UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
Escuela Técnica Superior de Ingenieros en
Topografía, Geodesia y Cartografía

Calibración geométrica de cámaras no métricas.
Estudio de metodologías y
modelos matemáticos de distorsión

TESIS DOCTORAL

Autor

Julián Aguirre de Mata
Ingeniero en Geodesia y Cartografía

Directoras

Dra. Ana María Domingo Preciado
Doctora en Ciencias Exactas

Dra. Rosa Mariana Chueca Castedo
Doctora en Ciencias Matemáticas

2016

Departamento de Ingeniería Topográfica y Cartografía

**Escuela Técnica Superior de Ingenieros en
Topografía, Geodesia y Cartografía**

Calibración geométrica de cámaras no métricas. Estudio de metodologías y modelos matemáticos de distorsión

TESIS DOCTORAL

Autor

Julián Aguirre de Mata

Ingeniero en Geodesia y Cartografía

Directoras

Dra. Ana María Domingo Preciado

Doctora en Ciencias Exactas

Dra. Rosa Mariana Chueca Castedo

Doctora en Ciencias Matemáticas

2016

Tribunal nombrado por el Sr. Rector Magnífico de la Universidad Politécnica de Madrid,
el día ____ de _____ de 2016.

Presidente:

D. _____

Vocales:

D. _____

D. _____

D. _____

Secretario:

D. _____

Suplentes:

D. _____

D. _____

Realizado el acto de defensa y lectura de la Tesis el día ____ de _____ de 2016
en la E.T.S.I. en Topografía, Geodesia y Cartografía.

Calificación _____

El presidente

Los vocales

El secretario

Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento a mis dos directoras de tesis, la Dra. Ana M. Domingo y la Dra. Rosa M. Chueca, por todo lo aprendido y compartido, no sólo en este último tramo que ha supuesto la Tesis, sino a lo largo de mi vida profesional como docente. Gracias por vuestra ayuda, comprensión y apoyo.

No puedo olvidarme del Dr. Narciso García, director de mi primera intentona de tesis, que me acogió de buen grado, con sus muchos quehaceres, viajes y compromisos. Una pena, me encantaría poder colaborar contigo en un futuro.

Gracias a la ETSI en Topografía, Geodesia y Cartografía y al Departamento de Ingeniería Topográfica y Cartografía, por brindarme los medios y el apoyo necesarios para la consecución del trabajo, particularizando este agradecimiento en sus directores, el Dr. Jesús Velasco y el Dr. Miguel Ángel Manso, respectivamente, por procurarme el mejor de los escenarios posibles.

Gracias a mis compañeros en la Escuela, PDI y PAS, por interesarse, animarme y ayudarme en lo que ha estado en sus manos. Especial agradecimiento a mi compañera Marina Martínez, por todas las manos tendidas y a José Luis Valbuena, por el diseño y confección de la guía epipolar.

A mis alumnos, por motivarme, alentarme y exigirme para seguir avanzando. Además, Ángela, Marta, Roberto Á., Roberto C. y Virginia me ayudaron desinteresadamente a medir los ensayos. ¡Muchísimas gracias!

A mi familia, a la que he desatendido últimamente, y amigos, por suavizar, de una forma u otra, los peores momentos.

Por último, GRACIAS a mis padres, ellos me enseñaron lo bueno que hay en mí (el resto no es culpa suya), a Marta, por su amor, apoyo, dedicación (a su trabajo, a la casa, a los niños,...) y paciencia en este tiempo –esta Tesis también es tuya–, y a mis hijos, Carlos y Esther, la verdadera razón de este esfuerzo, porque, pese a su corta edad, han comprendido mi dedicación a algo que no era atenderles. Os quiero.

A Marta, Carlos y Esther

A mis padres

Resumen

La Fotogrametría, como ciencia y técnica de obtención de información tridimensional del espacio objeto a partir de imágenes bidimensionales, requiere de medidas de precisión y en ese contexto, la calibración geométrica de cámaras ocupa un lugar importante.

El conocimiento de la geometría interna de la cámara es fundamental para lograr mayor precisión en las medidas realizadas. En Fotogrametría Aérea se utilizan cámaras métricas (fabricadas exclusivamente para aplicaciones cartográficas), que incluyen objetivos fotográficos con sistemas de lentes complejos y de alta calidad. Pero en Fotogrametría de Objeto Cercano se está trabajando cada vez con más asiduidad con cámaras no métricas, con ópticas de peor calidad que exigen una calibración geométrica antes o después de cada trabajo.

El proceso de calibración encierra tres conceptos fundamentales: modelo de cámara, modelo de distorsión y método de calibración. El *modelo de cámara* es un modelo matemático que aproxima la transformación proyectiva original a la realidad física de las lentes. Ese modelo matemático incluye una serie de parámetros entre los que se encuentran los correspondientes al *modelo de distorsión*, que se encarga de corregir los errores sistemáticos de la imagen. Finalmente, el *método de calibración* propone el método de estimación de los parámetros del modelo matemático y la técnica de optimización a emplear.

En esta Tesis se propone la utilización de un patrón de calibración bidimensional que se desplaza en la dirección del eje óptico de la cámara, ofreciendo así tridimensionalidad a la escena fotografiada. El patrón incluye un número elevado de marcas, lo que permite realizar ensayos con distintas configuraciones geométricas.

Tomando el modelo de proyección perspectiva (o *pinhole*) como modelo de cámara, se realizan ensayos con tres modelos de distorsión diferentes, el clásico de distorsión radial y tangencial propuesto por D.C. Brown, una aproximación por polinomios de Legendre y una interpolación bicúbica.

De la combinación de diferentes configuraciones geométricas y del modelo de distorsión más adecuado, se llega al establecimiento de una metodología de calibración óptima. Para ayudar a la elección se realiza un estudio de las precisiones obtenidas en los distintos ensayos y un control estereoscópico de un panel test construido al efecto.

Abstract

Photogrammetry, as science and technique for obtaining three-dimensional information of the space object from two-dimensional images, requires measurements of precision and in that context, the geometric camera calibration occupies an important place.

The knowledge of the internal geometry of the camera is fundamental to achieve greater precision in measurements made. Metric cameras (manufactured exclusively for cartographic applications), including photographic lenses with complex lenses and high quality systems are used in Aerial Photogrammetry. But in Close Range Photogrammetry is working increasingly more frequently with non-metric cameras, worst quality optical components which require a geometric calibration before or after each job.

The calibration process contains three fundamental concepts: *camera model*, *distortion model* and *method of calibration*. The *camera model* is a mathematical model that approximates the original projective transformation to the physical reality of the lenses. The mathematical model includes a series of parameters which include the correspondents to the *model of distortion*, which is in charge of correcting the systematic errors of the image. Finally, the *calibration method* proposes the method of estimation of the parameters of the mathematical modeling and optimization technique to employ.

This Thesis is proposing the use of a pattern of two dimensional calibration that moves in the direction of the optical axis of the camera, thus offering three-dimensionality to the photographed scene. The pattern includes a large number of marks, which allows testing with different geometric configurations.

Taking the projection model perspective (or pinhole) as a model of camera, tests are performed with three different models of distortion, the classical of distortion radial and tangential proposed by D.C. Brown, an approximation by Legendre polynomials and bicubic interpolation.

From the combination of different geometric configurations and the most suitable distortion model, brings the establishment of a methodology for optimal calibration. To

help the election, a study of the information obtained in the various tests and a purpose built test panel stereoscopic control is performed.

Índice

Resumen	xi
Abstract	xiii
Índice	xv
Listado de Figuras	xix
Listado de Tablas	xxiii
ANTECEDENTES	25
1. Introducción	27
1.1. Preliminares	27
1.1.1. Conceptos fotogramétricos	27
1.1.1.1. Definiciones	27
1.1.1.2. Fotogrametría digital	33
1.1.1.3. Fotogrametría de objeto cercano	36
1.1.2. Calibración de cámaras no métricas	43
1.2. Objetivos de la Tesis	45
1.2.1. Objetivo general	45
1.2.2. Objetivos específicos	46
1.3. Estructura de la Tesis	47
2. Marco teórico	49
2.1. Conceptos de Geometría proyectiva	49
2.1.1. Desarrollo histórico	50
2.1.2. Elementos de Geometría proyectiva	56
2.1.2.1. Proyecciones y secciones	57
2.1.2.2. Elementos impropios	58
2.1.2.3. Razón doble	60
2.1.3. Transformaciones proyectivas	63
2.1.3.1. Coordenadas homogéneas	64

2.1.3.2. Transformación proyectiva bidimensional	68
2.1.3.3. Transformación proyectiva tridimensional	72
2.2. Ecuaciones de colinealidad	73
2.2.1. Condición de colinealidad	73
2.2.2. Linealización de las ecuaciones de colinealidad	76
2.2.3. Aplicaciones	80
2.2.3.1. Resección espacial	80
2.2.3.2. Intersección espacial	82
2.2.3.3. Orientación relativa	83
2.2.3.4. Calibración de cámaras	85
3. Calibración de cámaras no métricas	87
3.1. Introducción	87
3.2. Modelos de cámara	89
3.2.1. Modelo de proyección perspectiva o Pinhole	89
3.2.2. Modelo proyectivo de cámara	93
3.2.3. Modelo de lente delgada o de Gauss	94
3.2.4. Aproximaciones perspectivas	95
3.2.4.1. Proyección paraperspectiva	96
3.2.4.2. Proyección ortoperspectiva	96
3.2.5. Modelo afín	97
3.2.5.1. Modelo de proyección perspectiva débil	98
3.2.5.2. Modelo de proyección ortográfica escalada	98
3.2.5.3. Modelo de proyección ortográfica	98
3.3. Distorsión de las lentes	99
3.3.1. Distorsión radial simétrica	101
3.3.2. Distorsión por descentrado	103
3.4. Métodos de calibración	105
3.4.1. Diferentes clasificaciones de los métodos de calibración	106
3.4.1.1. Estimación del valor de los parámetros	106
3.4.1.2. Tipo de parámetros obtenidos	108
3.4.1.3. Relación entre el sistema objeto y el sistema imagen	109
3.4.1.4. Tipo de patrón de calibración	111

MÉTODOS Y MATERIALES	113
4. Metodología	115
4.1. Línea metodológica	115
4.2. Metodología de calibración propuesta	116
4.2.1. Medios materiales	117
4.2.1.1. Cámara fotográfica	117
4.2.1.2. Guía epipolar	119
4.2.1.3. Panel de calibración	122
4.2.1.4. Panel test	124
4.2.1.5. Estaciones totales	125
4.2.1.6. Trípodes de uso industrial	126
4.2.1.7. Barra de escala	127
4.2.2. Metodología seguida en los ensayos	128
4.2.2.1. Preparación	128
4.2.2.2. Obtención de las coordenadas del panel en el sistema objeto	133
4.2.2.3. Toma fotográfica	145
4.2.2.4. Medida automática de cruces en las imágenes	146
4.2.2.5. Cálculo de la calibración	149
4.2.2.6. Ensayos realizados	154
4.3. Metodología con otras aplicaciones informáticas	157
4.3.1. Calibración con <i>ImageMaster</i>	157
4.3.2. Calibración con <i>Calibración</i> de Aerotri	159
4.4. Aplicación informática <i>FOCal</i>	161
5. Resultados y análisis	167
5.1. Introducción	167
5.2. Análisis de las precisiones de los parámetros	168
5.2.1. Ensayos completos	168
5.2.2. Ensayos parciales	180
5.2.3. Ensayos mixtos	189
5.2.4. Otros ensayos	191
5.3. Análisis del control estereoscópico	195
5.4. Análisis de otras aplicaciones informáticas	199

CONCLUSIONES	201
6. Conclusiones	203
6.1. Conclusiones generales	203
6.2. Líneas futuras	205
BIBLIOGRAFÍA	207
ANEXOS	215
A. Transformación Lineal Directa (DLT)	217
B. Método de ajuste por mínimos cuadrados	221
B.1. Método paramétrico	221
B.2. Método de Newton-Raphson	223
C. Interpolación	225
C.1. Polinomios de Legendre	225
C.2. Interpolación bicúbica	227
D. Informes de resultados	229

Listado de Figuras

Figura 1.1.	Autógrafo Wild A7 con mesa de dibujo y registrador de coordenadas (Valbuena, 2014)	29
Figura 1.2.	Restituidor analítico Kern DSR 15 (Valbuena, 2014)	30
Figura 1.3.	Estación Fotogramétrica Digital ImageStation de Z/I	30
Figura 1.4.	Proceso fotogramétrico	31
Figura 1.5.	Determinación de una superficie objeto a partir de dos haces	32
Figura 1.6.	Proceso de orientación analítica	33
Figura 1.7.	Cámaras métricas: a) Rollei d7, b) Fototeodolito Wild P31 y c) Cámara estereométrica Zeiss SMK40	37
Figura 1.8.	Cámara semimétrica Rollei 6008 e imagen obtenida	37
Figura 1.9.	Camino óptico en una cámara réflex, a) hacia el visor y b) hacia el plano focal en el momento de la toma	38
Figura 1.10.	Cámaras no métricas: a) réflex, b) compacta y c) bridge	38
Figura 1.11.	Configuración de tomas fotográficas: a) normal y b) convergente	39
Figura 1.12.	Productos fotogramétricos de los diferentes yacimientos arqueológicos	41
Figura 1.13.	Modelización 3D de piezas de utillaje de aviones AIRBUS	42
Figura 1.14.	Modelización 3D de piezas de museo	42
Figura 1.15.	Efectos de la distorsión	43
Figura 2.1.	Perspectiva cónica	49
Figura 2.2.	Teorema de Desargues	51
Figura 2.3.	Teorema de Pascal	54
Figura 2.4.	Teorema de Brianchon	54
Figura 2.5.	Proyección y sección	58
Figura 2.6.	Elementos impropios (Efímov, 1978)	59
Figura 2.7.	Razón simple	60
Figura 2.8.	Razón doble	62

Figura 2.9.	Coordenadas homogéneas	65
Figura 2.10a.	Transformación proyectiva bidimensional. Situación inicial, con plano de la fotografía inclinado con respecto al sistema terreno (Wolf & Dewitt, 2000)	68
Figura 2.10b.	Transformación proyectiva bidimensional. Situación tras el giro inicial (Wolf & Dewitt, 2000)	69
Figura 2.11.	Condición de colinealidad (García Cepeda, 2000)	74
Figura 2.12.	Linealización (Mikhail, Bethel, & McGlone, 2001)	76
Figura 2.13.	Resección espacial	80
Figura 2.14.	Intersección espacial	82
Figura 2.15.	Orientación relativa	84
Figura 3.1.	Alteración de la condición de colinealidad	87
Figura 3.2.	Sistemas de referencia en el modelo pinhole	90
Figura 3.3.	Proyección al plano imagen	91
Figura 3.4.	Modelo de lente delgada	94
Figura 3.5.	Proyecciones paraperspectiva y ortoperspectiva	96
Figura 3.6.	Perspectiva débil, ortográfica escalada y ortográfica	97
Figura 3.7.	Componentes de la distorsión: radial y tangencial	99
Figura 3.8.	Distorsión radial: a) negativa y b) positiva	101
Figura 3.9.	Modelos de distorsión radial: gaussiano y balanceado	103
Figura 3.10.	Ejemplos de paneles de tipo damero	111
Figura 3.11.	Ejemplos de paneles con entidades circulares	111
Figura 3.12.	Otros ejemplos	112
Figura 3.13.	Método “plumb-line”	112
Figura 4.1.	Cámara fotográfica Olympus E-500	117
Figura 4.2.	Distintas aberturas de diafragma: a) F22, b) F11 y c) 5.6	118
Figura 4.3.	Resolución frente a nitidez	119
Figura 4.4.	Geometría epipolar	120
Figura 4.5.	Detalle de la guía epipolar	121
Figura 4.6.	Guía epipolar con la cámara montada	122

Figura 4.7.	Detalle del panel de calibración y sus cruces	122
Figura 4.8.	Deslizamiento del panel sobre el carril	123
Figura 4.9.	Reverso del panel con un conjunto de ruedas y el sistema de paro	124
Figura 4.10.	Panel test	125
Figura 4.11.	Estaciones totales Leica, TC2000 y TDA5005	125
Figura 4.12.	Unidad de procesamiento Leica Link-8	126
Figura 4.13.	Trípode	127
Figura 4.14.	Barra de escala calibrada	127
Figura 4.15.	Vista de la hoja Excel “Cámaras.xlsx”	129
Figura 4.16.	Profundidad de campo respecto a la abertura de diafragma (https://curiososdelafotografia.wordpress.com)	130
Figura 4.17.	Distancia hiperfocal.....	131
Figura 4.18.	Disposición del panel y las estaciones.....	134
Figura 4.19.	Sistema de referencia objeto	136
Figura 4.20.	Vista en perspectiva de la fila 075 y contiguas	143
Figura 4.21.	Vista en perspectiva de la columna 075	144
Figura 4.22.	Vista en perspectiva de la fila 050	144
Figura 4.23.	Submatriz de búsqueda y matriz patrón (ampliada)	147
Figura 4.24.	Precisión subpíxel	148
Figura 4.25.	Toma fotográfica con ImageMaster	157
Figura 4.26.	Imágenes de calibración en ImageMaster	158
Figura 4.27.	FOCal – Menú principal	161
Figura 4.28.	FOCal – Menú Calibración	161
Figura 4.29.	FOCal – Medida automática	162
Figura 4.30.	FOCal – Calibración	163
Figura 4.31.	FOCal – Menú Herramientas	164
Figura 4.32.	FOCal – Transformaciones geométricas	165
Figura 4.33.	FOCal – DLT	166
Figura 4.34.	FOCal – Imagen corregida	166

Figura 5.1.	Residuos en un ensayo sin corregir la distorsión	169
Figura 5.2.	Residuos en un ensayo tras corregir la distorsión según Brown	170
Figura 5.3.	Distribución de los coeficientes de correlación de un ensayo	171
Figura 5.4.	Residuos en un ensayo tras corregir la distorsión según Legendre	176

Listado de Tablas

Tabla 4.1.	Especificaciones de la cámara fotográfica Olympus E-500	117
Tabla 4.2.	Especificaciones de las estaciones totales Leica TC2000 y TDA5000..	126
Tabla 4.3.	Distribución de profundidades	132
Tabla 4.4.	Detalle del listado de coordenadas del panel teórico (<i>panelFOCal</i>)	138
Tabla 4.5.	Estadillo-guion de la toma fotográfica	146
Tabla 4.6a.	Combinaciones de profundidades completas	154
Tabla 4.6b.	Combinaciones de profundidades parciales	155
Tabla 4.6c.	Combinaciones de profundidades mixtas	156
Tabla 5.1.	Parámetros internos por el método de Brown	168
Tabla 5.2.	Precisiones de los parámetros internos por el método de Brown	172
Tabla 5.3.	Precisiones de los parámetros externos por el método de Brown	174
Tabla 5.4.	Parámetros internos por el método de Legendre	175
Tabla 5.5.	Precisiones de los parámetros internos por el método de Legendre ..	177
Tabla 5.6.	Precisiones de los parámetros externos por el método de Legendre..	179
Tabla 5.7.	Desviación típica a posteriori en las combinaciones parciales por el método de Brown	180
Tabla 5.8.	Precisiones de los parámetros internos y externos en las combinaciones parciales por el método de Brown	182
Tabla 5.9.	Precisiones del primer coeficiente de distorsión radial en las combinaciones parciales por el método de Brown	184
Tabla 5.10.	Precisiones del primer coeficiente de distorsión tangencial en las combinaciones parciales por el método de Brown	185
Tabla 5.11.	Desviación típica a posteriori en las combinaciones parciales por el método de Legendre	186
Tabla 5.12.	Precisiones de los parámetros internos y externos en las combinaciones parciales por el método de Legendre	187

Tabla 5.13.	Parámetros internos en las combinaciones mixtas por el método de Brown	189
Tabla 5.14.	Precisiones de los parámetros internos y externos en las combinaciones mixtas por el método de Brown.....	190
Tabla 5.15.	Parámetros internos por el método de Legendre en las combinaciones mixtas	191
Tabla 5.16.	Precisiones de los parámetros internos y externos en las combinaciones mixtas por el método de Legendre	191
Tabla 5.17.	Precisiones de los parámetros internos y externos en los ensayos de mejora de los coeficientes de distorsión	192
Tabla 5.18.	Precisiones de los parámetros internos y externos en los ensayos de pérdida de precisión en las coordenadas objeto	193
Tabla 5.19.	Error medio cuadrático en los ensayos completos	197
Tabla 5.20.	Error medio cuadrático en los ensayos parciales.....	197
Tabla 5.21.	Error medio cuadrático en los ensayos mixtos.....	198
Tabla 5.22.	Error medio cuadrático en los ensayos mejorados	198
Tabla 5.23.	Error medio cuadrático en los ensayos con reducción de precisión....	198
Tabla 5.24.	Precisiones de los parámetros internos y externos en los ensayos en <i>Calibración</i> de AeroTri.....	199
Tabla 5.25.	Precisiones de los parámetros internos y externos en los ensayos de pérdida de precisión en las coordenadas objeto	200

ANTECEDENTES

Introducción

1.1. Preliminares

1.1.1. Conceptos fotogramétricos

1.1.1.1. Definiciones

Etimológicamente, la palabra *Fotogrametría* (del griego ‘photos’, luz; ‘gramma’, escribir; ‘metron’, medir) significa *la medida de lo escrito por la luz*, o en aplicación específica, *medir en fotografías*. Según la Sociedad Americana de Fotogrametría y Teledetección (ASPRS¹), la Fotogrametría “*es el arte, ciencia y tecnología de obtener información fiel acerca de objetos físicos y su entorno a través de procesos de registro, medición e interpretación de imágenes fotográficas y patrones de energía electromagnética radiante y otros fenómenos*” (McGlone, Mikhail, & Bethel, 2004), que supone una definición más formal y actualizada.

Lo que se puede deducir de ambas definiciones es que originalmente consistió en analizar fotografías y que, con el tiempo, se ha abierto a registros de otro tipo de sensores, como imágenes digitales (multi e hiperespectrales), radar, láser, acústicas, etc. Lo cierto es que, aun así, la fotografía es la principal fuente de información, ya sea en su versión analógica (*fotografía*) o digital (*imagen*). El análisis de las fotografías tiene dos ámbitos diferentes, uno *cuantitativo* y otro *cualitativo*.

El aspecto cuantitativo está cubierto por la *Fotogrametría métrica* y hace referencia al “*dónde está*”, “*cómo es*” y “*cuánto mide lo que aparece en la fotografía*”. Consiste en la obtención de información métrica de los objetos a partir de medidas precisas en las fotografías. Esa información se plasma en forma de cartografía digital, su mayor uso, ortoimágenes y ortomosaicos, modelos digitales del terreno (MDT), etc. Las fotografías utilizadas normalmente son *aéreas*, aunque también se usan para este propósito, *terrestres* e imágenes *satélite*.

¹ ASPRS es el acrónimo de *American Society for Photogrammetry and Remote Sensing*.

Del área cualitativa se encarga la *Fotogrametría interpretativa* y se refiere al '*qué es lo que aparece en la fotografía*'. Trata de reconocer e identificar los objetos que aparecen en la fotografía (pancromática, infrarroja o multiespectral), a través de un análisis basado en indicios y la experiencia del operador. En este caso se está hablando de la *Fotointerpretación*. Si el análisis se hace sobre una imagen digital (obtenida por diferentes sensores como cámaras multi o hiperespectrales, escáneres térmicos o radar, instalados en la mayoría de casos en plataformas orbitales) y el análisis se realiza con ayuda de aplicaciones informáticas, se trata de la *Teledetección*.

Según la posición del sistema de captura de datos, la Fotogrametría puede ser *aérea*, si el sensor va montado en un avión (sensor aerotransportado). Las tomas suelen ser normales, con el eje óptico vertical o normal a la superficie terrestre, que es el objeto a fotografiar. Además, se realizan con un recubrimiento entre ellas para asegurar la estereoscopía. Se trata de la principal aplicación de la Fotogrametría y su objetivo es la generación de mapas y planos topográficos a diferentes escalas. También se pueden realizar tomas oblicuas, aunque en el pasado se usaron únicamente para aspectos fotointerpretativos.

Si el sensor está sobre una plataforma fija en el terreno, se habla de Fotogrametría *terrestre* y el objetivo sigue siendo el mismo, la producción de cartografía. En este caso cobra más importancia la toma oblicua y convergente. Si el sensor está montado en una plataforma orbital, se habla de Fotogrametría *espacial* o *satélite*.

Finalizando esta clasificación se encuentra la Fotogrametría *de objeto cercano*. El objetivo no es la obtención de cartografía de la superficie terrestre, sino la generación de productos no cartográficos de cualquier objeto que se encuentre sobre la misma. El sensor estará situado sobre algún tipo de plataforma que permita realizar toma vertical u horizontal, normal, oblicua o convergente. El presente trabajo está desarrollado en el ámbito de la Fotogrametría de objeto cercano, por lo que se tratará con más profundidad.

Operativamente, la Fotogrametría establece, en primer lugar, la relación geométrica entre el espacio objeto y el espacio imagen existente cuando se tomaron las fotografías, es decir, *reproduce fielmente las condiciones de toma*, algo que conlleva un conocimiento preciso tanto de la orientación del sensor en ese momento, como de los parámetros que reconstruyen su geometría interna. Recuperada esa relación, se puede comenzar el proceso de extracción de información de los objetos.

La reconstrucción de las condiciones de toma puede realizarse según tres soluciones diferentes, que se describen a continuación en orden cronológico:

- **Solución analógica.** Se trata de una reconstrucción instrumental, llevada a cabo por medio de *restituidores analógicos* formados por componentes ópticos y mecánicos (Figura 1.1). Estos aparatos, costosos, voluminosos y pesados, surgieron a principios del siglo XX y hoy en día están en desuso, prácticamente en su totalidad. Se trabajaba con la fotografía física, en formato negativo o diapositiva, y todo el proceso fotogramétrico, incluyendo orientación, medidas y obtención de cartografía, era manual. Ofrecían gran precisión, aunque tenían algunas limitaciones, por construcción, a la hora de trabajar con ciertos formatos, distorsiones y giros elevados.

Figura 1.1. Autógrafo Wild A7 con mesa de dibujo y registrador de coordenadas (Valbuena, 2014)

- **Solución analítica.** En este caso la reconstrucción es numérica, es decir, a partir de coordenadas. El instrumento utilizado es el *restituidor analítico* y en él se sustituyen los elementos mecánicos por servomotores y elementos electrónicos (Figura 1.2). Ideados en la década de los años 50, se comercializaron en los 60, cuando la evolución de los ordenadores permitió su materialización. El restituidor analítico, gracias a la incorporación de un ordenador central, permite realizar las orientaciones numéricamente, dejando en manos del operador únicamente la medida de puntos necesaria en cada fase del proceso. Se amplía el tipo de fotografías con las que se puede trabajar, desapareciendo muchas de las limitaciones existentes en los analógicos y reduciéndose, merced a las correcciones incluidas en los programas, los errores sistemáticos, como los de distorsión, esfericidad terrestre o refracción atmosférica.

Figura 1.2. Restituidor analítico Kern DSR 15 (Valbuena, 2014)

- **Solución digital.** La reconstrucción sigue siendo numérica, pero el instrumento utilizado, el *sistema fotogramétrico digital*, se reduce a un ordenador equipado con una aplicación informática específica y dispositivos de captura, de visión estereoscópica y de posicionamiento y medición (Figura 1.3). Sin embargo, la característica por excelencia es el uso de la *imagen digital*. La fotografía en formato físico se digitaliza¹ mediante un dispositivo periférico llamado *escáner* o se captura directamente en formato digital gracias a los nuevos *sensores digitales*. Más adelante se profundizará más en este tema.

Figura 1.3. Estación Fotogramétrica Digital ImageStation de Z/I

¹ El término *digitalizar* significa literalmente pasar cualquier documento (texto, imagen, sonido, etc.) de formato analógico o físico a formato digital. En el ámbito de la Geomática es común utilizarlo para documentos gráficos vectoriales, diferenciándolo del término *escanear*, para las imágenes.

El proceso en el que se recupera la relación geométrica entre el espacio objeto y el espacio imagen, fue llamado por H. Bonneval *Método General de la Fotogrametría* (Bonneval, 1972). Se sintetiza en dos pasos importantes: el primero coincidiría con el registro de las fotografías, y el segundo incluiría una serie de cálculos que llevarían a la obtención de la cartografía. De la Figura 1.4 se puede deducir fácilmente que el primer paso, el de la toma fotográfica, es sencillo, puesto que se trata de eliminar una de las tres coordenadas, en este caso la Z. Ahora bien, el segundo paso, el de reconstrucción de la escena tridimensional para la posterior creación de la cartografía, no es, evidentemente, tan obvio.

Figura 1.4. Proceso fotogramétrico

H. Bonneval se basa en el concepto de *haz perspectivo* (I') como conjunto de segmentos que van desde un punto O , denominado *punto de vista* o *centro de proyección*, a cada uno de los puntos de una superficie tridimensional (Σ). Cada semirrecta se denomina *rayo perspectivo*. Según esta definición, la fotografía es el registro de un haz perspectivo. Con una única fotografía no se puede conocer la superficie Σ , pues de los rayos perspectivos del haz, aunque conocida su posición relativa, no se conoce su longitud (Figura 1.5).

Para ello, se debe conocer dos haces perspectivos, siendo cada punto de dicha superficie la intersección de los rayos homólogos de ambos haces perspectivos (Figura 1.5) y esto se logra en dos operaciones:

- Determinando la posición relativa de los diferentes rayos perspectivos que componen el haz, es decir la *forma* del haz, conocida gracias a los *datos internos* (distancia focal, posición del punto principal y función de distorsión), que son propios del haz. Esta operación se denomina *Orientación Interna*.
- Determinando la *posición* del haz perspectivo en el espacio, con respecto a un sistema de referencia tridimensional, gracias a los *datos externos* (posición del sensor y rotaciones del eje óptico). Se trata de la *Orientación Externa*.

Figura 1.5. Determinación de una superficie objeto a partir de dos haces

Para llevar a cabo el proceso analíticamente (*proceso de orientación analítica*), la Fotogrametría utiliza cinco sistemas de referencia, de forma que todo se reduce a un sucesivo paso de un sistema a otro mediante las *transformaciones geométricas*. La imagen tiene implícito, como se verá después, un sistema de referencia propio, el *sistema píxel*, por lo que las medidas en la misma se harán en este sistema. En la orientación interna se realizan dos pasos: al *sistema fiducial* en primer lugar y, a continuación, de éste al *sistema de fotocoordenadas*. Con ellos se ha conseguido reconstruir la forma del haz, ya que las primeras coordenadas píxel han sido transformadas a un sistema relacionado con la cámara, centrado en su centro de proyección y basado en la geometría de la misma. Además, se produce algo esencial para el desarrollo de este trabajo: la *corrección de errores sistemáticos de las coordenadas fiduciales para obtener las fotocoordenadas*.

Posteriormente se efectúa la orientación externa, con el paso de fotocoordenadas al *sistema modelo* y por último, de éste al *sistema terreno u objeto*. Con ello se llega a la reconstrucción del objeto fotografiado, gracias al conocimiento de la posición de los haces perspectivos en el espacio y, por tanto, las coordenadas terreno de los objetos (Figura 1.6).

Figura 1.6. Proceso de orientación analítica

1.1.1.2. Fotogrametría digital

Si la Fotogrametría analítica¹ supuso un avance en cuanto a la aplicación numérica del método y a la eliminación de muchas restricciones analógicas, en la Fotogrametría digital se produce el salto a la *automatización de procesos fotogramétricos*. A finales de los ochenta se comercializa el primer sistema fotogramétrico digital y aporta, como característica esencial, la utilización de la imagen digital.

La principal diferencia entre la fotografía convencional y la nueva imagen digital, es el tipo de función que cada una de ellas representa. La fotografía puede ser considerada una *función continua* $F(x, y)$ en dos aspectos: espacialmente, ya que sus

¹ Fotogrametría analítica como etapa. El concepto de orientación analítica, como proceso matemático sigue vigente en esta nueva etapa digital.

coordenadas x e y pueden tomar infinitos valores (a este efecto y sólo a éste, se toma como infinitesimal el tamaño del grano de sal de plata de la emulsión) y por tanto, se podría decir que hay infinitos puntos en la fotografía; y radiométricamente, respecto al valor que puede tomar la función $F(x, y)$, que viene determinada por la densidad de la película, es decir por el nivel de gris, ya que de la misma manera se tendría entre el blanco y el negro un número infinito de grises (para una película blanco y negro).

En cambio, la imagen digital representa una *función discreta* $f(x, y)$. Por un lado, las coordenadas x e y varían de manera finita, por lo que se cuenta con un número finito de elementos de imagen, llamados *píxeles*. El valor que puede tomar la función también es finito y coincide con el número de niveles de gris que habrá entre el blanco y el negro. El paso de fotografía a imagen conlleva, por tanto, dos procesos de discretización: el *muestreo*, que fija el tamaño del píxel y la *cuantificación*, el número de niveles de gris.

Según esto, la imagen digital corresponde a una representación matricial de n filas por m columnas, en la que cada elemento llamado píxel, toma un valor que indica su nivel de gris o color. La imagen digital pues, tiene dos características en función de estos dos procesos anteriormente definidos:

- *Resolución geométrica o espacial*. Se refiere al tamaño del píxel de la imagen y evidentemente, cuanto más pequeño sea este tamaño de píxel, más resolución tendrá la imagen y mejor definida estará. La resolución se suele dar en *micras* (μm) en el ámbito fotogramétrico.
- *Resolución radiométrica*. Se refiere a la conversión de la amplitud de la energía electromagnética en un número de niveles discretos o valor digital. Se trata del número de grises con el que se va a traducir la fotografía en imagen digital. Generalmente en una imagen en blanco y negro este valor va de 0 a 255.

En los primeros años de esta etapa las imágenes eran digitalizadas a partir de las fotografías convencionales, pero en el año 2000, en el Congreso de la ISPRS¹ celebrado en Ámsterdam, se presentó la cámara digital aerotransportada, en sus dos versiones, matricial y lineal. Desde entonces se impuso gradualmente la captación de imágenes directamente con sensor digital, mejorando la sensibilidad espectral y el rango dinámico y aportando simultáneamente varios canales espectrales.

¹ ISPRS es el acrónimo de “*International Society for Photogrammetry and Remote Sensing*”.

La Fotogrametría digital ha introducido en los últimos años variaciones y ampliaciones de gran importancia en el concepto de mapa. Es una realidad que las representaciones cartográficas han ido ganando en calidad, precisión y detalle, pero estas representaciones han sido dadas como mapas de línea. Sobre este último concepto la Fotogrametría aporta dos nuevas concepciones de representación cartográfica.

La primera es la *ortoproyección*, que proporciona la posibilidad de convertir las perspectivas fotográficas en proyecciones ortogonales, sin disminuir la información en ellas contenida, obteniendo los denominados *ortofotomapas*, a los cuales se les añade información cartográfica. Estas representaciones poseen todas las características de fiabilidad métrica del mapa convencional, pero son documentos figurativos en los que aparece la realidad tal y como es, sin ser afectada por los procesos de abstracción y generalización que se dan en los mapas de línea. Este proceso es posible llevarlo a cabo con precisión gracias a la introducción del *modelo digital del terreno*.

La segunda es la aparición del *mapa digital o numérico*, formado por un conjunto de puntos definidos por sus coordenadas, obtenidos con una densidad arbitraria, a partir de los cuales es posible obtener, entre otras aplicaciones, la representación gráfica a cualquier escala o en cualquier proyección. Estas dos innovaciones son de mucho valor, tanto en el proceso de confección del mapa, como en su posible actualización, pero no hay que olvidar la posibilidad de integración de los datos fotogramétricos en sistemas de información geográfica, su utilización en proyectos de Ingeniería Civil, etc.

Otra incorporación es la de los *sistemas de posicionamiento global* (GPS), tanto en la toma de datos para el cálculo de coordenadas de puntos de apoyo, como en la determinación de las coordenadas del centro de proyección de la cámara, y, en conjunción con los *sistemas inerciales* (IMU), en la determinación de los parámetros de orientación externa por métodos directos, reduciendo el trabajo de apoyo en campo.

Finalmente, la aparición de los nuevos sistemas fotogramétricos y cámaras digitales a menor coste, así como el gran avance conseguido en la mejora y tratamiento de imágenes y la automatización de muchos de los procesos fotogramétricos, han propiciado que se puedan abordar campos de aplicación que hasta la fecha eran inasumibles, tanto por su coste, como por la naturaleza y condiciones de los trabajos. La Arqueología, la Arquitectura o la Industria son campos a los que la Fotogrametría de objeto cercano proporciona sus productos.

1.1.1.3. Fotogrametría de objeto cercano

Históricamente la Fotogrametría ha sido aplicada principalmente a la Cartografía, aunque sus inicios fueran dedicados al estudio, más que desarrollo y explotación, del objeto cercano, teniendo en cuenta que no había medios tecnológicos adecuados y se usaban perspectivas dibujadas. El desarrollo de la Fotografía y la Aeronáutica y la fabricación de los primeros restituidores analógicos, llevaron consigo una dedicación casi exclusiva a la Fotogrametría aérea. Así, el potencial de los métodos desarrollados y los instrumentos utilizados eran prácticamente desconocidos por el resto de la comunidad científica. Sin embargo, como se apuntaba anteriormente, la situación empezó a cambiar con el abaratamiento de instrumentos y la aparición de nuevas técnicas, produciendo el interés en su aplicación en otros campos.

El problema que representa englobar todas las aplicaciones de la Fotogrametría que no son las puramente cartográficas, supuso en un principio que no se encontrara un nombre que se amoldara a todas ellas, con lo que se acuñaron términos como *“Fotogrametría no cartográfica”*, *“Fotogrametría no topográfica”*, *“Aplicaciones especiales de la Fotogrametría”*, o *“Fotogrametría de objeto cercano”*¹, que es la más utilizada últimamente, sobre todo para distancias a objeto más pequeñas, y por tanto la elegida en este trabajo. Común a todas esas denominaciones (y aplicaciones) es que la distancia de la cámara al objeto es relativamente pequeña y, aunque hay autores que piensan que no debería limitarse, en aras de dar soluciones a cualquier tipo de problema de Fotogrametría no cartográfica, se establece generalmente en 300 m (Karara, 1989) y se aplica a *“todo lo que pueda ser fotografiado”*.

Las cámaras empleadas en la adquisición y toma de imágenes pueden ser:

- **Métricas.** Son las especialmente desarrolladas para fines fotogramétricos. De ellas se conocen con precisión los datos internos, calibrados tras su fabricación. Suelen incorporar objetivos con distancia focal fija, aunque no siempre es así, y lentes de distorsión muy pequeña, menores de 4 μm ; suelen garantizar la perpendicularidad del eje óptico respecto al plano imagen y la coincidencia del punto principal con el centro geométrico de la imagen. Todas estas condiciones hacen que los datos internos sean nulos o muy pequeños. Existen tres tipos: las *métricas simples*, los *fortoteodolitos* y las *estereométricas* (Figura 1.7).

¹ La acepción en inglés es *“Close Range Photogrammetry”*

Figura 1.7. Cámaras métricas: a) Métrica simple Rollei d7, b) Fototeodolito Wild P31 y c) Cámara estereométrica Zeiss SMK40

- **Semimétricas.** Incluyen la llamada “*mallá reseau*”, matriz de marcas grabadas en un cristal situado en el plano focal, de forma que aparecen en la imagen (Figura 1.8). Las fotocoordenadas de esas marcas son conocidas y mediante su medida en el sistema píxel y la transformación geométrica correspondiente, se puede calcular los parámetros internos.

Figura 1.8. Cámara semimétrica Rollei 6008 e imagen obtenida

- **No métricas.** Son las cámaras fotográficas convencionales, conocidas en el ámbito fotogramétrico como cámaras amateur. Su aplicación principal no es la fotogramétrica y por tanto, no se conoce sus datos internos. Además, por construcción, contienen grandes errores sistemáticos que hay que conocer para su posterior corrección en la aplicación en Fotogrametría de objeto cercano.

Las más utilizadas son las *cámaras réflex digitales (DSLR¹)*. Se trata de un tipo de cámara que usa una única lente para visar el objeto y para realizar la toma. Esto es posible gracias a un espejo y un pentaprisma, de forma que el encuadre observado por el visor es idéntico al que se registrará en el plano focal, ya que es la imagen que ofrece el objetivo (Figura 1.9). Permiten seleccionar distancia focal, diafragma, velocidad de obturación y otros parámetros, así como añadir mejores ópticas, objetivos intercambiables, etc.

Figura 1.9. Camino óptico en una cámara réflex, a) hacia el visor y b) hacia el plano focal en el momento de la toma

También son empleadas las *cámaras compactas*, de reducido tamaño y automáticas, y las *cámaras bridge*, de aspecto similar a las compactas, pero incorporando objetivos con mayores posibilidades (Figura 1.10). Ambas cuentan con la ventaja de su tamaño y peso reducidos para ser incorporadas en *vehículos aéreos no tripulados (UAV²)*, una de las últimas alternativas de plataformas para los sensores fotogramétricos.

Figura 1.10. Cámaras no métricas: a) réflex b) compacta y c) bridge

¹ DSLR es el acrónimo de *Digital Single Lens Reflex*.

² UAV es el acrónimo de *Unmanned Aerial Vehicle*.

La extracción de información y reconstrucción del objeto fotografiado a partir de las imágenes, es similar al proceso seguido en Fotogrametría aérea, con la salvedad evidente de la escala, muy grande, ya que en este caso el objeto está cerca de la cámara.

Figura 1.11. Configuración de tomas fotográficas: a) normal y b) convergente

A la *toma normal*, típica en aplicaciones cartográficas, donde los ejes ópticos de las tomas son perpendiculares a la dirección de vuelo y paralelos entre sí, se añade la opción de la *toma convergente*, en la que el objeto es fotografiado desde diferentes puntos de vista haciendo que sus ejes ópticos se intersecten en el objeto (Figura 1.11). Según estas definiciones y dependiendo de las aplicaciones, las imágenes empleadas en Fotogrametría de objeto cercano pueden atender, en cuanto al número y configuración de las tomas, a la siguiente clasificación:

- **Toma única.** Se trata de un caso aislado y muy limitado en cuanto a sus aplicaciones. La reconstrucción del objeto sólo será posible si hay datos adicionales a la imagen, o si éste es plano, como una fachada por ejemplo. La operación a aplicar es la *rectificación* y necesita de un modelo digital de superficie para llevarse a cabo.
- **Par estereoscópico.** Se cuenta con dos fotografías con una zona de recubrimiento común, gracias al cual se pueden reproducir en el espacio las intersecciones de los rayos homólogos (los correspondientes al mismo punto de ambas fotografías). La visión estereoscópica por parte del operador está asegurada en el caso de toma normal, pero con toma convergente deja de ser confortable, incluso imposible, por lo que se recurre a un procesamiento automático basado en la correspondencia de imágenes. Si el ángulo de convergencia es muy grande, las perspectivas pueden ser demasiado diferentes para la identificación de puntos homólogos.

- **Toma múltiple.** Es el caso más recurrente en Fotogrametría. Las tomas se realizan sin ningún tipo de restricción y, ya sean normales o convergentes, las coordenadas de los puntos se pueden obtener mediante *fototriangulación* o por *intersección espacial*, respectivamente. En objeto cercano se requiere un alto número de imágenes por dos motivos: en primer lugar, por mantener homogéneos los requisitos de precisión y en segundo, porque la cercanía al objeto provoca ocultaciones por las irregularidades de su superficie. En todo caso es aconsejable la aparición de cada punto del objeto en al menos, tres o cuatro imágenes.

Tras lo expuesto, las aplicaciones de la Fotogrametría de objeto cercano vienen marcadas por las cortas distancias al objeto, pero también por las diferentes técnicas de registro alternativas surgidas en los últimos tiempos, como la medida directa por escáner láser y otras. Según E.H. Thompson (Luhmann, Robson, Kyle, & Harley, 2006), existen varias condiciones para elegir los métodos fotogramétricos: *a) cuando el objeto a medir es inaccesible o de difícil acceso, b) cuando el objeto no es rígido y sus dimensiones son requeridas instantáneamente, c) cuando no es seguro que se requieran medidas, d) cuando no es seguro, en el momento de las medidas, que se requieran medidas y e) cuando el objeto es muy pequeño.* A las que Luhmann, Robson, Kyle y Harley añaden: *f) cuando el uso de medidas directas influirían en el objeto o podrían perturbar un procedimiento dado alrededor del objeto, g) cuando se requieren resultados en tiempo real y h) cuando se necesita el registro y medidas simultáneas de un gran número de puntos.*

Las aplicaciones de Fotogrametría de objeto cercano más importantes son las siguientes:

- *Industria automovilística, de maquinaria y naval.* Inspección de piezas de utillaje, ingeniería inversa de modelos, control de fabricación, test de seguridad de vehículos, calibración de robots.
- *Industria aeroespacial.* Medida de antenas parabólicas, control de ensamblaje.
- *Arquitectura, conservación del patrimonio, arqueología, museología.* Medida de fachadas, documentación y reconstrucción de edificios históricos o dañados, medida de deformaciones, levantamiento de yacimientos arqueológicos y piezas de museos, modelos 3D de ciudades.
- *Ingeniería.* Medida de grandes obras en Ingeniería civil, medidas de deformaciones, medida de tuberías y túneles, minería.

- *Medicina y fisiología.* Medidas odontológicas, deformaciones espinales, cirugía plástica, análisis del movimiento y ergonomía, análisis microscópicos.
- *Medicina forense.* Registro de accidentes, medidas en la escena de un crimen.
- *Sistemas de información.* Sistemas de información de edificios, mantenimiento de instalaciones, planes de producción.
- *Ciencias naturales.* Medida de fluidos, topografía de olas, crecimiento de cristales.

Como ejemplo de algunas de las aplicaciones enumeradas y de los productos obtenidos, se muestran los resultados de algunos proyectos de Fotogrametría de objeto cercano que, desde hace años, llevan realizando profesores miembros del Laboratorio de Fotogrametría de la E.T.S.I. en Topografía, Geodesia y Cartografía, entre los que se encuentra el autor de esta tesis, en colaboración con diferentes entidades. Con estos proyectos se estableció una relación con otros campos a los que se intentaba aportar mejoras en la medida, representación y localización de sus objetos de estudio.

Entre las aplicaciones en Arqueología destacan los levantamientos fotogramétricos del yacimiento arqueológico de “Casa Montero” en San Fernando de Henares (Madrid), de petroglifos en “Campo Lameiro” (Pontevedra) y de un enterramiento arqueológico en la región de Al-Madam (Emiratos Árabes) (Figura 1.12).

Figura 1.12. Productos fotogramétricos de los diferentes yacimientos arqueológicos

En aplicaciones industriales, se muestra la *modelización 3D de piezas de utillaje de aviones AIRBUS*, para su catalogación (Figura 1.13).

Figura 1.13. Modelización 3D de piezas de utillaje de aviones AIRBUS

Y en Museología, la *modelización 3D del Discóbolo de Mirón* y de modelos de *barcos del Museo Naval de Madrid* (Figura 1.14).

Figura 1.14. Modelización 3D de piezas de museo

1.1.2. Calibración de cámaras no métricas

La utilización de cámaras no métricas en aplicaciones de Fotogrametría de objeto cercano es cada vez más frecuente, debido sobre todo a su bajo coste frente a las métricas. Ahora bien, presentan grandes distorsiones en las ópticas de sus objetivos y no son estables a largo plazo. Si se consigue controlar de forma precisa estas distorsiones, se puede alcanzar precisiones altas. El proceso en el que se calcula la función de distorsión de un objetivo y, más generalmente, todos los parámetros de su orientación interna y externa, se conoce como *Calibración geométrica*.

La calibración se basa en la transformación geométrica, normalmente proyectiva, de puntos situados en el espacio objeto, con coordenadas conocidas en un sistema de referencia objeto, en sus correspondientes en el espacio imagen, con coordenadas en un sistema de referencia imagen. Estas coordenadas imagen no son las correctas, puesto que, debido a las *distorsiones* producidas por el objetivo de cámara, la localización de los puntos en el espacio imagen no es la esperada (Figura 1.15). Por tanto, la transformación proyectiva ha de ser variada según un modelo matemático que la aproxime a la realidad física de las lentes, conocido como *modelo de cámara*.

Figura 1.15. Efectos de la distorsión

Muchos son los modelos desarrollados en los que se introducen más o menos parámetros y de ellos, el seleccionado para un trabajo, o aplicación concreta, depende del proceso de formación de imagen, de la precisión requerida y de la naturaleza de la aplicación. El más importante es el modelo de proyección perspectiva o *pinhole* con parámetros adicionales para la distorsión radial y tangencial.

Además, existen numerosas metodologías de calibración, en las que se proponen diferentes métodos de estimación de los parámetros y técnicas de optimización empleada (Remondino & Fraser, 2006):

- Las **técnicas no lineales** son una extensión de las ecuaciones de colinealidad, en las que mediante un proceso iterativo, a partir de unos valores iniciales aproximados, se llega al conocimiento de los parámetros internos, incluida la función de distorsión, con gran precisión. Es la utilizada en aplicaciones de Fotogrametría de objeto cercano.
- Las **técnicas lineales** son más simples y rápidas, simplificando el modelo de cámara y la función de distorsión (incluso anulándola), por lo que sus resultados son menos precisos. Se utilizan normalmente en el ámbito de la visión artificial.
- Las **técnicas en dos pasos** usan una técnica lineal para obtener los parámetros iniciales aproximados y una técnica no lineal iterativa para el cálculo definitivo de los parámetros.

En cuanto al patrón de calibración que se fotografía, son utilizados *tableros de ajedrez, patrones de puntos circulares o líneas de plomada*, entre otros. Todo ello será tratado con más profundidad en el Capítulo 3.

1.2. Objetivos de la Tesis

1.2.1. Objetivo general

La Fotogrametría es, como se ha expuesto en el punto anterior, una técnica que abarca distintos métodos de medida e interpretación de imágenes y por tanto, está especialmente influida por los errores sistemáticos que se dan en ellas, máxime cuando en el proceso se está empleando una cámara no métrica. Cuanto mejor definidos estén esos errores, mayor precisión tendrán las coordenadas corregidas y más calidad tendrán los resultados obtenidos. Por tanto, es crucial la realización de una calibración geométrica de la cámara lo más precisa posible.

La calibración geométrica de cámaras no métricas está resuelta desde hace tiempo, pero esa línea de investigación sigue abierta. La aportación de los investigadores se centra en otros tipos de metodologías de cálculo y modelos, mejorando la rapidez de los algoritmos y, sobre todo, intentando automatizar al máximo el proceso, aunque se observa cierta ausencia de modelos de distorsión que no sean polinomios en desarrollo par o impar.

En el desarrollo de esta investigación se parte de las siguientes hipótesis:

- El modelo físico de cámara más básico, el de *pinhole*, es una proyección central en la que los rayos provenientes del espacio objeto atraviesan el objetivo por el centro de proyección, hasta llegar al espacio imagen, donde se sitúa el sensor.
- La distorsión radial y tangencial de un objetivo fotográfico se produce de forma que se pueda parametrizar, ajustándola según una fórmula matemática.

Se plantea entonces una serie de cuestiones que dirige el desarrollo de la investigación a la consecución de los diferentes objetivos específicos y finalmente al objetivo general, para confirmar así las hipótesis de partida planteadas.

- ¿Son los modelos de distorsión utilizados por los programas actuales, los más precisos? ¿Para qué aplicaciones?
- La parametrización polinómica de desarrollo par o impar se utiliza de forma casi exclusiva ¿realmente es la que mejor ajusta la distorsión?
- ¿Cómo afecta en la calidad del producto final la variación de los parámetros calculados? ¿Y en tomas con diferentes características geométricas?

- El comportamiento de las cámaras fotográficas ¿es muy inestable en el tiempo?

Del intento de dar respuesta a estas cuestiones, surge el objetivo general de esta tesis: *el desarrollo de una nueva metodología de calibración geométrica de cámaras no métricas.*

1.2.2. Objetivos específicos

La consecución del objetivo general viene marcada por una serie de hitos intermedios, los siguientes objetivos específicos:

- Comparación de los métodos de calibración más utilizados y análisis de los resultados obtenidos.
- Búsqueda de un modelo matemático de distorsión óptimo, probando modelos que históricamente no han sido utilizados en la definición de los parámetros internos de la cámara.
- Creación de un patrón de calibración con un número suficiente de marcas, para comprobar la bondad de la metodología propuesta y de las ya existentes y que, por último, mejor se adapta al modelo matemático seleccionado. Para garantizar la homogeneidad de las medidas realizadas en todos los ensayos, se crea una estructura física que asegura la repetibilidad de la posición de toma en los mismos. Aprovechando esta circunstancia se prueba con distintas configuraciones geométricas y paramétricas.
- Creación de una aplicación informática que calcula los diferentes modelos matemáticos y facilita la interacción del usuario con otros programas. Incluye transformaciones geométricas, herramientas de interpolación, medida automática de las marcas de calibración, cálculo de los parámetros internos de la cámara en función del modelo de distorsión elegido y obtención de la imagen corregida de distorsiones.

1.3. Estructura de la Tesis

El contenido del presente documento se ha estructurado en cinco partes, que agrupan a su vez seis capítulos y cuatro anexos.

La **primera parte** está dedicada a los *Antecedentes* de la tesis y comprende los tres primeros capítulos. El primer capítulo —*Introducción*— hace una presentación del contexto de la investigación, situando la Fotogrametría en sus diferentes etapas y versiones, como inicio y marco de la misma. Sitúa la calibración geométrica de cámaras en ese contexto y justifica su necesidad y la investigación alrededor de ella. Además se exponen los objetivos a alcanzar con esta tesis y su estructura.

En el segundo capítulo —*Marco teórico*— se aborda la teoría necesaria para comprender el origen de la geometría subyacente en una imagen fotográfica, desarrollando sucesivamente cada uno de los conceptos participantes en su geometría, desde las bases de la Geometría proyectiva hasta las ecuaciones de colinealidad, como modelo funcional utilizado. El tercer capítulo —*Calibración de cámaras no métricas*— se dedica al estado actual del tema. Incluye un repaso a los modelos de cámara, describiendo las condiciones geométricas de cada modelo, así como la formulación usada en su parametrización; las funciones de distorsión que definen este error sistemático, tan importante en la posición de los puntos en el sistema imagen, y su corrección así como los métodos de calibración más utilizados y referenciados en el momento actual.

La **segunda parte** se ocupa de los *Métodos y materiales* empleados en el desarrollo de esta tesis y está compuesta de dos capítulos. El cuarto capítulo —*Metodología*— describe las operaciones efectuadas: realización de ensayos de calibración de aplicaciones existentes, detallando tanto metodología como materiales utilizados; ejecución de tomas en las que se varían determinadas características de la cámara, comprobando su incidencia en la parametrización de los modelos seguidos; ensayos de la metodología propuesta, con la creación de una estructura física que asegure la repetibilidad en los mismos y pruebas con distintas configuraciones geométricas y paramétricas; elaboración paralela de una aplicación informática, en la que se incluyen medida automática de marcas, cálculo de los parámetros internos de la cámara en función del modelo de distorsión elegido, importación/exportación de ficheros de calibración de otros programas y obtención de imagen corregida de distorsiones.

El quinto capítulo —*Resultados y análisis*— realiza una comprobación de los resultados, ayudada por el establecimiento del mejor sistema de estudio de la precisión (condiciones de control como colinealidad o coplanaridad, autocalibración, control estereoscópico, simulaciones bootstrap, etc.). Se lleva a cabo un análisis matemático de los resultados, extrayendo conclusiones a aplicar en la metodología y el modelo de distorsión a crear, en función de las variables introducidas.

La **tercera parte** plasma las *Conclusiones* extraídas del estudio, recogidas en el capítulo sexto —*Conclusiones*— e incluye unas posibles líneas futuras de investigación en este campo.

La **cuarta parte** enumera la *Bibliografía* utilizada en el desarrollo y redacción de esta tesis.

La **quinta parte** incluye los *Anexos*. En ellos se ha querido recoger el desarrollo teórico y matemático de ciertas herramientas utilizadas en la tesis y que no se exponen en el momento de ser utilizadas, ya que supondría una falta de coherencia en el hilo argumental seguido. El Anexo A recoge el método de la transformación lineal directa, que se utiliza en la metodología propuesta en la adquisición de datos iniciales aproximados. El Anexo B está destinado al método de ajuste por mínimos cuadrados. El Anexo C hace un repaso de los métodos de interpolación usados. Por último, en el Anexo D se incluyen diferentes informes de resultados.

Marco teórico

La fotografía, como registro de un haz perspectivo producido por una cámara, cuenta con una geometría determinada. Su definición y descripción se realiza en función de un modelo funcional que se conoce como *condición de colinealidad*, cuya formulación parte de un caso singular de la transformación proyectiva, capítulo esencial en las bases de la Geometría proyectiva. El desarrollo teórico de todo ello queda reflejado en este Marco teórico.

2.1. Conceptos de Geometría proyectiva

En la fotografía, así como en la visión humana o en la pintura, la forma más real de representar objetos tridimensionales en un plano es la perspectiva cónica, ya que la escena fotografiada se observa desde un punto O , correspondiente al centro óptico de la cámara, al que llegan los rayos de luz provenientes de cada uno de los puntos de esa escena. Si además se elige un plano π perpendicular al eje óptico, que no contenga a O , esas rectas que conforman los rayos intersecurán con el plano, en este caso el plano focal, donde se situaría el material fotosensible, constituyendo una proyección de los objetos de la escena. Este es el escenario de una toma fotográfica: una aplicación práctica de la *Geometría proyectiva*.

Figura 2.1. Perspectiva cónica

2.1.1. Desarrollo histórico

La *Geometría* (del griego ‘geos’, tierra; ‘metron’, medir) posiblemente es la parte de las Matemáticas más concreta y ligada a la realidad: se ocupa de las propiedades del espacio y de las figuras en el mismo. Por esta razón desempeña un papel fundamental en la Física, la Astronomía o la Ingeniería. Cuando se habla de las propiedades del espacio se hace referencia al espacio geométrico, modelización del espacio físico, aunque no coincide exactamente con él; hay que tener en cuenta que las figuras geométricas no existen en la realidad (por ejemplo, un punto material siempre tiene dimensiones y una línea recta en la realidad resultaría curva si la mirásemos al microscopio).

Los orígenes de la Geometría se atribuyen a los antiguos egipcios, no en vano su significado etimológico, “medir tierras”, hace referencia a los trabajos que realizaban anualmente para recuperar los límites de sus cultivos tras las grandes crecidas del Nilo. Aunque hay conocimiento de nociones geométricas en Mesopotamia, es en la cultura griega cuando se comienza a crear un sistema teórico en torno a la operación con números enteros, extracción de raíces, cálculo de fracciones y otros problemas aplicados a la Arquitectura, la Geometría o la Topografía (conocida entonces como Agrimensura).

De todos los matemáticos griegos es Euclides (alrededor del 300 A.C.), quien más contribuyó a la Geometría, creando la *Geometría euclidiana*, que estudia las propiedades del plano y el espacio tridimensional. Siguiendo un sistema axiomático, en el que a partir de cinco postulados construye y deduce toda la Geometría conocida en ese momento, escribió el libro “*Los Elementos*”, que perduró hasta el siglo XIX como la única Geometría.

Por la importancia que tienen, sobre todo el quinto, se reproduce a continuación los cinco postulados planteados en su sistema (Aroca & Fernández Bermejo, 2009):

1. *Se puede trazar una única recta de cualquier punto a cualquier punto.*
2. *Se puede prolongar un segmento de recta continuamente en línea recta.*
3. *Se puede trazar una circunferencia con cualquier centro y radio.*
4. *Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.*
5. *Si una recta corta a otras dos, contenidas en un mismo plano, de modo que la suma de los ángulos interiores situados a un mismo lado es menor que dos rectos, las dos rectas, prolongadas suficientemente, se cortan en el lado en que la suma es inferior a dos rectos.*

El último postulado, al que se hacía referencia anteriormente, conocido como el *V Postulado* o *postulado de las paralelas*, fue reformulado como:

5. *Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela a ella.*

La importancia de este postulado de las paralelas se basa en el hecho de que los postulados debían ser evidentes en sí mismos, sin necesidad de demostración y para éste en concreto, se discutía si necesitaba de ella. Hasta el siglo XIX aparecerán geómetras intentando demostrarlo sin utilizar los otros cuatro; sólo entonces será cuando se llegue a la conclusión de que realmente es independiente, con el nacimiento de las *Geometrías no euclidianas*. En ellas no se verificará dicho postulado.

Al problema del paso de las tres dimensiones del mundo real a las dos que supone el soporte de representación, para el que la Geometría euclidiana no es suficiente, se enfrentaron pintores y arquitectos renacentistas como Leonardo da Vinci, Rafael Sanzio o Alberto Durero, quienes sustituyendo el plano π por su lienzo e interponiéndolo entre su ojo y la escena lograban materializar la distancia y el espacio en sus pinturas. Recuperando las ideas de los matemáticos griegos estudiaron la perspectiva, las proyecciones y las secciones, para deducir leyes y teoremas, elementos de una teoría fundamental de la perspectiva geométrica.

Figura 2.2. Teorema de Desargues

Ya en el siglo XVII, Gérard Desargues impulsó la construcción teórica de la perspectiva publicando en 1639 un tratado en el que, basándose en los métodos

proyectivos, realizaba un estudio de las cónicas. Introdujo los puntos en el infinito y advirtió que las rectas paralelas pierden ese paralelismo en su representación. El Teorema de Desargues enuncia una importante propiedad entre dos secciones de la misma proyección de un triángulo (Figura 2.2): “*Si los lados correspondientes de dos triángulos ABC y $A'B'C'$ se intersectan en puntos P , Q , R pertenecientes a una misma recta, las rectas que unen los vértices correspondientes se cortarán en un mismo punto.*” (Efímov, 1978).

En su utilización de la proyección central, al no conservar distancias y ángulos, demostró que la geometría no tiene por qué tener una vinculación con la métrica, haciendo un primer acercamiento a las propiedades proyectivas, invariantes por proyección. Hay que decir que aunque se le considere como el padre de la *Geometría proyectiva*, su obra no es reconocida hasta el siglo XIX, cuando se encuentra un ejemplar accidentalmente y se comprueba que sus razonamientos habían sido redescubiertos independientemente por los geómetras de la época.

Hasta entonces transcurren casi dos siglos en los que los matemáticos se centraron en el estudio de la *Geometría analítica* y el Cálculo; se dan las bases de una nueva perspectiva matemática en la que no se depende tanto de la observación empírica, procurando un gradual interés a la deducción racional. En ese momento se descubren nuevas geometrías incompatibles con la Geometría euclidiana, basadas en los nuevos sistemas axiomáticos formales.

Gracias a estos axiomas se relacionan los cuerpos a espacios proyectivos y, dentro de éstos, se asignan coordenadas y definen ecuaciones para ellos, es decir, se está dando una solución algebraica, mediante ecuaciones, a los problemas geométricos y además, se construye la geometría a partir del álgebra, dando lugar a la distinción entre los dos modos de razonamiento en geometría, el *analítico* o algebraico y el *sintético* o constructivo. En un tratamiento sintético se habla de entidades geométricas (puntos, líneas, etc.) y las relaciones geométricas entre ellas (unión, intersección, proyección entre ellos, etc.), mientras que en un enfoque analítico, en base a una representación de entidades geométricas mediante coordenadas y ecuaciones, se utiliza la técnica de manipulación algebraica (Semple & Kneebone, 1998).

La Geometría sintética había sido eclipsada, como ya se ha indicado, por la geometría analítica de Descartes, hasta que Gaspard Monge desarrolló su *Geometría descriptiva*, que incluía una forma de representar y estudiar objetos tridimensionales a

través de sus proyecciones sobre ciertos planos, pero estas representaciones planas no reflejaban todas las propiedades geométricas de esos objetos.

Siguiendo la tónica sintética pura, Jean Victor Poncelet publicó en 1822 el "*Traité des propriétés projectives des figures*", el primer tratado sistemático sobre Geometría proyectiva basándose en la llamada *proyección cónica*. Define la *propiedad proyectiva* de una figura como aquella propiedad que es invariante con respecto a la proyección, en contraposición a las propiedades métricas.

En esa relación entre figuras homólogas mediante proyecciones y secciones, definió la *transformación proyectiva* como la aplicación que se compone de varias proyecciones o perspectivas y aplicó por primera vez los puntos imaginarios. Considerado por muchos autores como el padre de la Geometría proyectiva, enunció el *Principio de dualidad*, que dice que a partir de cualquier teorema o construcción proyectiva se puede obtener otro, llamado teorema dual, intercambiando únicamente las palabras punto y recta.

Si en Geometría euclidiana "*dos puntos cualesquiera determinan una recta*", en Geometría proyectiva "*dos rectas cualesquiera determinan un punto*". La segunda declaración se obtiene de la primera cambiando simplemente las palabras punto y recta. El elemento clave en el principio de dualidad es la introducción del infinito en la concepción de la Geometría proyectiva. Así, en la proposición "*tres puntos no coincidentes y no alineados determinan un plano*", al intercambiar los términos punto y línea se obtendría esta otra: "*tres planos no coincidentes y que no pasen por una misma línea determinan un punto*". Tanto en el primer caso como en el segundo, se elimina la excepción del paralelismo mediante la inclusión, como ya se ha indicado, de los elementos impropios, en el infinito, punto y recta.

El primer ejemplo claro de dos teoremas duales lo componen el *Teorema de Pascal* y el *Teorema de Brianchon*:

Teorema de Pascal. Para este propósito se retrae la reseña al año 1639, cuando un joven Blaise Pascal demuestra su "*Mysterium hexagrammicum*", afirmando que "*los seis vértices de un hexágono están sobre una cónica si y solo si los tres puntos comunes a los tres pares de lados opuestos están en una recta común*". En la Figura 2.3 se debe intuir la proyectividad percibiendo el hexágono y su correspondiente cónica como la sección de un cono mediante un plano.

Figura 2.3. Teorema de Pascal

Teorema de Brianchon. En 1806, antes de que Poncelet enuncie el principio de dualidad, Charles Julien Brianchon publica su teorema en el que afirma que “los seis lados de un hexágono son tangentes a una cónica si y solo si las tres rectas que unen los tres pares de vértices opuestos tienen un punto común”. Según la Figura 2.4 las rectas AD, BE y CF intersecan en el punto O, llamado punto de Brianchon.

Figura 2.4. Teorema de Brianchon

Como ya se ha dicho, gracias a la geometría proyectiva y al principio de dualidad, aunque gráficamente no se parezcan mucho, ambos teoremas son completamente equivalentes, ya que sustituyendo en el enunciado del teorema de Pascal “*punto*” por “*recta*” y viceversa, y “*está sobre una cónica*” por “*tangente a la cónica*”, se obtiene el teorema de Brianchon.

Contemporáneo de Poncelet, Karl von Staudt continuó estableciendo fundamentos de la Geometría proyectiva siguiendo el tratamiento sintético como él, es decir, desmarcándola de las nociones de longitud, distancia y ángulo. A él se deben las *colineaciones*, transformaciones proyectivas basadas en aplicaciones biyectivas de tres puntos alineados en sus tres homólogos, también alineados.

En el transcurso de ese siglo XIX se va produciendo la introducción del Álgebra en la Geometría proyectiva y aunque previamente August Möbius había empleado las coordenadas homogéneas con poco éxito, fue Julius Plücker quien las utiliza para formular algebraicamente las ideas proyectivas.

Otros logros de Plücker fueron los de definir coordenadas de rectas en el plano y demostrar algebraicamente el principio de dualidad de Poncelet, algo que no pudo hacer con las rectas en el espacio y que tendría que esperar a la consagración definitiva del Álgebra lineal como herramienta de desarrollo de la Geometría proyectiva.

Otra figura importante en la corriente analítica fue Felix Klein con su clasificación de las propiedades geométricas según clases de transformaciones. Con su concepto de *grupo de transformaciones* y de invariantes geométricos se le puede considerar como el protagonista de la culminación de la Geometría proyectiva, englobando las distintas geometrías en su famoso “*Programa de Erlangen*”, publicado en 1872, aunque aquí referenciamos su traducción al inglés por el profesor Haskell (Klein, A comparative review of recent researches in geometry, 1893). De esta forma, define una Geometría proyectiva generalizada que contiene todas las geometrías existentes como casos particulares, incluidas las no euclidianas de Gauss, Bolyai y Lobachevski.

■

Tras realizar esta breve reseña histórica en la que, gracias a la presentación de parte de los avances realizados, se ha podido percibir la filosofía de esta parte del conocimiento matemático, a continuación se describen los conceptos de Geometría proyectiva estrictamente necesarios para situar la materia objeto de esta tesis.

2.1.2. Elementos de Geometría proyectiva

La naturaleza humana tiende a ordenar los objetos del espacio que perciben los sentidos –Leibnitz definió espacio como *orden de las cosas que coexisten*– y ese espacio está constituido por elementos como puntos, líneas o planos. Llamando *propiedades geométricas* a las relaciones entre estos elementos, se puede afirmar que la Geometría se ocupa del estudio de las propiedades geométricas de los elementos, que pueden ser de dos clases:

1. *Descriptivas*, relativas a las nociones de rectas, planos, etc., y sus posiciones relativas.
2. *Métricas*, relativas a las ideas de distancia y magnitud.

Dentro de las propiedades descriptivas, como ya se ha indicado, las propiedades proyectivas fueron las que dieron origen a la Geometría proyectiva, al considerarse enteramente idénticas la figura primitiva y todas aquellas que puedan deducirse de la misma por proyección, evidenciando la independencia de esas propiedades frente a las modificaciones aportadas por la proyección (Klein, A comparative review of recent researches in geometry, 1893). Según esto, la Geometría proyectiva estudia las propiedades descriptivas de las figuras que se conservan o son invariantes por proyección.

De hecho, el nacimiento de la Geometría proyectiva supuso la inclusión de todas las geometrías conocidas hasta la fecha, euclidiana, afín y las no euclidianas, como subgeometrías de la proyectiva, creando un jerarquía en torno a ella. En (Semple & Kneebone, 1998) se analiza esa jerarquía en función de la menor complejidad de la proyectiva frente a la euclidiana, en base al principio de dualidad, los elementos impropios y la utilización de coordenadas homogéneas, y la inserción de la afín en medio de ambas, debido a que es más general que la segunda pero menos que la primera.

En esa línea, Klein propuso una definición de las posibles geometrías existentes, en función de las transformaciones a las que se someten los objetos: *“Una geometría es el estudio de aquellas propiedades de un conjunto M que permanecen invariantes cuando los elementos de M se someten a transformaciones de cierto grupo de transformaciones G ”*. Así, la geometría euclidiana estudia las propiedades de las figuras que son invariantes respecto al grupo de las isometrías, los movimientos en general (longitud, área, paralelismo, perpendicularidad, colinealidad de puntos, concurrencia de rectas, etc.), la

geometría conforme o de semejanzas, las que son invariantes respecto a las semejanzas (composiciones de traslaciones, giros, simetrías respecto a rectas y homotecias), la afín, respecto a las afinidades y la proyectiva, respecto al grupo proyectivo, las homografías (colinealidad de puntos y concurrencia de rectas) (Montesdeoca, 2012).

Cada una de ellas será un caso particular, es decir, un subgrupo de transformaciones de la anterior, comprendiendo unas a otras, de manera que si se ponen en orden quedaría definida la jerarquía que se referenciaba más arriba y donde queda patente que la proyectiva incluye a las tres anteriores:

Métrica euclidiana $\rightarrow$ Conforme $\rightarrow$ Afín $\rightarrow$ Proyectiva

No obstante, a principios del siglo XX surgen los *espacios abstractos*, a los que algunos matemáticos incluyeron en la geometría, pero que no encajan en esta clasificación “kleiniana”.

La Geometría proyectiva va a trabajar con unos elementos o figuras elementales, puntos, rectas y planos, que supondrán subespacios dentro del espacio proyectivo y con los que, gracias a unas relaciones, llamadas *axiomas de incidencia*, se construirán nuevos objetos y se estudiarán sus propiedades. Asociadas a estas relaciones hay dos operaciones básicas y fundamentales: las *proyecciones* y las *secciones*.

2.1.2.1. Proyecciones y secciones

Proyectar una figura desde un punto O , que no forma parte de ella y al que llamamos centro de proyección, es trazar las rectas que pasan por O y por cada uno de los elementos (puntos, rectas o planos) de la figura. Las figuras resultantes son proyecciones de esa figura (Cubillo y Fluiter, 1943). Se dice que la proyección de un subconjunto S_1 desde otro, S_2 , es el mínimo subespacio incidente con ambos, $S_1 + S_2$.

Cortar una figura por un plano, llamado secante y que no es parte de ella, es marcar los puntos y rectas que cada elemento de esa figura determina por intersección con dicho plano. Las figuras resultantes son secciones de esa figura. De la misma forma, la sección de S_1 por S_2 , es simplemente la intersección conjuntista, $S_1 \cap S_2$.

Cuando se dice que se ha proyectado una figura desde un punto sobre un plano, nos estamos refiriendo realmente a la obtención de una sección por ese plano de la proyección definida. Si el centro de proyección es un punto propio, la proyección es central, si, por el contrario, el punto es impropio, la proyección es ortogonal o paralela.

Figura 2.5. Proyección y sección

Lo que hacen finalmente estas dos operaciones es establecer una correspondencia entre figuras llamada *perspectividad*, de forma que si, por ejemplo, se proyecta una serie de puntos alineados desde un centro de proyección, se obtiene un haz cuyos rayos se corresponden con los puntos, de forma que cada punto está sobre un rayo y cada rayo pasa por un punto. La composición de perspectivas se llama *proyectividad*.

Por tanto, este tipo de aplicaciones se enmarca perfectamente en la geometría proyectiva, ya que para hacerlo desde un punto de vista afín (la anterior en la jerarquía proyectiva) habría que justificar innumerables casos particulares por el paralelismo. Por ejemplo, no todo punto tendría imagen por una proyección perspectiva, como sí ocurre y se analiza a continuación.

2.1.2.2. Elementos impropios

Un plano proyectivo es un conjunto E , a cuyos elementos se llama puntos, junto con una familia de subconjuntos no vacíos de E a cuyos elementos se llama rectas, de modo que se satisfagan los axiomas siguientes:

1. *Por cada par de puntos P y Q pasa una única recta, que se representa por PQ .*
2. *Todo par de rectas tienen un punto en común.*
3. *Existen tres puntos distintos no colineales.*
4. *Toda recta contiene al menos tres puntos.*

Como se puede observar el segundo axioma de los expuestos, niega la existencia de rectas paralelas. Precisamente por esto y en contra de lo que se podría pensar, se dice que la geometría proyectiva amplía la geometría afín (Ivorra Castillo, 2010).

Siendo O un punto cualquiera de un plano π y r una recta que no contiene a O , se traza sobre π todas las rectas que pasan por O (*haz de O*). Se puede establecer una correspondencia entre las rectas del haz y los puntos de r (P), que determinan el corte con ésta. Cualquiera que sea la posición del punto P dentro de la recta r siempre le corresponderá una recta p , pero no al contrario, es decir, la recta r' paralela a r , no tiene punto correspondiente. Para este fin se considera que las rectas paralelas se cortan en el infinito, de forma que a esa recta r' le corresponda un punto sobre la recta r en el infinito, llamado *punto impropio* de la recta r (Efímov, 1978).

Figura 2.6. Elementos impropios (Efímov, 1978)

Todas las rectas paralelas de un plano tienen un mismo punto impropio, por eso forman un haz de rectas con centro impropio y, por otra parte, los puntos impropios de rectas no paralelas son diferentes, generando múltiples direcciones, con lo que cada plano contiene una cantidad infinita de puntos impropios, que forman una recta en el infinito, o *recta impropia*. Como dos planos paralelos tienen en común un haz de puntos impropios, dos planos son secantes siempre, en una recta impropia o propia, dependiendo de si son paralelos o no.

Siguiendo los razonamientos anteriores podría justificarse la existencia del *plano impropio* únicamente cambiando palabras, como defiende el principio de dualidad. El conjunto de todos los puntos impropios del espacio se denomina *plano impropio* y tiene en común con cualquier plano propio, la recta impropia.

En definitiva, lo que se ha hecho ha sido *completar* el espacio euclidiano con estos nuevos elementos, llamados impropios. Así, una recta completada con el punto del infinito se denomina *recta proyectiva*, un plano completado con la recta del infinito se llama *plano proyectivo* y el espacio completado con el plano del infinito se conoce como *espacio proyectivo*. A esta adjunción de elementos se le llama *compleción proyectiva*.

2.1.2.3. Razón doble

Tomando una línea p en un plano y el segmento AB determinado por dos puntos cualesquiera de p , se elige una orientación que determinará el signo de AB (si la recta está orientada de izquierda a derecha, AB será positivo si B está a la derecha de A). El segmento BA tendrá la misma magnitud que el AB , pero dirección contraria, por tanto, $AB = -BA$. Si se elige cualquier otro punto C sobre p , distinto de A y B , la *razón simple*¹ de A , B y C (ABC) se define como:

$$(ABC) = \frac{AC}{BC} \quad (2.1)$$

Figura 2.7. Razón simple

¹ El término utilizado en textos en inglés es *division ratio*.

Un valor menor de 1 significará que C es anterior (a la izquierda) a A , si es mayor que 1, que es posterior a B . Si C coincide con A la relación es nula y si coincide con B , evidentemente infinita. Si C se sitúa en el punto medio de AB , su valor será -1 y cuanto más se acerque a 1, más lejos estará C , tomando este valor cuando C sea el punto impropio de p .

Si en el escenario anterior se añade un cuarto punto D , la *razón doble*¹, o *cuaterna anarmónica*, se define como el cociente de las razones simples de AB y CD :

$$(AB\ CD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} \quad (2.2)$$

Cuando C y D están ambos situados entre A y B , o fuera de ellos, (ABC) y (ABD) son negativas, por tanto $(AB\ CD)$ será positiva. Si sólo C está entre A y B , entonces (ABC) será negativa pero (ABD) será positiva (y viceversa si es D el que está entre ellos), por tanto $(AB\ CD)$ será negativa para ambos casos. Se dice que C y D son *armónicos* con respecto a A y B , si las razones simples de C y de D respecto de A y B , son iguales en magnitud pero de signos opuestos, lo que significa que C por un lado y D por el otro dividen al segmento AB en la misma proporción. Al conjunto de los cuatro puntos, mientras C y D sean armónicos respecto de A y B , se le conoce como *cuaterna armónica* y se expresa así:

$$(AB\ CD) = -1 \quad (2.3)$$

La propiedad más importante de la razón doble de una cuaterna de puntos es que es invariante en la proyección, es decir, “la razón doble o anarmónica de las cuaternas de puntos que resultan de cortar un haz de cuatro rayos por una transversal, es constante cualquiera que sea la transversal” (Cubillo y Fluiters, 1943).

Para comprobarlo, se puede observar cómo en la Figura 2.8 aparecen los puntos A , B , C , D sobre la línea orientada r . Tomando cualquier punto O no perteneciente a r , se proyectan estos puntos sobre otra línea orientada s , que no pase por O , obteniendo así los puntos A' , B' , C' , D' . Sabiendo que el área de un triángulo es la mitad de su base por la altura, se puede trazar una perpendicular a ambas rectas por el punto O , sirviendo éstas de altura de cualquier triángulo con base en dichas rectas.

¹ En textos en inglés, *cross ratio*.

Figura 2.8. Razón doble

Además, sabiendo que el área también se puede definir como la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo comprendido entre ellos, se puede operar de la siguiente forma para A, B, C, D (Ayres, 1970):

$$(AB\ CD) = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = \frac{\frac{1}{2}HO \cdot AC}{\frac{1}{2}HO \cdot BC} = \frac{\text{área } \triangle AOC}{\text{área } \triangle BOC} = \frac{\frac{1}{2}AO \cdot CO \cdot \widehat{AOC}}{\frac{1}{2}BO \cdot CO \cdot \widehat{BOC}} = \frac{\widehat{AOC}}{\widehat{BOC}} \quad (2.4)$$

es decir,

$$(AB\ CD) = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = \frac{\widehat{AOC}}{\widehat{BOC}} \cdot \frac{\widehat{BOD}}{\widehat{AOD}} \quad (2.5)$$

Si se realiza el mismo desarrollo para A', B', C', D' :

$$(A'B'\ C'D') = \frac{A'C'}{B'C'} \cdot \frac{B'D'}{A'D'} = \frac{\widehat{A'OC'}}{\widehat{B'OC'}} \cdot \frac{\widehat{B'OD'}}{\widehat{A'OD'}} \quad (2.6)$$

Como se puede ver, ya que ambas expresiones, Ecs. (2.5) y (2.6), son equivalentes, la razón doble depende únicamente de los ángulos subtendidos desde O por los segmentos que unen los puntos A, B, C, D , y como son los mismos para la cuaterna proyectada A', B', C', D' , se puede afirmar que la razón doble permanece invariable por proyección.

Por tanto, puede demostrarse que toda transformación continua que establezca una correspondencia biunívoca entre puntos o rectas es una *transformación proyectiva* y en ella la razón doble permanece invariable.

2.1.3. Transformaciones proyectivas

A efectos de situar las transformaciones proyectivas dentro del ámbito de las transformaciones, se comenzará con unos pequeños antecedentes que ayuden a estudiarlas. Para Klein, “*la geometría es el estudio de un espacio (un conjunto de puntos, el plano) junto con un grupo de transformaciones (un conjunto específico de funciones del espacio en sí mismo) y de las estructuras que permanecen invariantes bajo el grupo*”.

Las transformaciones en Geometría equivalen a las funciones en Cálculo y Análisis y por tanto, las coordenadas en el nuevo sistema de coordenadas se representan como funciones de las antiguas:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \varphi(x, y, z) \\ y' &= \psi(x, y, z) \\ z' &= \chi(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Una función $f: A \rightarrow B$, es biyectiva, si y sólo si, existe otra función $g: B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$, siendo g entonces la función *inversa* de f (f^{-1}). El resultado de tal composición de funciones, id_A e id_B , es su propia identidad ($id_A(a) = a$), y no produce ningún cambio, por tanto, se puede asegurar que una *transformación* de A es una función biyectiva de A en A , es decir, una función biyectiva de un conjunto en sí mismo.

Existen ciertos conjuntos de transformaciones que, por su importancia, reciben el nombre de *grupo* (Bracho, 2009), como pueden ser las euclidianas, las conformes, las afines o las proyectivas.

Las transformaciones proyectivas son funciones fraccionarias de x, y, z , con lo que un punto propio se puede transformar en un impropio cuando el denominador vale cero, algo que no ocurre en las transformaciones afines, ya que en ellas, funciones lineales enteras de x, y, z (polinomios de primer grado de una o más variables), a todo punto del infinito le corresponde otro en el infinito.

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{a_4x + b_4y + c_4z + d_4} \\ y' &= \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{a_4x + b_4y + c_4z + d_4} \\ z' &= \frac{a_3x + b_3y + c_3z + d_3}{a_4x + b_4y + c_4z + d_4} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Si ese denominador común a las tres ecuaciones es distinto de cero, a cada punto le corresponde otro punto finito o propio. Pero según los puntos se acercan al plano en que el denominador se anula, sus puntos imágenes se alejan al infinito, se "desvanecen" o "fugan". Ese plano $a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0$ es precisamente el plano de fuga. Los puntos de fuga se corresponden mediante la transformación proyectiva con los puntos en el infinito.

2.1.3.1. Coordenadas homogéneas

Para caracterizar o definir un objeto unívocamente, en Geometría analítica euclidiana se utilizan las coordenadas como conjunto de números, en este caso del plano ($\mathbb{R}^2$), distancias a un par de ejes perpendiculares entre sí. Por ejemplo, un punto se define con sus coordenadas rectangulares (x, y) , o una recta, como lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas satisfacen la siguiente ecuación lineal:

$$ax + by + c = 0 \quad (2.9)$$

Ahora bien, desde el punto de vista de la Geometría proyectiva y con el fin de realizar un tratamiento analítico de los puntos impropios, surge un nuevo sistema de coordenadas. En esta filosofía, el enfoque es el inverso, es decir, se parte del conjunto de todos los pares (x, y) y se le llama punto a cada uno de esos pares. De la misma forma, se dice que una ecuación lineal en x e y define una recta (Courant & Robbins, 1996).

Dado un plano π en el espacio, paralelo al plano XY de un sistema de coordenadas rectangulares (X, Y, Z) y a una distancia unidad sobre él (Figura 2.9). En este escenario, todo punto P del plano π tendrá coordenadas $(X, Y, 1)$. Si además se toma el origen de coordenadas como centro de proyección O , cada punto P determinará una única recta que pasa por O , siendo las paralelas a π , sus puntos impropios.

Figura 2.9. Coordenadas homogéneas

A continuación se traduce todo esto a *coordenadas homogéneas*. Para conocerlas, de la recta que une O con P , se toma un punto Q , diferente a O . Las coordenadas tridimensionales x, y, z de Q , son precisamente las coordenadas homogéneas de P , es más, las coordenadas $(X, Y, 1)$ ya lo eran, pues cualquier conjunto de coordenadas de la forma $(\lambda X, \lambda Y, \lambda)$, para $\lambda \neq 0$, serán coordenadas homogéneas de P . En esta notación, los puntos del infinito de π , determinados como ya se ha dicho, por toda recta paralela a π que pase por O , tendrán la forma $(x, y, 0)$.

Las coordenadas homogéneas proporcionales representan el mismo punto, la escala global no afecta. Así, el punto $(X, Y, 1)$ es el mismo que el punto $(\lambda X, \lambda Y, \lambda)$, de lo que se deduce que para pasar de coordenadas homogéneas (x, y, z) a sus correspondientes euclidianas (X, Y) , simplemente se divide por la tercera coordenada:

$$(X, Y) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right) \quad (2.10)$$

Para representar una recta en el plano proyectivo mediante coordenadas homogéneas, partimos de la ecuación (2.9) haciendo la anterior sustitución, obteniendo la misma ecuación de la forma

$$ax + by + cz = 0 \quad (2.11)$$

Otra consideración más es que el plano proyectivo contiene más puntos que el euclidiano, obviamente, los puntos cuya tercera coordenada homogénea es cero $(x, y, 0)$,

como se avanzó anteriormente, los puntos del infinito o impropios. Con cada dirección en el plano habrá asociado un punto impropio distinto, por ejemplo los puntos $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ están asociados con las direcciones horizontal y vertical, respectivamente.

Por álgebra, la intersección de dos rectas, $r = (a_1, b_1, c_1)$ y $s = (a_2, b_2, c_2)$ es el punto $P = (b_1 c_2 - b_2 c_1, a_2 c_1 - a_1 c_2, a_1 b_2 - a_2 b_1)$, el producto vectorial $P = u_1 \times u_2$. Entonces, si las dos rectas son paralelas, $-a_1/b_1 = -a_2/b_2$, el punto de corte entre ambas es $(b_1 c_2 - b_2 c_1, a_2 c_1 - a_1 c_2, 0)$, que es el punto impropio asociado a la dirección cuya pendiente es $-a_1/b_1$.

■

Si se introducen las coordenadas homogéneas en dos espacios tridimensionales, las ecuaciones de la transformación proyectiva (Ec. 2.8), que como se sabe, todas tienen el mismo denominador, pueden descomponerse en cuatro de la forma (Klein, 1931):

$$\left. \begin{aligned} \rho' \xi' &= a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \varsigma + d_1 \tau \\ \rho' \eta' &= a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \varsigma + d_2 \tau \\ \rho' \varsigma' &= a_3 \xi + b_3 \eta + c_3 \varsigma + d_3 \tau \\ \rho' \tau' &= a_4 \xi + b_4 \eta + c_4 \varsigma + d_4 \tau \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Este sistema, prescindiendo del factor arbitrario ρ' , que actúa de factor de proporcionalidad, constituye la sustitución lineal homogénea de cuatro variables más general, y representa, por lo tanto, una *correspondencia afín entre los dos espacios auxiliares de cuatro dimensiones*. Se puede escribir en notación matricial de la siguiente forma:

$$\rho' X' = HX \quad (2.13)$$

Esta función asigna a cada elemento X un elemento X' , para algún ρ' perteneciente a $\mathbb{R}$, siendo H una matriz invertible, se denomina *homografía* y se define como una proyectividad biyectiva $f(x) = x'$ entre dos espacios n -dimensionales, que preserva colinealidad y razón doble. Asigna a cada elemento otro de su misma especie, a un punto corresponde otro punto, a una recta otra recta, a un plano otro plano, etc. Además, es una matriz homogénea, en la que un posible escalado, λH , no llevaría a un punto transformado por H a ningún cambio, por lo que λH y H , representan la misma transformación.

Recordando que Klein introdujo la jerarquía entre geometrías: *euclidiana* $\subset$ *conforme* $\subset$ *afín* $\subset$ *proyectiva*, se puede concretar la relación entre estas geometrías mediante el estudio de la matriz H llegando hasta ella.

Comenzando por la transformación euclidiana, en ella se define una rotación seguida de una traslación. Si θ es el ángulo de la rotación de los ejes y (t_x, t_y) es el desplazamiento del origen, se puede escribir en coordenadas cartesianas:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

que se transforma, en coordenadas homogéneas en:

$$H_{Euclidiana} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Se han sustituido los elementos del giro por coeficientes r , que aunque sean cuatro, sólo llevan implícito un parámetro, el giro θ . Se trata pues, de una transformación que depende de tres parámetros o grados de libertad (g.d.l.).

El siguiente nivel en la jerarquía lo ocupa la transformación conforme, la cual preserva ángulos y proporciones, por lo que también se la conoce como transformación de semejanza. En este caso, a los tres g.d.l. anteriores hay que añadir el escalado uniforme s (u *homotecia*), pasando a depender de cuatro parámetros:

$$H_{Conforme} = \begin{pmatrix} sr_{11} & sr_{12} & t_x \\ sr_{21} & sr_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Para la transformación afín el escalado no es ya uniforme y además, se añade un parámetro para el ángulo de inclinación entre ejes o deformación¹, con lo que cuenta con seis g.d.l. Estos parámetros indican que ya no se preserva la forma (ángulo y proporciones), quedando la nueva matriz de esta forma:

$$H_{Afín} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Por último, se llega a la transformación proyectiva añadiendo dos parámetros más, los pertenecientes a la proyección perspectiva, ya que el plano proyectivo incluye al afín, la recta ideal, con lo que se llega a ocho g.d.l. Se trata de una matriz cuadrada no singular,

¹ En textos en inglés, *shear*.

es decir, su determinante es no nulo. Para resolver esta transformación se deberían conocer las coordenadas de cuatro puntos homólogos en ambos sistemas de referencia, ya que cada punto incluye dos valores, uno para la x y otro para la y .

$$H_{Proyectiva} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

El caso tridimensional es similar, aunque evidentemente los parámetros aumentan, llegando a 15 g.d.l. para la transformación proyectiva, con una matriz H de 4×4 .

2.1.3.2. Transformación proyectiva bidimensional

A continuación se deduce la formulación de la transformación proyectiva bidimensional en coordenadas cartesianas y a efectos únicamente de comprensión, se recurre al caso de aplicación práctica de una toma fotográfica (Wolf & Dewitt, 2000).

Figura 2.10a. Transformación proyectiva bidimensional. Situación inicial, con plano de la fotografía inclinado con respecto al sistema terreno (Wolf & Dewitt, 2000)

En la Figura 2.10a, aparece la fotografía con su sistema de referencia fiducial (x, y) y el punto principal de mejor simetría (que, por simplicidad se denota como o) con coordenadas fiduciales (x_o, y_o) . El centro de proyección O , está en la perpendicular al plano de la fotografía y a una distancia f , siendo además, el origen del sistema de coordenadas (x', y', z') , paralelo al (x, y) . Por último, se incluye el sistema de coordenadas (X', Y', Z') , paralelo al sistema terreno (X, Y, Z) y con origen en O . En este escenario aparece el punto P en el terreno, y su proyectado en el plano de la fotografía p , cuyas coordenadas (x'_p, y'_p, z'_p) serán producto del giro alrededor de los tres ejes:

$$\begin{aligned}x'_p &= m_{11}X'_p + m_{12}Y'_p + m_{13}Z'_p \\y'_p &= m_{21}X'_p + m_{22}Y'_p + m_{23}Z'_p \\z'_p &= m_{31}X'_p + m_{32}Y'_p + m_{33}Z'_p\end{aligned}\quad (2.19)$$

Los coeficientes m son función de los ángulos de rotación $(\omega, \varphi, \kappa)$ y relacionan, por tanto, los sistemas (x', y', z') y (X', Y', Z') .

Figura 2.10b. Transformación proyectiva bidimensional. Situación tras el giro inicial (Wolf & Dewitt, 2000)

A continuación, la relación entre los sistemas (X', Y', Z') y (X, Y, Z) , una vez girado el primero, se puede deducir gráficamente (Figura 2.10b):

$$\begin{aligned}\frac{X'_P}{X_P - X_O} &= \frac{-Z'_P}{Z_O} \rightarrow X'_P = \frac{-Z'_P}{Z_O}(X_P - X_O) \\ Y'_P &= \frac{-Z'_P}{Z_O}(Y_P - Y_O) \\ Z'_P &= \frac{-Z'_P}{Z_O}(-Z_O)\end{aligned}\tag{2.20}$$

Si ahora se sustituyen las Ecs. (2.20) en la Ec. (2.19), se obtiene

$$\begin{aligned}x'_p &= m_{11} \frac{-Z'_P}{Z_O}(X_P - X_O) + m_{12} \frac{-Z'_P}{Z_O}(Y_P - Y_O) + m_{13} \frac{-Z'_P}{Z_O}(-Z_O) \\ y'_p &= m_{21} \frac{-Z'_P}{Z_O}(X_P - X_O) + m_{22} \frac{-Z'_P}{Z_O}(Y_P - Y_O) + m_{23} \frac{-Z'_P}{Z_O}(-Z_O) \\ z'_p &= m_{31} \frac{-Z'_P}{Z_O}(X_P - X_O) + m_{32} \frac{-Z'_P}{Z_O}(Y_P - Y_O) + m_{33} \frac{-Z'_P}{Z_O}(-Z_O)\end{aligned}\tag{2.21}$$

Donde se puede dividir primera y segunda por la tercera, eliminando el factor común que supone $-Z'_P/Z_O$:

$$\begin{aligned}\frac{x'_p}{z'_p} &= \frac{(m_{11}(X_P - X_O) + m_{12}(Y_P - Y_O) + m_{13}(-Z_O))}{(m_{31}(X_P - X_O) + m_{32}(Y_P - Y_O) + m_{33}(-Z_O))} \\ \frac{y'_p}{z'_p} &= \frac{(m_{21}(X_P - X_O) + m_{22}(Y_P - Y_O) + m_{23}(-Z_O))}{(m_{31}(X_P - X_O) + m_{32}(Y_P - Y_O) + m_{33}(-Z_O))}\end{aligned}\tag{2.22}$$

Sabiendo que

$$\begin{aligned}x_p &= x'_p + x_o \\ y_p &= y'_p + y_o \\ z'_p &= -f\end{aligned}\tag{2.23}$$

sustituyendo en la Ec. (2.22):

$$\begin{aligned}x_p &= x_o - f \left[\frac{(m_{11}(X_P - X_O) + m_{12}(Y_P - Y_O) + m_{13}(-Z_O))}{(m_{31}(X_P - X_O) + m_{32}(Y_P - Y_O) + m_{33}(-Z_O))} \right] \\ y_p &= y_o - f \left[\frac{(m_{21}(X_P - X_O) + m_{22}(Y_P - Y_O) + m_{23}(-Z_O))}{(m_{31}(X_P - X_O) + m_{32}(Y_P - Y_O) + m_{33}(-Z_O))} \right]\end{aligned}\tag{2.24}$$

De las nueve incógnitas que están implícitas en los parámetros de la Ec. (2.24) $(x_o, y_o, f, \omega, \varphi, \kappa, X_o, Y_o, Z_o)$, dos de ellas no son independientes, están relacionadas:

$$\frac{f}{Z_o} = \frac{1}{E} \quad (2.25)$$

Para realizar las sustituciones en la Ec. (2.24) será más cómodo igualar numeradores y denominadores, es decir: $f = 1$ y $Z_o = E$. De esta forma, se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} x_p &= x_o - \frac{(m_{11}(X_P - X_o) + m_{12}(Y_P - Y_o) + m_{13}(-E))}{(m_{31}(X_P - X_o) + m_{32}(Y_P - Y_o) + m_{33}(-E))} \\ y_p &= y_o - \frac{(m_{21}(X_P - X_o) + m_{22}(Y_P - Y_o) + m_{23}(-E))}{(m_{31}(X_P - X_o) + m_{32}(Y_P - Y_o) + m_{33}(-E))} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ésta podría ser la expresión de la transformación proyectiva, aunque se puede simplificar y generalizar más. Para ello se quita el subíndice P y p de las coordenadas y además se lleva los términos x_o y y_o dentro de las fracciones. Operando y reordenando, se obtiene:

$$\begin{aligned} x &= \frac{(x_o m_{31} - m_{11})(X - X_o) + (x_o m_{32} - m_{12})(Y - Y_o) + (x_o m_{33} - m_{13})(-E)}{(m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(-E))} \\ y &= \frac{(y_o m_{31} - m_{21})(X - X_o) + (y_o m_{32} - m_{22})(Y - Y_o) + (y_o m_{33} - m_{23})(-E)}{(m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(-E))} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Operando las expresiones del numerador y el denominador de ambas ecuaciones, quedarán términos dependientes de X e Y y si, además, los dividimos por la expresión $m_{31}(-X_o) + m_{32}(-Y_o) + m_{33}(-E)$, se llega a la expresión final de la transformación proyectiva bidimensional:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_1 X + b_1 Y + c_1}{a_3 X + b_3 Y + 1} \\ y &= \frac{a_2 X + b_2 Y + c_2}{a_3 X + b_3 Y + 1} \end{aligned} \quad (2.28)$$

en la que sus ocho parámetros independientes son función de las ocho incógnitas ya mencionadas $(x_o, y_o, \omega, \varphi, \kappa, X_o, Y_o, E)$.

2.1.3.3. Transformación proyectiva tridimensional

La transformación proyectiva tridimensional, obtenida tras los mismos razonamientos anteriores, engloba quince parámetros independientes y permite la transformación de puntos entre dos sistemas tridimensionales, para lo cual se tiene que cumplir que, no sólo el rango sea distinto de cero, sino que además, su valor sea tres.

$$\begin{aligned}x &= \frac{a_1X + b_1Y + c_1Z + d_1}{a_4X + b_4Y + c_4Z + 1} \\y &= \frac{a_2X + b_2Y + c_2Z + d_2}{a_4X + b_4Y + c_4Z + 1} \\z &= \frac{a_3X + b_3Y + c_3Z + d_3}{a_4X + b_4Y + c_4Z + 1}\end{aligned}\tag{2.29}$$

■

Para finalizar este punto y a modo de conclusión, hay que recordar que históricamente la Fotogrametría se ha formulado fundamentalmente en términos de geometría euclidiana analítica, aplicándose con éxito hasta hoy y dándole el nombre de Fotogrametría Analítica a la recopilación de operaciones y procedimientos realizados de esta forma. Sin embargo, la aparición de las técnicas de Visión por Ordenador¹, en el marco de la geometría proyectiva algebraica, ha cambiado recientemente el enfoque. Con ella se busca una mejora en la automatización en el análisis y procesamiento de imágenes y la no necesidad de datos iniciales aproximados en los procesos iterativos de orientación, gracias a su linealidad y a los cálculos de valor propio y descomposición de valor singular de matrices (McGlone, Mikhail, & Bethel, 2004).

¹ En textos en inglés, *Computer Vision*.

2.2. Ecuaciones de colinealidad

El modelo funcional del sistema de formación y explotación de la imagen se realiza mediante ecuaciones de condición, que establecen las relaciones entre los sistemas de referencia objeto e imagen y los parámetros del propio sistema imagen. En ellas aparecerán una serie de variables que, en función de la condición y su propósito en cada momento, serán datos observados, parámetros conocidos o incógnitas. La *condición de colinealidad* es la relación fundamental más importante y utilizada en Fotogrametría analítica, no en vano aparece en cantidad de procesos, como la calibración, la resección espacial, la intersección espacial, la orientación relativa, el ajuste de bloques, la rectificación, etc.

Se trata de un caso particular de la transformación proyectiva en la que los objetos del espacio tridimensional se proyectan en un plano bidimensional. Otra característica es que la correspondencia entre puntos imagen y objeto sólo se da en una dirección, ya que a un punto en el espacio objeto, le corresponde un único punto imagen, pero a un punto imagen, le corresponden infinitos puntos objeto. Esta ambigüedad se resuelve mediante un rayo adicional proveniente de otra imagen u otra restricción añadida.

El desarrollo de la condición de colinealidad y la obtención de sus ecuaciones que a continuación se realiza, se puede encontrar en la casi totalidad de textos de Fotogrametría, (Kraus, 1993; Wolf & Dewitt, 2000; García Cepeda, 2000; Mikhail, Bethel, & McGlone, 2001; McGlone, Mikhail, & Bethel, 2004), entre otras referencias consultadas, y en infinidad de artículos científicos, como introducción a la investigación que, posteriormente, se apoya en ellas.

2.2.1. Condición de colinealidad

La condición de colinealidad establece que en una fotografía dada, su centro de proyección, O , un punto imagen, a y un punto objeto, A , están en la misma recta, es decir, O , a y A deben ser colineales, por lo que $\overrightarrow{OA} = \lambda * \overrightarrow{Oa}$.

La situación, ilustrada en la Figura 2.11, considera una fotografía con cierta inclinación, en la que aparece un punto terreno A y sus proyecciones ortogonales sobre los planos XZ e YZ , A' y A'' , respectivamente. Análogamente, esas mismas proyecciones en el espacio imagen, a' y a'' , del punto imagen a .

Figura 2.11. Condición de colinealidad (García Cepeda, 2000)

El factor de escala λ_a se obtiene por semejanza de triángulos:

$$\lambda_a = \frac{OA}{Oa} = \frac{OA'}{Oa'} = \frac{OA''}{Oa''} = \frac{ON}{Oa'''} = \frac{(Z_A - Z_O)}{(Z_a - Z_O)} \quad (2.30)$$

De la misma forma,

$$\lambda_a = \frac{NA'}{a'''a'} = \frac{(X_A - X_O)}{(X_a - X_O)}; \quad \lambda_a = \frac{NA''}{a'''a''} = \frac{(Y_A - Y_O)}{(Y_a - Y_O)} \quad (2.31)$$

Esta relación entre sistemas se puede expresar matricialmente como

$$\begin{bmatrix} (X_A - X_O) \\ (Y_A - Y_O) \\ (Z_A - Z_O) \end{bmatrix} = \lambda_a \begin{bmatrix} (X_a - X_O) \\ (Y_a - Y_O) \\ (Z_a - Z_O) \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Los elementos $(X_a - X_O)$, $(Y_a - Y_O)$, $(Z_a - Z_O)$ son las coordenadas imagen de (x_a, y_a, z_a) que han sido transformadas por la matriz de rotación R , matriz ortogonal 3×3 , cuyos componentes son los valores de ω , φ , κ , con los que se puede establecer la Ec. 2.33. Además, la coordenada z_a es el valor nominal de la focal f , pero con signo negativo:

$$\begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} = \lambda_a R \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ -f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_O \\ Y_O \\ Z_O \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

o despejando $(x_a, y_a, -f)$, con lo que $M = R^{-1}$ (al ser ortogonal, la matriz inversa es igual a la traspuesta) y se añade la corrección del punto principal (x_0, y_0) :

$$\begin{bmatrix} x_a - x_0 \\ y_a - y_0 \\ -f \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_a} M \begin{bmatrix} (X_A - X_0) \\ (Y_A - Y_0) \\ (Z_A - Z_0) \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Desarrollando,

$$\begin{aligned} x_a - x_0 &= \frac{1}{\lambda_a} (m_{11}(X_A - X_0) + m_{12}(Y_A - Y_0) + m_{13}(Z_A - Z_0)) \\ y_a - y_0 &= \frac{1}{\lambda_a} (m_{21}(X_A - X_0) + m_{22}(Y_A - Y_0) + m_{23}(Z_A - Z_0)) \\ -f &= \frac{1}{\lambda_a} (m_{31}(X_A - X_0) + m_{32}(Y_A - Y_0) + m_{33}(Z_A - Z_0)) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Dividiendo las dos primeras por la tercera se elimina el factor de escala λ_a y llevando $x_0, y_0, -f$ al término de la derecha se obtiene:

$$\begin{aligned} x_a &= x_0 - f \frac{(m_{11}(X_A - X_0) + m_{12}(Y_A - Y_0) + m_{13}(Z_A - Z_0))}{(m_{31}(X_A - X_0) + m_{32}(Y_A - Y_0) + m_{33}(Z_A - Z_0))} \\ y_a &= y_0 - f \frac{(m_{21}(X_A - X_0) + m_{22}(Y_A - Y_0) + m_{23}(Z_A - Z_0))}{(m_{31}(X_A - X_0) + m_{32}(Y_A - Y_0) + m_{33}(Z_A - Z_0))} \end{aligned} \quad (2.36)$$

que son las *ecuaciones de colinealidad* más conocidas y usadas.

Estas ecuaciones contienen 12 parámetros independientes: las coordenadas imagen $(x_a, y_a, -f)$, las coordenadas del centro de proyección (X_0, Y_0, Z_0) , las coordenadas del punto objeto (X_A, Y_A, Z_A) y los ángulos de rotación $(\omega, \varphi, \kappa)$ que están implícitos en las cantidades $m_{11}, \dots, m_{33}$. Se pueden expresar en una forma más compacta al utilizar matrices:

$$x_a = x_0 - f \frac{M_1 X}{M_3 X} \quad y_a = y_0 - f \frac{M_2 X}{M_3 X} \quad (2.37)$$

La focal f es una cantidad normalmente conocida, y (x_a, y_a) también lo son, pues son valores observados. Si en el sistema imagen se miden suficientes puntos de coordenadas conocidas en el sistema objeto, entonces las incógnitas serán los giros $(\omega, \varphi, \kappa)$ y las coordenadas del centro de proyección (X_0, Y_0, Z_0) . Éste es el denominado problema de la *intersección inversa espacial* o *resección espacial*. Si por el contrario, son conocidos los giros y las coordenadas de los centros de proyección de dos fotografías con recubrimiento y se efectúan observaciones (x_a, y_a) en ambas

fotografías, se pueden calcular coordenadas en el sistema objeto (X_A, Y_A, Z_A). Éste es el caso de la *intersección espacial*.

El problema de estas ecuaciones, cuando se utilizan para resolver las incógnitas correspondientes, es que no son lineales. Por tanto, ha de llevarse a cabo un proceso de linealización antes de obtener una solución simultánea de las ecuaciones, normalmente en conjunción con la estimación por mínimos cuadrados, para casos con redundancia de datos (Anexo B).

2.2.2. Linealización de las ecuaciones de colinealidad

Para linealizar expresiones se utiliza un desarrollo en serie, normalmente el de Taylor, cuya forma general, en una variable, es,

$$y = f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \Delta x + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x_0} (\Delta x)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left. \frac{d^ny}{dx^n} \right|_{x_0} + \dots \quad (2.38)$$

Aunque el desarrollo incluye términos de orden mayor, normalmente sólo se utiliza la aproximación del primer orden (Mikhail, Bethel, & McGlone, 2001):

$$y \cong f(x^0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x^0} \Delta x = y^0 + j \Delta x \quad (2.39)$$

Figura 2.12. Linealización (Mikhail, Bethel, & McGlone, 2001)

El funcionamiento de la linealización queda patente en la Figura 2.12, donde la curva representa la función no lineal original $f(x)$, mientras que la línea recta es la linealizada, haciéndose tangentes en el punto a (x^0, y^0). Para un valor dado de Δx , el valor de la función debería ser aproximadamente b , cuya ordenada es $(y^0 + j \Delta x)$ y el valor exacto de la función no lineal es c , de ordenada $f(x^0 + \Delta x)$. El error producido por usar la forma lineal es el segmento bc .

Las ecuaciones. (2.36) se pueden escribir como funciones F y G :

$$\begin{aligned} F &= x_0 - f \frac{r}{q} = x_a \\ G &= y_0 - f \frac{s}{q} = y_a \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde,

$$\begin{aligned} q &= m_{31}(X_A - X_O) + m_{32}(Y_A - Y_O) + m_{33}(Z_A - Z_O) \\ r &= m_{11}(X_A - X_O) + m_{12}(Y_A - Y_O) + m_{13}(Z_A - Z_O) \\ s &= m_{21}(X_A - X_O) + m_{22}(Y_A - Y_O) + m_{23}(Z_A - Z_O) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Considerando $x_0, y_0, -f$ constantes, así como (x_a, y_a) , medidas en la mayoría de aplicaciones de las ecuaciones de la colinealidad, la forma linealizada utilizando el desarrollo en serie de Taylor para una función de varias variables será:

$$\begin{aligned} F_0 + \left[\frac{\partial F}{\partial \omega} \right]_0 d\omega + \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi} \right]_0 d\varphi + \left[\frac{\partial F}{\partial \kappa} \right]_0 d\kappa + \\ \left[\frac{\partial F}{\partial X_O} \right]_0 dX_O + \left[\frac{\partial F}{\partial Y_O} \right]_0 dY_O + \left[\frac{\partial F}{\partial Z_O} \right]_0 dZ_O + \\ \left[\frac{\partial F}{\partial X_A} \right]_0 dX_A + \left[\frac{\partial F}{\partial Y_A} \right]_0 dY_A + \left[\frac{\partial F}{\partial Z_A} \right]_0 dZ_A = x_a \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} G_0 + \left[\frac{\partial G}{\partial \omega} \right]_0 d\omega + \left[\frac{\partial G}{\partial \varphi} \right]_0 d\varphi + \left[\frac{\partial G}{\partial \kappa} \right]_0 d\kappa + \\ \left[\frac{\partial G}{\partial X_O} \right]_0 dX_O + \left[\frac{\partial G}{\partial Y_O} \right]_0 dY_O + \left[\frac{\partial G}{\partial Z_O} \right]_0 dZ_O + \\ \left[\frac{\partial G}{\partial X_A} \right]_0 dX_A + \left[\frac{\partial G}{\partial Y_A} \right]_0 dY_A + \left[\frac{\partial G}{\partial Z_A} \right]_0 dZ_A = y_a \end{aligned}$$

En estas ecuaciones los términos F_0 y G_0 son los valores de las funciones originales F y G , particularizadas para valores aproximados de las nueve incógnitas, $(\omega, \varphi, \kappa, X_0, Y_0, Z_0, X_A, Y_A, Z_A)$, los términos $[\partial F/\partial \omega]_0, \dots, [\partial G/\partial Z_A]_0$, son las derivadas parciales de las funciones F y G con respecto a las mencionadas incógnitas, particularizadas para los valores aproximados iniciales y $d\omega, \dots, Z_A$, son las correcciones a esas aproximaciones iniciales.

Si, como se ha dicho, (x_a, y_a) representan observaciones y las ecuaciones serán utilizadas en un ajuste mínimo cuadrático, se deben incluir términos residuales (Anexo B). Así, se puede escribir:

$$V_x + J = b_{11}d\omega + b_{12}d\varphi + b_{13}d\kappa - b_{14}dX_0 - b_{15}dY_0 - b_{16}dZ_0 + b_{14}dX + b_{15}dY + b_{16}dZ \quad (2.43)$$

$$V_y + K = b_{21}d\omega + b_{22}d\varphi + b_{23}d\kappa - b_{24}dX_0 - b_{25}dY_0 - b_{26}dZ_0 + b_{24}dX + b_{25}dY + b_{26}dZ$$

donde V_x y V_y son los residuos incógnita, correcciones a las observaciones, que serán nulos si se utiliza el número mínimo de puntos observados, y los coeficientes b, J y K son los siguientes (Wolf & Dewitt, 2000):

$$\begin{aligned} \Delta X &= X_A - X_0 ; \Delta Y = Y_A - Y_0 ; \Delta Z = Z_A - Z_0 \\ b_{11} &= \frac{f}{q^2} [r(-m_{33}\Delta Y + m_{32}\Delta Z) - q(-m_{13}\Delta Y + m_{12}\Delta Z)] \\ b_{12} &= \frac{f}{q^2} [r(\cos \varphi \Delta X + \sin \omega \sin \varphi \Delta Y - \cos \omega \sin \varphi \Delta Z) - \\ & q(-\sin \varphi \cos \kappa \Delta X + \sin \omega \cos \varphi \cos \kappa \Delta Y - \cos \omega \cos \varphi \cos \kappa \Delta Z)] \\ b_{13} &= \frac{-f}{q} (m_{21}\Delta X + m_{22}\Delta Y + m_{23}\Delta Z) \\ b_{14} &= \frac{f}{q^2} (rm_{31} - qm_{11}) \\ b_{15} &= \frac{f}{q^2} (rm_{32} - qm_{12}) \\ b_{16} &= \frac{f}{q^2} (rm_{33} - qm_{13}) \\ J &= x_a - x_0 + f \frac{r}{q} \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned}
b_{21} &= \frac{f}{q^2} [s(-m_{33}\Delta Y + m_{32}\Delta Z) - q(-m_{23}\Delta Y + m_{22}\Delta Z)] \\
b_{22} &= \frac{f}{q^2} [s(\cos \varphi \Delta X + \sin \omega \sin \varphi \Delta Y - \cos \omega \sin \varphi \Delta Z) - \\
&\quad q(-\sin \varphi \cos \kappa \Delta X + \sin \omega \cos \varphi \sin \kappa \Delta Y - \cos \omega \cos \varphi \sin \kappa \Delta Z)] \\
b_{23} &= \frac{-f}{q} (m_{11}\Delta X + m_{12}\Delta Y + m_{13}\Delta Z) \\
b_{24} &= \frac{f}{q^2} (sm_{31} - qm_{21}) \\
b_{25} &= \frac{f}{q^2} (sm_{32} - qm_{22}) \\
b_{26} &= \frac{f}{q^2} (sm_{33} - qm_{23}) \\
K &= y_a - y_0 + f \frac{s}{q}
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Las ecuaciones (2.43) se pueden expresar matricialmente de la siguiente forma:

$${}_m A^n \quad {}_n X^1 = {}_m L^1 + {}_m V^1 \tag{2.46}$$

Donde el índice m es el número de ecuaciones, dos por cada punto medido, y n es número de incógnitas. A es la matriz de los coeficientes b de las incógnitas, X es la matriz de las correcciones a las aproximaciones iniciales, L es la matriz de los términos constantes J y K , y V es la matriz de los residuos producidos en la medida de coordenadas (x_a, y_a) .

Como el proceso de utilización de las ecuaciones de colinealidad comienza con la linealización de un modelo matemático no lineal, en el que se desprecian términos de mayor orden, las soluciones son aproximaciones. Es necesario repetir los cálculos dando valores iniciales aproximados a las cantidades incógnitas y las soluciones a cada iteración serán las correcciones a esas incógnitas que, una vez sumadas a los valores iniciales, serán a su vez los valores iniciales en la siguiente iteración. Normalmente se necesitan varias iteraciones, dependiendo de la precisión con que se hayan determinado los valores iniciales aproximados, pero van disminuyendo ostensiblemente con cada iteración, hasta que su valor queda dentro de la tolerancia exigida, momento en el que termina el proceso.

2.2.3. Aplicaciones

2.2.3.1. Resección espacial

Se llama *resección espacial* al método numérico por el cual se determinan los seis parámetros de la orientación¹ externa de una fotografía, las coordenadas del centro de proyección (X_o, Y_o, Z_o) y los ángulos de rotación alrededor de los ejes (ω, φ, κ). El más utilizado es el que se lleva a cabo mediante las ecuaciones de colinealidad.

Figura 2.13. Resección espacial

El desarrollo realizado en el punto anterior es precisamente el referido a la resección (Wolf & Dewitt, 2000) con una puntualización: los datos conocidos son las coordenadas terreno de los puntos de apoyo, por tanto no aparecerán los términos dX, dY, dZ . Las ecuaciones (2.43) que se emplean para la resección espacial quedan reducidas entonces de la siguiente forma:

¹ El término *orientación*, utilizado comúnmente para hacer referencias angulares, en ciertos contextos de la Fotogrametría como éste, reúne los conceptos de *posición* (localización del centro de proyección mediante sus coordenadas tridimensionales) y *actitud* (rotación del eje óptico respecto de los ejes coordenados mediante sus tres ángulos de giro) de un sensor.

$$\begin{aligned}
 V_x + J &= b_{11}d\omega + b_{12}d\varphi + b_{13}d\kappa - b_{14}dX_0 - b_{15}dY_0 - b_{16}dZ_0 \\
 V_y + K &= b_{21}d\omega + b_{22}d\varphi + b_{23}d\kappa - b_{24}dX_0 - b_{25}dY_0 - b_{26}dZ_0
 \end{aligned}
 \tag{2.47}$$

La cuestión principal, pues se trata de un método iterativo, es la búsqueda de las aproximaciones iniciales. En fotogrametría aérea, con fotografía vertical, la Z_0 se identifica con la altitud de vuelo H , los giros ω y φ se pueden igualar a cero y las coordenadas X_0 , Y_0 y el ángulo κ pueden aproximarse mediante una transformación bidimensional de semejanza. Otra opción para κ es identificar el norte de la fotografía. X_0 , Y_0 se pueden aproximar midiendo distancias desde puntos de apoyo conocidos al punto principal y Z_0 conociendo la escala de la foto y la focal.

En fotogrametría de objeto cercano la situación es similar si se efectúa toma normal, sin embargo puede cambiar sensiblemente en toma oblicua o convergente y se estudiaría en función del escenario.

Además de la resección por colinealidad existen otras soluciones aproximadas al problema, que en algún caso incluso se utilizan como aporte de valores iniciales al método por colinealidad. El método más utilizado es el de la *Transformación Lineal Directa*¹ (Abdel-Aziz & Karara, 1971), que como su nombre indica, es una aproximación lineal de once parámetros (Anexo A). Otra solución es la aportada por E. Church, en la que, apoyándose en la semejanza de ángulos formados en el espacio objeto y en el espacio imagen, se requiere un mínimo de tres ecuaciones y tres pares de puntos terreno-imagen (Lerma, 2002).

H. Zeng hace una variación al método de colinealidad utilizando la matriz de rotación de Rodrigues, lo que le permite no incluir valores iniciales, aunque el método necesita linealización e iteraciones (Zeng, 2010). S. Easa da dos soluciones al problema; en (Easa, 2007) describe las dificultades que se dan en el método Newton-Raphson, creando un modelo basado en una hoja Excel que lo soluciona; en la segunda (Easa, 2010), plantea un modelo de optimización que no requiere de linealización, iteraciones ni valores iniciales, mediante un cálculo en hoja Excel. En la línea de los modelos de optimización, E. Elnima se basa en la evolución genética, algoritmo que no necesita de linealización, aunque conlleva gran carga de cálculo (Elnima, 2015).

¹ Es muy aceptado su acrónimo en inglés, *DLT*

2.2.3.2. Intersección espacial

Una vez calculada la orientación de un fotograma en el espacio mediante la resección espacial, si se conocen los mismos datos para otro que forme con el anterior un par estereoscópico, se pueden conocer las coordenadas de cualquier punto que aparezca en ambas fotografías. A este procedimiento se le conoce como *intersección espacial*, ya que los rayos de ambos puntos imagen, correspondientes al mismo punto terreno, intersectarán en el espacio, exactamente en ese punto terreno.

Figura 2.14. Intersección espacial

El cálculo se lleva a cabo a partir de las ya utilizadas ecuaciones de colinealidad linealizadas, Ecs. (2.43). En este caso, se particularizan sabiendo que los valores de orientación ($X_o, Y_o, Z_o, \omega, \phi, \kappa$) son conocidos y las incógnitas pasan a ser las coordenadas del punto (X, Y, Z). Por tanto, aparecerán los términos dX, dY, dZ , que son las correcciones a aplicar a las aproximaciones iniciales. Las ecuaciones quedan:

$$\begin{aligned} V_x + J &= b_{14}dX + b_{15}dY + b_{16}dZ \\ V_y + K &= b_{24}dX + b_{25}dY + b_{26}dZ \end{aligned} \quad (2.48)$$

Cada punto aporta cuatro ecuaciones de este tipo, dos para la fotografía izquierda y otras dos para la derecha y como hay tres incógnitas, se llega a la solución mediante un ajuste mínimo cuadrático y un proceso iterativo similar al descrito anteriormente.

Una forma de dar las coordenadas iniciales es utilizando las *ecuaciones del paralaje* (Wolf & Dewitt, 2000):

$$\begin{aligned} h_A &= H \frac{Bf}{p} \\ X_A &= B \frac{x_a}{p_a} \\ Y_A &= B \frac{y_a}{p_a} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Donde h_A es la cota del punto, H es la altitud de vuelo, B es la base aérea del par estereoscópico, f es la focal de la cámara, (x_a, y_a) son las fotocoordenadas del punto y p_a , la paralaje, es decir, la diferencia de fotocoordenadas x en el punto $p_a = x_a - x'_a$.

2.2.3.3. Orientación relativa

La *orientación relativa* consiste en la determinación de la orientación de una fotografía con respecto a otra que forme par estereoscópico con ella, reproduciendo así el momento de la toma fotográfica. Hay que tener en cuenta que no se trata aún de situar los haces en el sistema de referencia terreno, de una manera absoluta, con lo que la orientación externa obtenida no es definitiva. Analíticamente se puede calcular mediante la *condición de coplanaridad*, que no trataremos aquí por no ser objeto de esta Tesis, o por la condición de colinealidad, que es la línea de razonamiento que se está siguiendo y es la más implantada actualmente.

Entre las posibles formas de actuar, la más usada es la de fijar el haz izquierdo y mover el derecho en el espacio. Para ello, los parámetros externos de la primera fotografía¹ se igualan a cero ($X_{O_1} = Y_{O_1} = Z_{O_1} = \omega_1 = \varphi_1 = \kappa_1 = 0$), aunque en el caso de la Z_{O_1} también se puede igualar a la f . En cuanto al fotograma izquierdo, se fija también la X_{O_2} , o lo que sería lo mismo, la distancia entre ambos fotogramas, igualándolo a la *fotobase*, b . El elegir una u otra base implica únicamente un factor de escala en el modelo final obtenido, consiguiendo de esta forma un modelo a la escala de las imágenes.

¹ Los términos *haz*, *fotografía*, *fotograma* e *imagen* se están utilizando como sinónimos

Figura 2.15. Orientación relativa

Por tanto, de las doce incógnitas iniciales (los seis parámetros externos de ambas imágenes), se han fijado siete, quedando cinco incógnitas en el sistema. Cada punto terreno del modelo estereoscópico contribuye con cuatro ecuaciones, dos por cada imagen, pero a su vez, incluye tres incógnitas más, sus coordenadas (X, Y, Z) en el modelo. Compensando ecuaciones e incógnitas, podemos decir entonces que cada punto aporta una ecuación, por lo que se necesitaría al menos cinco puntos para resolver el sistema. Como siempre, seis o más puntos mejorarían el resultado mediante un ajuste mínimo cuadrático. En el caso de ser seis puntos, el sistema lo compondrían 24 ecuaciones ($6 \text{ puntos} \times 4 \text{ ecuaciones por punto}$), con 23 incógnitas (5 incógnitas de la orientación exterior + $6 \text{ puntos} \times 3 \text{ incógnitas por punto}$). Las ecuaciones (2.43) se particularizan para la orientación relativa como sigue:

$$V_{x_1} + J = b_{14}dX + b_{15}dY + b_{16}dZ$$

$$V_{y_1} + K = b_{24}dX + b_{25}dY + b_{26}dZ$$

$$\begin{aligned} V_{x_2} + J &= b_{11}d\omega_2 + b_{12}d\varphi_2 + b_{13}d\kappa_2 - b_{15}dY_{O_2} - b_{16}dZ_{O_2} + \\ &\quad b_{14}dX + b_{15}dY + b_{16}dZ \\ V_{y_2} + K &= b_{21}d\omega_2 + b_{22}d\varphi_2 + b_{23}d\kappa_2 - b_{25}dY_{O_2} - b_{26}dZ_{O_2} + \\ &\quad b_{24}dX + b_{25}dY + b_{26}dZ \end{aligned} \quad (2.50)$$

Matricialmente, el sistema, en el caso mencionado de los seis puntos, quedaría de la siguiente forma:

$${}_{24}A^{23} {}_{23}X^1 = {}_{24}L^1 + {}_{24}V^1 \quad (2.51)$$

Como en los casos anteriores, se debe introducir el valor aproximado de las cinco incógnitas de la orientación externa y los tres de cada punto. Los giros de la segunda fotografía ($\omega_2, \varphi_2, \kappa_2$) se pueden igualar a cero, al estar en el caso de toma normal, así como las Y_{O_2}, Z_{O_2} (esta última podría tomar el valor f , si así fue elegida en la primera fotografía). Las coordenadas aproximadas planimétricas (X, Y) de los puntos pueden ser sus fotocoordenadas en el sistema de referencia imagen de la primera foto y la Z , tomaría el valor $-f$ (o cero, en el caso de ser f el valor de la Z_{O_2}).

El proceso posterior, la *orientación absoluta*, finalizaría el proceso de la orientación externa, llevando el modelo estereoscópico obtenido en la orientación relativa, al sistema de referencia terreno, mediante una transformación tridimensional de semejanza (conocida por *Helmert espacial*) y la medida de los puntos de apoyo, puntos de coordenadas conocidas en el sistema de referencia terreno e identificables en las imágenes.

2.2.3.4. Calibración de cámaras

En este apartado sólo se trata la utilización de las ecuaciones de colinealidad en la calibración de cámaras fotográficas, tomada genéricamente como la determinación de sus parámetros internos (distancia focal calibrada, posición del punto principal y función de distorsión), gracias a la inclusión de una serie de términos adicionales.

Las ecuaciones de colinealidad (2.40) ampliadas con estos términos, según (Luhmann, Robson, Kyle, & Harley, 2006), basado en (Brown, 1971), quedarían como sigue:

$$\begin{aligned}x_a &= x_0 - \bar{x}_a(k_1 r_a^2 + k_2 r_a^4 + k_3 r_a^6) - (p_1(r^2 + 2\bar{x}^2) + 2p_2\bar{x}\bar{y}) - f \frac{r}{q} \\y_a &= y_0 - \bar{y}_a(k_1 r_a^2 + k_2 r_a^4 + k_3 r_a^6) - (2p_1\bar{x}\bar{y} + p_2(r^2 + 2\bar{y}^2)) - f \frac{s}{q}\end{aligned}\tag{2.52}$$

donde, además de las variables ya conocidas,

$$\bar{x}_a = x_a - x_0 \quad ; \quad \bar{y}_a = y_a - y_0$$

$$r_a = \sqrt{\bar{x}_a^2 + \bar{y}_a^2}$$

k_1, k_2, k_3 , son los coeficientes de la distorsión radial simétrica

p_1, p_2 , son los coeficientes de la distorsión tangencial

La inclusión de estos términos adicionales hace que, tras la linealización, haya que introducir más ecuaciones independientes en forma de constricciones y, en otros casos, configuraciones geométricas diferentes que desemboquen en una mayor estabilidad numérica para asegurar la solución del sistema. Se proponen, como se verá más adelante, configuraciones de varias fotos con distintos ángulos, puntos objeto con distinta profundidad, distintas distribuciones de puntos, etc.

Calibración de cámaras no métricas

3.1. Introducción

Una *cámara* se compone fundamentalmente de un plano imagen y de unas lentes, situados ambos en el espacio imagen, que se relacionan con el espacio objeto mediante una transformación (Clarke & Fryer, 1998). Esta transformación no puede ser perfectamente descrita por las ya estudiadas transformaciones proyectivas, porque hay variaciones entre la localización de un punto en el espacio objeto y la posición de su correspondiente u homólogo, en el espacio imagen. Esas variaciones se llaman *distorsiones* y, aunque pueden ser modeladas teóricamente, siempre serán una aproximación que se acercará más o menos a la realidad geométrica y óptica de las lentes, dependiendo del modelo seleccionado y los parámetros que lo conforman.

Figura 3.1. Alteración de la condición de colinealidad

Se plantean entonces, dos aspectos importantes en este escenario. Por un lado se tiene una cámara, que se comporta como un sensor que capta, en su espacio imagen, rayos de luz que vienen del espacio objeto, según una geometría interna, intrínseca a la

propia cámara y sus lentes. Por tanto, se produce una correspondencia entre rayos y coordenadas de los puntos imagen, siendo los *parámetros internos* los que la definen. Por otro lado, existe una relación entre el marco de referencia de la cámara y el sistema de referencia objeto que tiene que ver con la orientación (posición y actitud) de la cámara respecto a este, son los llamados *parámetros externos* (Weng, Cohen, & Herniou, 1992).

La *calibración geométrica de cámaras* es, por tanto, el proceso de determinación de las características internas geométricas y físicas (parámetros internos) y/o la posición y orientación tridimensional de la cámara respecto a cierto sistema de coordenadas objeto (parámetros externos) y es crucial y especialmente considerada en aplicaciones que implican medidas cuantitativas, como la Fotogrametría y la Visión Artificial.

De todos los parámetros a determinar, *distancia focal*, *posición del punto principal* y *función de distorsión radial* son fundamentales, hasta el punto de considerar una cámara calibrada, si al menos estos son conocidos (Remondino & Fraser, 2006). Otros parámetros internos son la *función de distorsión tangencial*, la *afinidad* y la *oblicuidad* del sistema de coordenadas imagen, y otros parámetros adicionales. En función del tipo de aplicación se requerirán más parámetros, como en el caso de medidas fotogramétricas, o menos, como en la mayoría de las aplicaciones de visión artificial. Análogamente, podría expresarse en términos de precisión y, en esa dualidad, decidir el método de calibración a llevar a cabo.

La calibración de cámaras es un problema complejo, ya que, como se ha dicho, los modelos teóricos de cámara utilizados incluyen varios de los parámetros que resuelven los factores que se dan en la toma fotográfica, pero en la mayoría de los casos, no se parametrizan todos y en otros, no es acertada la relación causa-efecto. También hay que contar con las fuentes de ruido, tanto en la formación de la imagen (discretización de la realidad), como en la medida de las posiciones de los puntos en los espacios imagen y objeto, aunque normalmente quedarán compensadas en el proceso de cálculo. Aun así, las simplificaciones que recogen estos modelos suelen aportar resultados aceptables.

3.2. Modelos de cámara

Se puede definir un *modelo de cámara* como aquel que explica la proyección de un elemento del espacio tridimensional objeto en el espacio bidimensional imagen, mediante una formulación matemática que aproxima la geometría interna en función de la posición y orientación de la cámara en el momento de la toma. De los existentes, el modelo de cámara seleccionado depende del proceso de formación de imagen, de manera que si, por ejemplo, la cámara tiene lentes de parámetros fijos, como la distancia focal, la situación es diferente de una de parámetros variables, ya que éstos se modifican en función de la exposición fotográfica (Willson, 1994). Por esta razón, en estos modelos se suele calibrar un escenario concreto, con unas condiciones determinadas. La elección también depende de la precisión requerida y de la naturaleza de la aplicación.

Desde que en 1919 A. Conrady consiguiera una expresión analítica para modelizar la distorsión de un objetivo fotográfico, muchos han sido los modelos desarrollados introduciendo más o menos parámetros. A continuación se describen los tres modelos más importantes.

3.2.1. Modelo de proyección perspectiva o Pinhole

Se trata del modelo de cámara más sencillo y, quizá por ello, el más utilizado y documentado (Tsai, 1987), (Weng, Cohen, & Herniou, 1992), (Shih, Hung, & Lin, 1995), (Salvi, Armangué, & Batlle, 2002), (Isern, 2003). Se basa en la condición de colinealidad, ya que un punto objeto, su correspondiente punto imagen y el centro perspectivo, están alineados. O deberían estar, ya que se dan una serie de errores sistemáticos que hacen que los rayos se desvíen de su esperada trayectoria al atravesar el objetivo. Por esta razón, hay autores que hacen referencia a un modelo de cámara *pinhole*, como aquel que no tiene distorsiones (Ryberg, Lennartson, Christiansson, Ericsson, & Asplund, 2011).

En un sistema de referencia objeto, un punto P tiene unas coordenadas (X, Y, Z) . Ese mismo punto, aparece en una fotografía con unas coordenadas (x, y, z) en un sistema de referencia centrado en la cámara. El origen de este sistema es el centro óptico de las lentes de la cámara, O , y el eje z es el eje óptico. El plano imagen se supone paralelo al plano (x, y) y a una distancia f (distancia focal efectiva de la cámara) desde el origen (Figura 3.2).

Figura 3.2. Sistemas de referencia en el modelo pinhole

Se puede relacionar ambos sistemas de referencia por la expresión:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + T \quad (3.1)$$

En ella, la orientación de la cámara con respecto al sistema de referencia objeto, queda definida por R , matriz de rotación 3×3 , y su posición, por T , vector de traslación 3×1 . Con esta transformación se están referenciando los puntos del terreno al sistema de la cámara, o de *fotocoordenadas*.

Además, se define un sistema de referencia imagen (u, v) , situado en el plano imagen, en el que el origen O' , es el punto principal de la imagen, tomado éste como la intersección del plano imagen y el eje óptico y los ejes u y v son paralelos a los ejes del sistema de la cámara x e y (Figura 3.2). Se presume que el punto principal de la imagen, O' y el centro geométrico de la imagen no coincidirán, debido al más que probable descentrado de las lentes. El objetivo es relacionar las posiciones de los puntos de la escena, ya transformados al sistema de fotocoordenadas, con su proyección sobre el plano imagen (Figura 3.3). Esta proyección viene dada por las sencillas, aunque fundamentales ecuaciones:

$$\begin{aligned} u &= f \frac{x}{z} \\ v &= f \frac{y}{z} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Figura 3.3. Proyección al plano imagen

Por último, se define el sistema de referencia píxel, intrínseco a la imagen digital, que denota como (c, r) ¹ las coordenadas columna y fila de una posición dentro de la misma. El sistema de referencia de la cámara (x, y, z) es paralelo a este sistema píxel y, por tanto, también lo es al sistema del plano imagen. La relación entre estos dos sistemas se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} c - c_0 &= s_u u \\ r - r_0 &= -s_v v \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde (c_0, r_0) es la posición en el sistema píxel del punto principal O' y s_u y s_v son los respectivos coeficientes de escala entre ambos sistemas. Se puede observar en la Figura 3.2 cómo el sentido del eje v del sistema imagen y el del eje r del sistema píxel son opuestos, por lo que, por convención, el signo de s_v en la expresión es negativo.

Finalmente, combinando las Ecs. (3.1), (3.2) y (3.3) se llega a la expresión del modelo (Ecs. 3.4), que relaciona las posiciones píxel, las coordenadas objeto y varios parámetros a calibrar. Se puede observar que son las ecuaciones de colinealidad (Ecs. 2.36), con la inclusión del cambio de unidades a píxeles.

$$\begin{aligned} \frac{u}{f} &= \frac{c - c_0}{f_u} = \frac{r_{11}X + r_{12}Y + r_{13}Z + t_1}{r_{31}X + r_{32}Y + r_{33}Z + t_3} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{u} \\ \frac{v}{f} &= \frac{r - r_0}{f_v} = \frac{r_{21}X + r_{22}Y + r_{23}Z + t_2}{r_{31}X + r_{32}Y + r_{33}Z + t_3} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{v} \end{aligned} \quad (3.4)$$

¹ Se utiliza la notación inglesa r para la coordenada fila en vez de f , para evitar confusiones con la focal.

donde $(\hat{u}, \hat{v})$ son las coordenadas en el plano imagen normalizado para $z = 1$, y $f_u = f * s_u$ y $f_v = f * s_v$ son las distancias focales en unidades columna y fila, respectivamente, si se supone no cuadrada la forma del píxel.

Así, a partir de las Ecs. (3.4), se puede calcular los valores de los parámetros internos c_0, r_0, f_u y f_v y de los parámetros externos R y T , que contienen las coordenadas (X_0, Y_0, Z_0) del centro de proyección y los giros $(\omega, \varphi, \kappa)$ del eje óptico alrededor de los ejes. Para ello, de un número suficiente de puntos, se deberá conocer sus coordenadas en el sistema objeto (X_i, Y_i, Z_i) y sus correspondientes (c_i, r_i) en el sistema píxel medidas en la imagen. Faltaría por añadir el modelo de distorsión. Ese número de puntos es cinco o más y debido a su naturaleza no lineal requiere de aproximaciones para calcular los valores de los parámetros de calibración en un ajuste de mínimos cuadrados.

La proyección perspectiva se puede representar en coordenadas homogéneas con una matriz de proyección 3×4 (Kannala, Heikkilä, & Brandt, 2008), que proyecta el punto en fotocoordenadas o sistema de referencia de la cámara (x, y, z) , al sistema de referencia imagen (u, v) :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

La conversión de coordenadas imagen (u, v) a coordenadas píxel (c, r) se realiza normalmente mediante una transformación afín:

$$\begin{pmatrix} c \\ r \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m_c & -m_c \cot \alpha \\ 0 & m_r / \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_0 \\ r_0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

donde (c_0, r_0) es el punto principal, α es el ángulo entre los ejes c y r (sería $\pi/2$ en el caso de ejes ortogonales) y m_c y m_r , el número de píxeles por unidad de distancia, en sendas direcciones. Por último, relacionándolo con el sistema de referencia objeto, se incluye una matriz de rotación R y un vector de traslación t :

$$\begin{aligned} m &= \begin{bmatrix} m_c & -m_c \cot \alpha & c_0 \\ 0 & m_r / \sin \alpha & r_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X = \\ &= \begin{bmatrix} m_c f & -m_c f \cot \alpha & c_0 \\ 0 & m_r / \sin \alpha f & r_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [R \quad t] X = \begin{bmatrix} m_c f & m_c s f & c_0 \\ 0 & m_c \gamma f & r_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [R \quad t] X \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde

$$\gamma = \frac{m_r}{m_c \sin \alpha} ; s = -\cot \alpha \quad (3.8)$$

Si, además, un cambio en la distancia focal y un cambio en las unidades píxel son irrelevantes, se puede igualar $m_c = 1$, con lo que la matriz de proyección queda:

$$K = \begin{bmatrix} f & sf & c_0 \\ 0 & \gamma f & r_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow P = K [R \quad t] \quad (3.9)$$

La expresión de la matriz de proyección tiene 9 grados de libertad, de los que 3 pertenecen a K , los parámetros internos de la cámara (f , c_0 , r_0), y los otros 6, a los parámetros externos, tres giros para la orientación en R y tres traslaciones para la posición en t . Si se impone la distancia focal en términos de dimensiones de píxel no cuadrado, los grados de libertad aumentan a 10.

3.2.2. Modelo proyectivo de cámara

El modelo proyectivo de cámara se basa en una reconstrucción proyectiva de la escena, en lugar de una euclidiana. Se trata del modelo general lineal de cámaras con centro de proyección finito, del que la cámara de proyección perspectiva o pinhole es un caso particular (Hartley & Zisserman, 2004). En ambos, la submatriz KR es no singular pero aquí además, la matriz 3×4 homogénea P de la Ec. (3.9) tiene rango 3, pues si fuera menor, la imagen obtenida sería un punto o una línea, nunca el plano completo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

El sistema tiene 11 grados de libertad, ya que a los diez anteriores del modelo pinhole, se le añade el parámetro de oblicuidad o inclinación, de manera que se necesita un mínimo de seis puntos para proporcionar la solución lineal, muy inestable por otra parte. La distorsión de las lentes no es tratada fácilmente con este tipo de modelos por su naturaleza no lineal.

En sus textos, (Faugeras, 1993) y (Hartley & Zisserman, 2004) hacen un desarrollo algebraico completo de este modelo.

3.2.3. Modelo de lente delgada o de Gauss

A diferencia del modelo pinhole, el modelo de Gauss establece que las lentes tienen una abertura finita y por tanto, cada punto objeto “emite” un cono de luz que llega a la lente (Jenkins & White, 1976). Está basado en los principios de la Geometría Óptica de las *lentes delgadas*. Una lente delgada es una lente esférica cuyo espesor es despreciable, considerándose el centro óptico de la misma, el punto donde coinciden los polos de sus caras, o dioptrios.

Además se supone que se trabaja únicamente en la zona de Gauss o dominio paraxial, muy próxima al eje óptico y con rayos que formen pequeños ángulos con éste, de forma que se puede aproximar los senos y tangentes de esos ángulos por el valor del ángulo expresado en radianes. Las propiedades de la zona de Gauss son las siguientes:

- *Condición de estigmatismo*, es decir, los rayos de un punto objeto se intersecan en el espacio imagen en un único punto, llamándose éstos *conjugados*.
- *Condición de aplanatismo*. Si dos puntos definen una recta perpendicular al eje óptico, su recta conjugada en el espacio imagen, también.

Los sistemas ópticos, entre los que se encuentran las lentes delgadas, no se comportan estigmáticamente en la práctica, por lo que se introducen los llamados *diafragmas*, dispositivos que limitan la cantidad de luz que llega al sistema.

Figura 3.4. Modelo de lente delgada

La formación de imágenes, como se puede observar en la Figura 3.4, se realiza a partir de la posición de los focos:

- Los rayos paralelos al eje óptico que atraviesan la lente, pasan por el foco imagen.
- Los rayos que pasan por el foco objeto se refractan paralelos al eje óptico.
- Los rayos que pasan por el centro óptico, al refractarse no se desvían.

La longitud focal en ambos espacios, imagen y objeto, f' y f , son iguales ya que el medio de ambos es el mismo, el aire. La *distancia de enfoque*, s , entre el centro de la lente y el objeto, tiene su conjugada en el espacio imagen, la *distancia focal efectiva*, s' , como la suma de la *distancia focal nominal*, f' y la distancia entre el foco imagen y el plano imagen, que se denomina *distancia de enfoque*, foc . La relación entre ambas se explica mediante la conocida ecuación fundamental de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f' + foc} - \frac{1}{s} \quad (3.11)$$

El modelo de lente delgada es más complejo que el de pinhole, ya que incluye parámetros para modelar la distancia focal y la distancia de enfoque por separado. Además, modela la profundidad de campo y la apertura de diafragma.

3.2.4. Aproximaciones perspectivas

En (Aloimonos, 1990) se hace una introducción a las proyecciones de los objetos tridimensionales en imágenes bidimensionales, en la que se mantiene que las deformaciones perspectivas producidas se deben a tres efectos:

- *Distancia*. Los objetos cercanos al plano de la imagen parecen más grandes.
- *Posición*. La distorsión de un objeto depende del ángulo entre la línea de visión y el plano de imagen, el cual depende de la posición del objeto.
- *Reducción*. La distorsión de un objeto depende del ángulo entre la línea de visión y la superficie normal al plano en el que se encuentra el patrón.

El modelo de proyección perspectiva capta estos tres efectos, aunque su resolución es más complicada, ya que se trata a menudo de soluciones no lineales. Sin embargo, hay dos ejemplos de aproximaciones perspectivas que aun captando los efectos de la

perspectiva, son simples a la hora de trabajar con ellos: las proyecciones *paraperspectiva* y *ortoperspectiva*.

Figura 3.5. Proyecciones paraperspectiva y ortoperspectiva

3.2.4.1. Proyección paraperspectiva

Se trata de un modelo en el que un objeto se proyecta sobre el plano imagen en dos fases (Aloimonos, 1990). En primer lugar, el objeto, con centro de masas en el punto G , es proyectado sobre un plano auxiliar Π , paralelo al plano imagen y que contiene a G (a una distancia d de éste), mediante rayos paralelos al rayo de proyección central OG .

En la segunda fase, la imagen creada sobre el plano auxiliar Π , es proyectada perspectivamente sobre el plano imagen, dándose así una transformación de reducción de escala (factor $1/d$), al ser paralelos ambos planos (Figura 3.5). Es, por tanto, un modelo zonal, ya que si el objeto es un punto, el problema queda reducido a una proyección perspectiva.

De esta forma, la deformación de la imagen se descompone en dos partes: en la primera fase se dan los efectos de posición y reducción y en la segunda, el de distancia. Se utiliza en texturización de formas y en reconocimiento de objetos.

3.2.4.2. Proyección ortoperspectiva

Es similar a la paraperspectiva, pero el plano auxiliar cambia su orientación. En este caso es perpendicular al rayo OG . Con esto, el primer paso sería realizar un giro virtual de la cámara para hacer coincidir el eje óptico con el rayo OG (Figura 3.5). Después de esta rotación se realiza una proyección *ortográfica escalada* (Sec. 3.2.5.2).

Es utilizada en problemas de estimación de posición y orientación de cámaras.

3.2.5. Modelo afín

Cuando los objetos están muy lejanos a la cámara, las pequeñas variaciones en profundidad resultan irrelevantes en la imagen. Así, el modelo de cámara puede ignorar la perspectiva. Estos modelos están agrupados genéricamente y denominados por algunos autores *cámaras no perspectivas* y son el modelo *afín* (el más general), el modelo de *proyección ortográfica* y la *proyección de perspectiva débil* (Hartley & Zisserman, 2004). Se trata de un caso especial de la cámara proyectiva, que se obtiene igualando a cero los términos T_{31} , T_{32} y T_{33} de la matriz de proyección P en la Ec. (3.10):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

donde la submatriz 3×3 de la parte izquierda de P perteneciente a KR , es singular. Se puede descomponer de la siguiente forma:

$$P = \begin{bmatrix} f_x & s & 0 \\ 0 & f_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^{1T} & t_1 \\ r^{2T} & t_2 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & t_1 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

La única restricción es que el rango de M , la submatriz 2×3 de los términos m_{ij} , sea 2. Los grados de libertad son 8, de los que 3 son los parámetros internos (f_x , f_y , s), quedando sin definir el punto principal, y los otros 5, los parámetros externos, están incluidos en los coeficientes r y t . El modelo afín es una buena aproximación si el relieve del objeto es muy pequeño en comparación con su distancia a la cámara. Además es un modelo que conserva el paralelismo.

Figura 3.6. Perspectiva débil, ortográfica escalada y ortográfica

3.2.5.1. Modelo de proyección perspectiva débil

En un proceso de particularización del modelo afín, el único constreñimiento se basaría en contemplar factores de escala distintos en las dos direcciones de los ejes de la imagen, quedando la matriz de proyección P como sigue y con 7 grados de libertad:

$$P = \begin{bmatrix} f_x & 0 & 0 \\ 0 & f_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^{1T} & t_1 \\ r^{2T} & t_2 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Siendo $P = [M \mid t]$, como se ha visto en la Ec. (3.13), M se caracteriza por tener la última fila igual a cero y las dos primeras filas ortogonales.

3.2.5.2. Modelo de proyección ortográfica escalada

En este caso, el escalado es isotrópico, con lo que los grados de libertad son 6:

$$P = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^{1T} & t_1 \\ r^{2T} & t_2 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^{1T} & t_1 \\ r^{2T} & t_2 \\ 0^T & 1/f \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

La matriz M , además de tener la última fila igual a cero y las dos primeras filas ortogonales, como ocurría con la perspectiva débil, aquí éstas tienen igual norma.

3.2.5.3. Modelo de proyección ortográfica

Por último se llegaría al caso de una matriz de proyección paralela, en el que el punto principal no está definido:

$$P = \begin{bmatrix} r^{1T} & t_1 \\ r^{2T} & t_2 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Esta matriz tiene 5 grados de libertad y como la anterior, tiene la última fila igual a cero y las dos primeras filas ortogonales y de norma igual a 1.

■

El modelo afín y todas sus variantes están suficientemente documentados en (Aloimonos, 1990), (DeMenthon & Davis, 1992), (Faugeras, 1993), (Hartley & Zisserman, 2004), (Banerjee, 2008) y (Wang & Wu, 2011).

3.3. Distorsión de las lentes

Se ha presentado el modelo de cámara pinhole como un modelo matemático ideal básico que no cumple exactamente la proyección perspectiva, debido a la existencia de errores sistemáticos, llamados *distorsiones de la lente*. Esto implica que, además de conocer los correspondientes parámetros internos de tipo geométrico de la proyección perspectiva, la distancia focal y las coordenadas del punto principal, habrá que determinar la tipología y magnitud de esos otros parámetros físicos, los de la distorsión. Sus efectos se traducen en una variación de la posición de los puntos imagen, constituida por una componente radial y otra tangencial (Figura 3.7).

Figura 3.7. Componentes de la distorsión: radial y tangencial

Hasta los años cincuenta el problema provocado por las distorsiones de las lentes se corregía mediante placas de distorsión similar a la lente utilizada en la toma fotográfica. A partir de ese momento se empezó primero a calibrar la distancia focal y el punto principal y después, a buscar un punto que repartiera simétricamente la distorsión radial (Clarke & Fryer, 1998). No se consideraban importantes las componentes radiales asimétricas y tangenciales, siempre que estuvieran por debajo de las 30 μm .

En la década de los años sesenta, Duane Brown divulga las investigaciones llevadas a cabo por su compañía, DBA Systems, sobre calibraciones de cámaras métricas balísticas (Brown, 1964), (Brown, 1966) y (Brown, 1968). En estas publicaciones formula los modelos de distorsión radial simétrica y de distorsión por descentrado que actualmente se siguen usando.

Con la llegada de los sensores digitales cambiaron ciertas metodologías, sobre todo de automatización en la medida, pero con conceptos similares.

Por tanto, tras incluir las distorsiones queda totalmente definido el proceso de formación de imagen de una cámara, la ya nombrada orientación interna, que depende de los parámetros internos siguientes (Luhmann, Robson, Kyle, & Harley, 2006):

- *Distancia principal.* Es la distancia sobre la perpendicular al plano imagen, o plano focal, desde su intersección con éste, hasta el centro perspectivo. Si las lentes están enfocadas al infinito, su longitud es aproximadamente igual a la distancia focal: $c \approx f$.
- *Punto principal.* Precisamente, punto de intersección del plano imagen con su perpendicular que pasa por el centro perspectivo. Muy cercano al centro geométrico de la imagen, si no hubiera distorsiones coincidiría con él.
- *Parámetros que describen los errores sistemáticos.* Son los parámetros que definen las desviaciones erróneas del modelo de proyección perspectiva. El de mayor magnitud es el de la distorsión radial simétrica. Gracias a ellos, se pueden corregir las coordenadas imagen y definir las con respecto al punto principal:

$$x' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_p - x_0 - \Delta x' \\ y_p - y_0 - \Delta y' \\ -c \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

donde

(x_p, y_p) : Coordenadas imagen medidas del punto p

(x_0, y_0) : Coordenadas del punto principal

$\Delta x', \Delta y'$: Correcciones

$\bar{x}_p = x_p - x_0$: Coordenadas referidas al punto principal

$\bar{y}_p = y_p - y_0$

$x' = \bar{x}_p - \Delta x'$: Coordenadas corregidas

$y' = \bar{y}_p - \Delta y'$

En las fuentes consultadas se hace referencia a varios tipos de distorsión: distorsión radial simétrica (Brown, 1964), distorsión por descentrado o asimétrica (Abdel-Aziz, 1975), distorsión de prisma delgado (Weng, Cohen, & Herniou, 1992) y distorsión por falta de planeidad del plano focal (Fraser, 2001). Se exponen a continuación las dos primeras, por ser las más importantes y utilizadas.

3.3.1. Distorsión radial simétrica

Se trata del mayor y más importante error en las lentes de una cámara. Se debe a las variaciones en la refracción de las lentes, de naturaleza esférica, del objetivo de las cámaras y a las imperfecciones de su curvatura. Es función de la distancia de enfoque y de la profundidad de campo, pudiendo alcanzar en lentes estándar más de 100 μm en las esquinas de la imagen (McGlone, Mikhail, & Bethel, 2004).

El valor de la distorsión de cada punto de la imagen, estando las lentes perfectamente centradas sobre el mismo eje perpendicular al plano imagen, únicamente depende de su distancia al punto principal, siendo ésta la razón por la que es radial y simétrica. Además, si es negativa, el desplazamiento sufrido por los puntos se produce hacia dentro, es decir, hacia el punto principal, conociéndose como distorsión *en barril*. Sin embargo, si es positiva, el desplazamiento será hacia fuera, denominándose distorsión *en cojín* (Figura 3.8). Evidentemente, siempre es mayor en los márgenes de la imagen.

Figura 3.8. Distorsión radial: a) negativa y b) positiva

Si la distancia focal también es un parámetro desconocido y el sistema óptico es perfectamente centrado, la función de distorsión radial tiene la forma (Brown, 1968) :

$$\delta = k_1 r^3 + k_2 r^5 + k_3 r^7 + \dots \quad (3.18)$$

donde r es la distancia radial desde el punto principal, por lo que a las coordenadas x, y observadas se les resta las correspondientes coordenadas del punto principal:

$$r_a = \sqrt{\bar{x}_a^2 + \bar{y}_a^2} = \sqrt{(x_a - x_0)^2 + (y_a - y_0)^2} \quad (3.19)$$

Los coeficientes k_i son los que definen la distorsión radial. En la mayoría de los casos prácticos suele bastar con la inclusión de los tres primeros términos, aunque algunos autores llegan hasta el quinto.

Sólo en el caso en que la distancia focal fuera elegida arbitrariamente e introducida en el sistema como un dato y no como incógnita, la fórmula de la función de distorsión se incrementaría con un primer término lineal de r , actuando en este caso como un simple factor de escala:

$$\delta = k_0 r + k_1 r^3 + k_2 r^5 + k_3 r^7 + \dots \quad (3.20)$$

Como la función de distorsión radial se puede expresar en función de sus componentes x, y , la ecuación (3.20) queda reducida a la siguiente fórmula, que es utilizada para corregir las coordenadas medidas en la imagen:

$$\begin{aligned} \delta_x &= \frac{x}{r} \delta_r = \bar{x} (k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6 + \dots) \\ \delta_y &= \frac{y}{r} \delta_r = \bar{y} (k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6 + \dots) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Esta función de distorsión va asociada a una distancia focal f , determinada y denotada como *modelo de distorsión gaussiano*, de la que se puede extraer una gráfica de distorsión, en la que se incluye la distancia radial en mm, en el eje de las abscisas y la distorsión radial en μm , en el de ordenadas (Fig. 3.9). La curva obtenida de esta forma, puede ser girada o “balanceada” respecto del origen, de manera que corte al eje de las abscisas, asignando así una distorsión nula a una distancia radial elegida. Se interpreta como que a esa distancia radial la posición de un punto imagen coincide con su correspondiente calculada. Aunque arbitraria, r_0 se suele elegir a 2/3 de la máxima distancia radial y el modelo resultante, conocido por *modelo de distorsión balanceado* es proyectivamente equivalente al modelo gaussiano.

Su formulación, a partir de la del modelo gaussiano, es la siguiente (Sánchez, Arias, González, & Gómez, 2004):

$$\begin{aligned} dr &= a_0 r + a_1 r^3 + a_2 r^5 \\ a_0 &= -a_1 r_0^2 - a_2 r_0^4 \\ d_r &= a_1 r(r^2 - r_0^2) + a_2 r(r^4 - r_0^4) \end{aligned} \quad (3.22)$$

En esta expresión, r_0 es el valor de la distancia radial escogida para la que la distorsión radial se anula.

Figura 3.9. Modelos de distorsión radial: gaussiano y balanceado

3.3.2. Distorsión por descentrado

Las lentes que componen un objetivo, en el proceso de montaje, sufren pequeñas desalineaciones de sus ejes ópticos, de forma que no coinciden y por tanto, no forman un perfecto sistema óptico centrado. Este defecto produce un error sistemático conocido como *distorsión por descentrado* y tiene una componente radial y otra tangencial. En (Brown, 1966) se demuestra la vinculación del hasta entonces aceptado *modelo de prisma delgado* para la distorsión por descentrado, con la más rigurosa y aparentemente contradictoria formulación de Conrady (Conrady, 1919), desplazando este nuevo enfoque al del prisma delgado como modelo de distorsión por descentrado.

Las componentes radial y tangencial, Δr y Δt respectivamente, de la distorsión por descentrado se expresan de la siguiente forma (Fryer & Brown, 1986):

$$\begin{aligned}\Delta r &= 3P(r) \sin(\phi - \phi_0) \\ \Delta t &= P(r) \cos(\phi - \phi_0)\end{aligned}\tag{3.23}$$

donde ϕ es el ángulo entre el eje x y el radio hasta el punto imagen, r es la distancia radial y ϕ_0 es el ángulo entre el eje x y el radio de la máxima distorsión tangencial. El llamado *perfil de la función tangencial* es igual a:

$$P(r) = J_1 r^2 + J_2 r^4 + \dots\tag{3.24}$$

Expresando las ecuaciones (3.23) en términos de las componentes x e y , estas quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\Delta x &= [p_1(r^2 + 2x^2) + 2p_2xy] [1 + p_3r^2 + \dots] \\ \Delta y &= [p_2(r^2 + 2y^2) + 2p_1xy] [1 + p_3r^2 + \dots]\end{aligned}\quad (3.25)$$

Los coeficientes p_i se definen como:

$$p_1 = -J_1 \sin \phi_0 \quad ; \quad p_2 = J_1 \cos \phi_0 \quad ; \quad p_3 = \frac{J_2}{J_1} \quad ; \quad p_4 = \frac{J_3}{J_1} \quad \dots \quad (3.26)$$

■

Por último, recuperando las ecuaciones de colinealidad (2.36),

$$\begin{aligned}x_a &= x_0 - f \frac{(m_{11}(X_A - X_0) + m_{12}(Y_A - Y_0) + m_{13}(Z_A - Z_0))}{(m_{31}(X_A - X_0) + m_{32}(Y_A - Y_0) + m_{33}(Z_A - Z_0))} = x_0 - f \frac{r}{q} \\ y_a &= y_0 - f \frac{(m_{21}(X_A - X_0) + m_{22}(Y_A - Y_0) + m_{23}(Z_A - Z_0))}{(m_{31}(X_A - X_0) + m_{32}(Y_A - Y_0) + m_{33}(Z_A - Z_0))} = y_0 - f \frac{s}{q}\end{aligned}\quad (3.27)$$

y sustituyendo en ellas las vistas en este capítulo, (3.21) y (3.25), se llega a las ya enunciadas en el capítulo anterior (2.52), que serán introducidas en el sistema de ecuaciones por cada punto del panel de calibración y ajustadas por el método de mínimos cuadrados, para obtener los parámetros internos y externos incógnita:

$$\begin{aligned}x_a &= x_0 - \bar{x}_a(k_1r_a^2 + k_2r_a^4 + k_3r_a^6) - (p_1(r^2 + 2\bar{x}^2) + 2p_2\bar{x}\bar{y}) - f \frac{r}{q} \\ y_a &= y_0 - \bar{y}_a(k_1r_a^2 + k_2r_a^4 + k_3r_a^6) - (2p_1\bar{x}\bar{y} + p_2(r^2 + 2\bar{y}^2)) - f \frac{s}{q}\end{aligned}\quad (3.28)$$

donde, además de las variables ya conocidas,

$$\bar{x}_a = x_a - x_0 \quad ; \quad \bar{y}_a = y_a - y_0$$

$$r_a = \sqrt{\bar{x}_a^2 + \bar{y}_a^2} = \sqrt{(x_a - x_0)^2 + (y_a - y_0)^2}$$

k_1, k_2, k_3 , son los coeficientes de la distorsión radial simétrica

p_1, p_2 , son los coeficientes de la distorsión tangencial

3.4. Métodos de calibración

Según Roger Tsai (Tsai, 1987), la calibración geométrica de cámaras debe satisfacer una serie de condiciones:

- *Autonomía.* No debe requerir la actuación humana, ni siquiera en la introducción de datos aproximados iniciales u otros parámetros.
- *Precisión.* Se necesitan altas precisiones como resultado del proceso, para lo que debe incluir corrección de la distorsión de las lentes y proyección perspectiva, en vez de una proyección paralela.
- *Eficiencia.* Se deberían utilizar algoritmos de gran potencial e implementaciones de altas velocidades,
- *Versatilidad.* Debería recoger un amplio abanico de posibilidades en cuanto a precisiones, configuraciones y aplicaciones, y trabajar con ellas uniformemente,
- *Única necesidad de cámara y lente estándar.* No puede requerir medios materiales, como cámaras profesionales o procesamientos en grandes equipos, de forma que la automatización sea imposible. Desde la aparición de las cámaras digitales de uso común se han producido muchas mejoras en este aspecto.

Por tanto, la investigación en calibración de cámaras se ha centrado en cumplir y mejorar estas condiciones. En su proceso de determinación de los parámetros del modelo de cámara seleccionado, las técnicas de calibración convencionales usan imágenes de distintos objetos de calibración que contienen puntos de control de coordenadas conocidas.

Los métodos y técnicas utilizados han sido catalogados según varias clasificaciones en distintos artículos de revisión. En ellos se clasifican, no sólo los métodos en cuanto al escenario que se ha de fotografiar, también se clasifican por los datos que se obtienen de ese escenario, el tipo de parámetros que entrarán en el ajuste o el tipo de cálculo que se lleva a cabo. Entre estos artículos de revisión y otros trabajos en los que se añade una parte del estado del arte en calibración geométrica de cámaras, cabe destacar los de (Faig, 1975), (Tsai, 1987), (Weng, Cohen, & Herniou, 1992), (Heikkilä & Silvén, 1997), (Fraser, 2001), (Salvi, Armangué, & Batlle, 2002), (Isern, 2003), (Remondino & Fraser, 2006) y (Ricolfe-Viala & Sánchez-Salmerón, 2011).

3.4.1. Diferentes clasificaciones de los métodos de calibración

En primer lugar habría que seleccionar el modelo de cámara a utilizar, en función de la aplicación a llevar a cabo y la precisión requerida, puesto que determinará características del proceso posterior:

- *Modelo de proyección perspectiva.* Como se ha visto anteriormente, está basado en las ecuaciones de colinealidad, tiene carácter no lineal y necesita valores aproximados iniciales de los parámetros para realizar el ajuste mínimo cuadrático. Asociado normalmente a aplicaciones fotogramétricas, con gran exigencia de precisión.
- *Modelo proyectivo de cámara.* Está caracterizado por el uso de la matriz esencial y la matriz fundamental. Aporta una solución lineal, por tanto inestable, haciendo que los errores sistemáticos sean difíciles de tratar. Por su parte, está más asociado a aplicaciones de visión artificial, en las que los requerimientos de precisión no son tan determinantes.

Esta elección da pie a una primera clasificación de los métodos.

3.4.1.1. Estimación del valor de los parámetros

Técnicas lineales

Las técnicas lineales cuentan con sistemas de ecuaciones lineales, por tanto su resolución es simple y rápida. Usa el método de mínimos cuadrados para obtener la matriz transformación del espacio objeto al espacio imagen, aunque generalmente, la simplificación proviene del hecho de que no tienen en cuenta la distorsión de la lente (no lineal) y eso hace que la precisión del sistema no sea óptima.

Normalmente se define un conjunto de parámetros intermedios como función de los parámetros originales, que se recuperan tras la resolución del sistema lineal. Como se verá en una clasificación posterior, otras veces los parámetros son difíciles de extraer debido a su carácter implícito. De hecho hay autores que hacen referencia a estas técnicas como “*closed-form*”¹. Suelen ser utilizadas como introducción de datos iniciales aproximados en algoritmos no lineales.

¹ Se ha incluido el término en inglés por ser más extendida que su traducción al español, “*forma cerrada*”.

El ejemplo más representativo de estas técnicas es el de la Transformación Lineal Directa (DLT, en su acrónimo inglés), (Anexo A), la cual no deja de ser una aproximación a la matriz esencial (Abdel-Aziz & Karara, 1971). Por su popularización, se le añadió en su formulación la función de distorsión, aunque el resultado no es del todo satisfactorio, ya que, por un lado, la profundidad de los puntos objeto, en el sistema de referencia de la cámara, son constantes y, por otro, no se consideran constreñimientos a los parámetros intermedios y los resultados son pobres en presencia de ruido (normalmente, producido por coordenadas objeto imprecisas).

También se utilizaron estas técnicas en (Hall, Tio, McPherson, & Sadjadi, 1982) y (Faugeras, 1993).

Técnicas de minimización no lineal

Es una extensión del modelo de la ecuación de colinealidad, por lo que se trabaja con el modelo de cámara de proyección perspectiva. Se trata de procesos más lentos, pero a la vez, más precisos. Permiten resolver modelos de cámara más complejos, en los que se añaden varios tipos de distorsión, incluyendo mayor número de parámetros. Para la resolución de las ecuaciones no lineales que presentan estas técnicas, se lleva a cabo un proceso iterativo por estimación mínimo-cuadrática (Anexo B.1), minimizando los errores residuales de alguna función determinada. Esa función normalmente es la de la suma de los cuadrados de las distancias entre los puntos imagen y los puntos objeto, obtenidos por proyección en cada iteración (la diferencia con las técnicas lineales es que allí se minimiza una distancia algebraica, no un euclidiana como aquí).

Puede ser calibrado cualquier modelo, incluso ha sido usado para los más simples modelos libres de distorsión. Se necesita una buena calidad de los datos iniciales, para lo que se suelen usar métodos lineales, y que la condición de convergencia esté bien diseñada, ya que con cada iteración la precisión ha de ir aumentando. Puede darse algún problema de divergencia o malos resultados si existe alguna correlación entre los parámetros externos y los de distorsión.

Es la metodología más utilizada en Fotogrametría, ya que además de ser más precisa, con el avance en la potencia de cálculo de los ordenadores, el consumo de tiempo ha bajado considerablemente. Existen referencias a estas técnicas en (Brown, 1971), (Weng, Cohen, & Herniou, 1992) y (McGlone, Mikhail, & Bethel, 2004).

Métodos en dos pasos

Se trata de técnicas en las que, en un primer paso, se da una solución directa y lineal, para la mayoría de los parámetros, y en un segundo paso, una solución no lineal, iterativa, para el resto. Permiten una rápida calibración reduciendo considerablemente el número de iteraciones; además, la convergencia está prácticamente garantizada debido a la aportación de valores iniciales aproximados, por técnicas lineales, en el primer paso.

El máximo representante de este tipo de técnicas es (Tsai, 1987), quien obtiene una solución lineal en función de un constreñimiento en la alineación radial, para los parámetros externos y la distancia focal. A partir de aquí se incluye un proceso iterativo para estimar la traslación en Z, la distancia focal efectiva y un único coeficiente de distancia radial.

Después han surgido variaciones al método propuesto por R. Tsai, como la referenciada en (Lenz & Tsai, 1988), en la que se añaden dos parámetros más en la fase iterativa: las coordenadas del punto principal (conocidas en (Tsai, 1987)). Otra mejora se produce en (Weng, Cohen, & Herniou, 1992), al realizar la optimización no lineal de todos los parámetros, usando las aproximaciones realizadas en el primer paso en las que se utilizan puntos cercanos al centro, donde la distorsión es menor y, por tanto, las medidas están menos afectadas de esta fuente de error. En (Heikkilä & Silvén, 1997) se utiliza la DLT para obtener el valor inicial de los parámetros, para pasar a la estimación no lineal, por el algoritmo de Levenberg-Marquardt, de los parámetros internos y de dos coeficientes de distorsión radial y otros dos de tangencial. Otras referencias importantes son (Faugeras, 1993) y (Zhang, 2000). Los más representativos aparecen desarrollados ampliamente en (Salvi, Armangué, & Batlle, 2002).

3.4.1.2. Tipo de parámetros obtenidos

Calibración implícita

Se trata de un proceso de calibración de cámaras que no calcula directamente sus parámetros físicos. Se suelen obtener matrices de transformación que contienen el conjunto de todos los parámetros, “enmascarados” en diferentes parámetros intermedios y en algunos casos, no se llega a conocer el valor exacto de algunos parámetros físicos. Los resultados pueden ser usados en medidas tridimensionales y la

generación de las correspondientes coordenadas imagen corregidas, no para modelizar cámaras.

Calibración explícita

Se obtienen los valores de cada parámetro físico del modelo, como la posición del punto principal, la distancia focal y los datos externos. Este tipo de método es el más utilizado, aunque no en todas las aplicaciones es imprescindible el conocimiento de los parámetros físicos.

Un ejemplo de estos dos tipos de calibración y su comparativa está desarrollado en (Wei & De Ma, 1994).

3.4.1.3. Relación entre el sistema objeto y el sistema imagen

Si las anteriores clasificaciones están enfocadas al método analítico, en esta y la siguiente clasificación se atiende más a criterios de establecimiento del escenario a fotografiar para la calibración, aunque evidentemente, también repercutirá en la metodología de cálculo posterior. Esta es la clasificación más clásica.

Calibración en laboratorio

La calibración es independiente del objeto fotografiado en el trabajo para el cual se calibra la cámara. La operación se realiza a priori o a posteriori, en un escenario especialmente preparado para los requerimientos del proceso de cálculo. Su nombre hace referencia precisamente a la pulcritud con la que se pueden llevar a cabo sus preparativos. Sin embargo, su preparación y mantenimiento hace que sean métodos más laboriosos y costosos, por lo que son descartados para ciertas aplicaciones, sobre todo en visión artificial.

El objeto de calibración, bidimensional o tridimensional, se puede medir topográficamente con gran precisión y puede contar con gran cantidad de objetivos de calibración (puntos, cruces, círculos, líneas, etc.). Así, los resultados obtenidos tienen una gran precisión. Están basados en las ecuaciones de colinealidad, en su forma básica de resección, con parámetros adicionales para la función de distorsión y otros factores, como la falta de planeidad del plano imagen, etc. Pueden trabajar con configuraciones de una única fotografía, o de varias en diferentes ángulos de convergencia.

Calibración “on the job”

En este caso la calibración se realiza al mismo tiempo que el trabajo fotogramétrico. Al escenario del objeto en cuestión se le añade una serie de puntos de coordenadas conocidas en el sistema de referencia objeto, de forma que en todas las fotografías que se realicen, aparezca este “sistema de control” simultáneamente con el objeto. Una estructura clásica de este tipo de calibraciones es un marco de aluminio ocupando las aristas de un teórico cubo, con numerosas marcas de coordenadas conocidas.

Es un método utilizado en trabajos de fotogrametría de objeto cercano en los que en cada fotografía se van a variar parámetros como el enfoque o la distancia focal. Cuanto más grande es el objeto, más complicada es la estructura, pero el objetivo de incluir un gran número de puntos de control en todas las imágenes, sigue siendo el mismo. En cuanto al método analítico a emplear, es prácticamente el mismo que en las calibraciones en laboratorio.

Autocalibración

También realizado a la vez que el trabajo, difiere de los anteriores tipos en que en este caso no es necesario un extenso control en el objeto, por lo que normalmente sólo se incluye el apoyo normal usado en un levantamiento fotogramétrico. Se necesita una toma fotográfica múltiple, desde diferentes puntos de vista y ángulos; incluso se puede variar el enfoque de la cámara. La toma convergente es muy aconsejada en este caso y se suele recomendar hacer tomas giradas 90° para “deshacer” correlaciones entre ciertos parámetros.

El cálculo también es muy similar a los anteriores, con las ecuaciones de colinealidad, parámetros adicionales para la distorsión y ajuste por haces. La disposición geométrica de la cámara en todas sus tomas, la geometría de intersección que se da entre todos los puntos observados y desde todos los puntos de vista y la distribución por todo el objeto de los puntos, son suficientes para llegar a una aceptable precisión tanto en el levantamiento de los puntos, como en la calibración de la cámara.

Hay casos en los que se requiere el conocimiento inicial de algunos parámetros de distorsión, pero no es la generalidad.

3.4.1.4. Tipo de patrón de calibración

Basado en puntos

La mayoría de los métodos existentes se basa en objetos de calibración que contienen este tipo de elementos. Generalmente se busca que los puntos sean localizados automáticamente utilizando para ello técnicas de tratamiento de imágenes, como la correlación automática o algún tipo de segmentación, como la binarización o los operadores de interés. Se diferencian en la forma que toman estas señales, de los cuales se dan algunos ejemplos a continuación.

En aplicaciones de visión artificial es el panel bidimensional con forma de damero, el más utilizado, como en (Bouguet, 2015), (Huang & Tseng, 2015), (Zhou, Cui, Wang, Liu, & Gao, 2013), (Ricolfe-Viala & Sánchez-Salmerón, 2011). Aparecen también incluidos en diedros tridimensionales, como en (Sun & Cooperstock, 2006) o con alguna modificación en la configuración del damero, como en (Devernay & Faugeras, 1995) o (Karras & Mavrommati, 2001).

Figura 3.10. Ejemplos de paneles de tipo damero

Otra configuración de panel es la de incluir círculos, siendo el ejemplo más representativo el de (Heikkilä, 2000); también se utiliza en (Li & Tian, 2013).

Figura 3.11. Ejemplos de paneles con entidades circulares

También se han utilizado señales luminosas (Reznicek, 2014), retro reflectores (Fraser, 2013), puntos preseñalizados (He & Habib, 2015) y señales codificadas (Barazzetti, Mussio, Remondino, & Scaioni, 2011).

Figura 3.12. Otros ejemplos

Basado en líneas

El método más conocido y además, pionero, fue el de la *línea de plomada* (“plumb-line”) de D.C. Brown (Brown, 1971), donde el objeto fotografiado es un conjunto de líneas rectas, no necesariamente verticales. Se basa en el invariante de linealidad de geometría proyectiva (una línea recta se debería proyectar en el espacio imagen como una línea recta). Si no se cumple es por la existencia de distorsiones radiales y de descentrado. El método no calcula los parámetros externos ni la focal (lo puede hacer opcionalmente, pero con menor precisión), sólo los parámetros de la distorsión.

Figura 3.13. Método “plumb-line”

MÉTODOS Y MATERIALES

Metodología

4.1. Línea metodológica

El objetivo general de esta tesis es desarrollar una nueva metodología de calibración geométrica de cámaras no métricas, para lo cual se han realizado varios ensayos según las pautas marcadas por la metodología propuesta. A partir de ellos y tras un análisis de los resultados obtenidos, se llega a la mejor combinación entre configuración del panel y función de distorsión utilizadas, como se verá en el próximo capítulo.

Paralelamente se han realizado ensayos con los representantes de las aplicaciones de calibración de cámaras más extendidas en la comunidad científica, manteniendo ciertos parámetros constantes en todas ellas y la metodología propuesta, con el objeto de que la comparación de resultados sea lo más fidedigna posible. Las aplicaciones utilizadas son *ImageMaster* y *Calibra* de Aerotri.

Por último, se ha ido creando una aplicación informática en entorno MATLAB, bautizada con el nombre de *FOCal*¹, que ha recogido las herramientas necesarias para el desarrollo de esta tesis. La componen transformaciones geométricas, herramientas de interpolación, medida automática de cruces de calibración, cálculo de la calibración y generación de imágenes corregidas de distorsión. Según el carácter que se pretenda dar a la aplicación en un futuro, será lógico que se vayan añadiendo funcionalidades.

En este capítulo se recoge la descripción de las metodologías de calibración analizadas, sus ensayos, los materiales utilizados en cada caso, la analítica que subyace en cada uno de ellos y todos los pormenores necesarios para su comprensión.

¹ *FOCal* es un juego de palabras con *Fotogrametría de Objeto Cercano* y *Calibración*

4.2. Metodología de calibración propuesta

En la metodología de calibración que se propone, se utiliza un panel de calibración bidimensional desplazado a varias profundidades, en cada una de las cuales se realiza una fotografía. Si la cámara permanece fija en todo el proceso, el efecto conseguido es el de tratar todas ellas como una única fotografía. Esto redundará en una gran cantidad de puntos medidos, lo que permite poder variar la configuración geométrica y el número de puntos utilizados en el cálculo. Por otro lado, al ocupar los puntos todo el formato de la fotografía, la función de distorsión es más completa.

La realización de numerosos ensayos, en los que las distintas posiciones o profundidades del panel se repetiría en numerosas ocasiones, requiere de un dispositivo que permita por un lado, desplazarlo con comodidad y rapidez y por otro, garantizar la localización exacta cuantas veces sea necesario. Esto se puede lograr sin gran inversión mediante un sistema de deslizamiento por un carril con tres apoyos y un sistema de paro por medio de muescas en el mismo. Evidentemente, existen sistemas más sofisticados en el mercado que solucionan el problema, pero con costes más elevados.

La medida de los puntos en el sistema de referencia objeto se ha de realizar con unos instrumentos topográficos, ayudados de una metodología de cálculo óptima, que provean de suficiente precisión a las coordenadas obtenidas. Sólo así se podrá descartar posibles errores producidos por la medida en los resultados finales.

En cuanto a la medida de coordenadas en las imágenes, se propone la medida automática mediante correspondencia de imágenes por correlación y precisión subpíxel por el ajuste mínimo cuadrático de una función polinómica de 2º orden. La experiencia dicta que la medida manual arroja unos muy pobres y desaconsejables resultados y, por supuesto, la inabordable tarea de la medida de varios miles de puntos para cada ensayo.

Por último, en el cálculo propiamente dicho de la calibración, se propone en primer lugar, la ampliación de las ecuaciones de colinealidad con una serie de parámetros adicionales que conformarían la orientación interna, y por otro, la prueba de diferentes funciones de distorsión, entre las que se encuentran funciones diferentes a los habituales polinomios en desarrollo par o impar, como los polinomios de Legendre o la interpolación bicúbica.

4.2.1. Medios materiales

4.2.1.1. Cámara fotográfica

Una de las premisas de este trabajo de investigación es la utilización de una cámara no métrica y, dentro de los tipos y posibilidades existentes en esta amplia gama de productos comerciales, se ha elegido una cámara réflex digital (*DSLR*¹).

Figura 4.1. Cámara fotográfica Olympus E-500

En concreto, se trata de una *Olympus E-500* dotada de un objetivo *ZUIKO DIGITAL* (Figura 4.1), cuyas características técnicas se pueden consultar en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1. Especificaciones de la cámara fotográfica Olympus E-500

Montura del objetivo	Cuatro tercios (4:3)
Tipo de sensor	CCD
Tamaño del sensor	17.3 × 13.0 mm
Tamaño de píxel	5.31 μ m
Máxima resolución	3264 × 2448 píxeles (8 MPix)
Formatos de grabación	RAW, JPEG, TIFF
Distancias focales (objetivo ZUIKO)	14 - 45 mm
Abertura de diafragma (objetivo ZUIKO)	F3.5-5.6 - F22

La mayoría de los ensayos se ha realizado para una focal nominal de 14 mm, que es la focal más pequeña de este objetivo, por dos razones. La primera de ellas, porque se tienen ángulos de campo mayores, reduciendo el número de tomas en cualquier trabajo

¹ *DSLR* es el acrónimo de *Digital Single Lens Reflex*

fotogramétrico, aunque incluyendo más distorsión. La otra razón es porque se trata de uno de los extremos del anillo de focales del objetivo; así, si se tiene que repetir alguna calibración o se quisiera usar alguna de las realizadas para algún trabajo, resultará más fácil colocar el objetivo en el lugar deseado, en el extremo, asegurando así la repetibilidad. Además, por seguridad, para evitar desplazamientos en ese anillo del objetivo, se ha fijado éste con un sistema de abrazaderas.

En cuanto a la abertura¹ del diafragma, es un parámetro que indica la cantidad de luz que entra por el objetivo. Se expresa mediante el número F (no confundir con la distancia focal f) y es la relación entre la distancia focal y el diámetro de abertura (pupila de entrada). De esta forma, si el número F es 8 ($F8$) significa que el diámetro del diafragma es 8 veces más pequeño que la distancia focal. En esta notación, cuanto mayor es el número F , menor es la abertura. Evidentemente, se utilizará una abertura mayor (número F menor) para escenarios oscuros y para el caso de un mismo escenario tomado con distintas aberturas, la imagen será más oscura con un número F mayor (Figura 4.2). En caso de no poder iluminar más la escena o no querer bajar más el número F , para compensar este efecto se puede jugar con el tiempo de exposición, aumentándolo para aclarar las imágenes.

Figura 4.2. Distintas aberturas de diafragma: a) $F22$, b) $F11$ y c) 5.6

La elección de la abertura de diafragma trae consigo además, un efecto añadido: la inclusión de distorsión o de difracción. La distorsión, como ya se ha descrito, hace que un punto imagen se desplace de su posición correcta, pero se puede estudiar y corregir mediante la calibración. Ésta aumenta si la abertura es mayor, pues los ángulos de incidencia de los rayos serán mayores. Sin embargo, la difracción es una aberración

¹ Los términos *abertura* y *apertura*, muy utilizados ambos para el mismo concepto, son aceptados en Óptica y Fotografía indistintamente, si bien en este texto se usará *abertura* para definir el tamaño del diafragma y *apertura*, para la acción de abrir el diafragma.

óptica que hace que la imagen sea difusa, sin nitidez, pudiéndose confundir con el desenfoque y no es corregible a posteriori. A menor abertura, mayor difracción.

De esta falta de nitidez en la imagen se debería huir si se quiere conservar su resolución real y poder realizar medidas precisas sobre ella. En la Figura 4.3 se puede apreciar cómo una imagen realizada con una cámara con una buena resolución (15 MPix¹) y con una abertura de diafragma pequeña (F22), y por tanto, con mayor difracción (izquierda), tiene menores prestaciones geométricas que otra realizada con menor resolución (8 MPix) y una abertura de diafragma mayor (F12) (Aguirre, Díez, Asensio, García, & Rodríguez, 2012).

Figura 4.3. Resolución frente a nitidez

Autores expertos en fotografía coinciden en que los objetivos tienen el llamado “*punto dulce*” o punto de mayor nitidez, que se logra con gran abertura de diafragma, pero sin llegar al límite superior y depende de cada objetivo, calculándose de forma empírica. Por las pruebas realizadas, el punto dulce del objetivo utilizado está en torno a la abertura F11.

4.2.1.2. Guía epipolar

En Fotogrametría, la *condición de coplanaridad* afirma que los centros de proyección de dos imágenes, un punto en el espacio objeto y sus correspondientes puntos en ambas imágenes, son coplanarios (Figura 4.4). El plano que contiene a estos cinco puntos se llama *epipolar* y corta a los dos planos imagen en las llamadas líneas epipolares. Una imagen epipolar es aquella cuyas líneas de píxeles corresponden a cada una de las líneas epipolares de la imagen original.

¹ MPix es el acrónimo de *Megapíxel*

Figura 4.4. Geometría epipolar

La interpretación física de estas imágenes es que los elementos de orientación relativa entre ambas son cero, excepto el de la componente x de la base (distancia entre centros de proyección), cuyo valor depende de la escala fotográfica y del recubrimiento longitudinal entre las dos imágenes. Se suelen emplear en la optimización de la correlación automática de imágenes y en la visualización estereoscópica.

La guía epipolar utilizada en los ensayos fue diseñada y construida por el profesor D. José Luis Valbuena, a petición del autor de esta tesis, tras desaconsejar el primero un prototipo inicial realizado por éste. Se trata de un dispositivo que permite hacer varias tomas fotográficas consecutivas, en las que la cámara tiene un único grado de libertad, el del desplazamiento en la coordenada X . Los otros cinco parámetros de la orientación externa (Y , Z , ω , φ , κ), aunque deberían anularse para ser considerada como guía epipolar pura, tienen valores pequeños y controlables. La razón de esa inexactitud radica en un diseño supeditado al empleo de materiales de bajo costo, asumible para este trabajo, ya que lo esencial es dar solución al problema del desplazamiento de la cámara en una única dirección, sin importar en este momento una variación mínima del resto de parámetros.

Está estructurada en dos componentes (Figura 4.5): el primero es una plataforma plana de madera de $2 \times 3 \times 3$ cm con tres soportes nivelantes, en el que se fija un perfil

en “L” de aluminio invertido, que hará las veces de carril sobre el que se desliza el carro de la cámara, que es el segundo componente. En el carril hay una serie de muescas o *marcas de paro*, en las que encaja una varilla metálica unida a un muelle que incorpora el carro, haciendo que éste se detenga.

Figura 4.5. Detalle de la guía epipolar

Por su parte, el carro se desliza sobre el carril gracias a cuatro ruedas giradas convenientemente (dos a dos) y a otra en el lado opuesto, ofreciendo así tres puntos de apoyo nivelados perfectamente para que el sistema no se incline. Sobre el carro se monta la cámara mediante un vástago atornillado de manera que el conjunto no tenga holguras ni oscile (Figura 4.6). La altura a la que queda el eje óptico de la cámara es aproximadamente donde se sitúa el centro del panel a fotografiar.

La utilidad de este dispositivo en los ensayos realizados reside en la comodidad de desplazamiento de la cámara sobre el eje *X* en la toma estereoscópica del panel test y en la repetibilidad de las posiciones de esta en todas las fotografías.

Figura 4.6. Guía epipolar con la cámara montada

4.2.1.3. Panel de calibración

Para el método de calibración propuesto en esta tesis, se ha creado un panel de calibración plano, sobre una plancha de poliuretano (Figura 4.7). Tiene unas dimensiones de 1200×800 mm y contiene 15000 cruces distribuidas en 100 filas $\times$ 150 columnas. Las cruces tienen un grosor de 0.5 mm, miden 5 mm y distan 8 mm entre sí.

Figura 4.7. Detalle del panel de calibración y sus cruces

Para que se pueda calcular la calibración, el patrón debería tener volumen. Entonces se podría optar a fotografiarlo desde diferentes ángulos, con lo que el efecto conseguido por la perspectiva sería el de la profundidad, u optar por la solución adoptada en este trabajo.

Con el objeto de que haya puntos situados a distintas profundidades para el cálculo preciso de la distancia focal, se deben incluir cruces en un intervalo de distancias suficientemente amplio. La idea es que si la cámara permanece fija, siempre que no se varíe el resto de parámetros de la misma, al realizar fotografías al panel a distintas profundidades, se podrían tomar las imágenes obtenidas como una única. El no variar los parámetros de la cámara incluye, además de los ya reseñados (focal, diafragma y enfoque), el no realizar acciones como el apagado y encendido, que conllevan el movimiento del motor del objetivo y, por tanto, la variación del enfoque.

El panel, por tanto, en una posición vertical, ha de desplazarse de forma que se mantenga siempre aproximadamente perpendicular al eje óptico de la cámara, al ocupar cada una de las profundidades. A tal efecto, se dispone un carril sobre una mesa de 2 m, en dirección perpendicular al panel, siguiendo la misma filosofía que la explicada para la guía epipolar, de la cual toma el concepto.

Figura 4 .8. Deslizamiento del panel sobre el carril

Sobre el carril se dispone dos pares de ruedas formando un ángulo de 45° para apoyarse perpendicularmente sobre él. Estos dos conjuntos de ruedas más una quinta

rueda en el lado contrario (Figura 4.8), proporcionan al panel tres apoyos que impiden su oscilación y garantizan la repetibilidad de las posiciones, junto al sistema de marcas de paro que también incorpora (Figura 4.9).

Figura 4.9. Reverso del panel con un conjunto de ruedas y el sistema de paro

4.2.1.4. Panel test

Se trata de un elemento para la comprobación de las calibraciones realizadas. Consiste en un panel de poliuretano de 35×23 cm, con 50 cruces homogéneamente distribuidas en el plano xy , pero con diferentes alturas sobre el panel (Figura 4.10). Está adherido a otro panel de mayores dimensiones en el que se han colocado otra serie de 15 cruces, estas destinadas a las orientaciones fotogramétricas posteriores.

Las medidas del panel, así como las cruces de orientación exteriores, están concebidas para que ocupen la mayor extensión posible en las imágenes que se han hecho a las mayores profundidades. Para las tomas más próximas, en las que sólo aparece parte del panel en la imagen, se pierde la fila de cruces superior y la posterior y para las orientaciones fotogramétricas se usan las cruces interiores, las cercanas al panel.

Figura 4 .10. Panel test

4.2.1.5. Estaciones totales

En la metodología de calibración propuesta se necesita conocer las coordenadas de las cruces del panel que lo componen, con suficiente precisión. De la misma forma, las cruces y puntos de orientación del panel test, también requieren de una determinada precisión en sus coordenadas. La medida se ha realizado por métodos topográficos mediante las estaciones totales de la casa *Leica*, *TC2000* y *TDA5005* (Figura 4.11), cuyas características se muestran en la Tabla 4.2.

Figura 4 .11. Estaciones totales Leica, TC2000 y TDA5005

Tabla 4.2. Especificaciones de las estaciones totales Leica TC2000 y TDA5005

	TC2000	TDA5005
Aumentos del anteojo	30x	30x (40x extra)
Precisión de estabilización del compensador	0.3"/0.1 mgon	≤ 0.3"/0.1 mgon
Precisión Hz y V	0.5"/0.15 mgon	0.5"/0.15 mgon
Sensibilidad nivel de burbuja	4'/2 mm	4'/2 mm
Sensibilidad nivel electrónico	2"	2"

Para completar el sistema de medición, las estaciones se conectan a un ordenador que cuenta con el programa *Leica Axyz 1.4*, mediante la unidad de procesamiento *Leica Link-8*, que permite el flujo de datos entre estaciones y programa. El sistema calcula las coordenadas 3D (por intersección espacial) y los valores de precisión en tiempo real.

Figura 4.12. Unidad de procesamiento Leica Link-8

La precisión obtenida en las coordenadas de las cruces está condicionada al tamaño del píxel de las imágenes de calibración, en el espacio objeto. Los ensayos se han realizado en un rango de distancias entre 25 y 105 cm, distancias a las que el píxel proyectado mide entre 0.1 y 0.4 mm. Las estaciones elegidas y el método de medición utilizado deben arrojar, por tanto, una precisión mayor que esas 100 μ m, como mínimo.

4.2.1.6. Trípodes de uso industrial

Aunque se trata de un elemento auxiliar que en condiciones normales no se incluiría en la documentación, en este caso se ve la necesidad de añadirlos por su particularidad. Para este trabajo, las estaciones totales se colocaron sobre unos trípodes específicos de aplicaciones industriales de la Topografía, más robustos y estables que los típicos de campo. La diferencia se basa en su diseño y el material usado en su construcción. Una de las características es que las patas descansan sobre unas bases

circulares pivotantes, que se adaptan perfectamente a suelos pavimentados y de interior, donde suelen ser utilizados.

Figura 4.13. Trípode

4.2.1.7. Barra de escala

En trabajos en los que se requiere mucha precisión, como es el caso, los instrumentos utilizados tienen mejor comportamiento en la medida angular que en la de distancias, por lo que se aconseja la primera. Si se opta por este tipo de metodología, el modelo medido carece de escala, por lo que hay que escalarlo mediante la inclusión de al menos una distancia entre dos puntos del objeto medido. Por esta razón se incluye una barra de escala calibrada, cuyos extremos cuentan con dos dianas de puntería, entre las cuales la distancia es conocida y proporcionada por el fabricante tras su correspondiente calibración. Estas barras están fabricadas con un material dimensionalmente estable. La barra de escala usada en los trabajos de medición es de la casa Leica y tiene, según la última calibración, una medida de 899.867 mm en un orden de precisión de 0.01 mm.

Figura 4.14. Barra de escala calibrada

4.2.2. Metodología seguida en los ensayos

Los ensayos realizados según la metodología propuesta están encaminados a la comparación de resultados entre distintas pruebas en las que se conservan ciertos parámetros. Por esta razón, se incluyen pasos en el proceso que no serán definitivos, ya que la forma de actuar en la metodología final se elegirá en función de los resultados. Incluso ciertos elementos en el material preparado, podrían no ser esenciales finalmente, como por ejemplo, los enfocados a la repetibilidad de los ensayos.

4.2.2.1. Preparación

Desde el punto de vista de preparación de los ensayos, la metodología propuesta se basa en dos cuestiones importantes: la inclusión de un panel de calibración bidimensional de coordenadas objeto bien conocidas y su toma fotográfica a diferentes profundidades. De la primera cuestión, se ha tratado ya la forma del panel y su colocación en un dispositivo que confiere un movimiento aproximadamente paralelo al eje óptico de la cámara, lo que redundará en una posición constante del panel, perpendicular al eje. En cuanto al conocimiento preciso de las coordenadas objeto de las cruces del panel, se tratará en el siguiente apartado.

La preparación de los ensayos, relativa al establecimiento de diferentes profundidades y configuración de las tomas fotográficas, se ha realizado con la ayuda de una hoja Excel, "*Cámaras.xlsx*", creada a tal efecto (Figura 4.15). En ella se distinguen tres tipos de celdas, aparte de las puramente descriptivas (sombreadas en gris). Su descripción servirá de guion para definir esta fase del proceso. En primer lugar, las sombreadas en verde, contienen datos de entrada fijos. Son constantes de la cámara que no variarán en ningún caso y que tienen que ver con sus características internas, es decir, el tamaño del sensor, dado en milímetros y en píxeles y el tamaño del círculo de confusión en milímetros. Este parámetro, relacionado con la nitidez de la imagen, se utiliza para el cálculo de la distancia hiperfocal, como se describe más adelante.

Las celdas sombreadas en blanco también son de entrada, pero en este caso se trata de parámetros que pueden variar de una toma a otra, de un proyecto a otro. Las entradas básicas y más importantes son la distancia focal nominal, el alejamiento y la abertura de diafragma. Menos importantes, aunque también necesarias en esta preparación son las dimensiones del objeto y los recubrimientos longitudinal y transversal.

Finalmente, se encuentran las celdas sombreadas en rojo, que son los parámetros calculados en función de las entradas ya descritas.

OLYMPUS E500			
Cámara apaisada			
	Ancho	Alto	
Tamaño sensor	3264	2448	Píxeles
	17,3	13	Milímetros
Círculo de confusión	0,015		Milímetros
Tamaño píxel imagen	5,300	5,310	Micras
Semidiagonal	10,820		Milímetros
	2040		Píxeles
Distancia focal	14		Milímetros
	2642		Píxeles
Alejamiento	0,5		Metros
Diafragma	11		
Hiperfocal	1,20		Metros
Distancia cercana y lejana	0,35	0,85	Metros
Fotobase	4,498		Milímetros
Tamaño píxel objeto	0,189		Milímetros
Tamaño sensor objeto	0,618	0,464	Metros
Relación Base/Alejamiento	1 / 3,1		
Error altimétrico	0,0004		Metros
Error planimétrico	0,0002		Metros
Recubrimiento total	0,457	0,232	Metros
Distancia avance	0,161		Metros
Separación pasadas	0,232		Metros
Dimensiones del objeto	0,70	0,46	Metros
Número de pasadas	1		Pasadas
Número de fotos/pasada	2		Fotos
Denominador de Escala	36		Adimensional
Recubrimiento Longitudinal	74		Porcentaje
Recubrimiento Transversal	50		Porcentaje

Figura 4.15. Vista de la hoja Excel "Cámaras.xlsx"

En primer lugar aparece el resultado del cálculo del tamaño del píxel imagen, es decir, la resolución de la cámara. Este parámetro puede encontrarse en la documentación del fabricante, dentro de las especificaciones técnicas de la cámara, pero no siempre se publica. Su cálculo es sencillo a partir de las dimensiones del sensor, relacionando sus medidas en milímetros y en píxeles. Será necesario en el cálculo de la calibración, para poder escalar el píxel en su transformación a fotocoordenadas.

El cálculo de la semidiagonal del formato del sensor, tanto en milímetros como en píxeles es utilizado en algunos programas, como el de “Calibración” de J. Múgica en ciertos tipos de cálculos. Por esta razón se facilita el cálculo en píxeles de la distancia focal nominal introducida.

El siguiente bloque de parámetros es el de la distancia hiperfocal y la distancia de enfoque cercana y lejana. En ciertos proyectos el conocimiento de la distancia hiperfocal es muy importante, por lo siguiente. En una toma fotográfica, la profundidad de campo es el intervalo de profundidades en los que el objeto aparece enfocado (nítido), entre la distancia cercana y la distancia lejana de enfoque. Depende de la distancia de enfoque, de forma que cuanto más cerca esté el objeto enfocado, menor es la profundidad de campo. También depende de la distancia focal, ya que cuanto mayor sea esta, menor será la profundidad de campo. Por último, depende de la abertura de diafragma, porque cuanto mayor sea (el número F será por tanto más bajo), menor será la profundidad de campo (Figura 4.16).

Figura 4.16. Profundidad de campo respecto a la abertura de diafragma
(<https://curiososdela fotografia.wordpress.com>)

Para calcular esas distancias o límites cercano y lejano, se utilizan las dos expresiones siguientes:

$$D_c = \frac{D_{\text{enfocado}}}{1 + \left(\frac{D_{\text{enfocado}} * C_{\text{confusión}} * \text{num } F}{f^2} \right)}$$

$$D_l = \frac{D_{\text{enfocado}}}{1 - \left(\frac{D_{\text{enfocado}} * C_{\text{confusión}} * \text{num } F}{f^2} \right)}$$
(4.1)

Si la posición de enfoque se sitúa en el infinito, el límite lejano se extenderá hasta el infinito y el límite cercano coincidirá la llamada *distancia hiperfocal*. Por tanto, es la distancia desde el objetivo, a partir de la cual el objeto fotografiado aparece nítido en la imagen cuando se enfoca a infinito. Dicho de otra forma, se puede asimilar al comienzo del “infinito” fotográfico. Si, además, se enfoca a la distancia hiperfocal, el límite cercano se acerca hasta la mitad de ésta.

Figura 4.17. Distancia hiperfocal

La distancia hiperfocal se obtiene mediante la fórmula:

$$H_f = \frac{f^2}{C_{\text{confusión}} * \text{num } F}$$
(4.2)

En Fotogrametría de objeto cercano tiene gran importancia, ya que se puede utilizar la misma calibración para todos aquellos proyectos en los que el objeto esté situado más allá de esta distancia, debido a que en ese caso, no varía ningún parámetro de la exposición, especialmente el enfoque. Si el objeto está situado más cerca, cada distancia de enfoque necesitará su propia calibración.

Las distancias (o límites) cercano y lejano, también son factores a tener en cuenta. Si, como en el caso de este proyecto, se iba a desplazar el panel de calibración a distintas profundidades, había que conocer previamente en qué rangos de distancias se podía fotografiar el panel, para una distancia de enfoque determinada, de forma que todos ellos aparecieran nítidos.

A partir de la distancia de enfoque, conocidas las distancias cercana y lejana, se planificaron las posiciones, de forma que, entre la distancia cercana y la de enfoque, hubiera cinco profundidades distintas proporcionalmente repartidas. De la misma forma se actuó entre la distancia de enfoque y la distancia lejana. Así se tendría un número de profundidades lo suficientemente grande como para poder realizar diferentes combinaciones, en las que se elegiría un número determinado de ellas, las más extremas, las más cercanas a la distancia de enfoque, etc.

Tabla 4.3. Distribución de profundidades

	PROFUNDIDADES (cm)										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	35	37,5	40	44	46,25	50	55	59	70	75	85
f14-F11-E50	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

En la Tabla 4.3 se muestra un esquema de distribución de profundidades, en el que se puede observar las profundidades donde se ha realizado una toma fotográfica. En la columna cabecera de la izquierda se aprecia la distancia focal (marcada con una f delante del valor numérico correspondiente), la abertura de diafragma (se marca con una F) y la distancia de enfoque (marcada con E), utilizadas en los ensayos. Así, para una focal de 14 mm (f14), una abertura de diafragma de 11 (F11) y una distancia de enfoque de 50 cm (E50), las profundidades fotografiadas han sido 35, 37.5, 40, 44, 46.25, 50, 55, 59, 70, 75 y 85 cm. La numeración de la primera fila es la que se usará para nombrarlas.

El siguiente grupo de parámetros de la hoja Excel es el dedicado, entre otros, a los tamaños del píxel y del sensor, proyectados en el espacio objeto, a la distancia de enfoque, así como a los errores, altimétrico y planimétrico, esperados en el proceso fotogramétrico, que condicionarán la medida topográfica de las cruces.

El tamaño del píxel objeto (GSD^1) es de vital importancia para poder establecer una relación entre el tamaño de las cruces empleadas en el panel de calibración y el correspondiente en la imagen. Es evidente que cuanto mayor sea esa relación, mejor definida quedará la cruz en la imagen. A esa mejor definición se podría llegar aumentando el tamaño de las cruces, con la consiguiente reducción de su cantidad en el conjunto de la imagen, o disminuyendo el tamaño del píxel, algo que sólo se conseguirá disminuyendo el alejamiento de la cámara al objeto. En la mayoría de los ensayos, el tamaño del píxel ha sido menor de 0.2 mm, por lo que se seleccionó un grosor de cruz de 0.5 mm, de forma que al ancho de la cruz le correspondiera en la imagen, desde un mínimo de 2-3 píxeles hasta un máximo de 4-5 píxeles y un tamaño total de cruz entre 15 y 45 píxeles, aproximadamente.

El tamaño del sensor en el espacio objeto, calculado para las profundidades más grandes sirvió para diseñar el tamaño del panel, finalmente con unas dimensiones de 1200×800 mm y que, junto con el tamaño de la cruz descrito previamente, contiene las 15000 cruces, distribuidas en 100 filas $\times$ 150 columnas, expresadas al principio del capítulo.

4.2.2.2. Obtención de las coordenadas del panel en el sistema objeto

Medida topográfica

Como se ha indicado en el apartado 4.2.1.5, la medida topográfica del panel se ha realizado mediante intersección angular, utilizando el software Leica Axyz 1.4. Se trata un software modular desarrollado por la compañía Suiza, Leica Geosystems AG, para sus sistemas de medición industrial.

La toma de datos de campo para las calibraciones se ha llevado a cabo en el Laboratorio Aplicaciones Industriales de la Topografía de la E.T.S.I. en Topografía, Geodesia y Cartografía, ya que se trata de un espacio amplio y sin obstáculos, en el que

¹ GSD es el acrónimo de *Ground Sample Distance*

no se dan situaciones adversas para la medición de precisión, como calentamientos desiguales del trípode por sol u otra fuente de calor, posicionamientos sobre salidas de aire, vibraciones en el suelo por paso de maquinaria o grietas en el suelo.

Una vez colocada la mesa sobre la que se encontraba el panel de calibración, se posicionaron las estaciones topográficas de modo que pudieran observar todos los puntos que conformarían el sistema, es decir, las cruces del panel, en todas las profundidades posibles. Además, se dispuso una configuración geométrica, en la que los ángulos que se formaran en el panel fueran lo más próximos a 90° y así obtener una mayor precisión en el cálculo de coordenadas de estos puntos gracias a una geometría de intersección teórica perfecta (Figura 4.18).

Figura 4.18. Disposición del panel y las estaciones

El software, en comunicación permanente con las estaciones, establece un sistema de referencia topográfico local, con origen en una de las estaciones, más concretamente en la intersección del eje vertical (eje de giro de la alidada) y del eje horizontal o de muñones (eje de giro del ocular). El eje Z se define en la dirección del eje vertical, el eje X , perpendicular al eje Z en dirección a la segunda estación y el eje Y , perpendicularmente al plano generado por los dos ejes anteriores. La escala del sistema se conseguirá mediante la observación de la barra de escala. A partir de este momento, el sistema está preparado para realizar la orientación previa de las estaciones.

En este paso, mediante observaciones recíprocas y simultáneas entre las estaciones, observaciones a una serie de dianas arbitrarias en el entorno del panel y observaciones a los extremos de la barra de calibración, el programa forma un sistema de ecuaciones, que ajustadas por mínimos cuadrados, llevan al establecimiento del sistema de referencia en el que se enmarcarán las intersecciones angulares posteriores. Como se puede observar en el comienzo del informe emitido por el programa, este ajuste ofreció un error medio cuadrático de $14\text{ }\mu\text{m}$ (Anexo D).

El sistema queda preparado para la obtención de coordenadas de cualquier punto del entorno, mediante observación por bisección angular, ofreciéndolas en tiempo real junto a los valores de precisión de la medición realizada. Este método de trabajo agiliza enormemente el proceso, pues además de tener una idea de la bondad de las observaciones in situ, ahorra tiempo y recursos en un cálculo posterior. Operativamente, el programa utiliza un sistema de “semáforos” en pantalla, en el que avisa de la calidad de la intersección en función de una tolerancia introducida a priori y que, en este caso, fue de $80\text{ }\mu\text{m}$ (se recuerda que el tamaño del píxel proyectado en el espacio objeto, en la mayoría de los ensayos sería menos de $200\text{ }\mu\text{m}$, siendo el valor mínimo de unas $100\text{ }\mu\text{m}$).

Se tenía que dar coordenadas a las 15000 cruces del panel ($100\text{ filas} \times 150\text{ columnas}$), en cada una de las profundidades o posiciones que ocuparía el panel para cada ensayo. En los ensayos programados, compuestos por combinaciones entre las 11 posiciones elegidas, como se puede comprobar en la Tabla 4.3, el número total de cruces a medir sería de 165000 ($15000\text{ cruces} \times 11\text{ posiciones}$). Dada la casi imposibilidad de abordar un trabajo de medida de ese calibre, se optó por medir sólo una serie de cruces distribuidas uniformemente por el panel y el resto obtenerlas por interpolación.

Las 35 cruces seleccionadas para su medición aparecen marcadas con un recuadro en el panel para evitar confusiones, como se puede observar en la Figura 4.7 y ocupan las filas 1, 25, 50, 75 y 100 y las columnas 1, 25, 50, 75, 100, 125 y 150. Precisamente su posición (*fila, columna*) se utiliza para dar nombre a cada cruz (por ejemplo, la cruz 100_150). Estas 35 cruces se midieron para la posición 21 (profundidad a 21 cm), la más cercana, midiendo para las 20 posiciones restantes, solo 9 cruces, las que ocupan las filas 1, 50 y 100 y las columnas 1, 75 y 150. La razón de esta reducción se explicará más adelante. Paralelamente se midieron, con la misma metodología, las 65 cruces del panel test. Para todas estas medidas, las de los paneles y las de los test, la precisión que arrojó

el programa siempre se mantuvo muy por debajo de las 80 μm autoimpuestas como tolerancia a priori.

Por último, se realizó una transformación tridimensional de semejanza con todas las coordenadas obtenidas, trasladando y girando el sistema de referencia origen ya descrito, a un sistema más fotogramétrico, en el que el origen de coordenadas se sitúa en la cruz inferior izquierda (001_100) del panel de profundidad 50 cm (*panel50*¹); el eje X es el marcado por la última cruz de la quinta fila (150_100), el eje Y por la primera cruz de la primera columna (001_001) y el eje Z el perpendicular al plano XY por el punto origen, es decir, la dirección que se ha estado tratando hasta ahora como profundidad, precisamente por esta razón. Al punto origen se le asignaron coordenadas (10000, 10000, 10000) mm, para evitar coordenadas negativas (Figura 4.19).

Figura 4.19. Sistema de referencia objeto

¹ A partir de aquí se utilizará la nomenclatura *panelx*, para referir el panel y su profundidad

Interpolación

Una vez conseguidas las coordenadas de las 35 cruces del *panel21*, la siguiente fase consistió en obtener las coordenadas de las restantes 14965. La *interpolación* es el método indicado para la resolución de este problema.

La interpolación mencionada es un proceso por el cual se obtienen coordenadas de puntos a partir de una función que ajuste una serie de puntos, de coordenadas conocidas, en el entorno de los puntos a determinar. La función utilizada, llamada *función interpolante*, ajustará a esos puntos una línea, si se trata de un espacio unidimensional, un plano en el espacio bidimensional o una superficie en el espacio tridimensional. Evidentemente, en cada uno de estos casos los puntos estarán definidos por una, dos o tres coordenadas (o variables).

Los modelos de interpolación más usuales son los polinómicos, siendo el caso más sencillo el de la interpolación lineal, polinómica de grado 1. En ella, los puntos conocidos se unen mediante líneas, situándose los puntos a hallar en esas líneas. Al subir el grado del polinomio, la línea se convierte en curva y cuanto más se eleva, más compleja es la curva obtenida. El grado no puede ser mayor que el número de puntos utilizados.

Para el caso concreto de esta fase del trabajo, a fin de elegir el modelo de interpolación a seguir, se partió de tres premisas:

- En la impresión de la hoja se producen deformaciones, haciendo que las posiciones de las cruces no sean exactamente las diseñadas en el programa CAD.
- El panel, teóricamente plano, tiene cierta curvatura y, por tanto, no basta con una interpolación bidimensional. Hay que ajustar una superficie.
- La interpolación tridimensional se puede efectuar en un único paso o realizar una planimétrica y después una altimétrica. Además, éstas no tienen por qué ser del mismo tipo.

A priori, de esa superficie a ajustar se conoce la posición de 35 puntos homogéneamente distribuidos, entre los cuales se encuentran localizados los puntos a calcular, pero hay que conocer su situación original para llegar a la interpolada. El panel se diseñó con una separación de 8 mm, tanto entre filas de cruces, como entre columnas. De esta forma, la situación inicial puede quedar planteada con la creación de un panel teórico (llamado *panelFOCal* por ser generado por el programa FOCal), con posiciones absolutas aleatorias, pero relativamente separadas por 8 “unidades” (Tabla 4.4).

Tabla 4.4. Detalle del listado de coordenadas del panel teórico (*panelFOCaI*)

Número de cruz	Coordenada X	Coordenada Y	Coordenada Z
1001001	4	796	7
1002001	12	796	7
1003001	20	796	7
...	...	...	...
1149001	1188	796	7
1150001	1196	796	7
1001002	4	788	7
1002002	12	788	7
1003002	20	788	7
...	...	...	...
1001100	4	4	7
1002100	12	4	7
...	...	...	...
1149100	1188	4	7
1150100	1196	4	7

En el listado se puede observar la numeración de las cruces, en la que la primera cifra corresponde con un identificador de panel, las tres siguientes pertenecen al número de columna y las tres últimas identifican el número de fila. El origen se sitúa, como ya se ha dicho, en la cruz 001_100, con coordenadas teóricas (4, 4, 7).

Con las 15000 coordenadas en el sistema inicial teórico y las 35 correspondientes del *panel21* medidas topográficamente, se tienen los datos de partida; a continuación hay que seleccionar el mejor modelo de interpolación, de forma que los puntos calculados se ajusten lo más posible a la realidad. Para ello se hicieron varias pruebas: tres interpolaciones polinómicas tridimensionales, de segundo, tercer y cuarto grado, respectivamente, y una polinómica bidimensional de cuarto grado, con interpolación cúbica de la coordenada z.

La forma de actuar es la misma que en una transformación geométrica, la diferencia es que en esta, los puntos a transformar son reales. A continuación se muestran las ecuaciones de observación que aporta al sistema cada punto de coordenadas conocidas, en una interpolación (o transformación) polinómica tridimensional de segundo grado:

$$\begin{aligned}
x' &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7x^2 + a_8y^2 + a_9z^2 \\
y' &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3z + b_4xy + b_5xz + b_6yz + b_7x^2 + b_8y^2 + b_9z^2 \\
z' &= c_0 + c_1x + c_2y + c_3z + c_4xy + c_5xz + c_6yz + c_7x^2 + c_8y^2 + c_9z^2
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Donde los términos a_i , b_i y c_i son los 30 parámetros de la transformación. De la misma forma se pueden expresar las ecuaciones de la interpolación polinómica tridimensional de tercer grado, ascendiendo en este caso los parámetros a 57:

$$\begin{aligned}
x' &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7x^2 + a_8y^2 + a_9z^2 + \\
&\quad a_{10}x^2y + a_{11}x^2z + a_{12}y^2x + a_{13}y^2z + a_{14}z^2x + a_{15}z^2y + \\
&\quad a_{16}x^3 + a_{17}y^3 + a_{18}z^3 \\
y' &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3z + b_4xy + b_5xz + b_6yz + b_7x^2 + b_8y^2 + b_9z^2 \\
&\quad b_{10}x^2y + b_{11}x^2z + b_{12}y^2x + b_{13}y^2z + b_{14}z^2x + b_{15}z^2y + \\
&\quad b_{16}x^3 + b_{17}y^3 + b_{18}z^3 \\
z' &= c_0 + c_1x + c_2y + c_3z + c_4xy + c_5xz + c_6yz + c_7x^2 + c_8y^2 + c_9z^2 \\
&\quad c_{10}x^2y + c_{11}x^2z + c_{12}y^2x + c_{13}y^2z + c_{14}z^2x + c_{15}z^2y + \\
&\quad c_{16}x^3 + c_{17}y^3 + c_{18}z^3
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Siguiendo esta dinámica de inclusión de parámetros, se podría continuar expresando ecuaciones de grados mayores (caso de la de cuarto grado usada aquí, con 93 parámetros), siguiendo la sucesión de productos hasta llegar al grado indicado. Por su parte, en la prueba realizada mediante transformación polinómica bidimensional, la expresión de ecuaciones es similar, pero desaparecen los términos en z . La obtención de la coordenada z , se realizó con una interpolación cúbica.

Hechos los cálculos pertinentes, a continuación se muestran los resultados de las cuatro pruebas y un análisis numérico y gráfico de los mismos.

Ajuste de la interpolación tridimensional de segundo grado:

*** Residuos de la Transformación ***

Nº Pto.	Xori	Yori	Zori	Xdestino	Ydestino	Zdestino	Vx	Vy	Vz	Vtot
1001001	4	796	7	9998.361	10795.325	10285.627	-0.065	-0.044	-0.498	0.504
1025001	196	796	7	10190.045	10795.221	10285.805	-0.060	-0.039	-0.060	0.093
1050001	396	796	7	10389.731	10795.082	10286.092	-0.056	0.018	0.107	0.122
1075001	596	796	7	10589.390	10795.026	10286.214	-0.011	0.013	0.249	0.249
1100001	796	796	7	10789.159	10794.935	10286.086	-0.063	0.065	0.449	0.458
1125001	996	796	7	10988.776	10794.909	10286.249	0.050	0.073	0.167	0.189
1150001	1196	796	7	11188.435	10795.052	10286.706	0.135	-0.067	-0.600	0.618
1001025	4	604	7	9998.173	10603.352	10286.713	0.027	0.022	-0.098	0.104
1025025	196	604	7	10189.834	10603.316	10287.329	0.060	-0.040	-0.059	0.094
1050025	396	604	7	10389.510	10603.197	10287.846	0.079	-0.002	-0.081	0.113
1075025	596	604	7	10589.245	10603.122	10288.290	0.052	0.013	-0.221	0.227
1100025	796	604	7	10789.084	10603.068	10287.560	-0.066	0.029	0.622	0.627
1125025	996	604	7	10988.732	10603.073	10287.463	0.022	0.008	0.642	0.642
1150025	1196	604	7	11188.523	10603.157	10288.391	-0.021	-0.071	-0.555	0.560
1001050	4	404	7	9998.194	10403.367	10287.340	0.027	0.076	0.398	0.406
1025050	196	404	7	10189.866	10403.380	10288.147	0.053	-0.034	0.286	0.293
1050050	396	404	7	10389.549	10403.291	10289.264	0.070	-0.025	-0.293	0.302
1075050	596	404	7	10589.263	10403.207	10289.839	0.068	0.002	-0.521	0.526
1100050	796	404	7	10789.089	10403.181	10289.277	-0.031	-0.009	0.197	0.199
1125050	996	404	7	10988.892	10403.142	10288.906	-0.094	0.015	0.532	0.541
1150050	1196	404	7	11188.695	10403.174	10289.470	-0.144	-0.011	-0.258	0.295
1001075	4	204	7	9998.358	10203.465	10288.263	0.006	0.019	0.164	0.165
1025075	196	204	7	10190.067	10203.354	10288.746	-0.000	0.035	0.417	0.419
1050075	396	204	7	10389.762	10203.340	10289.866	0.009	-0.030	-0.122	0.126
1075075	596	204	7	10589.430	10203.263	10290.764	0.059	-0.009	-0.631	0.634
1100075	796	204	7	10789.276	10203.247	10290.676	-0.056	-0.028	-0.345	0.351
1125075	996	204	7	10989.041	10203.175	10290.274	-0.076	0.030	0.065	0.105
1150075	1196	204	7	11188.746	10203.209	10290.396	-0.023	0.004	-0.241	0.242
1001100	4	4	7	9998.698	10003.488	10288.745	-0.069	0.009	-0.063	0.093
1025100	196	4	7	10190.376	10003.385	10289.202	-0.039	0.019	0.258	0.261
1050100	396	4	7	10390.031	10003.399	10290.279	0.015	-0.072	-0.196	0.210
1075100	596	4	7	10589.768	10003.299	10290.800	0.000	-0.027	-0.286	0.287
1100100	796	4	7	10789.556	10003.220	10290.904	-0.052	0.018	-0.149	0.159
1125100	996	4	7	10989.225	10003.223	10290.811	0.029	0.003	-0.006	0.030
1150100	1196	4	7	11188.853	10003.198	10289.933	0.164	0.037	0.731	0.750

Desviación típica = 0.1999 mm

Ajuste de la interpolación tridimensional de tercer grado:

*** Residuos de la Transformación ***

Nº Pto.	Xori	Yori	Zori	Xdestino	Ydestino	Zdestino	Vx	Vy	Vz	Vtot
1001001	4	796	7	9998.361	10795.325	10285.627	0.048	-0.007	-0.022	0.054
1025001	196	796	7	10190.045	10795.221	10285.805	-0.014	-0.010	0.159	0.160
1050001	396	796	7	10389.731	10795.082	10286.092	-0.039	0.017	0.034	0.054
1075001	596	796	7	10589.390	10795.026	10286.214	-0.001	-0.022	-0.047	0.052
1100001	796	796	7	10789.159	10794.935	10286.086	-0.060	0.013	0.097	0.115
1125001	996	796	7	10988.776	10794.909	10286.249	0.023	0.039	0.021	0.050
1150001	1196	796	7	11188.435	10795.052	10286.706	0.032	-0.028	-0.182	0.187
1001025	4	604	7	9998.173	10603.352	10286.713	-0.010	0.019	-0.110	0.112
1025025	196	604	7	10189.834	10603.316	10287.329	-0.005	-0.023	-0.072	0.075
1050025	396	604	7	10389.510	10603.197	10287.846	0.027	0.006	-0.199	0.201
1075025	596	604	7	10589.245	10603.122	10288.290	0.036	0.002	-0.457	0.458
1100025	796	604	7	10789.084	10603.068	10287.560	-0.046	0.005	0.352	0.355
1125025	996	604	7	10988.732	10603.073	10287.463	0.055	-0.001	0.518	0.521
1150025	1196	604	7	11188.523	10603.157	10288.391	-0.020	-0.019	-0.257	0.258
1001050	4	404	7	9998.194	10403.367	10287.340	-0.038	0.039	0.177	0.185
1025050	196	404	7	10189.866	10403.380	10288.147	-0.027	-0.028	0.291	0.293
1050050	396	404	7	10389.549	10403.291	10289.264	0.017	-0.011	-0.243	0.243
1075050	596	404	7	10589.263	10403.207	10289.839	0.067	0.002	-0.522	0.527
1100050	796	404	7	10789.089	10403.181	10289.277	0.019	-0.022	0.143	0.146
1125050	996	404	7	10988.892	10403.142	10288.906	-0.014	0.008	0.521	0.521
1150050	1196	404	7	11188.695	10403.174	10289.470	-0.079	0.027	-0.037	0.091
1001075	4	204	7	9998.358	10203.465	10288.263	0.002	-0.034	-0.135	0.139
1025075	196	204	7	10190.067	10203.354	10288.746	-0.035	0.042	0.529	0.532
1050075	396	204	7	10389.762	10203.340	10289.866	-0.013	-0.006	0.144	0.144
1075075	596	204	7	10589.430	10203.263	10290.764	0.073	0.003	-0.393	0.400
1100075	796	204	7	10789.276	10203.247	10290.676	-0.004	-0.036	-0.222	0.224
1125075	996	204	7	10989.041	10203.175	10290.274	-0.008	0.013	0.082	0.084
1150075	1196	204	7	11188.746	10203.209	10290.396	0.018	0.007	-0.223	0.224
1001100	4	4	7	9998.698	10003.488	10288.745	0.035	-0.030	-0.482	0.484
1025100	196	4	7	10190.376	10003.385	10289.202	-0.010	0.050	0.392	0.395
1050100	396	4	7	10390.031	10003.399	10290.279	0.011	-0.020	0.158	0.159
1075100	596	4	7	10589.768	10003.299	10290.800	-0.011	0.008	0.021	0.025
1100100	796	4	7	10789.556	10003.220	10290.904	-0.069	0.021	-0.063	0.095
1125100	996	4	7	10989.225	10003.223	10290.811	-0.015	-0.025	-0.216	0.218
1150100	1196	4	7	11188.853	10003.198	10289.933	0.051	-0.001	0.245	0.250

Desviación típica = 0.1588 mm

Ajuste de la interpolación tridimensional de cuarto grado:

*** Residuos de la Transformación ***

Nº Pto.	Xori	Yori	Zori	Xdestino	Ydestino	Zdestino	Vx	Vy	Vz	Vtot
1001001	4	796	7	9998.361	10795.325	10285.627	-0.003	-0.003	-0.083	0.083
1025001	196	796	7	10190.045	10795.221	10285.805	0.008	-0.000	0.027	0.028
1050001	396	796	7	10389.731	10795.082	10286.092	-0.004	0.024	0.150	0.152
1075001	596	796	7	10589.390	10795.026	10286.214	0.025	-0.027	0.080	0.088
1100001	796	796	7	10789.159	10794.935	10286.086	-0.044	-0.009	-0.081	0.092
1125001	996	796	7	10988.776	10794.909	10286.249	0.027	0.017	-0.357	0.359
1150001	1196	796	7	11188.435	10795.052	10286.706	-0.008	-0.002	0.262	0.262
1001025	4	604	7	9998.173	10603.352	10286.713	-0.009	0.005	0.045	0.046
1025025	196	604	7	10189.834	10603.316	10287.329	0.002	-0.024	-0.095	0.098
1050025	396	604	7	10389.510	10603.197	10287.846	0.011	0.017	0.031	0.037
1075025	596	604	7	10589.245	10603.122	10288.290	0.004	0.013	-0.178	0.178
1100025	796	604	7	10789.084	10603.068	10287.560	-0.068	0.006	0.310	0.317
1125025	996	604	7	10988.732	10603.073	10287.463	0.060	-0.009	0.115	0.130
1150025	1196	604	7	11188.523	10603.157	10288.391	-0.000	-0.008	-0.229	0.229
1001050	4	404	7	9998.194	10403.367	10287.340	0.007	0.026	0.146	0.148
1025050	196	404	7	10189.866	10403.380	10288.147	-0.007	-0.036	0.002	0.036
1050050	396	404	7	10389.549	10403.291	10289.264	-0.002	-0.005	-0.202	0.202
1075050	596	404	7	10589.263	10403.207	10289.839	0.030	0.015	-0.283	0.285
1100050	796	404	7	10789.089	10403.181	10289.277	-0.001	-0.015	0.190	0.191
1125050	996	404	7	10988.892	10403.142	10288.906	0.005	0.001	0.228	0.228
1150050	1196	404	7	11188.695	10403.174	10289.470	-0.033	0.014	-0.080	0.088
1001075	4	204	7	9998.358	10203.465	10288.263	0.023	-0.024	-0.106	0.111
1025075	196	204	7	10190.067	10203.354	10288.746	-0.028	0.035	0.127	0.135
1050075	396	204	7	10389.762	10203.340	10289.866	-0.035	-0.005	0.092	0.097
1075075	596	204	7	10589.430	10203.263	10290.764	0.041	0.015	-0.116	0.124
1100075	796	204	7	10789.276	10203.247	10290.676	-0.022	-0.025	0.016	0.036
1125075	996	204	7	10989.041	10203.175	10290.274	-0.000	0.012	0.061	0.063
1150075	1196	204	7	11188.746	10203.209	10290.396	0.021	-0.008	-0.074	0.078
1001100	4	4	7	9998.698	10003.488	10288.745	-0.006	-0.004	-0.033	0.033
1025100	196	4	7	10190.376	10003.385	10289.202	-0.008	0.029	0.020	0.036
1050100	396	4	7	10390.031	10003.399	10290.279	0.027	-0.043	-0.035	0.062
1075100	596	4	7	10589.768	10003.299	10290.800	0.014	0.002	0.140	0.141
1100100	796	4	7	10789.556	10003.220	10290.904	-0.035	0.028	0.061	0.076
1125100	996	4	7	10989.225	10003.223	10290.811	0.009	-0.015	-0.338	0.338
1150100	1196	4	7	11188.853	10003.198	10289.933	-0.001	0.003	0.183	0.184

Desviación típica = 0.0926 mm

A la vista de los residuos arrojados por la interpolación de segundo grado, la mayoría entra en la tolerancia de 80 μm en planimetría, con algunos valores que la superan holgadamente. En altimetría los residuos son inaceptables, puesto que en algún caso, este valor llega a alcanzar, incluso superar, el medio milímetro. La desviación típica se sitúa en 0.1999 mm. Por todo ello, queda desechado este modelo de interpolación.

La de tercer grado mejora los resultados planimétricos, aunque algún punto queda en el límite de la tolerancia. En altimetría, aunque más bajos, los residuos siguen siendo inaceptables. La desviación también mejora, pero sigue siendo rechazable, con un valor de 0.1588 mm. También se rechaza.

Como se intuía, la interpolación de cuarto grado es el que mejor resultados arroja planimétricamente, siendo en todo momento valores tolerables. Es en altimetría donde se aprecia que, aun siendo cada vez más bajos los residuos, para reducirlos definitivamente, habría que utilizar un grado muy alto, por lo que se intenta otro tipo de procedimiento: se prueba introducir una interpolación cúbica para la altimetría. No se incluyen los resultados, pues planimétricamente son similares a los de la tridimensional y altimétricamente los residuos son cero, ya que esta interpolación ajusta la función a los nodos introducidos. Los siguientes gráficos aclaran este análisis:

Figura 4.20. Vista en perspectiva de la fila 075 y contiguas

En la Figura 4.20 se puede observar una perspectiva en la que aparecen reflejadas las distintas pruebas realizadas. Las líneas de puntos son cada una de las filas del panel y los puntos ocupan la posición de cada cruz según las diferentes pruebas. Los puntos (cruces) negros son los medidos en campo; los amarillos, los de la interpolación tridimensional de segundo grado; los azules, los de tercer grado; los verdes, los de

cuarto grado; los rojos, los de cuarto grado, eliminando las peores observaciones y los magentas, los de cuarto grado con interpolación cúbica para la altimetría. Se aprecia cómo estos últimos son los que se ajustan perfectamente a los negros, definiendo perfectamente la curvatura del panel. A continuación, se ofrecen dos vistas en perspectiva de una columna y una fila, respectivamente (Figuras 4.21 y 4.22), con la misma simbología ya expuesta:

Figura 4.21. Vista en perspectiva de la columna 075

Figura 4.22. Vista en perspectiva de la fila 050

La interpolación bidimensional de cuarto grado con interpolación cúbica para la coordenada Z, es pues la más favorable y, por tanto, la escogida. El resultado es un fichero con las coordenadas X, Y, Z de las 15000 cruces del *panel21*.

Transformación

La última fase de este proceso de obtención de coordenadas en el sistema de referencia objeto es transferir las coordenadas del *panel21* al resto de paneles. El panel, en su desplazamiento a lo largo del carril a las diferentes profundidades, se traslada teóricamente, en la dirección del eje Z, y puede tener ligeros giros alrededor de los tres ejes, por la ligera curvatura del carril y por la falta de perpendicularidad entre el carril y el panel. Pero por otro lado, en ese movimiento se comporta como un sólido rígido. Estos factores físicos se traducen analíticamente en los parámetros de una transformación tridimensional de semejanza. Por tanto, en este paso se realiza este tipo de transformación tomando como objeto a transformar el *panel21* (con sus coordenadas en esa posición), y como destino, cada una de las posiciones o profundidades que el panel ocupa a lo largo del carril.

Todas las transformaciones realizadas entraron en la tolerancia definida de 80 μm , si bien en varias de ellas hubo que desestimar algún punto que hacía que los valores de los residuos del ajuste no fueran favorables. De hecho, esa es la razón por la que se midieron 9 puntos en cada posición, frente a los 4 estrictamente necesarios para poder realizar un ajuste mínimo cuadrático, en una transformación tridimensional de semejanza.

Tras este paso se obtuvieron los ficheros de coordenadas en el sistema objeto de todas las posiciones posibles de los paneles.

4.2.2.3. Toma fotográfica

Paralelamente a la medida topográfica de las cruces de los paneles, se iban tomando las fotografías de los mismos. Lo más reseñable de la toma fotográfica es que los parámetros de la exposición tenían que mantenerse constantes a lo largo de todo el proceso. Esta coherencia es lógica si la premisa es la de tomar las diferentes fotografías de un ensayo concreto como una única. El mayor riesgo puede venir del encendido o apagado de la cámara, ya que en estas operaciones el motor del enfoque varía las posiciones relativas de las lentes. Para evitarlo, si entre dos tomas pasaba un tiempo

considerable, se hacía una fotografía (que se borraba a continuación) con el fin de que la máquina no se apagase automáticamente por tiempo de demora. El guion de tomas, junto al de medidas topográficas, presente en el proceso y seguido escrupulosamente, para no dejar ningún detalle en el olvido, es el siguiente:

Tabla 4.5. Estadillo-guion de la toma fotográfica

Enfoque	Alejamiento (Z)	FOTOS	Medidas
f14 - F11 - E50	Panel 50	1	9 ptos panel
	Panel 59	2	9 ptos panel
	Test 50	3-5	9 ptos test
	Panel: 85, 75, 70, (59), 55, (50), 46.25, 44, 40, 37.5, 35	6-14	9 ptos. en cada posición (81 ptos)

4.2.2.4. Medida automática de cruces en las imágenes

De la misma manera que el dar coordenadas en el sistema de referencia objeto, de forma directa, a las 15000 cruces de cada una de las posiciones del panel, suponía una tarea de magnitudes inabordables, el caso de la medida en imagen de sus correspondientes en el sistema imagen, también lo era. La única forma de encarar con garantías este proceso era mediante medida automática.

Una de las técnicas más utilizadas es la de los operadores de interés y otras técnicas de tratamiento de imágenes similares, según la cual, se obtienen las zonas de la imagen en las que el contraste es más elevado, como propone J. Heikkilä en su calibración de cámaras usando puntos circulares (Heikkilä, 2000). Sin embargo, para esta tesis se ha seleccionado la correspondencia de imágenes por correlación.

La correlación es un estadístico que permite estudiar la relación o dependencia entre dos variables (en este caso, imágenes) y cuantificarla mediante el coeficiente de correlación, r :

$$r = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (g_1(i,j) - \mu_1) \cdot (g_2(i,j) - \mu_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (g_1(i,j) - \mu_1)^2 \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (g_2(i,j) - \mu_2)^2}} \quad (4.6)$$

La técnica se basa en comparar una pequeña matriz *patrón*, que incluye en su centro el píxel buscado, con una submatriz de la otra imagen, llamada submatriz de *búsqueda*, mayor que la matriz patrón, donde se ha de encontrar su homólogo. La matriz

patrón se va “desplazando” sobre la de búsqueda en todas las posiciones posibles, generando en cada una de ellas un índice de correlación. Los valores que puede tomar este van desde -1, cuando las dos imágenes son idénticas, pero invertidas en sus valores radiométricos (su imagen negativa), hasta 1, cuando son coincidentes, pasando por el 0 si las imágenes son completamente diferentes.

Evidentemente la posición buscada será la que mayor índice de correlación tenga, el que más se acerque a 1. Dependiendo de la calidad de las imágenes y del objetivo buscado, se impone una tolerancia a partir de la cual se aceptará el mayor índice. En la mayoría de las fases fotogramétricas donde se aplica la correlación, esta tolerancia se fija en 0.6, excepto en la medida automática de marcas fiduciales en la orientación interna de imágenes analógicas, donde se sube a 0.8 o más. Esto es debido a que se da un escenario muy favorable para la correlación: una imagen patrón geoméricamente definida en negro, sobre fondo blanco (alto contraste).

Figura 4.23. Submatriz de búsqueda y matriz patrón (ampliada)

Hacer una correspondencia de imágenes supone pues, tener dos imágenes que comparar, y en principio, lo que se va a medir, van a ser cruces que están en una única imagen. Es decir, se cuenta con la submatriz de búsqueda, que sería una submatriz por cada cruz que aparece en la imagen, suficientemente grande como para albergarla completamente con su entorno, pero no se tiene una imagen patrón. A tal efecto se creó

una serie de imágenes, con el diseño de la cruz que aparece en las imágenes de calibración, con diferentes resoluciones, para que pudieran actuar de patrón en cada una de las profundidades; las imágenes son cuadradas y con un número impar de filas (y por tanto, columnas), teniendo en el píxel central, precisamente el centro geométrico de la cruz (Figura 4.23).

El algoritmo de correlación creado, tras haber recorrido toda la submatriz de búsqueda superponiendo la matriz patrón y haber confeccionado una matriz de índices de correlación, elige, dentro de ésta, la posición píxel que mayor índice tiene. A continuación, con centro en ese elemento de mayor índice, vuelve a extraer una submatriz de 5×5 , en la que, mediante un ajuste mínimo cuadrático de una función polinómica de segundo grado (Ecuación 4.3.x', pero bidimensional), encontrará el máximo de la superficie de los valores de correlación obtenidos, con una *precisión subpíxel*.

Figura 4.24. Precisión subpíxel

En la Figura 4.24, se visualiza los 25 píxeles, centrados en el píxel encontrado, representados por barras verticales de altura el valor del índice de correlación. Superpuesta, se observa la superficie polinómica de segundo grado ajustada. En la vista de la derecha, además, se aprecia con más claridad el valor máximo que toma la función y la posición que ocupa. Queda justificada, pues, la posición subpíxel en el entorno 5×5 del píxel encontrado por la correlación.

Si la resolución de las imágenes oscilaba entre $100 \mu\text{m}$ y $200 \mu\text{m}$ en la mayoría de los ensayos, esto significaba que se proporcionaba la posición de cada cruz con una

precisión por debajo de estos valores. Esta operación la repite el algoritmo por cada cruz, que encuentra en la imagen secuencialmente, pues “conoce” la separación original de 8 mm entre ellas.

Se dan dos problemas en este algoritmo: por un lado, no puede correlacionar marcas que no estén completas o que su entorno sea demasiado pequeño (esto ocurrirá en los márgenes de la imagen) y por otro, las cruces de los márgenes que no incurran en el problema anterior, cuentan con la desventaja de que la distorsión de la imagen puede producirles deformaciones contraproducentes para la correlación. En los resultados de la calibración se verá si los residuos de esas cruces son elevados o no.

4.2.2.5. Cálculo de la calibración

Como ya se ha explicado, en el cálculo de la calibración se obtendrán los datos internos, parámetros físicos y geométricos que definen la geometría de la cámara y, por ende, la forma del haz perspectivo, y los datos externos de la toma realizada, es decir, las coordenadas del centro de proyección y los giros con respecto a los ejes del sistema de referencia objeto.

En este trabajo se ha utilizado genéricamente como método de cálculo las ecuaciones de colinealidad, completadas con una serie de parámetros adicionales destinados a definir la distorsión. A continuación se describen los detalles.

Punto de partida. Ecuaciones de colinealidad

Se quiere obtener los datos internos y externos de la cámara en la toma fotográfica realizada, para lo que se van a utilizar las condiciones de colinealidad, en su versión de intersección inversa, es decir, en la forma que toma para la resección espacial. Se retoman pues, las ecuaciones (2.40) y (2.41):

$$\begin{aligned} F \equiv x_a &= x_0 - f \frac{m_{11}(X_A - X_O) + m_{12}(Y_A - Y_O) + m_{13}(Z_A - Z_O)}{m_{31}(X_A - X_O) + m_{32}(Y_A - Y_O) + m_{33}(Z_A - Z_O)} = x_0 - f \frac{r}{q} \\ G \equiv y_a &= y_0 - f \frac{m_{21}(X_A - X_O) + m_{22}(Y_A - Y_O) + m_{23}(Z_A - Z_O)}{m_{31}(X_A - X_O) + m_{32}(Y_A - Y_O) + m_{33}(Z_A - Z_O)} = y_0 - f \frac{s}{q} \end{aligned} \quad (4.7)$$

En ella, los datos de entrada son las coordenadas de los puntos en el sistema de referencia imagen, (x_a, y_a) y sus correspondientes coordenadas en el sistema de referencia objeto (X_A, Y_A, Z_A) . Estos dos conjuntos de datos son los conseguidos en las fases anteriores.

Las incógnitas, entonces, son las coordenadas en el sistema de referencia objeto, del centro de proyección (X_0, Y_0, Z_0) y los giros $(\omega, \varphi, \kappa)$ alrededor de los ejes, implícitos en la matriz de rotación M , representada por sus coeficientes m_{ij} , todos ellos como parámetros externos. Como datos internos aparecen la focal, f , y las coordenadas en el sistema de referencia imagen, del punto principal (x_0, y_0) .

Obtención de datos aproximados iniciales. Transformación Lineal Directa.

Como se apuntaba en el Capítulo 3, el cálculo será iterativo mediante un ajuste mínimo cuadrático (Anexo B), por lo que hay que dar unos valores iniciales aproximados a esas incógnitas. Habría que buscar un método poco costoso, computacionalmente hablando, para su búsqueda. En principio, los datos internos aproximados podrían ser perfectamente $(0, 0)$ para la posición del punto principal y el valor nominal para la focal. En cuanto a los datos externos, esto es algo más complicado. En el caso de la Fotogrametría aérea, los giros son cercanos a cero y por esta razón además, la posición del centro de proyección en planimetría, es sencilla de obtener a partir de los puntos en el terreno. Altimétricamente se obtendría a partir de la focal y la altura de vuelo.

En objeto cercano, esta aproximación no es tan evidente, por lo que se ha de utilizar algún algoritmo de resección de tipo lineal, para lo que se cuenta con la Transformación Lineal Directa (DLT) (Anexo A). Su aplicación es sencilla y los resultados son bastante aceptables, obteniendo además los datos internos.

Se llevó a cabo este cálculo inicial para todos los ensayos, obteniendo el valor de los once parámetros y recuperando a partir de ellos los datos internos y externos de la cámara. Aunque no es determinante en este paso, las desviaciones típicas obtenidas en este cálculo estuvieron en torno a la décima de milímetro, con valores mínimos de 0.06 mm y máximos de 0.2 mm.

Parámetros adicionales. Función de distorsión

A las ecuaciones de colinealidad se les añadieron los parámetros dirigidos a la corrección de la función de distorsión. Se probaron tres funciones diferentes para todos los ensayos realizados, cuyos resultados se presentan y analizan en el Capítulo 5:

- *Función de distorsión clásica.* Utilizando la propuesta por D.C. Brown, se incluyeron tres coeficientes de distorsión radial y dos de distorsión por descentrado. La formulación usada es la de las ecuaciones (2.52).

- *Función de distorsión por polinomios de Legendre.* Basada en los polinomios de Legendre (Anexo C.1), se trata de una serie de polinomios ortogonales, continuos en todo el dominio de definición ya que el número de puntos es bastante denso (Tang, Fritsch, & Cramer, 2012). Si se denota los polinomios de Legendre como $\{L_m(x)\}_{m=0,1,\dots}$ se definen de la siguiente forma:

$$|L_m(x)| \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\int_{-1}^1 L_m(x)L_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases} \quad (4.8)$$

Gracias a su forma recursiva, se pueden calcular a partir de los primeros polinomios, como se puede ver en el Anexo C.1. Al tratarse de un caso bidimensional (el plano imagen, donde los puntos son proyectados, lo es) hay que generalizar el caso univariado de la siguiente forma:

$$\{p_{m,n}(x,y) = p_m(x)p_n(y)\}_{m=0,1,\dots, n=0,1,\dots} \quad (4.9)$$

Llevando esta formulación al caso de la función de distorsión, se puede decir que, si el formato de la imagen es $2b_x \times 2b_y$, los polinomios escalados son:

$$l_m(x, b_x) = L_m(x/b_x)$$

$$l_n(y, b_y) = L_n(y/b_y) \quad (4.10)$$

Por tanto, y según la ecuación (4.9), se llega a la forma de los polinomios bivariados sobre el formato de la imagen, a los que se multiplica por 10^{-6} por estabilidad numérica:

$$f_{m,n} \triangleq f_{m,n}(x,y; b_x, b_y) = l_m(x, b_x) l_n(y, b_y)$$

$$p_{m,n} = 10^{-6} f_{m,n}; |p_{m,n}| \leq 10^{-6} \quad (4.11)$$

La distorsión $\Delta x(x,y)$ y $\Delta y(x,y)$ a añadir a las ecuaciones de colinealidad se aproximarían a series de polinomios ortogonales continuos, $\{p_{m,n}\}_{m=0, n=0}^{m=M_x, n=N_x}$ (análogamente para y), siendo los M_x , N_x (y los M_y , N_y) los grados máximos seleccionados. Se eliminan seis de ellas, $p_{1,0}$, $p_{0,1}$, $p_{2,0}$ y $p_{1,1}$, en $\Delta x(x,y)$, por estar altamente correlacionadas con $p_{0,1}$, $p_{1,0}$, $p_{1,1}$ y $p_{0,2}$, en $\Delta y(x,y)$. Además, se eliminan los términos $p_{0,0}$ en ambas componentes, por ser el punto principal.

El número de parámetros es $(M_x+1) \times (N_x+1) + (M_y+1) \times (N_y+1) - 6$. De esta forma, un ejemplo de parámetros adicionales basados en polinomios de Legendre de grado 4, como el utilizado en los ensayos, tendría 44 parámetros a_i :

$$\begin{aligned} \Delta x = & a_1 p_{1,0} + a_2 p_{0,1} + a_3 p_{2,0} + a_4 p_{1,1} + a_5 p_{0,2} + a_6 p_{3,0} \\ & + a_7 p_{2,1} + a_8 p_{1,2} + a_9 p_{0,3} + a_{10} p_{4,0} + a_{11} p_{3,1} + a_{12} p_{2,2} \\ & + a_{13} p_{1,3} + a_{14} p_{0,4} + a_{15} p_{4,1} + a_{16} p_{3,2} + a_{17} p_{2,3} + a_{18} p_{1,4} \\ & + a_{19} p_{4,2} + a_{20} p_{3,3} + a_{21} p_{2,4} + a_{22} p_{4,3} + a_{23} p_{3,4} + a_{24} p_{4,4} \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \Delta y = & a_2 p_{1,0} - a_1 p_{0,1} + a_{25} p_{2,0} - a_3 p_{1,1} - a_4 p_{0,2} + a_{26} p_{3,0} \\ & + a_{27} p_{2,1} + a_{28} p_{1,2} + a_{29} p_{0,3} + a_{30} p_{4,0} + a_{31} p_{3,1} + a_{32} p_{2,2} \\ & + a_{33} p_{1,3} + a_{34} p_{0,4} + a_{35} p_{4,1} + a_{36} p_{3,2} + a_{37} p_{2,3} + a_{38} p_{1,4} \\ & + a_{39} p_{4,2} + a_{40} p_{3,3} + a_{41} p_{2,4} + a_{42} p_{4,3} + a_{43} p_{3,4} + a_{44} p_{4,4} \end{aligned}$$

- *Corrección de la distorsión por interpolación bicúbica.* Para este tipo de corrección, la introducción de parámetros adicionales para la función de distorsión se hace prácticamente imposible, pues, según la teoría de las curvas de tipo *spline* y, por tanto, de las superficies basadas en ellas, prácticamente serían tantos como número de puntos utilizados, algo inviable para esta aplicación.

Una posible solución es que si se calculan las ecuaciones de colinealidad sin ningún parámetro adicional para la distorsión, todo el residuo producido en cada punto imagen contendrá, además de los errores sistemáticos (los de distorsión), los errores accidentales (los de medida, producidos en este caso por una deficiente correlación automática en el sistema imagen o en el sistema objeto, por una imprecisa medida topográfica de los puntos o por las transformaciones e interpolaciones llevadas a cabo en los procesos anteriores).

La idea, pues, es ajustar la superficie “*bicúbicamente*”, tomando como coordenadas planimétricas, las coordenadas imagen referidas al punto principal (calculado sin distorsión), y como coordenada altimétrica, z , el residuo en x de cada punto. Realizando esta misma tarea para el residuo en y , la corrección a aplicar procederá de realizar una interpolación bicúbica usando cada una de las dos superficies ajustadas para sus correspondientes componentes, x e y , respectivamente.

Resolución del sistema de ecuaciones

El sistema de ecuaciones de colinealidad ampliado con los parámetros adicionales, tendrá como parámetros incógnita fijos (nueve) los seis de la orientación externa, (X_0, Y_0, Z_0) y $(\omega, \varphi, \kappa)$ y los tres internos, (x_0, y_0, f) . A estos se les añaden los propuestos por una u otra función de distorsión. En cuanto al número de ecuaciones, cada punto aporta dos, una para la x y otra para la y . Teniendo en cuenta que hay ensayos de hasta 70000 puntos y configuraciones de distorsión que sobrepasan la centena de parámetros, el tamaño de las matrices es bastante grande y el coste computacional, importante. Las ecuaciones formadas tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} F(x) &= x - x_0 + f_{dist}(x) + f * r/q \\ F(y) &= y - y_0 + f_{dist}(y) + f * s/q \end{aligned} \quad (4.13)$$

Siguiendo el método de mínimos cuadrados por Newton-Raphson (Anexo B.2), en el que se evalúan las ecuaciones en función de los parámetros estimados, usando una aproximación numérica de derivadas parciales, se llega a la solución del sistema. Se puede observar en las ecuaciones (4.13) cómo lo que se obtiene de cada una de ellas son los residuos en cada componente.

El proceso es iterativo y finaliza cuando el valor absoluto de ninguno de los componentes del vector de correcciones de los parámetros supera la tolerancia establecida a priori.

Estudio de precisiones

Terminado el ajuste, se realiza para todos los ensayos un estudio de precisiones en el que, tomando los residuos de la última iteración válida, es decir, la penúltima del proceso, se halla la varianza a posteriori (Anexo B.1):

$$\sigma_0^2 = \frac{V' * V}{n_{ecs} - n_{pars}} \quad (4.14)$$

También se halla la matriz de varianza-covarianza:

$$\Sigma_{xx} = \sigma_0^2 Q_{xx} = \sigma_0^2 N^{-1} = \sigma_0^2 (A^T P A)^{-1} \quad (4.15)$$

Y por último, se extrae la diagonal principal de ésta, de cuya raíz cuadrada de sus elementos se obtiene la precisión de los parámetros. En el Anexo D se incluye un informe ejemplo de una calibración del programa *FOCal* realizado.

4.2.2.6. Ensayos realizados

Con las 11 profundidades fotografiadas (con el mismo enfoque para todas ellas, 50 cm), se realizaron combinaciones diferentes para analizar cómo se comporta el alejamiento de los paneles en la calibración, además de ver cuáles serían las mejores distribuciones. La numeración usada para cada profundidad es la que se definió en la Tabla 4.3.

Tabla 4.6a. Combinaciones de profundidades completas

Nº	Nº Profundidades	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2	■										■
2		■					■					
3							■					■
4	3	■	■				■					
5		■			■		■					
6		■					■					■
7			■		■		■					
8					■	■	■					
9					■		■					■
10						■	■	■				
11							■				■	■
12	4	■	■								■	■
13		■	■	■	■							
14		■		■		■	■					
15									■	■	■	■
16	5	■	■	■	■		■					
17		■	■		■		■					■
18			■	■	■	■	■					
19				■			■			■	■	■
20								■	■	■	■	■
21	6	■	■	■	■	■	■					
22				■	■	■	■	■	■			
23							■	■	■	■	■	■
24	7	■	■	■	■	■	■	■				
25		■		■		■		■		■		■
26						■	■	■	■	■	■	■
27	8	■	■	■	■	■	■	■	■			
28				■	■	■	■	■	■	■	■	
29					■	■	■	■	■	■	■	■
30	9	■	■	■	■	■	■	■	■	■		
31				■	■	■	■	■	■	■	■	■
32	10	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	
33			■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
34	11	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■

De las numerosas combinaciones posibles entre ellas (más de 2000) se eligieron las distribuciones más razonables, atendiendo a criterios como: con pocas profundidades, con muchas, dispersas, centradas, delante o detrás de la distancia de enfoque, etc. En la Tabla 4.6a se pueden ver las 34 combinaciones llevadas a cabo finalmente. Cada una de las once columnas hacen referencia a las profundidades posibles, cada fila es cada una de las combinaciones realizadas, apareciendo marcada la casilla perteneciente a la profundidad seleccionada.

Además se quería comprobar cómo afecta el número de puntos y establecer unos límites fuera de los cuales la precisión no mejora sustancialmente. Para ello, de cada profundidad se extrajo un número de puntos, de forma que se volvían a tener nuevas combinaciones, esta vez seleccionando por cada profundidad, 1 de cada 2 puntos, 1 de cada 3, 1 de cada 5, 1 de cada 10 y 1 de cada 25 puntos. En esa extracción se impuso que la distribución fuera homogénea, antes que exacta, ya que no siempre el número de filas y columnas de puntos en el panel era divisible por cada una de las cantidades expuestas.

Tabla 4.6b. Combinaciones de profundidades parciales

Nº	Nº Profundidades	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2	■										■
2		■					■					
3	3	■			■		■					
4		■					■					■
5	4	■	■								■	■
6		■		■		■	■					
7	5	■	■	■	■		■					
8				■			■			■	■	■
9	6	■	■	■	■	■	■					
10				■	■	■	■	■	■			
11	7	■	■	■	■	■	■	■				
12	8	■	■	■	■	■	■	■	■			
13	9	■	■	■	■	■	■	■	■	■		
14	10	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	
15	11	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■

Las 15 combinaciones presentadas en la Tabla 4.6b se repitieron para las extracciones de 1/2, 1/3, 1/5, 1/10 y 1/25 puntos (a partir de aquí se les denominará combinaciones parciales y a las anteriores con todos los puntos, combinaciones completas).

Por último, se realizaron 8 ensayos “mixtos”, en los que, a un panel completo (el 6 o el 11) se les añadió una combinación de paneles parciales de 1/25 puntos (Tabla 4.6c). El objetivo era tener un panel con todos los puntos, apto para definir correctamente la distorsión y una combinación de pocos puntos de otras profundidades para comprobar el comportamiento de los otros parámetros.

Tabla 4.6c. Combinaciones de profundidades mixtas

Nº	Profundidad completa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	6										■	■
2		■		■		■						
3		■	■	■	■	■						
4								■	■	■	■	■
5	11	■					■					
6									■	■	■	
7		■		■		■	■	■		■		
8		■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	

Con los 117 ensayos (34 completos, 75 parciales y 8 mixtos) se calculó la calibración con las tres funciones de distorsión evaluadas en este trabajo (se elevan, por tanto, a 351 las calibraciones realizadas). En cada una de ellas se obtuvo su correspondiente estudio de precisiones, las cuales se analizarán en el Capítulo 5.

Además, se volvió a calibrar con los ensayos que obtuvieron mejor resultado, pero esta vez utilizando coordenadas en el sistema objeto con peor precisión, para analizar hasta qué nivel de precisión se puede realizar la medida topográfica de los puntos en esta metodología propuesta.

Para finalizar la descripción de la metodología, es de reseñar que se llevó a cabo el mismo proceso con el panel test, que servirá para realizar el control estereoscópico. Se tomaron tres imágenes del mismo, utilizando la guía epipolar y a la distancia de enfoque de 50 cm como las calibraciones realizadas, aunque para este propósito sólo se utilizaron las dos extremas para formar un par estereoscópico, que se orientó a partir de las calibraciones que mejores resultados arrojaron. De ellas se obtuvieron coordenadas de los puntos test en el sistema objeto, que se pueden comparar con las coordenadas medidas en campo. Este análisis también se llevará a cabo en el Capítulo 5.

4.3. Metodología con otras aplicaciones informáticas

En el estudio se han realizado pruebas con otros programas para verificar, en la medida de lo posible, los resultados obtenidos con la metodología propuesta. Se ha intentado elegir las aplicaciones más representativas sin que esta fase se convirtiera en una revisión de programas de calibración. Así, los seleccionados han sido *ImageMaster* de TOPCON, como representante de las aplicaciones que usan un patrón bidimensional al que hay que fotografiar desde diferentes ángulos (en esta categoría están la mayoría de aplicaciones del mercado: *RapidCal*, *PhotoScan*, *PhotoModeler*, el *Toolbox de MATLAB* de J.-Y. Bouguet, etc.) y *Calibración* de Aerotri, más acorde con las necesidades de esta Tesis, pues admite la introducción directa de coordenadas píxel y objeto, sin el requerimiento del uso de un patrón de calibración del propio software.

4.3.1. Calibración con *ImageMaster*

El software Image Master de TOPCON se basa en un proceso de calibración con plantilla, en el que se siguen los siguientes pasos (TOPCON):

- *Impresión del panel de calibración*, para el que se tiene en cuenta el tamaño de este, de forma que ocupe el máximo del formato de la fotografía. El panel consta de una serie de marcas específicas, en total, 145 puntos y 5 rombos de los cuales el software conoce sus coordenadas aproximadas.

Figura 4.25. Toma fotográfica en *ImageMaster*

Teniendo en cuenta el tamaño del sensor en el espacio objeto y el alejamiento al que se quiere realizar la calibración, se imprime la plantilla a un tamaño estandarizado, de forma que todo el formato de la imagen quede cubierto por la plantilla en una vista frontal. El panel ha de colocarse en una superficie lisa, como por ejemplo una pared, para reducir al máximo las posibles ondulaciones del mismo.

- *Realización de una serie de fotografías o imágenes del panel*, en total 5 imágenes desde diferentes puntos de vista, con los mismos parámetros, distancia focal y abertura de diafragma, para todas ellas y coincidentes con los que se impondrán en el trabajo para el cual se calibra.

Figura 4.26. Imágenes de calibración en *ImageMaster*

- *Introducción de las imágenes en el software de calibración*. El programa lleva a cabo un reconocimiento de las imágenes y detecta los 145 puntos de panel de calibración en cada imagen.
- *Cálculo de los parámetros de la calibración*. Por último se realiza el cálculo de la calibración. El modelo de distorsión seguido es el clásico de Brown con dos parámetros para la distorsión radial y dos parámetros para la distorsión tangencial. Como resultado final de la calibración, el programa ofrece un fichero con los parámetros de orientación interna de la cámara y las coordenadas y residuos de todos los puntos del panel de calibración en cada imagen.

En el Anexo D se incluyen los resultados de la calibración realizada.

4.3.2. Calibración con *Calibración de Aerotri*

Calibración es un programa de cálculo de calibraciones, en el que no se exige la utilización de una plantilla propia de la aplicación y no incluye módulo de medida automática de puntos. Los datos de entrada son las coordenadas de los puntos en los sistemas de referencia imagen (en unidad píxel o en unidad mm o μm) y objeto (unidad m o mm), introducidas en dos ficheros independientes, con su propia sintaxis. Como salida, el programa facilitará varios ficheros entre los que se encuentran un fichero con la información de todo el proceso y los resultados del mismo, y un fichero de cámara con los datos internos necesarios para trabajar con el software fotogramétrico Digi21.net.

La aplicación solicita del operador tres grupos de datos (Música):

- *Parámetros para pasar del sistema píxel al sistema fiducial.* Se trata de los parámetros de una transformación bidimensional afín. Se pueden introducir como datos o como aproximaciones.
- *Orientación externa.* Son los seis parámetros de la orientación externa de la cámara. También se introducen como dato o como aproximación.
- *Orientación interna.* Son los datos internos: distancia focal, punto principal y función de distorsión.

Calibración define el modelo de distorsión descomponiéndolo en tres tipos: radial simétrica, tangencial simétrica y dos series de distorsiones asimétricas (tomadas estas como la distorsión total menos la componente simétrica). Además, propone dos tipos de modelos de distorsión, definidos en función de la variable s , que es la distancia radial normalizada según su valor máximo: la semidiagonal. Estos son:

- *Modelos polinómicos.* Constan de dos series de polinomios: la serie p , con las componentes de la distorsión simétrica (radial o tangencial) y las componentes pares de la asimétrica, y la serie q , con las componentes impares de la distorsión asimétrica. Se puede elegir entre un modelo par o uno completo. El modelo impar tiene la siguiente formulación:

Serie p :

$$s \quad 2s^3 - s \quad 4.8s^5 - 4.7s^3 + 0.9s \quad 12.8s^7 - 19.1s^5 + 8.2s^3 - 0.9s \quad (4.16)$$

$$38.4s^9 - 76.2s^7 + 50.5s^5 - 12.6s^3 + 0.9s$$

Serie q :

$$s^2 \quad 2.5s^4 - 1.5s^2 \quad 6.4s^6 - 7.2s^4 + 1.8s^2 \quad 12.8s^7 - 19.1s^5 + 8.2s^3 - 0.9s \quad (4.17)$$

El modelo completo tiene la misma forma pero con diferentes coeficientes.

- *Modelos asimétricos.* Cada componente es el producto de un polinomio función de s por una componente función del ángulo θ entre radios. Los polinomios se toman del modelo seleccionado y las componentes en θ del modelo asimétrico. Incorpora un modelo radial/tangencial y un modelo de vector giratorio. Estos modelos asimétricos no fueron utilizados en los ensayos.

■

Con este programa se realizaron dos ensayos completos, dos parciales y los tres correspondientes a uno de los parciales, reduciendo el número de cifras decimales de las coordenadas en el sistema de referencia objeto.

4.4. Aplicación informática *FOCal*

Para el desarrollo de esta Tesis se ha confeccionado la aplicación informática *FOCal* en el entorno de programación de MATLAB. El programa se compone de un conjunto de herramientas diseñado por módulos, que siguen los algoritmos y características que se han ido describiendo en este capítulo. Se pretende que vaya evolucionando, incrementando herramientas y mejorando prestaciones. A continuación se presentan cada uno de los módulos;

MENÚ PRINCIPAL

Es el inicio del programa, donde se ofrece al usuario todas las herramientas en una barra de menús. Los menús disponibles son *Calibración*, *Orientación* y *Herramientas*. El menú *Orientación* incluirá en un futuro herramientas del proceso de orientación fotogramétrica que no son objetivo de esta Tesis.

Figura 4.27. FOCal - Menú principal

MENÚ CALIBRACIÓN

Es el relativo al proceso de medida automática de las marcas de los paneles y cálculo de la calibración, que son precisamente los módulos de los que se compone.

Figura 4.28. FOCal - Menú Calibración

Módulo Medida Automática

En este módulo se hace una llamada a una ventana (*figura* en el entorno MATLAB) en la que se introduce la imagen a medir y la imagen patrón (imagen de la marca preparada previamente en un software de tratamiento de imágenes como Photoshop) y se pide una serie de datos (Figura 4.29). La medida se hace por bloques rectangulares de marcas.

Los datos solicitados están relacionados con la posición en coordenadas píxel, su numeración en el panel y el tamaño del bloque a medir, definido por su diagonal. El resultado es un listado de las coordenadas píxel de las marcas, numeradas según su posición en el panel y el número de orden del panel en el rango de profundidades previstas. Si alguna marca no es medida, normalmente porque no alcance su coeficiente de correlación la tolerancia establecida (es un valor configurable), no se escribe en el fichero de salida y se da un aviso de que no ha sido medida.

La opción de medir marcas individuales es usada para la medición de marcas en las que ha fallado la correlación por bloque o cuando el panel a medir no es regular, como el panel test. Una vez acabado el proceso aparece un punto blanco sobre las cruces medidas, a fin de ofrecer un control visual.

Figura 4.29. FOCal - Medida automática

Módulo Cálculo

En la ventana de este módulo se solicita en primer lugar los ficheros que contienen las coordenadas píxel y las coordenadas objeto, respectivamente (Figura 4.30). Al seleccionarlas busca automáticamente un fichero en el que aparecen las especificaciones básicas de la cámara usada. Si las coordenadas en el sistema imagen no son píxel el usuario ha de introducir esos datos manualmente. Se incluye un grupo de controles tipo “*popupmenu*” en el que se selecciona el modelo de distorsión y sus parámetros.

El resultado del cálculo ofrecerá como salidas un fichero *.txt, con la información del proceso y un fichero *.int, con el valor de los parámetros calculados, que se empleará en procesos posteriores (se adjunta en el Anexo D un ejemplo de cada uno). Por último aparece un control tipo “*button*” que muestra los gráficos de distorsión generados.

FOCal - Calibración de la cámara

Fichero de puntos imagen: D:\Doctorado\Tesis\Calibra-2\F14-F11-E50\FOCa\CoorPixel-3\Pixel_3-123456789

Fichero de puntos objeto: D:\Doctorado\Tesis\Calibra-2\F14-F11-E50\FOCa\CoorPixel-3\CoordTerreno.txt

Coordenadas Imagen

☒ Píxel ☐ Fotocoordenadas

Tamaño píxel: 5.3002 micras

Formato imagen: 3264 columnas, 2448 filas

Función de distorsión

Modelo de distorsión: Polinómico Clásico (Brown)

☒ Dist. Radial 3 Polinomios de Legendre

☒ Dist. Tangencial 2 Grado: 2

Calcular Calibración

Mostrar gráficos de distorsión

***** Resultados de la Calibración *****

*** Parámetros de Orientación ***

Orientación Interna:

x0 = 0.0533 mm

y0 = 0.1129 mm

f = 13.9569 mm

Orientación Externa:

Omega = -2.0787 deg ; -0.0363 rad

Fi = -0.3963 deg ; -0.0069 rad

Kappa = 0.2609 deg ; 0.0046 rad

Xo = 10585.8540 u.obj.

Yo = 10419.9157 u.obj.

Zo = 10517.8966 u.obj.

*** Parámetros de la función de distorsión ***

Modelo de distorsión clásica (Brown)

Distorsión radial:

k1 = 0.00067874

k2 = -0.00000111

k3 = -0.00000001

Distorsión tangencial:

p1 = 0.00000622

p2 = -0.00000280

(Toda la información en el fichero .txt generado)

Salir

Figura 4.30. FOCal - Calibración

MENÚ HERRAMIENTAS

Se trata del menú que recoge herramientas adicionales al proceso de calibración. Contiene las opciones *Generar panel*, *Transformaciones*, *DLT*, *Corregir imágenes de distorsión* y *Corregir Coordenadas de distorsión*.

Figura 4.31. FOCal - Menú Herramientas

Módulo Generar Panel

Es el encargado de preparar las reducciones de puntos en los paneles. A partir del panel completo el usuario selecciona qué reducción llevar a cabo ($1/2$, $1/3$, $1/5$, $1/10$ o $1/25$ puntos) y el resultado se dibuja en pantalla. Permite dibujar todas las combinaciones incluidas en un ensayo con distintos colores y comprobar si hay acumulaciones de puntos en alguna zona. Una vez se está de acuerdo con la distribución, se genera el fichero correspondiente con los puntos seleccionados.

Módulo Transformaciones

Con este módulo se obtienen las coordenadas en el sistema de referencia objeto de las marcas de los paneles. En primer lugar incluye una opción en el menú en el que se genera el panel teórico *panelFOCal* (Tabla 4.4). Una vez seleccionados los ficheros con las coordenadas origen y destino, se visualiza una tabla tipo “*griddata*” con los datos de los puntos comunes en estos ficheros (nombre de punto y coordenadas X , Y , Z , por columnas). También se dibuja su localización en un gráfico.

El usuario selecciona entonces el modelo de transformación a realizar (transformación 3D de semejanza, polinómica 2D de 4º grado con interpolación cúbica para la Z y distintos grados de polinómicas 3D). Realizado el ajuste correspondiente se muestra en pantalla los residuos de cada punto y la desviación típica obtenida, en función de los cuales, se puede quitar puntos del cálculo interactivamente.

Para finalizar, se graba el fichero **.mat* que contiene los valores de los parámetros de la transformación y un fichero **.txt* de información del proceso (se adjunta en el Anexo D un ejemplo). Además se obtiene el fichero de coordenadas transformadas a partir de uno seleccionado, aplicando los parámetros obtenidos.

Figura 4.32. FOCal - Transformaciones geométricas

Módulo DLT

En este módulo se realiza el cálculo de la Transformación Lineal Directa independientemente de la calibración, eligiendo los ficheros con coordenadas imagen y objeto, respectivamente (Figura 4.33). Si las coordenadas origen están en sistema píxel se deben introducir manualmente los datos necesarios para transformarlas a fotocoordenadas. El cálculo de la calibración hace una llamada a la función central de este módulo para obtener los datos iniciales aproximados, pero esa es una acción totalmente transparente al usuario.

Módulo Corregir imágenes de distorsión

Se trata de un módulo sin interfaz gráfica asociada, en el que se corrigen los errores sistemáticos de una imagen concreta (Figura 4.34). Para ello se solicita introducir un fichero **.int* de parámetros internos generado en el módulo de calibración.

Figura 4.33. FOCal - DLT

Figura 4.34. FOCal - Imagen corregida

Módulo Corregir coordenadas de distorsión

Este módulo tampoco tiene interfaz gráfica asociada, y en él se corrigen los errores sistemáticos a las coordenadas píxel de un fichero, generando un fichero de fotocoordenadas *.foc. Para ello se solicita introducir un fichero *.int de parámetros internos generado en el módulo de calibración.

Resultados y Análisis

5.1. Introducción

En la búsqueda del escenario óptimo para la calibración por el método propuesto, los ensayos se realizaron según una serie de criterios, que son precisamente los parámetros que se utilizarán para comparar los resultados:

- *Número de profundidades.* Se analiza cómo afecta la inclusión de más o menos profundidades (o paneles) en los ensayos y si hay una base razonable que incline a elegir un tipo de distribución u otra. En concreto, puede optarse a distribuir las homogéneamente en todo el rango de profundidades, desde la distancia de enfoque hasta la distancia de enfoque cercana o desde la distancia de enfoque hasta la distancia de enfoque lejana.
- *Número de puntos.* En este caso, parte de las combinaciones anteriores se usan para repetir los ensayos utilizando $1/2$, $1/3$, $1/5$, $1/10$ y $1/25$ puntos, respectivamente, del número total del panel. Evidentemente, hay una cantidad enorme de puntos, de los que se sospecha a priori, no serán necesarios gran parte de ellos, pero que se incluyen en los ensayos para analizar su evolución.
- *Método de cálculo de la calibración.* Se prueba con tres métodos: el clásico método de Brown, incorporando a las ecuaciones de colinealidad tres parámetros adicionales para la distorsión radial y dos para la tangencial; un método de inclusión de parámetros adicionales para la distorsión, basado en los polinomios de Legendre y finalmente, un método propuesto, por el que a partir del ajuste de las ecuaciones de colinealidad sin parámetros de distorsión, se ajustan los residuos por interpolación bicúbica, como se ha explicado en el Capítulo 4.
- *Precisión de las coordenadas en el sistema objeto.* A partir de las coordenadas obtenidas por medición topográfica, se reduce su precisión acortando el número de decimales paulatinamente hasta llegar a la precisión de mm (sin decimales).

5.2. Análisis de las precisiones de los parámetros

5.2.1. Ensayos completos

Se presentan en primer lugar los resultados de las combinaciones completas (todos los puntos), para los parámetros internos en la calibración clásica de Brown:

Tabla 5.1. Parámetros internos por el método de Brown (mm)

Combinación	Ptos	$\hat{\sigma}_o$	x_o	y_o	f
61	18664	0,0010	0,0524	0,1191	13,9532
601	29644	0,0010	0,0529	0,1176	13,9533
8901	41316	0,0010	0,0521	0,1159	13,9516
78901	47346	0,0010	0,0532	0,1151	13,951
678901	52348	0,0010	0,0527	0,1166	13,9528
11	16156	0,0014	0,0536	0,1142	13,9504
16	7496	0,0014	0,0545	0,1046	13,9559
126	10348	0,0014	0,0539	0,1027	13,9603
161	21158	0,0014	0,0532	0,1152	13,9527
246	11796	0,0014	0,0511	0,1018	13,9672
456	13200	0,0014	0,0574	0,0906	13,9477
461	22606	0,0014	0,0533	0,1164	13,9537
567	15288	0,0014	0,0498	0,1098	13,9555
1201	29988	0,0014	0,0536	0,1121	13,9533
1234	12522	0,0014	0,0511	0,1103	13,9661
1356	14986	0,0014	0,0548	0,105	13,9588
12346	17524	0,0014	0,0536	0,1033	13,9612
23456	19286	0,0014	0,052	0,1026	13,9678
36901	42568	0,0014	0,0532	0,1143	13,9527
123456	21780	0,0014	0,0533	0,1052	13,9635
345678	29448	0,0014	0,0537	0,1095	13,9599
1234567	27810	0,0014	0,0524	0,1079	13,9633
1356791	44368	0,0014	0,0533	0,1139	13,9531
5678901	56604	0,0014	0,053	0,115	13,9521
12345678	34794	0,0014	0,0531	0,1094	13,9621
34567890	50118	0,0014	0,0534	0,1121	13,9544
45678901	60546	0,0014	0,0534	0,1144	13,9528
123456789	44484	0,0014	0,0532	0,1116	13,9562
345678901	63780	0,0014	0,0534	0,1136	13,9534
1234567890	55464	0,0014	0,0532	0,1114	13,9563
2345678901	66632	0,0014	0,0531	0,113	13,9549
12345678901	69126	0,0014	0,0533	0,1128	13,9549
12461	27952	0,0017	0,0532	0,114	13,9558

La Tabla 5.1 está ordenada según la desviación típica a posteriori ($\hat{\sigma}_o$) de los residuos de cada ajuste. Esos residuos son los existentes tras ajustar las nuevas posiciones de los puntos corregidos de distorsión. Se suele tomar como tolerancia de aceptación de estos residuos el valor en mm de entre 0.25 y 0.33 píxeles para la $\hat{\sigma}_o$. En aplicaciones menos restrictivas se puede tomar 0.5 píxeles. En el caso de la cámara utilizada, de 5.31 μm de resolución, la primera tolerancia se traduce en 0.0013-0.0018 mm y la segunda corresponde a 0.0027 mm.

Figura 5.1. Residuos en un ensayo sin corregir la distorsión

La mayoría de los residuos individuales alcanzaron esta condición, aunque no todos. Para ello habría que haber realizado una edición manual o automática, en la que se habrían eliminado aquellos puntos en los que se sobrepasaba la tolerancia. En aras de homogeneizar el proceso en todos los ensayos, no se llevó a cabo esta operación, con la consiguiente pérdida de precisión. Desde este momento, por tanto, se cuenta con que los

resultados podrían haber sido mejores. La Figura 5.1 es una salida del programa FOCal, desarrollado para esta Tesis, en el que se muestran los residuos en el caso de no introducir parámetros de distorsión. Se puede apreciar claramente que esos residuos son prácticamente concéntricos, en una clara interpretación del centro de mejor simetría y la distorsión de mayor importancia: la distorsión radial. En este caso concreto los residuos, sin ser los más grandes encontrados en los ensayos realizados, ascienden a 0.180 mm, precisamente en los extremos del formato, como cabía esperar.

La Figura 5.2 recoge la salida de FOCal para una calibración considerando la distorsión, por lo que ha desaparecido la forma circular en las distorsiones, repartiéndose puntualmente por todo el formato de la imagen. Los residuos, en su mayoría, tienen un valor menor a las 2 μm , con pequeñas zonas puntuales entre 2 μm y 4 μm , mientras que los mayores residuos, entre 8 μm y 10 μm , se encuentran en zonas externas del formato de la imagen.

Figura 5.2. Residuos en un ensayo tras corregir la distorsión según Brown

La interpretación de la localización en estas zonas, es la mayor deformación que sufren los puntos del panel de calibración, con forma de cruz, haciendo que pierdan simetría. La correlación automática pierde precisión entonces, como se comprueba al ver el gráfico de distribución de los coeficientes de correlación de las 5000 cruces de un ensayo:

Figura 5.3. Distribución de los coeficientes de correlación de un ensayo

Se puede comprobar, además, cómo la gráfica sigue un trazado ascendente-descendente coincidiendo con las filas de cruces del panel, correspondiendo las zonas inferiores a los extremos de cada línea y las superiores, al centro de cada fila. Por tanto, volviendo al análisis de la Figura 5.2, si se hubiera realizado la edición de los puntos con peor coeficiente de correlación, además de desaparecer las zonas con mayores residuos, el resto habría disminuido hasta los niveles de la tolerancia descrita de 0.25 píxeles. Aun así, la tolerancia de 0.5 píxeles (0.0027 mm) la cumplen las desviaciones típicas a posteriori de todos los ensayos.

El siguiente parámetro a analizar de la Tabla 5.1 es la posición del punto principal. Se observa cómo los valores de sus componentes, x e y , no varían en exceso, con una media de 0.0532 mm y una desviación típica de 0.0012 mm para la x y una media de 0.1105 mm y una desviación típica de 0.0058 mm para la y . No destaca ningún agrupamiento de ensayos en función de este criterio, por lo que no se encuentra correlación entre ambos aspectos.

Por su parte, en los valores que toma la focal, siendo también poco significativa su variación (con una diferencia entre la mayor y la menor de apenas 20 μm) parece que hay cierta tendencia a ser menores en los casos de inclusión de paneles alejados de la cámara (así ocurre con todos los que incorporan la profundidad 11). Por el contrario, los

ensayos que reúnen las profundidades delante de la distancia de enfoque (50 cm, nombrada como 6), tienen focales más largas. Una excepción es el caso del ensayo 456, con la menor focal (debería tener un valor en torno a la media de todos los ensayos) y con la mayor diferencia en las coordenadas del punto principal con respecto del resto.

Tabla 5.2. Precisiones de los parámetros internos por el método de Brown (mm)

A continuación se analiza la precisión de los parámetros. La Tabla 5.2 está ordenada según la precisión en la posición del punto principal, aunque la tendencia de esta también es seguida por la precisión de la distancia focal. La primera lectura que se puede extraer es que tienen más precisión en este criterio, los ensayos con más profundidades. Vuelve a darse la circunstancia de que, intercalados en la progresión con éstos, aparecen ensayos con menor número de profundidades, pero situadas en la parte lejana del rango de profundidades.

Aunque los valores están muy por debajo de la micra, por lo tanto aceptables, se manifiesta un ligero despegue del valor de la precisión de la distancia focal en el ensayo 456 y en menor grado, en el 567, muy centrados ambos en el rango de profundidades y, sobre todo, con poca diferencia de profundidad para el cálculo de la distancia focal. No parece demasiado determinante para este criterio la dispersión de profundidades, ya que los ensayos 1201, 11 o 161, que incluyen las profundidades más distantes (la 1 y la 11), quedan situados en la parte media-baja de la tabla.

En la Tabla 5.3 se muestran las precisiones de los parámetros externos, ordenados por la precisión en la obtención de las coordenadas del centro de proyección. No se incluye aquí la tabla de los parámetros, como se hizo en la Tabla 5.1, pues los valores también son muy homogéneos. Los valores de las precisiones de los giros (ω , φ , κ) son muy bajos, los de ω y φ muy parejos (en torno a 0.00001°) y los de κ , menores que los anteriores (0.000001°). Sin llegar a utilizarlo como tolerancia, se puede dar un valor de referencia para dimensionar el resultado: conociendo el valor de la resolución de la imagen, de 0.00531 mm y estableciendo un valor de 0.5 píxel (0.0027 mm), se puede conocer el valor angular correspondiente (Ec. 5.1), mucho mayor que los calculados de las precisiones.

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{dr}{f} = \tan^{-1} \frac{0.0027 \text{ mm}}{13.956 \text{ mm}} = 0.000193 \text{ rad} = 0.01109^\circ \quad (5.1)$$

En cuanto a la precisión de las coordenadas de los centros de proyección, también está dentro de unos valores muy bajos, teniendo en cuenta el tamaño de píxel proyectado en el espacio objeto (entre 0.13 mm, para los paneles más cercanos a la cámara y 0.32 mm, para los lejanos). Siguen siendo los mejores ensayos los que contienen más profundidades y, dentro de estos, los que se alejan más de la distancia de enfoque. Negativamente, vuelve a darse el caso de los ensayos 456 y 567, que se despegan del resto, aunque dentro de valores tolerables.

Tabla 5.3. Precisiones de los parámetros externos por el método de Brown (mm)

Combinación	Prec. ω°	Prec. φ°	Prec. κ°	Prec. X_0	Prec. Y_0	Prec. Z_0
12345678901	0,000008	0,000011	0,000001	0,000850	0,000853	0,001873
2345678901	0,000008	0,000010	0,000001	0,000925	0,000928	0,002037
345678901	0,000007	0,000010	0,000001	0,001002	0,001005	0,002205
1234567890	0,000009	0,000012	0,000001	0,001002	0,001007	0,002205
1356791	0,000010	0,000013	0,000001	0,001054	0,001057	0,002325
1201	0,000011	0,000016	0,000001	0,001060	0,001065	0,002343
45678901	0,000007	0,000010	0,000001	0,001113	0,001117	0,002447
12461	0,000014	0,000020	0,000002	0,001204	0,001208	0,002660
34567890	0,000008	0,000011	0,000001	0,001223	0,001228	0,002687
123456789	0,000010	0,000013	0,000001	0,001231	0,001237	0,002707
5678901	0,000007	0,000010	0,000001	0,001252	0,001256	0,002756
36901	0,000009	0,000012	0,000001	0,001275	0,001279	0,002811
11	0,000015	0,000021	0,000002	0,001325	0,001329	0,002929
678901	0,000007	0,000010	0,000001	0,001411	0,001417	0,003104
161	0,000015	0,000021	0,000002	0,001422	0,001427	0,003141
461	0,000013	0,000018	0,000001	0,001526	0,001531	0,003355
601	0,000009	0,000012	0,000001	0,001615	0,001622	0,003552
12345678	0,000011	0,000015	0,000001	0,001658	0,001665	0,003650
61	0,000011	0,000016	0,000001	0,001666	0,001673	0,003666
78901	0,000007	0,000010	0,000001	0,001722	0,001729	0,003789
1234567	0,000013	0,000017	0,000001	0,002060	0,002070	0,004548
8901	0,000008	0,000010	0,000001	0,002254	0,002264	0,004954
345678	0,000011	0,000015	0,000001	0,002328	0,002338	0,005122
123456	0,000014	0,000019	0,000002	0,002730	0,002744	0,006039
12346	0,000016	0,000021	0,000002	0,002795	0,002808	0,006173
126	0,000020	0,000027	0,000002	0,002860	0,002873	0,006308
16	0,000022	0,000029	0,000002	0,002918	0,002931	0,006443
1356	0,000017	0,000023	0,000002	0,003030	0,003043	0,006701
146	0,000018	0,000025	0,000002	0,003088	0,003102	0,006827
23456	0,000015	0,000020	0,000002	0,003438	0,003457	0,007614
246	0,000018	0,000024	0,000002	0,003743	0,003765	0,008274
1234	0,000017	0,000023	0,000002	0,004276	0,004297	0,009469
567	0,000016	0,000022	0,000002	0,006178	0,006213	0,013716
456	0,000015	0,000021	0,000002	0,007201	0,007262	0,016097

Por último, la precisión de los coeficientes de distorsión está por debajo de la milésima de micra en todos los casos y eso se da en el primer coeficiente de distorsión radial (en el resto, es aún menor), por lo que no se puede extraer ninguna conclusión asociada al criterio de distribución de profundidades, al menos en este momento.

Siguiendo la tónica planteada para el método clásico de Brown, se lleva a cabo un análisis similar para los ensayos realizados por el método de Legendre. Se comparan los mismos 34 ensayos de Brown, comenzando por la Tabla 5.4 en la que se ordenan los ensayos por la desviación típica a posteriori ($\hat{\sigma}_o$):

Tabla 5.4. Parámetros internos por el método de Legendre (mm)

Combinación	$\hat{\sigma}_o$	x_o	y_o	f
16	0,0028	0,0484	0,0798	13,5230
61	0,0028	0,0454	0,0930	13,5291
126	0,0028	0,0477	0,0780	13,5266
146	0,0028	0,0479	0,0803	13,5234
246	0,0028	0,0448	0,0774	13,5342
456	0,0028	0,0523	0,0662	13,5135
567	0,0028	0,0450	0,0863	13,5251
601	0,0028	0,0458	0,0922	13,5298
1234	0,0028	0,0451	0,0854	13,5331
1356	0,0028	0,0487	0,0803	13,5258
8901	0,0028	0,0445	0,0912	13,5274
12346	0,0028	0,0472	0,0785	13,5279
23456	0,0028	0,0459	0,0781	13,5348
36901	0,0028	0,0461	0,0892	13,5285
78901	0,0028	0,0459	0,0905	13,5267
123456	0,0028	0,0470	0,0805	13,5303
345678	0,0028	0,0473	0,0854	13,5298
678901	0,0028	0,0455	0,0920	13,5280
1234567	0,0028	0,0460	0,0836	13,5308
5678901	0,0028	0,0460	0,0904	13,5270
12345678	0,0028	0,0464	0,0851	13,5311
34567890	0,0028	0,0463	0,0879	13,5270
45678901	0,0028	0,0462	0,0898	13,5270
123456789	0,0028	0,0462	0,0873	13,5268
345678901	0,0028	0,0463	0,0889	13,5274
1234567890	0,0028	0,0461	0,0871	13,5282
2345678901	0,0028	0,0460	0,0884	13,5285
11	0,0030	0,0462	0,0870	13,5271
461	0,0030	0,0461	0,0906	13,5279
1201	0,0030	0,0463	0,0863	13,5293
1356791	0,0030	0,0466	0,0889	13,5265
12345678901	0,0030	0,0461	0,0881	13,5282
161	0,0032	0,0461	0,0891	13,5276
12461	0,0032	0,0461	0,0882	13,5284

La desviación típica a posteriori empeora con respecto a Brown, hasta el punto de quedarse en el límite de la tolerancia de 0.5 píxeles (0.0027 mm) en la mayoría de los ensayos, excepto en 7 de ellos, que la superan ligeramente. Además, el patrón de distribuciones no manifiesta ninguna tendencia, ya que los ensayos que tienen la misma desviación típica quedan ordenados (en Microsoft Excel) por el valor de la primera columna de la tabla, la de la numeración de la combinación.

Es diferente la distribución de residuos a lo largo del formato de la imagen, formando un bandeo vertical que se incrementa en valores hacia los extremos, donde se dan los mayores residuos:

Figura 5.4. Residuos en un ensayo tras corregir la distorsión según Legendre

La posición del punto principal, dada por sus componentes x e y , tampoco varían demasiado en este caso, con unas desviaciones típicas muy similares al caso de la calibración con Brown. Por su parte, el valor de la focal es menor que entonces, de aproximadamente 0,4 mm, aunque esto no supone ninguna lectura positiva ni negativa.

La desviación típica de los valores de los 34 ensayos es de 0.0035 mm, por lo que están bastante agrupados. No se manifiesta ninguna tendencia en cuanto a la distribución de profundidades en este aspecto.

Tabla 5.5. Precisiones de los parámetros internos por el método de Legendre (mm)

Combinación	Prec. x_o	Prec. y_o	Prec. f	
12345678901	0,00010	0,00011	0,00009	
2345678901	0,00010	0,00011	0,00010	
345678901	0,00010	0,00012	0,00011	
45678901	0,00011	0,00012	0,00012	
1234567890	0,00011	0,00012	0,00011	
5678901	0,00011	0,00013	0,00013	
34567890	0,00012	0,00013	0,00014	
678901	0,00012	0,00013	0,00015	
1356791	0,00012	0,00014	0,00011	
36901	0,00012	0,00014	0,00013	
123456789	0,00012	0,00014	0,00015	
78901	0,00013	0,00015	0,00019	
1201	0,00014	0,00017	0,00011	
12345678	0,00015	0,00017	0,00021	
601	0,00015	0,00018	0,00018	
8901	0,00015	0,00017	0,00024	
12461	0,00016	0,00018	0,00013	
461	0,00017	0,00020	0,00016	
1234567	0,00018	0,00020	0,00027	
161	0,00018	0,00021	0,00014	
345678	0,00018	0,00020	0,00029	
61	0,00019	0,00022	0,00019	
11	0,00020	0,00024	0,00014	
123456	0,00023	0,00025	0,00037	
12346	0,00024	0,00027	0,00039	
1356	0,00026	0,00029	0,00040	
23456	0,00027	0,00029	0,00047	
126	0,00028	0,00032	0,00040	
146	0,00028	0,00032	0,00043	
246	0,00031	0,00034	0,00052	
16	0,00032	0,00036	0,00043	
1234	0,00036	0,00038	0,00067	
567	0,00038	0,00040	0,00073	
456	0,00052	0,00053	0,00105

En cuanto a la precisión de los parámetros internos, la Tabla 5.5, ordenada según la precisión en la posición del punto principal, ofrece conclusiones similares a Brown. Siguen teniendo más precisión, para este criterio, los ensayos con más profundidades y se confirma también con Legendre que, ensayos con menor número de profundidades, pero situadas en la parte lejana del rango de profundidades, tienen precisiones comparables a los ensayos con más paneles.

También en estos ensayos el valor de la precisión de la distancia focal del 456, sobre todo, el 567 y el 1234, muy centrados los dos primeros y con cuatro profundidades, pero muy cercanos a la cámara el tercero, tienen un valor más alto que el resto. Tampoco parece determinante la dispersión de profundidades, como en Brown, volviendo a aparecer los ensayos 1201, 11 o 161, en la parte media-baja de la tabla.

En la Tabla 5.6 se muestran las precisiones de los parámetros externos, ordenados por la precisión en la obtención de las coordenadas del centro de proyección. El orden es tan similar al obtenido en Brown, que los comentarios que allí se hicieron son totalmente válidos para Legendre. Así, en cuanto a los valores que toman estos parámetros externos, siguen siendo muy homogéneos, manteniendo asimismo la misma dispersión. Los giros conservan la misma tónica de homogeneidad y gran precisión.

Siguen siendo los mejores ensayos, los que contienen más profundidades y, dentro de estos, los que se alejan más de la distancia de enfoque. Los casos de los ensayos 456 y 567, que contaban con menor precisión en el cálculo de la distancia focal, confirman la correlación entre la focal y el cálculo de la Z_0 del centro de proyección, ya que, aunque dentro de valores tolerables, se separan del resto.

Los 44 parámetros de distorsión por el método de polinomios de 4º grado de Legendre no se pueden comparar, evidentemente, con los 5 usados en el método de Brown, ni con sus precisiones. Aun así, los ensayos pueden ordenarse atendiendo, por ejemplo, a la precisión del primer parámetro, comprobándose que las precisiones del resto de parámetros quedan también ordenadas de la misma forma, excepto algunas excepciones. En este caso también se cumple que los mejores ensayos son los que contienen más profundidades y dentro de estos, los que se alejan más de la distancia de enfoque.

La extensión de la tabla desaconseja incluirla aquí, por lo que se hará por partes en el correspondiente Anexo D.

Tabla 5.6. Precisiones de los parámetros externos por el método de Legendre (mm)

Combinación	Prec. ω°	Prec. φ°	Prec. κ°	Prec. X_0	Prec. Y_0	Prec. Z_0
12345678901	0,000007	0,000006	0,000002	0,001788	0,001795	0,003940
2345678901	0,000007	0,000006	0,000002	0,001988	0,001995	0,004377
345678901	0,000008	0,000006	0,000002	0,002091	0,002100	0,004597
1234567890	0,000009	0,000007	0,000002	0,002188	0,002194	0,004828
1356791	0,000007	0,000006	0,000002	0,002230	0,002237	0,004906
1201	0,000012	0,000009	0,000003	0,002311	0,002317	0,005110
45678901	0,000011	0,000009	0,000003	0,002329	0,002338	0,005148
12461	0,000009	0,000007	0,000002	0,002511	0,002522	0,005515
34567890	0,000007	0,000006	0,000002	0,002553	0,002561	0,005609
123456789	0,000008	0,000006	0,000002	0,002693	0,002704	0,005909
5678901	0,000014	0,000011	0,000004	0,002892	0,002900	0,006396
36901	0,000009	0,000007	0,000002	0,002898	0,002906	0,006385
11	0,000008	0,000006	0,000002	0,002950	0,002959	0,006491
678901	0,000016	0,000013	0,000004	0,003082	0,003092	0,006819
161	0,000013	0,000010	0,000003	0,003354	0,003362	0,007383
461	0,000010	0,000008	0,000003	0,003371	0,003386	0,007410
601	0,000008	0,000006	0,000002	0,003534	0,003545	0,007766
12345678	0,000011	0,000009	0,000003	0,004117	0,004134	0,009066
61	0,000011	0,000008	0,000003	0,004435	0,004452	0,009752
78901	0,000008	0,000006	0,000002	0,004476	0,004489	0,009829
1234567	0,000014	0,000011	0,000004	0,004563	0,004577	0,010053
8901	0,000011	0,000008	0,000003	0,004989	0,005007	0,010938
345678	0,000012	0,000010	0,000003	0,005460	0,005483	0,012031
123456	0,000014	0,000011	0,000004	0,005701	0,005725	0,012548
12346	0,000018	0,000014	0,000005	0,005829	0,005855	0,012831
126	0,000009	0,000007	0,000002	0,006063	0,006081	0,013291
16	0,000015	0,000012	0,000004	0,006079	0,006103	0,013399
1356	0,000021	0,000016	0,000005	0,006469	0,006495	0,014260
146	0,000017	0,000013	0,000004	0,006581	0,006608	0,014506
23456	0,000013	0,000010	0,000003	0,007132	0,007165	0,015706
246	0,000017	0,000013	0,000004	0,008048	0,008089	0,017726
1234	0,000016	0,000012	0,000004	0,009209	0,009246	0,020254
567	0,000015	0,000011	0,000004	0,012879	0,012929	0,028297
456	0,000016	0,000012	0,000004	0,017192	0,017261	0,037622

No se puede incluir en estos criterios los resultados obtenidos por interpolación bicúbica, pues, como se ha dicho, los parámetros de distorsión no entran en el ajuste y, por tanto, los valores y las precisiones de los parámetros internos y externos resultantes no son comparables con los otros dos métodos. El análisis para esta metodología sólo se realizará por control estereoscópico.

5.2.2. Ensayos parciales

Las combinaciones parciales se reducen a menos de la mitad, en concreto a 15, de las efectuadas con todos los puntos. Como ya se ha explicado anteriormente, de los paneles utilizados para estos ensayos se utilizó uno de cada 2, 3, 5, 10 o 25 puntos existentes (por tanto hay 75 ensayos). Ahora se pretende principalmente comprobar la evolución de los criterios planteados ante una paulatina rebaja de puntos.

Tabla 5.7. Desviación típica a posteriori en las combinaciones parciales por el método de Brown (mm)

1/2			1/3			1/5		
Combinación	Ptos	$\hat{\sigma}_o$	Combinación	Ptos	$\hat{\sigma}_o$	Combinación	Ptos	$\hat{\sigma}_o$
16	1962	0,00100	11	1898	0,00141	11	668	0,00141
11	4160	0,00141	16	888	0,00141	16	329	0,00141
146	2998	0,00141	146	1363	0,00141	146	494	0,00141
161	5462	0,00141	1201	3505	0,00141	1201	1273	0,00141
1201	7780	0,00141	1356	1773	0,00141	1356	661	0,00141
1356	3943	0,00141	12346	2090	0,00141	12346	764	0,00141
12346	4616	0,00141	36901	4979	0,00141	36901	1810	0,00141
36901	10998	0,00141	123456	2584	0,00141	123456	956	0,00141
123456	5747	0,00141	345678	3486	0,00141	345678	1284	0,00141
345678	7696	0,00141	1234567	3297	0,00141	1234567	1222	0,00141
1234567	7311	0,00141	12345678	4122	0,00141	1234567890	2411	0,00141
12345678	9124	0,00141	123456789	5253	0,00141	12345678901	2971	0,00141
123456789	11618	0,00141	1234567890	6524	0,00141	161	889	0,00173
1234567890	14470	0,00141	12345678901	8122	0,00141	12345678	1522	0,00173
12345678901	17970	0,00141	161	2486	0,00173	123456789	1936	0,00173

1/10			1/25		
Combinación	Ptos	$\hat{\sigma}_o$	Combinación	Ptos	$\hat{\sigma}_o$
36901	508	0,00141	16	21	0,00173
11	200	0,00173	146	33	0,00173
16	98	0,00173	1356	45	0,00173
146	146	0,00173	12346	54	0,00173
1201	365	0,00173	36901	104	0,00173
1356	188	0,00173	123456	66	0,00173
12346	223	0,00173	1234567	86	0,00173
123456	271	0,00173	1201	78	0,00200
345678	369	0,00173	345678	88	0,00200
1234567	351	0,00173	12345678	106	0,00200
12345678	439	0,00173	123456789	126	0,00200
123456789	547	0,00173	1234567890	156	0,00200
1234567890	677	0,00173	12345678901	186	0,00200
12345678901	842	0,00173	11	39	0,00224
161	263	0,00200	161	51	0,00245

En la Tabla 5.7 se muestran las desviaciones típicas a posteriori ($\hat{\sigma}_o$) de los 75 ensayos parciales. La ordenación en la tabla puede resultar engañosa porque las desviaciones son las mismas en muchos de los ensayos y, para una misma desviación, el orden establecido se lleva a cabo por la numeración de la combinación. Lo que sí se puede concluir es que ningún ensayo supera la tolerancia de 0.5 píxeles (0.0027 mm). Es cierto que va disminuyendo la precisión con la reducción de puntos, pero incluso en el ensayo con menos cantidad (el 16 de 1/25 puntos), con únicamente 21 puntos, sigue dentro de la tolerancia.

Podría incluirse un umbral entre los ensayos con 1/5 puntos y los de 1/10 puntos, quedando dos grupos: un primer grupo formado por los conjuntos¹ de ensayos de 1/2, 1/3 y 1/5 puntos y un segundo grupo formado por los de 1/10 y 1/25 puntos. Uno de los mejores ensayos completos en todos los criterios fue el 12345678901, con una σ_o de 0.0014 mm. En los tres ensayos parciales del primer grupo, el 12345678901 vuelve a obtener una σ_o de 0.0014 mm, por lo tanto se desprende que para este criterio, la inclusión de más o menos puntos no tiene influencia en el resultado final.

En los ensayos parciales el criterio a analizar es el de número de puntos, pero en cada conjunto de ensayos, como se puede comprobar en las Tablas sucesivas, los criterios analizados anteriormente se comportan de la misma forma que la ya concluida.

Los valores de los parámetros internos oscilan de igual forma en todos los ensayos, de forma que si se ordenan por la distancia focal, la sucesión se repite en cada conjunto de ensayos. Se vuelve a apreciar que la variación que sufren es muy pequeña, dentro de cada uno de los dos grupos de conjuntos descritos en el párrafo anterior.

La Tabla 5.8 recoge las precisiones de los parámetros internos y externos por conjuntos de ensayos, ordenados según la precisión de la distancia focal. La secuencia de combinaciones en cada conjunto de ensayos es prácticamente la misma. Se puede observar cómo, para el criterio de la precisión de los parámetros internos sí varía con respecto del número de puntos, ya que es menor cuanto menos profundidades hay, dentro de cada conjunto de ensayos y en la sucesión de estos, despegándose a partir del conjunto de ensayos con 1/10 puntos.

¹ Para no hacer demasiado enredadas y repetitivas las explicaciones, a partir de aquí se utilizará el término *conjunto de ensayos* para hacer referencia a cada grupo de 15 ensayos con la misma reducción de puntos (1/2, 1/3, 1/5, 1/10 y 1/25).

Tabla 5.8. Precisiones de los parámetros internos y externos en las combinaciones parciales por el método de Brown (mm)

1/2									
Combinación	Prec. x_0	Prec. y_0	Prec. f	Prec. ω°	Prec. φ°	Prec. κ°	Prec. X_0	Prec. Y_0	Prec. Z_0
12345678901	0,00027	0,00020	0,00021	0,00002	0,00002	0,00000	0,00168	0,00169	0,00362
1234567890	0,00029	0,00022	0,00023	0,00002	0,00002	0,00000	0,00196	0,00197	0,00421
36901	0,00032	0,00024	0,00025	0,00002	0,00002	0,00000	0,00254	0,00255	0,00549
123456789	0,00034	0,00025	0,00027	0,00002	0,00003	0,00000	0,00241	0,00242	0,00518
1201	0,00041	0,00030	0,00030	0,00002	0,00003	0,00000	0,00212	0,00213	0,00457
12345678	0,00039	0,00029	0,00034	0,00002	0,00003	0,00000	0,00326	0,00328	0,00701
345678	0,00040	0,00031	0,00039	0,00002	0,00003	0,00000	0,00460	0,00463	0,00993
1234567	0,00043	0,00032	0,00039	0,00002	0,00003	0,00000	0,00391	0,00393	0,00842
11	0,00055	0,00039	0,00039	0,00003	0,00004	0,00000	0,00269	0,00270	0,00580
161	0,00054	0,00039	0,00039	0,00003	0,00004	0,00000	0,00278	0,00279	0,00600
123456	0,00049	0,00038	0,00049	0,00003	0,00004	0,00000	0,00519	0,00522	0,01119
12346	0,00053	0,00041	0,00052	0,00003	0,00004	0,00000	0,00535	0,00538	0,01153
1356	0,00058	0,00044	0,00055	0,00003	0,00004	0,00000	0,00569	0,00571	0,01227
16	0,00069	0,00052	0,00060	0,00004	0,00005	0,00000	0,00528	0,00531	0,01138
146	0,00064	0,00049	0,00060	0,00004	0,00005	0,00000	0,00604	0,00606	0,01302

1/3									
Combinación	Prec. x_0	Prec. y_0	Prec. f	Prec. ω°	Prec. φ°	Prec. κ°	Prec. X_0	Prec. Y_0	Prec. Z_0
12345678901	0,00041	0,00030	0,00031	0,00002	0,00003	0,00000	0,00257	0,00258	0,00551
1234567890	0,00044	0,00033	0,00035	0,00003	0,00003	0,00000	0,00301	0,00303	0,00645
36901	0,00048	0,00035	0,00037	0,00003	0,00004	0,00000	0,00380	0,00381	0,00812
123456789	0,00051	0,00038	0,00042	0,00003	0,00004	0,00000	0,00371	0,00372	0,00791
1201	0,00061	0,00045	0,00045	0,00003	0,00005	0,00000	0,00323	0,00325	0,00693
12345678	0,00058	0,00044	0,00051	0,00003	0,00004	0,00000	0,00497	0,00499	0,01061
345678	0,00060	0,00046	0,00058	0,00003	0,00004	0,00000	0,00697	0,00700	0,01485
1234567	0,00065	0,00049	0,00060	0,00004	0,00005	0,00000	0,00606	0,00609	0,01297
11	0,00083	0,00060	0,00060	0,00005	0,00006	0,00001	0,00415	0,00417	0,00888
161	0,00083	0,00060	0,00061	0,00005	0,00006	0,00001	0,00437	0,00439	0,00936
123456	0,00075	0,00058	0,00075	0,00004	0,00005	0,00001	0,00808	0,00812	0,01735
12346	0,00080	0,00062	0,00079	0,00004	0,00006	0,00001	0,00821	0,00825	0,01762
1356	0,00091	0,00069	0,00087	0,00005	0,00007	0,00001	0,00906	0,00910	0,01940
146	0,00096	0,00074	0,00091	0,00005	0,00007	0,00001	0,00925	0,00929	0,01979
16	0,00115	0,00087	0,00100	0,00006	0,00008	0,00001	0,00897	0,00901	0,01917

Tabla 5.8. Precisiones de los parámetros internos y externos en las combinaciones parciales por el método de Brown (mm). (Continuación)

1/5									
Combinación	Prec. x_0	Prec. y_0	Prec. f	Prec. ω°	Prec. φ°	Prec. κ°	Prec. X_0	Prec. Y_0	Prec. Z_0
12345678901	0,00068	0,00051	0,00054	0,00004	0,00005	0,00000	0,00448	0,00449	0,00948
1234567890	0,00074	0,00056	0,00061	0,00004	0,00006	0,00001	0,00526	0,00528	0,01108
36901	0,00079	0,00059	0,00062	0,00004	0,00006	0,00001	0,00653	0,00654	0,01380
123456789	0,00085	0,00064	0,00072	0,00005	0,00006	0,00001	0,00649	0,00651	0,01367
1201	0,00104	0,00077	0,00077	0,00006	0,00008	0,00001	0,00563	0,00565	0,01186
12345678	0,00097	0,00074	0,00087	0,00005	0,00007	0,00001	0,00869	0,00873	0,01827
345678	0,00101	0,00078	0,00100	0,00005	0,00007	0,00001	0,01222	0,01225	0,02584
1234567	0,00105	0,00081	0,00100	0,00006	0,00008	0,00001	0,01036	0,01040	0,02175
161	0,00142	0,00103	0,00104	0,00008	0,00011	0,00001	0,00760	0,00762	0,01619
11	0,00147	0,00106	0,00104	0,00008	0,00011	0,00001	0,00738	0,00740	0,01563
123456	0,00122	0,00095	0,00126	0,00007	0,00009	0,00001	0,01376	0,01382	0,02896
12346	0,00130	0,00102	0,00132	0,00007	0,00009	0,00001	0,01392	0,01398	0,02928
1356	0,00146	0,00113	0,00146	0,00008	0,00011	0,00001	0,01553	0,01558	0,03273
146	0,00157	0,00121	0,00151	0,00009	0,00011	0,00001	0,01573	0,01580	0,03311
16	0,00188	0,00143	0,00170	0,00010	0,00014	0,00001	0,01554	0,01560	0,03268

1/10									
Combinación	Prec. x_0	Prec. y_0	Prec. f	Prec. ω°	Prec. φ°	Prec. κ°	Prec. X_0	Prec. Y_0	Prec. Z_0
12345678901	0,00129	0,00097	0,00114	0,00007	0,00010	0,00001	0,00942	0,00946	0,01869
36901	0,00144	0,00108	0,00124	0,00008	0,00011	0,00001	0,01277	0,01283	0,02543
1234567890	0,00140	0,00107	0,00128	0,00008	0,00010	0,00001	0,01107	0,01113	0,02191
123456789	0,00159	0,00122	0,00152	0,00009	0,00012	0,00001	0,01366	0,01373	0,02699
1201	0,00202	0,00150	0,00168	0,00011	0,00015	0,00001	0,01200	0,01205	0,02340
12345678	0,00178	0,00138	0,00181	0,00010	0,00013	0,00001	0,01785	0,01793	0,03476
1234567	0,00186	0,00146	0,00197	0,00010	0,00014	0,00001	0,02035	0,02042	0,03963
345678	0,00185	0,00145	0,00203	0,00010	0,00013	0,00001	0,02502	0,02518	0,04950
161	0,00263	0,00195	0,00222	0,00015	0,00020	0,00002	0,01567	0,01572	0,03073
11	0,00285	0,00209	0,00234	0,00016	0,00022	0,00002	0,01582	0,01587	0,03062
123456	0,00223	0,00178	0,00252	0,00012	0,00016	0,00002	0,02797	0,02809	0,05460
12346	0,00236	0,00188	0,00266	0,00013	0,00017	0,00002	0,02833	0,02846	0,05534
1356	0,00265	0,00209	0,00287	0,00014	0,00019	0,00002	0,03064	0,03076	0,05954
146	0,00285	0,00226	0,00305	0,00016	0,00021	0,00002	0,03165	0,03174	0,06114
16	0,00354	0,00277	0,00361	0,00020	0,00026	0,00002	0,03273	0,03282	0,06323

Tabla 5.8. Precisiones de los parámetros internos y externos en las combinaciones parciales por el método de Brown (mm). (Continuación)

1/25									
Combinación	Prec. x_0	Prec. y_0	Prec. f	Prec. ω°	Prec. φ°	Prec. κ°	Prec. X_0	Prec. Y_0	Prec. Z_0
12345678901	0,00258	0,00201	0,00318	0,00015	0,00019	0,00002	0,02352	0,02362	0,04063
36901	0,00305	0,00234	0,00340	0,00018	0,00023	0,00002	0,03172	0,03179	0,05464
1234567890	0,00267	0,00212	0,00350	0,00016	0,00020	0,00002	0,02661	0,02670	0,04543
123456789	0,00299	0,00240	0,00410	0,00018	0,00022	0,00002	0,03332	0,03335	0,05608
1234567	0,00299	0,00248	0,00444	0,00017	0,00022	0,00002	0,04108	0,04114	0,06907
12345678	0,00333	0,00272	0,00481	0,00019	0,00024	0,00003	0,04186	0,04198	0,07069
1201	0,00390	0,00297	0,00484	0,00023	0,00030	0,00003	0,02780	0,02800	0,04726
345678	0,00377	0,00310	0,00509	0,00021	0,00027	0,00003	0,06061	0,06091	0,10412
123456	0,00355	0,00303	0,00573	0,00019	0,00024	0,00003	0,05755	0,05746	0,09661
12346	0,00366	0,00313	0,00620	0,00020	0,00025	0,00003	0,05788	0,05779	0,09769
161	0,00568	0,00432	0,00665	0,00033	0,00043	0,00004	0,04080	0,04112	0,07059
1356	0,00430	0,00362	0,00668	0,00024	0,00030	0,00003	0,06440	0,06426	0,10791
146	0,00453	0,00381	0,00705	0,00026	0,00033	0,00003	0,06484	0,06478	0,10884
11	0,00630	0,00471	0,00736	0,00036	0,00048	0,00005	0,04012	0,04050	0,06830
16	0,00622	0,00516	0,01053	0,00036	0,00046	0,00005	0,07478	0,07488	0,12653

Similar lectura se puede hacer para las precisiones de los datos externos, ya que va decreciendo la precisión con el empobrecimiento de número de puntos y es en el conjunto de ensayos con 1/10 puntos donde da un salto más sustancial: resultados, por tanto, bastante homogéneos en esta parte del análisis.

Tabla 5.9. Precisiones del primer coeficiente de distorsión radial en las combinaciones parciales por el método de Brown (mm)

Combinación	1/2	1/3	1/5	1/10	1/25
12345678901	0,000001	0,000001	0,000002	0,000005	0,000012
36901	0,000001	0,000002	0,000003	0,000005	0,000013
1234567890	0,000001	0,000001	0,000002	0,000005	0,000013
123456789	0,000001	0,000002	0,000003	0,000006	0,000015
1234567	0,000001	0,000002	0,000003	0,000007	0,000016
345678	0,000001	0,000002	0,000003	0,000006	0,000018
12345678	0,000001	0,000002	0,000003	0,000006	0,000018
1201	0,000001	0,000002	0,000003	0,000007	0,000019
123456	0,000002	0,000002	0,000004	0,000008	0,000019
12346	0,000002	0,000003	0,000004	0,000008	0,000020
1356	0,000002	0,000003	0,000005	0,000009	0,000023
146	0,000002	0,000003	0,000005	0,000010	0,000024
161	0,000002	0,000003	0,000004	0,000009	0,000027
11	0,000002	0,000003	0,000005	0,000010	0,000030
16	0,000002	0,000004	0,000006	0,000013	0,000037

Tabla 5.10. Precisiones del primer coeficiente de distorsión tangencial en las combinaciones parciales por el método de Brown (mm)

Combinación	1/2	1/3	1/5	1/10	1/25
12345678901	0,000000	0,000001	0,000001	0,000002	0,000005
36901	0,000001	0,000001	0,000001	0,000003	0,000006
1234567890	0,000001	0,000001	0,000001	0,000003	0,000005
123456789	0,000001	0,000001	0,000002	0,000003	0,000006
1234567	0,000001	0,000001	0,000002	0,000003	0,000006
345678	0,000001	0,000001	0,000002	0,000003	0,000007
12345678	0,000001	0,000001	0,000002	0,000003	0,000007
1201	0,000001	0,000001	0,000002	0,000004	0,000008
123456	0,000001	0,000001	0,000002	0,000004	0,000007
12346	0,000001	0,000001	0,000002	0,000004	0,000007
1356	0,000001	0,000002	0,000003	0,000005	0,000008
146	0,000001	0,000002	0,000003	0,000005	0,000009
161	0,000001	0,000001	0,000003	0,000005	0,000011
11	0,000001	0,000001	0,000003	0,000005	0,000012
16	0,000001	0,000002	0,000003	0,000007	0,000013

Las precisiones de los coeficientes de la función de distorsión, tanto la radial como la tangencial, también decrecen con la disminución de puntos y se vuelve a establecer un umbral en el conjunto de ensayos con 1/10 puntos.

A continuación se analizan los ensayos parciales con la inclusión de la función de distorsión por polinomios de Legendre de 4º grado. Siguiendo el mismo guion que en los análisis de los ensayos precedentes, aparece en primer lugar la Tabla 5.11 donde se muestran las desviaciones típicas a posteriori ($\hat{\sigma}_o$) de los 75 ensayos parciales correspondientes. Ningún ensayo entra en la tolerancia de 0.5 píxeles (0.0027 mm). La evolución que comenzó con los ensayos completos se cumple perfectamente, reduciéndose la precisión con la disminución de puntos.

Se produce una serie de resultados inesperados en el conjunto de ensayos con 1/25 puntos: a los problemas de inconsistencia numérica en uno de ellos y la no convergencia de otros cuatro, se une el hecho de que, para el resto, mejoran los resultados de los anteriores conjuntos de ensayos, cuando la progresión de reducción de puntos hacía presagiar resultados peores. No se encuentra razonamiento lógico, incluso tras la revisión de los residuos, que se mantienen en los valores esperados, por lo que se puede achacar a una insistencia numérica en el cálculo, en el que en las iteraciones se produce una matriz casi singular y el consiguiente aviso de posible pérdida de precisión.

Tabla 5.11. Desviación típica a posteriori en las combinaciones parciales por el método de Legendre (mm)

1/2			1/3			1/5		
Combinación	Ptos	$\hat{\sigma}_o$	Combinación	Ptos	$\hat{\sigma}_o$	Combinación	Ptos	$\hat{\sigma}_o$
16	1962	0,00300	16	888	0,00316	1234567	1222	0,00316
146	2998	0,00300	146	1363	0,00316	16	329	0,00332
1356	3943	0,00300	1201	3505	0,00316	146	494	0,00332
12346	4616	0,00300	1356	1773	0,00316	1201	1273	0,00332
123456	5747	0,00300	12346	2090	0,00316	1356	661	0,00332
345678	7696	0,00300	36901	4979	0,00316	12346	764	0,00332
1234567	7311	0,00300	123456	2584	0,00316	36901	1810	0,00332
12345678	9124	0,00300	345678	3486	0,00316	123456	956	0,00332
123456789	11618	0,00300	1234567	3297	0,00316	345678	1284	0,00332
1234567890	14470	0,00300	12345678	4122	0,00316	12345678	1522	0,00332
11	4160	0,00316	123456789	5253	0,00316	123456789	1936	0,00332
1201	7780	0,00316	1234567890	6524	0,00316	1234567890	2411	0,00332
36901	10998	0,00316	12345678901	8122	0,00316	12345678901	2971	0,00332
12345678901	17970	0,00316	11	1898	0,00332	11	668	0,00346
161	5462	0,00332	161	2486	0,00332	161	889	0,00346

1/10			1/25		
Combinación	Ptos	$\hat{\sigma}_o$	Combinación	Ptos	$\hat{\sigma}_o$
12346	223	0,00316	16	21	Inconsistente
123456	271	0,00316	146	33	No converge
1356	188	0,00332	12346	54	No converge
1234567	351	0,00332	1356	45	No converge
146	146	0,00346	123456	66	No converge
36901	508	0,00346	1234567	86	0,00224
345678	369	0,00346	12345678	106	0,00265
12345678	439	0,00346	345678	88	0,00283
123456789	547	0,00346	123456789	126	0,00283
1234567890	677	0,00346	1201	78	0,00300
1201	365	0,00361	1234567890	156	0,00316
12345678901	842	0,00361	12345678901	186	0,00316
16	98	0,00374	36901	104	0,00332
161	263	0,00387	11	39	0,00374
11	200	0,00400	161	51	0,00374

La Tabla 5.12 recoge las precisiones de los parámetros internos y externos por conjuntos de ensayos, ordenados según la precisión de la distancia focal. Como ocurría anteriormente, se puede observar cómo, para el criterio de la precisión de los parámetros internos, esta varía con respecto del número de puntos.

Tabla 5.12. Precisiones de los parámetros internos y externos en las combinaciones parciales por el método de Legendre (mm)

1/2									
Combinación	Prec. x_0	Prec. y_0	Prec. f	Prec. ω°	Prec. φ°	Prec. κ°	Prec. X_0	Prec. Y_0	Prec. Z_0
12345678901	0,00019	0,00022	0,00019	0,00001	0,00001	0,00000	0,00373	0,00375	0,00805
1201	0,00029	0,00034	0,00023	0,00002	0,00002	0,00001	0,00490	0,00492	0,01055
1234567890	0,00021	0,00025	0,00023	0,00002	0,00001	0,00000	0,00434	0,00436	0,00933
36901	0,00025	0,00029	0,00027	0,00002	0,00001	0,00001	0,00617	0,00619	0,01331
161	0,00036	0,00043	0,00029	0,00003	0,00002	0,00001	0,00606	0,00607	0,01311
11	0,00041	0,00049	0,00029	0,00003	0,00003	0,00001	0,00651	0,00652	0,01404
123456789	0,00025	0,00028	0,00029	0,00002	0,00001	0,00001	0,00519	0,00521	0,01115
12345678	0,00030	0,00034	0,00042	0,00002	0,00002	0,00001	0,00691	0,00694	0,01483
1234567	0,00036	0,00039	0,00053	0,00002	0,00002	0,00001	0,00847	0,00851	0,01821
345678	0,00037	0,00040	0,00058	0,00002	0,00002	0,00001	0,01027	0,01031	0,02206
123456	0,00045	0,00049	0,00074	0,00002	0,00002	0,00001	0,01117	0,01122	0,02399
12346	0,00049	0,00053	0,00079	0,00003	0,00002	0,00001	0,01174	0,01179	0,02521
1356	0,00051	0,00057	0,00081	0,00003	0,00002	0,00001	0,01252	0,01257	0,02691
16	0,00064	0,00072	0,00087	0,00004	0,00003	0,00001	0,01343	0,01348	0,02887
146	0,00058	0,00063	0,00088	0,00003	0,00003	0,00001	0,01367	0,01372	0,02938

1/3									
Combinación	Prec. x_0	Prec. y_0	Prec. f	Prec. ω°	Prec. φ°	Prec. κ°	Prec. X_0	Prec. Y_0	Prec. Z_0
12345678901	0,00029	0,00033	0,00028	0,00002	0,00002	0,00001	0,00564	0,00566	0,01207
1201	0,00042	0,00050	0,00034	0,00003	0,00003	0,00001	0,00730	0,00733	0,01566
1234567890	0,00032	0,00037	0,00035	0,00002	0,00002	0,00001	0,00661	0,00664	0,01412
36901	0,00037	0,00043	0,00039	0,00003	0,00002	0,00001	0,00908	0,00910	0,01936
11	0,00059	0,00070	0,00043	0,00005	0,00004	0,00001	0,00970	0,00972	0,02073
161	0,00053	0,00063	0,00043	0,00004	0,00003	0,00001	0,00910	0,00912	0,01950
123456789	0,00037	0,00043	0,00045	0,00003	0,00002	0,00001	0,00797	0,00800	0,01698
12345678	0,00046	0,00052	0,00064	0,00003	0,00002	0,00001	0,01069	0,01074	0,02278
1234567	0,00054	0,00060	0,00081	0,00003	0,00003	0,00001	0,01301	0,01306	0,02775
345678	0,00056	0,00062	0,00089	0,00003	0,00002	0,00001	0,01582	0,01589	0,03358
123456	0,00069	0,00075	0,00114	0,00004	0,00003	0,00001	0,01739	0,01746	0,03716
12346	0,00075	0,00081	0,00121	0,00004	0,00003	0,00001	0,01817	0,01824	0,03880
1356	0,00079	0,00087	0,00125	0,00004	0,00004	0,00001	0,01937	0,01944	0,04131
16	0,00098	0,00109	0,00134	0,00006	0,00005	0,00002	0,02083	0,02090	0,04441
146	0,00088	0,00096	0,00134	0,00005	0,00004	0,00001	0,02101	0,02109	0,04481

Tabla 5.12. Precisiones de los parámetros internos y externos en las combinaciones parciales por el método de Legendre (mm). (Continuación)

1/5									
Combinación	Prec. x_0	Prec. y_0	Prec. f	Prec. ω°	Prec. φ°	Prec. κ°	Prec. X_0	Prec. Y_0	Prec. Z_0
12345678901	0,00049	0,00056	0,00049	0,00004	0,00003	0,00001	0,00982	0,00983	0,02074
1201	0,00072	0,00084	0,00058	0,00006	0,00004	0,00002	0,01262	0,01265	0,02655
1234567890	0,00055	0,00063	0,00060	0,00004	0,00003	0,00001	0,01150	0,01153	0,02415
36901	0,00064	0,00073	0,00068	0,00005	0,00004	0,00001	0,01589	0,01588	0,03349
11	0,00105	0,00124	0,00077	0,00008	0,00007	0,00002	0,01714	0,01717	0,03625
161	0,00093	0,00108	0,00077	0,00007	0,00006	0,00002	0,01605	0,01606	0,03413
123456789	0,00064	0,00073	0,00077	0,00004	0,00003	0,00001	0,01391	0,01395	0,02921
12345678	0,00079	0,00088	0,00110	0,00005	0,00004	0,00001	0,01868	0,01874	0,03909
1234567	0,00092	0,00101	0,00137	0,00005	0,00004	0,00002	0,02240	0,02247	0,04679
345678	0,00098	0,00108	0,00155	0,00005	0,00004	0,00002	0,02805	0,02807	0,05875
123456	0,00118	0,00127	0,00192	0,00006	0,00005	0,00002	0,02992	0,03002	0,06257
12346	0,00129	0,00139	0,00205	0,00007	0,00005	0,00002	0,03143	0,03153	0,06576
1356	0,00136	0,00148	0,00213	0,00007	0,00006	0,00002	0,03383	0,03392	0,07083
146	0,00153	0,00168	0,00232	0,00009	0,00007	0,00002	0,03698	0,03711	0,07748
16	0,00172	0,00192	0,00235	0,00011	0,00008	0,00003	0,03734	0,03747	0,07823

1/10									
Combinación	Prec. x_0	Prec. y_0	Prec. f	Prec. ω°	Prec. φ°	Prec. κ°	Prec. X_0	Prec. Y_0	Prec. Z_0
12345678901	0,00097	0,00111	0,00092	0,00007	0,00006	0,00002	0,01978	0,01983	0,03902
1201	0,00143	0,00166	0,00109	0,00011	0,00009	0,00003	0,02591	0,02597	0,05024
1234567890	0,00109	0,00125	0,00114	0,00008	0,00006	0,00002	0,02300	0,02308	0,04528
36901	0,00125	0,00142	0,00126	0,00009	0,00007	0,00003	0,03140	0,03146	0,06212
161	0,00180	0,00210	0,00143	0,00014	0,00011	0,00004	0,03251	0,03253	0,06353
123456789	0,00129	0,00145	0,00146	0,00009	0,00007	0,00003	0,02788	0,02797	0,05477
11	0,00207	0,00243	0,00148	0,00016	0,00013	0,00005	0,03610	0,03612	0,06956
12345678	0,00155	0,00172	0,00195	0,00010	0,00008	0,00003	0,03591	0,03602	0,06948
1234567	0,00173	0,00191	0,00235	0,00010	0,00008	0,00003	0,04136	0,04146	0,08000
345678	0,00193	0,00208	0,00280	0,00010	0,00008	0,00003	0,05424	0,05440	0,10618
123456	0,00215	0,00233	0,00321	0,00011	0,00009	0,00003	0,05369	0,05385	0,10402
12346	0,00233	0,00254	0,00344	0,00012	0,00010	0,00004	0,05663	0,05680	0,10976
1356	0,00249	0,00272	0,00357	0,00014	0,00011	0,00004	0,06073	0,06089	0,11727
146	0,00293	0,00324	0,00408	0,00017	0,00013	0,00005	0,07024	0,07042	0,13492
16	0,00348	0,00392	0,00441	0,00022	0,00017	0,00006	0,07528	0,07548	0,14476

Comparadas las precisiones de los datos internos de Brown y de Legendre para ensayos parciales son bastante similares e incluso los mejores resultados de Legendre superan a los mejores de Brown, aunque con los peores de uno y otro, ocurre lo contrario, se puede decir, por tanto, que Brown es más homogéneo que Legendre en ese aspecto. Los parámetros externos tienen dos lecturas: las precisiones de los giros son ligeramente mejores en Legendre y las de la posición del centro de proyección, claramente mejores en Brown.

Finalmente, la precisión de los coeficientes de distorsión es difícil de interpretar, precisamente porque son coeficientes, por lo que los valores que toman y sus precisiones no se pueden comparar con otros al no tener unidades.

5.2.3. Ensayos mixtos

En el análisis de las precisiones de los parámetros, se añadieron 8 ensayos, denominados mixtos porque mezclan un panel completo, el 6 o el 11, con varios parciales con 1/25 puntos. Se buscaba tener un panel completo que, gracias a su gran cantidad de puntos posibilitara una buena definición de la distorsión y una cantidad menor de puntos de otras profundidades para la obtención con garantías de los parámetros internos. La nomenclatura se compone de 2 grupos de cifras separados por una barra baja: el primer grupo se refiere a los paneles con 1/25 puntos y el segundo, al panel completo; así el ensayo 123456789_11 incluye las profundidades 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 con 1/25 puntos y el panel 11 completo.

Tabla 5.13. Parámetros internos en las combinaciones mixtas por el método de Brown (mm)

Combinación	Ptos	$\hat{\sigma}_o$	x_o	y_o	f
1234567890_11	13818	0,0010	0,0528	0,1148	13,9599
135679_11	13747	0,0010	0,0527	0,1149	13,9593
16_11	13683	0,0010	0,0516	0,1146	13,9602
78901_6	5122	0,0010	0,0493	0,1197	13,9648
890_11	13732	0,0010	0,0439	0,114	13,9619
01_6	5062	0,0010	0,0481	0,1187	13,9668
12345_6	5056	0,0010	0,0474	0,1008	13,9789
135_6	5035	0,0010	0,0454	0,1011	13,9754

La Tabla 5.13 está ordenada según la desviación típica a posteriori ($\hat{\sigma}_o$) de los residuos de cada ajuste. Como son todas iguales, se ha incluido como segundo campo de ordenación la precisión de la distancia focal, que se verá a continuación. La desviación obtenida es la menor recogida en todos los ensayos anteriores.

Tabla 5.14. Precisiones de los parámetros internos y externos en las combinaciones mixtas por el método de Brown (mm)

Combinación	Prec. x_o	Prec. y_o	Prec. f	Prec. ω°	Prec. φ°	Prec. κ°	Prec. X_0	Prec. Y_0	Prec. Z_0
1234567890_11	0,00025	0,00019	0,00023	0,00001	0,00002	0,00000	0,00689	0,00697	0,01226
135679_11	0,00026	0,00021	0,00027	0,00001	0,00002	0,00000	0,00829	0,00838	0,01462
16_11	0,00028	0,00025	0,00035	0,00001	0,00002	0,00000	0,01188	0,01207	0,02053
78901_6	0,00049	0,00043	0,00073	0,00002	0,00003	0,00000	0,01280	0,01274	0,02465
890_11	0,00040	0,00039	0,00075	0,00001	0,00002	0,00000	0,02167	0,02272	0,04627
01_6	0,00051	0,00045	0,00079	0,00002	0,00003	0,00000	0,01382	0,01379	0,02678
12345_6	0,00064	0,00061	0,00104	0,00002	0,00003	0,00000	0,01964	0,02027	0,03819
135_6	0,00071	0,00069	0,00122	0,00002	0,00003	0,00000	0,02301	0,02379	0,04495

La Tabla 5.14 está ordenada según la precisión de la distancia focal. Definitivamente, se comprueba que tienen más precisión, en este criterio, los ensayos con más profundidades y que son mejores los que incorporan paneles situados en la parte lejana del rango de profundidades.

Parece más determinante, para este criterio, cubrir más profundidades que la propia dispersión de las mismas, ya que para un número de puntos similar, responden mejor los que ocupan más profundidades.

Por último, la precisión de los coeficientes de distorsión está por debajo de la milésima de micra en todos los casos. No se puede extraer ninguna conclusión.

En cuanto a los ensayos mixtos con el método de polinomios de Legendre, en la Tabla 5.15 se incluyen los parámetros internos ordenados por la desviación típica a posteriori ($\hat{\sigma}_o$). Esta vuelve a ser igual en todos los ensayos, pero mayor que en los ensayos por Brown, como venía ocurriendo anteriormente.

Tabla 5.15. Parámetros internos en las combinaciones mixtas por el método de Legendre (mm)

Combinación	Ptos	$\hat{\sigma}_o$	x_o	y_o	f
1234567890_11	13818	0,0028	0,0450	0,0899	13,5240
135679_11	13747	0,0028	0,0453	0,0899	13,5238
16_11	13683	0,0028	0,0460	0,0897	13,5267
78901_6	5122	0,0028	0,0481	0,0956	13,5662
01_6	5062	0,0028	0,0462	0,0950	13,5636
890_11	13732	0,0028	0,0392	0,0944	13,4993
12345_6	5056	0,0028	0,0478	0,0777	13,5055
135_6	5035	0,0028	0,0492	0,0779	13,5048

Tabla 5.16. Precisiones de los parámetros internos y externos en las combinaciones mixtas por el método de Legendre (mm)

Combinación	Prec. x_o	Prec. y_o	Prec. f	Prec. ω°	Prec. φ°	Prec. κ°	Prec. X_0	Prec. Y_0	Prec. Z_0
1234567890_11	0,00039	0,00041	0,00059	0,00002	0,00001	0,00000	0,02232	0,02231	0,03695
135679_11	0,00046	0,00048	0,00071	0,00002	0,00001	0,00000	0,02703	0,02701	0,04471
16_11	0,00065	0,00066	0,00101	0,00002	0,00001	0,00000	0,03992	0,03990	0,06437
78901_6	0,00098	0,00100	0,00169	0,00003	0,00002	0,00001	0,03511	0,03511	0,06507
01_6	0,00106	0,00108	0,00186	0,00003	0,00002	0,00001	0,03833	0,03834	0,07169
890_11	0,00131	0,00131	0,00228	0,00002	0,00001	0,00001	0,08291	0,08291	0,14564
12345_6	0,00165	0,00165	0,00264	0,00003	0,00002	0,00001	0,06229	0,06230	0,10036
135_6	0,00195	0,00196	0,00313	0,00003	0,00002	0,00001	0,07385	0,07384	0,11918

Comparadas las precisiones de los datos internos de Brown y de Legendre para ensayos parciales, son peores resultados los de Legendre, afectándole más a este método la pérdida de puntos en el resto de profundidades. En los parámetros externos se vuelve a producir que las precisiones de los giros son ligeramente mejores en Legendre y las de la posición del centro de proyección, claramente mejores en Brown.

5.2.4. Otros ensayos

Para finalizar el análisis de las precisiones se añadió una serie de ensayos que introducen alguna circunstancia diferente a las ya probadas. En concreto, se incluyeron los siguientes: dos ensayos por el método de Brown, con un coeficiente de distorsión radial más; dos ensayos por el método de Legendre con polinomios de 6º grado y por

último, 9 ensayos con reducción de la precisión en las coordenadas en el sistema de referencia objeto de los puntos, eliminando cifras decimales.

En la Tabla 5.17 se recoge la comparativa de los cuatro primeros ensayos realizados en este apartado, con sus anteriores ensayos correspondientes. La tabla se estructura en dos secciones: una primera para la desviación típica a posteriori y los datos internos, y una segunda para los datos externos. Dentro de cada sección se separan los ensayos mejorados de los anteriores. La columna “Método” hace referencia al método de cálculo de la distorsión y el número de coeficientes para la distorsión radial y tangencial (4r 2t) en un caso, o el grado del polinomio de Legendre (6) en el otro.

Tabla 5.17. Precisiones de los parámetros internos y externos en los ensayos de mejora de los coeficientes de distorsión (mm)

Método	Combinación	$\hat{\sigma}_o$	Prec. x_o	Prec. y_o	Prec. f
Brown – 4r 2t	61	0,0010	0,00021	0,00015	0,00021
Brown – 4r 2t	2-12345678901	0,0014	0,00027	0,00020	0,00029
Legendre - 6	12345678901	0,0014	0,00004	0,00005	0,00004
Legendre - 6	3-161	0,0014	0,00024	0,00029	0,00019
Brown – 3r 2t	61	0,0010	0,00021	0,00015	0,00016
Brown – 3r 2t	2-12345678901	0,0014	0,00027	0,00020	0,00021
Legendre - 4	12345678901	0,0030	0,00010	0,00011	0,00009
Legendre - 4	3-161	0,0033	0,00053	0,00063	0,00043

Método	Combinación	Prec. ω°	Prec. φ°	Prec. κ°	Prec. X_o	Prec. Y_o	Prec. Z_o
Brown – 4r 2t	61	0,00001	0,00002	0,00000	0,00163	0,00164	0,00359
Brown – 4r 2t	2-12345678901	0,00002	0,00002	0,00000	0,00166	0,00166	0,00357
Legendre - 6	12345678901	0,00000	0,00000	0,00000	0,00077	0,00077	0,00169
Legendre - 6	3-161	0,00002	0,00002	0,00001	0,00405	0,00406	0,00871
Brown – 3r 2t	61	0,00001	0,00002	0,00000	0,00167	0,00167	0,00367
Brown – 3r 2t	2-12345678901	0,00002	0,00002	0,00000	0,00168	0,00169	0,00362
Legendre - 4	12345678901	0,00001	0,00001	0,00000	0,00179	0,00180	0,00394
Legendre - 4	3-161	0,00004	0,00003	0,00001	0,00910	0,00912	0,01950

El método de Brown no sufre mejoría con la introducción de un parámetro más en distorsión radial y prácticamente se dan los mismos resultados de precisión. Se pensó en haber añadido algún parámetro a la distorsión por descentrado, pero se desestimó por su bajo aporte a partir del tercer coeficiente y sucesivos, que son además, de corte radial más que tangencial.

Diferente es el caso con los polinomios de Legendre de 6º grado, donde todos los parámetros, en los dos ensayos probados, elevan aproximadamente al doble la precisión.

En el segundo grupo de ensayos se reduce la precisión en las coordenadas en el sistema de referencia objeto de los puntos, eliminando cifras decimales. Los 9 ensayos realizados se estructuran en tres reducciones (dejando las coordenadas objeto con 2, 1 y ningún decimal) de los ensayos utilizados en la anterior prueba, uno por cada metodología.

La Tabla 5.18 recoge únicamente los resultados de las metodologías de Brown y de Legendre, como ha venido ocurriendo hasta aquí por las razones ya expuestas. La nomenclatura seguida es similar a la del anterior apartado, pero incluyendo en la columna “Método” una cifra que hace referencia al número de decimales de las coordenadas objeto. Se incluyen los resultados de los ensayos con las tres cifras decimales originales en las dos últimas filas de cada sección de la tabla.

Tabla 5.18. Precisiones de los parámetros internos y externos en los ensayos de pérdida de precisión en las coordenadas objeto (mm)

Método	Combinación	$\hat{\sigma}_o$	Prec. x_o	Prec. y_o	Prec. f
Brown – 3r 2t - 0	2-12345678901	0,0075	0,00139	0,00102	0,00106
Legendre – 4 - 0	3-161	0,0063	0,00100	0,00118	0,00082
Brown – 3r 2t - 1	2-12345678901	0,0017	0,00030	0,00022	0,00023
Legendre – 4 - 1	3-161	0,0035	0,00054	0,00064	0,00044
Brown – 3r 2t - 2	2-12345678901	0,0014	0,00027	0,00020	0,00021
Legendre – 4 - 2	3-161	0,0033	0,00053	0,00063	0,00043
Brown – 3r 2t - 3	2-12345678901	0,0014	0,00027	0,00020	0,00021
Legendre – 4 - 3	3-161	0,0033	0,00053	0,00063	0,00043

Método	Combinación	Prec. ω°	Prec. φ°	Prec. κ°	Prec. X_o	Prec. Y_o	Prec. Z_o
Brown – 3r 2t - 0	2-12345678901	0,00008	0,00010	0,00001	0,00865	0,00869	0,01866
Legendre – 4 - 0	3-161	0,00008	0,00006	0,00002	0,01715	0,01719	0,03677
Brown – 3r 2t - 1	2-12345678901	0,00002	0,00002	0,00000	0,00187	0,00188	0,00404
Legendre – 4 - 1	3-161	0,00004	0,00003	0,00001	0,00925	0,00927	0,01983
Brown – 3r 2t - 2	2-12345678901	0,00002	0,00002	0,00000	0,00168	0,00169	0,00363
Legendre – 4 - 2	3-161	0,00004	0,00003	0,00001	0,00909	0,00912	0,01950
Brown – 3r 2t - 3	2-12345678901	0,00002	0,00002	0,00000	0,00168	0,00169	0,00362
Legendre – 4 - 3	3-161	0,00004	0,00003	0,00001	0,00910	0,00912	0,01950

Los resultados que arroja este criterio son claros en los ensayos con 2 decimales: son prácticamente iguales que los de 3 decimales, algo esperado cuando se midieron los puntos en el sistema objeto con una tolerancia de 80 μm . Incluso con 1 decimal, las variaciones encontradas en todas las precisiones comparadas son del orden de décimas micra, por tanto prácticamente despreciables.

Donde realmente es importante la diferencia es en los ensayos sin cifras decimales, siendo las precisiones evaluadas aproximadamente la mitad, para los ensayos por Legendre y la quinta parte para los ensayos por Brown.

5.3. Análisis del control estereoscópico

La segunda de las evaluaciones realizadas se basó en un control estereoscópico, utilizando los pares estereoscópicos de las imágenes tomadas del panel test. El proceso fue el siguiente:

- *Obtención de fotocoordenadas.* Es la fase fotogramétrica de la *Orientación Interna*. Partiendo de las coordenadas píxel de las cruces del panel test en cada imagen, se corrigen los errores sistemáticos aplicando los parámetros internos obtenidos en cada ensayo. De esta forma se contó con un juego de fotocoordenadas diferentes de cada imagen test, para cada ensayo seleccionado, ya que para esta evaluación se eligieron únicamente los ensayos que arrojaron los mejores resultados en la evaluación de precisiones.
- *Orientación fotogramétrica.* Esta fase corresponde a la *Orientación Relativa*. Para realizarla se contó con el programa “*Taller Fotogramétrico*”, del profesor Francisco J. García Lázaro, desarrollado como parte del material didáctico de las asignaturas de la Unidad Docente de Fotogrametría de la E.T.S.I. en Topografía, Geodesia y Cartografía de la Universidad Politécnica de Madrid. Se trata de un programa de cálculos fotogramétricos sin interfaz gráfica de medida. Es idóneo para realizar los cálculos de las fases fotogramétricas paso a paso, como es el caso de esta fase de la tesis.

De esta fase se obtuvieron coordenadas de las 15 cruces de control (puntos de apoyo) del panel test, en el sistema de referencia modelo y, más importante, los parámetros de orientación externa de las dos imágenes que conforman el par, en ese sistema de referencia de coordenadas modelo.

- *Materialización de las intersecciones de rayos homólogos de las cruces.* Mediante el proceso fotogramétrico denominado “*Intersección directa*” y conocidos los parámetros de orientación externa (e interna, por supuesto), se obtuvieron las coordenadas de las 50 cruces test en el sistema de referencia de coordenadas modelo.
- *Transformación tridimensional de semejanza al sistema objeto.* Corresponde a la fase fotogramétrica de la “*Orientación Absoluta*”. A partir de las coordenadas modelo de las cruces de control (o apoyo) y de sus correspondientes en el

sistema de referencia objeto, se hallaron los parámetros de la transformación tridimensional de semejanza que relaciona ambos sistemas. Posteriormente se aplicaron estos parámetros a las coordenadas en el sistema modelo de las cruces test, para obtener finalmente sus coordenadas en el sistema de referencia objeto.

- *Comparación de coordenadas en el sistema objeto.* Es la fase de establecimiento de la calidad del proceso, mediante las diferencias entre las coordenadas de las cruces test obtenidas por medida topográfica (con una precisión de 80 μm) y las alcanzadas tras el proceso fotogramétrico, ambas en el sistema de referencia objeto. Tras el cálculo del error medio cuadrático de todas las diferencias obtenidas, se compara este con algún valor de referencia que sirva de tolerancia.

En el Anexo D se incluyen algunos informes producidos por “Taller Fotogramétrico” en todo el proceso.

En el apartado 4.2.2.1 se hizo referencia a una hoja Excel, “*Cámaras.xlsx*”, en la que se realizaban una serie de cálculos preparatorios de la toma fotográfica (Figura 4.15). En ella aparece un cálculo necesario en esta fase del proceso, el de la *apreciación altimétrica*:

$$\sigma_z = \pm \frac{\text{Alejamiento}}{\text{Base}} dp = 0.4 \text{ mm} \quad (5.2)$$
$$dp \equiv \text{Diferencial del paralaje} = \text{Resolución} \cdot \sqrt{2}/2$$

La apreciación altimétrica es la precisión que se puede esperar en un proceso fotogramétrico en función del alejamiento, la escala, el recubrimiento longitudinal y la resolución de la imagen. Es más restrictiva que la apreciación planimétrica, por lo que se suele tomar como tolerancia a la hora de validar los resultados obtenidos en un levantamiento fotogramétrico y es la que se ha usado aquí para este propósito.

Los ensayos seleccionados para esta evaluación son:

- *Completo.* Ensayos 1_16, 1_61, 1_567, 1_678901 y 1_12345678901.
- *Parciales.* Ensayos 2_16, 2_161, 2_12345678901, 3_161, 3_12345678901, 5_11, 5_12345678901, 10_36901, 10_12345678901 y 25_12345678901.
- *Mixtos.* Ensayos 135_6 y 1234567890_11.
- *Otros.* Brown (4r2t): 1_61 y 2_12345678901; Legendre (6): 1_12345678901 y 3_161; Reducción de precisión: 2_12345678901, 3_161 y 25_12345678901.

Ante la imposibilidad de incluir los cuadros completos de resultados por su tamaño, en las siguientes tablas se muestran los resúmenes de los valores del error medio cuadrático para planimetría y altimetría (EMC_P y EMC_A , respectivamente). En el Anexo D se incluye un ejemplo de un ensayo.

Tabla 5.19. Error medio cuadrático en los ensayos completos (mm)

	1_678901		1_61		1_12345678901		1_567		1_16	
	EMC_P	EMC_A	EMC_P	EMC_A	EMC_P	EMC_A	EMC_P	EMC_A	EMC_P	EMC_A
Brown Radial:3 Tangencial:2	0,239	0,463	0,233	0,459	0,237	0,529	0,237	0,524	0,228	0,556
Interpolación cúbica	0,171	0,363	0,194	0,461	0,199	0,479	0,216	0,638	0,199	0,551
Legendre 4º grado	0,218	0,559	0,425	1,300	0,217	0,479	0,218	0,579	0,740	2,058

Tabla 5.20. Error medio cuadrático en los ensayos parciales (mm)

	2_12345678901		2_161		2_16		3_12345678901		3_161	
	EMC_P	EMC_A	EMC_P	EMC_A	EMC_P	EMC_A	EMC_P	EMC_A	EMC_P	EMC_A
Brown Radial:3 Tangencial:2	0,221	0,506	0,226	0,503	0,226	0,556	0,224	0,503	0,229	0,490
Interpolación cúbica	0,243	0,503	0,237	0,637	0,201	0,586	0,217	0,570	0,201	0,530
Legendre 4º grado	0,243	0,506	0,237	0,637	0,213	0,588	0,217	0,578	0,206	0,593

	5_12345678901		5_11		10_12345678901		10_36901		25_12345678901	
	EMC_P	EMC_A	EMC_P	EMC_A	EMC_P	EMC_A	EMC_P	EMC_A	EMC_P	EMC_A
Brown Radial:3 Tangencial:2	0,222	0,504	0,222	0,491	0,231	0,514	0,226	0,496	0,223	0,483
Interpolación cúbica	0,272	0,552	0,206	0,510	0,189	0,407	0,252	0,494	0,184	0,863
Legendre 4º grado	0,214	0,596	0,208	0,619	0,224	0,650	11,433	0,770	0,260	0,670

Tabla 5.21. Error medio cuadrático en los ensayos mixtos (mm)

	12345678901_1		135_6	
	EMC _P	EMC _A	EMC _P	EMC _A
Brown - 3r 2t	0,221	0,506	0,229	0,490
Interpolación cúbica	0,212	0,513	0,201	0,530
Legendre - 4	0,243	0,506	0,206	0,593

Tabla 5.22. Error medio cuadrático en los ensayos mejorados (mm)

Brown - 4r 2t				Legendre - 6			
2_12345678901		1_61		1_12345678901		135_6	
EMC _P	EMC _A	EMC _P	EMC _A	EMC _P	EMC _A	EMC _P	EMC _A
0,229	0,522	0,223	0,523	0,23	0,509	0,230	0,509

Tabla 5.23. Error medio cuadrático en los ensayos con reducción de precisión (mm)

	Brown - 3r 2t		Interpolación cúbica		Legendre - 4	
	2_12345678901		25_12345678901		3_161	
	EMC _P	EMC _A	EMC _P	EMC _A	EMC _P	EMC _A
0 decimales	0,227	0,486	0,381	1,183	0,367	0,948
1 decimales	0,224	0,499	0,212	0,519	0,205	0,598
2 decimales	0,221	0,507	0,206	0,514	0,210	0,594
3 decimales	0,221	0,506	0,212	0,513	0,206	0,593

Se puede observar cómo los resultados son bastante homogéneos para todos los métodos y ensayos, siendo las variaciones entre ellos muy pequeñas. En planimetría los errores medio cuadráticos son ligeramente superiores a 0.2 mm y en altimetría, entre 0.4 y 0.6 mm. La razón por la que se supera la tolerancia marcada de 0.4 mm tiene que ver con los errores incluidos en las coordenadas píxel de los márgenes del formato de la imagen, como ya se ha explicado anteriormente.

Aunque hay fluctuaciones, el método de Brown suele superar ligeramente a los otros dos que, prácticamente, alcanzan los mismos resultados.

5.4. Análisis de otras aplicaciones informáticas

El ensayo que se realizó en *Image Master* de TOPCON arrojó unos resultados satisfactorios, dentro de los límites que el programa impone, pero al tratarse de una metodología distinta es difícil de comparar con los resultados obtenidos con FOCal.

Para el programa *Calibración* de Aerotri se realizaron los siguientes ensayos:

- *Completo*. Ensayos 1_61 y 1_12345678901.
- *Parciales*. Ensayos 2_12345678901 y 10_12345678901.
- *Otros*. Reducción de precisión: Ensayo 2_12345678901.

A continuación se muestra la Tabla 5.24 con los resultados obtenidos en los cuatro primeros ensayos, realizados con características semejantes a las introducidas en el método de Brown de FOCal. Se eligió un modelo polinómico impar con tres coeficientes de distorsión radial simétrica y dos de distorsión tangencial simétrica. No se incluyó el modelo asimétrico.

Tabla 5.24. Precisiones de los parámetros internos y externos en los ensayos en *Calibración* de Aerotri (mm)

Combinación	$\hat{\sigma}_o$	Prec. x_o	Prec. y_o	Prec. f	Prec. ω°	Prec. φ°	Prec. κ°	Prec. X_o	Prec. Y_o	Prec. Z_o
1_61	0.0010	0.00006	0.00008	0.00007	0.00028	0.00021	0.00008	0.0016	0.0016	0.0035
1-12345678901	0.0013	0.00004	0.00005	0.00004	0.00018	0.00014	0.00005	0.0008	0.0008	0.0018
2-12345678901	0.0014	0.00008	0.00010	0.00008	0.00035	0.00027	0.00010	0.0016	0.0016	0.0035
10-12345678901	0.0016	0.00041	0.00047	0.00043	0.00171	0.00126	0.00049	0.0091	0.0091	0.018

Se puede comprobar cómo la varianza a posteriori es prácticamente la misma que la obtenida con FOCal, en los cuatro ensayos. Sin embargo, en las precisiones de los parámetros internos, las alcanzadas con FOCal son peores, del orden de la décima parte. En las precisiones de los parámetros externos ocurre lo contrario, en *Calibración* las precisiones de los giros son peores, casualmente también del orden de la décima parte, y las precisiones de la posición del centro de proyección son prácticamente idénticas en ambos programas.

En general, se puede decir que los resultados son bastante parejos y la tendencia en cantidad de profundidades y puntos es similar a los resultados de FOCal.

En la Tabla 5.25 se expone los resultados de los ensayos de reducción de precisión. Se vuelve a poner de relieve la innecesaria aportación de un tercer decimal, ya que los resultados con dos decimales son exactamente los mismos. Salvando las diferencias ya expuestas en el párrafo anterior, se aprecia la misma evolución en la pérdida de precisión de los parámetros, tanto internos como externos.

Tabla 5.25. Precisiones de los parámetros internos y externos en los ensayos de pérdida de precisión en las coordenadas objeto (mm)

Combinación	$\hat{\sigma}_o$	Prec. x_o	Prec. y_o	Prec. f	Prec. ω°	Prec. φ°	Prec. κ°	Prec. X_o	Prec. Y_o	Prec. Z_o
2-12345678901-0	0.0069	0.00043	0.00051	0.00043	0.00190	0.00144	0.00051	0.0086	0.0086	0.018
2-12345678901-1	0.0015	0.00009	0.00011	0.00009	0.00040	0.00030	0.00011	0.0018	0.0018	0.0039
2-12345678901-2	0.0014	0.00008	0.00010	0.00008	0.00035	0.00027	0.00010	0.0016	0.0016	0.0035
2-12345678901-3	0.0014	0.00008	0.00010	0.00008	0.00035	0.00027	0.00010	0.0016	0.0016	0.0035

Se puede concluir que el análisis de precisiones de los parámetros es similar en ambas metodologías.

CONCLUSIONES

Conclusiones

6.1. Conclusiones generales

Las conclusiones que se han extraído del trabajo realizado para esta tesis son las siguientes:

- La precisión de las coordenadas en el sistema de referencia objeto se puede establecer en la décima de mm. Más allá de la comodidad que supone la utilización de un sistema topográfico de aplicaciones industriales, es una precisión perfectamente alcanzable con estaciones topográficas de menores prestaciones, con una adecuada metodología de intersecciones.
- La precisión en los parámetros internos (y externos) es mayor en los ensayos con más profundidades.
- La precisión también mejora cuando los paneles se sitúan desde la distancia de enfoque hasta la distancia lejana de enfoque.
- La precisión no mejora con grandes distancias entre paneles, (ocupando las distancias cercana y lejana, sin más paneles de por medio) y tampoco ofrece buenos resultados concentrarlos alrededor de la distancia de enfoque.
- En combinación con los parámetros anteriores de número y distribución de profundidades, se establece un umbral de número de puntos por panel entre 1/5 y 1/10 puntos. Teniendo en cuenta que los ensayos completos han sido los mejores, se puede llegar a reducir hasta 1/5 puntos, si se incrementan los paneles y se sitúan en la parte lejana del rango de profundidades.
- Aunque el comportamiento ante distribución de profundidades y número de puntos sea similar en Brown y Legendre, para conseguir los mismos resultados en Legendre hay que utilizar polinomios de grados elevados: el 6º grado del polinomio duplicó las precisiones obtenidas con el 4º grado, igualando así los resultados de Brown.

- La inclusión de un cuarto coeficiente de distorsión radial en el método de Brown no mejora especialmente las precisiones de los parámetros.
- Aun siendo buenas las combinaciones mixtas, sólo superan a las peores completas. De todas formas sus resultados no son desdeñables, sobre todo con el método de Brown.
- El tiempo de cálculo empleado, sobre todo en ensayos completos y con muchas profundidades, han sido aceptables en el método de Brown y en interpolación cúbica, extendiéndose más en el método de Legendre, al incorporar en el cálculo una gran cantidad de coeficientes.
- Finalmente, se considera que la función de distorsión propuesta por Brown es la que mejor se ha comportado en prácticamente todas las situaciones, no en vano desde su publicación ha sido la más extendida y utilizada hasta nuestros días. Se ha demostrado que tres parámetros de distorsión radial y dos de descentrado son suficientes para tener una precisión aceptable y que la configuración geométrica del objeto de calibración más aconsejable es la de incluir paneles desde la distancia de enfoque hasta la distancia de enfoque lejana. Las marcas a incluir en el panel no deberían situarse a más de 4 cm para un alejamiento de 50 cm (se puede calcular para otras distancias estableciendo la relación correspondiente).

No obstante, la función polinómica de Legendre con un grado elevado (se ha probado el 6º) da también resultados de garantías, aunque el coste computacional sea mayor y tenga riesgos de inestabilidad numérica.

Por último, la interpolación cúbica se ha incluido como aporte en este trabajo y ha cumplido con las expectativas. Incluso en algún caso ha superado los resultados de los otros dos métodos.

6.2. Líneas futuras

Las líneas de investigación futuras que darían continuidad a esta tesis podrían basarse en los siguientes aspectos:

- La mejora en la búsqueda automática de las coordenadas píxel. El algoritmo podría optimizarse utilizando una correspondencia de imágenes por mínimos cuadrados en vez de la clásica por correlación automática.
- Continuación de la línea de investigación de la interpolación cúbica.
- Investigación sobre otros polinomios e interpolaciones, como Lagrange, Hermite, Newton, incluso la prueba del *"Krigging"* o con modelos TIN.
- Utilización de algoritmos de definición de la distorsión basados en líneas, sencillos, y a partir de ellos, realización del cálculo de la calibración.

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA

- Abdel-Aziz, Y. (1975). Asymmetrical lens distortion. *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, 41 (3), 337-340.
- Abdel-Aziz, Y., & Karara, H. (1971). Direct Linear Transformation from comparator coordinates into object space coordinates in Close-Range Photogrammetry. *Proceedings of the Symposium on Close-Range Photogrammetry* (págs. 1-18). Fall Church, Virginia: American Society of Photogrammetry.
- Aguirre, J., Díez, A., Asensio, J., García, O., & Rodríguez, R. (2012). Calibración de cámaras digitales no métricas. Elección de la óptima distribución geométrica del patrón de calibración. *X Congreso TopCart - I Congreso Iberoamericano de Geomática y C.C. de la Tierra*. Madrid: COITTop.
- Aloimonos, J. (1990). Perspective approximations. *Image and Vision Computing*, 8(3), 179-192.
- Aroca, J. M., & Fernández Bermejo, M. J. (2009). *Geometría proyectiva*. Valladolid: Universidad de Valladolid.
- Ayres, F. (1970). *Geometría proyectiva*. México: McGraw-Hill.
- Banerjee, S. (2008). *Projective geometry, camera, models and calibration*. Recuperado el 23 de Septiembre de 2015, de Dept. Computer Science and Engineering of Indian Institute of Technology Delhi: <http://www.cse.iitd.ernet.in/suban/vision/geometry/geometry.html>
- Barazzetti, L., Mussio, L., Remondino, F., & Scaioni, M. (2011). Targetless camera calibration. *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, XXXVIII-5/W16. Trento, Italia.
- Bonneval, H. (1972). *Photogrammétrie Générale*. Paris: Eyrolles Editeur.
- Bouguet, J. (2015). *Camera Calibration Toolbox for Matlab*. Obtenido de http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc
- Bracho, J. (2009). *Introducción analítica a las geometrías*. México D.F.: Fondo de Cultura Económica.
- Brown, D. (1964). An advanced reduction and calibration for photogrammetric cameras. *Air Force Cambridge Research Laboratories, Report No. 64-40*.

- Brown, D. (1966). Decentering distortion of lenses. *Photogrammetric Engineering*, 32 (3), 444-462.
- Brown, D. (1968). *Advanced methods for the calibration of metric cameras*. Final report, Part 1, under Contract DA-44-009-AMC-1457(X) to U.S. Army Engineering Topographic Laboratories, Fort Belvoir, Virginia.
- Brown, D. (1971). Close-range camera calibration. *Photogrammetric Engineering*, 37 (8), 855-866.
- Brown, D. (1976). The bundle adjustment - Progress and prospects. *XIIIth Congress of the International Society for Photogrammetry, Commission III*. Helsinki.
- Castellón, A. (2012). *Geometría afín y proyectiva*. Recuperado el 15 de abril de 2015, de OCW Universidad de Málaga: <http://ocw.uma.es/ciencias/geometria-afin-y-proyectiva>
- Clarke, T., & Fryer, J. (1998). The development of camera calibration methods and models. *Photogrammetric Record*, 16 (91), 51-66.
- Conrady, A. (1919). Decentered lens-systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 79, 384-390.
- Courant, R., & Robbins, H. (1996). *What is Mathematics?: an elementary approach to ideas and methods*. New York: Oxford University Press.
- Cubillo y Fluiters, J. (1943). *Geometría proyectiva*. Madrid: Instituto Geográfico y Catastral.
- DeMenthon, D., & Davis, L. (1992). New exact and approximate solutions of the three-point perspective problem. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(11), 1100-1105.
- Devernay, F., & Faugeras, O. (1995). Automatic calibration and removal of distortion from scenes of structured environments. *Investigative and Trial Image Processing*, 62-72.
- Domingo, A. (2000). *Aplicación de los Métodos de Estimación Robusta a problemas fotogramétricos*. Phd Thesis, Universidad de Cantabria
- Easa, S. (2007). Evaluation of the Newton-Raphson method for three-point resection in Photogrammetry. *Surveying and Land Information Science*, 67 (1), 33-42.
- Easa, S. (2010). Space resection in photogrammetry using collinearity condition without linearisation. *Survey Review*, 42 (315), 40-49.
- Efimov, N. V. (1978). *Geometría superior*. Moscú: Editorial Mir.

- Elnima, E. (2015). A solution for exterior and relative orientation in Photogrammetry, a genetic evolution approach. *Journal of King Saud University – Engineering Sciences*, 27, 108-113.
- Faig, W. (1975). Calibration of close-range photogrammetric systems: mathematical formulation. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 41 (12), 1479-1486.
- Faugeras, O. (1993). *Three-Dimensional Computer Vision: a Geometric Viewpoint*. Cambridge. Massachusetts: MIT Press.
- Faugeras, O., & Toscani, G. (1986). The calibration problem for stereo. *IEEE Computer Vision and Pattern Recognition* (págs. 15-20). Miami Beach, Florida: IEEE.
- Fraser, C. (2001). Photogrammetric camera component calibration: A review of analytical techniques. En A. Gruen, & T. Huang (Edits.), *Calibration and Orientation of Cameras in Computer Vision* (Vol. 34, págs. 95-121). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- Fraser, C. (2013). Automatic camera calibration in close range photogrammetry. *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, 79 (4), 381-388.
- Fryer, J., & Brown, D. (1986). Lens distortion for close-range photogrammetry. *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, 52 (1), 51-58.
- García Cepeda, F. (2000). Condiciones de coplanaridad y de colinealidad. Madrid: Apuntes de la E.U.I.T. Topográfica. UPM.
- Grajales, B., García, J., & García, J. (2010). Métodos de interpolación spline y sus aplicaciones. *Revista de Educación Matemática, II*
- Gruen, A., & Huang, T. (Edits.). (2001). *Calibration and orientation of cameras in Computer Vision*. Berlin: Springer.
- Hall, E., Tio, J., McPherson, C., & Sadjadi, F. (1982). Measuring curved surfaces for robot vision. *Computer Journal* (15), 42-54.
- Hartley, R., & Zisserman, A. (2004). *Multiple View Geometry in Computer Vision* (2ª ed.). Cambridge: Cambridge University Press.
- He, F., & Habib, A. (2015). Target-based and feature-based calibration of low-cost digital cameras with large field-of-view. *ASPRS 2015 Annual Conference*. Tampa, Florida.
- Heikkilä, J. (2000). Geometric camera calibration using circular control points. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22 (10), 1066-1077.
- Heikkilä, J., & Silvén, O. (1997). A four-step camera calibration procedure with implicit image correction. *Computer Vision and Pattern Recognition* (págs. 1106-1112). IEEE.

- Huang, G., & Tseng, Y. (2015). Application of stereo vision 3D target recognition using camera calibration algorithm. *International Conference on Circuits and Systems* (págs. 381-385). Atlantis Press.
- Isern, J. (2003). *Estudio experimental de métodos de calibración y autocalibración de cámaras*. Phd Thesis, Departamento de Informática y Sistemas, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.
- Ivorra Castillo, C. (2010). *Geometría*. Internet: <http://www.uv.es/ivorra/Libros/Geometria.pdf>.
- Jenkins, F., & White, H. (1976). *Fundamentals of Optics* (4^a ed.). New York: McGraw-Hill.
- Kannala, J., Heikkilä, J., & Brandt, S. (2008). Geometric camera calibration. En *Wiley Encyclopedia of Computer Science and Engineering* (págs. 1-11).
- Karara, H. (Ed.). (1989). *Non-Topographic Photogrammetry* (2^a ed.). Falls Church, Virginia: American Society for Photogrammetry and Remote Sensing (ASPRS).
- Karras, G., & Mavrommati, D. (2001). Simple calibration techniques for non-metric cameras. *CIPA International Symposium*. Potsdam.
- Klein, F. (1893). A comparative review of recent researches in geometry. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 2 (10), 215-249.
- Klein, F. (1931). *Matemática elemental desde un punto de vista superior - Tomo II: Geometría*. Madrid.
- Kraus, K. (1993). *Photogrammetry Vol. 1: Fundamentals and Standard* (4^a ed.). Bonn: Dümmler Verlag.
- Kraus, K. (1997). *Photogrammetry Vol. 2: Advanced methods and applications* (4^a ed.). Bonn: Dümmler Verlag.
- Lenz, R., & Tsai, R. (1988). Techniques for calibration of the scale factor and image center for high accuracy 3-D machine vision metrology. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 10 (5), 713-720.
- Lerma, J. (2002). *Fotogrametría moderna: Analítica y Digital*. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.
- Li, D., & Tian, J. (2013). An accurate calibration method for a camera with telecentric lenses. *Optics and Lasers in Engineering*, 51, 538-541.
- Luhmann, T., Robson, S., Kyle, S., & Harley, I. (2006). *Close Range Photogrammetry: Principles, Techniques and Applications*. Caithness, Scotland, UK: Whittles Publishing.
- Magill, A. (1955). Variation in distortion with magnification. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 54 (3), 135-142.

- McGlone, C., Mikhail, E., & Bethel, J. (Edits.). (2004). *Manual of photogrammetry* (5^a ed.). Bethesda, Maryland: American Society for Photogrammetry and Remote Sensing (ASPRS).
- Mikhail, E. (1976). *Observations and Least Squares*. New York: University Press of America.
- Mikhail, E., Bethel, J., & McGlone, C. (2001). *Introduction to Modern Photogrammetry*. New York: John Wiley & Sons.
- Montesdeoca, A. (2012). *Apuntes de Geometría proyectiva*. La Laguna.
- Múgica, J. (s.f.). Manual de Calibración - Aerotri.
- Remondino, F., & Fraser, C. (2006). Digital camera calibration methods: considerations and comparisons. *ISPRS Commission V Symposium 'Image Engineering and Vision Metrology'*. 36 (5), págs. 266-272. Dresden: IAPRS.
- Reznicek, J. (2014). Method for measuring lens distortion by using pinhole lens. *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, XL-5*, págs. 509-515. Riva del Garda, Italia.
- Ricolfe-Viala, C., & Sánchez-Salmerón, A. (2011). Using the camera pin-hole model restrictions to calibrate the lens distortion model. *Optics & Laser Technology*(43), 996-1005.
- Rodríguez, J. (2002). *Ajuste de observaciones*. Barcelona: Edicions UPC.
- Ryberg, A., Lennartson, B., Christiansson, A., Ericsson, M., & Asplund, L. (2011). Analysis and evaluation of a general camera model. *Computer Vision and Image Understanding* (115), 1503-1515.
- Salvi, J., Armangué, X., & Batlle, J. (2002). A comparative review of camera calibrating methods with accuracy evaluation. *Pattern Recognition*, 35 (7), 1617-1635.
- Samtaney, R. (1999). A method to solve interior and exterior camera calibration parameters for image resection. Nas-99-003. NASA
- Sánchez, N., Arias, B., González, D., & Gómez, J. (2004). Análisis aplicado de métodos de calibración de cámaras para usos fotogramétricos. *TOPCART*. Madrid: Colegio Oficial de Ingenieros en Topografía.
- Schenk, T. (2002). *Fotogrametría digital* (Vol. 1). Barcelona: Marcombo.
- Semple, J. G., & Kneebone, G. T. (1998). *Algebraic projective geometry*. Oxford: Clarendon Press.
- Shih, S., Hung, Y., & Lin, W. (1995). Whwn should we consider lens distortion in camera calibration. *Pattern Recognition*, 28 (3) , 447-461.

- Sun, W., & Cooperstock, J. (2006). An empirical evaluation of factors influencing camera calibration accuracy using three publicly available techniques. *Machine Vision and Applications*, 17 (1), 51-67.
- Tang, R., Fritsch, D., & Cramer, M. (2012). A novel family of mathematical self-calibration additional parameters for airborne camera systems. *International Calibration and Orientation Whorkshop EuroCOW*. Castelldefels, España.
- Trujillo, A. (1997). *Gráficos 3D*. Escuela Universitaria de Informática. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.
- Tsai, R. (1987). A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3D machine vision metrology using off-the-self TV cameras and lenses. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, RA-3 (4), 323-344.
- Valbuena, J. (2014). *Banco documental "VALBU" de Instrumentos Topográficos*. Recuperado el 5 de Septiembre de 2015, de Web de la ETSI en Topografía, Geodesia y Cartografía de la UPM: <http://bancovalbu.topografia.upm.es/>
- Wang, G., & Wu, J. (2011). *Guide to Three Dimensional Structure and Motion Factorization*. London: Springer-Verlag.
- Wei, G., & De Ma, S. (1994). Implicit and explicit camera calibration: Theory and experiments. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 16 (5), 469-480.
- Weng, J., Cohen, P., & Herniou, M. (1992). Camera calibration with distortion models and accuracy evaluation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14 (10), 965-980.
- Willson, R. (1994). *Modeling and Calibration of Automated Zoom Lenses*. PhD thesis, CMU-RI-TR-94-03, Robotics Institute, Carnegie Mellon University.
- Wolf, P., & Dewitt, B. (2000). *Elements of Photogrammetry with applications in GIS* (3^a ed.). New York: McGraw-Hill.
- Wolf, P., & Ghilani, C. (1997). *Adjustement Computations: Statistics and Least Squares in Surveying and GIS*. New York: John Wiley & Sons.
- Zeng, H. (2010). Iterative algorithm of space resection using Rodrigues matrix. *Environmental Science and Information Application Technology (ESIAT)* (págs. 191-194 Vol. 1). Wuhan: IEEE.
- Zhang, Z. (2000). A flexible new technique for camera calibration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* (págs. 1330-1334). 22(11).
- Zhou, F., Cui, Y., Wang, Y., Liu, L., & Gao, H. (2013). Accurate and robust estimation of camera parameters using RANSAC. *Optics and Lasers in Engineering*, 51, 197-212.

ANEXOS

Transformación Lineal

Directa

La transformación lineal directa es un método alternativo al cálculo de la orientación externa de una imagen propuesto por Y. Abdel-Aziz y H. Karara (Abdel-Aziz & Karara, 1971). La novedad del método reside en su linealidad, por lo que no se requieren datos iniciales aproximados. Además, no necesita parámetros internos. Por tanto, realiza directamente la transformación a coordenadas objeto a partir de las coordenadas imagen (Karara, 1989).

A las ecuaciones de colinealidad (2.36) se les incorpora la corrección de distorsión de la lente, quedando de la forma:

$$\left. \begin{aligned} x - \delta_x &= x_P - f_x \frac{m_{11}(X - X_c) + m_{12}(Y - Y_c) + m_{13}(Z - Z_c)}{m_{31}(X - X_c) + m_{32}(Y - Y_c) + m_{33}(Z - Z_c)} \\ y - \delta_y &= y_P - f_y \frac{m_{21}(X - X_c) + m_{22}(Y - Y_c) + m_{23}(Z - Z_c)}{m_{31}(X - X_c) + m_{32}(Y - Y_c) + m_{33}(Z - Z_c)} \end{aligned} \right\} \quad (A.1)$$

donde (x, y) son las coordenadas del punto en el sistema de referencia imagen, δ_x y δ_y son los errores sistemáticos debidos a la distorsión, (x_P, y_P) son las coordenadas del punto principal en el sistema de referencia imagen y f_x and f_y son las distancias focales en las direcciones del eje x y el eje y , respectivamente. Los coeficientes m_{ij} son los elementos de la matriz de transformación M , (X_0, Y_0, Z_0) son las coordenadas del centro de proyección y (X, Y, Z) las coordenadas del punto en el sistema de referencia objeto. La diferencia entre ambas distancias focales está provocada por la las dos escalas incluidas en la transformación afín entre el sistema imagen y el sistema objeto.

Utilizando coordenadas homogéneas, a la matriz de transformación M se le añade una columna más al final, $(m_{14}, m_{24}, m_{34})^T$, se dividen todos sus elementos por m_{34} y se renombra como L :

$$\frac{1}{m_{34}} M = \begin{bmatrix} \frac{m_{11}}{m_{34}} & \frac{m_{12}}{m_{34}} & \frac{m_{13}}{m_{34}} & \frac{m_{14}}{m_{34}} \\ \frac{m_{21}}{m_{34}} & \frac{m_{22}}{m_{34}} & \frac{m_{23}}{m_{34}} & \frac{m_{24}}{m_{34}} \\ \frac{m_{31}}{m_{34}} & \frac{m_{32}}{m_{34}} & \frac{m_{33}}{m_{34}} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ L_5 & L_6 & L_7 & L_8 \\ L_9 & L_{10} & L_{11} & 1 \end{bmatrix} = L \quad (A.2)$$

Entonces la ecuación (A.1) queda de la forma:

$$\left. \begin{aligned} x - \delta_x &= \frac{L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1} \\ y - \delta_y &= \frac{L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8}{L_9 X + L_{10} Y + L_{11} Z + 1} \end{aligned} \right\} \quad (A.3)$$

Los coeficientes L_i tienen el siguiente valor:

$$\begin{aligned} L_1 &= (x_P m_{31} - f_x m_{11}) / L \\ L_2 &= (x_P m_{32} - f_x m_{12}) / L \\ L_3 &= (x_P m_{33} - f_x m_{13}) / L \\ L_4 &= x_P + f_x (m_{11} X_c + m_{12} Y_c + m_{13} Z_c) / L \\ L_5 &= (y_P m_{31} - f_y m_{21}) / L \\ L_6 &= (y_P m_{32} - f_y m_{22}) / L \\ L_7 &= (y_P m_{33} - c f_y m_{23}) / L \\ L_8 &= y_P + f_x (m_{21} X_c + m_{22} Y_c + m_{23} Z_c) / L \\ L_9 &= m_{31} / L \\ L_{10} &= m_{32} / L \\ L_{11} &= m_{33} / L \\ L &= -(m_{31} X_c + m_{32} Y_c + m_{33} Z_c) \end{aligned} \quad (A.4)$$

Estas ecuaciones se pueden resolver de forma directa o iterativamente. El método directo asume correcciones muy pequeñas a las coordenadas en el sistema imagen y, por tanto, pueden ser ignoradas. Además, si los puntos de coordenadas conocidas en el sistema objeto también se asumen sin error, las ecuaciones pueden expresarse de la forma:

$$\begin{aligned} L_1 X + L_2 Y + L_3 Z + L_4 - x X L_9 - x X L_{10} - x Z L_{11} - x K_1 r^2 A - x &= v_x \\ L_5 X + L_6 Y + L_7 Z + L_8 - y X L_9 - y Y L_{10} - y Z L_{11} - y K_1 r^2 A - y &= v_y \end{aligned} \quad (A.5)$$

donde K_1 es el primer coeficiente de la distorsión radial, r es la distancia radial al punto y $A = L_9X + L_{10}Y + L_{11}Z + 1$. El sistema se resuelve mediante un ajuste mínimo cuadrático y se obtienen los valores de los parámetros L_i . Para recuperar los parámetros de la cámara se utilizan las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} L &= -1/\sqrt{(L_9^2 + L_{10}^2 + L_{11}^2)} \\ x_P &= (L_1 * L_9 + L_2 * L_{10} + L_3 * L_{11})L^2 \\ y_P &= (L_5 * L_9 + L_6 * L_{10} + L_7 * L_{11})L^2 \\ f_x &= \sqrt{[(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2)L^2 - x_0^2]} \\ f_y &= \sqrt{[(L_5^2 + L_6^2 + L_7^2)L^2 - y_0^2]} \\ \phi &= \sin^{-1}(-L_9 * L) \\ \omega &= \tan^{-1}(-L_{10}/L_{11}) \\ m_{11} &= L(x_P * L_9 - L_1)/f_x \\ k &= \cos^{-1}(m_{11}) / \cos \phi \end{aligned} \right\} \quad (A.6)$$

Método de ajuste por mínimos cuadrados

B.1 Método paramétrico

El proceso de ajuste de observaciones se lleva a cabo únicamente en el caso de que haya más datos que los mínimamente necesarios para la solución única de un problema. Los datos excedentes son conocidos como datos redundantes. Si se parte de la suposición de que toda observación tiene error, el incluir individualmente cada dato redundante en el planteamiento del problema proporcionará una solución diferente. Por tanto, se impone la búsqueda de una solución única mediante un modelo que incluya algún criterio adicional (Domingo, 2000).

El modelo planteado sustituye las observaciones originales redundantes (vector l) por unas estimaciones (vector $\hat{l}$) consistentes con el modelo. La diferencia entre los dos conjuntos de datos son los *residuos*:

$$v = \hat{l} - l \quad (\text{B.1})$$

Existe un número infinito de estimaciones para v que satisfacen el modelo, pero sólo hay uno que además cumple el *principio de mínimos cuadrados*, que establece que el sumatorio de los residuos al cuadrado sea mínimo, es decir:

$$\phi = v^T P v = \sum_{i=1}^n p_i v_i^2 \rightarrow \text{mínimo} \quad (\text{B.2})$$

donde P es la matriz de pesos y p_i los elementos de la diagonal de la matriz P . En el caso más sencillo, donde las observaciones son incorreladas y de la misma precisión, la matriz de pesos P es la identidad.

El método de *ajuste paramétrico* o por *observaciones indirectas* es uno de los casos particulares del ajuste por mínimos cuadrados. En este método el ajuste se realiza con

observaciones y parámetros, estableciendo tantas ecuaciones como observaciones haya, de ahí el nombre de *ecuaciones de observación*. El sistema de ecuaciones linealizadas así formado estará sobredimensionado por la existencia de redundancias. Las ecuaciones funcionales quedan formuladas matricialmente de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} l + v + Ax &= d \\ v + Ax &= (-l + d) = L \end{aligned} \quad (B.3)$$

donde d y L son vectores constantes. Separando el vector de residuos de forma explícita, se aplica el principio de los mínimos cuadrados directamente:

$$\begin{aligned} F &= v^T P v = (L - Ax)^T P (L - Ax) = \\ &= x^T A^T P A x - x^T A^T P L + L^T P L - L^T P A x = \\ &= x^T A^T P A x + L^T P L - 2L^T P A x \end{aligned} \quad (B.4)$$

Siendo el vector de los parámetros x la variable en la ecuación (B.4), se ha de calcular e igualar a cero la derivada parcial de la ecuación respecto de este valor:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= 2x^T A^T P A - 2L^T P A = 0 \\ (A^T P A) x &= A^T P L \end{aligned} \quad (B.5)$$

La solución mínimo-cuadrática al sistema compatible determinado de ecuaciones normales así formado se puede expresar:

$$\begin{aligned} x &= (A^T P A)^{-1} A^T P L \\ x &= N^{-1} t \end{aligned} \quad (B.6)$$

Por último, se puede calcular el vector de observaciones ajustadas a partir del vector de parámetros obtenidos:

$$\hat{l} = l + L - Ax \quad (B.7)$$

Para analizar la precisión del ajuste se utiliza la varianza de referencia a posteriori:

$$\sigma_0^2 = \frac{v^T P v}{n^{\circ} \text{ ecs} - n^{\circ} \text{ pars}} \quad (B.8)$$

Y la matriz de varianza-covarianza:

$$\Sigma_{xx} = \sigma_0^2 Q_{xx} = \sigma_0^2 N^{-1} = \sigma_0^2 (A^T P A)^{-1} \quad (B.9)$$

B.2 Método de Newton-Raphson

Se trata de un algoritmo de aproximación numérica de derivadas parciales en función de los parámetros estimados. A continuación se expone la filosofía del método para un sistema de ecuaciones no lineales en una variable.

A partir de un valor inicial aproximado de la raíz de la función x_i , se busca la tangente a la función en ese punto $(x_i, f(x_i))$. La tangente corta el eje de abscisas en la coordenada x_{i+1} , por lo que la pendiente de la tangente será:

$$f'(x) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}} \quad (\text{B.10})$$

Para obtener la fórmula recursiva de Newton-Raphson, se despeja x_{i+1} :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (\text{B.11})$$

Este valor x_{i+1} es una aproximación que irá mejorando en cada iteración.

En el caso de varias variables, el problema se complica.

Los parámetros que intervienen en la ecuación de colinealidad con función de distorsión añadida, pueden notarse resumidamente como (Samtaney, 1999):

$$\begin{aligned} \xi &\equiv \xi(X_0, \Phi, \Psi) \\ X_0 &\equiv (X_0, Y_0, Z_0) \\ \Phi &\equiv (\omega, \varphi, \kappa) \\ \Psi &\equiv (k_1, k_2, k_3, p_1, p_2, x_0, y_0, f) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Entonces las ecuaciones de colinealidad se pueden reescribir de la forma:

$$\mathcal{F}(\xi) = \begin{bmatrix} F(\xi) = (x'_j + \Delta x_j - x_0)(X_0 - X) \cdot \hat{r}_3 + f(X_0 - X) \cdot \hat{r}_1 = 0 \\ G(\xi) = (y'_j + \Delta y_j - y_0)(X_0 - X) \cdot \hat{r}_3 + f(X_0 - X) \cdot \hat{r}_1 = 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

En el proceso iterativo realizado ' k ' veces, el vector ξ será conocido en cada iteración k y actuará como dato en la iteración $k+1$, de manera que:

$$\mathcal{F}^{k+1}(\xi) = \mathcal{F}^k(\xi) + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi} \right)^k \Delta \xi^k \quad (\text{B.14})$$

donde $\Delta \xi^k \equiv \xi^{k+1} - \xi^k$ y $\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi} \right)$ es la matriz Jacobiana. Fijando $\mathcal{F}^{k+1} = 0$, se calcula ξ^{k+1} según:

$$\xi^{k+1} = \xi^k - \left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi} \right)^k \right]^{-1} \mathcal{F}^k(\xi) \quad (\text{B.15})$$

En cada iteración se resuelve un sistema de ecuaciones lineales. Si el sistema es sobredeterminado, que será lo más común, se lleva a cabo un ajuste mínimo-cuadrático, hasta que se produzca una convergencia en la solución. Esto ocurrirá en un número de iteraciones que depende de la calidad de los datos aproximados iniciales.

Interpolación

C.1 Polinomios de Legendre

El producto interior de dos polinomios $\langle p, q \rangle$ en el intervalo $[a, b]$ se define como:

$$\langle p, q \rangle = \int_a^b p(x)q(x)\omega(x)dx \quad (C.1)$$

donde $\omega(x)$ es una función de peso no negativa.

Si el producto interior de los dos polinomios es cero, estos son *ortogonales*. Los polinomios de Legendre son un ejemplo de polinomios ortogonales que solucionan la ecuación diferencial de Legendre, que en su forma canónica se define como:

$$(1 - x^2) y'' - 2x y' + \lambda y = 0 \quad (C.2)$$

Su forma general mediante la fórmula de Rodrigues es:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (x^2 - 1)^n \quad \text{para } x \in [-1, 1] \quad (C.3)$$

Las propiedades de los polinomios de Legendre son:

- $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$. Tienen la *paridad de n*, es decir, si n es par son simétricos respecto del origen ($x = 0$). Por la misma razón son antisimétricos cuando n es impar (pasan por el origen).
- Tienen n ceros, tantos como el grado del polinomio.
- $P_n(1) = 1$.
- $P_n(-1) = (-1)^n$. Esto significa que los polinomios de Legendre en los extremos siempre valen 1 o -1.

Los primeros seis polinomios de Legendre $P_n(x)$ están representados de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 P_0(x) &= 1 \\
 P_1(x) &= x \\
 P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
 P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
 P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\
 P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 - 15x) \\
 P_6(x) &= \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)
 \end{aligned}
 \tag{C.4}$$

Los polinomios de Legendre satisfacen ciertas *fórmulas de recurrencia*, una de las cuales se muestra a continuación:

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x)
 \tag{C.5}$$

La representación gráfica de los primeros polinomios de Legendre es la siguiente:

C.2 Interpolación bicúbica

Interpolar es estimar el valor que toma una función en un punto, en función de la media ponderada de los puntos de su entorno. En la interpolación lineal se utiliza un segmento rectilíneo que pasa por dos puntos conocidos. La pendiente de la recta que pasa por dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) es

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad (C.6)$$

Por tanto, se puede sustituir en la ecuación de la recta:

$$y = P(x) = m(x - x_0) + y_0 = y_0 + (y_1 - y_0) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \quad (C.7)$$

En este caso el número de puntos era dos. Si el número de puntos del entorno es mayor que dos y además, no colineales, la cuestión se complica. El problema se podría solucionar incrementando el número de coeficientes (son dos, a y b , en su forma explícita: $y = ax + b$), obteniendo un polinomio de grado 2 o mayor, lo que supone un trozo de curva que se aproxima más o menos a la realidad. El grado 2 ofrece poca flexibilidad en la curva, por lo que se suelen usar los de grado 3, llamados cúbicos. Los de mayor grado no se suelen utilizar, ya que introducen rizos innecesarios (Trujillo, 1997).

Los polinomios cúbicos en su forma paramétrica se definen como:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= a_x t^3 + a_x t^2 + a_x t + d_x \\ y(t) &= a_y t^3 + a_y t^2 + a_y t + d_y \\ z(t) &= a_z t^3 + a_z t^2 + a_z t + d_z \end{aligned} \right\} \forall t \in [0,1] \quad (C.8)$$

Se puede reescribir la ecuación de la curva y hallar su derivada para conocer su vector tangente:

$$\begin{aligned} Q(t) &= (x(t) \quad y(t) \quad z(t)) \\ \frac{d}{dt} Q(t) &= Q'(t) = (3a_x t^2 + 2b_x t + c_x \quad 3a_y t^2 + 2b_y t + c_y \quad 3a_z t^2 + 2b_z t + c_z) \end{aligned} \quad (C.9)$$

Si dos curvas se unen en un extremo tiene continuidad geométrica G^0 . Si la dirección de sus vectores tangentes en el punto de unión es igual, tienen continuidad G^1 . Si son iguales además en dirección, en magnitud, la continuidad es de tipo C^1 y si la dirección y magnitud del vector $d^n Q(t)/dt^n$ son iguales, la continuidad es de C^n .

La interpolación polinómica a trozos, conocida como *spline*, se basa en funciones formadas por varios polinomios definidos en diferentes subintervalos, con ciertas condiciones de continuidad. Por tanto, una función spline S en $[a, b]$, de grado $K \geq 0$, correspondiente a la partición Γ , es una función que satisface las siguientes condiciones:

S es un polinomio de grado menor o igual que k en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0, 1, \dots, n-1$ y $S \in C^{k-1} [a, b]$.

Según esto, la interpolación con *splines* cúbicos, que se define como la función S de grado 3 para los $n+1$ nodos (x_i, f_i) , $i=0, 1, \dots, n$, con x_i en una partición de Γ de $[a, b]$, debe ser una función en $C^2 [a, b]$ y debe coincidir con un polinomio de Π_3 en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0, 1, \dots, n-1$ (Grajales, García, & García, 2010).

Por tanto, S contiene una secuencia $f_1, \dots, f_n$ tal que cada f en S se puede escribir únicamente en la forma de una función en S , que es la suma de dos funciones cualquiera en S :

$$f(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x) a_j \quad (C.10)$$

donde a_j son los coeficientes (se refieren normalmente a las coordenadas de f) y n es la dimensión del espacio lineal S .

Finalmente, si la función es bivariada (una superficie lo es) se puede obtener mediante el *producto tensorial*, que es la suma ponderada de productos de una función de la primera variable por una función de la segunda variable, es decir, cualquier función de la forma:

$$f(x, y) = \sum_i \sum_j a(i, j) g_i(x) h_j(y) \quad (C.11)$$

Informes de resultados

Informe del ajuste de la red de Leica Axyz

Update of orientation
Beginning mean error = 0.989

Rms error = 0.014 MM

Iteration 1
Mean error = 0.989
Percent change = -0.000

Rms error = 0.014 MM

Mean error = 0.989
Solution successful
Rms error = 0.014 MM

Warnings

End Warnings

Jobfile name: 14.10.15_TESIS-JULIAN.AXYZ Date: Wednesday, October 14, 2015 16:06
Length units: MM Angle units: DEG
Max pointing error = 0.100 MM Apex angle (+/-) = 30.0000
Results in: Coordinate system type: RHR

Stations

Parameters for station 1
Initial Approximations from: Previous orientation
Location = 0.000 0.000 -0.000
Rotation = 0.0007 359.9994 289.1720

Parameters for station 2
Initial Approximations from: Previous orientation
Location = 2843.704 -0.650 -19.693
Rotation = 0.0000 360.0000 221.0449

Collimation to station 1
From station 2 H = 131.0214 0.0000 V = 89.5371 0.0000

Collimation to station 2
From station 1 H = 19.1720 0.0000 V = 90.5413 0.0000

Scale Bars

Point Coordinates

Scale Bar Id: 1
Scale bar measurement (Position 1)
Point number: 1 Rms: 0.011 MM

Pointing error: 0.012 MM Apex angle: 46.7052
Coordinates = 1814.275 -3212.834 -521.985
Est Dev Out = 0.040 0.085 0.023
From station 1 H = 79.7188 0.0000 V = 98.0521 -0.0002
From station 2 H = 58.8143 0.0000 V = 98.4696 0.0002

Point number: 2 Rms: 0.004 MM
Pointing error: 0.005 MM Apex angle: 46.3101
Coordinates = 914.513 -3220.247 -510.418
Est Dev Out = 0.036 0.095 0.022
From station 1 H = 93.3182 0.0000 V = 98.6688 -0.0001
From station 2 H = 71.9751 0.0000 V = 97.4487 0.0001

Corrected Scale Bar Length = 899.867
Calculated Scale Bar Length = 899.867

Corrected - Calculated Length = 0.000

Points

Point results: orientation/point1 Rms: 0.002 MM
Pointing error: 0.002 MM Apex angle: 6.8246
Coordinates = 5198.483 -403.807 302.684
Est Dev Out = 0.382 0.042 0.054
From station 1 H = 23.6136 0.0000 V = 86.6782 0.0000
From station 2 H = 320.7602 -0.0000 V = 82.3150 -0.0000

Point results: orientation/point2 Rms: 0.004 MM
Pointing error: 0.006 MM Apex angle: 19.5098
Coordinates = 5185.039 -2021.314 46.074
Est Dev Out = 0.166 0.081 0.022
From station 1 H = 40.4696 -0.0000 V = 89.5260 -0.0001
From station 2 H = 351.8404 0.0000 V = 88.7818 0.0000

Point results: orientation/point3 Rms: 0.025 MM
Pointing error: 0.029 MM Apex angle: 25.0662
Coordinates = 3816.327 -5389.427 158.199
Est Dev Out = 0.123 0.187 0.028
From station 1 H = 73.8691 0.0000 V = 88.6272 0.0003
From station 2 H = 30.8137 -0.0000 V = 88.1395 -0.0002

Point results: orientation/point4 Rms: 0.010 MM
Pointing error: 0.010 MM Apex angle: 29.4267
Coordinates = 1598.688 -5371.642 631.374
Est Dev Out = 0.056 0.189 0.033
From station 1 H = 92.5980 0.0000 V = 83.5718 0.0001
From station 2 H = 54.0958 0.0000 V = 83.2653 -0.0001

Point results: orientation/point5 Rms: 0.010 MM
Pointing error: 0.013 MM Apex angle: 37.4493
Coordinates = -447.001 -3240.376 -409.880
Est Dev Out = 0.029 0.142 0.023
From station 1 H = 117.0263 -0.0000 V = 97.1415 -0.0001
From station 2 H = 86.4922 0.0000 V = 94.8296 0.0002

Point results: orientation/point6 Rms: 0.006 MM
Pointing error: 0.007 MM Apex angle: 44.5605
Coordinates = -317.914 2462.883 -335.599
Est Dev Out = 0.030 0.193 0.026
From station 1 H = 281.8167 -0.0000 V = 97.6970 0.0001
From station 2 H = 168.9706 0.0000 V = 94.5067 -0.0001

Point results: orientation/point7 Rms: 0.007 MM

```

Pointing error:      0.009 MM    Apex angle: 36.9298
Coordinates =      -179.784      3612.108      369.145
Est Dev Out =       0.025       0.264       0.033
From station 1 H =   286.3226    0.0000 V =   84.1728  -0.0001
From station 2 H =   181.1192    0.0000 V =   85.2815   0.0001

```

```

Point results: orientacion/point8      Rms: 0.023 MM
Pointing error:      0.027 MM    Apex angle: 41.8274
Coordinates =      2294.121      3345.025      1135.664
Est Dev Out =       0.117       0.172       0.059
From station 1 H =   323.6156  -0.0001 V =   74.3590   0.0004
From station 2 H =   211.7165  -0.0000 V =   71.1832  -0.0003

```

```

Point results: orientacion/point9      Rms: 0.031 MM
Pointing error:      0.039 MM    Apex angle: 26.8367
Coordinates =      4462.849      3601.581      540.520
Est Dev Out =       0.239       0.199       0.040
From station 1 H =   340.2679    0.0000 V =   84.6170  -0.0004
From station 2 H =   245.2481  -0.0000 V =   81.9263   0.0003

```

```

Point results: orientacion/point10     Rms: 0.000 MM
Pointing error:      0.000 MM    Apex angle: 10.7726
Coordinates =      5212.249      873.948      -103.058
Est Dev Out =       0.382       0.078       0.023
From station 1 H =     9.6536    0.0000 V =   91.1179   0.0000
From station 2 H =   290.7780  -0.0000 V =   91.8911  -0.0000

```

```

Point results: orientacion/point11     Rms: 0.006 MM
Pointing error:      0.007 MM    Apex angle: 55.4567
Coordinates =      1967.739      -2515.429      -728.498
Est Dev Out =       0.049       0.065       0.025
From station 1 H =    71.1373  -0.0000 V =   102.8495   0.0001
From station 2 H =    60.2495  -0.0000 V =   104.9050  -0.0001

```

Detalle del informe de puntos medidos de Leica Axyz

Online Protocol		Date : 10/14/2015
Jobname: 14.10.15_TESIS-JULIAN.Axyz		Time : 09:21
Length : millimeter	Temperature : celsius	
Angular : degree	Atm. pressure : mbar	
Leica AG		Page: 1

Station Setup

Station : 1					
Sensor : T2000	X =	N/A	Rot X =		N/A
Port : 1	Y =	N/A	Rot Y =		N/A
Active : Yes	Z =	N/A	Rot Z =		N/A
Status : No measurements					
Operator : Operator					
Station : 2					
Sensor : TDA5005	X =	N/A	Rot X =		N/A
Port : 2	Y =	N/A	Rot Y =		N/A
Active : Yes	Z =	N/A	Rot Z =		N/A
Status : No measurements					
Operator : Operator					

Single Point

Workpiece : PANEL_50
Point ID : 001_1
Coordinate system : DEFAULT/BASE
Coordinate type : RHR

Coordinates	X =	1985.362	RMSx =	0.000
	Y =	-3342.441	RMSy =	0.002
	Z =	94.113	RMSz =	0.057
Total RMS	=	0.057		

Measurements

Station	Hz	V	D	devX	devY	devZ
1	78.4622	88.6120	0.000	-0.000	-0.002	-0.063
2	55.4500	88.1116	0.000	0.000	0.002	0.050

Single Point

Workpiece : PANEL_50
Point ID : 001_75
Coordinate system : DEFAULT/BASE
Coordinate type : RHR

Coordinates	X =	1394.253	RMSx =	0.000
	Y =	-3342.554	RMSy =	0.001
	Z =	99.017	RMSz =	0.042
Total RMS	=	0.042		

Measurements

Station	Hz	V	D	devX	devY	devZ
1	86.5299	88.4341	0.000	0.000	0.001	0.042
2	64.4923	88.1328	0.000	-0.000	-0.001	-0.042

Single Point

Workpiece : PANEL_50
 Point ID : 001_150
 Coordinate system : DEFAULT/BASE
 Coordinate type : RHR

Coordinates X = 795.286 RMSx = 0.000
 Y = -3342.278 RMSy = 0.001
 Z = 104.414 RMSz = 0.023

Total RMS = 0.023

Measurements

Station	Hz	V	D	devX	devY	devZ
1	95.7875	88.2583	0.000	-0.000	-0.001	-0.019
2	72.5532	88.1868	0.000	0.000	0.001	0.025

Single Point

Workpiece : PANEL_50
 Point ID : 050_1
 Coordinate system : DEFAULT/BASE
 Coordinate type : RHR

Coordinates X = 1982.014 RMSx = 0.000
 Y = -3344.773 RMSy = 0.000
 Z = -297.908 RMSz = 0.002

Total RMS = 0.002

Measurements

Station	Hz	V	D	devX	devY	devZ
1	78.5223	94.3814	0.000	0.000	-0.000	0.002
2	55.4942	94.6060	0.000	-0.000	0.000	-0.002

Single Point

Workpiece : PANEL_50
 Point ID : 050_150
 Coordinate system : DEFAULT/BASE
 Coordinate type : RHR

Coordinates X = 791.532 RMSx = 0.000
 Y = -3343.348 RMSy = 0.004
 Z = -287.530 RMSz = 0.044

Total RMS = 0.044

(Salto hasta el final del informe) ...

Measurements

Station	Hz	V	D	devX	devY	devZ
1	88.9302	96.8016	0.000	-0.000	0.003	-0.022
2	64.2258	96.3807	0.000	0.000	-0.003	0.023

Single Point

Workpiece : TEST_75
Point ID : 149
Coordinate system : DEFAULT/BASE
Coordinate type : RHR

Coordinates X = 1286.647 RMSx = 0.000
Y = -3579.485 RMSy = 0.003
Z = -456.222 RMSz = 0.026

Total RMS = 0.026

Measurements

Station	Hz	V	D	devX	devY	devZ
1	89.4011	96.8386	0.000	-0.000	0.003	-0.025
2	64.5575	96.3823	0.000	0.000	-0.003	0.026

Single Point

Workpiece : TEST_75
Point ID : 150
Coordinate system : DEFAULT/BASE
Coordinate type : RHR

Coordinates X = 1275.503 RMSx = 0.000
Y = -3575.672 RMSy = 0.004
Z = -458.410 RMSz = 0.032

Total RMS = 0.032

Measurements

Station	Hz	V	D	devX	devY	devZ
1	89.5399	96.8842	0.000	-0.000	0.004	-0.031
2	64.7299	96.4125	0.000	0.000	-0.004	0.033

Axis Alignment

Workpiece : TEST_75
Coordinate system : COORD_GENERAL
Comment :

Beginning coordinate system : DEFAULT/BASE

Translations X = 11890.657 RMSx = 0.000
Y = -13407.689 RMSy = 0.000
Z = -10723.838 RMSz = 0.000

Rotations RotX / VectorX = 269.6632 Sx = 0.0000
RotY / VectorY = 0.0086 Sy = 0.0000
RotZ / VectorZ = 180.4898 Sz = 0.0000

Scale = 1.00000000 SScale = 0.000

Alignment Points

WpID	Point ID	X	Y	Z
PANEL_50	100_1	10000.000	10000.000	10000.000
PANEL_50	100_150	11190.230	10000.000	10000.000
PANEL_50	001_1	9999.415	10791.841	10000.000

Informe de Transformación Tridimensional de Semejanza de FOCal

*** Parámetros de la Transformación ***

Factor de escala

s=1.00000

Matriz de rotación

R=1.00000 0.00029 -0.00098
 -0.00029 0.99999 0.00396
 0.00098 -0.00396 0.99999

Giros

Omega=-0.25242

Fi=-0.06221

Kappa=-0.01851

Traslaciones

T=-5.80379
 34.35884
 -318.49740

*** Residuos de la Transformación ***

Nº Pto.	Xorigen	Yorigen	Zorigen	Xdestino	Ydestino	Zdestino	Vx	Vy	Vz	Vtot
1001001	9998.358	10795.322	10285.627	9999.415	10791.841	10000.000	-0.0520	0.0074	-0.0081	0.0532
1001075	10589.415	10794.999	10286.214	10590.544	10791.691	9999.769	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1001150	11188.427	10795.050	10286.706	11189.536	10791.970	9999.923	-0.0006	0.0627	-0.0014	0.0627
1050001	9998.201	10403.393	10287.340	9999.412	10399.799	9999.972	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1050150	11188.662	10403.188	10289.470	11189.939	10400.009	10001.156	0.0510	-0.0285	0.0187	0.0614
1100001	9998.692	10003.484	10288.745	10000.000	10000.000	10000.000	-0.0339	0.0104	0.0080	0.0364
1100075	10589.782	10003.301	10290.800	10591.141	9999.924	10001.270	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1100150	11188.852	10003.201	10289.933	11190.230	10000.000	10000.000	0.0355	-0.0519	-0.0172	0.0652

Desviación típica = 0.0117

(Residuos y desviación típica, en las unidades del sistema destino)

Informe de la Calibración de FOCal (*.txt)

Resultados de la Transformación Lineal Directa

Parámetros:

L1 = 0.00123693
L2 = 0.00000595
L3 = 0.00000353
L4 = -13.19327328
L5 = -0.00000541
L6 = 0.00124114
L7 = -0.00005434
L8 = -12.30335035
L9 = 0.00000045
L10 = -0.00000354
L11 = -0.00009203
Desviación típica = 0.00713116 mm

Recuperación de parámetros físicos:

Parámetros de Orientación Interna:

x0 = 0.0249 mm
y0 = 0.0720 mm
fx = 13.4304 mm
fy = 13.4887 mm

Parámetros de Orientación Externa:

Omega = -2.2000 deg ; -0.0384 rad
Phi = -0.2802 deg ; -0.0049 rad
Kappa = -0.2510 deg ; -0.0044 rad
Xo = 10585.9379
Yo = 10419.5999
Zo = 10517.3342

***** Resultados de la Calibración *****

Parámetros de Orientación Interna:

x0 = 0.0546 mm
y0 = 0.1030 mm
f = 13.9648 mm

Parámetros de Orientación Externa:

Omega = -2.0743 deg ; -0.0362 rad
Phi = -0.3895 deg ; -0.0068 rad
Kappa = 0.2602 deg ; 0.0045 rad
Xo = 10585.9504
Yo = 10419.5946
Zo = 10517.9027

Parámetros de la Función de Distorsión

Modelo de distorsión clásica (Brown):

Distorsión radial:

k1 = 0.00070399
k2 = -0.00000151
k3 = -0.00000000

Distorsión tangencial:

p1 = 0.00001094
p2 = -0.00000868

Resultados tras 2 iteraciones:

Pto	x_origen	y_origen	Res. x	Res. y	Res. tot	x_fotoco	y_fotoco	distor_x	distor_y
1046029	-8.3608	6.1280	0.0033	-0.0021	0.0039	-8.8562	6.3405	-0.4408	0.3155
1054029	-6.0759	6.1744	0.0008	-0.0004	0.0009	-6.3874	6.3258	-0.2568	0.2545
1064029	-3.1526	6.2291	0.0014	0.0013	0.0019	-3.3015	6.3068	-0.0943	0.1807
1074029	-0.1607	6.2398	0.0024	0.0020	0.0032	-0.2201	6.2841	-0.0048	0.1473
1084029	2.8282	6.1895	0.0042	0.0024	0.0048	2.8518	6.2567	0.0783	0.1703
1094029	5.7341	6.0912	0.0025	0.0004	0.0026	5.9051	6.2248	0.2257	0.2366
1103029	8.2664	5.9956	-0.0030	-0.0023	0.0038	8.6370	6.1961	0.4253	0.3035
1046040	-8.3862	2.9071	-0.0007	0.0005	0.0009	-8.8104	2.9264	-0.3695	0.1224
1054040	-6.1268	2.9352	-0.0008	0.0007	0.0011	-6.3584	2.9131	-0.1770	0.0809
1064040	-3.2004	2.9643	-0.0010	0.0021	0.0023	-3.2956	2.8970	-0.0406	0.0357
1074040	-0.1791	2.9645	0.0013	0.0013	0.0018	-0.2350	2.8775	-0.0012	0.0161
1084040	2.8405	2.9317	0.0036	0.0029	0.0046	2.8159	2.8589	0.0300	0.0302
1094040	5.7573	2.8693	0.0031	0.0018	0.0036	5.8494	2.8368	0.1467	0.0706
1103040	8.2669	2.8059	-0.0025	0.0007	0.0026	8.5623	2.8171	0.3500	0.1143
1046050	-8.3664	-0.0279	-0.0015	-0.0005	0.0015	-8.7624	-0.1368	-0.3413	-0.0059
1054050	-6.1244	-0.0415	-0.0023	0.0001	0.0023	-6.3289	-0.1484	-0.1498	-0.0038
1064050	-3.2083	-0.0593	-0.0014	-0.0003	0.0014	-3.2865	-0.1636	-0.0236	-0.0013
1074050	-0.1929	-0.0753	0.0000	-0.0004	0.0004	-0.2475	-0.1783	-0.0000	-0.0000
1084050	2.8224	-0.0878	0.0017	-0.0001	0.0017	2.7827	-0.1919	0.0150	-0.0011
1094050	5.7323	-0.0976	0.0018	0.0003	0.0018	5.7980	-0.2051	0.1203	-0.0045
1103050	8.2282	-0.1051	-0.0032	0.0006	0.0033	8.4948	-0.2169	0.3212	-0.0087
1046060	-8.2888	-2.9193	-0.0001	-0.0009	0.0009	-8.7084	-3.1555	-0.3649	-0.1332
1054060	-6.0614	-2.9743	-0.0012	-0.0017	0.0021	-6.2938	-3.1674	-0.1778	-0.0901
1064060	-3.1773	-3.0351	-0.0020	-0.0021	0.0029	-3.2757	-3.1810	-0.0438	-0.0429
1074060	-0.2021	-3.0670	-0.0005	-0.0021	0.0022	-0.2584	-3.1923	-0.0017	-0.0223
1084060	2.7740	-3.0611	0.0017	-0.0026	0.0031	2.7519	-3.2019	0.0325	-0.0378
1094060	5.6537	-3.0227	0.0002	-0.0014	0.0014	5.7466	-3.2081	0.1475	-0.0825
1103060	8.1370	-2.9776	-0.0039	0.0003	0.0039	8.4278	-3.2126	0.3455	-0.1320
1046071	-8.1642	-5.9979	0.0013	0.0013	0.0018	-8.6465	-6.4201	-0.4276	-0.3192
1054071	-5.9459	-6.0675	0.0003	0.0010	0.0011	-6.2523	-6.4309	-0.2518	-0.2604
1064071	-3.1098	-6.1510	-0.0011	-0.0010	0.0015	-3.2604	-6.4450	-0.0959	-0.1910
1074071	-0.2082	-6.1929	-0.0009	-0.0030	0.0031	-0.2691	-6.4562	-0.0062	-0.1603
1084071	2.6947	-6.1745	0.0009	-0.0021	0.0023	2.7175	-6.4609	0.0774	-0.1833
1094071	5.5246	-6.1082	-0.0018	0.0012	0.0022	5.6894	-6.4601	0.2194	-0.2489
1103071	7.9969	-6.0395	-0.0053	0.0024	0.0058	8.3524	-6.4598	0.4101	-0.3172
6034021	-8.4599	6.1808	0.0012	-0.0005	0.0013	-8.9649	6.3992	-0.4504	0.3214
6045021	-6.2141	6.2216	0.0021	-0.0013	0.0025	-6.5371	6.3806	-0.2684	0.2621
6055021	-4.1403	6.2626	0.0026	-0.0012	0.0028	-4.3349	6.3654	-0.1399	0.2059
6065021	-2.0267	6.2890	0.0023	-0.0001	0.0023	-2.1366	6.3512	-0.0552	0.1652
6075021	0.1094	6.2870	0.0001	0.0002	0.0002	0.0565	6.3343	0.0018	0.1504
6085021	2.2413	6.2534	0.0001	0.0012	0.0012	2.2459	6.3152	0.0592	0.1648
6095021	4.3374	6.1927	0.0002	0.0014	0.0014	4.4274	6.2940	0.1447	0.2043
6105021	6.3840	6.1196	0.0011	0.0022	0.0024	6.6026	6.2748	0.2732	0.2582
6115021	8.3917	6.0510	0.0029	0.0034	0.0045	8.7746	6.2584	0.4376	0.3104
6034031	-8.4732	4.0904	-0.0006	-0.0005	0.0007	-8.9301	4.1752	-0.4022	0.1878
6045031	-6.2484	4.1277	0.0021	-0.0014	0.0025	-6.5147	4.1598	-0.2117	0.1351
6055031	-4.1776	4.1618	0.0013	-0.0001	0.0013	-4.3253	4.1481	-0.0931	0.0893
6065031	-2.0532	4.1807	0.0017	-0.0002	0.0017	-2.1371	4.1347	-0.0293	0.0569
6075031	0.0994	4.1777	-0.0006	-0.0001	0.0006	0.0454	4.1201	0.0007	0.0454
6085031	2.2487	4.1511	0.0004	0.0015	0.0016	2.2254	4.1053	0.0313	0.0572
6095031	4.3537	4.1013	-0.0003	0.0006	0.0007	4.3954	4.0872	0.0963	0.0889
6105031	6.3967	4.0408	-0.0018	0.0005	0.0019	6.5574	4.0706	0.2154	0.1329
6115031	8.3883	3.9823	0.0017	0.0028	0.0033	8.7198	4.0578	0.3862	0.1786
6034041	-8.4723	1.9961	-0.0002	-0.0012	0.0012	-8.8910	1.9734	-0.3640	0.0803
6045041	-6.2654	2.0121	0.0006	-0.0014	0.0015	-6.4920	1.9608	-0.1720	0.0517
6055041	-4.1966	2.0255	0.0018	-0.0008	0.0019	-4.3124	1.9501	-0.0611	0.0276
6065041	-2.0693	2.0307	0.0017	-0.0010	0.0020	-2.1357	1.9384	-0.0118	0.0107
6075041	0.0905	2.0238	-0.0005	-0.0017	0.0018	0.0360	1.9256	0.0001	0.0049
6085041	2.2453	2.0062	-0.0013	-0.0004	0.0013	2.2036	1.9142	0.0129	0.0110
6095041	4.3546	1.9779	-0.0015	0.0007	0.0016	4.3637	1.9024	0.0638	0.0275
6105041	6.3957	1.9421	-0.0020	0.0003	0.0020	6.5163	1.8894	0.1753	0.0503
6115041	8.3737	1.9066	-0.0002	0.0009	0.0009	8.6659	1.8780	0.3468	0.0744
6034051	-8.4471	-0.0926	-0.0012	-0.0016	0.0020	-8.8512	-0.2044	-0.3495	-0.0087
6045051	-6.2520	-0.1069	0.0010	-0.0015	0.0018	-6.4653	-0.2156	-0.1587	-0.0056
6055051	-4.1932	-0.1193	0.0009	-0.0010	0.0014	-4.2992	-0.2251	-0.0513	-0.0029
6065051	-2.0716	-0.1306	0.0020	-0.0003	0.0020	-2.1329	-0.2344	-0.0066	-0.0008
6075051	0.0812	-0.1410	-0.0011	-0.0003	0.0012	0.0266	-0.2440	0.0000	-0.0000
6085051	2.2297	-0.1497	-0.0026	-0.0006	0.0027	2.1825	-0.2536	0.0074	-0.0009
6095051	4.3337	-0.1555	-0.0026	0.0001	0.0026	4.3327	-0.2619	0.0537	-0.0034
6105051	6.3693	-0.1608	-0.0016	-0.0002	0.0016	6.4766	-0.2709	0.1620	-0.0071
6115051	8.3381	-0.1650	0.0005	0.0001	0.0006	8.6158	-0.2794	0.3323	-0.0113
6034061	-8.3932	-2.1563	-0.0020	-0.0014	0.0025	-8.8098	-2.3570	-0.3619	-0.0977
6045061	-6.2083	-2.1987	0.0009	-0.0002	0.0009	-6.4371	-2.3663	-0.1741	-0.0645
6055061	-4.1634	-2.2360	0.0013	0.0001	0.0013	-4.2830	-2.3754	-0.0649	-0.0363
6065061	-2.0605	-2.2646	0.0017	0.0001	0.0017	-2.1296	-2.3841	-0.0146	-0.0165
6075061	0.0725	-2.2781	-0.0016	0.0014	0.0021	0.0179	-2.3906	0.0001	-0.0095
6085061	2.2029	-2.2778	-0.0021	0.0007	0.0022	2.1638	-2.3979	0.0155	-0.0171
6095061	4.2911	-2.2625	-0.0019	0.0011	0.0022	4.3037	-2.4032	0.0673	-0.0376
6105061	6.3146	-2.2396	-0.0011	0.0005	0.0012	6.4372	-2.4091	0.1772	-0.0665
6115061	8.2761	-2.2142	0.0018	0.0001	0.0018	8.5665	-2.4149	0.3451	-0.0977

Calibración geométrica de cámaras no métricas.
Estudio de metodologías y modelos matemáticos de distorsión

6034071	-8.3179	-4.1794	-0.0037	-0.0025	0.0045	-8.7681	-4.4860	-0.3956	-0.2036
6045071	-6.1397	-4.2395	0.0009	0.0005	0.0011	-6.4073	-4.4927	-0.2129	-0.1502
6055071	-4.1139	-4.2949	0.0006	0.0000	0.0006	-4.2665	-4.5020	-0.0979	-0.1040
6065071	-2.0382	-4.3351	0.0006	0.0005	0.0008	-2.1262	-4.5095	-0.0333	-0.0714
6075071	0.0650	-4.3535	-0.0012	0.0001	0.0012	0.0107	-4.5165	0.0004	-0.0600
6085071	2.1656	-4.3472	-0.0012	-0.0015	0.0019	2.1455	-4.5228	0.0346	-0.0725
6095071	4.2279	-4.3140	-0.0023	0.0015	0.0028	4.2734	-4.5228	0.1001	-0.1058
6105071	6.2357	-4.2703	-0.0012	0.0008	0.0014	6.3968	-4.5260	0.2157	-0.1527
6115071	8.1918	-4.2258	0.0031	-0.0020	0.0037	8.5167	-4.5310	0.3795	-0.2021
6034081	-8.2309	-6.1546	-0.0021	-0.0029	0.0036	-8.7226	-6.5895	-0.4370	-0.3319
6045081	-6.0578	-6.2168	0.0009	0.0006	0.0011	-6.3767	-6.5947	-0.2643	-0.2749
6055081	-4.0511	-6.2770	0.0014	0.0013	0.0019	-4.2477	-6.6021	-0.1419	-0.2220
6065081	-2.0073	-6.3224	0.0010	0.0011	0.0015	-2.1204	-6.6095	-0.0584	-0.1841
6075081	0.0571	-6.3418	-0.0018	0.0006	0.0019	0.0030	-6.6156	0.0005	-0.1708
6085081	2.1213	-6.3309	-0.0010	0.0000	0.0010	2.1266	-6.6193	0.0599	-0.1853
6095081	4.1537	-6.2909	-0.0022	0.0026	0.0034	4.2429	-6.6179	0.1439	-0.2240
6105081	6.1445	-6.2398	0.0002	0.0000	0.0002	6.3566	-6.6204	0.2667	-0.2776
6115081	8.0966	-6.1887	0.0033	-0.0024	0.0041	8.4645	-6.6223	0.4225	-0.3306

Puntos medidos: 98

***** Estudio de la precisión *****

Varianza a posteriori: 0.000003 mm2

Matriz de Covarianzas de los parámetros:

0.000013	-0.000000	0.000000	-0.000000	-0.000001	0.000000	0.000035	0.000001	0.000003	0.000000	-
0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000							
-0.000000	0.000008	-0.000000	0.000001	0.000000	0.000000	-0.000000	0.000035	-0.000005	-0.000000	
0.000000	-0.000000	0.000000	-0.000000							
0.000000	-0.000000	0.000013	-0.000000	-0.000000	-0.000000	0.000001	0.000005	0.000122	0.000000	-
0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000							
-0.000000	0.000001	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	-0.000000	
0.000000	-0.000000	0.000000	-0.000000							
-0.000001	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	-0.000000	-0.000000	-0.000000	-0.000000	
0.000000	-0.000000	0.000000	-0.000000							
0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	-0.000000	
0.000000	-0.000000	-0.000000	-0.000000							
0.000035	-0.000000	0.000001	0.000000	-0.000000	0.000000	0.001071	0.000001	0.000025	0.000000	-
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000							
0.000001	0.000035	0.000005	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000001	0.001077	0.000131	-0.000000	
0.000000	-0.000000	-0.000000	0.000000							
0.000003	-0.000005	0.000122	-0.000000	-0.000000	-0.000000	0.000025	0.000131	0.003998	0.000000	-
0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000							
0.000000	-0.000000	0.000000	-0.000000	-0.000000	-0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	-
0.000000	0.000000	-0.000000	-0.000000							
-0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000	-0.000000	-0.000000	
0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000							
0.000000	-0.000000	0.000000	-0.000000	-0.000000	-0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	-
0.000000	0.000000	-0.000000	-0.000000							
-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000	-0.000000	
0.000000	-0.000000	0.000000	-0.000000							
0.000000	-0.000000	-0.000000	-0.000000	-0.000000	-0.000000	0.000000	0.000000	-0.000000	-0.000000	
0.000000	-0.000000	-0.000000	0.000000							

Precisión de los parámetros:

0.003538	0.002769	0.003614	0.000198	0.000259	0.000024	0.032732	0.032824	0.063230	0.000013
0.000000	0.000000	0.000007	0.000005						

Resultado de la Calibración de FOCal (*.int)

0.0546
0.1030
13.9648
Brown
3
0.0007039887
-0.0000015110
-0.0000000043
2
0.0000109384
-0.0000086850

Informe de la Orientación Relativa de Taller Fotogramétrico

```
*****
*
*          ORIENTACIÓN RELATIVA ANALÍTICA          *
*
*      (C)  F. J.  García Lázaro  1.995  -   2002  *
*
*****
```

Fotograma fijo :1a_161, Fotograma móvil :3a_161

Criterios de convergencia :
=====

Mínima variación Desviación típica entre iteraciones (tanto por mil) :1
Máximo número de iteraciones :5

Puntos comunes a los dos fotogramas :12

101	3.488	4.105	-1.304	4.124
102	2.778	-0.342	-1.930	-0.333
103	3.010	-4.770	-1.811	-4.770
104	-1.268	2.816	-6.034	2.830
105	-0.806	0.545	-5.613	0.554
106	-1.054	-2.525	-5.715	-2.519
107	6.578	2.614	1.742	2.632
108	6.070	-0.499	1.293	-0.488
109	6.168	-2.314	1.231	-2.307
110	-3.831	5.014	-8.592	5.032
114	8.375	-0.470	3.393	-0.459
115	8.527	-4.447	3.985	-4.444

Parámetros Iniciales Estación 1:
=====

X0=	0.000	omega=	0.000
Y0=	0.000	phi =	0.000
Z0=	0.000	kappa=	0.000

Parámetros Iniciales Estación 2:
=====

X0=	4.500	omega=	0.000
Y0=	0.000	phi =	0.000
Z0=	0.000	kappa=	0.000

Iteración número 1
=====

Nuevos parámetros para estación 2:
=====

X0=	4.500	omega=	-0.000
Y0=	-0.006	phi =	0.001
Z0=	-0.029	kappa=	-0.000

Suma cuadrados residuos =0.000000

Máximo residuo (coplanaridad) =0.0000010599 en el punto 106

SOLUCIÓN TRAS 1 ITERACIONES :

Estación 1:
=====

Estación 2:
=====

X0=	0.000	omega=	0.000	X0=	4.500	omega=	-0.000
Y0=	0.000	phi =	0.000	Y0=	-0.006	phi =	0.001
Z0=	0.000	kappa=	0.000	Z0=	-0.029	kappa=	-0.000

Desviación típica de referencia "a posteriori": 0.0000007589

=====

Matriz de cofactores de los parámetros estimados :

=====

Matriz de configuración :

=====

- 240 -

Resultado de la Calibración de Image Master

```

////////////////////////////////////
//              Bundle Adjustment Results              //
////////////////////////////////////

```

Project Name Project1

[Control Points]

Accuracy [m] 0.00200 0.00200 0.00200

Control Point Coordinates

PointName	X[m]	Y[m]	Z[m]
1	0.07491	-0.07059	0.00000
2	0.27467	-0.07059	0.00000
3	0.07491	-0.16471	0.00000
4	0.27467	-0.16471	0.00000
5	0.17479	-0.11765	0.00000
-11	0.09709	-0.07059	0.00000
-21	0.05273	-0.07059	0.00000
-31	0.07491	-0.04951	0.00000

Salto ...

238	0.29964	-0.23530	0.00000
239	0.32461	-0.23530	0.00000
240	0.34958	-0.23530	0.00000

Number of Control Points 165

[Known Length]

Number of Known Length 0

[Camera Parameters]

Number of Cameras 1

Camera 1

Camera Name	CameraInit
CameraType	Digital Camera
Focal Length [mm]	14.000000
x of Principal Point [mm]	8.486400
y of Principal Point [mm]	6.364800

Distortion Parameters

K1	0.000000e+000
K2	0.000000e+000
P1	0.000000e+000
P2	0.000000e+000

[Image Parameters]

Number of Images 5

Image 1

Image Name	Front
Width [pixels]	3264
Height [pixels]	2448
x Resolution [mm]	0.005200
y Resolution [mm]	0.005200
Camera Name	CameraInit

Image 2

Image Name	LookDown
Width [pixels]	3264

Height [pixels] 2448
x Resolution [mm] 0.005200
y Resolution [mm] 0.005200
Camera Name CameraInit

Salto ...

[Image Coordinates]

Image 1

Image Name Front

Image Coordinates and Residuals

PointName	x[pixel]	y[pixel]	dx[pixel]	dy[pixel]
1	933.620	911.810	0.011	-0.039
2	2337.580	907.920	-0.065	-0.116
3	935.570	1571.570	0.056	0.070
4	2335.490	1571.100	-0.026	0.064
5	1634.050	1242.050	0.012	-0.012
101	438.060	434.390	-0.016	0.034
102	603.310	430.230	-0.001	-0.026
103	771.260	426.360	-0.001	-0.037
104	940.650	422.830	-0.077	0.010

Salto ...

237	2325.950	2018.680	-0.048	0.111
238	2495.900	2014.540	-0.069	0.071
239	2663.780	2009.900	-0.097	0.068
240	2830.580	2004.950	-0.180	0.058

RMS [pixel] 0.209

Number of Image Coordinates 144

[Calculated Coordinates]

Calculated Coordinates and Residuals

PointName	X[m]	Y[m]	Z[m]	DX[m]	DY[m]
DZ[m]					
1	0.0750332	-0.0706312	0.0001703	0.0001224	-0.0000427
0.0001703					
2	0.2746310	-0.0704877	-0.0000126	-0.0000420	0.0001008
-0.0000126					
3	0.0748693	-0.1648424	0.0003412	-0.0000415	-0.0001359
0.0003412					
4	0.2745541	-0.1647302	0.0000835	-0.0001189	-0.0000237
0.0000835					
5	0.1748027	-0.1177410	0.0001252	0.0000107	-0.0000935
0.0001252					
101	0.0002517	0.0001965	-0.0005705	0.0002517	0.0001965
-0.0005705					
102	0.0252142	0.0001606	-0.0006667	0.0002439	0.0001606
-0.0006667					
103	0.0502282	0.0001353	-0.0008277	0.0002877	0.0001353
-0.0008277					

238	0.2996268	-0.2353563	-0.0002864	-0.0000164	-
0.0000613	-0.0002864				
239	0.3245601	-0.2353375	-0.0001552	-0.0000535	-
0.0000425	-0.0001552				
240	0.3496185	-0.2353324	-0.0000399	0.0000347	-
0.0000374	-0.0000399				
Standard Deviation [m]	0.0001217	0.0001218	0.0006014		
Maximum Residuals [m]	0.0003116	0.0003821	0.0016952		
Number of Calculated Coordinates	145				
Number of Control Points	145				

[Camera Locations]

Camera Positions and Angles					
ImageName	Xo[m]	Yo[m]	Zo[m]	Omega[deg]	
Phi[deg]	Kappa[deg]				
Front	0.1802619	-0.1073912	0.3805421	0.665634	-
0.607067	0.067456				
LookDown	0.1791756	-0.1883683	0.3800182	-11.712227	-
0.559744	0.229297				
Right	0.2796084	-0.1075728	0.3235257	0.746380	-
16.943752	-0.065629				
Left	0.0479479	-0.1059323	0.3334990	0.739325	
20.362151	0.524900				
LookUp	0.1802100	-0.0361107	0.3486490	12.445287	-
0.327750	0.642090				

Resultado de la Calibración de Calibración

Informe de la orientación y calibración

Fichero de fotograma: D:\Doctorado\Tesis\f14-F11-E50\Calibra\Pixel-61.txt

Fichero de apoyo: D:\Doctorado\Tesis\f14-F11-E50\Calibra\CoordTerreno.txt

Nombre del fotograma: OlympusE500

Número de puntos para el cálculo: 18664

```

/-----\
|               CONFIGURACIÓN               |
\-----/

```

**Valores Conocidos

Coordenadas medidas --> fotocoordenadas

```

Tx      1632 px
Ty      -1224 px
giro    0
esc     0.00531 mm/px
esc x/y 1
delta   0

```

**Parámetros a calcular y valores aproximados

Orientación externa

```

X
Y
Z
W      0
PHI    0
K

```

Orientación interna

```

xp
yp
f      14 mm

```

Función de distorsión

Calculada para un valor máximo de r de 11 mm (semidiagonal)

Modelo polinómico: Impar

$$s=r/11$$

Simétrica, radial:

$$Dr= a2(2s^3 -s) + a3(4.8s^5 -4.7s^3 +0.9s) + a4(12.8s^7 -19.1s^5 +8.2s^3 -0.9s)$$

Condición: Ortogonalidad

Simétrica, tangencial:

$$Dt= b2(2s^3 -s) + b3(4.8s^5 -4.7s^3 +0.9s)$$

Distorsiones asimétricas: No

```

/-----\

```

RESULTADOS

PARÁMETROS Y PRECISIONES

Coordenadas medidas --> fotocoordenadas

	valor	precisión
Tx=	1632 px	
Ty=	1224 px	
giro=	0	
esc=	0.00531	
esc x/y=	1	
delta=	0	

Transformación de coordenadas medidas a fotocoordenadas

xf= 0.00531000(x-1632) (x,y): px, (xf,yf): mm
yf= -0.00531000(y-1224)

Orientación externa

	valor	precisión
X=	10585.8291 m	0.0016
Y=	10420.1948 m	0.0016
Z=	10517.9248 m	0.0035
W=	2.3066	3.1E-04
PHI=	0.4509	2.3E-04
K=	-0.2870	8.5E-05

Matriz M de rotación, de paso del sistema objeto al sistema fotograma

0.999965	0.004761	0.006915
-0.004508	0.999332	-0.036255
-0.007083	0.036223	0.999319

Orientación interna: f,xp,yp

	valor	precisión
f=	13.5329 mm	6.8E-05
xp=	0.0551 mm	6.4E-05
yp=	0.1190 mm	7.6E-05

Orientación interna: Función de distorsión

Todos los valores de los parámetros, precisiones e importancias son mm.

Modelo polinómico: Impar

Simétrica, radial

	valor	precisión	importancia
a2=	-0.2860	3.8E-05	0.0743
a3=	0.0845	7.1E-05	0.0118
a4=	-0.0002	1.0E-04	0.0000

Correlación a2, focal: 0.096

Dr= 0.3622s -0.9706s^3 +0.4091s^5 -0.0024s^7 (mm) , s=r/11 (mm)

Simétrica, tangencial

	valor	precisión	importancia
b2=	-0.0008	0.000036	0.0002

b3= 0.0003 0.000065 0.0000

Dt= 0.0011s -0.0031s³ +0.0016s⁵ (mm) , s=r/11 (mm)

Importancia total de la distorsion: 0.0753 mm

RESIDUOS

punto	x	y	res. x	res. y
6034021	35.86	57.85	1.8	1.1
6035021	74.23	57.36	1.5	0.98
6036021	112.63	56.66	1.3	0.75
6037021	150.85	55.91	0.95	0.54
6038021	189.38	55.33	0.91	0.53
6039021	227.82	54.59	0.78	0.41
6040021	266.31	53.84	0.69	0.32
6041021	304.86	53.24	0.63	0.41
6042021	343.41	52.46	0.55	0.34
6043021	382.32	51.64	0.79	0.26
6044021	420.74	50.85	0.49	0.22
6045021	459.58	50.16	0.56	0.30
6046021	498.22	49.31	0.38	0.22
6047021	537.29	48.44	0.56	0.14
6048021	575.86	47.55	0.18	0.031
6049021	615.23	46.73	0.52	-0.016
6050021	654.12	45.92	0.32	-0.054
Salto ...				
11139100	3090.43	2317.39	-0.43	-0.20
11140100	3112.31	2316.72	-0.39	-0.29
11141100	3134.11	2316.24	-0.42	-0.21
11142100	3155.74	2315.57	-0.61	-0.33
11143100	3177.6	2315.19	-0.56	-0.17

Desviación típica estimada a posteriori de las medidas sobre el fotograma:
0.19 px

TRANSFORMACIÓN LINEAL DIRECTA que mejor aproxima la transformación de coordenadas objeto a coordenadas imagen

$$x = (L1 \cdot X + L2 \cdot Y + L3 \cdot Z + L4) / (L9 \cdot X + L10 \cdot Y + L11 \cdot Z + L12)$$

$$y = (L5 \cdot X + L6 \cdot Y + L7 \cdot Z + L8) / (L9 \cdot X + L10 \cdot Y + L11 \cdot Z + L12)$$

Normalización $L9^2 + L10^2 + L11^2 = 1$

L1= 2560.114
L2= -47.35697
L3= -1623.644
L4= 43019120
L5= 19.99861
L6= -2590.395
L7= -1108.381
L8= 37409660
L9= 0.0070826
L10= -0.0362227
L11= -0.9993186
L12= 9956.933

Normalización $L9 + L10 + L11 = 1$

L1= -2489.272
L2= 46.04655
L3= 1578.716
L4= -41828720
L5= -19.44522
L6= 2518.716
L7= 1077.710
L8= -36374490

L9= -0.0068866
L10= 0.0352204
L11= 0.9716662
L12= -9681.412

Normalización L12=1

L1= 0.2571187
L2= -0.004756181
L3= -0.1630667
L4= 4320.519
L5= 0.002008511
L6= -0.2601599
L7= -0.1113175
L8= 3757.147
L9= 0.0000007113269
L10= -0.000003637942
L11= -0.0001003641
L12= 1.000000

Resumen del análisis de los ensayos para Brown (r3 t2)

Tipo	Combinación	Ptos	VarPost	DesvPost	Prec-x0	Prec-y0	Prec-foc	Prec-om	Prec-fi	Prec-kp	Prec-X0	Prec-Y0	Prec-Z0
1-Br32	678901	52348	0,000001	0,001000	0,000134	0,000098	0,000109	0,000007	0,000010	0,000001	0,001411	0,001417	0,003104
1-Br32	78901	47346	0,000001	0,001000	0,000136	0,000100	0,000116	0,000007	0,000010	0,000001	0,001722	0,001729	0,003789
1-Br32	8901	41316	0,000001	0,001000	0,000143	0,000107	0,000131	0,000008	0,000010	0,000001	0,002254	0,002264	0,004954
1-Br32	601	29644	0,000001	0,001000	0,000164	0,000119	0,000127	0,000009	0,000012	0,000001	0,001615	0,001622	0,003552
1-Br32	61	18664	0,000001	0,001000	0,000213	0,000153	0,000156	0,000011	0,000016	0,000001	0,001666	0,001673	0,003666
Mix-Br32	1234567890_11	13818	0,000001	0,001000	0,000248	0,000194	0,000233	0,000012	0,000017	0,000001	0,006888	0,006965	0,012257
Mix-Br32	135679_11	13747	0,000001	0,001000	0,000255	0,000206	0,000265	0,000012	0,000016	0,000001	0,008285	0,008380	0,014618
Mix-Br32	16_11	13683	0,000001	0,001000	0,000282	0,000245	0,000352	0,000011	0,000016	0,000001	0,011877	0,012065	0,020533
Mix-Br32	890_11	13732	0,000001	0,001000	0,000397	0,000390	0,000752	0,000011	0,000016	0,000001	0,021674	0,022720	0,046266
Mix-Br32	78901_6	5122	0,000001	0,001000	0,000494	0,000425	0,000734	0,000022	0,000029	0,000002	0,012801	0,012740	0,024651
Mix-Br32	01_6	5062	0,000001	0,001000	0,000513	0,000449	0,000785	0,000021	0,000029	0,000002	0,013819	0,013791	0,026775
Mix-Br32	12345_6	5056	0,000001	0,001000	0,000642	0,000613	0,001037	0,000021	0,000029	0,000002	0,019639	0,020266	0,038187
2-Br32	16	1962	0,000001	0,001000	0,000691	0,000515	0,000595	0,000037	0,000051	0,000004	0,005284	0,005305	0,011382
Mix-Br32	135_6	5035	0,000001	0,001000	0,000710	0,000693	0,001220	0,000021	0,000029	0,000002	0,023011	0,023786	0,044954
1-Br32	45678901	60546	0,000002	0,001414	0,000137	0,000100	0,000106	0,000007	0,000010	0,000001	0,001113	0,001117	0,002447
1-Br32	5678901	56604	0,000002	0,001414	0,000137	0,000101	0,000108	0,000007	0,000010	0,000001	0,001252	0,001256	0,002756
1-Br32	345678901	63780	0,000002	0,001414	0,000138	0,000101	0,000105	0,000007	0,000010	0,000001	0,001002	0,001005	0,002205
1-Br32	2345678901	66632	0,000002	0,001414	0,000140	0,000103	0,000105	0,000008	0,000010	0,000001	0,000925	0,000928	0,002037
1-Br32	12345678901	69126	0,000002	0,001414	0,000141	0,000103	0,000105	0,000008	0,000011	0,000001	0,000850	0,000853	0,001873
1-Br32	34567890	50118	0,000002	0,001414	0,000153	0,000113	0,000122	0,000008	0,000011	0,000001	0,001223	0,001228	0,002687
1-Br32	1234567890	55464	0,000002	0,001414	0,000155	0,000115	0,000119	0,000009	0,000012	0,000001	0,001002	0,001007	0,002205
1-Br32	36901	42568	0,000002	0,001414	0,000167	0,000121	0,000125	0,000009	0,000012	0,000001	0,001275	0,001279	0,002811
1-Br32	123456789	44484	0,000002	0,001414	0,000178	0,000132	0,000141	0,000010	0,000013	0,000001	0,001231	0,001237	0,002707
1-Br32	1356791	44368	0,000002	0,001414	0,000181	0,000132	0,000133	0,000010	0,000013	0,000001	0,001054	0,001057	0,002325
1-Br32	12345678	34794	0,000002	0,001414	0,000205	0,000153	0,000173	0,000011	0,000015	0,000001	0,001658	0,001665	0,003650
1-Br32	1201	29988	0,000002	0,001414	0,000210	0,000151	0,000149	0,000011	0,000016	0,000001	0,001060	0,001065	0,002343
1-Br32	345678	29448	0,000002	0,001414	0,000212	0,000161	0,000198	0,000011	0,000015	0,000001	0,002328	0,002338	0,005122
1-Br32	1234567	27810	0,000002	0,001414	0,000234	0,000175	0,000207	0,000013	0,000017	0,000001	0,002060	0,002070	0,004548
1-Br32	461	22606	0,000002	0,001414	0,000248	0,000178	0,000179	0,000013	0,000018	0,000001	0,001526	0,001531	0,003355
2-Br32	12345678901	17970	0,000002	0,001414	0,000270	0,000198	0,000206	0,000015	0,000020	0,000002	0,001679	0,001686	0,003620
1-Br32	123456	21780	0,000002	0,001414	0,000270	0,000205	0,000260	0,000014	0,000019	0,000002	0,002730	0,002744	0,006039
1-Br32	11	16156	0,000002	0,001414	0,000277	0,000197	0,000191	0,000015	0,000021	0,000002	0,001325	0,001329	0,002929
1-Br32	23456	19286	0,000002	0,001414	0,000281	0,000217	0,000295	0,000015	0,000020	0,000002	0,003438	0,003457	0,007614
1-Br32	161	21158	0,000002	0,001414	0,000284	0,000204	0,000200	0,000015	0,000021	0,000002	0,001422	0,001427	0,003141
1-Br32	12346	17524	0,000002	0,001414	0,000291	0,000221	0,000276	0,000016	0,000021	0,000002	0,002795	0,002808	0,006173
2-Br32	1234567890	14470	0,000002	0,001414	0,000293	0,000217	0,000232	0,000016	0,000022	0,000002	0,001959	0,001969	0,004212
1-Br32	1356	14986	0,000002	0,001414	0,000321	0,000243	0,000296	0,000017	0,000023	0,000002	0,003030	0,003043	0,006701
2-Br32	36901	10998	0,000002	0,001414	0,000324	0,000236	0,000248	0,000018	0,000024	0,000002	0,002543	0,002551	0,005492
1-Br32	567	15288	0,000002	0,001414	0,000331	0,000267	0,000419	0,000016	0,000022	0,000002	0,006178	0,006213	0,013716
1-Br32	1234	12522	0,000002	0,001414	0,000334	0,000262	0,000384	0,000017	0,000023	0,000002	0,004276	0,004297	0,009469
2-Br32	123456789	11618	0,000002	0,001414	0,000336	0,000250	0,000274	0,000018	0,000025	0,000002	0,002410	0,002421	0,005182
1-Br32	456	13200	0,000002	0,001414	0,000336	0,000284	0,000500	0,000015	0,000021	0,000002	0,007201	0,007262	0,016097
1-Br32	246	11796	0,000002	0,001414	0,000339	0,000259	0,000335	0,000018	0,000024	0,000002	0,003743	0,003765	0,008274
1-Br32	146	11438	0,000002	0,001414	0,000342	0,000258	0,000310	0,000018	0,000025	0,000002	0,003088	0,003102	0,006827
1-Br32	126	10348	0,000002	0,001414	0,000371	0,000278	0,000321	0,000020	0,000027	0,000002	0,002860	0,002873	0,006308
2-Br32	12345678	9124	0,000002	0,001414	0,000387	0,000290	0,000337	0,000021	0,000028	0,000002	0,003260	0,003276	0,007013
1-Br32	16	7496	0,000002	0,001414	0,000396	0,000295	0,000332	0,000022	0,000029	0,000002	0,002918	0,002931	0,006443
2-Br32	345678	7696	0,000002	0,001414	0,000404	0,000308	0,000387	0,000022	0,000029	0,000002	0,004602	0,004625	0,009927
3-Br32	12345678901	8122	0,000002	0,001414	0,000406	0,000299	0,000314	0,000022	0,000030	0,000003	0,002570	0,002580	0,005507
2-Br32	1201	7780	0,000002	0,001414	0,000410	0,000296	0,000298	0,000022	0,000031	0,000003	0,002122	0,002132	0,004566
2-Br32	1234567	7311	0,000002	0,001414	0,000425	0,000320	0,000388	0,000023	0,000031	0,000003	0,003910	0,003929	0,008423
3-Br32	1234567890	6524	0,000002	0,001414	0,000442	0,000329	0,000354	0,000025	0,000033	0,000003	0,003011	0,003026	0,006446
3-Br32	36901	4979	0,000002	0,001414	0,000477	0,000351	0,000370	0,000026	0,000036	0,000003	0,003801	0,003814	0,008117
2-Br32	123456	5747	0,000002	0,001414	0,000491	0,000375	0,000486	0,000026	0,000035	0,000003	0,005188	0,005215	0,011185
3-Br32	123456789	5253	0,000002	0,001414	0,000506	0,000378	0,000418	0,000028	0,000038	0,000003	0,003705	0,003721	0,007909
2-Br32	12346	4616	0,000002	0,001414	0,000534	0,000408	0,000521	0,000028	0,000038	0,000003	0,005351	0,005378	0,011533
2-Br32	161	5462	0,000002	0,001414	0,000542	0,000388	0,000390	0,000029	0,000041	0,000003	0,002778	0,002787	0,006004
2-Br32	11	4160	0,000002	0,001414	0,000553	0,000392	0,000389	0,000030	0,000041	0,000003	0,002691	0,002700	0,005804
3-Br32	12345678	4122	0,000002	0,001414	0,000578	0,000436	0,000509	0,000032	0,000043	0,000004	0,004968	0,004992	0,010610
2-Br32	1356	3943	0,000002	0,001414	0,000578	0,000438	0,000549	0,000031	0,000042	0,000003	0,005685	0,005710	0,012267
3-Br32	345678	3486	0,000002	0,001414	0,000602	0,000461	0,000581	0,000032	0,000044	0,000004	0,006968	0,007001	0,014852

Calibración geométrica de cámaras no métricas.
Estudio de metodologías y modelos matemáticos de distorsión

Tipo	Combinación	Ptos	VarPost	DesvPost	Prec-x0	Prec-y0	Prec-foc	Prec-om	Prec-fi	Prec-kp	Prec-X0	Prec-Y0	Prec-Z0
3-Br32	1201	3505	0,000002	0,001414	0,000612	0,000447	0,000450	0,000034	0,000046	0,000004	0,003232	0,003246	0,006932
2-Br32	146	2998	0,000002	0,001414	0,000643	0,000487	0,000598	0,000035	0,000047	0,000004	0,006037	0,006062	0,013016
3-Br32	1234567	3297	0,000002	0,001414	0,000647	0,000490	0,000595	0,000035	0,000047	0,000004	0,006060	0,006087	0,012966
5-Br32	12345678901	2971	0,000002	0,001414	0,000681	0,000507	0,000536	0,000038	0,000051	0,000004	0,004479	0,004488	0,009478
5-Br32	1234567890	2411	0,000002	0,001414	0,000739	0,000557	0,000607	0,000041	0,000055	0,000005	0,005258	0,005276	0,011077
3-Br32	123456	2584	0,000002	0,001414	0,000752	0,000579	0,000750	0,000040	0,000054	0,000005	0,008079	0,008121	0,017351
5-Br32	36901	1810	0,000002	0,001414	0,000792	0,000591	0,000623	0,000044	0,000059	0,000005	0,006534	0,006538	0,013799
3-Br32	12346	2090	0,000002	0,001414	0,000801	0,000617	0,000792	0,000043	0,000058	0,000005	0,008214	0,008254	0,017616
3-Br32	11	1898	0,000002	0,001414	0,000829	0,000595	0,000597	0,000045	0,000062	0,000005	0,004153	0,004168	0,008877
3-Br32	1356	1773	0,000002	0,001414	0,000910	0,000693	0,000867	0,000049	0,000066	0,000006	0,009056	0,009098	0,019404
3-Br32	146	1363	0,000002	0,001414	0,000962	0,000735	0,000908	0,000052	0,000070	0,000006	0,009248	0,009288	0,019789
5-Br32	345678	1284	0,000002	0,001414	0,001008	0,000781	0,001000	0,000054	0,000073	0,000006	0,012224	0,012247	0,025835
5-Br32	1201	1273	0,000002	0,001414	0,001043	0,000766	0,000773	0,000058	0,000078	0,000007	0,005628	0,005649	0,011861
5-Br32	1234567	1222	0,000002	0,001414	0,001053	0,000807	0,001000	0,000057	0,000077	0,000007	0,010356	0,010403	0,021748
3-Br32	16	888	0,000002	0,001414	0,001147	0,000866	0,001001	0,000063	0,000084	0,000007	0,008968	0,009005	0,019174
5-Br32	123456	956	0,000002	0,001414	0,001220	0,000952	0,001256	0,000065	0,000087	0,000008	0,013761	0,013823	0,028955
5-Br32	12346	764	0,000002	0,001414	0,001303	0,001016	0,001319	0,000070	0,000094	0,000008	0,013916	0,013979	0,029275
10-Br32	36901	508	0,000002	0,001414	0,001439	0,001075	0,001239	0,000080	0,000108	0,000010	0,012772	0,012828	0,025425
5-Br32	1356	661	0,000002	0,001414	0,001463	0,001134	0,001456	0,000079	0,000106	0,000009	0,015527	0,015583	0,032727
5-Br32	11	668	0,000002	0,001414	0,001472	0,001059	0,001037	0,000080	0,000110	0,000009	0,007379	0,007403	0,015630
5-Br32	146	494	0,000002	0,001414	0,001570	0,001213	0,001514	0,000086	0,000114	0,000010	0,015726	0,015795	0,033110
5-Br32	16	329	0,000002	0,001414	0,001875	0,001432	0,001698	0,000104	0,000138	0,000012	0,015540	0,015604	0,032683
1-Br32	12461	27952	0,000003	0,001732	0,000262	0,000189	0,000186	0,000014	0,000020	0,000002	0,001204	0,001208	0,002660
3-Br32	161	2486	0,000003	0,001732	0,000832	0,000601	0,000610	0,000045	0,000062	0,000005	0,004371	0,004386	0,009363
5-Br32	123456789	1936	0,000003	0,001732	0,000847	0,000641	0,000719	0,000047	0,000063	0,000005	0,006491	0,006513	0,013674
5-Br32	12345678	1522	0,000003	0,001732	0,000966	0,000735	0,000874	0,000053	0,000071	0,000006	0,008693	0,008729	0,018270
10-Br32	12345678901	842	0,000003	0,001732	0,001292	0,000973	0,001141	0,000073	0,000097	0,000009	0,009419	0,009462	0,018690
10-Br32	1234567890	677	0,000003	0,001732	0,001399	0,001067	0,001284	0,000079	0,000104	0,000010	0,011066	0,011125	0,021912
5-Br32	161	889	0,000003	0,001732	0,001416	0,001032	0,001036	0,000078	0,000106	0,000009	0,007601	0,007621	0,016185
10-Br32	123456789	547	0,000003	0,001732	0,001590	0,001220	0,001515	0,000090	0,000118	0,000011	0,013663	0,013734	0,026987
10-Br32	12345678	439	0,000003	0,001732	0,001775	0,001376	0,001805	0,000099	0,000130	0,000012	0,017849	0,017933	0,034755
10-Br32	345678	369	0,000003	0,001732	0,001852	0,001454	0,002029	0,000101	0,000133	0,000012	0,025019	0,025177	0,049503
10-Br32	1234567	351	0,000003	0,001732	0,001860	0,001461	0,001971	0,000103	0,000135	0,000013	0,020348	0,020419	0,039625
10-Br32	1201	365	0,000003	0,001732	0,002016	0,001499	0,001684	0,000113	0,000152	0,000013	0,012001	0,012050	0,023400
10-Br32	123456	271	0,000003	0,001732	0,002234	0,001784	0,002521	0,000120	0,000157	0,000015	0,027965	0,028092	0,054596
10-Br32	12346	223	0,000003	0,001732	0,002358	0,001879	0,002658	0,000127	0,000167	0,000016	0,028330	0,028455	0,055336
10-Br32	1356	188	0,000003	0,001732	0,002650	0,002093	0,002874	0,000144	0,000189	0,000018	0,030635	0,030761	0,059544
10-Br32	146	146	0,000003	0,001732	0,002851	0,002255	0,003050	0,000157	0,000205	0,000019	0,031646	0,031742	0,061141
10-Br32	11	200	0,000003	0,001732	0,002853	0,002093	0,002338	0,000159	0,000215	0,000019	0,015823	0,015872	0,030619
25-Br32	1234567	86	0,000003	0,001732	0,002991	0,002482	0,004444	0,000170	0,000215	0,000022	0,041080	0,041142	0,069072
25-Br32	36901	104	0,000003	0,001732	0,003047	0,002342	0,003399	0,000175	0,000228	0,000022	0,031719	0,031793	0,054644
10-Br32	16	98	0,000003	0,001732	0,003538	0,002769	0,003614	0,000198	0,000259	0,000024	0,032732	0,032824	0,063230
25-Br32	123456	66	0,000003	0,001732	0,003548	0,003033	0,005730	0,000193	0,000244	0,000025	0,057553	0,057462	0,096614
25-Br32	12346	54	0,000003	0,001732	0,003655	0,003126	0,006201	0,000200	0,000253	0,000026	0,057877	0,057788	0,097691
25-Br32	1356	45	0,000003	0,001732	0,004304	0,003622	0,006684	0,000239	0,000304	0,000031	0,064402	0,064261	0,107908
25-Br32	146	33	0,000003	0,001732	0,004528	0,003811	0,007053	0,000256	0,000325	0,000033	0,064839	0,064784	0,108844
25-Br32	16	21	0,000003	0,001732	0,006224	0,005161	0,010526	0,000362	0,000459	0,000047	0,074783	0,074877	0,126525
25-Br32	12345678901	186	0,000004	0,002000	0,002576	0,002013	0,003183	0,000151	0,000194	0,000019	0,023517	0,023624	0,040630
10-Br32	161	263	0,000004	0,002000	0,002633	0,001948	0,002215	0,000147	0,000198	0,000018	0,015665	0,015716	0,030731
25-Br32	1234567890	156	0,000004	0,002000	0,002673	0,002119	0,003499	0,000158	0,000201	0,000020	0,026608	0,026704	0,045434
25-Br32	123456789	126	0,000004	0,002000	0,002991	0,002402	0,004102	0,000176	0,000223	0,000023	0,033323	0,033350	0,056081
25-Br32	12345678	106	0,000004	0,002000	0,003334	0,002723	0,004813	0,000192	0,000244	0,000025	0,041857	0,041979	0,070688
25-Br32	345678	88	0,000004	0,002000	0,003768	0,003100	0,005086	0,000209	0,000266	0,000027	0,060610	0,060912	0,104123
25-Br32	1201	78	0,000004	0,002000	0,003899	0,002969	0,004843	0,000225	0,000296	0,000029	0,027796	0,027995	0,047259
25-Br32	11	39	0,000005	0,002236	0,006300	0,004711	0,007358	0,000357	0,000477	0,000047	0,040120	0,040501	0,068301
25-Br32	161	51	0,000006	0,002449	0,005676	0,004320	0,006645	0,000326	0,000429	0,000043	0,040803	0,041124	0,070593

Resumen del análisis de los ensayos para Legendre (4)

Tipo	Combinación	focal	Ptos	VarPost	DesvPost	Prec-x0	Prec-y0	Prec-foc	Prec-om	Prec-fi	Prec-kp	Prec-X0	Prec-Y0	Prec-Z0
25-Leg4	16	13,3972	21	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
25-Leg4	146	13,5648	33	0,000001	0,001000	0,051159	0,058205	0,026068	0,003973	0,003296	0,001306	0,100858	0,125801	0,196448
25-Leg4	12346	13,5385	54	0,000002	0,001414	0,036480	0,042745	0,013540	0,002943	0,002366	0,000830	0,078598	0,078576	0,119278
25-Leg4	123456	13,5584	66	0,000003	0,001732	0,034010	0,039735	0,012728	0,002730	0,002206	0,000802	0,077388	0,077312	0,117230
25-Leg4	1356	13,5687	45	0,000003	0,001732	0,048583	0,055543	0,020189	0,003795	0,003200	0,001231	0,091068	0,094892	0,149029
25-Leg4	1234567	13,5521	86	0,000005	0,002236	0,004633	0,004621	0,002950	0,000308	0,000277	0,000109	0,058984	0,058960	0,094824
25-Leg4	12345678	13,5535	106	0,000007	0,002646	0,004086	0,004246	0,002813	0,000282	0,000242	0,000094	0,059866	0,059882	0,097163
1-Leg4	2345678901	13,5285	66632	0,000008	0,002828	0,000098	0,000113	0,000099	0,000007	0,000006	0,000002	0,001988	0,001995	0,004377
1-Leg4	345678901	13,5274	63780	0,000008	0,002828	0,000101	0,000116	0,000108	0,000007	0,000006	0,000002	0,002230	0,002237	0,004906
1-Leg4	45678901	13,527	60546	0,000008	0,002828	0,000105	0,000120	0,000120	0,000007	0,000006	0,000002	0,002553	0,002561	0,005609
1-Leg4	1234567890	13,5282	55464	0,000008	0,002828	0,000107	0,000123	0,000114	0,000008	0,000006	0,000002	0,002091	0,002100	0,004597
1-Leg4	5678901	13,527	56604	0,000008	0,002828	0,000110	0,000126	0,000134	0,000008	0,000006	0,000002	0,002950	0,002959	0,006491
1-Leg4	34567890	13,527	50118	0,000008	0,002828	0,000115	0,000132	0,000138	0,000008	0,000006	0,000002	0,002693	0,002704	0,005909
1-Leg4	678901	13,528	52348	0,000008	0,002828	0,000118	0,000133	0,000154	0,000008	0,000006	0,000002	0,003534	0,003545	0,007766
1-Leg4	36901	13,5285	42568	0,000008	0,002828	0,000123	0,000143	0,000128	0,000009	0,000007	0,000002	0,002898	0,002906	0,006385
1-Leg4	123456789	13,5268	44484	0,000008	0,002828	0,000123	0,000142	0,000145	0,000009	0,000007	0,000002	0,002511	0,002522	0,005515
1-Leg4	78901	13,5267	47346	0,000008	0,002828	0,000130	0,000145	0,000188	0,000008	0,000006	0,000002	0,004476	0,004489	0,009829
1-Leg4	12345678	13,5311	34794	0,000008	0,002828	0,000152	0,000171	0,000207	0,000010	0,000008	0,000003	0,003371	0,003386	0,007410
1-Leg4	8901	13,5274	41316	0,000008	0,002828	0,000153	0,000167	0,000243	0,000009	0,000007	0,000002	0,006063	0,006081	0,013291
1-Leg4	601	13,5298	29644	0,000008	0,002828	0,000153	0,000175	0,000182	0,000011	0,000008	0,000003	0,004435	0,004452	0,009752
1-Leg4	1234567	13,5308	27810	0,000008	0,002828	0,000179	0,000199	0,000265	0,000011	0,000009	0,000003	0,004117	0,004134	0,009066
1-Leg4	345678	13,5298	29448	0,000008	0,002828	0,000183	0,000202	0,000289	0,000011	0,000008	0,000003	0,004989	0,005007	0,010938
1-Leg4	61	13,5291	18664	0,000008	0,002828	0,000191	0,000222	0,000193	0,000014	0,000011	0,000004	0,004563	0,004577	0,010053
1-Leg4	123456	13,5303	21780	0,000008	0,002828	0,000225	0,000246	0,000368	0,000012	0,000010	0,000003	0,005460	0,005483	0,012031
1-Leg4	12346	13,5279	17524	0,000008	0,002828	0,000243	0,000267	0,000391	0,000014	0,000011	0,000004	0,005701	0,005725	0,012548
1-Leg4	1356	13,5258	14986	0,000008	0,002828	0,000258	0,000285	0,000403	0,000015	0,000012	0,000004	0,006079	0,006103	0,013399
1-Leg4	23456	13,5348	19286	0,000008	0,002828	0,000265	0,000285	0,000467	0,000013	0,000010	0,000003	0,007132	0,007165	0,015706
1-Leg4	126	13,5266	10348	0,000008	0,002828	0,000283	0,000317	0,000402	0,000018	0,000014	0,000005	0,005829	0,005855	0,012831
1-Leg4	146	13,5234	11438	0,000008	0,002828	0,000284	0,000316	0,000434	0,000017	0,000013	0,000004	0,006581	0,006608	0,014506
1-Leg4	246	13,5342	11796	0,000008	0,002828	0,000311	0,000339	0,000523	0,000017	0,000013	0,000004	0,008048	0,008089	0,017726
1-Leg4	16	13,523	7496	0,000008	0,002828	0,000317	0,000359	0,000429	0,000021	0,000016	0,000005	0,006469	0,006495	0,014260
1-Leg4	1234	13,5331	12522	0,000008	0,002828	0,000360	0,000381	0,000667	0,000016	0,000012	0,000004	0,009209	0,009246	0,020254
1-Leg4	567	13,5251	15288	0,000008	0,002828	0,000378	0,000397	0,000733	0,000015	0,000011	0,000004	0,012879	0,012929	0,028297
Mix-Leg4	234567890 11	13,524	13818	0,000008	0,002828	0,000394	0,000409	0,000590	0,000017	0,000013	0,000004	0,022320	0,022309	0,036952
Mix-Leg4	135679 11	13,5238	13747	0,000008	0,002828	0,000461	0,000475	0,000709	0,000017	0,000013	0,000004	0,027026	0,027007	0,044712
1-Leg4	456	13,5135	13200	0,000008	0,002828	0,000515	0,000530	0,001049	0,000016	0,000012	0,000004	0,017192	0,017261	0,037622
Mix-Leg4	16 11	13,5267	13683	0,000008	0,002828	0,000651	0,000664	0,001013	0,000017	0,000013	0,000004	0,039916	0,039902	0,064373
Mix-Leg4	78901_6	13,5662	5122	0,000008	0,002828	0,000978	0,001002	0,001687	0,000025	0,000019	0,000007	0,035108	0,035109	0,065071
Mix-Leg4	01 6	13,5636	5062	0,000008	0,002828	0,001056	0,001081	0,001864	0,000025	0,000019	0,000007	0,038327	0,038342	0,071689
Mix-Leg4	890 11	13,4993	13732	0,000008	0,002828	0,001311	0,001313	0,002284	0,000018	0,000013	0,000005	0,082906	0,082908	0,145640
Mix-Leg4	12345 6	13,5055	5056	0,000008	0,002828	0,001648	0,001653	0,002640	0,000025	0,000019	0,000007	0,062285	0,062299	0,100360
Mix-Leg4	135 6	13,5048	5035	0,000008	0,002828	0,001950	0,001956	0,003129	0,000026	0,000019	0,000007	0,073853	0,073843	0,119176
25-Leg4	123456789	13,5467	126	0,000008	0,002828	0,003820	0,004039	0,002398	0,000278	0,000232	0,000091	0,049846	0,049786	0,082245
25-Leg4	345678	13,5464	88	0,000008	0,002828	0,004681	0,004976	0,004048	0,000304	0,000263	0,000098	0,091805	0,092091	0,153486
1-Leg4	12345678901	13,5282	69126	0,000009	0,003000	0,000095	0,000111	0,000092	0,000007	0,000006	0,000002	0,001788	0,001795	0,003940
1-Leg4	1356791	13,5265	44368	0,000009	0,003000	0,000120	0,000140	0,000112	0,000009	0,000007	0,000002	0,002188	0,002194	0,004828
1-Leg4	1201	13,5293	29988	0,000009	0,003000	0,000143	0,000169	0,000110	0,000011	0,000009	0,000003	0,002329	0,002338	0,005148
1-Leg4	461	13,5279	22606	0,000009	0,003000	0,000173	0,000203	0,000159	0,000013	0,000010	0,000003	0,003354	0,003362	0,007383
1-Leg4	11	13,5271	16156	0,000009	0,003000	0,000202	0,000243	0,000141	0,000016	0,000013	0,000004	0,003082	0,003092	0,006819
2-Leg4	1234567890	13,5284	14470	0,000009	0,003000	0,000214	0,000246	0,000233	0,000015	0,000012	0,000004	0,004342	0,004363	0,009329
2-Leg4	123456789	13,527	11618	0,000009	0,003000	0,000246	0,000281	0,000294	0,000017	0,000013	0,000005	0,005190	0,005213	0,011146
2-Leg4	12345678	13,5309	9124	0,000009	0,003000	0,000300	0,000337	0,000417	0,000019	0,000015	0,000005	0,006909	0,006941	0,014833
2-Leg4	1234567	13,5305	7311	0,000009	0,003000	0,000356	0,000394	0,000534	0,000021	0,000017	0,000006	0,008473	0,008507	0,018206
2-Leg4	345678	13,5301	7696	0,000009	0,003000	0,000368	0,000403	0,000584	0,000020	0,000016	0,000005	0,010267	0,010309	0,022055
2-Leg4	123456	13,5282	5747	0,000009	0,003000	0,000447	0,000486	0,000735	0,000024	0,000019	0,000006	0,011174	0,011222	0,023993
2-Leg4	12346	13,5268	4616	0,000009	0,003000	0,000487	0,000531	0,000787	0,000026	0,000021	0,000007	0,011736	0,011786	0,025205
2-Leg4	1356	13,5248	3943	0,000009	0,003000	0,000514	0,000566	0,000811	0,000029	0,000023	0,000008	0,012520	0,012565	0,026914
2-Leg4	146	13,5239	2998	0,000009	0,003000	0,000575	0,000634	0,000881	0,000033	0,000026	0,000009	0,013670	0,013719	0,029383
2-Leg4	16	13,5238	1962	0,000009	0,003000	0,000636	0,000717	0,000871	0,000041	0,000032	0,000011	0,013430	0,013479	0,028870
25-Leg4	1201	13,5478	78	0,000009	0,003000	0,002905	0,003453	0,001731	0,000224	0,000178	0,000066	0,047380	0,047353	0,077970
1-Leg4	12461	13,5284	27952	0,000010	0,003162	0,000156	0,000184	0,000127	0,000012	0,000009	0,000003	0,002311	0,002317	0,005110
1-Leg4	161	13,5276	21158	0,000010	0,003162	0,000180	0,000214	0,000142	0,000014	0,000011	0,000004	0,002892	0,002900	0,006396
2-Leg4	12345678901	13,5283	17970	0,000010	0,003162	0,000192	0,000222	0,000189	0,000014	0,000011	0,000004	0,003734	0,003748	0,008050
2-Leg4	36901	13,528	10998	0,000010	0,003162	0,000254	0,000294	0,000268	0,000018	0,000014	0,000005	0,006170	0,006187	0,013313
3-Leg4	12345678901	13,5292	8											

Calibración geométrica de cámaras no métricas.
Estudio de metodologías y modelos matemáticos de distorsión

Tipo	Combinación	focal	Ptos	VarPost	DesvPost	Prec-x0	Prec-y0	Prec-foc	Prec-om	Prec-fi	Prec-kp	Prec-X0	Prec-Y0	Prec-Z0
3-Leg4	36901	13,5295	4979	0,000010	0,003162	0,000370	0,000426	0,000390	0,000027	0,000021	0,000007	0,009075	0,009100	0,019358
3-Leg4	123456789	13,5284	5253	0,000010	0,003162	0,000374	0,000425	0,000448	0,000025	0,000020	0,000007	0,007965	0,007997	0,016980
2-Leg4	11	13,5271	4160	0,000010	0,003162	0,000411	0,000493	0,000293	0,000033	0,000025	0,000009	0,006505	0,006522	0,014038
3-Leg4	1201	13,5303	3505	0,000010	0,003162	0,000424	0,000498	0,000336	0,000033	0,000026	0,000009	0,007303	0,007329	0,015659
3-Leg4	12345678	13,5328	4122	0,000010	0,003162	0,000461	0,000515	0,000639	0,000029	0,000023	0,000008	0,010694	0,010739	0,022783
3-Leg4	1234567	13,5327	3297	0,000010	0,003162	0,000543	0,000598	0,000813	0,000032	0,000025	0,000009	0,013008	0,013056	0,027746
3-Leg4	345678	13,5311	3486	0,000010	0,003162	0,000563	0,000616	0,000889	0,000031	0,000024	0,000008	0,015823	0,015885	0,033582
3-Leg4	123456	13,5324	2584	0,000010	0,003162	0,000693	0,000749	0,001139	0,000036	0,000029	0,000010	0,017388	0,017458	0,037156
3-Leg4	12346	13,5299	2090	0,000010	0,003162	0,000748	0,000813	0,001210	0,000040	0,000032	0,000011	0,018172	0,018244	0,038800
3-Leg4	1356	13,5284	1773	0,000010	0,003162	0,000791	0,000866	0,001247	0,000044	0,000035	0,000012	0,019369	0,019440	0,041314
3-Leg4	146	13,5262	1363	0,000010	0,003162	0,000875	0,000960	0,001344	0,000050	0,000039	0,000014	0,021012	0,021088	0,044809
5-Leg4	1234567	13,5332	1222	0,000010	0,003162	0,000924	0,001013	0,001370	0,000053	0,000042	0,000015	0,022398	0,022471	0,046790
3-Leg4	16	13,5256	888	0,000010	0,003162	0,000978	0,001093	0,001342	0,000061	0,000049	0,000017	0,020826	0,020901	0,044414
10-Leg4	123456	13,5424	271	0,000010	0,003162	0,002145	0,002329	0,003205	0,000113	0,000090	0,000033	0,053691	0,053852	0,104019
10-Leg4	12346	13,5381	223	0,000010	0,003162	0,002331	0,002543	0,003436	0,000124	0,000099	0,000036	0,056626	0,056799	0,109763
25-Leg4	12345678901	13,5449	186	0,000010	0,003162	0,002403	0,002722	0,001579	0,000175	0,000145	0,000054	0,039236	0,039207	0,065880
25-Leg4	1234567890	13,5451	156	0,000010	0,003162	0,002891	0,003181	0,001908	0,000205	0,000172	0,000065	0,044817	0,044823	0,074332
2-Leg4	161	13,5276	5462	0,000011	0,003317	0,000364	0,000430	0,000292	0,000028	0,000022	0,000007	0,006058	0,006073	0,013107
5-Leg4	12345678901	13,5298	2971	0,000011	0,003317	0,000486	0,000560	0,000488	0,000035	0,000028	0,000010	0,009818	0,009829	0,020738
3-Leg4	161	13,5289	2486	0,000011	0,003317	0,000533	0,000625	0,000432	0,000041	0,000032	0,000011	0,009095	0,009120	0,019499
5-Leg4	1234567890	13,5299	2411	0,000011	0,003317	0,000548	0,000628	0,000603	0,000038	0,000030	0,000011	0,011499	0,011533	0,024148
3-Leg4	11	13,5285	1898	0,000011	0,003317	0,000592	0,000703	0,000431	0,000047	0,000036	0,000012	0,009696	0,009724	0,020732
5-Leg4	36901	13,5298	1810	0,000011	0,003317	0,000636	0,000728	0,000676	0,000045	0,000036	0,000012	0,015888	0,015883	0,033494
5-Leg4	123456789	13,5289	1936	0,000011	0,003317	0,000640	0,000727	0,000771	0,000043	0,000034	0,000012	0,013911	0,013951	0,029210
5-Leg4	1201	13,531	1273	0,000011	0,003317	0,000722	0,000841	0,000576	0,000055	0,000044	0,000015	0,012617	0,012647	0,026549
5-Leg4	12345678	13,5335	1522	0,000011	0,003317	0,000794	0,000882	0,001097	0,000049	0,000038	0,000014	0,018683	0,018743	0,039089
5-Leg4	345678	13,531	1284	0,000011	0,003317	0,000984	0,001076	0,001551	0,000053	0,000042	0,000015	0,028050	0,028069	0,058747
5-Leg4	123456	13,534	956	0,000011	0,003317	0,001180	0,001274	0,001915	0,000060	0,000048	0,000017	0,029921	0,030017	0,062567
5-Leg4	12346	13,5311	764	0,000011	0,003317	0,001286	0,001393	0,002051	0,000068	0,000054	0,000019	0,031429	0,031532	0,065758
5-Leg4	1356	13,5294	661	0,000011	0,003317	0,001359	0,001483	0,002128	0,000073	0,000058	0,000020	0,033833	0,033923	0,070834
5-Leg4	146	13,5268	494	0,000011	0,003317	0,001530	0,001676	0,002317	0,000086	0,000068	0,000024	0,036983	0,037109	0,077478
5-Leg4	16	13,5262	329	0,000011	0,003317	0,001720	0,001917	0,002352	0,000106	0,000084	0,000029	0,037340	0,037469	0,078232
10-Leg4	1234567	13,5372	351	0,000011	0,003317	0,001726	0,001910	0,002346	0,000100	0,000080	0,000029	0,041361	0,041455	0,080003
10-Leg4	1356	13,5371	188	0,000011	0,003317	0,002485	0,002717	0,003566	0,000138	0,000110	0,000040	0,060730	0,060889	0,117265
25-Leg4	36901	13,5411	104	0,000011	0,003317	0,003098	0,003545	0,002260	0,000223	0,000184	0,000068	0,064694	0,064637	0,109592
5-Leg4	161	13,5292	889	0,000012	0,003464	0,000926	0,001077	0,000766	0,000071	0,000056	0,000019	0,016048	0,016060	0,034130
5-Leg4	11	13,5286	668	0,000012	0,003464	0,001054	0,001241	0,000765	0,000083	0,000065	0,000022	0,017141	0,017165	0,036254
10-Leg4	1234567890	13,5332	677	0,000012	0,003464	0,001092	0,001245	0,001139	0,000076	0,000060	0,000022	0,022995	0,023077	0,045276
10-Leg4	36901	13,5316	508	0,000012	0,003464	0,001248	0,001419	0,001259	0,000087	0,000069	0,000025	0,031402	0,031458	0,062120
10-Leg4	123456789	13,5324	547	0,000012	0,003464	0,001285	0,001449	0,001456	0,000086	0,000068	0,000025	0,027878	0,027967	0,054774
10-Leg4	12345678	13,5369	439	0,000012	0,003464	0,001545	0,001717	0,001951	0,000095	0,000075	0,000027	0,035908	0,036017	0,069478
10-Leg4	345678	13,5307	369	0,000012	0,003464	0,001927	0,002075	0,002799	0,000102	0,000081	0,000029	0,054243	0,054396	0,106177
10-Leg4	146	13,5339	146	0,000012	0,003464	0,002931	0,003243	0,004075	0,000168	0,000133	0,000048	0,070240	0,070422	0,134915
10-Leg4	12345678901	13,5323	842	0,000013	0,003606	0,000968	0,001111	0,000920	0,000069	0,000055	0,000020	0,019782	0,019828	0,039017
10-Leg4	1201	13,5341	365	0,000013	0,003606	0,001428	0,001663	0,001094	0,000107	0,000085	0,000031	0,025914	0,025965	0,050241
10-Leg4	16	13,5325	98	0,000014	0,003742	0,003478	0,003916	0,004414	0,000217	0,000172	0,000063	0,075279	0,075483	0,144759
25-Leg4	161	13,547	51	0,000014	0,003742	0,005048	0,005853	0,002849	0,000383	0,000315	0,000117	0,075547	0,075752	0,126362
25-Leg4	11	13,5469	39	0,000014	0,003742	0,005146	0,006145	0,002851	0,000405	0,000322	0,000119	0,077434	0,077634	0,128905
10-Leg4	161	13,5317	263	0,000015	0,003873	0,001802	0,002095	0,001432	0,000135	0,000107	0,000038	0,032509	0,032532	0,063525
10-Leg4	11	13,5315	200	0,000016	0,004000	0,002073	0,002429	0,001484	0,000159	0,000125	0,000045	0,036096	0,036117	0,069561

Ejemplo del análisis de control estereoscópico

Intcub - 1: 678901								
Nº pto	Control			Test			Diferencia ²	
	X	Y	Z	X	Y	Z	XY	Z
1	10490,941	10576,479	10021,902	10490,702	10576,720	10021,902	0,115	0,199
2	10495,021	10565,612	10018,839	10494,798	10565,859	10018,839	0,111	0,187
3	10526,149	10569,064	10012,888	10526,038	10569,296	10012,888	0,066	0,174
4	10573,836	10568,630	10018,650	10573,716	10568,869	10018,65	0,071	0,189
5	10599,686	10574,574	10013,359	10599,584	10574,756	10013,359	0,043	0,095
6	10649,900	10574,903	10016,565	10649,849	10575,079	10016,565	0,034	0,085
7	10696,060	10564,722	10024,314	10696,068	10564,806	10024,314	0,007	0,045
8	10712,074	10575,443	10019,865	10712,054	10575,571	10019,865	0,017	0,152
9	10606,411	10546,382	10023,499	10606,314	10546,663	10023,499	0,088	0,216
10	10490,527	10524,231	10014,584	10490,336	10524,517	10014,584	0,118	0,265
11	10525,967	10506,171	10027,547	10525,788	10506,374	10027,547	0,073	0,257
12	10576,410	10513,373	10047,741	10576,299	10513,554	10047,741	0,045	0,096
13	10625,745	10514,012	10037,895	10625,702	10514,168	10037,895	0,026	0,039
14	10656,101	10507,304	10027,751	10656,010	10507,430	10027,751	0,024	0,044
15	10700,310	10509,751	10018,082	10700,295	10509,879	10018,082	0,017	0,034
16	10494,364	10459,324	10008,184	10494,140	10459,478	10008,184	0,074	0,331
17	10542,369	10449,182	10016,124	10542,254	10449,325	10016,124	0,034	0,080
18	10574,234	10454,862	10018,620	10574,097	10455,033	10018,62	0,048	0,224
19	10632,437	10450,340	10034,753	10632,373	10450,452	10034,753	0,017	0,068
20	10662,767	10451,841	10026,606	10662,723	10451,936	10026,606	0,011	0,005
21	10691,925	10450,368	10028,132	10691,926	10450,516	10028,132	0,022	0,149
22	10488,838	10407,913	10004,886	10488,588	10408,042	10004,886	0,079	0,182
23	10515,864	10408,080	10029,989	10515,743	10408,187	10029,989	0,026	0,140
24	10563,799	10403,079	10024,928	10563,649	10403,156	10024,928	0,028	0,143
25	10581,329	10405,593	10015,195	10581,253	10405,642	10015,195	0,008	0,041
26	10622,490	10406,364	10022,505	10622,428	10406,423	10022,505	0,007	0,040
27	10658,238	10406,174	10018,299	10658,197	10406,212	10018,299	0,003	0,012
28	10706,021	10403,277	10017,473	10706,029	10403,286	10017,473	0,000	0,042
29	10710,501	10412,094	10015,755	10710,558	10412,143	10015,755	0,006	0,178
30	10492,053	10374,027	10004,132	10491,865	10374,105	10004,132	0,042	0,074
31	10541,100	10361,200	10028,696	10540,995	10361,258	10028,696	0,014	0,048
32	10589,638	10365,951	10034,218	10589,610	10366,014	10034,218	0,005	0,088
33	10620,858	10352,619	10026,292	10620,799	10352,640	10026,292	0,004	0,032
34	10672,888	10356,171	10031,758	10672,943	10356,232	10031,758	0,007	0,093
35	10700,735	10352,834	10024,331	10700,794	10352,868	10024,331	0,005	0,185
36	10496,718	10307,111	10006,540	10496,606	10307,113	10006,54	0,012	0,109
37	10542,651	10295,621	10022,665	10542,530	10295,623	10022,665	0,015	0,075
38	10582,806	10309,327	10037,714	10582,768	10309,335	10037,714	0,002	0,051
39	10619,839	10307,652	10027,774	10619,789	10307,677	10027,774	0,003	0,214
40	10646,435	10300,119	10025,771	10646,418	10300,121	10025,771	0,000	0,037
41	10696,619	10305,540	10027,596	10696,707	10305,558	10027,596	0,008	0,219
42	10490,022	10253,249	10002,016	10489,884	10253,160	10002,016	0,027	0,260
43	10488,996	10235,268	10005,295	10488,867	10235,233	10005,295	0,018	0,201
44	10514,624	10236,627	10011,745	10514,519	10236,622	10011,745	0,011	0,064
45	10537,901	10236,575	10023,258	10537,787	10236,532	10023,258	0,015	0,041
46	10568,231	10232,590	10031,742	10568,140	10232,494	10031,742	0,018	0,118
47	10610,077	10258,365	10042,492	10610,038	10258,264	10042,492	0,012	0,210
48	10666,752	10239,173	10033,492	10666,787	10239,115	10033,492	0,005	0,215
49	10695,907	10236,276	10022,300	10695,979	10236,160	10022,3	0,019	0,307
50	10707,063	10234,020	10026,036	10707,116	10234,029	10026,036	0,003	0,234
						Suma	1,461	6,587
						Media	0,029	0,132
						EMC	0,171	0,363