la geometría que describe el *Problema de Lambert*. La órbita solución es una trayectoria cónica contenida en el plano determinado por el foco (F), el punto inicial (P_0) y el punto final (P_1). Las variables mostradas en la figura se definen en la sección de símbolos [xii](#). Aunque la figura muestra un caso particular de una solución elíptica, se puede extender también sin dificultad para soluciones parabólicas o hiperbólicas con la única salvedad de ser necesariamente $N = 0$.

Figura 1. Geometría del *Problema de Lambert*.

Definiendo coordenadas polares en el plano de la trayectoria con origen en el foco, cada punto del plano queda determinado por el vector desde el foco a dicho punto definido a su vez por sus dos coordenadas, el módulo del vector o distancia al foco, también llamado radiovector (r), y el ángulo (θ) de posición del vector tomando un origen angular elegido arbitrariamente.

En este contexto, para definir el problema, se suelen elegir como variables geométricas el radiovector inicial (r_0), el radiovector final (r_1) y el ángulo descrito por la trayectoria (Δv), y como variable temporal la diferencia de tiempo (Δt) entre los instantes inicial y final (tiempo de transferencia empleado para viajar desde el punto inicial al final). Por lo tanto, el problema matemático a resolver, para obtener la solución, depende en principio de 4 variables (tres geométricas y una temporal), pero puede reducirse a tan solo 2 variables (una geométrica dependiente de las tres iniciales y otra temporal) como se expone a continuación.

En el caso de simple revolución (sin superar la primera vuelta), siempre existe una única solución matemática, que será una trayectoria elíptica, hiperbólica ó parabólica en función del tiempo de transferencia, para cada configuración geométrica. En el caso de múltiple revolución (al menos la primera vuelta finalizada), las posibles soluciones sólo pueden ser elípticas, siendo necesario un parámetro adicional (N) para indicar el número de vueltas completadas. Para cada valor de N existe un tiempo de transferencia mínimo por debajo del cual no hay solución y por encima existen dos (una doble cuando coincide).

En realidad, el parámetro N está implícito en la variable Δv que acumula los ángulos correspondientes a dichas vueltas. Sin embargo, en general, resulta más claro extraer el número de vueltas como un parámetro adicional y usar la variable $\Delta \theta$ correspondiente sólo a la última vuelta (ángulo entre los vectores inicial y final). En resumen, se define $\Delta \theta$ como la diferencia de posición angular, coincidiendo con el ángulo descrito en la última vuelta no completa, y Δv como la diferencia de anomalía verdadera, coincidiendo con el ángulo completo descrito durante toda la trayectoria. Matemáticamente se expresa con la siguiente relación

$$\Delta v = \Delta \theta + 2\pi N \quad \text{donde} \quad 0 \leq \Delta \theta < 2\pi$$

En consecuencia, para definir el *Problema de Lambert*, se debe fijar Δv ó ($\Delta \theta$ y N), como se considere más conveniente en cada momento.

Nótese que esta distinción sólo tiene sentido en el caso elíptico, pues en el caso hiperbólico y parabólico, el parámetro N es nulo y, por tanto, Δv y $\Delta \theta$ coinciden.

Para usar las ecuaciones de la trayectoria cónica en coordenadas cartesianas, se definen los ejes FXY mostrados en la figura 1. El origen se sitúa en el foco de atracción F , el eje X desde el foco hacia el pericentro (eje polar) y el eje Y desde el foco en dirección y sentido del movimiento en el pericentro. En estos ejes, las coordenadas cartesianas (X , Y) de un punto de la trayectoria, en función de las coordenadas polares, son

$$X = r \cos v \quad ; \quad Y = r \sin v$$

Una vez definido con exactitud el *Problema de Lambert*, se procede a exponer el planteamiento matemático que permite resolverlo con la mayor generalidad posible.

1.2.1.2 PARÁMETROS GEOMÉTRICOS

Aparte de los propios datos geométricos (r_0 , r_1 , Δv), y los parámetros comúnmente utilizados (Δr , Σr), se definen los siguientes parámetros principales

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= \Delta v - 2N\pi \quad ; \quad \delta = \Delta\theta/2 \quad ; \\ a_F &= \Sigma r/2 \quad ; \quad r_R = (r_0 r_1)^{1/2} \quad ; \\ r_C &= r_R \cos\delta \quad ; \quad r_S = r_R \sin\delta\end{aligned}\tag{1.2.1}$$

Nótese que todas estas variables son variables geométricas dependientes de los datos del problema, ($\Delta\theta$) es la diferencia de posición angular o, lo que es lo mismo, el ángulo de transferencia descontando las vueltas completas (N), δ es la semidiferencia de posición angular, r_R y a_F son la media cuadrática y aritmética de r_0 y r_1 , respectivamente, y r_C y r_S otros dos parámetros geométricos definidos como las componentes coseno y seno de la media cuadrática en relación al ángulo δ . El parámetro a_F es también el semieje mayor de la solución llamada *Elipse Fundamental*, como se verá posteriormente.

El triángulo, mostrado en la figura 1, formado por los puntos inicial (P_0) y final (P_1) con el foco de atracción (F), caracteriza la geometría del *Problema de Lambert* y juega un importante papel en los desarrollos que llevan a la determinación de las ecuaciones para resolverlo. Los lados del triángulo son los radiovectores inicial (r_0) y final (r_1), ambos datos directos del problema, y la cuerda (c) conectando los puntos inicial y final, que puede calcularse directamente a partir de los datos geométricos.

Teniendo en cuenta los cuadrados de los incrementos de las coordenadas cartesianas, en los ejes polares de la cónica, en función de las coordenadas polares de los puntos inicial y final

$$(\Delta X)^2 = (r_1 \cos v_1 - r_0 \cos v_0)^2 = r_1^2 \cos^2 v_1 + r_0^2 \cos^2 v_0 - 2 r_0 r_1 \cos v_0 \cos v_1$$

$$(\Delta Y)^2 = (r_1 \sin v_1 - r_0 \sin v_0)^2 = r_1^2 \sin^2 v_1 + r_0^2 \sin^2 v_0 - 2 r_0 r_1 \sin v_0 \sin v_1$$

y sumándolos

$$c^2 = (\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2 = r_0^2 + r_1^2 - 2 r_0 r_1 (\cos v_0 \cos v_1 + \sin v_0 \sin v_1)$$

se deduce la siguiente expresión que permite calcular directamente la cuerda a partir de los datos del problema

$$c^2 = r_0^2 + r_1^2 - 2 r_0 r_1 \cos\Delta v = r_0^2 + r_1^2 - 2 r_0 r_1 \cos\Delta\theta$$

Nótese que el ángulo de transferencia $\Delta\theta$ es el definido desde el punto inicial al final en el sentido del movimiento de la trayectoria, eliminando las N vueltas completas, por lo que puede ser tanto el ángulo interior al triángulo como el exterior (cuya suma con el interior es 2π). Las distintas situaciones pueden apreciarse más adelante en la figura 4.

La expresión de c^2 se puede reordenar de las dos formas siguientes

$$c^2 = r_0^2 + r_1^2 - 2 r_0 r_1 + 2 r_0 r_1 (1 - \cos\Delta\theta)$$

$$c^2 = r_0^2 + r_1^2 + 2 r_0 r_1 - 2 r_0 r_1 (1 + \cos\Delta\theta)$$

y con las equivalencias trigonométricas

$$\cos\Delta\theta = 1 - 2 \sin^2(\Delta\theta/2) = 2 \cos^2(\Delta\theta/2) - 1$$

resulta

$$c^2 = (\Delta r)^2 + 4 r_0 r_1 \sin^2(\Delta\theta/2)$$

$$c^2 = (\Sigma r)^2 - 4 r_0 r_1 \cos^2(\Delta\theta/2)$$

y usando las variables definidas en (1.2.1), se obtiene finalmente

$$c^2 = (\Delta r)^2 + (2 r_s)^2 \quad (1.2.2)$$

$$c^2 = (\Sigma r)^2 - (2 r_c)^2 \quad (1.2.3)$$

Otros parámetros de distancia comúnmente usados son el semiperímetro (s) del triángulo característico y el radio del punto medio parabólico (r_{0p}), esto es

$$s = (\Sigma r + c) / 2 = a_F + c / 2 \quad (1.2.4)$$

$$r_{0p} = (a_F + r_C) / 2 \quad (1.2.5)$$

Dividiendo (1.2.2) por la cuerda, se obtiene una relación pitagórica que permite definir el ángulo φ mediante sus expresiones trigonométricas

$$e_F = \cos\varphi = \frac{|\Delta r|}{c} \quad ; \quad e_{TP} = \sin\varphi = \frac{2r_s}{c} \quad ; \quad \tan\varphi = \frac{2r_s}{|\Delta r|} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi/2) \quad (1.2.6)$$

El significado de este ángulo se estudia en 2.1.1 y se puede ver en la figura 3. En particular, $\cos\varphi$ es la excentricidad mínima correspondiente a la solución particular llamada *Ellipse Fundamental* (e_F) y $\sin\varphi$ es la excentricidad transversal de la solución parabólica de tiempo finito (e_{TP}).

Dividiendo (1.2.3) por Σr , se obtiene también una relación pitagórica que permite definir el ángulo f mediante sus expresiones trigonométricas

$$q = \cos f = \frac{2r_c}{\Sigma r} = \frac{r_c}{a_F} \quad ; \quad \sin f = \frac{c}{\Sigma r} = \frac{c}{2a_F} \quad ; \quad \tan f = \frac{c}{2r_c} \quad (0 \leq f \leq \pi) \quad (1.2.7)$$

El ángulo f es el mismo definido en Battin^[5], y aparece continuamente a lo largo del documento, por ser un parámetro que, como demuestra el *Teorema de Lambert* en [1.2.1.3](#), define unívocamente la geometría del *Problema de Lambert*. En particular, $\cos f$ es el parámetro (q) principalmente elegido para caracterizar la geometría del *Problema de Lambert*.

En principio, cualquiera de las expresiones trigonométricas de f es válida para caracterizar la geometría del *Problema de Lambert* (y en general cualquier parámetro directamente dependiente de f), sin embargo $\sin f$ no es una buena elección debido a que existen dos valores del ángulo f , suplementarios entre sí, que dan lugar al mismo valor, provocando una ambigüedad en la definición del problema.

En este trabajo se ha elegido preferentemente el parámetro q (con valores entre -1 y 1) para desarrollar las diversas ecuaciones propuestas para resolver el problema. No obstante, en algunas ocasiones se ha usado el ángulo f directamente, cuando se ha visto más conveniente, y en otras situaciones particulares también resulta útil usar los parámetros alternativos

$$q_C = \cos^2 \frac{1}{2}f = \frac{1 + \cos f}{2} = \frac{1 + q}{2}$$

$$q_S = \sin^2 \frac{1}{2}f = \frac{1 - \cos f}{2} = \frac{1 - q}{2}$$

especialmente cuando los puntos inicial y final están próximos ($c \ll a_F$), debido a la pérdida de precisión cuando se evalúa $(1-q)$ siendo q próximo a 1 , ó $(1+q)$ siendo q próximo a (-1) . En cualquiera de estos casos, aprovechando la relación trigonométrica

$$\sin^2 f = 4 \cos^2 \frac{1}{2}f \sin^2 \frac{1}{2}f = 4 q_C q_S$$

y teniendo en cuenta [\(1.2.2\)](#), se puede calcular sin pérdida de precisión

$$\left\{ \begin{array}{l} c^2 = (\Delta r)^2 + (2r_s)^2 \\ \sin^2 f = \frac{c^2}{(\Sigma r)^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q_C = \frac{1+q}{2} \quad ; \quad q_S = \frac{\sin^2 f}{4q_C} \quad (q \geq 0) \\ q_S = \frac{1-q}{2} \quad ; \quad q_C = \frac{\sin^2 f}{4q_S} \quad (q \leq 0) \end{array} \right\} \quad (1.2.8)$$

Estos parámetros se deben usar para evitar las operaciones $(1+q)$ y $(1-q)$ donde sea necesario.

Otro parámetro bastante común es el parámetro l de Gauss^[4], también usado por otros autores como Battin^[5], y definido como

$$\frac{a_F}{r_C} = 1 + 2l$$

siendo a_F y r_C variables definidas en (1.2.1), y de donde, despejando l y teniendo en cuenta la definición de q en (1.2.7), se deduce la relación

$$l = \frac{1}{2} \left(\frac{a_F}{r_C} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} - 1 \right) = \frac{1-q}{2q} = \frac{q_s}{q} \quad (1.2.9)$$

Este parámetro, igual que q_s , se usa para evitar la indeterminación existente cuando los puntos inicial y final están próximos y la diferencia angular es ligeramente mayor que 0, siendo q_s y l próximos a 0 y q a 1. El otro caso, donde los puntos inicial y final están próximos, se corresponde con una diferencia angular de casi 2π (una vuelta), donde q_C es próximo a 0 y q es próximo a (-1) .

En muchas ocasiones, en la literatura, se usa un parámetro geométrico muy similar a q , a veces incluso con el mismo nombre, llamado aquí q_L para distinguirlo de q , definido como

$$q_L = \frac{r_C}{s} \quad (1.2.10)$$

donde r_C y s se han definido en (1.2.1) y (1.2.4) respectivamente.

Teniendo en cuenta a_F de (1.2.1) y $\sin f$ de (1.2.7), se tiene

$$q / q_L = s / a_F = 1 + c/\Sigma r = 1 + \sin f$$

obteniendo la siguiente relación entre los parámetros

$$q_L = \frac{\cos f}{1 + \sin f} = \frac{q}{1 + \sqrt{1 - q^2}} \quad (1.2.11)$$

Alternativamente, a partir de las siguientes equivalencias

$$a_F = \Sigma r / 2 = (2s - c) / 2 = s (1 - c/2s)$$

se deduce la siguiente expresión

$$q_L = (1 - c/2s) q$$

calculada con el único fin de destacar el factor $(1 - c/2s)$ que aparece algunas veces en la literatura, como por ejemplo en el desarrollo de Gooding^[7].

Para hallar q en función de q_L , despejando $\sin f$ en la expresión de (q / q_L) anterior

$$\sin f = q / q_L - 1$$

y elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad, se consigue

$$1 - q^2 = (q / q_L)^2 - 2 q / q_L + 1$$

Simplificando y despejando q , se deduce el resultado buscado

$$q = 2 q_L / (1 + q_L^2) = 2 / (1 / q_L + q_L) \quad (1.2.12)$$

En este apartado se han presentado los principales parámetros geométricos relacionados con el *Problema de Lambert*, y en particular el parámetro principal q en función de los datos geométricos del problema, evitando, si procede, la posible indeterminación resultante debido a la proximidad de los puntos inicial y final, mediante los parámetros alternativos q_C y q_S . Adicionalmente, se ha establecido la relación con otro parámetro geométrico q_L usado comúnmente en la literatura en lugar del parámetro q . La conveniencia de usar el parámetro q en lugar de q_L se justifica por la mayor simplicidad de las ecuaciones obtenidas para resolver el *Problema de Lambert*, como se verá a lo largo del presente documento.

1.2.1.3 TEOREMA DE LAMBERT

El *Teorema de Lambert*, demostrado en el [Anexo G](#), enuncia que el tiempo de transferencia (Δt) empleado para recorrer un arco de trayectoria cónica, en presencia de una fuerza dirigida hacia un foco fijo e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, caracterizada por la constante de atracción del primario (μ), sólo depende del semieje mayor (a), la suma de radiovectores (Σr) de los puntos inicial y final, y la cuerda (c) que conecta los extremos del arco. Su expresión matemática es

$$\sqrt{\mu} \Delta t = f(a, \Sigma r, c) \quad (1.2.13)$$

Este teorema es también la forma general de la ecuación que resuelve el *Problema de Lambert*, descrito en [1.2.1.1](#). En esta ecuación (Σr , c , Δt) son datos del problema y a la incógnita a determinar. Por tanto, el *Teorema de Lambert* establece una sorprendente propiedad que explica la notable simplificación matemática que se produce en la resolución del *Problema de Lambert*, reduciendo a 3 los grados de libertad, en lugar de los 4 que sugieren los datos (r_0 , r_1 , Δv , Δt).

Aunque el *Teorema de Lambert* se atribuye de forma general al propio Lambert^[1], fue primero Euler^[2] a partir de la ecuación que desarrolló para la solución parabólica

$$6 \sqrt{\mu} \Delta t = (\Sigma r + c)^{3/2} - S_\delta (\Sigma r - c)^{3/2} \quad ; \quad S_\delta = \text{sign}(\sin \Delta v)$$

el que dedujo una primera forma particular del *Teorema de Lambert* aplicado a órbitas parabólicas (donde el semieje mayor es infinito)

$$\sqrt{\mu} \Delta t = f(\Sigma r, c)$$

Para simplificar aún más los grados de libertad, adimensionalizando la ecuación general (f), se obtiene la siguiente ecuación adimensional (τ)

$$\frac{\sqrt{\mu} \Delta t}{r_{\mu}^{3/2}} = \tau \left(\frac{a}{a_c}, \frac{c}{\Sigma r} \right)$$

con las siguientes variables adimensionales

$$\tau = \frac{\sqrt{\mu} \Delta t}{r_{\mu}^{3/2}} = \text{Tiempo de transferencia adimensional (dato temporal)}$$

$$\alpha = \frac{a}{a_c} = \text{Semieje mayor adimensional (variable incógnita)}$$

$$\sin f = \frac{c}{\Sigma r} = \text{Parámetro geométrico adimensional (dato geométrico)}$$

siendo r_{μ} y a_c dos distancias características usadas para adimensionalizar el tiempo de transferencia y el semieje mayor, respectivamente. Estas distancias pueden elegirse de forma independiente cada una de ellas, pero deben ser ambas dependientes directamente de los parámetros (Σr , c). Como ejemplo, algunas distancias usadas en la literatura son el semieje mayor de la llamada *Elipse Fundamental* (a_F), la componente coseno del radio medio cuadrático (r_C), el semiperímetro del triángulo formado por los radiovectores inicial y final con la cuerda (s), o el radio del punto medio parabólico r_{0p} , todas definidas en [1.2.1.2](#). En las ecuaciones desarrolladas en este trabajo se usa a_F . Como ejemplo de uso de las otras variables, se puede citar a Gooding^[7], que usa el semiperímetro (s), y a Battin^[5], que usa la variable r_{0p} .

Salvo que se diga lo contrario, el semieje mayor adimensional (α) y el tiempo adimensional (τ) usados a lo largo del documento, son los mismos definidos previamente en la sección de símbolos [xii](#) como

$$\alpha = \frac{a}{a_F} \quad ; \quad \tau = \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{T_C} \quad ; \quad T_C = \frac{a_F}{V_C} \quad ; \quad V_C = \sqrt{\frac{\mu}{a_F}} \quad (1.2.14)$$

donde a_F ya se ha definido y T_C y V_C son el tiempo y la velocidad características definidas para el *Problema de Lambert*, también definidas en la sección de símbolos.

El resultado es una ecuación con dos datos adimensionales conocidos (temporal y geométrico) y una incógnita a resolver, en principio el semieje mayor adimensional, pero se puede generalizar aún más como

$$\tau = \tau(z, q; N) \quad (1.2.15)$$

donde τ es el tiempo de transferencia adimensional anterior, q un único parámetro geométrico, dependiente sólo de la relación geométrica ($c/\Sigma r$), τ la *Función Temporal*

asociada al *Problema de Lambert*, z la única incógnita a determinar, función del semieje mayor adimensional α (y opcionalmente también de q y τ), y N un parámetro adicional indicando el número de vueltas para el caso de múltiple revolución (según se explica en [1.2.1.4](#)).

En resumen, salvando el parámetro N , que debe ser elegido a priori, los cuatro grados de libertad que en principio suponen los datos del problema (r_0 , r_1 , Δv , Δt), se reducen a tres (Σr , c , Δt) gracias al *Teorema de Lambert*, y a dos (q , τ) con la adimensionalización adicional de la ecuación.

1.2.1.4 PLANTEAMIENTO MATEMÁTICO

El planteamiento general para resolver el *Problema de Lambert* descrito anteriormente es el siguiente. Fijando las tres variables geométricas (r_0 , r_1 y Δv), queda definida una familia unidimensional de trayectorias cónicas en función del tiempo de transferencia (Δt), con lo cual, el problema se reduce a averiguar la trayectoria que cumple con dicho tiempo. Sin embargo, resulta mucho más fácil parametrizar dicha familia eligiendo adecuadamente alguna variable independiente adimensional (z), también geométrica, y transformar el problema en resolver la ecuación que relaciona Δt con z , de modo que la obtención de la variable z determina la trayectoria que resuelve el problema. Dicha relación se obtiene usando la ecuación temporal de la cónica, obteniendo Δt en función de z y de las tres variables geométricas fijas, estableciéndose la siguiente ecuación matemática cuya solución resuelve el problema

$$\Delta t = t(z, r_0, r_1, \Delta v)$$

siendo t la función llamada *Función Temporal* asociada a la ecuación, llamada también *Ecuación Temporal*, llamadas ambas así por estar relacionadas con el tiempo de transferencia asociado al *Problema de Lambert*.

Teniendo en cuenta la siguiente dependencia del ángulo de transferencia (Δv) con la diferencia angular ($\Delta \theta$)

$$\Delta v = \Delta \theta + 2 N \pi \quad ; \quad \Delta v \geq 0 \quad ; \quad 0 \leq \Delta \theta < 2\pi \quad ; \quad N \geq 0$$

la ecuación anterior también se puede poner como

$$\Delta t = t(z, r_0, r_1, \Delta \theta, N)$$

Téngase en cuenta que N es un parámetro, no una variable independiente, es decir, para cada valor de N , se tiene un problema diferente (por ser Δv diferente), aunque todos ellos mantengan la misma configuración geométrica (r_0 , r_1 y $\Delta \theta$). En consecuencia, la Función Temporal (t) se puede poner indistintamente, tanto dependiendo de Δv , como de $\Delta \theta$ y N , sabiendo que cada valor de Δv corresponde a un par de valores únicos de $\Delta \theta$ y N , y viceversa.

Según este planteamiento, la *Ecuación Temporal* para obtener z , tiene en principio 4 grados de libertad correspondientes a las 4 variables independientes (Δt , r_0 , r_1 y Δv), sin embargo, un análisis dimensional indica que el número de grados de libertad no puede ser mayor de 3, resultando la siguiente ecuación

$$\tau = \tau(z, r_1/r_0, \Delta v) \quad \text{o} \quad \tau = \tau(z, r_1/r_0, \Delta \theta, N)$$

siendo τ la función que devuelve el tiempo de transferencia adimensional, en función de las variables indicadas, y τ el tiempo de transferencia adimensional, definido como $\Delta t/(2T_C)$, donde T_C es un tiempo característico del problema obtenido a partir de las variables geométricas (r_0 , r_1 y Δv) y la constante gravitacional del primario (μ). Por simplicidad de notación, a esta ecuación y a la función τ asociada también se las llama *Ecuación Temporal* y *Función Temporal*, respectivamente, prescindiendo de la palabra adimensional, que se sabe por contexto.

Sorprendentemente, según el *Teorema de Lambert*, mostrado en [1.2.1.3](#), la *Función Temporal* τ no depende independientemente de las variables r_1/r_0 y Δv , si no de una combinación q , dependiente de r_1/r_0 y $\Delta \theta$, extrayendo el número de vueltas N . En consecuencia, la *Ecuación Temporal* se reduce a 2 grados de libertad, dependiendo tan sólo de las variables z y q , con N como parámetro, siendo q una única variable geométrica adimensional característica del problema. De este modo, el problema se reduce a calcular la variable z en la siguiente ecuación

$$\tau = \tau(z, q; N)$$

siendo τ la *Función Temporal* adimensional *sobrecargada* dependiente sólo de z y q , con N como parámetro. El concepto de función *sobrecargada* es el mismo usado en programación relativo a la *sobrecarga* de funciones mediante la cual se llama con el mismo nombre a funciones diferentes que obtienen el mismo resultado con diferentes argumentos.

Para simplificar notación, cuando la *Función Temporal* (τ) no dependa del parámetro N , como ocurre en el caso hiperbólico donde $N = 0$, se usará la notación $\tau(z, q)$ en lugar de $\tau(z, q; 0)$.

Para el caso general de N vueltas es útil separar el tiempo debido a periodos orbitales completos (τ tiene dependencia lineal con N), de modo que

$$\tau(z, q; N) \equiv \tau_N(z, q) = \tau_0(z, q) + N \tau_T(z, q)$$

donde τ_N es la misma *Función Temporal* τ , con una nomenclatura alternativa, que devuelve el tiempo de transferencia sumando N vueltas previas completas en función de z y q , y τ_T es la función que devuelve el periodo orbital en función de z y q , llamada en consecuencia *Función de Periodo Orbital*. Evidentemente, para el caso hiperbólico, por ser N idénticamente nulo, es obvio que $\tau(z, q) \equiv \tau_N(z, q) = \tau_0(z, q)$.

Para seguir simplificando notación todo lo posible, en algunas ocasiones se definen también las variables τ_0 y τ_T asociadas a las funciones τ_0 y τ_T , como

$$\tau_N = \tau_N(z, q) \quad ; \quad \tau_T = \tau_T(z, q)$$

De este modo, se podrán usar las variables en lugar de las funciones cuando por contexto se sepan los argumentos usados en dichas funciones.

Nótese que igual que las funciones asociadas, se debe cumplir la relación

$$\tau_N = \tau_0 + N \tau_T$$

Atendiendo a la *Ecuación Temporal*, el problema matemático queda definido, para cada valor de N , conociendo τ y q , y por tanto, todos los problemas con los mismos valores de estas dos variables tienen la misma solución matemática (z).

Con la *Función Temporal* se obtiene τ en función de z y q , sin embargo, el problema es obtener z en función de τ y q , por lo que es necesario resolver la ecuación numéricamente mediante aproximaciones sucesivas a partir de una aproximación inicial dada, mejorando la aproximación en cada iteración hasta conseguir la precisión deseada, hasta un límite marcado por la precisión usada en los cálculos.

Los algoritmos usados en cada iteración se obtienen truncando algún tipo de desarrollo de la función (serie de potencias, fracciones simples, etc), en torno a cada aproximación para despejar o aproximar el incremento necesario de la variable z en función del incremento del tiempo adimensional necesario para llegar a los valores requeridos. Estos desarrollos se obtienen a partir de los valores de la función y sus derivadas en torno a la aproximación considerada en cada iteración. Se llama orden del algoritmo, o del método, al orden de la primera derivada despreciada en el desarrollo truncado, pero teniendo en cuenta que las derivadas del desarrollo también pueden aproximarse por incrementos de derivadas de orden menor, es decir, se puede sustituir el cálculo de una derivada por el cálculo adicional de una derivada de orden menor, en un punto diferente, evidentemente.

Dentro de ciertos límites (aproximación suficientemente próxima para que el método sea convergente pero sin llegar al límite impuesto por la precisión usada en los cálculos), el algoritmo mejora exponencialmente con el orden del método. El método necesitará menos iteraciones cuando el orden de cada iteración sea más alto, y en general, será preferible un método de mayor orden, siempre y cuando el coste computacional de cada iteración multiplicado por el número de iteraciones necesarias para obtener la precisión deseada, sea también menor.

Es extremadamente importante, para cualquier algoritmo elegido, evaluar la función y las derivadas necesarias con la mayor simplicidad y precisión posible, y es en este punto donde se consigue una mejora considerable frente a las existentes en la actualidad.

Se elegirán varias variables independientes como variable z (ε , χ , e_T , ϕ ó Φ , ψ ó Ψ , y x), todas definidas en la sección de símbolos [xii](#)). Las tres primeras (ε , χ , e_T) sólo se usarán como intermedias para llegar a las llamadas *Variables Elementales* (ϕ ó Φ y/o ψ ó Ψ) distinguiendo el tipo de solución cónica, elíptica (ϕ y/o ψ) ó hiperbólica (Φ y/o Ψ). La última (x) es la llamada *Variable Universal*, obtenida en función de ψ ó Ψ , y elegida convenientemente para simplificar el cálculo de la función τ , unificando todas los tipos

de soluciones cónicas (elípticas, parabólicas e hiperbólicas), pero sobre todo, para evitar los problemas de precisión existentes cerca de las soluciones parabólicas.

Cuando la *Función Temporal* dependa sólo de las *Variables Elementales* (ϕ, ψ, Φ, Ψ), se la llamará también *Función Elemental*, y por consistencia, a la *Ecuación Temporal* asociada, se la llamará también *Ecuación Elemental*, indistintamente. Por el mismo motivo cuando se use la *Variable Universal* (x), a la *Función Temporal* y la *Ecuación Temporal* asociada, se las llamará también *Función Universal* y *Ecuación Universal*, respectivamente. El calificativo *Temporal* aplica a todas las funciones y ecuaciones obtenidas, los calificativos *Elemental* y *Universal* se usan sólo cuando se quiere puntualizar la función o la ecuación a la que se hace referencia, según las variables utilizadas.

Todos los nombres de funciones y ecuaciones anteriores, por ejemplo *Ecuación Elemental*, están abreviados en el contexto del *Problema de Lambert*, es decir, fuera de contexto habría que añadir el calificativo “*del Problema de Lambert*”, por ejemplo, *Ecuación Elemental del Problema de Lambert*.

Se obtendrán desarrollos completos de la función τ para las *Variables Elementales* y para la *Variable Universal*, que permitirán evaluar la *Función Temporal* y sus derivadas usando algoritmos recursivos, para poder aplicar cualquier método iterativo conocido basado en derivadas de cualquier orden, con objeto de mejorar la convergencia de la solución numérica.

Con las *Variables Elementales* (ϕ, ψ, Φ, Ψ) se obtienen las primeras soluciones completas, siendo además parámetros geométricos de fácil interpretación. Sin embargo, existe un problema de indeterminación en la solución parabólica que provoca una pérdida de precisión en el cálculo de la *Función Temporal* cerca de dicha solución, agravándose aún más en el cálculo sucesivo de las derivadas.

Con el cambio a la *Variable Universal* (x), se logran evitar las indeterminaciones mencionadas, sin pérdida significativa de precisión, tanto en la función τ como en sus derivadas, gracias a la introducción de ciertas familias paramétricas de funciones auxiliares (f_n en [Anexo B](#)).

A su vez, con la *Variable Universal*, se desarrollan dos soluciones completas. La primera de ellas usando la función Q definida en Battin^[5], con objeto de complementar algunos de los mejores métodos existentes en la actualidad basados en dicha función, u otras semejantes. La aportación de esta Tesis Doctoral en este punto consiste principalmente en la ampliación de la definición de la función Q para adaptarla también a las soluciones de múltiple revolución, y a la obtención recursiva de las derivadas m -ésimas de la función Q , y con ello de τ , sin pérdida de precisión debida a la indeterminación, haciendo uso de la familia paramétrica de funciones Q_n , definidas en su momento. La segunda solución completa aporta una solución alternativa basada en una nueva función λ , en lugar de Q , con la cual se consigue una forma todavía más simple de τ y sus derivadas, haciendo uso de la familia paramétrica de funciones λ_n , con ventajas adicionales relativas a su evaluación gracias a sus propiedades particulares (ver [Anexo C](#)).

Se hace notar que, en otros contextos, se podría usar la familia paramétrica de funciones $Q_n(x)$, o la familia $\lambda_n(x)$ y sus propiedades, para otros fines, y de forma más general cualquiera de las familias de soluciones f_n definidas en el [Anexo B](#).

También se hace notar, que en muchos casos es más fácil resolver la *Ecuación Temporal* elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación, normalmente por la existencia de una raíz cuadrada que complica la derivación de la función τ . En resumen, sin tener en cuenta valores de τ negativos que implicarían ir atrás en el tiempo, se puede plantear la siguiente ecuación equivalente

$$\tau^2 = (\tau^2)(z, q; N)$$

Como es obvio, todo lo dicho para la función τ usando la ecuación sin elevar al cuadrado, es válido para la función τ^2 usando esta última ecuación alternativa. Se desarrollarán algoritmos para usar cualquiera de las dos opciones planteadas con el fin de poder elegir la más adecuada en cada situación.

Adicionalmente, la derivada primera respecto a q , junto con la primera derivada respecto a z , son ambas muy útiles para estudiar la variación de la solución del problema ante pequeñas variaciones de los datos, cuyos resultados son aplicables directamente a la optimización de la mayoría de los problema de determinación de órbitas donde es usual que el *Problema de Lambert* sea una parte (incluso varias veces) del problema global. Aún más, la mayoría de las veces los problemas reales consisten en la optimización de trayectorias donde se buscan extremos de una función global determinada. En dicho caso, aunque las primeras derivadas de la *Función Temporal* son suficientes para obtener la ecuación global donde debe anularse la derivada de la función global, es sumamente útil disponer de las derivadas segundas para poder aplicar un método de segundo orden a dicha ecuación global, logrando una resolución mucho más eficiente. Por ello, también se calcularan las derivadas segundas de la *Función Temporal* respecto a ambas variables (z y q), incluida, por supuesto, la derivada parcial segunda cruzada.

En muchos casos, por ejemplo, todas las soluciones basadas en el famoso *Teorema de Lambert*, en lugar de tener una única incógnita z , se tienen dos, z_1 y z_2 , por lo que es necesaria una ecuación adicional que defina la dependencia entre ambas incógnitas. Como es obvio, los grados de libertad no varían, se podría suponer $z_1 = z_1(z)$, $z_2 = z_2(z)$ para una determinada variable z , y tendríamos de nuevo el caso de una única ecuación con una incógnita como caso general. Es decir, un desarrollo con dos variables sólo añade complejidad al tratamiento matemático del problema sin aportar nada nuevo a los resultados finales, que continuarían siendo los mismos desde el punto de vista analítico (no desde el punto de vista de la resolución numérica de la ecuación), por lo tanto, se puede seguir suponiendo una única ecuación como caso general para la obtención de la *Ecuación Temporal* en todas las versiones *sobrecargadas* consideradas. No obstante, se considerará un caso particularmente interesante con dos incógnitas (véase *Función Elemental Doble Dependiente*).

1.2.2 EFICIENCIA COMPUTACIONAL

Para comparar la eficiencia de los métodos iterativos usados en la resolución del *Problema de Lambert*, se realiza un estudio de precisión y coste computacional de los cálculos asociados.

El coste computacional proporciona una medida de la eficiencia del método, pero debido a que dicho coste depende de la precisión requerida, la eficiencia también depende de ella. En consecuencia, la comparación de la eficiencia basada en el coste computacional debe hacerse siempre para cada precisión considerada.

Debe tenerse en cuenta que siempre existe una precisión máxima posible. En primer lugar, nunca se puede superar la precisión máxima inherente a la plataforma de cálculo utilizada, y en segundo lugar, la precisión máxima puede verse reducida debido a los errores de cálculo dependientes del propio método. A su vez, los errores del método pueden depender del rango o dominio de aplicación dentro del espacio total posible. Por ejemplo, en el *Problema de Lambert*, la mayoría de los métodos tienen una pérdida de precisión acusada en un rango cercano a la solución parabólica.

Fijada una precisión, para un rango de aplicación, el coste computacional determina la eficiencia del método en dichas condiciones. Nótese que un método no tiene por qué ser mejor que otro en todas las condiciones posibles. Es decir, un método puede ser mejor que otro en un rango de aplicación y peor en otro.

Es evidente la importancia que tiene reducir al máximo el coste computacional del método, no solo por reducir el tiempo de cálculo, cada vez menos importante con el avance tecnológico actual, sino también para impedir la acumulación y propagación de errores que pueden incrementarse en cada operación realizada. A continuación, se proporciona una forma de medir el coste computacional y se realiza un análisis de los factores que influyen en su medida.

1.2.2.1 MEDIDA DE LA EFICIENCIA COMPUTACIONAL

En general, como medida del coste computacional de un método se usa el tiempo de CPU que tarda en realizarse el cálculo correspondiente en un ordenador. Sin embargo, este tiempo es altamente dependiente de la plataforma utilizada (sistema operativo, lenguaje de programación, potencia del ordenador, etc).

Para que los resultados sean fácilmente comparables y lo más independiente posible de los factores mencionados de la plataforma, se va utilizar como unidad de medida temporal el tiempo que tarda en realizarse una suma en coma flotante de doble precisión. Esta decisión obliga, por un lado, a medir el tiempo que tarda en realizarse una suma en el ordenador de prueba y, por otro, a medir cualquier otra operación (resta, producto, división, raíz cuadrada, funciones trigonométricas, etc) con su equivalencia en número de sumas.

Tomada esta decisión, lo primero que debe hacerse es calibrar todas estas operaciones elementales por separado en la plataforma de pruebas elegida, y después verificar que las distintas combinaciones de operaciones se corresponden, sumando los tiempos de las operaciones elementales, con la medida real del conjunto.

Demostrada así la validez de la medida (en la práctica, con un margen de error no mayor del 10%), se puede estimar el coste computacional de cualquier método a partir de su algoritmo, sin necesidad de medir el tiempo real en un ordenador, proporcionando así una comparativa de eficiencia computacional mucho más rápida entre todos los métodos que se requieran con suma facilidad.

No obstante, para afianzar la demostración de la validez de los resultados, también se va a calcular el coste computacional real para algunas de las *Funciones Temporales* desarrollados en este trabajo (una *Ecuación Elemental* y una *Ecuación Universal*) y para la función asociada a la solución de Arora and Russell^[9], elegida como representativa de las existentes, por ser considerada una de las más eficientes en la actualidad.

Como ya se ha mencionado, el coste computacional depende de la precisión requerida y, por ello, debe tenerse en cuenta que la precisión máxima del método está impuesta, en primer lugar, por la propia precisión de los cálculos (error de redondeo) y, en segundo lugar, por la estabilidad del método de cálculo, debido tanto a la pérdida de precisión por diferencia de números muy próximos (error de condicionamiento), como a la propagación de cualquiera de los errores previos acumulados (propagación de errores), los cuales pueden incluso amplificarse en las sucesivas operaciones.

Los errores de redondeo dependen de la plataforma usada para el cálculo. Actualmente es usual la aritmética de coma flotante (signo, mantisa y exponente) con alguna de las dos precisiones habituales, la llamada *simple precisión* con 24 bits (dígitos binarios) significativos, y la llamada *doble precisión* con 53 bits significativos, con errores relativos de redondeo de 2^{-24} y 2^{-53} , respectivamente.

Como medida de precisión, en la estimación de cada variable, se va a usar el número de bits seguidos correctos desde el más significativo, también llamados directamente “bits significativos”.

Los errores de condicionamiento, aunque se pueden dar en cualquier circunstancia, son típicos de cálculos cercanos a indeterminaciones 0/0, como es usual en el caso de la solución parabólica del *Problema de Lambert*.

Uno de los mayores logros de este trabajo consiste precisamente en evitar los errores de condicionamiento, transformando adecuadamente los cálculos de forma que desaparezcan las diferencias de números próximos en la cercanía de la indeterminación asociada a la solución parabólica.

1.2.2.2 COSTE COMPUTACIONAL EN FUNCIÓN DE LA PRECISIÓN Y EL ORDEN DEL MÉTODO

Matemáticamente, para una precisión determinada de b bits, y un orden m del método iterativo, el coste computacional global ($C_{b,m}$) de un método iterativo se puede expresar como

$$C_{b,m} = c_{b,m} n_{b,m} \quad (m \geq 2)$$

donde $c_{b,m}$ es el coste de una iteración y $n_{b,m}$ el número de iteraciones necesarias, para la precisión b y orden m . No obstante, para simplificar notación, se llama $n = n_{b,m}$ cuando por contexto se sabe la precisión y el orden.

Sea la siguiente ecuación a resolver

$$y = \mathbf{y}(x)$$

donde x es la solución buscada, y x_0 una estimación inicial de modo que

$$x_0 = x (1 + e_0)$$

siendo e_0 el error relativo de la estimación con valor

$$e_0 = M_0 2^{-b_0} \quad ; \quad |M_0| < 1/2$$

correspondiente a b_0 bits de precisión en la estimación.

Los métodos iterativos se basan en un desarrollo de la función en torno a una o varias estimaciones para determinar una fórmula que obtenga una mejora de la estimación.

El orden m del método coincide con el número de veces por iteración que la función, y opcionalmente sus derivadas, se evalúan en aproximaciones en torno a la solución.

El mínimo valor de m es 2, dando lugar a sólo dos posibilidades. La primera evaluando dos veces la función en dos estimaciones diferentes, y la segunda evaluando la función y la derivada en la misma estimación. Cuando el coste adicional del cálculo de la derivada sea menor que el coste de la propia función, será más eficiente usar la segunda opción calculando la función y la derivada en la misma estimación. Esta situación suele darse en la mayoría de los casos, aunque depende de la propia función $\mathbf{y}(x)$.

En los métodos de orden m superior a 2, el número de combinaciones de evaluación de la función y sus derivadas en diversas estimaciones, crece exponencialmente. Sin embargo, lo usual es evaluar la función y todas sus derivadas hasta orden $(m-1)$, en una única estimación. En dicho caso, el orden m del método coincide con el orden de la primera derivada despreciada.

Un caso de ejemplo, donde no ocurre lo usual, es el llamado método por interpolación *Spline*, donde se evalúa la función y la derivada primera, dos veces cada una, en dos estimaciones próximas diferentes, siendo por tanto un método de cuarto orden. El gran

inconveniente de este método, como en otros diferentes al caso usual donde existe más de una estimación por iteración, se debe a que las diferentes estimaciones deben estar lo más próximas posible para que el método tenga de verdad convergencia de cuarto orden, pero no tanto como para que aparecen problemas de mal condicionamiento computacional debido a la diferencia de valores próximos entre sí. En consecuencia, este método resulta muy difícil de controlar, dependiendo enormemente de la naturaleza del problema y, por ello, sólo suelen usarse para obtener la primera aproximación (x_0), apoyándose en puntos cercanos donde la evaluación es más sencilla.

Aplicando un método de orden m a la primera aproximación x_0 con error relativo e_0 , se obtiene una nueva aproximación x_1 con error relativo e_1 , de modo que

$$x_1 = x (1 + e_1) \quad ; \quad e_1 = k_m e_0^m / x$$

donde k_m es del orden del coeficiente del primer término despreciado en el desarrollo de la función en x_0 .

El factor (k_m / x) se puede poner de la forma

$$(k_m / x) = K_m 2^{\rho_m} \quad ; \quad |K_m| < 1/2$$

donde ρ_m es el exponente binario (en formato de coma flotante) correspondiente al término despreciado relativo al valor de x , y por tanto

$$e_1 = K_m 2^{\rho_m} (M_0 2^{-b_0})^m \quad ; \quad |e_1| < 2^{\rho_m - m b_0}$$

Para entrar en convergencia es necesario que sea $e_1 < e_0$ y, por tanto, en primera aproximación debe cumplirse

$$\rho_m - m b_0 < -b_0 \quad ; \quad \rho_m < (m - 1) b_0$$

Cuanto menor sea ρ_m mayor será la convergencia.

Normalmente, se diseñan desarrollos donde ρ_m es aproximadamente nulo. En dicho caso, después de n iteraciones, la aproximación x_n con un error aproximado e_n será

$$x_n = x (1 + e_n) \quad ; \quad e_n = e_{n-1}^m = e_{n-2}^{m^2} = \dots = e_0^{m^n} = 2^{-m^n b_0}$$

pero siempre hasta un límite fijado por la precisión máxima del método, como mucho acotado por la precisión debida a los errores de redondeo ($b = 24$ bits para *simple precisión* y $b = 53$ bits para *doble precisión*), aunque puede ser menor debido a la posible amplificación de errores de redondeo y/o al posible mal condicionamiento computacional del método.

Supuesto un método capaz de llegar a la máxima precisión (sin amplificación de errores de redondeo y sin mal condicionamiento computacional), el número mínimo de iteraciones necesarias para llegar a la precisión b debe cumplir

$$e_n = 2^{-m^n b_0} \approx 2^{-b}$$

que conduce a

$$m^n b_0 \approx b$$

y despejando el número de iteraciones (volviendo a poner los subíndices omitidos)

$$n_{b,m} \approx \log(b/b_0) / \log m$$

Se deduce que para una estimación inicial suficientemente próxima a la solución con precisión b_0 , el número de iteraciones necesarias para conseguir una determinada precisión b es, en primera aproximación, inversamente proporcional al logaritmo del orden m del método.

El coste total del método para conseguir la precisión b es pues

$$C_{b,m} = c_{b,m} n_{b,m} \approx c_{b,m} \log(b/b_0) / \log m$$

Fijando b y b_0 , la condición para que el coste de un método de orden $(m+1)$ sea más eficiente que un método de orden m es

$$C_{b,m+1} < C_{b,m} \Rightarrow c_{b,m+1} / \log(m+1) < c_{b,m} / \log m \quad (1.2.16)$$

y despejando $c_{b,m+1}$

$$c_{b,m+1} < c_{b,m} \log(m+1) / \log m$$

Una relación muy práctica se obtiene definiendo el coste equivalente a la convergencia de orden 2 de una iteración como

$$k_{b,m} = c_{b,m} \log 2 / \log m \quad (1.2.17)$$

de modo que la condición (1.2.15) se reduce a

$$k_{b,m+1} < k_{b,m} \quad (1.2.18)$$

Nótese que $k_{b,2}$ coincide con $c_{b,2}$.

Por otra parte, para una precisión b requerida, el coste de una iteración ($c_{b,m}$) de un método de orden m , se puede aproximar como la suma de los costes adicionales ($d_{b,k}$) que requieren las evaluaciones de las derivadas de orden k anteriores, esto es

$$c_{b,m} = \sum_{k=0}^{m-1} d_{b,k}$$

Nótese que $d_{b,0}$ es el coste de la derivada de orden 0 correspondiente a la propia función.

Téngase en cuenta también que, para calcular el coste adicional de una derivada, normalmente se aprovechan los cálculos repetidos que hayan sido ya utilizados en el cálculo de derivadas anteriores, sin necesidad de calcularlos de nuevo.

Según la definición anterior, la relación entre el coste por iteración del método de orden m y el coste por iteración del método de orden $(m+1)$ es

$$c_{b,m+1} = c_{b,m} + d_{b,m}$$

Sustituyendo esta expresión de $c_{b,m+1}$ en función de $d_{b,m}$, en la inecuación anterior y despejando $d_{b,m}$, resulta la condición

$$d_{b,m} / c_{b,m} < l(m)$$

donde se ha definido la función dependiente sólo del orden

$$l(m) = \log(m+1) / \log m - 1 \quad (m \geq 2)$$

El valor devuelto por la función $l(m)$ indica el ratio máximo entre el coste de la derivada de orden m y el coste del método del mismo orden (coste de todas las derivadas anteriores), para que el método de un orden superior, usando la derivada de orden m , sea más eficiente.

Definiendo el coste medio de cada evaluación como

$$h_{b,m} = c_{b,m} / m$$

la condición anterior se puede expresar de forma alternativa como

$$d_{b,m} / h_{b,m} < m l(m)$$

El valor $(m l(m))$ indica el ratio máximo entre el coste de la derivada de orden m y el coste medio de las evaluaciones del método del mismo orden, para que el método de un orden superior, usando la derivada de orden m , sea más eficiente.

m	$l(m)$	$m l(m)$	m	$l(m)$	$m l(m)$
2	58.5%	117.0%	9	4.8%	43.2%
3	26.2%	78.6%	10	4.1%	41.4%
4	16.1%	64.4%	11	3.6%	39.9%
5	11.3%	56.6%	12	3.2%	38.7%
6	8.6%	51.6%	13	2.9%	37.6%
7	6.9%	48.0%	14	2.6%	36.6%
8	5.7%	45.3%	15	2.4%	35.7%

Tabla 1. Coste adicional máximo de la derivada de orden m , relativo al coste total del método de mismo orden, $l(m)$, o relativo al coste medio de todas las derivadas anteriores, $m l(m)$, para que el método de un orden superior $(m+1)$ sea más eficiente.

En la tabla 1, se muestran los ratios máximos $l(m)$ y $(m l(m))$ para los primeros valores de m . Es interesante apreciar que para que el método de orden 3 sea más eficiente que el método de orden 2, se permite que el coste de la segunda derivada sea algo más costosa (117%) que la evaluación media de la función y su primera derivada. A partir del siguiente orden (78.6%) todas las derivadas deben tener cada vez menor coste que las

anteriores para que el método de orden $(m+1)$ sea más eficiente que el de orden m . Este hecho, unido a que las derivadas de orden superior suelen ser cada vez más costosas que las anteriores, influye en que la mayoría de las veces el orden óptimo suela estar entre 2 y 4. Nótese que el valor óptimo de m es el primero que no cumple la condición (donde el siguiente valor no es mejor).

En este apartado se ha calculado el coste computacional para obtener la solución a partir de una aproximación inicial, en función del orden del método elegido y del coste de una iteración. Adicionalmente, se ha obtenido un criterio para elegir el orden más adecuado que maximice la eficiencia computacional (usando la relación (1.2.18) o la tabla 1).

El coste de una iteración es la suma del coste del propio método (inversión del desarrollo) y del coste de la función y las derivadas incluidas en dicho método. El coste del método normalmente es mucho menor que el de evaluación de la función y sus derivadas por lo que en primera aproximación puede despreciarse, no obstante, puede calcularse a partir de sus algoritmos (método de Newton de orden 2, Halley de orden 3, Householder de orden 4, etc).

1.2.2.3 PRECISIÓN DE LOS DATOS

De nada sirve usar un método que resuelva el problema con mayor precisión de la que tienen los propios datos del problema, o de los cálculos directos derivados de ellos que se utilicen en su resolución. Por ejemplo, en la evaluación computacional de la cuerda mediante la expresión conocida

$$c^2 = r_0^2 + r_1^2 - 2 r_0 r_1 \cos \Delta \theta,$$

aparece un problema muy acusado de pérdida de precisión cuando los puntos inicial y final están muy próximos, debido a la diferencia entre valores muy próximos entre sí, siendo un claro ejemplo de los problemas de precisión que aparecen en la resolución del *Problema de Lambert*.

Afortunadamente en este caso, la pérdida de precisión, debida al mal condicionamiento computacional de las operaciones, se evita fácilmente usando la expresión alternativa [\(1.2.2\)](#). Con dicha expresión, la precisión de c es tan buena como la mejor de las precisiones de Δr y δ , es decir, se ha evitado la pérdida adicional de precisión debida al mal condicionamiento computacional de la expresión anterior usando $\cos \Delta \theta$.

La única forma de reducir aún más la pérdida de precisión, es usar directamente Δr como dato del problema, en lugar de uno de los radiovectores, siempre que el problema particular lo permita. Respecto a Δv (o δ), se ha tomado ya como dato del problema, pero podría arrastrar también una pérdida de precisión dependiendo de cómo se haya calculado en el problema particular a resolver.

1.2.2.4 CONSIDERACIONES PARA MEDIR EL COSTE COMPUTACIONAL

La plataforma de cálculo, como es usual, se supone sobre un ordenador usando aritmética de coma flotante de *doble precisión*. Sólo en algunos casos se menciona el caso poco usual de *simple precisión*, pero sólo con carácter comparativo.

El coste computacional de un algoritmo normalmente se realiza midiendo el tiempo que tarda sobre un ordenador, sin embargo, para tener una primera aproximación también se puede estimar cuantificando el tiempo de cada una de las operaciones elementales que realiza. Sin embargo, para hacer esto es necesario conocer previamente el coste de cada una de las operaciones aritméticas elementales (suma, resta, producto y división) y de las funciones intrínsecas que se utilizan en el algoritmo (funciones trigonométricas, hiperbólicas, raíz cuadrada, etc).

El coste de las operaciones aritméticas elementales, aunque dependiente de la plataforma utilizada, es aproximadamente constante para cualquier argumento (en cada plataforma considerada). No obstante, suponiendo semejante el coste relativo entre las operaciones elementales, se puede calcular el coste de una de ellas, por ejemplo la suma, y usar esta medida como unidad para calcular el resto de operaciones. De este modo, las medidas tomadas son lo más independiente posible de la plataforma.

El coste de las funciones intrínsecas es más complejo pues, además de variar con el propio argumento donde se evalúan, depende mucho de los métodos usados para implementar su evaluación. En la mayor parte de los casos, se calculan recurriendo a reducciones del argumento a un entorno donde se puede aplicar un desarrollo truncado en serie de potencias que permite obtener el resultado con la precisión requerida, de la forma más eficiente posible. A todo esto se suma la dependencia con la codificación de la rutina (por ejemplo, con posible uso de ensamblador) y con la optimización de uso que el lenguaje hace del coprocesador matemático. En consecuencia, las estimaciones de coste de las funciones intrínsecas, aun conociendo el algoritmo interno de la función y las características mencionadas dependientes de la plataforma, conducen en la práctica a resultados algo alejados de la realidad.

Por todo ello, se decide evaluar el coste de las de las operaciones aritméticas elementales y de funciones intrínsecas de interés midiendo tiempos directamente sobre una plataforma de cálculo particular, en este caso, sobre una plataforma intel® Core™ i7-3720QM a 2.6GHz, corriendo un sistema operativo Ubuntu Linux 12.04, usando el compilador g++ 4.6.3 y dedicando uno de los ocho cores de forma exclusiva para las mediciones. Por la misma razón mencionada para las operaciones aritméticas elementales (mayor independencia posible de la plataforma), se usa también la suma como unidad de medida de tiempos. El resultado sobre esta plataforma de prueba se muestra en la tabla 2, donde se indica el coste medio para cualquier argumento, cuando sólo aparece un valor, o el coste medio para varios intervalos, desde 0 hasta el máximo indicado entre paréntesis, pudiendo aparecer varios costes en función del intervalo.

<i>Función</i>	<i>Coste</i>	<i>Función</i>	<i>Coste</i>	<i>Función</i>	<i>Coste</i>
$+, -, *$	1	$\sinh$	121	$\sin$	$55 (\pi/4), 58 (\pi/3), 63 (\pi/2), 77 (\pi), 98 (2\pi)$
$/$	21	$\cosh$	102	$\cos$	$62 (\pi/4), 67 (\pi/3), 75 (\pi/2), 88 (\pi), 100 (2\pi)$
$=$	2	$\tanh$	130	$\tan$	$76 (\pi/4), 101 (\pi/2)$
$\sqrt{}$	23	asinh	153	asin	$76\sqrt{2}/2, 84 (1)$
$\exp$	82	acosh	128	acos	$82 (\sqrt{2}/2), 89 (1)$
$\log$	136	atanh	124	atan	$86 (1)$

Tabla 2. Coste medio (en sumas) de algunas funciones elementales.

De las pruebas realizadas, se destacan los siguientes resultados:

- El coste medio de una suma se utiliza como unidad medida. El resultado sobre la plataforma de cálculo de prueba es de $0.17 \cdot 10^{-9}$ seg/suma.
- La resta tienen el mismo coste que una suma.
- El producto tiene un coste del orden de un 5% mayor que la suma, pero en primera aproximación, se va a considerar con un coste igual que la suma.
- Sorprendentemente la división tiene un coste mucho mayor que la suma, en las pruebas realizadas se ha obtenido un valor medio de 21. Por ello, es recomendable sustituir divisiones por productos siempre que sea posible (por ejemplo, multiplicando por 0.5 en lugar de dividir por 2.0).
- Los productos y divisiones por potencias de 2 son algo menos costosas que con otros argumentos, del orden del 30% menos en los productos y del 45% menos en las divisiones. No obstante, salvo que se haga uso intensivo de esta situación, no se va a considerar esta reducción, en primera aproximación.
- Las asignaciones tiene un coste medio algo menor de 2 sumas, pero en primera aproximación se va a considerar un valor de 2.
- La raíz cuadrada tiene un coste medio del orden de 23 sumas, poco mayor que una división.
- El coste medio de las funciones seno, coseno, arco seno y arco coseno, varía bastante cuando el rango de evaluación se aleja del origen. Esto hecho resulta asombroso pues programando la reducción del argumento y evaluando la función intrínseca con el argumento reducido se consigue menor coste que llamando a la función intrínseca directamente sin la reducción de argumento.
- Cuando se tienen que evaluar el seno y el coseno para el mismo argumento, se puede reducir el coste computacional sin más que evaluar una única función trigonométrica de forma directa, y calcular la otra aprovechando la relación pitagórica $C_{\psi}^2 + S_{\psi}^2 = 1$ para el caso elíptico, y $C_{\psi}^2 - S_{\psi}^2 = 1$ para el caso hiperbólico. En dicho caso, se cambia la evaluación directa de una función por dos operaciones y la evaluación de una raíz cuadrada de menor coste (salvo

implementación poco usual de la raíz cuadrada con un algoritmo de tipo *logaritmo de antilogaritmo*). Nótese que para evitar la pérdida de precisión de los resultados, es conveniente calcular directamente la función seno ó coseno con menor valor absoluto y usar la relación pitagórica para calcular la otra función usando la raíz cuadrada.

Estas medidas aproximadas tomadas para el coste computacional de las funciones intrínsecas son usadas en las diferentes ecuaciones para resolver el *Problema de Lambert*. Nótese que los resultados obtenidos usando esta medida son sólo aproximados, pero permite obtener una comparación previa bastante buena entre los diferentes métodos con suma facilidad, tal como se muestra en 4.1. No obstante, para ser rigurosos, debe hacerse una comparación usando una métrica más exacta, midiendo directamente el tiempo de CPU empleado en resolver el problema, para la precisión requerida, barriendo todas las soluciones posibles. Por ello, se realiza esta comparación también para algunos de los casos analizados.

1.2.3 ANTECEDENTES Y SITUACIÓN ACTUAL DEL PROBLEMA DE LAMBERT

A continuación se van a exponer los avances más relevantes relativos al *Problema de Lambert* que lo han impulsado desde su aparición a lo largo de la historia. Para ello, ha sido extremadamente útil el trabajo de Arora and Russell^[9], que además de ser por sí mismo uno de estos desarrollos relevantes, destaca también particularmente por el análisis histórico que realiza, por lo que ha sido utilizado como referencia.

Como se ha mencionado, el *Problema de Lambert* es uno de los más importantes y ampliamente estudiados en Mecánica Orbital y Astrodinámica^[5,7,12,13], en principio, por el puro afán de conocimiento del movimiento de los astros, y en la actualidad, por su gran potencial de aplicación en el contexto tecnológico actual. Por ello, este problema ha llamado la atención de infinidad de desarrolladores, muchos célebres matemáticos incluidos, a lo largo de la historia relativamente reciente, siempre intentando descubrir el método universal que obtenga la solución de la forma más eficiente. El resultado ha sido la aportación de una gran variedad de métodos que conducen a una solución unívoca del *Problema de Lambert*.

El *Problema de Lambert* fue introducido por primera vez por Lambert^[1] en 1761, aunque Euler^[2] lo estudió previamente, pero sólo para órbitas parabólicas, fue extendido posteriormente por Lagrange^[3] y Gauss^[4], ambos demostrando el *Teorema de Lambert* del que derivan prácticamente todas las soluciones existentes, y con la llegada de la era espacial, se ha completado el campo de aplicación a todas las condiciones posibles, añadiendo el caso poco estudiado en principio de múltiple revolución, últimamente aplicado a una amplia variedad de misiones espaciales. Actualmente, este problema aparece continuamente en misiones relacionadas con optimización de trayectorias interplanetarias^[14] y determinación de órbitas^[15], incluso multitud de veces en una misma misión.

Los programas informáticos existentes en la actualidad, que calculan y optimizan trayectorias orbitales, a menudo requieren un número excesivo de soluciones del *Problema de Lambert*^[8,16]. La necesaria inclusión de flybys intermedios y otras maniobras orbitales, agrava el coste computacional asociado. El gran número de veces que es necesario resolver el *Problema de Lambert*, puede hacer que la optimización de la misión sea muy costosa en términos de coste computacional. En consecuencia, para conseguir problemas más tratables, se recurre comúnmente a técnicas heurísticas que permitan reducir el espacio de soluciones posibles.

Existe una gran cantidad de literatura discutiendo diversos enfoques desarrollados a lo largo de los años para resolver el *Problema de Lambert*. Casi todo lo existente está dedicado a la solución elíptica de simple y múltiple revolución, aunque también existe bastante dedicado a la solución casi-parabólica. Sin embargo, existen relativamente pocos desarrollos dedicados al caso hiperbólico, considerado poco práctico, debido principalmente al alto coste energético que suponen este tipo de trayectorias.

La mayoría de estas técnicas existentes, se pueden dividir en dos grandes grupos de métodos generales de búsqueda de soluciones:

1. Métodos basados geometría directa.
2. Métodos basados en variables universales.

El tipo de método se caracteriza principalmente por la elección de la variable de iteración (incógnita a resolver numéricamente de forma iterativa). Los métodos basados en geometría directa iteran en el espacio convencional de elementos orbitales para resolver alguna *Ecuación de Lambert* equivalente. Por ejemplo, en el desarrollo de Escobal^[13] se presentan múltiples enfoques de la variable de iteración, para el semieje mayor (a), anomalía verdadera (ν), semiperímetro (s), excentricidad (e), y series f y g . Aunque sus formulaciones están desarrolladas para simple revolución, la extensión de estas técnicas a múltiple revolución es relativamente sencilla. El trabajo realizado por Ochoa y Prussing^[17,18], durante la década de los 90, presenta otro enfoque basado en la geometría, basadas en la formulación de Lagrange^[3], válido directamente para simple y múltiple revolución, siendo un enfoque robusto y, por tanto, comúnmente empleado. Sin embargo, este método adolece de tres inconvenientes principales que son similares a la mayoría de los métodos de su clase:

1. El método sólo es válido las órbitas elípticas.
2. La variable de iteración es el semieje mayor y, por lo tanto, no tiene límites, pudiendo provocar problemas numéricos.
3. En el caso de múltiple revolución, la parte inferior de las dos ramas de soluciones, no tienen solución unívoca para un tiempo de transferencia dado, causando complejidad en la notación y una implementación tediosa.

Una aparición reciente, perteneciente a esta clase de métodos, es la solución basada en el vector excentricidad desarrollada por Avanzini^[19], que ha sido extendida más recientemente al caso de múltiple revolución por He et al^[20]. Otros enfoques en esta

categoría incluyen el método “p-iteration” por Herrick y Liu^[21], y el método clásico por el mismo Gauss^[4]. Otra solución reciente, basada en sistemas dinámicos, ha sido propuesta por Nelson^[22], y una más, con una estrategia de inversión de series, por Thorne^[23].

La necesidad de una solución universal (válida para todas las cónicas) y de una técnica que proporcione una solución numéricamente robusta, motivó la búsqueda de una *Variable Universal* del *Problema Lambert*^[5,6,7,10,11,24,25,26]. Este enfoque conduce a métodos con una solución alternativa más eficiente, y combate muchas de las deficiencias del método de Lagrange, y otros, que iteran directamente sobre elementos orbitales. Una primera transformación a una variable auxiliar, con un comportamiento mejor que una de las anomalías, fue introducida por Sundman^[27]. El trabajo de Fang and Nguyen^[11], tiene mención especial, por ser el primero en investigar y analizar exhaustivamente el caso de múltiple revolución, proporcionando una expresión para el tiempo de transferencia mínimo.

Posteriormente, esta transformación ha sido usada en la formulación del tiempo de transferencia “unificado” (para todos los tipos de cónicas) por Battin^[5] y Bate, Mueller and White^[10]. Poco después, Lancaster and Blanchard publican en su breve nota^[12] (y más tarde en un informe técnico más detallado^[6]), la primera solución universal del *Problema Lambert* completo, incluyendo múltiple revolución. A partir de estas publicaciones, Battin sigue con un enfoque universal propio, muy orientado a la aplicación computacional, utilizando funciones hipergeométricas y fracciones continuas^[5,28], consiguiendo un método matemáticamente elegante y computacionalmente eficiente, aunque no es tan intuitivo como otros enfoques. En paralelo, Gooding^[7] extiende el trabajo de Lancaster and Blanchard mediante la formulación de un generador de aproximaciones iniciales, unido a un método de mayor orden (método de Halley, de orden 3) que permite obtener las soluciones más rápidamente (con menos iteraciones). Con este desarrollo, Gooding ha sido capaz de producir un algoritmo robusto y preciso del *Problema de Lambert*, basado en las derivadas de primer, segundo y tercer orden de la *Función de Lambert* (TOF) para lograr una rápida convergencia. Otro enfoque propuesto por primera vez por Bate, Mueller and White^[10] utiliza una simple transformación de la *Variable Universal* estándar, dando como resultado una única función, válida para todos los casos (incluido múltiple revolución). La variable buscada está relacionada con el ángulo de transferencia y, por tanto, se limita con facilidad, salvo en el caso de la hipérbola. En general, la aplicación es sencilla y computacionalmente eficiente.

Estudios relativamente recientes que comparan diversas formulaciones del *Problema de Lambert* sugieren que la aplicación de Gooding es la más robusta y más rápida aplicación disponible (en el momento del estudio). En concreto, un estudio del 2010 realizado por Peterson et al^[29], que evalúa el rendimiento de 6 métodos diferentes (incluyendo el método de Battin y de Gooding) para el caso de simple revolución, concluye sugiriendo que el método de Gooding es en general el mejor en términos de precisión, robustez y velocidad. A una conclusión similar llegó Klumpp^[30] en un estudio previo. Poco después, en el 2011, una aplicación documentada por Gim J. Der^[31] alude ser “superior” a otros algoritmos para el *Problema Lambert*, pero no proporciona evidencia para apoyar tal afirmación.

Desde que Gooding desarrollo su método, los avances conseguidos durante dos décadas han sido muy lentos, sin embargo, en los últimos 5 años han resurgido numerosas soluciones alternativas usando variables universales que parecen ofrecer mejoras significativas. Todos ellos, son sin duda más simples de implementar, adaptados perfectamente a la era computacional. En esta línea, destaca uno de los trabajos más recientes en el grupo de métodos basados en variables universales, la publicación de Arora and Russell^[9] que introduce una nueva *Variable Universal* (k), en un esfuerzo de mejorar aún más el rendimiento de resolución, sobre todo para el caso de múltiple revolución. Su formulación, motivada por la aproximación de la *Variable Universal* de Bate, Mueller and White^[10], estudiada con más detalle en 4.1.1, se centra en la elección de la *Variable Universal* (k) como variable de iteración, basada en el coseno del cambio en la anomalía excéntrica. Otro trabajo encontrado recientemente, muy prometedor, es el de Izzo^[32], donde simplifica el método de Lancaster and Blanchard apoyándose también en los resultados de otros métodos, para conseguir una expresión de las derivadas muy simple hasta la tercera, usando un método de cuarto orden (householder).

Año	Autor	Acontecimiento
1744	Euler	Órbitas Parabólicas
1761	Lambert	Definición Problema de Lambert Teorema de Lambert
1778	Lagrange	Formulación de Lagrange
1809	Gauss	Solución de Gauss
1912	Sundman	Transformación de Sundman
1959	Herrick & Liu	Método p-iteration
1965	Escobal	Soluciones basadas en geometría
1969	Lancaster & Blanchard	Variable universal
1971	Bate, Mueller, and White	Variable universal Funciones f y g de Gauss
1973	Simó	Solución K/S (Regularización) Transformación Levi-Civita
1976	Kriz	Solución K/S
1977-1987	Battin	Variable universal Mejora formulación de Gauss
1990	Gooding	Método de Gooding (Halley iteration, orden 3)
1992	Nelson	Soluciones dinámicas
1992	Ochoa & Prussing	Geometría
2004	Thorne	Expansión de series
2008	Avanzini	Vector excentricidad (zero-rev)
2010	He et al.	Vector excentricidad (multiple-rev)
2014	Arora & Russell	Variable universal (cosine transformation)
2014	Izzo	Variable intermedia basada en semieje mayor (Householder iteration, orden 4)

Tabla 3. Principales acontecimientos relativos a la solución del *Problema de Lambert*.

Finalmente, es de destacar una revisión muy reciente realizada por de la Torre Sangra et al^[33], donde se realiza una evaluación comparativa exhaustiva de todos los principales métodos existentes en la literatura, proporcionando una visión global excelente.

En la tabla 3 se resumen brevemente algunos de los principales acontecimientos, a lo largo de los años, relacionados con la solución del *Problema Lambert*. En este trabajo, se desarrollan una variedad de ecuaciones para resolver el *Problema de Lambert*, obtenidas todas directamente a partir de las ecuaciones generales de las cónicas, de las que destacan la *Ecuación Principal* y la *Ecuación Universal* (cuyos nombres deben entenderse en el contexto de este trabajo), con multitud de variantes posibles, y que permiten unificar casi todas las formulaciones relevantes existentes en la literatura, las cuales, pueden identificarse como variantes de alguna de estas ecuaciones desarrolladas. Posteriormente, se estudian los problemas de eficiencia computacional inherentes a este problema (tanto precisión, como coste computacional), y se propone una nueva variante de la *Ecuación Universal*, buscando superar en eficiencia a todas las existentes.

1.2.4 MISIONES CARACTERÍSTICAS

Como se ha mencionado, el *Problema de Lambert* es parte trascendental en la mayoría de misiones que implican determinación, optimización y/o control de trayectorias orbitales.

Un caso muy simple de misión donde se debe optimizar la trayectoria determinada por el *Problema de Lambert*, consiste en minimizar el gasto energético para transferir una nave espacial desde una órbita a otra, de forma similar a la *Transferencia de Hohmann*, pero sin la restricción de trayectorias circulares. Como muestra, véanse los trabajos de Abdelkhalik and Mortari^[14] y Arlulkar^[35]. El encuentro espacial o *Redezvous*^[18,30] es otro tipo de maniobras, derivadas de esta última, donde aparece el *Problema de Lambert*.

De todas las misiones donde aparece el *Problema de Lambert*, destacan las misiones de optimización de trayectorias interplanetarias donde toma una importancia trascendental, debido a la multitud de veces que debe resolverse, y la necesidad de obtener las derivadas de la *Función Temporal* asociada, para poder usarlas en el problema global de optimización asociada a la misión particular. Estas misiones se basan en la aplicación de una secuencia de maniobras de alguno de los dos tipos descritos a continuación (según se describe en Izzo^[34], por ejemplo).

- *Multiple Gravity Assist* (MGA): Esta maniobra consiste en aprovechar la atracción gravitatoria de un astro para cambiar la trayectoria de la nave espacial, consiguiendo como resultado un impulso gratis (con ciertas restricciones).
- *Deep Space Manouever* (DSM): Esta maniobra consiste en la aplicación de un impulso (con gasto energético asociado) en un punto de transición de la trayectoria global, con el fin de cambiar la trayectoria de la nave espacial estratégicamente.

En primera aproximación, estas maniobras se consideran puntuales comparadas con la trayectoria completa de la misión.

Normalmente se suele aplicar, varias veces, una combinación de las dos maniobras anteriores (MGA-DSM), pues así se consiguen mejores resultados. Como ejemplo, estas maniobras son ampliamente utilizadas en misiones tan conocidas como Cassini y Rosetta, donde las maniobras MGA se realizan cuando la nave se encuentra con alguno de los planetas (La Tierra, Marte, Venus, ...) y las maniobras DSM se realizan, con gasto energético, en puntos de transición convenientemente elegidos, resultado de la optimización.

Para la determinación de la trayectoria global asociada a una misión, primero se suponen conocidos todos los puntos de transición, donde se llevan a cabo cada una de las maniobras diseñadas para la misión (puntos inicial y final incluidos). Entre cada par de maniobras consecutivas, es necesario resolver un *Problema de Lambert*, que determina un tramo de la trayectoria global, y la unión de todos estos tramos consecutivos, determina la trayectoria global que se quiere optimizar. A partir de la primera estimación inicial de la trayectoria global, el problema de optimización se basa en ir variando los puntos donde se realizan las distintas maniobras, con las restricciones impuestas físicamente, para conseguir minimizar una función global particular de diseño de la misión, normalmente relacionada con el coste energético total, traduciéndose en primera aproximación en la minimización de la suma de todos los impulsos de tipo DSM necesarios para completar la misión.

1.3 ORGANIZACIÓN

La organización de este documento se divide en cuatro capítulos.

En el primer capítulo se describe físicamente el *Problema de Lambert*, se enuncia el *Teorema de Lambert* y se plantea el problema matemático que proporciona la solución de forma general. Después se hace un estudio de los antecedentes bibliográficos existentes sobre el tema y su situación actual. Por último se hace una breve referencia a algunos de los problemas reales típicos donde aparece.

En el segundo capítulo, se obtiene la *Ecuación Elemental* y la *Ecuación Universal del Problema de Lambert*, ambas llamadas así en correspondencia con las variables independientes usadas como incógnita (*Variable Elemental* o *Variable Universal*). Según la *Variable Elemental* elegida como incógnita, se desarrollan cuatro versiones de la *Ecuación Elemental*, la *Ecuación Elemental de Excentricidad Transversal* en función del ángulo de excentricidad transversal (ϕ ó Φ), la *Ecuación Elemental Principal* y la *Ecuación Elemental Básica*, ambas en función de la semidiferencia de anomalía excéntrica (ψ ó Ψ), y la *Ecuación Elemental Doble Dependiente* en función de dos *Variables Elementales* (ψ y ϕ ó Ψ y Φ). En todos los casos se desarrollan algoritmos para evaluar tanto la *Función Elemental* como sus derivadas de cualquier orden, con objeto de poder aplicar cualquier método numérico para resolver la ecuación. En los casos conflictivos, por ejemplo, las proximidades de las soluciones parabólicas, se desarrollan ecuaciones alternativas, transformando la ecuación en la llamada *Ecuación*

Universal, mediante un cambio de la variable incógnita, pasando de la *Variable Elemental* a la *Variable Universal*, de modo que la *Función Elemental* se transforma en la *Función Universal* más simple de evaluar y que evita la indeterminación existente, eliminando la pérdida de precisión, tanto en la evaluación de la función como de sus derivadas de cualquier orden. En el caso de múltiple revolución, se estudia en detalle el cálculo del mínimo tiempo de transferencia. Por último, se hace un análisis para proporcionar una guía que permita obtener estimaciones iniciales para iniciar la búsqueda de la solución.

En el tercer capítulo, como ejemplo directo de aplicación de los resultados obtenidos, se demuestra la optimalidad de la *Transferencia de Hohmann*, y se estudia la variación de la solución del *Problema de Lambert* indicando como realizar los cálculos necesarios para situarlos en el contexto de optimización de trayectorias espaciales reales.

En el cuarto y último capítulo, se realiza una comparación con los métodos más relevantes existentes en la literatura y se exponen las conclusiones del trabajo realizado haciendo también una reflexión sobre los posibles frentes donde sería útil seguir investigando.

2 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE LAMBERT

Mediante un desarrollo de las ecuaciones conocidas de las cónicas, se van a obtener diversas ecuaciones para resolver el *Problema de Lambert*, dependiendo de las variables independientes elegidas como incógnitas del problema. Todas las soluciones se basan en una ecuación, llamada *Ecuación Temporal*, donde el tiempo de transferencia adimensional (τ) debe ser igual a una función, llamada *Función Temporal*, en función del resto de variables independientes elegidas (excluyendo el tiempo adimensional al que debe igualarse). El calificativo *Temporal* se puede usar en todos los casos, sin embargo, para distinguir unas funciones o ecuaciones de otras, también se puede usar el calificativo *Elemental*, cuando la variable incógnita sea una *Variable Elemental* (ϕ , ψ , Φ , Ψ), o el calificativo *Universal*, cuando la incógnita sea la *Variable Universal* (x).

Cualquier versión de la *Ecuación Elemental* define matemáticamente el *Problema de Lambert* descrito anteriormente y todas destacan por su simplicidad y generalidad, de tal modo que todas las ecuaciones existentes en la literatura que han sido estudiadas (ver referencias) se pueden deducir de alguna de estas ecuaciones, resultando, en todos los casos, más complicadas que las aquí desarrolladas.

Los resultados se anticipan tan buenos debido a la apropiada elección de las variables independientes elegidas para las ecuaciones finales (*Variables Elementales* y parámetro geométrico q o f), como se mostrará al final en dichos resultados.

Posteriormente se deducen algunas propiedades y cálculos correspondientes a una solución particular, como pueden ser las velocidades y anomalías en los puntos inicial y final.

Por último, se desarrollan matemáticamente algunas de las *Funciones Temporales* asociadas a las ecuaciones, para obtener algoritmos de evaluación de las funciones y sus derivadas necesarias para resolver la ecuación numéricamente con eficiencia. En este punto, se muestra la gran dificultad inherente al *Problema de Lambert*, debido a la indeterminación de las ecuaciones en la solución parabólica de tiempo finito, que provoca una pérdida de precisión en las soluciones próximas, acentuándose en el cálculo de las derivadas. Por ello, se realiza un adecuado cambio de variable a la *Variable Universal* (x) para desarrollar algoritmos de cálculo que consiguen evitar esta limitación inicial.

2.1 ECUACIÓN ELEMENTAL DEL PROBLEMA DE LAMBERT

Como ya se ha mencionado en el planteamiento matemático, fijando las 3 variables geométricas (r_0 , r_1 y $\Delta\nu$), queda definida una familia unidimensional de trayectorias cónicas en función del tiempo de transferencia (Δt), con lo cual, el problema se reduce a averiguar la trayectoria que cumple con dicho tiempo. Sin embargo, para simplificar el cálculo necesario para llegar a una ecuación, en lugar de Δt , se van a elegir consecutivamente diversas variables intermedias (ε , χ , e_T , ϕ ó Φ y ψ ó Ψ) con objeto de conseguir el resultado deseado. Finalmente, a partir de la ecuación temporal de la

cónica, se obtiene la dependencia de la variable intermedia elegida en función de Δr , determinando la trayectoria particular dentro de la familia que resuelve el problema.

Entre todas las soluciones de la familia, hay una solución elíptica de mínima excentricidad llamada en la literatura *Elipse Fundamental*, tal como se menciona en Battin^[5] o Avanzini^[19], respecto a la cual se referencian el resto de soluciones como se muestra a continuación.

2.1.1 DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN ELEMENTAL DE EXCENTRICIDAD TRANSVERSAL

Tomando incrementos en la ecuación de la cónica en coordenadas polares, (desde el punto inicial al punto final),

$$p = r(1 + e \cos \nu) = r + e X \Rightarrow 0 = \Delta r + e \Delta X$$

y despejando la excentricidad, se obtiene el siguiente resultado

$$e = -\frac{\Delta r}{\Delta X} \quad (\Delta r \neq 0) \quad (2.1.1)$$

A partir de este momento, es necesario distinguir el caso particular $\Delta r = 0$, del caso general $\Delta r \neq 0$, por la indeterminación existente en el desarrollo para el cálculo de la excentricidad en función de los anteriores parámetros. Se desarrollará primero el caso general y posteriormente el particular. Las variables ε y χ no son válidas para el caso $\Delta r = 0$, pero ambos casos se unificarán posteriormente usando las variables ϕ y ψ .

La excentricidad es mínima, para la *Elipse Fundamental*, cuando el eje polar (eje X) es paralelo a la cuerda de modo que $|\Delta X|$ es máximo y, es decir

$$\Delta X_F = -S_r c \Rightarrow e_F = \frac{|\Delta r|}{c} \quad (2.1.2)$$

donde S_r es el signo de Δr , e_F es la excentricidad mínima y el subíndice F hace referencia a la *Elipse Fundamental*.

Nótese que por ser la excentricidad (e) no negativa el signo S_r de Δr es opuesto al de ΔX , salvo el caso Δr nulo, estudiado posteriormente de forma particular.

La expresión (2.1.2) ya se ha anticipado en (1.2.6), donde se ha definido el ángulo φ que cumple

$$e_F = \cos \varphi = \frac{|\Delta r|}{c} \quad ; \quad e_{TP} = \sin \varphi = \frac{2r_s}{c} \quad ; \quad \tan \varphi = \frac{2r_s}{|\Delta r|} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi/2) \quad (2.1.3)$$

Nótese que el ángulo ε , definido en la figura 1 como la semisuma de anomalías verdaderas, es el ángulo que sitúa la posición angular de la bisectriz (entre radiovectores) respecto al eje polar de la solución genérica. De modo que por ser invariantes del problema, tanto la bisectriz como el eje polar de la *Elipse Fundamental* (paralela a la cuerda), se cumple la relación

$$\varepsilon_F = \varepsilon + \chi \quad (2.1.4)$$

donde ε_F es la semisuma de anomalías verdaderas para el caso particular de la *Elipse Fundamental*, y χ es la posición del eje polar (eje X) de la solución genérica respecto al polar (eje X_F) de la *Elipse Fundamental*.

De este modo, los incrementos de coordenadas ($\Delta X, \Delta Y$) en los ejes polares de la cónica, se pueden calcular tanto en función del ángulo χ

$$\Delta X = -S_r c \cos \chi \quad ; \quad \Delta Y = S_r c \sin \chi \quad (2.1.5)$$

como en función de las variables ε y δ (semisuma y semidiferencia de anomalía verdadera para $N = 0$, mostradas en la figura 1)

$$\begin{aligned} \Delta X &= \Delta(r \cos \nu) = r_1 \cos \nu_1 - r_0 \cos \nu_0 = r_1 \cos(\varepsilon + \delta) - r_0 \cos(\varepsilon - \delta) = \\ &= r_1 (\cos \varepsilon \cos \delta - \sin \varepsilon \sin \delta) - r_0 (\cos \varepsilon \cos \delta + \sin \varepsilon \sin \delta) = \\ &= \Delta r \cos \varepsilon \cos \delta - \Sigma r \sin \varepsilon \sin \delta \\ \Delta Y &= \Delta(r \sin \nu) = r_1 \sin \nu_1 - r_0 \sin \nu_0 = r_1 \sin(\varepsilon + \delta) - r_0 \sin(\varepsilon - \delta) = \\ &= r_1 (\sin \varepsilon \cos \delta + \cos \varepsilon \sin \delta) - r_0 (\sin \varepsilon \cos \delta - \cos \varepsilon \sin \delta) = \\ &= \Delta r \sin \varepsilon \cos \delta + \Sigma r \cos \varepsilon \sin \delta \end{aligned}$$

Identificando estos incrementos con los obtenidos en función de χ , para el caso particular de la *Elipse Fundamental*, donde $\varepsilon = \varepsilon_F$ y $\chi = 0$

$$(\Delta r \cos \delta) \cos \varepsilon_F - (\Sigma r \sin \delta) \sin \varepsilon_F = -S_r c$$

$$(\Delta r \cos \delta) \sin \varepsilon_F + (\Sigma r \sin \delta) \cos \varepsilon_F = 0$$

se obtiene, despejando los factores $(\Delta r \cos \delta)$ y $(\Sigma r \sin \delta)$

$$\Delta r \cos \delta = -S_r c \cos \varepsilon_F$$

$$\Sigma r \sin \delta = S_r c \sin \varepsilon_F$$

de donde se deducen las siguientes expresiones trigonométricas para la semisuma de anomalías verdaderas de la *Elipse Fundamental* (ε_F)

$$\cos \varepsilon_F = -S_r \frac{\Delta r}{c} \cos \delta \quad ; \quad \sin \varepsilon_F = S_r \frac{\Sigma r}{c} \sin \delta \quad ; \quad \tan \varepsilon_F = -\frac{\Sigma r}{\Delta r} \tan \delta \quad (2.1.6)$$

Nótese que el ángulo ε_F es el ángulo que sitúa la posición angular de la bisectriz respecto al eje polar de la *Elipse Fundamental*, paralela a la cuerda, siendo invariante para todas las soluciones posibles.

Usando estas últimas expresiones, es interesante la siguiente expresión alternativa para calcular la cuerda c (también válida para el caso $\Delta r = 0$)

$$c^2 = (\Delta r \cos \delta)^2 + (\Sigma r \sin \delta)^2 \quad (2.1.7)$$

Usando la expresión de $\cos \varphi$ de (2.1.3) en (2.1.6), se puede calcular alternativamente

$$\cos \varepsilon_F = -\cos \varphi \cos \delta \quad ; \quad \sin \varepsilon_F = \frac{\Sigma r}{\Delta r} \cos \varphi \sin \delta \quad ; \quad \tan \varepsilon_F = -\frac{\Sigma r}{\Delta r} \tan \delta \quad (2.1.8)$$

y finalmente, sustituyendo en (2.1.1), la expresión $|\Delta r| = c \cos \varphi$, deducida de (2.1.3), y la expresión ΔX de (2.1.5), se deduce, para el caso general ($\Delta r \neq 0$)

$$e = \frac{\cos \varphi}{\cos \chi} \quad (2.1.9)$$

La inversa de la excentricidad ($1/e = \cos \chi / \cos \varphi$) en función de χ ($\chi = \varepsilon_F - \varepsilon$), se puede ver en la figura 2, donde se aprecia que la mínima excentricidad (máximo de $1/e$) tiene lugar en $\chi = 0$ ($\varepsilon = \varepsilon_F$), donde toma el valor $\cos \varphi$.

Figura 2. Inversa de la excentricidad ($1/e$) como función de ε (o χ).

En resumen, el ángulo ε_F es el valor de ε para la solución correspondiente a la *Elipse Fundamental* (donde e es mínimo y $1/e$ máximo), el ángulo χ define la posición del eje polar respecto al eje polar de la *Elipse Fundamental*, y el ángulo φ es el valor de $|\chi|$ donde la solución es parabólica ($e = 1$). Debido a que la excentricidad mínima es $\cos \varphi$, el ángulo φ también se puede definir como el arco cuyo coseno es la excentricidad mínima.

El caso mostrado en la figura 3 corresponde a $S_r = S_\delta = 1$. El resto de combinaciones se corresponden con figuras semejantes, cuya geometría relativa se muestra en la figura 4, usando los ejes de la *Elipse Fundamental* como referencia. El valor de S_δ ($-1, 0$ ó 1) indica más, igual ó menos de media vuelta, respectivamente, sin contar las vueltas completas. Un valor de S_r positivo indica que el pericentro (o eje polar de la cónica) está

en el mismo lado que el punto inicial, respecto a la perpendicular a la cuerda pasando por el foco, un valor negativo indica que está en el lado opuesto, y un valor nulo indica una indeterminación estudiada de forma particular posteriormente.

Figura 4. Geometría del *Problema de Lambert*, liberando el tiempo de transferencia, para el caso general $\Delta r \neq 0$, dependiendo de las combinaciones de S_r y S_δ .

Las posibles trayectorias cónicas se clasifican según el valor de su excentricidad (e), en elípticas ($e < 1$), hiperbólicas ($e > 1$) ó parabólicas ($e = 1$). En consecuencia, en la expresión $e = \cos \varphi / \cos \chi$, exceptuando el caso particular $\Delta r = 0$, según el valor de χ , se tiene la siguiente clasificación:

$$\begin{aligned}
 |\chi| < \varphi & \Rightarrow \text{Elipses} \\
 |\chi| = \varphi & \Rightarrow \text{Parábolas} \\
 \varphi < |\chi| \leq \pi/2 & \Rightarrow \text{Hipérbolas}
 \end{aligned}$$

Existen soluciones que no son posibles físicamente. Las soluciones no elípticas de tiempo de transferencia infinito ($S_r \chi \leq -\varphi$), donde la trayectoria se va al infinito antes de alcanzar el punto final, y las soluciones de tiempo de transferencia nulo, donde la trayectoria tiende a una hipérbola límite ó cónica degenerada, correspondiéndose con la recta que contiene a la cuerda para $\chi = S_r \pi/2$ cuando $S_\delta = 1$, ó con las dos semirrectas desde el foco conteniendo los radiovectores para $\chi = \varepsilon_F$ cuando $S_\delta = -1$.

A partir de la figura 4 se pueden observar las siguientes propiedades:

- El caso $S_\delta = 0$ se puede considerar como límite cuando δ tiende a $\pi/2$, de cualquiera de los dos casos $S_\delta = 1$ y $S_\delta = -1$, conduciendo a la misma familia de soluciones (sin discontinuidad).
- Si en los parámetros del problema que define una familia de soluciones, se intercambian los radiovectores, el valor de S_r también cambia, y la familia de soluciones es simétrica de la anterior respecto al eje X_F . Físicamente equivale a ir de un punto a otro de la cónica (para una familia) y volver por el mismo camino en dirección contraria (para la otra familia). En consecuencia, el tiempo de transferencia es el mismo para las soluciones simétricas en una y otra familia.
- Si en los parámetros del problema que define una familia de soluciones, se cambia el ángulo descrito ($\Delta\theta$) por el contrario para completar una vuelta ($2\pi - \Delta\theta$), o lo que es lo mismo, el ángulo δ por su suplementario, el valor de S_δ también cambia y la familia de soluciones es simétrica de la anterior respecto al eje X_F , pero intercambiando los rangos posibles y no posibles de las soluciones no elípticas. Físicamente equivale a ir de un punto a otro de la cónica por un camino (para una familia) o ir por el camino opuesto (para la otra familia). En consecuencia, el tiempo de transferencia de las soluciones simétricas en una y otra familia son tal que la suma completan periodos orbitales completos.
- Si unimos los dos casos anteriores, intercambiando los radios (cambio de S_r) y los ángulos (cambio de S_δ) al mismo tiempo, las familias de soluciones son idénticas (simetría de simetría es identidad), salvo el intercambio de las soluciones no elípticas (posibles y no posibles). Físicamente equivale a ir de un punto a otro de la cónica por un camino (para una familia) y volver por el camino opuesto (para la otra familia). Los tiempos de transferencia de soluciones simétricas en una y otra familia suman periodos orbitales completos como en el caso anterior.

La expresión obtenida para la excentricidad, $e = \cos\varphi / \cos\chi$, indica que $(e \cos\chi)$ es la proyección (e_F) sobre el eje X_F del llamado *vector de excentricidad*, desde el foco hacia el pericentro, con módulo e , cuyas componentes (e_F , e_T) en los ejes (X_F , Y_F) de la *Elipse Fundamental* son

$$e_F = e \cos\chi = \cos\varphi = \frac{|\Delta r|}{c} ;$$

$$e_T = e \sin\chi = e_F \tan\chi \quad (2.1.10)$$

donde e_T es la excentricidad transversal, definida como la proyección del *vector excentricidad* sobre el eje Y_F (eje Y de la *Elipse Fundamental*), que es perpendicular a la cuerda.

Esta relación matemática demuestra una importante propiedad que cumple el vector excentricidad de cualquier solución de la familia, la cual dice, que el lugar geométrico formado por el vector excentricidad describe una recta perpendicular a la cuerda, siendo su proyección sobre la cuerda una constante (e_F) que coincide con la excentricidad mínima correspondiente a la *Elipse Fundamental* (donde la excentricidad transversal es nula). Por ello, la componente de excentricidad perpendicular a la cuerda (e_T) se puede usar como parámetro de la familia, y su determinación para un tiempo de transferencia dado resuelve el *Problema de Lambert*, como bien demuestra el desarrollo de Avanzini^[19].

De la relación entre las componentes de excentricidad, se deduce que el vector excentricidad es paralelo al eje polar de la cónica cumpliendo la siguiente relación entre el ángulo de posición del eje polar (χ) y la excentricidad transversal (e_T)

$$\tan \chi = \frac{e_T}{e_F} \quad (2.1.11)$$

A partir del *vector de excentricidad*, de módulo e y componentes (e_F , e_T) en los ejes de la *Elipse Fundamental*, se tiene

$$e^2 = e_F^2 + e_T^2 \quad (2.1.12)$$

y a partir de la definición de la excentricidad complementaria (e_C) que cumple

$$e_C = \sqrt{1 - e^2} \quad (2.1.13)$$

se deduce que (e_F , e_T , e_C) son las componentes de un vector unitario, considerando e_C su componente perpendicular al plano de la trayectoria, según el eje Z_F que forma un triedro de referencia con los ejes X_F e Y_F de la *Elipse Fundamental*.

A partir de (2.1.12), (2.1.13) y (1.2.6), se deduce

$$e_T^2 + e_C^2 = 1 - e_F^2 = 1 - \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi = e_{TP}^2 \quad (2.1.14)$$

donde e_{TP} es el mismo parámetro geométrico definido en (1.2.6) como

$$e_{TP} = \sin \varphi = \frac{2r_s}{c}$$

dependiente de los datos del problema, y que coincide con el valor absoluto de la excentricidad transversal de las soluciones parabólicas, donde $e = 1$, $e_C = 0$ y $|\chi| = \varphi$.

La relación pitagórica entre e_T , e_C y e_{TP} permite definir el ángulo ϕ mediante sus expresiones trigonométricas

$$\cos\phi = S_r e_T / e_{TP} \quad ; \quad \sin\phi = e_C / e_{TP} \quad ; \quad \tan\phi = S_r e_C / e_T \quad (0 \leq \phi \leq \pi) \quad (2.1.15)$$

donde el signo S_r se ha añadido para hacer corresponder siempre la solución parabólica de tiempo finito con el valor $\phi = 0$.

Este ángulo ϕ se define como el ángulo de excentricidad transversal, siendo una de las *Variables Elementales* consideradas para el *Problema de Lambert*. Nótese que este ángulo es el mismo usado por Gauss^[4] en su demostración del *Teorema de Lambert*, como se muestra en el [Anexo G](#), con sólo una diferencia al considerar el caso elíptico de múltiple revolución, pues al extraer previamente las vueltas completas en el parámetro N , la definición de ϕ es siempre la equivalente a la primera revolución.

De la definición del ángulo ϕ , y la equivalencia $e_{TP} \sin\phi$, se obtienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} e_T &= S_r \sin\varphi \cos\phi \quad ; \\ e_C &= \sin\varphi \sin\phi \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Comparando esta expresión de e_T con la anterior de [\(2.1.10\)](#) en función de $\tan\chi$, se llega a la siguiente relación entre las variables χ y ϕ

$$\tan\chi = S_r \tan\varphi \cos\phi = \frac{2r_s}{\Delta r} \cos\phi = \frac{2r_R}{\Delta r} \sin\delta \cos\phi \quad (2.1.17)$$

que define la relación entre el ángulo de posición del eje polar (χ) y el ángulo de excentricidad transversal (ϕ). De esta relación se deducen los siguientes valores característicos de ϕ para las siguientes soluciones particulares

- Parabólica de tiempo finito: $\chi = S_r \varphi$, $\phi = 0$.
- Parabólica de tiempo infinito: $\chi = -S_r \varphi$, $\phi = \pi$.
- *Elipse Fundamental*: $\chi = 0$, $\phi = \pi/2$.

Una vez caracterizada la familia de cónicas, el siguiente paso, consiste en obtener el parámetro p o *semi-latus rectum* de una cónica genérica de la familia, como se desarrolla a continuación, primero para el caso general ($\Delta r \neq 0$) y después para el caso particular ($\Delta r = 0$). Posteriormente, se comprobará que el resultado del parámetro p para el caso general también será válido para el caso particular.

Para simplificar los resultados posteriores, es útil usar el valor del parámetro de la cónica para la *Elipse Fundamental* (p_F), donde $e = e_F = \cos\varphi$, $e_T = 0$, $e_C = e_{TP} = \sin\varphi$, y por tanto, teniendo en cuenta las variables definidas en [\(1.2.1\)](#) y [\(1.2.6\)](#), puede calcularse de todas estas formas

$$p_F = a_F (1 - e_F^2) = a_F e_{TP}^2 = a_F \sin^2\varphi = a_F \left(\frac{2r_s}{c} \right)^2 \quad (2.1.18)$$

Evaluando la ecuación de la cónica en coordenadas polares

$$p = r (1 + e \cos \nu)$$

para los puntos inicial y final, y multiplicando cada una por el radiovector contrario

$$p r_1 = - r_1 r_0 (1 + e \cos \nu_0)$$

$$p r_0 = - r_0 r_1 (1 + e \cos \nu_1)$$

y restando ambas, se obtiene

$$p \Delta r = - r_0 r_1 e \Delta(\cos \nu) = - r_R^2 \frac{\cos \varphi}{\cos \chi} \Delta(\cos \nu)$$

donde se ha usado la definición r_R de [\(1.2.1\)](#) y la expresión [\(2.1.9\)](#) de la excentricidad.

Desarrollando $\Delta(\cos \nu)$ y $\sin \varepsilon$ en función de ε y χ

$$\begin{aligned} \Delta(\cos \nu) &= \cos \nu_1 - \cos \nu_0 = \cos(\varepsilon + \delta) - \cos(\varepsilon - \delta) = \\ &= (\cos \varepsilon \cos \delta - \sin \varepsilon \sin \delta) - (\cos \varepsilon \cos \delta + \sin \varepsilon \sin \delta) = -2 \sin \varepsilon \sin \delta \end{aligned}$$

$$\sin \varepsilon = \sin(\varepsilon_F - \chi) = \sin \varepsilon_F \cos \chi - \cos \varepsilon_F \sin \chi = \sin \varepsilon_F \cos \chi \left(1 - \frac{\tan \chi}{\tan \varepsilon_F}\right)$$

y sustituyendo los resultados

$$p \Delta r = 2 r_R^2 \cos \varphi \sin \varepsilon_F \sin \delta \left(1 - \frac{\tan \varphi}{\tan \varepsilon_F} \frac{\tan \chi}{\tan \varphi}\right)$$

Haciendo lo mismo con las expresiones parciales, valiéndose de las expresiones [\(1.2.6\)](#), [\(2.1.6\)](#), [\(1.2.1\)](#), [\(1.2.7\)](#) y [\(2.1.17\)](#)

$$2 r_R^2 \cos \varphi \sin \varepsilon_F \sin \delta = 2 r_R^2 \frac{|\Delta r|}{c} \left(S_r \frac{\Sigma r}{c} \sin \delta\right) \sin \delta = \Delta r a_F \left(\frac{2 r_s}{c}\right)^2$$

$$\frac{\tan \varphi}{\tan \varepsilon_F} = \frac{2 r_s}{|\Delta r|} / \left(-\frac{\Sigma r}{\Delta r} \tan \delta\right) = -S_r \frac{r_c}{a_F} = -S_r \cos f \quad (2.1.19)$$

$$\frac{\tan \chi}{\tan \varphi} = S_r \cos \phi \quad (2.1.20)$$

y volviendo a sustituir los resultados, esta vez sin el factor común Δr ,

$$p = a_F \left(\frac{2r_s}{c} \right)^2 \left(1 + \frac{r_c}{a_F} \cos \phi \right)$$

y finalmente teniendo en cuenta las definiciones de las variables geométricas p_F de (2.1.18) y $\cos f$ de (1.2.7), resulta

$$p = p_F (1 + \cos f \cos \phi)$$

En resumen, el parámetro p de la cónica se puede calcular como

$$p = p_F \nu \quad ; \quad \nu = 1 + \cos f \cos \phi \quad (2.1.21)$$

donde se ha definido la variable ν , llamado parámetro adimensional de la cónica, en relación a la *Elipse Fundamental*.

En el caso particular $\Delta r = 0$ pendiente (radiovectores inicial y final iguales), mostrado en la figura 5, no se puede usar el parámetro χ para definir la familia de soluciones cónicas, pues todas tienen el eje polar en la bisectriz de los radiovectores, salvo indefinición en el caso circular existente correspondiente precisamente a la *Elipse Fundamental*, siendo la excentricidad y el tiempo de transferencia adimensional asociados $e_F = 0$ y $\tau_F = \delta$, respectivamente.

El signo de ε_F es arbitrario, pues el caso particular $\Delta r = 0$, se puede considerar un caso límite de Δr tendiendo a 0, tanto con valores positivos ($\varepsilon_F = \pi/2$), como con valores negativos ($\varepsilon_F = -\pi/2$), pero ambos casos conducen a la misma familia de soluciones con ángulos suplementarios, por lo que arbitrariamente se considera sólo el caso $\varepsilon_F = \pi/2$, límite con $S_r = 1$. En consecuencia, el eje polar de la *Elipse Fundamental* (X_F) paralelo a la cuerda, esta hacia el lado del primer radiovector, según se muestra en la figura 5. Nótese también que el ángulo ϕ para la solución parabólica coincide con ε_F .

Para cualquier solución de la familia, exceptuando la circular, se tiene

$$\Delta X = 0 \quad ; \quad \Delta Y = S_Y c \quad (e \neq 0) \quad (2.1.22)$$

donde S_Y es el signo de ΔY , el cual será positivo, nulo ó negativo dependiendo de que el tiempo de transferencia sea menor, igual ó mayor que el tiempo de transferencia (τ_F) de la *Elipse Fundamental*, respectivamente. Excentricidades negativas no se consideran por las mismas razones mencionadas para el caso general. Nótese que S_Y es también el signo de e_T , y $\cos \phi$, por tanto, e_T , o ϕ , pueden ser ambos usados como parámetro de la familia.

Cuando S_Y es positivo, el eje polar está al lado de la trayectoria (X_a), y en consecuencia $\chi = \pi/2$ y $\varepsilon = 0$, y cuando S_Y es negativo, el eje polar está al lado opuesto (X_b), y en consecuencia, $\chi = -\pi/2$ y $\varepsilon = \pi$.

Con todas estas consideraciones, se deduce

$$\phi = \pi/2 \quad ; \quad e_F = 0 \quad ; \quad e_T = \cos \phi \quad ; \quad e = |e_T| = S_Y \cos \phi \quad (2.1.23)$$

$$\nu_0 = \varepsilon - \delta \quad ; \quad \nu_1 = \varepsilon + \delta \quad (\varepsilon \text{ es } 0, \pi/2, \text{ ó } \pi \text{ cuando } S_Y \text{ es } 1, 0, \text{ ó } -1)$$

$$p_F = a_F = r_R = r_0 = r_1 \quad ; \quad q = \cos f = r_C / a_F = r_R \cos \delta / a_F = \cos \delta \quad ; \quad f = \delta$$

$$e \cos \nu_0 = S_Y \cos \phi S_Y \cos \delta = \cos \phi \cos f \quad (\text{para } S_Y \neq 0, \text{ pero también valido para } S_Y = 0)$$

$$p = r_0 (1 + e \cos \nu_0) = p_F (1 + \cos \phi \cos f) = p_F \nu$$

Figura 5. Familia de trayectorias cónicas, solución del *Problema de Lambert*, liberando el tiempo de transferencia, para el caso particular $\Delta r = 0$, dependiendo de la excentricidad transversal (e_T).

En definitiva, la expresión de p obtenida anteriormente para el caso general $\Delta r \neq 0$, es también válida para el caso particular $\Delta r = 0$.

Alternativamente, usando las definiciones de $\cos f$ y $\cos \phi$ en (1.2.7) y (2.1.15), el parámetro adimensional ν de (2.1.21), se puede calcular también en función de e_T como

$$\nu = 1 + \frac{q}{e_{TP}} e_T \quad (2.1.24)$$

y usando las definiciones de q , e_{TP} , r_C , r_S y $\cos \varepsilon_F$, en (1.2.7), (1.2.6), (1.2.1) y (2.1.6)

$$\frac{q}{e_{TP}} = \frac{r_C}{a_F} / \frac{2r_S}{c} = \frac{c}{2a_F \sin \delta} = \frac{1}{|\sin \varepsilon_F|}$$

resulta también

$$\nu = 1 + \frac{e_T}{|\sin \varepsilon_F|} \quad (2.1.25)$$

Cualquiera de los dos parámetros, e_T o ϕ , son válidos para definir la familia de trayectorias cónicas, esta vez para todos los casos de Δr . El tipo de cónica queda

determinado por la siguiente clasificación en función de e_T (o e_C^2 teniendo en cuenta que $e_C^2 = e_{TP}^2 - e_T^2$)

$$|e_T| > e_{TP} \quad ; \quad e_C^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \phi \text{ no real} \quad \Rightarrow \quad \text{Hipérbolas}$$

$$|e_T| = e_{TP} \quad ; \quad e_C^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = 0 \text{ o } \phi = \pi \quad \Rightarrow \quad \text{Parábolas}$$

$$|e_T| < e_{TP} \quad ; \quad e_C^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < \phi < \pi \quad \Rightarrow \quad \text{Elipses}$$

Existen dos soluciones parabólicas, según el signo de e_T . La solución positiva, $e_T = e_{TP}$, corresponde a la solución parabólica de tiempo finito, y la negativa, $e_T = -e_{TP}$, a la solución límite de tiempo infinito. Existen también dos rangos de soluciones hiperbólicas según el signo de e_T , caracterizadas por tener ϕ parte real fija, 0 o π , correspondiente a las soluciones parabólicas, y parte imaginaria variable, Φ o Φ_∞ , resultando la siguiente clasificación más detallada

$$S_r e_T > e_{TP} \quad \Rightarrow \quad \phi = -i \Phi \quad ; \quad \Phi \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hipérbolas tiempo finito}$$

$$S_r e_T = e_{TP} \quad \Rightarrow \quad \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Parábola tiempo finito}$$

$$|e_T| < e_{TP} \quad \Rightarrow \quad 0 < \phi < \pi \quad \Rightarrow \quad \text{Elipses}$$

$$S_r e_T = -e_{TP} \quad \Rightarrow \quad \phi = \pi \quad \Rightarrow \quad \text{Parábola tiempo infinito}$$

$$S_r e_T < -e_{TP} \quad \Rightarrow \quad \phi = \pi - i \Phi_\infty \quad ; \quad \Phi_\infty \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hipérbolas tiempo infinito}$$

Evidentemente, los dos últimos casos de tiempo infinito, caracterizadas por la condición $S_r e_T \leq -e_{TP}$, no son posibles físicamente, por lo que sólo se consideran los tres primeros casos de tiempo finito, caracterizadas por la condición $S_r e_T > -e_{TP}$, y el cuarto sólo como un límite inalcanzable donde $e_T = -S_r e_{TP}$.

Nótese que, en el rango de soluciones elípticas, la solución $\phi = \pi/2$ corresponde a la *Elipse Fundamental*.

Cualquier variable calculada en función de las expresiones trigonométricas de ϕ , puede también calcularse en función de las funciones hiperbólicas de Φ , teniendo en cuenta las siguientes identidades

$$\cos \phi = \cosh \Phi$$

$$\sin \phi = -i \sinh \Phi \quad ; \quad \sin^2 \phi = -\sinh^2 \Phi$$

$$\tan \phi = -i \tanh \Phi \quad ; \quad \tan^2 \phi = -\tanh^2 \Phi$$

En particular, las excentricidades transversal y complementaria, en función ϕ ó Φ , según convenga en cada caso, son

$$e_T = e_{TP} \cos \phi = e_{TP} \cosh \Phi$$

$$e_C = e_{TP} \sin \phi = -i e_{TP} \sinh \Phi$$

$$e_C^2 = e_{TP}^2 \sin^2 \phi = -e_{TP}^2 \sinh^2 \Phi$$

Para calcular el semieje mayor, usando las expresiones de p y e_C , de [\(2.1.21\)](#) y [\(2.1.16\)](#)

$$a = \frac{p}{e_C^2} = \frac{p_F}{\sin^2 \phi} \frac{v}{\sin^2 \phi}$$

y usando la expresión [\(2.1.18\)](#) de p_F , resulta

$$a = a_F \alpha \quad ; \quad \alpha = \frac{v}{\sin^2 \phi} \quad (2.1.26)$$

También se puede calcular α en función de la excentricidad transversal usando la expresión [\(2.1.24\)](#) de v , y la siguiente, obtenida de [\(2.1.15\)](#),

$$\sin^2 \phi = 1 - e_T^2 / e_{TP}^2 \quad (2.1.27)$$

El uso del parámetro ϕ como parámetro de la familia permite establecer una relación asombrosamente sencilla con la variable temporal Δt , para llegar a obtener la primera *Ecuación Temporal del Problema de Lambert*, como se muestra a continuación.

La ecuación temporal de la cónica para un punto genérico es

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - t_p) = E - e \sin E \quad \text{para la elipse}$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{(-a)^3}} (t - t_p) = e \sinh H - H \quad \text{para la hipérbola}$$

Haciendo la semidiferencia de esta ecuación entre los puntos inicial (P_0) y final (P_1), y usando las variables adimensionales τ , α , ψ y ψ_N , definidas en la sección de símbolos [xii](#), se deduce

$$\frac{\tau}{\alpha^{3/2}} = \psi_N - \frac{e \Delta \sin E}{2} \quad ; \quad \psi_N = \psi + N \pi \quad (2.1.28)$$

$$\frac{\tau}{\alpha_H^{3/2}} = \frac{e \Delta \sinh H}{2} - \psi \quad (2.1.29)$$

Como se puede comprobar, sabiendo que $E = -i H$ y $\psi = -i \Psi$, la segunda de estas ecuaciones es idéntica a la primera (salvo el término de N vueltas no existente en el caso de la hipérbola) y, por tanto, sólo es necesario desarrollar el caso de la elipse para obtener ambos resultados (sustituyendo $\psi = -i \Psi$ y $N = 0$ en los resultados de la elipse se obtienen los de la hipérbola). Nótese que el semieje mayor es negativo en el

caso de la hipérbola, por lo que se usará la variable $\alpha_H = -\alpha$ en los desarrollos particulares correspondientes a la solución hiperbólica.

Expresando la coordenada Y en función de la anomalía excéntrica (E) y tomando incrementos se obtiene

$$Y = a e_C \sin E \Rightarrow \Delta Y = a e_C \Delta(\sin E)$$

y teniendo en cuenta esta relación, la expresión (2.1.26) de a , y las expresiones (1.2.7) y (2.1.16), de $\sin f$ y e_C , se puede desarrollar

$$\frac{e \Delta \sin E}{2} = \frac{e \Delta Y}{2 a e_C} = \frac{c}{2 a_C} \frac{e \Delta Y}{c} \frac{1}{\alpha e_C} = \frac{e \Delta Y}{c \sin \varphi} \frac{\sin f}{\alpha \sin \phi}$$

Para $\Delta r \neq 0$, teniendo en cuenta las expresiones (2.1.5), (2.1.9) y (2.1.17), de ΔY , e , y $\tan \chi$, el primer factor del último miembro es

$$\frac{e \Delta Y}{c \sin \varphi} = S_r \frac{\cos \varphi \sin \chi}{\cos \chi \sin \varphi} = S_r \frac{\tan \chi}{\tan \varphi} = \cos \phi$$

y para $\Delta r = 0$, teniendo en cuenta las expresiones (2.1.22) y (2.1.23), de ΔY y e , y que $\sin \varphi = 1$, resulta también

$$\frac{e \Delta Y}{c \sin \varphi} = \cos \phi$$

y, por tanto, en cualquier caso

$$\frac{e \Delta \sin E}{2} = \frac{\sin f}{\alpha \tan \phi}$$

Sustituyendo este resultado general en la ecuación temporal de la cónica (2.1.28), y definiendo las variables intermedias ω_N y γ siguientes, resulta finalmente la ecuación

$$\tau = \alpha^{1/2} \omega_N \quad ; \quad \omega_N = \alpha \psi_N + \gamma \quad ; \quad \gamma = -\frac{\sin f}{\tan \phi} \quad (2.1.30)$$

Sólo queda calcular ψ en función de ϕ . Para ello, es necesario pasar antes por las variables intermedias ε y χ sucesivamente para llegar a ϕ .

Usando la relación entre la anomalía excéntrica (E) y la verdadera (ν)

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\nu}{2} = \frac{e_C}{1+e} \tan \frac{\nu}{2}$$

siendo e_C la excentricidad complementaria definida en (2.1.13), y a partir de la definición $\psi = (E_1 - E_0)/2$, y se obtiene la siguiente expresión en función de ε y δ

$$\begin{aligned}
\tan \psi &= \tan \left(\frac{E_1}{2} - \frac{E_0}{2} \right) = \frac{\tan \frac{E_1}{2} - \tan \frac{E_0}{2}}{1 + \tan \frac{E_1}{2} \tan \frac{E_0}{2}} = \frac{\frac{e_c}{1+e} \tan \frac{\nu_1}{2} - \tan \frac{\nu_0}{2}}{1 + \frac{1-e}{1+e} \tan \frac{\nu_1}{2} \tan \frac{\nu_0}{2}} = \\
&= \frac{e_c \left(\cos \frac{\nu_0}{2} \sin \frac{\nu_1}{2} - \sin \frac{\nu_0}{2} \cos \frac{\nu_1}{2} \right)}{(1+e) \cos \frac{\nu_1}{2} \cos \frac{\nu_0}{2} + (1-e) \sin \frac{\nu_1}{2} \sin \frac{\nu_0}{2}} = \frac{e_c \sin \delta}{\cos \delta + e \cos \varepsilon} = \\
&= \frac{e_c \tan \delta}{1 + e \cos \varepsilon / \cos \delta}
\end{aligned}$$

Para el numerador, sustituyendo la expresión (2.1.16) de e_c

$$e_c \tan \delta = \sin \phi \sin \delta \tan \delta$$

Para el denominador, se desarrolla primero $\cos \varepsilon$, usando (2.1.4) y las expresiones de trigonométricas (2.1.8) y (1.2.6), de ε_F y φ ,

$$\begin{aligned}
\cos \varepsilon &= \cos(\varepsilon_F - \chi) = \cos \varepsilon_F \cos \chi + \sin \varepsilon_F \sin \chi = \\
&= \cos \varepsilon_F \cos \chi (1 + \tan \varepsilon_F \tan \chi) = -\cos \varphi \cos \delta \cos \chi (1 + \tan \varepsilon_F \tan \chi)
\end{aligned}$$

segundo, usando esta expresión, junto con (2.1.9) de e , se tiene el cálculo intermedio

$$e \frac{\cos \varepsilon}{\cos \delta} = \frac{\cos \varphi}{\cos \chi} (-\cos \varphi \cos \chi (1 + \tan \varepsilon_F \tan \chi)) = -\cos^2 \varphi (1 + \tan \varepsilon_F \tan \chi)$$

tercero, sumando 1 y usando las expresiones (2.1.19) y (2.1.20), se obtiene la siguiente expresión del denominador buscado

$$\begin{aligned}
1 + e \frac{\cos \varepsilon}{\cos \delta} &= 1 - \cos^2 \varphi (1 + \tan \varepsilon_F \tan \chi) = \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi \tan \varepsilon_F \tan \chi = \\
&= \sin \varphi \cos \varphi \tan \varepsilon_F \left(\frac{\tan \varphi}{\tan \varepsilon_F} - \frac{\tan \chi}{\tan \varphi} \right) = \\
&= \sin \varphi \cos \varphi \tan \varepsilon_F ((-S_r \cos f) - (S_r \cos \phi)) = \\
&= (-S_r \cos \varphi \tan \varepsilon_F) \sin \varphi (\cos f + \cos \phi)
\end{aligned}$$

y por último, con las expresiones (1.2.6) y (2.1.6) de $\cos \varphi$ y $\tan \varepsilon_F$, el primer factor entre paréntesis es

$$(-S_r \cos \varphi \tan \varepsilon_F) = -S_r \frac{|\Delta r|}{c} \left(-\frac{\Sigma r}{\Delta r} \tan \delta \right) = \frac{\Sigma r}{c} \tan \delta = \frac{\tan \delta}{\sin f}$$

Finalmente, sustituyendo todos estos desarrollos parciales en la expresión de $\tan \psi$ pendiente, se tiene

$$\tan \psi = \frac{e_c \tan \delta}{1 + e \cos \varepsilon / \cos \delta} = \frac{\sin \varphi \sin \phi \tan \delta}{(\tan \delta / \sin f) \sin \varphi (\cos f + \cos \phi)}$$

resultando la relación

$$\tan \psi = \frac{\sin f \sin \phi}{\cos f + \cos \phi} \quad (2.1.31)$$

La suma de cuadrados de numerador y denominador de esta igualdad es

$$\begin{aligned} (\sin f \sin \phi)^2 + (\cos \phi + \cos f)^2 &= \sin^2 f \sin^2 \phi + (\cos \phi + \cos f)^2 = \\ &= (1 - \cos^2 f) (1 - \cos^2 \phi) + (\cos \phi + \cos f)^2 = \\ &= 1 - \cos^2 f - \cos^2 \phi + \cos^2 f \cos^2 \phi + \cos^2 \phi + \cos^2 f + 2 \cos \phi \cos f = \\ &= 1 + \cos^2 f \cos^2 \phi + 2 \cos \phi \cos f = (1 + \cos f \cos \phi)^2 \end{aligned}$$

y por tanto, se deduce

$$\cos \psi = \frac{\cos f + \cos \phi}{1 + \cos f \cos \phi} \quad ; \quad \sin \psi = \frac{\sin f \sin \phi}{1 + \cos f \cos \phi} \quad (2.1.32)$$

En resumen, resulta la siguiente *Ecuación Temporal*

$$\begin{aligned} \tau &= \tau(\phi; N) \quad ; \quad \tau(\phi; N) \equiv \tau_N(\phi; f) = \tau_0(\phi; f) + N \tau_T(\phi; f) \quad ; \\ \tau_N(\phi; f) &= \alpha^{1/2} \omega_N \quad ; \quad \tau_T(\phi; f) = \pi \alpha^{3/2} \quad ; \\ \omega_N &= \alpha \psi_N + \gamma \quad ; \quad \psi_N = \psi + N \pi \quad ; \quad \psi = \text{atan} \left(\frac{\sin f \sin \phi}{\cos f + \cos \phi} \right) \quad ; \quad 0 \leq \psi < \pi \quad ; \\ \nu &= 1 + \cos f \cos \phi \quad ; \quad \alpha = \frac{\nu}{\sin^2 \phi} \quad ; \quad \gamma = -\frac{\sin f}{\tan \phi} \end{aligned} \quad (2.1.33)$$

donde τ (o τ_N) es la *Función Temporal* y τ_T la *Función de Periodo Orbital*, ambas asociadas a la ecuación y *sobrecargadas* en función del ángulo de excentricidad (ϕ).

Nótese que ψ_N es la semidiferencia de anomalía excéntrica completa ($\Delta E/2$), ψ es la semidiferencia de anomalía excéntrica excluyendo el número de vueltas completas ($\psi = \psi_0 = \Delta E/2 - N \pi$), y N el número de vueltas completas (parámetro considerado sólo para la solución elíptica de múltiple revolución).

Igual que ocurriría con las variables ϕ y Φ , donde $\phi = -i \Phi$, ocurre ahora con las variables ψ y Ψ , donde $\psi = -i \Psi$, es decir, cualquier variable calculada en función de las

expresiones trigonométricas de ψ puede también calcularse en función de las funciones hiperbólicas de Ψ , semidiferencia de anomalía hiperbólica ($\Delta H/2$), teniendo en cuenta las siguientes identidades

$$\cos \psi = \cosh \Psi$$

$$\sin \psi = -i \sinh \Psi \quad ; \quad \sin^2 \psi = -\sinh^2 \Psi$$

$$\tan \psi = -i \tanh \Psi \quad ; \quad \tan^2 \psi = -\tanh^2 \Psi$$

Para el caso hiperbólico, usando estas identidades entre funciones trigonométricas e hiperbólicas, y sustituyendo $\phi = -i \Phi$, $\psi = -i \Psi$, $\omega = i \omega_H$, $\alpha = -\alpha_H$, y $\gamma = -i \gamma_H$, en la ecuación del caso elíptico, se deduce la siguiente *Ecuación Temporal*

$$\tau = \tau(\Phi, f) \quad ;$$

$$\tau(\Phi, f) = \alpha_H^{1/2} \omega_H \quad ; \quad \omega_H = \gamma_H - \alpha_H \Psi \quad ; \quad \Psi = \operatorname{atanh} \left(\frac{\sin f \sinh \Phi}{\cos f + \cosh \Phi} \right) \quad ; \quad \Phi \geq 0 \quad ;$$

$$\nu = 1 + \cos f \cosh \Phi \quad ; \quad \alpha_H = \frac{\nu}{\sinh^2 \Phi} \quad ; \quad \gamma_H = \frac{\sin f}{\tanh \Phi} \quad (2.1.34)$$

donde $\tau(\Phi, f)$ es la *Función Temporal*, sobrecargada en función de Φ .

La *Ecuación Temporal* $\tau = \tau(\phi, f; N)$ ó $\tau = \tau(\Phi, f)$, en su versión elíptica ó hiperbólica, es una de las *Ecuaciones Elementales*, llamada también, para distinguirla de las otras, *Ecuación Elemental de Excentricidad Transversal*, por ser ϕ ó Φ la *Variable Elemental* elegida como incógnita, debido a que se corresponde con el ángulo de excentricidad transversal. Por la misma razón, la *Función Temporal* τ es una de las *Funciones Elementales*, llamada también *Función Elemental de Excentricidad Transversal*.

La *Ecuación Elemental de Excentricidad Transversal* permite obtener el valor de la incógnita ϕ ó Φ correspondiente al tiempo de transferencia (τ) para una configuración geométrica dada por q y N , determinando la trayectoria cónica particular buscada que resuelve el problema.

No obstante, aunque el problema matemático está cerrado, resulta complicado de resolver numéricamente debido a la relativa complejidad en la evaluación de la *Función Temporal* y sus derivadas. Con objeto de evitar en gran parte esta complejidad, se procede a continuación a cambiar la variable incógnita ϕ ó Φ por la variable ψ ó Ψ , respectivamente. Para ello, se estudia antes en detalle la curiosa interdependencia entre las *Variables Elementales*.

2.1.2 DEPENDENCIA ENTRE LAS VARIABLES ELEMENTALES

Las llamadas *Variables Elementales*, definidas en la sección de símbolos [xii](#), son ϕ y ψ para el caso elíptico y Φ y Ψ para el hiperbólico, y están relacionadas entre sí a través del ángulo geométrico f , como puede verse en las expresiones trigonométricas [\(2.1.31\)](#) y [\(2.1.32\)](#), de ψ en función ϕ , obtenidas en el apartado anterior.

Dichas expresiones trigonométricas, de ψ en función ϕ , se pueden invertir para obtener las expresiones trigonométricas de ϕ en función ψ , como se muestra a continuación.

Despejando $\cos\phi$ de la expresión [\(2.1.32\)](#) de $\cos\psi$, se obtiene directamente

$$\cos\phi = \frac{\cos\psi - \cos f}{1 - \cos f \cos\psi} \quad (2.1.35)$$

El denominador de las expresiones de $\cos\psi$ y $\sin\psi$, en [\(2.1.32\)](#), es precisamente la variable ν , definida en [\(2.1.21\)](#), dependiente de $\cos\phi$, por tanto, sustituyendo

$$\begin{aligned} \nu &= 1 + \cos f \cos\phi = 1 + \cos f \frac{\cos\psi - \cos f}{1 - \cos f \cos\psi} \\ \nu &= \frac{1 - \cos f \cos\psi + \cos f (\cos\psi - \cos f)}{1 - \cos f \cos\psi} = \frac{1 - \cos^2 f}{1 - \cos f \cos\psi} \\ \nu &= \frac{\sin^2 f}{1 - \cos f \cos\psi} \end{aligned}$$

Para simplificar, usando la variable ρ definida como

$$\rho = 1 - \cos f \cos\psi \quad (2.1.36)$$

resulta

$$\nu = \frac{\sin^2 f}{\rho} \quad (2.1.37)$$

Despejando $\sin\phi$ de la expresión de $\sin\psi$, en [\(2.1.32\)](#), y usando esta última expresión de ν en función de ρ , se obtiene

$$\sin\phi = \frac{\sin f \sin\psi}{1 - \cos f \cos\psi} \quad ; \quad \tan\phi = \frac{\sin f \sin\psi}{\cos\psi - \cos f} \quad (2.1.38)$$

Nótese que las expresiones trigonométricas [\(2.1.31\)](#) y [\(2.1.32\)](#), de ψ en función de ϕ y f , las variables ϕ y f se pueden intercambiar sin variar la expresión resultante, por la tanto las expresiones obtenidas de ϕ en función de ψ y f son las mismas que las de f en función de ψ y ϕ sin más que intercambiar ϕ y f . Reuniendo las expresiones que se

obtienen de este modo, junto con las ya obtenidas (2.1.31), (2.1.32), (2.1.35) y (2.1.38), resumen todas las expresiones trigonométricas que relacionan los ángulos (f , ψ , ϕ)

$$\begin{aligned}\cos \psi &= \frac{\cos f + \cos \phi}{1 + \cos f \cos \phi} ; \quad \sin \psi = \frac{\sin f \sin \phi}{1 + \cos f \cos \phi} ; \quad \tan \psi = \frac{\sin f \sin \phi}{\cos f + \cos \phi} \\ \cos \phi &= \frac{\cos \psi - \cos f}{1 - \cos f \cos \psi} ; \quad \sin \phi = \frac{\sin f \sin \psi}{1 - \cos f \cos \psi} ; \quad \tan \phi = \frac{\sin f \sin \psi}{\cos \psi - \cos f} \\ \cos f &= \frac{\cos \psi - \cos \phi}{1 - \cos \phi \cos \psi} ; \quad \sin f = \frac{\sin \phi \sin \psi}{1 - \cos \phi \cos \psi} ; \quad \tan f = \frac{\sin \phi \sin \psi}{\cos \psi - \cos \phi} \quad (2.1.39)\end{aligned}$$

y a partir de estas expresiones trigonométricas se obtienen las expresiones hiperbólicas correspondientes para las variables (f , Φ , Ψ)

$$\begin{aligned}\cosh \Psi &= \frac{\cos f + \cosh \Phi}{1 + \cos f \cosh \Phi} ; \quad \sinh \Psi = \frac{\sin f \sinh \Phi}{1 + \cos f \cosh \Phi} ; \quad \tan \Psi = \frac{\sin f \sinh \Phi}{\cos f + \cosh \Phi} \\ \cosh \Phi &= \frac{\cosh \Psi - \cos f}{1 - \cos f \cosh \Psi} ; \quad \sinh \Phi = \frac{\sin f \sinh \Psi}{1 - \cos f \cosh \Psi} ; \quad \tanh \Phi = \frac{\sin f \sinh \Psi}{\cosh \Psi - \cos f} \\ \cosh f &= \frac{\cosh \Phi - \cosh \Psi}{\cosh \Phi \cosh \Psi - 1} ; \quad \sinh f = \frac{\sinh \Phi \sinh \Psi}{\cosh \Phi \cosh \Psi - 1} ; \quad \tanh f = \frac{\sinh \Phi \sinh \Psi}{\cosh \Phi - \cosh \Psi} \quad (2.1.40)\end{aligned}$$

En este apartado, se ha obtenido la dependencia entre sí de los tres ángulos (f , ϕ , ψ) del caso elíptico y de las tres variables (f , Φ , Ψ) del caso hiperbólico. Se puede ver fácilmente que los tres ángulos (f , ϕ , ψ) están íntimamente relacionados por expresiones similares entre sí, pues cualquiera de las expresiones trigonométricas de un ángulo tiene la misma dependencia con las expresiones trigonométricas de los otros dos, con la única excepción del signo asociado al coseno, que es negativo para $\cos f$ y $\cos \phi$, en las expresiones de ϕ y f , respectivamente, y positivo en el resto de casos. Para las variables del caso hiperbólico (f , Φ , Ψ) se presenta una situación totalmente análoga.

Estas relaciones entre *Variables Elementales* tienen una gran importancia, pues permiten sustituir cualquiera de ellas en función de las otras dos, dando lugar a diferentes ecuaciones para resolver el *Problema de Lambert*.

2.1.3 DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN ELEMENTAL PRINCIPAL

Con la *Ecuación Elemental de Excentricidad Transversal*, ha quedado definida la familia de trayectorias cónicas dependientes del parámetro ϕ . Añadiendo las expresiones trigonométricas de ϕ en función de ψ , obtenidas de la dependencia entre las *Variables Elementales*, se consigue definir la misma familia de trayectorias cónicas dependiendo del parámetro ψ .

Teniendo en cuenta la dependencia entre las variables ϕ y ψ , se establece la siguiente clasificación en función de ψ

$$\psi \text{ no real} \quad \Rightarrow \quad \text{Hipérbolas}$$

$$\psi = 0 \text{ o } \psi = \pi \quad \Rightarrow \quad \text{Parábolas}$$

$$0 < \psi < \pi \quad \Rightarrow \quad \text{Elipses}$$

Y del mismo modo que ocurría con el parámetro ϕ , existen dos rangos de soluciones hiperbólicas caracterizadas por tener ϕ parte real fija, 0 o π , correspondiente a las soluciones parabólicas, y parte imaginaria variable, Ψ o Ψ_∞ , resultando la siguiente clasificación más detallada

$$\psi = -i \Psi \quad ; \quad \Psi > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hipérbolas tiempo finito}$$

$$\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Parábola tiempo finito}$$

$$0 < \psi < \pi \quad \Rightarrow \quad \text{Elipses}$$

$$\psi = \pi \quad \Rightarrow \quad \text{Parábola tiempo infinito}$$

$$\psi = \pi - i \Psi_\infty \quad ; \quad \Psi_\infty > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hipérbolas tiempo infinito}$$

Evidentemente, los dos últimos casos de tiempo infinito no son posibles físicamente, por lo que sólo se consideran los tres primeros casos de tiempo finito y el cuarto sólo como un límite inalcanzable.

Nótese que la solución $\phi = \pi/2$, de la *Elipse Fundamental*, se corresponde con $\psi = f$.

De forma similar, existe una solución particular para $\psi = \pi/2$, que se conviene en llamar *Elipse Esencial*, donde $\phi = \pi - f$. Esta solución se caracteriza por tener el mismo semieje mayor ($\alpha = 1$) que la *Elipse Fundamental*.

Ambas elipses (*Fundamental* y *Esencial*) delimitan las soluciones ($\alpha < 1$) con semieje mayor menor que a_F , y juegan un importante papel en la clasificación de las soluciones elípticas.

Usando (2.1.37) en (2.1.21), el parámetro p de la cónica es

$$p = p_F \vee p = p_F \frac{\sin^2 f}{\rho} \quad (2.1.41)$$

El parámetro de la cónica de la *Elipse Esencial* (p_E), donde $\psi = \pi/2$ y $\rho = 1$, es

$$p_E = p_F \sin^2 f = a_F \left(\frac{2r_s}{c} \right)^2 \left(\frac{c}{2a_F} \right)^2 = \frac{r_s^2}{a_F}$$

donde se han tenido en cuenta las expresiones de p_F , $\sin f$ y a_F en [\(2.1.18\)](#), [\(1.2.7\)](#) y [\(1.2.1\)](#), y usando este valor de p_E en (2.1.41), el parámetro de la cónica es

$$p = \frac{p_E}{\rho} \quad ; \quad p_E = p_F \sin^2 f = \frac{r_s^2}{a_F} \quad (2.1.42)$$

Alternativamente, definiendo la variable intermedia a_ρ , se puede calcular

$$p = \frac{r_s^2}{a_\rho} \quad ; \quad a_\rho = a_F \rho \quad (2.1.43)$$

Del mismo modo, para obtener la variable α en función ψ sólo hay que usar las expresiones de v , $\sin \phi$ y ρ , de [\(2.1.37\)](#), [\(2.1.39\)](#) y [\(2.1.36\)](#)

$$\alpha = \frac{v}{\sin^2 \phi} = \frac{\sin^2 f}{\rho} \left/ \left(\frac{\sin f \sin \psi}{\rho} \right)^2 \right.$$

resultando

$$\alpha = \frac{\rho}{\sin^2 \psi} \quad (2.1.44)$$

Nótese que, usando la variable a_ρ , se puede calcular el semieje mayor de forma alternativa como

$$a = a_F \alpha = \frac{a_\rho}{\sin^2 \psi} \quad (2.1.45)$$

Por último, para completar la ecuación, usando la expresión trigonométrica de $\tan \phi$ en función de ψ y q , de [\(2.1.39\)](#), la variable γ de [\(2.1.33\)](#) es

$$\gamma = -\frac{\sin f}{\tan \phi} = \frac{\cos f - \cos \psi}{\sin \psi}$$

En resumen, usando el parámetro $q = \cos f$, de [\(1.2.7\)](#), resulta la siguiente *Ecuación Temporal*

$$\begin{aligned} \tau &= \tau(\psi, q; N) \quad ; \quad \tau(\psi, q; N) \equiv \tau_N(\psi, q) = \tau_0(\psi, q) + N \tau_T(\psi, q) \quad ; \\ \tau_N(\psi, q) &= \alpha^{1/2} \omega_N \quad ; \quad \tau_T(\psi, q) = \pi \alpha^{3/2} \quad ; \\ \omega_N &= \alpha \psi_N + \gamma \quad ; \quad \psi_N = \psi + N \pi \quad ; \\ \rho &= 1 - q \cos \psi \quad ; \quad \alpha = \frac{\rho}{\sin^2 \psi} \quad ; \quad \gamma = \frac{q - \cos \psi}{\sin \psi} \end{aligned} \quad (2.1.46)$$

donde τ (o τ_N) es la *Función Temporal* y τ_T la *Función de Periodo Orbital*, ambas asociadas a la ecuación y *sobrecargadas* en función de ψ .

Nótese que ψ_N es la semidiferencia de anomalía excéntrica completa ($\Delta E/2$), ψ es la semidiferencia de anomalía excéntrica excluyendo el número de vueltas completas ($\psi = \psi_0 = \Delta E/2 - N \pi$), y N el número de vueltas completas (parámetro considerado sólo para la solución elíptica de múltiple revolución).

Para el caso hiperbólico, usando estas identidades entre funciones trigonométricas e hiperbólicas, y sustituyendo $\phi = -i \Phi$, $\psi = -i \Psi$, $\omega = i \omega_H$, $\alpha = -\alpha_H$, y $\gamma = -i \gamma_H$, en la ecuación del caso elíptico, se deduce la siguiente *Ecuación Temporal*

$$\begin{aligned} \tau &= \mathfrak{A}(\Psi, q) \quad ; \quad \mathfrak{A}(\Psi, q) = \alpha_H^{1/2} \omega_H \quad ; \quad \omega_H = \gamma_H - \alpha_H \Psi \quad ; \\ \rho &= 1 - q \cosh \Psi \quad ; \quad \alpha_H = \frac{\rho}{\sinh^2 \Psi} \quad ; \quad \gamma_H = \frac{\cosh \Psi - q}{\sinh \Psi} \end{aligned} \quad (2.1.47)$$

donde $\mathfrak{A}(\Phi, f)$ es la *Función Temporal, sobrecargada* en función de Ψ , semidiferencia de anomalía hiperbólica ($\Delta H/2$).

La *Ecuación Temporal* $\tau = \mathfrak{A}(\psi, q; N)$ ó $\tau = \mathfrak{A}(\Psi, q)$, en su versión elíptica ó hiperbólica, es una de las *Ecuaciones Elementales*, llamada también, para distinguirla de las otras, *Ecuación Elemental Principal*, por ser ψ la *Variable Elemental* más adecuada para ser la incógnita, debido a que aparece directamente en la ecuación, y no sólo como argumento de funciones trigonométricas. Por la misma razón, la *Función Temporal* τ es una de las *Funciones Elementales*, llamada también *Función Elemental Principal*.

Alternativamente, aprovechando las relaciones particulares que cumplen la variables γ , α y ω_N , en función de ψ , se deduce la siguiente expresión equivalente de la *Función Elemental Principal* para el caso elíptico

$$\begin{aligned} \tau_N(\psi, q) &= \alpha^{1/2} \omega_N \\ \psi_N &= \psi + N \pi \quad ; \quad \gamma = \frac{q - \cos \psi}{\sin \psi} \quad ; \quad \alpha = \frac{\partial \gamma}{\partial \psi} \quad ; \quad \omega_N = \frac{\partial(\gamma \psi_N)}{\partial \psi} \end{aligned} \quad (2.1.48)$$

y de forma análoga para el caso hiperbólico

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(\Psi, q) &= \alpha_H^{1/2} \omega_H \\ \gamma_H &= \frac{\cosh \Psi - q}{\sinh \Psi} \quad ; \quad \alpha_H = -\frac{\partial \gamma_H}{\partial \Psi} \quad ; \quad \omega_H = \frac{\partial(\gamma_H \Psi)}{\partial \Psi} \end{aligned} \quad (2.1.49)$$

La *Ecuación Elemental Principal* recién definida permite obtener el valor de la incógnita ψ ó Ψ correspondiente al tiempo de transferencia (τ) para una configuración geométrica dada por q y N , determinando la trayectoria cónica particular buscada que resuelve el *Problema de Lambert*. Nótese que esta ecuación (en cualquiera de sus versiones, elíptica ó hiperbólica, y usando o no las derivadas respecto a la *Variable*

Elemental) es sin duda más simple que cualquiera de las encontradas en la literatura, sobre todo las versiones usando derivadas, que van a resultar muy útiles para el cálculo de las derivadas enésimas de la *Función Elemental Principal*.

El problema matemático está ahora de nuevo cerrado, pero resultando menos complicado de resolver numéricamente debido a la relativa facilidad en la evaluación de la *Función Temporal* y sus derivadas usando la variable ψ ó Ψ , como se comprobará posteriormente.

2.1.4 DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN ELEMENTAL DOBLE DEPENDIENTE

Las expresiones de v , ρ , α y γ , usadas en las *Ecuaciones Elementales* (2.1.33) y (2.1.46) para el caso elíptico, son

$$v = 1 + \cos f \cos \phi \quad ; \quad \alpha = \frac{v}{\sin^2 \phi} \quad ; \quad \gamma = -\frac{\sin f}{\tan \phi}$$

$$\rho = 1 - q \cos \psi \quad ; \quad \alpha = \frac{\rho}{\sin^2 \psi} \quad ; \quad \gamma = \frac{q - \cos \psi}{\sin \psi}$$

y las expresiones de v , ρ , α_H y γ_H , usadas en las *Ecuaciones Elementales* (2.1.34) y (2.1.47) para el caso hiperbólico, son

$$v = 1 + \cos f \cosh \Phi \quad ; \quad \alpha_H = \frac{v}{\sinh^2 \Phi} \quad ; \quad \gamma_H = \frac{\sin f}{\tanh \Phi}$$

$$\rho = 1 - q \cosh \Psi \quad ; \quad \alpha_H = \frac{\rho}{\sinh^2 \Psi} \quad ; \quad \gamma_H = \frac{\cosh \Psi - q}{\sinh \Psi}$$

A partir de las expresiones trigonométricas (2.1.39) de los ángulos (f , ϕ , ψ), ó las hiperbólicas (2.1.40) de (f , Φ , Ψ), se obtienen las siguientes expresiones de α y γ , para los casos elíptico e hiperbólico.

$$\alpha_I = 1 - \cos \phi \cos \psi \quad ; \quad \alpha = \frac{1}{\alpha_I} \quad ; \quad \gamma = -\frac{\cos \phi \sin \psi}{\alpha_I}$$

$$\alpha_{IH} = \cosh \Phi \cosh \Psi - 1 \quad ; \quad \alpha_H = \frac{1}{\alpha_{IH}} \quad ; \quad \gamma_H = \frac{\cosh \Phi \sinh \Psi}{\alpha_{IH}}$$

Nótese que, de la expresión de α en función de ϕ y ψ , se deduce inmediatamente la existencia de las dos soluciones donde $\alpha = 1$ (o $\alpha_I = 1$) cuando alguno de los cosenos de ϕ o ψ se anula. La primera, donde $\psi = f$ y $\phi = \pi/2$, corresponde a la *Elipse Fundamental*, y la segunda, donde $\psi = \pi/2$ y $\phi = \pi - f$, corresponde a la *Elipse Esencial*.

Con las expresiones anteriores en función de las *Variables Elementales*, ϕ y ψ , ó Φ y Ψ (desapareciendo la dependencia directa de f), se obtiene la siguiente alternativa a la *Ecuación Temporal*.

Para el caso elíptico

$$\begin{aligned}\tau &= \tau(\psi, \phi, N) \quad ; \quad \tau(\psi, \phi, N) \equiv \tau_N(\psi, \phi) = \tau_0(\psi, \phi) + N \tau_T(\psi, \phi) \quad ; \\ \tau_N(\psi, \phi) &= \alpha^{3/2} \varpi_N \quad ; \quad \tau_T(\psi, \phi) = \pi \alpha^{3/2} \quad ; \quad \alpha = 1 / \alpha_1 \quad ; \\ \varpi_N &= \psi_N - \cos \phi \sin \psi \quad ; \quad \psi_N = \psi + N \pi \quad ; \quad \alpha_1 = 1 - \cos \phi \cos \psi\end{aligned}\quad (2.1.50)$$

siendo τ (o τ_N) la *Función Temporal* y τ_T la *Función de Periodo Orbital*, ambas *sobrecargadas* en función de ψ y ϕ , y donde se han definido las nuevas variables ϖ_N y α_1 con las expresiones mostradas arriba.

Y para el caso hiperbólico

$$\begin{aligned}\tau &= \tau(\Psi, \Phi) \quad ; \\ \tau(\Psi, \Phi) &= \alpha_H^{3/2} \varpi_H \quad ; \quad \alpha_H = 1 / \alpha_{1H} \quad ; \\ \varpi_H &= \cosh \Phi \sinh \Psi - \Phi \quad ; \quad \alpha_{1H} = \cosh \Phi \cosh \Psi - 1\end{aligned}\quad (2.1.51)$$

siendo τ la *Función Temporal*, *sobrecargada* en función de Ψ y Φ , y donde se han definido las nuevas variables ϖ_H y α_{1H} con las expresiones mostradas arriba.

Esta *Función Temporal* es más simple que las anteriores pero las dos variables son incógnitas a determinar, y por tanto, para resolver la *Ecuación Temporal*, hace falta otra ecuación adicional, como puede ser cualquiera de las expresiones trigonométricas que las relaciona con el ángulo f que define la geometría del problema, por ejemplo, la siguiente

$$\cos f = \frac{\cos \psi - \cos \phi}{1 - \cos \phi \cos \psi} = \frac{\cosh \Phi - \cosh \Psi}{\cosh \Phi \cosh \Psi - 1}\quad (2.1.52)$$

La *Ecuación Temporal* $\tau = \tau(\psi, \phi, N)$ ó $\tau = \tau(\Psi, \Phi)$, en su versión elíptica ó hiperbólica, es una de las *Ecuaciones Elementales*, llamada también, para distinguirla de las otras, *Ecuación Elemental Doble Dependiente*, por tener como incógnitas a dos *Variables Elementales*. Por la misma razón, la *Función Temporal* τ es una de las *Funciones Elementales*, llamada también *Función Elemental Doble Dependiente*.

La *Ecuación Elemental Doble Dependiente*, junto a una de las expresiones trigonométricas que relaciona las dos incógnitas entre sí, permite obtener el valor de las incógnitas ψ y ϕ ó Ψ y Φ correspondientes al tiempo de transferencia (τ) para una configuración geométrica dada por f y N , determinando la trayectoria cónica particular buscada que resuelve el problema. La simplicidad de esta *Ecuación Elemental* se penaliza con la necesidad de la ecuación adicional, pero en algunas ocasiones puede ser muy útil, como se verá posteriormente.

Nótese que las expresiones que definen la *Función Elemental Doble Dependiente* coinciden con las ecuaciones que usa Gauss^[4], sin adimensionalizar, para demostrar el *Teorema de Lambert*, tal como se muestra en el [Anexo G](#).

2.1.5 ECUACIÓN ELEMENTAL BÁSICA

Partiendo de la *Función Elemental Principal* en función de q y ψ , asociada a la *Ecuación Elemental Principal*, se va a desarrollar una forma alternativa de la ecuación que se conviene en llamar *Ecuación Elemental Básica*, debido a que de ella se pueden deducir multitud de variantes existentes en la literatura, permitiendo realizar una primera comparativa.

Además de ser una ecuación perfectamente válida para la búsqueda de una solución del *Problema de Lambert*, sirve como base para llegar a otros desarrollos considerados más prácticos y eficientes. En definitiva, esta primera ecuación, deducida como se muestra a continuación, destaca, tanto por poner de manifiesto las dificultades que surgen en la resolución del *Problema de Lambert*, como para abrir el campo de visión con el objetivo de descubrir nuevos métodos alternativos considerablemente mejores.

La función τ de [\(2.1.46\)](#)

$$\tau_N(\psi, q) = \alpha^{1/2} \omega_N \quad ; \quad \omega_N = \alpha \psi_N + \gamma \quad ; \quad \psi_N = \psi + N \pi \quad ;$$

$$\rho = 1 - q \cos \psi \quad ; \quad \alpha = \frac{\rho}{\sin^2 \psi} \quad ; \quad \gamma = \frac{q - \cos \psi}{\sin \psi}$$

se puede reescribir como

$$\tau(\psi, q; N) = R \xi_N$$

donde las variables R y ξ_N , se calculan mediante las funciones R y ξ_N , definidas como

$$R = R(\psi, q) = \rho^{1/2} \quad ; \quad \xi_N = \xi_N(\psi, q; N) = \frac{\omega_N}{\sin \psi} \quad (2.1.53)$$

Desarrollando ω_N , se deduce

$$\begin{aligned} \omega_N = \alpha \psi_N + \gamma &= \frac{\rho}{\sin^2 \psi} \psi_N + \frac{q - \cos \psi}{\sin \psi} = \frac{(1 - q \cos \psi) \psi_N + \sin \psi (q - \cos \psi)}{\sin^2 \psi} = \\ &= \frac{(\psi_N - \sin \psi \cos \psi) + q (\sin \psi - \psi_N \cos \psi)}{\sin^2 \psi} \end{aligned}$$

Sustituyendo esta relación en la definición de ξ_N anterior, se deduce

$$\xi_N = p_1 + q p_2$$

siendo p_1 el término independiente de q , y p_2 el factor del término proporcional a q , evaluadas mediante las funciones p_1 y p_2 como sigue

$$p_1 = p_1(\psi; N) = \frac{\psi_N - \sin \psi \cos \psi}{\sin^3 \psi} \quad ; \quad p_2 = p_1(\psi; N) = \frac{\sin \psi - \psi_N \cos \psi}{\sin^3 \psi}$$

Se hace notar que las variables p_1 y p_2 son por definición siempre las mismas, mientras que las funciones p_1 y p_2 son diferentes (están *sobrecargadas*), dependiendo de la variable incógnita elegida (ψ , Ψ ó x).

La evaluación de p_1 y p_2 mediante las funciones $p_1(\psi; N)$ y $p_2(\psi; N)$, tienen ambas un problema de indeterminación (0/0) en el caso parabólico ($\psi = 0$, $N = 0$), y por tanto, se pierde precisión cuando se evalúan en su cercanía, siendo usual para evitar el problema, recurrir a expresiones alternativas, por ejemplo, mediante desarrollos de potencias. No obstante, existe una relación entre las dos funciones que permite obtener una en función de la otra con el consiguiente ahorro de cálculo. Esta relación se obtiene fácilmente multiplicando p_1 por $\cos \psi$ y desarrollando como sigue

$$\begin{aligned} p_1 \cos \psi &= \frac{\psi_N \cos \psi - \sin \psi \cos^2 \psi}{\sin^3 \psi} = \frac{\psi_N \cos \psi - \sin \psi (1 - \sin^2 \psi)}{\sin^3 \psi} = \\ &= \frac{\sin^3 \psi + \psi_N \cos \psi - \sin \psi}{\sin^3 \psi} = 1 + \frac{\psi_N \cos \psi - \sin \psi}{\sin^3 \psi} = 1 - p_2 \end{aligned}$$

Y por tanto, se cumplen las identidades

$$p_2 = 1 - p_1 \cos \psi \quad ; \quad p_2(\psi; N) = 1 - p_1(\psi; N) \cos \psi$$

Sustituyendo esta identidad entre p_1 y p_2 en la expresión de ξ_N anterior

$$\xi_N = p_1 + q p_2 = p_1 + q (1 - p_1 \cos \psi) = q + (1 - q \cos \psi) p_1$$

y teniendo en cuenta la definición de la variable $\rho = 1 - q \cos \psi$, se deduce

$$\xi_N = q + \rho p_1$$

resultando finalmente la *Ecuación Elemental Básica* buscada

$$\tau = \tau(\psi, q; N) \quad ; \quad \tau(\psi, q; N) \equiv \tau_N(\psi, q) = \tau_0(\psi, q) + N \tau_1(\psi, q) \quad ;$$

$$\tau_N(\psi, q) = R \xi_N \quad ; \quad \xi_N = p_1 + q p_2 \quad \text{o} \quad \xi_N = q + \rho p_1 \quad ;$$

$$R = \rho^{1/2} \quad ; \quad \rho = 1 - q \cos \psi \quad ; \quad \psi_N = \psi + N \pi \quad ;$$

$$p_1 = p_1(\psi; N) = \frac{\psi_N - \sin \psi \cos \psi}{\sin^3 \psi} \quad ; \quad p_2 = p_1(\psi; N) = \frac{\sin \psi - \psi_N \cos \psi}{\sin^3 \psi} \quad ;$$

$$\tau(\psi, q) = \pi (\sqrt{\alpha})^3 \quad ; \quad \sqrt{\alpha} = \frac{R}{\sin \psi} \quad (2.1.54)$$

donde $\tau(\psi, q; N)$ o $\tau_N(\psi, q)$ es la *Función Elemental Básica*, y $\tau(\psi, q)$ la función de periodo orbital, para el caso elíptico.

De forma similar para el caso hiperbólico ($\psi = -i \Psi$), la *Ecuación Elemental Básica* es

$$\begin{aligned} \tau &= \tau(\Psi, q) \quad ; \\ \tau(\Psi, q) &= R \xi_0 \quad ; \quad \xi_0 = p_1 + q p_2 \quad \text{o} \quad \xi_0 = q + \rho p_1 \quad ; \\ R &= \rho^{1/2} \quad ; \quad \rho = 1 - q \cosh \Psi \quad ; \\ p_1 &= p_1(\Psi) = \frac{\sinh \Psi \cosh \Psi - \Psi}{\sinh^3 \Psi} \quad ; \quad p_2 = p_2(\Psi) = \frac{\Psi \cosh \Psi - \sinh \Psi}{\sinh^3 \Psi} \end{aligned} \quad (2.1.55)$$

donde $\tau(\Psi, q)$ es la *Función Elemental Básica* para el caso hiperbólico.

Nótese que las variables p_1 y p_2 son las mismas en el caso elíptico y el hiperbólico, pero evidentemente, las funciones que la que se evalúan no son las mismas en el caso elíptico y en el hiperbólico, sin embargo devuelven el mismo resultado para valores equivalentes de las variables independientes ($\psi = -i \Psi$, $N = 0$ para el caso hiperbólico). La justificación de este abuso de notación, usando funciones *sobrecargadas* con el mismo nombre, se fundamenta en evitar la complicación de la definición de múltiples funciones, para el mismo resultado, que sólo provocarían confusión.

Nótese que en la evaluación de ξ_N , es evidente que la segunda opción de cálculo es más eficiente que la primera por evitar el cálculo innecesario de p_2 , pero la primera opción resulta útil en otros desarrollos particulares.

Casi todas las soluciones relevantes existentes en la literatura, se pueden deducir a partir de la *Ecuación Elemental Básica* recién deducida. No en vano, también es el punto de partida de nuevas ecuaciones desarrolladas posteriormente que serán la gran aportación de este trabajo. Como ejemplo de estas soluciones, destacan las desarrolladas por Gauss^[4], Bate, Mueller and White^[10], Simó^[24], Fang and Nguyen^[11] y Arora and Russell^[9], estudiadas en detalle en 4.1. De todos ellos, Gauss merece especial atención por ser el primero que desarrolló la ecuación, cuya principal diferencia con la desarrollada aquí, es la distancia usada para adimensionalizar el tiempo ($|r_c|$ en lugar de a_F).

Las funciones $p_1(\psi, N)$ y $p_2(\psi, N)$, se pueden evaluar, sin pérdida de precisión cerca del origen (solución parabólica), recurriendo a los siguientes desarrollos en serie de potencias

$$T_1(\psi^2) = \frac{\psi - \sin \psi \cos \psi}{\psi^3} = \frac{2\psi - \sin(2\psi)}{2\psi^3} \quad ; \quad T_1(y) = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3!}{(2n+3)!} (-4y)^n \right) \quad ;$$

$$\begin{aligned}
T_2(\psi^2) &= \frac{\sin \psi - \psi \cos \psi}{\psi^3} & ; \quad T_2(y) &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3!(n+1)}{(2n+3)!} (-y)^n \right) : \\
T_S(\psi^2) &= \frac{\sin \psi}{\psi} & ; \quad T_S(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-y)^n}{(2n+1)!!}
\end{aligned} \tag{2.1.56}$$

Usando estos desarrollos de potencias resulta, sin los términos proporcionales a N

$$p_1(\psi;0) = T_1(\psi^2) / T_S^3(\psi^2) \quad ; \quad p_2(\psi;0) = T_2(\psi^2) / T_S^3(\psi^2) \tag{2.1.57}$$

y del mismo modo en la versión hiperbólica, para evitar la pérdida de precisión cerca del caso parabólico ($\Psi = 0$), se puede recurrir a los desarrollos en serie de potencias

$$p_1(\Psi) = T_1(-\Psi^2) / T_S^3(-\Psi^2) \quad ; \quad p_2(\Psi) = T_2(-\Psi^2) / T_S^3(-\Psi^2) \tag{2.1.58}$$

Es importante destacar que estos desarrollos permiten calcular una aproximación tan buena como se quiera, truncando el desarrollo hasta el orden necesario. Nótese que los tres desarrollos son convergentes, para cualquier valor de ψ , aunque evidentemente el coste computacional aumente con dicho valor. Por ello, cuando el valor de ψ es suficientemente alto como para no tener problemas de precisión (mayor que la unidad más o menos), es más eficiente calcular dichas funciones mediante las expresiones trigonométricas que las definen, sin hacer uso de los desarrollos.

Los desarrollos de las funciones T_1 y T_2 , permiten evaluar las funciones p_1 y p_2 sin pérdida de precisión cerca del origen. El desarrollo de la función T_S no es necesario, pues la evaluación de $\sin \psi$ cerca del origen no tiene ningún problema de precisión, se ha añadido sólo para tener una visión homogénea con los desarrollos de T_1 y T_2 .

En la solución parabólica de tiempo finito ($\psi = \Psi = 0$, $N = 0$), donde $\psi_N = 0$, $\rho = (1 - q)$, $p_1 = 2/3$ y $p_2 = 1/3$, resulta

$$\tau_P = \tau(0,q;0) \equiv \tau_0(0,q) = \sqrt{1-q} \frac{2+q}{3} = \sqrt{2q_s} \frac{2+q}{3} \tag{2.1.59}$$

Este parámetro τ_P es el tiempo adimensional para la solución parabólica y puede ser usado para determinar el tipo de trayectoria comparando con el valor de τ . Por tanto, la trayectoria cónica es hiperbólica, parabólica, ó elíptica cuando el parámetro τ es menor, igual, ó mayor que τ_P , respectivamente.

La solución parabólica de tiempo finito ($N = 0$), se obtiene con cualquiera de las dos expresiones de la *Función Elemental Básica* τ , en su versión elíptica (ψ) ó hiperbólica (Ψ), pues en este caso es $\psi = \Psi = 0$, y por tanto, la función τ devuelve τ_P , en ambos casos. Para las soluciones cercanas a la parabólica se usará la función adecuada en cada caso según el valor de τ en comparación con τ_P .

Cuando es necesario el uso de desarrollos, en la cercanía del origen, tanto en el caso elíptico como el hiperbólico, todavía se puede economizar el coste computacional de p_1

y p_2 , calculando directamente sus desarrollos de potencias en el origen, aplicando el desarrollo del cociente de funciones del [Anexo F](#), a las funciones T_1 y T_S para obtener p_1 , y a las funciones T_2 y T_S para obtener p_2 , con el siguiente resultado

$$p_m(\psi;0) = p_m(\Psi) = P_m(\psi^2) = P_m(-\Psi^2) \quad (m = 1, 2) \quad (2.1.60)$$

donde las funciones $P_m(y)$ se definen como

$$P_m(y) = T_m(y) / T_S(y) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{m,n} y^n \quad (m = 1, 2) \quad (2.1.61)$$

siendo $p_{m,n}$ los coeficientes de los desarrollos asociados, calculados en la tabla 4.

$n \setminus m$	1	2
0	2\3	1\3
	6.66666666666667E-01	3.33333333333333E-01
1	1\5	2\15
	2.00000000000000E-01	1.33333333333333E-01
2	17\420	2\63
	4.04761904761905E-02	3.17460317460317E-02
3	29\4200	4\675
	6.90476190476190E-03	5.92592592592593E-03
4	1181\1108800	2\2079
	1.06511544011544E-03	9.62000962000962E-04
5	1393481\9081072000	2764\19348875
	1.53448954044192E-04	1.42850682533222E-04
6	763967\36324288000	4\200475
	2.10318506449459E-05	1.99526125452051E-05
7	133541\48117888000	28936\10854718875
	2.77528805919329E-06	2.66575305479756E-06
8	3.55474389799148E-07	3.44370051707177E-07
9	4.44550883834927E-08	4.33297872887250E-08
10	5.45160892374631E-09	5.33758593036955E-09
11	6.57716241989003E-10	6.46163108227154E-10

Tabla 4. Primeros coeficientes $p_{m,n}$ de los desarrollos de las funciones P_m .

Usando los desarrollos de las funciones $P_m(y)$ hasta grado 7, cuyos coeficientes se muestran en la tabla 4, se consiguen calcular las funciones p_m con *doble precisión* para $|y| < 0.06$ aproximadamente, que corresponde a valores de ψ y Ψ menores de 0.25. Cogiendo todos los coeficientes disponibles en la tabla 4 hasta grado 11, se consigue *doble precisión* para $|y| < 0.25$ aproximadamente, que corresponde a valores de ψ y Ψ menores de 0.5. Por encima de estos valores límite sería necesario tener más términos del desarrollo para conseguir mayor precisión, sin embargo, la evaluación directa de p_1 mediante funciones trigonométricas ó hiperbólicas deja de tener problemas de precisión por estar el argumento suficientemente alejado del origen.

Nótese que tan sólo es necesario calcular p_1 para la evaluación de la *Función Temporal*. El desarrollo de la función p_2 se incluye por mero interés matemático. Dicho esto, una

alternativa para evaluar las funciones p_1 cerca del origen, se basa en las *Funciones de Stumpff*, definidas en el [Anexo A](#). Teniendo en cuenta estas funciones, y las propiedades 1 y 2 mostradas en dicho Anexo, se deducen las siguientes expresiones alternativas para calcular T_1 y T_S

$$\begin{aligned} T_1(y) &= 4 c_3(z) = c_1(y) c_2(y) + c_3(y) \quad ; \\ T_S(y) &= c_1(y) = \sqrt{2c_2(z)} \end{aligned} \quad (2.1.62)$$

donde, para simplificar notación, se han usado las siguientes variables intermedias

$$y = \psi^2 = -\Psi^2 \quad ; \quad z = 4y = 4\psi^2 = -4\Psi^2 = (\Delta E)^2 = -(\Delta H)^2 \quad (2.1.63)$$

Según las equivalencias anteriores de T_1 y T_S usando *Funciones de Stumpff*, la expresión más simple para calcular p_1 con dichas funciones, propuesta como primera opción, es la siguiente

$$p_1 = 4 \frac{c_3(z)}{c_1^3(y)} \quad (2.1.64)$$

Sin embargo, esta expresión obliga a calcular dos funciones de Stumpff de distinto orden y con distinto argumento. No obstante, se puede evitar el cálculo directo de una de las funciones, eligiendo el mismo argumento, z ó y , en las *Funciones de Stumpff*, y usando algunas de las expresiones mostradas en el [Anexo A](#) para las funciones de distinto orden con el mismo argumento, tal y como se muestra a continuación.

Usando sólo el argumento z , y la propiedad 1 del [Anexo A](#), se propone la segunda opción

$$p_1 = \frac{c_3(z)}{\sqrt{c_2^3(z)/2}} \quad (2.1.65)$$

donde se puede evaluar directamente la función $c_3(z)$, y decidir para $c_2(z)$, la evaluación mediante desarrollo (no recomendable para $z > 1$) ó, según se detalla en el [Anexo A](#), con el cálculo alternativo siguiente (sin pérdida de precisión para cualquier z en el rango de interés, $z < 4\pi^2$)

$$\begin{aligned} c_1(z) &= 1 - z c_3(z) \quad ; \\ c_0(z) &= s_0 \sqrt{1 - z c_1^2(z)} \quad ; \quad s_0 = -1 \text{ (si } 1/4 < z/\pi^2 < 3/4 \text{) ó } 1 \text{ (en caso contrario)} \quad ; \\ c_2(z) &= \frac{1 - c_0(z)}{z} \quad \text{ó} \quad c_2(z) = \frac{c_1^2(z)}{1 + c_0(z)} \end{aligned} \quad (2.1.66)$$

La primera opción de $c_2(z)$ se recomienda para $z \geq 1$, y la segunda para $z < 4$, o $z < 1$ en favor de la primera.

Por último, usando sólo el argumento y , y la propiedad 2 del [Anexo A](#), se propone la tercera opción

$$p_1 = \frac{c_2(y)}{c_1^2(y)} + \frac{c_3(y)}{c_1^3(y)} \quad ; \quad c_1(y) = 1 - y c_3(y) \quad (2.1.67)$$

donde se puede evaluar directamente la función $c_3(y)$, y decidir para $c_2(y)$, la evaluación mediante desarrollo (no recomendable para $y > 1$) ó, como en la segunda opción para $c_2(z)$, pero con la ventaja de tener un argumento más reducido ($y < \pi^2$)

$$\begin{aligned} c_1(y) &= 1 - y c_3(y) \quad ; \\ c_0(y) &= s_0 \sqrt{1 - y c_1^2(y)} \quad ; \quad s_0 = -1 \text{ (si } y > \pi^2/4 \text{) ó } 1 \text{ (en caso contrario)} \quad ; \\ c_2(y) &= \frac{1 - c_0(y)}{y} \quad \text{ó} \quad c_2(y) = \frac{c_1^2(y)}{1 + c_0(y)} \end{aligned} \quad (2.1.68)$$

La primera opción de $c_2(y)$ se recomienda para $y \geq 1$, y la segunda para $y < 4$, o $y < 1$ en favor de la primera.

Como curiosidad, para $y < 4$ (para no perder precisión), se puede calcular directamente p_1 , evitando c_0 y c_2 , como sigue

$$p_1 = \frac{1}{1 + s_0 \sqrt{1 - y c_1^2(y)}} + \frac{c_3(y)}{c_1^3(y)} \quad (2.1.69)$$

Es fácil deducir, que la tercera opción es menos costosa que la segunda por tener una raíz cuadrada menos, y por usar un argumento más reducido, por lo que se recomienda preferentemente para la evaluación de p_1 .

Es importante destacar, para todas las opciones, que cuando el argumento está muy cerca del origen (en la práctica menor de 0.125 aproximadamente), la evaluación de las *Funciones de Stumpff* mediante desarrollos se vuelve tan eficiente que no merece la pena ahorrar una evaluación directa. En dicho caso, en la primera opción, es mejor calcular directamente $c_3(z)$ y $c_1(y)$ mediante desarrollos, en la segunda opción, es mejor calcular directamente $c_3(z)$ y $c_2(z)$, y por último, en la tercera opción, es mejor calcular directamente $c_3(y)$ y $c_2(y)$, y después $c_1(y)$ a partir de $c_3(y)$. En cualquier caso, la tercera opción sigue siendo la más eficiente, por tener un argumento más reducido, excepto si la cercanía al origen es tan acusada que la primera opción la supera ligeramente (como mucho en cuatro operaciones aritméticas).

También es importante destacar, que para valores del argumento por encima de la unidad, se pueden evaluar de las *Funciones de Stumpff* mediante funciones trigonométricas ó hiperbólicas sin la pérdida de precisión provocada por la cercanía al origen. Por ello, en la práctica, la mejor opción es calcular las dos funciones de menor orden (c_0 y c_1) mediante funciones trigonométricas ó hiperbólicas, y las otras dos de mayor orden (c_2 y c_3) con las fórmulas recursivas correspondientes. Adicionalmente, se

puede ahorrar el cálculo de una de las funciones de menor orden evaluando la función (c_0 ó c_1) que esté más cerca de alguno de sus ceros, y calculando la otra con la relación pitagórica.

Por último, también mencionar que para calcular las funciones de Stumpff también se puede utilizar el método de reducción de factor 4 mencionado al final del [Anexo A](#). Este método es posiblemente el más eficiente de los analizados, teniendo ventajas adicionales como ser válido para cualquier argumento, y ser muy fáciles de programar.

Como conclusión, se han mostrado, multitud de opciones posibles para el cálculo de las *Funciones de Stumpff* y se deja al lector la decisión de usar una u otra según estime oportuno. Aunque no se han realizado casos prácticos numéricamente, se considera que el estudio es suficientemente detallado como para predecir los resultados con seguridad.

Nótese que para resolver el *Problema de Lambert*, es necesario aplicar un método numérico iterativo que determine el valor de la incógnita que solucione la *Ecuación Temporal*, y en consecuencia, en cada iteración del algoritmo correspondiente al método elegido, es necesario evaluar la *Función Temporal* τ en función de dicha incógnita (ϕ , Φ , ψ , Ψ , ...), así como las derivadas de la función τ respecto a la incógnita, hasta un orden determinado por el método elegido.

Es relativamente fácil obtener las dos primeras derivadas de la *Función Elemental Básica* $\tau(\psi, q; N)$. Primero se obtienen las derivadas de

$$p_1 = \frac{\psi_N - S_1 C_1}{S_3}$$

donde, para simplificar, se ha usado la notación $C_n = \cos^n \psi$ y $S_n = \sin^n \psi$, de modo que, llamando $p_1^{(n)}$ a la derivada de p_1 de orden n , y derivando sucesivamente en la expresión

$$S_3 p_1 = \psi_N - S_1 C_1$$

$$S_3 p_1^{(1)} + 3 S_2 C_1 p_1 = 1 - C_2 + S_2 = 2 S_2 \Rightarrow S_1 p_1^{(1)} = 2 - 3 C_1 p_1$$

$$S_1 p_1^{(2)} + C_1 p_1^{(1)} = 3 S_1 p_1 - 3 C_1 p_1^{(1)} \Rightarrow S_1 p_1^{(2)} = 3 S_1 p_1 - 4 C_1 p_1^{(1)}$$

resulta

$$p_1 = (\psi_N / S_1 - C_1) / S_2 \quad ;$$

$$p_1^{(1)} = (2 - 3 p_1 C_1) / S_1 \quad ;$$

$$p_1^{(2)} = 3 p_1 - 4 p_1^{(1)} C_1 / S_1 \tag{2.1.70}$$

Siguiendo el mismo proceso se pueden obtener las derivadas de cualquier orden en función de todas las anteriores, por ejemplo, para la derivada tercera

$$p_1^{(3)} = 7 p_1^{(1)} + (3 p_1 - 5 p_1^{(2)}) C_1 / S_1 \tag{2.1.71}$$

No obstante, cuando la solución está cerca del origen, es mejor calcular la función p_1 y sus derivadas, directamente a partir del desarrollo en serie de potencias.

Con las derivadas de p_1 , es fácil calcular las derivadas intermedias de ρ , R y ξ_N , y finalmente las de la función τ como sigue

$$\begin{aligned}\rho^{(1)} &= q S_1 \quad ; \quad \rho^{(2)} = q C_1 \quad ; \\ R^{(1)} &= \rho^{(1)} / (2R) \quad ; \quad R^{(2)} = (\rho^{(2)} - 2 (R^{(1)})^2) / (2R) \quad ; \\ \xi_N^{(1)} &= \rho p_1^{(1)} + \rho^{(1)} p_1 \quad ; \quad \xi_N^{(2)} = \rho p_1^{(2)} + 2 \rho^{(1)} p_1^{(1)} + \rho^{(2)} p_1 \quad ; \\ \tau^{(1)} &= R^{(1)} \xi_N + R \xi_N^{(1)} \quad ; \quad \tau^{(2)} = R^{(2)} \xi_N + 2 R^{(1)} \xi_N^{(1)} + R \xi_N^{(2)}\end{aligned}\tag{2.1.72}$$

Con estas dos primeras derivadas, se puede aplicar un método de tercer orden (como el método de Halley, por ejemplo), para resolver la ecuación de forma eficiente. Para el caso hiperbólico se obtienen ecuaciones totalmente análogas por lo que no se considera necesario repetirlo.

Nótese que, sin contar la evaluación de las funciones trigonométricas C_1 y S_1 , se obtiene la función τ y sus dos primeras derivadas por menos de 40 operaciones aritméticas.

La expresiones obtenidas de la *Función Elemental Básica* τ en función de ψ ó Ψ , dependiendo de la solución elíptica ó hiperbólica, son muy simples de evaluar, y sus derivadas, aunque se complican con el orden, se pueden calcular computacionalmente con suma facilidad, recurriendo a expresiones recursivas que permiten obtener la derivada de cualquier orden en función de las derivadas de orden inferior, como se muestra más adelante cuando se estudia en detalle la *Función Elemental Principal*.

Sin embargo, con esta solución, existe un grave problema de indeterminación (0/0) en las soluciones próximas a la parabólica, que provoca una pérdida de precisión que se acentúa de forma exponencial con el orden, en el cálculo de las sucesivas derivadas. Aunque es posible evitar este problema de precisión, desarrollando la *Función Temporal* τ en torno a la solución parabólica considerada, usando los desarrollos de la funciones T_1 , T_2 y T_S , o las *Funciones de Stumpff*, el cálculo necesario resulta excesivamente complicado y costoso en la práctica, sobre todo en la zona de transición suficientemente cercana para tener problemas de precisión y suficientemente alejada para que el coste de los desarrollos sea elevado.

Para salvar este problema, se desarrollarán más adelante expresiones alternativas de la *Función Temporal*, en función de la *Variable Universal* x , que evitan dicha indeterminación (*Función Universal*), y además, unifican todos los casos (elíptico, parabólico e hiperbólico), ganando también en generalidad.

2.2 PROPIEDADES DEDUCIDAS DE LA ECUACIÓN ELEMENTAL PRINCIPAL

A partir de la *Ecuación Elemental Principal del Problema de Lambert*, se pueden deducir numerosas propiedades demostradas por otros métodos en la literatura.

Como muestra de las posibles aplicaciones de los resultados obtenidos, se han desarrollado demostraciones alternativas en los dos casos conocidos siguientes:

- Propiedad de Invariancia del *Problema de Lambert* que conduce a un *Problema Equivalente Simplificado*, como se desarrolla a continuación en [2.3](#).
- Cálculo del Impulso Total de la *Transferencia de Hohmann* y su demostración de optimalidad, desarrollado en detalle en [3.1](#).

2.3 PROPIEDAD DE INVARIANCIA Y PROBLEMAS EQUIVALENTES

Como se deduce de la *Ecuación Elemental Principal*, $\tau = \tau(\psi, q; N)$, todos los problemas con los mismos valores de τ y q tienen las mismas soluciones ψ , para cada N , por lo que ψ es invariante en la familia de cónicas manteniendo constantes dichos parámetros.

Visto de otro modo, fijando τ y N , existe una familia de configuraciones geométricas con q constante que tienen la misma solución matemática ψ . En consecuencia, a todos los problemas, cuya configuración geométrica se corresponde con un mismo valor de q , se les llama *Problemas Equivalentes* (por tener la misma solución para cada τ y N).

Teniendo en cuenta de [\(1.2.7\)](#) que $q = \cos f$ y que $\sin f = c / (r_0 + r_1)$, se deduce que manteniendo fijos los puntos inicial y final, P_0 y P_1 , y por tanto la cuerda c , la familia de *Problemas Equivalentes* con el mismo valor de q , y por tanto de $\sin f$, debe cumplir la propiedad

$$(r_0 + r_1) = (2 a_F) = \text{constante}$$

que se corresponde con una elipse de focos P_0 y P_1 pasando por F , como se muestra en la figura 6. Este resultado es el mismo mencionado en Battin [\[5.36\]](#).

Nótese que a esta misma conclusión se llega con el *Teorema de Lambert* y, en general, con cualquier ecuación desarrollada para resolver el *Problema de Lambert* que sirva para demostrar el *Teorema de Lambert*, como es el caso de la *Ecuación Elemental Principal*.

Entre todos los problemas de esta familia de problemas equivalentes, existe uno particularmente simple cuando los radiovectores inicial y final son iguales, mostrado con línea discontinua en la figura 6 siendo F_S el foco correspondiente. En este caso especial, para mantener el valor τ , a_F debe ser constante y, en consecuencia, el valor de

los radiovectores debe ser a_F , y por último, para mantener el valor de q , la semidiferencia angular δ debe ser el ángulo f , proporcionando una interpretación geométrica del parámetro f . Este problema, llamado *Problema Equivalente Simplificado*, mostrado de forma aislada en la figura 7, es el mismo mencionado por Battin^[5,36] como la versión transformada del *Problema de Lambert*.

Figura 6. Lugar geométrico de los focos, manteniendo los puntos inicial y final, con el mismo valor del parámetro q (problemas equivalentes geoméricamente).

Figura 7. Configuración geométrica del *Problema Equivalente Simplificado*.

A continuación se va a mostrar la dependencia que tienen entre sí los *Problemas Equivalentes*. Desarrollando la definición de q , de (1.2.7), en función de $(r_0, r_1$ y $\delta)$

$$q = \cos f = \frac{r_C}{a_F} = \frac{r_R}{a_F} \cos \delta = \frac{2\sqrt{r_0 r_1}}{r_0 + r_1} \cos \delta$$

y definiendo el ratio de radiovectores

$$\sigma = \frac{r_1}{r_0} \quad (2.2.1)$$

el parámetro q o $\cos f$, se puede calcular mediante la función q en función de σ y δ como

$$\cos f = q = q(\sigma, \delta) = \frac{2\sqrt{\sigma}}{1 + \sigma} \cos \delta \quad (2.2.2)$$

Nótese que el signo S_δ , definido anteriormente, es el mismo que los siguientes

$$S_\delta = \text{sign}(\cos \delta) = \text{sign}(\cos f) = \text{sign}(q)$$

y que se cumplen las siguientes simetrías

$$q(\sigma, \delta) = q(1/\sigma, \delta) \quad \text{Simetría logarítmica respecto al eje } \sigma = 1$$

$$q(\sigma, \delta) = -q(\sigma, \pi - \delta) \quad \text{Simetría respecto al eje } f = \pi/2 = 90^\circ$$

Figura 8. Curvas de *Problemas Equivalentes* ($q = \cos f = \text{constante}$) y Recta de *Problemas Equivalentes Simplificados* ($\sigma = 1$).

Nótese que los valores 1 y -1 del parámetro q se corresponden con los puntos $(1, 0^\circ)$ y $(1, 180^\circ)$ en la gráfica (σ, δ) , donde las curvas de f constante tienden a dichos puntos cuando el ángulo δ tiende a sus valores límite 0° y 180° , respectivamente. Es decir, estos dos puntos son polos en el plano (σ, δ) , donde los *Problemas Equivalentes* confluyen

para los valores límite de δ . En estos dos polos, los puntos inicial y final son coincidentes, por lo que el ángulo de transferencia ($\Delta\nu$) es un múltiplo de 2π , es decir $\Delta\nu = 2\pi N$ para $q = 1$ y $\Delta\nu = 2\pi(N+1)$ para $q = -1$. En el único caso donde $\Delta\nu = 0$ (para $q = 1, N = 0$), es obvio que la única solución físicamente posible es la de tiempo nulo. En el resto de casos, correspondiente a un ángulo de transferencia de una o varias vueltas completas, el tiempo puede ser cualquiera y, por tanto, las restricciones físicas no varían respecto a cualquier otro valor de q . Cuando el parámetro q está muy cercano a uno de estos polos, la solución varía extremadamente con la variación relativa entre σ y δ , manifestando una alta sensibilidad con las condiciones iniciales.

Las curvas (δ, σ) del ángulo δ en función de σ , manteniendo q , o f , constante, mostradas en la figura 8, se calculan despejando $\cos\delta$ de [\(2.2.2\)](#)

$$\cos\delta = \frac{1 + \sigma}{2\sqrt{\sigma}} \cos f \quad (2.2.3)$$

Nótese que para un valor de q , o f , dado, se cumple la siguiente limitación

$$|\cos f| \leq |\cos\delta| \leq 1$$

y en consecuencia

$$\delta \leq f \quad \text{cuando } q > 0, f < \pi/2$$

$$\delta = f \quad \text{cuando } q = 0, f = \pi/2$$

$$\delta \geq \pi - f \quad \text{cuando } q < 0, f > \pi/2$$

Nótese también que los *Problemas Equivalentes Simplificados* cumplen $\sigma = 1, f = \delta$.

Cuando δ está próximo a 0 o π , la variación de δ es muy grade con σ . Para tener una buena representación de las curvas (δ, σ) es útil recurrir a la siguiente parametrización.

$$\cos\delta = \frac{\cos f}{\tanh \eta} \quad ; \quad \sigma = \tanh^2(\eta/2) \quad ; \quad |\eta| \leq \operatorname{atanh}(\cos f) \quad (2.2.4)$$

En este apartado, se ha obtenido la dependencia del parámetro q con los datos geométricos del *Problema de Lambert*, mostrando el rango de valores posible y la sensibilidad de la solución en los valores límites. La propiedad de invariancia demostrada en la literatura por teoremas y axiomas puramente geométricos, aquí se ha presentado como una simple conclusión de la *Ecuación Elemental Principal*, obtenida anteriormente por desarrollo analítico a partir de las ecuaciones de las cónicas. Se han definido los problemas equivalentes que tienen la misma solución matemática (con invariancia de las variables implicadas) y se ha destacado uno particularmente simple, llamado *Problema Equivalente Simplificado*, usado en la literatura para demostrar otras propiedades notables.

2.3.1 ECUACIÓN ELEMENTAL DEDUCIDA DEL PROBLEMA EQUIVALENTE SIMPLIFICADO

La solución del *Problema Equivalente Simplificado*, mostrado en la figura 7, proporciona una solución para todos los *Problemas Equivalentes* (con el mismo valor de q). Conociendo este hecho, es fácil deducir la *Ecuación Elemental Principal* gracias a la simplicidad ofrecida por el problema simplificado, como se muestra a continuación.

Teniendo en cuenta la definición de la variable independiente ψ , invariante de la transformación entre problemas equivalentes, las anomalías excéntricas de los puntos inicial y final en el *Problema Equivalente Simplificado*, son

$$E_0 = -\psi \quad ; \quad E_1 = \psi + 2 N \pi$$

Haciendo la semidiferencia de la ecuación temporal de la cónica entre los puntos inicial y final, se obtiene

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{\Delta t}{2} = \psi + N \pi - e \sin \psi$$

y teniendo en cuenta, además, las definiciones de α y τ de [\(1.2.14\)](#), se deduce

$$\frac{\tau}{\alpha^{3/2}} = \psi_N - e \sin \psi \quad ; \quad \psi_N = \psi + N \pi$$

Téngase en cuenta las siguientes ecuaciones conocidas de las cónicas para calcular el radiovector en función de la anomalía verdadera y la anomalía excéntrica, donde se ha tenido en cuenta la identidad $p = a (1 - e^2)$ en la primera de ellas

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu} \quad ; \quad r = a (1 - e \cos E)$$

Dividiendo ambas por a_F , teniendo en cuenta que en este caso es $\delta = f$, y que en el punto final, se cumple $r = a_F$, $\cos \nu = \cos \delta$, $\cos E = \cos \psi$, y usando $q = \cos f$, se obtiene

$$1 = \frac{\alpha(1 - e^2)}{1 + e q} \quad ; \quad 1 = \alpha (1 - e \cos \psi)$$

Igualando los segundos miembros, y teniendo en cuenta la definición [\(2.1.36\)](#) de ρ , se puede despejar la excentricidad e , obteniendo

$$e = \frac{\cos \psi - q}{1 - q \cos \psi} = \frac{\cos \psi - q}{\rho}$$

Usando este resultado, en la segunda igualdad anterior, se puede despejar

$$\alpha = \frac{\rho}{\sin^2 \psi}$$

recuperando así la misma expresión de α obtenida en (2.1.44) a partir de las ecuaciones de las cónicas.

Usando las dos últimas expresiones, y teniendo en cuenta la definición de γ , de (2.1.46), se deduce

$$e \sin \psi = \frac{\cos \psi - q}{\rho} \quad \sin \psi = \frac{\cos \psi - q}{\alpha \sin \psi} = -\frac{\gamma}{\alpha}$$

y sustituyendo esta igualdad en la ecuación temporal anterior, resulta finalmente

$$\frac{\tau}{\alpha^{3/2}} = \psi_N + \frac{\gamma}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \tau = \alpha^{1/2} (\alpha \psi_N + \gamma)$$

Comprobando que se obtiene la misma *Ecuación Elemental Principal* (2.1.46).

Como conclusión, suponiendo demostrada previamente la invariancia de q y τ entre problemas equivalentes (por ejemplo, con cualquier demostración del *Teorema de Lambert*), la *Ecuación Elemental Principal* se demuestra a partir del *Problema Equivalente Simplificado*, como se ha indicado, con suma facilidad.

2.4 CÁLCULO DE VARIABLES DEPENDIENTES DE LA SOLUCIÓN

Una vez resuelto el problema (obtención de la variable incógnita ψ ó Ψ), que determina la trayectoria solución, se puede halla la excentricidad, la velocidad radial y angular, la anomalía, o cualquier otra variable de la trayectoria en función de la incógnita.

Anteriormente ya se ha obtenido, en (2.1.45) y (2.1.43), el semieje mayor y el parámetro de la cónica como

$$a_\rho = a_F \rho \quad ; \quad a = \frac{a_\rho}{\sin^2 \psi} \quad ; \quad p = \frac{r_s^2}{a_\rho} \quad (2.4.1)$$

de donde la excentricidad, se puede calcular como sigue

$$e_C = \sqrt{\frac{p}{a}} = \frac{r_s \sin \psi}{a_\rho} \quad ; \quad e = \sqrt{1 - e_C^2} \quad (2.4.2)$$

Para calcular las velocidades es necesario conocer la constante de energía de la trayectoria cónica, la cual se llamará ζ , en lugar de C como es usual, para distinguirla de otras variables ya utilizadas.

Teniendo en cuenta la expresión de p y a_ρ anteriores y las definiciones de V_C y R

$$\zeta = \sqrt{\mu p} = \sqrt{\frac{\mu r_s^2}{a_\rho}} = \sqrt{\frac{\mu r_s^2}{a_F \rho}} = \frac{V_c r_s}{\sqrt{\rho}} = \frac{V_c r_s}{R}$$

y definiendo la energía característica ζ_C , se calcula

$$\zeta = \frac{\zeta_C}{R} \quad ; \quad \zeta_C = V_C r_S \quad (2.4.3)$$

o definiendo la variable intermedia V_ρ , se puede calcular alternativamente

$$\zeta = V_\rho r_S \quad ; \quad V_\rho = \sqrt{\frac{\mu}{a_\rho}} = \frac{V_C}{R} \quad (2.4.4)$$

La componente angular de velocidad se calcula usando ζ directamente

$$V_{vj} = \frac{\zeta}{r_j} \quad (2.4.5)$$

O definiendo la variable k_{Sj}

$$V_{vj} = V_\rho k_{Sj} \quad ; \quad k_{Sj} = \frac{r_s}{r_j} \quad (2.4.6)$$

Usando expresiones conocidas ($a = p/e_c^2$, $Y = r \sin \nu = a e_C \sin E$), la componente radial de velocidad se puede calcular como

$$\begin{aligned} V_{rj} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \nu_j = \sqrt{\frac{\mu}{a e_c^2}} e \frac{a e_c \sin E_j}{r_j} = \sqrt{\frac{\mu}{a_\rho / \sin^2 \psi}} e \frac{a \sin E_j}{r_j} = \\ &= V_\rho \frac{a e \sin \psi \sin E_j}{r_j} \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Para llegar a un resultado útil, es necesario desarrollar antes las siguientes expresiones intermedias.

Teniendo en cuenta que $E_1 = E_0 + 2\psi$, se calcula

$$\begin{aligned} \cos E_1 &= \cos E_0 \cos(2\psi) - \sin E_0 \sin(2\psi) = \\ &= \cos E_0 (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) - \sin E_0 (2 \sin \psi \cos \psi) = \end{aligned}$$

de donde se despeja

$$2 \sin E_0 = \cos E_0 \frac{\cos^2 \psi - \sin^2 \psi}{\sin \psi \cos \psi} - \cos E_1 \frac{\cos^2 \psi + \sin^2 \psi}{\sin \psi \cos \psi} =$$

$$\begin{aligned}
&= \cos E_0 \left(\frac{1}{\tan \psi} - \tan \psi \right) - \cos E_1 \left(\frac{1}{\tan \psi} + \tan \psi \right) = \\
&= -\frac{\Delta \cos E}{\tan \psi} - \Sigma \cos E \tan \psi
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la igualdad $r = a (1 - e \cos E)$ se obtiene

$$\cos E = \frac{a - r}{a e} \Rightarrow \Delta \cos E = \frac{-\Delta r}{a e} ; \quad \Sigma \cos E = \frac{2a - \Sigma r}{a e}$$

Sustituyendo este resultado en la expresión anterior multiplicada por $(a e)$

$$2 a e \sin E_0 = \frac{\Delta r}{\tan \psi} + (\Sigma r - 2a) \tan \psi = \frac{\Delta r}{\tan \psi} + \Sigma r (1 - \alpha) \tan \psi$$

Desarrollando el término

$$(1 - \alpha) \tan \psi = \left(1 - \frac{\rho}{\sin^2 \psi} \right) \tan \psi = \left(\frac{1 - \cos^2 \psi}{\sin^2 \psi} - \frac{1 - q \cos \psi}{\sin^2 \psi} \right) \frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{q - \cos \psi}{\sin \psi}$$

Sustituyendo este resultado en la expresión anterior multiplicada por $(\sin \psi)$

$$\begin{aligned}
2 a e \sin \psi \sin E_0 &= \Delta r \cos \psi + \Sigma r (q - \cos \psi) = \Sigma r q + (\Delta r - \Sigma r) \cos \psi = \\
&= \Sigma r r_C / a_F - 2 r_0 \cos \psi = 2 (r_C - r_0 \cos \psi)
\end{aligned}$$

Finalmente, usando esta igualdad en la expresión inicial de V_{rj} para $j = 0$

$$V_{r0} = V_\rho \left(\frac{r_C}{r_0} - \cos \psi \right)$$

Si se hace un desarrollo análogo para $j = 1$ (usando $E_0 = E_1 - 2\psi$), se llega al mismo resultado con signo opuesto

$$V_{r1} = V_\rho \left(\cos \psi - \frac{r_C}{r_1} \right)$$

Definiendo para simplificar las variables k_{Cj} y w_{Cj} , las dos expresiones anteriores se pueden unificar en la siguiente

$$V_{rj} = V_\rho w_{Cj} ; \quad w_{Cj} = (-1)^j (k_{Cj} - \cos \psi) ; \quad k_{Cj} = \frac{r_C}{r_j} \quad (2.4.8)$$

Para calcular las anomalías se utiliza la función $\text{atan2}(x,y)$ definida como el arco, entre 0 y 2π , cuya tangente es y/x teniendo en cuenta el signo de ambos argumentos.

Las anomalías verdaderas inicial y final, se pueden obtener a partir de las expresiones conocidas de las cónicas para las velocidades radial y tangencial siguientes

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \nu_j$$

$$V_\nu = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \nu) \Rightarrow \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \cos \nu = V_\nu - \sqrt{\frac{\mu}{p}} = V_\nu - \frac{\zeta}{p}$$

de modo que

$$\nu = \text{atan2}\left(\sqrt{\frac{\mu}{p}} e \cos \nu, \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \nu_j\right) = \text{atan2}\left(V_\nu - \frac{\zeta}{p}, V_r\right) \quad (2.4.9)$$

y en particular para el punto inicial ($j = 0$) y final ($j = 1$)

$$\nu_j = \text{atan2}\left(V_{\nu j} - \frac{\zeta}{p}, V_{rj}\right) + n_j 2\pi \quad (2.4.10)$$

donde n_j son dos enteros, uno arbitrario y el otro elegido de modo que

$$\nu_1 - \nu_0 = \Delta \nu \quad (2.4.11)$$

Sin embargo, es más práctico calcular sólo uno de ellos con la expresión anterior y el otro a partir de la diferencia conocida

$$\nu_0 = \text{atan2}\left(V_{\nu 0} - \frac{\zeta}{p}, V_{r0}\right) + n_0 2\pi \quad ; \quad \nu_1 = \nu_0 + \Delta \nu \quad (2.4.12)$$

También es posible calcular ν_j sin tener que calcular las velocidades, sabiendo que

$$V_\nu - \frac{\zeta}{p} = \zeta \left(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{p} \right) = V_\rho r_s \left(\frac{1}{r_j} - \frac{a_\rho}{r_s^2} \right) = V_\rho \left(\frac{r_s}{r_j} - \frac{a_\rho}{r_s} \right) = V_\rho \left(k_{sj} - \frac{a_\rho}{r_s} \right)$$

y definiendo las variables intermedias

$$k_\rho = \frac{a_\rho}{r_s} \quad ; \quad w_{sj} = k_{sj} - k_\rho \quad (2.4.13)$$

resulta, extrayendo el factor (V_ρ), la siguiente expresión alternativa

$$\begin{aligned} \nu_j &= \text{atan2}(w_{sj}, w_{cj}) + n_j 2\pi \quad ; \quad \nu_1 - \nu_0 = \Delta \nu \quad \text{ó} \\ \nu_0 &= \text{atan2}(w_{s0}, w_{c0}) + n_0 2\pi \quad ; \quad \nu_1 = \nu_0 + \Delta \nu \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

2.5 FUNCIÓN ELEMENTAL DOBLE DEPENDIENTE

Se ha llamado *Ecuación Elemental Doble Dependiente* a la *Ecuación Temporal*, en función de las dos variables independientes, ψ y ϕ ó Ψ y Φ , llamadas *Variables Elementales*, cuyas expresiones obtenidas en [\(2.1.50\)](#) y [\(2.1.51\)](#), se repiten a continuación.

Ecuación para el caso elíptico

$$\begin{aligned}\tau &= \alpha(\psi, \phi, N) \quad ; \quad \alpha(\psi, \phi, N) \equiv \tau_N(\psi, \phi) = \tau_0(\psi, \phi) + N \tau_1(\psi, \phi) \quad ; \\ \tau_N(\psi, \phi) &= \alpha^{3/2} \varpi_N \quad ; \quad \tau_1(\psi, \phi) = \pi \alpha^{3/2} \quad ; \quad \alpha = 1 / \alpha_1 \quad ; \\ \varpi_N &= \psi_N - \cos \phi \sin \psi \quad ; \quad \psi_N = \psi + N \pi \quad ; \quad \alpha_1 = 1 - \cos \phi \cos \psi\end{aligned}\quad (2.5.1)$$

Ecuación para el caso hiperbólico ($\phi = -i \Phi$, $\psi = -i \Psi$, $\varpi = i \varpi_H$, $\alpha = -\alpha_H$, y $\alpha_1 = -\alpha_{1H}$)

$$\begin{aligned}\tau &= \alpha(\Psi, \Phi) \quad ; \\ \alpha(\Psi, \Phi) &= \alpha_H^{3/2} \varpi_H \quad ; \quad \alpha_H = 1 / \alpha_{1H} \quad ; \\ \varpi_H &= \cosh \Phi \sinh \Psi - \Phi \quad ; \quad \alpha_{1H} = \cosh \Phi \cosh \Psi - 1\end{aligned}\quad (2.5.2)$$

Esta *Función Temporal* es la más simple de todas las obtenidas, pero depende de dos variables incógnita a determinar, y por tanto, para resolver la *Ecuación Elemental Doble Dependiente*, hace falta otra ecuación adicional, como puede ser cualquiera de las expresiones trigonométricas que las relaciona con el ángulo f que define la geometría del problema, por ejemplo, la elegida en [\(2.1.52\)](#)

$$\cos f = \frac{\cos \psi - \cos \xi}{1 - \cos \xi \cos \psi} = \frac{\cosh \Xi - \cosh \Psi}{\cosh \Xi \cosh \Psi - 1} \quad (2.5.3)$$

Se ha comenzado por el estudio de la *Ecuación Elemental Doble Dependiente* debido a que destaca particularmente por su simplicidad, aunque se vea penalizada con la necesidad de otra ecuación, debido a la existencia de dos variables independientes. Aún así, puede ser útil en numerosas ocasiones, sobre todo si sólo se requiere la primera o, como mucho, la segunda derivada de la *Función Temporal*.

2.5.1 CÁLCULO DE DERIVADAS

Las variables independientes en este apartado, para la *Función Elemental Doble Dependiente*, están sin duda identificadas, siendo (ψ, ϕ) para el caso elíptico y (Ψ, Φ) para el hiperbólico. Por ello, para evitar sobrecarga en la notación, se usarán mayoritariamente las variables dependientes en lugar de sus funciones asociadas. Por ejemplo, se usará α en lugar de $\alpha(\psi, \phi)$ o α , pues se sabe que es así por contexto.

Para simplificar también notación, las expresiones trigonométricas de las *Variables Elementales* se denotan de la siguiente forma simplificada

$$\begin{aligned} C_\phi &= \cos \phi ; S_\phi = \sin \phi ; C_\psi = \cos \psi ; S_\psi = \sin \psi ; C_f = \cos f ; S_f = \sin f ; \\ C_\Phi &= \cosh \Phi ; S_\Phi = \sinh \Phi ; C_\Psi = \cosh \Psi ; S_\Psi = \sinh \Psi \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Teniendo en cuenta esta notación simplificada, la evaluación de τ y τ_T , de (2.5.1), para el caso elíptico es

$$\begin{aligned} \psi_N &= \psi + N \pi ; \varpi_N = \psi_N - C_\phi S_\psi ; \alpha_1 = 1 - C_\phi C_\psi ; \alpha = 1 / \alpha_1 ; \\ \tau &= \alpha^{3/2} \varpi_N ; \tau_T = \pi \alpha^{3/2} \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

y la evaluación de τ , de (2.5.2), para el caso hiperbólico

$$\begin{aligned} \varpi_H &= C_\phi S_\Psi - \Phi ; \alpha_H = C_\phi C_\Psi - 1 ; \alpha_H = 1 / \alpha_{1H} ; \\ \tau &= \alpha_H^{3/2} \varpi_H \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Para proceder como en el caso general de una ecuación con una única incógnita, se decide elegir una de las dos variables de la ecuación como independiente y sustituir la otra dependiendo de la primera, obteniendo así todas las derivadas respecto a la variable independiente elegida. En el caso elíptico, la variable ψ es un ángulo que aparece directamente en la *Función Temporal*, además de estar en expresiones trigonométricas, mientras que la variable ϕ es un ángulo que sólo aparece en expresiones trigonométricas. Por ello, y para evitar complicación innecesaria en el cálculo derivadas, se elige ψ como variable independiente y ϕ como variable dependiente de ψ a través de una de las expresiones trigonométricas (2.1.39) que relacionan los dos ángulos, ϕ y ψ , con el geométrico f . El mismo razonamiento aplica a las variables hiperbólicas Φ y Ψ , siendo en este caso Ψ la variable independiente elegida y Φ la dependiente, relacionadas con las expresiones (2.1.40).

De este modo, una vez calculadas las funciones trigonométricas C_ψ y S_ψ , ó las hiperbólicas C_Ψ y S_Ψ , de la variable incógnita independiente, se calculan las correspondientes a la variable incógnita dependiente, ϕ ó Φ a partir de las siguientes expresiones, que deben añadirse a la evaluación de la *Función Temporal*.

Caso elíptico

$$\rho = 1 - C_f C_\psi ; S_\phi = S_f S_\psi / \rho ; C_\phi = (C_\psi - C_f) / \rho \quad (2.5.7)$$

Caso hiperbólico

$$\rho = 1 - C_f C_\Psi ; S_\Phi = S_f S_\Psi / \rho ; C_\Phi = (C_\Psi - C_f) / \rho \quad (2.5.8)$$

donde S_f y C_f son datos geométricos conocidos del problema, calculados previamente.

Nótese que con sólo 6 operaciones se calculan las funciones seno y coseno de la variable incógnita dependiente, sin necesidad de recurrir a la evaluación directa, y más importante aún, sin necesidad de conocer ϕ ó Φ (esta es la razón de haber elegido ψ ó Ψ como variable incógnita independiente).

Debido a que las variables α_I y α_{IH} son nulas en las soluciones parabólicas, su cálculo mediante las expresiones

$$\alpha_I = 1 - C_\phi C_\psi \quad ; \quad \alpha_{IH} = C_\phi C_\psi - 1 \quad (2.5.9)$$

son un claro ejemplo de operaciones mal condicionadas computacionalmente debido a la diferencia de valores muy próximos entre sí que provoca una pérdida de precisión, mayor cuanto más próximos. Sin embargo, en este caso, se puede evitar fácilmente despejando dichas variables en las expresiones de dependencia de S_f en función de las *Variables Elementales*, obteniendo las siguientes expresiones alternativas

$$\alpha_I = S_\psi S_\phi / S_f \quad ; \quad \alpha_{IH} = S_\psi S_\phi / S_f \quad (2.5.10)$$

y teniendo en cuenta el cálculo anterior de S_ϕ ó S_ϕ en función de ρ , se puede simplificar para el caso elíptico

$$\sigma = S_\psi / \rho \quad ; \quad S_\phi = \sigma S_f \quad ; \quad \alpha_I = \sigma S_\psi \quad (2.5.11)$$

y el hiperbólico

$$\sigma_H = S_\psi / \rho \quad ; \quad S_\phi = \sigma_H S_f \quad ; \quad \alpha_{IH} = \sigma S_\psi \quad (2.5.12)$$

siendo σ y σ_H variables auxiliares definidas para ahorrar una operación en dichos cálculos, y en los siguientes donde se tenga la oportunidad de usar.

En los cálculos posteriores, con objeto de simplificar notación, las derivadas respecto a la variable incógnita independiente ψ ó Ψ se denotan abreviadamente, para cualquier variable z , como $z^{(m)} \equiv d^m z / d\psi^m$ ó $z^{(m)} \equiv d^m z / d\Psi^m$, según el caso elíptico ó hiperbólico, respectivamente. Con esta notación, la primera derivada calculada mediante derivación parcial, teniendo en cuenta que ϕ es dependiente de ψ , ó Φ de Ψ , es

$$z^{(1)} = \partial z / \partial \phi \phi^{(1)} + \partial z / \partial \psi \quad \text{ó} \quad z^{(1)} = \partial z / \partial \Phi \Phi^{(1)} + \partial z / \partial \Psi \quad (2.5.13)$$

En principio la existencia de dos variables incógnita complica excesivamente el cálculo de derivadas, pero en este caso, se simplifica sustancialmente debido a la simplicidad de la derivada $\phi^{(1)}$ ó $\Phi^{(1)}$, como se muestra a continuación.

Para el caso elíptico, usando la expresión de $\tan f$ en función de las incógnitas y diferenciando

$$\tan f(C_\psi - C_\phi) = S_\phi S_\psi$$

$$\tan f(-S_\psi d\psi + S_\phi d\phi) = C_\phi S_\psi d\phi + S_\phi C_\psi d\psi$$

$$S_\phi S_\psi (-S_\psi d\psi + S_\phi d\phi) = (C_\psi - C_\phi) (C_\phi S_\psi d\phi + S_\phi C_\psi d\psi)$$

Agrupando términos, de modo que $D_\phi d\phi = D_\psi d\psi$, se obtiene

$$D_\phi = C_\phi^2 S_\psi + S_\phi^2 S_\psi - C_\psi C_\phi S_\psi = S_\psi (1 - C_\psi C_\phi)$$

$$D_\psi = S_\phi S_\psi^2 + C_\psi^2 S_\phi - C_\phi S_\phi C_\psi = S_\phi (1 - C_\phi C_\psi)$$

y eliminando el factor común, resulta la relación sorprendentemente simple siguiente

$$S_\psi d\phi = S_\psi d\psi \quad ; \quad d\phi / d\psi = \phi^1 = S_\phi / S_\psi \quad (2.5.14)$$

y para el caso hiperbólico, se obtiene de forma análoga

$$S_\psi d\Phi = S_\phi d\Psi \quad ; \quad d\Phi / d\Psi = \Phi^1 = S_\phi / S_\psi \quad (2.5.15)$$

Nótese que se cumple $\phi^1 = \Phi^1$.

La derivada ϕ^2 se puede obtener derivando logarítmicamente la igualdad de ϕ^1

$$\begin{aligned} \phi^2 / \phi^1 &= C_\phi / S_\phi \phi^1 - C_\psi / S_\psi = (C_\phi - C_\psi) / S_\psi \\ \phi^2 &= \phi^1 (C_\phi - C_\psi) / S_\psi = (C_\phi - C_\psi) S_\phi / S_\psi^2 \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

Y para el caso hiperbólico

$$\Phi^2 = \Phi^1 (C_\psi - C_\phi) / S_\psi = (C_\psi - C_\phi) S_\phi / S_\psi^2 \quad (2.5.17)$$

Usando la derivada primera de la incógnita dependiente (ϕ ó Φ), es relativamente fácil obtener las derivadas de la *Función Temporal* respecto a la incógnita principal (ψ ó Ψ).

A continuación se desarrollan los cálculos para el caso elíptico y después se aprovechan los resultados para obtener el caso hiperbólico.

2.5.1.1 CASO ELÍPTICO

En lugar de la derivada $\alpha_1^{(1)}$, resulta más práctico obtener $(\alpha_1^{(1)} / \alpha_1)$, que se consigue simplemente derivando logarítmicamente la relación trigonométrica $S_f \alpha_1 = S_\psi S_\phi$

$$(\alpha_1^{(1)} / \alpha_1) = (S_\phi S_\psi)^{(1)} / (S_\phi S_\psi) = (C_\phi S_\psi \phi^1 + S_\phi C_\psi) / (S_\phi S_\psi) = (C_\phi S_\phi + S_\phi C_\psi) / (S_\phi S_\psi)$$

$$(\alpha_1^{(1)} / \alpha_1) = (C_\phi + C_\psi) / S_\psi$$

$$\alpha_1^{(1)} = \alpha_1 (\alpha_1^{(1)} / \alpha_1)$$

En lugar de la derivada segunda $\alpha_1^{(2)}$, resulta más práctico obtener

$$(\alpha_1^{(1)} / \alpha_1)^{(1)} = (\alpha_1^{(2)} / \alpha_1) - (\alpha_1^{(1)} / \alpha_1)^2$$

Y si se quiere después

$$(\alpha_1^{(2)}/\alpha_1) = (\alpha_1^{(1)}/\alpha_1)^{(1)} + (\alpha_1^{(1)}/\alpha_1)^2 \quad ; \quad \alpha_1^{(2)} = \alpha_1 (\alpha_1^{(2)}/\alpha_1)$$

Este término $(\alpha_1^{(1)}/\alpha_1)^{(1)}$ se obtiene fácilmente derivando la expresión de $(\alpha_1^{(1)}/\alpha_1)$ multiplicada por S_ψ , y despejando después dicho termino

$$S_\psi (\alpha_1^{(1)}/\alpha_1) = (C_\phi + C_\psi)$$

$$C_\psi (\alpha_1^{(1)}/\alpha_1) + S_\psi (\alpha_1^{(1)}/\alpha_1)^{(1)} = - (S_\phi \phi^{(1)} + S_\psi) = -((\phi^{(1)})^2 + 1) S_\psi$$

$$(\alpha_1^{(1)}/\alpha_1)^{(1)} = -(1 + (\phi^{(1)})^2 + (\alpha_1^{(1)}/\alpha_1) C_\psi / S_\psi)$$

Si se quiere calcular el término $(\alpha_1^{(2)}/\alpha_1)$ directamente

$$(\alpha_1^{(2)}/\alpha_1) = (\alpha_1^{(1)}/\alpha_1)^{(1)} + (\alpha_1^{(1)}/\alpha_1)^2 = -(1 + (\phi^{(1)})^2 + (\alpha_1^{(1)}/\alpha_1) (C_\psi / S_\psi - (\alpha_1^{(1)}/\alpha_1)))$$

$$(\alpha_1^{(2)}/\alpha_1) = -(1 + (\phi^{(1)})^2 - (\alpha_1^{(1)}/\alpha_1) C_\phi / S_\psi)$$

La derivada $\varpi_N^{(1)}$ se obtiene derivando directamente ϖ_N

$$\varpi_N^{(1)} = \partial \varpi_N / \partial \phi \phi^{(1)} + \partial \varpi_N / \partial \psi = S_\phi S_\psi (S_\phi / S_\psi) + \alpha_1$$

$$\varpi_N^{(1)} = S_\phi^2 + \alpha_1$$

Y la derivada $\varpi_N^{(2)}$, también derivando directamente $\varpi_N^{(1)}$

$$\varpi_N^{(2)} = 2 S_\phi C_\phi \phi^{(1)} + \alpha_1^{(1)}$$

Derivando logarítmicamente la *Función Temporal*, se obtiene

$$(\tau^{(1)}/\tau) = (\varpi_N^{(1)}/\varpi_N) - 3/2 (\alpha_1^{(1)}/\alpha_1)$$

Y volviendo a derivar esta expresión y despejando $(\tau^{(2)}/\tau)$

$$(\varpi_N^{(1)}/\varpi_N)^{(1)} = (\varpi_N^{(2)}/\varpi_N) - (\varpi_N^{(1)}/\varpi_N)^2$$

$$(\tau^{(1)}/\tau)^{(1)} = (\varpi_N^{(1)}/\varpi_N)^{(1)} - 3/2 (\alpha_1^{(1)}/\alpha_1)^{(1)}$$

$$(\tau^{(2)}/\tau) = (\tau^{(1)}/\tau)^2 + (\tau^{(1)}/\tau)^{(1)}$$

En los cálculos de las derivadas no se usa la variable α (se usa α_1 en su lugar) y, del mismo modo, se puede calcular la *Función Temporal* en función de α_1 , en lugar de α , como sigue

$$\tau = \alpha^{3/2} \varpi_N = \alpha^{1/2} \alpha \varpi_N = \varpi_N / (\alpha_1 \alpha_1^{1/2})$$

donde se ha evitado el cálculo de una potencia de exponente (3/2) usando una raíz cuadrada, menos costosa.

A continuación se resumen todos los resultados anteriores para calcular la *Función Temporal* y sus derivadas primera y segunda, para el caso elíptico.

- Cálculos para τ

Evaluación de C_ψ y S_ψ

$$\rho = 1 - C_f C_\psi \quad ; \quad C_\phi = (C_\psi - C_f) / \rho$$

$$\psi_N = \psi + N \pi \quad ; \quad \varpi_N = \psi_N - C_\phi S_\psi$$

$$\sigma = S_\psi / \rho \quad ; \quad \alpha_1 = \sigma S_\psi$$

$$\alpha_1^{3/2} = \alpha_1^{1/2} \alpha_1$$

$$\tau = \varpi_N / \alpha_1^{3/2}$$

- Cálculos adicionales para τ^1

$$S_\phi = \sigma S_f$$

$$\varpi_N^{(1)} = S_\phi^2 + \alpha_1$$

$$(\alpha_1^{(1)} / \alpha_1) = (C_\phi + C_\psi) / S_\psi$$

$$(\tau^1 / \tau) = (\varpi_N^{(1)} / \varpi_N) - 3/2 (\alpha_1^{(1)} / \alpha_1)$$

$$\tau^1 = \tau (\tau^1 / \tau)$$

- Cálculos adicionales para τ^2

$$\phi^1 = S_\phi / S_\psi$$

$$\alpha_1^{(1)} = \alpha_1 (\alpha_1^{(1)} / \alpha_1)$$

$$\varpi_N^{(2)} = 2 S_\phi C_\phi \phi^1 + \alpha_1^{(1)}$$

$$(\varpi_N^{(1)} / \varpi_N)^{(1)} = (\varpi_N^{(2)} / \varpi_N) - (\varpi_N^{(1)} / \varpi_N)^2$$

$$(\alpha_1^{(1)} / \alpha_1)^{(1)} = -(1 + (\phi^1)^2 + (\alpha_1^{(1)} / \alpha_1) C_\psi / S_\psi)$$

$$(\tau^1 / \tau)^{(1)} = (\varpi_N^{(1)} / \varpi_N)^{(1)} - 3/2 (\alpha_1^{(1)} / \alpha_1)^{(1)}$$

$$(\tau^2 / \tau) = (\tau^1 / \tau)^2 + (\tau^1 / \tau)^{(1)}$$

$$\tau^2 = \tau (\tau^2 / \tau)$$

- Aunque no es necesario para la evaluación de τ^2 , también se puede obtener la derivada $\alpha_1^{(2)}$ si se requiere

$$(\alpha_1^{(2)}/\alpha_1) = (\alpha_1^{(1)}/\alpha_1)^{(1)} + (\alpha_1^{(1)}/\alpha_1)^2 \quad \text{o} \quad (\alpha_1^{(2)}/\alpha_1) = -(1 + (\phi^{(1)})^2 - (\alpha_1^{(1)}/\alpha_1) C_\phi / S_\psi)$$

$$\alpha_1^{(2)} = \alpha_1 (\alpha_1^{(2)}/\alpha_1)$$

Los resultados de la *Función Temporal* τ , se pueden aprovechar para la *Función de Periodo Orbital*, pues no es más que el factor multiplicado por el parámetro N (como si fuese $\varpi_N = \pi$, constante).

- Cálculos adicionales para τ_T

$$\tau_T = \pi / \alpha_1^{3/2}$$

- Cálculos adicionales para $\tau_T^{(1)}$

$$(\tau_T^{(1)}/\tau_T) = -3/2 (\alpha_1^{(1)}/\alpha_1)$$

$$\tau_T^{(1)} = \tau_T (\tau_T^{(1)}/\tau_T)$$

- Cálculos adicionales para $\tau_T^{(2)}$

$$(\tau_T^{(2)}/\tau_T) = (\tau_T^{(1)}/\tau_T)^2 - 3/2 (\alpha_1^{(1)}/\alpha_1)^{(1)}$$

$$\tau_T^{(2)} = \tau_T (\tau_T^{(2)}/\tau_T)$$

En algunas situaciones puede ser más conveniente iterar sobre la función (τ^n) en lugar de τ . En dicho caso, todos los cálculos son idénticos excepto los siguientes:

- Cálculos diferentes para (τ^n) , sin necesidad de calcular τ

$$(\tau^n) = (\varpi_N / \alpha_1)^n / \alpha_1^{n/2}$$

- Cálculos diferentes para $(\tau^n)^{(1)}$, sin necesidad de calcular $\tau^{(1)}$

$$((\tau^n)^{(1)}/(\tau^n)) = n (\tau^{(1)}/\tau)$$

$$(\tau^n)^{(1)} = (\tau^n) ((\tau^n)^{(1)}/(\tau^n))$$

- Cálculos diferentes para $(\tau^n)^{(2)}$, sin necesidad de calcular $(\tau^{(2)}/\tau)$, ni $\tau^{(2)}$

$$((\tau^n)^{(1)}/(\tau^n))^{(1)} = n (\tau^{(1)}/\tau)^{(1)}$$

$$((\tau^n)^{(2)}/(\tau^n)) = ((\tau^n)^{(1)}/(\tau^n))^2 + ((\tau^n)^{(1)}/(\tau^n))^{(1)}$$

$$(\tau^n)^{(2)} = (\tau^n) ((\tau^n)^{(2)}/(\tau^n))$$

Por ejemplo, en los casos donde τ tenga un valor elevado, α_1 debe tener un valor bajo, y en consecuencia las derivadas también tienen un valor muy elevado. En dicho caso, puede ser más conveniente iterar sobre la función $(1/\tau)$ en lugar de τ , es decir, con un valor de $n = -1$ en el desarrollo anterior.

Alternativamente, como ya se ha mencionado en apartados anteriores, también se puede resolver la ecuación usando τ^2 , en lugar de τ , con el objetivo de evitar el cálculo de $\alpha^{1/2}$ (o $\alpha_1^{1/2}$), es decir, con un valor de $n = 2$.

Sumando ambos criterios (valor alto de τ , y evitar la raíz cuadrada), también puede ser interesante usar el valor de $n = -2$.

Una vez hechos los cálculos para el caso elíptico, y antes de hacer una valoración de los resultados, se realiza a continuación el desarrollo análogo para el caso hiperbólico.

2.5.1.2 CASO HIPERBÓLICO

A partir del desarrollo del caso elíptico, teniendo en cuenta la relación entre las variables ($\phi = -i \Phi$, $\psi = -i \Psi$, $\varpi = i \varpi_H$, $\alpha = -\alpha_H$, y $\alpha_1 = -\alpha_{1H}$), se pueden deducir directamente los resultados para el caso hiperbólico, indicados a continuación.

- Cálculos para τ

Evaluación de C_ψ y S_ψ

$$\rho = 1 - C_f C_\psi \quad ; \quad C_\phi = (C_\psi - C_f) / \rho$$

$$\varpi_H = C_\phi S_\psi - \Phi$$

$$\sigma_H = S_\psi / \rho \quad ; \quad \alpha_{1H} = \sigma_H S_\psi$$

$$\alpha_{1H}^{3/2} = \alpha_{1H}^{1/2} \alpha_{1H}$$

$$\tau = \varpi_H / \alpha_{1H}^{3/2}$$

- Cálculos adicionales para $\tau^{(1)}$

$$S_\phi = \sigma_H S_f$$

$$\varpi_H^{(1)} = S_\phi^2 + \alpha_{1H}$$

$$(\alpha_{1H}^{(1)} / \alpha_{1H}) = (C_\phi + C_\psi) / S_\psi$$

$$(\tau^{(1)} / \tau) = (\varpi_H^{(1)} / \varpi_H) - 3/2 (\alpha_{1H}^{(1)} / \alpha_{1H})$$

$$\tau^{(1)} = \tau (\tau^{(1)} / \tau)$$

- Cálculos adicionales para $\tau^{(2)}$

$$\Phi^{(1)} = S_\phi / S_\psi$$

$$\alpha_{1H}^{(1)} = \alpha_{1H} (\alpha_{1H}^{(1)} / \alpha_{1H})$$

$$\varpi_H^{(2)} = 2 S_\phi C_\phi \Phi^{(1)} + \alpha_{IH}^{(1)}$$

$$(\varpi_H^{(1)}/\varpi_H)^{(1)} = (\varpi_H^{(2)}/\varpi_H) - (\varpi_H^{(1)}/\varpi_H)^2$$

$$(\alpha_{IH}^{(1)}/\alpha_{IH})^{(1)} = -(1 + (\Phi^{(1)})^2 + (\alpha_{IH}^{(1)}/\alpha_{IH}) C_\psi / S_\psi)$$

$$(\tau^{(1)}/\tau)^{(1)} = (\varpi_H^{(1)}/\varpi_H)^{(1)} - 3/2 (\alpha_{IH}^{(1)}/\alpha_{IH})^{(1)}$$

$$(\tau^{(2)}/\tau) = (\tau^{(1)}/\tau)^2 + (\tau^{(1)}/\tau)^{(1)}$$

$$\tau^{(2)} = \tau (\tau^{(2)}/\tau)$$

- Aunque no es necesario para la evaluación de $\tau^{(2)}$, también se puede obtener la derivada $\alpha_{IH}^{(2)}$ si se requiere

$$(\alpha_{IH}^{(2)}/\alpha_{IH}) = (\alpha_{IH}^{(1)}/\alpha_{IH})^{(1)} + (\alpha_{IH}^{(1)}/\alpha_{IH})^2 \quad \text{o}$$

$$(\alpha_{IH}^{(2)}/\alpha_{IH}) = -(1 + (\Phi^{(1)})^2 - (\alpha_{IH}^{(1)}/\alpha_{IH}) C_\phi / S_\psi)$$

$$\alpha_{IH}^{(2)} = \alpha_{IH} (\alpha_{IH}^{(2)}/\alpha_{IH})$$

Por la misma razón que en el caso elíptico, puede ser más conveniente iterar sobre la función τ^n en lugar de τ . En dicho caso, todos los cálculos adicionales son idénticos que el caso elíptico excepto los siguientes:

- Cálculos diferentes para τ^n , sin necesidad de calcular τ

$$\tau^n = (\varpi_H / \alpha_{IH})^n / \alpha_{IH}^{n/2}$$

En conclusión, se han desarrollado algoritmos para calcular la *Función Elemental Doble Dependiente* y sus dos primeras derivadas para los casos elíptico e hiperbólico. También se ha indicado como usar de forma alternativa, cuando se estime conveniente, la función τ^n en lugar de τ . La rapidez de convergencia de los métodos iterativos usados para obtener la solución del problema depende del valor de n elegido, sobre todo en las cercanías de las soluciones parabólicas. En la práctica, es conveniente usar las funciones inversas (n negativo) cuando el valor de la función τ es elevado. El uso de las funciones elevadas al cuadrado, y en general n par, tan sólo suelen aportar la pequeña ayuda de evitar el cálculo de una raíz cuadrada, aunque algunas veces puede ser ventajoso el uso de dichos valores para acelerar la convergencia.

2.5.2 FUNCIÓN FUNDAMENTAL DOBLE DEPENDIENTE

Cuando la solución es elíptica y está cerca de la *Elipse Fundamental* ($\psi = f$, $\phi = \pi/2$), se produce un mal condicionamiento computacional con la correspondiente pérdida de precisión, debido a que algunas operaciones son diferencias con valores muy próximos entre sí. En la práctica, esta perjudicial situación comienza a notarse cuando la diferencia entre ψ y f es menor de $\pi/6$, empezando de forma ligera pero agravándose

rápida mente según se acerca al valor $\psi = f$. Para poder evitar esta limitación, se realiza el siguiente cambio de variable

$$\psi = f + \psi_F \quad ; \quad -f \leq \psi_f \leq \pi - f \quad ; \quad \text{Recomendable para } |\psi_f| < \pi/6 \quad (2.5.18)$$

Usando la misma notación para las expresiones trigonométricas (seno y coseno) usadas anteriormente para los ángulos (f, ϕ, ψ) , las expresiones trigonométricas de ψ se pueden calcular del siguiente modo

$$C_\psi = C_f C_{\psi_F} - S_f S_{\psi_F} \quad ; \quad S_\psi = C_f S_{\psi_F} + S_f C_{\psi_F} \quad (2.5.19)$$

El resto de variables se pueden calcular del mismo modo que en la *Función Elemental Doble Dependiente*, pero usando las expresiones trigonométricas de ψ anteriores en función de ψ_F , en lugar de las evaluaciones directas.

El cálculo de S_ϕ también se puede calcular del mismo modo en la *Función Elemental Doble Dependiente*, sin embargo, en el cálculo de C_ϕ , existe una operación $(C_\psi - C_f)$ mal condicionada, llamada D en los cálculos posteriores, que puede evitarse como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} D &= C_f - C_\psi = C_f - C_f C_{\psi_F} + S_f S_{\psi_F} = C_f(1 - C_{\psi_F}) + S_f S_{\psi_F} \\ D &= C_f S_{\psi_F}^2 / (1 + C_{\psi_F}) + S_f S_{\psi_F} = S_{\psi_F} (C_f S_{\psi_F} / (1 + C_{\psi_F}) + S_f) \end{aligned} \quad (2.5.20)$$

También se puede mejorar la precisión de ρ , sobre todo cuando el ángulo f es pequeño, con el siguiente desarrollo equivalente.

$$\rho = 1 - C_f C_\psi = 1 - C_f^2 + C_f^2 - C_f C_\psi = S_f^2 + C_f (C_f - C_\psi) = S_f^2 + C_f D \quad (2.5.21)$$

En consecuencia, la *Función Elemental Doble Dependiente* se transforma en la siguiente

$$\begin{aligned} \tau &= \tau(\psi_F, \phi, N) \quad ; \quad \tau(\psi_F, \phi, N) \equiv \tau_N(\psi_F, \phi) = \tau_F(\psi_F, \phi) + N \tau_T(\psi_F, \phi) \\ \tau_N(\psi_F, \phi) &= \alpha^{3/2} \varpi_N \quad ; \quad \tau_F(\psi_F, \phi) = \alpha^{3/2} \psi_N \quad ; \quad \tau_T(\psi_F, \phi) = \pi \alpha^{3/2} \end{aligned}$$

donde ψ_F es la variable incógnita elegida, definida como $(\psi - f)$, $\tau(\psi_F, \phi, N)$ es la *Función Temporal*, llamada también *Función Fundamental Doble Dependiente*, sobrecargada en función de ψ_F y ϕ , $\tau_T(\psi_F, \phi)$ es la *Función de Periodo Orbital*, también sobrecargada, y $\tau_F(\psi_F, \phi)$ es una función que devuelve el exceso de tiempo respecto a la solución correspondiente a la *Elipse Fundamental*.

Las derivadas de τ respecto a ψ_F son las mismas que las derivadas respecto a ψ , por tanto, se pueden usar los mismos resultados obtenidos para la *Función Elemental Doble Dependiente*, excepto los indicados a continuación para la función τ .

- Cálculos diferentes para τ

Evaluación de C_{ψ_F} y S_{ψ_F}

$$\psi = f + \psi_F \quad ; \quad S_{\psi} = C_f S_{\psi_F} + S_f C_{\psi_F}$$

$$D = S_{\psi_F} (C_f S_{\psi_F} / (1 + C_{\psi_F}) + S_f) \quad ; \quad C_{\psi} = C_f - D$$

$$\rho = S_f^2 + C_f D \quad ; \quad C_{\phi} = -D / \rho$$

El resto de cálculos son idénticos a los realizados para la *Función Elemental Doble Dependiente*, incluidas las consideraciones acerca de la función τ^n , cuyo cálculo es totalmente análogo y no se considera necesario repetirlo.

Es evidente que el uso de la *Función Fundamental* anterior sólo tiene ventajas, respecto al desarrollo del caso general usando la *Función Elemental*, cuando la solución está cerca de la *Elipse Fundamental*.

2.5.3 FUNCIÓN ESENCIAL DOBLE DEPENDIENTE

Cuando la solución es elíptica, y está cerca de la *Elipse Esencial* ($\psi = \pi/2$), se puede aumentar la precisión de los cálculos realizando un cambio de la variable ψ para situar el origen en torno a $\pi/2$. En la práctica, este cambio resulta ventajoso alrededor de $\pi/2$, aproximadamente en el intervalo $[\pi/3, 2\pi/3]$.

Siguiendo estas indicaciones, se define ψ_E como nueva variable incógnita independiente con origen en la *Elipse Esencial* cumpliendo

$$\psi = \pi/2 + \psi_E \quad ; \quad |\psi_E| \leq \pi/2 \quad ; \quad \text{Recomendable para } |\psi_E| < \pi/6 \quad (2.5.22)$$

Usando la misma notación para las expresiones trigonométricas (seno y coseno) usadas anteriormente para los ángulos (f, ϕ, ψ), las expresiones trigonométricas de ψ se pueden calcular del siguiente modo

$$C_{\psi} = -S_{\psi_E} \quad ; \quad S_{\psi} = C_{\psi_E} \quad (2.5.23)$$

El resto de variables se pueden calcular del mismo modo que en la *Función Elemental Doble Dependiente*, pero usando las expresiones trigonométricas de ψ anteriores en función de ψ_E , en lugar de las evaluaciones directas.

En consecuencia la *Función Elemental Doble Dependiente* se transforman en la siguiente

$$\tau = \tau(\psi_E, \phi, N) \quad ; \quad \tau(\psi_E, \phi, N) \equiv \tau_N(\psi_E, \phi) = \tau_E(\psi_E, \phi) + (N+1/2) \tau_T(\psi_E, \phi)$$

$$\tau_N(\psi_E, \phi) = \alpha^{3/2} \varpi_N \quad ; \quad \tau_E(\psi_E, \phi) = \tau_{-1/2}(\psi_E, \phi) = \alpha^{3/2} \psi_E \quad ; \quad \tau_T(\psi_E, \phi) = \pi \alpha^{3/2}$$

donde ψ_E es la variable incógnita elegida, definida como $(\psi - \pi/2)$, $\tau(\psi_E, \phi, N)$ es la *Función Temporal*, llamada también *Función Esencial Doble Dependiente*, sobrecargada en función de ψ_E y ϕ , $\tau_T(\psi_E, \phi)$ es la *Función de Periodo Orbital*, también sobrecargada, y $\tau_E(\psi_E, \phi)$ es una función que devuelve el exceso de tiempo respecto a la solución correspondiente a la *Elipse Esencial*.

Las derivadas de τ respecto a ψ_E son las mismas que las derivadas respecto a ψ , por tanto, se pueden usar los mismos resultados obtenidos para la *Función Elemental Doble Dependiente*, sin más que cambiar las expresiones de ψ en función de ψ_E .

Para calcular la *Función Esencial Doble Dependiente* y sus derivadas, se pueden usar los mismos cálculos de la *Función Elemental Doble Dependiente*, excepto los indicados a continuación para la función τ (el cálculo de τ^1 y τ^2 es exactamente igual):

- Cálculos diferentes para τ

Evaluación de C_{ψ_E} y S_{ψ_E}

$$C_{\psi} = -S_{\psi_E} \quad ; \quad S_{\psi} = C_{\psi_E} \quad ; \quad \psi = \psi_E + \pi/2$$

El resto de cálculos son idénticos a los realizados para la *Función Elemental Doble Dependiente*, incluidas las consideraciones acerca de la función τ^i , cuyo cálculo es totalmente análogo y no se considera necesario repetirlo.

Es evidente que el uso de la *Función Esencial* anterior sólo puede tener ventajas, respecto al caso general usando la *Función Elemental*, cuando la solución está cerca de la *Elipse Esencial*. Sin embargo, cuando la solución también esté cerca de la *Elipse Fundamental*, es preferible usar el desarrollo de la *Función Fundamental* en lugar de la *Función Esencial*, por conducir a resultados de mayor precisión.

2.5.4 FUNCIÓN SUPLEMENTARIA DOBLE DEPENDIENTE

Cuando la solución es elíptica y está cerca de la parabólica de tiempo infinito ($\psi = \pi$), se produce un mal condicionamiento computacional con la correspondiente pérdida de precisión, debido a que algunas operaciones con diferencias se realizan con valores muy próximos entre sí. En la práctica, esta perjudicial situación comienza a notarse por encima de $\psi = \pi/3$, empezando de forma ligera pero agravándose rápidamente según se acerca al valor límite $\psi = \pi$. Como primer paso para poder evitar esta limitación, se realizan los siguientes cambios de variables

$$\begin{aligned} \psi &= \pi - \psi_{\pi} \quad ; \quad 0 \leq \psi_{\pi} \leq \pi \quad ; \quad \text{Recomendable para } \psi_{\pi} < \pi/3 \quad ; \\ \phi &= \pi - \phi_{\pi} \quad ; \quad 0 \leq \phi_{\pi} \leq \pi \quad ; \\ f &= \pi - f_{\pi} \quad ; \quad 0 \leq f_{\pi} \leq \pi \end{aligned} \tag{2.5.24}$$

Nótese que los ángulos $(f_\pi, \phi_\pi, \psi_\pi)$ cumplen las mismas relaciones trigonométricas entre sí que los ángulos (f, ϕ, ψ) .

Usando la misma notación para las expresiones trigonométricas (seno y coseno) usadas anteriormente para los ángulos (f, ϕ, ψ) , las expresiones trigonométricas de ψ se pueden calcular del siguiente modo

$$\begin{aligned} C_\psi &= -C_{\psi_\pi} & ; & & C_\phi &= -C_{\phi_\pi} & ; & & q &= C_f = -C_{f_\pi} = -q_\pi & ; \\ S_\psi &= S_{\psi_\pi} & ; & & S_\phi &= S_{\phi_\pi} & ; & & S_f &= S_{f_\pi} \end{aligned} \quad (2.5.25)$$

Se deduce que cambiando las variables (ψ, ϕ, f) en función de las variables $(\psi_\pi, \phi_\pi, f_\pi)$, las variables ψ_N y ϖ_N cambian sus expresiones del siguiente modo

$$\begin{aligned} \psi_N &= \psi + N \pi = (N+1) \pi - \psi_\pi \\ \varpi_N &= \psi_N - S_\phi S_\psi = \psi + N \pi = (N+1) \pi - (\psi_\pi - C_{\phi_\pi} S_{\psi_\pi}) \end{aligned} \quad (2.5.26)$$

y el cálculo del resto de variables se calculan del mismo modo, sin más que sustituir las funciones trigonométricas de (ψ, ϕ, f) anteriores en función de $(\psi_\pi, \phi_\pi, f_\pi)$.

En consecuencia las funciones usadas en la *Función Elemental Doble Dependiente* se transforman en

$$\begin{aligned} \tau_T(\psi, \phi) &= \tau_T(\psi_\pi, \phi_\pi) & ; \\ \tau_0(\psi, \phi) &= \tau_T(\psi, \phi) - \tau_0(\psi_\pi, \phi_\pi) = \tau_T(\psi_\pi, \phi_\pi) - \tau_0(\psi_\pi, \phi_\pi) & ; \\ \tau_N(\psi, \phi) &= \tau_0(\psi, \phi) + N \tau_T(\psi, \phi) = (N+1) \tau_T(\psi_\pi, \phi_\pi) - \tau_0(\psi_\pi, \phi_\pi) \end{aligned} \quad (2.5.27)$$

resultando la siguiente *Ecuación Temporal*, llamada también *Ecuación Suplementaria Doble Dependiente*.

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_\pi(\psi_\pi, \phi_\pi; N) & ; & & \tau_\pi(\psi_\pi, \phi_\pi; N) &= (N+1) \tau_T(\psi_\pi, \phi_\pi) - \tau_0(\psi_\pi, \phi_\pi) & ; \\ \psi_\pi &= (\pi - \psi) & ; & & \phi_\pi &= (\pi - \phi) \end{aligned} \quad (2.5.28)$$

siendo τ_π la *Función Temporal* asociada a la ecuación, llamada también *Función Suplementaria Doble Dependiente*, esta vez *sobrecargada* en función de ψ_π y ϕ_π .

Nótese que al cambiar f por $(\pi - f_\pi)$, q cambia por $(q = -q_\pi)$ y los valores de q_s y q_c se intercambian.

Las derivadas m -ésimas de la *Función Suplementaria Doble Dependiente* ($\tau_\pi^{(m)}$) respecto a la variable incógnita (ψ_π) se pueden calcular directamente como

$$\tau_\pi^{(m)} = (N+1) \tau_T^{(m)} - \tau_0^{(m)} \quad (2.5.29)$$

donde las derivadas de τ_T y τ_0 , respecto a la variable ψ_π , se calculan de la misma forma que en la *Función Elemental Doble Dependiente*, respecto a la variable ψ .

No obstante, también es posible calcular las derivadas de τ_π directamente, sin necesidad de calcular las derivadas de τ_0 y τ_T por separado. Esto se consigue con un desarrollo similar al caso usual mediante la evaluación de la *Función Elemental Doble Dependiente*, sólo que teniendo en cuenta la nueva dependencia de la variable ϖ_N . A continuación se resumen los cálculos diferentes necesarios para la evaluación de la *Función Suplementaria Doble Dependiente*.

- Cálculos diferentes para τ (en lugar de la evaluación directa de C_ψ y S_ψ)

Evaluación de C_{ψ_π} y S_{ψ_π}

$$C_\psi = -C_{\psi_\pi} \quad ; \quad S_\psi = S_{\psi_\pi} \quad ; \quad \psi = \pi - \psi_\pi \quad (2.5.30)$$

El resto de cálculos son idénticos a los realizados para la *Función Elemental Doble Dependiente* (salvo el signo de τ^1 , por ser $d\psi = -d\psi_\pi$), incluidas las consideraciones acerca de la función τ^j , cuyo cálculo es totalmente análogo y no se considera necesario repetirlo.

Es evidente que el uso de la *Función Suplementaria* anterior sólo puede tener ventajas, respecto al caso general usando la *Función Elemental*, cuando la solución está cerca de la parábola de tiempo infinito. Sin embargo, cuando la solución también esté cerca de la *Elipse Fundamental*, es preferible usar el cálculo asociado a la *Función Fundamental* en lugar de la *Función Suplementaria*, por conducir a resultados de mayor precisión.

2.5.5 EFICIENCIA DE LA FUNCIÓN DOBLE DEPENDIENTE

Las tres *Funciones Doble Dependiente* analizadas, como la mayoría de las soluciones existentes, tiene una limitación cerca de las soluciones parabólicas ($\psi = 0$ y $\psi = \pi$), debido a la pérdida de precisión en los cálculos por causa de la indeterminación 0/0 existente. En dicho caso, debe recurrirse a desarrollos de la función en torno a la solución conflictiva.

Sin embargo, existen otras causas de pérdida de precisión debidas a la lejanía de la solución de la ecuación respecto a la solución tomada como referencia (variable independiente nula) de la *Función Temporal* elegida. En dicho caso, se puede disminuir este efecto eligiendo la *Función Temporal* cuya solución de referencia sea más conveniente.

En el caso hiperbólico, siempre suele usarse la *Función Elemental*, sin embargo, en el caso elíptico, puede mejorarse la precisión usando la *Función Temporal* cuya solución de referencia ($\psi = 0$ para la *Elemental*, $\psi = f$ para la *Fundamental*, $\psi = \pi/2$ para la *Esencial*, y $\psi = \pi$ para la *Suplementaria*) sea más precisa para la solución de la

ecuación. En la práctica, puede usarse la siguiente condición para elegir la función más favorable

$$f - \pi/6 \leq \psi \leq f + \pi/6 \quad \text{Fundamental (con preferencia sobre las demás)}$$

$$0 \leq \psi \leq \pi/3 \quad \text{Elemental}$$

$$\pi/3 \leq \psi \leq 2\pi/3 \quad \text{Esencial}$$

$$2\pi/3 \leq \psi \leq \pi \quad \text{Suplementaria}$$

La gran ventaja de usar cualquiera de las *Funciones Doble Dependiente* como *Función Temporal* está en que se requiere un coste computacional muy pequeño en comparación con el resto de *Funciones Temporales* analizadas (*Excentricidad Transversal*, *Principal*, *Universal*), como se muestra a continuación.

En la evaluación de cualquiera de las *Funciones Doble Dependiente*, existen sólo tres operaciones cuya evaluación depende de la plataforma elegida para el cálculo, que son las funciones seno y coseno de la incógnita y la raíz $\alpha^{1/2}$ (téngase en cuenta que $\alpha^{3/2} = \alpha^{1/2} \alpha$). Teniendo en cuenta los costes indicados en la tabla 2, la evaluación de las dos funciones trigonométricas (evaluación directa del seno con un argumento menor de $\pi/3$ en valor absoluto y evaluación del coseno mediante la relación pitagórica), requiere de unas 83 sumas ($58+23+2$), y la raíz cuadrada ($\alpha^{1/2}$) de otras 23, sumando en total unas 106 sumas.

Observando las expresiones obtenidas para la *Función Temporal* y sus derivadas, y sin contar la evaluación de las funciones dependientes de la plataforma, se requieren 11 sumas, 2 divisiones y 10 asignaciones adicionales para evaluar la *Función Temporal* (10 para $N = 0$), tan sólo 8 sumas, 2 divisiones y 7 asignaciones más para la primera derivada y otras 18 sumas, una división y 7 asignaciones para la segunda. Teniendo en cuenta que una división equivale a 21 sumas y una asignación a 2, resulta un coste del orden de 296 sumas ($106 + 73 + 64 + 53$) para poder implementar cualquier algoritmo iterativo de tercer orden. En definitiva, el coste computacional de la primera derivada sólo supone un incremento menor del 36%, y el coste de la segunda un incremento menor del 22%.

Nótese que desde el punto de vista de la convergencia, se puede diseñar un método de segundo orden, evaluando la función y su primera derivada ó evaluando dos veces la función en valores próximos a la solución. En primera aproximación, se puede decir que ambas opciones convergen de forma similar y, en consecuencia, un método de primer orden usando la primera derivada se considerará más eficiente que otro que evalúa dos veces la función, cuando el coste adicional del cálculo de la primera derivada no exceda el cálculo de la propia función, como es el caso (36%). A esto debe sumarse el hecho de que usando la primera derivada se obtiene siempre más precisión que usando la función evaluada dos veces.

Dando un paso más, según la tabla 1, para que sea más eficiente un método de tercer orden usando la derivada segunda, el coste adicional de la segunda derivada no debe superar el 58.5%, como es el caso (22%). Según la misma tabla, si se quisiera usar la

derivada tercera, el coste de dicha derivada no debería superar el 26.2% del coste acumulado anterior, es decir no debería tener un coste mayor de 77 operaciones (26.2% de 296), pero no hace falta calcular la tercera derivada para saber que el coste es seguramente mayor, pues dicha derivada es bastante más complicada que la segunda que tiene un coste de 53 sumas. En consecuencia, el orden óptimo del método asociado a la *Función Elemental Doble Dependiente* es 3, usando hasta la segunda derivada, en cada iteración. Nótese sin embargo que no se han tenido en cuenta las operaciones necesarias en cada iteración para mejorar la estimación usando las evaluaciones de la función y sus derivadas, pero en primera aproximación son 23 sumas adicionales (una resta, un producto y una división) para un método de primer orden y otras 4 más para un método de segundo orden, no siendo suficiente como para variar significativamente los porcentajes de coste anteriores, por lo cual, el orden óptimo de 3, calculado de forma aproximada, no se ve alterado con dicha corrección.

Aunque el coste obtenido para la evaluación de τ es muy bueno, todavía se puede mejorar sensiblemente el coste asociado a una iteración, elevando la ecuación al cuadrado, usando con ello la función τ^2 que evita la evaluación de $\alpha^{1/2}$, ó $\alpha_1^{1/2}$, a cambio de tan sólo una operación más y, por tanto, ahorrando unas 22 operaciones (7.4%).

Este coste computacional por iteración con un método de orden 3, como puede verse en la tabla 18, es mejor que cualquiera de los existentes en la literatura revisados hasta la fecha. Sin embargo, hay una gran limitación en el uso de este método, como en la mayoría de los existentes, debido a la indeterminación en las soluciones parabólicas que provoca una pérdida de precisión en las soluciones cercanas a ellas.

2.6 FUNCIÓN ELEMENTAL PRINCIPAL

En [2.1.3](#) se ha obtenido la *Ecuación Elemental Principal* para resolver el *Problema de Lambert*, en [\(2.1.46\)](#) para el caso elíptico

$$\tau = \mathfrak{A}(\psi, q; N) \quad ; \quad \mathfrak{A}(\psi, q; N) \equiv \tau_N(\psi, q) = \tau_0(\psi, q) + N \tau_1(\psi, q)$$

$$\tau_N(\psi, q) = \alpha^{1/2} \omega_N \quad ; \quad \tau_1(\psi, q) = \pi \alpha^{3/2}$$

$$\omega_N = \alpha \psi_N + \gamma \quad ; \quad \psi_N = \psi + N \pi$$

$$\rho = 1 - q \cos \psi \quad ; \quad \alpha = \frac{\rho}{\sin^2 \psi} \quad ; \quad \gamma = \frac{q - \cos \psi}{\sin \psi}$$

y en [\(2.1.47\)](#) para el caso hiperbólico

$$\tau = \mathfrak{A}(\Psi, q) \quad ; \quad \mathfrak{A}(\Psi, q) = \alpha_H^{1/2} \omega_H \quad ; \quad \omega_H = \gamma_H - \alpha_H \Psi$$

$$\rho = 1 - q \cosh \Psi \quad ; \quad \alpha_H = \frac{\rho}{\sinh^2 \Psi} \quad ; \quad \gamma_H = \frac{\cosh \Psi - q}{\sinh \Psi}$$

Las funciones $\pi(\psi, q; N)$ y $\pi(\Psi, q)$, mostradas en la figura 9 para los distintos casos existentes, son fácilmente derivables (cualquier orden) respecto a ψ ó Ψ y q , son fácilmente desarrollables en torno a la solución parabólica ($\psi = \Psi = 0, N = 0$) de tiempo finito ($\tau = \tau_p$), y son regulares en las trayectorias cercanas a la media vuelta ($q = 0$).

Para el caso hiperbólico, evaluando la *Función Elemental Principal* $\pi(\Psi, q)$ en función de Ψ para diferentes valores de q , se obtiene la figura 9a.

Nótese que, para $N = 0$ y para cada valor de q , la gráfica del caso hiperbólico (figura 9a) se une con la gráfica del caso elíptico (figura 9b), en el punto parabólico de tiempo finito (téngase en cuenta que las figuras no tienen la misma escala en el eje vertical τ). Nótese también que en dicha unión la pendiente es siempre nula, excepto en el caso particular límite $q = 1$, donde no existe solución hiperbólica.

EL PROBLEMA DE LAMBERT EN EL CONTEXTO DE OPTIMIZACIÓN DE TRAYECTORIAS ESPACIALES

b) Caso Elíptico, $N = 0$.

c) Caso Elíptico de Múltiple Revolución para $N = 1$ (representativo de $N > 0$).

Figura 9. Función Temporal del Problema de Lambert en función de ψ ó Ψ .

2.6.2 CÁLCULO DE DERIVADAS

Se van a calcular las derivadas m -ésimas de la *Función Elemental Principal*, y opcionalmente los coeficientes de su desarrollo directamente, con el objetivo de obtener un método genérico, de cualquier orden, para resolver la *Ecuación Elemental Principal* iterativamente.

Las variables independientes en este apartado, para la *Función Elemental Principal*, están sin duda identificadas, siendo (ψ, q) para el caso elíptico y (Ψ, q) para el hiperbólico. Por ello, para evitar sobrecarga en la notación, se usarán mayoritariamente las variables dependientes en lugar de sus funciones asociadas. Por ejemplo, se usará α en lugar de $\alpha(\psi, q)$ o α , pues se sabe que es así por contexto.

2.6.2.1 CASO ELÍPTICO

Para la evaluación de las derivadas de la *Función Elemental Principal*, en función de ψ para el caso elíptico, se definen las siguientes variables intermedias, C_n , S_n , γ_n y δ_n , correspondientes a las funciones asociadas $C_n(\psi)$, $S_n(\psi)$, $\gamma_n(\psi)$ y $\delta_n(\psi)$

$$\begin{aligned} C_n &= C_n(\psi) = \cos^n \psi \quad ; \quad S_n = S_n(\psi) = \sin^n \psi \quad (n \geq 1) \\ \gamma_n &= \gamma_n(\psi) = \frac{1}{\sin^n \psi} \quad ; \quad \delta_n = \delta_n(\psi) = \frac{\cos \psi}{\sin^n \psi} = \gamma_n \cos \psi \quad (n \geq 1) \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

Una forma simplificada de calcular estos coeficientes de forma recursiva es la siguiente

$$\begin{aligned} C_1 &= \cos \psi \quad ; \quad S_1 = \sin \psi \quad ; \quad C_n = C_{n-1} C_1 \quad ; \quad S_n = S_{n-1} S_1 \quad (n \geq 1) \\ \gamma_0 &= 1 \quad ; \quad \gamma_n = \gamma_{n-1} / S_1 \quad ; \quad \delta_n = \gamma_n C_1 \quad (n \geq 1) \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

Usando estas variables y la propiedad $\alpha = \partial \gamma / \partial \psi$, la función τ se puede reescribir como

$$\tau(\psi, q; N) = \alpha^{1/2} \omega_N \quad ; \quad \alpha = \frac{\partial \gamma}{\partial \psi} \quad ; \quad \omega_N = \frac{\partial (\gamma \psi_N)}{\partial \psi} \quad ; \quad \gamma = \gamma_1 q - \delta_1 \quad (2.6.3)$$

Es fácil demostrar que las derivadas m -ésimas de las funciones γ_n y δ_n se pueden calcular mediante las siguientes fórmulas recursivas

$$\gamma_n^{(m)} = -n \delta_{n+1}^{(m-1)} \quad ; \quad \delta_n^{(m)} = (n-1) \gamma_{n-1}^{(m-1)} - n \gamma_{n+1}^{(m-1)} \quad (n \geq 1, m \geq 1) \quad (2.6.4)$$

Nótese que para calcular $\gamma_n^{(m)}$ y $\delta_n^{(m)}$ es necesario calcular previamente $\gamma_{n+k}^{(m-k)}$ y $\delta_{n+k}^{(m-k)}$, desde $k = 1$ hasta m , hasta llegar a γ_{n+m} y δ_{n+m} que se pueden evaluar directamente.

Con los resultados de las anteriores fórmulas recursivas para γ_1 y δ_1 , se calculan las derivadas m -ésimas de las funciones intermedias, como sigue

$$\gamma^{(m)} = \gamma_1^{(m)} q - \delta_1^{(m)} ; \quad \alpha^{(m)} = \gamma^{(m+1)} ; \quad \omega_N^{(m)} = \alpha^{(m)} \psi_N + (m+1) \gamma^{(m)} \quad (m \geq 0) \quad (2.6.5)$$

y con ellas las derivadas m -ésimas de la función τ

$$\begin{aligned} (\alpha^{1/2})^{(m)} &= \frac{1}{2\alpha^{1/2}} (\alpha^{(m)} - \sum_{n=1}^{m-1} \binom{m}{n} (\alpha^{1/2})^{(n)} (\alpha^{1/2})^{(m-n)}) \quad (m \geq 1) \\ \tau^{(m)} &= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (\alpha^{1/2})^{(n)} \omega_N^{(m-n)} \quad (m \geq 0) \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

ó de la función τ^2 , según convenga

$$\begin{aligned} (\omega_N^2)^{(m)} &= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \omega_N^{(n)} \omega_N^{(m-n)} \quad (m \geq 0) \\ (\tau^2)^{(m)} &= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \alpha^{(n)} (\omega_N^2)^{(m-n)} \quad (m \geq 0) \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

Si se requiere, también se pueden obtener separadamente las derivadas m -ésimas de la *Función de Periodo Orbital* τ_T

$$\tau_T^{(m)} = \pi \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (\alpha^{1/2})^{(n)} \alpha^{(m-n)} \quad (m \geq 0) \quad (2.6.8)$$

Las derivadas respecto a la variable independiente se usan principalmente para aplicar el método numérico elegido para resolver la ecuación. Sin embargo, para evaluar la sensibilidad de la solución ante variación de los datos del problema, además de estas derivadas, también son necesarias las derivadas respecto al parámetro geométrico q . Normalmente con la primera derivada es suficiente, no obstante, para aportar generalidad, se desarrolla a continuación el cálculo de la derivada m -ésima respecto a q , como sigue

$$\begin{aligned} \tau(\psi, q; N) &= \alpha^{1/2} \omega_N \quad ; \quad \gamma = \gamma_1 q - \delta_1 \quad ; \quad \alpha = \gamma^1 = \gamma_2 - \delta_2 q \quad ; \quad \omega_N = \alpha \psi_N + \gamma \\ \gamma_{(1)} &= \gamma_1 \quad ; \quad \alpha_{(1)} = -\delta_2 \quad ; \quad \omega_{N(1)} = \alpha_{(1)} \psi_N + \gamma_{(1)} = \gamma_1 - \delta_2 \psi_N \\ \gamma_{(m)} &= 0 \quad ; \quad \alpha_{(m)} = 0 \quad ; \quad \omega_{N(m)} = 0 \quad (m \geq 2) \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

y con ellas las derivadas m -ésimas de la función τ

$$\begin{aligned} (\alpha^{1/2})_{(m)} &= (m - 3/2) (\delta_2 / \alpha) (\alpha^{1/2})_{(m-1)} \quad (m \geq 1) \\ \tau_{(m)} &= (\alpha^{1/2})_{(m)} \omega_N + m (\alpha^{1/2})_{(m-1)} \omega_{N(1)} \quad (m \geq 0) \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

ó de la función τ^2 , según convenga

$$\begin{aligned}
(\tau^2)_{(0)} &= \alpha \omega_N^2 \\
(\tau^2)_{(1)} &= \alpha_{(1)} \omega_N^2 + 2 \alpha \omega_N \omega_{N(1)} \\
(\tau^2)_{(2)} &= 4 \alpha_{(1)} \omega_N \omega_{N(1)} + 2 \alpha \omega_{N(1)}^2 \\
(\tau^2)_{(3)} &= 6 \alpha_{(1)} \omega_{N(1)}^2 \\
(\tau^2)_{(m)} &= 0 \quad (m \geq 4) \quad (2.6.11)
\end{aligned}$$

La mayoría de las veces, las derivadas se usan para obtener los coeficientes del desarrollo de la función en un punto particular (normalmente una estimación previa a mejorar). En estos casos, resulta más conveniente calcular directamente los coeficientes sin necesidad de calcular las derivadas. A partir de los resultados anteriores para las derivadas, se obtienen los resultados mostrados a continuación para los coeficientes.

En primer lugar, los coeficientes de los desarrollos intermedios son

$$\begin{aligned}
(\gamma_n)_0 &= \gamma_n \quad ; \quad (\delta_n)_0 = \delta_n \quad (n \geq 0) \\
(\gamma_n)_m &= -(n/m) (\delta_{n+1})_{m-1} \quad (n \geq 1, m \geq 1) \\
(\delta_n)_m &= ((n-1) (\gamma_{n-1})_{m-1} - n (\gamma_{n+1})_{m-1}) / m \quad (n \geq 1, m \geq 1) \\
(\alpha)_m &= (m+1) (\gamma)_{m+1} \quad ; \quad (\gamma)_m = (\gamma_1)_m q - (\delta_1)_m \quad (m \geq 0) \\
(\omega_N)_m &= (\alpha)_m \psi_N + (m+1) (\gamma)_m \quad (m \geq 0) \quad (2.6.12)
\end{aligned}$$

Como inciso, es interesante plantear una forma alternativa de calcular el desarrollo de α a partir de los desarrollos de las funciones C_1 y S_1 , cuyos coeficientes, calculados recursivamente, son

$$\begin{aligned}
(C_1)_0 &= C_1 \quad ; \quad (C_1)_1 = -S_1 \quad ; \quad (C_1)_m = -(C_1)_{m-2} / ((2m) (2m-1)) \quad (m \geq 2) \\
(S_1)_0 &= S_1 \quad ; \quad (S_1)_1 = C_1 \quad ; \quad (S_1)_m = -(S_1)_{m-2} / ((2m) (2m-1)) \quad (m \geq 2) \quad (2.6.13)
\end{aligned}$$

Una primera opción, usando los desarrollos de $\rho = 1 - q C_1$, y $\alpha = \rho / S_2$, es

$$\begin{aligned}
(\rho)_0 &= 1 - q (C_1)_0 \quad ; \quad (\rho)_m = -q (C_1)_m \quad (m \geq 1) \\
(S_2)_m &= \sum_{n=0}^m (S_1)_n (S_1)_{m-n} \quad (m \geq 0) \\
(1/S_1^2)_0 &= 1 / (S_1^2)_0 \quad ; \quad (1/S_1^2)_m = -(1/S_1^2)_0 \sum_{n=1}^m (S_1^2)_n (1/S_1^2)_{m-n} \quad (m \geq 1)
\end{aligned}$$

$$(\alpha)_m = \sum_{n=0}^m (\rho)_n (1/S_1^2)_{m-n} \quad (m \geq 0) \quad (2.6.14)$$

y otra opción, usando el desarrollo de $\gamma = (q - C_1)/S_1$, y la propiedad $\alpha = \partial\gamma/\partial\psi$, es

$$\begin{aligned} (1/S_1)_0 &= 1 / (S_1)_0 \quad ; \quad (1/S_1)_m = -(1/S_1)_0 \sum_{n=1}^m (S_1)_n (1/S_1)_{m-n} \quad (m \geq 1) \\ (\gamma)_m &= (q - (C_1)_0) (1/S_1)_m + \sum_{n=1}^m (C_1)_n (1/S_1)_{m-n} \quad (m \geq 0) \\ (\alpha)_m &= -(m+1) (\gamma)_{m+1} \quad (m \geq 0) \end{aligned} \quad (2.6.15)$$

Por último, a partir de los coeficientes de los desarrollos intermedios anteriores, se obtiene el desarrollo de la función τ

$$\begin{aligned} (\alpha^{1/2})_0 &= ((\alpha)_0)^{1/2} \quad ; \quad (\alpha^{1/2})_m = ((\alpha)_m - \sum_{n=1}^{m-1} (\alpha^{1/2})_n (\alpha^{1/2})_{m-n}) / (2 (\alpha^{1/2})_0) \quad (m \geq 1) \\ (\tau)_m &= \sum_{n=0}^m (\alpha^{1/2})_n (\omega_N)_{m-n} \quad (m \geq 0) \end{aligned} \quad (2.6.16)$$

o de la función τ^2 , según convenga

$$\begin{aligned} (\omega_N^2)_m &= \sum_{n=0}^m (\omega_N)_n (\omega_N)_{m-n} \quad (m \geq 0) \\ (\tau^2)_m &= \sum_{n=0}^m (\alpha)_n (\omega_N^2)_{m-n} \quad (m \geq 0) \end{aligned} \quad (2.6.17)$$

Llamando ψ_0 al valor de ψ donde se han calculado los coeficientes $(\tau^k)_m$ del desarrollo de $\tau^k(\psi)$, para $k = 1$ ó 2 (aunque podría ser cualquier otro valor), se tiene

$$\tau^k(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\tau^k)_n (\psi - \psi_0)^n \quad (m \geq 1) \quad (2.6.18)$$

Este desarrollo, se puede invertir, usando el resultado del desarrollo de la función inversa del Apéndice G, sustituyendo $y(x)$ por $\tau^k(\psi)$, y usando los coeficientes auxiliares $w_{i,j}$, del siguiente modo

$$\begin{aligned} w_{1,0} &= 1 / (\tau^k)_1 \quad ; \quad w_{1,m} = -w_{1,0} \sum_{i=1}^m (\tau^k)_{i+1} w_{1,m-i} \quad (m \geq 1) \\ w_{m,n} &= \sum_{i=0}^n w_{m-1,i+1} w_{1,n-i} \quad (m \geq 2, n \geq 0) \end{aligned}$$

$$(\psi)_m = w_{m,0} \quad (m \geq 1) \quad (2.6.19)$$

para obtener finalmente

$$\psi = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\tau}^k) = \sum_{n=0}^{\infty} (\psi)_m (\boldsymbol{\tau}^k - (\boldsymbol{\tau}^k)_0)^n \quad (m \geq 1) \quad (2.6.20)$$

Truncando estos desarrollos, despreciando los términos desde p en adelante, se obtiene un método generalizado de orden p para resolver la *Ecuación Elemental* iterativamente.

2.6.2.2 CASO HPERBÓLICO GENERAL

Para la evaluación de las derivadas de la *Función Elemental Principal*, en función de ψ para el caso elíptico, se definen las siguientes variables intermedias, C_{Hn} , S_{Hn} , γ_{Hn} y δ_{Hn} , correspondientes a las funciones asociadas $C_{Hn}(\Psi)$, $S_{Hn}(\Psi)$, $\gamma_{Hn}(\Psi)$ y $\delta_{Hn}(\Psi)$

$$\begin{aligned} C_{Hn} &= C_{Hn}(\Psi) = \cosh^n \Psi \quad ; \quad S_{Hn} = S_{Hn}(\Psi) = \sinh^n \Psi \quad (n \geq 1) \\ \gamma_{Hn} &= \gamma_{Hn}(\Psi) = \frac{1}{\sinh^n \Psi} \quad ; \quad \delta_{Hn} = \delta_{Hn}(\Psi) = \frac{\cosh \Psi}{\sinh^n \Psi} = \gamma_{Hn} \cosh \Psi \quad (n \geq 1) \end{aligned} \quad (2.6.21)$$

Una forma simplificada de calcular estos coeficientes de forma recursiva es la siguiente

$$\begin{aligned} C_{H1} &= \cosh \Psi \quad ; \quad S_{H1} = \sinh \Psi \quad ; \\ C_{Hn} &= C_{Hn-1} C_{H1} \quad ; \quad S_{Hn} = S_{Hn-1} S_{H1} \quad ; \quad (n \geq 1) \\ \gamma_{H0} &= 1 \quad ; \quad \gamma_{Hn} = \gamma_{Hn-1} / S_{H1} \quad ; \quad \delta_{Hn} = \gamma_{Hn} C_{H1} \quad (n \geq 1) \end{aligned} \quad (2.6.22)$$

Usando estas variables y la propiedad $\alpha_H = -\partial\gamma_H/\partial\Psi$, la función τ se puede reescribir como

$$\boldsymbol{\tau}(\Psi, q) = \alpha_H^{1/2} \omega_H \quad ; \quad \alpha_H = -\frac{\partial\gamma_H}{\partial\Psi} \quad ; \quad \omega_H = \frac{\partial(\gamma_H \Psi)}{\partial\Psi} \quad ; \quad \gamma_H = \delta_{H1} - \gamma_{H1} q \quad (2.6.23)$$

Es fácil demostrar que las derivadas m -ésimas de las funciones γ_{Hn} y δ_{Hn} se pueden calcular mediante las siguientes fórmulas recursivas

$$\begin{aligned} \gamma_{Hn}^{(m)} &= -n \delta_{Hn+1}^{(m-1)} \quad ; \\ \delta_{Hn}^{(m)} &= -((n-1) \gamma_{Hn-1}^{(m-1)} + n \gamma_{Hn+1}^{(m-1)}) \quad (n \geq 1, m \geq 1) \end{aligned} \quad (2.6.24)$$

Nótese que para calcular $\gamma_{Hn}^{(m)}$ y $\delta_{Hn}^{(m)}$ es necesario calcular previamente $\gamma_{Hn+k}^{(m-k)}$ y $\delta_{Hn+k}^{(m-k)}$, desde $k = 1$ hasta m , hasta llegar a γ_{Hn+m} y δ_{Hn+m} que se pueden evaluar directamente.

Con los resultados de las anteriores fórmulas recursivas para γ_{H1} y δ_{H1} , se calculan las derivadas m -ésimas de las variables intermedias, como sigue

$$\begin{aligned}\gamma_H^{(m)} &= \delta_{H1}^{(m)} - \gamma_{H1}^{(m)} q \quad ; \quad \alpha_H^{(m)} = -\gamma_H^{(m+1)} \quad ; \\ \omega_H^{(m)} &= (m+1) \gamma_H^{(m)} - \alpha_H^{(m)} \Psi\end{aligned} \quad (m \geq 0) \quad (2.6.25)$$

y con ellas las derivadas m -ésimas de la función τ

$$\begin{aligned}(\alpha_H^{1/2})^{(m)} &= \frac{1}{2\alpha_H^{1/2}} (\alpha_H^{(m)} - \sum_{n=1}^{m-1} \binom{m}{n} (\alpha_H^{1/2})^{(n)} (\alpha_H^{1/2})^{(m-n)}) \quad (m \geq 1) \\ \tau^{(m)} &= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (\alpha_H^{1/2})^{(n)} \omega_H^{(m-n)} \quad (m \geq 0)\end{aligned} \quad (2.6.26)$$

o de la función τ^2 , según convenga

$$\begin{aligned}(\omega_H^2)^{(m)} &= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \omega_H^{(n)} \omega_H^{(m-n)} \quad (m \geq 0) \\ (\tau^2)^{(m)} &= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \alpha_H^{(n)} (\omega_H^2)^{(m-n)} \quad (m \geq 0)\end{aligned} \quad (2.6.27)$$

Para calcular las derivadas m -ésimas respecto a la variable q

$$\begin{aligned}\gamma_H &= \delta_{H1} - \gamma_{H1} q \quad ; \quad \alpha_H = -\gamma_H^{(1)} = \gamma_{H2} - \delta_{H2} q \quad ; \quad \omega_H = \gamma_H - \alpha_H \Psi \\ \gamma_{H(1)} &= -\gamma_{H1} \quad ; \quad \alpha_{H(1)} = -\delta_{H2} \quad ; \quad \omega_{H(1)} = \gamma_{H(1)} - \alpha_{H(1)} \Psi = \delta_{H2} \Psi - \gamma_{H1} \\ \gamma_{H(m)} &= 0 \quad ; \quad \alpha_{H(m)} = 0 \quad ; \quad \omega_{H(m)} = 0 \quad (m \geq 2)\end{aligned} \quad (2.6.28)$$

y con ellas las derivadas m -ésimas de la función τ

$$\begin{aligned}(\alpha_H^{1/2})_{(m)} &= (m - 3/2) (\delta_{H2}/\alpha_H) (\alpha_H^{1/2})_{(m-1)} \quad (m \geq 1) \\ \tau_{(m)} &= (\alpha_H^{1/2})_{(m)} \omega_H + m (\alpha_H^{1/2})_{(m-1)} \omega_{H(1)} \quad (m \geq 0)\end{aligned} \quad (2.6.29)$$

ó de la función τ^2 , según convenga

$$\begin{aligned}(\tau^2)_{(0)} &= \alpha_H \omega_H^2 \\ (\tau^2)_{(1)} &= \alpha_{H(1)} \omega_H^2 + 2 \alpha_H \omega_H \omega_{H(1)} \\ (\tau^2)_{(2)} &= 4 \alpha_{H(1)} \omega_H \omega_{H(1)} + 2 \alpha_H \omega_{H(1)}^2 \\ (\tau^2)_{(3)} &= 6 \alpha_{H(1)} \omega_{H(1)}^2\end{aligned}$$

$$(\tau^2)_{(m)} = 0 \quad (m \geq 4) \quad (2.6.30)$$

De forma análoga al caso elíptico, alternativamente a las derivadas m -ésimas, se pueden calcular los coeficientes de los desarrollos como se muestra a continuación.

En primer lugar, los coeficientes de los desarrollos intermedios son

$$\begin{aligned} (\gamma_{Hn})_0 &= \gamma_{Hn} \quad ; \quad (\delta_{Hn})_0 = \delta_{Hn} & (n \geq 0) \\ (\gamma_{Hn})_m &= -(n/m) (\delta_{Hn+1})_{m-1} & (n \geq 1, m \geq 1) \\ (\delta_{Hn})_m &= -((n-1) (\gamma_{Hn-1})_{m-1} + n (\gamma_{Hn+1})_{m-1}) / m & (n \geq 1, m \geq 1) \\ (\alpha_H)_m &= -(m+1) (\gamma_H)_{m+1} \quad ; \quad (\gamma_H)_m = (\delta_{H1})_m - (\gamma_{H1})_m q & (m \geq 0) \\ (\omega_H)_m &= (m+1) (\gamma_H)_m - (\alpha_H)_m \Psi & (m \geq 0) \end{aligned} \quad (2.6.31)$$

Como inciso, es interesante plantear una forma alternativa de calcular el desarrollo de α_H a partir de los desarrollos de las funciones C_{H1} y S_{H1} , cuyos coeficientes, calculados recursivamente, son

$$\begin{aligned} (C_{H1})_0 &= C_{H1} \quad ; \quad (C_{H1})_1 = S_1 \quad ; \quad (C_{H1})_m = (C_{H1})_{m-2} / ((2m) (2m-1)) \quad (m \geq 2) \\ (S_{H1})_0 &= S_{H1} \quad ; \quad (S_{H1})_1 = C_1 \quad ; \quad (S_{H1})_m = (S_{H1})_{m-2} / ((2m) (2m-1)) \quad (m \geq 2) \end{aligned} \quad (2.6.32)$$

Una primera opción, usando los desarrollos de $\rho_H = 1 - q C_{H1}$, y $\alpha_H = \rho_H / S_{H2}$, es

$$\begin{aligned} (\rho_H)_0 &= 1 - q (C_{H1})_0 \quad ; \quad (\rho_H)_m = -q (C_{H1})_m & (m \geq 1) \\ (S_{H2})_m &= \sum_{n=0}^m (S_{H1})_n (S_{H1})_{m-n} & (m \geq 0) \\ (1/S_{H1}^2)_0 &= 1 / (S_{H1}^2)_0 \quad ; \\ (1/S_{H1}^2)_m &= -(1/S_{H1}^2)_0 \sum_{n=1}^m (S_{H1}^2)_n (1/S_{H1}^2)_{m-n} & (m \geq 1) \\ (\alpha_H)_m &= \sum_{n=0}^m (\rho_H)_n (1/S_{H1}^2)_{m-n} & (m \geq 0) \end{aligned} \quad (2.6.33)$$

y otra opción, usando el desarrollo de $\gamma_H = (C_{H1} - q)/S_{H1}$, y la propiedad $\alpha_H = \partial \gamma_H / \partial \Psi$, es

$$\begin{aligned} (1/S_{H1})_0 &= 1 / (S_{H1})_0 \quad ; \quad (1/S_{H1})_m = -(1/S_{H1})_0 \sum_{n=1}^m (S_{H1})_n (1/S_{H1})_{m-n} \quad (m \geq 1) \\ (\gamma_H)_m &= ((C_{H1})_0 - q) (1/S_{H1})_m + \sum_{n=1}^m (C_{H1})_n (1/S_{H1})_{m-n} & (m \geq 0) \end{aligned}$$

$$(\alpha_H)_m = -(m+1) (\gamma_H)_{m+1} \quad (m \geq 0) \quad (2.6.34)$$

Por último, a partir de los coeficientes de los desarrollos intermedios anteriores, se obtiene el desarrollo de la función τ

$$\begin{aligned} (\alpha_H^{1/2})_0 &= ((\alpha_H)_0)^{1/2} \\ (\alpha_H^{1/2})_m &= ((\alpha_H)_m - \sum_{n=1}^{m-1} (\alpha_H^{1/2})_n (\alpha_H^{1/2})_{m-n}) / (2 (\alpha_H^{1/2})_0) \quad (m \geq 1) \\ (\tau)_m &= \sum_{n=0}^m (\alpha_H^{1/2})_n (\omega_H)_{m-n} \quad (m \geq 0) \end{aligned} \quad (2.6.35)$$

o de la función τ^2 , según convenga

$$\begin{aligned} (\omega_H^2)_m &= \sum_{n=0}^m (\omega_H)_n (\omega_H)_{m-n} \quad (m \geq 0) \\ (\tau^2)_m &= \sum_{n=0}^m (\alpha_H)_n (\omega_H^2)_{m-n} \quad (m \geq 0) \end{aligned} \quad (2.6.36)$$

Llamando Ψ_0 al valor de Ψ donde se han calculado los coeficientes $(\tau^k)_m$ del desarrollo de $\tau^k(\Psi)$, para $k = 1$ ó 2 (aunque podría ser cualquier otro valor), se tiene

$$\tau^k(\Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\tau^k)_n (\Psi - \Psi_0)^n \quad (m \geq 1) \quad (2.6.37)$$

Este desarrollo se puede invertir del mismo modo que el caso elíptico (cambiado ψ por Ψ , por lo que no se considera necesario repetirlo), obteniendo así un método de resolución de la ecuación del orden que se quiera.

Los algoritmos presentados para ambos casos, elíptico e hiperbólico, permiten evaluar la *Función Elemental Principal* y sus derivadas respecto a la variable incógnita, en todas las situaciones, con lo que se puede aplicar cualquier método iterativo de cualquier orden.

Sin embargo, existen puntos singulares (puntos parabólicos e hiperbólico degenerado) donde la evaluación de la función y sus derivadas en la cercanía presenta problemas de precisión debido a la indeterminación de tipo 0/0 existente.

Para estos casos se desarrollan posteriormente expresiones alternativas para la *Función Temporal* con objeto de evitar dicha indeterminación, y por tanto, eliminando los problemas de precisión.

2.6.2.3 ECUACIÓN HIPERBÓLICA DE SEMIEJE MAYOR

El rango de posibles soluciones hiperbólicas va desde la solución parabólica de tiempo finito ($\Psi = 0$, $\tau = \tau_p$, $\alpha_H = \infty$), hasta la hipérbola degenerada límite de tiempo de transferencia nulo ($\Psi = \Psi_{\max}$, $\tau = 0$, $\alpha_H = 0$).

En la Práctica, la *Función Elemental Principal*, estudiada anteriormente, deja de ser eficiente cuando la solución se acerca a alguno de estos dos límites, debido a la existencia de operaciones con mal condicionamiento computacional en las indeterminaciones 0/0 que aparecen.

Cuando la solución se acerca a la hipérbola degenerada límite, se ha comprobado que cambiando la variable independiente Ψ por α_H , se consiguen resultados mucho más eficientes, mejorando tanto en precisión como en coste computacional.

La *Ecuación Temporal* obtenida, en función de α_H , se conviene en llamarla particularmente *Ecuación Hiperbólica de Semieje Mayor*, y a la *Función Temporal* asociada, *Función Hiperbólica de Semieje Mayor*, con la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha_H, q) &= \alpha_H^{1/2} \omega_H \quad ; \quad \omega_H = \gamma_H - \alpha_H \Psi \\ \gamma_H &= \gamma_H(\alpha_H, q) \quad ; \quad \Psi = \Psi(\alpha_H, q) \end{aligned} \quad (2.6.38)$$

siendo $\gamma_H(\alpha_H, q)$ y $\Psi(\alpha_H, q)$ las funciones que obtienen γ_H y Ψ en función de α_H y q , cuyo desarrollo se muestra a continuación.

Por ya se ha mencionado anteriormente, para evitar la complicación de la raíz cuadrada existente, se decide usar la función τ^2 , en lugar de τ .

Usando la notación $z^{(\alpha, n)}$ para indicar la derivada enésima de cualquier variable z respecto a la nueva variable independiente α_H , y usando las derivadas enésimas $z^{(n)}$ respecto a Ψ , obtenidas anteriormente para las variables γ_H , ω_H , α_H , se pueden calcular las derivadas respecto a α_H , de dichas variables, en función de las derivadas respecto a Ψ , y con ellas las de τ^2 .

Sin embargo, para poder aprovechar los resultados del cálculo de la función inversa mediante desarrollo de potencias, contenido en el apéndice G, en lugar de las derivadas enésimas, se van a calcular los coeficientes $z_{\alpha, n}$ y z_n de los desarrollos de potencias de z en función de α_H y Ψ respectivamente, de modo que se cumple la siguiente relación entre coeficientes y derivadas

$$z_{\alpha, n} = z^{(\alpha, n)} / n! \quad ; \quad z_n = z^{(n)} / n! \quad (n \geq 0) \quad (2.6.39)$$

que originan los desarrollos de potencias siguientes

$$z(\Psi) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k (\Delta \Psi)^k \quad ; \quad z(\alpha_H) = \sum_{k=0}^{\infty} z_{\alpha, k} (\Delta \alpha_H)^k \quad (2.6.40)$$

siendo $\Delta \Psi$ y $\Delta \alpha_H$ los incrementos de las variables Ψ y α_H respecto a los puntos de evaluación Ψ_0 y $(\alpha_H)_0$, es decir, los desarrollos de las propias variables Ψ y α_H son

$$\Psi = \Psi_0 + \Delta \Psi \quad ; \quad \alpha_H = (\alpha_H)_0 + \Delta \alpha_H \quad (2.6.41)$$

Nótese que se cumple

$$\begin{aligned} \Psi^{(\alpha,0)} = \Psi^{(0)} = \Psi_{\alpha,0} = \Psi_0 \quad ; \quad (\alpha_H)^{(\alpha,0)} = (\alpha_H)^{(0)} = (\alpha_H)_{\alpha,0} = (\alpha_H)_0 \\ \Psi^{(\alpha,1)} = \Psi^{(1)} = \Psi_{\alpha,1} = \Psi_1 = 1 \quad ; \quad (\alpha_H)^{(\alpha,1)} = (\alpha_H)^{(1)} = (\alpha_H)_{\alpha,1} = (\alpha_H)_1 = 1 \end{aligned} \quad (2.6.42)$$

El objetivo es obtener las derivadas enésimas $(\tau^2)^{(\alpha,n)}$ o coeficientes $(\tau^2)_{\alpha,n}$ de la función

$$\tau^2 = \alpha_H \omega_H^2 \quad (2.6.43)$$

Comenzando en orden inverso, las derivadas de τ^2 en función de las derivadas de ω_H son las siguientes

$$\begin{aligned} (\tau^2)^{(\alpha,m)} = \alpha_H (\omega_H^2)^{(\alpha,m)} + m (\omega_H^2)^{(\alpha,m-1)} \quad (m \geq 1) \\ (\omega_H^2)^{(\alpha,m)} = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \omega_H^{(\alpha,n)} \omega_H^{(\alpha,m-n)} \quad (m \geq 0) \end{aligned} \quad (2.6.44)$$

O alternativamente, haciendo lo mismo para los coeficientes

$$\begin{aligned} (\tau^2)_{\alpha,0} = (\alpha_H)_{\alpha,0} (\omega_H^2)_{\alpha,0} \quad ; \quad (\tau^2)_{\alpha,m} = (\alpha_H)_{\alpha,0} (\omega_H^2)_{\alpha,m} + (\omega_H^2)_{\alpha,m-1} \quad (m \geq 1) \\ (\omega_H^2)_{\alpha,m} = \sum_{n=0}^m (\omega_H)_{\alpha,n} (\omega_H)_{\alpha,m-n} \quad (m \geq 0) \end{aligned} \quad (2.6.45)$$

El siguiente paso es hacer lo mismo con la variable intermedia

$$\omega_H = \gamma_H - \alpha_H \Psi$$

Según esta expresión, las derivadas o coeficientes de ω_H en función de las derivadas o coeficientes de Ψ , teniendo en cuenta que $\alpha_H = -\gamma_H^{(1)}$, se calculan del siguiente modo

$$\begin{aligned} \omega_H^{(\alpha,m)} = -(2 \alpha_H \Psi^{\alpha,m} + (2m-1) \Psi^{\alpha,m-1}) \quad (m \geq 1) \\ (\omega_H)_{\alpha,m} = -(2 (\alpha_H)_{\alpha,0} \Psi_{\alpha,m} + (2 - 1/m) \Psi_{\alpha,m-1}) \quad (m \geq 1) \end{aligned} \quad (2.6.46)$$

Los coeficientes $\Psi_{\alpha,m}$, del desarrollo de Ψ en función de α_H , se calculan a partir de los coeficientes $(\alpha_H)_m$ del desarrollo de α_H en función de Ψ , mediante la inversión de dicho desarrollo. Como se muestra en el desarrollo de la función inversa del apéndice G, sustituyendo $y(x)$ por $\alpha_H(\Psi)$, y usando los coeficientes auxiliares $w_{i,j}$, se deduce

$$w_{1,0} = 1 / (\alpha_H)_1 \quad ; \quad w_{1,m} = -w_{1,0} \sum_{i=1}^m (\alpha_H)_{i+1} w_{1,m-i} \quad (m \geq 1)$$

$$w_{m,n} = \sum_{i=0}^n w_{m-1,i+1} w_{1,n-i} \quad (m \geq 2, n \geq 0)$$

$$\Psi_{\alpha,m} = w_{m,0} \quad (m \geq 1) \quad (2.6.47)$$

Y las derivadas son

$$\Psi^{\alpha,m} = m! \Psi_{\alpha,m} \quad (m \geq 0) \quad (2.6.48)$$

Para el cálculo de $(\alpha_H)^{(m)}$ o $(\alpha_H)_m$ se usan las expresiones obtenidas para la *Función Elemental Principal* del caso hiperbólico, resumidas aquí como sigue

$$\begin{aligned} \alpha_H^{(m)} &= -\gamma_H^{(m+1)} \quad ; \quad \gamma_H^{(m)} = \delta_{H1}^{(m)} - \gamma_{H1}^{(m)} q \quad (m \geq 0) \\ (\gamma_{Hn})^{(0)} &= \gamma_{Hn} \quad ; \quad \gamma_{Hn}^{(m)} = -n \delta_{Hn+1}^{(m-1)} \quad (n \geq 1, m \geq 1) \\ (\delta_{Hn})^{(0)} &= \delta_{Hn} \quad ; \quad \delta_{Hn}^{(m)} = -((n-1) \gamma_{Hn-1}^{(m-1)} + n \gamma_{Hn+1}^{(m-1)}) \quad (n \geq 1, m \geq 1) \end{aligned} \quad (2.6.49)$$

O directamente los coeficientes $(\alpha_H)_m$

$$\begin{aligned} (\alpha_H)_m &= -(m+1) (\gamma_H)_{m+1} \quad ; \quad (\gamma_H)_m = (\delta_{H1})_m - (\gamma_{H1})_m q \quad (m \geq 0) \\ (\gamma_{Hn})_m &= -(n/m) (\delta_{Hn+1})_{m-1} \quad (n \geq 1, m \geq 1) \\ (\delta_{Hn})_m &= -((n-1) (\gamma_{Hn-1})_{m-1} + n (\gamma_{Hn+1})_{m-1}) / m \quad (n \geq 1, m \geq 1) \\ (\gamma_{Hn})_0 &= \gamma_{Hn} \quad ; \quad (\delta_{Hn})_0 = \delta_{Hn} \quad (n \geq 0) \end{aligned} \quad (2.6.50)$$

Los coeficientes γ_{Hn} y δ_{Hn} se calculan con las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned} \gamma_{Hn} &= 1 / S_{Hn} \quad ; \quad \delta_{Hn} = C_{H1} / S_{Hn} \quad (n \geq 0) \\ C_{Hn} &= \cosh^n \Psi_0 \quad ; \quad S_{Hn} = \sinh^n \Psi_0 \quad (n \geq 0) \end{aligned} \quad (2.6.51)$$

Nótese que para calcular los coeficientes del desarrollo de α_H , se pueden usar fórmulas alternativas mostradas para el caso hiperbólico general, a partir de los desarrollos de C_{H1} y S_{H1} , y usando los desarrollos de ρ_H y α_H , ó el de γ_H .

En los cálculos anteriores, todos los coeficientes de grado $m \geq 1$ (o derivadas de orden $m \geq 1$), dependen de los valores de la variables en el punto de evaluación del desarrollo ($m = 0$). Nótese que dichos valores son los términos independientes (de grado 0) de los desarrollos de potencias. En particular, interesa el valor de Ψ en función de α_H en el punto de evaluación (se prescinde del subíndice 0 por simplicidad de notación).

Teniendo en cuenta la expresión de α_H en función de Ψ

$$\alpha_H = (1 - C_{H1} q) / S_{H2} \quad ; \quad S_{H2} = S_{H1}^2 = C_{H1}^2 - 1$$

resulta la siguiente ecuación de segundo grado en C_{H1}

$$\alpha_H C_{H1}^2 + q C_{H1} - (1 + \alpha_H) = 0$$

Definiendo los parámetros (σ, η) ó (σ_1, η_1) , según sea α_H mayor ó menor que la unidad (para evitar perdida de precisión)

$$\sigma = \sigma_1 / \eta_1 = q / (2 \alpha_H) \quad ; \quad \sigma_1 = \sigma / \eta = q / (2 (1 + \alpha_H))$$

$$\eta = 1 / \eta_1 = (1 + \alpha_H) / \alpha_H \quad ; \quad \eta_1 = 1 / \eta = \alpha_H / (1 + \alpha_H)$$

La ecuación se transforma en

$$C_{H1}^2 + 2 \sigma C_{H1} - \eta = 0 \quad \text{ó} \quad \eta_1 C_{H1}^2 + 2 \sigma_1 C_{H1} - 1 = 0$$

cuyas soluciones, matemáticamente, son

$$C_{H1} = -\sigma \pm \delta = (-\sigma_1 \pm \delta_1) / \eta_1$$

donde se han definido las variables auxiliares

$$\delta = \delta_1 / \eta_1 = (\sigma^2 + \eta)^{1/2} \quad ; \quad \delta_1 = \delta / \eta = (\sigma_1^2 + \eta_1)^{1/2}$$

Debido a que C_{H1} no puede ser negativo se deduce que la única solución posible es

$$C_{H1} = \delta - \sigma = (\delta_1 - \sigma_1) / \eta_1 \quad \text{(mejor para } q \leq 0)$$

El signo de σ es el mismo que el de q , por tanto, cuando q es positivo, para evitar la resta de valores próximos en el cálculo de C_{H1} es mejor usar la expresión equivalente

$$C_{H1} = \eta / (\delta + \sigma) = 1 / (\delta_1 + \sigma_1) \quad \text{(mejor para } q > 0)$$

Una vez calculado C_{H1} en función de α_H , como se ha indicado, se calcula directamente

$$C_{H2} = C_{H1}^2 \quad ; \quad S_{H2} = C_{H2} - 1 \quad ; \quad S_{H1} = S_{H2}^{1/2} \quad ; \quad \Psi = \ln(C_{H1} + S_{H1})$$

Y con estos valores ya se pueden realizar todos los cálculos necesarios para obtener el desarrollo de la función τ^2 y sus derivadas usando la variable independiente α_H , como se quería conseguir en un principio.

Como se puede observar, el cálculo de las derivadas resulta bastante laborioso más allá de la segunda derivada. Por otra parte, es suficiente con la segunda derivada para poder aplicar un método de tercer orden considerablemente eficiente.

Como muestra de aplicación de los resultados generales anteriores, desarrollando particularmente hasta la segunda derivada, se obtiene el siguiente algoritmo simplificado, para un valor particular de $\alpha_H = (\alpha_H)_0$

$$\sigma = q / (2 \alpha_H) \quad ; \quad \eta = (1 + \alpha_H) / \alpha_H \quad ; \quad \delta = (\sigma^2 + \eta)^{1/2} \quad \text{(mejor para } \alpha_H \geq 1)$$

$$\sigma_1 = q / (2 (1 + \alpha_H)) \quad ; \quad \eta_1 = \alpha_H / (1 + \alpha_H) \quad ; \quad \delta_1 = (\sigma_1^2 + \eta_1)^{1/2} \quad \text{(mejor para } \alpha_H < 1)$$

$$C_{H1} = \delta - \sigma \quad \text{ó} \quad C_{H1} = \eta / (\delta + \sigma) \quad (\text{mejor para } \alpha_H \geq 1, q \leq 0 \text{ ó } q > 0)$$

$$C_{H1} = (\delta_1 - \sigma_1) / \eta_1 \quad \text{ó} \quad C_{H1} = 1 / (\delta_1 + \sigma_1) \quad (\text{mejor para } \alpha_H < 1, q \leq 0 \text{ ó } q > 0)$$

$$C_{H2} = C_{H1}^2 \quad ; \quad S_{H2} = C_{H2} - 1 \quad ; \quad S_{H1} = S_{H2}^{1/2} \quad ; \quad \Psi = \ln(C_{H1} + S_{H1})$$

$$\gamma_H = (C_{H1} - q) / S_{H1}$$

$$\omega_H = \gamma_H - \alpha_H \Psi$$

$$\tau^2 = \alpha_H \omega_H^2$$

$$(\alpha_H)_1 = ((1 + 2 / S_{H2}) q - 2 C_{H1} / S_{H2}) / S_{H1}$$

$$\Psi_{\alpha,1} = 1 / (\alpha_H)_1$$

$$(\omega_H)_{\alpha,1} = -(2 \alpha_H \Psi_{\alpha,1} + \Psi)$$

$$(\tau^2)_{\alpha,1} = \omega_H (\omega_H + 2 \alpha_H (\omega_H)_{\alpha,1})$$

$$(\alpha_H)_2 = (2 + 3 / S_{H2} - C_{H1} (1/2 + 3 / S_{H2}) q) / S_{H2}$$

$$\Psi_{\alpha,2} = -(\Psi_{\alpha,1})^3 (\alpha_H)_2$$

$$(\omega_H)_{\alpha,2} = -(2 \alpha_H \Psi_{\alpha,2} + 3/2 \Psi_{\alpha,1})$$

$$(\tau^2)_{\alpha,2} = 2 \omega_H (\omega_H)_{\alpha,1} + \alpha_H (((\omega_H)_{\alpha,1})^2 + 2 \omega_H (\omega_H)_{\alpha,2}) \quad (2.6.52)$$

El valor mínimo que puede tomar α_H es cero, cuando la variable Ψ toma su valor máximo, donde se distinguen dos casos según el signo de q (ver figura 9a). Para $q > 0$, existe un valor máximo de Ψ , donde se anula α_H y τ . Para $q \leq 0$ los valores de α_H y τ tienden a cero cuando Ψ tiendo a infinito.

Caso $\alpha_H = 0 \quad ; \quad q > 0$

$$\tau^2 = 0 \quad ; \quad \omega_H = \gamma_H = S_f \quad ; \quad (\tau^2)_{\alpha,1} = S_f^2$$

$$C_{H1} = 1 / q \quad ; \quad S_{H1} = S_f / q \quad ;$$

$$\Psi = \ln((1 + S_f)/q) \quad ; \quad (\tau^2)_{\alpha,2} = -2 S_f \Psi$$

Caso $\alpha_H = 0 \quad ; \quad q \leq 0$

$$\tau^2 = 0 \quad ; \quad \omega_H = \gamma_H = 1 \quad ; \quad (\tau^2)_{\alpha,1} = 1$$

$$C_{H1} \approx S_{H1} \approx E_H / 2 \approx -q / \alpha_H \approx \infty \quad ;$$

$$\Psi = \ln E_H \approx \infty \quad ; \quad (\tau^2)_{\alpha,2} \approx -2 \Psi \approx -\infty \quad (2.6.53)$$

Cuando α_H es nulo, la solución se corresponde con la hipérbola límite degenerada de tiempo nulo (dos semirrectas con origen en el foco). Cuando α_H es infinito, la solución límite es la parabólica de tiempo finito. La zona hiperbólica intermedia, donde la solución no está cercana a ninguna de las dos soluciones límite anteriores, se caracteriza por valores de α_H de orden unidad. En este caso, puede resultar útil calcular la función τ^2 , y sus derivadas respecto a α_H , usando la variable intermedia z como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} z_S &= 2 q_S / z \quad ; \quad C_{H1} = 1 + z_S \quad ; \quad z_C = 1 + C_{H1} \quad ; \quad S_{H2} = z_S z_C \\ \alpha_H &= q_S / z_S - q_C / z_C = (z - q) / z_C \quad (z \geq q) \end{aligned} \quad (2.6.54)$$

El resto del cálculo coincide con el desarrollado [\(2.6.52\)](#) para α_H genérico.

Así, cuando $(z - q)$ es de orden unidad, α_H también lo es. En particular para $z = 1$ resulta

$$\alpha_H = q_S / (1 + q_S) \quad ; \quad C_{H1} = 1 + 2 q_S = 2 - q \quad ; \quad S_{H2} = 4 q_S (1 + q_S) \quad (2.6.55)$$

En la práctica, para asegurar un valor de α_H cercano a la unidad, z debe estar entre 2 y 3 aproximadamente. En el rango de valores posibles de q (entre -1 y 1) se pueden asegurar los siguientes rangos de α_H

- $z = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_H \in [0, 0.5]$
- $z = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_H \in [0.5, 1]$
- $z = 2.5 \quad \Rightarrow \quad \alpha_H \in [0.75, 1.25]$
- $z = 3 \quad \Rightarrow \quad \alpha_H \in [1, 1.5]$

Aunque se puede realizar el cálculo genérico para $\alpha_H = 1$, cuando sólo se busca un valor característico con α_H cercano a la unidad (por ejemplo, para obtener aproximaciones iniciales), es suficiente usar un valor de z adecuado en la expresión anterior ($z = 2.5$ por ejemplo), reduciendo así cálculo necesario.

En este apartado se ha desarrollado la *Función Hiperbólica de Semieje Mayor*, usando el semieje mayor adimensional como variable independiente. Esta aproximación es válida para todo el rango de soluciones hiperbólicas, excepto la cercana a la parabólica, ampliando así la validez de la *Función Elemental Principal*. Adicionalmente, como caso práctico del desarrollo general, se ha particularizado hasta la segunda derivada para aplicar cualquier método de tercer orden en la resolución del problema. Aunque el resultado obtenido es, sin duda, uno de los más eficientes para resolver el caso hiperbólico en su rango de aplicación, aún queda excluida la región cercana a la parabólica.

2.6.3 FUNCIÓN FUNDAMENTAL PRINCIPAL

Como en el caso *Doble Dependiente*, cuando la solución es elíptica, y está cerca de la *Elipse Fundamental* ($\psi = f$), se puede aumentar la precisión de los cálculos realizando el cambio de la variable

$$\psi = f + \psi_F \quad ; \quad -f \leq \psi_F \leq \pi - f \quad ; \quad \text{Recomendable para } |\psi_F| < \pi/6 \quad (2.6.56)$$

En consecuencia, la *Función Elemental Principal* se transforma en la siguiente

$$\begin{aligned} \tau &= \tau(\psi_F, q; N) \quad ; \quad \tau(\psi_F, q; N) \equiv \tau_N(\psi_F, q) = \tau_F(\psi_F, q) + N \tau_T(\psi_F, q) \\ \tau_N(\psi_F, q) &= \alpha^{3/2} \varpi_N \quad ; \quad \tau_F(\psi_F, q) = \alpha^{3/2} \psi_N \quad ; \quad \tau_T(\psi_F, q) = \pi \alpha^{3/2} \end{aligned} \quad (2.6.57)$$

donde ψ_F es la variable incógnita elegida, definida como $(\psi - f)$, $\tau(\psi_F, q; N)$ es la *Función Temporal*, llamada también *Función Fundamental Principal*, sobrecargada en función de ψ_F y q , $\tau_T(\psi_F, q)$ es la *Función de Periodo Orbital*, también sobrecargada, y $\tau_F(\psi_F, q)$ es una función que devuelve el exceso de tiempo respecto a la solución correspondiente a la *Elipse Fundamental*.

Las derivadas de τ respecto a ψ_F son las mismas que las derivadas respecto a ψ , por tanto, se pueden usar los mismos resultados obtenidos para la *Función Elemental Principal*, excepto algunas operaciones indicadas a continuación para la función τ , con objeto de evitar las operaciones mal condicionadas computacionalmente.

Usando el mismo razonamiento que en la *Función Fundamental Doble Dependiente*, a partir de la evaluación directa de C_{ψ_F} y S_{ψ_F} , se puede calcular si pérdida de precisión

$$\begin{aligned} D &= S_{\psi_F} (C_f S_{\psi_F} / (1 + C_{\psi_F}) + S_f) \quad ; \quad C_\psi = C_f - D \quad ; \quad \rho = S_f^2 + C_f D \\ S_\psi &= C_f S_{\psi_F} + S_f C_{\psi_F} \quad ; \quad \gamma = D / S_\psi \quad ; \quad \alpha = \rho / S_\psi^2 \end{aligned} \quad (2.6.58)$$

Estos resultados de γ y α , sin pérdida de precisión, son los que deben usarse en las siguientes asignaciones iniciales

$$(\gamma)_0 = (\gamma)^{(0)} = \gamma \quad ; \quad (\alpha)_0 = (\alpha)^{(0)} = (\gamma)_1 = (\gamma)^{(1)} = \alpha \quad (2.6.59)$$

El resto de cálculos son idénticos a los desarrollados en [2.6.2.1](#) para la *Función Elemental Principal*.

Es evidente que este desarrollo de la *Función Fundamental* sólo tiene ventajas, respecto al desarrollo de la *Función Elemental*, cuando la solución está cercana a la *Elipse Fundamental*, pero cuando ocurre esta opción evita la pérdida de precisión por mal condicionamiento computacional.

2.6.4 FUNCIÓN ESENCIAL PRINCIPAL

Como en el caso *Doble Dependiente*, cuando la solución es elíptica, y está cerca de la *Elipse Esencial* ($\psi = \pi/2$), aproximadamente en el intervalo $[\pi/3, 2\pi/3]$, se puede aumentar la precisión de los cálculos realizando el cambio de variable

$$\psi = \pi/2 + \psi_E \quad ; \quad |\psi_E| \leq \pi/2 \quad ; \quad \text{Recomendable para } |\psi_E| < \pi/6 \quad (2.6.60)$$

Las expresiones trigonométricas de ψ en función de ψ_E son

$$C_\psi = -S_{\psi_E} \quad ; \quad S_\psi = C_{\psi_E} \quad (2.6.61)$$

Del mismo modo, a partir de la *Ecuación Elemental Principal*, cambiando la variable ψ en función de ζ , se deduce la siguiente *Ecuación Temporal*, llamada también *Ecuación Esencial Principal* (por estar desarrollada en torno a la *Elipse Esencial*)

$$\begin{aligned} \tau &= \mathfrak{T}(\psi_E, q; N) \quad ; \quad \mathfrak{T}(\psi_E, q; N) \equiv \mathfrak{T}_N(\psi_E, q) = \mathfrak{T}_E(\psi_E, q) + (N+1/2) \mathfrak{T}_T(\psi_E, q) \\ \mathfrak{T}_N(\psi_E, q) &= \alpha^{1/2} \omega_N \quad ; \quad \mathfrak{T}_E(\psi_E, q) = \mathfrak{T}_{1/2}(\psi_E, q) \quad ; \quad \mathfrak{T}_T(\psi_E, q) = \pi \alpha^{3/2} \end{aligned} \quad (2.6.62)$$

donde ψ_E es la variable incógnita elegida, definida como $(\psi - \pi/2)$, $\mathfrak{T}(\psi_E, q; N)$ es la *Función Temporal*, llamada también *Función Esencial Principal*, sobrecargada en función de ψ_E y q , $\mathfrak{T}_T(\psi_E, q)$ es la *Función de Periodo Orbital*, también sobrecargada, y $\mathfrak{T}_E(\psi_E, q)$ es una función que devuelve el exceso de tiempo respecto a la solución correspondiente a la *Elipse Esencial*.

Las gráficas de la *Función Esencial Principal* son las mismas que las mostradas en la figura 9b y 9c para la *Función Elemental Principal* sin más que situar el origen del eje horizontal en $\psi = \pi/2$.

Para la evaluación de las derivadas de la *Función Fundamental Principal*, en función de ψ_E para el caso elíptico, se usan las mismas variables intermedias, γ_n y δ_n , definidas para la *Función Elemental Principal*, sustituyendo las funciones trigonométricas de ψ por las correspondientes en función de ψ_E .

Las derivadas m -ésimas respecto a la variable ψ_E de las funciones γ_n y δ_n , γ , α , ω_N , $\alpha^{1/2}$, $\mathfrak{T}$, ω_N^2 , $\mathfrak{T}^2$, se calculan exactamente igual que en [2.6.2.1](#) para la *Función Elemental Principal*, respecto a la variable ψ . Las derivadas respecto a la variable q también se calculan igual.

2.6.5 FUNCIÓN SUPLEMENTARIA PRINCIPAL

Una vez más, como en el caso *Doble Dependiente*, cuando la solución es elíptica y está cerca de la parabólica de tiempo infinito ($\psi = \pi$), aproximadamente en el intervalo $[2\pi/3, \pi]$, es conveniente realizar los siguientes cambios de variable

$$\begin{aligned}\psi &= \pi - \psi_\pi & ; & \quad 0 \leq \psi_\pi \leq \pi & \quad ; \quad \text{Recomendable para } \psi_\pi < \pi/3 \\ f &= \pi - f_\pi & ; & \quad 0 \leq f_\pi \leq \pi & \Rightarrow \quad q = -q_\pi\end{aligned}\quad (2.6.63)$$

Las expresiones trigonométricas de ψ y f , se pueden calcular del siguiente modo

$$\begin{aligned}C_\psi &= -C_{\psi_\pi} & ; & \quad q = C_f = -C_{f_\pi} = -q_\pi \\ S_\psi &= S_{\psi_\pi} & ; & \quad S_f = S_{f_\pi}\end{aligned}\quad (2.6.64)$$

Del mismo modo, a partir de la *Ecuación Suplementaria Doble Dependiente*, cambiando las variables (ψ, q) en función de las variables (ψ_π, q_π) , se deduce que las variables ρ y α no cambian su valor, γ simplemente cambia de signo, y las expresiones de ψ_N y ω_N cambian del siguiente modo

$$\begin{aligned}\psi_N &= \psi + N \pi = (N+1) \pi - \psi_\pi \\ \gamma &= -\gamma_\pi \\ \omega_N &= \alpha \psi_N + \gamma = \alpha (N+1) \pi - (\alpha \psi_\pi + \gamma_\pi)\end{aligned}\quad (2.6.65)$$

y en consecuencia las funciones usadas en la *Función Elemental Principal* se transforman en

$$\begin{aligned}\tau(\psi, q) &= \tau_\pi(\psi_\pi, q_\pi) \\ \tau_0(\psi, q) &= \tau_\pi(\psi, q) - \tau_0(\psi_\pi, q_\pi) = \tau_\pi(\psi_\pi, q_\pi) - \tau_0(\psi_\pi, q_\pi) \\ \tau_N(\psi, q) &= \tau_0(\psi, q) + N \tau_\pi(\psi, q) = (N+1) \tau_\pi(\psi_\pi, q_\pi) - \tau_0(\psi_\pi, q_\pi)\end{aligned}\quad (2.6.66)$$

resultando la siguiente *Ecuación Temporal*, llamada también *Ecuación Suplementaria Principal*

$$\begin{aligned}\tau &= \tau_\pi(\psi_\pi, q_\pi; N) \\ \tau_\pi(\psi_\pi, q_\pi; N) &= (N+1) \tau_\pi(\psi_\pi, q_\pi) - \tau_0(\psi_\pi, q_\pi) & ; & \quad \psi_\pi = (\pi - \psi) & ; & \quad q_\pi = -q\end{aligned}\quad (2.6.67)$$

siendo τ_π una *Función Temporal* asociada a la ecuación, llamada *Función Suplementaria Principal*, esta vez *sobrecargada* en función de ψ_π y q_π .

Las derivadas m -ésimas de la *Función Suplementaria Principal* ($\tau_\pi^{(m)}$) respecto a la variable incógnita (ψ_π) se pueden calcular directamente como

$$\tau_\pi^{(m)} = (N+1) \tau_\pi^{(m)} - \tau_0^{(m)} \quad (2.6.68)$$

donde las derivadas de τ_π y τ_0 , respecto a la variable ψ_π , se calculan de la misma forma que en la *Función Elemental Principal*, respecto a la variable ψ .

No obstante, también es posible calcular las derivadas de τ_π directamente, sin necesidad de calcular las derivadas de τ_0 y τ_T por separado. Esto se consigue con un desarrollo similar al caso usual mediante la evaluación de la *Función Elemental Principal*, sólo que teniendo en cuenta la nueva dependencia de la variable ω_N . A continuación se resumen los cálculos necesarios para la evaluación de la *Función Suplementaria Principal* y sus derivadas, pero sólo los que difieren respecto a la *Función Elemental Principal*.

Las gráficas de la *Función Suplementaria Principal* son las mismas que las mostradas en la figura 9b y 9c para la *Función Elemental Principal* sin más que situar el origen del eje horizontal en $\psi = \pi$, y cambiar también su sentido.

Para la evaluación de las derivadas de la *Función Suplementaria Principal*, en función de ψ_π para el caso elíptico, se usan las mismas variables intermedias, γ_n y δ_n , definidas para la *Función Elemental Principal*, sustituyendo las funciones trigonométricas de ψ por las correspondientes en función de ψ_π .

Las derivadas m -ésimas (o coeficientes de orden m) respecto a la variable ψ_π de las funciones γ_n y δ_n , γ , α , ω_N , $\alpha^{1/2}$, τ , ω_N^2 , τ^2 , se calculan exactamente igual que las calculadas respecto a la variable ψ para la *Función Elemental Principal*, con la única excepción del cambio de signo en las derivadas impares (por ser $d\psi_\pi = -d\psi$), y además las derivadas respecto a la variable q son exactamente iguales, por lo que no hace falta repetir aquí todos los resultados.

2.7 FUNCIÓN UNIVERSAL

Partiendo de la *Función Elemental Principal* en función de la *Variable Elemental* (ψ , ó Ψ), obtenida en [2.1.3](#), y realizando un cambio a la *Variable Universal* x , definida posteriormente, se obtiene otra *Función Temporal*, llamada *Función Universal*, que consigue unificar todos los tipos de solución cónica (elíptica, hiperbólica y parabólica) y, mediante un desarrollo adecuado, se consigue obtener un algoritmo de evaluación de la función que evita la indeterminación 0/0 existente en las proximidad de los puntos parabólicos.

2.7.1 CAMBIO DE VARIABLE ELEMENTAL A UNIVERSAL

Para solucionar el problema de pérdida de precisión en torno a la solución parabólica, debido a la existencia de la indeterminación (0/0) en las expresiones anteriores de la función τ , se recurre a un cambio de la *Variable Elemental* ψ ó Ψ , por la *Variable Universal* x , definida en Battin^[5] como $x = \sin^2(\psi/2)$. Este cambio, además de permitir evitar la indeterminación mencionada con facilidad, conduce a expresiones de la función τ más simples de evaluar.

Nótese que por ser $\psi = -i \Psi$, es $x = -\sinh^2(\Psi/2)$, por lo tanto, este cambio también es válido para el caso hiperbólico (donde $N = 0$), consiguiendo así unificar todos los tipos de solución con una única variable. El signo de la *Variable Universal* x determina el tipo de trayectoria cónica (negativo hiperbólica, nulo parabólica y positivo elíptica).

Según la definición de x , se deduce

$$x = \sin^2(\psi/2) = -\sinh^2(\Psi/2) \quad ; \quad 1-x = \cos^2(\psi/2) = \cosh^2(\Psi/2) \quad (2.7.1)$$

En consecuencia, conocida la variable x , los ángulos ψ ó Ψ , según el caso, se pueden calcular mediante las funciones $\psi(x)$ ó $\Psi(x)$ siguientes

$$\begin{aligned} \psi = \psi(x) &= 2 \operatorname{asin} \sqrt{x} = 2 \operatorname{atan} \sqrt{\frac{x}{1-x}} & (x \geq 0, 0 \leq \psi \leq \pi) \\ \Psi = \Psi(x) &= 2 \operatorname{asinh} \sqrt{-x} = 2 \operatorname{atanh} \sqrt{\frac{-x}{1-x}} & (x \leq 0, \Psi \geq 0) \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

La evaluación computacional de la función asin , se realiza evaluando la función atan con el argumento adecuado, por lo que se recomienda directamente el uso de la función atan para la evaluación de la función $\psi(x)$. Es obvio que, cuando x tiende a la unidad, existe una pérdida de precisión en el cálculo $(1-x)$, sin embargo, se puede evitar con el simple cambio de variable independiente $y = (1-x)$.

En el cálculo de $\Psi(x)$ del caso hiperbólico, la función asinh es más eficiente que la función atanh para valores cercanos al origen, pues, aunque el coste computacional es similar (una raíz cuadrada mas para la función asinh), la función atanh presenta una indeterminación, que no tiene la función asinh , cuando su argumento tiende a la unidad, $(-x)$ tendiendo a infinito, provocando una pérdida de precisión que comienza a notarse para $x < -1$, y se agrava rápidamente cuando aumenta el valor de $(-x)$.

Por la gran importancia dada a la precisión en esta Tesis Doctoral, es conveniente destacar que, en algunas ocasiones, también puede aparecer un problema de precisión cuando se evalúa la función asinh en el origen, dependiendo del algoritmo usado en la plataforma de cálculo elegida. Este problema de precisión, cuando aparece, se debe al escenario descrito a continuación (para atanh ocurre algo similar).

Para un valor del argumento de la función asinh cercano al origen ($y = \sqrt{-x} \ll 1$), la función asinh se podría calcular computacionalmente con su *Desarrollo de McLaurin*, sin embargo, cuando los argumentos son grandes, es preferible usar la equivalencia

$$\operatorname{asinh} y = \ln z \quad ; \quad z = y + \sqrt{1+y^2} = \sqrt{-x} + \sqrt{1-x}$$

De este modo, trasladamos el cálculo de la función asinh al cálculo de una función logarítmica, mucho más conocida, con múltiples implementaciones más o menos eficientes, y con la gran ventaja de poder reducir el argumento de la función con mucha facilidad, para poder aplicar finalmente el siguiente desarrollo de potencias en torno a la unidad (deducido del desarrollo de la función logarítmica del [Anexo E](#))

$$\ln z_r = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{2n+1}}{2n+1} \quad ; \quad u = \frac{h}{2+h} \quad ; \quad h = z_r - 1$$

donde z_r es el argumento reducido, obtenido a partir del argumento inicial z , de forma que se acerque lo más posible a la unidad, buscando que la variable u del desarrollo de potencias sea lo menor posible (para ser más eficiente). Esto se consigue de forma óptima buscando unos valores de r y z_r que cumplan la siguiente igualdad

$$z = z_r 2^r \quad ; \quad 2^{-1/2} < |z_r| \leq 2^{1/2}$$

los cuales, se determinan a partir de la representación en coma flotante de z

$$z = m 2^e \quad ; \quad 2^{-1} \leq |m| < 1$$

siendo m la mantisa y e el exponente binario, de donde se deduce

$$z_r = m \quad ; \quad r = e \quad (\text{si } m \leq 2^{1/2})$$

$$z_r = m/2 \quad ; \quad r = e + 1 \quad (\text{si } m > 2^{1/2})$$

y con esta reducción z_r del argumento z , se calcula finalmente

$$\ln z = \ln z_r + r \ln 2$$

Nótese que el valor de $\ln 2$ es siempre una constante conocida a priori, aunque se puede calcular (una única vez), por ejemplo a partir de la equivalencia $\ln 2 = 2 \ln \sqrt{2}$, y obteniendo $\ln \sqrt{2}$ con el desarrollo de potencias de la función logarítmica directamente.

En este escenario, el problema de precisión mencionado al comienzo se presenta cuando no es necesario hacer una reducción del argumento z , es decir, cuando $r = 0$ y $z_r = z$, en correspondencia con los rangos $0 \leq z \leq \sqrt{2}$, $0 \leq y \leq \sqrt{2}/4$, $0 \leq (-x) \leq 1/8$, resultando directamente

$$h = z - 1 = y + \sqrt{1+y^2} - 1 = \sqrt{-x} + \sqrt{1-x} - 1$$

En esta expresión de h , cuando el argumento y de la función asinh tiende a cero, se origina una diferencia de números muy próximos, que provoca una pérdida apreciable de precisión. Sin embargo, es muy fácil evitar esta pérdida, por ejemplo, aplicando la siguiente expresión equivalente

$$h = y + \frac{y^2}{\sqrt{1+y^2} + 1} = \sqrt{-x} + \frac{-x}{\sqrt{1-x} + 1}$$

quedando así resuelto el problema de pérdida de precisión para todos los valores de x . El único inconveniente de este método es la pérdida de uno o dos bits de precisión, en el rango $0.125 \leq (-x) \leq 1$, cuando se aplica la reducción de argumento, pues se pierden los bits menos significativos de x en la operación $(1-x)$ del cálculo de $z = \sqrt{-x} + \sqrt{1-x}$, antes de la reducción.

Como dato anecdótico, se ha comprobado que la función ASENHO de Excel (Asinh en Visual Basic para Aplicaciones) del paquete ofimático Office de Microsoft, tiene problemas de precisión cerca del origen, motivo por el cual no ha podido ser usada directamente en los cálculos y programas desarrollados en Excel para esta Tesis Doctoral. No obstante, para superar esta limitación y conseguir sacar provecho de esta herramienta de cálculo tan versátil y conocida, se ha optado por programar en VBA una función alternativa diseñada para evitar la pérdida de precisión en el origen (y lo mismo se ha hecho para otras funciones con problemas de precisión similares).

Con el fin de simplificar posteriormente expresiones donde aparecen las funciones trigonométricas e hiperbólicas definidas anteriormente, es útil definir las variables y funciones siguientes (variables con el mismo nombre que la función asociada en negrita)

$$\begin{aligned} S_{H,k} &= S_{H,k}(x) = \sinh^k \Psi = (-4x(1-x))^{k/2} \\ C_{H,k} &= C_{H,k}(x) = \cosh^k \Psi = (1-2x)^k \\ S_k &= S_k(x) = \sin^k \psi = (4x(1-x))^{k/2} \\ C_k &= C_k(x) = \cos^k \psi = (1-2x)^k \end{aligned} \quad (2.7.3)$$

Nótese que se cumple

$$\begin{aligned} S_k &= i^k S_{H,k} \Rightarrow S_{2k} = (-1)^k S_{H,2k} \\ C_k &= C_{H,k} \end{aligned}$$

Usando S_1 y $S_{H,1}$ también se puede calcular alternativamente

$$\psi(x) = \text{asin } S_1 = 2 \operatorname{atan} \left(\frac{S_1/2}{1-x} \right) \quad ; \quad \Psi(x) = \text{asinh } S_{1H} = 2 \operatorname{atanh} \left(\frac{S_{H,1}/2}{1-x} \right) \quad (2.7.4)$$

donde, por las mismas razones, se hace la misma recomendación anterior de usar las funciones atan y asinh para el cálculo de $\psi(x)$ y $\Psi(x)$ respectivamente.

En esta última opción de cálculo de $\Psi(x)$, usando la función asinh con argumento S_{1H} , se pueden usar las mismas expresiones anteriores de evaluación de la función asinh, sin más que sustituir $y = S_{1H}$ (en lugar de $y = \sqrt{-x}$), resultando el siguiente valor para el argumento de la función logarítmica equivalente

$$z = S_{1H} + C_{1H} = S_{1H} + 1 - 2x$$

En este caso, el desarrollo directo (sin reducción de argumento), para $z \leq \sqrt{2}$, corresponde al rango $0 \leq (-x) \leq 1/(16+12\sqrt{2}) = 0.03033$, del orden de la cuarta parte del rango de la opción anterior. Ambas opciones (usando la función asinh) son perfectamente válidas, pero evita el cálculo de una raíz cuadrada adicional en todo el

rango de x , y además, cuando no es necesaria una reducción, la variable h queda tan simple como

$$h = z - 1 = S_{1H} - 2x$$

resolviendo así, una vez más, el problema de precisión en el origen. Como en el caso anterior se pierden algunos bits de precisión (dos o tres a lo sumo), cuando se aplica la reducción de argumento en el rango $0.03033 \leq (-x) \leq 1$, debido a la operación $(1-2x)$ del cálculo de z antes de la reducción.

Derivando las expresiones de C_1 y $C_{H,1}$ en función de x , se obtienen las derivadas de la *Variable Universal* x respecto a cada una de las *Variables Elementales*

$$-S_1 d\psi/dx = -2 \Rightarrow d\psi/dx = 2/S_1 \Rightarrow dx/d\psi = S_1/2$$

$$S_{H,1} d\Psi/dx = -2 \Rightarrow d\Psi/dx = -2/S_{H,1} \Rightarrow dx/d\Psi = -S_{H,1}/2$$

Por último, con el cambio a la variable x se obtienen las siguientes expresiones en función de x y q , de las variables intermedias usadas en la evaluación (2.1.46) y (2.1.47) de la *Función Elemental* $\tau(\psi, q; N)$ ó $\tau(\Psi, q; N)$

$$\rho = 1 - q C_1 = 2(q_s + q x) = 2(q_s(1-x) + q_c x)$$

$$\alpha = \frac{\rho}{S_2} = \frac{q_s + q x}{2x(1-x)} = \frac{q_s(1-x) + q_c x}{2x(1-x)} = \frac{1}{2} \left(\frac{q_s}{x} + \frac{q_c}{1-x} \right) ; \quad \alpha_H = -\alpha$$

$$\gamma = \frac{q - \cos \psi}{\sin \psi} = \frac{(1 - 2q_s) - (1 - 2x)}{S_1} = \frac{x - q_s}{S_1/2} ; \quad \gamma_H = -i \gamma = \frac{q_s - x}{S_{H,1}/2} \quad (2.7.5)$$

Con estas expresiones (ρ , α , γ y ψ) ó (ρ , α_H , γ_H y Ψ), en función de x , queda resuelta la evaluación de la función $\tau(\psi(x), q; N)$ ó $\tau(\Psi(x), q; N)$, que una vez más, *sobrecargando* la función, llamaremos también $\tau(x, q; N)$, determinando por contexto cual es la apropiada.

Con el cambio realizado de variable, ψ ó Ψ , por x , se ha conseguido la unificación de todos los tipos de solución (hiperbólica, parabólica y elíptica). Sin embargo, sigue existiendo el problema de pérdida de precisión cerca de la solución parabólica, debido a la indeterminación en el origen. Además, la función $\psi(x)$, ó $\Psi(x)$, igual que ocurría con la *Función Elemental de Excentricidad Transversal*, complica considerablemente el cálculo de la función τ y sus derivadas, respecto a la nueva incógnita x (*Variable Universal*).

Para evitar el problema de eficiencia todavía existente, desde el punto de vista del cálculo computacional necesario y, sobre todo, de la precisión, se buscan soluciones basadas en funciones intermedias, resultado de agrupar términos y/o factores de la función τ , de modo que se evite la evaluación de $\psi(x)$, ó $\Psi(x)$, logrando derivadas de cualquier orden más simples de evaluar y sin pérdida de precisión cerca de las soluciones parabólicas. A continuación se desarrollan dos posibles soluciones, la primera basada en la función Q , definida en Battin^[5], y la segunda basada en una nueva

función λ , definida posteriormente. La gran importancia de estas funciones consiste en que la mayor parte de la complejidad matemática de la resolución del *Problema de Lambert* se traslada casi por completo a la evaluación de estas funciones.

2.7.2 FUNCIÓN UNIVERSAL BASADA EN Q

La solución desarrollada a continuación parte de la *Función Elemental Básica*, [\(2.1.54\)](#) ó [\(2.1.55\)](#), obtenida en el apartado [2.1.5](#)

$$\tau = R \xi_N \quad ; \quad R = \rho^{1/2} \quad ; \quad \xi_N = p_1 + q p_2 \quad \text{o} \quad \xi_N = q + \rho p_1$$

donde las variables p_1 y p_2 se evalúan mediante las funciones $p_1(\psi; N)$ y $p_2(\psi; N)$ para el caso elíptico, ó $p_1(\Psi)$ y $p_2(\Psi)$ para el hiperbólico, que ahora se evaluarán en función de la variable x usando las expresiones obtenidas en [2.7.1](#) a partir de [\(2.7.1\)](#) a [\(2.7.5\)](#).

Para el caso elíptico

$$p_1 = p_1(x; N) = \frac{(\psi(x) + N\pi) - S_1(x)C_1(x)}{S_3(x)}$$

$$p_2 = p_2(x; N) = \frac{S_1(x) - (\psi(x) + N\pi)C_1(x)}{S_3(x)}$$

y para el hiperbólico

$$p_1 = p_1(x; 0) = \frac{S_{H,1}(x)C_{H,1}(x) - \Psi(x)}{S_{H,3}(x)}$$

$$p_2 = p_2(x; 0) = \frac{\Psi(x)C_{H,1}(x) - S_{H,1}(x)}{S_{H,3}(x)} \quad (2.7.6)$$

donde las variables p_1 y p_2 se evalúan con las funciones *sobrecargadas* recién definidas, $p_1(x; N)$ y $p_2(x; N)$ para el caso elíptico, y $p_1(x; 0)$ y $p_2(x; 0)$ para el hiperbólico. Nótese que las funciones $p_1(x; N)$ y $p_2(x; N)$ son las mismas para el caso elíptico y el hiperbólico, con la única salvedad de ser N nulo para el caso hiperbólico.

Separando los términos proporcionales a N , se obtiene

$$p_1(x; N) = p_1(x; 0) + N p_{1,K}(x) \quad ; \quad p_{1,K}(x) = \frac{\pi}{S_3(x)}$$

$$p_2(x; N) = p_2(x; 0) + N p_{2,K}(x) \quad ; \quad p_{2,K}(x) = -C_1(x) p_{1,K}(x) \quad (2.7.7)$$

Multiplicando la definición de la función $p_1(x; N)$ por $S_3(x)$ y derivando la igualdad resultante respecto a x , se obtiene

$$S_3(x) p_1(x;N) = \psi_N(x) - S_1(x) C_1(x)$$

$$3 S_2 C_1 d\psi/dx p_1 + S_3 dp_1/dx = (1 - C_1^2 + S_1^2) d\psi/dx = 2 S_2 d\psi/dx$$

Teniendo en cuenta que, $d\psi/dx = 2/S_1$, y dividiendo por $(2 S_1)$

$$(S_2/2) dp_1/dx + 3 C_1 p_1 = 2$$

Y sustituyendo las expresiones de C_1 y S_2 en función de x , resulta la siguiente ecuación diferencial

$$2 x (1 - x) dp_1/dx + 3 (1 - 2 x) p_1 = 2 \quad (2.7.8)$$

Esta ecuación es un caso particular de la ecuación diferencial estudiada en el [Anexo B](#) para la función genérica $f(x; \alpha, \beta)$, con los parámetros α y β . Por tanto, los resultados obtenidos para la función $f(x; \alpha, \beta)$ son directamente aplicables a la función $p_1(x)$, sin más que sustituir los valores particulares de $\alpha = 2$ y $\beta = 3$. A continuación se resumen las expresiones correspondientes particularizadas para la función $p_1(x;N)$.

Las derivadas de las funciones $p_1^{(m)}(x;N)$ de órdenes m consecutivos cumplen la siguiente relación recursiva (U_m es la función unidad para $m = 1$ y nula para $m > 1$)

$$p_1^{(m)} = \frac{(m^2 - 1) p_1^{(m-2)} - (m + 1/2) (1 - 2x) p_1^{(m-1)} + U_m}{x (1 - x)} \quad (m \geq 1) \quad (2.7.9)$$

La solución del núcleo de la ecuación diferencial es $p_{1,K}(x)$ (proporcional a f_K en el [Anexo B](#) y eligiendo la constante de integración de modo que coincida con el factor que multiplica a N en p_1), y su derivada m -ésima cumple la misma ecuación recursiva anterior de $p_1^{(m)}$, pero eliminando el término de U_m .

De la misma forma que se definen, en el [Anexo B](#), las funciones $f_n(x)$ de orden n , a partir de los coeficientes f_n , se definen también las funciones auxiliares $p_{1,n}(x)$, obtenidas con los desarrollos de potencias de coeficientes $a_{1,n}$ (nótese que $p_{1,0}(x)$ está incluida en esta definición)

$$p_{1,n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{1,n+k} x^k = a_{1,n} F(n+3, 1; n+5/2; x) \quad (2.7.10)$$

donde los coeficientes $a_{1,n}$ se calculan con las siguientes fórmulas

$$a_{1,0} = \frac{2}{3} \quad ; \quad a_{1,n} = \frac{2n+4}{2n+3} a_{1,n-1} \quad (n \geq 1) \Rightarrow a_{1,n} = \frac{2^n (n+2)!}{(2n+3)!!} \quad (n \geq 0) \quad (2.7.11)$$

Las funciones de órdenes consecutivos cumplen la siguiente relación recursiva

$$p_{1,n}(x) = a_{1,n} + x p_{1,n+1}(x) \quad (2.7.12)$$

y las derivadas de órdenes consecutivos

$$p_{1,n}^{(m)} = \frac{(n+m+2) p_{1,n}^{(m-1)} - (n+3/2) p_{1,n+1}^{(m-1)}}{1-x} \quad (n \geq 0, m \geq 1) \quad (2.7.13)$$

El desarrollo de la función $p_{2,0}(x)$ se obtiene directamente a partir del desarrollo de $p_{1,0}(x)$ usando la identidad que relaciona p_2 con p_1 , y por tanto, $p_{2,0}$ con $p_{1,0}$

$$p_2 = 1 - p_1 \cos \psi \quad ; \quad p_{2,0} = 1 - (1 - 2x) p_{1,0} = (1 - p_{1,0}) + 2x p_{1,0} \quad (2.7.14)$$

Sustituyendo en esta identidad los desarrollos de $p_{1,0}$ y $p_{2,0}$, e igualando coeficientes

$$p_{2,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n} x^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n} x^n = (1 - \sum_{k=0}^{\infty} a_{1,k} x^k) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{1,n-1} x^n$$

$$a_{2,0} = 1 - a_{1,0} = \frac{1}{3}$$

$$a_{2,n} = -a_{1,n} + 2a_{1,n-1} = -a_{1,n} + 2 \frac{2n+3}{2n+4} a_{1,n} = \frac{n+1}{n+2} a_{1,n} \quad (n \geq 1)$$

Sustituyendo la expresión de $a_{1,n}$ en función de n , resulta

$$a_{2,n} = \frac{2^n (n+1)(n+1)!}{(2n+3)!!} \quad (n \geq 0) \Rightarrow a_{2,0} = \frac{1}{3} \quad ; \quad a_{2,n} = \frac{2(n+1)^2}{n(2n+3)} a_{2,n-1} \quad (n \geq 1) \quad (2.7.15)$$

y derivando sucesivamente en la misma identidad de $p_{2,0}$ en función de $p_{1,0}$, se obtienen las derivadas de $p_{2,0}$ a partir de las derivadas de $p_{1,0}$

$$p_{2,0}^{(m)} = U_{m+1} + 2m p_{1,0}^{(m-1)} - (1-2x) p_{1,0}^{(m)} \quad (m \geq 0) \quad (2.7.16)$$

A partir de las derivadas enésimas de las funciones $p_{1,n}$ se pueden desarrollar en serie de potencias en torno a un valor particular ($x = x_0$), del siguiente modo

$$p_{1,n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{1,n,m} (x - x_0)^m \quad ; \quad a_{1,n,m} = p_{1,n}^{(m)}(x_0) / m! \quad (n \geq 0) \quad (2.7.17)$$

Los coeficientes de $p_{1,n}(x)$, iguales a los coeficientes de $f_n(x_0; 2, 3)$ del [Anexo B](#), calculados recursivamente en función de coeficientes anteriores, son

$$a_{1,n,0} = p_{1,n}(x_0) \quad ; \quad a_{1,n,1} = \frac{(n+3) a_{1,n,0} - (n+3/2) (a_{1,n,0} - a_{1,n}) / x_0}{1 - x_0} \quad (n \geq 0)$$

$$a_{1,n,m} = \frac{(n+m+1) a_{1,n,m-2} - (n+m+1/2 - (n+2m+1) x_0) a_{1,n,m-1}}{m x_0 (1 - x_0)} \quad (n \geq 0, m \geq 2) \quad (2.7.18)$$

o alternatively, usando coeficientes de funciones de orden superior para evitar la indeterminación en el origen

$$a_{1,n,0} = p_{1,n}(x_0) ; a_{1,n,m} = \frac{(n+m+2) a_{1,n,m-1} - (n+3/2) a_{1,n+1,m-1}}{m(1-x_0)} \quad (n \geq 0, m \geq 1) \quad (2.7.19)$$

La función $(2 p_{1,0})$ resulta ser la misma función hipergeométrica Q , definida en Battin^[5], a partir de la expresión general de una función hipergeométrica F , como

$$Q(x) = 4/3 F(3, 1; 5/2; x)$$

La función $Q(x)$ es usada a menudo en la literatura para resolver el *Problema de Lambert* mediante otros métodos, con ecuaciones similares a la presentada aquí usando dicha función. Por ello, aunque la función p_1 es una elección tan buena como Q , se decide usar la función Q en los desarrollos posteriores, pero ampliando la definición de la función $Q(x)$ a $Q(x;N)$, añadiendo el término $Q_K(x)$ proporcional al parámetro N , del mismo modo que $p_{1,K}(x)$ amplía la función $p_{1,0}(x)$ para definir $p_1(x;N)$, esto es

$$Q(x;N) = Q_0(x) + N Q_K(x) \quad (2.7.20)$$

Con esta nueva definición, la función $Q(x)$ mencionada en la literatura pasa a ser la función $Q_0(x)$ en este contexto ($Q(x;N)$ para N nulo), que coincide con la solución particular de la ecuación diferencial asociada que tiene valor finito en el origen.

La función ampliada $Q(x;N)$ es la solución general de la misma ecuación diferencial que cumple $Q_0(x)$, y está compuesta por la solución particular $Q_0(x)$ mas una solución proporcional al núcleo de la ecuación, $Q_K(x)$, cuya constante de integración se elige convenientemente para que la proporcionalidad en este problema sea el parámetro N .

Nótese que, por ser $Q(x;N) = 2 p_1(x;N)$, se pueden aplicar las mismas conclusiones que para la función p_1 , aplicando el factor 2. No obstante, la función $Q(x;N)$ cumple también la ecuación diferencial de $f(x;\alpha,\beta)$ del [Anexo B](#), para $\alpha = 4$ y $\beta = 3$, y se pueden extraer por ello resultados totalmente análogos. En consecuencia, se pueden definir también de forma similar las funciones $Q(x;N)$, $Q_K(x)$ y $Q_n(x)$, de forma analítica y/o mediante desarrollo de potencias. A continuación se resumen las expresiones similares a p_1 correspondientes a la función Q .

$$Q = Q(x;N) = 2 \frac{(\Psi(x) + N\pi) - S_1(x)C_1(x)}{S_3(x)} \quad (x \geq 0)$$

$$Q = Q(x) = 2 \frac{S_{H,1}(x)C_{H,1}(x) - \Psi(x)}{S_{H,3}(x)} \quad (x \leq 0)$$

$$Q^{(m)} = \frac{(m^2 - 1) Q^{(m-2)} - (m + 1/2) (1 - 2x) Q^{(m-1)} + 2 U_m}{x(1-x)} \quad (m \geq 1)$$

$$Q_K(x) = \frac{2\pi}{S_3(x)}$$

$$Q_K^{(m)} = \frac{(m^2 - 1) Q_K^{(m-2)} - (m + 1/2) (1 - 2x) Q_K^{(m-1)}}{x (1 - x)} \quad (m \geq 1)$$

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_{n+k} x^k = q_n F(n+3, 1; n+5/2; x) \quad (n \geq 0)$$

$$q_0 = \frac{4}{3} \quad ; \quad q_n = \frac{2n+4}{2n+3} q_{n-1} \quad (n \geq 1) \Rightarrow q_n = \frac{2^{n+1} (n+2)!}{(2n+3)!!} \quad (n \geq 0)$$

$$Q_n(x) = q_n + x Q_{n+1}(x) \quad (n \geq 0)$$

$$Q_n^{(m)} = \frac{(n+m+2) Q_n^{(m-1)} - (n+3/2) Q_{n+1}^{(m-1)}}{1-x} \quad (n \geq 0, m \geq 1) \quad (2.7.21)$$

Y del mismo modo, se puede desarrollar en $(x = x_0)$

$$Q_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} q_{n,m} (x - x_0)^m \quad ; \quad q_{n,m} = Q_n^{(m)}(x_0) / m! \quad (n \geq 0) \quad (2.7.22)$$

donde los coeficientes se pueden calcular en función de coeficientes anteriores

$$q_{n,0} = Q_n(x_0) \quad ; \quad q_{n,1} = \frac{(n+3) q_{n,0} - (n+3/2) (q_{n,0} - q_n) / x_0}{1 - x_0} \quad (n \geq 0)$$

$$q_{n,m} = \frac{(n+m+1) q_{n,m-2} - (n+m+1/2 - (n+2m+1) x_0) q_{n,m-1}}{m x_0 (1 - x_0)} \quad (n \geq 0, m \geq 2) \quad (2.7.23)$$

o alternativamente, usando la dependencia con funciones de orden superior para evitar la indeterminación en el origen (recomendable para $|x_0| < 1/4$)

$$q_{n,0} = Q_n(x_0) \quad ; \quad q_{n,m} = \frac{(n+m+2) q_{n,m-1} - (n+3/2) q_{n+1,m-1}}{m (1 - x_0)} \quad (n \geq 0, m \geq 1) \quad (2.7.24)$$

Nótese que las fórmulas recursivas en función de derivadas anteriores, para $n = 0$, también son válidas para la función $Q_K(x)$ anulando el término q_0 y para la función $Q(x)$ sustituyendo el primer término $Q_n(x_0)$ por $Q(x_0)$, como se muestra a continuación.

Para $Q_K(x)$ es

$$Q_K(x) = \sum_{m=0}^{\infty} q_{K,m} (x - x_0)^m \quad ; \quad q_{K,m} = Q_K^{(m)}(x_0) / m!$$

$$q_{K,0} = Q_K(x_0) \quad ; \quad q_{K,1} = -\frac{3(1-2x_0)}{2x_0(1-x_0)} q_{K,0}$$

$$q_{K,m} = \frac{(m+1) q_{K,m-2} - (m+1/2) (1-2x_0) q_{K,m-1}}{m x_0 (1-x_0)} \quad (m \geq 2)$$

y para $Q(x;N)$

$$Q(x;N) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m (x-x_0)^k \quad ; \quad Q_m = Q^{(m)}(x_0;N) / m!$$

$$Q_0 = Q(x_0;N) \quad ; \quad Q_1 = \frac{3 Q_0 - 3/2 (Q_0 - q_0)/x_0}{1-x_0}$$

$$Q_m = \frac{(m+1) Q_{m-2} - (m+1/2) (1-2x_0) Q_{m-1}}{m x_0 (1-x_0)} \quad (m \geq 2) \quad (2.7.25)$$

Usando la función $Q(x;N)$, en lugar de $p_1(x;N)$, la *Ecuación Temporal* a resolver es

$$\tau = \alpha(x,q;N) \quad ;$$

$$\alpha(x,q;N) = R \xi_N \quad ; \quad R = R(x,q) = \rho^{1/2} \quad ; \quad \rho = \rho(x,q) = 2 (q_S + q x) \quad ;$$

$$\xi_N = \xi_N(x,q) = q + (\rho/2) Q(x;N) \quad ; \quad Q(x;N) = Q_0(x) + N Q_K(x) \quad \text{o}$$

$$\xi_N = \xi_0 + N \xi_K \quad ; \quad \xi_0 = \xi_0(x,q) = q + (\rho/2) Q_0(x) \quad ;$$

$$\xi_K = \xi_K(x,q) = (\rho/2) Q_K(x) \quad (2.7.26)$$

A esta *Ecuación Temporal* se la llama particularmente *Ecuación Universal Basada en Q*, por usar la *Variable Universal x*, que unifica todos los tipos de solución, y por estar basada en la función $Q(x;N)$. Como es obvio a la *Función Temporal* asociada se la llama *Ecuación Universal Basada en Q*.

Para el cálculo de las derivadas m -ésimas de la función τ , primero es necesario evaluar las derivadas $Q^{(m)}$. En el caso usual, lejos de los puntos parabólicos, estas derivadas se calculan recursivamente en función de las derivadas anteriores (partiendo del valor de la propia función Q), sin embargo, en los casos donde se acerca a alguna de las soluciones parabólicas ($x = 0$ ó $x = 1$) es necesario evitar la pérdida de precisión provocada por la indeterminación existente. Una buena condición para considerar si una solución está cerca de alguna de las dos solución parabólicas es que la distancia a cualquiera de dichas soluciones sea menor que $1/4$, es decir, que sea $|x| < 1/4$ ó $|1-x| < 1/4$.

Para evitar la indeterminación existente en las soluciones cercanas a los parabólicos, se propone la siguiente evaluación de la función $Q(x;N)$ y sus derivadas, separando el cálculo de $Q^{(m)}(x;N)$ en $Q_K^{(m)}(x)$ y $Q_0^{(m)}(x)$, y calculando $Q_0^{(m)}(x)$ recursivamente a partir de las funciones $Q_n^{(m)}(x)$

$$Q^{(m)}(x;N) = Q_0^{(m)}(x) + N Q_K^{(m)}(x) \quad (\text{mejor si } |x| < 1/4)$$

$$Q^{(m)}(x;N) = (-1)^m ((N+1) Q_K^{(m)}(1-x) - Q_0^{(m)}(1-x)) \quad (\text{mejor si } x > 3/4) \quad (2.7.27)$$

En caso contrario ($x \leq -1/4$ ó $1/4 \leq x \leq 3/4$), no se considera necesario evitar la indeterminación (caso usual), pues se aleja suficiente para que la pérdida de precisión sea inapreciable y, por ello, las derivadas pueden calcularse directamente mediante la fórmula recursiva de $Q^{(m)}$ en función de derivadas anteriores (con menor de coste computacional).

Una vez calculadas las derivadas $Q^{(m)}$, se evalúan las siguientes derivadas intermedias

$$\begin{aligned} \rho &= 2 (q_s + q x) \quad ; \quad \rho^{(1)} = 2 q \quad ; \quad \rho^{(m)} = 0 & (m \geq 2) \\ \xi_N^{(m)} &= (\rho/2) Q^{(m)} + m q Q^{(m-1)} & (m \geq 1) \end{aligned} \quad (2.7.28)$$

y por último, las derivadas m -ésimas de la función τ

$$\begin{aligned} R &= \rho^{1/2} \quad ; \quad R^{(m)} = (3 - 2 m) (q/\rho) R^{(m-1)} & (m \geq 1) \\ \tau^{(m)} &= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} R^{(n)} \xi_N^{(m-n)} & (m \geq 0) \end{aligned} \quad (2.7.29)$$

ó de la función τ^2 , si se estima más conveniente

$$\begin{aligned} (\xi_N^2)^{(m)} &= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \xi_N^{(n)} \xi_N^{(m-n)} & (m \geq 0) \\ (\tau^2)^{(m)} &= \rho (\xi_N^2)^{(m)} + 2 m q (\xi_N^2)^{(m-1)} & (m \geq 0) \end{aligned} \quad (2.7.30)$$

En lugar de las derivadas m -ésimas es posible calcular directamente los coeficientes del desarrollo de Taylor en torno a una aproximación ($x = x_0$). En dicho caso, para el cálculo de los coeficientes Q_m de la función Q , se aplica el mismo criterio que en las derivadas, usando las fórmulas recursivas apropiadas en función de la cercanía ó lejanía de las soluciones parabólicas, tal como se explica detalladamente al final del [Anexo B](#).

Una vez calculados los coeficientes Q_m , se calculan los coeficientes de ρ_m del desarrollo de ρ y los coeficientes $\xi_{N,m}$ del desarrollo de ξ_N

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 2 (q_s + q x_0) \quad ; \quad \rho_1 = 2 q \quad ; \quad \rho_m = 0 & (m \geq 2) \\ \xi_{N,0} &= q + (\rho_0/2) Q_0 \quad ; \quad \xi_{N,m} = (\rho_0/2) Q_m + q Q_{m-1} & (m \geq 1) \end{aligned} \quad (2.7.31)$$

Para el desarrollo de la función τ , se calculan sus coeficientes τ_m , a partir de los anteriores y los coeficientes R_m de R

$$\begin{aligned} R_0 &= \rho_0^{1/2} \quad ; \quad R_m = (3/m - 2) (q/\rho_0) R_{m-1} & (m \geq 1) \\ \tau_m &= \sum_{n=0}^m R_n \xi_{N,m-n} & (m \geq 0) \end{aligned} \quad (2.7.32)$$

En caso de elegir el desarrollo de la función τ^2 , en lugar de τ , se calculan sus coeficientes $(\tau^2)_m$, cambiado el desarrollo de R por el de ξ_N^2 con sus coeficientes $(\xi_N^2)_m$

$$(\xi_N^2)_m = \sum_{n=0}^m \xi_{N,n} \xi_{N,m-n} \quad (m \geq 0)$$

$$(\tau^2)_0 = \rho_0 (\xi_N^2)_0 \quad ; \quad (\tau^2)_m = \rho_0 (\xi_N^2)_m + 2 q (\xi_N^2)_{m-1} \quad (m \geq 1) \quad (2.7.33)$$

En caso de necesitar también las derivadas m -ésimas respecto a la variable q , se calcula

$$\rho_0 = 2 (q_s + q x) \quad ; \quad \rho_1 = -(1 - 2 x) \quad ; \quad \rho_m = 0 \quad (m \geq 2)$$

$$\xi_{N(0)} = q + (\rho_0/2) Q \quad ; \quad \xi_{N(1)} = 1 + \rho_1/2 Q \quad ; \quad \xi_{N(m)} = 0 \quad (m \geq 2)$$

Y, con ello, las derivadas m -ésimas de la función τ

$$R_0 = \rho_0^{1/2} \quad ; \quad R_m = (m - 3/2) ((1 - 2 x)/\rho) R_{m-1} \quad (m \geq 1)$$

$$(\tau)_m = R_m \xi_N + m R_{m-1} \xi_{N(1)} \quad (m \geq 0) \quad (2.7.34)$$

ó de la función τ^2 , si se estima más conveniente

$$(\tau^2)_{(0)} = \rho \xi_N^2$$

$$(\tau^2)_{(1)} = \rho_1 \xi_N^2 + 2 \rho \xi_N \xi_{N(1)}$$

$$(\tau^2)_{(2)} = 4 \rho_1 \xi_N \xi_{N(1)} + 2 \rho \xi_{N(1)}^2$$

$$(\tau^2)_{(3)} = 6 \rho_1 \xi_{N(1)}^2$$

$$(\tau^2)_{(m)} = 0 \quad (m \geq 4) \quad (2.7.35)$$

La *Ecuación Universal Basada en Q* cumple los objetivos de unificación y precisión planteados al comienzo, y está basada en la función Q conocida en la literatura, por lo que se considera una excelente elección para resolver el *Problema de Lambert* con generalidad. No obstante, a continuación se plantea una solución alternativa que proporciona una solución aún más simple y eficiente en la mayoría de los casos.

2.7.3 FUNCIÓN UNIVERSAL BASADA EN λ

Aunque la *Función Universal Basada en Q* cumple los objetivos de unificación y precisión planteados al comienzo, a continuación se desarrolla una solución alternativa basada en una nueva función λ , en lugar de Q , con la cual se consigue una forma todavía más simple de la *Función Temporal* y sus derivadas, además de otras ventajas relativas a la evaluación de los desarrollos como se verá en su momento.

Para ello, usando la propiedad ya mencionada anteriormente ($\alpha = \partial\gamma/\partial\psi$), junto con la igualdad $\partial x/\partial\psi = 1/2 \sin \psi$, se obtiene la siguiente expresión.

$$\xi_N = \frac{\omega_N}{\sin \psi} = \frac{\alpha \psi_N + \gamma}{\sin \psi} = \frac{\partial(\gamma \psi_N)}{\partial \psi} \left/ \left(2 \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \right. = \frac{\partial \beta}{\partial x}$$

donde β y β son la variable y función asociada definidas como

$$\beta = \beta(x, q; N) = 1/2 \gamma \psi_N$$

Desarrollando el segundo miembro, y usando la expresión de γ en función de x obtenida anteriormente, la función β puede ser reescrita del siguiente modo

$$\beta(x, q; N) = (x - q_S) \lambda(x; N) \quad (2.7.36)$$

donde λ y λ son la variable y función asociada definidas como

$$\lambda = \lambda(x; N) = \frac{\psi_N}{\sin \psi} \quad (2.7.37)$$

y teniendo en cuenta la definición de ψ_N

$$\lambda(x; N) = \lambda_0(x) + N \lambda_K(x) \quad (2.7.38)$$

donde $\lambda_0(x)$ y $\lambda_K(x)$ son funciones definidas como

$$\lambda_0(x) = \frac{\psi}{\sin \psi} \quad ; \quad \lambda_K(x) = \frac{\pi}{\sin \psi} \quad (2.7.39)$$

Usando las funciones $\psi(x)$ y $S_1(x)$ en función de x , se puede evaluar, también en función de x

$$\lambda_0(x) = \frac{\psi}{S_1} = \frac{1}{S_1/2} \operatorname{atan} \left(\frac{S_1/2}{1-x} \right) \quad ; \quad \lambda_K(x) = \frac{\pi}{S_1} \quad (2.7.40)$$

o si se prefiere la función λ directamente

$$\lambda(x; N) = \frac{\psi_N}{S_1} = \frac{1}{S_1/2} \left(\operatorname{atan} \left(\frac{S_1/2}{1-x} \right) + N \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.7.41)$$

Para el caso hiperbólico, prescindiendo de N por ser nulo, se tiene

$$\lambda(x) = \frac{\psi}{S_{H,1}} = \frac{1}{S_{H,1}} \operatorname{asinh} S_{H,1} \quad (2.7.42)$$

Ambas funciones, son más fácilmente derivables que las correspondientes a las soluciones basadas en ψ como variable independiente y la indeterminación es también más fácilmente evitable, como se muestra a continuación.

Con objeto de evaluar la función λ y sus derivadas de forma recursiva, evitando así la indeterminación existente, se recurre a obtenerla a partir de la ecuación diferencial resultante de derivar $\lambda(x;N)$ ($\lambda_0(x)$ tiene la misma ecuación) como sigue

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial \lambda}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1 - \lambda \cos \psi}{\frac{1}{2} \sin^2 \psi}$$

Resultando

$$\begin{aligned} \frac{S_2}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + C_1 \lambda &= 1 \\ 2x(1-x) \frac{\partial \lambda}{\partial x} + (1-2x) \lambda &= 1 \end{aligned} \quad (2.7.43)$$

Una vez más, esta ecuación es un caso particular de la ecuación diferencial estudiada en el [Anexo B](#) para la función genérica $f(x; \alpha, \beta)$. Por tanto, los resultados obtenidos para la función $f(x; \alpha, \beta)$ son directamente aplicables a la función $\lambda(x)$, sin más que sustituir los valores particulares de $\alpha = 1$ y $\beta = 1$. A continuación se resumen las expresiones correspondientes particularizadas para la función $\lambda(x;N)$.

Las derivadas de las funciones $\lambda^{(m)}(x;N)$ de órdenes m consecutivos cumplen la siguiente relación recursiva (U_m es la función unidad para $m = 1$ y nula para $m > 1$)

$$\lambda^{(m)} = \frac{(m-1)^2 \lambda^{(m-2)} - (m-1/2) C_1 \lambda^{(m-1)} + U_m/2}{S_2/4} \quad (m \geq 1) \quad (2.7.44)$$

La solución del núcleo de la ecuación diferencial es $\lambda_K(x)$ definida anteriormente (proporcional a f_K en el [Anexo B](#) y eligiendo la constante para que coincida con el factor que multiplica a N en λ), y su derivada m -ésima cumple la misma ecuación recursiva anterior de $\lambda^{(m)}$, pero eliminando el término de U_m .

De la misma forma que se definen, en el [Anexo B](#), las funciones $f_n(x)$ de orden n , a partir de los coeficientes f_n , se definen las funciones hipergeométricas auxiliares $\lambda_n(x)$, de orden n , obtenidas con los desarrollos de potencias de coeficientes a_n (nótese que $\lambda_0(x)$ está incluida en esta definición)

$$\lambda_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{n+j} x^j = a_n F(n+1, 1; n+3/2; x) \quad (n \geq 0) \quad (2.7.45)$$

donde los coeficientes a_n se calculan con las siguientes fórmulas

$$a_0 = 1 \quad ; \quad a_n = \frac{2n}{2n+1} a_{n-1} \quad (n \geq 1) \Rightarrow a_n = \frac{2^n n!}{(2n+1)!!} \quad (n \geq 0) \quad (2.7.46)$$

Las funciones de órdenes consecutivos cumplen la siguiente relación recursiva

$$\lambda_n(x) = a_n + x \lambda_{n+1}(x) \quad (n \geq 0) \quad (2.7.47)$$

y las derivadas de órdenes consecutivos

$$\lambda_n^{(m)} = \frac{(n+m)\lambda_n^{(m-1)} - (n+1/2)\lambda_{n+1}^{(m-1)}}{1-x} \quad (m \geq 1) \quad (2.7.48)$$

Estas fórmulas recursivas tienen una importancia transcendental, pues permiten obtener de forma alternativa cualquier derivada $\lambda_0^{(m)}(x)$ a partir de la familia de funciones hipergeométricas $\lambda_n(x)$ y sus derivadas, $\lambda_n^{(m)}(x)$, sin la pérdida de precisión existente en las expresiones generales de $\lambda_0^{(m)}(x)$, evitando la indeterminación inherente al problema.

Usando la función λ , la *Ecuación Temporal* a resolver es

$$\begin{aligned} \tau &= \tau(x, q; N) \quad ; \\ \tau(x, q; N) &= R \xi_N \quad ; \quad R = \mathbf{R}(x, q) = \rho^{1/2} \quad ; \quad \rho = \boldsymbol{\rho}(x, q) = 2 (q_S + q x) \quad ; \\ \beta &= \boldsymbol{\beta}(x, q; N) = (x - q_S) \lambda(x; N) \quad ; \quad \lambda = \lambda(x; N) = \lambda_0(x) + N \lambda_K(x) \quad ; \\ \xi_N &= \boldsymbol{\xi}_N(x, q) = \beta^1 = (x - q_S) \lambda^{(1)} + \lambda \end{aligned} \quad (2.7.49)$$

A esta *Ecuación Temporal* se la llama particularmente *Ecuación Universal Basada en λ* , por usar la *Variable Universal x* , que unifica todos los tipos de solución, y por estar basada en la función $\lambda(x; N)$. Como es obvio a la *Función Temporal* asociada se la llama *Función Universal Basada en λ* .

Por las mismas consideraciones realizadas para la función $\mathbf{Q}(x; N)$, se distinguen los casos cercanos a las soluciones parabólicas ($|x| < 1/4$ ó $|1-x| < 1/4$), donde se debe evitar la indeterminación existente, del resto de casos ($x \leq -1/4$ ó $1/4 \leq x \leq 3/4$), donde no se considera necesario evitar la indeterminación (caso usual), pudiendo calcular las derivadas directamente mediante la fórmula recursiva de $\lambda^{(m)}(x; N)$ en función de derivadas anteriores (con menor de coste computacional).

Repitiendo el mismo proceso que con la función $\mathbf{Q}(x; N)$, para evitar la indeterminación existente en las soluciones cercanas a los parabólicas, se propone la siguiente evaluación de la función $\lambda(x; N)$ y sus derivadas, separando el cálculo de $\lambda^{(m)}(x; N)$ en $\lambda_K^{(m)}(x)$ y $\lambda_0^{(m)}(x)$

$$\begin{aligned} \lambda^{(m)}(x) &= \lambda_0^{(m)}(x) + N \lambda_K^{(m)}(x) && \text{(recomendable para } |x| < 1/4) \\ \lambda^{(m)}(x) &= (N+1) \lambda_K^{(m)}(x) - (-1)^m \lambda_0^{(m)}(1-x) && \text{(recomendable para } x > 3/4) \end{aligned} \quad (2.7.50)$$

donde se ha tenido en cuenta la propiedad 1 del [Anexo C](#) en el segundo caso, y las funciones $\lambda_K^{(m)}(x)$, sólo para el caso elíptico cuando proceda, se calculan como

$$\lambda_K = \frac{\pi}{S_1} \quad ; \quad \lambda_K^{(m)} = \frac{(m-1)^2 \lambda_K^{(m-2)} - (m-1/2) C_1 \lambda_K^{(m-1)}}{S_2/4} \quad (x \geq 0, m \geq 1) \quad (2.7.51)$$

Las funciones $\lambda_0^{(m)}$, desde $m = 0$ hasta un orden máximo elegido $m = p$, se calculan recursivamente, a partir de la evaluación directa de λ_p mediante el desarrollo de potencias en $x = 0$, truncado hasta el término k determinado por la precisión requerida. Las siguientes expresiones están desarrolladas para x cercano a 0, cuando x esté cercano a 1 debe sustituirse x por $(1-x)$.

$$\lambda_p(x) = \sum_{j=0}^k a_{p+j} x^j$$

$$\lambda_n(x) = a_n + x \lambda_{n+1}(x) \quad (p-1 \geq n \geq 0)$$

$$\lambda_n^{(m)} = \frac{(n+m) \lambda_n^{(m-1)} - (n+1/2) \lambda_{n+1}^{(m-1)}}{1-x} \quad (p-1 \geq n \geq 0, 1 \leq m \leq p-n) \quad (2.7.52)$$

En cualquier otro caso, se puede usar la relación recursiva entre las derivadas $\lambda^{(m)}$ de órdenes consecutivos (U_m es la función unidad para $m = 1$ y nula para $m > 1$)

$$\lambda(x; N) = \frac{1}{S_1/2} \left(\operatorname{atan} \left(\frac{S_1/2}{1-x} \right) + N \frac{\pi}{2} \right) \quad (x \geq 0)$$

$$\lambda(x) = \frac{1}{S_{H,1}} \operatorname{asinh} S_{H,1} \quad \text{o} \quad \lambda(x) = \frac{1}{S_{H,1}/2} \operatorname{atanh} \left(\frac{S_{H,1}/2}{1-x} \right) \quad (x \leq 0)$$

$$\lambda^{(m)} = \frac{(m-1)^2 \lambda^{(m-2)} - (m-1/2) C_1 \lambda^{(m-1)} + U_m/2}{S_2/4} \quad (m \geq 1) \quad (2.7.53)$$

Las variables y derivadas intermedias, se evalúan como sigue

$$\rho^{(0)} = 2(q_S + q x) \quad ; \quad \rho^{(1)} = 2q \quad ; \quad \rho^{(m)} = 0 \quad (m \geq 2)$$

$$\xi_N^{(m)} = \beta_N^{(m+1)} = (x - q_S) \lambda^{(m+1)} + (m+1) \lambda^{(m)} \quad (2.7.54)$$

y con ellas las derivadas m -ésimas de la función τ

$$R^{(0)} = \rho^{1/2} \quad ; \quad R^{(m)} = (3 - 2m) (q/\rho) R^{(m-1)} \quad (m \geq 1)$$

$$\tau^{(m)} = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} R^{(n)} \xi_N^{(m-n)} \quad (2.7.55)$$

ó de la función τ^2 , según convenga

$$(\xi_N^2)^{(m)} = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \xi_N^{(n)} \xi_N^{(m-n)}$$

$$(\tau^2)^{(m)} = \rho (\xi_N^2)^{(m)} + 2 m q (\xi_N^2)^{(m-1)} \quad (2.7.56)$$

Por supuesto, en cualquier caso, desde el punto de vista de la eficiencia computacional, deben evitarse cálculos repetidos, almacenando lo necesario para que pueda volver a usarse cuando proceda (sin necesidad de hacer el cálculo nuevamente). Por ejemplo, en la secuencia de cálculo de las funciones λ_m , $\lambda_n^{(m)}$, $\lambda^{(m)}$, $\xi_N^{(m)}$, $R^{(m)}$ ó $(\xi_N^2)^{(m)}$, y $(\tau^2)^{(m)}$, es necesario calcular cada una de ellas para todos los valores de m antes de pasar a evaluar la siguiente (primero λ_m para todos los valores de m , luego $\lambda_n^{(m)}$, para todos los valores de n y m , y así sucesivamente).

Por otro lado, las derivadas m -ésimas respecto a la variable q son

$$\pi(x, q; N) = R \xi_N \quad ; \quad R = \rho^{1/2} \quad ; \quad \xi_N = (x - q_S) \lambda^{(1)} + \lambda$$

$$\rho = 2 (q_S + q x) \quad ; \quad \rho_{(1)} = -(1 - 2 x) \quad ; \quad \rho_{(m)} = 0 \quad (m \geq 2)$$

$$\xi_{N(1)} = \lambda^{(1)}/2 \quad ; \quad \xi_{N(m)} = 0 \quad (m \geq 2) \quad (2.7.57)$$

y con ellas las derivadas m -ésimas de la función τ

$$R_{(m)} = (m - 3/2) ((1 - 2 x)/\rho) R_{(m-1)} \quad (m \geq 1)$$

$$\tau_{(m)} = R_{(m)} \xi_N + m R_{(m-1)} \xi_{N(1)} \quad (m \geq 1) \quad (2.7.58)$$

ó de la función τ^2 , según convenga

$$(\tau^2) = \rho \xi_N^2$$

$$(\tau^2)_{(1)} = \rho_{(1)} \xi_N^2 + 2 \rho \xi_N \xi_{N(1)}$$

$$(\tau^2)_{(2)} = 4 \rho_{(1)} \xi_N \xi_{N(1)} + 2 \rho \xi_{N(1)}^2$$

$$(\tau^2)_{(3)} = 6 \rho_{(1)} \xi_{N(1)}^2$$

$$(\tau^2)_{(m)} = 0 \quad (m \geq 4) \quad (2.7.59)$$

Por último, si se quiere obtener directamente un desarrollo de Taylor de la *Función Temporal* en un valor particular ($x = x_0$), se pueden calcular los coeficientes de forma similar a las derivadas, con los resultados mostrados a continuación, obtenidos del [Anexo B](#) para la función $f(x; 1, 1)$.

$$\lambda(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m (x - x_0)^m \quad ; \quad A_m = \lambda^{(m)}(x_0) / m! \quad (2.7.60)$$

donde los coeficientes A_m , en los casos cercanos a una solución parabólica, son

$$A_m = a_{0,m} + N A_{K,m} \quad (\text{si } |x_0| \leq 1/4)$$

$$A_m = (N+1) A_{K,m} - (-1)^m a_{0,m} \quad (\text{si } x_0 \geq 3/4) \quad (2.7.61)$$

siendo los coeficientes $A_{K,m}$

$$A_{K,0} = \frac{\pi}{S_1(x_0)} \quad ; \quad A_{K,1} = -\frac{C_1(x_0)}{S_2(x_0)/2} A_{K,0} \quad (x_0 \geq 0)$$

$$A_{K,m} = \frac{(m-1) A_{K,m-2} - (m-1/2) C_1(x_0) A_{K,m-1}}{m S_2(x_0)/4} \quad (m \geq 2) \quad (2.7.62)$$

y los coeficientes $a_{0,m}$, desde $m = 0$ hasta un orden máximo elegido $m = p$, se calculan recursivamente, partiendo de una única evaluación directa de la función $\lambda_p(x_1)$ en $x_1 = x_0$ ó $x_1 = 1 - x_0$ (según sea x_0 cercano a 0 ó 1 respectivamente), mediante el desarrollo de potencias de λ_p en el origen, truncado hasta el término k determinado por la precisión requerida para el argumento x_1 , del siguiente modo

$$a_{p,0} = \lambda_p(x_1) = \sum_{j=0}^k a_{p+j} x_1^j$$

$$a_{n,0} = a_n + x_1 a_{n+1,0} \quad (p-1 \geq n \geq 0)$$

$$a_{n,m} = \frac{(n+m)a_{n,m-1} - (n+1/2)a_{n+1,m-1}}{m(1-x_1)} \quad (p-1 \geq n \geq 0, 1 \leq m \leq p-n) \quad (2.7.63)$$

En cualquier otro caso, se puede usar la relación recursiva entre las derivadas $\lambda^{(m)}$ de órdenes consecutivos

$$A_0 = \lambda(x_0; N) = \frac{1}{S_1(x_0)/2} \left(\operatorname{atan} \left(\frac{S_1(x_0)/2}{1-x_0} \right) + N \frac{\pi}{2} \right) \quad (x \geq 0)$$

$$A_0 = \lambda(x_0) = \frac{1}{S_{H,1}(x_0)} \operatorname{asinh} S_{H,1}(x_0) = \frac{1}{S_{H,1}(x_0)/2} \operatorname{atanh} \left(\frac{S_{H,1}(x_0)/2}{1-x_0} \right) \quad (x \leq 0)$$

$$A_1 = \frac{1 - C_1(x_0) A_0}{S_2(x_0)/2}$$

$$A_m = \frac{(m-1) A_{m-2} - (m-1/2) C_1(x_0) A_{m-1}}{m S_2(x_0)/4} \quad (m \geq 2) \quad (2.7.64)$$

Como inciso, es destacable la solución correspondiente a la *Elipse Esencial* ($x_0 = 1/2$), donde $C_1 = 0$ y $S_1 = 1$, y los coeficientes anteriores quedan tan simples como

$$A_0 = (N+1/2) \pi \quad ; \quad A_1 = 2 \quad ; \quad A_m = 4 \frac{(m-1)}{m} A_{m-2} \quad (m \geq 2) \quad (2.7.65)$$

Estos coeficientes A_n , particularizados en $x_0 = 1/2$, se corresponden con el desarrollo de una función $\sigma(z;N)$, definida a partir de la función λ del siguiente modo

$$\sigma(z;N) \equiv \lambda(1/2+z;N) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \quad (2.7.66)$$

Se podría hacer un estudio detallado de la función σ , similar al realizado para la función λ , para el estudio de las soluciones cercanas a la *Elipse Esencial*, pero debido a la necesaria limitación de alcance de esta Tesis Doctoral, se deja como uno de los posibles desarrollos futuros [\[FI\]](#).

Continuando con los desarrollos para cualquier valor de x_0 , una vez calculados los coeficientes A_m , se calculan los coeficientes de ρ_m del desarrollo de $\rho(x)$, y los coeficientes β_m y $(\xi_N)_m$ de los desarrollos de $\beta(x)$ y $\xi_N(x)$

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 2 (q_S + q x_0) \quad ; \quad \rho_1 = 2 q \quad ; \quad \rho_m = 0 & (m \geq 2) \\ \beta_0 &= -q_S A_0 \quad ; \quad \beta_{m+1} = A_m + (x_0 - q_S) A_{m+1} & (m \geq 0) \\ (\xi_N)_m &= (m+1) \beta_{m+1} & (m \geq 0) \end{aligned} \quad (2.7.67)$$

Por último, se calculan los coeficientes τ_m del desarrollo de la función $\tau(x)$, a partir de los anteriores y de los coeficientes R_m de $R(x)$

$$\begin{aligned} R_0 &= \rho_0^{1/2} \quad ; \quad R_m = (3/m - 2) (q/\rho_0) R_{m-1} & (m \geq 1) \\ \tau_m &= \sum_{n=0}^m R_n (\xi_N)_{m-n} & (m \geq 0) \end{aligned} \quad (2.7.68)$$

En caso de elegir el desarrollo de la función τ^2 , en lugar de τ , se calculan sus coeficientes $(\tau^2)_m$, cambiando el desarrollo de R por el de ξ_N^2 con sus coeficientes $(\xi_N^2)_m$

$$\begin{aligned} (\xi_N^2)_m &= \sum_{n=0}^m (\xi_N)_n (\xi_N)_{m-n} & (m \geq 0) \\ (\tau^2)_0 &= \rho_0 (\xi_N^2)_0 \quad ; \quad (\tau^2)_m = \rho_0 (\xi_N^2)_m + 2 q (\xi_N^2)_{m-1} & (m \geq 1) \end{aligned} \quad (2.7.69)$$

Nótese que los algoritmos indicados permiten obtener el desarrollo de la *Función Universal* en torno a cualquier valor particular x_0 con suma facilidad a partir de los coeficientes A_m del desarrollo de la función $\lambda(x)$. Es decir, toda la complicación del problema se traslada a la función $\lambda(x)$, siendo esta una función mucho más sencilla de que las usadas en la literatura para resolver el *Problema de Lambert*.

Con las derivadas m -ésimas calculadas (o coeficientes del desarrollo), se puede aplicar cualquier método iterativo de cualquier orden para resolver el *Problema de Lambert*.

Como ejemplo, a partir de los coeficientes $(\tau^k)_m$ del desarrollo de la función $\tau^k(x)$ en torno a una aproximación x_0 , y usando el desarrollo de la función inversa descrito en el

[Anexo F](#), aplicado a la función $\tau^k(x)$, que cumple la ecuación $\tau^k = \tau^k(x)$, se pueden obtener los coeficientes x_m , del desarrollo de la función $x(\tau^k)$, que cumple la ecuación $x = x(\tau^k)$. El valor usual de k es obviamente la unidad, pero muchas veces es recomendable un valor de 2, para evitar la raíz cuadrada en los desarrollos y aumentar así la eficiencia del método. El resultado, usando los coeficientes auxiliares $w_{m,n}$, es el siguiente

$$x = \sum_{m=0}^{\infty} x_m (\tau^k - (\tau^k)_0)^m \quad (\text{truncar hasta grado } p-1 \text{ para un método de orden } p)$$

$$w_{1,0} = 1 / (\tau^k)_1 \quad ; \quad w_{1,m} = -w_{1,0} \sum_{i=1}^m (\tau^k)_{i+1} w_{1,m-i} \quad (m \geq 1)$$

$$w_{m,n} = \sum_{i=0}^n w_{m-1,i+1} w_{1,n-i} \quad (m \geq 2, n \geq 0)$$

$$x_m = w_{m,0} \quad (m \geq 1) \quad (2.7.70)$$

En este apartado se ha obtenido la *Ecuación Universal Basada en λ* que proporciona una solución unificada para todos los tipos de cónica y evita la indeterminación en los puntos parabólicos. Aunque esto mismo ya se consigue con la *Ecuación Universal Basada en Q* , la ventaja de la función λ radica sobre todo por su simplicidad de evaluación, de ella misma y de sus derivadas de cualquier orden respecto a la variable universal. El coste computacional para evitar la indeterminación en las cercanías de los puntos parabólicos (igual que ocurre con la función Q) puede ser bastante alto cuando se requiere una derivada de orden también alto, pero la función λ tiene la gran ventaja de ser muy simple de evaluar de forma recursiva.

En lo sucesivo, cuando se mencione la *Ecuación Universal* o la *Función Universal* sin ningún calificativo, se entenderá que es la basada en λ , por ser, en general, la mejor opción para las disponibles para resolver el *Problema de Lambert*.

Del mismo modo que se estudió para la *Función Elemental*, a continuación se estudia también la gráfica de la *Función Universal* y su eficiencia (coste y precisión).

2.7.4 GRÁFICA DE LA FUNCIÓN UNIVERSAL

Evaluando la función $\tau(x,q;N)$ en función de x para diferentes valores de q , se obtienen las distintas gráficas mostradas en la figura 10, para los casos de simple y múltiple revolución ($N = 0$ y $N > 0$).

En las soluciones elípticas se ha incluido la curva correspondiente a la *Elipse Fundamental* y en las gráficas de múltiple revolución además la curva de tiempo de transferencia mínimo. La curva correspondiente a la *Elipse Esencial* se corresponde con el eje $\psi = \pi/2$ por lo que no se considera necesario incluirla.

a) Caso Hiperbólico.

b) Caso Elíptico, $N = 0$.

c) Caso Unificado, $N = 0$ (unión de todos los casos, salvo múltiple revolución).

d) Caso Elíptico de Múltiple Revolución para $N = 1$ (representativo de $N > 0$).

Figura 10. Función Temporal del Problema de Lambert en función de x .

La figura 10d, muestra el caso de múltiple revolución para $N = 1$, sin embargo, para el caso general $N > 0$ se obtienen gráficas similares. La única diferencia significativa consiste en que la zona central donde se cruzan todas la gráficas tiende a centrarse en el eje $\psi = \pi/2$ al aumentar el valor de N .

2.7.5 EFICIENCIA DE LA FUNCIÓN UNIVERSAL

Con la *Función Universal* se consigue evitar la pérdida de precisión en la cercanía de las soluciones parabólicas a costa de incrementar el coste computacional.

Según se explica en el [Anexo B](#), para la evaluación de Q ó λ , se recomienda distinguir los casos cercanos a los parabólicos de los no cercanos.

A continuación para simplificar, se menciona sólo la función λ , pero teniendo en cuenta que lo mismo aplica a la función Q , salvo que se diga lo contrario. Nótese que la evaluación de estas funciones constituye la parte más importante en la evaluación de la *Función Universal*, por lo que se considera suficientemente representativa para tener una idea aproximada de su eficiencia (tanto en coste computacional como en precisión).

En la práctica, se pueden usar las siguientes condiciones de cercanía a las soluciones parabólicas:

$|x| < 1/4$ Cercanía a la solución parabólica en el origen ($x = 0$).

$|1-x| < 1/4$ Cercanía a la solución parabólica límite ($x = 1$).

En los casos no cercanos a ninguna solución parabólica, la función λ se puede calcular directamente, sin pérdida de precisión apreciable, haciendo uso de la función $\psi(x)$ para el caso elíptico ó de la función $\Psi(x)$ para el caso hiperbólico.

En el caso cercano a la solución parabólica (de tiempo finito) en el origen ($x = 0$), se deben calcular las funciones particular y del núcleo por separado haciendo después la composición. A su vez, la solución particular se calcula recursivamente a partir de funciones de orden superior (λ_n) recursivamente, evaluando una única función directamente (la de mayor orden).

En el caso cercano a la solución parabólica (de tiempo infinito) en el límite ($x = 1$), también se deben calcular las funciones particular y del núcleo por separado pero aplicando la propiedad 1 del [Anexo C](#) para cambiar la variable x por $(1-x)$ para poder evaluar la solución particular con un argumento pequeño de la misma forma que en el otro caso anterior ($x = 0$).

Nótese que la necesidad de separar la solución particular de la solución del núcleo en se debe a que no se pueden aplicar las fórmulas recursivas (que evitan la indeterminación de la particular) a la solución conjunta. Sin embargo, al ser los coeficientes del desarrollo del núcleo mucho mayores que los homólogos de la solución particular, no es necesario calcular estos últimos coeficientes con tanta precisión como en el caso

cercano al origen. Es decir, cada coeficiente de la solución particular sólo debe tener la precisión absoluta máxima exigida al coeficiente del mismo grado en el desarrollo de la solución del núcleo, con un valor absoluto mucho mayor, lo cual se traduce en una precisión relativa necesaria mucho menor. No obstante, siendo conservativos con la decisión, no se va aprovechar esta circunstancia, dejando este estudio para un posible desarrollo futuro^[E2]. Es más, debido a este hecho, es muy probable que no sea necesaria la separación de la solución particular y la del núcleo, y se pueda aplicar la fórmula recursiva en función de derivadas anteriores, sin pérdida relativa de precisión.

En ambos casos cercanos a una solución parabólica, donde se calcula por separado las funciones particular (λ_0) y del núcleo (λ_K), debe tenerse en cuenta que para calcular las funciones $\lambda_0, \lambda_0^{(1)}, \dots, \lambda_0^{(m)}$, sólo es necesario evaluar directamente una única función λ_m (mediante el desarrollo de potencias mostrado anteriormente o cualquier otro método de evaluación de funciones hipergeométricas), el resto de funciones, $\lambda_0, \lambda_0^{(1)}, \dots, \lambda_0^{(m-1)}$, se pueden calcular recursivamente mediante las formulas recursivas de λ_n ó $\lambda_n^{(m)}$.

Teniendo en cuenta esto último, el número de operaciones elementales de coma flotante (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones) necesarias para calcular las derivadas de λ_0 , hasta un orden m , con las fórmulas recursivas anteriores, a partir de λ_m (evaluada mediante desarrollo), es aproximadamente $(4m + 2)$ por cada incremento de m , es decir $2(m + 1)^2$ operaciones para todas las derivadas hasta orden m , que aumenta de forma cuadrática con m . El valor mínimo es m de 2 (18 operaciones), el más usual es 3 (32 operaciones), algunas veces 4 (50 operaciones) y raras veces 5 (72 operaciones). Un valor más alto si tendría un extra-coste considerable y debería, por tanto, estar justificado su uso por otras razones. En realidad, debido a que los primeros coeficientes son muchas veces 1 y 2, el coste de las operaciones disminuye sensiblemente. Teniendo en cuenta que la evaluación de una función trascendente, como puede ser una función exponencial o trigonométrica, puede requerir del orden de más de 20 operaciones para *doble precisión*, no resulta un computo tan excesivo como podría pensarse en principio, sobre todo teniendo en cuenta que se obtienen todas las derivadas a la vez y sin pérdida de precisión debido a la indeterminación en el origen.

Este método iterativo para calcular sin indeterminación las derivadas de λ_0 hasta orden m , necesita la evaluación de un único desarrollo de potencias para la función λ_m . El inconveniente de aplicar este método directamente está en el rango de aplicación práctica del argumento x , restringido a un entorno reducido cerca del origen.

El desarrollo de potencias de la función $\lambda_n(x)$ converge para $|x| < 1$, por lo que las soluciones hiperbólicas con $x < -1$ quedan excluidas de usar dicho desarrollo. Además, cuando $|x|$ está próximo a la unidad, la convergencia es tan lenta que resulta prácticamente imposible de evaluar. Por tanto, para poder evaluar la función $\lambda_n(x)$ con eficiencia, el valor del argumento x debe ser lo más cercano posible al origen, de modo que el número de términos necesarios para conseguir la precisión requerida sea lo más bajo posible y, en consecuencia, el coste computacional. Para conseguirlo, se recurre a las propiedades de reducción de argumento de las funciones λ_n demostradas en el [Anexo C](#) ([Anexo D](#) para la función Q), como se muestra a continuación.

Cuando el argumento x es suficientemente pequeño ($|x| < 1/2$, por ejemplo), La función $\lambda_n(x)$ se puede evaluar mediante un desarrollo truncado a los primeros k términos, asumiendo un error (e_k) del orden del primer término despreciado en el desarrollo.

$$\lambda_n(x) = \sum_{j=0}^{k-1} a_{n+j} x^j + e_k \quad ; \quad e_k \approx a_{n+k} x^k \quad (k \geq 1, n \geq 0)$$

Para conseguir una precisión requerida indicada por el número (b) de dígitos binarios (bits) significativos que deben ser exactos, se debe cumplir

$$\text{Error relativo} = (e_k/a_n) = (a_{n+k}/a_n) |x|^k \leq 2^{-b} = \text{Error relativo máximo}$$

Llamando x_b al valor positivo máximo de x que cumpla con la precisión (b), se puede calcular

$$|x|^k \leq x_b^k = 2^{-b} / (a_{n+k}/a_n)$$

estableciendo las siguientes relaciones entre x_b , k y b (fijadas 2 se calcula la otra)

$$x_b = (2^{-b} / (a_{n+k}/a_n))^{1/k}$$

$$b = -(\log_2(a_{n+k}/a_n) + k \log_2(x_b))$$

$$k = -(\log_2(a_{n+k}/a_n) + b) / \log_2(x_b)$$

En consecuencia, para todo $|x| \leq x_b$, el desarrollo de potencias de $\lambda_n(x)$, truncado con k términos, tendrá al menos la precisión (b) requerida.

Nótese que para conseguir la precisión requerida en la evaluación de la función λ_n mediante su desarrollo de potencias, no es necesario que los coeficientes a_{n+j} sean todos calculados con la misma precisión. Llamando E_{n+j} al error absoluto de a_{n+j} , para mantener la precisión requerida en el desarrollo, debe cumplirse la condición

$$(|E_{n+j}|/a_n) x_b^j \leq 2^{-b}$$

y usando el valor de x_b en función de b y k , el error relativo de a_{n+j} es

$$(|E_{n+j}|/a_{n+j}) \leq (a_{n+k}/a_{n+j}) (2^{-b} / (a_{n+k}/a_n)) / x_b^j = (a_{n+k}/a_{n+j}) x_b^{k-j}$$

Se deduce que cuando $j \geq k$, y considerando como peor estimación del coeficiente a_{n+j} una estimación nula de dicho coeficiente, se cumple entonces $|E_{n+j}| \leq a_{n+j}$, cumpliendo por tanto la condición anterior y confirmando que se puede truncar el desarrollo en el término k , como era de esperar.

Para los términos del desarrollo truncado, el error relativo se puede transformar del siguiente modo

$$(|E_{n+j}|/a_{n+j}) \leq (a_{n+k}/a_n) x_b^k / ((a_{n+j}/a_n) x_b^j) = 2^{-b} / ((a_{n+j}/a_n) x_b^j)$$

deduciendo que el mínimo número de bits de precisión (b_j) para el término a_{n+j} debe ser

$$b_j = b - p_j \quad ; \quad p_j = -(\log_2(a_{n+j}/a_n) + j \log_2(x_b))$$

siendo p_j el número de bits que se pueden perder de precisión en el cálculo del término a_{n+j} . Cuando los términos a_n son todos del mismo orden, como es el caso, se puede aproximar

$$b_j \approx -\log_2(x_b) (k - j) \approx b (1 - j / k)$$

Esta expresión indica que la máxima pérdida de bits permitida en los términos del desarrollo truncado, para conservar la precisión requerida, es lineal con el grado asociado a cada término, desde $b_0 = b$ hasta $b_k = 0$. Esta conclusión es muy importante porque permite reducir significativamente el coste computacional asociado a los sucesivos términos del desarrollo.

Las precisiones (b) usadas normalmente en el cálculo numérico actual basado en aritmética de coma flotante se corresponden con 24 bits para *simple precisión* y 53 bits para *doble precisión*. Según se puede ver en la figura 11, para evaluar la función λ_0 con estas precisiones para un argumento medio, como puede ser $x = 1/2$, se requieren 22 términos para *simple precisión* y 50 para *doble precisión*. Este coste es elevado, agravándose extremadamente cuanto más se acerca el argumento a la unidad.

Aunque en los casos no cercanos a la solución parabólica no es necesario usar el desarrollo de potencias para evaluar la función $\lambda_0(x)$, pues se puede calcular usando las funciones auxiliares $\psi(x)$ ó $\Psi(x)$, se expone a continuación un estudio sobre la opción menos costosa en caso de usar el desarrollo de potencias para cualquier valor del argumento x .

Para simplificar el cálculo lo máximo posible se recurre a la reducción del valor máximo de $|x|$ usando las funciones de reducción $y_k(x)$, mostradas en la figura 11, deducidas de cada una de las propiedades 1-3 del [Anexo C](#) (para la función Q , sólo se puede aplicar la propiedad 1 del [Anexo D](#)).

$$y_1 = y_1(x) = 1 - x \quad ; \quad \lambda_0(x) = \lambda_K(x) - \lambda_0(y_1)$$

$$y_2 = y_2(x) = (1 - S_1(x)) / 2 \quad ; \quad \lambda_0(x) = (\pi/2 - C_1(x) \lambda_0(y_2)) / S_1(x)$$

$$y_3 = y_3(x) = x / (2 (1 + (1 - x)^{1/2})) \quad ; \quad \lambda_0(x) = \lambda_0(y_3) / (1 - x)^{1/2}$$

donde, como ya se ha definido anteriormente

$$S_1(x) = 2 (x (1 - x))^{1/2} \quad ; \quad C_1(x) = 1 - 2x \quad ; \quad \lambda_K(x) = \pi / S_1(x)$$

Para cada reducción aplicada $y_k = y_k(x)$, existe una relación para calcular $\lambda_n(x)$ en función de $\lambda_n(y_k)$, donde se ha elegido la reducción convenientemente para que el argumento y_k sea menor que x , en valor absoluto y, en consecuencia, también se reduce el número de términos necesarios para el cálculo de λ_n .

Figura 11. Curvas de reducción $y_k = y_k(x)$, $k = 1-3$, para calcular $\lambda_0(x)$ en función de $\lambda_0(y_k)$, en el caso elíptico ($0 \leq x < 1$).

Una reducción y_k será conveniente cuando el ahorro de coste computacional obtenido en la evaluación de la función λ_n con el argumento y_k , en lugar de x , sea mayor que el coste asociado a la propia reducción. Según se describe en [1.2.2.4](#), se puede estimar el coste computacional contabilizando el coste de las operaciones elementales necesarias para realizar el cálculo correspondiente. Por consiguiente, el ahorro en la evaluación de λ_n es de una suma y un producto por término ahorrado en el desarrollo, donde se ha supuesto que los coeficientes a_n del desarrollo están previamente calculados (en caso contrario, el coste se incrementa innecesariamente). Con este supuesto, el número de operaciones de un desarrollo truncado de λ_n es de una suma y un producto por cada término adicional al primero, pues el primero no requiere ninguna operación.

Nótese que las reducciones se pueden aplicar recursivamente mientras se obtenga un beneficio. Sin embargo, según se aprecia en la figura 11, las reducciones y_1 e y_2 sólo resultan útiles la primera vez, pues en la siguiente aplicación el argumento aumentaría en lugar de reducirse. Sólo la reducción y_3 podría seguir siendo beneficiosa en sucesivas aplicaciones dependiendo de la precisión buscada.

Para calcular el coste computacional de las reducciones téngase en cuenta las indicaciones mencionadas en [1.2.2.4](#) y las siguientes adicionales:

- Solo se va a considerar el caso de *doble precisión*. La *simple precisión* es poco utilizada en cálculos científicos. Las librerías matemáticas a menudo sólo calculan internamente las funciones en *doble precisión*.
- Los costes de las operaciones aritméticas y de algunas de las funciones intrínsecas de interés se muestran en la tabla 2, usando el coste de una suma como unidad. Por ejemplo, la división tiene un coste equivalente a 21 sumas, y la raíz cuadrada a 23.

- El coste de $C_1(x)$ es de 2 sumas (una resta y un producto).
- El coste de $S_1(x)$ es de 26 sumas (una resta, dos productos y una raíz). Sin embargo, siempre se calcula junto con la *Función Temporal* salvo en el caso de simple revolución cercano a la solución parabólica de tiempo finito ($|x| < 1/4$, $N = 0$) donde sólo es aplicable la reducción y_2 que no usa $S_1(x)$. Por tanto, $S_1(x)$ se supone conocida para las posibles reducciones.
- El coste de $1/S_1(x)$ es de 21 sumas (una división), suponiendo calculado $S_1(x)$ previamente, en caso contrario el coste es de 47 sumas. Si embargo, por la misma razón que $S_1(x)$, $1/S_1(x)$ también se supone conocido para las posibles reducciones. Nótese que si se requiere dividir por $S_1(x)$ más de una vez es recomendable calcular la inversa y aplicar el producto en todos los casos.
- El coste de $\lambda_K(x)$ es el mismo que el de $1/S_1(x)$ y también se supone conocido.
- El coste de un desarrollo es de 2 veces el número de términos menos uno, o dos veces el grado del último término.

En consecuencia, el coste adicional de las reducciones es el siguiente:

- El coste adicional de y_1 (útil sólo en la primera reducción) es de 1 suma.
- El coste adicional de y_2 (útil sólo en la primera reducción) es de 5 sumas.
- El coste adicional de y_3 es de 68 sumas (3 sumas, 2 divisiones y una raíz), una menos si es la primera reducción. Este coste es tan elevado que es preferible el desarrollo con muchos más términos que aplicar la reducción.

Debido a que la reducción y_2 sólo es útil para obtener λ_0 , se van a distinguir dos casos, cuando se quiere calcular sólo λ_0 y cuando se quiere calcular cualquier λ_n ($n \geq 0$).

Para calcular λ_0 aplicando la reducción más conveniente sólo hay que escoger la de menor valor de las tres para cada x . Según se puede ver en la figura 11, para el caso elíptico, con x en el intervalo $[0,1]$, se deben distinguir tres intervalos, $[0, x_B]$, $[x_B, x_A]$ y $[x_A, 1]$, separados por los puntos A y B , donde la curva y_2 se cruza con las curvas y_1 e y_3 , respectivamente. Las coordenadas de los puntos A y B , se calculan igualando las curvas $y_2(x_B) = y_3(x_B)$ e $y_2(x_A) = y_1(x_A)$, resultando

$$x_B = 1/4 = 0.25$$

$$x_A = 1/2 + 2^{1/2}/4 \approx 0.854$$

cumpliendo

$$y_B = y_2(x_B) = y_3(x_B) = 1/4/(2+3^{1/2}) \approx 0.067$$

$$y_A = y_2(x_A) = y_1(x_A) = 1/2 - 2^{1/2}/4 = 1/2/(2+2^{1/2}) \approx 0.146$$

Según el intervalo, se aplican las siguientes reducciones.

- Si $x \in [0, x_B] = [0, 0.25]$, con $y_3 = y_3(x)$, se consigue $y_3 \in [0, y_B] \approx [0, 0.067]$.
- Si $x \in [x_B, x_A] \approx [0.25, 0.854]$, con $y_2 = y_2(x)$, se consigue $y_2 \in [0, y_A] \approx [0, 0.146]$.
- Si $x \in [x_A, 1] \approx [0.854, 1]$, con $y_1 = y_1(x)$, se consigue $y_1 \in [0, y_A] \approx [0, 0.146]$.

Según la figura 12 o 13, para evaluar la función λ_0 en el intervalo $[0, y_B]$, se requieren 13 términos (con un coste de 48 sumas), y para el intervalo $[0, y_A]$, se requieren 18 términos (con un coste de 34 sumas). Aplicando una nueva reducción y_3 , sobre la reducción anterior, Según el intervalo

- Si $y_k \in [0, y_B] \approx [0, 0.067]$, con $y_{3B} = y_3(y_k)$, se consigue $y_{3B} \in [0, y_B] \approx [0, 0.017]$.
- Si $y_k \in [0, y_A] \approx [0, 0.146]$, con $y_{2A} = y_2(y_k)$, se consigue $y_{2A} \in [0, y_C] \approx [0, 0.038]$.

En el primer caso, hay un descenso de 13 a 9 términos, por lo que el ahorro de 8 sumas (2 veces la diferencia de términos), no compensa el coste de 68 sumas de la reducción.

En el segundo y tercer caso, hay un descenso de 18 a 11 términos, siendo el ahorro de 14 sumas, por lo que tampoco aporta ningún beneficio la reducción.

Según estas consideraciones, la solución óptima corresponde como mucho a una reducción (la indicada anteriormente), siendo el coste computacional, el siguiente según el intervalo asociado a cada una de las reducciones.

- $[0, x_B]$: 67 de y_3 + 24 de λ_0 = 91 sumas.
- $[x_B, x_A]$: 5 de y_2 + 34 de λ_0 = 39 sumas.
- $[x_A, 1]$: 1 de y_1 + 34 de λ_0 = 35 sumas.

Aunque el número de operaciones está correctamente acotado, en el primer caso, es posible que la reducción y_3 no sea necesaria. Esto ocurre cuando el coste del desarrollo sin ninguna reducción es menor que el coste total de 91 operaciones. El máximo número de términos del desarrollo de λ_0 , por debajo de este coste es de 46 términos, que corresponde a 90 sumas. Teniendo en cuenta la relación de x_b con la precisión (b) y el número de términos (k), $x_b = (2^{-b} / (a_{n+k}/a_n))^{1/k}$, según se muestra la figura 13, cuando x está en el intervalo $[0, 0.48]$, es mejor evaluar directamente el desarrollo sin ninguna reducción, porque no se obtiene con ello ningún beneficio. En definitiva, la reducción resulta y_3 no compensa en el intervalo $[0, x_B]$. En consecuencia la reducción y_2 es aplicable hasta el punto F de la figura 11, cuyas coordenadas se calculan igualando $y_F = y_2(x_F) = x_F$, resultando

$$y_F = x_F = 1/2 - 2^{1/2}/4 = 1/2/(2+2^{1/2}) \approx 0.146$$

El número de términos del desarrollo necesarios para *doble precisión* hasta el valor de $x_F = 0.146$ es de 18 (con un coste de 34 sumas), resultando la siguiente subdivisión detallada de las reducciones aplicadas y del coste computacional por intervalos

- $[0, x_B]$: 34 de $\lambda_0 = 34$ sumas.
- $[x_B, x_A]$: 5 de $y_2 + 34$ de $\lambda_0 = 39$ sumas.
- $[x_A, 1]$: 1 de $y_1 + 34$ de $\lambda_0 = 35$ sumas.

Se concluye que el coste máximo de evaluación de λ_0 en el intervalo $[0,1]$, mediante desarrollo y posibles reducciones, es de 39 sumas, menor que la evaluación directa.

Figura 12. Precisión de bits (b) de $\lambda_n(x)$, para varios valores de n ($0, 3, \infty$), en función del número de términos (k) del desarrollo truncado para varios valores máximos (x_b) del argumento ($|x| < x_b$).

Figura 13. Valores máximos (x_b) del argumento ($|x| < x_b$) en función del número de términos (k) del desarrollo truncado de $\lambda_n(x)$, para varios valores de n ($0, 3, \infty$), para *simple* y *doble precisión*.

Para calcular λ_n aplicando la reducción más conveniente en principio habría que escoger la de menor valor de las dos disponibles (y_1 e y_3) para cada x . Esto es cierto cuando el coste de las reducciones es similar pero, en este caso, la reducción y_3 es mucho más costosa que la y_1 , tanto que y_3 sólo es mejor que y_1 en un pequeño intervalo en torno a 0.5 y por muy poco, de modo que sumado a la complejidad de la reducción y_3 , se decide sólo aplicar la reducción y_1 cuando sea conveniente, resultando la siguiente subdivisión

- $[0,0.5]$: 104 de $\lambda_0 = 104$ sumas.
- $[0.5,1]$: 1 de y_1 + 104 de $\lambda_0 = 105$ sumas.

donde se ha tenido en cuenta, a partir de la figura 13, que para $x_b = 0.5$, son necesarios 53 términos en el peor de los casos (con un coste de 104 sumas).

Se concluye que el coste máximo de evaluación de λ_n en el intervalo $[0,1]$ es de 105 sumas.

Para el caso hiperbólico la variable x es negativa y se podría usar la propiedad 3 recursivamente hasta conseguir un valor absoluto de x suficientemente pequeño con las mismas consideraciones que en el caso elíptico. Sin embargo, si el valor de x es suficientemente alto en valor absoluto como para necesitar más de una reducción (hipérbola muy abierta), este método, aunque perfectamente válido, no tiene ninguna ventaja pues la indeterminación del caso casi-parabólico deja de tener efecto en la precisión y se puede evaluar directamente mediante la función $\Psi(x)$ con menor coste.

En consecuencia, se calcula analíticamente la función λ_0 y aplica directamente el desarrollo de la función λ_n para $x > -0.25$, debido a los p

Para ser consecuentes con los resultados de $x > 0$, y buscando la necesidad del mismo número de términos en el desarrollo de λ_n , se considera el intervalo $[-0.5,0]$ para decidir no aplicar reducción, resultado de reducir como máximo una vez el intervalo inicial, y por tanto, invirtiendo la reducción, $x_H = y_3^{-1}(-y_A)$, siendo y_3^{-1} la reducción inversa $y_3^{-1}(y) = 4y(1-y)$, se obtiene un intervalo de aplicación de $[x_H,0]$ donde $x_H \approx -0.672$. Por tanto, si $x_H < x < 0$, se puede usar la solución basada en λ_n con eficiencia, en caso contrario, es mejor evaluar la función λ valiéndose de la función $\Psi(x)$ como intermediaria, y luego las derivadas mediante la fórmula recursiva en función de derivadas anteriores, sin necesidad de recurrir a las funciones λ_n .

Como conclusión final, es posible obtener la función $\lambda_0(x)$ y todas sus derivadas hasta cualquier orden p requerido, mediante la fórmula recursiva en función de derivadas anteriores cuando no es necesario evitar la indeterminación en el origen, ó, cuando si es necesario evitarla, mediante las fórmulas recursivas usando las funciones $\lambda_n(x)$, donde sólo es necesario evaluar directamente una única función (la de mayor orden), a la cual, se pueden aplicar las propiedades de reducción anteriores como se ha indicado para optimizar el coste computacional.

2.8 SOLUCIONES CARACTERÍSTICAS

De todas las soluciones del *Problema de Lambert* existen algunas características que tienen gran relevancia destacando particularmente del resto de soluciones.

A continuación se estudian en detalle cada una de ellas, donde se va a calcular el valor de la función y sus derivadas, usando las *Funciones Temporales* estudiadas anteriormente (*Elemental* y *Universal*).

2.8.1 PARÁBOLA DE TIEMPO FINITO

Esta solución correspondiente a la solución parabólica de tiempo finito tiene gran trascendencia por ser la solución límite que determina el tipo de solución elíptica, parabólica ó hiperbólica, comparando el tiempo de transferencia de la solución buscada con el tiempo requerido por esta solución parabólica.

Como ya se ha visto anteriormente, la solución parabólica de tiempo finito coincide con el límite del caso elíptico ($\psi = 0$, $N = 0$), el límite del caso hiperbólico ($\Psi = 0$) y la solución de separación Elipse-Hipérbola en el caso unificado ($x = 0$, $N = 0$).

Para obtener una aproximación del tiempo de transferencia de las soluciones cercanas a la parabólica de tiempo finito, la mejor opción es desarrollar la función τ_0^2 , evitando la raíz cuadrada existente, de modo que (prescindiendo del subíndice 0 que indica $N = 0$), y usando las funciones auxiliares definidas en [\(2.7.3\)](#)

$$S_n = S_n(\psi) = \sin^n \psi \quad ; \quad C_n = C_n(\psi) = \cos^n \psi$$

se obtiene la expresión de la función $\tau^2(\psi, q)$ siguiente

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \rho \xi^2 \quad ; \quad \rho = 1 - C_1 \quad ; \quad \xi = p_1 + q p_2 \\ p_1 &= (\psi - S_1 C_1) / S_3 \quad ; \quad p_2 = (S_1 - \psi C_1) / S_3 \end{aligned} \quad (2.8.1)$$

Nótese que con este mismo desarrollo, sustituyendo $\psi = -i \Psi$, se obtiene también la versión hiperbólica $\tau^2(\Psi, q)$.

Sustituyendo los desarrollos en $\psi = 0$ de las funciones S_n y C_n en la expresión de τ^2 anterior, operando con ellos del mismo modo mostrado en los resultados de la suma, producto y división de desarrollos del [Anexo F](#), según sea necesario, se llega al siguiente resultado, tanto para el caso elíptico ($z = \psi^2$) como el hiperbólico ($z = -\Psi^2$)

$$\tau^2(z, q) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m \quad ; \quad z = \psi^2 = -\Psi^2 \quad (2.8.2)$$

donde los coeficientes A_m se pueden calcular con los polinomios de grado 3 en q

$$A_m = A_m(q) = \sum_n^3 A_{m,n} q^n \quad (2.8.3)$$

$m \setminus n$	0	1	2	3
0	4/9	0	-1/3	-1/9
	4.444444444444444E-01	0.000000000000000E+00	-3.333333333333333E-01	-1.111111111111111E-01
1	4/15	4/15	0	-1/30
	2.666666666666667E-01	2.666666666666667E-01	0.000000000000000E+00	-3.333333333333333E-02
2	148/1575	226/1575	4/75	11/12600
	9.39682539682540E-02	1.43492063492064E-01	5.333333333333333E-02	8.73015873015873E-04
3	8/315	89/1890	8/315	53/15120
	2.53968253968254E-02	4.70899470899471E-02	2.53968253968254E-02	3.50529100529101E-03
4	10588/1819125	88019/7276500	428/55125	38209/25872000
	5.82038067752353E-03	1.20963375249090E-02	7.76417233560091E-03	1.47684755720470E-03
5	253192/212837625	18158429/6810804000	296/155925	22952311/54486432000
	1.18960169753821E-03	2.66612120977200E-03	1.89834856501523E-03	4.21248192577558E-04
6	237656/1064188125	107883239/204324120000	428728/1064188125	320910703/3269185920000
	2.23321416972211E-04	5.28000507233311E-04	4.02868618741635E-04	9.81622675653760E-05
7	2981872/75983032125	1877837657/19451656224000	2096/27088425	1041583891/51871083264000
	3.92439195515982E-05	9.65387026881069E-05	7.73762225009391E-05	2.00802417350495E-05

Tabla 5. Primeros coeficientes $A_{m,n}$ del desarrollo del cuadrado de la *Función Universal* en torno a la solución parabólica de tiempo finito ($\psi = \Psi = 0$), en función de q .

Los valores calculados de los primeros coeficientes $A_{m,n}$ se muestran en la tabla 5, tanto su representación racional exacta, como su representación decimal (calculado con doble precisión). Como muestra, los dos primeros polinomios $A_m(q)$ son

$$\begin{aligned} A_0 &= (4 - 3q^2 - q^3) / 9 = (1 - q)(2 + q)^2 / 9 = \tau_p^2 \\ A_1 &= (8 + 8q - q^3) / 30 \end{aligned} \quad (2.8.4)$$

Como ya se sabe, cuando q está cerca de 1 o -1 , es preferible usar los parámetros q_s o q_c respectivamente, para evitar posible pérdida de precisión. Sustituyendo el valor del parámetro q según convenga ($q = 1 - 2q_s = 2q_c - 1$), se obtienen los coeficientes A_m en función de cualquiera de los parámetros

$$A_m \equiv A_m(q) \equiv A_{s,m}(q_s) \equiv A_{c,m}(q_c) \quad (2.8.5)$$

donde las funciones $A_{s,m}$ y $A_{c,m}$ son los polinomios de grado 3 siguientes

$$\begin{aligned} A_{s,m}(q_s) &= \sum_n^3 A_{s,m,n} q_s^n & ; & & A_{c,m}(q_c) = \sum_n^3 A_{c,m,n} q_c^n \\ A_{s,m,0} &= A_{m,0} + A_{m,1} + A_{m,2} + A_{m,3} & ; & & A_{c,m,0} = A_{m,0} - A_{m,1} + A_{m,2} - A_{m,3} \\ A_{s,m,1} &= -2(A_{m,1} + 2A_{m,2} + 3A_{m,3}) & ; & & A_{c,m,1} = 2(A_{m,1} - 2A_{m,2} + 3A_{m,3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{S,m,2} &= 4 (A_{m,2} + 3 A_{m,3}) & ; & & A_{C,m,2} &= 4 (A_{m,2} - 3 A_{m,3}) \\
A_{S,m,3} &= -8 A_{m,3} & ; & & A_{C,m,3} &= 8 A_{m,3}
\end{aligned}
\tag{2.8.6}$$

Evaluando estas expresiones para los primeros coeficientes $A_{S,m,n}$ y $A_{C,m,n}$ se obtienen los resultados mostrados en las tablas 6 y 7.

$m \setminus n$	0	1	2	3
0	0	2	-8/3	8/9
	0.00000000000000E+00	2.00000000000000E+00	-2.66666666666667E+00	8.88888888888889E-01
1	1/2	-1/3	-2/5	4/15
	5.00000000000000E-01	-3.33333333333333E-01	-4.00000000000000E-01	2.66666666666667E-01
2	7/24	-91/180	47/210	-11/1575
	2.91666666666667E-01	-5.05555555555556E-01	2.23809523809524E-01	-6.98412698412698E-03
3	73/720	-1639/7560	181/1260	-53/1890
	1.01388888888889E-01	-2.16798941798942E-01	1.43650793650794E-01	-2.80423280423280E-02
4	73/2688	-19387/302400	27043/554400	-38209/3234000
	2.71577380952381E-02	-6.41104497354497E-02	4.87788600288600E-02	-1.18147804576376E-02
5	22409/3628800	-925259/59875200	57430391/4540536000	-22952311/6810804000
	6.17531966490300E-03	-1.54531258350703E-02	1.26483725709916E-02	-3.36998554062046E-03
6	85697/68428800	-1064593753/326918592000	30397127/10897286400	-320910703/408648240000
	1.25235281051253E-03	-3.25644909482542E-03	2.78942168575105E-03	-7.85298140523008E-04
7	451853/1937295360	-81476449/130767436800	1019762879/1852538688000	-1041583891/6483885408000
	2.33239086475694E-04	-6.23063745790267E-04	5.50467790824350E-04	-1.60641933880396E-04

Tabla 6. Primeros coeficientes $A_{S,m,n}$ del desarrollo del cuadrado de la *Función Universal* en torno a la solución parabólica de tiempo finito ($\psi = \Psi = 0$), en función de q_S .

$m \setminus n$	0	1	2	3
0	2/9	2/3	0	-8/9
	2.22222222222222E-01	6.66666666666667E-01	0.00000000000000E+00	-8.88888888888889E-01
1	1/30	1/3	2/5	-4/15
	3.33333333333333E-02	3.33333333333333E-01	4.00000000000000E-01	-2.66666666666667E-01
2	37/12600	71/900	71/350	11/1575
	2.93650793650794E-03	7.88888888888889E-02	2.02857142857143E-01	6.98412698412698E-03
3	1/5040	103/7560	5/84	53/1890
	1.98412698412698E-04	1.36243386243386E-02	5.95238095238095E-02	2.80423280423280E-02
4	2647/232848000	21137/10584000	258743/19404000	38209/3234000
	1.13679310107882E-05	1.99707105064248E-03	1.33345186559472E-02	1.18147804576376E-02
5	31649/54486432000	15947/59875200	1280641/504504000	22952311/6810804000
	5.80860203876077E-07	2.66337314948426E-04	2.53841594913023E-03	3.36998554062046E-03
6	29707/1089728640000	54759101/1634592960000	3578993/8255520000	320910703/408648240000
	2.72609151577406E-08	3.35001448923407E-05	4.33527264182026E-04	7.85298140523008E-04
7	186367/155613249792000	3710887/915372057600	888836807/12967770816000	1041583891/6483885408000
	1.19762938084711E-09	4.05396578275452E-06	6.85419891831623E-05	1.60641933880396E-04

Tabla 7. Primeros coeficientes $A_{C,m,n}$ del desarrollo del cuadrado de la *Función Universal* en torno a la solución parabólica de tiempo finito ($\psi = \Psi = 0$), en función de q_C .

Con la expresión de τ^2 anterior (en función de $z = \psi^2 = -\Psi^2$) hasta un orden $m = 7$, usando los coeficientes de las tablas 5, 6 y 7, según convenga, se consigue *dobles* precisión para un rango máximo de $|z| < (0.12 + 0.03 q_s + 0.18 q_s^2)$, aproximadamente. Sin embargo, no es difícil obtener desarrollos de mayor orden, que proporcionen mayor precisión, usando las expresiones generales anteriores.

Si se prefiere obtener el desarrollo de la función τ (o τ^2) en función de la *Variable Universal* x , tan sólo hay que aprovechar los desarrollos ya realizados para la *Función Universal* en el origen $x = 0$.

De este modo, partiendo de (2.7.45) y (2.7.46) para calcular la función $\lambda(x)$ en $x = 0$

$$\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad ; \quad a_0 = 1 \quad ; \quad a_n = \frac{2n}{2n+1} a_{n-1} \quad (n \geq 1) \quad (2.8.7)$$

se obtienen los siguientes desarrollos (en $x = 0$) de las siguientes funciones intermedias

$$\begin{aligned} \rho(x, q) &= \rho_0 + \rho_1 x \quad ; \quad \rho_0 = 2 q_s = 1 - q \quad ; \quad \rho_1 = 2 q \\ \beta(x, q) &= \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m x^m \quad ; \quad \beta_0 = -q_s a_0 \quad ; \quad \beta_{m+1} = a_m - q_s a_{m+1} \quad (m \geq 0) \\ \xi_N(x, q) &= \sum_{m=0}^{\infty} (\xi_N)_m x^m \quad ; \quad (\xi_N)_m = (m+1) \beta_{m+1} \quad (m \geq 0) \end{aligned} \quad (2.8.8)$$

donde los coeficientes β_{m+1} se pueden calcular alternativamente del siguiente modo, para evitar la posible pérdida de precisión debido a diferencia de números próximos

$$\beta_{m+1} = a_m (q_C + q_s / (2m+3)) \quad (m \geq 0) \quad (2.8.9)$$

Con los desarrollos de ρ y ξ_N , resulta inmediato calcular los de R y τ , ó ξ_N^2 y τ^2 , exactamente del mismo modo indicado para la *Función Universal*, hasta cualquier orden m requerido.

Separando los términos del desarrollo de τ^2 en las diferentes potencias de q , resulta el siguiente desarrollo, válido tanto para el caso elíptico ($x > 0$) como el hiperbólico ($x < 0$)

$$\tau^2(x, q) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m x^m \quad (2.8.10)$$

donde los coeficientes B_m se pueden calcular con los polinomios de grado 3 en q

$$B_m = B_m(q) = \sum_n^3 B_{m,n} q^n \quad (2.8.11)$$

Los valores calculados de los primeros coeficientes $B_{m,n}$ se muestran en la tabla 8, tanto su representación racional exacta, como su representación decimal (calculado con *doble precisión*). Como muestra, los dos primeros coeficientes A_m son

$$\begin{aligned}\tau_p^2 = B_0 = A_0 &= (4 - 3q^2 - q^3) / 9 = (1 - q)(2 + q)^2 / 9 = 2q_s(1 + 2q_c)^2 / 9 \\ B_1 = 4A_1 &= 2(8 + 8q - q^3) / 15 = 2(16q_c - q^3) / 15\end{aligned}\quad (2.8.12)$$

$m \setminus n$	0	1	2	3
0	$4/9$ 4.444444444444444E-01	0 0.000000000000000E+00	$-1/3$ -3.333333333333333E-01	$-1/9$ -1.111111111111111E-01
1	$16/15$ 1.066666666666667E+00	$16/15$ 1.066666666666667E+00	0 0.000000000000000E+00	$-2/15$ -1.333333333333333E-01
2	$976/525$ 1.85904761904762E+00	$464/175$ 2.65142857142857E+00	$64/75$ 8.533333333333333E-01	$-16/525$ -3.04761904761905E-02
3	$13312/4725$ 2.81735449735450E+00	$7456/1575$ 4.73396825396825E+00	$384/175$ 2.19428571428571E+00	$992/4725$ 2.09947089947090E-01
4	$159232/40425$ 3.93894867037724E+00	$177152/24255$ 7.30373118944548E+00	$44224/11025$ 4.01124716553288E+00	$320/539$ 5.93692022263451E-01
5	$548864/105105$ 5.22205413633985E+00	$5441536/525525$ 1.03544760001903E+01	$763904/121275$ 6.29894042465471E+00	$1771904/1576575$ 1.12389451818023E+00
6	$18915328/2837835$ 6.66540796064606E+00	$1875968/135135$ 1.38821770821771E+01	$3893248/429975$ 9.05459154602012E+00	$3653632/2027025$ 1.80246025579359E+00
7	$664797184/80405325$ 8.26807408588921E+00	$1437974528/80405325$ 1.78840708373481E+01	$58064896/4729725$ 1.22765902880189E+01	$42303488/16081065$ 2.63063969954726E+00

Tabla 8. Primeros coeficientes $B_{m,n}$ del desarrollo del cuadrado de la *Función Universal* en torno a la solución parabólica de tiempo finito ($x = 0$), en función de q .

Una vez más, cuando q está cerca de 1 o -1 , es preferible usar los parámetros q_s o q_c respectivamente, para evitar posible pérdida de precisión. Sustituyendo el valor del parámetro q según convenga ($q = 1 - 2q_s = 2q_c - 1$), se obtienen los coeficientes A_m en función de cualquiera de los parámetros

$$B_m \equiv B_m(q) \equiv B_{S,m}(q_s) \equiv B_{C,m}(q_c) \quad (2.8.13)$$

donde las funciones $B_{S,m}$ y $B_{C,m}$ son los polinomios de grado 3 siguientes

$$\begin{aligned}B_{S,m}(q_s) &= \sum_n^3 B_{S,m,n} q_s^n & ; & & B_{C,m}(q_c) = \sum_n^3 B_{C,m,n} q_c^n \\ B_{S,m,0} &= B_{m,0} + B_{m,1} + B_{m,2} + B_{m,3} & ; & & B_{C,m,0} = B_{m,0} - B_{m,1} + B_{m,2} - B_{m,3} \\ B_{S,m,1} &= -2(B_{m,1} + 2B_{m,2} + 3B_{m,3}) & ; & & B_{C,m,1} = 2(B_{m,1} - 2B_{m,2} + 3B_{m,3}) \\ B_{S,m,2} &= 4(B_{m,2} + 3B_{m,3}) & ; & & B_{C,m,2} = 4(B_{m,2} - 3B_{m,3})\end{aligned}$$

$$B_{S,m,3} = -8 B_{m,3} \quad ; \quad B_{C,m,3} = 8 B_{m,3} \quad (2.8.14)$$

Evaluando estas expresiones para los primeros coeficientes $B_{S,m,n}$ y $B_{C,m,n}$ se obtienen los resultados mostrados en las tablas 9 y 10.

$m \setminus n$	0	1	2	3
0	0 0.00000000000000E+00	2 2.00000000000000E+00	-8/3 -2.66666666666667E+00	8/9 8.88888888888889E-01
1	2 2.00000000000000E+00	-4/3 -1.33333333333333E+00	-8/5 -1.60000000000000E+00	16/15 1.06666666666667E+00
2	16/3 5.33333333333333E+00	-128/15 -8.53333333333333E+00	64/21 3.04761904761905E+00	128/525 2.43809523809524E-01
3	448/45 9.95555555555556E+00	-2048/105 -1.95047619047619E+01	17792/1575 1.12965079365079E+01	-7936/4725 -1.67957671957672E+00
4	1664/105 1.58476190476190E+01	-53888/1575 -3.42146031746032E+01	57344/2475 2.31692929292929E+01	-2560/539 -4.74953617810761E+00
5	36224/1575 2.29993650793651E+01	-130304/2475 -5.26480808080808E+01	60985856/1576575 3.86824959167816E+01	-14175232/1576575 -8.99115614544186E+00
6	1632256/51975 3.14046368446368E+01	-23584768/315315 -7.47974818831962E+01	10133504/175175 5.78478892536035E+01	-29229056/2027025 -1.44196820463487E+01
7	7192576/175175 4.10593749108035E+01	-158695424/1576575 -1.00658341024055E+02	589692928/7309575 8.06740375466426E+01	-338427904/16081065 -2.10451175963781E+01

Tabla 9. Primeros coeficientes $B_{S,m,n}$ del desarrollo del cuadrado de la *Función Universal* en torno a la solución parabólica de tiempo finito ($x = 0$), en función de q_s .

$m \setminus n$	0	1	2	3
0	2/9 2.22222222222222E-01	2/3 6.66666666666667E-01	0 0.00000000000000E+00	-8/9 -8.88888888888889E-01
1	2/15 1.33333333333333E-01	4/3 1.33333333333333E+00	8/5 1.60000000000000E+00	-16/15 -1.06666666666667E+00
2	16/175 9.14285714285714E-02	128/75 1.70666666666667E+00	1984/525 3.77904761904762E+00	-128/525 -2.43809523809524E-01
3	64/945 6.77248677248677E-02	1024/525 1.95047619047619E+00	1408/225 6.25777777777778E+00	7936/4725 1.67957671957672E+00
4	256/4851 5.27726242011956E-02	7808/3675 2.12462585034014E+00	1081856/121275 8.92068439497011E+00	2560/539 4.74953617810761E+00
5	128/3003 4.26240426240426E-02	273664/121275 2.25655741084313E+00	3692032/315315 1.17090274804561E+01	14175232/1576575 8.99115614544186E+00
6	2048/57915 3.53621686955020E-02	11165696/4729725 2.36074951503523E+00	69001216/4729725 1.45888431145574E+01	29229056/2027025 1.44196820463487E+01
7	16384/546975 2.99538370126605E-02	11567104/4729725 2.44561871990443E+00	201457664/11486475 1.75386847575083E+01	338427904/16081065 2.10451175963781E+01

Tabla 10. Primeros coeficientes $B_{C,m,n}$ del desarrollo del cuadrado de la *Función Universal* en torno a la solución parabólica de tiempo finito ($x = 0$), en función de q_c .

Con la expresión de τ^2 anterior (en función de x) hasta un orden $m = 7$, usando los coeficientes de las tablas 9 ó 10, según convenga, se consigue *doble precisión* para un rango máximo de $|x| < (0.06 + 0.05 q_s)$, aproximadamente. Sin embargo, no es difícil obtener desarrollos de mayor orden, que proporcionen mayor precisión, usando las expresiones generales anteriores.

2.8.2 ELIPSE FUNDAMENTAL

Como ya se ha definido, la *Elipse Fundamental* es la solución elíptica de mínima excentricidad para un valor particular del parámetro geométrico (f, q o q_s , por ejemplo).

Esta solución se corresponde con $\phi = \pi/2$, $\psi = f$, $x = q_s$.

A partir de la *Función Elemental Doble Dependiente*, con $\psi = f$, se obtiene

$$\begin{aligned} C_\psi &= C_f \quad ; \quad S_\psi = S_f \quad ; \quad \rho = S_f^2 \quad ; \quad C_\phi = 0 \quad ; \quad S_\phi = 1 \\ \psi_N &= f + N \pi \quad ; \quad \varpi_N = \psi_N \quad ; \quad \alpha_1 = 1 \quad ; \quad \alpha = 1 \end{aligned} \quad (2.8.15)$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} \tau &= \psi_N \\ d\tau / d\psi &= 2 - 3/2 C_f / S_f \psi_N \\ d^2\tau / d\psi^2 &= 3/2 \psi_N (1 + (1 + 5/2 C_f^2) / S_f^2) - 5 C_f / S_f \end{aligned} \quad (2.8.16)$$

Teniendo en cuenta que $(d\psi / dx) = (2/S_\psi)$ y $(d^2\psi / dx^2) = (-2 C_\psi / S_\psi^3)$, las derivadas de τ respecto a x son

$$\begin{aligned} d\tau / dx &= (d\tau / d\psi) (d\psi / dx) \\ d^2\tau / dx^2 &= (d^2\tau / d\psi^2) (d\psi / dx)^2 + (d\tau / d\psi) (d^2\psi / dx^2) \end{aligned}$$

resultando las siguientes derivadas de τ respecto a x , en $x = q_s$ correspondiente a la solución la *Elipse Fundamental*

$$\begin{aligned} d\tau / dx &= (4 - 3 C_f / S_f \psi_N) / S_f \\ d^2\tau / dx^2 &= (6 \psi_N (1 + (1 + 7/2 C_f^2) / S_f^2) - 28 C_f / S_f) / S_f^2 \end{aligned} \quad (2.8.17)$$

Con carácter más general, si se quiere obtener el desarrollo de la función τ (o τ^2) en función de x , tan sólo hay que aprovechar los desarrollos ya realizados para la *Función Universal* en $x = q_s$.

De este modo, partiendo del desarrollo [\(2.7.60\)](#) de la función $\lambda(x)$, en $x = q_s$

$$\lambda(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m (x - q_s)^m \quad ; \quad A_m = \lambda^{(m)}(q_s) / m! \quad (2.8.18)$$

y de los siguientes desarrollos (en $x = q_s$) para la *Elipse Fundamental*

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \rho_0 + \rho_1 (x - q_s) \quad ; \quad \rho_0 = S_f^2 \quad ; \quad \rho_1 = 2 q \\ \xi_N(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} (\xi_N)_m (x - q_s)^m \quad ; \quad (\xi_N)_m = (m + 1) A_m \end{aligned} \quad (2.8.19)$$

resulta inmediato calcular, con estos desarrollos de ρ y ξ_N , los de R y τ , ó ξ_N^2 y τ^2 , exactamente del mismo modo indicado para la *Función Universal*.

Nótese que la única complicación de todos estos desarrollos, se reduce al cálculo de los coeficientes A_m del desarrollo de $\lambda(x)$ en $x = q_s$, usando para ello las fórmulas recursivas adecuadas, dependiendo de la cercanía ó lejanía a las soluciones parabólicas, del mismo modo indicado para la *Función Universal*.

2.8.3 ELIPSE ESENCIAL

Esta solución corresponde a la otra elipse, aparte de la *Elipse Fundamental*, que tiene semieje mayor adimensional unidad. Se corresponde con la solución $\psi = \pi/2$, $\phi = \pi - f$, $x = 1/2$.

A partir de la *Función Elemental Doble Dependiente* o la *Función Elemental Principal*, teniendo en cuenta que $\psi = \pi/2$, se obtiene

$$\begin{aligned} C_\psi &= 0 \quad ; \quad S_\psi = 1 \quad ; \quad \rho = 1 \quad ; \quad C_\phi = -C_f \quad ; \quad S_\phi = S_f \\ \psi_N &= \pi/2 + N \pi \quad ; \quad \varpi_N = \psi_N + C_f \quad ; \quad \alpha_1 = 1 \quad ; \quad \alpha = 1 \end{aligned} \quad (2.8.20)$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} \tau &= \varpi_N \\ d\tau / d\psi &= 1 + S_f^2 + 3/2 C_f \varpi_N \\ d^2\tau / d\psi^2 &= (2 + S_f^2) C_f + 3 (1 + C_f^2/4) \varpi_N \end{aligned} \quad (2.8.21)$$

Del mismo modo que para *Elipse Fundamental*, se obtiene las siguientes derivadas de τ respecto a x , en $x = 0.5$, correspondiente a la solución la *Elipse Esencial*

$$\begin{aligned} d\tau / dx &= 2 (1 + S_f^2) + 3 C_f \varpi_N \\ d^2\tau / dx^2 &= 4 (2 + S_f^2) C_f + 3 (4 + C_f^2) \varpi_N \end{aligned} \quad (2.8.22)$$

Alternativamente sólo en función de C_f y ψ_N

$$\begin{aligned}
 \tau &= \psi_N + C_f \\
 d\tau / d\psi &= 2 + (3\psi_N + C_f) C_f / 2 \\
 d^2\tau / d\psi^2 &= (6 - C_f^2/4) C_f + 3 (1 + C_f^2/4) \psi_N \\
 d\tau / dx &= 4 + (3\psi_N + C_f) C_f \\
 d^2\tau / dx^2 &= (24 - C_f^2) C_f + 3 (4 + C_f^2) \psi_N
 \end{aligned} \tag{2.8.23}$$

Con carácter más general, si se quiere obtener el desarrollo de la función τ (o τ^2) en función de x , tan sólo hay que aprovechar los desarrollos ya realizados para la *Función Universal* particularizados para la *Elipse Esencial* ($x = 1/2$).

De este modo, partiendo del desarrollo [\(2.7.60\)](#) de la función $\lambda(x)$, en $x = 1/2$

$$\lambda(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m (x - 1/2)^m \tag{2.8.24}$$

donde

$$A_0 = (N + 1/2) \pi \quad ; \quad A_1 = 2 \quad ; \quad A_m = 4 \frac{(m-1)}{m} A_{m-2} \quad (m \geq 2) \tag{2.8.25}$$

y de los desarrollos [\(2.7.67\)](#), particularizado para la *Elipse Esencial*

$$\begin{aligned}
 \rho(x) &= \rho_0 + \rho_1 (x - 1/2) \quad ; \quad \rho_0 = 1 \quad ; \quad \rho_1 = 2q \\
 \xi_N(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} (\xi_N)_m (x - 1/2)^m \quad ; \quad (\xi_N)_m = (m+1) (A_{m+1} q/2 + A_m)
 \end{aligned} \tag{2.8.26}$$

resulta inmediato calcular, con estos desarrollos de ρ y ξ_N , los de R y τ , ó ξ_N^2 y τ^2 , exactamente del mismo modo indicado para la *Función Universal* en [\(2.7.68\)](#) ó [\(2.7.69\)](#).

2.8.4 ELIPSE DE TIEMPO MÍNIMO

Esta solución corresponde a la elipse de tiempo de transferencia mínimo existente para cada valor de $N > 0$ y se estudia en detalle en la sección [2.10](#) dedicada al mínimo tiempo en múltiple revolución.

2.8.5 HIPÉRBOLA DE TIEMPO NULO

Esta solución corresponde a la hipérbola límite de tiempo nulo coincidente con la recta que contiene a la cuerda para $q > 0$, ó con las dos semirrectas desde el foco de atracción que contienen a los radiovectores para $q < 0$. Evidentemente estas soluciones no tienen sentido físico, sólo se estudian como un caso límite.

Para determinar esta solución, sólo hay que anular el tiempo de transferencia, lo cual es equivalente a anular el semieje mayor ($\alpha_H = 0$).

Las expresiones desarrolladas de α_H en (2.1.47) para la *Ecuación Elemental Principal* en función de Ψ , o en (2.7.5) para la *Ecuación Universal* en función de x , son

$$\begin{aligned} \rho = 1 - q \cosh \Psi \quad ; \quad \alpha_H &= \frac{\rho}{\sinh^2 \Psi} \\ \rho = 2 (q_S + q x) \quad ; \quad \alpha_H &= \frac{\rho}{-4x(1-x)} \end{aligned} \quad (2.8.27)$$

Se deduce que el tiempo de transferencia se anula para un valor finito de la variable independiente ($x = x_{H0}$ o $\Psi = \Psi_{H0}$) sólo cuando es $q > 0$, correspondiendo a la solución que anula la variable ρ , de modo que se cumple

$$x_{H0} = -q_S/q \quad \text{o} \quad \Psi_{H0} = \text{acosh}(1/q_S) \quad (2.8.28)$$

Si $q \leq 0$, el tiempo sólo se anula en el límite cuando x tiende a $-\infty$ o Ψ tiende a ∞ .

A partir de los resultados obtenidos anteriormente para la *Ecuación Hiperbólica de Semieje Mayor*, se puede obtener una linealización en torno a $\alpha_H = 0$, correspondiente a esta solución, pero se deja como posible desarrollo futuro^[F3].

2.8.6 SOLUCIONES DE MEDIA VUELTA

Las soluciones de media vuelta se corresponden con valores del ángulo de transferencia $\Delta\nu = \pi + 2N\pi$, correspondientes a una configuración geométrica $\Delta\theta = \pi$. Se ha incluido su estudio particular, primero por ser un caso de interés debido a los problemas de indeterminación que presentan algunas soluciones existentes en la literatura, y segundo por la gran simplificación que provoca en las ecuaciones desarrolladas, en las cuales no aparece ninguna indeterminación. A continuación se muestran los resultados de la *Función Universal*, particularizados para estas soluciones.

El valor particular de $\Delta\theta = \pi$, provoca los siguientes valores particulares

$$q = 0 \quad ; \quad q_S = q_C = 1/2 \quad ; \quad \rho = R = 1 \quad (2.8.29)$$

Elegido convenientemente un valor aproximado de la solución x_0 , teniendo en cuenta la cercanía a otras soluciones características, tal y como se explica en [2.11](#), se obtienen los coeficientes A_m del desarrollo [\(2.7.60\)](#) de la función $\lambda(x)$ en torno a x_0 , y los coeficientes τ_m del desarrollo de la *Función Universal*, sin más que sustituir, en [\(2.7.68\)](#) ó [\(2.7.69\)](#), los valores de [\(2.8.29\)](#). El resultado final es

$$\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \tau_m (x - x_0)^m \quad ; \quad \tau_m = (m+1) (A_m + (x_0 - 1/2) A_{m+1}) \quad (2.8.30)$$

que demuestra la gran simplificación del problema. Con este desarrollo se puede aplicar cualquier método de cualquier orden para obtener una estimación de x mejor que x_0 , y reiterar el proceso hasta obtener x con la precisión que se quiera (hasta la máxima posible).

Para estas soluciones, también se simplifica notablemente el cálculo de velocidades obtenidas en [2.4](#), debido a que

$$C_\delta = 0 \quad ; \quad S_\delta = 1 \quad ; \quad r_C = 0 \quad ; \quad r_S = r_R \quad ; \quad V_\rho = V_C \quad ; \quad \zeta = V_C r_R \quad (2.8.31)$$

y por tanto

$$V_{r1} = -V_{r0} = V_C (1 - 2x) \quad ; \quad V_{vj} = V_C \frac{r_R}{r_j} \quad (j = 0, 1) \quad (2.8.32)$$

Nótese que la *Transferencia de Hohmann* es un caso particular de estas soluciones, donde $x = x_0 = 1/2$. En este caso, el desarrollo de $\lambda(x)$ es el mismo de la solución correspondiente a la *Elipse Esencial* obtenido en [2.8.3](#), resultando aún más simple

$$A_0 = (N + 1/2) \pi \quad ; \quad A_1 = 2 \quad ; \quad A_m = 4 \frac{(m-1)}{m} A_{m-2} \quad (m \geq 2)$$

$$\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \tau_m (x - x_0)^m \quad ; \quad \tau_m = (m+1) A_m$$

$$V_{rj} = 0 \quad ; \quad V_{vj} = V_C \frac{r_R}{r_j} \quad (j = 0, 1) \quad (2.8.33)$$

2.8.7 SOLUCIONES DE VUELTAS COMPLETAS EXACTAS

Las soluciones de vueltas completas se corresponden con valores del ángulo de transferencia $\Delta\nu = 2 N \pi$, correspondientes a una configuración geométrica $\Delta\theta = 0$, equivalentes a valores del ángulo de transferencia $\Delta\nu = 2\pi + 2 (N-1) \pi$, con la configuración geométrica $\Delta\theta = 2\pi$. Es decir, N vueltas con $\Delta\theta = 0$ es la misma solución que $(N-1)$ vueltas con $\Delta\theta = 2\pi$. Los parámetros geométricos para ambos casos son

$$\Delta\theta=0 \quad ; \quad q=1 \quad ; \quad q_C=1 \quad ; \quad q_S=0 \quad (\text{inicio vuelta adicional})$$

$$\Delta\theta=2\pi \quad ; \quad q=-1 \quad ; \quad q_C=0 \quad ; \quad q_S=1 \quad (\text{final última vuelta})$$

Nótese que si los puntos inicial y final no coinciden, la única solución posible es la hipérbola degenerada de tiempo nulo formada por la recta que une los puntos (alineados con el foco), siendo necesariamente $N=0$. Por ello, para $N>0$ o $\Delta\theta=2\pi$, si el tiempo de transferencia no es nulo, los puntos inicial y final deben ser coincidentes.

Para este caso concreto resulta más útil usar la *Ecuación Elemental Básica* [\(2.1.54\)](#)

$$\mathfrak{A}(\psi, q; N) = R \xi_N \quad ; \quad \xi_N = p_1 + q p_2 \quad ; \quad R = \rho^{1/2} \quad ; \quad \psi_N = \psi + N \pi$$

$$\rho = 1 - q C_\psi \quad ; \quad p_1 = \frac{\psi_N - S_\psi C_\psi}{S_\psi^3} \quad ; \quad p_2 = \frac{S_\psi - \psi_N C_\psi}{S_\psi^3}$$

donde se ha usado la notación simplificada $C_\psi = \cos \psi$, $S_\psi = \sin \psi$.

Las expresiones de ρ y ψ_N se pueden reordenar usando los parámetros geométricos alternativos q_S y q_C , definidos en [\(1.2.8\)](#), del siguiente modo

$$\rho = q_C \rho_C + q_S \rho_S \quad ; \quad \xi_N = q_C p_C + q_S p_S \quad ; \quad p_C = p_1 + p_2 \quad ; \quad p_S = p_1 - p_2$$

$$\rho_C = 1 - C_\psi = 2x \quad ; \quad p_C = \frac{(\psi_N + S_\psi)(1 - C_\psi)}{S_\psi^3} = \frac{\psi_N + S_\psi}{S_\psi(1 + C_\psi)} = \frac{\lambda(x; N) + 1}{2(1 - x)}$$

$$\rho_S = 1 + C_\psi = 2(1 - x) \quad ; \quad p_S = \frac{(\psi_N - S_\psi)(1 + C_\psi)}{S_\psi^3} = \frac{\psi_N - S_\psi}{S_\psi(1 - C_\psi)} = \frac{\lambda(x; N) - 1}{2x}$$

donde se ha añadido también la dependencia con la *Variable Universal* x .

Nótese que las variables q_S y q_C suman la unidad por lo que la variable ρ se puede interpretar como una ponderación entre ρ_C y ρ_S , y la variable ξ_N una ponderación entre p_C y p_S , y nótese la similitud entre las expresiones de ρ_C y ρ_S , y las de p_C y p_S , donde sólo se produce un cambio de signo. Otro hecho relevante es que todas las funciones son positivas, por lo que nunca se pierde precisión en las sumas de ponderación.

En los casos de vueltas completas los valores de q_S y q_C son 0 o 1 de forma alternada, es decir, $q_S=0$ y $q_C=1$ para el caso $\Delta\theta=0$ (inicio vuelta adicional) y $q_S=1$ y $q_C=0$ para $\Delta\theta=2\pi$ (final última vuelta). En consecuencia, llamando $\mathfrak{A}_C$ y $\mathfrak{A}_S$ a las funciones de transferencia para $q_C=1$ y $q_S=1$ respectivamente, se obtiene

$$\mathfrak{A}_C(\psi; N) \equiv \mathfrak{A}(\psi, 1; N) = \rho_C^{1/2} p_C = \sqrt{1 - C_\psi} \frac{\psi_N + S_\psi}{\sqrt{1 - C_\psi^2} (1 + C_\psi)} = \frac{\psi_N + S_\psi}{(1 + C_\psi)^{3/2}}$$

$$\tau_S(\psi; N) \equiv \tau(\psi, -1; N) = \rho_S^{1/2} p_S = \sqrt{1 + C_\psi} \frac{\psi_N - S_\psi}{\sqrt{1 - C_\psi^2 (1 - C_\psi)}} = \frac{\psi_N - S_\psi}{(1 - C_\psi)^{3/2}}$$

Nótese que se cumple $\tau_S(\psi; N) = \tau_C(1-x; N-1)$.

Estas mismas expresiones en función de la *Variable Universal* x se transforman en

$$\tau_C(x; N) = \frac{N\pi}{(2(1-x))^{3/2}} + \frac{\lambda(x) + 1}{1-x} \sqrt{\frac{x}{2}} = \frac{(N+1)\pi}{(2(1-x))^{3/2}} - \lambda_1(1-x) \sqrt{\frac{x}{2}}$$

$$\tau_S(x; N) = \frac{N\pi}{(2x)^{3/2}} + \frac{\lambda(x) - 1}{x} \sqrt{\frac{1-x}{2}} = \frac{N\pi}{(2x)^{3/2}} + \lambda_1(x) \sqrt{\frac{1-x}{2}}$$

Nótese que se cumple $\tau_C(0; N) = \tau_S(1; N-1) = N\pi/8^{1/2}$.

2.9 NÚMERO DE SOLUCIONES

El número de soluciones queda perfectamente determinado conociendo los parámetros adimensionales que definen el *Problema de Lambert*: τ , q y N . El cálculo de τ y q se detalla en [2.13.1](#), y el parámetro N es una elección que se tiene en cuenta sólo cuando se buscan soluciones elípticas de múltiple revolución.

Cuando N es 0 (simple revolución) solo puede haber una solución por ser τ siempre creciente (figuras 9a y 9b). Nótese que, para cada valor de q , la gráfica del caso hiperbólico (figura 9a) se une con la gráfica del caso elíptico (figura 9b), en el punto parabólico de tiempo finito ($\psi = \Psi = 0$, $\tau = \tau_P$). En la figura 9c, con la variable x que unifica todos los casos, esta unión se observa directamente. En consecuencia, siempre hay una solución única para cualquier valor positivo de τ , pues la función τ empieza en 0 en el caso hiperbólico y termina en el infinito para el caso elíptico, excepto en un caso particular donde la función alcanza un máximo ($q = -1$). En el caso general ($q \neq -1$), la trayectoria cónica única es hiperbólica (ver figura 9a), parabólica, ó elíptica (ver figura 9b) cuando el parámetro τ es menor, igual, ó mayor que el tiempo adimensional (τ_P) de la trayectoria parabólica de tiempo finito, respectivamente. En [\(2.1.59\)](#) se calculó el valor de τ_P , recurriendo a desarrollos de potencias para calcular $\tau(\psi, q; 0)$ en $\psi = 0$, resultando

$$\tau_P = \tau(0, q; 0) = \tau_0(0, q) = \sqrt{1-q} \frac{2+q}{3}$$

Nótese que, con cualquiera de las expresiones de $\tau(x, q; N)$ obtenidas anteriormente mediante las funciones $Q(x)$ ó $\lambda(x)$, el valor τ_P se obtiene igualmente para $x = 0$, $N = 0$.

En el caso particular, $N = 0$, $q = -1$, existe una solución única hasta un valor máximo del parámetro τ , por encima del cual no hay ninguna solución. Dicho valor máximo,

como se deduce de la figura 9b para la función $\alpha(\psi, q; N)$, por ser la función $\alpha(\psi, -1; 0)$ creciente, se puede calcular como el límite de la expresión de la *Función Temporal* en función de ψ , cuando ψ tiende a π . En este caso, se cumple $\psi_N \rightarrow \pi$, $\gamma \rightarrow 0$, y sabiendo que $\rho = 1 - q \cos \psi$, $\alpha = \rho / \sin^2 \psi$, resulta

$$\alpha = \alpha(\pi, -1) = \lim_{\psi \rightarrow \pi} \alpha(\psi, -1) = \lim_{\psi \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos \psi}{\sin^2 \psi} = \lim_{\psi \rightarrow \pi} \frac{1}{1 - \cos \psi} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha(\pi, -1; 0) = \lim_{\psi \rightarrow \pi} \alpha(\psi, -1; 0) = \lim_{\psi \rightarrow \pi} \alpha^{1/2} (\alpha \psi + \gamma) = \alpha^{3/2} \pi = \sqrt{2} \frac{\pi}{4} \quad (2.9.1)$$

Cuando $N > 0$ (múltiple revolución), las soluciones sólo pueden ser elípticas (ver figura 9c). En este caso, para cada valor de N existe un valor mínimo (τ_m) del parámetro τ , por debajo del cual no hay solución, y por encima existen dos soluciones (una doble cuando τ coincide con τ_m), por tender ambas ramas de la función τ a infinito en los valores extremos de ψ (0 y π), excepto en los casos particulares $q = -1$ y $q = 1$. En resumen, cuando $\tau < \tau_m$, no existe ninguna solución, cuando $\tau = \tau_m$, existe una solución doble, y cuando $\tau > \tau_m$, existen, en general, dos soluciones, una para un valor de ψ menor al valor donde ocurre el mínimo (ψ_m), y otra para un valor mayor. Este valor ψ_m de ψ donde ocurre el mínimo τ_m de τ , dependiente de q y N , se calcula en [2.10](#).

En el caso particular, $N > 0$, $q = -1$, existen dos soluciones, o una doble, de la misma forma que en el caso general hasta un valor máximo del parámetro τ , por encima del cual sólo hay una solución (en $\psi < \psi_m$). Dicho valor máximo, como se puede deducir de la figura 9c, por ser la función $\alpha(\psi, -1; N)$ creciente para $\psi > \psi_m$, se puede calcular como el límite de la expresión de la *Función Temporal* en función de ψ , cuando ψ tiende a π . En este caso se cumple $\psi_N \rightarrow (N+1) \pi$, $\gamma \rightarrow 0$, y siguiendo los mismos pasos que para el cálculo anterior de $\alpha(\psi, -1; 0)$, teniendo en cuenta que α sigue siendo $1/2$, resulta

$$\alpha(\pi, -1; N) = \alpha^{3/2} \pi (N+1) = \sqrt{2} \frac{\pi}{4} (N+1) \quad (2.9.2)$$

En el caso particular, $N > 0$, $q = 1$, existe una única solución desde un valor mínimo del parámetro τ , por debajo del cual no hay ninguna solución. Dicho valor no es un mínimo regular donde se anula la derivada, sino que es un mínimo de contorno, como se puede deducir de la figura 9c, por ser la función $\alpha(\psi, 1; N)$ creciente en todo el intervalo $[0, \pi]$. Por tanto, se puede calcular como el límite de la expresión de la *Función Temporal* en función de ψ , cuando ψ tiende a 0. En este caso es $\psi_N \rightarrow N \pi$, $\gamma \rightarrow 0$, y siguiendo un proceso similar al cálculo anterior de $\alpha(\psi, -1; 0)$, teniendo en cuenta que α vuelve a ser $1/2$, resulta

$$\alpha(0, 1; N) = \alpha^{3/2} \pi N = \sqrt{2} \frac{\pi}{4} N \quad (2.9.3)$$

Para una configuración geométrica (q) y un valor tiempo de transferencia (τ), es fácil deducir que por ser $\tau_m(q;N)$ creciente con N , como se demuestra en [2.10](#), siempre existe un valor ($N_{\max}$) de N , donde

$$\tau_m(q;N_{\max}) \leq \tau \quad ; \quad \tau_m(q;N_{\max}+1) > \tau \quad (2.9.4)$$

En consecuencia, se deduce que, dejando libre el parámetro N , el *Problema de Lambert* tiene como máximo $(1 + 2 N_{\max})$ soluciones posibles, una para $N = 0$ y dos para cada valor de N , desde 1 hasta $N_{\max}$ (donde el mínimo es menor o igual que el tiempo de transferencia). Este número máximo de soluciones sólo se reduce para $q = -1$ o $q = 1$, cuando el tiempo de transferencia supera alguno de los valores límites $\tau(\pi, -1; N)$ o $\tau(0, 1; N)$, correspondientemente, como se ha mencionado anteriormente.

2.10 MÍNIMO TIEMPO EN MÚLTIPLE REVOLUCIÓN

Como se ha descrito en [2.9](#), para cada valor de q y N , existe un mínimo (τ_m) de la función τ por debajo del cual no existe ninguna solución, y por encima se encuentran dos soluciones (salvo casos particulares $q = 1$, $q = -1$), una anterior y otra posterior al valor (ψ_m) de ψ , donde ocurre el mínimo.

Para calcular el mínimo de τ para cualquier N , de la misma forma que se resuelve la ecuación del problema, y partiendo de una aproximación inicial dada, se resuelve la ecuación

$$\tau^{(1)}(\psi, q; N) = 0 \quad (2.10.1)$$

Se dispone de algoritmos para calcular la derivada de cualquier orden de la función τ , y por tanto, también de la función $\tau^{(1)}$, pudiendo aplicar cualquier método iterativo aplicado a τ de forma similar.

A continuación se desarrolla la primera derivada de τ con respecto a ψ , para obtener los valores de ψ_m y τ_m de forma aproximada. Para ello se anula la expresión obtenida y se ensayan diversas soluciones para conseguirlo.

Para simplificar notación se usan las variables

$$S_\psi = \sin \psi \quad ; \quad C_\psi = \cos \psi \quad (2.10.2)$$

Usando las expresiones [\(2.6.1\)](#) a [\(2.6.6\)](#) para calcular la derivada m -ésima de la función τ en función de ψ , usando las funciones auxiliares γ_n y δ_n . El algoritmo completo, usando también las variables S_ψ y C_ψ , se resume a continuación

$$\begin{aligned} \gamma_n &= S_\psi^{-n} \quad ; \quad \delta_n = C_\psi S_\psi^{-n} = \gamma_n C_\psi \\ \gamma_n^{(m)} &= -n \delta_{n+1}^{(m-1)} \quad ; \quad \delta_n^{(m)} = (n-1) \gamma_{n-1}^{(m-1)} - n \gamma_{n+1}^{(m-1)} \quad (m \geq 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^{(m)} &= \gamma_1^{(m)} q - \delta_1^{(m)} \quad ; \quad \alpha^{(m)} = \gamma^{(m+1)} \quad ; \quad \omega_N^{(m)} = \alpha^{(m)} \psi_N + (m+1) \gamma^{(m)} \\
(\alpha^{1/2})^{(m)} &= \frac{1}{2\alpha^{1/2}} \left(\alpha^{(m)} - \sum_{n=1}^{m-1} \binom{m}{n} (\alpha^{1/2})^{(n)} (\alpha^{1/2})^{(m-n)} \right) \\
\tau^{(m)} &= \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (\alpha^{1/2})^{(n)} \omega_N^{(m-n)} \tag{2.10.3}
\end{aligned}$$

Para obtener la primera derivada de τ , es necesario evaluar estas expresiones para los valores de m necesarios (0, 1, y para γ también 2), resultando

$$\begin{aligned}
\gamma &= \gamma_1 q - \delta_1 \\
\alpha &= \gamma^{(1)} = \gamma_1^{(1)} q - \delta_1^{(1)} = -\delta_2 q + \gamma_2 \\
\alpha^{(1)} &= \gamma^{(2)} = -\delta_2^{(1)} q + \gamma_2^{(1)} = (2\gamma_3 - \gamma_1) q - 2\delta_3 \\
\omega_N &= \alpha \psi_N + \gamma = (-\delta_2 q + \gamma_2) \psi_N + (\gamma_1 q - \delta_1) \\
\omega_N^{(1)} &= \alpha^{(1)} \psi_N + 2\gamma^{(1)} = ((2\gamma_3 - \gamma_1) q - 2\delta_3) \psi_N + 2(-\delta_2 q + \gamma_2) \\
(\alpha^{1/2})^{(1)} &= \frac{1}{2\alpha^{1/2}} \alpha^{(1)} \quad ; \quad \tau^{(1)} = (\alpha^{1/2}) \omega_N^{(1)} + (\alpha^{1/2})^{(1)} \omega_N \tag{2.10.4}
\end{aligned}$$

Separando las variables anteriores en factores de potencias de q , se simplifica

$$\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_{(1)} q + \alpha_{(0)} \quad ; \quad \alpha_{(1)} = -\delta_2 \quad ; \quad \alpha_{(0)} = \gamma_2 \\
\alpha^{(1)} &= \alpha_{(1)}^{(1)} q + \alpha_{(0)}^{(1)} \quad ; \quad \alpha_{(1)}^{(1)} = 2\gamma_3 - \gamma_1 \quad ; \quad \alpha_{(0)}^{(1)} = -2\delta_3 \\
\omega_N &= \omega_{N(1)} q + \omega_{N(0)} \quad ; \quad \omega_{N(1)} = \gamma_1 - \delta_2 \psi_N \quad ; \quad \omega_{N(0)} = \gamma_2 \psi_N - \delta_1 \\
\omega_N^{(1)} &= \omega_{N(1)}^{(1)} q + \omega_{N(0)}^{(1)} \quad ; \quad \omega_{N(1)}^{(1)} = (2\gamma_3 - \gamma_1) \psi_N - 2\delta_2 \quad ; \quad \omega_{N(0)}^{(1)} = 2(\gamma_2 - \delta_3 \psi_N) \tag{2.10.5}
\end{aligned}$$

Usando estas expresiones en el cálculo de $\tau^{(1)}$, y multiplicando por el factor $(2\alpha^{1/2})$

$$\begin{aligned}
2(\alpha^{1/2}) \tau^{(1)} &= 2\alpha \omega_N^{(1)} + 2(\alpha^{1/2})^{(1)} \omega_N = 2\alpha \omega_N^{(1)} + \alpha^{(1)} \omega_N = \\
&= 2(\alpha_{(1)} q + \alpha_{(0)}) (\omega_{N(1)}^{(1)} q + \omega_{N(0)}^{(1)}) + (\alpha_{(1)}^{(1)} q + \alpha_{(0)}^{(1)}) (\omega_{N(1)} q + \omega_{N(0)})
\end{aligned}$$

Para evitar todos los divisores de S_ψ que aparecen en esta expresión, implícitos en los parámetros γ_n y δ_n , se multiplica por $(-S_\psi^5)$, y separando de nuevo en factores de potencias de q , se obtiene

$$F_1 \tau^{(1)} = A$$

donde se ha definido el factor

$$F_1 = 2 (\alpha^{1/2}) / (-\gamma_5) = 2 (\alpha^{1/2}) (-S_\psi^5) = (-2 \rho^{1/2} S_\psi^4) \quad (2.10.6)$$

Y el polinomio en q de segundo grado

$$A = A(\psi, q; N) = A_0 + A_1 q + A_2 q^2 \quad (2.10.7)$$

Cuyos coeficientes son las funciones siguientes

$$\begin{aligned} A_0 &= A_0(\psi, N) = (-S_\psi^5) (2 \alpha_{(0)} \omega_{N(0)}^{(1)} + \alpha_{(0)}^{(1)} \omega_{N(0)}) \\ A_1 &= A_1(\psi, N) = (-S_\psi^5) (2 \alpha_{(0)} \omega_{N(1)}^{(1)} + 2 \alpha_{(1)} \omega_{N(0)}^{(1)} + \alpha_{(0)}^{(1)} \omega_{N(1)} + \alpha_{(1)}^{(1)} \omega_{N(0)}) \\ A_2 &= A_2(\psi, N) = (-S_\psi^5) (2 \alpha_{(1)} \omega_{N(1)}^{(1)} + \alpha_{(1)}^{(1)} \omega_{N(1)}) \end{aligned} \quad (2.10.8)$$

Sustituyendo las variables correspondientes

$$\begin{aligned} A_0 &= (-S_\psi^5) (2 \gamma_2 (2 (\gamma_2 - \delta_3 \psi_N) + (-2 \delta_3) (\gamma_2 \psi_N - \delta_1))) \\ A_1 &= (-S_\psi^5) (2 \gamma_2 ((2 \gamma_3 - \gamma_1) \psi_N - 2 \delta_2) + 2 (-\delta_2) (2 (\gamma_2 - \delta_3 \psi_N) + \\ &\quad + (-2 \delta_3) (\gamma_1 - \delta_2 \psi_N) + (2 \gamma_3 - \gamma_1) (\gamma_2 \psi_N - \delta_1))) \\ A_2 &= (-S_\psi^5) (2 (-\delta_2) ((2 \gamma_3 - \gamma_1) \psi_N - 2 \delta_2) + (2 \gamma_3 - \gamma_1) (\gamma_1 - \delta_2 \psi_N)) \end{aligned} \quad (2.10.9)$$

Teniendo en cuenta que $\gamma_n = S_\psi^{-n}$, $\delta_n = \gamma_n C_\psi$, y como es obvio $\gamma_n \gamma_k = \gamma_{n+k}$, se simplifica

$$\begin{aligned} A_0 &= 6 \psi_N C_\psi - 2 S_\psi (2 + C_\psi^2) \\ A_1 &= -3 \psi_N (1 + 3 C_\psi^2) + S_\psi C_\psi (11 + C_\psi^2) \\ A_2 &= 3 \psi_N C_\psi (1 + C_\psi^2) - S_\psi (1 + 5 C_\psi^2) \end{aligned} \quad (2.10.10)$$

Resolviendo la ecuación $A(\psi, q; N) = 0$ para valores de q y N dados, se obtiene el valor (ψ_m) de ψ donde ocurre el mínimo (τ_m) de τ , a partir del cual se determina la posible existencia de soluciones para un tiempo adimensional (τ) dado. Este argumento es válido siempre que los ceros de $A(\psi, q; N)$ no sean también ceros del factor F_1 , lo cual sólo ocurre en los casos límite ($q = 1$ y $q = -1$) que se analizarán posteriormente.

Con el fin de obtener las curvas de valores mínimos, mostradas en la figura 14, en lugar de calcular numéricamente ψ en función de q a partir de la ecuación $A(\psi, q; N) = 0$, se procede a calcular q en función ψ , solución directa de la ecuación de segundo grado siguiente, donde el signo del radical se ha deducido de modo que se cumpla la condición $|q| \leq 1$.

$$q = \frac{\sqrt{A_1^2 - 4 A_0 A_2} - A_1}{2 A_2} = \frac{-2 A_0}{\sqrt{A_1^2 - 4 A_0 A_2} + A_1} \quad (2.10.11)$$

Evaluable esta expresión, para $\psi = \psi_m$, se obtienen las gráficas de las funciones $\psi_m(q;N)$ mostradas en la figura 14, para diferentes valores de N , donde se observan dos puntos problemáticos en los límites de q ($q \rightarrow 1$ y $q \rightarrow -1$) que se estudiarán más adelante (en ellos se produce una variación de ψ_m muy grande ante pequeñas variaciones de q).

Cuando $N \rightarrow \infty$, la ecuación anterior tiende a una ecuación límite que se simplifica notablemente. Aunque esta ecuación se puede obtener como límite del caso general anterior, teniendo en cuenta que el término de τ correspondiente a N es proporcional a $\alpha^{3/2}$, es más fácil obtenerla directamente anulando la derivada de α , y por tanto,

$$\alpha^1 = (2 \gamma_3 - \gamma_1) q - 2 \delta_3 = 0$$

Teniendo en cuenta las definiciones de γ_n y δ_n , multiplicando por (S_ψ^3) y usando la identidad $(S_\psi^2 = 1 - C_\psi^2)$

$$(1 + C_\psi^2) q - 2 C_\psi = 0$$

de donde se deduce (para $\psi = \psi_m, N \rightarrow \infty$)

$$q = 2 C_\psi / (1 + C_\psi^2) \quad (2.10.12)$$

Sabiendo que $q = \cos f$, se puede calcular (se usa ψ en lugar de ψ_m por simplicidad)

$$\begin{aligned} \sin^2 f &= 1 - q^2 = 1 - 4 C_\psi^2 / (1 + C_\psi^2)^2 = ((1 + C_\psi^2)^2 - 4 C_\psi^2) / (1 + C_\psi^2)^2 \\ \sin^2 f &= (1 - C_\psi^2)^2 / (1 + C_\psi^2)^2 \\ \sin f &= (1 - C_\psi^2) / (1 + C_\psi^2) = S_\psi^2 / (1 + C_\psi^2) \end{aligned} \quad (2.10.13)$$

Despejando C_ψ en función de $\sin f$, se deducen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} C_\psi^2 &= (1 - \sin f) / (1 + \sin f) = (1 - \sin^2 f) / (1 + \sin f)^2 = \cos^2 f / (1 + \sin f)^2 \\ C_\psi &= ((1 - \sin f) / (1 + \sin f))^{1/2} = \cos f / (1 + \sin f) = (1 - \sin f) / \cos f \\ S_\psi^2 &= 1 - C_\psi^2 = 1 - (1 - \sin f) / (1 + \sin f) = 2 \sin f / (1 + \sin f) \\ S_\psi &= (2 \sin f / (1 + \sin f))^{1/2} \\ \tan \psi &= (2 \sin f / (1 - \sin f))^{1/2} = (2 \sin f (1 + \sin f))^{1/2} / \cos f \end{aligned} \quad (2.10.14)$$

El valor ψ_m , de ψ , donde ocurre el mínimo de τ , para $N \rightarrow \infty$, es pues

$$\psi_m = \psi_m(q; \infty) = \text{atan2}(\cos f, (2 \sin f (1 + \sin f))^{1/2}) \quad (2.10.15)$$

Los valores de ρ , α y ρ en el mínimo, para $N \rightarrow \infty$, resultan ser muy simples de obtener

$$\rho_m = 1 - q C_\psi = 1 - \cos^2 f / (1 + \sin f) = (1 + \sin f - \cos^2 f) / (1 + \sin f) =$$

$$\begin{aligned}
&= (\sin f + \sin^2 f) / (1 + \sin f) = \sin f \\
\alpha_m &= \rho / S_\psi^2 = \sin f / (2 \sin f / (1 + \sin f)) = (1 + \sin f) / 2 \\
\gamma_m &= (q - C_\psi) / S_\psi = (\cos f - \cos f / (1 + \sin f)) / S_\psi \\
&= (\cos f \sin f / (1 + \sin f)) / S_\psi = \cos f (2 \sin f / (1 + \sin f)) / (2 S_\psi) \\
&= \cos f S_\psi^2 / (2 S_\psi) = \cos f (S_\psi / 2)
\end{aligned} \tag{2.10.16}$$

Y el valor de τ en el mínimo, cuando $N \rightarrow \infty$, tiende al siguiente valor

$$\begin{aligned}
\tau_m &= \alpha_m^{1/2} (\alpha_m \psi_N + \gamma_m) = \alpha_m^{3/2} (\psi_m + N \pi) + \rho_m^{1/2} \gamma_m / S_\psi \\
\tau_m &= ((1 + \sin f)/2)^{3/2} (\psi_m + N \pi) + \sin^{1/2} f \cos f / 2 \\
\tau_m &\rightarrow ((1 + \sin f)/2)^{3/2} N \pi
\end{aligned} \tag{2.10.17}$$

Nótese que es proporcional a N en primera aproximación.

Para obtener una aproximación inicial ψ_m de ψ en la ecuación $\tau^1(\psi, q; N) = 0$, se puede usar la solución exacta obtenida de forma analítica para $N \rightarrow \infty$. Esta aproximación es muy buena para N alto pero no para valores menores de N , especialmente para $N = 1$. No obstante, se plantearán mejores aproximaciones más adelante.

Para calcular x_m a partir de ψ_m , esto es, la función $x_m(q; N)$ a partir de la función $\psi_m(q; N)$, sólo hay que tener en cuenta la igualdad $C_\psi = 1 - 2x$. En la figura 15 se muestran las gráficas de la función $x_m(q; N)$ para diferentes valores de N , de forma similar a la figura 14 para $\psi_m(q; N)$. Nótese que con la variable x , la gráfica no está tan pegada en los límites de q , por lo que en general será más fácil obtener aproximaciones en dichos límites con la variable x .

En particular, para el caso $N \rightarrow \infty$, usando la relación de C_ψ calculada en [\(2.10.14\)](#) (para $\psi = \psi_m$, $N \rightarrow \infty$), se puede calcular (para $x = x_m$, $N \rightarrow \infty$)

$$2x = 1 - C_\psi = 1 - (1 - \sin f) / \cos f = (\sin f - (1 - \cos f)) / \cos f \tag{2.10.18}$$

Teniendo en cuenta las variables q , q_c , q_s , C_q y S_q , definidas en la sección de símbolos [xii](#), todas dependientes del ángulo f , y las siguientes identidades existentes entre ellas

$$\begin{aligned}
q_c &= \cos^2 \frac{1}{2}f = \frac{1 + q}{2} \quad ; \quad q_s = \sin^2 \frac{1}{2}f = \frac{1 - q}{2} \\
C_q &= \cos \frac{1}{2}f = \sqrt{q_c} \quad ; \quad S_q = \sin \frac{1}{2}f = \sqrt{q_s} \\
q &= \cos f = C_q^2 - S_q^2 \quad ; \quad 1 - \cos f = 2 S_q^2 \quad ; \quad \sin f = 2 S_q C_q
\end{aligned} \tag{2.10.19}$$

a) Gráfica completa

b) Detalle en $q = -1$

c) Detalle en $q = 1$

Figura 14. Función $\psi_m(q;N)$ de valores ψ_m de ψ en función de q para distintos valores de N donde ocurre el mínimo de la función $\tau(\psi; q; N)$ en función de ψ .

a) Gráfica completa

b) Detalle en $q = -1$

c) Detalle en $q = 1$

Figura 15. Función $x_m(q;N)$ de valores x_m de x en función de q para distintos valores de N donde ocurre el mínimo de la función $\tau(x;q;N)$ en función de x .

y sustituyendo estas tres últimas identidades en la expresión de x anterior

$$2x = (2S_q C_q - 2S_q^2) / (C_q^2 - S_q^2) = 2S_q (C_q - S_q) / (C_q^2 - S_q^2) = 2S_q / (C_q + S_q)$$

resulta finalmente

$$x_m = x_m(q; \infty) = S_q / (C_q + S_q) \quad (2.10.20)$$

A continuación, se estudian las soluciones en la proximidad de los puntos conflictivos correspondientes a N vueltas completas ($q \rightarrow 1$ y $q \rightarrow -1$) y de los puntos característicos correspondientes a N vueltas y media ($q = 0$). Como se puede ver en la figura 14, la variación de ψ en los puntos extremos de q es muy alta ante pequeñas variaciones de q , y al mismo tiempo, existe un problema de pérdida de precisión en el propio cálculo de q . En dichos casos, es más conveniente usar el parámetro q_s ó q_c , calculado usando $\sin^2 f$ para evitar la pérdida de precisión, como se detalla en (1.2.8).

Por claridad, se repite aquí el cálculo partiendo de las variables de (1.2.1) y (1.2.7)

$$\left\{ \begin{array}{l} c^2 = (\Delta r)^2 + (2r_s)^2 \\ \sin^2 f = \frac{c^2}{(\Sigma r)^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q_c = \frac{1+q}{2} \quad ; \quad q_s = \frac{\sin^2 f}{4q_c} \quad (q \geq 0) \\ q_s = \frac{1-q}{2} \quad ; \quad q_c = \frac{\sin^2 f}{4q_s} \quad (q \leq 0) \end{array} \right\}$$

El problema de pérdida de precisión de q se debe a que el valor de $\cos \delta$ es muy próximo a 1 ó -1, perdiendo la precisión del valor relativo respecto a dicho valor límite, mucho más cuanto más cercano esté del límite. En el cálculo de $\sin^2 f$ no existe ese problema pues su valor en cualquiera de los dos límites es próximo a cero, sin embargo, es importante aclarar que en los casos donde $q \rightarrow -1$ (soluciones tendiendo a completar $N+1$ vueltas), debido a que $\delta \rightarrow \pi$, debería usarse el ángulo $(\pi - \delta)$ en lugar de δ , para evitar de nuevo cualquier pérdida de precisión.

2.10.1 PROXIMIDAD A N VUELTAS COMPLETAS ($q \rightarrow 1$)

Este caso se corresponde con soluciones que superan ligeramente N vueltas ($q \rightarrow 1$).

Cuando $q \rightarrow 1$, $\psi_m \rightarrow 0$ rápidamente (ver figura 14), y como se ha mencionado, es mejor usar el parámetro q_s en lugar de q . Por simplicidad se va a utilizar el parámetro proporcional a q_s siguiente

$$k = 2q_s = 1 - q \quad (2.10.21)$$

El objetivo ahora es obtener el valor (ψ_m) de ψ donde ocurre el mínimo de τ , en función del parámetro k y N .

Sustituyendo $q = 1 - k$ en la ecuación $A(\psi, q; N) = 0$, y definiendo los coeficientes B_j , se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned}
A(\psi, 1-k; N) &= B(\psi, k; N) = B_0 + B_1 k + B_2 k^2 = 0 \\
B_0 &= A_0 + A_1 + A_2 = -(1 - C_\psi)^2 (3 \psi_N (1 - C_\psi) + S_\psi (5 - C_\psi)) \\
B_1 &= -A_1 - 2 A_2 = (1 - C_\psi) (3 \psi_N (1 - C_\psi + 2 C_\psi^2) + S_\psi (2 - 9 C_\psi + C_\psi^2)) \\
B_2 &= A_2 = 3 \psi_N C_\psi (1 + C_\psi^2) - S_\psi (1 + 5 C_\psi^2)
\end{aligned} \tag{2.10.22}$$

Con el fin de simplificar, se sustituye el parámetro N por el parámetro β siguiente, que tiende a cero cuando N tiende a infinito

$$\beta = 2 / (3 N \pi) \tag{2.10.23}$$

De modo que

$$\psi_N = \psi + N \pi = \psi + 2 / (3 \beta) \tag{2.10.24}$$

Sustituyendo en los coeficientes anteriores y desarrollando en serie de potencias de la variable ψ , y definiendo los coeficientes D_j , se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned}
D(\psi, k; \beta) &= B(\psi, k; N) \beta / 2 = D_0 + D_1 k + D_2 k^2 = 0 \\
D_0 &= B_0 \beta / 2 = \psi^5 (-1/2 \beta - 1/8 \psi - 1/12 \beta \psi^2 + 1/32 \psi^3 + 7/144 \beta \psi^4 + \dots) \\
D_1 &= B_1 \beta / 2 = \psi^2 (1 - 5/6 \psi^2 + 17/45 \psi^4 + 3/10 \beta \psi^5 - 145/2016 \psi^6 + \dots) \\
D_2 &= B_2 \beta / 2 = 2 - 2 \psi^2 + 11/12 \psi^4 + 1/10 \beta \psi^5 - 23/90 \psi^6 + \dots
\end{aligned} \tag{2.10.25}$$

El discriminante de la ecuación de segundo grado en k es

$$\Delta^2 = D_1^2 - 4 D_0 D_2 = \psi^4 (1 + 4 \beta \psi - 2/3 \psi^2 - 10/3 \beta \psi^3 + 1/5 \psi^4 + \dots) \tag{2.10.26}$$

y su raíz cuadrada

$$\begin{aligned}
\Delta &= \psi^2 (1 + 2 \beta \psi - (1/3 + 2 \beta^2) \psi^2 - (1 - 4 \beta^2) \beta \psi^3 + \\
&+ (2/45 + 4/3 \beta^2 - 10 \beta^4) \psi^4 + \dots)
\end{aligned} \tag{2.10.27}$$

Las raíces de la ecuación son

$$k = (-D_1 \pm \Delta) / (2 D_2)$$

Debido a que el valor de k debe ser positivo la raíz buscada es (para $\psi = \psi_m$)

$$k = (-D_1 + \Delta) / (2 D_2) = 1/2 \psi^3 (\beta + (1/4 - \beta^2) \psi + (1/2 + 2 \beta^2) \beta \psi^2 + \dots) \tag{2.10.28}$$

Cuando $\beta \rightarrow 0$, $k \rightarrow \psi^4/8$, y por tanto $\psi \rightarrow (8k)^{1/4}$

Según los resultados obtenidos, una posible aproximación de ψ_m , para $q = 1 - k$, en un entorno reducido de k , puede ser

$$\psi_m \approx \left(\frac{2k}{\beta + (1/4 - \beta^2)(8k)^{1/4}} \right)^{1/3} ; \quad \beta = 2 / (3 N \pi) \quad (2.10.29)$$

Con esta aproximación se obtiene ψ_m con un error menor del 5% en un entorno muy reducido, $0.975 \leq q \leq 1$. Sin embargo, se puede ampliar el intervalo de validez, teniendo en cuenta que $(2k)$ es del orden de $\sin^2 f$ y que el límite de S_ψ cuando $N \rightarrow \infty$ ($\beta \rightarrow 0$), es $(2 \sin f / (1 + \sin f))^{1/2}$, por tanto, la aproximación anterior se mejora considerablemente por la siguiente

$$\sin \psi_m = S_{1m} \approx \left(\frac{\sin^2 f}{\beta + ((1 + \sin f)^{3/2} / 4 - \beta^2) \sqrt{2 \sin f}} \right)^{1/3} ; \quad \psi_m = \arcsin(S_{1m}) \quad (2.10.30)$$

Con esta aproximación se obtiene ψ_m con un error menor del 1% en el peor de los casos en el intervalo $1/2 \leq q \leq 1$, mejorando notablemente cuando $q \rightarrow 1$.

Usando el desarrollo de k en función de ψ anterior (para $\psi = \psi_m$), también se puede calcular el valor de x_m . Para ello solo es necesario usar la aproximación

$$x = \sin^2(\psi/2) \approx (\psi/2)^2 \Rightarrow \psi \approx 2 x^{1/2}$$

Sustituyendo en dicho desarrollo (para $x = x_m$)

$$k = 1/2 (8 x^{3/2}) (\beta + (1/4 - \beta^2) (2 x^{1/2}))$$

Teniendo en cuenta que $k = 2 q_s = 2 S_q^2$

$$S_q^2 \approx x^{3/2} (2 \beta + (1 - 4 \beta^2) x^{1/2})$$

Dividiendo por S_q^2 y elevando a $2/3$

$$1 \approx (x/S_q) (2 \beta / S_q^{1/2} + (1 - 4 \beta^2) (x/S_q)^{1/2})^{2/3}$$

se deduce que cuando $\beta \rightarrow 0$, $x \rightarrow S_q$, y cuando no, $x \rightarrow S_q^{3/2} / (2 \beta)$

Una buena aproximación, que une las dos tendencias, se obtiene de sustituir x por S_q en $(x/S_q)^{1/2}$, y despejar la única x restante, resultando

$$x_m \approx S_q / (\gamma / S_q^{1/2} + 1 - \gamma^2)^{2/3} ; \quad \gamma = 2 \beta = 4 / (3 N \pi) \quad (2.10.31)$$

Con esta aproximación, como en la primera obtenida para ψ_m , se obtiene x_m con un error menor del 5% en un entorno muy reducido de q , $0.975 \leq q \leq 1$, por lo tanto, salvo que q sea muy próximo a 1, es más conveniente calcular x_m basándose en la última de las aproximaciones de ψ_m obtenida anteriormente, del siguiente modo

$$\sin^2 \psi_m = S_{2m} \approx \left(\frac{\sin^2 f}{\beta + ((1 + \sin f)^{3/2} / 4 - \beta^2) \sqrt{2 \sin f}} \right)^{2/3}$$

$$\cos \psi_m = C_{1m} = (1 - S_{2m})^{1/2}$$

$$x_m = (1 - C_{1m}) / 2 = S_{2m} / (2 (1 + C_{1m})) \quad (2.10.32)$$

Con esta aproximación se obtiene x_m con un error similar al de ψ_m correspondiente, esto es, 1% en el peor de los casos en el intervalo $1/2 \leq q \leq 1$, mejorando notablemente cuando $q \rightarrow 1$.

2.10.2 PROXIMIDAD A $N+1$ VUELTAS COMPLETAS ($q \rightarrow -1$)

Este caso se corresponde con soluciones que tienden a completar $N+1$ vueltas ($q \rightarrow -1$).

Cuando $q \rightarrow -1$, el valor ψ_m de ψ , donde se anula la derivada de τ , tiende a un valor ψ_M máximo próximo a π , distinto para cada valor de N , tendiendo a π cuando $N \rightarrow \infty$ (ver figura 14b).

Por la misma razón de pérdida de precisión mencionada en el caso anterior, es mejor usar el parámetro q_C en lugar de q , aunque por simplicidad se va a utilizar el parámetro proporcional a q_C siguiente

$$k = 2 q_C = 1 + q \quad (2.10.33)$$

Además, para manejar ángulos pequeños, en lugar de usar ψ , se define el ángulo suplementario ξ , de modo que

$$\psi = \pi - \xi \quad (2.10.34)$$

Este cambio es útil para calcular el valor máximo (ψ_M) de ψ_m en función de N , pero no para calcular el valor de ψ_m en función de k en la proximidad de ψ_M . Por ello se define también el ángulo λ relativo al valor de ψ_M en sentido negativo de ψ para que su valor sea positivo. También se define el valor ξ_M de ξ_m donde ψ_m es ψ_M . En resumen, se tienen las siguientes expresiones (por simplicidad de notación, se prescinde el subíndice m en las variables ψ , ξ y λ).

$$\psi = \pi - \xi = \psi_M - \lambda \quad ; \quad \psi_M = \pi - \xi_M \quad ; \quad \xi = \xi_M + \lambda \quad (2.10.35)$$

El objetivo ahora es obtener el valor máximo (ψ_M) de ψ_m en función de N , y el valor (ψ_m) de ψ , donde ocurre el mínimo de τ , en función de k y N .

Sustituyendo $q = -1 + k$ en la ecuación $A(\psi, q; N) = 0$, y definiendo los coeficientes B_j , se obtiene la ecuación

$$A(\psi, -1+k; N) = B(\psi, k; N) = B_0 + B_1 k + B_2 k^2 = 0$$

$$B_0 = A_0 - A_1 + A_2 = (1 + C_\psi)^2 (3 \psi_N (1 + C_\psi) - S_\psi (5 + C_\psi))$$

$$B_1 = A_1 - 2 A_2 = (1 + C_\psi) (-3 \psi_N (1 + C_\psi + 2 C_\psi^2) + S_\psi (2 + 9 C_\psi + C_\psi^2))$$

$$B_2 = A_2 = 3 \psi_N C_\psi (1 + C_\psi^2) - S_\psi (1 + 5 C_\psi^2) \quad (2.10.36)$$

El valor ψ_M se obtiene anulando $B(\psi, 0; N)$, esto es, anulando el coeficiente B_0 . Este valor ψ_M (o ξ_M) es otra raíz, distinta de $\psi = \pi$, correspondientes a $q = -1$ (o $k = 0$), por lo tanto, eliminando raíces distintas de $\psi = \pi$ ($C_\psi = -1$), se obtiene la ecuación

$$3 \psi_N (1 + C_\psi) - S_\psi (5 + C_\psi) = 0 \quad (2.10.37)$$

Esta ecuación aún tiene una raíz en $\psi = \pi$. Para eliminarla, se recurre al cambio de la variable ψ por ξ . Teniendo en cuenta la igualdad

$$(1 + C_\psi) / S_\psi = (1 - C_\xi) / S_\xi = (2 \sin^2(\xi/2)) / (2 \sin(\xi/2) \cos(\xi/2)) = \tan(\xi/2)$$

Y dividiendo la ecuación anterior por S_ψ , resulta

$$3 \psi_N \tan(\xi/2) - (5 - \cos \xi) = 0 \quad (2.10.38)$$

Con el fin de simplificar, se sustituye el parámetro N por el parámetro γ siguiente, que tiende a cero cuando N tiende a infinito

$$\gamma = 8 / (3 (N+1) \pi) \quad (2.10.39)$$

De modo que

$$\psi_N = N \pi + \psi = N \pi + (\pi - \xi) = (N+1) \pi - \xi = 8 / (3 \gamma) - \xi \quad (2.10.40)$$

Sustituyendo el valor de ψ_N en la ecuación anterior

$$(8/\gamma - 3 \xi) \tan(\xi/2) = (5 - \cos \xi)$$

y despejando γ , se llega a

$$\gamma = 8 \sin(\xi/2) / ((5 - \cos \xi) \cos(\xi/2) + 3 \xi \sin(\xi/2)) \quad (2.10.41)$$

Desarrollando el segundo miembro en potencias de ξ resulta la ecuación

$$\begin{aligned} \gamma = & \xi (1 - 5/12 \xi^2 + 47/240 \xi^4 - 463/5040 \xi^6 + 2233/51840 \xi^8 \\ & - 3224929/159667200 \xi^{10} + \dots) \end{aligned} \quad (2.10.42)$$

Ensayando en esta igualdad un desarrollo de ξ en serie de potencias de γ y calculando los coeficientes de dicho desarrollo se llega a la función inversa que permite obtener una aproximación del valor de $\xi = \xi_M$ buscado

$$\begin{aligned} \xi_M = & \gamma (1 + 5/12 \gamma^2 + 13/40 \gamma^4 + 43/140 \gamma^6 + 5149/16128 \gamma^8 \\ & + 207787/591360 \gamma^{10} + \dots) \end{aligned} \quad (2.10.43)$$

Con este desarrollo, truncado hasta grado 11, se obtiene una buena aproximación, pero todavía mejor es la que se obtiene desarrollando ξ en fracciones simples de γ , resultando

$$\begin{aligned} \xi_M = & \gamma / (1 - 5/12 \gamma^2 / (1 - 109/300 \gamma^2 / (1 - 6759/19075 \gamma^2 / \\ & (1 - 28976555/82513872 \gamma^2 / \\ & (1 - 23224904769519/66415770840860 \gamma^2 / (1 - \dots)))))) \end{aligned} \quad (2.10.44)$$

De cualquier modo, los valores de ψ_M o ξ_M de las primeras vueltas se pueden tener tabulados resolviendo numéricamente la ecuación sin desarrollar partiendo de un primer valor calculado con cualquiera de las aproximaciones anteriores. El resultado para las 12 primeras vueltas se muestra en la tabla 11, donde aparecen los valores reales calculados con *doble precisión* y las aproximaciones por serie de potencias y fracciones simples con los decimales correctos subrayados.

A partir de una estimación de ξ_M , se puede usar el método recursivo mostrado a continuación para obtener iterativamente la solución real.

La ecuación anterior que relaciona las variables γ y ξ se puede reescribir como

$$G = 0 \quad (2.10.45)$$

donde

$$\begin{aligned} S &= \sin(\xi/2) \quad ; \quad C = \cos(\xi/2) \\ H &= (8/\gamma - 3 \xi) \quad ; \quad G = 2 C (2 + S^2) - H S \end{aligned} \quad (2.10.46)$$

Derivando estas variables respecto a ξ

$$\begin{aligned} S^{(1)} &= C/2 \quad ; \quad C^{(1)} = -S/2 \\ H^{(1)} &= -3 \quad ; \quad G^{(1)} = C (3 S C - H/2) \\ H^{(2)} &= 0 \quad ; \quad G^{(2)} = 3/2 C (2 - 3 S^2) + H S/4 \end{aligned} \quad (2.10.47)$$

y usando la primera derivada, se obtiene un método de segundo orden (método de Newton) que mejora la estimación ξ_M sumándola el incremento

$$(\Delta \xi_M)_1 = -G / G^{(1)} \quad (2.10.48)$$

Usando también la segunda derivada, se obtiene un método de tercer orden que mejora la estimación ξ_M sumándola el incremento

$$(\Delta \xi_M)_2 = (\Delta \xi_M)_1 (1 - (\Delta \xi_M)_1 G^{(2)} / G^{(1)}) \quad (2.10.49)$$

N	ψ_M	ξ_M	ξ_M (frac. grado 9)	ξ_M (serie grado 9)
1	2.67991059347499	0.461682060114802	0.461680959182619	0.461646383858737
2	2.84857449140999	0.293018162179807	0.293018153853351	0.293017802220235
3	2.92525829196844	0.216334361621358	0.216334361314797	0.216334347063167
4	2.96974165097965	0.171851002610148	0.171851002585393	0.171851001383639
5	2.99892306585233	0.142669587737462	0.142669587734238	0.142669587574092
6	3.01958016769793	0.122012485891858	0.122012485891279	0.122012485862069
7	3.03498723181487	0.106605421774928	0.106605421774796	0.106605421768098
8	3.04692661051939	0.094666043070407	0.094666043070371	0.094666043068542
9	3.05645374839602	0.085138905193774	0.085138905193762	0.085138905193190
10	3.06423427105929	0.077358382530500	0.077358382530496	0.077358382530295
11	3.06423427105929	0.070883577826603	0.070883577826602	0.070883577826525
12	3.06423427105929	0.065410711491386	0.065410711491385	0.065410711491354

Tabla 11. Valores de ψ_M y ξ_M para las 12 primeras vueltas.

En el peor de los casos ($N = 1$), para obtener una solución de *doble precisión* usando uno de los dos métodos iterativos anteriores, partiendo de una aproximación de fracciones simples de grado determinado, se puede usar una de las siguientes opciones:

- Aproximación de grado 11 y una iteración de segundo orden.
- Aproximación de grado 5 y dos iteraciones de segundo orden.
- Aproximación de grado 7 y una iteración de tercer orden.

Para $N = 2$ en adelante, el grado de la estimación inicial necesaria para las distintas opciones se muestra en la tabla 12 para los primeros valores de N .

N	Una iteración de segundo orden	Dos iteraciones de segundo orden	Una iteración de tercer orden
1	11	5	7
2	9	3	5
3-4	7	3	3
5-12	5	1	3

Tabla 12. Grado de la aproximación en fracciones simples necesaria para obtener ξ_M con *doble precisión*, según el método elegido, para las 12 primeras vueltas.

Téngase en cuenta que, con una aproximación de orden 9 se consigue directamente *doble precisión*, sin necesidad de ninguna iteración, a partir de $N = 12$. Con una aproximación de orden 11, aunque no se muestra en ninguna tabla, se puede comprobar que se consigue *doble precisión* a partir de $N = 8$.

Como conclusión, desde $N = 1$ hasta $N = 7$ se propone usar una única iteración de segundo orden partiendo de la aproximación en fracciones simple de grado indicado en la tabla 12 en función de N (11, 9, 7 y 5 sucesivamente), desde $N = 8$ hasta $N = 11$ se propone usar la aproximación de orden 11, sin necesidad de ninguna iteración adicional, y a partir de $N = 12$ es suficiente la aproximación de grado 9. Aunque en la práctica no tiene mucho sentido un valor de N muy alto, como curiosidad matemática, a partir de un valor de N de aproximadamente 30 se puede bajar la aproximación a grado 7, a partir de 100 a grado 5, a partir de 1000 a grado 3, y a partir de 100000 a grado 1.

Para simplificar el cálculo de $\xi_{M(1)}$, en lugar del parámetro N ó γ , se va a utilizar el parámetro β siguiente, que tiende a cero cuando N tiende a infinito

$$\beta = \gamma/4 = 2 / (3 (N+1) \pi) \quad (2.10.50)$$

De modo que

$$\psi_N = \psi + N \pi = (N+1) \pi - (\pi - \psi) = 2 / (3 \beta) - \xi \quad (2.10.51)$$

Sustituyendo en los coeficientes anteriores y desarrollando en serie de potencias de la variable ξ , y definiendo los coeficientes D_j , se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned} D(\psi, k; \beta) &= B(\psi, k; N) \beta / 2 = D_0 + D_1 k + D_2 k^2 = 0 \\ D_0(\psi, \beta) &= B_0 \beta / 2 = \xi^5 (-1/2 \beta + 1/8 \xi - 1/12 \beta \xi^2 - 1/32 \xi^3 + 7/144 \beta \xi^4 + \dots) \\ D_1(\psi, \beta) &= B_1 \beta / 2 = \xi^2 (-1 + 5/6 \xi^2 - 17/45 \xi^4 + \dots) \\ D_2(\psi, \beta) &= B_2 \beta / 2 = -2 + 2 \xi^2 - 11/12 \xi^4 + \dots \end{aligned} \quad (2.10.52)$$

Para hallar ξ_m en función de k , se recurre el desarrollo de $\xi_m(k)$ en $\xi_m = \xi_M, k = 0$.

$$\xi_m(k) = \xi_M + \xi_{M(1)} k + \xi_{M(2)}/2 k^2 + \dots + \xi_{M(n)}/n! k^n + \dots \quad ; \quad \xi_{M(n)} = d^n \xi_m(0)/dk^n$$

Derivando la ecuación $D(\xi, k; \beta) = 0$ respecto a k

$$(\partial D / \partial \xi) (d\xi/dk) + (\partial D / \partial k) = 0$$

Y despejando la primera derivada, $\xi_{M(1)}$, resulta

$$\xi_{(1)} = d\xi/dk = - (\partial D / \partial k) / (\partial D / \partial \xi)$$

Las parciales de D , para $\xi_m = \xi_M$ y $k = 0$, son

$$\begin{aligned} \partial D(\xi_M, 0; \beta) / \partial k &= D_1(\xi_M; \beta) = \xi_M^2 (-1 + 5/6 \xi_M^2 - 17/45 \xi_M^4 + \dots) \\ \partial D(\xi_M, 0; \beta) / \partial \xi &= \partial D_0(\xi_M; \beta) / \partial \xi = \\ &= \xi_M^4 (-5/2 \beta + 3/4 \xi_M - 7/12 \beta \xi_M^2 - 1/4 \xi_M^3 + 7/16 \beta \xi_M^4 + \dots) \end{aligned}$$

$$\xi_{M(1)} = -(\partial \mathcal{D}(\xi_M, 0; \beta) / \partial k) / (\partial \mathcal{D}(\xi_M, 0; \beta) / \partial \xi) = -D_1(\xi_M; \beta) / (\partial \mathcal{D}_0(\xi_M; \beta) / \partial \xi)$$

Los desarrollos de D_1 y $(\partial \mathcal{D}_0 / \partial \xi)$ para $\xi = \xi_M$, son

$$D_1(\xi_M; \beta) = \xi_M^2 (-1 + 5/6 \xi_M^2 - 17/45 \xi_M^4 + \dots)$$

$$\partial \mathcal{D}_0(\xi_M; \beta) / \partial \xi = \xi_M^4 (-5/2 \beta + 3/4 \xi_M - 7/12 \beta \xi_M^2 - 1/4 \xi_M^3 + 7/16 \beta \xi_M^4 + \dots)$$

Sustituyendo estos desarrollos en la expresión de $\xi_{M(1)}$ previa, con el valor de ξ_M en función de β calculado anteriormente, y desarrollando en función de β se obtiene

$$\xi_{M(1)} = (1/8 - 2 \beta^2 - 2 \beta^4 - 176/5 \beta^6 - 18656/35 \beta^8 + \dots) / \beta^3 \quad (2.10.53)$$

Y usando fracciones simples, se convierte en

$$\xi_{M(1)} = (1/(8 \beta^3)) / (1 + 16 \beta^2 / (1 - 17 \beta^2 / (1 - 83/85 \beta^2 / (1 - 642912/49385 \beta^2 / (1 - \dots)))))) \quad (2.10.54)$$

De nuevo, los valores de $\xi_{M(1)}$, coincidentes con $(-\psi_{M(1)})$, se pueden tener tabulados resolviendo numéricamente la ecuación correspondiente. El resultado para las 10 primeras vueltas se muestra en la tabla 13, donde aparecen los valores reales calculados con *doble precisión* y las aproximaciones por serie de potencias y fracciones simples con los decimales correctos subrayados. Nótese que la aproximación de fracciones simples de grado 9, tiene *doble precisión* a partir de $N = 10$.

Una vez calculado ξ_M , $\xi_{M(1)}$, se puede aproximar en torno a $q = 0$

$$\xi_m \approx \xi_M + \xi_{M(1)} q \quad (2.10.55)$$

Pero esta aproximación sólo es válida en un entorno muy reducido de q debido a que la derivada $\xi_{M(1)}$ tiene un valor muy alto, aumentando con N como $(1/\beta)^3$, o sea, como N^3 .

N	$\xi_{M(1)} = -\psi_{M(1)}$	$\xi_{M(1)}$ (frac. grado 9)	$\xi_{M(1)}$ (serie grado 9)
1	85.533578338090	<u>85.533730979500</u>	<u>85.535206890701</u>
2	324.75157926663	<u>324.75158572071</u>	<u>324.75166323549</u>
3	799.35876466211	<u>799.35876543750</u>	<u>799.35877542563</u>
4	1587.8850827836	<u>1587.8850829387</u>	<u>1587.8850850003</u>
5	2768.8259718113	<u>2768.8259718535</u>	<u>2768.8259724240</u>
6	4420.6700595444	<u>4420.6700595585</u>	<u>4420.6700597515</u>
7	6621.9038235543	<u>6621.9038235598</u>	<u>6621.9038236353</u>
8	9451.0128744096	<u>9451.0128744119</u>	<u>9451.0128744450</u>
9	12986.482414893	<u>12986.482414895</u>	<u>12986.482414910</u>
10	17306.797434323	<u>17306.797434323</u>	<u>17306.797434331</u>

Tabla 13. Valores de $\xi_{M(1)}$ para las 10 primeras vueltas.

Para obtener una aproximación mejor, se procede a obtener k como desarrollo de β y ξ , de forma similar al caso $q = 1$, mostrado anteriormente.

El discriminante de la ecuación, $D(\psi, k; \beta) = 0$, de segundo grado es

$$\Delta^2 = D_1^2 - 4 D_0 D_2 = \xi^4 (1 - 4 \beta \xi - 2/3 \xi^2 + 10/3 \beta \xi^3 + \dots) \quad (2.10.56)$$

Y su raíz cuadrada

$$\Delta = \xi^2 (1 - 2 \beta \xi - (1/3 + 2 \beta^2) \xi^2 + (1 - 4 \beta^2) \beta \xi^3 + \dots) \quad (2.10.57)$$

Las raíces de la ecuación son

$$k = (-D_1 \pm \Delta) / (2 D_2) \quad (2.10.58)$$

Debido a que el valor de k debe ser positivo la raíz buscada es (para $\xi = \xi_m$)

$$k = (-D_1 + \Delta) / (2 D_2) = 1/2 \xi^3 (-\beta + (1/4 - \beta^2) \xi - (1/2 + 2 \beta^2) \beta \xi^2 + \dots) \quad (2.10.59)$$

Nótese que, por ser $\xi = \xi_M$ para $k = 0$, el desarrollo anterior se puede aproximar por

$$k = 1/2 \xi^3 (\xi - \xi_M)/4 \quad (2.10.60)$$

Usando la variable λ se obtiene la ecuación (para determinar λ_m en función de k)

$$k = 1/8 (\xi_M + \lambda)^3 \lambda \quad (2.10.61)$$

Cuando $\beta \rightarrow 0$, $\xi_M \rightarrow 0$, $k \rightarrow \lambda^4/8$, y por tanto $\lambda \rightarrow \xi \rightarrow (8k)^{1/4}$, con lo cual, una posible aproximación (para obtener λ_m , ξ_m y ψ_m), es

$$\lambda_m = \frac{8k}{(\xi_M + (8k)^{1/4})^3} \quad ; \quad \xi_m = \xi_M + \lambda_m \quad ; \quad \psi_m = \pi - \xi_m \quad (2.10.62)$$

Sin embargo, los resultados así obtenidos se limitan a un entorno todavía bastante reducido de q . Para obtener mejores resultados, es necesario resolver la ecuación de cuarto grado en λ numéricamente para conseguir mejorar notablemente la aproximación.

Para ello, definiendo las variables intermedias

$$\sigma = k / \xi_M^4 \quad ; \quad y = \lambda / \xi_M \quad (2.10.63)$$

La ecuación se convierte en

$$8 \sigma = (1 + y)^3 y \quad (2.10.64)$$

Nótese que, cuando $\sigma \rightarrow 0$, $y \rightarrow (8 \sigma)$, cuando $\sigma \rightarrow 1$, $y \rightarrow 1 + 2/5 (\sigma - 1)$, y cuando $\sigma \rightarrow \infty$, $y \rightarrow (8 \sigma)^{1/4}$. Con esta información, se proponen las siguientes aproximaciones iniciales para la variable y

$$y = (40 + \sigma(3\sigma - 38))\sigma / 5 \quad (\sigma \leq 1)$$

$$y = ((1 + 8(\sigma - 1)(\sigma - 4/5)) / \sigma)^{1/4} \quad (\sigma > 1) \quad (2.10.65)$$

Y aplicando el método de Newton-Raphson de segundo orden, se obtiene el algoritmo siguiente para las correcciones sucesivas

$$\Delta y = (8\sigma / (1 + y)^2 - y(1 + y)) / (1 + 4y) \quad (2.10.66)$$

Con lo cual sólo hay que sumar, la corrección Δy a y reiteradamente hasta que $|\Delta y/y|$ sea menor del error relativo asociado a la aproximación. El resultado es el valor y_m buscado, a partir del cual se calcula

$$\xi_m = \xi_M (1 + y_m) \quad ; \quad \psi_m = \pi - \xi_m \quad (2.10.67)$$

Con esta aproximación, se obtiene ξ_m o ψ_m con un error relativo menor del 1% en el intervalo $-1 \leq q \leq -0.95$, mejorando notablemente cuando $q \rightarrow -1$. No obstante, admitiendo un error máximo del orden del 7%, la expresión se amplía asombrosamente al intervalo $-1 \leq q \leq 0.6$.

Para calcular el valor x_m de x a partir de lo calculado para ξ_m , téngase en cuenta la variable

$$z = \sin^2(\xi/2) \quad (2.10.68)$$

De modo que

$$x = \sin^2(\psi/2) = \sin^2(\pi/2 - \xi/2) = \cos^2(\xi/2) = 1 - \sin^2(\xi/2) = 1 - z \quad (2.10.69)$$

El desarrollo de potencias de $\sin^2(\xi/2)$ es

$$\begin{aligned} z = \sin^2(\xi/2) &= (1 - \cos \xi)/2 = \\ &= \xi^2/4 - \xi^4/48 + \xi^6/1440 - \xi^8/80640 + \xi^{10}/7257600 + \dots \end{aligned} \quad (2.10.70)$$

Sustituyendo el resultado de ξ_m en función de β , y definiendo ε , se obtiene (para $z = z_M$, $\xi = \xi_M$)

$$z_M = \varepsilon(1 + 3\varepsilon + 11\varepsilon^2 + 223/5\varepsilon^3 + 6726/35\varepsilon^4 + \dots) \quad ; \quad \varepsilon = (2\beta)^2 \quad (2.10.71)$$

o convirtiendo en un desarrollo de fracciones simples

$$z_M = \varepsilon / (1 - 3\varepsilon / (1 - 2/3\varepsilon / (1 - 32/15\varepsilon / (1 - 2043/2240\varepsilon / (1 + \dots)))))) \quad (2.10.72)$$

Para hallar la derivada respecto de k , teniendo en cuenta la igualdad

$$dz/dk = dz/d\xi \quad d\xi/dk$$

resulta (para $z = z_M$, $\xi = \xi_M$)

$$z_{M(1)} = (\sin \xi_M / 2) \quad \xi_{M(1)} = ((1 - \cos^2 \xi_M)^{1/2} / 2) \quad \xi_{M(1)} = (z_M (1 - z_M))^{1/2} \quad \xi_{M(1)} \quad (2.10.73)$$

Sustituyendo el resultado de $\xi_{M(1)}$ en función de β , resulta (para $z = z_M$, $\xi = \xi_M$)

$$z_{M(1)} = (1 - 3 \varepsilon - 3 \varepsilon^2 - 43/5 \varepsilon^3 - 214/7 \varepsilon^4 + \dots) / \varepsilon \quad (2.10.74)$$

Y convirtiendo el desarrollo en fracciones simples

$$z_{M(1)} = (1/\varepsilon) / (1 + 3 \varepsilon / (1 - 4 \varepsilon / (1 - 7/15 \varepsilon / (1 - 7223/2940 \varepsilon / (1 + \dots)))))) \quad (2.10.75)$$

N	x_M	z_M	z_M (frac. grado 4)	z_M (serie grado 4)
1	0.94765224143089	0.052347758569115	<u>0.052347621439478</u>	<u>0.052338661451646</u>
2	0.97868823108419	0.021311768915807	<u>0.021311768257032</u>	<u>0.021311707813053</u>
3	0.98834542095383	0.011654579046165	<u>0.011654579028255</u>	<u>0.011654577193593</u>
4	0.99263496085432	0.007365039145683	<u>0.007365039144534</u>	<u>0.007365039020848</u>
5	0.99491997279199	0.005080027208007	<u>0.005080027207882</u>	<u>0.005080027194152</u>
6	0.99628285320103	0.003717146798973	<u>0.003717146798953</u>	<u>0.003717146796807</u>
7	0.99716151075894	0.002838489241058	<u>0.002838489241054</u>	<u>0.002838489240624</u>
8	0.99776125772564	0.002238742274364	<u>0.002238742274363</u>	<u>0.002238742274258</u>
9	0.99818893608038	0.001811063919624	<u>0.001811063919624</u>	<u>0.001811063919595</u>
10	0.99850466609921	0.001495333900785	<u>0.001495333900785</u>	<u>0.001495333900776</u>
11	0.99874440545670	0.001255594543300	<u>0.001255594543300</u>	<u>0.001255594543296</u>
12	0.99893074102795	0.001069258972053	<u>0.001069258972053</u>	<u>0.001069258972051</u>

Tabla 14. Valores de x_M , z_M para las 12 primeras vueltas.

De cualquier modo, los valores de x_M o z_M de las primeras vueltas se pueden tener tabulados resolviendo numéricamente la ecuación sin desarrollar partiendo de un primer valor calculado con cualquiera de las aproximaciones anteriores. El resultado para las 12 primeras vueltas se muestra en la tabla 14, donde aparecen los valores reales calculados con *doble precisión* y las aproximaciones por serie de potencias y fracciones simples con los decimales correctos subrayados. Nótese que la aproximación de fracciones simples de grado 9, tiene *doble precisión* a partir de $N = 9$ (o incluso $N = 8$).

Una vez más, los valores de $z_{M(1)}$, coincidentes con $(-x_{M(1)})$, se pueden tener tabulados resolviendo numéricamente la ecuación correspondiente. El resultado para las 12 primeras vueltas se muestra en la tabla 15, donde aparecen los valores reales calculados con *doble precisión* y las aproximaciones por serie de potencias y fracciones simples con los decimales correctos subrayados. Nótese que la aproximación de fracciones simples de grado 9, tiene *doble precisión* a partir de $N = 13$.

N	$z_{M(1)} = -x_{M(1)}$	$z_{M(1)}$ (frac. grado 9)	$z_{M(1)}$ (serie grado 9)
1	19.050666913581	<u>19.050738787729</u>	<u>19.051283793885</u>
2	46.901118928909	<u>46.901120989823</u>	<u>46.901140171315</u>
3	85.791530249756	<u>85.791530436465</u>	<u>85.791532293104</u>
4	135.76923848184	<u>135.76923851179</u>	<u>135.76923881857</u>
5	196.84425936685	<u>196.84425937365</u>	<u>196.84425944442</u>
6	269.01982539296	<u>269.01982539492</u>	<u>269.01982541543</u>
7	352.29724619495	<u>352.29724619562</u>	<u>352.29724620264</u>
8	446.67713630291	<u>446.67713630317</u>	<u>446.67713630590</u>
9	552.15981568166	<u>552.15981568177</u>	<u>552.15981568295</u>
10	668.74546444194	<u>668.74546444199</u>	<u>668.74546444254</u>
11	796.43419033527	<u>796.43419033530</u>	<u>796.43419033557</u>
12	935.22606105900	<u>935.22606105902</u>	<u>935.22606105916</u>

Tabla 15. Valores de $z_{M(1)}$ para las 12 primeras vueltas.

Una vez calculado z_M y $z_{M(1)}$, se puede aproximar en un entorno muy reducido de q

$$z_m \approx z_M + z_{M(1)} q \quad ; \quad x_m = 1 - z_m \quad (2.10.76)$$

Pero esta aproximación sólo es válida en un entorno muy reducido de q debido a que la derivada $z_{M(1)}$ tiene un valor muy alto, aumentando con N como $(1/\varepsilon)$, o sea, como N^2 .

Para obtener una aproximación mejor, se debe obtener k como desarrollo de ε y z , de forma similar al desarrollo de β y ξ . Aunque es factible, resulta mucho más complicado que el desarrollo ya obtenido para ξ , y no aporta ninguna mejora apreciable en la precisión de la aproximación. Por ello, es preferible calcular la aproximación anterior de ξ_m y después calcular z_m (con la misma precisión conseguida para ξ_m).

$$z_m = \sin^2(\xi_m/2) \quad ; \quad x_m = 1 - z_m \quad (2.10.77)$$

2.10.3 PROXIMIDAD A $(N+1/2)$ VUELTAS ($q \rightarrow 0$)

Este caso se corresponde con soluciones cercanas a las N vueltas y media ($q \rightarrow 0$).

Cuando $q = 0$, el valor ψ_m de ψ , donde se anula la derivada de τ , toma el valor ψ_0 próximo a $\pi/2$ para cualquier valor de N , tendiendo a $\pi/2$ cuando $N \rightarrow \infty$ (ver figura 14).

Para manejar ángulos pequeños, en lugar de usar ψ , se define el ángulo ξ , de modo que

$$\psi = \pi/2 - \xi \quad ; \quad \psi_m = \pi/2 - \xi_m \quad ; \quad \psi_0 = \pi/2 - \xi_0 \quad (2.10.78)$$

El objetivo ahora es obtener el valor (ψ_0) de ψ_m en función de N , y el valor (ψ_m) de ψ , donde ocurre el mínimo de τ , en función de q y N .

Para simplificar notación se usan las variables

$$S_\xi = \sin \xi \quad ; \quad C_\xi = \cos \xi \quad (2.10.79)$$

Nótese que $S_\psi = C_\xi$ y $C_\psi = S_\xi$.

Sustituyendo $\psi = \pi/2 - \xi$ en la ecuación $A(\psi, q; N) = 0$, y definiendo los coeficientes B_j , se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned} A(\pi/2 - \xi, q; N) &= B(\xi, q; N) = B_0 + B_1 q + B_2 q^2 = 0 \\ B_0(\xi; N) &= A_0(\pi/2 - \xi; N) = 2(3 \psi_N) S_\xi - 2 C_\xi (2 + S_\xi^2) \\ B_1(\xi; N) &= A_1(\pi/2 - \xi; N) = -(3 \psi_N) (1 + 3 S_\xi^2) + C_\xi S_\xi (11 + S_\xi^2) \\ B_2(\xi; N) &= A_2(\pi/2 - \xi; N) = (3 \psi_N) S_\xi (1 + S_\xi^2) - C_\xi (1 + 5 S_\xi^2) \end{aligned} \quad (2.10.80)$$

El valor ξ_0 se obtiene anulando $B(\xi, 0; N)$, esto es, el coeficiente $B_0(\xi; N)$, y por tanto

$$(3 \psi_N) S_\xi - C_\xi (2 + S_\xi^2) = 0 \quad (2.10.81)$$

Con el fin de simplificar, se sustituye el parámetro N por el parámetro β siguiente, que tiende a cero cuando N tiende a infinito

$$\beta = 2 / (3 (N+1/2) \pi) \quad (2.10.82)$$

De modo que

$$\psi_N = \psi + N \pi = \pi/2 - \xi + N \pi = (N+1/2) \pi - \xi = 2 / (3 \beta) - \xi \quad (2.10.63)$$

Sustituyendo el valor de ψ_N en la ecuación anterior

$$(2 / \beta - 3 \xi) S_\xi - C_\xi (2 + S_\xi^2) = 0 \quad (2.10.84)$$

Despejando β , se llega a

$$\beta = 2 S_\xi / (C_\xi (2 + S_\xi^2) + 3 \xi S_\xi) \quad (2.10.85)$$

Desarrollando el segundo miembro en potencias de ξ resulta la ecuación

$$\beta = \xi (1 - 5/3 \xi^2 + 47/15 \xi^4 - 1852/315 \xi^6 + 4466/405 \xi^8 + \dots) \quad (2.10.86)$$

Ensayando en esta igualdad un desarrollo de ξ en serie de potencias de β y calculando los coeficientes de dicho desarrollo se llega a la función inversa que permite obtener el valor de $\xi = \xi_0$ buscado

$$\xi_0 = \beta (1 + 5/3 \beta^2 + 26/5 \beta^4 + 688/35 \beta^6 + 5149/63 \beta^8 + \dots) \quad (2.10.87)$$

Con este desarrollo, truncado hasta grado 9, se obtiene una aproximación muy buena, pero todavía mejor es la aproximación que se obtiene desarrollando ξ en fracciones simples de β , resultando

$$\xi_0 = \beta / (1 - 5/3 \beta^2 / (1 - 109/75 \beta^2 / (1 - 27036/19075 \beta^2 / (1 - 28976555/20628468 \beta^2 / (1 - \dots)))))) \quad (2.10.88)$$

De cualquier modo, los valores de ψ_0 o ξ_0 de las primeras vueltas se pueden tener tabulados resolviendo numéricamente la ecuación sin desarrollar partiendo de un primer valor calculado con cualquiera de las aproximaciones anteriores. El resultado para las 10 primeras vueltas se muestra en la tabla 16, donde aparecen los valores reales calculados con *doble precisión* y las aproximaciones por serie de potencias y fracciones simples con los decimales correctos subrayados. Nótese que la aproximación de series de potencias de grado 9, ya tiene *doble precisión* a partir de $N = 5$.

N	ψ_0	ξ_0	ξ_0 (frac. grado 9)	ξ_0 (serie grado 9)
1	1.42428724570499	0.14650908108990	<u>0.14650890111012</u>	<u>0.14650907692667</u>
2	1.48487082548982	0.08592550130507	<u>0.08592550069182</u>	<u>0.08592550129270</u>
3	1.50979008384897	0.06100624294593	<u>0.06100624293103</u>	<u>0.06100624294564</u>
4	1.52346330525969	0.04733302153520	<u>0.04733302153427</u>	<u>0.04733302153519</u>
5	1.53211713552965	0.03867919126525	<u>0.03867919126515</u>	<u>0.03867919126525</u>
6	1.53809097104921	0.03270535574569	<u>0.03270535574568</u>	<u>0.03270535574569</u>
7	1.54246426796869	0.02833205882620	<u>0.02833205882620</u>	<u>0.02833205882620</u>
8	1.54580486103031	0.02499146576459	<u>0.02499146576459</u>	<u>0.02499146576459</u>

Tabla 16. Valores de ψ_0 y ξ_0 para las 8 primeras vueltas.

Sustituyendo en los coeficientes anteriores y desarrollando en serie de potencias de la variable ξ , y definiendo los coeficientes D_j , se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned} D(\xi, q; \beta) &= B(\xi, q; N) \beta / 2 = D_0 + D_1 q + D_2 q^2 = 0 \\ D_0(\xi; \beta) &= B_0 \beta = -4 \beta + 4 \xi - 6 \beta \xi^2 - 2/3 \xi^3 + 5/2 \beta \xi^4 + 1/30 \xi^5 + \dots \\ D_1(\xi; \beta) &= B_1 \beta = -2 + 14 \beta \xi - 6 \xi^2 + 8/3 \beta \xi^3 + 2 \xi^4 - 38/15 \beta \xi^5 + \dots \\ D_2(\xi; \beta) &= B_2 \beta = -\beta + 2 \xi - 15/2 \beta \xi^2 + 5/3 \xi^3 + 13/8 \beta \xi^4 - 59/60 \xi^5 + \dots \end{aligned} \quad (2.10.89)$$

Para hallar ξ_m en función de q , se recurre el desarrollo de $\xi_m(q)$ en $\xi_m = \xi_0$, $q = 0$.

$$\xi_m(q) = \xi_0 + \xi_{0(1)} q + \xi_{0(2)}/2 q^2 + \dots + \xi_{0(n)}/n! q^n + \dots \quad ; \quad \xi_{0(n)} = d^n \xi_m(0)/dq^n$$

Derivando la ecuación $D(\xi, q; \beta) = 0$ respecto a q

$$(\partial D / \partial \xi) (d\xi/dq) + (\partial D / \partial q) = 0$$

Y despejando la primera derivada, $\xi_{0(1)}$, resulta

$$\xi_{0(1)} = d\xi/dq = -(\partial D/\partial q) / (\partial D/\partial \xi)$$

Las parciales de D , para $\xi_m = \xi_0$ y $q = 0$, son

$$\partial D(\xi_0, 0; \beta)/\partial q = D_1(\xi_0; \beta) = -2 + 14 \beta \xi_0 - 6 \xi_0^2 + 8/3 \beta \xi_0^3 + 2 \xi_0^4 + \dots$$

$$\partial D(\xi_0, 0; \beta)/\partial \xi = \partial D_0(\xi_0; \beta)/\partial \xi = 2 - 15 \beta \xi_0 + 5 \xi_0^2 + 13/2 \beta \xi_0^3 - 59/12 \xi_0^4 + \dots$$

Sustituyendo estas derivadas en la expresión de $\xi_{0(1)}$ previa, con el valor de ξ_0 calculado anteriormente, y desarrollando en función de β se obtiene

$$\xi_{0(1)} = 1/2 - 1/4 \beta^2 - 13/16 \beta^4 - 101/32 \beta^6 - 17137/1280 \beta^8 + \dots \quad (2.10.90)$$

N	$\xi_{0(1)}$	$\xi_{0(1)}$ (frac. grado 9)
1	0.494643364224214	<u>0.494643368665841</u>
2	0.498155337433595	<u>0.498155337455525</u>
3	0.499069848117733	<u>0.499069848118451</u>
4	0.499440000832341	<u>0.499440000832398</u>
5	0.499626026668751	<u>0.499626026668759</u>
6	0.499732613761586	<u>0.499732613761588</u>
7	0.499799337033979	<u>0.499799337033979</u>
8	0.499843864786479	<u>0.499843864786479</u>

Tabla 17. Valores de $\xi_{0(1)}$ para las 8 primeras vueltas.

Una vez más, los valores de $\xi_{0(1)}$ de las primeras vueltas se pueden tener tabulados resolviendo numéricamente la ecuación sin desarrollar partiendo de un primer valor calculado con cualquiera de las aproximación indicada. El resultado para las 8 primeras vueltas se muestra en la tabla 17, donde aparecen los valores reales calculados con *doble precisión* y las aproximaciones por serie de potencias con los decimales correctos subrayados (en este caso no se ha considerado la aproximación de fracciones simples por tener menor precisión que la serie de potencias). Nótese que la aproximación de la serie de potencias ya tiene *doble precisión* a partir de $N = 7$.

Derivando de nuevo en la ecuación $D(\xi, q; \beta) = 0$

$$(\partial D/\partial \xi) (d^2 \xi/dq^2) + (\partial^2 D/\partial \xi^2) (d\xi/dq)^2 + 2 (\partial^2 D/(\partial q \partial \xi)) (d\xi/dq) + (\partial^2 D/\partial q^2) = 0$$

Y despejando la segunda derivada, $\xi_{0(2)}$, resulta

$$d^2 \xi/dq^2 = -((\partial^2 D/\partial \xi^2) (d\xi/dq)^2 + 2 (\partial^2 D/(\partial q \partial \xi)) (d\xi/dq) + (\partial^2 D/\partial q^2)) / (\partial D/\partial \xi)$$

Las parciales segundas de D , para $\xi_m = \xi_0$ y $q = 0$, son

$$\partial^2 D(\xi_0, 0; \beta) / \partial q^2 = 2 D_2(\xi_0; \beta) = -2 \beta + 4 \xi - 15 \beta \xi^2 + 10/3 \xi^3 + \dots$$

$$\partial^2 D(\xi_0, 0; \beta) / (\partial q \partial \xi) = \partial D_1(\xi_0; \beta) / \partial \xi = 14 \beta - 12 \xi_0 + 8 \beta \xi_0^2 + 8 \xi_0^3 + \dots$$

$$\partial^2 D(\xi_0, 0; \beta) / \partial \xi^2 = \partial^2 D_0(\xi_0; \beta) / \partial \xi^2 = -15 \beta + 10 \xi_0 + 39/2 \beta \xi_0^2 - 59/3 \xi_0^3 + \dots$$

Sustituyendo estas derivadas en la expresión de $\xi_{0(2)}$, con el valor de ξ_0 calculado anteriormente, y desarrollando en función de β se obtiene

$$\xi_{0(2)} = 0 \quad (2.10.91)$$

La derivada segunda de ξ_m respecto de q , en $q = 0$, resulta ser idénticamente nula. Este hecho se puede comprobar directamente sin desarrollos, usando las derivadas parciales exactas en $\xi_m = \xi_0$, y sustituyendo β por su expresión exacta en función de ξ_0 .

En consecuencia, la aproximación siguiente es de tercer orden en torno a $q = 0$

$$\xi_m \approx \xi_0 + \xi_{0(1)} q \quad (2.10.92)$$

Se puede mejorar considerablemente la aproximación anterior, usando la aproximación para $N \rightarrow \infty$, pero añadiendo un término lineal adicional de modo que, en $q = 0$, coincida el valor y la derivada, esto es

$$\begin{aligned} \psi_m(q; N) &\approx \psi_m(q; \infty) + (\psi_0 - \psi_m(0; \infty)) + (\psi_{0(1)} - \psi_{m(1)}(0; \infty)) q \approx \\ &\approx \psi_m(q; \infty) + ((\pi/2 - \xi_0) - \pi/2) + (-\xi_{0(1)} - (-1/2)) q \approx \\ &\approx \psi_m(q; \infty) - (\xi_0 - (1/2 - \xi_{0(1)} q)) \end{aligned} \quad (2.10.93)$$

donde se ha tenido en cuenta la identidad $\psi = \pi/2 - \xi$, y los valores característicos $\psi_m(0; \infty) = \pi/2$, $\psi_{m(1)}(0; \infty) = -1/2$.

Se puede mejorar aún más la aproximación anterior aplicando un factor de corrección al término lineal para impedir su efecto en los extremos, del siguiente modo

$$\begin{aligned} \psi_m(q; \infty) &= \text{atan2}(\cos f, (2 \sin f (1 + \sin f))^{1/2}) \\ \psi_m(q; N) &\approx \psi_m(q; \infty) - (\xi_0 - (1/2 - \xi_{0(1)} q)) K(q) \end{aligned} \quad (2.10.94)$$

Donde la función de $K(q)$ se aproxima empíricamente para que sea prácticamente la unidad en un entorno de $q = 0$, y disminuyendo hacia los extremos. Como muestra se han probado las dos opciones siguientes con resultados aceptables

$$\begin{aligned} K(q) &= \sin^{1/100} f \\ K(q) &= (1 - |0.15 q|^{2.5}) \end{aligned} \quad (2.10.95)$$

Usando la primera función $K(q)$, se obtiene ξ_m con un error menor del 1%, en el intervalo $-0.9 \leq q \leq 0.9$, y menor del 0.1%, en el intervalo $-0.5 \leq q \leq 0.5$, mejorando

notablemente cuando $q \rightarrow 0$. Con la segunda opción de $K(q)$, se obtienen también resultados similares, pero en un intervalo más reducido en torno a $q = 0$.

Este mismo proceso, realizado para la variable ψ , se puede realizar también para la variable x , llegando a expresiones similares

$$x_m(q;\infty) = S_q / (C_q + S_q)$$

$$x_m(q;N) \approx x_m(q;\infty) - (x_0 - (1/2 - x_{0(1)} q) K(q)$$

Lamentablemente, por limitación de alcance del presente documento, se deja pendiente como posible desarrollo futuro^[F4].

2.11 APROXIMACIÓN INICIAL DE LA SOLUCIÓN

Para resolver la *Ecuación Temporal* numéricamente, es necesario obtener una aproximación inicial para la variable incógnita elegida ($\phi, \Phi, \psi, \Psi, x$). No obstante, para obtener la aproximación inicial se puede usar la incógnita más conveniente para simplificar el cálculo, que no tiene por qué coincidir con la incógnita de la *Ecuación Temporal* elegida para resolver. Una vez calculada una, se recurre a la expresión adecuada que la relacione la incógnita con la elegida para la ecuación.

Nótese que se puede usar casi cualquier conjunto de soluciones iniciales desarrolladas en la literatura, independientemente de la ecuación a resolver, tan sólo hace falta la relación de dependencia entre la incógnita de la ecuación y la incógnita aproximada. En [4.1](#), se realiza una comparativa de varios métodos relevantes existentes y se determina la relación entre las distintas incógnitas, de modo que cualquiera de las condiciones iniciales desarrolladas en dichas soluciones se puede usar para las ecuaciones aquí desarrolladas. Entre las aproximaciones iniciales desarrolladas destacan la de Gooding^[7] y recientemente la de Izzo^[33].

Lo primero que debe hacerse es determinar el tipo de solución. Como ya se ha indicado anteriormente, si el tiempo adimensional (τ) es suficientemente cercano al tiempo adimensional de la solución parabólica (τ_p), obtenida en [\(2.1.59\)](#), se puede aplicar la aproximación casi-parabólica, en caso contrario, se aplica la aproximación hiperbólica ($\tau < \tau_p$) ó la aproximación elíptica ($\tau > \tau_p$), todas ellas desarrolladas a continuación.

2.11.1 APROXIMACIÓN SOLUCIÓN CASI-PARABÓLICA ($N = 0$)

Cuando el tiempo de transferencia está suficientemente próximo a la solución parabólica de tiempo finito, se puede obtener una aproximación usando el desarrollo en serie de potencias en el origen, tanto usando la *Variable Elemental* (ψ ó Ψ), como la *Variable Universal* (x). A continuación se estudian ambos casos.

2.11.1.1 APROXIMACIÓN CASI PARABÓLICA CON VARIABLE ELEMENTAL

En el estudio de la solución parabólica de tiempo finito, desarrollada en [2.8.1](#), se ha obtenido el desarrollo en serie de potencias en el origen de τ^2 en función de Ψ siguiente

$$\tau^2(z, q) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m \quad ; \quad z = \psi^2 = -\Psi^2 \quad (2.11.1)$$

donde los coeficientes A_m son polinomios de grado 3 en q , q_s , ó q_c , según convenga

$$A_m = \sum_n^3 A_{m,n} q^n = \sum_n^3 A_{s,m,n} q_s^n = \sum_n^3 A_{c,m,n} q_c^n \quad (2.11.2)$$

cuyos coeficientes $A_{m,n}$, $A_{s,m,n}$, ó $A_{c,m,n}$ están calculados hasta grado $m = 11$ en las tablas 5, 6 y 7 respectivamente ($m = 7$ también con expresiones racionales exactas).

Nótese que en $z = 0$, se cumple

$$\begin{aligned} \tau^{2(0)} = \tau_p^2 = A_0 &= 2 q_s (1 + 2 q_c)^2 / 9 \\ \tau^{2(1)} = A_1 &= (16 q_c - q^3) / 30 \end{aligned} \quad (2.11.3)$$

donde se ha usado una mezcla de los parámetros q , q_s y q_c para buscar la mayor precisión de cálculo posible (evitando posibles diferencias de valores cercanos).

Con el desarrollo hasta grado 7, cuando $|z| < (0.12 + 0.03 q_s + 0.18 q_s^2)$, aproximadamente, el resultado tiene *doble precisión*, por lo que usando el desarrollo de la función inversa del [Anexo F](#), se obtiene la solución directamente también con *doble precisión*. Sería relativamente fácil extender los resultados con un grado mayor aumentando el rango de validez de $|z|$, pero se deja como posible desarrollo futuro [\[F5\]](#).

Si el valor de $|z|$ es mayor, o si sólo se quiere una buena aproximación con el mínimo número de coeficientes posible, la mejor opción suele ser la aproximación llamada *spline*, haciendo coincidir el valor de la función y sus primeras derivadas en dos puntos conocidos. El primero de ellos es la solución parabólica $z = 0$ donde ya se conocen dichos valores. El segundo, llamado punto de control (z_c), se elige convenientemente para mantener en todo el intervalo entre 0 y z_c una precisión mínima aceptable. ($z_c = 1/4$ para $z > 0$ y $z_c = q_s/q$ para $z < 0$, es una buena elección).

2.11.1.2 APROXIMACIÓN CASI PARABÓLICA CON VARIABLE UNIVERSAL

En el estudio de la solución parabólica de tiempo finito, desarrollada en [2.8.1](#), se ha obtenido el desarrollo en serie de potencias en el origen de τ^2 en función de x siguiente

$$\tau^2(x, q) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m x^m \quad (2.11.4)$$

donde los coeficientes B_m son polinomios de grado 3 en q , q_S , ó q_C , según convenga

$$B_m = \sum_n^3 B_{m,n} q^n = \sum_n^3 B_{S,m,n} q_S^n = \sum_n^3 B_{C,m,n} q_C^n \quad (2.11.5)$$

cuyos coeficientes $B_{m,n}$, $B_{S,m,n}$, ó $B_{C,m,n}$ están calculados hasta grado $m = 11$ en las tablas 8, 9 y 10 respectivamente ($m = 7$ también con expresiones racionales exactas).

Nótese que en $x = 0$, se cumple

$$\begin{aligned} \tau^{2(0)} = \tau_p^2 = B_0 &= 2 q_S (1 + 2 q_C)^2 / 9 \\ \tau^{2(1)} = B_1 &= 2 (16 q_C - q^3) / 15 \end{aligned} \quad (2.11.6)$$

donde se ha usado una mezcla de los parámetros q , q_S y q_C para buscar la mayor precisión de cálculo posible (evitando posibles diferencias de valores cercanos).

Con este desarrollo de grado 7, cuando $|x| < 0.06 + 0.05 q_S$, aproximadamente, el resultado tiene *doble precisión*, por lo que usando el desarrollo de la función inversa del [Anexo F](#), se obtiene la solución directamente también con *doble precisión*. Sería relativamente fácil extender los resultados con un grado mayor aumentando el rango de validez de $|z|$, pero se deja como posible desarrollo futuro^[FS].

Si el valor de $|x|$ es mayor, o si sólo se quiere una buena aproximación con el mínimo número de coeficientes posible, la mejor opción suele ser la aproximación llamada *spline*, haciendo coincidir el valor de la función y sus primeras derivadas en dos puntos conocidos. El primero de ellos es la solución parabólica $x = 0$ donde ya se conocen dichos valores. El segundo, llamado punto de control (x_C), se elige convenientemente para mantener en todo el intervalo entre 0 y x_C una precisión mínima aceptable. ($x_C = 1/4$ para $x > 0$ y $x_C = q_S/q$ para $x < 0$, es una buena elección).

2.11.2 APROXIMACIÓN SOLUCIÓN HIPERBÓLICA

Como ya se ha indicado anteriormente, la solución es hiperbólica cuando el tiempo de transferencia τ es menor que el tiempo correspondiente a la solución parabólica de tiempo finito (τ_p).

Cuando τ esté suficientemente próximo a τ_p , se usará la aproximación casi-parabólica, desarrollada en 2.11.1. En caso contrario, se distinguen otros dos casos, según el signo del parámetro geométrico q . A continuación se muestran ambos casos.

2.11.2.1 APROXIMACIÓN PARA $q < 0$

Para $q < 0$, no se han desarrollado aproximaciones iniciales cuando el desarrollo de la solución casi-parabólica ($\tau \ll \tau_p$) no es suficientemente preciso. Se puede recurrir a cualquiera de las aproximaciones existentes en la literatura y posterior conversión de la variable incógnita. Se deja como posible trabajo futuro^[F6] conseguir una aproximación a partir de alguna de las ecuaciones aquí desarrolladas.

2.11.2.2 APROXIMACIÓN PARA $q > 0$

Para $q > 0$, no se han desarrollado aproximaciones iniciales cuando el desarrollo de la solución casi-parabólica ($\tau \ll \tau_p$) no es suficientemente preciso. Se puede recurrir a cualquiera de las aproximaciones existentes en la literatura y posterior conversión de la variable incógnita. Se deja como posible trabajo futuro^[F6] conseguir una aproximación a partir de alguna de las ecuaciones aquí desarrolladas.

2.11.3 APROXIMACIÓN SOLUCIÓN ELÍPTICA ($N = 0$)

Para $N = 0$, cuando x es próximo a 0, se aplica la solución casi-parabólica.

Para $N = 0$, cuando x es cercano a 0.5, el valor de la función τ y sus derivadas en este punto, y usando los puntos de control 0.25 ó 0.75 donde se evalúa la solución exacta, y aplicando una aproximación de tipo spline, o mayor orden en 0.5, proporciona una buena aproximación.

Por último, cuando x está suficientemente próximo a 1, se puede usar la misma aproximación desarrollada para el caso $N > 0$ como se muestra en el siguiente apartado.

2.11.4 APROXIMACIÓN SOLUCIÓN ELÍPTICA ($N > 0$)

Como ya se ha mencionado, para $N > 0$, existen dos soluciones, una ó ninguna, si el tiempo de transferencia adimensional (τ) es mayor, igual ó menor que el tiempo mínimo de transferencia (τ_m).

Para calcular una aproximación adecuada a las circunstancias, se va a distinguir entre soluciones que están en las proximidades del mínimo de las que no lo están. En consecuencia, lo primero que debe hacerse es determinar si la solución está próxima la solución de mínimo tiempo de transferencia (x_m, τ_m).

En principio, también es suficiente una aproximación del mínimo para saber si la solución está en su proximidad, y una buena y sencilla aproximación de este mínimo la

proporciona el mínimo de τ_T , coincidente con el mínimo de τ cuando $N \rightarrow \infty$, calculado en (2.10.15) cuando se cumple

$$\psi_m(q;\infty) = \text{atan2}(\cos f, (2 \sin f (1 + \sin f))^{1/2}) \quad (2.11.7)$$

y a partir de $\psi_m(q;\infty)$, se obtiene $x_m(q;\infty)$ y $\tau_m(q;\infty)$, que nos sirve para determinar si la solución está próxima al tiempo de transferencia mínimo.

En caso afirmativo, debe calcularse el mínimo de τ anulando la derivada $\tau^{(1)}(x,q;N)$ de forma iterativa comenzando desde un valor inicial. Aunque este valor podría ser $\psi_m(q;\infty)$ es mejor usar las aproximaciones particulares para los diferentes casos de q desarrolladas en 2.10 con mucha más precisión. Una vez calculada la solución de mínimo tiempo (x_m, τ_m) , se pueden calcular también las derivadas de orden n de la función τ en x_m , $\tau_m^{(n)} = \tau^{(n)}(x_m, \tau_m, N)$, para obtener una aproximación adecuada. En el caso más simple, haciendo uso de la derivada segunda, se puede aproximar

$$\tau(x, q, N) \approx \tau(x_m, q, N) + \frac{1}{2} \tau^{(2)}(x_m, q, N) (x - x_m)^2$$

y sustituyendo valores

$$\tau \approx \tau_m + \frac{1}{2} \tau_m^{(2)} (x - x_m)^2 \quad (2.11.8)$$

A partir del incremento (x_r) , de x respecto a x_m , en valor absoluto

$$x_r = |x - x_m| = (2 (\tau - \tau_m) / \tau_m^{(2)})^{1/2} \quad (2.11.9)$$

se calculan las dos posibles aproximaciones buscadas correspondientes a las dos posibles soluciones.

$$x_- = x_m - x_r \quad ; \quad x_+ = x_m + x_r \quad (2.11.10)$$

Para el resto de los casos considerados, donde el tiempo de transferencia (τ) no está próximo al mínimo (τ_m), las aproximaciones de x se basan en aproximaciones del periodo orbital adimensional (τ_T), pues a partir de τ_T , se obtiene α como sigue

$$\tau_T = \pi \alpha^{3/2} \quad ; \quad \alpha = (\tau_T / \pi)^{2/3} \quad (2.11.11)$$

y a partir de α , se obtiene x de la expresión

$$\alpha = \frac{1}{2} (q_S / x + q_C / (1 - x)) \quad (2.11.12)$$

Para ello, teniendo en cuenta la dependencia de q_S y q_C con q , se deduce sucesivamente

$$2 \alpha x (1 - x) = q_S (1 - x) + q_C x$$

$$2 \alpha x - 2 \alpha x^2 = q_S + q_C x$$

$$2 \alpha x^2 + (q - 2 \alpha) x + q_S = 0$$

obteniendo la ecuación de segundo grado siguiente

$$x^2 - 2 x_M x + x_P = 0 \quad ; \quad x_M = (1 - q / (2 \alpha)) / 2 \quad ; \quad x_P = q_S / (2 \alpha) \quad (2.11.13)$$

donde x_M es la media aritmética (semi-suma) y x_P el producto, de las dos raíces (x_- y x_+), de la ecuación de segundo grado, que satisfacen el valor de α requerido.

Para resolver la ecuación, sólo es necesario calcular la semi-resta (x_R) de las dos raíces, a partir de la semi-suma (x_M) y el producto (x_P), como

$$x_R = (x_M^2 - x_P)^{1/2} \quad (2.11.14)$$

o desarrollando el segundo miembro (sin necesidad de x_P)

$$x_R = (q^2 - 4 \alpha (1 - \alpha))^{1/2} / (4 \alpha) \quad (2.11.15)$$

proporcionando las dos raíces buscadas

$$x_- = x_M - x_R \quad ; \quad x_+ = x_M + x_R \quad (2.11.16)$$

No obstante, para evitar la pérdida de precisión cuando alguna de las dos raíces es próxima a cero, es mejor calcular alternativamente

$$\begin{aligned} x_- = x_M - x_R \quad ; \quad x_+ = x_P / x_+ & \quad (\text{mejor para } x_M < 0, \alpha < q/2) \\ x_+ = x_M + x_R \quad ; \quad x_- = x_P / x_+ & \quad (\text{mejor para } x_M > 0, \alpha > q/2) \end{aligned} \quad (2.11.17)$$

Nótese que para que exista solución debe cumplirse la condición $x_R^2 > 0$, y por ello

$$4 \alpha (1 - \alpha) < q^2$$

Cuando no existe solución de la aproximación, puede ocurrir que de verdad no exista solución, en cuyo caso se sabe porque el tiempo de transferencia adimensional (τ) es menor que el mínimo (τ_m) para los valores de q y N considerados, ó que la solución esté muy cercana a la solución de mínimo tiempo (x_m), en cuyo caso debe recurrirse a la aproximación anteriormente descrita, salvo que no importe cuál de las dos posibles soluciones entorno al mínimo se obtenga, en cuyo caso se puede intentar directamente la aproximación $x = x_M$.

Cuando existen las dos soluciones (x_- y x_+), deberá escogerse en cada caso la más adecuada, según se describe a continuación.

Para $N > 0$, cuando x está suficientemente próximo a 0, teniendo en cuenta que $\tau_0(x, q)$ es mucho más pequeño que $\tau_T(x, q)$, es posible aproximar

$$\tau(x, q, N) = \tau_0(x, q) + N \tau_T(x, q) \approx \tau_0(0, q) + N \tau_T(x, q) \quad (2.11.18)$$

de donde se resuelve τ_T y a partir de α en función de x , como se ha indicado anteriormente, se obtienen dos posibles aproximaciones, eligiendo en este caso la de menor valor ($x \approx x_-$).

De la misma forma, para cualquier N , cuando x está suficientemente próximo a 1, y usando la siguiente equivalencia, deducida del resultado de la propiedad 1 del [Anexo C](#)

$$\tau(x, q, N) = (N + 1) \tau_T(x, q) - \tau_0(1-x, -q) \quad (2.11.19)$$

y la correspondiente aproximación

$$\tau(x, q, N) \approx (N + 1) \tau_T(x, q) - \tau_0(0, -q) \quad (2.11.20)$$

se puede de nuevo resolver τ_T , α , y x , pero esta vez eligiendo la aproximación de mayor valor ($x \approx x_+$).

Una vez más, para $N > 0$, cuando x es próximo a 0.5, pero no próximo al mínimo de τ , es posible hacer lo mismo, usando la aproximación

$$\tau(x, q, N) \approx (N + 1/2) \tau_T(x, q) + q$$

eligiendo la solución más próxima a 0.5 entre las dos resultantes.

Con las directrices mencionadas, es posible obtener aproximaciones con un error relativo menor del 5% en todos los casos, la mayoría de las veces mucho menor.

3 OTIMIZACIÓN DE TRAYECTORIAS ESPACIALES

En este capítulo se quiere mostrar el potencial de aplicación de los resultados obtenidos.

Como muestra de aplicación particular, se va a demostrar la optimalidad de la *Transferencia de Hohmann*, y aprovechando sus resultados se realiza un breve estudio de la *Transferencia Bieléptica*.

Como muestra de aplicación general, se va a analizar la sensibilidad de la solución del *Problema de Lambert* para situarlo en el contexto de optimización de trayectorias espaciales. Partiendo de este análisis, se deja como posible desarrollo futuro^[E7] el estudio particular del *Problema de Lambert* en la optimización de otras maniobras usuales como el encuentro espacial (rendezvous), las maniobras características del guiado y control de trayectorias, y la maniobra MGA-DSM tan usada en misiones interplanetarias,

3.1 TRANSFERENCIA DE HOHMANN

La *Transferencia de Hohmann*, cuyo primer estudio está atribuido a *Walter Hohmann*^[37], es una trayectoria elíptica, mostrada en la figura 16, que une dos órbitas circulares coplanarias de forma que es tangente a ambas trayectorias y describe exactamente media revolución, aunque se puede generalizar a N vueltas completas adicionales que no afectan al resultado, excepto en el tiempo de transferencia.

Figura 16. Geometría de la Transferencia de Hohmann.

La transferencia minimiza la suma de impulsos (incrementos de velocidad) necesarios para realizar una transferencia entre dos órbitas circulares, y en consecuencia que minimiza el consumo energético (en primera aproximación). Aunque este hecho ya está demostrado matemáticamente, se va a obtener una demostración alternativa usando la *Ecuación Elemental Principal del Problema de Lambert* obtenida en el capítulo anterior, como muestra del potencial de dicha ecuación.

Para abordar el problema, se va a considerar la *Transferencia de Hohmann* como un *Problema de Lambert* con los siguientes datos iniciales:

r_0 = Radio de la órbita circular inicial = Radiovector inicial de la Transferencia.

r_1 = Radio de la órbita circular final = Radiovector final de la Transferencia.

$\Delta v = \pi$ = Ángulo descrito por la Transferencia.

$\Delta t = \left(N + \frac{1}{2} \right) T$ = Tiempo de Transferencia (correspondiente a N vueltas y media).

siendo T el periodo de la órbita de Transferencia, dependiente de su semieje mayor (a), de acuerdo a las siguientes expresiones

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad ; \quad a = \frac{r_0 + r_1}{2}$$

Generalizando el problema, cualquier transferencia entre la órbita circular inicial y la final (no sólo la de *Hohmann*), se puede calcular usando la ya estudiada *Ecuación Elemental del Problema de Lambert* [\(2.1.46\)](#)

$$\tau = \tau_N(\psi, q) \quad ; \quad \tau_N(\psi, q) = \alpha^{1/2} \omega_N \quad ; \quad \omega_N = \alpha \psi_N + \gamma \quad ; \quad \psi_N = \psi + N \pi$$

$$\rho = 1 - q \cos \psi \quad ; \quad \alpha = \frac{\rho}{\sin^2 \psi} \quad ; \quad \gamma = \frac{q - \cos \psi}{\sin \psi}$$

donde ψ es la semidiferencia de anomalía excéntrica y q el parámetro geométrico calculado en [\(1.2.7\)](#), a partir de los parámetros definidos en [\(1.2.1\)](#), como sigue

$$a_F = (r_0 + r_1) / 2 \quad ; \quad r_R = \sqrt{r_0 r_1} \quad ; \quad r_C = r_R \cos \delta \quad ; \quad \delta = \Delta \theta / 2 \quad ; \quad q = r_C / a_F$$

Además, se necesitan las velocidades (radial y angular) en los puntos inicial ($j = 0$) y final ($j = 1$), calculadas en [2.4](#) con las siguientes expresiones

$$V_\rho = \frac{V_C}{R} \quad ; \quad V_C = \sqrt{\frac{\mu}{a_F}} \quad ; \quad R = \sqrt{\rho}$$

$$V_{vj} = V_{\rho} k_{sj} \quad ; \quad k_{sj} = \frac{r_s}{r_j} \quad ; \quad r_s = r_R \sin \delta$$

$$V_{rj} = V_{\rho} w_{cj} \quad ; \quad w_{cj} = (-1)^j (k_{cj} - \cos \psi) \quad ; \quad k_{cj} = \frac{r_c}{r_j}$$

Este análisis realizado del *Problema de Lambert* asociado a la *Transferencia de Hohmann*, se utiliza a continuación para calcular el impulso total necesario y demostrar su condición de optimalidad.

3.1.1 IMPULSO TOTAL

Para simplificar el cálculo de los impulsos necesarios para conseguir la transferencia, se definen las variables auxiliares k_j , de modo que se puede expresar alternativamente

$$k_j = r_R / r_j \quad ; \quad k_{cj} = k_j \cos \delta \quad ; \quad k_{sj} = k_j \sin \delta$$

El impulso total necesario (I_H) para cambiar desde la órbita circular inicial, en el punto inicial (P_0), hasta la órbita circular final, en el punto final (P_1), es la suma de los impulsos I_{H0} e I_{H1} , en valor absoluto, para cambiar entre la órbita de transferencia y la circular en cada uno de los puntos P_0 y P_1 . Nótese que, debido a que sólo es relevante el valor absoluto del impulso (cambio de velocidad), el resultado es independiente del sentido de la trayectoria.

$$I_H = I_{H0} + I_{H1} \quad \text{donde} \quad I_{Hj}^2 = (V_{vj} - V_{cj})^2 + V_{rj}^2$$

siendo V_{cj} la velocidad sobre la órbita circular correspondiente al punto P_j

$$V_{cj} = \sqrt{\frac{\mu}{r_j}}$$

Y definiendo las variables intermedias K_j , se puede calcular alternativamente

$$V_{cj} = V_C K_j \quad ; \quad K_j = \sqrt{\frac{a_c}{r_j}}$$

Para el caso particular de la *Transferencia de Hohmann*, la solución del *Problema de Lambert* planteado con la *Ecuación Elemental*, se corresponde con $\delta = \pi/2$, $\psi = \pi/2$, de modo que se cumple

$$\delta = \pi/2 \quad ; \quad \cos \delta = 0 \quad ; \quad \sin \delta = 1 \quad ; \quad r_c = 0 \quad ; \quad r_s = r_R \quad ; \quad q = 0$$

$$\psi = \pi/2 \quad ; \quad \psi_N = (N+1/2)\pi \quad ; \quad \cos \psi = 0 \quad ; \quad \sin \psi = 1$$

$$\rho = 1 \quad ; \quad R = 1 \quad ; \quad V_{\rho} = V_C \quad ; \quad k_{sj} = k_j \quad ; \quad V_{vj} = V_C k_j$$

$$k_{Cj} = 0 \quad ; \quad w_{Cj} = 0 \quad ; \quad V_{rj} = 0$$

Cuando $r_0 < r_I$, se cumple $V_{C0} < V_{C1}$ y $V_{v1} < V_{C1}$, y cuando $r_0 > r_I$, justo lo contrario, por tanto, teniendo en cuenta que $S_r = \text{sign}(\Delta r)$, se cumple

$$I_{Hj} = |V_{vj} - V_{Cj}| = S_r (-1)^j (V_{vj} - V_{Cj}) = V_C S_r (-1)^j (k_j - K_j)$$

$$I_H = I_{H0} + I_{H1} = V_C S_r (k_0 - K_0 - k_1 + K_1) = V_C S_r (\Delta K - \Delta k)$$

Los términos Δk y ΔK se pueden desarrollar en función de los radiovectores

$$\Delta k = r_R \Delta \left(\frac{1}{r} \right) = r_R \left(- \frac{\Delta r}{r_R^2} \right) = - \frac{\Delta r}{r_R}$$

$$\Delta K = \sqrt{a_c} \Delta \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \right) = \sqrt{a_c} \left(- \frac{\Delta \sqrt{r}}{r_R} \right) = - \frac{\sqrt{a_c}}{r_R} \frac{\Delta r}{\Sigma \sqrt{r}}$$

Finalmente, sacando factor común de estos dos últimos términos, y teniendo en cuenta la equivalencia $|\Delta r| = S_r \Delta r$, se obtiene el impulso total necesario para la *Transferencia de Hohmann* en función de los radiovectores

$$I_H(r_0, r_1) = V_C \frac{|\Delta r|}{r_R} \left(1 - \frac{\sqrt{a_c}}{\Sigma \sqrt{r}} \right)$$

Usando la relación de radiovectores $z = r_1 / r_0$, se obtiene la función adimensional $H_C(z)$, que proporciona el impulso adimensional (I_H/V_C) a partir de la expresión

$$\frac{I}{V_C} = H_C(z) = \frac{|z-1|}{\sqrt{z}} \left(1 - \frac{\sqrt{(1+z)/2}}{1 + \sqrt{z}} \right)$$

Nótese que se cumple la propiedad $H_C(1/z) = H_C(z)$, debido a que el impulso total de una transferencia (z) y de su inversa ($1/z$), es el mismo y además la función H_C esta adimensionalizada con la misma velocidad característica (V_C) para ambos sentidos de la transferencia ($z > 1$ hacia el exterior y $z < 1$ hacia el interior).

Si en lugar de V_C , se usa V_{Cj} como velocidad característica, teniendo en cuenta la igualdad $V_C = V_{Cj} / K_j$, y la definición de K_j , en la expresión de I_H anterior, se obtiene la siguiente expresión alternativa para el impulso total

$$I_H(r_0, r_1) = V_{Cj} \frac{|\Delta r|}{r_R} \left(\sqrt{\frac{r_j}{a_c}} - \frac{\sqrt{r_j}}{\Sigma \sqrt{r}} \right)$$

Es usual referir el impulso total a la trayectoria inicial, usando V_{C0} como velocidad característica. En tal caso, evaluando la expresión anterior para $j = 0$, y usando de nuevo la variable z , se obtiene la función $H(z)$ mostrada en la figura 17, cuya expresión es

$$\frac{I_H(r_0, r_1)}{V_{C0}} = H(z) = \frac{|z-1|}{\sqrt{z}} \left(\sqrt{\frac{2}{1+z}} - \frac{1}{1+\sqrt{z}} \right) = \frac{|\sqrt{z}-1|}{\sqrt{z}} \left(\sqrt{2} \frac{1+\sqrt{z}}{\sqrt{1+z}} - 1 \right)$$

Nótese que se cumple la siguiente propiedad

$$I_H(r_0, r_1) = I_H(r_1, r_0) \quad ; \quad H(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} H(1/z)$$

La interpretación se debe a que el impulso total de una transferencia directa ($z = r_1/r_0$) y de su inversa ($1/z = r_0/r_1$), es el mismo, en valor absoluto. El factor $\sqrt{z}$ de la segunda expresión, se debe a la relación entre las dos velocidades circulares (La velocidad final V_{C1} de la transferencia directa es la inicial de la inversa). Gracias a esta propiedad, tan sólo es necesario estudiar las transferencias hacia el exterior ($z > 1$), pues las transferencias hacia el interior se pueden estudiar con su inversa hacia el exterior (teniendo presente el intercambio entre velocidades inicial y final, por supuesto).

En algunas circunstancias, por ejemplo para transferencias bielíticas, estudiadas más adelante, es necesario conocer cada uno de los dos impulsos de la *Transferencia de Hohmann*. Para obtenerlas, volviendo a recuperar la expresión de I_{Hj} , pero esta vez usando V_{Cj} como velocidad característica, resulta

$$I_{Hj} = V_{Cj} S_r (-1)^j (k_j / K_j - 1) = V_{Cj} S_r (-1)^j \left(\frac{r_R}{r_j} \sqrt{\frac{r_j}{a_c}} - 1 \right) = V_{Cj} S_r (-1)^j \left(\sqrt{\frac{r_R^2}{r_j a_c}} - 1 \right)$$

Adimensionalizando los dos impulsos con la misma velocidad V_{C0} , y usando el valor absoluto, en lugar de S_r , se obtienen las funciones $H_j(z)$ siguientes

$$\frac{I_{H0}(r_0, r_1)}{V_{C0}} = H_0(z) = \left| \sqrt{\frac{2z}{1+z}} - 1 \right| \quad ; \quad \frac{I_{H1}(r_0, r_1)}{V_{C0}} = H_1(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \left| 1 - \sqrt{\frac{2}{1+z}} \right|$$

donde se ha tenido en cuenta que $V_{C0}/V_{C1} = \sqrt{r_1/r_0} = \sqrt{z}$.

Nótese que se cumple la siguiente propiedad

$$I_{H1}(r_0, r_1) = I_{H0}(r_1, r_0) \quad ; \quad H_1(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} H_0(1/z)$$

La interpretación se debe a que el impulso final de la transferencia directa es, en valor absoluto, el mismo que el impulso inicial de la transferencia inversa. El factor $\sqrt{z}$ en la segunda expresión, se debe, una vez más, a la diferente velocidad característica usada.

Figura 17. Impulsos Inicial, Final y Total, adimensionalizados con la velocidad circular inicial, para la Transferencia de Hohmann, en función de la relación de radiovectores.

Nótese también, como es obvio, que se cumple la propiedad

$$I_H(r_0, r_1) = I_{H0}(r_0, r_1) + I_{H1}(r_0, r_1) \quad ; \quad H(z) = H_0(z) + H_1(z)$$

Los puntos característicos de la función $H(z)$ son los siguientes:

- En $z = 1$, H_0 , H_1 y H son 0, pues las trayectorias inicial y final son la misma.
- Cuando z tiende a 0, H_0 tiende a 1, H_1 y H tienden a infinito.
- Cuando z tiende a infinito, H_1 tiende a 0, H_0 y H tienden al valor $H_\infty = \sqrt{2} - 1$.
- Cuando $z = z_m$, H presenta un máximo en H_m .

Para hallar el máximo de la función $H(z)$ de una forma simple, se recurre al cambio de variable Θ , definido como

$$z = \tan^2 \Theta$$

Además, para simplificar nomenclatura, llamando t , c y s , a la tangente, coseno y seno de la variable Θ , respectivamente, es obvio que se cumple

$$t = \sqrt{z} \quad ; \quad c = \frac{1}{\sqrt{1+z}} \quad ; \quad s = \sqrt{\frac{z}{1+z}}$$

Usando estas variables en la primera expresión de $H(z)$, se puede desarrollar

$$\begin{aligned}
H &= \frac{t^2 - 1}{t} \left(\sqrt{\frac{2}{1+t^2}} - \frac{1}{1+t} \right) = \frac{\sqrt{2} c (t^2 - 1) - (t - 1)}{t} = \sqrt{2} c \left(t - \frac{1}{t} \right) - \left(1 - \frac{1}{t} \right) = \\
&= \sqrt{2} \left(s - \frac{c^2}{s} \right) - \left(1 - \frac{c}{s} \right) = \sqrt{2} \left(s - \frac{1-s^2}{s} \right) + \frac{c}{s} - 1 = \sqrt{2} \left(2s - \frac{1}{s} \right) + \frac{c}{s} - 1
\end{aligned}$$

A partir de esta última expresión es muy fácil calcular la derivada

$$\frac{dH}{d\Theta} = \sqrt{2} \left(2c + \frac{c}{s^2} \right) - \frac{1}{s^2} = \frac{\sqrt{2} c (2s^2 + 1) - 1}{s^2} = \frac{\sqrt{2} c (3 - 2c^2) - 1}{s^2}$$

Para que se anule la derivada, usando la variable intermedia y , debe cumplirse

$$y^3 - 3y + 1 = 0 \quad ; \quad y = \sqrt{2} c$$

Esta ecuación cúbica se puede resolver cambiando la variable y por la suma de otras dos variables, u y v , y eligiendo la relación entre éstas convenientemente. Sustituyendo en la ecuación anterior, y sacando factor común $(u + v)$, resulta

$$u^3 + v^3 + 3(uv - 1)(u + v) + 1 = 0 \quad ; \quad y = \sqrt{2} c = u + v$$

Eligiendo la relación entre u y v de modo que se anule el factor $(uv - 1)$, la ecuación cúbica de la variable y anterior es equivalente al sistema de ecuaciones

$$uv - 1 = 0 \quad ; \quad u^3 + v^3 + 1 = 0$$

Despejando v de la primera ecuación y sustituyendo el resultado en la segunda, multiplicada por u^3 , se obtiene

$$v = \frac{1}{u} \quad ; \quad (u^3)^2 + (u^3) + 1 = 0$$

Quedando una ecuación de segundo grado en (u^3) cuya solución directa es

$$(u^3) = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i = \exp\left(\pm \frac{2\pi}{3}i\right)$$

Calculando u , como la raíz cúbica de (u^3) , y definiendo para simplificar la variable intermedia $\mathcal{G}_k$, se obtienen las tres raíces, u_k , para $k = 0, 1$ y 2 , siguientes

$$u_k = \exp(\pm \mathcal{G}_k i) \quad ; \quad \mathcal{G}_k = 2\pi \frac{1+3k}{9}$$

Definiendo la variable intermedia C_k , y teniendo en cuenta que v_k es conjugado de u_k , se deducen las raíces y_k correspondientes

$$y_k = u_k + v_k = u_k + \frac{1}{u_k} = 2 C_k \quad ; \quad C_k = \cos \vartheta_k$$

Teniendo en cuenta la relación de y con c , se obtienen los correspondientes valores de c

$$c_k = \sqrt{2} C_k$$

Finalmente, de la relación de c con z , se obtienen las raíces de z

$$z_k = t_k^2 = \frac{1}{c_k^2} - 1 = \frac{1}{2C_k^2} - 1 = \frac{1 + \tan^2 \vartheta_k}{2} - 1 = \frac{\tan^2 \vartheta_k - 1}{2}$$

De estas tres raíces, la única positiva es z_2 , que corresponde a la raíz (z_m) que proporciona el máximo (H_m) de la función $H(z)$, ambas variables mostradas en la figura 17 y cuyos valores, evaluando las expresiones de z_2 y $H(z_2)$, resultan ser

$$z_m = z_2 = \frac{\tan^2(14\pi/9) - 1}{2} = 15.5817187387633$$

$$H_m = H(z_2) = 0.536258305570409$$

La existencia de un máximo en la función H ocasiona que en determinadas circunstancias, cuando z es del orden de z_m o mayor hasta un límite determinado, la realización de dos *Transferencias de Hohmann* consecutivas, tomando una órbita circular intermedia de mayor radio que la de origen y destino, sea más económica que una *Transferencia de Hohmann* directa. Al conjunto de estas dos *Transferencias de Hoffman* consecutivas se le llama *Transferencia Bielítica*, estudiada más adelante.

3.1.2 DEMOSTRACIÓN DE OPTIMALIDAD

Diferenciando las expresiones de velocidad del *Problema de Lambert*, usadas anteriormente, se demuestra a continuación que el impulso total para la *Transferencia de Hohmann* es el mínimo de todas las transferencias posibles entre las dos órbitas circulares de partida y de llegada.

Para cualquier transferencia entre las dos órbitas circulares, variando los puntos inicial y final sobre cada una de las órbitas, se cumple que r_0 y r_1 son constantes, y en consecuencia, a_F , V_C y r_R también son constantes. En particular, para las transferencias cercanas a la de *Hohmann* (donde $\delta = \pi$, $\psi = \pi$) y siendo $\partial\delta$ y $\partial\psi$ la diferencia infinitesimal con dicha órbita, se cumple

$$\partial a_F = 0 \quad ; \quad \partial V_C = 0 \quad ; \quad \partial r_R = 0 \quad ; \quad \partial r_S = r_C \partial\delta = 0$$

$$\partial r_C = -r_S \partial\delta = -r_R \partial\delta \quad ; \quad \partial q = \partial r_C / a_F = -r_R / a_F \partial\delta = -q_R \partial\delta \quad ; \quad q_R = r_R / a_F$$

$$\partial \rho = -\partial q \cos \psi + q \sin \psi \partial \psi = 0 \quad ; \quad \partial R = \partial \rho / (2R) = 0$$

$$\partial V_\rho = -V_C \partial R / \rho = 0 \quad ; \quad \partial k_{Sj} = \partial r_S / r_j = 0 \quad ; \quad \partial V_{vj} = \partial V_\rho k_{Sj} + V_\rho \partial k_{Sj} = 0$$

$$I_{Hj} \partial I_{Hj} = (V_{vj} - V_{Cj}) \partial V_{vj} + V_{rj} \partial V_{rj} = 0 \quad ; \quad \partial I_H = \partial I_{H0} + \partial I_{H1} = 0$$

donde, por simplicidad, se ha definido el parámetro $q_R = r_R/a_F$.

Como se puede ver ∂I_{Hj} es nulo por serlo ∂V_{vj} y V_{rj} , y en consecuencia la *Transferencia de Hohmann* presenta un extremo en cada uno de los dos impulsos necesarios para cambiar de una órbita circular a otra, y en consecuencia, también en el impulso total.

La velocidad de una órbita elíptica, aunque no es constante en toda la trayectoria como la órbita circular, tiene su valor máximo en el pericentro y su mínimo en el apocentro, es decir, tiene derivada nula tanto en el pericentro como en el apocentro, al variar el punto sobre la órbita. En consecuencia, si la órbita inicial o final fuese una elipse (o ambas pero con ejes polares alineados) y los puntos inicial y final de la transferencia se situasen en el perigeo o apogeo de la dicha elipse, entonces la diferencial calculada anteriormente sigue siendo nula. Esto permite ampliar la optimalidad de la *Transferencia de Hohmann* también entre órbitas elípticas con ejes polares alineados eligiendo los pericentros o apocentros como puntos inicial y final. Sin embargo, esta condición es necesaria pero no suficiente, pues que sea un extremo no quiere decir que sea un mínimo. A continuación se demuestra que para el caso circular siempre es un mínimo, pero en el caso de transferencia entre órbitas elípticas, sólo existe un rango de excentricidades donde se mantiene la condición de mínimo.

La demostración de mínimo, se reduce a demostrar que la siguiente diferencial de segundo orden $\partial^2 I_H$ es siempre positiva

$$\partial^2 I_H = \partial^2 I_{H0} + \partial^2 I_{H1}$$

Para calcular $\partial^2 I_H$ es necesario calcular antes $\partial^2 I_{Hj}$. Para el caso usual de órbitas circulares (con V_{Cj} constante), diferenciando una vez más la expresión de $(I_{Hj} \partial I_{Hj})$, se obtiene

$$(\partial I_{Hj})^2 + I_{Hj} \partial^2 I_{Hj} = (\partial V_{vj})^2 + (V_{vj} - V_{Cj}) \partial^2 V_{vj} + (\partial V_{rj})^2 + V_{rj} \partial^2 V_{rj}$$

Y eliminando los términos nulos, para el caso de la *Transferencia de Hohmann*

$$I_{Hj} \partial^2 I_{Hj} = (V_{vj} - V_{Cj}) \partial^2 V_{vj} + (\partial V_{rj})^2$$

Para obtener ∂V_{rj} en función de $\partial \psi$ y $\partial \delta$, se desarrolla

$$\partial k_{Cj} = \partial r_C / r_j = -r_R / r_j \partial \delta = -k_j \partial \delta$$

$$\partial w_{Cj} = (-1)^j (\partial k_{Cj} + \sin \psi \partial \psi) = (-1)^j (\partial \psi - k_j \partial \delta)$$

$$\partial V_{rj} = \partial V_\rho w_{Cj} + V_\rho \partial w_{Cj} = V_C \partial w_{Cj} = V_C (-1)^j (\partial \psi - k_j \partial \delta)$$

Y para obtener $\partial^2 V_{rj}$

$$\partial^2 \rho = 2 \sin \psi \partial q \partial \psi + q \cos \psi (\partial \psi)^2 = 2 \partial q \partial \psi = -2 q_R \partial \delta \partial \psi$$

$$\partial^2 R = \partial^2 \rho / (2R) - \partial \rho \partial R / (2\rho) = \partial^2 \rho / 2 = \partial q \partial \psi = -q_R \partial \delta \partial \psi$$

$$\partial^2 V_\rho = -V_C \partial^2 R / \rho + V_C \partial R \partial \rho / \rho^2 = -V_C \partial^2 R = V_C q_R \partial \delta \partial \psi$$

$$\partial^2 r_S = -r_S (\partial \delta)^2 = -r_R (\partial \delta)^2 \quad ; \quad \partial^2 k_{Sj} = \partial^2 r_S / r_j = -r_R / r_j (\partial \delta)^2 = -k_j (\partial \delta)^2$$

$$\begin{aligned} \partial^2 V_{vj} &= \partial^2 V_\rho k_{Sj} + 2 \partial V_\rho \partial k_{Sj} + V_\rho \partial^2 k_{Sj} = \partial^2 V_\rho k_j + V_C \partial^2 k_{Sj} = \\ &= V_C k_j q_R \partial \delta \partial \psi + V_C (-k_j (\partial \delta)^2) = V_C k_j \partial \delta (q_R \partial \psi - \partial \delta) \end{aligned}$$

Sustituyendo ∂V_{vj} y $\partial^2 V_{vj}$ en la expresión de $(I_{Hj} \partial^2 I_{Hj})$, y adimensionalizando con V_C^2 , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{I_j \partial^2 I_j}{V_C^2} &= \frac{V_{vj} - V_{Cj}}{V_C} \frac{\partial^2 V_{vj}}{V_C} + \left(\frac{\partial V_{vj}}{V_C} \right)^2 = \\ &= (k_j - K_j) k_j \partial \delta (q_R \partial \psi - \partial \delta) + (\partial \psi - k_j \partial \delta)^2 = \\ &= (k_j - K_j) k_j \partial \delta (q_R \partial \psi - \partial \delta) + (\partial \psi)^2 - 2 k_j \partial \psi \partial \delta + k_j^2 (\partial \delta)^2 = \\ &= (\partial \psi)^2 + ((k_j - K_j) k_j q_R - 2 k_j) \partial \psi \partial \delta + K_j k_j (\partial \delta)^2 \end{aligned}$$

Este resultado se puede expresar en forma matricial con la siguiente expresión

$$\frac{I_j \partial^2 I_j}{V_C^2} = \begin{bmatrix} \partial \psi & \partial \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial \psi \\ \partial \delta \end{bmatrix}$$

donde

$$A = 1 \quad ; \quad B = k_j ((k_j - K_j) q_R / 2 - 1) \quad ; \quad C = K_j k_j$$

Usando la función $z = r_1 / r_0$, se tiene

$$k_j = \sqrt{z} \quad ; \quad K_j = \sqrt{\frac{1+z}{2}} \quad ; \quad q_R = \frac{2\sqrt{z}}{1+z}$$

Y con estos resultados, los coeficientes de la matriz anterior, para $j = 0$, resultan ser

$$A = 1 \quad ; \quad B = -\sqrt{z} \frac{1+C}{1+z} \quad ; \quad C = \sqrt{\frac{z(1+z)}{2}}$$

Para que la *Transferencia de Hohmann* sea de mínimo impulso, la matriz debe ser definida positiva, esto es $A > 0$, $C > 0$ y determinante $D = A C - B^2 > 0$, cuya valor en función de z se muestra en la figura 18. Es obvio que las condiciones para A y C se

cumplen, por lo que solo queda comprobar si D es positivo. Para ello, multiplicando D por $(1+z)^2$, se puede desarrollar

$$\begin{aligned}(1+z)^2 D &= (1+z)^2 (A C - B^2) = (1+z)^2 C - z (1+C)^2 = \\ &= (1+2z+z^2) C - z (1+2C+C^2) = (1+z^2) C - z (1+C^2) = \\ &= C - z + z^2 C - z C^2 = C - z + z C (z - C) = (C - z) (1 - z C)\end{aligned}$$

donde se deduce

$$D(z) = \frac{(C - z)(1 - C z)}{(1 + z)^2}$$

Figura 18. Determinante de la matriz adimensional de derivadas segundas de cualquiera de los dos impulsos necesarios para la Transferencia de Hohmann.

El valor del determinante $D(z)$ en función de z se muestra en la figura 18. Aunque en la gráfica se ve que el signo es siempre no negativo, para $z > 0$, se puede demostrar analíticamente teniendo en cuenta las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned}(C - z) (C + z) &= C^2 - z^2 = z^2 \left(\frac{C^2}{z^2} - 1 \right) = z^2 \left(\frac{1+z}{2z} - 1 \right) = z^2 \frac{1-z}{2z} = \frac{z(1-z)}{2} \\ (1 - z C) (1 + z C) &= 1 - z^2 C^2 = 1 - z^2 \frac{z(1+z)}{2} = \frac{2 - z^3 - z^4}{2} = \\ &= \frac{(1-z)(2 + 2z + 2z^2 + z^3)}{2}\end{aligned}$$

Usando estas equivalencias, se obtiene la siguiente expresión alternativa del determinante

$$D(z) = \frac{z(1-z)^2(2+2z+2z^2+z^3)}{4(C+z)(1+z)^2}$$

Debido a que z y C son siempre positivos, esta última expresión permite deducir que el determinante D es siempre positivo, salvo dos casos particulares donde es nulo, pero que pueden excluirse de este estudio. El primero ($z = 0$) correspondiente a un caso límite inalcanzable y el segundo ($z = 1$) corresponde a órbitas inicial y final idénticas, por lo que no es necesaria ninguna transferencia.

Con este resultado queda demostrado que la *Transferencia de Hohmann* es la trayectoria de mínimo impulso para cambiar de una trayectoria circular a otra, es más, cada uno de los impulsos necesarios (para iniciar la transferencia y para finalizarla), es mínimo.

Esta demostración se ha conseguido usando los resultados de *La Ecuación Elemental del Problema de Lambert* desarrollada en la presente Tesis Doctoral, ofreciendo una alternativa a las demostraciones existentes en la literatura.

Aunque no resultaría complicado llegar a demostrar también la optimalidad de la *Transferencia de Hohmann* entre órbitas elípticas, dentro de un determinado rango de excentricidades, se decide abandonar este desarrollo por limitación de alcance de esta Tesis Doctoral.

3.2 TRANSFERENCIA BIELÍPTICA

A continuación se estudia la transferencia bielíptica basándose en los resultados obtenidos para la *Transferencia de Hohmann*.

La Transferencia Bielíptica, mostrada en la figura 19, consiste en la composición de dos *Transferencias de Hohmann* consecutivas (primera desde P_0 a P_2 y segunda desde P_2 a P_1), para pasar de una órbita circular inicial (r_0) a otra órbita circular final (r_1) pasando por otra órbita circular intermedia (r_2), con objeto de ser mas económica que la *Transferencia de Hohmann* directa entre las órbitas inicial y final.

Resulta útil comparar la figura 19 relativa a la Transferencia Bielíptica con la figura 16 que muestra en detalle la *Transferencia de Hohmann*.

Para el desarrollo posterior, resulta útil definir las siguientes variables adimensionales.

$$z_{ij} = r_j / r_i \quad (i, j = 0, 1, 2)$$

Nótese que se cumple la propiedad

$$z_{ij} = z_{ik} z_{kj} \quad (i, j, k = 0, 1, 2)$$

Como en el caso de la *Transferencia de Hohmann*, sólo es necesario estudiar el caso de transferencia hacia el exterior ($r_0 < r_1$, $z_{01} > 1$), pues el caso interior ($r_0 > r_1$, $z_{01} < 1$) es

el mismo que la transferencia inversa hacia el exterior cambiando de sentido los impulsos.

Figura 19. Geometría de la Transferencia Bielíptica.

El impulso total de la *Transferencia de Hohmann* directa (ver figura 17), usando la velocidad circular inicial, es

$$I_H(z_{01}) = V_{C0} H(z_{01})$$

Para la Transferencia Bielíptica, el impulso total (I_B) es la suma de los tres impulsos necesarios para llevar a cabo las dos *Transferencias de Hohmann* que la componen.

$$I_B(r_0, r_1, r_2) = I_{B0}(r_0, r_2) + I_{B1}(r_1, r_2) + I_{B2}(r_0, r_1, r_2)$$

El impulso inicial I_{B0} de la primera *Transferencia de Hohmann* es

$$I_{B0}(r_0, r_2) = I_{H0}(r_0, r_2) = V_{C0} H_0(z_{02})$$

El impulso final I_{B1} de la segunda *Transferencia de Hohmann*, igual al impulso inicial de la misma transferencia invertida, es

$$I_{B1}(r_1, r_2) = I_{H1}(r_2, r_1) = I_{H0}(r_1, r_2) = V_{C1} H_0(z_{12}) = V_{C0} H_0(z_{12}) / \sqrt{z_{01}}$$

Por último, debido a que no es necesario entrar en la órbita intermedia, pudiendo pasar directamente de la primera *Transferencia de Hohmann* a la segunda, el impulso intermedio I_{B2} , es la composición del impulso final de la primera transferencia con el

inicial de la segunda, teniendo en cuenta el sentido de ambos impulsos, pudiendo ser, por tanto, la suma ó la diferencia de dichos impulsos componentes. En el caso de la diferencia, como en principio no se sabe el sentido resultante, se debe aplicar el valor absoluto, resultando

$$I_{B2}(r_0, r_1, r_2) = |I_{H1}(r_0, r_2) + S_B I_{H0}(r_2, r_1)|$$

donde se ha definido la variable S_B para indicar el signo relativo entre las dos componentes, siendo 1 cuando tienen el mismo sentido y -1 cuando tienen sentido opuesto. Este signo depende de la posición relativa de la órbita intermedia respecto a la inicial y final. Es positivo cuando la órbita intermedia está entre la inicial y final y negativo en caso contrario (excluyendo los casos donde coincide con una de ellas, pues sería el mismo caso que la transferencia directa).

El impulso final de la primera transferencia es

$$I_{H1}(r_0, r_2) = V_{C0} H_1(z_{02})$$

El impulso inicial de la segunda transferencia, igual al final de la misma invertida, es

$$I_{H0}(r_2, r_1) = I_{H1}(r_1, r_2) = V_{C1} H_1(z_{12}) = V_{C0} H_1(z_{12}) / \sqrt{z_{01}}$$

Resultando el siguiente impulso total, adimensionalizado con V_{C0}

$$\frac{I_B(r_0, r_1, r_2)}{V_{C0}} = B(z_{01}, z_{02}) = H_0(z_{02}) + H_0(z_{12}) / \sqrt{z_{01}} + |H_1(z_{02}) + S_B H_1(z_{12}) / \sqrt{z_{01}}|$$

donde z_{12} se puede calcular como z_{02}/z_{01} .

En la figura 20 se muestra la función $B(z_{01}, z_{02})$, fijando la variable z_{02} para varios valores representativos ($z_{02} = \lambda z_m$, para varios valores de λ), junto con la función $H(z_{01})$ correspondiente al impulso adimensional de la transferencia directa.

Cuando la órbita intermedia está entre las órbitas inicial y final ($1 < z_{02} < z_{01}$), los impulsos componentes de I_{B2} tienen el mismo sentido y, por tanto, es igual a la suma de éstos. En consecuencia, el impulso total de la transferencia bielítica es, exactamente, la suma de los impulsos totales de las dos *Transferencias de Hohmann* que la componen. En este caso, no se obtiene ninguna ventaja sobre la transferencia directa de *Hohmann*, como se puede ver en los trazos discontinuos de la figura 20, que aparecen siempre por encima de la función $H(z_{01})$, a partir del punto de corte en $z_{01} = z_{02}$, para cualquier valor de z_{02} . En dicho caso, se puede simplificar

$$B(z_{01}, z_{02}) = H_0(z_{02}) + H_0(z_{12}) / \sqrt{z_{01}} + H_1(z_{02}) + H_1(z_{12}) / \sqrt{z_{01}}$$

y agrupando términos

$$B(z_{01}, z_{02}) = H(z_{02}) + H(z_{12}) / \sqrt{z_{01}} \quad (1 < z_{02} < z_{01})$$

función H es decreciente en z_{02} , debiendo ser necesariamente z_{02} mayor que z_m , donde la función H alcanza su máximo H_m .

En la figura 20 se puede ver que la zona de mejora es la comprendida entre las graficas de H y P , siendo P el impulso total de la Transferencia Bielíptica cuando z_{02} tiende a infinito. En este caso límite, las dos *Transferencias de Hohmann* componentes de la Transferencia Bielíptica, se convierten en parábolas, y por ello, a esta transferencia particular se la llama Transferencia Biparabólica, cuyo impulso total adimensional viene dado por la expresión

$$P(z_{01}) = B(z_{01}, \infty) = H_{\infty} (1 + 1 / \sqrt{z_{01}})$$

Para cada valor z_{02} mayor que z_m , existe pues un rango de valores para z_{01} donde la *Transferencia Bielíptica* mejora a la de *Hohmann*. Dicho rango, se corresponde con la parte de trazo continuo por debajo de la función $H(z_{01})$ mostrada en la figura 20, donde se cumple la condición $z_B < z_{01} < z_{02}$, siendo z_{02} el límite superior de z_{01} y z_B el límite inferior, para cada valor de $z_{02} > z_m$. Dichos límites, z_B y z_{02} , son los puntos de corte de las funciones $H(z_{01})$ y $B(z_{01})$, $z_B < z_m$ en el tramo creciente de H y $z_{02} > z_m$ en el tramo decreciente.

El límite inferior z_B (de z_{01}) es función de z_{02} y se puede determinar resolviendo numéricamente la ecuación $H(z_B) = B(z_B, z_{02})$ con la condición $z_B < z_m$ (tramo creciente de H). Nótese que el límite superior z_{02} (de z_{01}) también cumple la misma ecuación $H(z_{02}) = B(z_{02}, z_{02})$ en el tramo decreciente, y que z_m es el punto particular donde coinciden ambos límites, inferior y superior (solución doble de la ecuación). Por ello, para el cálculo de z_B resulta útil factorizar la variable z con z_m , definiendo la variable genérica

$$y = z / z_m$$

Usando esta nueva variable, se tienen las relaciones

$$y_B = z_B / z_m \quad ; \quad y_{ij} = z_{ij} / z_m \quad (i, j = 0, 1, 2)$$

de modo que calcular z_B (límite inferior de z_{01}) en función de z_{02} es equivalente a calcular y_B en función de y_{02} , resolviendo la ecuación $H(z_m y_B) = B(z_m y_B, z_m y_{02})$, con la condición $y_{02} < 1$. Resolviendo la ecuación desde $y_{02} = 1$ (solución doble), en adelante, se determina la función $y_B = L(y_{02})$ mostrada en la figura 21, que resuelve el cálculo de $z_B = z_m y_B$.

El valor y_P , límite inferior de y_B , ocurre cuando y_{02} (o z_{02}) tiende a infinito, correspondiente a la llamada Transferencia Biparabólica. Los valores calculados de y_P y $z_P = z_m y_P$, son

$$y_P = 0.766203374146734 \quad ; \quad z_P = 11.9387654726458$$

Una vez obtenido el rango de mejora de la Transferencia Bielíptica respecto a la *Transferencia de Hohmann*, y usando las expresiones correctas en dicho rango, se puede calcular la ganancia de impulso (G_B) como

$$G_B(z_{01}, z_{02}) = H(z_{01}) - B(z_{01}, z_{02}) \quad (z_P \leq z_{01} < z_{02})$$

donde la Función Bielíptica se evalúa mediante la expresión

$$B(z_{01}, z_{02}) = H(z_{02}) + (H_0(z_{12}) - H_1(z_{12})) / \sqrt{z_{01}} \quad ; \quad z_{12} = z_{02}/z_{01} \quad (z_P \leq z_{01} < z_{02})$$

Figura 21. Mínima relación de radiovectores donde la Transferencia Bielíptica mejora la Transferencia de Hohmann.

La ganancia máxima (G_P) en función z_{01} es

$$G_P(z_{01}) = G_B(z_{01}, \infty) = H(z_{01}) - B(z_{01}, \infty) = H(z_{01}) - P(z_{01}) \quad (z_P \leq z_{01})$$

Todas estas ganancias se pueden apreciar visualmente en la grafica 20 (ver Ejemplo Ganancia Impulso), observando la diferencia de impulso desde cada función $B(z_{01}, z_{02})$ ó $P(z_{01})$ hasta la función $H(z_{01})$, en el rango de z_{01} donde quedan por debajo de esta última.

En este apartado se ha obtenido la mejora relativa de la Transferencia Bielíptica respecto a la *Transferencia de Hohmann* y el rango donde es posible. Aunque no supone una aportación importante, se ha considerado interesante exponerla como caso de aplicación de los resultados anteriores para la *Transferencia de Hohmann*.

3.3 SENSIBILIDAD DE LA SOLUCION CON LAS CONDICIONES INICIALES

El escenario usual en las misiones de optimización suele implicar la resolución del *Problema de Lambert* de forma iterativa variando los datos iniciales que lo definen, en busca de la optimización de una función global que suele estar relacionada con las velocidades y anomalías verdaderas en los puntos inicial y final.

Por ello, una vez resuelto el *Problema de Lambert*, a partir de alguna de las ecuaciones disponibles, para unos datos iniciales particulares, resulta muy útil obtener la variación de la solución cuando varían los datos del problema que se traducen en derivadas de todas las propiedades que definen la trayectoria solución.

3.3.1 DATOS INICIALES

En problemas reales, la elección usual de los datos que definen el problema de Lambert, en principio, son los siguientes

$$r_0, r_1, \Delta v \text{ y } \Delta t$$

todos ellos definidos en la sección de símbolos [xii](#), y ampliamente usados a lo largo del documento. Sin embargo, para evitar una posible pérdida de precisión cuando los radiovectores r_0 y r_1 están muy próximos, resultar útil cambiar uno de ellos por la diferencia entre ellos. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que se sustituye r_1 por Δr . El mismo razonamiento se puede aplicar a Δv , siendo preferible dividirlo en dos datos separados, $\Delta \theta$ y N , correspondientes al ángulo de transferencia y número de vueltas completas, para el caso de múltiple revolución. De este modo, una elección más eficiente de los datos del problema es

$$r_0, \Delta r, \Delta \theta, N \text{ y } \Delta t$$

Aunque en la mayoría de los casos los datos son r_0 y r_1 , se prefiere dejar r_0 y Δr , por ser igual de válido, pero mucho mejor cuando se dispone de Δr directamente.

Por otra parte, los parámetros geométricos que se necesitan para resolver el *Problema de Lambert*, con cualquiera de las *Ecuaciones Temporales* aquí desarrolladas, son tan sólo

$$q, N \text{ y } \tau$$

aunque por las mismas razones de posible pérdida de precisión, puede ser conveniente cambiar el parámetro q por otros dependientes directamente de éste, usualmente q_s y q_c , según se calcula en [\(1.2.8\)](#).

El cálculo de los datos iniciales para el *Problema de Lambert* (q , N y τ) a partir de los datos usuales reales (r_0 , Δr , $\Delta\theta$, N y Δt), aunque se muestra en la sección de símbolos [xii](#), se resume aquí su cálculo, por claridad y unificación de resultados.

$$\delta = \frac{\Delta\theta}{2} \quad \text{Semidiferencia del ángulo de transferencia.}$$

$$a_F = \frac{r_0 + r_1}{2} \quad \text{Radiovector medio aritmético (a en *Elipse Fundamental*).$$

$$r_R = \sqrt{r_0 r_1} \quad \text{Radiovector medio cuadrático.}$$

$$r_C = r_R \cos\delta \quad \text{Componente coseno del radiovector medio cuadrático.}$$

$$V_C = \sqrt{\frac{\mu}{a_F}} \quad \text{Velocidad característica.}$$

$$T_C = \frac{a_F}{V_C} \quad \text{Tiempo característico.}$$

$$\tau = \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{T_C} \quad \text{Tiempo de transferencia adimensional.}$$

$$q = \frac{r_C}{a_F} \quad \text{Parámetro adimensional geométrico característico.}$$

y opcionalmente cuando se requiera evitar pérdida de precisión

$$r_S = r_R \sin\delta \quad \text{Componente seno del radiovector medio cuadrático.}$$

$$(c/2)^2 = (\Delta r/2)^2 + r_S^2 \quad \text{Cuadrado de la semi-cuerda.}$$

$$\sin^2 f = \frac{(c/2)^2}{a_F^2} \quad \text{Cuadrado del seno del ángulo } f, \text{ donde } q = \cos f.$$

de modo que es posible calcular sin pérdida de precisión

$$q_C = \frac{1+q}{2} \quad ; \quad q_S = \frac{\sin^2 f}{4 q_C} \quad \text{(recomendable para } q \geq 0, \Delta\theta \geq \pi)$$

$$q_S = \frac{1-q}{2} \quad ; \quad q_C = \frac{\sin^2 f}{4 q_S} \quad \text{(recomendable para } q \leq 0, \Delta\theta \leq \pi)$$

Estos parámetros se usaran para evitar las operaciones $(1+q)$ y $(1-q)$ donde sea necesario.

Adicionalmente, para calcular posteriormente otras variables dependientes de la solución particular, son útiles las siguientes variables características sólo dependientes de los datos del problema

$$p_E = \frac{r_s^2}{a_F} \quad \text{Parámetro de la cónica de la *Elipse Esencial*.}$$

$$k_{Cj} = \frac{r_c}{r_j} \quad \text{Factores radiales con } r_c.$$

$$k_{Sj} = \frac{r_s}{r_j} \quad \text{Factores radiales con } r_s.$$

$$k_S = \frac{r_s}{a_F} \quad \text{Factor angular-radial.}$$

$$V_S = \frac{V_c}{k_S} \quad \text{Velocidad angular característica.}$$

Respecto al número de soluciones, estudiado en [2.9](#), para el caso de simple revolución existe una única solución y para el caso de múltiple revolución existen 0, una doble, ó dos soluciones según sea el tiempo de transferencia menor, igual ó mayor que el tiempo de transferencia mínimo para cada valor de N . En el caso de dos soluciones, es necesario decidir cuál de las dos se requiere, usualmente se distinguen una de otra como soluciones de corto y largo periodo, siendo ésta una condición adicional que debe añadirse a los datos iniciales del *Problema de Lambert*.

Como conclusión, añadiendo una condición extra para el caso de múltiple revolución, indicando cual de las dos soluciones se requiere (corto ó largo periodo), se puede considerar que el *Problema de Lambert* tiene solución única.

3.3.2 VARIABLE INDEPENDIENTE

De forma general, la solución del *Problema de Lambert* se consigue resolviendo una ecuación transcendental que determina el valor de la variable incógnita elegida. Esta solución es única para un conjunto completo de datos iniciales (incluyendo una condición extra en múltiple revolución).

Existe una relación entre todas las variables independientes, de modo que conocida una, se calculan todas las demás, correspondiendo todas ellas a la misma solución del problema.

Sin pérdida de generalidad, en este análisis se usarán indistintamente la *Variable Elemental* (ψ ó Ψ , según sea caso elíptico ó hiperbólico) y la *Variable Universal* (x para todos los casos), sabiendo la relación que existe entre ellas, determinada en [\(2.7.1\)](#).

Otras posibles variables independientes se muestran en el estudio comparativo realizado en [4.1](#), donde se determina la dependencia con las aquí usadas. Nótese que, aunque se use cualquier otro método para resolver el *Problema de Lambert*, los resultados aquí desarrollados son igualmente válidos con sólo determinar la relación de la incógnita del método elegido con las usadas en este desarrollo (ψ ó Ψ , o x).

3.3.3 VARIABLES DEPENDIENTES DE LA SOLUCIÓN

Las principales variables de interés, dependientes de la solución particular del *Problema de Lambert*, son el semieje mayor, el parámetro p , la excentricidad, y las anomalías verdaderas y velocidades, en los puntos inicial y final. Todas ellas se determinaron en [2.4](#), y se resumen aquí por claridad y unificación de resultados.

Antes de nada es conveniente calcular, si no se ha hecho ya con el propio método usado, una serie de variables intermedias dependientes directamente de la variable independiente, como ρ y α . La forma de calcularlas depende de la variable independiente usada.

En el caso de usar ψ como variable independiente, primero se calcula

$$C_1 = \cos \psi \quad ; \quad S_1 = \sin \psi$$

Opcionalmente se puede calcular una de las funciones trigonométrica en función de la otra usando la relación pitagórica (la de mayor valor absoluto en función de la menor).

Después se calculan las variables intermedias

$$S_2 = S_1 S_1$$

$$\rho_C = 1 - C_1 \quad ; \quad \rho_S = S_2 / \rho_C \quad \text{(recomendable para } C_1 \leq 0, \psi \geq \pi/2)$$

$$\rho_S = 1 + C_1 \quad ; \quad \rho_C = S_2 / \rho_S \quad \text{(recomendable para } C_1 \geq 0, \psi \leq \pi/2)$$

y por último

$$\rho = q_C \rho_C + q_S \rho_S \quad ; \quad \alpha = \rho / S_2$$

Del forma similar, en el caso de usar Ψ como variable independiente

$$C_{H1} = \cosh \Psi \quad ; \quad S_{H1} = \sinh \Psi$$

$$S_{H2} = S_{H1} S_{H1} \quad ; \quad \rho_S = 1 + C_{H1} \quad ; \quad \rho_C = -S_{H2} / \rho_S$$

$$\rho = q_S \rho_S + q_C \rho_C \quad ; \quad \alpha_H = \rho / S_{H2}$$

Opcionalmente se puede calcular C_{H1} en función de S_{H1} usando la relación pitagórica.

Y en el caso de usar x como variable independiente

$$C_1 = 1 - 2x \quad ; \quad S_2 = 4x(1-x) \quad ; \quad S_{H2} = -S_2 \quad ; \quad S_1 = \sqrt{S_2} \quad \text{ó} \quad S_{H1} = \sqrt{S_{H2}}$$

$$\rho_C = 2x \quad ; \quad \rho_S = 2(1-x)$$

$$\rho = q_C \rho_C + q_S \rho_S \quad ; \quad \alpha = \rho / S_2 \quad \text{ó} \quad \alpha_H = \rho / S_{H2}$$

Con las variables características en función de los datos del problema y las variables intermedias en función de la variable independiente, se obtiene directamente el parámetro p de la cónica, el semieje mayor y la excentricidad

$$p = \frac{p_E}{\rho} \quad ; \quad a = a_F \alpha \quad ; \quad a_H = -\alpha \quad ; \quad e_C^2 = p / a \quad ; \quad e = \sqrt{1 - e_C^2}$$

las velocidades en los puntos inicial ($j = 0$) y final ($j = 1$)

$$R = \sqrt{\rho} \quad ; \quad V_\rho = V_C / R \quad ; \quad V_{vj} = V_\rho k_{Sj} \quad ; \quad V_{rj} = V_\rho (-1)^j (k_{Cj} - C_1)$$

y las anomalías verdaderas (a partir de las velocidades)

$$V_{vm} = V_S R \quad ; \quad V_{v0m} = V_{v0} - V_{vm}$$

$$v_0 = \text{atan2}(V_{vC}, V_{r0}) + n_0 2\pi \quad ; \quad v_1 = v_0 + \Delta v$$

3.3.4 VARIACIÓN DE LA SOLUCIÓN

En la resolución de un *Problema de Lambert* dentro del marco de una misión real, además de los datos considerados fijos

$$r_0, \Delta r, \Delta \theta, N \text{ y } \Delta t$$

se suele disponer de las derivadas dichos datos respecto a un número de variables independientes consideradas de diseño de la misión.

Para generalizar, supóngase un número n arbitrario de variables independientes z_i desde $i = 1, 2, \dots, n$, de modo que, las derivadas de cualquier variable z respecto a cada una de las variables independientes z_i , se pueden agrupar todas en un vector o matriz columna utilizando el operador ∇ , definido como

$$\nabla z = \left\{ \frac{\partial z}{\partial z_1}, \frac{\partial z}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial z_n} \right\}$$

obteniendo así todas las derivadas al mismo tiempo.

En consecuencia, se consideran datos adicionales del *Problema de Lambert* a las siguientes derivadas

$$\nabla r_0, \nabla \Delta r, \nabla \Delta \theta \text{ y } \nabla \Delta t$$

En consecuencia, los datos que definen el *Problema de Lambert* (q , N y τ), tienen también los correspondientes datos adicionales (∇q y $\nabla \tau$), calculados, a partir de las expresiones con los primeros, como se muestra a continuación, donde se usa la propiedad de la derivación logarítmica en cualquiera de los dos sentidos

$$\nabla \ln z = (\nabla z) / z \quad ; \quad \nabla z = z \nabla \ln z$$

Una vez obtenida una de las dos obtener la otra es inmediato por lo que sólo se indicará el cálculo de una de las dos en los cálculos posteriores (la que más fácil sea).

La variación de las variables dependientes de los datos del problema real hasta llegar a la variación de los datos de la *Ecuación Temporal* (∇q y $\nabla \tau$), son

$$\nabla \delta = \nabla \theta / 2$$

$$\nabla r_1 = \nabla r_0 + \nabla \Delta r \quad \text{ó} \quad \nabla \Delta r = \nabla r_1 - \nabla r_0$$

$$\nabla \ln r_0 = (\nabla r_0) / r_0$$

$$\nabla \ln a_F = \frac{\nabla r_0 + \nabla r_1}{r_0 + r_1}$$

$$\nabla \ln r_R = (\nabla \ln r_0 + \nabla \ln r_1) / 2$$

$$\nabla \ln r_C = \cos \delta \nabla r_R - r_S \nabla \delta$$

$$\nabla \ln V_C = -\nabla \ln a_F / 2$$

$$\nabla \ln T_C = \nabla \ln a_F - \nabla \ln V_C$$

$$\nabla \ln \tau = \nabla \ln \tau - \nabla \ln T_C$$

$$\nabla \ln q = \nabla \ln r_C - \nabla \ln a_F$$

$$\nabla q_C = \nabla q / 2 \quad ; \quad \nabla q_S = -\nabla q / 2$$

y para el resto de variables características dependientes sólo de los datos del problema

$$\nabla \ln p_E = 2 \nabla \ln r_S - \nabla \ln a_F$$

$$\nabla \ln k_{Cj} = \nabla \ln r_C - \nabla \ln r_j$$

$$\nabla \ln k_{Sj} = \nabla \ln r_S - \nabla \ln r_j$$

$$\nabla \ln k_S = \nabla \ln r_S - \nabla \ln a_F$$

$$\nabla \ln V_S = \nabla \ln V_C - \nabla \ln k_S$$

Resolviendo la *Ecuación Temporal* con los datos (q , N y τ) se obtiene la variable incógnita elegida (ψ ó Ψ , o x), y las derivadas respecto a la variable incógnita ($\tau^{(1)}$) y respecto a q (τ_1). Aunque se pueden usar los métodos generales desarrollados en [2.6.2](#) para la *Variable Elemental* (ψ ó Ψ) y en [2.7.3](#) para la *Variable Universal* (x).

Llamando z a cualquiera de las variables incógnita, y usando las primeras derivadas de la *Función Temporal*, se tiene la siguiente igualdad

$$\nabla \tau = \tau^{(1)} \nabla z + \tau_1 \nabla q \quad (z = \psi \text{ ó } \Psi, \text{ o } x)$$

de donde se puede despejar

$$\nabla z = (\nabla \tau - \tau_1 \nabla q) / \tau^{(1)} \quad (z = \psi \text{ ó } \Psi, \text{ o } x)$$

Obtenido ∇z , se calcula eligiendo la expresión apropiada

$$\nabla C_1 = -S_1 \nabla \psi = S_{H1} \nabla \Psi = -2 \nabla x$$

y teniendo en cuenta que $\rho = 1 - q C_1$ y $\alpha = \rho / S_2$, también

$$\nabla \rho = -(q \nabla C_1 + C_1 \nabla q)$$

$$\nabla S_2 = -\nabla C_2 = -2 C_1 \nabla C_1$$

$$\nabla \alpha = (\nabla \rho - \alpha \nabla S_2) / S_2$$

y finalmente se obtiene, la variación de los parámetros geométricos de la solución

$$\nabla \ln p = \nabla \ln p_E - \nabla \ln \rho$$

$$\nabla \ln a = \nabla \ln a_H = \nabla \ln a_F + \nabla \ln \alpha$$

$$\nabla \ln(e_C^2) = \nabla \ln p - \nabla \ln a$$

$$\nabla e = -\nabla \ln(e_C^2) e_C^2 / (2 e)$$

la variación de las velocidades en los puntos inicial ($j = 0$) y final ($j = 1$)

$$\nabla \ln R = (\nabla \ln \rho) / 2$$

$$\nabla \ln V_\rho = \nabla \ln V_C - \nabla \ln R$$

$$\nabla \ln V_{vj} = \nabla \ln V_\rho + \nabla \ln k_{sj}$$

$$\nabla \ln V_{rj} = \nabla \ln V_\rho + \nabla \ln(k_{Cj} - C_1)$$

y la variación de las anomalías verdaderas (a partir de las velocidades)

$$\nabla \ln V_{vm} = \nabla \ln V_S + \nabla \ln R$$

$$\nabla V_{\nu 0m} = \nabla V_{\nu 0} - \nabla V_{\nu m}$$

$$\nabla \nu_0 = (\nabla \ln V_{\nu 0m} - \nabla V_{r0}) V_{r0} V_{\nu 0m} / (V_{r0}^2 + V_{\nu 0m}^2)$$

$$\nabla \nu_1 = \nabla \nu_0 + \nabla \Delta \nu$$

Con todos estos cálculos se ha obtenido un método, no sólo para determinar la trayectoria cónica que resuelve el *Problema de Lambert* para unos datos iniciales particulares, sino también para obtener la variación de la solución (parámetros geométricos y velocidades) en función de la variación de los datos del problema, que a su vez pueden depender de cualquier conjunto de variables independientes elegidas convenientemente para el diseño de la misión.

Estos resultados se pueden enlazar con sucesivos tramos de trayectorias determinadas por otras condiciones o problemas diferentes, o incluso otros *Problemas de Lambert* adicionales, permitiendo llevar a la práctica algoritmos de optimización globales muy eficientes, pues se obtiene tanto la función a optimizar como las derivadas respecto a las variables independientes elegidas.

4 RESULTADOS

4.1 COMPARACIÓN CON LAS SOLUCIONES EXISTENTES

Existen multitud de soluciones para el *Problema de Lambert* en la literatura (casi todas la más relevantes) que se pueden deducir a partir de alguna de las *Ecuaciones Elementales*, algunas a partir de la *Doble Dependiente* desarrollada en [2.5](#), pero la mayoría a partir de la *Básica* desarrollada en [2.1.5](#). La *Ecuación Universal* obtenida en [2.7](#) a partir de la *Elemental Básica* es también un ejemplo.

Entre las más clásicas destacan la desarrollada en Bate, Mueller and White^[10] y la desarrollada por Simó^[24], en un término medio, se sitúan la obtenida por Fang and Nguyen^[11] y la obtenida por Battin^[5], y entre las más recientes, la publicada por Arora and Russell^[9] y la publicada por Dario Izzo^[34].

A continuación se va a realizar una comparativa entre las ecuaciones asociadas a todas estas soluciones ya existentes, añadiendo también las aquí desarrolladas. El objetivo de esta comparativa es, por un lado demostrar la equivalencia entre todas ellas y, por otro, valorar cuantitativamente la contribución en la eficiencia computacional de cada una de ellas, para la resolución del *Problema de Lambert*.

<i>Ecuación</i>	<i>Orden 2</i>	<i>Orden 3 Real</i>	<i>Orden 3 Equival.</i>	<i>Orden 4 Real</i>	<i>Orden 4 Equival.</i>
<i>Elemental Básica</i> (2.1.5)	208 (253)	226 (296)	143 (187)	–	–
<i>Elemental Doble Dependiente</i> (2.5.5)	261 (283)	314 (341)	198 (216)	–	–
<i>Universal</i> (2.7.5)	235 (267)	257 (300)	162 (190)	279 (358)	140 (179)
<i>Lancaster and Blanchard</i> (4.1.1)	283 (360)	–	–	–	–
<i>Bate, Mueller, and White</i> (4.1.2)	333	–	–	–	–
<i>Simó</i> (4.1.3)	293	–	–	–	–
<i>Battin</i> (4.1.5)	369	–	–	–	–
<i>Arora and Russell</i> (4.1.6)	286 (367)	366 (459)	231 (290)	–	–
<i>Dario Izzo</i> (4.1.7)	235 (344)	293 (409)	185 (258)	368 (486)	184 (243)

Tabla 18. Coste (en sumas), estimado y real (entre paréntesis), de una iteración de algunos de los métodos desarrollados y de los existentes más relevantes.

Para lograr esto último, se recurre en primer lugar a una estimación basada en los directrices marcadas en [1.2.2.4](#), usando los costes estimados (en sumas) de las funciones elementales indicados en la tabla 2, que permiten contabilizar los costes de la *Función Temporal* y sus derivadas hasta el orden requerido a partir del coste de sus funciones componentes. El resultado se muestra en la tabla 18 para algunos de los métodos considerados más eficientes. Adicionalmente, dividiendo el coste de la iteración de orden p por el factor $(\ln 2 / \ln p)$, es decir, 0.63 para orden 3 y 0.5 para orden 4, se obtiene

el coste equivalente a la convegenencia de orden 2, definida en (1.2.17), que permite comparar el coste de métodos de distinto orden. Para completar la comparativa, se han programado directamente en C++ la mayoría de estos métodos para obtener el coste directamente, del mismo modo que se ha obtenido para las funciones elementales. El resultado también se muestra en la tabla 18 entre paréntesis.

4.1.1 SOLUCIÓN DE LANCASTER AND BLANCHARD

La solución de Lancaster and Blanchard^[6] está basada en la Formulación de Lagrange, mostrada en el Anexo G, con la siguiente *Ecuación Temporal* (T), y su derivada (dT/dx)

$$E = x^2 - 1 \quad ; \quad y = |E|^{1/2} \quad ; \quad z = (1 + K E)^{1/2}$$

$$f = y (z - q_L x) \quad ; \quad g = x z - q_L E$$

$$\lambda = \text{atan}(f/g) \quad ; \quad d = N \pi + \lambda \quad (0 \leq \lambda \leq \pi) \quad (\text{para } E \leq 0)$$

$$d = \log(f + g) \quad (\text{para } E > 0)$$

$$T = 2 (x - q_L z - d / y) / E \quad ; \quad dT/dx = (4 - L x / z - 3 x T) / E$$

donde

$$c = (r_0^2 + r_1^2 - 2 r_0 r_1 \cos \Delta \theta)^{1/2} \quad ; \quad s = (\Sigma r + c) / 2 \quad ; \quad T = \sqrt{8 \mu / s} \Delta t / s$$

$$q_L = \sqrt{r_0 r_1} \cos(\Delta \theta / 2) / s \quad ; \quad K = q_L^2 \quad ; \quad L = 4 q_L K$$

Descripción	Lancaster & Blanchard	Lagrange	Tesis, Gauss
Incógnita	x	$\cos(\alpha/2)$	$\cos((\psi + \phi)/2)$
Variable intermedia	E	$-\sin^2(\alpha/2)$	$-\sin^2((\psi + \phi)/2)$
Variable intermedia	z	$\cos(\beta/2)$	$\cos((\psi - \phi)/2)$
Parámetro geométrico	q_L	q_L	$\cos f / (1 + \sin f)$
Parámetro geométrico	d	$N \pi + \psi \text{ ó } -i \psi$	$\psi_N \text{ ó } \Psi$
Tiempo de transferencia adimensional	T	T	$2 (2/(1 + \sin f))^{3/2} \tau$

Tabla 19. Equivalencia de variables de la ecuación de Lancaster and Blanchard.

Teniendo en cuenta las indicaciones mencionadas en 1.2.2.4 respecto al coste computacional, contabilizando el coste de todas las operaciones elementales necesarias para obtener la *Función Temporal* (T) y su primera derivada (no se calcula la segunda), se obtiene un coste total medio de unas 283 sumas. Este resultado se refleja en la tabla 18 donde se puede comparar directamente con el resto de soluciones mostradas.

4.1.2 SOLUCIÓN DE BATE, MUELLER, AND WHITE

La ecuación formulada por Bate, Mueller and White^[10]

$$\sqrt{\mu} t = x^3 S + A\sqrt{y} \quad ; \quad y = r_0 + r_1 - A \frac{1 - zS}{\sqrt{C}} \quad ; \quad x = \sqrt{\frac{y}{C}}$$

donde

$$A = \frac{\sqrt{r_0 r_1} \sin \Delta \nu}{\sqrt{1 - \cos \Delta \nu}}$$

es equivalente a la *Ecuación Elemental Básica* desarrollada en 2.1.5, como muestra la tabla 20 de equivalencia de variables. Si en esta ecuación, se sustituyen las variables equivalentes de la *Función Elemental Básica*, se obtiene la *Ecuación Elemental Básica* (versión con sólo p_1).

La derivada se calcula del siguiente modo

$$\sqrt{\mu} \frac{dt}{dz} = 3x^2 \frac{dx}{dz} S + x^3 \frac{dS}{dz} + \frac{A}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dz} \quad ; \quad \frac{dx}{dz} = \frac{1}{2xC} \left(\frac{dy}{dz} - x^2 \frac{dC}{dz} \right) \quad ;$$

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{A}{C} \left(\sqrt{C} \left(-S - z \frac{dS}{dz} \right) - \frac{1 - zS}{2\sqrt{C}} \frac{dC}{dz} \right) \quad ; \quad \frac{dS}{dz} = \frac{C - 3S}{2z} \quad ; \quad \frac{dC}{dz} = \frac{1 - zS - 3C}{2z}$$

<i>Descripción</i>	<i>Bate, Mueller, and White</i>	<i>Tesis</i>
<i>Incógnita</i>	z	$(2 \psi)^2 \equiv -(2 \Psi)^2$
$2^{1/2}$ veces la componente coseno del radio medio cuadrático	A	$2^{1/2} r_C$
<i>Función de Stumpff de orden 2</i>	C	$c_2(z)$
<i>Función de Stumpff de orden 3</i>	S	$c_3(z)$
<i>Variable intermedia</i>	y	$2 a_F \rho$
<i>Variable intermedia</i>	x	$\sqrt{\frac{2a_F \rho}{c_2(z)}}$
<i>Variable intermedia</i>	$\frac{S}{C\sqrt{C/2}}$	p_1
<i>Tiempo de transferencia</i>	t	Δt

Tabla 20. Equivalencia de variables con el método de Bate, Mueller, and White.

Teniendo en cuenta las indicaciones mencionadas en [1.2.2.4](#) respecto al coste computacional y el [Anexo A](#) (al final) para el coste de las funciones de Stumpff, en la solución de Bate, Mueller and White, contabilizando el coste de todas las operaciones elementales necesarias para obtener la *Función Temporal* (t) y su primera derivada (no se calcula la segunda), se obtiene un coste total medio de unas 333 sumas (51 sólo para evaluar las funciones de Stumpff). Este resultado se refleja en la tabla 18 donde se puede comparar directamente con el resto de soluciones mostradas.

4.1.3 SOLUCIÓN DE SIMÓ

La ecuación formulada por Simó^[24] es salvo constantes igual a la *Ecuación Elemental Básica* desarrollada en [2.1.5](#), como muestra la tabla 21 de equivalencia de variables. Pero usa la versión con p_1 y p_2 , por lo que no aprovecha el ahorro de cálculo que supone la relación entre estas dos variables.

Teniendo en cuenta las indicaciones mencionadas en [1.2.2.4](#) respecto al coste computacional y el [Anexo A](#) (al final) para el coste de las funciones de Stumpff, en la solución de Simó, contabilizando el coste de todas las operaciones elementales necesarias para obtener la *Función Temporal* (TOF) y su primera derivada (no se calcula la segunda), se obtiene un coste total medio de unas 293 sumas (55 sólo para evaluar las funciones de Stumpff). Este resultado se refleja en la tabla 18 donde se puede comparar directamente con el resto de soluciones mostradas.

<i>Descripción</i>	<i>Simó</i>	<i>Tesis</i>
<i>Incógnita</i>	z	$\psi^2 \equiv -\Psi^2$
<i>Suma de radiovectores ó Doble del semieje mayor de la Elipse Fundamental</i>	P	$r_0 + r_1 = 2 a_F$
<i>Doble de la componente coseno del radio medio cuadrático</i>	Q	$2 r_C$
<i>Parámetro geométrico</i>	Q/P	$q = r_C / a_F$
<i>Variable intermedia</i>	$4 \frac{c_3(4z)}{c_1^3(z)}$	p_1
<i>Variable intermedia</i>	$\frac{c_2(z) - c_3(z)}{c_1^3(z)}$	p_2
<i>Tiempo de transferencia</i>	Δt	Δt

Tabla 21. Equivalencia de variables con el método de Simó.

4.1.4 SOLUCIÓN DE FANG AND NGUYEN

La ecuación formulada por Fang and Nguyen^[11] es exactamente igual a la *Ecuación Elemental Básica* desarrollada en 2.1.5, como muestra la tabla 22 de equivalencia de variables. Sin embargo, sólo se usa en un caso muy concreto de transferencia con múltiple revolución sin llegar a generalizar un método con uso de derivadas con el que poder comparar. Esta solución parece ser una línea de desarrollo que se ha mantenido durante años sin explotar en todo su potencial.

Es de destacar que se ha llegado a la misma ecuación de dos formas totalmente diferentes. La publicación se apoya en propiedades geométricas de invariancia descubiertas por otros autores para llegar a la ecuación, sin embargo, en este trabajo, se ha obtenido directamente (en 2.1) mediante desarrollo analítico, desde cero, a partir de las ecuaciones conocidas de las cónicas (geométrica y temporal).

<i>Descripción</i>	<i>Fang and Nguyen</i>	<i>Tesis</i>
<i>Incógnita. Opción 1</i>	g	ψ ó Ψ
<i>Incógnita. Opción 2</i>	ζ	x
<i>Incógnita. Opción 3</i>	Λ	$1 - x$
<i>Componente coseno del radio medio cuadrático</i>	ρ	r_C
<i>Parámetro geométrico</i>	ε	$q = r_C / a_F$
<i>Ángulo de transferencia</i>	ψ_R	Δv
<i>Tiempo de transferencia adimensional</i>	K	τ / π
<i>Ángulo de Excentricidad transversal</i>	γ	ϕ
<i>Variable intermedia</i>	G	$\rho = 1 - q \cos \psi$
<i>Variable intermedia</i>	M	$2 p_1$

Tabla 22. Equivalencia de variables con el método de Fang and Nguyen.

4.1.5 SOLUCIÓN DE BATTIN

Una de las *Ecuaciones Temporales* más eficientes formuladas por Battin^[5] es la siguiente

$$y^3 - y^2 = m \frac{\psi - \sin \psi}{4 \tan^3(\psi / 2)} \quad ; \quad x = \tan^2 \frac{\psi}{2} \quad ; \quad y^2 = \frac{m}{(1+x)(1-x)}$$

con los siguientes parámetros geométricos

$$l = \tan^2 \frac{f}{2} = \frac{1 - \cos f}{1 + \cos f} \quad ; \quad m = \frac{\mu(\Delta t)^2}{8r_{0p}^3} \quad ; \quad r_{0p} = \frac{r_0 + r_1 + 2\sqrt{r_0 r_1} \cos(\Delta \nu / 2)}{4}$$

Esta ecuación es equivalente a la *Ecuación Elemental Principal* desarrollada en [2.6](#), como muestra la tabla 23 de equivalencia de variables.

Usando la función hipergeométrica $F(1/2, 1, 3/2; -x)$, la ecuación se transforma en

$$y^3 - y^2 = -m \frac{dF}{dx} \quad ; \quad F = \frac{\operatorname{atan} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad ; \quad \frac{dF}{dx} = \frac{1}{2x} \left(\frac{1}{1+x} - F \right)$$

Para hallar las derivadas de cualquier orden de F , se tiene en cuenta la ecuación que cumplen las funciones hipergeométricas, particularizada para esta función

$$2x(1+x) \frac{d^2 F}{dx^2} + (3+5x) \frac{dF}{dx} + F = 0$$

De modo que derivando sucesivamente esta ecuación y despejando la de mayor orden se van obteniendo las sucesivas derivadas.

<i>Descripción</i>	<i>Battin</i>	<i>Tesis</i>
<i>Incógnita. Opción 1</i>	$\psi \text{ ó } \Psi$	$\psi \text{ ó } \Psi$
<i>Incógnita. Opción 2</i>	$x = \tan^2 \frac{\psi}{2}$	$x / 1 - x$
<i>Parámetro geométrico</i>	l	q_S / q_C
<i>Radio del punto medio parabólico</i>	r_{0p}	$a_F q_C$
<i>Cuadrado del tiempo de transferencia adimensional</i>	m	$\tau^2 / (16 q_C^3)$
<i>Variable intermedia</i>	y	$\frac{\tau}{2q_C} \sqrt{\frac{\alpha}{2(1-x)}}$

Tabla 23. Equivalencia de variables con el método de Battin.

Teniendo en cuenta las indicaciones mencionadas en [1.2.2.4](#), en la solución de Battin, contabilizando el coste de todas las operaciones elementales necesarias para obtener la *Ecuación Temporal* y su primera derivada (no se calcula la segunda), se obtiene un coste total medio de unas 369 operaciones. Este resultado se refleja en la tabla 18 donde se puede comparar directamente con el resto de soluciones mostradas.

4.1.6 SOLUCIÓN DE ARORA AND RUSSELL

La formulación de Arora and Russell^[9], según se explica en el propio desarrollo de la publicación, aprovecha un parámetro basado en la geometría para simplificar la formulación universal de la *Ecuación de Lambert* (TOF). Esta ecuación, que se define en función de una *Variable Universal* k , muestra unas expresiones simplificadas de las derivadas y requiere sólo una única evaluación de la función trascendental. Las dos *Funciones de Stumpff*, presentes en varias formulaciones clásicas, se condensan en una sola función análoga, válida para todos los tipos de cónicas. El uso de polinomios racionales de aproximaciones iniciales, combinados con el método de Halley (de orden 3), para hallar la raíz de la ecuación que resuelve el problema, permite alcanzar la convergencia en 2-4 iteraciones para el 99.5% de los casos. Adicionalmente, la precisión de las estimaciones iniciales reduce aún más el número de llamadas de minimización que normalmente se necesitan para poder resolver el problema de múltiple revolución. En la publicación se realiza un análisis de rendimiento del método propuesto, y una comparación, de precisión y tiempo de ejecución, con el método de Gooding, por considerarse la mejor referencia histórica, en cuanto a resultados de rapidez y robustez, como verifican algunas pruebas^[29,30] realizadas. Los resultados aportados, demuestran ser estadísticamente tan precisos como el método de Gooding y ser 1,85, 1,75 y 2,15 veces más rápido (en promedio) para los casos, hiperbólico, simple revolución y múltiple revolución, respectivamente. Por ello, se ha seleccionado esta solución para la comparación en lugar de la de Gooding, aún siendo un referente histórico.

A continuación se analiza la *Ecuación Temporal* usada por Arora and Russel para compararla con la desarrollada en este trabajo. La *Función Temporal* (TOF), citada textualmente con su nomenclatura particular, en función de una única variable independiente k , es

$$TOF = S \sqrt{1 - k \tau} [\tau + (1 - k \tau) W]$$

donde

$$S = \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3}{\mu}} \quad ; \quad W = \frac{q}{\sqrt{m^3}} - \frac{k}{m} \quad ; \quad m = 2 - k^2$$

$$q = \begin{cases} (1 - \operatorname{sgn}(k)) \pi + \operatorname{sgn}(k) \cos^{-1}(1 - m) + 2\pi N & -\sqrt{2} \leq k \leq \sqrt{2} \\ -i \cosh^{-1}(1 - m) & k \geq \sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} m \geq 0 \\ m \leq 0 \end{matrix}$$

y con derivadas

$$TOF' = \frac{-TOF}{2c} + S \tau \sqrt{c \tau} (W' c - W) \quad ; \quad c = \frac{1 - k \tau}{\tau}$$

$$TOF'' = \frac{-TOF}{4c^2} + S \tau \sqrt{c \tau} \left(\frac{W}{c} + c W'' - 3W' \right)$$

donde

$$W' = \frac{-2 + 3Wk}{m}$$

$$W'' = \frac{5W'k + 3W}{m}$$

Identificando esta ecuación publicada, con la *Ecuación Elemental Básica* desarrollada en [2.1.5](#), se comprueba que son equivalentes. Para verlo con mayor claridad, en la tabla 24 se muestran las equivalencias, variable a variable.

De esta comparación, resulta evidente el gran parecido con la *Función Elemental Básica*, aunque con unas expresiones bastante más complicadas usando más variables intermedias. En la *Ecuación Elemental Básica* se usan menos variables y todas adimensionales, quedando una expresión mucho más simple.

En la publicación se resuelve el problema de precisión cerca de la solución parabólica, desarrollando W , equivalente a $(p_1/2^{1/2})$, en serie de potencias de la variable $v = k - 2^{1/2}$, hasta grado 16 (aunque propone usar sólo 8). En este trabajo, en la tabla 4, se muestran los coeficientes del desarrollo de p_1 en función de ψ^2 , hasta grado 11. Aunque se pueden obtener más coeficientes, el rango de validez es suficiente para evitar la pérdida de precisión cerca del origen, evaluando sin desarrollo cuando se aleja (según se explica en [2.1.5](#)). El autor, también menciona la siguiente evaluación alternativamente de la función W

$$W = \frac{S}{C\sqrt{C}} \quad ; \quad C = c_2(q^2) = \frac{1 - \cos q}{q^2} \quad ; \quad S = c_3(q^2) = \frac{q - \sin q}{q^3} \quad ; \quad q = \Delta E$$

donde C y S son las llamadas *Funciones de Stumpff*, de grados 2 y 3, respectivamente, definidas en el [Anexo A](#), aplicadas al argumento q^2 .

<i>Descripción</i>	<i>Arora and Russell</i>	<i>Tesis</i>
<i>Incógnita</i>	k	$2^{1/2} \cos \psi \equiv 2^{1/2} \cosh \Psi$
<i>Parámetro geométrico</i>	τ	$q / 2^{1/2}$
<i>Tiempo característico</i>	S	$2^{3/2} T_C$
<i>Tiempo de transferencia</i>	TOF	Δt
<i>Variable intermedia</i>	W	$p_1 / 2^{1/2}$
<i>Variable intermedia</i>	m	$2 \sin^2 \psi \equiv -2 \sinh^2 \Psi$
<i>Cálculo intermedio</i>	$1 - k\tau$	$\rho = 1 - q \cos \psi$
<i>Dif. Anomalía Excéntrica</i>	q	ΔE
<i>Variable intermedia</i>	$v = k - 2^{1/2}$	$2^{1/2} (\cos \psi - 1) \equiv 2^{1/2} (\cosh \Psi - 1)$

Tabla 24. Equivalencia de variables con el método de Arora and Russel.

Nótese que esta expresión de W coincide con la segunda opción desarrollada en [2.1.5](#) para la evaluación de p_1 (salvo el factor $2^{1/2}$). Estas funciones evitan la indeterminación en el origen en la evaluación de W , en todo el rango de k , pero el autor menciona que es más eficiente usar directamente el desarrollo de potencias de W cerca del origen y la evaluación propuesta en función de k , en caso contrario. En [2.1.5](#) se hace un estudio muy detallado de la evaluación de p_1 mediante *Funciones de Stumpff*, que también es válido para W , mostrando las condiciones donde es preferible la evaluación directa (con la variable independiente correspondiente) en lugar de recurrir a la evaluación de *Funciones de Stumpff*, con las opciones allí propuestas.

Adicionalmente, en la publicación se propone la resolución de la ecuación usando un método de tercer orden (método de Halley), calculando las dos primeras derivadas de la *Función Temporal (TOF)*. En este trabajo, se propone un método del orden que se quiera, usando el desarrollo de la función inversa del apéndice G, tal y como se muestra en 2.7.3 para la *Función Universal*.

La solución de *Arora and Russell* es muy similar a la solución desarrollada para la *Función Elemental Básica*, evitando ambas la pérdida de precisión de forma similar en la evaluación de la *Función Temporal*, aunque las derivadas son ligeramente más fáciles de obtener en la publicación. Esto se debe a que la variable independiente k cumple la siguiente relación lineal con la Variable Universal x

$$k = 2^{1/2} \cos \psi = 2^{1/2} (1 - 2x)$$

de modo que las derivadas de la función W se comportan igual que la función Q (es la misma con un factor y un cambio lineal de variable) desarrollada en [2.7.2](#), con fórmulas recursivas para obtener las derivadas de cualquier orden en función de derivadas anteriores. Sin embargo, no toma ventaja de las fórmulas recursivas en función de las funciones Q_n , que permiten evaluar la función Q y sus derivadas de cualquier orden cerca del origen, sin pérdida de precisión.

Teniendo en cuenta las indicaciones mencionadas en [1.2.2.4](#), en la solución de *Arora and Russell*, contabilizando el coste de todas las operaciones elementales necesarias para obtener la *Función Temporal (TOF)* y sus derivadas, se obtiene un coste total medio de unas 366 sumas (286 si solo se quiere la primera derivada). Este resultado se refleja en la tabla 18 donde se puede comparar directamente con el resto de soluciones mostradas.

4.1.7 SOLUCIÓN DE IZZO

Una de las *Ecuaciones Temporales* más prometedoras, desarrollada recientemente por Dario Izzo^[32] a partir de la solución de Lancaster and Blanchard, con su misma variable independiente x , y el mismo parámetro geométrico q_L (pero nombrado como λ). Teniendo en cuenta las formulaciones de Lagrange y Gauss, modifica las ecuaciones de Lancaster and Blanchard llegando a la ecuación

$$T = \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{\psi + Mx}{\sqrt{|1-x^2|}} - x + \lambda y \right) \quad ; \quad y = (1 - \lambda^2 (1-x^2))^{1/2}$$

$$\psi = \arccos(xz + \lambda(1-x^2)) \quad (\text{para } |x| \leq 1)$$

$$\psi = \operatorname{acosh}(xz - \lambda(x^2 - 1)) \quad (\text{para } |x| > 1)$$

siendo M el número de vueltas completas y las variables λ y T las siguientes

$$s = (\Sigma r + c) / 2 \quad ; \quad \lambda = \sqrt{r_0 r_1} \cos(\Delta\theta/2) / s \quad ; \quad T = \sqrt{2\mu / s} \Delta t / s$$

Esta solución destaca sobre todo por la simplicidad y uso de las derivadas, hasta la tercera, obtenidas a partir de las expresiones

$$(1-x^2) \frac{dT}{dx} = 3Tx - 2 + 2\lambda^3 \frac{x}{y}$$

$$(1-x^2) \frac{dT}{dx} = 3Tx - 2 + 2\lambda^3 \frac{x}{y}$$

$$(1-x^2) \frac{dT}{dx} = 3Tx - 2 + 2\lambda^3 \frac{x}{y}$$

Esta ecuación es equivalente a la *Ecuación Elemental Principal* desarrollada en [2.6](#), como muestra la tabla 25 de equivalencia de variables.

<i>Descripción</i>	<i>Izzo</i>	<i>Lagrange</i>	<i>Tesis, Gauss</i>
<i>Incógnita</i>	x	$\cos(\alpha/2)$	$\cos((\psi+\phi)/2)$
<i>Variable intermedia</i>	E	$-\sin^2(\alpha/2)$	$-\sin^2((\psi+\phi)/2)$
<i>Variable intermedia</i>	y	$\cos(\beta/2)$	$\cos((\psi-\phi)/2)$
<i>Parámetro geométrico</i>	λ	q_L	$\cos f / (1 + \sin f)$
<i>Parámetro geométrico</i>	ψ	ψ ó $-i\psi$	ψ ó Ψ
<i>Tiempo de transferencia adimensional</i>	T	$T/2$	$(2/(1 + \sin f))^{3/2} \tau$

Tabla 25. Equivalencia de variables de la ecuación de Izzo.

Teniendo en cuenta las indicaciones mencionadas en [1.2.2.4](#), en la solución de Izzo, contabilizando el coste de todas las operaciones elementales necesarias para obtener la *Función Temporal* (T) y sus derivadas, se obtiene un coste total medio de unas 235, 293, y 368 sumas, correspondientes al cálculo de hasta la primera, segundo y tercera derivada respectivamente. Este resultado se refleja en la tabla 18 donde se puede comparar directamente con el resto de soluciones mostradas.

4.2 CONCLUSIONES

Se ha conseguido el principal objetivo sobre el *Problema de Lambert*, sobre precisión y coste computacional, mejorando algunas de las ecuaciones existentes y proporcionando nuevas ecuaciones más eficientes.

Se han mostrado algunas aplicaciones de los resultados, tanto desde el punto de vista teórico, por ejemplo con el *Teorema de Lambert* adimensional y la Optimalidad de la *Transferencia de Hohmann*, como en desde el punto de vista práctico, mostrando la mejora de eficiencia en relación a las soluciones existentes.

Por último, se han sentado las bases para seguir investigando sobre nuevos objetivos surgidos a lo largo de la investigación, como los mostrados en [4.3](#), que muestran el gran potencial de aplicación a problemas reales, sobre todo en torno a soluciones particulares (parabólicas, hiperbólica degenerada, medias vueltas, mínimo de múltiple revolución, etc), donde se pueden optimizar de forma particular los desarrollos obtenidos.

4.3 POSIBLES DESARROLLOS FUTUROS

Durante el desarrollo de esta Tesis han surgido nuevas oportunidades de investigación no contempladas en un principio. Aunque ha sido posible incluir algunos desarrollos adicionales, otros se han dejado como posibles desarrollos que podrían ser interesantes en el futuro, de los cuales destacan los mostrados a continuación.

[F1] Desarrollo de la función $\sigma(z;N) \equiv \lambda(1/2+z;N)$, para obtener una solución basada en esta función σ de forma análoga a la obtenida para λ . [129](#).

[F2] Estudio de la precisión necesaria para las derivadas de la función $\lambda(x;N)$ en múltiple revolución y confirmación de a posibilidad de evaluar las derivadas con la fórmula recursiva en función de derivadas anteriores, sin necesidad de separar la solución particular y del núcleo. [135](#).

[F3] Linealización de la *Ecuación Hiperbólica de Semieje Mayor*, en torno a $\alpha_H = 0$, correspondiente a la solución degenerada de tiempo nulo. [153](#).

[F4] Desarrollo de la solución de mínimo tiempo de transferencias en torno a $q = 0$, para la *Variable Universal* x . [182](#).

[F5] Desarrollos mayores de grado 7 para las aproximaciones casi parabólicas, aumentando el rango de validez de la variable independiente. [183](#), [184](#).

[F6] Desarrollo de aproximaciones iniciales a partir de la *Ecuación Elemental* o *Ecuación Universal*. [185](#), [185](#)

[F7] Estudio particular del Problema de Lambert para el encuentro espacial (rendezvous), las maniobras características del guiado y control de trayectorias, y la maniobra MGA-DSM usada en misiones interplanetarias. [189](#).

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. Lambert, “Insigniores Orbitae Insigniores Cometarum Proprietates”, Klett, Augsburg, 1761; Augustae Vindelicorum. Sumtibus Ebehardi Klett viduae. MDCCLXI. [3](#), [10](#), [26](#), [A-61](#)
- [2] Leonhard Euler, “Theoria motuum planetarum et cometarum” (“Theory of the motions of planets and comets”), Originally published in Berolini in 1744, Opera Omnia: Series 2, Volume 28, pp. 105 - 251. [3](#), [10](#), [26](#), [A-61](#)
- [3] Lagrange J. L., “Sur une Manière Particulière D'exprimer le Temps dans les Sections Coniques, Décrites par des Forces Tendantes au Foyer et Réciproquement Proportionnelles aux Carrés des Distances”. Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, année 1778. [3](#), [26](#), [27](#), [A-61](#)
- [4] Gauss, K. F., “Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium”, edited by F. Perthes and I. H. Besser, 1809; or translation “Theory of the Motion of the Heavenly Bodies Moving About the Sun in Conic Sections”, with an appendix. By Ch. H. Davis. Little, Brown and Comp (1857). First Book - Third Section “Relations Between Several Places in Orbit”. [3](#), [8](#), [26](#), [28](#), [41](#), [58](#), [60](#), [A-62](#)
- [5] Battin, R. H., “An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics, Revised Edition (AIAA Education Series)”, 1999. [3](#), [8](#), [8](#), [11](#), [15](#), [26](#), [28](#), [28](#), [28](#), [34](#), [67](#), [68](#), [111](#), [115](#), [119](#), [215](#), [219](#), [A-1](#), [A-8](#), [A-64](#)
- [6] E. R. Lancaster and R. C. Blanchard, “A unified form of Lambert’s theorem”, tech. rep., NASA, Sept. 1969. [3](#), [28](#), [28](#), [216](#), [A-68](#)
- [7] Gooding, R. H., “A procedure for the solution of Lambert’s orbital boundary-value problem”, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, Vol. 48, No. 2, 1990, pp. 145–165. [3](#), [9](#), [11](#), [26](#), [28](#), [28](#), [181](#), [A-68](#)
- [8] Nitin Arora; Ryan P. Russell, “A Gpu Accelerated Multiple Revolution Lambert Solver for Fast Mission Design”, Paper AAS 10–198, AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, San Diego, CA, 2010. [3](#), [27](#)
- [9] Nitin Arora, and Ryan P. Russell, “A Fast And Robust Multiple Revolution Lambert Algorithm Using A Cosine Transformation”, Paper AAS 13-728, Astronautical Sciences Volume 150, 20 pgs, 2014. [3](#), [4](#), [18](#), [26](#), [29](#), [60](#), [215](#), [221](#)
- [10] R. R. Bate, D. D. Mueller, and J. E. White, Fundamentals of Astrodynamics. Dover, 1971. [4](#), [28](#), [28](#), [28](#), [29](#), [60](#), [215](#), [217](#), [A-1](#)
- [11] Sun, Fang Toh and Vinh, Nguyen X. “Lambertian invariance and application to the problem of optimal fixed-time impulsive orbital transfer”. Acta Astronautica 10 (1983) 319–330. [4](#), [28](#), [28](#), [60](#), [215](#), [219](#)

- [12] E. R. Lancaster, R. C. Blanchard, and R. A. Devaney, "A Note on Lambert's Theorem", *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 3, No. 9, 1995, pp. 1436–1438. [26](#), [28](#)
- [13] P. R. Escobal, *Methods of Orbit Determination*. John Wiley and Sons, 1965. [26](#), [27](#)
- [14] O. Abdelkhalik and D. Mortari, "N-Impulse Orbit Transfer Using Genetic Algorithms", *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 44, 2007. [26](#), [30](#)
- [15] B. G. Marsden, "Initial orbit determination - The pragmatist's point of view", *Astronomical Journal*, Vol. 90, 1985, pp. 1541–1547. [26](#)
- [16] A. E. Petropoulos, J. M. Longuski, and E. P. Bonfiglio, "Trajectories to Jupiter via Gravity Assists from Venus, Earth and Mars", *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 37, nov 2000. [27](#)
- [17] S. I. Ochoa and J. E. Prussing, "Multiple Revolution Solutions to Lambert's Problem", *Advances in the Astronautical Sciences*, Vol. 79, No. 2, 1992, pp. 1989–2008. [27](#)
- [18] V. L. Coverstone and J. E. Prussing, "A Class of Optimal Two-Impulse Rendezvous Using Multiple-Revolution Lambert Solutions", *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 48, No. 2-3, 2000, pp. 131–148. [27](#), [30](#)
- [19] G. Avanzini, "A Simple Lambert Algorithm", *Journal of guidance, control, and dynamics*, Vol. 31, No. 6, 2008, pp. 1587–1594. [27](#), [34](#), [40](#)
- [20] Q. He, J. Li, and C. Han, "Multiple-Revolution Solutions of the Transverse-Eccentricity-Based Lambert Problem", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 33, No. 1, 2010. [27](#)
- [21] S. Herrick and A. Liu, "Two Body Orbit Determination from Two Positions and Time of Flight", Appendix A, *Aeronutronic*, Vol. C-365, 1959. [28](#)
- [22] S. L. Nelson and P. Zarchan, "Alternative approach to the solution of Lambert's problem", *Journal of Guidance Control Dynamics*, Vol. 15, Aug. 1992, pp. 1003-1009. [28](#)
- [23] J. D. Thorne, "Lambert's Theorem - A Complete Series Solution", *The Journal of the Astronautical Sciences*, 2004, Vol. 52 Issue 4, pp. 441-454. [28](#)
- [24] Simó, C. "Solución del Problema de Lambert Mediante Regularización." *Collectanea Mathematica*, Vol. 24, No. 3, pp. 231–247, 1973. [28](#), [60](#), [215](#), [218](#)
- [25] J. Kriz, "A uniform solution of the Lambert problem", *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 14, No. 4, 1976, pp. 509–513. [28](#)
- [26] Jezewski, D. J. "K/S two-point-boundary-value problems." *Celestial Mechanics*, Vol. 14, No. 75, pp. 105–111, 1976. [28](#)

- [27] K. F. Sundman, “Memoire sue le probleme des trois corps”, *Acta Mathematica*, Vol. 36, 1912, pp. 105–179. [28](#)
- [28] R. H. Battin, “Lambert’s problem revisited”, *AIAA Journal*, Vol. 15, No. 5, 1977, pp. 707–713. [28](#)
- [29] G. Peterson, E. T. Campbell, J. Balbas, S. Ivy, E. Merkurjev, T. Hall, and P. Rodriguez, “Relative Performance of Lambert Solvers 1: Zero Revolution Methods”, *Advances in the Astronautical Sciences*, Vol. 136, No. 1, 2010, pp. 1495–1510. No se encuentra. [28](#), [221](#)
- [30] A. R. Klumpp, “New Developments in Astrodynamics Algorithms for Autonomous Rendezvous”, JPL Document, No. 19930013090, 1991. [28](#), [30](#), [221](#)
- [31] Gim J. Der. “The Superior Lambert Algorithm”, *Proceedings of the Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies Conference*, held in Wailea, Maui, Hawaii, September 13-16, 2011, Edited by S. Ryan, The Maui Economic Development Board, 2011., p.E50. [28](#)
- [32] Dario Izzo: “Revisiting Lambert’s problem”. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Volume 121, Issue 1, pp.1-15. Springer Science+Business Media Dordrecht 2014. [29](#), [223](#)
- [33] David de la Torre Sangra and Elena Fantino. “Review of Lambert’s Problem”. 25th International Symposium on Space Flight Dynamics ISSFD October 19 – 23, 2015, Munich, Germany. Orbit Determination and Orbit Control. [30](#), [181](#)
- [34] Izzo, D., “Global optimisation and space pruning for spacecraft trajectory design”. *Spacecraft Trajectory Optimization* (Conway Ed.), Cambridge University Press, 2009. [30](#), [215](#)
- [35] Prasad Vilas Arlulkar. “Optimisation of Lambert Problem Using Dynamical Approach”. Thesis. Defence Institute of Advanced Technology (Deemed University) 2014. [30](#)
- [36] Battin, R. H.; Fill, T. J.; Shepperd, S. W., “A new transformation invariant in the orbital boundary-value problem”. *Journal of Guidance and Control*, vol. 1, Jan.-Feb. 1978, p. 50-55. [67](#), [68](#)
- [37] Walter Hohmann, “Die Erreichbarkeit der Himmelskörper”, R. Oldenbourg (Munich - Berlín), 1925; or Technical Translation “The Attainability of Heavenly Bodies”, National Aeronautics and Space Administration Washington, 1960. [189](#)
- [38] A.N. Saad and M.I. Nouh, “Lambert Universal Variable Algorithm”, *The Arabian Journal for Science and Engineering*, Volume 28, Number 1A, January 2003. [A-6](#).

ANEXO A FUNCIONES DE STUMPPFF

Las *Funciones de Stumpff*, desarrolladas originalmente por Karl Stumpff, y estudiadas por muchos autores^[5,10], son comúnmente usadas en cálculo orbital, y se definen, para cualquier número natural n , a partir de su desarrollo en serie de potencias, como

$$c_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{(n+2k)!} = \frac{1}{n!} - \frac{z}{(n+2)!} + \frac{z^2}{(n+4)!} - \dots \quad (n \geq 0)$$

Estas series son absolutamente convergentes para cualquier valor del argumento z . Comparando con los desarrollos en serie de potencias de la funciones trigonométricas, $\cos$ y $\sin$, y las hiperbólicas, $\cosh$ y $\sinh$, se deducen las siguientes equivalencias

$$c_0(z) = \cosh \sqrt{-z} \quad ; \quad c_1(z) = \frac{\sinh \sqrt{-z}}{\sqrt{-z}} \quad (z \leq 0)$$

$$c_0(z) = \cos \sqrt{z} \quad ; \quad c_1(z) = \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}} \quad (z \geq 0)$$

A partir de la definición, se deducen las siguientes relaciones recursivas

$$\text{Relación recursiva 1:} \quad c_n(z) = \frac{1}{n!} - z c_{n+2}(z) \quad (n \geq 0)$$

$$\text{Relación recursiva 2:} \quad c_{n+2}(z) = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{n!} - c_n(z) \right) \quad (n \geq 0)$$

que permiten calcular las funciones de orden inferior a partir de las de orden superior o viceversa (pares e impares por separado).

Ambas relaciones recursivas se pueden aplicar sin pérdida apreciable de precisión, salvo en los siguientes casos (donde la pérdida de precisión se debe a la diferencia de valores próximos entre sí)

- Cuando el argumento z está próximo a un cero de la función a calcular (en la práctica con diferencia absoluta menor de $1/2$). Esto ocurre para ambas relaciones recursivas. Nótese que los ceros sólo ocurren para valores de z positivos, pues para z negativo las funciones son siempre positivas (por serlo todos los términos de la serie), y en el origen también, pues $c_n(0) = 1/n!$.
- Sólo para la relación recursiva 2, cuando el argumento está cerca del origen (en la práctica menor que la unidad en valor absoluto, como se justifica posteriormente).

Usualmente, se necesitan evaluar al mismo tiempo un conjunto de funciones de distinto orden para el mismo argumento. En dicho caso, para reducir coste computacional, se busca calcular directamente sólo una o dos funciones como mucho (por ser en principio

independientes las pares de las impares) y calcular el resto de funciones con alguna de las relaciones recursivas anteriores. Por los problemas de precisión existentes mencionados, se deben distinguir varios casos para lograrlo (sin pérdida de precisión).

Cuando el argumento es mayor que la unidad, y con una diferencia al menos de $\frac{1}{2}$ con cualquiera de los ceros de las funciones a calcular, se calculan la función de menor orden (par e impar por separado), mediante las funciones trigonométricas o hiperbólicas de c_0 y c_1 anteriores, y se calculan todas las de orden superior usando la relación recursiva 2 sucesivamente. Alternativamente, uniendo la aplicación de la relación recursiva desde el orden más bajo m (0 ó 1) hasta el orden $(2n-m)$ en una misma expresión, se obtiene

$$c_{2n+m}(z) = \frac{1}{(-z)^n} \left(c_m(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-z)^k}{(2k+m)!} \right) \quad (m = 0 \text{ ó } 1, n \geq 0)$$

que permite obtener directamente la función de cualquier orden a partir de la función de orden más bajo (c_0 ó c_1), sin necesidad de calcular directamente las intermedias.

Cuando el argumento es menor que la unidad, se calcula la función de orden mayor (par e impar por separado), mediante los desarrollos en serie de potencias, y se calculan todas las de orden inferior usando las relaciones recursivas correspondientes.

En este último caso, para reducir el número de términos necesarios en la evaluación de la serie, es útil recurrir a propiedades que relacionan unas funciones con otras donde el valor del argumento se reduce, trasladando así el problema a la evaluación de series con argumentos menores. Existen multitud de fórmulas obtenidas en la literatura que permiten reducir el argumento de las *Funciones de Stumpff*. A continuación se destacan algunas de especial interés en el contexto de este trabajo, para de $n = 2$ y $n = 3$, deducidas a partir de las expresiones trigonométricas e hiperbólicas relacionadas con argumentos doble y triple, respectivamente.

Propiedad 1: $2 c_2(4 z) = c_1^2(z)$

Propiedad 2: $4 c_3(4 z) = c_1(z) c_2(z) + c_3(z)$

Propiedad 3: $9 c_3(9 z) = c_3(z) + 4/3 c_1^3(z)$

La rapidez de convergencia de las series que definen las *Funciones de Stumpff*, es mayor (igual sólo para c_0), que la convergencia de los desarrollos de las funciones trigonométricas o hiperbólicas correspondientes (cambiando el argumento su raíz cuadrada). Usualmente, las funciones trigonométricas se calculan computacionalmente reduciendo el argumento a un valor absoluto menor de $\pi/4$, eliminando las vueltas completas y aplicando las transformaciones de ángulo suplementario y complementario, para aplicar el desarrollo de potencias correspondiente en dicho valor reducido (con las funciones hiperbólicas se consigue una reducción similar, aún mayor, usando la función logarítmica). Esto quiere decir que el cálculo de las *Funciones de Stumpff* mediante su desarrollo debería ser al menos tan eficiente que el cálculo computacional de las funciones trigonométricas para argumentos menores de $(\pi/4)^2$, la pega está en que para

competir deberían programarse en código ensamblador, como suelen estar las funciones trigonométricas (incluidas internamente en la librería de funciones del lenguaje usado para programación). Por ello, el valor límite teórico de $(\pi/4)^2$ donde los desarrollos de las *Funciones de Stumpff* son más eficientes que la evaluación computacional de las funciones trigonométricas se ve reducido en la práctica. Por otro lado, la evaluación computacional de las *Funciones de Stumpff* mediante funciones trigonométricas ó hiperbólicas, no puede reducirse más para órdenes superior al primero, debido a los problemas de precisión que presentan en el origen. Por todo ello, una buena elección es tomar como valor límite la unidad, con resultados casi idénticos a la elección de $(\pi/4)^2$ pero más fácil de manejar.

Como se ha indicado, es necesario conocer los ceros de las funciones a calcular en el rango de interés del argumento. Para $z \leq 0$, no existen ceros por ser todas las funciones positivas en dicho rango. Para $z > 0$, las funciones c_0 , c_1 y c_2 tienen infinitos ceros, de forma similar a las funciones trigonométricas, sin embargo, el resto de funciones no tienen ningún cero, siendo siempre positivas. A continuación se indican los ceros de las funciones mencionadas (ver figura 22).

- Los ceros $z_{0,k}$ de c_0 , donde $c_0(z_{0,k}) = 0$, para $k \geq 0$ entero, son los mismos que los de $\cos \sqrt{z}$, en $z_{0,k} = ((k+1/2) \pi)^2$. El orden de multiplicidad de los ceros es siempre 1 y el signo de la función cambia al pasar por cada cero.
- Los ceros $z_{1,k}$ de c_1 , donde $c_1(z_{1,k}) = 0$, para $k \geq 0$ entero, son los mismos que los de $\sin \sqrt{z}$, en $z_{1,k} = ((k+1) \pi)^2$. El orden de multiplicidad de los ceros es siempre 1 y el signo de la función cambia al pasar por cada cero.
- Los ceros $z_{2,k}$ de c_2 , donde $c_2(z_{2,k}) = 0$, para $k \geq 0$ entero, según la propiedad 1 anterior, son los mismos que los de $c_1^2(z/4)$, en $z_{2,k} = 4 z_{1,k} = (2 (k+1) \pi)^2$. El orden de multiplicidad de los ceros es siempre 2, siendo también mínimos y, por tanto, el signo de la función es siempre no negativo.

Como también se ha mencionado, las funciones pares e impares se tratan por separado en las relaciones recursivas, pero existen otras relaciones alternativas que pueden ser útiles para calcular una función par a partir de una impar o viceversa, ahorrando el cálculo directo de una de las dos funciones. El caso más sencillo, ocurre con las funciones c_0 y c_1 , donde se puede cambiar la evaluación directa de una de ellas por una expresión aritmética más simple a partir de la otra, aunque añadiendo el cálculo de una raíz cuadrada, tal y como se expone a continuación.

A partir de la suma ó resta de cuadrados de las funciones trigonométricas ó hiperbólicas, respectivamente, se deduce la relación pitagórica siguiente entre $c_0(z)$ y $c_1(z)$

$$c_0^2(z) + z c_1^2(z) = 1$$

y por tanto, para cualquier valor de z

$$c_0(z) = s_0 \sqrt{1 - z c_1^2(z)} \quad ; \quad s_0 = \text{sign}(c_0(z))$$

$$c_1(z) = s_1 \sqrt{\frac{1 - c_0^2(z)}{z}} \quad ; \quad s_1 = \text{sign}(c_1(z))$$

Figura 22. Grafica de las Funciones de Stumpff c_0 , c_1 , c_2 y c_3 .

Para $z \leq 0$, todas las funciones $c_n(z)$ son positivas y por tanto los signos son s_0 y s_1 son 1. Para $z > 0$, las funciones $c_0(z)$ y $c_1(z)$ cambian de signo en cada uno de sus ceros, es decir, en $z_{0,k} = ((k+1/2) \pi)^2$ y $z_{1,k} = ((k+1) \pi)^2$, respectivamente. En la figura 22 se puede ver los tres primeros ceros de $c_0(z)$ y los dos primeros de $c_1(z)$, $z_{0,0} = (\pi/2)^2 = 0.25\pi^2$, $z_{0,1} = (3\pi/2)^2 = 2.25\pi^2$, $z_{0,2} = (5\pi/2)^2 = 6.25\pi^2$, $z_{1,0} = \pi^2$ y $z_{1,1} = 4\pi^2$.

Teniendo en cuenta los ceros $z_{0,m}$, el signo s_0 se puede determinar (salvo en los propios ceros donde es cero) como $s_0 = (-1)^m$, donde m es la parte entera de $(1/2 + \sqrt{z}/\pi)$. Alternativamente, si se quiere evitar el cálculo de la raíz de z , el valor de m se puede determinar buscando el menor de los ceros $z_{0,m} = ((m+1/2) \pi)^2$, que sea mayor que z .

Del mismo modo, el signo s_1 se puede determinar (salvo en los propios ceros $z_{1,m}$ donde es cero) como $s_1 = (-1)^m$, donde m es la parte entera de $(\sqrt{z}/\pi)$. Alternativamente, si se quiere evitar el cálculo de la raíz de z , el valor de m se puede determinar buscando el menor de los ceros $z_{1,m} = ((m+1) \pi)^2$, que sea mayor que z .

Cuando, en las expresiones anteriores, deducidas de la relación pitagórica entre c_0 y c_1 , el argumento está cerca de algún cero de la función que se está calculando, se produce una pérdida de precisión debido a la diferencia de valores muy próximos en la evaluación del radicando. Esto ocurre para c_0 en torno a $z_{0,k} = ((k+1/2) \pi)^2$ y para c_1 en torno $z_{1,k} = ((k+1) \pi)^2$. En dichos casos, la mejor opción es linealizar todos los cálculos en torno al cero particular en estudio, calculando la función donde ocurre el cero, con el desarrollo en serie, y calcular la otra función a partir de la primera, con la expresión que corresponda.

Cuando se quiere calcular la función c_2 usando funciones de orden inferior, la expresión recursiva de c_2 en función de c_0 , tiene un problema de precisión en el origen, y en los ceros de $c_2(z)$, esto es, en $z_{2,k} = (2(k+1) \pi)^2$, para $k \geq 0$ entero. En estos casos, teniendo en cuenta la siguiente relación entre c_0 y c_1

$$z c_1^2(z) = 1 - c_0^2(z) = (1 - c_0(z)) (1 + c_0(z))$$

se deduce

$$c_2(z) = \frac{1 - c_0(z)}{z} \quad (\text{no recomendable para } c_0(z) > 1/2)$$

$$c_2(z) = \frac{c_1^2(z)}{1 + c_0(z)} \quad (\text{no recomendable para } c_0(z) < -1/2)$$

que resuelve el problema de cálculo de c_2 en función de c_0 y c_1 , sin pérdida de precisión, aplicando la expresión alternativa (usando c_0 y c_1) cuando el argumento está cerca del origen o algún cero de c_2 , y la recursiva en el resto de casos (usando sólo c_0).

En el caso particular de querer calcular c_1 en función de c_2 , de forma análoga al caso anterior, pero sustituyendo al final c_0 en función de c_2

$$z c_1^2(z) = (1 - c_0(z)) (1 + c_0(z)) = z c_2(z) (2 - z c_2(z))$$

y despejando c_1

$$c_1(z) = s_1 \sqrt{(2 - z c_2(z)) c_2(z)} \quad ; \quad s_1 = \text{sign}(c_1(z))$$

donde s_1 se determina como se ha indicado anteriormente en la relación pitagórica.

Particularmente, en los problemas de cálculo orbital, es usual calcular las primeras 4 *Funciones de Stumpff* para el mismo argumento, en un rango limitado por el primer cero de c_1 . En principio, tan solo es necesario calcular dos de ellas directamente y usar las expresiones recursivas existentes para calcular las otras dos.

Cuando el argumento no está muy próximo al origen (en la práctica mayor de 0.5, aproximadamente), una buena opción es calcular una de las funciones c_0 ó c_1 (la que esté más cerca de alguno de sus ceros) mediante funciones trigonométricas ó hiperbólicas, y la otra con la relación pitagórica correspondiente, y después calcular c_2 y c_3 con las fórmulas recursivas en función de c_0 y c_1 , respectivamente, salvo en el cálculo de c_2 cuando c_0 es mayor de $1/2$, en cuyo caso, para no perder precisión, es mejor calcular c_2 en función de c_0 y c_1 , con la fórmula alternativa desarrollada anteriormente.

Cuando el argumento está próximo al origen (menor de 0.5, aproximadamente), una buena opción es calcular c_2 y c_3 mediante desarrollos y después c_0 y c_1 mediante las relaciones recursivas correspondientes.

Cuando el argumento está relativamente próximo al origen, pero no demasiado (entre 0.02 y 3, aproximadamente), una opción alternativa es calcular c_3 mediante desarrollo, c_1 mediante la expresión recursiva en función de c_3 , c_0 mediante la fórmula pitagórica en función de c_1 , y por último c_2 en función de c_0 y c_1 para evitar la pérdida de precisión de la fórmula recursiva.

Por último, aprovechando las propiedades de reducción de argumento, se propone un método de reducción alternativo, desarrollado también por Saad and Nouh^[38], válido para todos los valores de z , y muy fácil de programar. La idea parte de las propiedades 1 y 2, para calcular c_2 y c_3 con un argumento reducido, resultado de dividir entre 4 sucesivamente hasta conseguir un valor donde el desarrollo en serie sea más efectivo que la transformación inversa que calcula las funciones c_2 y c_3 con los argumentos no reducidos en función de los reducidos, tal y como se expone a continuación.

Para el primer método de reducción, definiendo los valores

$$z_0 = z \quad ; \quad z_{n+1} = (1/4) z_n \quad (n = 0, 1, \dots, N)$$

donde N se determina de forma que cumpla

$$z_N < z_{L4}$$

siendo z_{L4} el valor límite para decidir si el argumento es suficientemente pequeño como para aplicar el desarrollo en lugar de seguir reduciéndolo.

Una vez determinado el valor de N , se aplica la transformación inversa (basada en las propiedades 1 y 2)

$$c_1(z_{n+1}) = 1 - z_{n+1} c_3(z_{n+1})$$

$$c_3(z_n) = (1/4) (c_1(z_{n+1}) c_2(z_{n+1}) + c_3(z_{n+1}))$$

$$c_2(z_n) = (1/2) c_1^2(z_{n+1})$$

para obtener $c_2(z_n)$ y $c_3(z_n)$ en función de $c_2(z_{n+1})$ y $c_3(z_{n+1})$ desde $n = N-1$ hasta 0, donde $z = z_0$, y por tanto las funciones $c_2(z)$ y $c_3(z)$ quedan calculadas.

Sólo queda decidir un valor de z_{L4} . Teniendo en cuenta, primero que una transformación tiene un coste de 7 operaciones aritméticas, segundo que el coste optimizado de los desarrollos de $c_2(z_N)$ y $c_3(z_N)$ es, para cada uno de ellos, dos veces (el número de términos necesarios para conseguir la precisión deseada menos uno), y por último que el número de términos se determina sabiendo que el error es del orden del primer término despreciado aplicado a los sucesivos argumentos reducidos, con todo ello se estima que, para *doble precisión*, una buena elección es $z_{L4} = 1/2$.

Obtenidas $c_2(z)$ y $c_3(z)$, las funciones $c_0(z)$ y $c_1(z)$ se obtienen con 4 operaciones adicionales a partir de las $c_2(z)$ y $c_3(z)$.

Con este método de reducción de factor 4, se consiguen calcular las 4 primeras *Funciones de Stumpff* con un máximo de 55 operaciones aritméticas en el rango $|z| \leq 46$, 46 para $|z| \leq 10$, y 39 para $|z| \leq 2.5$.

ANEXO B ECUACIÓN DIFERENCIAL GENÉRICA ASOCIADA AL PROBLEMA DE LAMBERT

En la búsqueda de una solución al *Problema de Lambert* surge en numerosas ocasiones la necesidad de evaluar una función que cumple con la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$2x(1-x)f^{(1)}(x;\alpha,\beta) + \beta(1-2x)f(x;\alpha,\beta) = \alpha$$

siendo α y β constantes genéricas, $f(x;\alpha,\beta)$ la función a determinar, y donde se ha usado la nomenclatura $f^{(m)} = d^m f/dx^m$.

Derivando esta ecuación y dividiendo entre 2, se obtiene la siguiente ecuación diferencial de segundo orden equivalente (salvo la constante de integración perdida)

$$x(1-x)f^{(2)}(x;\alpha,\beta) + ((1+\beta/2) - (2+\beta)x)f^{(1)}(x;\alpha,\beta) - \beta f(x;\alpha,\beta) = 0$$

Esta ecuación resulta ser un caso particular de la ecuación hipergeométrica de Gauss, ecuación diferencial de segundo orden que cumplen las llamadas funciones hipergeométricas (tal y como se define en Battin^[5], por ejemplo)

$$x(1-x)y^{(2)} + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)y^{(1)} - \alpha\beta y = 0$$

donde α , β y γ son constantes arbitrarias (diferentes de las α , β anteriores), cuya solución general es

$$y = C F(\alpha, \beta; \gamma; x)$$

siendo C una constante arbitraria y $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ la función hipergeométrica de parámetros α , β y γ , en su notación usual.

Identificando las dos ecuaciones de segundo orden anteriores, se deduce

$$f(x;\alpha,\beta) = (\alpha/\beta) F(1, \beta; 1+\beta/2; x) = (\alpha/\beta) F(\beta, 1; 1+\beta/2; x)$$

dando como resultado la solución general de la ecuación diferencial inicial usando las funciones hipergeométricas, identificado también la constante de integración ($C = \alpha/\beta$).

Se deduce que las funciones $f(x;\alpha,\beta)$ son un subconjunto de funciones hipergeométricas a las cuales se les puede aplicar cualquiera de las propiedades conocidas en la literatura para dichas funciones. No obstante, aunque las funciones hipergeométricas proporcionan una solución general perfectamente válida para la función $f(x;\alpha,\beta)$, el estudio particular de la ecuación diferencial que cumple, mostrada al inicio, permite obtener otras propiedades de gran importancia en la evaluación de esta función, tal y como se desarrolla a continuación.

Nótese que la constante α es un factor de proporcionalidad en la solución, es decir, se cumple la identidad

$$f(x; \alpha, \beta) = \alpha f(x; 1, \beta)$$

La solución general f de la ecuación diferencial es

$$f(x; \alpha, \beta) = f_0(x; \alpha, \beta) + C f_K(x; \beta)$$

siendo $f_0(x; \alpha, \beta)$ una solución particular de la ecuación, $f_K(x; \beta)$ una solución arbitraria del núcleo de la ecuación (solución sin término independiente α), y C una constante de integración.

La función $f_K(x; \beta)$ multiplicada la constante C sigue siendo solución del núcleo y su valor debe determinarse por alguna condición adicional que cumpla la función $f(x; \alpha, \beta)$.

La solución analítica de la función $f_K(x; \beta)$ se obtiene operando directamente en la ecuación diferencial sin el término α del siguiente modo

$$f_K^{(1)}(x; \beta) / f_K(x; \beta) = -(\beta/2) (1 - 2x) / (x(1 - x))$$

Esta ecuación se puede integrar analíticamente de forma exacta, quedando en función de un parámetro adicional arbitrario C .

$$\ln(f_K(x; \beta)) = \ln(C) - (\beta/2) \ln(4x(1 - x))$$

Tomando antilogaritmos (exponenciales), y eligiendo como solución particular del núcleo la correspondiente a $C = 1$, resulta

$$f_K(x; \beta) = 1 / (4x(1 - x))^{\beta/2}$$

La constante C ya se tiene en cuenta en la expresión general de $f(x; \alpha, \beta)$. El factor 4 que aparece en f_K se ha elegido convenientemente, anticipando una simplificación posterior.

Para simplificar notación en los desarrollos posteriores, se omiten los parámetros α y β en los argumentos de las funciones f , f_0 y f_K , en todos los casos en los que no hay duda, por contexto.

Para calcular analíticamente la solución general f , se puede aplicar el método de variación de la constante aplicada a la solución del núcleo, ensayando la solución

$$f(x) = g(x) / (4x(1 - x))^{\beta/2} = g(x) f_K(x)$$

donde $g(x)$ es una nueva función a determinar en lugar de $g(x)$.

Sin embargo, para no arrastrar la constante C de integración, se puede dividir la función g igual que la función f (solución particular y núcleo) como sigue

$$f(x) = f_0(x) + f_K(x) \quad ; \quad g(x) = g_0(x) + g_K(x)$$

$$f_0(x) = g_0(x) / (4x(1 - x))^{\beta/2} \quad ; \quad f_K(x) = g_K(x) / (4x(1 - x))^{\beta/2} \quad ; \quad g_K(x) = C$$

Derivando logarítmicamente

$$f_0^{(1)}/f_0 = g_0^{(1)}/g_0 - (\beta/2) (2(1-2x)) / (2x(1-x))$$

y operando para separar el término $g_0^{(1)}$

$$2x(1-x)f_0^{(1)} + \beta(1-2x)f_0 = 2x(1-x)(g_0^{(1)}/g_0)f_0 = \frac{1}{2}g_0^{(1)} / (4x(1-x))^{\beta/2-1}$$

Comparando con la ecuación diferencial se obtiene la ecuación para g_0

$$\frac{1}{2}g_0^{(1)} / (4x(1-x))^{\beta/2-1} = \alpha$$

y despejando $g_0^{(1)}$

$$g_0^{(1)} = dg_0/dx = 2\alpha(4x(1-x))^{\beta/2-1}$$

Esta ecuación se puede integrar analíticamente con el cambio de variable

$$x = \sin^2(\psi/2) \quad ; \quad dx = \frac{1}{2} \sin \psi d\psi$$

que establece las siguientes relaciones

$$1-x = \cos^2(\psi/2) \quad ; \quad 1-2x = \cos \psi \quad ; \quad 4x(1-x) = \sin^2 \psi$$

$$\psi = 2 \operatorname{atan} \sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

de modo que

$$dg_0 = 2\alpha(\sin^2 \psi)^{\beta/2-1} \frac{1}{2} \sin \psi d\psi = \alpha \sin^{\beta-1} \psi d\psi$$

Integrando esta ecuación, se obtiene la solución

$$g_0(x; \alpha, \beta) = \alpha H_{0, \beta-1}(\psi)$$

calculado a partir de la familia de funciones paramétricas

$$H_{m,n}(\psi) = \int h_{m,n}(\psi) d\psi \quad ; \quad h_{m,n}(\psi) = \cos^m \psi \sin^n \psi$$

En el caso particular del *Problema de Lambert* encontramos valores del parámetro β de 1 y 3, correspondientes a las funciones $H_{0,0}$ y $H_{0,2}$. En el caso general se puede suponer que β es un número natural.

La condición para hallar la constante de integración para la función $g_0(x)$, y por tanto para $H_{0, \beta-1}(\psi)$, se puede deducir teniendo en cuenta que

$$f(0) = \alpha / \beta = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) / (4x(1-x))^{\beta/2} = \lim_{\psi \rightarrow 0} \alpha H_{0, \beta-1}(\psi) / \sin^\beta \psi$$

$$H_{0, \beta-1}(0) = \lim_{\psi \rightarrow 0} H_{0, \beta-1}(\psi) = \lim_{\psi \rightarrow 0} \sin^\beta \psi / \beta = 0 \quad (\beta \geq 1)$$

Resultando la siguiente condición para la constante de integración

$$\mathbf{H}_{0,n}(0) = 0 \quad (n \geq 0)$$

Las primeras funciones $\mathbf{H}_{0,0}$, $\mathbf{H}_{2,0}$ y $\mathbf{H}_{0,2}$, se calculan directamente

$$\mathbf{h}_{0,0}(\psi) = 1 \quad ; \quad \mathbf{H}_{0,0}(\psi) = \psi$$

$$\mathbf{h}_{2,0}(\psi) = \cos^2 \psi = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\psi)) \quad ; \quad \mathbf{H}_{2,0}(\psi) = \frac{1}{2} (\psi + \frac{1}{2} \sin(2\psi)) - 1$$

$$\mathbf{h}_{0,2}(\psi) = \sin^2 \psi = \frac{1}{2} (1 - \cos(2\psi)) \quad ; \quad \mathbf{H}_{0,2}(\psi) = \frac{1}{2} (\psi - \frac{1}{2} \sin(2\psi))$$

Las funciones $\mathbf{H}_{m,1}$ y $\mathbf{H}_{1,n}$, con $m \geq 0$, $n \geq 0$, también se obtienen directamente

$$\mathbf{h}_{m,1}(\psi) = \cos^m \psi \sin \psi \quad ; \quad \mathbf{H}_{m,1}(\psi) = \frac{1}{m+1} (1 - \cos^{m+1} \psi)$$

$$\mathbf{h}_{1,n}(\psi) = \cos \psi \sin^n \psi \quad ; \quad \mathbf{H}_{1,n}(\psi) = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} \psi$$

Las funciones $\mathbf{H}_{m,n}$, con $m \geq 0$, $n \geq 2$, se calculan recursivamente del siguiente modo

$$\mathbf{h}_{m,n}(\psi) = \cos^m \psi \sin^n \psi = \cos^m \psi \sin^{n-2} \psi (1 - \cos^2 \psi)$$

$$\mathbf{H}_{m,n}(\psi) = \mathbf{H}_{m,n-2}(\psi) - \mathbf{H}_{m+2,n-2}(\psi)$$

Las funciones $\mathbf{H}_{m,n}$, con $m \geq 2$, $n \geq 0$, se calculan del mismo modo

$$\mathbf{h}_{m,n}(\psi) = \cos^m \psi \sin^n \psi = \cos^{m-2} \psi (1 - \sin^2 \psi) \sin^n \psi$$

$$\mathbf{H}_{m,n}(\psi) = \mathbf{H}_{m-2,n}(\psi) - \mathbf{H}_{m-2,n+2}(\psi)$$

Las funciones $\mathbf{H}_{2m,0}$, con $m \geq 1$, se calculan recursivamente del siguiente modo

$$\mathbf{h}_{2m,0}(\psi) = \cos^{2m} \psi = (\frac{1}{2} (1 + \cos(2\psi)))^m = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^m C_{m,n} \cos^k(2\psi)$$

$$\mathbf{H}_{2m,0}(\psi) = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^m C_{m,n} \mathbf{H}_{k,0}(2\psi)$$

donde $C_{m,n}$ es el número combinatorio definido en el Anexo F.

Las funciones $\mathbf{H}_{0,2n}$, con $n \geq 1$, se calculan de igual modo

$$\mathbf{h}_{0,2n}(\psi) = \sin^{2n} \psi = (\frac{1}{2} (1 - \cos(2\psi)))^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_{m,n} (-1)^k \cos^k(2\psi)$$

$$H_{0,2n}(\psi) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_{m,n} (-1)^k H_{k,0}(2\psi)$$

Nótese que todas las funciones trigonométricas de ψ , se pueden expresar fácilmente en función de x a partir de su relación con $\cos \psi$ y $\sin \psi$, y el ángulo ψ se obtiene en función de x usando la función atan.

Cuando $x < 0$, los resultados se salen del campo real, pero siguen siendo válidos en el cuerpo de los números complejos. En dicho caso, con el cambio de variable $\psi = -i \Psi$, se consiguen transformar los resultados obtenidos con ψ en el cuerpo complejo a resultados con Ψ dentro del campo real, sin más que tener en cuenta las siguientes igualdades

$$x = \sin^2(\psi/2) = -\sinh^2(\Psi/2) \quad ; \quad 1 - x = \cos^2(\psi/2) = \cosh^2(\Psi/2)$$

$$1 - 2x = \cos \psi = \cosh \Psi \quad ; \quad 4x(1-x) = \sin^2 \psi = -\sinh^2 \Psi$$

$$\psi = \arcsin \sqrt{x} = 2 \operatorname{atan} \sqrt{\frac{x}{1-x}} \quad ; \quad \Psi = \operatorname{asinh} \sqrt{-x} = 2 \operatorname{atanh} \sqrt{\frac{-x}{1-x}}$$

Cuando el argumento de la función f_0 se acerca a la unidad, la función tiende a infinito. Esta situación impide usar desarrollos de potencias de forma eficiente para la evaluación de la función. A continuación se va a deducir una propiedad transcendental que permite evitar la evaluación de la función f_0 para argumentos próximos a la unidad mediante un cambio de variable que transforma el argumento para que sea más próximo a cero.

Sea otro argumento y donde se evalúa la función f , de tal modo que existe un ángulo ξ que cumple la misma relación con y , que ψ cumple con x . Eligiendo como cambio de variable el ángulo suplementario $\xi = \pi - \psi$, se deduce

$$y = \sin^2(\xi/2) = \sin^2(\pi/2 - \psi/2) = \cos^2(\psi/2) = 1 - x$$

lo que demuestra que el cambio el variable $\xi = \pi - \psi$, es equivalente al cambio de variable $y = 1 - x$.

Cambiando la variable x por y en la ecuación diferencial de f , la ecuación cambia de signo, resultando

$$2y(1-y) \frac{df(y;\alpha,\beta)}{dy} + \beta(1-2y)f(y;\alpha,\beta) = -\alpha$$

Lo que demuestra que si $f(x;\alpha,\beta)$ es una solución de la ecuación diferencial inicial, $f(y;-\alpha,\beta)$ es una solución de esta última ecuación, y por tanto, se cumple

$$f(x;\alpha,\beta) = f(y;-\alpha,\beta) = -f(y;\alpha,\beta)$$

Expandiendo la solución general con la solución particular y del núcleo

$$f_0(x;\alpha,\beta) + C_x f_K(x;\beta) = -f_0(y;\alpha,\beta) + C_y f_K(y;\beta)$$

donde C_x y C_y son constantes de integración para cada una de las ecuaciones diferenciales (con la variable x y con la variable y).

Teniendo en cuenta la identidad

$$f_K(x; \beta) = f_K(y; \beta)$$

se llega a la siguiente igualdad

$$f_0(x; \alpha, \beta) = -f_0(y; \alpha, \beta) + C_S f_K(x; \beta) \quad ; \quad C_S = C_y - C_x$$

despejando C_S y teniendo en cuenta las identidades

$$f_0(x; \alpha, \beta) = g_0(\psi, \alpha, \beta) f_K(x; \beta)$$

$$f_0(y; \alpha, \beta) = g_0(\xi, \alpha, \beta) f_K(y; \beta)$$

resulta

$$C_S = g_0(\psi, \alpha, \beta) + g_0(\xi, \alpha, \beta)$$

Y particularizando para ψ o ξ en 0 o π

$$C_S = g_0(\pi, \alpha, \beta)$$

Demostrando así las siguientes propiedades

$$g_0(\psi, \alpha, \beta) = C_S - g_0(\xi, \alpha, \beta) \quad ; \quad \xi = \pi - \psi$$

$$f_0(x; \alpha, \beta) = C_S f_K(x; \beta) - f_0(y; \alpha, \beta) \quad ; \quad y = 1 - x$$

$$f(x; \alpha, \beta) = f_0(x; \alpha, \beta) + C f_K(x; \beta) = (C + C_S) f_K(x; \beta) - f_0(y; \alpha, \beta)$$

donde la constante C_S dependiente de α y β es

$$C_S = C_S(\alpha, \beta) = g_0(\pi, \alpha, \beta) = \alpha H_{0, \beta-1}(\pi)$$

Las funciones $H_{m,n}(\pi)$ se calculan directamente sustituyendo ψ por π en las funciones analíticas $H_{m,n}(\psi)$ obtenidas anteriormente, resultando las siguientes fórmulas

$$H_{0,0}(\pi) = \pi \quad ; \quad H_{2,0}(\pi) = H_{0,2}(\pi) = \frac{1}{2} \pi$$

$$H_{m,1}(\pi) = 2 / (m + 1) \quad ; \quad H_{1,n}(\pi) = 0 \quad (m \geq 0, n \geq 0)$$

$$H_{m,n}(\pi) = H_{m,n-2}(\pi) - H_{m+2,n-2}(\pi) \quad (m \geq 0, n \geq 2)$$

$$H_{m,n}(\pi) = H_{m-2,n}(\pi) - H_{m-2,n+2}(\pi) \quad (m \geq 2, n \geq 0)$$

$$H_{2m,0}(\pi) = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^n C_{m,n} H_{k,0}(2\pi) \quad (m \geq 1)$$

$$\mathbf{H}_{0,2n}(\pi) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_{m,n} (-1)^k \mathbf{H}_{k,0}(2\pi) \quad (n \geq 1)$$

Los primeros resultados conducen a las siguientes constantes en función de β

$$C_S(\alpha,1) = \pi \alpha \quad ; \quad C_S(\alpha,2) = 2 \alpha \quad ; \quad C_S(\alpha,3) = \frac{1}{2} \pi \alpha \quad ; \quad C_S(\alpha,4) = \frac{4}{3} \alpha$$

Como se quería conseguir, la propiedad recién demostrada permite cambiar la evaluación de la función $f_0(x;\alpha,\beta)$ por la evaluación de $f_0(1-x;\alpha,\beta)$ cuando x se acerca a 1, permitiendo usar desarrollos de potencias de f_0 con argumentos suficientemente pequeños, como se mostrará más adelante.

Debido a que la solución del núcleo tiende a infinito en el origen, se deduce que existe una única solución particular f_0 con valor finito en el origen, coincidiendo con la calculada arriba analíticamente

$$f_0(x;\alpha,\beta) = g_0(x;\alpha,\beta) f_K(x;\beta)$$

donde $g_0(x;\alpha,\beta)$ tiende a 0 en el origen en la misma medida que $f_K(x;\beta)$ tiende a infinito, resultando el producto un valor finito.

Sustituyendo $x = 0$ en la ecuación, se deduce para dicha solución particular

$$f_0(0;\alpha,\beta) = \alpha / \beta$$

y operando con este resultado en la ecuación diferencial

$$2(1-x)f^{(1)}(x;\alpha,\beta) / \beta - 2f(x;\alpha,\beta) + (f(x;\alpha,\beta) - f(0;\alpha,\beta)) / x = 0$$

En esta forma de la ecuación diferencial, el término

$$(f(x;\alpha,\beta) - f(0;\alpha,\beta)) / x$$

pone de manifiesto la existencia de una indeterminación (0/0) en el origen, que causa una pérdida de precisión en la evaluación de la función f y/o sus derivadas cerca del origen, pérdida que aumenta exponencialmente con el orden en las derivadas.

A continuación, se obtienen recursivamente las derivadas de la función f de cualquier orden, de dos formas diferentes, sin evitar y evitando la indeterminación (0/0) inherente a la ecuación, de tal forma que, cuando sea necesario, se evitará la pérdida de precisión en la evaluación cerca del origen. Adicionalmente, se obtendrán desarrollos de potencias de la función f en torno a ($x = 0$) y, a partir de las derivadas de cualquier orden, también en torno a cualquier valor ($x = x_0$).

La solución analítica obtenida usando las variables ψ ó Ψ , sólo resultan prácticas en la evaluación de la propia función f , sin embargo, para hallar las derivadas de f , en lugar de derivar la solución analítica anterior que conduciría a expresiones complejas, se recurre a la derivación de la ecuación diferencial de forma sucesiva.

Derivando una primera vez la ecuación diferencial, y agrupando términos, se obtiene

$$2x(1-x)f^{(2)} + 2(1-2x)f^{(1)} + \beta(1-2x)f^{(1)} - 2\beta f = 0$$

$$2x(1-x)f^{(2)} + (2+\beta)(1-2x)f^{(1)} - 2\beta f = 0$$

Volviendo a hacer lo mismo para la siguiente derivada

$$2x(1-x)f^{(3)} + 2(1-2x)f^{(2)} + (2+\beta)(1-2x)f^{(2)} - 2(2+\beta)f^{(1)} - 2\beta f^{(1)} = 0$$

$$2x(1-x)f^{(3)} + (4+\beta)(1-2x)f^{(2)} - 4(1+\beta)f^{(1)} = 0$$

Observando las ecuaciones anteriores para las tres primeras derivadas de f , se deduce que derivando sucesivamente, hasta llegar a $f^{(m)}$, para $m \geq 1$, se obtiene la siguiente ecuación general

$$2x(1-x)f^{(m)} + 2\beta_m(1-2x)f^{(m-1)} - 2\gamma_m f^{(m-2)} - \alpha U_m = 0$$

siendo U_m una función constante con valor unidad para $m = 1$ y nulo para $m > 1$, y siendo β_m y γ_m sucesiones en función de m con los primeros valores deducidos de las expresiones anteriores, $\beta_1 = \beta/2$, $\beta_2 = 1 + \beta/2$, $\beta_3 = 2 + \beta/2$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \beta$, $\gamma_3 = 2(1 + \beta)$, y cuya expresión general se calcula como se muestra a continuación.

Derivando una vez más la ecuación general anterior

$$2x(1-x)f^{(m+1)} + 2(1-2x)f^{(m)} + 2\beta_m(1-2x)f^{(m)} - 2\beta_m f^{(m-1)} - 2\gamma_m f^{(m-1)} = 0$$

$$2x(1-x)f^{(m+1)} + 2(1+\beta_m)(1-2x)f^{(m)} - 2(2\beta_m + \gamma_m)f^{(m-1)} = 0$$

E identificando con la ecuación general de $f^{(m)}$, sustituyendo m por $m+1$

$$2x(1-x)f^{(m+1)} + 2\beta_{m+1}(1-2x)f^{(m)} - 2\gamma_{m+1}f^{(m-1)} - \alpha U_{m+1} = 0$$

Se deduce

$$\beta_{m+1} = 1 + \beta_m = 2 + \beta_{m-1} = 3 + \beta_{m-2} = \dots = m + \beta_1 = m + \beta/2$$

$$\gamma_{m+1} = 2\beta_m + \gamma_m = 2\beta_m + 2\beta_{m-1} + \gamma_{m-1} = \dots = 2(\beta_m + \beta_{m-1} + \dots + \beta_1) + \gamma_1 =$$

$$= 2((m-1) + \beta/2 + (m-2) + \beta/2 + \dots + 1 + \beta/2) + \gamma_1 =$$

$$= 2((m-1) + (m-2) + \dots + 1 + m\beta/2) =$$

$$= 2(m(m-1)/2 + m\beta/2) = m(m-1) + m\beta = m(m + \beta - 1)$$

Y sustituyendo m por $(m-1)$, resulta

$$\beta_m = m + \beta/2 - 1$$

$$\gamma_m = (m-1)(m + \beta - 2)$$

Finalmente, usando los coeficientes β_m y γ_m , y dividiendo por 2, la ecuación recursiva que permite obtener $f^{(m)}$ en función de derivadas anteriores es

$$f^{(m)} = \frac{(m-1)(m+\beta-2)f^{(m-2)} - (m+\beta/2-1)(1-2x)f^{(m-1)} + \alpha/2 U_m}{x(1-x)} \quad (m \geq 1)$$

Nótese que para calcular $f_K^{(m)}$, se puede usar la misma expresión recursiva que para $f^{(m)}$ sin la constante U_m , esto es

$$f_K^{(m)} = \frac{(m-1)(m+\beta-2)f_K^{(m-2)} - (m+\beta/2-1)(1-2x)f_K^{(m-1)}}{x(1-x)} \quad (m \geq 1)$$

Una alternativa a la solución analítica particular f_0 , con valor finito en el origen, obtenida anteriormente por integración de la ecuación diferencial, es obtenerla mediante desarrollo de potencias

$$f_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m x^m \quad ; \quad f_m = f_0^{(m)}(0) / m!$$

donde f_m son los coeficientes de dicho desarrollo. Nótese que los coeficientes f_m dependen también de α y β , sin embargo, una vez más para simplificar notación, se omite la indicación de esta dependencia en todos los casos donde no hay duda, por contexto, en caso contrario, se debe usar la notación completa $f_{m;\alpha,\beta}$. Lo mismo aplica al resto de coeficientes que surgen a continuación.

Sustituyendo $x = 0$ en la ecuación general para la derivada $f^{(m+1)}$, se obtiene

$$2\beta_{m+1}f^{(m)}(0) - 2\gamma_{m+1}f^{(m-1)}(0) - \alpha U_{m+1} = 0$$

Para $m = 0$, es $\beta_1 = \beta/2$, $\gamma_1 = 0$, $U_1 = 1$, y $f(0) = f_0$, y por tanto

$$\beta f_0 - \alpha = 0 \quad ; \quad f_0 = \alpha / \beta$$

Para $m > 0$, es

$$2\beta_{m+1} = 2m + \beta \quad ; \quad 2\gamma_{m+1} = 2m(m + \beta - 1) \quad ; \quad U_{m+1} = 0$$

y usando la identidad $f_0^{(m)}(0) = f_m m!$, para m y $(m-1)$, se deduce

$$(2m + \beta)(f_m m!) - 2m(m + \beta - 1)((f_{m-1}(m-1)!)) = 0$$

$$(2m + \beta)f_m - 2(m + \beta - 1)f_{m-1} = 0$$

resultando

$$f_0 = \frac{\alpha}{\beta} \quad ; \quad f_m = \frac{m + \beta - 1}{m + \beta/2} f_{m-1} \quad (m \geq 1) \quad \Rightarrow \quad f_m = \frac{2^m (m + \beta - 1)!}{(2m + \beta)!!} \frac{\alpha}{(\beta - 1)!!} \quad (m \geq 0)$$

De este modo queda resuelto el problema de la solución particular de la ecuación diferencial mediante desarrollo de potencias.

Para hallar la derivada m -ésima $f_0^{(m)}$, se puede usar la misma expresión que para obtener $f^{(m)}$, pues f_0 es un caso particular f , sin embargo, arrastra una indeterminación en el origen que provoca una pérdida de precisión que se acentúa de forma exponencial con el orden de la derivada. Para evitar este problema se recurre a la familia de funciones hipergeométricas, con parámetro n , definida como

$$f_n(x; \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{n+k; \alpha, \beta} x^k = f_{n; \alpha, \beta} F(n+\beta, 1; n+1+\beta/2; x)$$

Del desarrollo de $f_n(x)$ anterior, se deduce la siguiente fórmula recursiva

$$f_n(x) = f_n + x f_{n+1}(x)$$

Nótese que, esta fórmula permite obtener las funciones $f_n(x)$ desde $n = 0$ hasta un orden finito $n = p - 1$, sin pérdida de precisión cuando x es próximo a cero, con la evaluación de un único desarrollo en serie de potencias de la función $f_p(x)$, pues, a partir de ésta, aplicando la fórmula recursiva anterior sucesivamente desde $n = p - 1$ hasta $n = 0$, se obtienen el resto de funciones, desde $f_{p-1}(x)$ hasta $f_0(x)$.

Sabiendo que $\alpha = \beta f_0$, la ecuación diferencial original para la solución particular f_0 , se puede reescribir como sigue

$$2x(1-x)f_0^{(1)} + \beta((1-2x)f_0 - f_0) = 0$$

Usando la función f_1 , se calcula

$$(1-2x)f_0 - f_0 = (f_0 - f_0) - 2xf_0 = xf_1 - 2xf_0 = x(f_1 - 2f_0)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación y dividiendo por $(2x)$

$$(1-x)f_0^{(1)} - \beta f_0 + (\beta/2)f_1 = 0$$

Para hallar la ecuación diferencial de cualquiera de las funciones f_n , se recurre a la siguiente identidad, obtenida de derivar la expresión recursiva de f_n en función de f_{n+1}

$$f_n^{(1)} = x f_{n+1}^{(1)} + f_{n+1}$$

Sustituyendo esta igualdad para $n = 0$ en la ecuación diferencial para $f_0^{(1)}$ y agrupando términos

$$(1-x)(x f_1^{(1)} + f_1) - \beta f_0 + (\beta/2)f_1 = 0$$

$$x((1-x)f_1^{(1)} - f_1) + (1+\beta/2)f_1 - \beta f_0 = 0$$

Usando las expresiones recursivas para las funciones f_0 y f_1 , en los dos últimos términos

$$x((1-x)f_1^{(1)} - f_1) + (1 + \beta/2)(f_1 + xf_2) - \beta(f_0 + xf_1) = 0$$

$$x((1-x)f_1^{(1)} - (1 + \beta)f_1 + (1 + \beta/2)f_2) + (1 + \beta/2)f_1 - \beta f_0 = 0$$

Debido a que la ecuación también se cumple para $x = 0$, el término constante independiente de x debe ser necesariamente nulo, esto es

$$(1 + \beta/2)f_1 - \beta f_0 = 0$$

También se puede comprobar la veracidad de esta identidad sustituyendo f_1 en función de f_0 , obtenida de particularizar la expresión general de f_m en función de f_{m-1} para $m = 1$.

Eliminando dicho término y dividiendo por x , resulta

$$(1-x)f_1^{(1)} - (1 + \beta)f_1 + (1 + \beta/2)f_2 = 0$$

Observando las ecuaciones anteriores para $f_0^{(1)}$ y $f_1^{(1)}$, se deduce que, repitiendo el proceso de sustitución mediante las expresiones recursivas de f_p y $f_p^{(1)}$ desde $p = 0$ hasta $p = n$, se obtiene la ecuación diferencial para $f_n^{(1)}$ siguiente

$$(1-x)f_n^{(1)} - \delta_n f_n + \rho_n f_{n+1} = 0$$

siendo δ_n y ρ_n sucesiones en función de n con los primeros valores deducidos de las expresiones anteriores, $\delta_0 = \beta$, $\delta_1 = 1 + \beta$, $\rho_0 = \beta/2$, $\rho_1 = 1 + \beta/2$, y cuya expresión general se calcula como se muestra a continuación.

Sustituyendo una vez más las expresiones recursivas en la ecuación general anterior de $f_n^{(1)}$ y agrupando convenientemente términos

$$(1-x)(xf_{n+1}^{(1)} + f_{n+1}) - \delta_n f_n + \rho_n f_{n+1} = 0$$

$$x((1-x)f_{n+1}^{(1)} - f_{n+1}) - \delta_n f_n + (1 + \rho_n)f_{n+1} = 0$$

$$x((1-x)f_{n+1}^{(1)} - f_{n+1}) - \delta_n(f_n + xf_{n+1}) + (1 + \rho_n)(f_{n+1} + xf_{n+2}) = 0$$

$$x((1-x)f_{n+1}^{(1)} - (1 + \delta_n)f_{n+1} + (1 + \rho_n)f_{n+2}) + (1 + \rho_n)f_{n+1} - \delta_n f_n = 0$$

Debido a que la ecuación también se cumple para $x = 0$, el término constante independiente de x , $((1 + \rho_n)f_{n+1} - \delta_n f_n)$, debe ser necesariamente nulo, esto es

$$(1 + \rho_n)f_{n+1} - \delta_n f_n = 0$$

Esta identidad también se puede comprobar a posteriori, después de calcular ρ_n y δ_n , sustituyendo f_m en función de f_{m-1} para $m = n + 1$.

Eliminando dicho término y dividiendo por x , resulta

$$(1-x)f_{n+1}^{(1)} - (1 + \delta_n)f_{n+1} + (1 + \rho_n)f_{n+2} = 0$$

E identificando con la ecuación general de $f_n^{(1)}$, sustituyendo n por $n+1$

$$(1-x)f_{n+1}^{(1)} - \delta_{n+1}f_{n+1} + \rho_{n+1}f_{n+2} = 0$$

Se deduce

$$\delta_{n+1} = 1 + \delta_n = 2 + \delta_{n-1} = 3 + \delta_{n-2} = n + 1 + \delta_0 = n + 1 + \beta$$

$$\rho_{n+1} = 1 + \rho_n = 2 + \rho_{n-1} = 3 + \rho_{n-2} = n + 1 + \rho_0 = n + 1 + \beta/2$$

Y sustituyendo n por $(n-1)$, se resulta

$$\delta_n = n + \beta$$

$$\rho_n = n + \beta/2$$

Finalmente, la ecuación diferencial para f_n es

$$(1-x)f_n^{(1)} - (n+\beta)f_n + (n+\beta/2)f_{n+1} = 0$$

Derivando este resultado una vez, y agrupando términos, se obtiene

$$(1-x)f_n^{(2)} - f_n^{(1)} - (n+\beta)f_n^{(1)} + (n+\beta/2)f_{n+1}^{(1)} = 0$$

$$(1-x)f_n^{(2)} - (n+1+\beta)f_n^{(1)} + (n+\beta/2)f_{n+1}^{(1)} = 0$$

Y derivando sucesivamente hasta llegar a $f_n^{(m)}$, se obtiene la siguiente ecuación general

$$(1-x)f_n^{(m)} - (n+m+\beta-1)f_n^{(m-1)} + (n+\beta/2)f_{n+1}^{(m-1)} = 0 \quad (n \geq 0, m \geq 1)$$

Esta expresión permite calcular recursivamente $f_n^{(m)}$ en función de $f_n^{(m-1)}$ y $f_{n+1}^{(m-1)}$, evitando la indeterminación en $x=0$, y por consiguiente, la pérdida de precisión.

$$f_n^{(m)} = \frac{(n+m-1+\beta)f_n^{(m-1)} - (n+\beta/2)f_{n+1}^{(m-1)}}{1-x} \quad (n \geq 0, m \geq 1)$$

De este modo, se consigue reducir el orden de la derivada a cambio de aumentar en la misma medida el orden n de la función f_n .

Esta expresión recursiva de $f_n^{(m)}$ permite evaluar las derivadas de $f_0(x)$ de cualquier orden sin indeterminación en el origen, es decir, se evita la indeterminación inherente a la ecuación diferencial. También se hace notar que para calcular las funciones $f_0, f_0^{(1)}, \dots, f_0^{(m)}$, sólo es necesario calcular directamente una única función f_m (mediante el desarrollo de potencias mostrado anteriormente o cualquier otro método de evaluación de funciones hipergeométricas), el resto de funciones, $f_0, f_0^{(1)}, \dots, f_0^{(m-1)}$, se pueden calcular recursivamente mediante las formulas que relacionan f_n en función de f_{n+1} , y $f_n^{(m)}$ en función de $f_n^{(m-1)}$ y $f_{n+1}^{(m-1)}$.

Para calcular la función f_m se puede recurrir a su desarrollo de potencias

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{m+k} x^k \quad (m \geq 0)$$

truncándolo en el término menor posible para conseguir la precisión requerida, sin embargo, cuando el argumento es alto pueden requerirse demasiados términos del desarrollo.

En algunas ocasiones, se puede reducir el cálculo necesario para evaluar $f_m(x)$, recurriendo al desarrollo recursivo obtenido como se muestra a continuación.

Teniendo en cuenta que

$$f_0 = \frac{\alpha}{\beta} \quad ; \quad f_{m+k} = \frac{m+k+\beta-1}{m+k+\beta/2} f_{m+k-1} \quad (m \geq 1, k \geq 0)$$

se puede apreciar que el cociente f_{m+k} / f_{m+k-1} tiende a la unidad cuando m tiende a infinito, con lo cual, el desarrollo de f_m se puede aproximar (coincidiendo en el límite) como sigue

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{m+k} x^k \approx f_m \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{f_m}{1-x}$$

Sea la función auxiliar $H_{m,1}(x)$ definida de forma que cumple la siguiente identidad

$$f_m(x) = f_m \frac{1-x H_{m,1}(x)}{1-x}$$

de modo que despejando se puede calcular

$$H_{m,1}(x) = \frac{f_m - (1-x)f_m(x)}{x f_m} = \frac{1}{f_m} \left(f_m(x) - \frac{f_m(x) - f_m}{x} \right) = \frac{f_m(x) - f_{m+1}(x)}{f_m}$$

resultando el siguiente desarrollo

$$H_{m,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} h_{m,1,k} x^k \quad ; \quad h_{m,1,k} = \frac{f_{m+k} - f_{m+k+1}}{f_m}$$

El primer coeficiente es

$$H_{m,1}(0) = h_{m,1,0} = \frac{f_m - f_{m+1}}{f_m} = 1 - \frac{f_{m+1}}{f_m} = 1 - \frac{m+\beta}{m+\beta/2+1} = \frac{1-\beta/2}{m+\beta/2+1}$$

Y el resto de los coeficientes $h_{m,1,k}$ se pueden calcular recursivamente usando las expresiones de f_m como sigue

$$\frac{h_{m,1,k}}{h_{m,1,k-1}} = \frac{f_{m+k} - f_{m+k+1}}{f_{m+k-1} - f_{m+k}} = \frac{1 - \frac{f_{m+k+1}}{f_{m+k}}}{\frac{f_{m+k-1}}{f_{m+k}} - 1} = \frac{1 - \frac{m+k+\beta}{m+k+\beta/2+1}}{\frac{m+k+\beta/2}{m+k+\beta-1} - 1} = \frac{m+k+\beta-1}{m+k+\beta/2+1}$$

Aplicando a la función $\mathbf{H}_{m,1}(x)$ el mismo proceso que a la función $f_m(x)$, definiendo la función $\mathbf{H}_{m,2}(x)$ se deduce de forma análoga

$$\mathbf{H}_{m,1}(x) = h_{m,1,0} \frac{1 - x \mathbf{H}_{m,2}(x)}{1 - x}$$

$$\mathbf{H}_{m,2}(x) = \frac{1}{h_{m,1,0}} \left(\mathbf{H}_{m,1}(x) - \frac{\mathbf{H}_{m,1}(x) - h_{m,1,0}}{x} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} h_{m,2,k} x^k \quad ; \quad h_{m,2,k} = \frac{h_{m,1,k} - h_{m,1,k+1}}{h_{m,1,0}}$$

donde los coeficientes $h_{m,2,k}$ se pueden calcular recursivamente usando las expresiones de $h_{m,1,k}$ como sigue

$$\mathbf{H}_{m,2}(0) = h_{m,2,0} = 1 - \frac{h_{m,1,1}}{h_{m,1,0}} = 1 - \frac{m+\beta}{m+\beta/2+2} = \frac{2-\beta/2}{m+\beta/2+2}$$

$$\frac{h_{m,2,k}}{h_{m,2,k-1}} = \frac{h_{m,1,k} - h_{m,1,k+1}}{h_{m,1,k-1} - h_{m,1,k}} = \frac{1 - \frac{h_{m,1,k+1}}{h_{m,1,k}}}{\frac{h_{m,1,k-1}}{h_{m,1,k}} - 1} = \frac{1 - \frac{m+k+\beta}{m+k+\beta/2+2}}{\frac{m+k+\beta/2+1}{m+k+\beta-1} - 1} = \frac{m+k+\beta-1}{m+k+\beta/2+2}$$

Repetiendo recursivamente el proceso se deduce la siguiente fórmula recursiva

$$\mathbf{H}_{m,p}(x) = h_{m,p,0} \frac{1 - x \mathbf{H}_{m,p+1}(x)}{1 - x} \quad (m \geq 0, p \geq 0)$$

siendo los desarrollos de potencias correspondientes

$$\mathbf{H}_{m,p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} h_{m,p,k} x^k \quad (m \geq 0, p \geq 0)$$

donde

$$h_{m,0,0} = f_m \quad ; \quad h_{m,p,0} = \frac{p - \beta/2}{m + \beta/2 + p} \quad (m \geq 0, p \geq 1)$$

$$\frac{h_{m,p,k}}{h_{m,p,k-1}} = \frac{m+k+\beta-1}{m+k+\beta/2+p} \quad (m \geq 0, p \geq 0, k \geq 1)$$

Nótese que con la definición particular de $h_{m,0,0}$, se consigue la identidad

$$f_m(x) \equiv \mathbf{H}_{m,0}(x) \quad (m \geq 0)$$

El error relativo $e_{m,p}$ (en valor absoluto) de la función $H_{m,p}(x)$ se propaga como

$$e_{m,p} \approx \left| \frac{x}{1-x} \right| h_{m,p+1,0} e_{m,p+1}$$

desarrollando desde $p = (k - 1)$ hasta $p = 0$, partiendo de $H_{m,k}(x) \approx 0$, siendo por tanto $e_{m,k} \approx 1$, se estima el error relativo e_m de la función $f_m(x)$ como sigue

$$e_m \approx \left| \frac{x}{1-x} \right|^k h_{m,1,0} h_{m,2,0} \dots h_{m,k,0}$$

En resumen, el algoritmo propuesto, para el cálculo de $f_0^{(m)}$, junto con todas las derivadas anteriores, cuando se quiere evitar la indeterminación (0/0) cerca del origen, es el siguiente

1. Cálculo de $f_m(x)$, con error relativo e_m , mediante el desarrollo de potencias truncado con los k primeros términos.

$$f_m(x) = \sum_{i=0}^{k-1} f_{m+i} x^i \quad ; \quad e_m \approx (f_{m+k} / f_m) x^k$$

Alternativamente, también se puede evaluar $f_m(x)$ usando las funciones recursivas $H_{m,p}$, desde $p = (k - 1)$ hasta $p = 0$.

$$H_{m,p}(x) = h_{m,p,0} \frac{1-x H_{m,p+1}(x)}{1-x}$$

$$h_{m,0,0} = f_m \quad ; \quad h_{m,p,0} = \frac{p - \beta / 2}{m + \beta / 2 + p} \quad (m \geq 0, p \geq 1)$$

partiendo de $H_{m,k}(x) \approx 0$ para obtener $f_m(x) = H_{m,0}(x)$ con error relativo

$$e_m \approx \left| \frac{x}{1-x} \right|^k h_{m,1,0} h_{m,2,0} \dots h_{m,k,0}$$

El valor de k se debe elegir suficientemente alto para obtener la precisión requerida (controlando el valor máximo de e_m en cada caso).

2. Cálculo recursivo de las funciones $f_n(x)$, desde $n = (m - 1)$ hasta $n = 0$

$$f_n(x) = f_n + x f_{n+1}(x)$$

3. Cálculo recursivo de las funciones $f_n^{(p)}(x)$, desde $p = 1$ hasta $p = m$, y, para cada valor de p , desde $n = m - p$ hasta $n = 0$.

$$f_n^{(p)} = \frac{(n + p - 1 + \beta) f_n^{(p-1)} - (n + \beta / 2) f_{n+1}^{(p-1)}}{1-x}$$

En este proceso, las funciones $f^{(p)}(x) = f_0^{(p)}(x)$, desde $p = 0$ hasta $p = m$, quedan calculadas, cumpliendo con el objetivo planteado inicialmente.

Nótese que el algoritmo desarrollado es perfecto para soluciones computacionales, permitiendo obtener todas las derivadas de la función $f(x)$ a la vez hasta el orden que se quiera, sin pérdida de precisión cerca del origen.

Opcionalmente, cuando no sea necesario evitar la posible pérdida de precisión, las derivadas de f_n también se pueden calcular recursivamente a partir derivadas anteriores de la misma función, sin usar funciones de orden n diferente. Esto se consigue obteniendo la ecuación diferencial de f_n , sin dependencia de la función f_{n+1} y aplicando el mismo procedimiento que a la función f , como se indica a continuación.

Sustituyendo las igualdades

$$f_n = f_n + x f_{n+1}^{(1)} \quad ; \quad f_n^{(1)} = x f_{n+1}^{(1)} + f_{n+1}$$

en la ecuación diferencial para f_n dependiente de f_{n+1}

$$(1-x)f_n^{(1)} - (n+\beta)f_n + (n+\beta/2)f_{n+1} = 0$$

resulta

$$(1-x)(x f_{n+1}^{(1)} + f_{n+1}) - (n+\beta)(f_n + x f_{n+1}) + (n+\beta/2)f_{n+1} = 0$$

y agrupando términos

$$x(1-x)f_{n+1}^{(1)} + ((n+\beta/2+1) - (n+\beta+1)x)f_{n+1} - (n+\beta)f_n = 0$$

A partir de la relación entre los coeficientes f_n , se deduce

$$(n+\beta/2+1)f_{n+1} = (n+\beta)f_n$$

de modo que

$$x(1-x)f_{n+1}^{(1)} + ((n+\beta/2+1) - (n+\beta+1)x)f_{n+1} - (n+\beta/2+1)f_{n+1} = 0$$

y cambiando n por $(n-1)$, se obtiene la ecuación diferencial para f_n

$$x(1-x)f_n^{(1)} + ((n+\beta/2) - (n+\beta)x)f_n - (n+\beta/2)f_n = 0$$

Derivando una primera vez la ecuación diferencial, y agrupando términos, se obtiene

$$x(1-x)f_n^{(2)} + (1-2x)f_n^{(1)} + ((n+\beta/2) - (n+\beta)x)f_n^{(1)} - (n+\beta)f_n = 0$$

$$x(1-x)f_n^{(2)} + ((n+\beta/2+1) - (n+\beta+2)x)f_n^{(1)} - (n+\beta)f_n = 0$$

Volviendo a hacer lo mismo para la siguiente derivada

$$x(1-x)f_n^{(3)} + ((n+\beta/2+2) - (n+\beta+4)x)f_n^{(2)} - 2(n+\beta+1)f_n^{(1)} = 0$$

Derivando sucesivamente hasta llegar a $f_n^{(m)}$, para $m \geq 1$, en un proceso similar al desarrollado para $f_n^{(m)}$ anteriormente, se obtiene la siguiente ecuación general

$$x(1-x)f_n^{(m)} + (\alpha_{n,m} - \beta_{n,m}x)f_n^{(m-1)} - (m-1)\gamma_{n,m}f_n^{(m-2)} - \delta_n U_m = 0$$

siendo

$$\alpha_{n,m} = (n + m + \beta/2 - 1)$$

$$\beta_{n,m} = (n + 2m + \beta - 2)$$

$$\gamma_{n,m} = (n + m + \beta - 2)$$

$$\delta_n = (n + \beta/2)f_n$$

Finalmente, la ecuación recursiva que permite obtener $f_n^{(m)}$ en función de derivadas anteriores ($n \geq 0, m \geq 1$) es

$$f_n^{(m)} = \frac{(m-1)\gamma_{n,m}f_n^{(m-2)} - (\alpha_{n,m} - \beta_{n,m}x)f_n^{(m-1)} + \delta_n U_m}{x(1-x)} \quad (n \geq 0, m \geq 1)$$

Sustituyendo los coeficientes anteriores y separando el cálculo del primero de los términos ($n \geq 0, m = 1$), del resto de términos ($n \geq 0, m \geq 2$), se obtiene

$$f_n^{(1)} = \frac{(n + \beta/2)f_n - (n + \beta/2 - (n + \beta)x)f_n}{x(1-x)}$$

$$f_n^{(m)} = \frac{(m-1)(n + m + \beta - 2)f_n^{(m-2)} - (n + m + \beta/2 - 1 - (n + 2m + \beta - 2)x)f_n^{(m-1)}}{x(1-x)}$$

Se puede comprobar, por comparación directa, que para $n = 0$, se recupera la misma expresión obtenida anteriormente para $f^{(m)}$.

Usando los resultados de las derivadas de f_n , se pueden generalizar los siguientes desarrollos en torno a un valor particular ($x = x_0$)

$$f_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{n,m}(x-x_0)^m \quad ; \quad f_{n,m} = f_n^{(m)}(x_0) / m! \quad (n \geq 0)$$

A partir de la expresión recursiva de las derivadas de f_n , dependiendo de sus derivadas anteriores, se obtiene para ($n \geq 0$)

$$f_{n,0} = f_n(x_0) \quad ; \quad f_{n,1} = \frac{(n + \beta)f_{n,0} - (n + \beta/2)(f_{n,0} - f_n)/x_0}{1 - x_0}$$

$$f_{n,m} = \frac{(n + m + \beta - 2)f_{n,m-2} - (n + m + \beta/2 - 1 - (n + 2m + \beta - 2)x_0)f_{n,m-1}}{m x_0 (1 - x_0)} \quad (m \geq 2)$$

Y alternativamente, a partir de la expresión recursiva de las derivadas de f_n , dependiendo de las derivadas anteriores de la propia función (f_n) y la de orden superior (f_{n+1}), se obtiene

$$f_{n,0} = f_n(x_0) \quad ; \quad f_{n,m} = \frac{(n+m+\beta-1) f_{n,m-1} - (n+\beta/2) f_{n+1,m-1}}{m(1-x_0)} \quad (n \geq 0, m \geq 1)$$

La primera de las opciones (a partir de derivadas anteriores) requiere menos cálculo que la segunda (usando funciones de orden superior), pero tiene un problema de precisión en el origen debido a la indeterminación (0/0) que la segunda opción consigue evitar. Nótese que

$$f_n = f_n(0) \quad ; \quad f_{n,0} = f_n(x_0) \quad ; \quad f_{n+1,0} = f_{n+1}(x_0) = \frac{f_{n,0} - f_n}{x_0}$$

poniéndose de manifiesto la indeterminación 0/0 cerca del origen en la primera de las opciones, y como se evita en la segunda opción recurriendo a las funciones de orden superior.

Nótese que las fórmulas recursivas en función de derivadas anteriores, para $n = 0$, también son válidas para la función $f_K(x)$ anulando el término f_0 y para la función $Q(x)$ sustituyendo el primer término $f_n(x_0)$ por $f(x_0)$, como se muestra a continuación.

El desarrollo de $f_K(x)$ es

$$f_K(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{K,m} (x-x_0)^k \quad ; \quad f_{K,m} = f_K^{(m)}(x_0) / m!$$

$$f_{K,0} = f_K(x_0) \quad ; \quad f_{K,1} = -\frac{\beta(1-2x_0)}{2x_0(1-x_0)} f_{K,0}$$

$$f_{K,m} = \frac{(m+\beta-2) f_{K,m-2} - (m+\beta/2-1)(1-2x_0) f_{K,m-1}}{m x_0 (1-x_0)} \quad (m \geq 2)$$

El desarrollo de $f(x)$ es

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} F_m (x-x_0)^k \quad ; \quad F_m = f^{(m)}(x_0) / m!$$

$$F_0 = f(x_0) \quad ; \quad F_1 = \frac{\beta(F_0 - 1/2(F_0 - f_0)/x_0)}{1-x_0}$$

$$F_m = \frac{(m+\beta-2) F_{m-2} - (m+\beta/2-1)(1-2x_0) F_{m-1}}{m x_0 (1-x_0)} \quad (m \geq 2)$$

Siempre que no suponga una pérdida de precisión apreciable, este último desarrollo es el más recomendable, por ser el que requiere menor cálculo. Sin embargo, como ya se

ha mencionado, existen dos casos en los que no se recomienda por la pérdida de precisión que supone la cercanía a las soluciones parabólicas. A continuación se resumen los dos casos posibles.

Cercanía al origen

En la práctica, se recomienda cuando $|x_0| < 1/4$.

El desarrollo $f_0(x)$ se aconseja hacerlo mediante la fórmula recursiva a partir de funciones de orden superior, mediante el siguiente procedimiento.

1. Cálculo de $f_{m,0}$, con error relativo e_m , mediante el desarrollo de potencias truncado con los k primeros términos.

$$f_{m,0} = f_m(x_0) = \sum_{i=0}^{k-1} f_{m+i} x_0^i \quad ; \quad e_m \approx (f_{m+k} / f_m) x_0^k$$

Es importante hacer notar que si sólo se busca precisión para el desarrollo final de $f_0(x_0)$, el desarrollo de $f_m(x_0)$ se puede truncar en el mismo término f_{m+k} que se haría para calcular la función $f(x_0)$ directamente, pues mayor precisión de $f_m(x_0)$ no mejora la precisión de $f_0(x)$, siendo innecesario aumentar la precisión de $f_m(x_0)$. No obstante, si se quiere que el desarrollo de $f_0(x_0)$ proporcione, mediante derivación del propio desarrollo, la misma precisión en sus derivadas hasta un orden p , entre 0 y m , se deben añadir p términos adicionales al desarrollo de $f_m(x_0)$ antes de truncarlo. Es recomendable al menos añadir 2 términos para que las dos primeras derivadas tengan la misma precisión que la propia función.

Alternativamente (mejor para valores altos de m), también se puede evaluar $f_{m,0}$ usando las funciones recursivas $H_{m,p}$, desde $p = (k - 1)$ hasta $p = 0$ (eligiendo k suficientemente alto para obtener la precisión requerida).

$$H_{m,p}(x_0) = h_{m,p,0} \frac{1 - x_0 H_{m,p+1}(x_0)}{1 - x_0}$$

$$h_{m,0,0} = f_m \quad ; \quad h_{m,p,0} = \frac{p - \beta / 2}{m + \beta / 2 + p} \quad (m \geq 0, p \geq 1)$$

partiendo de $H_{m,k}(x_0) \approx 0$ para obtener $f_{m,0} = f_m(x_0) = H_{m,0}(x_0)$ con error relativo

$$e_m \approx \left| \frac{x_0}{1 - x_0} \right|^k h_{m,1,0} h_{m,2,0} \dots h_{m,k,0}$$

2. Cálculo recursivo de $f_{n,0}$, desde $n = (m - 1)$ hasta $n = 0$

$$f_{n,0} = f_n + x_0 f_{n+1,0}$$

3. Cálculo recursivo de las funciones $f_{n,p}$, desde $n = (m - 1)$ hasta $n = 0$, y, para cada valor de n , desde $p = 1$ hasta $p = (m - n)$

$$f_{n,p} = \frac{(n + p + \beta - 1) f_{n,p-1} - (n + \beta/2) f_{n+1,p-1}}{p(1 - x_0)}$$

En este proceso, los coeficientes $f_{0,p}$ desde $p = 0$ hasta $p = m$, quedan calculados.

El desarrollo $f_K(x)$, en $(x = x_0)$, se calcula mediante la fórmula recursiva en función de derivadas anteriores. Y por último, se compone

$$F_m = f_{0,m} + C f_{K,m}$$

Cercanía a la unidad

En la práctica, se recomienda cuando $x_0 > 3/4$.

En este caso el desarrollo de potencias en x_0 de cualquiera de las funciones conduciría a un elevado número de términos para su evaluación. Por ello, se recurre a la propiedad

$$f(x) = (C + C_S) f_K(x) - f_0(y) \quad ; \quad y = 1 - x$$

El desarrollo de potencias de f_0 se obtiene igual que el caso anterior pero cambiando x_0 por $y_0 = 1 - x_0$, de modo que $|y_0| < 1/4$, si cumple la recomendación.

En este proceso, se obtienen los coeficientes $f_{0,p}$ desde $p = 0$ hasta $p = m$, del desarrollo de $f_0(y)$ en $(y = y_0)$. Debe tenerse en cuenta que los coeficientes del desarrollo de $f_0(1-x)$ en $(x = x_0)$ son $(-1)^p f_{0,p}$.

El desarrollo $f_K(x)$, en $(x = x_0)$, se calcula mediante la fórmula recursiva en función de derivadas anteriores. Y por último, se compone

$$F_m = (C + C_S) f_{K,m} - (-1)^m f_{0,m}$$

En la práctica, una solución de compromiso para evitar un cálculo excesivo sin pérdida apreciable de precisión, en la cercanía a las soluciones parabólicas, consiste en calcular los p primeros términos con toda su precisión (por ejemplo, los 3 primeros) y el resto calcularlos con la fórmula recursiva, menos costosa, en función de coeficientes anteriores de la misma función.

ANEXO C PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN λ_n

Sean las funciones λ_0 y λ_K definidas como

$$\lambda_0(x) = \frac{\psi}{\text{sen } \psi} \quad ; \quad \lambda_K(x) = \frac{\pi}{\text{sen } \psi} \quad \text{donde} \quad x = \sin^2(\psi/2)$$

de donde se deduce

$$\cos^2(\psi/2) = 1 - x$$

$$\sin \psi = S_1(x) = 2 \sqrt{x(1-x)}$$

$$\cos \psi = C_1(x) = 1 - 2x$$

y con ello

$$\psi = \psi(x) \quad \text{donde} \quad \psi(x) = \text{atan} \frac{S_1(x)}{C_1(x)} = 2 \text{atan} \sqrt{\frac{x}{1-x}} = 2 \text{atan} \left(\frac{S_1(x)/2}{1-x} \right)$$

$$\lambda_0(x) = \frac{\psi(x)}{S_1(x)}$$

$$\lambda_K(x) = \frac{\pi}{S_1(x)}$$

Nótese que $\lambda_K(x) = \lambda_K(1-x)$.

Sean las mismas funciones λ_0 y λ_K para otro argumento y diferente a x

$$\lambda_0(y) = \frac{\xi}{\text{sen } \xi} \quad ; \quad \lambda_K(y) = \frac{\pi}{\text{sen } \xi} \quad \text{donde} \quad y = \sin^2(\xi/2)$$

Definiendo ahora diferentes relaciones entre los ángulos ψ y ξ , y por tanto, entre x e y , se deducen las propiedades mostradas a continuación.

Propiedad 1. Relación con el ángulo suplementario

Eligiendo el ángulo $\xi = \pi - \psi$, se deduce

$$y = \sin^2(\xi/2) = \sin^2(\pi/2 - \psi/2) = \cos^2(\psi/2) = 1 - x$$

$$\lambda_0(x) = (\pi - \xi)/\sin(\pi - \xi) = (\pi - \xi)/\sin \xi = \lambda_K(y) - \lambda_0(y)$$

y teniendo en cuenta que $\lambda_K(x) = \lambda_K(1-x)$, resulta la siguiente fórmula

$$\lambda_0(x) = \lambda_K(x) - \lambda_0(1-x)$$

Propiedad 2. Relación con el ángulo complementario

Eligiendo el ángulo $\xi = \pi/2 - \psi$, se deduce

$$\lambda_0(x) = (\pi/2 - \xi)/\sin \psi = (\pi/2 - \lambda_0(y) \sin \xi)/\sin \psi = (\pi/2 - \lambda_0(y) \cos \psi)/\sin \psi$$

$$y = (1 - \cos \xi)/2 = (1 - \sin \psi)/2 = \cos^2 \psi / (2(1 + \sin \psi))$$

resultando la siguiente fórmula

$$\lambda_0(x) = \lambda_K(x)/2 - C_1(x)/S_1(x) \lambda_0(y) \quad \text{donde} \quad y = C_1(x)^2 / (2(1 + S_1(x)))$$

Propiedad 3. Relación con el ángulo mitad

Eligiendo el ángulo $\xi = \psi/2$, se deduce

$$\lambda_0(x) = (2\xi) / \sin(2\xi) = \xi / (\cos \xi \sin \xi) = \lambda_0(y) / \cos \xi = \lambda_0(y) / \cos(\psi/2)$$

$$\cos(\psi/2) = (1 - x)^{1/2} = \cos \xi = 1 - 2y$$

$$y = (1 - \cos \xi)/2 = (1 - (1 - x)^{1/2})/2 = x / (2(1 + (1 - x)^{1/2}))$$

resultando la siguiente fórmula

$$\lambda_0(x) = \lambda_0(y) / r \quad ; \quad y = x / D \quad ; \quad D = 2(1 + r) \quad ; \quad r = (1 - x)^{1/2}$$

Dando un paso más, a partir de esta expresión, se puede hallar de forma recursiva la relación de $\lambda_n(x)$ con $\lambda_n(y)$, siendo λ_n las funciones definidas recursivamente, a partir de λ_0 , como

$$\lambda_n(x) = a_n + x \lambda_{n+1}(x) \quad ; \quad a_n = \lambda_n(0) \quad ; \quad a_0 = \lambda_0(0) = 1$$

Teniendo en cuenta que las variables r y D en función de y son

$$r = r(y) = 1 - 2y \quad ; \quad D = D(y) = 4(1 - y)$$

Y definiendo las variables

$$r_n = r D^n = r_{n-1} D \quad ; \quad d_n = r_n - 1$$

Se deduce

$$\lambda_0(y) = r(y) \lambda_0(x) \quad ; \quad x = y D(y)$$

$$r_n = r_n(y) = r(y) D^n(y) = r_{n-1}(y) D(y) \quad ; \quad d_n = d_n(y) = r_n(y) - 1$$

Sustituyendo en la primera de las expresiones anteriores, la formula recursiva de λ_n en función de λ_{n+1} , para $n = 0$, y usando el resto de expresiones convenientemente

$$a_0 + y \lambda_1(y) = r(y) (a_0 + x \lambda_1(x)) = (1 - 2y) a_0 + r(y) y D(y) \lambda_1(x)$$

Y pasando el término independiente de λ_1 al primer miembro, y dividiendo por y

$$2 a_0 + \lambda_1(y) = r_1(y) \lambda_1(x)$$

Repetiendo de nuevo con la formula recursiva de λ_n , para $n = 1$

$$2 a_0 + a_1 + y \lambda_2(y) = r_1(y) (a_1 + x \lambda_2(x)) = r_1(y) a_1 + r_2(y) y \lambda_2(x)$$

Y pasando el término independiente de λ_2 al primer miembro, y dividiendo por y

$$(2 a_0 - a_1 d_1(y)) / y + \lambda_2(y) = r_2(y) \lambda_2(x)$$

Aplicando el mismo proceso reiteradamente, se llega a la expresión general

$$A_n(y) + \lambda_n(y) = r_n(y) \lambda_n(x)$$

Para hallar $A_n(y)$, sustituyendo λ_n en función de λ_{n+1} , se obtiene

$$A_n(y) + a_n + y \lambda_{n+1}(y) = r_n(y) (a_n + x \lambda_{n+1}(x)) = r_n(y) a_n + r_{n+1}(y) y \lambda_{n+1}(x)$$

Y pasando el término independiente de λ_{n+1} al primer miembro, y dividiendo por y

$$(A_n(y) - a_n d_n(y)) / y + \lambda_{n+1}(y) = r_{n+1}(y) \lambda_{n+1}(x)$$

Identificando con la misma expresión general para $n+1$

$$A_{n+1}(y) + \lambda_{n+1}(y) = r_{n+1}(y) \lambda_{n+1}(x)$$

resulta

$$A_{n+1}(y) = (A_n(y) - a_n d_n(y)) / y$$

De las expresiones anteriores, para $y = 0$, se deduce que debe cumplirse la igualdad

$$A_n(0) - a_n d_n(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_n = A_n(0) / d_n(0) \quad (n \geq 1)$$

En resumen, la expresión de $\lambda_n(x)$ en función de $\lambda_n(y)$, es

$$\lambda_n(x) = (A_n(y) + \lambda_n(y)) / r_n \quad ; \quad r_n = D r_{n-1} \quad ; \quad r_0 = r$$

$$y = x / D \quad ; \quad D = 2 (1 + r) \quad ; \quad r = (1 - x)^{1/2}$$

siendo $A_n(y)$ los polinomios de grado $(n-1)$ obtenidos mediante la fórmula recursiva

$$A_{n+1}(y) = (A_n(y) - a_n d_n(y)) / y \quad ; \quad A_0(y) = 0$$

$$a_n = A_n(0) / d_n(0) \quad (n \geq 1) \quad ; \quad a_0 = 1$$

$$d_n(y) = r_n(y) - 1 \quad ; \quad r_n(y) = 4(1 - y) r_{n-1}(y) \quad ; \quad r_0(y) = 1 - 2y$$

Los polinomios $r_n(y)$ y $d_n(y)$, sólo son necesarios para obtener los polinomios $A_n(y)$ una única vez. Evaluando las anteriores expresiones recursivas para los primeros valores de n , se obtienen los polinomios

$$A_0(y) = 0 \quad ; \quad A_1(y) = 2 \quad ; \quad A_2(y) = 8 - 16/3 y \quad ;$$

$$A_3(y) = 144/5 - 128/3 y + 256/15 y^2 \quad ;$$

$$A_4(y) = 2176/21 - 985/4 y + 1024/5 y^2 - 2048/35 y^3 \quad ; \quad \dots$$

Propiedad 4. Evaluación mediante fórmula recursiva

Teniendo en cuenta que la función $\lambda(x)$ es un caso particular de la estudiada en el Anexo B para la función genérica $f(x; \alpha, \beta)$, con valores de $\alpha = 1$ y $\beta = 1$, se dispone de las siguientes funciones $H_{m,p}(x)$, calculadas de forma recursiva.

$$H_{m,p}(x) = h_{m,p,0} \frac{1 - x H_{m,p+1}(x)}{1 - x} \quad (m \geq 0, p \geq 0)$$

$$h_{m,0,0} = a_m \quad ; \quad h_{m,p,0} = \frac{p - 1/2}{m + 1/2 + p} \quad (m \geq 0, p \geq 1)$$

Esta fórmula recursiva permite evaluar la función $\lambda_m(x) \equiv H_{m,0}(x)$, aplicándola desde un valor de $p = j$ hasta $p = 0$, partiendo de $H_{m,j+1}(x) \approx 0$. Eligiendo un valor de j suficientemente alto se consigue la precisión que se desee.

ANEXO D PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN Q_n

Sean las funciones Q_0 y Q_K definidas como

$$Q_0(x) = \frac{2\psi - \text{sen}(2\psi)}{\text{sen}^3 \psi} \quad ; \quad Q_K(x) = \frac{2\pi}{\text{sen}^3 \psi} \quad \text{donde} \quad x = \sin^2(\psi/2)$$

Usando las funciones definidas en el Anexo C y las siguientes

$$S_n(x) = S_1^n(x)$$

$$C_n(x) = C_1^n(x)$$

Se puede calcular alternativamente

$$Q_0(x) = 2 \frac{\psi(x) - S_1(x)C_1(x)}{S_3(x)} = 2 \frac{\lambda_0(x) - C_1(x)}{S_2(x)}$$

$$Q_K(x) = \frac{2\pi}{S_3(x)} = 2 \frac{\lambda_K(x)}{S_2(x)}$$

Nótese que por ser $S_n(x) = S_n(1-x)$, y $\lambda_K(x) = \lambda_K(1-x)$, es también $Q_K(x) = Q_K(1-x)$.

Sean las mismas funciones Q_0 y Q_K para otro argumento y diferente a x

$$Q_0(y) = \frac{2\xi - \text{sen}(2\xi)}{\text{sen}^3 \xi} \quad ; \quad Q_K(y) = \frac{2\pi}{\text{sen}^3 \xi} \quad \text{donde} \quad y = \sin^2(\xi/2)$$

Definiendo ahora diferentes relaciones entre los ángulos ψ y ξ , y por tanto, entre x e y , se deducen las propiedades mostradas a continuación.

Propiedad 1. Relación con el ángulo suplementario

Eligiendo el ángulo $\xi = \pi - \psi$, se deduce

$$y = \sin^2(\xi/2) = \sin^2(\pi/2 - \psi/2) = \cos^2(\psi/2) = 1 - x$$

$$Q_0(x) = (2(\pi - \xi) - \text{sen}(2\pi - 2\xi))/\text{sen}^3(\pi - \xi) = (2\pi - 2\xi + \text{sen}(2\xi))/\text{sen}^3 \xi = Q_K(y) - Q_0(y)$$

y teniendo en cuenta que $Q_K(x) = Q_K(1-x)$, resulta la siguiente fórmula

$$Q_0(x) = Q_K(x) - Q_0(1-x)$$

Cuando x se acerca a 1, en la práctica cuando $x > 3/4$, la función $Q_0(x)$ tiende a infinito pero, aprovechando la propiedad anterior, y haciendo el cambio de variable x por y se

consigue que el nuevo argumento y sea menor que $1/4$, suficientemente pequeño para evaluar Q_0 mediante desarrollo de potencias.

En dicho caso, la función $Q(x;N)$ se puede expresar en función de y como

$$Q(x;N) = Q_0(x) + N Q_K(x) = Q_S(y;N) = (N+1) Q_K(y) - Q_0(y)$$

siendo Q_S la función suplementaria de Q , por corresponderse con el cambio de variable del ángulo suplementario de ($\xi = \pi - \psi$).

La Propiedad 1 de la función Q_0 en este Anexo es la misma que la Propiedad 1 del Anexo C para la función λ_0 . Sin embargo, la propiedad 2 del Anexo C para la función λ_0 , y la Propiedad 3 para la función λ_n , no son aplicables a las funciones Q_0 y Q_n respectivamente. Dichas propiedades dan una gran ventaja, desde el punto de vista de evaluación, al uso de las funciones λ_n respecto a las funciones Q_n , puesto que permite cambiar el argumento de la función cuando se determine que es más conveniente, normalmente para acercar el argumento al origen con objeto de reducir el número de términos necesarios para evaluar el desarrollo de la función.

Propiedad 2. Evaluación mediante fórmula recursiva

Teniendo en cuenta que la función $Q(x)$ es un caso particular de la estudiada en el Anexo B para la función genérica $f(x;\alpha,\beta)$, con valores de $\alpha = 4$ y $\beta = 3$, se dispone de las siguientes funciones $H_{m,p}(x)$, calculadas de forma recursiva.

$$H_{m,p}(x) = h_{m,p,0} \frac{1 - x H_{m,p+1}(x)}{1 - x} \quad (m \geq 0, p \geq 0)$$

$$h_{m,0,0} = q_m \quad ; \quad h_{m,p,0} = \frac{p - 3/2}{m + 3/2 + p} \quad (m \geq 0, p \geq 1)$$

Esta fórmula recursiva permite evaluar la función $Q_m(x) \equiv H_{m,0}(x)$, aplicándola desde un valor de $p = j$ hasta $p = 0$, partiendo de $H_{m,j+1}(x) \approx 0$. Eligiendo un valor de j suficientemente alto se consigue la precisión que se desee.

ANEXO E DERIVADAS ENÉSIMAS Y DESARROLLOS DE POTENCIAS DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES

Existen una serie de funciones elementales que normalmente se calculan computacionalmente mediante desarrollos de potencias construidos con sus derivadas enésimas, a partir de las cuales se calculan muchas otras funciones consideradas dependientes de las primeras, desde el punto de vista del cálculo computacional (por ejemplo, $\tan x$ se considera una función dependiente de las elementales $\sin x$ y $\cos x$).

A continuación se obtienen los desarrollos de las consideradas más usuales, a partir del *Desarrollo de Taylor* general de una función a partir de sus derivadas m -ésimas.

Sea la función genérica $y(x)$ y sus derivadas enésimas $y^{(n)}(x)$ respecto de x

$$y = y(x) \quad ; \quad y^{(n)} = y^{(n)}(x)$$

Cuando la función f tiene interés en torno a un valor particular ($x = x_0$), se puede desarrollar en serie de potencias de $(x - x_0)$ como sigue

$$y = y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n (x - x_0)^n \quad ; \quad y_n = \frac{y_0^{(n)}}{n!} \quad ; \quad y_0^{(n)} = y^{(n)}(x_0)$$

A este desarrollo genérico se le llama *Desarrollo de Taylor*, no obstante, en el caso particular, $x_0 = 0$, se le llama *Desarrollo de McLaurin*.

Desarrollo de una potencia de exponente real

Sea la función

$$y = x^m$$

con derivada enésima

$$y^{(n)} = m(m-1) \dots (m-n+1) x^{m-n}$$

Usando el número combinatorio $C_{m,n}$ definido en el Anexo F (pero siendo ahora m cualquier número real), esta derivada se puede expresar como

$$y^{(n)} = n! C_{m,n} x^{m-n}$$

Con esta expresión de la derivada, el *Desarrollo de Taylor* en $x = x_0$ es

$$y = x^m = \sum_{n=0}^{\infty} C_{m,n} x_0^{m-n} (x - x_0)^n = x_0^m \sum_{n=0}^{\infty} C_{m,n} (x/x_0 - 1)^n$$

y, alternativamente, cambiando x por $(x_0 + h)$

$$y = (x_0 + h)^m = \sum_{n=0}^{\infty} C_{m,n} x_0^{m-n} h^n = x_0^m \sum_{n=0}^{\infty} C_{m,n} (h/x_0)^n$$

Nótese que si m es un entero positivo (número natural), $C_{m,n}$ es nulo para todo n mayor que m , y la expresión anterior coincide exactamente con el desarrollo conocido de la suma elevada a un número natural.

Los desarrollos anteriores se utilizan a menudo para el caso particular $x_0 = 1$ siguientes

$$y = x^m = \sum_{n=0}^{\infty} C_{m,n} (x - 1)^n$$

$$y = (1 + h)^m = \sum_{n=0}^{\infty} C_{m,n} h^n$$

Y de éstos, uno de los más usados es el caso $m = -1$, donde $C_{-1,n} = (-1)^n$, y por tanto

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{1+h} \right)^{(-1)} = (-1)^n n!$$

resultando

$$y = \frac{1}{1+h} = \sum_{n=0}^{\infty} (-h)^n$$

o cambiando h por $(-h)$

$$y = \frac{1}{1-h} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n \quad ; \quad \left(\frac{1}{1-h} \right)^{(-1)} = n!$$

Función logarítmica

Sea la función logarítmica (o logaritmo neperiano)

$$y = \ln x$$

con derivada

$$y^{(1)} = 1/x$$

y volviendo a derivar sucesivamente

$$y^{(n+1)} = (-1)^n n! / x^{(n+1)} \quad (n \geq 0)$$

o disminuyendo el índice n

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! / x^n \quad (n \geq 1)$$

El *Desarrollo de Taylor* en $x = x_0$

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad ; \quad a_n = \frac{y_0^{(n)}}{n!} \quad ; \quad y_0 = \ln x_0$$

$$y_0^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! / x_0^n \quad (n \geq 1)$$

sustituyendo las derivadas en función de los coeficientes del desarrollo

$$a_n = (-1)^{n-1} / (n x_0^n) \quad (n \geq 1)$$

y el *Desarrollo de Taylor* resulta

$$\ln x = \ln x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x/x_0 - 1)^n}{n} = \ln x_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/x_0 - 1)^{n+1}}{n+1}$$

y, alternativamente, cambiando x por $(x_0 + h)$

$$\ln(x_0 + h) = \ln x_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(h/x_0)^{n+1}}{n+1}$$

y en particular para $(x_0 = 1)$, como es usual

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$$

$$\ln(1+h) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{h^{n+1}}{n+1}$$

o cambiando h por $(-h)$

$$\ln(1-h) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{n+1}}{n+1}$$

Nótese que

$$\ln \frac{1+h}{1-h} = \ln(1+h) - \ln(1-h) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{2n+1}}{2n+1}$$

y, por tanto, con el cambio de variable h por u , de modo que

$$1+h = \frac{1+u}{1-u}$$

se obtiene el desarrollo simplificado

$$\ln(1 + h) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{2n+1}}{2n+1} \quad ; \quad u = \frac{h}{2+h}$$

con mayor convergencia que el desarrollo directo en función de h .

Función exponencial

Sea la función exponencial

$$y = \exp x$$

Sabiendo que la derivada enésima es idéntica a la propia función

$$y^{(n)} = y = \exp x$$

El *Desarrollo de Taylor* en $x = x_0$ es

$$\exp x = \exp(x_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

y en particular el *Desarrollo de McLaurin* ($x_0 = 0$) es

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Función coseno y seno

Sea la función exponencial

$$y = \exp(i x) = e^{i x} = \cos x + i \sin x$$

El *Desarrollo de Taylor* en $x = x_0$, deducido de la función exponencial, es

$$y = \exp(i x_0) \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

y en particular el *Desarrollo de McLaurin* ($x_0 = 0$) es

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n \frac{x^n}{n!}$$

expandiendo el *Desarrollo de Taylor* con su parte real e imaginaria

$$\cos x + i \sin x = (\cos x_0 + i \sin x_0) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x - x_0)^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x - x_0)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)$$

y separando las partes

$$\cos x = \cos x_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x - x_0)^{2n}}{(2n)!} - \sin x_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x - x_0)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin x = \cos x_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x - x_0)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sin x_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x - x_0)^{2n}}{(2n)!}$$

y para los *Desarrollo de McLaurin*

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Función coseno y seno hiperbólico

Sean las funciones coseno y seno hiperbólico, definidas como semisuma y semirresta de las exponenciales de x y $-x$,

$$y = \cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$$

$$y = \sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$$

Comparando con las identidades

$$\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$$

$$\sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$$

Se deduce estas otras identidades

$$\cos(ix) = \cosh(x)$$

$$\sin(ix) = i \sinh(x)$$

Y de estas los *Desarrollos de Taylor* de las funciones hiperbólicas a partir de los calculados anteriormente para las funciones trigonométricas

$$\cosh x = \cosh x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^{2n}}{(2n)!} + \sinh x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sinh x = \cosh x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cosh x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^{2n}}{(2n)!}$$

y para los *Desarrollo de McLaurin*

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Función arco tangente

Sea la función

$$y = \operatorname{atan} x$$

con derivada

$$y^{(1)} = \frac{1}{1+x^2}$$

A partir de la derivada enésima del cociente de $(1+x^2)$ respecto a la unidad, se obtienen las derivadas enésimas de $y^{(1)}$

$$y^{(n+1)} = -y^{(1)} \left(\sum_{k=1}^n C_{n,k} (1+x^2)^{(k)} y^{(n+1-k)} \right) \quad (n \geq 1)$$

y teniendo en cuenta que

$$(1+x^2)^{(1)} = 2x \quad ; \quad (1+x^2)^{(2)} = 2 \quad ; \quad (1+x^2)^{(k)} = 0 \quad (k \geq 2)$$

$$C_{n,1} = n \quad ; \quad C_{n,2} = n(n-1)/2$$

las derivadas enésimas de y se desarrollan como

$$y = \operatorname{atan} x \quad ; \quad y^{(1)} = \frac{1}{1+x^2} \quad ; \quad y^{(n+1)} = -n y^{(1)} (2x y^{(n)} + (n-1) y^{(n-1)}) \quad (n \geq 1)$$

y el *Desarrollo de Taylor* en $x = x_0$

$$\operatorname{atan} x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad ; \quad a_n = \frac{y_0^{(n)}}{n!} \quad ; \quad y_0 = \operatorname{atan} x_0 \quad ; \quad y_0^{(1)} = \frac{1}{1+x_0^2}$$

$$y_0^{(n+1)} = -n y_0^{(1)} (2x_0 y_0^{(n)} + (n-1) y_0^{(n-1)}) \quad (n \geq 1)$$

sustituyendo las derivadas en función de los coeficientes del desarrollo

$$(n+1)! a_{n+1} = -n a_1 (2 x_0 n! a_n + (n-1)(n-1)! a_{n-1}) \quad (n \geq 1)$$

$$(n+1) a_{n+1} = -a_1 (2 x_0 n a_n + (n-1) a_{n-1}) \quad (n \geq 1)$$

y definiendo los coeficientes auxiliares

$$b_n = n a_n \quad (n \geq 0)$$

el *Desarrollo de Taylor* se simplifica

$$\operatorname{atan} x = \operatorname{atan} x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{(x-x_0)^n}{n}$$

$$b_0 = 0 \quad ; \quad b_1 = \frac{1}{1+x_0^2} \quad ; \quad b_{n+1} = -b_1 (2 x_0 b_n + b_{n-1}) \quad (n \geq 1)$$

Alternativamente, se pueden calcular las derivadas enésimas en función de los coeficientes b_n , pero calculados en x . Llamando c_n a estos coeficientes para distinguirlos de b_n se tiene

$$c_0 = 0 \quad ; \quad c_1 = \frac{1}{1+x^2} \quad ; \quad c_{n+1} = -c_1 (2 x c_n + c_{n-1}) \quad ; \quad y^{(n)} = c_n (n-1)! \quad (n \geq 1)$$

En el caso particular usual $x_0 = 0$. Las derivadas enésimas son

$$y_0 = 0 \quad ; \quad y_0^{(1)} = 1 \quad ; \quad y_0^{(n+1)} = -n(n-1) y_0^{(n-1)} \quad (n \geq 1)$$

y aplicando recursivamente la expresión de $y_0^{(n+1)}$ para n par e impar

$$y_0^{(2n)} = 0 \quad ; \quad y_0^{(2n+1)} = (-1)^n (2n)! \quad (n \geq 0)$$

Haciendo lo mismo para los coeficientes b_n

$$b_{2n} = 0 \quad ; \quad b_{2n+1} = (-1)^n \quad (n \geq 0)$$

resulta el siguiente *Desarrollo de McLaurin*

$$\operatorname{atan} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{2n+1}$$

Función argumento tangente hiperbólica

Sea la función

$$y = \operatorname{atanh} x$$

Aunque se puede hacer un desarrollo análogo al realizado para la función $\operatorname{atan}x$, teniendo en cuenta la identidad

$$\operatorname{atan}(i x) = i \operatorname{atanh}x$$

se pueden aprovechar los resultados de $\operatorname{atan}x$, sustituyendo x por $(i x)$, y por tanto, x^2 por $(-x^2)$, para obtener las siguientes expresiones.

Derivadas enésimas

$$c_0 = 0 \quad ; \quad c_1 = \frac{1}{1-x^2} \quad ; \quad c_{n+1} = c_1 (2x c_n + c_{n-1}) \quad ; \quad y^{(n)} = c_n (n-1)! \quad (n \geq 1)$$

Desarrollo de Taylor en $x = x_0$

$$\operatorname{atanh}x = \operatorname{atanh}x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{(x-x_0)^n}{n}$$

$$b_0 = 0 \quad ; \quad b_1 = \frac{1}{1-x_0^2} \quad ; \quad b_{n+1} = b_1 (2x_0 b_n + b_{n-1}) \quad (n \geq 1)$$

Derivadas enésimas en $x = 0$

$$y_0^{(2n)} = 0 \quad ; \quad y_0^{(2n+1)} = (2n)! \quad (n \geq 0)$$

Desarrollo de McLaurin

$$\operatorname{atanh}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{2n+1}$$

ANEXO F DERIVADAS ENÉSIMAS Y COEFICIENTES DEL DESARROLLO DE POTENCIAS DE UNA FUNCIÓN A PARTIR DE SU RELACIÓN CON OTRAS FUNCIONES CONOCIDAS

Sea una función f genérica, y sus derivadas enésimas (o derivadas parciales), respecto de una variable x

$$f = f(x) \quad ; \quad f^{(n)} = f^{(n)}(x)$$

y sea su desarrollo de potencias de $(x - x_0)$ en torno a un valor particular $(x = x_0)$

$$f = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (x - x_0)^n \quad ; \quad f_n = \frac{f_0^{(n)}}{n!} \quad ; \quad f_0^{(n)} = f^{(n)}(x_0)$$

Sean también las funciones $g(x)$ y $h(x)$, con sus derivadas enésimas y desarrollos de potencias definidos de igual modo que para la función $f(x)$.

A partir de una relación conocida de unas funciones respecto a otras, es posible también establecer la correspondiente relación entre las derivadas enésimas, y entre los coeficientes del desarrollo de potencias.

Los algoritmos mostrados a continuación están pensados para llevarlos con la mayor facilidad posible a código fuente programable.

Derivada enésima de un polinomio

Sea la relación

$$g = f^{(k)} \quad (k \geq 0)$$

Derivando sucesivamente se deducen directamente las derivadas de la función g

$$g^{(n)} = f^{(n+k)} \quad (n \geq 0)$$

Teniendo en cuenta la relación entre los coeficientes de los desarrollos de potencias de f y g con sus derivadas, se deduce

$$g_n = g^{(n)} / n! = f^{(n+k)} / n! = f_{n+k} (n+k)! / n! \quad (n \geq 0)$$

Simplificando, los coeficientes del desarrollo de g , en función de los coeficientes del desarrollo de f son

$$g_n = (n+1) (n+2) \dots (n+k) f_{n+k} \quad (n \geq 0)$$

Integral enésima de un polinomio

Sea la relación

$$g = f^{(-k)} \quad (k \geq 0)$$

Integrando sucesivamente se deducen directamente las derivadas de la función g

$$g^{(n)} = \text{Constante de integración} \quad (n < k)$$

$$g^{(n)} = f^{(n-k)} \quad (n \geq k)$$

Teniendo en cuenta la relación entre los coeficientes de los desarrollos de potencias de f y g con sus derivadas, se deduce

$$g_n = g^{(n)} / n! = f^{(n-k)} / n! = f_{n-k} (n-k)! / n! \quad (n \geq k)$$

Simplificando, los coeficientes del desarrollo de g , en función de los coeficientes del desarrollo de f son

$$g_n = f_{n-k} / ((n-k+1) \dots (n-1) n) \quad (n \geq k)$$

Producto de funciones

Sea la relación

$$h = f \cdot g$$

Derivando sucesivamente se obtienen las siguientes expresiones para calcular las derivadas enésimas

$$h^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_{n,k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad (n \geq 0)$$

donde se ha usado el número combinatorio $C_{n,k}$, definido como

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Nótese que

$$C_{n,n} = C_{n,0} = 1 \quad (n \geq 0)$$

$$C_{n,n-1} = C_{n,1} = n \quad (n \geq 1)$$

$$C_{n,n-2} = C_{n,2} = n(n-1)/2 \quad (n \geq 2)$$

Y en general

$$C_{n,n-k} = C_{n,k} \quad (n \geq k \geq 0)$$

$$C_{n,k+1} = C_{n,k} (n-k) / (k+1) \quad (n \geq k \geq 0)$$

A partir de las derivadas enésimas obtenidas de h , o directamente expandiendo el producto de desarrollos de f y g , se obtienen las siguientes expresiones para los coeficientes del desarrollo de potencias de h , en función de los coeficientes de los desarrollos de f y g

$$h_n = \sum_{k=0}^n f_k g_{n-k} \quad (n \geq 0)$$

Cociente de una función respecto a la unidad

Sea la relación

$$g = 1/f$$

Aplicando la derivada enésima del producto en la identidad

$$1 = fg$$

y extrayendo del sumatorio el término correspondiente a $k = 0$, se obtiene

$$0 = fg^{(n)} + \sum_{k=1}^n C_{n,k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad (n \geq 1)$$

y despejando $g^{(n)}$, resulta finalmente la siguiente expresión recursiva

$$g^{(n)} = -g \sum_{k=1}^n C_{n,k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad (n \geq 1)$$

A partir de las derivadas enésimas obtenidas de g , se obtienen las siguientes expresiones recursivas para los coeficientes del desarrollo de potencias de g , en función de los coeficientes del desarrollo de f

$$g_0 = 1/f_0 \quad ; \quad g_n = -g_0 \sum_{k=1}^n f_k g_{n-k} \quad (n \geq 1)$$

Cociente de funciones

Sea la relación

$$h = f / g$$

Las derivadas enésimas de h , se obtienen del producto de f por la inversa de g

$$h = f (1/g)$$

Es decir, se obtienen primero las derivadas enésimas de $(1/g)$ con las expresiones anteriores para el cociente de g respecto a la unidad, y después se aplican las expresiones del producto de f y $(1/g)$, resultando

$$(1/g)^{(n)} = -(1/g) \sum_{k=1}^n C_{n,k} g^{(k)} (1/g)^{(n-k)} \quad (n \geq 1)$$

$$h^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_{n,k} f^{(k)} (1/g)^{(n-k)} \quad (n \geq 1)$$

A partir de las derivadas enésimas obtenidas de h , se obtienen las siguientes expresiones recursivas para los coeficientes del desarrollo de potencias de h , en función de los coeficientes del desarrollo de f y g

$$(1/g)_0 = 1 / g_0 \quad ; \quad (1/g)_n = -(1/g)_0 \sum_{k=1}^n g_k (1/g)_{n-k} \quad (n \geq 1)$$

$$h_n = \sum_{k=0}^n f_k (1/g)_{n-k} \quad (n \geq 0)$$

Cuadrado de una función

Sea la relación

$$g = f^2$$

Aplicando la derivada enésima del producto en la identidad

$$g = f f$$

se obtiene

$$g^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_{n,k} f^{(k)} f^{(n-k)} \quad (n \geq 0)$$

Aunque esta relación es perfectamente válida, se puede simplificar teniendo en cuenta que los términos correspondientes a k y $(n-k)$ son iguales, de modo que agrupando términos iguales

$$g^{(n)} = \sum_{k=0}^{2k \leq n} D_{n,k} f^{(k)} f^{(n-k)} \quad (n \geq 0)$$

donde los coeficientes $D_{n,k}$ se definen como

$$D_{n,k} = K_{n,k} C_{n,k} \quad (n \geq 0)$$

siendo los coeficientes $K_{n,k}$

$$K_{n,k} = 2 \quad (n > 2k \geq 0)$$

$$K_{n,k} = 1 \quad (n = 2k)$$

Los coeficientes $D_{n,k}$ y $K_{n,k}$ se definen para tener en cuenta que, cuando n es par, existe un término central que no se repite.

Con esta agrupación de términos, cuando n es par, existe un término central y los cálculos se reducen a la mitad, y cuando n es impar, no existe término central y los cálculos se reducen a la mitad menos un término.

A partir de las derivadas enésimas obtenidas de g , se obtienen las siguientes expresiones recursivas para los coeficientes del desarrollo de potencias de g , en función de los coeficientes del desarrollo de f

$$g_n = \sum_{k=0}^n f_k f_{n-k} \quad (n \geq 0)$$

o agrupando términos iguales

$$g_n = \sum_{k=0}^{2k \leq n} K_{n,k} f_k f_{n-k} \quad (n \geq 0)$$

Función elevada a un entero positivo

Sea la relación

$$g = f^n$$

Si n es la unidad, la función g es idéntica a la función f y no hay nada que calcular pues sus derivadas también son las mismas.

Cuando n es impar, distinto de la unidad, aplicando la derivada enésima del producto en la identidad

$$g = f f^{n-1}$$

se obtiene

$$g^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_{n,k} f^{(k)} (f^{n-1})^{(n-k)} \quad (n \geq 0)$$

$$g_n = \sum_{k=0}^n f_k (f^{n-1})_{n-k} \quad (n \geq 0)$$

De modo que $(n-1)$ es ahora par y se puede aplicar recursivamente a (f^{n-1}) el caso de exponente par desarrollado a continuación.

Cuando n es par, aplicando la derivada enésima del cuadrado en la identidad

$$g = (f^{n/2})^2$$

se obtiene

$$g^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_{n,k} (f^{n/2})^{(k)} (f^{n/2})^{(n-k)} \quad (n \geq 0)$$

$$g_n = \sum_{k=0}^n (f^{n/2})_k (f^{n/2})_{n-k} \quad (n \geq 0)$$

o agrupando términos iguales

$$g^{(n)} = \sum_{k=0}^{2k \leq n} D_{n,k} (f^{n/2})^{(k)} (f^{n/2})^{(n-k)} \quad (n \geq 0)$$

$$g_n = \sum_{k=0}^{2k \leq n} K_{n,k} (f^{n/2})_k (f^{n/2})_{n-k} \quad (n \geq 0)$$

Y ahora sólo queda aplicar de forma recursiva el mismo algoritmo para obtener las derivadas o coeficientes de $(f^{n/2})$.

Función elevada a un entero negativo

Sea la relación

$$g = f^{-n}$$

Las derivadas enésimas o coeficientes del desarrollo de potencias de g , se obtienen de la composición

$$g = (1/f)^n$$

Es decir, se obtienen primero las derivadas o coeficientes de $(1/f)$ con las expresiones anteriores para el cociente de f respecto a la unidad, y después se aplican las expresiones de la función $(1/g)$ elevada a un número entero positivo.

Raíz cuadrada de una función

Sea la relación

$$g = f^{1/2}$$

Aplicando la derivada enésima del cuadrado de una función en la identidad

$$f = g^2$$

y extrayendo del sumatorio los términos correspondientes a $k = 0$ y $k = n$, se obtiene

$$f^{(n)} = C_{n,0} g^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} C_{n,k} g^{(k)} g^{(n-k)} \quad (n \geq 0)$$

y despejando $g^{(n)}$, resulta finalmente

$$g^{(n)} = \frac{1}{2g} (f^{(n)} - \sum_{k=1}^{n-1} C_{n,k} g^{(k)} g^{(n-k)}) \quad (n \geq 1)$$

o agrupando términos iguales

$$g^{(n)} = \frac{1}{2g} (f^{(n)} - \sum_{k=1}^{2k \leq n} D_{n,k} g^{(k)} g^{(n-k)}) \quad (n \geq 1)$$

A partir de las derivadas enésimas obtenidas de g , se obtienen las siguientes expresiones recursivas para los coeficientes del desarrollo de potencias de g , en función de los coeficientes del desarrollo de f

$$g_0 = f_0^{1/2} \quad ; \quad g_n = \frac{1}{2g_0} (f_n - \sum_{k=1}^{n-1} g_k g_{n-k}) \quad (n \geq 1)$$

o agrupando términos iguales

$$g_0 = f_0^{1/2} \quad ; \quad g_n = \frac{1}{2g_0} (f_n - \sum_{k=1}^{2k \leq n} K_{n,k} g_k g_{n-k}) \quad (n \geq 1)$$

Función elevada a un número cuyo doble es un entero impar

Sea la relación

$$g = f^{(n/2)}$$

El cálculo de la función g se puede descomponer como

$$g = (f^{(n-1)/2}) (f^{1/2})$$

En consecuencia, el cálculo de las derivadas enésimas o los coeficientes del desarrollo de potencias, se puede dividir en tres operaciones. Primero el correspondiente a la función f elevada a un número entero $(n-1)/2$, segundo el correspondiente a la raíz de f , y por último, el producto de los dos resultados anteriores.

Logaritmo de una función

Sea la relación

$$g = \ln f$$

Derivando una vez

$$g^{(1)} = f^{(1)} / f$$

y aplicando ahora la derivación enésima del cociente

$$(1/f)^{(n)} = -(1/f) \sum_{k=1}^n C_{n,k} f^{(k)} (1/f)^{(n-k)} \quad (n \geq 1)$$

$$g^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n C_{n,k} f^{(k+1)} (1/f)^{(n-k)} \quad (n \geq 0)$$

A partir de estas derivadas enésimas, se obtienen los siguientes coeficientes del desarrollo de potencias

$$(1/f)_0 = 1 / f_0 \quad ; \quad (1/f)_n = -(1/f)_0 \sum_{k=1}^n f_k (1/f)_{n-k} \quad (n \geq 1)$$

$$g_0 = \ln f_0 \quad ; \quad g_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (k+1) f_{k+1} (1/f)_{n-k} \quad (n \geq 0)$$

Exponencial de una función

Sea la relación

$$g = \exp f$$

Derivando una vez

$$g^{(1)} = f^{(1)} g$$

y aplicando ahora la derivación enésima del producto

$$g^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n C_{n,k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} \quad (n \geq 0)$$

A partir de estas derivadas enésimas, se obtienen los siguientes coeficientes del desarrollo de potencias

$$g_0 = \exp f_0 \quad ; \quad g_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (k+1) f_{k+1} g_{n-k} \quad (n \geq 0)$$

Coseno y seno de una función

Sea la relación

$$g = \exp(ief) = \cos f + i \sin f \quad ; \quad g^{(n)} = (e^{if})^{(n)} = (\cos f)^{(n)} + i (\sin f)^{(n)}$$

Derivando una vez

$$g^{(1)} = i g f^{(1)}$$

y aplicando ahora la derivación enésima del producto

$$g^{(n+1)} = i \sum_{k=0}^n C_{n,k} g^{(k)} f^{(1+n-k)} \quad (n \geq 0)$$

y separando la parte real e imaginaria

$$(\cos f)^{(n+1)} = - \sum_{k=0}^n C_{n,k} (\sin f)^{(k)} f^{(1+n-k)} \quad (n \geq 0)$$

$$(\sin f)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n C_{n,k} (\cos f)^{(k)} f^{(1+n-k)} \quad (n \geq 0)$$

A partir de estas derivadas enésimas, se obtienen los siguientes coeficientes del desarrollo de potencias

$$(\cos f)_0 = \cos f_0 \quad ; \quad (\cos f)_{n+1} = - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (1+n-k) (\sin f)_k f_{1+n-k} \quad (n \geq 0)$$

$$(\sin f)_0 = \sin f_0 \quad ; \quad (\sin f)_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (1+n-k) (\cos f)_k f_{1+n-k} \quad (n \geq 0)$$

Composición de funciones

Sea la relación

$$f(x) = z(y(x))$$

Esta relación se puede desglosar en dos operaciones consecutivas

$$y = y(x) \quad ; \quad f(x) = z(y)$$

donde

$$y = y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k u^k \quad ; \quad u = (x - x_0) \quad ; \quad y_k = y^{(k)} / k!$$

$$z(x) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k v^k \quad ; \quad v = (y - y_0) \quad ; \quad z_k = z^{(k)} / k!$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k u^k \quad ; \quad f_k = f^{(k)} / k!$$

En particular, nótese que debe cumplirse

$$y_0 = y(x_0) \quad ; \quad f_0 = f(x_0) = z_0 = z(y_0)$$

Sean las funciones auxiliares definidas como

$$w_m(x) = (v/u)^m = \sum_{k=0}^{\infty} w_{m,k} u^k \quad (m \geq 1)$$

de modo que

$$v^m = u^m w_m(x) \quad (m \geq 1)$$

Identificando esta igualdad con el resultado de multiplicar las dos igualdades resultantes de sustituir m por 1 y por $(m-1)$, en esta misma igualdad, se deduce la relación recursiva

$$w_m(x) = w_{m-1}(x) w_1(x) \quad (m \geq 1)$$

De la propia definición, $w_0(x)$ es la función identidad

$$w_0(x) = 1 \quad ; \quad w_{0,0} = 1 \quad ; \quad w_{0,k} = 0 \quad (k \geq 1)$$

Para determinar los coeficientes de $w_1(x)$ téngase en cuenta que, a partir de la definición de $y(x)$ se cumple

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} y_k u^k = u \sum_{k=0}^{\infty} y_{k+1} u^k$$

Identificando esta expresión con la definición de $w_m(x)$ para $m = 1$, se deduce

$$w_{1,k} = y_{k+1} \quad (k \geq 0)$$

Aplicando el resultado del producto de desarrollos de potencias, obtenido en este mismo anexo, para las funciones $w_m(x)$ y $w_{m-1}(x)$, se obtiene la siguiente expresión recursiva de los coeficientes de $w_m(x)$

$$w_{m,k} = \sum_{i=0}^k w_{m-1,i} w_{1,k-i} \quad (m \geq 1, k \geq 0)$$

De las definiciones de $y(x)$, $z(y)$ y $f(x)$, se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} f_k u^k &= \sum_{i=0}^{\infty} z_i v^i = \sum_{i=0}^{\infty} z_i u^i w_i(x) = \sum_{i=0}^{\infty} z_i u^i \sum_{j=0}^{\infty} w_{i,j} u^j \\ \sum_{k=0}^{\infty} f_k u^k &= \sum_{i=0}^{\infty} z_i \sum_{j=0}^{\infty} w_{i,j} u^{i+j} \end{aligned}$$

e identificando coeficientes, resulta

$$f_k = \sum_{i=0}^k z_i w_{i,k-i} \quad (k \geq 0)$$

En resumen, los cálculos necesarios para calcular los coeficientes f_k son

$$w_{1,k} = y_{k+1} \quad (k \geq 0)$$

$$w_{m,k} = \sum_{i=0}^k w_{m-1,i} w_{1,k-i} \quad (m \geq 2, k \geq 0)$$

$$f_0 = z_0 \quad ; \quad f_k = \sum_{i=1}^k z_i w_{i,k-i} \quad (k \geq 1)$$

Como ejemplo, los primeros coeficientes son

$$f_0 = z_0$$

$$f_1 = z_1 y_1$$

$$f_2 = z_1 y_2 + z_2 y_1^2$$

$$f_3 = z_1 y_3 + z_2 (2 y_1 y_2) + z_3 y_1^3$$

$$f_4 = z_1 y_4 + z_2 (2 y_1 y_3 + y_2^2) + z_3 (3 y_1^2 y_2) + z_4 y_1^4$$

$$f_5 = z_1 y_5 + z_2 (2 (y_1 y_4 + y_2 y_3)) + z_3 (3 y_1 (y_1 y_3 + y_2^2)) + z_4 (4 y_1^3 y_2) + z_5 y_1^5$$

Cuando la función a determinar es $y(x)$ en lugar de $f(x)$, sólo hay que sustituir la última expresión por la que resulta de despejar los coeficientes y_k de $y(x)$ consecutivamente, con el siguiente resultado

$$y_0 = y(x_0) \quad ; \quad y_k = (f_k - \sum_{i=2}^k z_i w_{i,k-i}) / z_1 \quad (k \geq 1)$$

donde los coeficientes $w_{i,k-i}$ ($i = 2, \dots, k$) dependen de los coeficientes y_i ($i = 2, \dots, k-1$).

Como ejemplo, los primeros coeficientes son

$$y_0 = y(x_0)$$

$$y_1 = f_1 / z_1$$

$$y_2 = (f_2 - z_2 y_1^2) / z_1$$

$$y_3 = (f_3 - (z_2 (2 y_1 y_2) + z_3 y_1^3)) / z_1$$

$$y_4 = (f_4 - (z_2 (2 y_1 y_3 + y_2^2) + z_3 (3 y_1^2 y_2) + z_4 y_1^4)) / z_1$$

$$y_5 = (f_5 - (z_2 (2 (y_1 y_4 + y_2 y_3)) + z_3 (3 y_1 (y_1 y_3 + y_2^2)) + z_4 (4 y_1^3 y_2) + z_5 y_1^5)) / z_1$$

Cuando la función a determinar es $z(y)$ en lugar de $f(x)$, sólo hay que sustituir la última expresión por la que resulta de despejar los coeficientes z_k de $z(y)$ consecutivamente, con el siguiente resultado

$$z_0 = f_0 \quad ; \quad z_k = (f_k - \sum_{i=1}^{k-1} z_i w_{i,k-i}) / w_{k,0} \quad (k \geq 1)$$

Como ejemplo, los primeros coeficientes son

$$z_0 = f_0$$

$$z_1 = f_1 / y_1$$

$$z_2 = (f_2 - z_1 y_2) / y_1^2$$

$$z_3 = (f_3 - (z_1 y_3 + z_2 (2 y_1 y_2))) / y_1^3$$

$$z_4 = (f_4 - (z_1 y_4 + z_2 (2 y_1 y_3 + y_2^2) + z_3 (3 y_1^2 y_2))) / y_1^4$$

$$z_5 = (f_5 - (z_1 y_5 + z_2 (2 (y_1 y_4 + y_2 y_3)) + z_3 (3 y_1 (y_1 y_3 + y_2^2)) + z_4 (4 y_1^3 y_2))) / y_1^5$$

Desarrollo de la función inversa

Sea la función

$$y = y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k (x - x_0)^k$$

Se quiere hallar el desarrollo de la función inversa

$$x = x(y) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k (y - y_0)^k$$

Definiendo las variables

$$u = (x - x_0) \quad ; \quad v = (y - y_0)$$

Resultan las identidades

$$v = v(u) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k u^k = u \sum_{k=0}^{\infty} y_{k+1} u^k$$

$$u = u(v) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k v^k = v \sum_{k=0}^{\infty} x_{k+1} v^k$$

Sea las funciones auxiliares

$$v_1(u) = v / u = \sum_{k=0}^{\infty} y_{k+1} u^k$$

$$w_m(u) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{k+m} v^k = x_m + v w_{m+1}(v) \quad (m \geq 1)$$

En particular, la función $w_1(u)$ se calcula como

$$w_1(u) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{k+1} v^k = u / v = 1 / v_1(u)$$

Sustituyendo $v = u / w_1(u)$ en la definición de $w_m(u)$ y despejando $w_{m+1}(u)$

$$w_{m+1}(u) = ((w_m(u) - x_m) / u) w_1(u) \quad (m \geq 1)$$

y según la definición de $w_m(u)$, el coeficiente x_m , se obtiene directamente como

$$x_m = w_m(0) \quad (m \geq 1)$$

Definiendo el desarrollo de $w_m(u)$ como

$$w_m(u) = \sum_{n=0}^{\infty} w_{m,n} u^n \quad ; \quad x_m = w_{m,0} \quad (m \geq 1)$$

y sabiendo que $w_1(u)$ es el la inversa de $v_1(u)$, los coeficientes $w_{1,n}$, se pueden obtener del cociente de una función respecto a la unidad, del siguiente modo

$$w_1(u) = \sum_{n=0}^{\infty} w_{1,n} u^n$$

$$x_1 = w_{1,0} = 1 / y_1 \quad ; \quad w_{1,n} = -w_{1,0} \sum_{i=1}^n y_{i+1} w_{1,n-i} \quad (n \geq 1)$$

Sustituyendo el desarrollo de $w_m(u)$ y $w_{m+1}(u)$ en la expresión anterior de $w_m(u)$ en función de $w_{m+1}(u)$, y cambiando m por $(m-1)$, se llega a la identidad

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_{m,n} u^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_{m-1,n+1} u^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_{1,n} u^n \right) \quad (k \geq 1)$$

y aplicando el desarrollo del producto de funciones, se obtiene la siguiente relación recursiva

$$w_{k,n} = \sum_{i=0}^n w_{k-1,i+1} w_{1,n-i} \quad ; \quad x_k = w_{k,0} \quad (k \geq 2, n \geq 0)$$

En resumen, los cálculos necesarios para calcular los coeficientes x_k son

$$w_{1,0} = 1 / y_1 \quad ; \quad w_{1,n} = -w_{1,0} \sum_{i=1}^n y_{i+1} w_{1,n-i} \quad (n \geq 1)$$

$$w_{k,n} = \sum_{i=0}^n w_{k-1,i+1} w_{1,n-i} \quad (k \geq 2, n \geq 0)$$

$$x_k = w_{k,0} \quad (k \geq 1)$$

Alternativamente, también se puede obtener la función inversa usando el resultado de la composición siguiente

$$f(x) = x(y(x))$$

siendo $f(x)$ la función identidad siguiente

$$f(x) = x = x_0 + u \quad ; \quad f_0 = x_0 \quad ; \quad f_1 = 1 \quad ; \quad f_k = 0 \quad (k \geq 2)$$

resultando el siguiente proceso de cálculo

$$w_{1,k} = y_{k+1} \quad (k \geq 0)$$

$$w_{m,k} = \sum_{i=0}^k w_{m-1,i} w_{1,k-i} \quad (m \geq 2, k \geq 0)$$

$$x_0 = f_0 \quad ; \quad x_k = (f_k - \sum_{i=1}^{k-1} x_i w_{i,k-i}) / w_{k,0} \quad (k \geq 1)$$

Nótese que los coeficientes $w_{m,k}$ de estas últimas expresiones correspondientes a las funciones auxiliares $w_m(u)$ usadas en la composición son diferentes de los anteriores.

Como ejemplo, los primeros coeficientes del desarrollo inverso $x(y)$ son

$$x_0 = x_0$$

$$x_1 = 1 / y_1$$

$$x_2 = -x_1^3 y_2$$

$$x_3 = -x_1^3 (x_1 y_3 + x_2 (2 y_1 y_2))$$

$$x_4 = -x_1^4 (x_1 y_4 + x_2 (2 y_1 y_3 + y_2^2) + x_3 (3 y_1^2 y_2))$$

$$x_5 = -x_1^5 (x_1 y_5 + x_2 (2 (y_1 y_4 + y_2 y_3)) + x_3 (3 y_1 (y_1 y_3 + y_2^2)) + x_4 (4 y_1^3 y_2))$$

También se puede usar la composición

$$f(y) = y(x(y))$$

siendo $f(y)$ la función identidad siguiente

$$f(y) = y_0 + v \quad ; \quad f_0 = y_0 \quad ; \quad f_1 = 1 \quad ; \quad f_k = 0 \quad (k \geq 2)$$

resultando el siguiente proceso de cálculo

$$x_0 = f_0 \quad ; \quad x_k = (f_k - \sum_{i=2}^k y_i w_{i,k-i}) / y_1 \quad (k \geq 1)$$

$$w_{1,k} = x_{k+1} \quad (k \geq 0)$$

$$w_{m,k} = \sum_{i=0}^k w_{m-1,i} w_{1,k-i} \quad (m \geq 2, k \geq 0)$$

Como ejemplo, los primeros coeficientes del desarrollo inverso son

$$x_1 = 1 / y_1$$

$$x_2 = -x_1^3 y_2$$

$$x_3 = -x_1 (y_2 (2 x_1 x_2) + y_3 x_1^3)$$

$$x_4 = -x_1 (y_2 (2 x_1 x_3 + x_2^2) + y_3 (3 x_1^2 x_2) + y_4 x_1^4)$$

$$x_5 = -x_1 (y_2 (2 (x_1 x_4 + x_2 x_3)) + y_3 (3 x_1 (x_1 x_3 + x_2^2)) + y_4 (4 x_1^3 x_2) + y_5 x_1^5)$$

Conversión de un desarrollo de potencias en un desarrollo de fracciones simples

Sea la función

$$y = y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k (x - x_0)^k$$

Definiendo la variable

$$u = (x - x_0)$$

se simplifica

$$y = y(x) = u_0(u) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k u^k$$

Se quiere hallar el desarrollo de la función mediante fracciones simples, usando recursivamente funciones $u_m(u)$ y $v_m(u)$, del siguiente modo

$$y(x) = u_0(u) \quad ; \quad u_m(u) = a_m + u v_m(u) \quad ; \quad v_m(u) = b_m / u_{m+1}(u) \quad (m \geq 0)$$

donde a_m y b_m son coeficientes a determinar en función de los coeficientes y_k y de alguna relación adicional (hay el doble de coeficientes a determinar).

Para $u = 0$ se deduce

$$u_m(0) = a_m \quad ; \quad v_m(0) = b_m / a_{m+1}$$

Sustituyendo $m = 0$ en la expresión de $u_m(u)$, se obtiene

$$y(x) = u_0(v) = a_0 + u v_0(u)$$

Separando el primer término del desarrollo de $y(x)$ como sigue

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k u^k = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} y_k u^k = y_0 + u \sum_{k=0}^{\infty} y_{k+1} u^k$$

se deduce

$$u_0(u) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k u^k \quad ; \quad v_0(u) = \sum_{k=0}^{\infty} y_{k+1} u^k$$

$$u_0(0) = a_0 = y_0 \quad ; \quad v_0(0) = b_0 / a_1 = y_1$$

Para seguir desarrollando, se debe establecer una relación adicional entre las constantes a_m y b_m . Se van a distinguir los tres casos descritos a continuación.

Caso 1. Términos b_m unitarios:

Teniendo en cuenta que

$$u_m(u) = a_m + u \quad v_m(u) = a_m + u \quad b_m / u_{m+1}(u) = a_m + u / u_{m+1}(u)$$

los coeficientes a_m y las funciones $u_m(u)$ se obtienen recursivamente como sigue

$$a_m = u_m(0) \quad ; \quad u_{m+1}(u) = u / (u_m(u) - a_m) \quad (m \geq 0)$$

Sea el desarrollo de potencias de $u_m(u)$ definido del siguiente modo

$$u_m(u) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{m,k} u^k \quad ; \quad a_m = u_m(0) = u_{m,0} \quad (m \geq 0)$$

Para $m = 0$, se deducen las identidades

$$u_0(u) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{0,k} u^k = \sum_{k=0}^{\infty} y_k u^k \quad ; \quad u_{0,k} = y_k \quad ; \quad u_{0,0} = u_0(0) = a_0 = y_0$$

Según la expresión de u_{m+1} en función de u_m , la función $(1 / u_{m+1})$ es

$$(1 / u_{m+1}) = (u_m(u) - a_m) / u = \sum_{k=0}^{\infty} u_{m,k+1} u^k \quad (m \geq 0)$$

Teniendo en cuenta las dos expresiones anteriores y el desarrollo de la función cociente respecto a la unidad, para la función u_{m+1} , sustituyendo m por $(m - 1)$, resulta el algoritmo siguiente

$$b_m = 1 \quad (m \geq 0)$$

$$u_{0,k} = y_k \quad (k \geq 0)$$

$$u_{m,0} = 1 / u_{m-1,1} \quad (m \geq 1)$$

$$u_{m,k} = -u_{m,0} \sum_{i=1}^k u_{m-1,i+1} u_{m,k-i} \quad (m \geq 1, k \geq 1)$$

$$a_m = u_{m,0} \quad (m \geq 0)$$

Nótese que si algún coeficiente $u_{m,1}$ resulta ser nulo, este desarrollo no tiene solución.

Caso 2. Términos a_m unitarios (excepto a_0):

Teniendo en cuenta que

$$v_m(u) = b_m / u_{m+1}(u) = b_m / (a_{m+1} + u \quad v_{m+1}(u)) = b_m / (1 + u \quad v_{m+1}(u))$$

los coeficientes b_m y las funciones $v_m(u)$ se obtienen recursivamente como sigue

$$b_m = v_m(0) \quad ; \quad v_{m+1}(u) = (b_m / v_m(u) - 1) / u$$

Sea el desarrollo de $v_m(u)$ definido del siguiente modo

$$v_m(u) = \sum_{k=0}^{\infty} v_{m,k} u^k \quad ; \quad b_m = v_m(0) = v_{m,0} \quad (m \geq 1)$$

Para $m = 0$, se deducen las identidades

$$v_0(u) = \sum_{k=0}^{\infty} v_{0,k} u^k = \sum_{k=0}^{\infty} y_{k+1} u^k \quad ; \quad v_{0,k} = y_{k+1} \quad ; \quad v_{0,0} = v_0(0) = b_0 = y_1$$

Los coeficientes de la función cociente respecto a la unidad de $v_m(u)$ son

$$(1/v_m)_0 = 1/v_{m,0} \quad ; \quad (1/v_m)_k = -(1/v_{m,0}) \sum_{i=1}^k v_{m,i} (1/v_m)_{k-i} \quad (m \geq 1)$$

Teniendo en cuenta que

$$v_{m+1}(u) = (v_{m,0} (1 / v_m(u)) - 1) / u$$

se deducen los coeficientes de $v_{m+1}(u)$

$$v_{m+1,k} = v_{m,0} (1/v_m)_{k+1} \quad (m \geq 0, k \geq 0)$$

Usando la expresión anterior de $(1/v_m)_k$

$$v_{m+1,k} = - \sum_{i=1}^{k+1} v_{m,k+1} (1/v_m)_{k+1-i} = -(1/v_{m,0}) \sum_{i=1}^{k+1} v_{m,k+1} v_{m+1,k-i} \quad (m \geq 0, k \geq 0)$$

Teniendo en cuenta las expresiones anteriores y el desarrollo de u_{m+1} , sustituyendo m por $(m - 1)$, resulta el algoritmo siguiente

$$a_0 = y_0 \quad ; \quad a_m = 1 \quad (m \geq 1)$$

$$v_{0,k} = y_{k+1} \quad (k \geq 0)$$

$$v_{m,k} = -(1/v_{m-1,0}) \sum_{i=1}^{k+1} v_{m-1,k+1} v_{m,k-i} \quad (m \geq 1, k \geq 0)$$

$$b_m = v_{m,0} \quad (m \geq 0)$$

ANEXO G TEOREMA DE LAMBERT

El *Teorema de Lambert* enuncia que el tiempo de transferencia (Δt) empleado para recorrer un arco de trayectoria cónica, en presencia de una fuerza dirigida hacia un foco fijo e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, caracterizada por la constante de atracción del primario (μ), sólo depende del semieje mayor (a), la suma de radiovectores ($\Sigma r = r_0 + r_1$) de los puntos inicial y final, y la cuerda (c) que conecta los extremos del arco. Su expresión matemática es

$$\sqrt{\mu} \Delta t = f(a, \Sigma r, c)$$

En otras palabras, este teorema asegura que dos arcos descritos sobre diferentes cónicas (independientemente de su forma), que tengan los mismos parámetros ($a, \Sigma r, c$), tardan el mismo tiempo en ser recorridos.

De la relación (1.2.3) entre ($\Sigma r, r_C, c$)

$$c^2 = (\Sigma r)^2 - (2 r_C)^2$$

se deduce que el *Teorema de Lambert* podría haberse enunciado también, de forma totalmente equivalente, como

$$\sqrt{\mu} \Delta t = f(a, \Sigma r, r_C) \quad \text{o} \quad \sqrt{\mu} \Delta t = f(a, c, r_C)$$

y en general

$$\sqrt{\mu} \Delta t = f(a, d_1, d_2)$$

donde d_1 y d_2 son dos distancias cualesquiera dependientes ambas de los parámetros Σr y c , pero independientes entre sí. Otras posibles distancias, aparte de Σr , c y r_C , comúnmente usadas por otros autores, son el semieje mayor de la *Elipse Fundamental* (a_F), el semiperímetro del triángulo formado por los radiovectores y la cuerda (s) o el radio del punto medio parabólico (r_{0p}), definidos en (1.2.1), (1.2.4) y (1.2.5), respectivamente.

El *Teorema de Lambert*, debe su nombre al propio Lambert^[1], que lo demuestra para trayectorias elípticas, aunque Euler^[2] ya lo demostró previamente, pero sólo para órbitas parabólicas. De forma resumida, la demostración de Lambert se basa en una ingeniosa transformación de sectores elípticos donde deduce que si en diferentes elipses que tienen el mismo eje mayor, se toman áreas tales que las cuerdas entre dos radiovectores son las mismas, estas áreas son proporcionales a las raíces cuadradas de los respectivos parámetros y, en consecuencia, los tiempos empleados para recorrer los arcos de estos sectores deben ser iguales, debido a que el tiempo varía como en el área del sector dividido por la raíz cuadrada del parámetro.

Aunque esta demostración proporcionada por Lambert es perfectamente válida, la primera demostración analítica rigurosa se debe a Lagrange^[3], mediante su formulación

para órbitas elípticas, y poco después también lo demostró Gauss^[4] de forma independiente.

Las demostraciones de Lagrange y Gauss son bastante parecidas, ambas parten de las mismas ecuaciones de las cónicas y ambas usan la semisuma y semidiferencia de la anomalía excéntrica en sus desarrollos intermedios. A continuación se muestran los desarrollos intermedios comunes y luego se realizan los cambios de variable que proponen cada uno de ellos para llegar a la demostración. Las demostraciones se han extendido para considerar también el caso de múltiple revolución. Se omite la demostración para el caso hiperbólico por ser totalmente análoga al caso elíptico, sustituyendo las anomalías excéntricas por las correspondientes hiperbólicas y usando funciones hiperbólicas en lugar de trigonométricas.

Para el caso elíptico, se parte de la *Ecuación Temporal*, o *Ley Horaria*, para órbitas elípticas

$$\sqrt{\mu} (t - t_p) = a^{3/2} (E - e \sin E)$$

y de las siguientes ecuaciones para las coordenadas (x, y) y el radiovector (r) en los ejes polares de la elipse

$$x = a (\cos E - e) \quad ; \quad y = a (1 - e^2)^{1/2} \sin E \quad ; \quad r = a (1 - e \cos E)$$

donde t_p es el tiempo de paso por el perigeo, a el semieje mayor, e la excentricidad, t el tiempo de paso y E la anomalía excéntrica, estos dos últimos para un punto genérico, y en particular para los puntos inicial y final, indicados con subíndices 0 y 1, respectivamente.

En los siguientes desarrollos se van a usar los operadores suma (Σ) y diferencia (Δ) aplicados a cualquier variable z entre los puntos inicial y final, definidos como

$$\Sigma z = z_1 + z_0 \quad ; \quad \Delta z = z_1 - z_0$$

No obstante, para el caso de múltiple revolución, con N vueltas completas previas, también se definen los operadores Σ_n y Δ_n como

$$\Sigma_n z = z_{1,n} + z_0 \quad ; \quad \Delta_n z = z_{1,n} - z_0 \quad (0 \leq n \leq N)$$

donde $z_{1,n}$ es la variable z en el punto final después de n vueltas completas previas. Estos operadores sólo son necesarios para las variables angulares, como las anomalías excéntrica (E) y verdadera (ν), para las cuales se cumple

$$z_{1,n} = z_{1,0} + 2 n \pi \quad ; \quad z_1 = z_{1,N} \quad ; \quad \Sigma z = \Sigma_N z \quad ; \quad \Delta z = \Delta_N z$$

Para el resto de variables es $z_1 = z_{1,n}$ para cualquier valor de n y, por tanto, no son necesarios los operadores Σ_n y Δ_n .

Los senos y cosenos de las anomalías excéntricas en función de la semisuma ($\Sigma_0 E/2$) y la semidiferencia ($\Delta_0 E/2$), son

$$\cos E_{1,0} = \cos(\Delta_0 E/2 + \Sigma_0 E/2) = \cos(\Delta_0 E/2) \cos(\Sigma_0 E/2) - \sin(\Delta_0 E/2) \sin(\Sigma_0 E/2)$$

$$\cos E_0 = \cos(\Delta_0 E/2 - \Sigma_0 E/2) = \cos(\Delta_0 E/2) \cos(\Sigma_0 E/2) + \sin(\Delta_0 E/2) \sin(\Sigma_0 E/2)$$

$$\sin E_{1,0} = \sin(\Delta_0 E/2 + \Sigma_0 E/2) = \cos(\Delta_0 E/2) \sin(\Sigma_0 E/2) + \sin(\Delta_0 E/2) \cos(\Sigma_0 E/2)$$

$$\sin E_0 = \sin(\Delta_0 E/2 - \Sigma_0 E/2) = \cos(\Delta_0 E/2) \sin(\Sigma_0 E/2) - \sin(\Delta_0 E/2) \cos(\Sigma_0 E/2)$$

y las sumas y diferencias de estas funciones trigonométricas

$$\Sigma_0 \cos E = \cos E_{1,0} + \cos E_0 = 2 \cos(\Delta_0 E/2) \cos(\Sigma_0 E/2)$$

$$\Delta_0 \cos E = \cos E_{1,0} - \cos E_0 = -2 \sin(\Delta_0 E/2) \sin(\Sigma_0 E/2)$$

$$\Sigma_0 \sin E = \sin E_{1,0} + \sin E_0 = 2 \cos(\Delta_0 E/2) \sin(\Sigma_0 E/2)$$

$$\Delta_0 \sin E = \sin E_{1,0} - \sin E_0 = 2 \sin(\Delta_0 E/2) \cos(\Sigma_0 E/2)$$

Con estas expresiones, restando la *Ecuación Temporal* entre los puntos inicial y final, se obtiene

$$\sqrt{\mu} \Delta t = a^{3/2} (2 N \pi + \Delta_0 E - e \Delta_0 \sin E)$$

$$\sqrt{\mu} \Delta t = 2 a^{3/2} (N \pi + \Delta_0 E/2 - e \sin(\Delta_0 E/2) \cos(\Sigma_0 E/2))$$

y sumando la ecuación del radiovector, también para ambos puntos,

$$\Sigma r = a (2 - e \Sigma_0 \cos E) = 2 a (1 - e \cos(\Delta_0 E/2) \cos(\Sigma_0 E/2))$$

y por último, restando las coordenadas

$$\Delta x = a \Delta_0 \cos E = -2 a \sin(\Delta_0 E/2) \sin(\Sigma_0 E/2)$$

$$\Delta y = a (1 - e^2)^{1/2} \Delta_0 \sin E = 2 a (1 - e^2)^{1/2} \sin(\Delta_0 E/2) \cos(\Sigma_0 E/2)$$

y sumando sus cuadrados se obtiene el cuadrado de la cuerda (distancia entre puntos inicial y final)

$$c^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = 4 a^2 \sin^2(\Delta_0 E/2) (1 - e^2 \cos^2(\Sigma_0 E/2))$$

Aquí terminan los desarrollos comunes a Lagrange y Gauss. La demostración, más sencilla es la de Gauss, el cual, definiendo las variables (ψ , ϕ) siguientes

$$\psi = \Delta_0 E/2$$

$$\cos \phi = e \cos(\Sigma_0 E/2)$$

consigue que las expresiones anteriores, de (Δt , Σr , c) en función de (a , e , $\Sigma_0 E/2$, $\Delta_0 E/2$) den lugar al siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (a , ψ , ϕ)

$$\sqrt{\mu} \Delta t = 2 a^{3/2} (N \pi + \psi - \sin \psi \cos \phi)$$

$$\Sigma r = 2 a (1 - \cos \psi \cos \phi)$$

$$c = 2 a \sin \psi \sin \phi$$

de donde, despejando en las dos últimas ecuaciones las variables (ψ, ϕ) en función de $(a, \Sigma r, c)$, se deduce, al sustituir en la primera ecuación, el *Teorema de Lambert*.

Adicionalmente, de las relaciones conocidas de las cónicas entre anomalía verdadera (ν) y excéntrica (E)

$$r \cos^2(\nu/2) = a (1 - e) \cos^2(E/2)$$

$$r \sin^2(\nu/2) = a (1 + e) \sin^2(E/2)$$

y teniendo en cuenta las variables definidas en [\(1.2.1\)](#)

$$\Delta \theta = \Delta_0 \nu = \Delta \nu - 2 N \pi \quad ; \quad \delta = \Delta \theta / 2 \quad ; \quad r_R = (r_0 r_1)^{1/2} \quad ; \quad r_C = r_R \cos \delta$$

se deduce

$$r_C = r_R \cos(\Delta_0 \nu / 2) = r_R \cos(\nu_0 / 2) \cos(\nu_{1,0} / 2) + r_R \sin(\nu_0 / 2) \sin(\nu_{1,0} / 2)$$

$$r_C = a (1 - e) \cos(E_0 / 2) \cos(E_{1,0} / 2) + a (1 + e) \sin(E_0 / 2) \sin(E_{1,0} / 2)$$

$$r_C = a (\cos(\Delta_0 E / 2) - e \cos(\Sigma_0 E / 2))$$

y usando las variables (ψ, ϕ) resulta

$$r_C = a (\cos \psi - \cos \phi)$$

Esta última expresión también se puede deducir directamente despejando r_C de la identidad geométrica [\(1.2.3\)](#)

$$c^2 = (\Sigma r)^2 - (2 r_C)^2,$$

sustituyendo las expresiones de Σr y c en función de (a, ψ, ϕ) , del sistema de ecuaciones anterior. Es más, obtenidas dos de las tres expresiones $(\Sigma r, r_C, c)$ en función de (a, ψ, ϕ) , esta identidad permite obtener directamente la otra. De hecho, en otras demostraciones similares del *Teorema de Lambert*, por ejemplo en Battin^[5], se obtiene primero Σr y r_C , y después c usando dicha identidad.

La demostración de Lagrange, en lugar de las variables (ψ, ϕ) , usa las semisumas y semidiferencias (α, β) de (ψ, ϕ) , no obstante, también se pueden usar las sumas y semisumas $(\xi, \eta) = (\alpha/2, \beta/2)$ definidas como

$$\xi - \eta = \psi = \Delta_0 E / 2$$

$$\cos(\xi + \eta) = e \cos(\Sigma_0 E/2)$$

pues la lógica es la misma y las expresiones obtenidas son algo más fáciles. En el resultado final sólo es necesario sustituir (ξ, η) por $(\alpha/2, \beta/2)$ para obtener los resultados en función de (α, β) .

Nótese que la relación entre (ξ, η) y (ψ, ϕ) es tan simple como

$$\psi = \xi - \eta$$

$$\phi = \xi + \eta$$

De este modo, las expresiones iniciales de $(\Delta t, \Sigma r, c)$ en función de $(a, e, \Sigma_0 E/2, \Delta_0 E/2)$, o en función de (a, ψ, ϕ) , dan lugar al siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (a, ξ, η)

$$\sqrt{\mu} \Delta t = 2 a^{3/2} (N \pi + \xi - \eta - \sin(\xi - \eta) \cos(\xi + \eta))$$

$$\Sigma r = 2 a (1 - \cos(\xi - \eta) \cos(\xi + \eta))$$

$$c = 2 a \sin(\xi - \eta) \sin(\xi + \eta)$$

Teniendo ahora en cuenta las identidades

$$\cos(\xi - \eta) = \cos \xi \cos \eta + \sin \xi \sin \eta$$

$$\sin(\xi - \eta) = \sin \xi \cos \eta - \cos \xi \sin \eta$$

$$\cos(\xi + \eta) = \cos \xi \cos \eta - \sin \xi \sin \eta$$

$$\sin(\xi + \eta) = \sin \xi \cos \eta + \cos \xi \sin \eta$$

y simplificando el desarrollo de los productos

$$\sin(\xi - \eta) \cos(\xi + \eta) = \sin \xi \cos \xi - \sin \eta \cos \eta = (\sin(2\xi) - \sin(2\eta)) / 2$$

$$\cos(\xi - \eta) \cos(\xi + \eta) = \cos^2 \xi \cos^2 \eta - \sin^2 \xi \sin^2 \eta = 1 - \sin^2 \xi - \sin^2 \eta$$

$$\sin(\xi - \eta) \sin(\xi + \eta) = \sin^2 \xi \cos^2 \eta - \cos^2 \xi \sin^2 \eta = \sin^2 \xi - \sin^2 \eta$$

resulta el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (a, ξ, η)

$$\sqrt{\mu} \Delta t = a^{3/2} (2 N \pi + (2\xi - \sin(2\xi)) - (2\eta - \sin(2\eta)))$$

$$\Sigma r = 2 a (\sin^2 \xi + \sin^2 \eta)$$

$$c = 2 a (\sin^2 \xi - \sin^2 \eta)$$

De las dos últimas ecuaciones, usando el semiperímetro definido en [\(1.2.4\)](#), se puede despejar

$$\sin^2 \xi = (\Sigma r + c) / (4 a) = s / (2 a)$$

$$\sin^2 \eta = (\Sigma r - c) / (4 a) = (s - c) / (2 a)$$

que demuestra que los ángulos (ξ, η) sólo dependen de $(a, \Sigma r, c)$ y, por tanto, de la primera ecuación de Δt en función de (a, ξ, η) se deduce el *Teorema de Lambert*.

Nótese que, usando [\(1.2.3\)](#)

$$\sin^2 \eta / \sin^2 \xi = (\Sigma r - c) / (\Sigma r + c) = ((\Sigma r)^2 - c^2) / (\Sigma r + c)^2 = (2 r_C)^2 / (2 s)^2 = (r_C/s)^2$$

y por tanto

$$\sin \eta = q_L \sin \xi$$

donde

$$q_L = r_C / s$$

que demuestra que los ángulos ξ y η están relacionados entre sí sólo a través de la relación $c/\Sigma r$ que define la geometría característica del *Problema de Lambert*.

Adicionalmente, de la misma forma que Σr y a , también se puede calcular

$$r_C = a (\cos(\xi - \eta) - \cos(\xi + \eta))$$

que simplificada se transforma en

$$r_C = 2 a \sin \xi \sin \eta$$

Esta ecuación podría sustituir a cualquiera de las dos últimas anteriores de Σr ó c en función de (a, ξ, η) .

En resumen, en la expresión de Δt en función de (a, ξ, η) , definiendo el tiempo adimensional

$$T = \sqrt{\mu} \Delta t / (s/2)^{3/2} = \sqrt{8 \mu / s} \Delta t / s$$

y sustituyendo (ξ, η) por $(\alpha/2, \beta/2)$, como es usual en la literatura, se obtiene el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (α, β) para resolver el *Problema de Lambert*

$$T \sin^3(\alpha/2) = 2 N \pi + (\alpha - \sin \alpha) - (\beta - \sin \beta)$$

$$\sin(\beta/2) = q_L \sin(\alpha/2)$$

ANEXO H ECUACIONES RELEVANTES EXISTENTES

En este anexo se van a determinar las ecuaciones más relevantes existentes en la literatura.

Ecuaciones de Gauss deducidas de su formulación para demostrar el Teorema de Lambert

Las ecuaciones de Gauss, de $(\Delta t, \Sigma r, c)$ en función de (a, ψ, ϕ) , deducidas de su formulación para demostrar el *Teorema de Lambert*, mostrada en el [Anexo G](#), constituyen un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas para resolver el *Problema de Lambert*, donde además cualquiera de las dos últimas ecuaciones (Σr ó c) se puede sustituir por la ecuación de r_C en función de (a, ψ, ϕ) .

Usando el semieje mayor de la *Elipse Fundamental* (a_F), definido en [\(1.2.1\)](#) y el ángulo fundamental (f) definido en [\(1.2.7\)](#), el semieje mayor adimensional $\alpha = a/a_F$, y el tiempo adimensional $\tau = \sqrt{\mu} \Delta t / (2 a_F^{3/2})$, el sistema de ecuaciones de Gauss se transforma en el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (α, ψ, ϕ)

$$\text{Ecuación 1: } \tau = \alpha^{3/2} (N \pi + \psi - \sin \psi \cos \phi)$$

$$\text{Ecuación 2: } 1 = \alpha (1 - \cos \psi \cos \phi)$$

$$\text{Ecuación 3: } \sin f = \alpha \sin \psi \sin \phi$$

pudiendo sustituir cualquiera de las dos últimas por

$$\text{Ecuación 4: } \cos f = \alpha (\cos \psi - \cos \phi)$$

Las dos primeras ecuaciones, junto con una cualquiera de las otras dos, dan lugar a la *Ecuación Elemental Doble Dependiente* desarrollada en [2.1.4](#) para el caso elíptico. De la ecuación 2 y 4, se puede despejar $\cos \phi$ y α en función de ψ , y sustituyendo en la ecuación 1, se consigue deducir la *Ecuación Elemental Principal* desarrollada en [2.1.3](#) y, a partir de ésta, todas las demás *Ecuaciones Elementales* deducidas en [2.1](#).

Se concluye que, la propia *Formulación de Gauss* para demostrar el *Teorema de Lambert*, conduce a cualquiera de las *Ecuaciones Elementales* desarrolladas en este trabajo. No obstante, la deducción realizada [2.1](#), es más rigurosa, siendo válida para todos los casos (hiperbólico, parabólico y elíptico, incluyendo múltiple revolución) y proporcionando un significado a todas las variables.

Es sorprendente que estas ecuaciones deducidas por Gauss, en principio sólo para demostrar el *Teorema de Lambert*, no se hayan explotado para resolver el *Problema de Lambert*. Su gran potencial, como muestra la presente tesis, ha quedado relegado a un segundo plano durante dos siglos, posiblemente en favor de la *Formulación de Lagrange* y de la más conocida *Solución de Gauss*, también del propio Gauss.

Ecuaciones de Lagrange deducidas de su formulación para demostrar el Teorema de Lambert

Las ecuaciones de Lagrange de $(\Delta t, \Sigma r, c)$ en función de (a, α, β) , deducidas de su formulación para demostrar el *Teorema de Lambert*, mostrada en el [Anexo G](#), dan lugar al siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para resolver el *Problema de Lambert*

$$T \sin^3(\alpha/2) = 2 N \pi + (\alpha - \sin \alpha) - (\beta - \sin \beta)$$

$$\sin(\beta/2) = q_L \sin(\alpha/2)$$

donde

$$c = (r_0^2 + r_1^2 - 2 r_0 r_1 \cos \Delta \nu)^{1/2} \quad ; \quad s = (\Sigma r + c) / 2$$

$$T = \sqrt{8 \mu / s} \Delta t / s \quad ; \quad q_L = \sqrt{r_0 r_1} \cos(\Delta \theta / 2) / s$$

Esta ecuación es el punto de partida de numerosos métodos existentes, como el de Lancaster and Blanchard^[6] y el de Gooding^[7].

Nótese que usando las variables a_F, f y τ , definidas en [\(1.2.1\)](#), [\(1.2.7\)](#) y [\(1.2.14\)](#), los parámetros anteriores se pueden calcular alternativamente

$$s = a_F (1 + \sin f) \quad ; \quad T = 2 (2 / (1 + \sin f))^{3/2} \tau \quad ; \quad q_L = \cos f / (1 + \sin f)$$

Téngase en cuenta que el ángulo α , no es la misma variable α usada para el semieje mayor adimensional definido en [\(1.2.14\)](#).

Lancaster and Blanchard

Esta solución parte de la *Formulación de Lagrange* para demostrar el *Teorema de Lambert*, mostrada en el [Anexo G](#), pero usando también el ángulo ψ de la *Formulación de Gauss*, de forma que la ecuación base, con los ángulos (ξ, η) en lugar de (α, β) , es para el caso elíptico

$$\psi = \xi - \eta \quad ; \quad \sin \eta = q_L \sin \xi$$

$$T \sin^3 \xi = 2 (N \pi + \psi) + \sin(2 \eta) - \sin(2 \xi) = 2 (N \pi + \psi + \sin \xi (q_L \cos \eta - \cos \xi))$$

y usando las equivalencias

$$\xi = -i \Xi \quad ; \quad \eta = -i H \quad ; \quad \psi = -i \Psi$$

para el caso hiperbólico

$$\Psi = \Xi - H \quad ; \quad \sin H = q_L \sin \Xi$$

$$T \sin^3 \Xi = \sinh(2H) - \sinh(2\Xi) - 2 \Psi = 2 (\sin \Xi (q_L \cos H - \cos \Xi) - \Psi)$$

y definiendo la variable independiente x como

$$x = \cos \xi = \cosh \Xi$$

se puede calcular

$$\cos^2 \xi = \cosh^2 \Xi = x^2 \quad ; \quad -\sin^2 \xi = \sinh^2 \Xi = E = x^2 - 1$$

$$-\sin^2 \eta = \sin^2 H = q_L^2 E \quad ; \quad \cos^2 H = \cos^2 \eta = z^2 = 1 + q_L^2 E$$

y distinguiendo para el caso elíptico

$$\sin \xi = y = (-E)^{1/2} \quad ; \quad \cos \eta = z = (1 + q_L^2 E)^{1/2}$$

$$\sin \psi = \sin \xi \cos \eta - \cos \xi \sin \eta = \sin \xi (\cos \eta - q_L \cos \xi) = f = y (z - q_L x)$$

$$\cos \psi = \cos \xi \cos \eta + \sin \xi \sin \eta = \cos \xi \cos \eta + q_L \sin^2 \xi = g = x z - q_L E$$

$$\psi = \text{atan}(f/g) \quad ; \quad d = N \pi + \psi$$

$$T = 2 (x - q_L z - d / y) / E$$

y el caso hiperbólico

$$\sin \Xi = y = E^{1/2} \quad ; \quad \cos H = z = (1 + q_L^2 E)^{1/2}$$

$$\sinh \Psi = \sinh \Xi \cos H - \cosh \Xi \sin H = \sin \Xi (\cos H - q_L \cos \Xi) = f = y (z - q_L x)$$

$$\cosh \Psi = \cosh \Xi \cos H - \sinh \Xi \sin H = \cos \Xi \cos H - q_L \sin^2 \Xi = g = x z - q_L E$$

$$\cos^2 \xi = \cosh^2 \Xi = x^2 \quad ; \quad -\sin^2 \xi = \sinh^2 \Xi = E = x^2 - 1$$

$$d = \log(f + g)$$

$$T = 2 (x - q_L z - d / y) / E$$

Resumiendo, se llega a la siguiente solución propuesta por Lancaster and Blanchard, válida para todos los casos elíptico e hiperbólico.

$$E = x^2 - 1 \quad ; \quad y = |E|^{1/2} \quad ; \quad z = (1 + K E)^{1/2}$$

$$f = y (z - q_L x) \quad ; \quad g = x z - q_L E$$

$$\lambda = \text{atan}(f/g) \quad ; \quad d = N \pi + \lambda \quad (0 \leq \lambda \leq \pi) \quad (\text{para } E \leq 0)$$

$$d = \log(f + g) \quad (\text{para } E > 0)$$

$$T = 2 (x - q_L z - d / y) / E \quad ; \quad dT/dx = (4 - L x / z - 3 x T) / E$$

donde

$$c = (r_0^2 + r_1^2 - 2 r_0 r_1 \cos \Delta \nu)^{1/2} \quad ; \quad s = (\Sigma r + c) / 2 \quad ; \quad T = \sqrt{8 \mu / s} \Delta t / s$$

$$q_L = \sqrt{r_0 r_1} \cos(\Delta \theta / 2) / s \quad ; \quad K = q_L^2 \quad ; \quad L = 4 q_L K$$

Aún resuelto el problema de precisión de los datos, estas ecuaciones también presentan un problema de precisión para las soluciones cercanas a la parabólica. Para resolverlo, Lancaster and Blanchard proponen el siguiente desarrollo en serie de potencias en torno a la solución parabólica

$$T = \sigma(E) - q K \sigma(-E) \quad ; \quad \sigma(u) = \frac{2(\operatorname{asin} \sqrt{u} - \sqrt{u} \sqrt{1-u})}{u^{3/2}}$$

donde el desarrollo de la función $\sigma(u)$ es

$$\sigma(u) = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n u^n \quad ; \quad a_n = \frac{(2n-1)!!}{2^{n-2} (2n+3)n!}$$