POLITÉCNICA

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE
CAMINOS, CANALES Y PUERTOS**

**CONTRIBUCIÓN DEL TABLERO Y DE LA SUBESTRUCTURA
FRENTE AL PANDEO GLOBAL DE
PILAS ESBELTAS DE HORMIGÓN ARMADO.**

**DETERMINACIÓN SIMPLIFICADA DE
UNA “COACCIÓN EQUIVALENTE”**

TESIS DOCTORAL

JOSÉ MANUEL SIMÓN-TALERO MUÑOZ
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

2015

**DEPARTAMENTO DE
MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS Y
TEORÍA DE LAS ESTRUCTURAS**

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE
CAMINOS, CANALES Y PUERTOS**

**CONTRIBUCIÓN DEL TABLERO Y DE LA SUBESTRUCTURA
FRENTE AL PANDEO GLOBAL DE
PILAS ESBELTAS DE HORMIGÓN ARMADO.**

**DETERMINACIÓN SIMPLIFICADA DE
UNA “COACCIÓN EQUIVALENTE”**

JOSÉ MANUEL SIMÓN-TALERO MUÑOZ
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

DIRECTOR DE TESIS

FLORENCIO J. DEL POZO VINDEL
Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

2015

Tribunal nombrado por el Mgfco. y Excmo. Sr. Rector de la Universidad Politécnica de Madrid,
el día

- Presidente:
- Secretario:
- Vocal :
- Vocal:
- Vocal:
- Suplente:
- Suplente:

Realizado el acto de prelectura de la Tesis el día 15 de Diciembre de 2015 en la E.T.S. de
Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la U.P.M.

Never, never, never give up

Winston Churchill

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecerle a Dios por haberme dado salud y energías para acometer y finalizar la ímproba tarea que ha sido para mí la elaboración de esta Tesis Doctoral. También a mis padres, Domingo y Manuela, que me dieron, cuando apenas cumplía los 3 años, la oportunidad de iniciar mi educación, que, con la elaboración de este documento 50 años después, da fin “oficial” a mi condición de alumno... aunque sé que nunca me cansaré de aprender.

Como no, quiero dar las gracias a mis hijos, Ignacio y Marta, y, sobre todo a mi mujer, María Jesús, que, especialmente ella, nunca perdieron la fe en que, por fin, acabara la tesis que comencé tiempo ha. Gracias por la constancia y perdón por haberos robado “algo de tiempo” en este camino.

Hace ya más de 10 años que hablé con mi Director de Tesis, Florencio J. del Pozo, sobre mi intención de ser Doctor y, para ello, de escribir la correspondiente Tesis. Le propuse algo relativo al cálculo de pilas esbeltas de hormigón armado, campo en el que, tanto él como yo, habíamos estado trabajando durante el ejercicio de nuestra práctica profesional. Gracias, Florencio, por tu dirección, consejos y paciencia conmigo durante todos estos años.

Desde que comencé a trabajar proyectando puentes, he simultaneado esta actividad con la docencia, primero en el campo de las estructuras metálicas y luego también en el del hormigón estructural. Sin embargo, esta tesis sólo podía estar dedicada a algo concerniente a los puentes de hormigón armado; la “culpa” de ello la tiene José María de Villar, mi maestro, al que tanto debo, en el campo del hormigón armado, en general, y del proyecto de puentes en particular. He tenido la suerte de recibir sus enseñanzas y de trabajar codo con codo con él durante muchos años y he intentado plasmar algo de lo que él me ha ido transmitiendo en este documento. Espero haberlo conseguido.

Durante la elaboración de esta Tesis he recibido la ayuda de varios Ingenieros del mundo de la docencia y también del campo del proyecto. Gracias a todos los que me habéis ayudado, y muy especialmente a Carlos Zanuy, profesor de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid: tus consejos y orientaciones me han sido imprescindibles. Por supuesto que tengo que hacer mención a todos mis compañeros de TORROJA INGENIERIA S.L. que, cada uno en su medida, me han ayudado también en esta etapa final. De entre todos ellos, tengo que hacer una especialísima mención a Alberto Fernández y a Javier Domínguez: sin vosotros dos habría sido imposible para mí haber concluido “en tiempo y forma” esta Tesis. Gracias de verdad por toda la ayuda que he recibido de vosotros dos.

Dejo para el final el agradecimiento a mi particular “Grupo de Presión y Apoyo”. Fue una iniciativa común de tres personas que creyeron que podía ser capaz de finalizar esta andadura y que decidieron empujarme definitivamente a la tarea de escribir esta tesis. Para ello se constituyeron formalmente, al modo de un lobby americano, y no cesaron nunca en su empeño. Ellos tres representan algo importantísimo para mí, puesto que son ... “mis amigos” y además algo más. Los cito, por estricto orden de antigüedad: José María de Villar, mi maestro y compañero profesional; María Jesús ... mi mujer; y Manuel Romana, excelente Ingeniero y mi “mejor amigo de la Carrera” Lo habéis conseguido. ¡Enhorabuena! a los tres porque este trabajo es, en parte, vuestro y ¡Muchas Gracias!

RESUMEN

Las pilas de los puentes son elementos habitualmente verticales que, generalmente, se encuentran sometidos a un estado de flexión compuesta. Su altura significativa en muchas ocasiones y la gran resistencia de los materiales constituyentes de estos elementos – hormigón y acero – hace que se encuentren pilas de cierta esbeltez en la que los problemas de inestabilidad asociados al cálculo en segundo orden debido a la no linealidad geométrica deben ser considerados. Además, la mayoría de las pilas de nuestros puentes y viaductos están hechas de hormigón armado por lo que se debe considerar la fisuración del hormigón en las zonas en que esté traccionado. Es decir, el estudio del pandeo de pilas esbeltas de puentes requiere también la consideración de un cálculo en segundo orden mecánico, y no solo geométrico.

Por otra parte, una pila de un viaducto no es un elemento que pueda considerarse como aislado; al contrario, su conexión con el tablero hace que aparezca una interacción entre la propia pila y aquél que, en cierta medida, supone una cierta coacción al movimiento de la propia cabeza de pila. Esto hace que el estudio de la inestabilidad de una pila esbelta de un puente no puede ser resuelto con la “teoría del pandeo de la pieza aislada”.

Se plantea, entonces, la cuestión de intentar definir un procedimiento que permita abordar el problema complicado del pandeo de pilas esbeltas de puentes pero empleando herramientas de cálculo no tan complejas como las que resuelven “el pandeo global de una estructura multibarra, teniendo en cuenta todas las no linealidades, incluidas las de las coacciones”. Es decir, se trata de encontrar un procedimiento, que resulta ser iterativo, que resuelva el problema planteado de forma aproximada, pero suficientemente ajustada al resultado real, pero empleando programas “convencionales” de cálculo que sean capaces de :

- por una parte, en la estructura completa:
 - o calcular en régimen elástico lineal una estructura plana o espacial multibarra compleja;
- por otra, en un modelo de una sola barra aislada:
 - o considerar las no linealidades geométricas y mecánicas a nivel tenso-deformacional,
 - o considerar la no linealidad producida por la fisuración del hormigón,
 - o considerar una coacción “elástica” en el extremo de la pieza.

El objeto de este trabajo es precisamente la definición de ese procedimiento iterativo-aproximado, la justificación de su validez, mediante su aplicación a diversos casos paramétricos, y la presentación de sus condicionantes y limitaciones.

Además, para conseguir estos objetivos se han elaborado unos ábacos de nueva creación que permiten estimar la reducción de rigidez que supone la fisuración del hormigón en secciones huecas monocajón de hormigón armado. También se han creado unos novedosos diagramas de interacción axil-flector válidos para este tipo de secciones en flexión biaxial.

Por último, hay que reseñar que otro de los objetivos de este trabajo – que, además, le da título – era cuantificar el valor de la coacción que existe en la cabeza de una pila debido a que el tablero transmite las cargas de una pila al resto de los integrantes de la subestructura y ésta, por tanto, colabora a reducir los movimientos de la cabeza de pila en cuestión. Es decir, la cabeza de una pila no está exenta lo cual mejora su comportamiento frente al pandeo. El régimen de trabajo de

esta coacción es claramente no lineal, ya que la rigidez de las pilas depende de su grado de fisuración. Además, también influye cómo las afecta la no linealidad geométrica que, para la misma carga, aumenta la flexión de segundo orden de cada pila. En este documento se define cuánto vale esta coacción, cómo hay que calcularla y se comprueba su ajuste a los resultados obtenidos en el modelo no lineal completo.

ABSTRACT

The piers of the bridges are vertical elements where axial loads and bending moments are to be considered. They are often high and also the strength of the materials they are made of (concrete and steel) is also high. This means that slender piers are very common and, so, the instabilities produced by the second order effects due to the geometrical non linear effects are to be considered. In addition to this, the piers are usually made of reinforced concrete and, so, the effects of the cracking of the concrete should also be evaluated. That is, the analysis of the instabilities of the piers of a bridge should consider both the mechanical and the geometrical non linearities.

Additionally, the pier of a bridge is not a single element, but just the opposite; the connection of the pier to the deck of the bridge means that the movements of the top of the pier are reduced compared to the situation of having a free end at the top of the pier. The connection between the pier and the deck is the reason why the instability of the pier cannot be analysed using “the buckling of a compressed single element method”.

So, the question of defining an approximate method for analysing the buckling of the slender piers of a bridge but using a software less complex than what it is needed for analysing the “global buckling of a multibeam structure considering all it”, is arisen. Then, the goal should be trying to find a procedure for analysing the said complex problem of the buckling of the slender piers of a bridge using a simplified method. This method could be an iterative (step by step) procedure, being accurate enough, using “normal” software having the following capabilities:

- Related to the calculation of the global structure
 - o Ability for calculating a multibeam structure using elastic analysis.
- Related to the calculation of a single beam structure:
 - o Ability for taking into account the geometrical and mechanical (σ - ϵ) non linearities
 - o Ability for taking into account the cracking of the concrete.
 - o Ability for using partial stiff constraints (elastic springs) at the end of the elements

One of the objectives of this document is just defining this simplified methodology, justifying the accuracy of the proposed procedure by using it on some different bridges and presenting the exclusions and limitations of the proposed method.

In addition to this, some new charts have been created for calculating the reduction of the stiffness of hollow cross sections made of reinforced concrete. Also, new charts for calculating the reinforcing of hollow cross sections under biaxial bending moments are also included in the document.

Finally, it is to be said that another aim of the document – as it is stated on the title on the document – is defining the value of the constraint on the top of the pier because of the connection of the pier to the deck .. and to the other piers. That is, the top of the pier is not a free end of a beam and so the buckling resistance of the pier is significantly improved. This constraint is a non-elastic constraint because the stiffness of each pier depends on the level of cracking. Additionally, the geometrical non linearity is to be considered as there is an amplification of the bending moments due to the increasing of the movements of the top of the

pier. This document is defining how this constraints is to be calculated; also the accuracy of the calculations is evaluated comparing the final results with the results of the complete non linear calculations

ÍNDICE

1	INTRODUCCIÓN.....	25
1.1	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y PROPUESTA PARA ABORDARLO 25	
1.2	LIMITACIONES Y EXCLUSIONES DEL MÉTODO PROPUESTO	26
1.3	ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO	27
2	ESTADO DEL ARTE. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA.....	31
2.1	BIBLIOGRAFÍA EXISTENTE. LA PILA AISLADA	31
2.1.1	EL SOPORTE INDEFINIDAMENTE ELÁSTICO.....	31
2.1.1.1	LA MÉNSULA. SOPORTE EMPOTRADO EN BASE Y LIBRE EN CABEZA.....	31
2.1.1.2	SOPORTE EMPOTRADO EN BASE Y APOYADO EN CABEZA	32
2.1.1.3	SOPORTE EMPOTRADO EN BASE Y CON COACCIÓN ELÁSTICA EN CABEZA 33	
2.1.2	INFLUENCIA DE LA COACCIÓN EN CABEZA EN EL COMPORTAMIENTO DEL SOPORTE	34
2.1.3	OTRA VISIÓN DE LA NOLINEALIDAD GEOMÉTRICA.	39
2.1.3.1	LA MAGNIFICACIÓN DE LOS FLECTORES COMO MEDIO DE REPRESENTAR LA NO LINEALIDAD GEOMÉTRICA.....	39
2.1.3.2	LAS FUERZAS HORIZONTALES EQUIVALENTES.....	41
2.1.4	INFLUENCIA DE LA NO LINEALIDAD MECÁNICA EN LOS FENÓMENOS DE INESTABILIDAD.....	42
2.1.4.1	LA FISURACIÓN DEL HORMIGÓN.....	42
2.1.4.2	LA NO LINEALIDAD TENSODEFORMACIONAL.....	44
2.2	LA INESTABILIDAD EN LAS NORMATIVAS DE HORMIGÓN ARMADO 45	
2.2.1	LA NORMATIVA ESPAÑOLA (EHE)	45
2.2.2	EL EUROCÓDIGO 2 (EN 1992).....	46
2.2.2.1	EL MÉTODO DE LA CURVATURA NOMINAL	46
2.2.2.2	EL MÉTODO DE LA RIGIDEZ NOMINAL	47
2.2.3	EL CÓDIGO MODELO (2010)	48
2.2.4	EL CÓDIGO DE LA ACI (ACI 318).....	49
2.3	OTROS ARTÍCULOS Y PUBLICACIONES	51
2.3.1	referencias basicas aplicadas en los diferentes códigos estructurales	51
2.3.2	otras referencias Relativas al tratamiento de las Inestabilidades en elementos comprimidos 55	
2.3.3	referencias Relacionadas con los cálculos “pushover”	58
3	CÁLCULO DE LA INFLUENCIA DE LAS NO LINEALIDADES	60
3.1	MODELOS DE CÁLCULO EMPLEADOS.....	60
3.1.1	PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA.....	60
3.1.2	MODELOS DE CÁLCULO.....	60

3.1.3	TIPOS DE CÁLCULO	62
3.2	CÁLCULO DE LA INFLUENCIA DE LA NO LINEALIDAD MECÁNICA Y DE LA FISURACIÓN DEL HORMIGÓN.....	63
3.3	CÁLCULO DE LA INFLUENCIA DE LA NO LINEALIDAD GEOMÉTRICA	64
3.4	CASOS ESTUDIADOS.....	66
3.5	RESULTADOS OBTENIDOS. ÁBACOS	67
3.5.1	CUANTIFICACIÓN DE LA INFLUENCIA DE LA FISURACION DEL HORMIGÓN Y DE LA NO LINEALIDAD MECÁNICA.	67
3.5.2	CUANTIFICACIÓN DE LA INFLUENCIA DE LA CONSIDERACIÓN DE LA NO LINEALIDAD GEOMÉTRICA.....	76
3.5.3	DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN axil-momento en flexión biaxial.....	79
4	DEFINICIÓN DEL MÉTODO DE CÁLCULO PROPUESTO	82
4.1	PRESENTACION DEL MÉTODO.....	82
4.1.1	INTRODUCCIÓN	82
4.1.2	PUENTE TIPO.....	83
4.2	METODOLOGÍA PROPUESTA.....	85
4.2.1	DEFINICIÓN GENERAL DE LA GEOMETRÍA. SECCIONES TIPO.	86
4.2.2	CÁLCULO ELÁSTICO DEL MODELO GLOBAL.	86
4.2.2.1	DEFINICIÓN DE LAS CARGAS.....	86
4.2.2.2	HIPÓTESIS PRIMARIAS Y COMBINACIONES.....	87
4.2.2.3	CARACTERÍSTICAS DE LOS MATERIALES	88
4.2.2.4	CONEXIÓN DEL TABLERO A LAS PILAS. CONDICIONES DE CONTORNO..	89
4.2.2.5	MODELO DE CÁLCULO	91
4.2.2.6	RESULTADOS DEL CÁLCULO DE PRIMER ORDEN	93
4.2.3	DEFINICIÓN DE LA ARMADURA DE LAS PILAS.....	96
4.2.3.1	CUANTÍA EN LA BASE.....	96
4.2.3.2	VARIACIÓN DE ARMADURA A LO LARGO DE LA ALTURA DE LAS PILAS.	96
4.2.4	INFLUENCIA DE LOS FENÓMENOS DE SEGUNDO ORDEN.	97
4.2.4.1	NO LINEALIDAD MECÁNICA.	97
4.2.4.2	SEGUNDO ORDEN GEOMÉTRICO.....	99
4.2.5	CÁLCULO ITERATIVO DE LA ESTRUCTURA	103
4.2.5.1	CÁLCULO DE ESFUERZOS EN RÉGIMEN ELÁSTICO.	103
4.2.5.2	COMPROBACIÓN Y REDIMENSIONAMIENTO DE LA ARMADURA.	106
4.2.5.3	RESTO DE ITERACIONES. RESULTADOS DEL CÁLCULO ITERATIVO	106
4.2.6	COMPROBACIÓN DE LOS RESULTADOS DEL CÁLCULO ITERATIVO REALIZADO	109
4.2.6.1	DEFINICIÓN DEL MODELO DE CÁLCULO	109
4.2.6.2	VALORES RESULTANTES EN EL CÁLCULO DEL PUENTE TIPO.....	113
4.2.6.3	COMPARACIÓN DE RESULTADOS.....	115
4.3	COMPROBACIÓN DEL PUENTE TIPO CON UN MODELO NO LINEAL GLOBAL.....	118
5	VALIDACIÓN DEL MÉTODO PROPUESTO	120
5.1	CASOS ESTUDIADOS.....	120
5.1.1	PUENTES TIPO.....	120
5.1.2	EJEMPLO REAL	122

5.1.3	“CASOS PARAMÉTRICOS”	130
5.2	COMPARACIÓN DE RESULTADOS	130
5.2.1	PUENTE TIPO 2	131
5.2.2	PUENTE TIPO 3	134
5.2.3	EJEMPLO REAL	137
5.2.4	“CASOS PARAMÉTRICOS”	139
6	CONCLUSIONES, APORTACIONES ORIGINALES Y POSIBLES FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN.....	142
6.1	LIMITACIONES Y EXCLUSIONES DEL MÉTODO PROPUESTO	142
6.1.1	EXCLUSIONES	142
6.1.2	LIMITACIONES A LA APLICACIÓN DEL MÉTODO PROPUESTO	143
6.1.2.1	CONSIDERACIÓN DE LA FLEXIÓN BIAXIAL	143
6.1.2.2	INFLUENCIA DE LA INESTABILIDAD PRODUCIDA POR LA FLEXIÓN TRANSVERSAL	144
6.1.2.3	INFLUENCIA DEL VALOR DE e_c CONSIDERADO EN LOS CÁLCULOS	146
6.1.2.4	INFLUENCIA DE LA FLUENCIA DEL HORMIGÓN DE LA PILA	146
6.2	CONCLUSIONES.....	147
6.2.1	CONCLUSIONES RELATIVAS A LA CONSIDERACIÓN DE LAS NO LINEALIDADES	147
6.2.1.1	INFLUENCIA DE LA FISURACIÓN DEL HORMIGÓN	147
6.2.1.2	INFLUENCIA DE LA NO LINEALIDAD GEOMÉTRICA.....	149
6.2.2	CONCLUSIONES RELATIVAS A LOS RESULTADOS DEL CÁLCULO ITERATIVO REALIZADO	152
6.2.3	CONCLUSIONES RELATIVAS A LA COACCIÓN A CONSIDERAR EN LAS CABEZAS DE PILAS.....	154
6.3	POSIBLES FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN	155
6.4	APORTACIONES ORIGINALES Y CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS PROPUESTOS	156

Índice de Anexos

Anexo 1 MODELO DE PILA AISLADA Resumen de los resultados de los cálculos realizados (SOFISTIK)

Anexo 2 ÁBACOS de reducción de la Inercia (I_{fis}/I_b)

Anexo 3 ÁBACOS para la obtención de la caga equivalente a la no linealidad geométrica (Q^)*

Anexo 4 DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN $v - \mu_x - \mu_y$ (SOFISTIK). ÁBACOS de Fernández-Domínguez

Anexo 5 PUENTE TIPO. Modelo de Cálculo elástico del puente completo (SOFISTIK)

Anexo 6 PUENTE TIPO. Modelos no lineales de pila aislada (SOFISTIK)

Anexo 7 PUENTE TIPO. Modelo de Cálculo no lineal global del puente completo (SOFISTIK)

Anexo 8 “PUENTES TIPO - CANÓNICOS” Resumen de los cálculos realizados.

Anexo 9 “CASOS PARAMÉTRICOS” Resumen de los cálculos iterativos realizados.

Índice de figuras

Fig. 2-1 Ménsula sometida a carga lateral uniforme (q) y a dos cargas puntuales en cabeza (P y H)	31
Fig. 2-2 Soporte empotrado – apoyado	33
Fig. 2-3 Soporte empotrado en un extremo y con apoyo elástico en el otro.	33
Fig. 2-4 Soporte en ménsula ($k_H = 0$). Influencia de la esbeltez (L/i)	36
Fig. 2-5 Soporte con muelle en cabeza. Influencia de la esbeltez (L/i) con carga horizontal	37
Fig. 2-6 Axil crítico en función de la geometría del soporte y la coacción elástica en cabeza	38
Fig. 2-7 Diagramas momento – axil para un soporte en ménsula y otro con un muelle en cabeza de rigidez $k_H = 0.5EI/L^3$ sobre un hipotético diagrama de interacción. ($H = 0.1Af_c$)	39
Fig. 2-8 Ménsula a compresión con deformada inicial proporcional al modo de pandeo	39
Fig. 2-9 Sección rectangular fisurada sometida a flexión simple	42
Fig. 2-10 Factor de reducción de la inercia en flexión simple en sección rectangular (hormigón C30/35)	43
Fig. 2-11 Nomogramas de Jackson Moreland para el cálculo de la longitud de pandeo (copia de la fig R10.10.1.1 de ACI 318-11)	49
Fig. 2-12 Análisis considerando el “índice de estabilidad” según (Poston, y otros, 1983)	53
Fig. 2-13 Aplicación del método del índice de estabilidad a puentes (Poston, y otros, 1983)	54
Fig. 2-14 Influencia del “tensión-stiffening” en la rigidez fisurada de las secciones de hormigón armado (Leonhardt, 1977)	57
Fig. 3-1 Modelo de pila aislada. Esquema de armado	61
Fig. 3-2 Modelo de pila aislada. Diagrama tensión-deformación del hormigón	62
Fig. 3-3 Modelo de pila aislada. Diagrama tensión-deformación del acero	62
Fig. 3-4 Modelo de pila aislada. Tipos de cálculo	63
Fig. 3-5 ÁBACO de reducción de inercias. Ejemplo de utilización	68
Fig. 3-6 ÁBACO de cuantificación del efecto de la no linealidad geométrica. Ejemplo de utilización	76
Fig. 4-1 Puente tipo. Esquema longitudinal	83
Fig. 4-2 Puente tipo. Sección transversal de las pilas	84
Fig. 4-3 Puente tipo. Esquema de armado de los fustes de las pilas	84
Fig. 4-4 Diagrama tensión – deformación del hormigón	89
Fig. 4-5 Diagrama tensión – deformación del acero pasivo	89
Fig. 4-6 Puente tipo. Alzado longitudinal del modelo	92
Fig. 4-7 Puente tipo. Numeración de nudos y barras	92
Fig. 4-8 Puente tipo. Detalle de la definición de la conexión pila-tablero en el modelo	92
Fig. 4-9 Puente tipo. Combinación 11ELU. Cálculo en 1 ^{er} orden. Axiles en pilas	94
Fig. 4-10 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Cálculo en 1 ^{er} orden. Cortantes longitudinales en pilas	94
Fig. 4-11 Puente tipo. Combinación 11ELU. Cálculo en 1 ^{er} orden. Flectores longitudinales en pilas	94
Fig. 4-12 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Cálculo en 1 ^{er} orden. Corrimientos longitudinales en pilas	95
Fig. 4-13 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Cálculo en 1 ^{er} orden. Cortantes transversales en pilas	95
Fig. 4-14 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Cálculo en 1 ^{er} orden. Flectores transversales en pilas	95
Fig. 4-15 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Cálculo en 1 ^{er} orden. Corrimientos transversales en pilas	96
Fig. 4-16 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Obtención del cociente I_{fis}/I_b para la pila P1	99

Fig. 4-17 Puente tipo. Combinación 11ELU. Obtención del cortante equivalente al segundo orden geométrico, Q_L^2 , para la pila P1	103
Fig. 4-18 Puente tipo. Combinación 11ELU. Cálculo en la 3ª iteración. Axiles en pilas	104
Fig. 4-19 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Cálculo en la 3ª iteración. Cortantes longitudinales en pilas	104
Fig. 4-20 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Cálculo en la 3ª iteración. Flectores longitudinales en pilas	105
Fig. 4-21 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Cálculo en la 3ª iteración. Corrimientos longitudinales en pilas	105
Fig. 4-22 Puente tipo. Evolución de la rigidez “efectiva” longitudinal de las pilas.....	107
Fig. 4-23 Puente tipo. Evolución del movimiento longitudinal del tablero.....	107
Fig. 4-24 Puente tipo. Evolución de las fuerzas “virtuales” en cabeza de pila que representan el efecto de la no linealidad geométrica.	108
Fig. 4-25 Puente tipo. Evolución del flector en base de pila.....	108
Fig. 4-26 Modelo de pila aislada para efectuar la comprobación.....	109
Fig. 4-27 Puente tipo. Modelo para obtener la rigidez del muelle equivalente	110
Fig. 4-28Puente tipo. Combinación 11 ELU. Movimientos longitudinales en cabezas de pilas obtenidos con el cálculo elástico iterativo.....	115
Fig. 4-29Puente tipo. Combinación 11 ELU. Movimientos longitudinales en cabezas de pilas obtenidos con el cálculo en el modelo no lineal de pila aislada coaccionada elásticamente.....	116
Fig. 4-30Puente tipo. Combinación 11 ELU. Flectores longitudinales en bases de pilas obtenidos con el cálculo elástico iterativo	116
Fig. 4-31Puente tipo. Combinación 11 ELU. Flectores longitudinales en bases de pilas obtenidos con el cálculo en el modelo no lineal de pila aislada coaccionada elásticamente	117
Fig. 4-32Puente tipo. Combinación 11 ELU. Movimientos longitudinales en cabezas de pilas obtenidos con el cálculo no lineal global	118
Fig. 4-33Puente tipo. Combinación 11 ELU. Flectores longitudinales en bases de pilas obtenidos con el cálculo no lineal global.....	118
Fig. 5-1 Puente tipo 1. Alzado longitudinal esquemático.....	120
Fig. 5-2 Puente tipo 2. Alzado longitudinal esquemático.....	121
Fig. 5-3 Puente tipo 3. Alzado longitudinal esquemático.....	122
Fig. 5-4 Viaducto de Torallo. Planta y sección tipo.....	124
Fig. 5-5 Viaducto de Torallo. Alzado longitudinal.....	125
Fig. 5-6 Viaducto de Torallo. Alzado de pilas.....	126
Fig. 5-7 Viaducto de Torallo. Definición de aparatos de apoyo	127
Fig. 5-8 Viaducto de Torallo. Armadura de pilas (I)	128
Fig. 5-9 Viaducto de Torallo. Armadura de pilas (II)	129
Fig. 5-10 Puente tipo2. Evolución de la rigidez “efectiva” longitudinal de las pilas.....	132
Fig. 5-11 Puente tipo 2. Evolución del movimiento longitudinal del tablero.....	132
Fig. 5-12 Puente tipo 2. Evolución de las fuerzas “virtuales” en cabeza de pila que representan el efecto de la no linealidad geométrica.	133
Fig. 5-13 Puente tipo2. Evolución del flector en base de pila.....	134
Fig. 5-14 Puente tipo3. Evolución de la rigidez “efectiva” longitudinal de las pilas.....	135
Fig. 5-15 Puente tipo 3. Evolución del movimiento longitudinal del tablero.....	135
Fig. 5-16 Puente tipo 3. Evolución de las fuerzas “virtuales” en cabeza de pila que representan el efecto de la no linealidad geométrica.	136
Fig. 5-17 Puente tipo3. Evolución del flector en base de pila.....	137
Fig. 5-18 Viaducto de Torallo. Evolución de la rigidez “efectiva” longitudinal de las pilas.....	138
Fig. 5-19 Viaducto de Torallo. Evolución del movimiento longitudinal del tablero.....	138
Fig. 5-20 Viaducto de Torallo. Evolución de las fuerzas “virtuales” en cabeza de pila que representan el efecto de la no linealidad geométrica.....	139
Fig. 5-21 Viaducto de Torallo. Evolución del flector en base de pila.....	139

Fig. 5-22 “Casos paramétricos”. Error relativo en la estimación del corrimiento longitudinal en cabezas de pilas	140
Fig. 5-23 “Caos paramétricos”. Error relativo en la estimación del momento flector en bases de pilas	141
Fig. 6-1 Límites de excentricidad del axil para poder considerar la flexión en dos ejes de forma separada (figura tomada de la EHE)	143
Fig. 6-2 Variación de I_{js}/I_b en función del desplazamiento en cabeza	148
Fig. 6-3 Variación de I_{js}/I_b en función de la cuantía de armadura en la base	148
Fig. 6-4 Variación de I_{js}/I_b en función del axil reducido en la cabeza	148
Fig. 6-5 Variación de I_{js}/I_b en función del flector en la base	149
Fig. 6-6 Variación del cortante virtual en función del desplazamiento en cabeza	150
Fig. 6-7 Variación del cortante virtual en función de la cuantía de armadura en la base	151
Fig. 6-8 Variación del cortante virtual en función del axil reducido en la cabeza	151
Fig. 6-9 Variación del cortante virtual en función del flector en la base	151
Fig. 6-10 Error relativo obtenido en la estimación de los corrimientos longitudinales en cabeza empleando el método iterativo propuesto	153
Fig. 6-11 Error relativo obtenido en la estimación de los flectores en base de pila empleando el método iterativo propuesto.	153
Fig. 6-12 Comparación de las flechas en cabeza de pilas calculadas con los tres métodos utilizados ..	154
Fig. 6-13 Comparación de los flectores en bases de pilas calculadas con los tres métodos utilizados ..	155

Índice de tablas

Tabla 4-1 Puente tipo. Armadura de fustes de pilas.....	84
Tabla 4-2 Combinaciones de acciones en ELU.....	88
Tabla 4-3 Puente tipo. Cuantías de armadura en base y en cabezas de pilas.....	96
Tabla 4-4 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Relación cortante en cabeza/movimiento longitudinales en cabeza de pila. Cálculo de primer orden	97
Tabla 4-5 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Valores obtenidos de I_{fis}/I_b	99
Tabla 4-6 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Valores obtenidos de I_L^2	99
Tabla 4-7 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Cortantes equivalentes al segundo orden geométrico ...	102
Tabla 4-8 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Rigideces longitudinales de pilas, $K_{L,i}$; Cálculo de la tercera iteración	105
Tabla 4-9 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Rigideces equivalentes de los muelles.....	111
Tabla 4-10 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Posición y corrimiento del punto neutro.....	114
Tabla 4-11 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Cargas longitudinales en la última iteración.....	114
Tabla 4-12 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Cortantes “efectivos” a aplicar en el modelo de pila asilada con coacción elástica en cabeza.	115
Tabla 4-13 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Comparación de corrimientos longitudinales en cabeza de pilas.....	117
Tabla 4-14 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Comparación de flectores longitudinales en base de pilas	117
Tabla 4-15 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Comparación de corrimientos longitudinales en cabeza de pilas con lo obtenido en el cálculo no lineal global	119
Tabla 4-16 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Comparación de flectores longitudinales en base de pilas con lo obtenido en el cálculo no lineal global.....	119
Tabla 5-1 Puente tipo 1. Definición de las pilas	121
Tabla 5-2 Puente tipo 2. Definición de las pilas	122
Tabla 5-3 Puente tipo 3. Definición de las pilas	122
Tabla 5-4 Viaducto de Torallo. Definición de las pilas	123
Tabla 5-5 Puente tipo 2. Combinación 11 ELU. Comparación de corrimientos longitudinales en cabeza de pilas	131
Tabla 5-6 Puente tipo 2. Combinación 11 ELU. Comparación de flectores longitudinales en base de pilas	131
Tabla 5-7 Puente tipo 3. Combinación 11 ELU. Comparación de corrimientos longitudinales en cabeza de pilas	134
Tabla 5-8 Puente tipo 3. Combinación 11 ELU. Comparación de flectores longitudinales en base de pilas	134
Tabla 5-9 Viaducto de Torallo. Combinación 11 ELU. Comparación de corrimientos longitudinales en cabeza de pilas	137
Tabla 5-10 Viaducto de Torallo. Combinación 11 ELU. Comparación de flectores longitudinales en base de pilas	137
Tabla 6-1 Combinaciones de cálculo en ELU.....	144
Tabla 6-2 Puente Tipo. Combinación 11 ELU. Comparación de resultados cálculo elástico – cálculo no lineal completo	145
Tabla 6-3 Puente Tipo. Combinación 12 ELU. Comparación de resultados cálculo elástico – cálculo no lineal completo	145
Tabla 6-4 Puente Tipo. Esbelteces de pilas.....	145

1 INTRODUCCIÓN

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y PROPUESTA PARA ABORDARLO

Las pilas de los puentes son elementos habitualmente verticales que, generalmente, se encuentran sometidos a un estado de flexión compuesta. Así es, porque las acciones gravitatorias del tablero generan en ellas esfuerzos axiales y el efecto del viento, de las fuerzas de frenado y arranque o el efecto, en su caso, de la reología en el tablero, provocan cortantes y momentos flectores a lo largo de los fustes que constituyen la subestructura del puente. Por otra parte, es habitual que las pilas tengan una altura significativa y, dada la gran resistencia de los materiales constituyentes de estos elementos – hormigón y acero -, que ello conlleve la existencia de pilas de cierta esbeltez. En definitiva, los problemas de inestabilidad asociados al cálculo en segundo orden debido a la no linealidad geométrica deben ser considerados en muchas ocasiones.

Además, la mayoría de las pilas de nuestros puentes y viaductos están hechas de hormigón armado, un material que presenta un comportamiento a nivel seccional claramente no lineal en estados avanzados de carga. Es decir, el estudio del pandeo de pilas esbeltas de puentes requiere también la consideración de un cálculo en segundo orden mecánico, y no solo geométrico.

Sin embargo, una pila de un viaducto no es un elemento que pueda considerarse como aislado; al contrario, su conexión con el tablero hace que aparezca una interacción entre la propia pila y aquél que, en cierta medida, supone una cierta coacción al movimiento de la propia cabeza de pila. No sólo esto, sino que el tablero transmite a las otras pilas algo de lo que le ocurre a una de ellas. Es decir, parece que el estudio de la inestabilidad de una pila esbelta de un puente no puede ser resuelto con la “teoría del pandeo de la pieza aislada” sino que hay que considerar de forma global la estructura de la que forma parte, sin perder de vista tampoco los modos locales de pandeo de la pila en cuestión.

Como consecuencia de lo expuesto en los párrafos anteriores, se colige que la comprobación de la validez estructural de las pilas esbeltas de un puente requiere el empleo de potentes programas que permitan considerar en el cálculo:

- la no linealidad geométrica del modelo,
- la no linealidad de los materiales en estados avanzados de carga,
- la no linealidad a nivel seccional que se produce en secciones de hormigón armado debido a la fisuración del hormigón en tracción, y
- el comportamiento global del conjunto tablero-subestructura.

Hoy en día (año 2015), sí existen diferentes programas que permiten considerar todos estos factores en los cálculos estructurales pero, muchas veces, su empleo puede conllevar una cierta pérdida de perspectiva del problema físico que están modelizando. Además, son programas costosos y, muchas veces, de difícil manejo, ya que su uso involucra la utilización de modelos complejos y de parámetros de cálculo cuya definición y evaluación deben ser objeto de un cuidadoso proceso.

Aún así, existe otro problema de índole práctica, que es el que aparece a la hora de dimensionar la armadura de una pila de hormigón armado en el que estos fenómenos de inestabilidad sean significativos. El tratamiento del problema con un potente programa de cálculo no lineal exige el conocimiento previo de las cuantías y disposiciones de las armaduras de las pilas, situación que no se suele dar hasta que no se ha realizado un encaje previo de ellas. Es obvio, que en este imprescindible cálculo preliminar no se pueden considerar las armaduras de las secciones de hormigón ... porque todavía no se conocen; se puede proceder por tanteos sucesivos de unas ciertas armaduras, pero puede resultar un procedimiento tedioso y que, si no es realizado por personas con cierta experiencia en ello, pueda llevar a resultados que sean de difícil materialización práctica (cuantías excesivas, disposiciones de armaduras poco razonables, ...)

Se plantea, entonces, la cuestión de intentar definir un procedimiento que permita abordar el problema complicado del pandeo de pilas esbeltas de puentes pero empleando herramientas de cálculo no tan complejas como las que resuelven “el pandeo global de una estructura multibarra, teniendo en cuenta todas las no linealidades, incluidas las de las coacciones”. Es decir, se trataría de encontrar un procedimiento, que pudiera ser iterativo, que resolviera el problema planteado de forma aproximada, pero suficientemente ajustada al resultado real, pero empleando programas “convencionales” de cálculo que fueran capaces de :

- por una parte, en la estructura completa:
 - o calcular en régimen elástico lineal una estructura plana o espacial multibarra compleja;
- por otra, en un modelo de una sola barra aislada:
 - o considerar las no linealidades geométricas y mecánicas a nivel tenso-deformacional,
 - o considerar la no linealidad producida por la fisuración del hormigón,
 - o considerar una coacción “elástica” en el extremo de la pieza.

El objeto de este trabajo es precisamente la definición de ese procedimiento iterativo-aproximado, la justificación de su validez y la presentación de sus condicionantes y limitaciones.

1.2 LIMITACIONES Y EXCLUSIONES DEL MÉTODO PROPUESTO

El método propuesto es un método iterativo que emplea el cálculo elástico. En su desarrollo se han considerado las siguientes bases de partida que limitan su aplicación:

- Puentes de carretera
- Puente recto
- Las acciones a considerar son las establecidas en el Eurocódigo 1 (EN1991).
Así mismo, las combinaciones de acciones y los correspondientes coeficientes de mayoración de acciones serán los definidos en los Eurocódigo 0 (EN1990)
- Se asume que el tablero del puente se apoya en las pilas en aparatos de apoyo que podrán ser fijos (POT), de teflón o de material elastomérico)
- En longitudinal no existe transmisión de flectores del tablero a la pila (es decir, el tablero no se empotra en las pilas), pero en transversal sí existe dicha continuidad de momentos (se disponen dos aparatos de apoyo en la dirección transversal)
- La sección transversal de las pilas es un cajón unicelular de espesor constante. Los fustes de las pilas son de canto y ancho constante. La cuantía de armadura del fuste varía linealmente con la altura de la pila.

Así, por tanto, quedan fuera del ámbito de aplicación del método de cálculo propuesto los puentes que cumplan alguna de las siguientes condiciones:

- Puentes de ferrocarril o en los que la acción sísmica sea significativa
- Puentes sensiblemente curvos
- Puentes en que haya una concomitancia significativa de las cargas que generan máxima flexión longitudinal en las pilas y de las cargas que provocan la máxima flexión transversal en ellas.
- Pilas con sección transversal variable

1.3 ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO

Este documento consta de 9 capítulos y se ha organizado para que su lectura sea, dentro de lo posible, llevadera y que pueda resultar fructífera para la práctica profesional de un Ingeniero “Estructura” que deba resolver el problema de dimensionar la armadura de unas pilas esbeltas de hormigón armado de un puente. Para ello, se ha dividido el texto en 5 bloques sucesivos:

- el capítulo 1 introduce el documento,
- el capítulo 2 presenta el problema y muestra cuál es el estado del arte en la actualidad (año 2015),
- los capítulos 3 y 4 definen y justifican el método propuesto,
- el capítulo 5 valida el procedimiento mediante su aplicación a diferentes puentes, y
- el capítulo 6 presenta las conclusiones del trabajo realizado y algunas líneas de posibles investigaciones futuras.

A continuación se presenta de forma muy sumaria un resumen del contenido de cada uno de los nueve capítulos de que consta el documento.

Capítulo 1.- Introducción

Se presenta de forma sucinta la problemática que se suscita cuando se trata de dimensionar la armadura del fuste de una pila esbelta de hormigón armado de un puente. Se enuncia el objetivo de este documento, que no es otro que la propuesta de un método iterativo simplificado que

permita resolver dicha problemática empleando herramientas de cálculo “convencionales”. Por último se describe cómo está organizado el texto.

Capítulo 2.- Estado del arte. Revisión bibliográfica

En primer lugar, se presentan las bases teóricas del pandeo de una pieza aislada ideal. Se compara, de forma paramétrica, la situación de ménsula libre en cabeza, soporte empotrado-apoyado y el caso más próximo al de las pilas de los puentes que es el de ménsula con coacción elástica en cabeza.

Posteriormente, se estudian las diferentes formulaciones que proponen algunas normativas para considerar los efectos de las no linealidades en el cálculo de piezas comprimidas. En particular se estudian tres Normas que son, en realidad, las que han servido de base para elaborar el articulado del resto, que son el Código Modelo (2010), el Código ACI 318 (2011) y el Eurocódigo 2, EN1992 (2004). Además se discute también lo que indica la Norma española de hormigón estructural EHE (2011).

Finalmente se pasa revista y se analiza, con espíritu crítico, a la bibliografía más significativa escrita en estos 50 últimos años relativa al asunto estudiado.

Capítulo 3.- Cálculo de las influencias de las no linealidades

Tanto el Eurocódigo 2 como el código americano ACI 318 indican que se debe considerar la pérdida de rigidez, que se produce en una sección de hormigón armado sometida a flexión compuesta, cuando se calcula un soporte esbelto de este material. Ambas Normas propugnan emplear el procedimiento de la “magnificación del momento” para considerar los efectos de la no linealidad geométrica en los cálculos.

En este Capítulo 3 se define una forma para cuantificar la influencia de la fisuración del hormigón y de las no linealidades geométricas en el cálculo de una pila aislada sometida a dos cargas puntuales en cabeza: una el axil y otra un cortante. Estos cálculos se resumen en unos ábacos válidos para sección huecas monocelulares. También se presentan unos novedosos ábacos de interacción axil-flector en flexión compuesta biaxial que permiten tantear de forma sencilla la armadura necesaria a disponer en una sección sometida a tal régimen de esfuerzos.

Capítulo 4.- Definición del método de cálculo propuesto

Aquí se presenta el método propuesto para dimensionar (y comprobar) la validez de las armaduras de pilas esbeltas de hormigón armado de puentes hiperestáticos. Se propone un método iterativo que consiste en realizar sucesivos cálculos de la estructura completa formada por las pilas y el tablero. La rigidez de las pilas se va ajustando para tener en cuenta la fisuración del hormigón mediante el empleo de los ábacos creados en el capítulo anterior. Así mismo, se tiene en cuenta la no linealidad geométrica mediante el empleo de unos cortantes “virtuales” aplicados en las cabezas de las pilas. El efecto de dichas cargas resulta equivalente al a considerar la excentricidad del punto de aplicación del axil que se produce al considerar la geometría deformada en el cálculo de esfuerzos (no linealidad geométrica).

Como final del proceso propuesto, se debe realizar una comprobación de la validez del resultado. Para ello se utilizará un modelo de pila aislada con coacción elástica en cabeza. Sobre este modelo “simple” se realizará un cálculo no lineal completo, considerando la no linealidad

mecánica y la no linealidad geométrica, validando tanto las flechas obtenidas como los esfuerzos de flexión consiguientes.

Capítulo 5.- Validación del método propuesto

Se ha aplicado el método propuesto al cálculo de tres puentes tipo que tratan de representar tres casos “canónicos” de subestructuras de puentes compuestas por pilas esbeltas. Para comprobar la validez del procedimiento propuesto, se han comparado los resultados obtenidos con el cálculo iterativo propuesto, con los que resultan de realizar un cálculo no lineal completo de la estructura completa.

Además, se ha aplicado el método a otros catorce puentes (“casos paramétricos”) para comprobar el grado de aproximación obtenido al variar luces de vanos, alturas de pilas, cuantías de armaduras, etc.

Capítulo 6.- Conclusiones, aportaciones originales y posibles futuras líneas de investigación

En primer lugar, se discute sobre las hipótesis de partida asumidas en este trabajo y sobre el modo en que afectan a su aplicación a modelos o situaciones diferentes a las contempladas en el estudio realizado.

Se presentan a continuación las principales conclusiones que se han obtenido en el trabajo de investigación realizado. Se diserta, en especial, sobre la validez del procedimiento de cálculo propuesto y sobre el grado de aproximación de los resultados obtenidos. Se discute también sobre la aplicabilidad del procedimiento a otros casos no contemplados en el estudio y se cierra el documento enunciando posibles líneas de investigación futuras abiertas por el presente trabajo.

Después de estos capítulos se ha incluido 9 ANEXOS que presentan información complementaria de diferentes tipos.

- Los Anexos 1 a 4 presentan los ÁBACOS generados ex profeso en este trabajo para poder cuantificar los diferentes efectos no lineales que intervienen en los cálculos realizados. Se incluyen también diagramas axil-momento originales para el dimensionamiento en flexión esviada de secciones cajón monocelular de hormigón armado.
- Los Anexos 5, 6 y 7 presentan los cálculos lineales y no lineales realizados en los modelos representando la estructura completa y en los que se considera sólo la pila aislada.
- Por último, los Anexos 8 y 9 presentan unos resúmenes de los resultados obtenidos en los cálculos realizados en los diferentes puentes que se han considerado para calibrar y validar el método propuesto.

2 ESTADO DEL ARTE. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

2.1 BIBLIOGRAFÍA EXISTENTE. LA PILA AISLADA

2.1.1 EL SOPORTE INDEFINIDAMENTE ELÁSTICO

2.1.1.1 LA MÉNSULA. SOPORTE EMPOTRADO EN BASE Y LIBRE EN CABEZA

El caso de estudio más sencillo, a partir del cual se debe estudiar el problema de inestabilidad es el de una pila elástica con un extremo empotrado y el otro libre (*Fig. 2-1*).

Fig. 2-1 Ménsula sometida a carga lateral uniforme (q) y a dos cargas puntuales en cabeza (P y H)

La resolución del problema se obtiene considerando los esfuerzos de segundo orden en el cálculo de momentos, con lo que el momento flector (negativo) en una sección cualquiera es:

$$M(x) = Hx + q \frac{x^2}{2} + P[y(0) - y(x)] \quad (2-1)$$

Como el comportamiento es elástico y lineal:

$$M(x) = EI \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (2-2)$$

Con lo que se obtiene la conocida ecuación diferencial del problema, acompañada por sus condiciones de contorno:

$$y^{IV} + \frac{P}{EI} y'' = \frac{q}{EI} \quad (2-3)$$

$$\begin{aligned} M(0) &= 0, \quad Q(0) = -H - Py'(0) \\ y(L) &= 0, \quad y'(L) = 0 \end{aligned}$$

La solución del problema es la siguiente:

$$y(x) = \frac{\frac{q}{K} \sin KL - H - qL}{KP \cos KL} (\sin Kx - \sin KL) + \frac{q}{K^2 P} (\cos Kx - \cos KL) + \frac{H}{P} (x - L) + \frac{q}{2P} (x^2 - L^2) \quad (2-4)$$

Siendo:

$$K = \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (2-5)$$

La inestabilidad se obtiene cuando el denominador del primer término se anula, es decir, cuando $\cos KL = 0 \Rightarrow KL = \pi/2$, con lo que la carga crítica es:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} = \frac{\pi^2 EI}{L_{eq}^2}, \quad (2-6)$$

El resultado obtenido es el ya conocido, en que se puede utilizar la carga crítica de Euler empleando una longitud equivalente del pilar de $L_{eq} = 2L$.

2.1.1.2 SOPORTE EMPOTRADO EN BASE Y APOYADO EN CABEZA

La resolución del soporte empotrado – apoyado es similar a la del soporte en ménsula, con la particularidad de que hay que obtener la reacción de la coacción en cabeza (*Fig. 2-2*). Para ello se libera esta coacción (R), siendo entonces la fuerza horizontal que actúa en cabeza $H-R$. La solución del problema es la misma que la dada por la ecuación (2-4), sustituyendo H por $H-R$:

$$y(x) = \frac{\frac{q}{K} \sin KL - (H - R) - qL}{KP \cos KL} (\sin Kx - \sin KL) + \frac{q}{K^2 P} (\cos Kx - \cos KL) + \frac{H - R}{P} (x - L) + \frac{q}{2P} (x^2 - L^2) \quad (2-7)$$

Para obtener R sólo hay que imponer que $y(0) = 0$, con lo que (2-7) se convierte en la siguiente ecuación:

$$y(x) = \frac{q}{K^2 P} \left[\frac{1 - \cos KL + \frac{K^2 L^2}{2} - KL \sin KL}{\sin KL - KL \cos KL} (\sin Kx - \sin KL + Kx - KL) + \right. \\ \left. + (\cos Kx - \cos KL) + \frac{1}{2} (K^2 x^2 - K^2 L^2) \right] \quad (2-8)$$

La inestabilidad se obtiene cuando se anula el denominador $\sin KL - KL \cos KL = 0$, lo cual ocurre cuando $KL = 1.43\pi$, es decir:

$$P_{cr} = \frac{2.04\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{L_{eq}^2}, \quad L_{eq} = 0.7L \quad (2-9)$$

Fig. 2-2 Soporte empotrado – apoyado

2.1.1.3 SOPORTE EMPOTRADO EN BASE Y CON COACCIÓN ELÁSTICA EN CABEZA

La situación intermedia entre las dos estudiadas en los anteriores apartados es aquella en la que el soporte está apoyado sobre un muelle de constante k_H en su extremo superior (Fig. 2-3). Cuando $k_H = 0$, el soporte está en ménsula y la carga crítica es la dada por la ecuación (2-6), mientras que cuando k_H es infinitamente rígido, el soporte es empotrado – apoyado y la carga crítica es la de la ecuación (2-9).

Fig. 2-3 Soporte empotrado en un extremo y con apoyo elástico en el otro.

La solución del problema en función de la reacción R es la misma que la dada en la ecuación (2-7), y para obtener la incógnita hiperestática se impone que $y(0) = R/k_H$. Entonces la expresión de la deformada es la siguiente:

$$y(x) = \frac{q}{K^2 P} \left[\frac{1 - \cos KL + \frac{K^2 L^2}{2} - KL \sin KL + \frac{PK}{k_H} \left(\sin KL - KL - \frac{KH}{q} \right)}{\sin KL - KL \cos KL + \frac{PK}{k_H} \cos KL} (\sin Kx - \sin KL) + \right. \\ \left. + \frac{1 - \cos KL + \frac{K^2 L^2}{2} \cos KL - KL \sin KL + \frac{PK}{k_H} \cos KL \frac{KH}{q}}{\sin KL - KL \cos KL + \frac{PK}{k_H} \cos KL} (Kx - KL) + (\cos Kx - \cos KL) + \frac{1}{2} (K^2 x^2 - K^2 L^2) \right] \quad (2-10)$$

La inestabilidad se obtiene cuando se anula $\sin KL - KL \cos KL + PK/k_H \cos KL = 0$, es decir:

$$\tan KL = KL - \frac{PK}{k_H} \quad (2-11)$$

2.1.2 INFLUENCIA DE LA COACCIÓN EN CABEZA EN EL COMPORTAMIENTO DEL SOPORTE

Los distintos valores de k_H harán que la resistencia del soporte sea mayor o menor, teniendo el extremo más desfavorable dado por la ecuación (2-6) ($L_{eq} = 2L$) y el más favorable por la ecuación (2-9) ($L_{eq} = 0.7L$). Para analizar de una forma más sencilla los resultados se asume a continuación que el soporte está sometido sólo a una carga vertical en cabeza P y a otra carga horizontal H , retirando por tanto la carga uniforme q . En este caso la expresión del momento flector en una sección ($M(x) = EI y''(x)$) se reduce a la siguiente:

$$M(x) = \frac{PH}{k_H} \frac{\sin Kx}{\sin KL - KL \cos KL + \frac{PK}{K_H} \cos KL} \quad (2-12)$$

El momento máximo tiene lugar cuando el numerador es $\sin Kx = 1$, es decir, en la posición $x/L = \pi/(2KL)$. Haciendo el axil aplicado proporcional a la carga crítica de Euler:

$$P = a^2 \frac{\pi^2 EI}{L^2}, \quad (2-13)$$

Donde se puede tomar $L_{eq} = L/a$

Queda que $KL = a\pi$, y por tanto el momento máximo se encuentra en $x/L = 1/(2a)$, que queda dentro del soporte cuando $a \leq 2$ (es decir, siempre). El momento máximo es, por tanto:

$$M_{\max} = \frac{PH}{k_H} \frac{1}{\sin KL - KL \cos KL + \frac{PK}{K_H} \cos KL} \quad (2-14)$$

O de forma relativa:

$$\frac{M_{\max}}{EI/L} = a^2 \pi^2 \gamma \frac{1}{\alpha \sin(a\pi) + a\pi(a^2 \pi^2 - \alpha) \cos(a\pi)} \quad (2-15)$$

Donde:

$$\alpha = \frac{k_H}{EI/L^3}, \gamma = \frac{H}{EI/L^2} \quad (2-16)$$

El estudio paramétrico de la influencia del muelle en cabeza del soporte, a partir de la ecuación (2-12), también puede hacerse escribiendo la ecuación en función de parámetros adimensionales típicos de hormigón estructural. En particular los siguientes:

$$\nu = \frac{P}{Af_c}, \gamma = \frac{H}{Af_c}, \mu = \frac{M}{Ahf_c} \quad (2-17)$$

Con estos nuevos parámetros, se obtiene que:

$$K = \sqrt{\frac{\nu f_c}{E_c}} \frac{1}{i}, KL = \sqrt{\frac{\nu f_c}{E_c}} \beta, \beta = \frac{L}{i} \quad (2-18)$$

Donde $i = (I/A)^{0.5}$ es el radio de giro.

Entonces el momento relativo en el empotramiento en una sección rectangular ($i = h/12^{0.5}$), a partir de (2-12), queda:

$$\mu(L) = \nu \gamma \frac{f_c}{E_c} \frac{\beta^3}{\sqrt{12}} \frac{\sin\left(\beta \sqrt{\frac{\nu f_c}{E_c}}\right)}{\alpha \sin\left(\beta \sqrt{\frac{\nu f_c}{E_c}}\right) + \beta \sqrt{\frac{\nu f_c}{E_c}} \left(\beta^2 \frac{\nu f_c}{E_c} - \alpha\right) \cos\left(\beta \sqrt{\frac{\nu f_c}{E_c}}\right)} \quad (2-19)$$

Con esta ecuación se puede estudiar la importancia de los efectos de segundo orden para diferentes valores de la esbeltez del soporte (β) o de la rigidez de la coacción elástica en la cabeza del soporte ($\alpha = k_H/(EI/L^3)$). En la [Fig. 2-1](#) se representa el momento flector total (momentos de primer y segundo orden, ecuación (2-19) en el empotramiento de un soporte en ménsula ($k_H = 0$). Se estudian dos casos, uno en el que la fuerza horizontal en cabeza es constante ($H = 0.1Af_c$), y otro en el que es proporcional al axil en cabeza ($H = P$).

(a) Carga horizontal en cabeza constante

(b) Carga horizontal en cabeza variable

Fig. 2-4 Soporte en ménsula ($k_H = 0$). Influencia de la esbeltez (L/i)

En ambos casos el axil crítico es el mismo. En la comparación se observa la influencia de la esbeltez: empiezan a aparecer esfuerzos de segundo orden a partir de $L/i = 35$ y se produce pérdida de resistencia a partir de $L/i > 40$. La carga crítica es $\nu_{cr} = 0.72$ para $L/i = 50$ y $\nu_{cr} = 0.18$ para $L/i = 100$.

En la Fig. 2-5 se estudia también el efecto de la rigidez de la coacción elástica al movimiento horizontal en la cabeza del soporte, con dos valores de α (0.5 y 1.5). La comparación muestra el crecimiento de la carga crítica de pandeo con respecto a la del soporte en ménsula para una rigidez del muelle moderada. Para $k_H = 0.5EI/L^3$, la carga crítica pasa de $\nu_{cr} = 0.72$ en la ménsula a 0.85 para $L/i = 50$, y de 0.18 a 0.22 para $L/i = 100$. Para una rigidez del muelle de $k_H = 1.5EI/L^3$, no hay reducción de resistencia para el soporte con $L/i = 50$, a la vez que la carga crítica aumenta hasta $\nu_{cr} = 0.32$ para $L/i = 100$. Los resultados son lógicos e indican que una fracción de la carga horizontal aplicada es absorbida por el muelle en cabeza.

a) $k_H = 0.5EI/L^3$ con carga horizontal en cabeza constante

b) $k_H = 1.5EI/L^3$ con carga horizontal en cabeza constante

c) $k_H = 0.5EI/L^3$ con carga horizontal en cabeza variable

(d) $k_H = 1.5EI/L^3$ con carga horizontal en cabeza variable.

Fig. 2-5 Soporte con muelle en cabeza. Influencia de la esbeltez (L/i) con carga horizontal

En los anteriores gráficos se obtiene que el axil crítico (v_{cr}) es independiente de si la carga horizontal en cabeza es constante o variable, ya que sólo depende de las condiciones de apoyo y la esbeltez del soporte. Esto se indica en la *Fig. 2-6a*, en la que se obtiene el axil crítico normalizado en función de la esbeltez β , existiendo una fórmula para cada valor del coeficiente a que relaciona la longitud equivalente del soporte con su altura ($1/a = L_{eq}/L$), es decir, proporciona la influencia de la coacción en la cabeza. Las diferentes curvas se pueden unificar en una sola si se emplea en la definición de esbeltez la longitud de pandeo, de acuerdo a la siguiente ecuación (*Fig. 2-6b*):

$$\lambda = \frac{L_{eq}}{i} = \frac{L/a}{i} = \frac{\beta}{a} \quad (2-20)$$

Fig. 2-6 Axil crítico en función de la geometría del soporte y la coacción elástica en cabeza.

El hecho de que el axil crítico dependa sólo de la geometría y las condiciones de apoyo del soporte no indica que ocurra lo mismo con la resistencia global de la pieza, que vendrá dada por la intersección con el diagrama de interacción, como se indica en la *Fig. 2-7*.

a) Diagramas momento – axil para un soporte en ménsula sobre un hipotético diagrama de interacción. ($H = 0.1 A f_c$)

b) Diagramas momento – axil para un soporte con un muelle en cabeza de rigidez $k_H = 0.5EI/L^3$ sobre un hipotético diagrama de interacción. ($H = 0.1Af_c$)

Fig. 2-7 Diagramas momento – axil para un soporte en ménsula y otro con un muelle en cabeza de rigidez $k_H = 0.5EI/L^3$ sobre un hipotético diagrama de interacción. ($H = 0.1Af_c$)

2.1.3 OTRA VISIÓN DE LA NOLINEALIDAD GEOMÉTRICA.

2.1.3.1 LA MAGNIFICACIÓN DE LOS FLECTORES COMO MEDIO DE REPRESENTAR LA NO LINEALIDAD GEOMÉTRICA.

A finales del siglo XIX el ingeniero italiano Vianello, (Vianello, 1898) propuso un método de aproximaciones sucesivas, para calcular las deformaciones de segundo orden de una pieza comprimida de sección constante en el rango elástico.

Fig. 2-8 Ménsula a compresión con deformada inicial proporcional al modo de pandeo

La Fig. 2-8 presenta una ménsula que tiene una excentricidad inicial $w_0(x)$ y que está sometida a una carga axil en su cabeza, P , estando su pie empotrado. La aplicación de dicha carga genera una ley de momentos “de primer orden”, $M_0(x)$, que, evidentemente son función de la deformada inicial, $w_0(x)$.

$$M_0(x) = P \cdot w_0(x) \quad (2-21)$$

La ley de flectores M_0 produce una deformada adicional que puede ser calculada, en teoría de primer orden, aplicando el método de los trabajos virtuales (Menn C., 1990) y queda:

$$w_1(x) = \int \frac{M_0(x)}{EI} \bar{M}_x(s) ds = \int \frac{P \cdot w_0(x)}{EI} \bar{M}_x(s) ds \quad (2-22)$$

Donde $\bar{M}_x(s)$ son los momentos flectores producidos por una carga unitaria transversal aplicada en el punto x. Si se supone que la rigidez, EI, es constante, entonces se tiene:

$$w_1(x) = \frac{P}{EI} \int w_0(s) \cdot \bar{M}_x(s) ds \quad (2-23)$$

De forma análoga, los flectores $M_1(x)=P \cdot w_1$, producen una deformada adicional que puede ser calculada volviendo a aplicar la teoría de primer orden, resultando, entonces:

$$w_2(x) = \frac{P}{EI} \int w_1(s) \cdot \bar{M}_x(s) ds \quad (2-24)$$

Y así sucesivamente, con lo que la deformada final total se puede expresar como la suma de la serie

$$w(x) = w_0(x) + w_1(x) + w_2(x) + w_3 + \dots \quad (2-25)$$

Si se considera que los corrimientos w_1 son proporcionales a la deformada inicial w_0 , queda:

$$w_1(x) = \frac{P}{EI} \int w_0(s) \cdot \bar{M}_x(s) ds = \alpha \cdot w_0(x) = \frac{P}{EI} K w_0(x) \quad (2-26)$$

Donde: $\alpha = PK/EI$

$$K w_0(x) = \int w_0(s) \cdot \bar{M}_x(s) ds$$

Puesto que K es función exclusiva de la deformada inicial, resultará constante a efectos de la integración. Si se expresa esta constante, K, como $K=L^2/c$, entonces se tiene:

$$w_1(x) = \frac{PL^2}{cEI} w_0(x) = \alpha \cdot w_0(x) \quad (2-27)$$

$$\alpha = \frac{PL^2}{cEI} \quad (2-28)$$

Y entonces la ecuación que define el valor de w_2 queda:

$$w_2(x) = \alpha \cdot w_1(x) = \alpha^2 \cdot w_0(x) \quad (2-29)$$

Y la deformada final, $w(x)$, se puede expresar como

$$w(x) = w_0(x) \cdot (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \dots) \quad (2-30)$$

Con lo que el valor de la flecha final se puede poner como suma de la progresión geométrica anterior de razón α , con lo que queda, suponiendo $0 < \alpha < 1$:

$$w(x) = w_0(x) \cdot \frac{1}{1 - \alpha} \quad (2-31)$$

Por último, no queda más que considerar que la carga crítica de Euler, P_{cr} , correspondiente a un soporte ideal infinitamente elástico, se puede expresar como:

$$P_{cr} = \frac{cEI}{L^2} \quad (2-32)$$

Y entonces el valor del parámetro α resulta ser:

$$\alpha = \frac{PL^2}{cEI} = \frac{P}{\frac{cEI}{L^2}} = \frac{P}{P_{cr}} \quad (2-33)$$

Y la deformada final es:

$$w(x) = w_0(x) \cdot \frac{1}{1 - \alpha} = w_0(x) \cdot \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \quad (2-34)$$

2.1.3.2 LAS FUERZAS HORIZONTALES EQUIVALENTES.

La consideración de la no linealidad geométrica siguiendo el planteamiento de Vianello conlleva la necesidad de obtener la carga crítica del soporte. Para evitar esto, algunos autores (Wood B., 1976) recurrieron a la definición del llamado “índice de estabilidad”, α , mediante el artificio que se presenta a continuación.

Sea un soporte recto de sección constante de inercia I y altura L , supuesto indefinidamente elástico. El soporte está sometido en su cabeza a una carga transversal, Q , a su directriz lo que genera una flecha, δ , en su cabeza de valor:

$$\delta = \frac{QL^3}{kEI} \quad (2-35)$$

Por otra parte, la carga crítica, P_{cr} , del soporte será, conforme a la teoría de Euler:

$$P_{cr} = \frac{cEI}{L^2} \quad (2-36)$$

Despejando EI de la ecuación (2-35) se tiene,

$$EI = \frac{QL^3}{k\delta}$$

y sustituyendo su valor en la ecuación (2-36) se puede poner el valor de P_{cr} en función de δ y de Q y queda,

$$P_{cr} = \frac{cEI}{L^2} = \frac{cQL^3}{L^2 k \delta} = \frac{cQL}{k\delta}$$

Así, entonces, el valor de P/P_{cr} que interviene en la formulación del factor de amplificación, $\frac{1}{1-\alpha}$, queda como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{P}{P_{cr}} &= \frac{P}{\frac{cEI}{L^2}} = \frac{P}{\frac{cQL}{k\delta}} = \frac{kP\delta}{cQL} = \alpha \\ \alpha &= \frac{P}{P_{cr}} = \frac{kP\delta}{cQL}\end{aligned}\quad (2-37)$$

Y la expresión de la flecha es:

$$w(x) = w_0(x) \cdot \frac{1}{1-\alpha} = w_0(x) \cdot \frac{1}{1-\frac{P}{P_{cr}}} = w_0(x) \cdot \frac{1}{1-\frac{kP\delta}{cQL}} \quad (2-38)$$

2.1.4 INFLUENCIA DE LA NO LINEALIDAD MECÁNICA EN LOS FENÓMENOS DE INESTABILIDAD.

2.1.4.1 LA FISURACIÓN DEL HORMIGÓN.

En apartados anteriores se han presentado algunas formulaciones que tratan de representar los fenómenos de inestabilidad que se producen en piezas simples comprimidas. En todas ellas se ha supuesto que el material es indefinidamente elástico y que la sección transversal del pilar es constante. Se observa que, en esos casos, uno de los parámetros que gobierna el fenómeno es la rigidez de la pieza a través del valor de la inercia a flexión de la sección transversal. Lo que ocurre en un soporte de hormigón armado cuando aparecen flexiones, sean de 1^{er} o de 2^o orden, es que el hormigón se fisura si se supera un cierto valor de la tensión de tracción a la que está sometido (la llamada “resistencia a tracción”). En consecuencia, se reducirá la inercia de la sección y, por tanto, aumentará la magnitud de los fenómenos de segundo orden geométricos propios de la inestabilidad de soportes comprimidos.

Para conocer el orden de magnitud de la influencia de la fisuración en estos fenómenos, se plantea el caso de una sección rectangular, $h \times b$, sometida a flexión simple. En este caso, se demuestra que la fibra neutra coincide con la posición del centro de gravedad de la sección fisurada (Simon-Talero J.M., y otros, 2013), puesto que se sitúa en el punto en que el momento estático de la sección fisurada es nulo.

Fig. 2-9 Sección rectangular fisurada sometida a flexión simple

Si la armadura de flexión es A_s y el canto útil (distancia del borde más comprimido de hormigón hasta la armadura de tracción) es d , (Fig. 2-9), se tiene que la profundidad de la fibra neutra (x) es función sólo de la cuantía relativa de armadura, ρ , y del coeficiente de equivalencia, α , entre hormigón y acero. Así, resulta (De Abreu e Presa de Castro, 2009) :

$$\zeta^2 + 2\alpha\rho\zeta - 2\alpha\rho = 0 \quad (2-39)$$

Siendo:

$$\zeta = x/d$$

$$\alpha = E_s/E_c$$

$$\rho = A_s/bd$$

Resolviendo la ecuación anterior se obtiene x , y entonces la Inercia de la sección fisurada, I_{fis} , resulta de valor:

$$I_{fis} = bd^3 \left[\frac{\zeta^3}{3} + \alpha\rho(1 - \zeta)^2 \right] \quad (2-40)$$

Que comparada con la Inercia bruta ($I_b = 1/12 \cdot b \cdot d^3$) en función de la cuantía de la armadura, resulta para hormigón C30/35 y acero B500S la gráfica de la Fig. 2-10, (abscisas= ρ , ordenadas= r) en la que la relación $r=I_{fis}/I_b$ se puede expresar como:

$$r = \frac{I_{fis}}{I_b} = \frac{\frac{\zeta^3}{3} + \alpha\rho(1 - \zeta)^2}{1/12}$$

Fig. 2-10 Factor de reducción de la inercia en flexión simple en sección rectangular (hormigón C30/35)

Las secciones transversales de las pilas de los puentes no suelen ser secciones rectangulares macizas. Para conocer el orden de magnitud de la influencia de la fisuración en estos casos, se plantea el caso de una sección transversal típica de una pila de altura importante constituida por una sección cajón hueca de 5x2.5 m y paredes de 0.30 m de espesor. Se dispone una armadura constituida por barras $\Phi 20$ a 0.20 de acero B500S con un recubrimiento mecánico de 5 cm.

Las características mecánicas de la sección bruta, despreciando la contribución de las armaduras son:

$$A_b = 4.14 \text{ m}^2 \quad ; \quad I_b = 3.99 \text{ m}^4$$

Si el hormigón es C25/30 y se supone que, en ausencia de axil, la fisuración se alcanza cuando la tracción supera el valor de f_{ctm} , entonces el valor del momento de fisuración que resulta se obtiene como sigue:

$$f_{ctm} = 0.30 \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0.30 \sqrt[3]{25^2} = 2.56 \text{ MPa}$$

$$M_{fis} = \frac{f_{ctm} I_b}{\frac{h}{2}} = \frac{2.56 \times 10^3 \times 3.994}{\frac{2.5}{2}} = 8179 \text{ mkN}$$

Superado este momento el hormigón se fisura y se considera que no resiste, por lo que la sección efectiva queda reducida a la zona de hormigón comprimido más las armaduras, tanto la comprimida como la traccionada. En esas condiciones la fibra neutra se sitúa en el cdg de la sección fisurada (Simon-Talero J.M., y otros, 2013) que resulta situarse en $x=26.4$ cm, suponiendo un coeficiente de equivalencia de 6.35.

Si se calcula la inercia de la sección constituida por el hormigón comprimido, la armadura comprimida y la traccionada resulta un valor de la inercia de la sección de $I_{fis} = 0.406 \text{ m}^4$. Es decir, la relación Inercia fisurada vs Inercia bruta es:

$$\frac{I_{fis}}{I_b} = \frac{0.406}{3.994} = 0.102 = 10\%$$

Por otro lado, si la sección estuviera en compresión simple ($M=0$) la inercia a considerar sería la bruta. Es decir, en función del valor del axil, la inercia a considerar puede variar entre el 100% de la inercia bruta, para el caso en que no existe flector y el 23%, para el caso en que el axil fuera nulo y sólo existiera flector. Para axiles intermedios la reducción de inercia será, también, intermedia entre el 0% y el 90%, en función de la relación N-M que se tenga en cada caso.

En resumen, la fisuración del hormigón afecta de forma significativa a la deformabilidad de la pieza “flexocomprimida” y por tanto, puede tener un efecto importante en el tratamiento de las inestabilidades. Si no se considera este hecho, se corre el peligro de considerar en los cálculos una pieza más rígida que lo que indica su comportamiento real (fisurado) y, por tanto, quedando del lado de la inseguridad ya que se estarán subestimando los efectos de segundo orden, que crecen cuando crece la deformabilidad de la pieza.

2.1.4.2 LA NO LINEALIDAD TENSODEFORMACIONAL.

El hormigón y el acero constituyente tienen un comportamiento tensodeformacional claramente no lineal para estados avanzados de carga. En general, dada una carga, la deformación que se

produce en régimen no elástico es mayor que la que hay cuando las tensiones se mantienen proporcionales a las deformaciones; es decir, en régimen no elástico la deformabilidad de una pieza es mayor que en régimen elástico. En consecuencia, los fenómenos asociados al segundo orden geométrico, que provienen de considerar la propia deformada en el cálculo de esfuerzos, se verán incrementados en ese caso, por lo que será inevitable la consideración de la no linealidad de los materiales a la hora de abordar el problema de la inestabilidad de piezas reales como es ya bien sabido en todo el mundo científico.

2.2 LA INESTABILIDAD EN LAS NORMATIVAS DE HORMIGÓN ARMADO

2.2.1 LA NORMATIVA ESPAÑOLA (EHE)

El artículo 43 de la Instrucción de hormigón estructura, EHE (EHE, 1999) resuelve el problema de la inestabilidad de los soportes aislados considerando, a nivel seccional, un incremento de la excentricidad del axil, que trata de representar la flexión adicional que se genera al considerar la deformada en la obtención del flector solicitante de la sección.

Así se propone que:

$$e = e_e + e_a \quad (2-41)$$

Donde e_e es la excentricidad “equivalente” de primer orden y e_a se define como la “excentricidad ficticia utilizada para representar los efectos de segundo orden”. Esta excentricidad adicional, e_a , se puede expresar como el producto de 5 factores (López Agui J.C., y otros, 2000), a saber:

$$e_a = c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot c_4 \cdot c_5 \quad (2-42)$$

Siendo:

$$c_1 = 0.4(1 + 0.12\beta) \frac{d - d'}{i_c}$$

$$c_2 = \frac{2\varepsilon_y}{d - d'}$$

$$c_3 = \frac{10e_e + 0.5h}{10e_e + h}$$

$$c_4 = \frac{\varepsilon_{y+\varepsilon}}{2\varepsilon_y}$$

$$c_5 = 0.1L_0^2$$

El significado de cada uno de los cuatro primeros coeficientes es el siguiente:

- c_1 trata de convertir la excentricidad adicional de segundo orden que se produce en la realidad del cálculo de la pieza en otra excentricidad que, sumada a la de primer orden, permita realizar los cálculos en el ELU de agotamiento por tensiones normales propio de las comprobaciones a nivel seccional.
- c_2 representa la curvatura máxima que se tiene al inicio de la plastificación cuando la fibra neutra está en el centro de la sección y las armaduras, situadas a d y a d' del borde más comprimido, tienen una deformación igual a ϵ_y
- c_3 es un factor de ajuste tal que el producto $c_2 c_3$ resulte aproximadamente igual a la curvatura de inestabilidad producida por las cargas de corta duración.
- c_4 sirve para tener en cuenta los efectos diferidos en el cálculo de la curvatura, suponiendo que la diferida es k veces la instantánea.

2.2.2 EL EUROCÓDIGO 2 (EN 1992)

El artículo 5.8 de la parte 1.1 del Eurocódigo 2 (EN1992-1-1, 2004) propone dos métodos simplificados alternativos al método general de cálculo no lineal general, para considerar los efectos de la inestabilidad en el tratamiento de las piezas comprimidas: el método de la rigidez nominal y el método de la curvatura nominal.

2.2.2.1 EL MÉTODO DE LA CURVATURA NOMINAL

El método consiste en suponer que el momento final que solicita a una sección se puede obtener como suma del momento de primer orden (M_{0Ed}) y el de segundo orden (M_2).

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + M_2 \quad (2-43)$$

La obtención de este momento de segundo orden se basa en la longitud eficaz (o de pandeo) de la pieza y en el valor de una cierta curvatura máxima estimada que puede tener la pieza. Así se tiene que:

$$M_2 = N_{Ed} e_2 \quad (2-44)$$

Siendo:

N_{Ed} el esfuerzo axial en la sección

e_2 la flecha de segundo orden, que se puede tomar como

$$e_2 = \left(\frac{1}{r}\right) L_0^2 / c \quad (2-45)$$

Donde:

$1/r$ es la curvatura,

c es un coeficiente que depende de la distribución de la ley de momentos (y, por tanto de curvaturas) en la pieza.

A su vez, la curvatura $1/r$ se puede expresar como:

$$1/r = k_r k_\varphi 1/r_0 \quad (2-46)$$

En la que:

$$\begin{aligned} 1/r_0 &= \frac{\varepsilon_y}{0.45d} = \text{curvatura en la plastificación de la armadura} \\ k_r &= \frac{1 + \omega - v}{1 - \omega - 0.4} \quad , \text{ para tener en cuenta la cuantía de armadura } (\omega) \text{ y el axil } (v) \\ k_\varphi &= 1 + \left(0.35 + \frac{f_{ck}}{200} - \frac{\lambda}{150} \right) \varphi \quad , \text{ para tener en cuenta la fluencia} \\ \omega &= \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}} \\ v &= \frac{N_{Ed}}{A_c f_{cd}} \end{aligned}$$

2.2.2.2 EL MÉTODO DE LA RIGIDEZ NOMINAL

En este método se debe calcular el flector solicitante empleando una rigidez “ficticia” que tenga en cuenta los efectos de la fisuración del hormigón, la no linealidad de los materiales y el posible efecto de la fluencia. Así, se propone que el valor de la rigidez EI a emplear en los cálculos sea:

$$EI = k_c E_{cd} I_c + k_s E_s I_s \quad (2-47)$$

Donde los coeficientes que intervienen en la expresión anterior se pueden calcular como sigue:

$$K_s = 1 \quad \text{si } \rho \geq 0.002 \quad (2-48)$$

$$k_c = \sqrt{f_{ck}/20} v \frac{\lambda}{170} / (1 + \varphi) \quad (2-49)$$

Con

$$\begin{aligned} v &= \frac{N_{Ed}}{A_c f_{cd}} \\ \lambda &= \frac{L_0}{i} \end{aligned}$$

Una vez obtenido el flector de primer orden utilizando las rigideces obtenidas aplicando lo expuesto, se obtiene el momento de cálculo amplificando el de primer orden como sigue:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} \left[1 + \frac{\beta}{N_B/N_{Ed} - 1} \right] \quad (2-50)$$

Siendo una simplificación razonable normalmente tomar:

$$M_{Ed} = \frac{M_{0Ed}}{1 - N_B / N_{Ed}} \quad (2-51)$$

Donde:

M_{0Ed} es momento de primer orden

β es un coeficiente que depende de la forma de la ley de momentos resultante (de valor $\pi^2/12$ para ménsula con carga en cabeza)

N_B es el axil crítico de Euler calculado con la longitud de pandeo igual a L_0

N_{Ed} es el axil de cálculo

Donde el cociente $\lambda/170$ de la ecuación (2-49) se debe tomar siempre ≤ 0.20

2.2.3 EL CÓDIGO MODELO (2010)

El artículo 7.3.7 de la versión del año 2010 del Código Modelo (MODEL CODE, 2010) presenta la forma de considerar los efectos de segundo orden en piezas comprimidas. Para ello propone que se tome una excentricidad del axil que sea suma de tres términos:

$$e = e_{0d} + e_{1d} + e_{2d} \quad (2-52)$$

donde:

e_{0d} es la excentricidad inicial debida a las imperfecciones

e_{1d} es la excentricidad de primer orden, es decir M_{0Ed} / N_{Ed}

e_{2d} es la excentricidad de segundo orden

Esta excentricidad de segundo orden, e_{2d} , se puede calcular como sigue:

$$e_{2d} = K_d \frac{L_0^2}{c_0} \quad (2-53)$$

Donde K_d es la curvatura de la sección que se puede tomar igual a:

$$K_d = \frac{\varepsilon_{sd} - \varepsilon'_{sd}}{d - 2c} \quad (2-54)$$

Donde ε_{sd} y ε'_{sd} son las deformaciones de la armadura traccionada y comprimida, respectivamente, cuando alcanzan el valor del límite elástico de cálculo, f_{yd} .

El Código Modelo indica que también se puede calcular dicha curvatura, de forma un poco más ajustada, empleando la siguiente expresión:

$$K_d = \frac{(1 + \omega) - \nu}{(1 - \omega) - 0.4} \frac{\varepsilon_y}{0.45d} \quad (2-55)$$

Donde ω es la cuantía de acero y v es el axil reducido:

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

$$v = \frac{N_{Ed}}{A_c f_{cd}}$$

2.2.4 EL CÓDIGO DE LA ACI (ACI 318)

Los artículos 10.8 a 10.10 de la Norma del ACI (American Concrete Institute) denominada “Building Code Requirements for Structural Concrete ACI 318” (ACI 318, 2011) están dedicados al tratamiento de los elementos comprimidos.

En particular, el artículo 10.10 trata de la influencia de la esbeltez en el cálculo (*“slenderness effects in compression members”*). Primero, se define la longitud de pandeo mediante el empleo de los conocidos ábacos nomogramas de Jackson y Moreland, que se reproducen a continuación (Fig. 2-11).

Más adelante, el ACI318 define el valor de la inercia a tomar para tener en cuenta la existencia de secciones fisuradas a lo largo del elemento comprimido. Así, basándose en (Mac Gregor, y otros, 1977) y multiplicando por 0.875 los valores propuestos por MacGregor, se propone tomar el 70% de la inercia bruta para el caso de pilares comprimidos de pórticos de edificación.

Fig. R10.10.1.1—Effective length factors k .

Fig. 2-11 Nomogramas de Jackson Moreland para el cálculo de la longitud de pandeo (copia de la fig R10.10.1.1 de ACI 318-11)

Posteriormente, el ACI318-11 recoge lo propuesto por (Khuntia, y otros, 2004) (Khuntia, y otros, 2004) y presenta una formulación más aproximada de la inercia eficaz, conforme a la siguiente expresión:

$$0.35I_g < I = \left(0.80 + 25 \frac{A_{st}}{A_g}\right) \left(1 - \frac{M_u}{P_u h} - 0.5 \frac{P_u}{P_0}\right) I_g < 0.875I_g \quad (2-56)$$

Donde:

P_0 es el axil último resistente de la sección, sin considerar inestabilidades

P_U es el axil de cálculo

M_U es el momento de cálculo

A_{st} es la armadura de flexión de la sección

A_g es el área de la sección bruta de hormigón

h es el canto de la pieza

I_g es el momento de inercia de la sección bruta de hormigón con respecto a su cdg

Una vez calculados los esfuerzos en la estructura, utilizando la inercia I en el elemento comprimido obtenida conforme a lo expuesto en los párrafos anteriores, se debe obtener el flector actuante que tenga en cuenta adecuadamente los fenómenos de segundo orden geométricos. Para ello, se propone emplear el “método de magnificación de los momentos” en que el momento en la sección en estudio se puede poner como:

$$M_c = \delta M$$

Donde:

M_c es el momento final ponderado que ya considera los efectos de segundo orden

δ es el coeficiente de magnificación del momento

M es el momento de primer orden en la sección en estudio.

El valor del coeficiente de magnificación, δ , se puede obtener conforme a lo expuesto por (Mac Gregor, y otros, 1977) y por (Lai, y otros, 1983) que indican que δ vale:

$$\delta = \frac{1}{1-Q} \quad (2-57)$$

Donde Q es el llamado “factor de estabilidad” que se define como lo que sigue:

$$Q = \frac{P_U \Delta_0}{V_{us} L_c} \quad (2-58)$$

Siendo:

P_U el axil de cálculo

V_{us} el cortante en la cabeza del soporte

Δ_0 el corrimiento horizontal, calculado en primer orden, de la cabeza del soporte cuando está sometido a la carga V_{us}

L_c la altura del soporte

2.3 OTROS ARTÍCULOS Y PUBLICACIONES

2.3.1 REFERENCIAS BASICAS APLICADAS EN LOS DIFERENTES CÓDIGOS ESTRUCTURALES

El método de la “magnificación de momentos” ha sido profusamente empleado en USA y en Canadá para analizar el comportamiento de piezas esbeltas aisladas sometidas a compresión y también para el caso de pórticos de edificación, como ya se ha comentado. Así, fue adoptado en el Código 318 de la ACI desde 1977 (ACI 318, 2011). Este mismo método es el que también figura en la AASHTO (AASHTO, 1977) como procedimiento para analizar el pandeo de pilas esbeltas de puentes en las que el fenómeno del pandeo no era despreciable, empleando, en versiones posteriores lo sugerido en los trabajos de Poston (Poston, y otros, 1983).

En la reunión del Comité 431 de la ACI que se celebró en Des Moines en 1967, se decidió que el método de la “magnificación del momento” sería el que se adoptaría en futuras ediciones del Código 318 de la ACI para considerar el pandeo de piezas esbeltas comprimidas. En 1970, MacGregor (MacGregor, y otros, 1970) publicó en el ACI Journal los resultados de los trabajos realizados en el seno del citado Comité 441 de la ACI. Este trabajo fue completado posteriormente en 1983 por el propio MacGregor, (MacGregor, 1993). Aquí ya se expone que el flector de cálculo se obtendrá amplificando el de primer orden una magnitud F , siendo F :

$$F = \frac{C_m}{1 - P_u/P_c} \quad (2-59)$$

Donde C_m depende de la relación de momentos en los extremos de la pieza y P_c es la carga crítica de Euler

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kh)^2} \quad (2-60)$$

y la rigidez EI se puede calcular con la expresión que sigue, que tiene en cuenta los efectos de la fisuración en el hormigón:

$$EI = \frac{0.2E_c I_g + E_s I_s}{1 + R_m} \quad (2-61)$$

Donde el factor R_m tiene en cuenta el efecto de la fluencia del hormigón.

En 1970 Wood publica en el Journal of the Structural Division de la ASCE (Wood B., 1976) un resumen de su estudio relativo a la aplicación del método $P-\Delta$ para considerar los efectos del segundo orden geométrico en los fenómenos de inestabilidad de pórticos planos. En él utiliza el concepto de “sway forces”, que son unas fuerzas externas horizontales aplicadas a nivel de cada piso del pórtico plano. El efecto de estas fuerzas horizontales debe ser equivalente a la flexión

adicional que produce la consideración de la deformada en el cálculo, por la cual el axil aplicado genera una flexión de segundo orden.

Así, la expresión que propone Wood es:

$$V_i' = \frac{\alpha \sum P_i}{h_i} \quad (2-62)$$

Donde:

V_i' es cortante adicional equivalente al efecto de 2º orden del axil

α es el coeficiente de mayoración de acciones

P_i es el axil en la planta i

h_i es la altura de la planta i

Como ya se ha comentado, el método de la “magnificación de los momentos” fue adoptado por el Código 318 de la ACI para resolver piezas aisladas y pórticos planos. Lawrie (Lawrie, 1980) plantea la aplicabilidad del uso de este método en pilas de puentes. Concluye que las principales inexactitudes que aparecen se deben a los siguientes factores:

- En este método se supone que el flector es constante en el elemento comprimido, cosa que no suele ser habitual en las pilas de puentes. Entonces habrá que emplear el coeficiente C_m que tiene en cuenta la diferencia de momentos entre ambos extremos de la pieza. Sin embargo, este coeficiente se prescribe sólo para pórticos intraslacionales, que no suele ser el caso de las pilas de los puentes en que los movimientos de sus cabezas pueden ser significativos bajo la acción de las cargas de cálculo.
- El efecto de la fisuración del hormigón se tiene en cuenta mediante la utilización de una “rigidez eficaz” menor que la bruta. Sin embargo, los valores prescritos en el ACI 318 pueden ser adecuados para pórticos de edificación, pero no tanto para pilas de puentes en que, tanto la cuantía de armadura como la propia esbeltez de las pilas, no son asimilables a las de un pórtico de edificación, para el que fueron ajustadas dichas expresiones.
- En el cálculo de la amplificación del flector que se produce por la no linealidad geométrica, interviene el valor de la carga crítica del pilar. Especial atención se debe prestar a la “longitud de pandeo” o “longitud eficaz” a considerar, cuyo cálculo no es inmediato ya que se debe considerar correctamente la coacción “parcial” que existe en la cabeza de cada pila.

En 1983, la Universidad de Texas en Austin publica el resultado del programa de investigación “Design of slender, nonprismatic, and hollow concrete piers” (Poston, y otros, 1983) . En el Informe-Resumen de los trabajos se definen las modificaciones deseables de los artículos de las “AASHTO Specifications” relativas al proyecto de pilas esbeltas. En este documento se toma como base de cálculo el método de la magnificación del momento definido en el Código 318 de la ACI ya citado, de profusa aplicación en el cálculo de pórticos de edificación. En el Informe se comienza reconociendo que la aplicación de lo expuesto en el ACI-318 a la comprobación de pilas altas de puentes conlleva ciertos problemas que provienen de lo que sigue:

- Los valores de reducción de la rigidez de los soportes propuesto por el ACI-318 se basaron en la experimentación realizada en secciones prismáticas pero no en secciones huecas o de canto variable, tan propias de pilas de puentes.
- Casi todo el resto de parámetros que gobiernan las expresiones propuestas por el ACI-318 se basan en consideraciones propias de estructuras de edificación que, muchas veces, no son aplicables directamente al caso de puentes.
- Todo lo indicado en el ACI-318 tiende a asegurar la resistencia y capacidad mecánica de las secciones de los soportes y de la propia pieza en su conjunto; no se considera ninguna limitación de los desplazamientos porque éstos, en general, no suelen resultar dimensionantes en los casos de pórticos de edificación. Sin embargo, éste no es siempre el caso en puentes.
- En el cálculo de la amplificación del flector que se produce por la no linealidad geométrica, interviene el valor de la carga crítica del pilar. Como ya comentan otros autores, (Lawrie, 1980), especial atención se debe prestar a la “longitud de pandeo” o “longitud eficaz” a considerar, cuyo cálculo no es inmediato ya que se debe considerar correctamente la coacción “parcial” que existe en la cabeza de cada pila.

En este mismo documento, “Design of slender, nonprismatic, and hollow concrete piers” (Poston, y otros, 1983), se comenta también la aplicabilidad del “índice de estabilidad” para el cálculo de las inestabilidades en pilas de puentes, conforme se muestra en Fig. 2-12, tomada de dicho documento

Fig. 2-12 Análisis considerando el “índice de estabilidad” según (Poston, y otros, 1983)

En la expresión de la Fig. 2-12 Q' es el índice de estabilidad que se define como:

$$Q' = \frac{P_u}{P_{cr}} = \frac{P_u \Delta \gamma}{HL} \quad (2-63)$$

Donde γ es un factor que Rosenbleuth toma, para pórticos de edificación, igual a 1.0 o 1.22 en función de la relación de rigideces de pilas a vigas (1.0 para pilar rígido y vigas flexibles y 1.22 en el caso opuesto). El resto de los parámetros valen:

P_u es el axil mayorado que actúa sobre el pilar

P_{cr} es la carga crítica de Euler del pilar

H es la carga horizontal transversal en la cabeza del pilar

L es la altura del pilar

Δ es la flecha en cabeza producida por H , calculada en régimen elástico.

Esta expresión, con $\gamma=1$, es la que Poston (Poston, y otros, 1983) propone para pilas de puentes, según lo que sigue.

$$Q = \frac{P_u \Delta \gamma}{\Phi H L} \quad (2-64)$$

Donde Φ es el número de pilas (iguales) del puente, aunque haciendo dos advertencias:

- En el cálculo de la flecha horizontal, Δ , producida por la carga transversal, H , se debe considerar de forma realista el efecto de la fisuración del hormigón, si es que es el caso.
- Este método da una buena aproximación para puentes en que las todas las pilas tienen alturas y características mecánicas similares (“uniformes”).

a) Pilas de igual altura

b) Pilas de diferente altura

Fig. 2-13 Aplicación del método del índice de estabilidad a puentes (Poston, y otros, 1983)

En el caso de puentes con pilas de altura o características no tan “uniformes”, Poston (Poston, y otros, 1983) propone que, en estos casos, se tome en la ecuación (2-64) un valor de L igual a h_e , siendo h_e una “altura media de las pilas obtenida como:

$$h_e = \frac{\Delta \Sigma P_{cr}}{H} \quad (2-65)$$

Donde P_{cr} es la carga crítica de Euler de cada pila y el sumatorio está extendido a todas las pilas que conforman la subestructura del puente.

Todo el trabajo realizado por Poston y sus colaboradores en el documento, “Design of slender, nonprismatic, and hollow concrete piers” (Poston, y otros, 1983), ha sido resumido y presentado en diversos artículos incluidos en el ACI Journal que figuran en la Bibliografía, (Poston, y otros, 1983), (Poston, y otros, 1985), (Poston, y otros, 1986)

2.3.2 OTRAS REFERENCIAS RELATIVAS AL TRATAMIENTO DE LAS INESTABILIDADES EN ELEMENTOS COMPRIMIDOS

En 1993 Manzelli publica un artículo (Manzelli, y otros, 1993) en el que, basándose en el método de la magnificación del momento, trata de cuantificar la variación de la rigidez EI de las pilas en función de la magnitud del axil actuante en ellas.

En 2009 miembros de la Universidad Politécnica de Valencia publican un artículo (Bonet, y otros, 2011) en el que proponen “unas nuevas expresiones para calcular la rigidez EI de secciones de cualquier forma de elementos de hormigón armado sometidos a compresión compuesta en un único eje”.

En el año 2014, La Universidad de Toronto publica la Tesis del Máster en Ingeniería Civil escrita por A. Kuzmanovic (Kuzmanovic, 2014) cuyo título era “Preliminary design of slender reinforced concrete highway bridge pier systems”. A pesar de su título, lo que se presentaba en este estudio era el análisis de 22 pilas de puentes existentes con diferentes geometrías, materiales (resistencia de hormigón) y cuantías y tipos de armado. Además de este interesante análisis, se incluye al principio un capítulo dedicado a repasar los métodos aproximados actualmente existentes para estudiar la inestabilidad de los elementos comprimidos. Especial atención se presta al método de la magnificación del momento que, como ya se ha indicado, se basa en suponer que la deformada de segundo orden es proporcional a la inicial. Se pasa revista también a lo propuesto por Menn (Menn C., 1990), en el que, como ya se ha indicado, se supone que:

- La fisuración del hormigón se tienen en cuenta considerando la inercia de la sección fisurada. En esta situación, se limita la deformación en el hormigón a la correspondiente a su límite elástico (ϵ_y).
- La “inercia efectiva” a considerar se supone constante en toda la altura del pilar.

Estas dos hipótesis suponen una limitación inherente al método propuesto por Menn, puesto que toman un valor aproximado de la rigidez de la pila a considerar en el cálculo, siendo dicho parámetro uno de los principales factores que gobiernan el problema. Además, Kuzmanovic (Kuzmanovic, 2014) también indica que al aplicar el método de la magnificación del momento se supone que la deformada de segundo orden es proporcional a la de primer orden producida por la carga externa o por la excentricidad inicial. Si esto no es así, la hipótesis inicial de Vianello (Vianello, 1898) en que se basa el método no se cumple y la solución no es exacta. Este hecho puede resultar significativo (diferencias de un 18% según expone Kuzmanovic) en el caso de esbelteces en el rango de 100.

A este respecto hay que indicar que en los puentes, si no existe empotramiento entre el tablero y las pilas, éstas se encuentran sometidas, en general, a dos tipos de cargas; por una parte las que le llegan en cabeza desde el tablero (axil y carga horizontal) y, por otra, a las cargas horizontales aplicadas en el fuste de la pila (el viento, principalmente). Además, en el método de Menn o de Vianello, ya citados, la deformada de segundo orden es proporcional al movimiento de la cabeza de pila, por lo que es congruente con la aplicación de la carga en cabeza que se acaba de comentar, siendo el único desajuste el que pueda generar la aplicación de la carga repartida en el fuste. De lo expuesto, se deduce que el desajuste entre la deformada propuesta por el método de Menn y la “real” podría venir de la diferencia de “forma” entre la deformada producida en una ménsula por la carga en cabeza y la que produce una carga repartida aplicada en toda su altura. Esta diferencia no es mucha y viene dada sólo por la forma de la parábola de tercer o cuarto grado que producen la carga puntual o la repartida, respectivamente.

Por otra parte en Europa y en España, en particular, se publicaron diferentes trabajos relativos al tratamiento de las inestabilidades en pilas esbeltas de puentes de hormigón armado. En 1980, J.J. Arenas publica su libro “Cálculo de soportes de hormigón armado en teoría de segundo orden. Ábacos de dimensionamiento directo,” (Arenas, 1980) en la que se propone la utilización de diagramas momento-curvatura de las secciones transversales para aproximar el comportamiento de las secciones de hormigón armado en estados avanzados de carga en que se fisura el hormigón. Se introduce el concepto de “superficie mecánica” de una sección de hormigón armado y se explica el proceso numérico a seguir para su obtención.

En 1981 se publica la tesis doctoral “Análisis de segundo orden de pilas altas de viaductos. Aplicación al proyecto de pilas construidas por avance en voladizos”, (Villegas, 1981). En este trabajo puso a punto el modelo matemático propuesto por Arenas (Arenas, 1980) y se desarrolla un método riguroso de análisis de pilas esbeltas de hormigón armado con sección y armadura variables a lo largo de la altura en teoría de segundo orden con deformaciones planas y espaciales, verificando sus resultados teóricos comparándolos con valores experimentales. En todos los casos se empleó un diagrama parábola – rectángulo para representar el comportamiento tenso-deformacional del hormigón. También hay que destacar que a la hora de estimar la rigidez de las secciones se comentaba el efecto favorable del fenómeno del “tensión-stiffening” por el que el hormigón existente en la zona de tracción entre dos fisuras consecutivas trabaja a tracción y hace que se reduzca la tensión en la armadura, con lo que la deformación media de ésta resulta inferior a la que experimenta en la sección fisurada y, en consecuencia, aumenta la rigidez de la pieza respecto a la que se deduce de un diagrama momento-curvatura calculado con la sección fisurada.

El parámetro fundamental que rige esta colaboración del hormigón en el alargamiento medio a tracción es la cuantía geométrica de armadura, debido al distinto desarrollo de fisuras que se produce en un tirante con baja cuantía (fisuras muy separadas) y en otro más armado (fisuras más próximas). Éste último se comporta mejor en cuanto a protección del acero contra la corrosión (abertura más pequeña de cada fisura) pero, en cambio, resultará menos rígido que el poco armado si se refiere una y otra elongabilidad a la de sus respectivas secciones desnudas de acero. En el tirante más armado la menor distancia entre fisuras conduce a una menor colaboración del hormigón y, en suma, a una deformación media del acero más próxima a la que resulta suponiendo toda la sección fisurada.

La Fig. 2-14 tomada de (Leonhardt, 1977) resulta ilustrativa a estos efectos. En esta figura se representa la relación entre rigideces axiales, K_z^{II} , (hormigón fisurado a tracción con

colaboración del hormigón entre fisuras) y K_z^0 , (acero desnudo) en función de la cuantía geométrica de armadura, ρ , y de la tensión, σ_{s0} , a la que trabaja el acero ($\sigma_{s0} = N/A_s$). Puede verse que para tensiones de trabajo habituales (σ_{s0} del orden de 240 MPa), habituales en las condiciones de servicio, el efecto rigidizador del hormigón entre fisuras supone un 50% de incremento para cuantías del 1.5% o del 21% para cuantías del 2%, haciéndose despreciable para el 5% de cuantía.

En las bases de nuestras pilas es habitual disponer una armadura importante, del orden de los 50 a 80 cm²/m que suele ser equivalente a unas cuantías geométricas de acero de entre el 3% y el 5%, por lo que la colaboración del tension-stiffening no debe ser muy importante, en nuestros casos habituales de pilas esbeltas de puentes ... fuertemente armadas. Es verdad que a medida que se sube en la pila, disminuye la cuantía de armadura y por tanto aumentará el efecto de dicho fenómeno. Sin embargo, hay que observar que las secciones cuyas curvaturas más influyen en el corrimiento de la cabeza de pila son las de la base.

Fig. 5. Relación entre la rigidez K_z^{II} , que incluye el efecto rigidizador del hormigón entre fisuras ("Tension Stiffening"), y la rigidez axil del acero desnudo K_0^{II} , para diversas cuantías geométricas ρ , en función de la tensión σ_s en el acero desnudo, con hormigón H-250.

Fig. 2-14 Influencia del "tensión-stiffening" en la rigidez fisurada de las secciones de hormigón armado (Leonhardt, 1977)

Lo expuesto en esta tesis ha sido objeto de diferentes artículos publicados posteriormente (Arenas, y otros, 1983), (Arenas, y otros, 1983), (Villegas, y otros, 1984), (Villegas, y otros, 1984). En el primero de ellos se presenta el método propuesto, indicando, además, que los fenómenos transversales y de torsión, aún considerando los efectos del segundo orden, se han mostrado irrelevantes en la mayoría de los casos estudiados, si no existe una fuerte carga transversal concomitante con la longitudinal. En la segunda referencia se han contrastado los resultados obtenidos aplicando el método propuesto con los de cuatro programas de investigación sobre inestabilidad de soportes esbeltos., habiéndose confrontado con un total de 39 resultados experimentales, 21 de los cuales correspondían a cargas de aplicación rápida y 18 a cargas de larga duración.

En 1989 se publica en Hormigón y Acero, el trabajo titulado "Cálculo práctico de pilas altas de viaductos en teoría de segundo orden" (Morán, 1989) que presenta un algoritmo para el análisis o comprobación de una pila alta de hormigón armado y sección y armaduras variables, sometida a flexocompresión esviada. Este algoritmo está basado en el método de las diferencias finitas en

el que se efectúan diferentes recorridos sucesivos en las diferentes secciones de la pila. En cada sección, en función de las flechas estimadas o conocidas del recorrido anterior, se obtienen los momentos de segundo orden, que se suman a los de primer orden para obtener los momentos totales. A partir de estos momentos y del axil existente en cada sección se efectúa un cálculo de sección, obteniendo las deformaciones de sus fibras y, por consiguiente, las curvaturas. Estas curvaturas, integradas a lo largo de la pieza, permiten obtener una nueva ley de flechas y el proceso se repite hasta alcanzar la convergencia. La implementación de este algoritmo se ha hecho en varios programas de ordenador (PILA, PILACO, PILACIR) que culminaron con el programa PAN40, desarrollado por F. Morán para JOSE A. TORROJA, OFICINA TÉCNICA S.A. y que ha servido para realizar el dimensionamiento de multitud de pilas esbeltas de puentes, incluso alguna que, en su día, fue record de Europa de altura de pilas (Viaducto de la Cuesta de Silva, Islas Canarias, España).

Hay que destacar que los trabajos citados de J.J. Arenas, L. Villegas y F. Morán resolvían de forma muy correcta el problema de la pila esbelta aislada de hormigón armado, pero no acometían el caso del comportamiento conjunto de una serie de pilas que conforman la subestructura de un puente.

En 1997 se publica el libro “Estabilidad de pilares esbeltos de hormigón. Estado límite último de inestabilidad” (Lopez Agui, 1997), que presenta un compendio teórico de los métodos llamados directos y de los simplificados, para resolver el problema de la inestabilidad de elementos comprimidos aislados. En la misma línea se sitúa lo expuesto en la publicación “Cálculo práctico de estructuras de edificios en hormigón armado” (Fuentes, 1980), en que se presenta una muy interesante disertación sobre el método de la columna modelo y la forma de considerar los fenómenos de segundo orden que se deduce aplicando dicho método.

Por último hay que citar el trabajo más reciente publicado en Hormigón y Acero titulado “Un estudio del comportamiento de pilares incluyendo el régimen no lineal de los materiales” (Ortega, y otros, 2006), en que se recogen de forma resumida los elementos esenciales que permiten realizar un estudio del comportamiento de pilares comprimidos en régimen no lineal.

2.3.3 REFERENCIAS RELACIONADAS CON LOS CÁLCULOS “PUSHOVER”

Para estudiar el efecto dinámico del sismo se utilizan a veces cálculos estáticos incrementales que tienen en cuenta la no linealidad de los materiales durante el proceso de carga. Es verdad que, en los últimos tiempos, se ha generado abundante bibliografía al respecto, pero también es cierto que no toda ella es aplicable al caso que nos ocupa del estudio de la inestabilidad en pilas de puentes. Se presentan a continuación algunas referencias de documentos más o menos recientes que tratan diferentes aspectos de los análisis “pushover” empleados en la ingeniería sísmica y que pueden ser aplicables a dicho caso. Muchas de estas referencias provienen de Asia y, en particular, de China.

A principios de este siglo resultó muy activo un grupo de trabajo del Imperial College de Londres que trabajó sobre la aplicabilidad de los análisis no lineales estáticos para conocer la respuesta dinámica durante el sismo en pilares de hormigón armado de pórticos de edificación. Existen diferentes referencias de sus trabajos (Elnashai, 2001), (Elnashai, 2001), (Tso, 1998) a sus trabajos que provienen de los sugeridos por Lawson (Lawson, 1994) y que tratan de correlacionar los resultados de la aplicación de cálculos incrementales estáticos a los que se

obtienen al realizar un cálculo dinámico propio de la acción sísmica. En esta misma línea se inscriben los estudios de Papanikolau ([Papanikolau, 2000](#)).

También en Japón se ha tratado de aplicar la técnica del cálculo no lineal estático para la predicción de los efectos dinámicos de la acción sísmica. Son numerosos los estudios sobre ello, entre los que cabe destacar los siguientes: ([Yamazaki, 2003](#)), ([Kawashima, 1998](#))

En la Universidad Nacional de Taiwan, (Yu-Chi, 2005) se ha estudiado la influencia de la variación del valor del axil en el proceso de agotamiento de pilares de hormigón armado sometido a una carga sísmica elevada. Para ello se emplea un cálculo paso a paso que, en cada iteración considera la curvatura resultante de la anterior y que está basado en los trabajos previos de Sung ([Sung, 2004](#)).

También en China se están desarrollando procedimientos para optimizar las técnicas de pushover con vistas a mejorar el ajuste de los resultados obtenidos en este tipo de cálculos a lo que se obtiene al realizar un cálculo dinámico completo. Así son de destacar los trabajos que se citan a continuación: ([Zhi-Wei, 2008](#)), ([Ping, 2006](#)) ([Huguang, 2005](#)).

3 CÁLCULO DE LA INFLUENCIA DE LAS NO LINEALIDADES

3.1 MODELOS DE CÁLCULO EMPLEADOS

3.1.1 PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

El estudio de una pila aislada sometida a un esfuerzo axial se debe realizar considerando los efectos de segundo orden. Esto es así porque la dicha consideración del segundo orden genera unos esfuerzos adicionales que tienden a incrementar los de primer orden y que, por tanto, hace que aquéllos no se puedan despreciar.

Por otra parte, al estudiar el segundo orden, hace falta diferenciar la no linealidad mecánica y la no linealidad geométrica:

- La no linealidad mecánica se debe a que ni los materiales ni el comportamiento de la sección se mantienen indefinidamente en el rango elástico. Es decir, habrá que considerar en estados avanzados de carga que los diagramas tensión-deformación del hormigón y del acero no son lineales.
Además, habrá que considerar también la fisuración del hormigón en aquellas fibras en que la tensión de tracción alcance un determinado valor.
- La no linealidad geométrica dice que se debe considerar la deformada a la hora de obtener los esfuerzos finales en la pieza. Así, un axial generará, en las diferentes secciones, un flector adicional producido por la excentricidad que le provoca la consideración de la deformada en el cálculo de dichos flectores.
Además, esta flexión generará una curvatura adicional que se suma a la inicialmente provocada por las cargas exteriores. Así, se produce una “amplificación” de la flecha que, a su vez, generará la consiguiente “amplificación” de las excentricidades del axial y de los momentos de “segundo orden” que se generan.
Es decir, la consideración de la no linealidad geométrica debe tener en cuenta tanto el efecto de la excentricidad del axial como su amplificación hasta llegar a un estado de equilibrio.

3.1.2 MODELOS DE CÁLCULO

En los cálculos que siguen se toma una pila aislada de altura H_i . Se supone que está empotrada en base y que en cabeza está sometida a un axial N_i y a una carga transversal cortante, Q_i . La flecha que se genera en cabeza en estas condiciones es δ_i .

Este estudio se centra en pilas de hormigón armado de sección cajón unicelular, pero la metodología presentada es aplicable a otro tipo de secciones. Así, en este estudio, la pila tendrá

una sección cajón unicelular hueca de dimensiones canto x ancho ($c_i \times b_i$) El espesor de las paredes será e_i , que, en principio, se toma siempre igual a 0.30 m.

Fig. 3-1 Modelo de pila aislada. Esquema de armado

La armadura en la base de la pila será una armadura A_s^0 (cm^2/m) constante en todo el perímetro exterior e interior de la sección. Análogamente, la armadura en la cabeza de la pila será una armadura A_s^H (cm^2/m) constante en todo el perímetro exterior e interior de la sección. Se supondrá una variación lineal del valor de la armadura entre la base y la cabeza. En cada sección, la cuantía de armadura, ω , es, por tanto:

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

Y se puede tomar como parámetro de definición de la carga axial, el axial reducido, ν , de valor:

$$\nu = \frac{N_i}{A_c f_{cd}}$$

Los materiales a emplear serán hormigón y acero, con las características que, para cada tipo, se indican en el Eurocódigo 2 (EN1992-1-1, 2004). En particular se tomará hormigón C30/35 para las pilas y acero B500S para las armaduras.

Los diagramas tensión – deformación empleados en el cálculo para cada uno de ellos son los que se muestran a continuación (Fig. 4-4)

El valor que se toma para el módulo de deformación, E_c , del hormigón es:

$$E_c = 8500 \sqrt[3]{f_{ck} + 8} \quad (\text{MPa}) \quad (3-1)$$

Siendo f_{cm} la resistencia media del hormigón.

Para el acero se toma $E_s = 2 \times 10^5$ MPa, como es habitual.

Fig. 3-2 Modelo de pila aislada. Diagrama tensión-deformación del hormigón

Fig. 3-3 Modelo de pila aislada. Diagrama tensión-deformación del acero

3.1.3 TIPOS DE CÁLCULO

Sea ahora una determinada pila de altura H_i , cuya sección transversal es un cajón unicelular de hormigón armado de dimensiones $c_i \times b_i$, siendo el espesor de las paredes e_i . Las cuantías de armadura de la base y de la cabeza son ω_i^H y ω_i^0 , respectivamente y la variación de armadura a lo largo del fuste se supone que es lineal.

Dado un axil N_i aplicado en la cabeza del fuste, se va a calcular la flecha que se produce en cabeza de pila, δ_i , bajo la acción de un cortante en cabeza de pila, Q_i , en diferentes supuestos. En realidad, para simplificar los cálculos se operará de forma inversa, fijando el valor de δ_i como movimiento impuesto y se va a calcular la carga transversal a aplicar en la cabeza de pila, Q_i , para obtener dicho movimiento, y siempre suponiendo que actúa conjuntamente con el axil en cabeza, N_i .

Empleando el software SOFISTIK (SOFISTIK, 2010), se calculará el modelo propuesto en los tres siguientes tipos de cálculo:

- Cálculo “0”

Es un cálculo elástico lineal sin tener en cuenta ninguna no linealidad.

Como resultado se obtiene la carga transversal en cabeza de pila, Q_i^0 , que hay que aplicar para obtener el movimiento en cabeza dado, δ_i .

- Cálculo “1”

Es un cálculo no lineal en el que sólo se tiene en cuenta la no linealidad mecánica. Es decir, no se hace intervenir la deformada para obtener los esfuerzos finales en la pieza y, por tanto, no se considera la excentricidad del axil que provoca la aparición de una flecha en el pilar. Sin embargo, sí se tienen en cuenta en el cálculo la no linealidad de los materiales y la fisuración del hormigón.

Como resultado se obtiene la carga transversal en cabeza de pila, Q_i^1 , que hay que aplicar para obtener el movimiento en cabeza dado, δ_i .

- Cálculo “2”

Es un cálculo no lineal completo en el que se tiene en cuenta la no linealidad geométrica, la no linealidad mecánica de los materiales constituyentes y la fisuración del hormigón.

Como resultado se obtiene la carga transversal en cabeza de pila, Q_i^2 , que hay que aplicar para obtener el movimiento en cabeza dado, δ_i .

Fig. 3-4 Modelo de pila aislada. Tipos de cálculo

3.2 CÁLCULO DE LA INFLUENCIA DE LA NO LINEALIDAD MECÁNICA Y DE LA FISURACIÓN DEL HORMIGÓN

Comparando los resultados de los cálculos tipo “0” (análisis lineal elástico) y tipo “1” (análisis considerando la no linealidad mecánica), se puede conocer la influencia de la no linealidad del comportamiento de los materiales y de la fisuración del hormigón en la flexión de cada pila en cuestión.

Así, si se supone que la rigidez de la pila viene dada por el cociente entre la carga cortante aplicada en cabeza, Q_i , y el desplazamiento producido, δ_i , entonces, se puede calcular la pila con una inercia equivalente, $I_{fis,i}$, cuyo valor se puede obtener como:

$$I_{fis,i} = I_{b,i} \times \frac{Q_i^1}{Q_i^0} \quad (3-2)$$

Siendo:

$I_{fis,i}$ la inercia equivalente a tomar en un cálculo elástico para considerar el efecto de la no linealidad mecánica y la fisuración del hormigón

$I_{b,i}$ la inercia bruta de la pila, en condiciones de no fisuración del hormigón

Q_i^1 es el cortante en cabeza de pila que hay que aplicar para obtener un cierto desplazamiento en cabeza de pila, δ_i , calculado teniendo en cuenta la no linealidad de los materiales y la fisuración del hormigón, pero sin considerar la no linealidad geométrica.

Q_i^0 es el cortante en cabeza de pila que hay que aplicar para obtener un cierto desplazamiento en cabeza de pila, δ_i , calculado en régimen lineal elástico.

Este cálculo habrá que hacerlo n veces, una por cada axil reducido, v , que se considere.

En la realidad, la pila no estará libre en cabeza sino que se encontrará sometida a la coacción parcial que le genera su conexión al tablero. Es decir, que para la situación real de una pila, considerada dentro de la estructura completa de un puente, el corrimiento de su cabeza dependerá, para un axil dado, del cortante que le llegue. Este cortante será función, también, de la rigidez del resto de las pilas que conforman la subestructura del puente y que absorberán parte de la carga horizontal total que actúa sobre el tablero. Es decir, la situación final de la pila depende de la coacción que ejerce el resto de la subestructura a una pila en cuestión, y que le es transmitida a través del tablero.

Sin embargo, esta situación es irrelevante para el cálculo de la pila que se está presentando en este epígrafe. En este epígrafe se trata de conocer cuál es la fisuración de las secciones de la pila para una situación fijada de carga en cabeza (v_i) y de desplazamiento en cabeza (δ_i). No importa cómo se ha llegado a esta situación, sino sólo la situación final de la pila, representada por unas cargas en cabeza, N_i y Q_i y un corrimiento en ella, δ_i , que cumplen el equilibrio y la compatibilidad de movimientos, teniendo en cuenta las no linealidades que en cada caso correspondan.

3.3 CÁLCULO DE LA INFLUENCIA DE LA NO LINEALIDAD GEOMÉTRICA

Supongamos que se tiene una pila empotrada en su base, sometida a un axil en cabeza de valor N_i . Empleando el modelo tipo “1” (cálculo no lineal mecánico) definido en el apartado 3.1.3 se

puede calcular el cortante en cabeza de pila, Q_i^1 , que habría que aplicar para obtener un corrimiento δ_i en cabeza, supuesto que se considera la no linealidad de los materiales y la fisuración del hormigón. Si ahora se realiza el mismo cálculo empleando el modelo tipo “2” (cálculo no lineal completo), se obtendrá otra carga en cabeza, Q_i^2 , que habría que aplicar para obtener el mismo corrimiento δ_i en cabeza, supuesto que se emplea un cálculo considerando todas las no linealidades, tanto debidas a la excentricidad del punto de aplicación del axil que aparece al considerar la geometría deformada en el cálculo de los esfuerzos como las debidas al comportamiento elastoplástico del hormigón y del acero y a la fisuración del hormigón. La diferencia entre las dos cargas, Q_i^1 y Q_i^2 , representa el efecto debido a considerar la excentricidad del punto de aplicación del axil que se produce al tener en cuenta la geometría deformada en el cálculo y la amplificación que se produce en dicha deformada por efecto de la flexión de segundo orden que aparece.

Como ya se ha indicado (ver apartado 2.1.3.2), este efecto de flexión adicional producido por la excentricidad del punto de aplicación del axil, se puede tener en cuenta en un cálculo elástico sin más que considerar un cortante “virtual”, Q_i^* , aplicado en la cabeza de la pila que dé la misma flexión que la de segundo orden producida por el axil. El valor de este cortante virtual se puede obtener en función de los resultados de los cálculos tipo “1” y “2” realizados, aplicando la siguiente expresión:

$$Q_i^* = Q_i^1 - Q_i^2 \quad (3-3)$$

Siendo:

Q_i^* es el cortante “virtual” en cabeza de pila que genera una flexión equivalente a la que provoca el axil si se considera la excentricidad existente debido a la deformada producida y a la amplificación correspondiente propia del cálculo de segundo orden

Q_i^1 es el cortante en cabeza de pila que hay que aplicar para obtener un cierto desplazamiento en cabeza de pila, δ_i , calculado teniendo en cuenta la no linealidad mecánica de los materiales y la fisuración del hormigón, pero no la no linealidad geométrica.

Q_i^2 es el cortante en cabeza de pila que hay que aplicar para obtener un cierto desplazamiento en cabeza de pila, δ_i , calculado con un modelo no lineal global (no linealidad geométrica, mecánica y efectos de la fisuración)

Por otra parte, hay que examinar cuidadosamente el significado de la ecuación (3-3) anterior. En ella se está comparando el cortante, Q_i , que produce un desplazamiento en cabeza δ_i considerando la inercia fisurada pero sin considerar la excentricidad con la que actúa el axil (cálculo tipo 1) y considerando todas las no linealidades mecánicas y geométricas (cálculo tipo 2). En estos supuestos:

- En el cálculo tipo 1 no se está teniendo en cuenta la flexión adicional producida por la excentricidad del axil generada al tener en cuenta la deformada en el cálculo de esfuerzos, pero sí se está teniendo en cuenta la mayor flecha que produce el cortante en cabeza al considerar la inercia fisurada de las secciones de hormigón.

- En el cálculo tipo 2 se está teniendo en cuenta el incremento de flecha que se produce al considerar la flexión adicional que produce el axil, porque actúa con una cierta excentricidad. Este incremento de flecha es, en realidad, la suma de dos aumentos de flecha de diferente origen: por una parte de la producida por la citada flexión adicional de segundo orden que genera la excentricidad del axil y, por otra, del incremento de flecha que se produce al considerar las inercias fisuradas al calcular la flexión que genera la excentricidad del axil.

Esta es la razón por la que, en casi toda la bibliografía comentada, las fórmulas simplificadas que dan estas “cargas virtuales” equivalentes a la excentricidad producida por el axil, hacen intervenir el valor de la inercia fisurada de las secciones y no su inercia bruta.

3.4 CASOS ESTUDIADOS

Se han realizado cálculos tipo 0, 1 y 2 como los definidos en el apartado 3.1.3 en multitud de casos diferentes, para conocer la influencia de los diferentes parámetros que intervienen en el problema. Empleando el software SOFISTIK, se han calculado pilas asiladas variando los siguientes parámetros:

a) Altura y geometría de las pilas

Se ha variado la altura y la geometría de las pilas conforme a lo que sigue:

- Altura de pilas
Pilas de 40, 50, 60 y 70 m
- Sección transversal tipo (canto x ancho, espesor)
 - Sección cajón de 5 x 2.5 (espesor de pared 0.30 m)
 - Sección cajón de 6 x 2.5 (espesor de pared 0.30 m)
 - Sección cajón de 5 x 3.0 (espesor de pared 0.30 m)
 - Sección cajón de 6 x 3.0 (espesor de pared 0.30 m)

Con estas variaciones, las esbelteces de las pilas estudiadas varían entre 61 y 140 para la dirección longitudinal y entre 17 y 40 para la dirección transversal. Para la longitudinal se ha tomado una longitud de pandeo del doble de la luz libre (pila en ménsula) y para la transversal se ha tomado igual a la altura de la pila (pieza biempotrada con posibilidad de desplazamiento relativo)

b) Armaduras del fuste

Se ha tomado una armadura de la base de la pila de

10, 30, 50, 70 o 90 cm²/m

En este trabajo se han supuesto tres tipos de posible variación de armadura a lo largo del fuste, conforme a lo que sigue:

- *Variación TIPO A:*

La armadura es constante en toda la altura e igual a la de la base, ω_0 .

- *Variación TIPO C:*
La armadura de la base es ω_0 y la de la cabeza es igual a la mínima, $\omega_{\min}$.
La cuantía de armadura varía linealmente desde la base hasta la cabeza.
- *Variación TIPO B:*
Es un intermedio entre la variación tipo A (cuantía constante en toda la altura) y la tipo C (variación lineal entre la armadura de la base, ω_0 , y la armadura mínima que se dispone en la cabeza)
Se colocará la armadura que corresponda en la base, ω_0 , y en la cabeza se colocará la media entre la mínima y la de la base ($\omega_H = (\omega_0 + \omega_{\min}) / 2$)
La cuantía de armadura varía linealmente desde la base hasta la cabeza.

Combinando las 4 diferentes alturas de pilas, con las 4 diferentes secciones tipo, con las 5 diferentes armaduras y con los 3 tipos de variaciones de armadura a lo largo del fuste, resulta que se han calculado 240 pilas diferentes.

Para cada una de ellas se han considerado axiles relativos, v , en cabeza de pila de valor:

0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 y 0.5

Y para cada axil se ha supuesto un corrimiento en cabeza variable desde 5mm hasta 1m, en escalones de 25 en 25 mm, lo que suponen 40 casos diferentes.

Así, considerando los 6 axiles diferentes, los 40 corrimientos en cabeza estudiados y los tres tipos de cálculos realizados, resulta un total de 172.800 cálculos diferentes.

En el *Anexo 1* de este documento se presenta un resumen de los resultados obtenidos en los cálculos realizados. En particular, se presenta el valor del cortante en cabeza aplicado, Q_i , para producir el corrimiento en cabeza δ_i , para cada una de las 48 pilas estudiadas en función de su altura, de su sección transversal y de la ley de variación de la armadura a lo largo de la altura del fuste. Se presentan los resultados obtenidos para cada uno de los 6 axiles reducidos considerados, para cada una de las 5 armaduras consideradas y para cada uno de los tres tipos de cálculo considerados (lineal, no lineal mecánico y no lineal completo)

3.5 RESULTADOS OBTENIDOS. ÁBACOS

3.5.1 CUANTIFICACIÓN DE LA INFLUENCIA DE LA FISURACIÓN DEL HORMIGÓN Y DE LA NO LINEALIDAD MECÁNICA.

Como resultado de los cálculos realizados conforme a lo expuesto en el apartado anterior se han obtenido los valores de los cortantes a aplicar en cabeza, Q_i , para obtener un determinado corrimiento en cabeza, δ_i . En función de lo que se obtiene en el cálculo tipo 0 (lineal elástico) y el cálculo tipo “1” (no lineal mecánico) se puede obtener la influencia de la fisuración del

hormigón y de la no linealidad de los materiales en el cálculo realizado. Así, conforme a lo expuesto en la ecuación (3-2) se tiene:

$$I_{fis,i} = I_{b,i} \times \frac{Q_i^1}{Q_i^0}$$

La obtención de esta reducción se efectuará como sigue:

- Se buscará el ábaco que corresponda a la altura de pila (H) y sección tipo (canto x ancho, espesor de pared) de la pila en estudio.
- Una vez elegido el ábaco se entrará en él con el valor de la abscisa que corresponda al corrimiento de la cabeza de pila δ_i , considerando la curva de la cuantía de armadura en la base y el tipo de variación de la armadura (A, B o C) que sea.
- Como resultado se obtendrá en ordenadas el valor de la reducción de inercias a considerar en el cálculo

En la *Fig. 3-5* se muestra un ejemplo de cómo se utiliza uno de dichos ábacos para el caso de una pila de 60 m de altura, sección transversal de 5 x 2.5 m (espesor de pared 0.3 m), armadura en la base de 50 cm²/m e igual a 30 cm²/m que es la media entre la de la base y la mínima ($=0.5*(50+10)$) en la cabeza. En este caso el axil reducido es de 0.20 y el corrimiento de la cabeza de la pila es de 460 mm.

Fig. 3-5 ÁBACO de reducción de inercias. Ejemplo de utilización

Se presentan a continuación unas figuras que muestran, a modo de ejemplo, el valor de la reducción de la rigidez a tomar en los cálculos, I_{fis}/I_b en las pilas de 40 m de altura y sección transversal de 5x2.5 m y espesor de pared igual a 0.30 m, bajo la acción de los 6 axiles reducidos diferentes que se han analizado.

Como ya se ha indicado, en el *Anexo 1* de este documento se presenta un resumen de los resultados obtenidos en los cálculos realizados. En dicho Anexo se muestran los valores de Q^0 y Q^1 obtenidos en los cálculos realizados y que han servido para obtener el valor de dicha reducción de la rigidez en cada pila de las estudiadas. Se presentan los resultados obtenidos para

cada una de las 48 pilas estudiadas en función de la altura de pila, de su sección transversal y de la ley de variación de la armadura a lo largo del fuste. Dichos resultados corresponden, para cada pila, a cada una de las 5 cuantías de armadura tipo consideradas y a cada uno de los 6 axiles reducidos considerados.

En el *Anexo 2* se presentan las figuras que muestran, en las 48 pilas estudiadas bajo los 6 axiles reducidos diferentes, el valor de la reducción de la rigidez a tomar en los cálculos, I_{fis}/I_b . Se han agrupado los ábacos en función de la altura de pila, de las dimensiones de la sección transversal, del tipo de variación de la armadura a lo largo del fuste y del valor del axil reducido que actúe en la cabeza de pila.

SECCIÓN 5X2.5m (esp=0.3 m) ; H=40m; armadura constante

SECCIÓN 5X2.5 m (esp=0.3 m) ; H=40m; armadura mínima en cabeza

SECCIÓN 5X2.5 m (esp=0.3 m) ; H=40m; armadura media en cabeza

3.5.2 CUANTIFICACIÓN DE LA INFLUENCIA DE LA CONSIDERACIÓN DE LA NO LINEALIDAD GEOMÉTRICA.

Como resultado de los cálculos realizados conforme a lo expuesto en apartados anteriores se han obtenido los valores de los cortantes a aplicar en cabeza, Q_i , para obtener un determinado corrimiento en cabeza, δ_i . En función de lo que se obtiene en el cálculo tipo “2” (no lineal completo) y el cálculo tipo “1” (no lineal mecánico) se puede obtener la influencia de la consideración de la deformada en el cálculo del pilar. Es decir, se puede cuantificar la importación de la afección de la no linealidad geométrica. De acuerdo con lo ya expuesto, (ver apartado 2.1.3.2) el efecto de la excentricidad del axil se puede sustituir por un cortante “virtual” aplicado en la cabeza de cada pila. Conforme a lo expuesto en la ecuación (3-3) el valor del cortante virtual, Q_i^* vale:

$$Q_i^* = Q_i^2 - Q_i^1$$

La obtención de este cortante virtual se efectuará como sigue:

- Se buscará el ábaco que corresponda a la altura de pila (H) y sección tipo (canto x ancho, espesor de pared) de la pila en estudio.
- Una vez elegido el ábaco se entrará en él con el valor de la abscisa que corresponda al corrimiento de la cabeza de pila δ_i , considerando la curva del axil reducido, v , que exista en la cabeza de la pila.
- Como resultado se obtendrá en ordenadas el valor del cortante virtual Q^* a aplicar en la cabeza de la pila que dé una flexión equivalente a la que produce el axil al considerar la no linealidad geométrica.

En la Fig. 3-6 se muestra un ejemplo de cómo se utiliza uno de dichos ábacos para el caso de una pila de 60 m de altura, sección transversal de 5 x 2.5 m (espesor de pared 0.3 m) y un axil reducido en cabeza de 0.2, cuando el corrimiento en cabeza es de 460 mm.

Fig. 3-6 ÁBACO de cuantificación del efecto de la no linealidad geométrica. Ejemplo de utilización

Se presentan a continuación unas figuras que muestran, a modo de ejemplo, el valor del cortante virtual (en coordenadas adimensionales), $Q^*/A_c f_{cd}$, en las pilas de 40 m de altura y sección transversal de 5x2.5 m y espesor de pared igual a 0.30 m, bajo la acción de los 6 axiles reducidos diferentes que se han analizado y con las 5 cuantías de armaduras estudiadas.

Como ya se ha indicado, en el [Anexo 1](#) de este documento se presenta un resumen de los resultados obtenidos en los cálculos realizados. En dicho Anexo se muestran los valores de Q^1 y Q^2 obtenidos en los cálculos realizados y que han servido para obtener el valor de dicha reducción de la rigidez en cada pila de las estudiadas. Se presentan los resultados obtenidos para cada una de las 48 pilas estudiadas en función de la altura de pila, de su sección transversal y de la ley de variación de la armadura a lo largo del fuste. Dichos resultados corresponden, para cada pila, a cada una de las 5 cuantías de armadura tipo consideradas y a cada uno de los 6 axiles reducidos considerados.

En el [Anexo 3](#) se presentan las figuras que muestran, en las 48 pilas estudiadas bajo los 6 axiles reducidos diferentes, el valor del cortante virtual, Q^* , en coordenadas adimensionales, $Q^*/A_c f_{cd}$, a tomar en los cálculos para representar el efecto de la no linealidad geométrica. Se han agrupado los ábacos en función de la altura de pila, de las dimensiones de la sección transversal, del tipo de variación de la armadura a lo largo del fuste y del valor del axil reducido que actúe en la cabeza de pila.

SECCIÓN 5x2.5m (esp=0.3 m) ; H=40m; armadura constante **SECCIÓN 5x2.5m (esp=0.3 m) ; H=40m; armadura mínima en cabeza** **SECCIÓN 5x2.5m (esp=0.3 m) ; H=40m; armadura media en cabeza**

3.5.3 DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN AXIL-MOMENTO EN FLEXIÓN BIAxIAL

Para poder calcular los efectos de segundo orden es necesario tener en cuenta en los cálculos la cuantía de armadura existente en cada sección. Sin embargo, no es inmediato obtener la cuantía de dicha armadura cuando la sección está sometida a flexión biaxial. Jiménez Montoya ([Jimenez Montoya, y otros, 1969](#)) preparó unos ábacos de interacción axil-flector que servían para el dimensionamiento en flexión biaxial de secciones de hormigón armado de las denominadas “canónicas”, entre las que se incluían las secciones cajón unicelulares. Sin embargo, los espesores de las paredes de dichas secciones no se ajustan a las que habitualmente se emplean hoy en día.

Por este motivo, se ha optado en este estudio por incluir unos nuevos ábacos o diagramas de interacción axil-flector en flexión biaxial. Estos diagramas de interacción dan la cuantía de armadura, ω , en función del axil reducido, v , y de los flectores reducidos según los dos ejes principales de la sección cajón, μ_x y μ_y , siendo:

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

$$v = \frac{N}{A_c f_{cd}}$$

$$\mu_x = \frac{M_x}{A_c f_{cd} h_x}$$

$$\mu_y = \frac{M_y}{A_c f_{cd} h_y}$$

Empleando el " Prontuario informático del Hormigón Estructural 3.1.7 según EHE-08" ([Unidad Docente de Hormigón Estructural, 2012](#)) los Ingenieros A. Fernández y J. Domínguez ([Férrnandez A. & Dominguez J., 2015](#)) han calculado los diagramas de interacción, llamados a partir de ahora “ábacos de F&D”, de las siguientes secciones tipo:

- Sección cajón de 5 x 2.5 (espesor de pared 0.30 m)
- Sección cajón de 6 x 2.5 (espesor de pared 0.30 m)
- Sección cajón de 5 x 3.0 (espesor de pared 0.30 m)
- Sección cajón de 6 x 3.0 (espesor de pared 0.30 m)

En el [Anexo 4](#) se presentan dichos ábacos, que también se pueden descargar en la página web indicada en la referencia ([Férrnandez A. & Dominguez J., 2015](#))

Se presentan a continuación, a título de ejemplo, los ábacos correspondientes a una sección transversal de 5x2.5m para los axiles reducidos, v , de valor

0.1, 0.2, 0.3, 0.4 , 0.5 y 0.6

4 DEFINICIÓN DEL MÉTODO DE CÁLCULO PROPUESTO

4.1 PRESENTACION DEL MÉTODO

4.1.1 INTRODUCCIÓN

Tal y como ya se ha expuesto, se está tratando de definir un procedimiento que permita abordar el problema complicado del pandeo de pilas esbeltas de puentes pero empleando herramientas de cálculo no tan complejas como las que resuelven “el pandeo global de una estructura multibarra, teniendo en cuenta todas las no linealidades, incluidas las de las coacciones”. Es decir, se trata de encontrar un procedimiento, que parece que tiene que ser iterativo, para resolver el problema planteado de forma aproximada, pero suficientemente ajustada al resultado real, empleando programas “convencionales” de cálculo que sean capaces de :

- por una parte, en la estructura completa:
 - o calcular en régimen elástico lineal una estructura plana o espacial multibarra compleja;
- por otra, en un modelo de una sola barra aislada:
 - o considerar las no linealidades geométricas y mecánicas a nivel tenso-deformacional,
 - o considerar la no linealidad producida por la fisuración del hormigón,
 - o considerar una coacción “elástica” en el extremo de la pieza.

El objeto de este trabajo es precisamente la definición de ese procedimiento iterativo-aproximado, la justificación de su validez y la presentación de sus condicionantes y limitaciones.

Por otra parte, en las páginas precedentes se ha hecho una revisión de los métodos de cálculo aproximados adoptados en diferentes normativas de cálculo para resolver este problema, a saber:

- El Código Modelo ([MODEL CODE, 2010](#)) que toma el camino de calcular de forma aproximada las curvaturas de segundo orden y considerar después una excentricidad adicional para el axil.
- La Norma española EHE ([EHE, 1999](#)) que trabaja, de forma similar al Código Modelo, con unas curvaturas adicionales que, a nivel de sección, consideran el segundo orden.
- El Eurocódigo 2, EN1992-1-1 ([EN1992-1-1, 2004](#)), que permite dos tipos de cálculos: el de las curvaturas nominales y el de las rigideces nominales.
- El Código 318 de la ACI ([ACI 318, 2011](#)) y la Normativa Norteamericana de dimensionamiento de puentes ([AASHTO, 1977](#)) que siguen el método de la

magnificación del momento y del índice de estabilidad para calcular los efectos de segundo orden en elementos comprimidos.

También se ha presentado en el apartado correspondiente de este documento el análisis crítico de variadas reseñas bibliográficas que, a lo largo de estas tres o cuatro últimas décadas, han tratado estos aspectos de la inestabilidad de piezas comprimidas. Este estudio se ha enfocado, principalmente, a trabajos norteamericanos que son los que más profusamente han tratado el tema de la magnificación de los momentos como base para el cálculo de la inestabilidad.

4.1.2 PUENTE TIPO.

En los apartados que siguen se describe la metodología propuesta. En aras de una mejor comprensión se aplica el método propuesto a un “ejemplo tipo” de un puente que responde a las siguientes características (ver *Fig. 4-1*, *Fig. 4-2* y *Fig. 4-3* siguientes):

- Características funcionales del puente

El puente es un puente de carretera recto de 230 m de longitud y 12 m de anchura

Las cargas a considerar son las definidas en la “Normativa de acciones a considerar en el proyecto de puentes de carreteras – IAP” española (IAP2011, Ministerio de Fomento, 2011). Esta norma es muy similar (o prácticamente idéntica a efectos de aplicación práctica) que el Eurocódigo 1 (EN1991-2, 2004)

- Esquema estructural

Se definen 5 vanos de luces $40 + 3 \times 50 + 40$ m, y, por tanto, 4 pilas. La altura libre de las pilas laterales es de 40 m y la de las pilas centrales es de 60 m (ver *Fig. 4-1*)

El tablero se apoya en las pilas mediante apoyos confinados de tipo POT-fijo. Es decir, que la conexión del tablero a cada pila se puede representar como una rótula en dirección longitudinal, ya que se transmiten las fuerzas (verticales y horizontales, pero no los momentos. En transversal se supone la existencia de doble apoyo, con lo cual, el tablero y la pila tienen conexión rígida a efectos de momentos transversales.

Fig. 4-1 Puente tipo. Esquema longitudinal

- Sección tipo de las pilas

Las pilas son de hormigón armado. El hormigón es C30/35 y su sección transversal es de dimensiones constantes en toda su altura. Esta sección transversal es una sección monocajón hueca de 2.5 x 5.0 m de dimensiones exteriores (ver *Fig. 4-2*)

Fig. 4-2 Puente tipo. Sección transversal de las pilas

- Armaduras de los fustes de las pilas

Los fustes de las pilas tienen una armadura A_s (cm^2/m) igual en la cara interior que en la cara exterior y también iguales en el sentido transversal y en el longitudinal del puente (ver *Fig. 4-3*)

La armadura en la base y en la cabeza de cada pila es la que se define en la Tabla 4-1 adjunta.

Fig. 4-3 Puente tipo. Esquema de armado de los fustes de las pilas

Pila	Armadura base (cm^2/m)	Armadura cabeza (cm^2/m)	Variación armadura
Laterales (P1 y P4)	50	30	Lineal
Centrales (P2 y P3)	50	30	Lineal

Tabla 4-1 Puente tipo. Armadura de fustes de pilas

4.2 METODOLOGÍA PROPUESTA.

El método que se propone es un proceso iterativo en el que se va aproximando la deformada de las pilas mediante sucesivos cálculos de primer orden. Para aplicar el método propuesto se necesitan una serie de ábacos, cuya definición también es objeto de este trabajo. Finalmente, se debe realizar la comprobación del ajuste de los resultados a la situación real para asegurar que la solución es suficientemente aproximada.

Se expone a continuación un diagrama de flujo que resume la metodología propuesta.

4.2.1 DEFINICIÓN GENERAL DE LA GEOMETRÍA. SECCIONES TIPO.

El problema de dimensionar la armadura de los fustes de las pilas de un puente, considerando los fenómenos de segundo orden, parte de un conocimiento de la sección transversal de los fustes de las pilas. Es decir, en base a la experiencia del Ingeniero, se define, a priori, un tipo de sección transversal (sección hueca monocajón, por ejemplo) unas dimensiones de la sección transversal (ancho, canto y espesor de la sección cajón) y una ley de variación del canto o del ancho de la pila a lo largo de su altura (pila de sección constante o variable). Es importante, también, decidir qué criterios de esbeltez se toman para encajar dichas dimensiones de la pieza. También se decide el criterio de armado de la sección (si armadura constante en toda la altura o variable y con qué criterio).

Existen diferentes publicaciones ya citadas en este documento ((Poston, y otros, 1983), (Bonet, y otros, 2011), (Kuzmanovic, 2014)) en las que se han discutido dimensiones y esbelteces habituales para pilas de puentes.

4.2.2 CÁLCULO ELÁSTICO DEL MODELO GLOBAL.

4.2.2.1 DEFINICIÓN DE LAS CARGAS.

Las cargas a considerar serán las definidas en la IAP (IAP2011, Ministerio de Fomento, 2011),, que, como ya se ha indicado, son prácticamente las mismas que las definidas en el Eurocódigo 1 (EN1991-2, 2004) . En particular se tomarán los casos de carga simples que se definen a continuación:

a) Acciones permanentes de valor constante (G)

- Peso propio de los elementos estructurales:
Se considera un peso específico del hormigón armado y pretensado de 25 kN/m^3 .
- Cargas muertas:
Se deben a elementos no estructurales que gravitan sobre el tablero. Se considera el peso de los pretilos en ambos extremos del tablero, y el peso del pavimento bituminoso con su valor inferior – que se corresponde con el espesor teórico – y su valor superior, obtenido incrementando un 50% el espesor teórico.

b) Acciones permanentes de valor no constante (G*)

- Pretensado:
Se incluyen los efectos derivados de la acción de un pretensado interior, con una cuantía usual para la luz considerada.
- Acciones reológicas:
Se evalúan las deformaciones provocadas por la retracción y la fluencia del hormigón, de acuerdo con lo prescrito en la Instrucción de hormigón estructural (EHE-08).

c) Acciones variables (L). Sobrecarga de uso

- Sobrecarga de uso vertical:
Se aplica la sobrecarga de tráfico descrita en la IAP2011. Se divide la plataforma en carriles virtuales, y se distribuyen tanto la sobrecarga uniforme como los vehículos

pesados de la manera más desfavorable para el efecto analizado. No se considera tráfico peatonal.

- Sobrecarga de uso horizontal:

Se tiene en cuenta el frenado, arranque o cambio de velocidad de los vehículos, como una fracción de la carga característica vertical que actúa sobre el carril virtual número 1. No se considera la actuación de fuerzas centrífugas ni otras fuerzas transversales, por ser un tablero recto.

La concomitancia de la sobrecarga de uso vertical y horizontal se atiene a lo prescrito en la IAP2011. Si se consideran las fuerzas horizontales, las verticales concomitantes se tomarán con su valor reducido, afectado por el coeficiente de combinación Ψ_1 .

d) Acciones variables (W). Viento

Se asimila la acción del viento a una carga estática equivalente, sin considerar efectos aeroelásticos. En base a la geometría de pilas y tablero, a la velocidad básica del viento y a factores topográficos en el emplazamiento del puente, se determina la presión ejercida sobre los paramentos expuestos. Se considera el viento actuando en dirección longitudinal, en dirección transversal, y en dirección vertical.

e) Acciones variables (T). Térmicas

Se evalúa el efecto de la acción térmica sobre un tablero tipo cajón, de hormigón pretensado. Se tiene en cuenta la variación uniforme de temperatura, y la posible diferencia de temperatura entre la cara superior e inferior del tablero.

f) Acción accidental del sismo (S)

No se considera

4.2.2.2 HIPÓTESIS PRIMARIAS Y COMBINACIONES

Las combinaciones de cargas a considerar serán las definidas en la IAP (IAP2011, Ministerio de Fomento, 2011), que, como ya se ha indicado son prácticamente las mismas que las definidas en el Eurocódigo 0 (EN1990, 2007). En particular se tomarán las 12 combinaciones de hipótesis simples para los cálculos en Estado Límite Últimos (ELU) que se definen en la tabla que sigue.

Tipo	Acción	Combinaciones											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
G	Peso propio	1	1	1	1.35	1.35	1.35	1.35	1	1	1	1	1
G	Cargas muertas	1	1	1	1.35	1.35	1.35	1.35	1	1	1	1	1
G	+50% pavimento	0	0	0	1.35	1.35	1.35	1.35	0	0	0	0	0
G*	Reología	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35
T	Térmicas	0	0	0.9	0	0	0.9	0	0	1.5	0	0	0.9
W	Viento transversal	0.9	0	0	0.9	0	0	0	0	0	1.5	0	0
W	Viento vertical	0.9	0	0	0.9	0	0	0	0	0	1.5	0	0
W	Viento longitudinal	0	0.9	0	0	0.9	0	0	0	0	0	1.5	0
L	SC horizontal	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.5
L	SC vertical uniforme	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	0.60	0	0	0.60
L	SC vertical vehículos	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.125	0	0	1.125

Tabla 4-2 Combinaciones de acciones en ELU

Donde:

G son las cargas permanentes (peso propio y resto de cargas permanentes)

G* es el efecto de la reología (retracción y fluencia)

L son las sobrecargas de uso

T es el efecto de las acciones térmicas

W es el efecto de la acción del viento

Es de destacar que, puesto que se trata de resolver un problema claramente no lineal, no es de aplicación el principio de superposición. Por ello, se deberá hacer el cálculo completo que se detalla más adelante, parra cada una de las combinaciones que se acaban de definir. Sin embargo, generalmente resultan preponderantes en el cálculo algunas de ellas, que suelen ser las siguientes:

- Combinaciones que se corresponden con la situación de máxima carga horizontal longitudinal sobre las pilas. Se deberá tomar la combinación que suponga axil máximo (Combinación 5) y axil mínimo (Combinación 2 y 11)
- Combinaciones que se corresponden con la situación de máxima flexión transversal producida por la sobrecarga de uso. (Combinación 1 y 4)
- Combinaciones que se corresponden con la situación de máxima flexión transversal producida por el viento actuando sobre la estructura. Se deberá tomar la combinación que suponga axil máximo o axil mínimo (Combinación 10)

Como ya se ha comentado, no se tiene en cuenta en este estudio la acción del sismo.

4.2.2.3 CARACTERÍSTICAS DE LOS MATERIALES

Los materiales a emplear serán hormigón y acero, con las características que, para cada tipo, se indican en el Eurocódigo 2 (EN1992-1-1, 2004). En particular se tomará hormigón C30/35 y acero B500S para las armaduras.

Los diagramas tensión – deformación empleados en el cálculo para cada uno de ellos son los que se muestran a continuación (*Fig. 4-4* y *Fig. 4-5*)

Fig. 4-4 Diagrama tensión – deformación del hormigón

Fig. 4-5 Diagrama tensión – deformación del acero pasivo

El valor que se toma para el módulo de deformación, E_c , del hormigón es:

$$E_c = 8500 \sqrt[3]{f_{ck} + 8} \quad (MPa) \quad (4-1)$$

Para el acero se toma $E_s = 2 \times 10^5$ MPa, como es habitual.

4.2.2.4 CONEXIÓN DEL TABLERO A LAS PILAS. CONDICIONES DE CONTORNO

Los tableros de los puentes se suelen apoyar en las pilas o estar rígidamente unidas a ellas. El tipo de conexión no tiene por qué ser el mismo para el trabajo longitudinal que para el transversal. Examinemos los dos casos por separado:

a) Conexión del tablero en la dirección longitudinal.

a1) Apoyos de neopreno armado

Los puentes de baja o mediana luz y altura de pilas suelen disponer de apoyos de neopreno entre tablero y pilas. Se trata, por tanto de una “conexión elástica” en la que la carga horizontal que transmite el tablero a la cabeza de la pila es proporcional a la distorsión que se produce en el aparato de apoyo de material elastomérico.

Es fácil demostrar que en estas circunstancias se tiene:

$$K_{ap} = \frac{H}{\delta} = \frac{GA}{e} \quad (4-2)$$

Donde:

H es la fuerza horizontal que actúa sobre el apoyo

δ es el corrimiento horizontal relativo que se produce entre las dos caras horizontales del apoyo

G es el módulo de elasticidad transversal del material elastomérico

A es el área del apoyo

E es el espesor “neto” de neopreno, descontados los espesores de las placas de acero que conforman su “armadura”

Por tanto, para modelizar este tipo de conexión se deberá disponer una barra intermedia entre lo que representa el tablero y lo que representa la cabeza de pila, que sea capaz de representar esta conexión elástica. Por ejemplo, se puede emplear una barra de longitud reducida cuya rigidez como ménsula ($H/\delta = 3EI/L^3$) sea igual a la K_{ap} definida anteriormente.

a2) Apoyos tipo POT

Si se disponen apoyos tipo POT fijos sobre las pilas, entonces la conexión de la pila con el tablero es una rótula, ya que hay coacción fija al corrimiento pero está libre el giro relativo entre pila y tablero.

a3) Apoyos deslizantes

Si se disponen apoyos deslizantes unidireccionales o libres encima de las pilas para soportar el tablero, lo que ocurre es que éste transmite una carga horizontal a la pila que es función directa de la carga vertical, pero independiente del movimiento que pudiera existir. Es decir, el tablero no coacciona el movimiento horizontal de la cabeza de la pila, más que transmitiéndole una carga horizontal de sentido contrario al movimiento que tienda a producirse y de valor μN , siendo μ el coeficiente de rozamiento del teflón del apoyo (del orden del 3%) y N la carga vertical existente en el apoyo. Esto ocurre cuando se “rompe” el rozamiento, situación que se considera que se produce en todos los casos estudiados.

Por tanto en estos casos, la pila que tenga un apoyo deslizante en sentido longitudinal puede ser eliminada del sistema completo puesto que no contribuye a la rigidez global del conjunto tablero-pilas-estribos. La pila en cuestión debe ser sustituida por su efecto sobre la estructura, que no es más que una carga longitudinal de valor $\mu \bullet N$ y de sentido contrario al corrimiento relativo que se tienda a producir entre la cabeza de pila en cuestión y el tablero.

a4) Conexión rígida

En puentes de cierta altura (construidos por voladizos sucesivos, por ejemplo) el tablero se empotra en las pilas. En estos casos el tablero transmite, no sólo fuerzas verticales y horizontales, sino también momentos flectores longitudinales, debiéndose disponer una “conexión rígida” en el modelo para representar la conexión entre ambos elementos en la que el tablero coacciona el corrimiento y el giro de la cabeza de la pila.

Este caso no está contemplado en este estudio.

b) Conexión del tablero en la dirección transversal.

b1) Apoyos de neopreno armado

Este caso se trata igual que lo comentado para la dirección longitudinal en lo relativo a los corrimientos. Es decir, se puede suponer una conexión elástica entre tablero y pila en dirección transversal.

Suele ser habitual disponer dos apoyos (o más) sobre cada pila, por lo que el giro relativo de eje coincidente con el eje del puente está impedido. Es decir, en transversal, se suele dar continuidad de giro transversal entre pila y tablero.

b2) Apoyos tipo POT

Si se disponen dos apoyos tipo POT fijos sobre cada fuste de pila, entonces la conexión de la pila con el tablero es rígida en dirección transversal, puesto que existe continuidad de giro y de corrimiento transversal entre pila y tablero.

b3) Apoyos deslizantes

No suele ser habitual disponer apoyos deslizantes en dirección transversal, pero si eso ocurre, a efectos de coacción al movimiento, estos se tratarán igual que se ha expuesto para la dirección longitudinal. En lo que respecta a la coacción al giro se está en el mismo caso que si fueran apoyos tipo POT, puesto que se suelen disponer dos apoyos encima de cada fuste de pila.

b4) Conexión rígida

Es exactamente el mismo caso que el expuesto para los apoyos tipo POT, puesto que hay continuidad de corrimiento y giro entre pila y tablero.

c) Conexión del tablero en los estribos.

En todos los casos se supone que el estribo no genera ninguna coacción al movimiento longitudinal del tablero (es decir, se suponen apoyos deslizantes con rozamiento nulo). En transversal se supone la existencia de dos apoyos fijos tipo POT. Por tanto, en transversal se supone el tablero empotrado (corrimiento y giro transversal nulo)

d) Coacciones de las bases de las pilas..

Todas las pilas se supondrán empotradas rígidamente a nivel de su cota de cimentación. Es decir, no se considera en este estudio la flexibilidad de la propia cimentación.

4.2.2.5 MODELO DE CÁLCULO

La geometría y topología de los nudos y elementos que conforman el modelo de cálculo debe ser acorde con la realidad de la estructura a la que representan. Si se emplean modelos de barras, como suele ser el caso, suele ser suficiente disponer nudos a décimos de luz de cada vano y dividir, también, las pilas a décimos de su altura.

En el *Anexo 5* de este documento se adjunta el modelo de cálculo global de primer orden del puente tipo definido en el apartado 4.1.2. El modelo ha sido creado con el programa comercial SOFISTIK (SOFISTIK, 2010).

En las figuras que siguen (*Fig. 4-6, Fig. 4-7, Fig. 4-8*) se muestran algunas vistas del modelo de SOFSTIK generado para el puente tipo definido en el apartado 4.1.2.

Fig. 4-6 Puente tipo. Alzado longitudinal del modelo

Fig. 4-7 Puente tipo. Numeración de nudos y barras

a) Apoyo en estribo

b) Conexión a la pila.

Fig. 4-8 Puente tipo. Detalle de la definición de la conexión pila-tablero en el modelo.

4.2.2.6 RESULTADOS DEL CÁLCULO DE PRIMER ORDEN

Una vez definido el modelo de cálculo se deben aplicar las cargas definidas en el apartado 4.2.2.1 y ponderarlas y combinarlas siguiendo el criterio expuesto en el mismo apartado. Entonces se procederá a calcular la estructura empleando un análisis elástico de primer orden, es decir:

- No se tendrá en cuenta la no linealidad geométrica del problema, o sea, para obtener los esfuerzos se considerará la geometría inicial.
- No se tendrá en cuenta la no linealidad mecánica de los materiales ni la fisuración del hormigón.

Además, como hipótesis simplificadoras adicionales se adoptarán los siguientes criterios:

- Las características mecánicas de las secciones transversales se calcularán sin tener en cuenta la contribución de las armaduras, o sea, se consideraran las inercias “brutas”. inercias sin considerar la homogeneización de las armaduras. Esto permite calcular la estructura en régimen elástico con un suficiente grado de aproximación sin necesidad de conocer a priori las armaduras de las pilas.

Así, se calculará la estructura empleando un programa “convencional” de cálculo de estructuras y se obtendrán los esfuerzos en las diferentes secciones de las barras del modelo y los movimientos (corrimientos y giros) que se producen en los nudos de la estructura. En particular, se obtendrán, al menos, los siguientes resultados, que se emplearan en fases posteriores del cálculo iterativo a realizar:

- Movimientos (corrimientos y giros) en cabezas de pilas. En especial, se obtendrá el corrimiento horizontal longitudinal de cada cabeza de pila ($\delta_{L,i}$), el transversal ($\delta_{T,i}$) y los giros respectivos longitudinal ($\vartheta_{L,i}$) y transversal ($\vartheta_{T,i}$)
- Axiles (N_i), cortantes longitudinales ($Q_{L,i}$) y cortantes transversales ($Q_{T,i}$) en cabezas de pilas.
- Axiles (N_i), cortantes longitudinales ($Q_{L,i}$) y cortantes transversales ($Q_{T,i}$) y flectores longitudinales ($M_{L,i}$) y transversales ($M_{T,i}$) en las bases de cada pila.

En las figuras que siguen (*Fig. 4-9*, *Fig. 4-10* y *Fig. 4-11*) se muestran, a título de ejemplo, los esfuerzos axiles, cortantes y flectores debidos a la flexión longitudinal que se producen en las cabezas de pilas, debidos a la combinación de acciones 11 del ELU, que corresponde a la situación de máxima acción longitudinal junto con el mínimo axil concomitante. También se adjunta una figura (*Fig. 4-12*) que muestra los desplazamientos horizontales en dicha combinación de acciones en ELU.

Fig. 4-9 Puente tipo. Combinación 11ELU. Cálculo en 1^{er} orden. Axiles en pilas

Fig. 4-10 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Cálculo en 1^{er} orden. Cortantes longitudinales en pilas

Fig. 4-11 Puente tipo. Combinación 11ELU. Cálculo en 1^{er} orden. Flectores longitudinales en pilas

Fig. 4-12 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Cálculo en 1^{er} orden. Corrimientos longitudinales en pilas

Con el fin de comparar la magnitud de la flexión longitudinal con la transversal, se adjuntan también (Fig. 4-13, Fig. 4-14) los cortantes y flectores transversales que se obtienen en la misma combinación de acciones en ELU. Además, se presentan también en la Fig. 4-15 los corrimientos transversales que se producen en dicha combinación de acciones en ELU.

Fig. 4-13 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Cálculo en 1^{er} orden. Cortantes transversales en pilas

Fig. 4-14 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Cálculo en 1^{er} orden. Flectores transversales en pilas

Fig. 4-15 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Cálculo en 1ª orden. Corrimientos transversales en pilas

4.2.3 DEFINICIÓN DE LA ARMADURA DE LAS PILAS.

4.2.3.1 CUANTÍA EN LA BASE.

En el apartado 3.5.3 se han definido los diagramas de interacción axil-flector, para el caso de flexión biaxial en secciones cajón unicelular de hormigón armado, llamados “ábacos F-D”. Con ayuda de dichos ábacos se puede predimensionar la armadura de las diferentes secciones de las pilas sin más que tomar como esfuerzos de cálculo los que resultan del cálculo lineal realizado del modelo global. En este caso, las armaduras dispuestas en la base son las que ya se han definido en la *Tabla 4-1*, que corresponden a las siguientes cuantías de armadura pasiva:

Pila	Armadura base		Armadura cabeza	
	(cm ² /m)	Cuantía (ω)	(cm ² /m)	Cuantía (ω)
Laterales (P1 y P4)	50	0.71	30	0.43
Centrales (P2 y P3)	50	0.71	30	0.43

Tabla 4-3 Puente tipo. Cuantías de armadura en base y en cabezas de pilas

4.2.3.2 VARIACIÓN DE ARMADURA A LO LARGO DE LA ALTURA DE LAS PILAS.

En general, los flectores que se tienen a lo largo del fuste de cada pila no son constantes, por lo que, lo habitual es que también varíe la cuantía de la armadura a lo largo del fuste. Por otra parte, se toma como dato la cuantía de la armadura en la base del fuste (ω_0) y la cuantía mínima de armadura ($\omega_{\min}$).

En este trabajo se han supuesto tres tipos de posible variación de armadura a lo largo del fuste, conforme a lo que sigue:

- Variación TIPO A:

La armadura es constante en toda la altura e igual a la de la base, ω_0 .

- Variación TIPO C:

La armadura de la base es ω_0 y la de la cabeza es igual a la mínima, $\omega_{\min}$.

La cuantía de armadura varía linealmente desde la base hasta la cabeza.

- Variación TIPO B:

Es un intermedio entre la variación tipo A (cuantía constante en toda la altura) y la tipo C (variación lineal entre la armadura de la base, ω_0 , y la armadura mínima que se dispone en la cabeza)

Se colocará la armadura que corresponda en la base, ω_0 , y en la cabeza se colocará la media entre la mínima y la de la base ($w_H = (\omega_0 + \omega_{\min}) / 2$)

La cuantía de armadura varía linealmente desde la base hasta la cabeza.

En el caso del puente tipo, se ha tomado variación tipo B (armadura en la cabeza igual a la media de la de la base y la mínima)

4.2.4 INFLUENCIA DE LOS FENÓMENOS DE SEGUNDO ORDEN.

4.2.4.1 NO LINEALIDAD MECÁNICA.

Del modelo de cálculo global de primer orden se han obtenido, entre otros resultados, los cortantes longitudinales, Q_L^1 , y los corrimientos longitudinales, δ_L^1 , en las secciones de las cabezas de pilas. La rigidez longitudinal de primer orden de cada pila, $K_{L,i}^1$, se puede obtener como cociente entre el cortante que actúa en su cabeza y el corrimiento horizontal que se produce en ella. En este cálculo no se está teniendo en cuenta el hecho de que existen cargas distribuidas en la propia pila. Análogamente se opera en transversal y se tiene:

$$K_{L,i}^1 = \frac{Q_{L,i}}{\delta_{L,i}} \quad (4-3)$$

$$K_{T,i}^1 = \frac{Q_{T,i}}{\delta_{T,i}} \quad (4-4)$$

A título de ejemplo, con los valores que se obtienen del cálculo de primer orden del puente tipo, se puede calcular el cociente entre el cortante y el corrimiento en cabeza de pila que se indica en las tablas que siguen. Hay que destacar que, en realidad, este cociente no es la rigidez de la pila puesto que se refiere a un caso de carga en el que hay cargas horizontales a lo largo de la pila.

Pila	Cortante longitudinal de 1er orden, $Q_{L,i}^1$, en cabeza de pila (kN)	Corrimiento longitudinal de 1er orden, $\delta_{L,i}^1$, en cabeza de pila (mm)	Cociente Q_L^1/δ_L^1 1er orden (kN/m)
Pila lateral P1	1114	278.2	4004.31
Pila central P2	338	233.9	1445.06
Pila central P3	413.5	188.4	2194.80
Pila lateral P4	356.2	142.7	2496.15

Tabla 4-4 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Relación cortante en cabeza/movimiento longitudinales en cabeza de pila. Cálculo de primer orden

Sin embargo, esta situación puede no corresponderse con la realidad, puesto que las diferentes secciones de las diferentes pilas se encuentran en un estado de flexión compuesta que puede

provocar su fisuración. Si esto es así, cosa que suele suceder, la rigidez de la sección, que puede ser representada por el producto $E_c I$, se reducirá. ¿Cuánto? , es la pregunta. La respuesta puede ser cuantificada con ayuda de los diagramas I_{fis}/I_b obtenidas en el apartado 3.2, teniendo en cuenta la esbeltez, el axil y la armadura que corresponda en cada caso y el corrimiento obtenido en el cálculo de primer orden realizado.

Así, se operará como sigue, para cada pila y en cada combinación de carga ponderada que se quiera estudiar:

- Se obtendrá el cortante longitudinal, Q_L^1 , y el corrimiento longitudinal, δ_L^1 , en la sección de la cabeza de pila en el modelo global lineal de primer orden, en la combinación ponderada que corresponda.
- Se obtendrá, también, el axil en cabeza de pila, $N_{sd,i}^1$ y se calculará el axil reducido, v , de valor:

$$v = \frac{N_{sd,i}^1}{A_c f_{cd}}$$

- Se obtendrán los parámetros que definen la pila que se está calculando. En particular, se deberán considerar los siguientes:
 - o La altura de la pila, H_i ,
 - o Las dimensiones de la sección transversal de la pila, definidas por su ancho transversal (b_i), su canto longitudinal (c_i) y el espesor de las paredes (e_i)
 - o La esbeltez de la pila (λ_i) obtenida como cociente entre el doble de su altura (H_i) y su radio de giro en dirección longitudinal ($i_{L,i}$).)es decir, se está suponiendo, a efectos comparativos, que la pila está en ménsula.
 - o La cuantía de armadura en la base (ω_i), de valor:

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

- o La variación de armadura a lo alto de la pila, conforme a los tres tipos que se definen en el apartado 4.2.3.2.
- En función de los valores de los parámetros anteriores que resulten en cada caso, se elegirá uno de los ábacos del apartado 3.5.1.
Estos ábacos dan la reducción de rigidez que se produce en la pila debido a la fisuración del hormigón, -valor I_{fis}/I_b que es la relación de la Inercia equivalente fisurada (I_{fis}) con respecto a la inercia bruta (I_b) -, cuando hay un determinado corrimiento en cabeza, δ , fijado un cierto axil reducido, v , y para una determinada cuantía de armadura en la base, ω .
- Para ello se entrará en el gráfico elegido con el valor de abscisas dado por el valor del corrimiento longitudinal obtenido en primer orden ($\delta_{L,i}$), eligiendo la curva correspondiente a la cuantía de armadura que exista en la sección de la base. Como resultado, se obtendrá, en ordenadas, el valor de la citada reducción de rigidez, I_{fis}/I_b , para la pila en cuestión.

Se repetirá este proceso para todas las pilas del puente, obteniéndose así, la que podríamos llamar, “rigidez ficticia equivalente de segundo orden mecánico”, de cada pila, $I_{L,i}^2$, que será igual a la I_{fis} obtenida multiplicando la inercia bruta de la sección de pila (I_b) por el cociente I_{fis}/I_b obtenido en el ábaco citado.

En el caso del puente tipo que se está tomando como ejemplo, los resultados que se obtienen para las cuatro pilas son los que se resumen en las tablas que siguen.

Pila	Geometría			Armadura Base		Axil reducido (v)	Corrimiento cabeza, δ (mm)	I_{fis}/I_b
	Altura(m)	Sección tipo (m)	Esbeltez (λ_i)	Cuantía (cm^2/m)	Tipo			
Lateral P1	40	5.0x2.5	81.434	50	B	0.137	278	0.61
Central P2	60	5.0x2.5	122.151	50	B	0.138	234	0.97
Central P3	60	5.0x2.5	122.151	50	B	0.137	188	1.08
Lateral P4	40	5.0x2.5	81.434	50	B	0.137	142	0.81

Tabla 4-5 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Valores obtenidos de I_{fis}/I_b

Pila	$I_L^1 = I_b \text{ (m}^4\text{)}$	I_{fis}/I_b	$I_L^2 = I_{fis} = I_L^1 \times I_{fis}/I_b \text{ (m}^4\text{)}$
Lateral P1	3.995	0.61	2.437
Central P2	3.995	0.97	3.875
Central P3	3.995	1.08	4.314
Lateral P4	3.995	0.81	3.236

Tabla 4-6 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Valores obtenidos de I_L^2

También a título de ejemplo, se reproduce a continuación el gráfico $\delta - I_{fis}/I_b$ empleado para la obtención de I_L^2 de la pila P2 del puente tipo. Se muestra el correspondiente a $v=0.20$, aunque en realidad, en el cálculo el axil reducido es $v=0.137$, habiéndose efectuado los cálculos interpolando entre lo que sucede para $v=0.20$ y para $v=0.10$.

Fig. 4-16 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Obtención del cociente I_{fis}/I_b para la pila P1

4.2.4.2 SEGUNDO ORDEN GEOMÉTRICO.

La consideración de la deformada en el cálculo de los esfuerzos es un fenómeno casi inherente a las piezas en compresión. Esto es así, porque la excentricidad que genera la deformada hace que el axil produzca flexiones adicionales que siempre se suman a las de primer orden, lo que hace que pueda ser posible que la flecha crezca significativamente y se produzca el agotamiento por inestabilidad antes que el resistente. Esto es, en definitiva, el pandeo de las piezas comprimidas.

Como ya se ha comentado, en la mayoría de los casos en que se estudia el pandeo de una pieza comprimida aislada, el momento de segundo orden se puede suponer que es el de primer orden pero “amplificado”. El factor de amplificación, Ψ , se puede poner, como ya se ha demostrado, en función de la relación axil solicitante / axil crítico de Euler obteniéndose una expresión como la que sigue:

$$M_L^2 = M_L^1 \Psi = M_L^1 \frac{C_m}{1 - N_{sd}/N_E} \quad (4-5)$$

Donde C_m depende de la relación de momentos en los extremos de la pieza y N_E es la carga crítica de Euler

$$N_E = \frac{\pi^2 EI}{(kH)^2} \quad (4-6)$$

Siendo k el coeficiente que da la longitud eficaz o de pandeo ($k=2$ para ménsula)

Uno de los inconvenientes que tiene este método es que se debe calcular o conocer el valor de la carga crítica de Euler del pilar o, lo que es lo mismo, su longitud de pandeo, kH . Para obviar este asunto, se ideó el método del “coeficiente de estabilidad”, α . Tal y como se expone en el apartado 2.1.3.2, se puede obtener el coeficiente de amplificación, Ψ , con la siguiente fórmula:

$$\psi = \frac{C_m}{1 - N_{sd}/N_E} = \frac{C_m}{1 - \alpha} \quad (4-7)$$

$$\alpha = \frac{N_{sd}}{N_E} = \frac{N_{sd} \delta_L}{Q_L H} \quad (4-8)$$

Siendo:

N_{sd} el axil aplicado en la cabeza del pilar

N_E el axil crítico de Euler

Q_L el cortante (longitudinal) en la cabeza del pilar

δ_L el corrimiento (longitudinal) producido por la carga Q_L cuando se aplica sobre el pilar y se calcula en primer orden.

H es la altura de la pila

C_m es un factor que depende de la relación de momentos en los extremos de la pieza. Vale 1.22, por ejemplo para pila en ménsula.

Si en lugar de un solo pilar aislado se tiene un sistema compuesto por varios de ellos, el procedimiento sigue siendo válido aunque hay que considerar ciertos matices y los cálculos se complican. Una posible solución, ya analizada en el Capítulo 2.3, es tomar una altura equivalente, H_e , para todas las pilas de valor:

$$H_e = \frac{\delta_L \sum N_E}{\sum Q_L} \quad (4-9)$$

Donde:

ΣN_E es la suma de todas las cargas críticas de Euler del sistema

ΣQ_L es la suma de todos los cortantes (longitudinales) en las cabezas de pilas

δ_L es el corrimiento (longitudinal) de las cabezas de pilas, que se supone que es igual para todas las pilas.

Aún con estas simplificaciones, puede ser complicado y, a veces, poco exacto, obtener el “coeficiente de estabilidad” empleando estas expresiones. Por eso, en este trabajo, se propone calcular la amplificación del momento de primer orden que se produce por la no linealidad geométrica, mediante un método directo, considerando unas “fuerzas horizontales equivalentes”, obtenidas utilizando los ábacos presentados en el apartado 3.5.2.

Así, la situación se puede representar como sigue:

- Cada una de las cabezas de pilas del puente se mueven longitudinalmente una magnitud $\delta_{L,i}^1$, calculando, como hasta ahora, en régimen elástico de primer orden.
- Si se consideran estas “excentricidades adicionales” en el cálculo, los axiles existentes en cada cabeza de pila, $N_{sd,i}$, producirán un flector de segundo orden en la base de las pilas, $M_{L,i}^2$, de valor:

$$M_{L,i}^2 = N_{sd,i} \delta_{L,i}^1 \quad (4-10)$$

- Entonces, en lugar de considerar las excentricidades adicionales, se puede considerar la actuación de un cortante adicional (longitudinal) en cada cabeza de pila, $Q_{L,i}^2$, que se obtiene conforme a lo indicado en el apartado 3.3. El valor de $Q_{L,i}^2$ así obtenido se asemeja a lo que resultaría de la siguiente expresión:

$$Q_{L,i}^2 = \frac{N_{sd,i} \delta_{L,i}^1}{H_i} \quad (4-11)$$

Que genera en la base el mismo flector que el axil, cuando se considera la excentricidad de segundo orden.

Es decir, que la consideración de la no linealidad geométrica implica que el axil en cabeza de cada pila genera un esfuerzo flector adicional dado por la ecuación (4-10). Este efecto se puede tener en cuenta haciendo un cálculo de primer orden lineal, sin considerar el efecto de la geometría deformada, pero tomando en cada cabeza de pila unos cortantes adicionales cuyo valor viene dado por la ecuación (4-11) anterior.

Así, se operará como sigue, para cada pila y en cada combinación de carga ponderada que se quiera estudiar:

- Se obtendrá el cortante longitudinal, Q_L^1 , y el corrimiento longitudinal, δ_L^1 , en la sección de la cabeza de pila en el modelo global lineal de primer orden, en la combinación ponderada que corresponda.
- Se obtendrá, también, el axil en cabeza de pila, $N_{sd,i}^1$ y se calculará el axil reducido, v , de valor:

$$v = \frac{N_{sd,i}^1}{A_c f_{cd}}$$

- Se obtendrán los parámetros que definen la pila que se está calculando. En particular, se deberán considerar los siguientes:
 - o La altura de la pila, H_i ,
 - o Las dimensiones de la sección transversal de la pila, definidas por su ancho transversal (b_i), su canto longitudinal (c_i) y el espesor de las paredes (e_i)
 - o La esbeltez de la pila (λ_i) obtenida como cociente entre el doble de su altura (H_i) y su radio de giro en dirección longitudinal ($i_{L,i}$). Es decir, se está suponiendo, a efectos comparativos, que la pila está en ménsula.
 - o La cuantía de armadura en la base (ω_i), de valor:

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$

- o La variación de armadura a lo alto de la pila, conforme a los tres tipos que se definen en el apartado 4.2.3.2.
- En función de los valores de los parámetros anteriores que resulten en cada caso, se elegirá uno de los ábacos del apartado 3.3.

Estos ábacos dan el valor del cortante adicional, Q_L^2 , que hay que aplicar en la cabeza de pila para que se genere un efecto similar al que produce el axil $N_{sd,i}^1$ cuando se considera una excentricidad adicional, δ_L^1 .

Para ello se entrará en el gráfico elegido con el valor de abscisas dado por el valor del corrimiento longitudinal obtenido en primer orden ($\delta_{L,i}$), eligiendo la curva correspondiente a la cuantía de armadura que exista en la sección de la base. Como resultado, se obtendrá, en ordenadas, el valor del citado cortante equivalente, Q_L^2 .

Se repetirá este proceso para todas las pilas del puente, obteniéndose así, la que podríamos llamar, “cortantes equivalentes en cabeza de pila”, de cada pila, $Q_{L,i}^2$,

En el caso del puente tipo que se está tomando como ejemplo, los resultados que se obtienen para las cuatro pilas son los que se resumen en las tablas que siguen, que muestran lo que resulta para $v=0.10$ y para $v=0.20$, para luego poder interpolar puesto que se tienen $v=0.137$.

Pila	Cortante de 1 ^{er} orden (Q_L^1 en kN)	Cortante equivalente de 2 ^o orden geométrico (Q_L^2 en kN)
Lateral P1	76.5/78.97	133.8/99.25
Central P2	49.6/44.55	85.6/77.18
Central P3	38.6/35.66	44.1/102.76
Lateral P4	38.6/35.60	69.2/98.97

Tabla 4-7 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Cortantes equivalentes al segundo orden geométrico

También a título de ejemplo, se reproduce a continuación el gráfico $\delta - Q_L^2$ empleado para la obtención de Q_L^2 de la pila P1 del puente tipo.

Fig. 4-17 Puente tipo. Combinación 11ELU. Obtención del cortante equivalente al segundo orden geométrico, Q_L^2 , para la pila P1

4.2.5 CÁLCULO ITERATIVO DE LA ESTRUCTURA

4.2.5.1 CÁLCULO DE ESFUERZOS EN RÉGIMEN ELÁSTICO.

Hasta ahora, el cálculo realizado incluye los siguientes pasos:

- Se ha realizado un cálculo elástico global de la estructura, habiéndose obtenido los esfuerzos y movimientos, sin considerar ninguna no linealidad.
- Se ha dimensionado la armadura de los fustes de las pilas teniendo en cuenta el axil y la flexión biaxial, empleando los ábacos de F-D definidos en el apartado 3.5.3.
- Se ha evaluado el efecto de la no linealidad mecánica de los materiales y de la fisuración del hormigón. Este efecto se traduce en la adopción en los cálculos de una “inercia equivalente”, $I_{L,i}^2$, que representa la mayor flexibilidad de la estructura comparada con la que se tiene si se consideran las “inercias brutas” de las secciones, tal y como se calcula en el apartado 4.2.4.1.
- Se ha evaluado el efecto de la no linealidad geométrica que genera una flexión adicional por efecto de la excentricidad con la que actúa el axil en cabeza de pila, cuando se considera en el cálculo la geometría deformada. Este efecto se tiene en cuenta mediante la definición de unas fuerzas cortantes adicionales “virtuales” a aplicar en cabeza de pila, Q_L^2 , que generen un esfuerzo similar al que produce la excentricidad del axil, conforme se expone en el apartado 4.2.4.2

Ahora se debe realizar otra vez un cálculo lineal elástico del modelo global considerando:

- Unas pilas con unas inercias iguales a las $I_{L,i}^2$ y que por tanto simulan el efecto de la no linealidad de los materiales y la fisuración del hormigón.
- Unas cargas adicionales longitudinales en las cabezas de cada pila de valor $Q_{L,i}^2$ que simulan el efecto de la no linealidad geométrica en la flexión adicional que provoca la acción de los axiles al actuar con una cierta excentricidad.

Así, se volverá a calcular la estructura empleando un programa “convencional” de cálculo de estructuras y se obtendrán los esfuerzos en las diferentes secciones de las barras del modelo y los movimientos (corrimientos y giros) que se producen en los nudos de la estructura. En particular, se obtendrán, al menos, los siguientes resultados, que se emplearán en fases posteriores del cálculo iterativo a realizar:

- Movimientos (corrimientos y giros) en cabezas de pilas. En especial, se obtendrá el corrimiento horizontal longitudinal de cada cabeza de pila ($\delta_{L,i}$), el transversal ($\delta_{T,i}$) y los giros respectivos longitudinal ($\vartheta_{L,i}$) y transversal ($\vartheta_{T,i}$)
- Axiles (N_i), cortantes longitudinales ($Q_{L,i}$) y cortantes transversales ($Q_{T,i}$) en cabezas de pilas.
- Axiles (N_i), cortantes longitudinales ($Q_{L,i}$) y cortantes transversales ($Q_{T,i}$) y flectores longitudinales ($M_{L,i}$) y transversales ($M_{T,i}$) en las bases de cada pila.

En las figuras que siguen (*Fig. 4-18*, *Fig. 4-19*, *Fig. 4-20*) se muestran, a título de ejemplo, los esfuerzos axiles, cortantes y flectores debidos a la flexión longitudinal que se producen en las cabezas de pilas, debidos a la combinación de acciones 11 del ELU, que corresponde a la situación de máxima acción longitudinal junto con el mínimo axil concomitante. También se adjunta una figura (*Fig. 4-21*) que muestra los desplazamientos horizontales en dicha combinación de acciones en ELU.

Fig. 4-18 Puente tipo. Combinación 11ELU. Cálculo en la 3ª iteración. Axiles en pilas

Fig. 4-19 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Cálculo en la 3ª iteración. Cortantes longitudinales en pilas

Fig. 4-20 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Cálculo en la 3ª iteración. Flectores longitudinales en pilas

Fig. 4-21 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Cálculo en la 3ª iteración. Corrimientos longitudinales en pilas

A título de ejemplo, con los valores que se obtienen del cálculo en esta 3ª iteración del puente tipo, se puede calcular el cociente entre el cortante y el corrimiento en cabeza de pila que se indica en la tabla que siguen. Hay que destacar que, en realidad, este cociente no es la rigidez de la pila puesto que se refiere a un caso de carga en el que hay cargas horizontales a lo largo de la pila.

Pila	Cortante longitudinal, $Q_{L,i}^3$, en cabeza de pila (kN)	Corrimiento longitudinal, $\delta_{L,i}^3$, en cabeza de pila (mm)	Cociente $Q_{L,i}^3/\delta_{L,i}^3$ longitudinal en la 3ª iteración (kN/m)
Pila lateral P1	899.3	440.1	2043.40
Pila central P2	126.8	399.2	317.64
Pila central P3	195.3	351.4	555.78
Pila lateral P4	607	301.8	2011.27

Tabla 4-8 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Rigideces longitudinales de pilas, $K_{L,i}$; Cálculo de la tercera iteración

4.2.5.2 COMPROBACIÓN Y REDIMENSIONAMIENTO DE LA ARMADURA.

En el apartado 3.5.3 se han definido los diagramas de interacción axil-flector, para el caso de flexión biaxial en secciones cajón unicelular de hormigón armado, llamados “ábacos F-D”. Con ayuda de dichos ábacos se puede comprobar la validez de la armadura dispuesta para los nuevos esfuerzos que resultan del cálculo lineal de esta nueva iteración. En caso de que no sea válida la armadura dispuesta en alguna sección se deberá proceder a su redimensionamiento y considerar esta nueva armadura en los cálculos que se realicen a partir de este momento

4.2.5.3 RESTO DE ITERACIONES. RESULTADOS DEL CÁLCULO ITERATIVO

Como resultado de los cálculos realizados hasta ahora, se tienen:

- Una estructura en la que la rigidez de las pilas que se debe considerar en el cálculo es menor que la real. Estas rigideces han sido ajustadas para tener en cuenta adecuadamente el efecto de la fisuración del hormigón y del comportamiento tensodeformacional no lineal de los materiales.
- Un estado de cargas que es suma de las existentes sobre la estructura y de unas cargas virtuales horizontales en cabezas de pila que son equivalentes al efecto que genera la excentricidad del axil cuando se considera en el cálculo la geometría deformada. Es decir, se está considerando, mediante unas cargas equivalentes, la no linealidad geométrica.
- Una armadura en los fustes de pilas adaptada a los esfuerzos que aparecen en ella, considerando ya la amplificación que genera la no linealidad.

A partir de esta situación, se puede seguir un método iterativo, repitiendo los pasos descritos en los apartados 4.2.3 y 4.2.4, hasta que los resultados de la última iteración y de la anterior sean menores que un cierto umbral.

En las figuras que siguen se muestran los resultados de las iteraciones realizadas en el puente tipo que está sirviendo para ilustrar el método de cálculo que se está proponiendo. En particular se presentan los siguientes resultados obtenidos en las sucesivas iteraciones:

- Evolución de la rigidez “efectiva” longitudinal de las pilas
- Evolución del movimiento longitudinal del tablero
- Evolución de las fuerzas “virtuales” en cabeza de pila que representan el efecto de la no linealidad geométrica.
- Evolución del flector en base de pila
- Valor de la armadura en base de pila

En las figuras se han representado también los resultados que se obtienen al realizar un cálculo no lineal global de la estructura completa, según se expone en el apartado 4.3. Estos valores son a los que debe tender los resultados de las diferentes iteraciones efectuadas. Se incluyen gráficos que presentan los valores absolutos de las magnitudes calculadas y, también, en términos adimensionales

Fig. 4-22 Puente tipo. Evolución de la rigidez “efectiva” longitudinal de las pilas

Fig. 4-23 Puente tipo. Evolución del movimiento longitudinal del tablero

Fig. 4-24 Puente tipo. Evolución de las fuerzas “virtuales” en cabeza de pila que representan el efecto de la no linealidad geométrica.

Fig. 4-25 Puente tipo. Evolución del flector en base de pila

4.2.6 COMPROBACIÓN DE LOS RESULTADOS DEL CÁLCULO ITERATIVO REALIZADO

Como resultado del cálculo realizado se tiene una armadura en los fustes de las pilas que resiste los esfuerzos calculados mediante el método iterativo propuesto que, como ya se ha descrito, tiene en cuenta la no linealidad mecánica y geométrica que existe en la estructura. En este apartado se va a definir el procedimiento para comprobar que dichas armaduras son realmente válidas. Para ello, se va a definir un modelo no lineal con el que efectuar dicha comprobación.

4.2.6.1 DEFINICIÓN DEL MODELO DE CÁLCULO

El modelo de cálculo que se propone para efectuar la comprobación de la validez de cada pila es un modelo no lineal de cada pila aislada del resto de la estructura. Es decir, se requiere emplear un programa de cálculo que sea capaz de:

- Considerar la no linealidad de los materiales y la fisuración del hormigón a la hora de obtener los esfuerzos y movimientos de la estructura.
- Considerar la geometría deformada a la hora de obtener los esfuerzos (no linealidad geométrica)
- Considerar en el cálculo de la existencia de un muelle elástico en el nudo de cabeza de pila.
- Tener en cuenta dichos fenómenos en una estructura formada por una sola barra, puesto que cada pila se modeliza como una estructura aislada e independiente del resto del puente.

Se describe a continuación cada uno de los elementos del modelo de cálculo propuesto para efectuar la comprobación.

a) Geometría y secciones transversales

El modelo de cálculo propuesto será, por tanto, un modelo de barra vertical que representa el fuste de pila con un empotramiento en la base y un muelle elástico en su cabeza.

Fig. 4-26 Modelo de pila aislada para efectuar la comprobación

Las secciones transversales tipo deberán incluir la definición de la armadura, puesto que se va a efectuar un cálculo en el que se va a considerar la influencia de la fisuración del hormigón.

Además el modelo deberá ser capaz de considerar el comportamiento no lineal del hormigón y del acero en estados avanzados de carga.

b) Valor de la coacción en cabeza

El muelle a disponer en la cabeza de la pila representa el efecto del resto de la estructura sobre cada pila en cuestión. El valor de su rigidez se puede obtener mediante el conocido “método de condensación”, en que una subestructura se sustituye por una barra equivalente conectada en un punto al resto de la estructura.

Para obtener el valor de la rigidez del muelle equivalente, $K_{L,i}^*$, se operará como sigue:

- Se tomará la estructura global y se eliminará de ella la pila i que se esté estudiando.
- Las rigideces a considerar en cada pila del modelo serán las “fisuradas equivalentes” obtenidas en la última iteración del cálculo realizado.
- Se aplicará una carga horizontal longitudinal, $Q_{L,i}^*$, en el tablero. Dado que el puente es recto y el tablero se supone inextensible, el punto de aplicación de la carga puede ser cualquiera del tablero. Sin embargo, si se quiere, se puede aplicar la carga en el nudo coincidente con la cabeza de pila a analizar.
- Se calculará en régimen elástico sin considerar ningún fenómeno no lineal y se obtendrá el movimiento longitudinal del tablero.
- Así, la rigidez equivalente, $K_{L,i}^*$, de la subestructura obtenida eliminando la pila i será:

$$K_{L,i}^* = \frac{Q_{L,i}^*}{\delta_{L,i}^*} \quad (4-12)$$

En la *Fig. 4-27* se muestra el modelo de cálculo tomado para el cálculo del muelle equivalente de la pila P2 del puente tipo, tomado como ejemplo en este estudio.

Fig. 4-27 Puente tipo. Modelo para obtener la rigidez del muelle equivalente

En la *Tabla 4-9* se presentan los valores de la rigideces equivalente del muelle que se obtienen para las cuatro pilas del puente tipo para la combinación de acciones 11 en ELU. Hay que destacar que este cálculo de rigideces de la subestructura hay que hacerlo, de forma independiente, para cada una de las combinaciones que se estén analizando. Esto debe ser así porque las rigideces a considerar en cada pila de la subestructura deben reflejar adecuadamente la fisuración que se produce en cada una de ellas ... bajo las cargas que realmente actúan en esa combinación y que, pueden variar en función del estado tensional propio de cada combinación. Sólo en el caso de que la “inercia fisurada equivalente” que resulte en varias combinaciones sea parecida, se podrá utilizar la misma en todas ellas, obviamente.

Pila	Rigidez bruta de la pila, $K_{b,i}$ (kN/m)	Rigidez “fisurada” de la pila, $K_{fis,i}$ (kN/m)	Rigidez equivalente del muelle longitudinal, $K_{L,i}^*$ (kN/m)
Pila lateral P1	5344	2874	5665
Pila central P2	1583	1246	7293
Pila central P3	1583	1272	7267
Pila lateral P4	5344	3146	5393
Pilas P1+P2+P3+ P4	13854	8539	

Tabla 4-9 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Rigideces equivalentes de los muelles

En la tabla anterior se ha tomado como valor de referencia de la rigidez de la pila el valor de la rigidez bruta, entendida como la relación de carga/flecha en una ménsula.

Es de destacar que la rigidez de la subestructura obtenida al eliminar una pila se puede obtener también como suma de la rigidez del resto de las pilas. Se entiende que la rigidez de cada pila es la que corresponde a la relación carga/flecha en una ménsula considerando el grado de fisuración que se tenga en cada combinación de carga. Esta rigidez fisurada de cada pila, $K_{fis,i}$, se puede obtener en función de la rigidez equivalente, $K_{L,i}^*$, con la ecuación (4-13) siguiente:

$$K_{fis,i} = \frac{\sum_j K_{L,j}^*}{n - 1} - K_{L,i}^* \quad (4-13)$$

Donde n es el número de pilas

c) Cargas a aplicar

c1) No existen cargas aplicadas en las pila, ni movimientos impuestos en el tablero

Para estudiar cada pila en cuestión se aplicará en su cabeza de pila el axil, N_i , a que esté sometida en la hipótesis de carga que se esté analizando. Además, se aplicará un cortante longitudinal horizontal $Q_{L,i}^*$ igual al sumatorio de todas las cargas longitudinales “reales” que actúan sobre las cabezas de pilas. Es decir, no se deben incorporar en estas cargas las cargas “virtuales” que trataban de ser equivalentes al efecto provocado por las excentricidades de los axiles y que se han empleado en los cálculos iterativos realizados. Así, se podría escribir que:

$$Q_{L,i}^* = \int_{\text{tablero}} q_L^{fin} dx - \sum_j Q_{L,j}^{2n} = \sum_j Q_{L,j}^0 \quad (4-14)$$

Siendo:

$Q_{L,i}^*$ el cortante “efectivo” en la cabeza de pila i que se está estudiando

$q_L^{fin} dx$ son las cargas externas longitudinales que hay en la última iteración realizada. La integral solo afecta al tablero porque solo hay cargas longitudinales en el tablero y no hay ninguna carga longitudinal horizontal distribuida en las pilas.

$\sum Q_{L,j}^{2n}$ el sumatorio de los cortantes “virtuales” que equivalen a la consideración de la no linealidad geométrica, en todas las cabezas de pila, obtenido en la última iteración realizada según la fórmula (4-11)

$\Sigma Q_{i,j}^0$ el sumatorio de los cortantes producidos por las cargas externas en todas las cabezas de pila, obtenido en la última iteración realizada.

c2) Existen cargas aplicadas en las pilas ,pero no existen movimientos impuestos en el tablero

En el caso de que existan cargas horizontales en las pilas, se aplicará en la pila que se esté analizando la carga, $q_{L,i}$, que esté definida para esa combinación de acciones en ELU. En cabeza de pila se aplicará el axil, N_i , que actúe en esa combinación y una carga longitudinal horizontal, $Q_{L,i}^*$ en la cabeza de la pila j. En este caso el valor de la carga $Q_{L,i}^*$ a aplicar en la cabeza de la pila j y que afecta también al muelle de constante $K_{L,j}^*$, difiere con respecto al caso en que sólo hay cargas en el tablero. En el caso de que haya cargas en las longitudinales horizontales aplicadas a lo largo del fuste de las pilas el valor del cortante, $Q_{L,i}^*$, es el sumatorio de todas las cargas longitudinales “reales” que actúan sobre las cabezas de pilas. Es decir, no se deben incorporar en estas cargas las cargas “virtuales” que trataban de ser equivalentes al efecto provocado por las excentricidades de los axiles y que se han empleado en los cálculos iterativos realizados, ni tampoco la parte de carga aplicada en las pilas que se va directamente a las cimentaciones sin dar movimientos a las cabezas de pilas. Así, se podría escribir que:

$$Q_{L,i}^* = \sum_j Q_{L,j}^{fin} - \sum_{pilas} k \int q_L^{fin} dh - \sum_j Q_{L,j}^{2n} \quad (4-15)$$

Siendo:

$Q_{L,i}^*$ el cortante “efectivo” en la cabeza de pila i que se está estudiando

$\Sigma Q_{i,j}^{fin}$ el sumatorio de reacciones horizontales longitudinales obtenido en la última iteración realizada. Es decir, coincide con la resultante de todas las cargas horizontales longitudinales aplicadas en el caso de carga considerado.

$\Sigma Q_{i,j}^{2n}$ el sumatorio de los cortantes “virtuales” que equivalen a la consideración de la no linealidad geométrica en todas las cabezas de pila, obtenido en la última iteración realizada según la fórmula (4-11).

q_L^{fin} son las cargas externas longitudinales aplicadas en las pilas que hay en la última iteración realizada.

k es un coeficiente que representa la parte de la carga longitudinal de cada pila que se va a su base y que, por tanto, no genera corrimiento en la estructura.

Este valor de k depende del tipo de distribución de la carga en la pila (carga uniforme, lineal con valor cero en la base, trapecial, ...). Por ejemplo, para carga uniforme y pila biempotrada sería $k=0.5$.

Habitualmente el viento en una pila tiene una distribución trapecial creciente en altura y se suele conseguir una buena aproximación tomando $k=0.57$.

$\Sigma Q_{i,j}^0$ el sumatorio de los cortantes producidos por las cargas externas en todas las cabezas de pila, obtenido en la última iteración realizada.

C3) Existen cargas aplicadas en las pilas y además, un movimiento impuesto en el tablero

El caso habitual es que, además de cargas horizontales en el tablero y en las pilas, se deba considerar el efecto de la retracción y de la fluencia en el tablero y, en su caso, el incremento o decremento térmico uniforme en el tablero. Esto genera un acortamiento del tablero que hace que los movimientos de todas las cabezas de pila no sean iguales. En este caso se debe corregir el valor de la carga a aplicar, $Q_{L,i}^*$, para tener en cuenta este hecho.

Así se procederá como sigue:

- Se calcularán los movimientos, $\delta_{L,i}$ en el modelo correspondiente a la última iteración efectuada. Estos movimientos no serán iguales en todas las pilas debido a la existencia de un acortamiento impuesto en el tablero.
- Se calculará el “punto neutro” que será el centro de gravedad de los movimientos. La posición de dicho punto, x_0 se obtendrá con la siguiente expresión:

$$x_0 = \frac{\sum_i K_{L,i} * x_i}{\sum_i K_{L,i}} \quad (4-16)$$

Donde $K_{L,i}$ es la rigidez longitudinal de cada pila tomada como ménsula y considerando la fisuración que exista y x_i es la coordenada de cada pila.

- El corrimiento del punto neutro será $\delta_{L,0}$ y se obtendrá por interpolación lineal entre los corrimientos de las dos pilas entre las que se sitúe dicho punto neutro.
- El valor de la rigidez a aplicar en cada pila se corregirá para tener en cuenta el movimiento adicional que provoca el acortamiento del tablero. Así, el término corrector a aplicar en la expresión (4-15) será $\Delta Q_{L,i}^*$ en la pila i y se calculará como:

$$\Delta Q_{L,i}^* = K_{total} * (\delta_{L,i} - \delta_{L,0}) \quad (4-17)$$

Siendo:

$\Delta Q_{L,i}^*$ el término corrector del cortante “efectivo” en la cabeza de pila i que se está estudiando a considerar para tener en cuenta el efecto del acortamiento del tablero

K_{total} es la rigidez de la subestructura considerando las pilas fisuradas conforme a la última iteración efectuada.

$\delta_{L,i}$ es el corrimiento longitudinal de la cabeza de pila i

$\delta_{L,0}$ es el corrimiento longitudinal del punto neutro

Entonces el valor del cortante “efectivo” en la cabeza de pila i que se está estudiando, $Q_{L,i}^*$, se calcula basándose en la ecuación (4-15) y resulta:

$$Q_{L,i}^* = \sum_j Q_{L,j}^{fin} - \sum_{pilas} k \int q_L^{fin} dh - \sum_j Q_{L,j}^{2n} + \Delta Q_{L,i}^* \quad (4-18)$$

4.2.6.2 VALORES RESULTANTES EN EL CÁLCULO DEL PUENTE TIPO

Se presentan a continuación unas tablas que resumen los valores que se obtienen aplicando el procedimiento descrito en los párrafos anteriores en el caso del “puente tipo” que se está analizando.

En particular en la *Tabla 4-10* se presenta el valor de las rigideces de pilas y de subestructura conforme figuran en la *Tabla 4-9* anterior. También se muestra el valor del corrimiento $\delta_{L,i}$ de cada cabeza de pila en la Combinación 11 en ELU y la coordenada x_i de cada pila. Con estos valores de corrimiento y coordenadas se ha calculado, aplicando la ecuación (4-16), la posición del punto neutro que ha resultado estar a 77.46 m de la pila P1. Entonces, interpolando entre los valores de δ_L de las pilas P2 y P3 se obtiene el corrimiento longitudinal del punto neutro que ha resultado ser $\delta_{L,0} = 441$ mm.

PILA	Distancia, x_i (m)	Rigidez de pila, $K_{L,i}$ (kN/m)	Rigidez de subestructura, $K_{L,i}^*$ (kN/m)	Corrimiento en cabeza de pila, $\delta_{L,i}$ (mm)
P1	0	2874	5665	506
P2	50	1246	7293	467
P3	100	1272	7267	419
P4	150	3146	5393	368
GLOBAL	77.47 (punto neutro)	8538	8539	441 (punto neutro)

Tabla 4-10 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Posición y corrimiento del punto neutro

En la *Tabla 4-11* se presentan los valores de los cortantes obtenidos en la última iteración y que sirven de base para calcular los cortantes “efectivos”, $Q_{L,i}^*$, a aplicar en el nudo superior del modelo de pila aislada con coacción en cabeza para su cálculo.

PILA	Cortante en cabeza de pila en la última iteración, $Q_{L,i}$ (kN)	Cortante “virtual” equivalente a la no linealidad geométrica en cabeza de pila en la última iteración, $Q_{L,i}$ (kN)	Reacción en base de pila en la última iteración, $R_{L,i}$ (kN)	Resultante de carga longitudinal de viento en cada pila en la última iteración, $q_{L,i}$ (kN)
P1	978	193	2016	1038
P2	-108	144	1602	1710
P3	-180	120	1530	1710
P4	664	187	1702	1038
GLOBAL	1354 (long. en tablero)	644	6850 (long total)	5496 (long en pilas)

Tabla 4-11 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Cargas longitudinales en la última iteración

Empleando la ecuación (4-15), que se reproduce a continuación, y utilizando todos estos valores, se calcula el cortante “efectivo” en la cabeza de pila i que se está estudiando, $Q_{L,i}^*$, resultando lo que se resume en la *Tabla 4-12* que sigue, en la que se ha considerado un factor $k=0.57$ para el reparto de la carga longitudinal en cada fuste de pila.

$$Q_{L,i}^* = \sum_j Q_{L,j}^{fin} - \sum_{pilas} k \int q_L^{fin} dh - \sum_j Q_{L,j}^{2n} + \Delta Q_{L,i}^*$$

PILA	Cargas exteriores en la última iteración, $\sum_j Q_{L,j}^{fin}$ (kN)	Cargas longitudinales en cada fuste de pila $\sum k \int_{pilas} q_L^{fin} dh$ (kN)	Cargas virtuales equivalente a la no linealidad geométrica en cabeza de pila en la última iteración, $\sum_j Q_{L,j}^{2n}$ (kN)	Corrección por acortamiento del tablero, $\Delta Q_{L,i}^*$ (kN)	Cortante “efectivo” a aplicar en cada nudo de cabeza del modelo depila aislada, $Q_{L,i}^*$ (kN)
P1	6850	0.57*5496	644	559	3670
P2	6850	0.57*5496	644	225	3560
P3	6850	0.57*5496	644	-184	3180
P4	6850	0.57*5496	644	-622	2580

Tabla 4-12 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Cortantes “efectivos” a aplicar en el modelo de pila aislada con coacción elástica en cabeza.

4.2.6.3 COMPARACIÓN DE RESULTADOS

Una vez que se tiene preparado el modelo de cálculo descrito en el apartado anterior, se procederá a calcular cada una de las pilas. Tal y como ya se ha indicado, se deberá emplear un software que permita, en el modelo sencillo de una única barra con coacción elástica en cabeza, considerar tanto la no linealidad geométrica como la mecánica. Se obtendrán entonces, para cada pila y para cada combinación de carga en ELU, los movimientos en cabeza de pila y los esfuerzos en la base de cada pila. Se compararán dichos resultados con los obtenidos en el cálculo elástico iterativo realizado, comprobándose el adecuado ajuste entre los resultados de ambos modelos.

A título de ejemplo, se presentan a continuación los resultados obtenidos en el puente tipo para la combinación 11 en ELU. Se presentan los movimientos longitudinales de las cabezas de pila y los flectores longitudinales en base de pila obtenidos en el cálculo elástico iterativo y en el cálculo no lineal en la pieza aislada coaccionada elásticamente en su cabeza.

Fig. 4-28 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Movimientos longitudinales en cabezas de pilas obtenidos con el cálculo elástico iterativo

Fig. 4-29Puente tipo. Combinación 11 ELU. Movimientos longitudinales en cabezas de pilas obtenidos con el cálculo en el modelo no lineal de pila aislada coaccionada elásticamente

Fig. 4-30Puente tipo. Combinación 11 ELU. Flectores longitudinales en bases de pilas obtenidos con el cálculo elástico iterativo

Fig. 4-31 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Flectores longitudinales en bases de pilas obtenidos con el cálculo en el modelo no lineal de pila aislada coaccionada elásticamente

En la *Tabla 4-13* y *Tabla 4-14* adjuntas se presenta la comparación entre los resultados obtenidos en ambos modelos, observándose la buena concordancia entre ellos, en este caso.

Pila (combinación 11 ELU)	Corrimiento longitudinal en cabeza de pila obtenido en cálculo iterativo (mm)	Corrimiento longitudinal en cabeza de pila obtenido en cálculo no lineal en pila aislada (mm)	Error relativo (%)
Pila lateral P1	506.2	505.2	0.1
Pila central P2	467.1	498.9	6.8
Pila central P3	419.1	448.2	6.9
Pila lateral P4	367.9	359.7	-2.3

Tabla 4-13 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Comparación de corrimientos longitudinales en cabeza de pilas

Pila (combinación 11 ELU)	Flector longitudinal en base de pila obtenido en cálculo iterativo (mkN)	Flector longitudinal en base de pila obtenido en cálculo no lineal en pila aislada (mkN)	Error relativo (%)
Pila lateral P1	63073	61335	2.7
Pila central P2	48497	44721	-7.8
Pila central P3	45115	41623	-7.7
Pila lateral P4	50985	48930	-4.0

Tabla 4-14 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Comparación de flectores longitudinales en base de pilas

4.3 COMPROBACIÓN DEL PUENTE TIPO CON UN MODELO NO LINEAL GLOBAL

En el apartado 4.2.5 se ha propuesto un método iterativo para resolver el problema complejo del cálculo no lineal de la subestructura de un puente; en este método se emplean modelos globales representativos de toda la estructura pero se opera en régimen elástico lineal.

En el apartado 4.2.2.6 se ha presentado otro modelo, no demasiado complejo, para comprobar que lo obtenido con el método elástico iterativo era correcto. Esta modelo no lineal de pila aislada con coacción elástica en cabeza se debe calcular siempre, como comprobación de la validez del cálculo elástico iterativo realizado. Si el ajuste entre los resultados de ambos modelos es adecuado, entonces se ha finalizado el proceso y no hay que realizar más cálculos. De todas formas, para comprobar la validez del método propuesto, se incluyen a continuación los resultados obtenidos al realizar un cálculo no lineal de la estructura completa. Para ello, se ha utilizado el programa de cálculo SOFISTIK (SOFISTIK, 2010) para calcular la estructura completa, teniendo en cuenta todas las no linealidades, tanto las del material, como la fisuración del hormigón, como la no linealidad geométrica. Los resultados de los cálculos realizados se incluyen en el *Anexo 7* de este documento.

A título de ejemplo, se presentan a continuación los resultados obtenidos en el puente tipo para la combinación 11 en ELU, cuando se calcula el modelo global no lineal.

Fig. 4-32 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Movimientos longitudinales en cabezas de pilas obtenidos con el cálculo no lineal global

Fig. 4-33 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Flectores longitudinales en bases de pilas obtenidos con el cálculo no lineal global

En la en la *Tabla 4-15* y en la *Tabla 4-16* adjuntas se presentan los movimientos longitudinales de las cabezas de pila y los flectores longitudinales en base de pila obtenidos en el cálculo elástico iterativo, en el cálculo no lineal en la pieza aislada coaccionada elásticamente en su cabeza y en el cálculo global no lineal, observándose la buena concordancia entre ellos.

Pila (combinación 11 ELU)	Corrimiento longitudinal en cabeza de pila obtenido en la primera iteración del cálculo iterativo (mm)	Corrimiento longitudinal en cabeza de pila obtenido en cálculo iterativo (mm)	Corrimiento longitudinal en cabeza de pila obtenido en cálculo no lineal en pila aislada (mm)	Corrimiento longitudinal en cabeza de pila obtenido en cálculo global no lineal (mm)	Error relativo del cálculo iterativo (%)
Pila lateral P1	228.2	506.2	505.2	509.2	-0.6 / -0.8
Pila central P2	233.9	467.1	498.9	465.2	0.4 / 7.3
Pila central P3	188.4	419.1	448.2	419.6	0.0 / 6.8
Pila lateral P4	142.7	367.9	359.7	373.4	-1.6 / -3.7

Tabla 4-15 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Comparación de corrimientos longitudinales en cabeza de pilas con lo obtenido en el cálculo no lineal global

Pila (combinación 11 ELU)	Flector longitudinal en base de pila obtenido en la primera iteración del cálculo iterativo (mkN)	Flector longitudinal en base de pila obtenido en cálculo iterativo (mkN)	Flector longitudinal en base de pila obtenido en cálculo no lineal en pila aislada (mkN)	Flector longitudinal en base de pila obtenido en cálculo global no lineal (mkN)	Error relativo del cálculo iterativo (%)
Pila lateral P1	67671	63073	61335	61423	2,7 / -0.1
Pila central P2	36295	48497	44721	43251	12.1 / 3.4
Pila central P3	31758	45115	41623	41189	9.5 / 1.0
Pila lateral P4	37256	50985	48930	50506	0.9 / 3.1

Tabla 4-16 Puente tipo. Combinación 11 ELU. Comparación de flectores longitudinales en base de pilas con lo obtenido en el cálculo no lineal global

5 VALIDACIÓN DEL MÉTODO PROPUESTO

5.1 CASOS ESTUDIADOS

En el capítulo anterior se ha propuesto un método iterativo para resolver el pandeo de pilas esbeltas de hormigón armado constituyentes de la subestructura de un puente. Dicho procedimiento se ha aplicado a un llamado “puente tipo”. En este capítulo se aplica dicho método a varios puentes más para mostrar la validez de dicho método y su rango de aplicación. Para ello se han agrupado los casos estudiados en tres apartados diferentes:

- Puentes tipo (3)
- Ejemplo real (1)
- “Casos paramétricos” (puentes)

Esto significa que se han estudiado más de 60 pilas de puentes en doce combinaciones diferentes de carga, lo que da un total de unas 700 cálculos diferentes tendentes a calibrar el método propuesto.

5.1.1 PUENTES TIPO

Se han estudiado tres puentes representativos que tienen pilas esbeltas. El primero de ellos es el llamado “puente tipo” que, como ya se ha indicado, se ha utilizado como ejemplo para presentar la metodología propuesta. Se trata de un puente “regular” que trata de representar el cruce sobre un valle “tipo V”. Es una estructura continua de 4 vanos de luces 40+50+50+40 m con cuatro pilas de alturas iguales a 40, 60, 60 y 40 m, respectivamente. La sección transversal de las pilas es un cajón monocelular de 5x2.5m.

A continuación se reproduce la [Fig. 4-1](#) que muestra el alzado esquemático del puente.

Fig. 5-1 Puente tipo 1. Alzado longitudinal esquemático

Los datos básicos de definición de las pilas se muestran en la tabla que sigue. Se ha supuesto que todas las pilas están conectadas al tablero mediante dos aparatos de apoyo tipo POT que transmiten la carga vertical y longitudinal del tablero a la pila manteniendo la compatibilidad de movimientos entre ambos elementos estructurales. Es de notar que la esbeltez indicada es la correspondiente a la dirección longitudinal del puente y suponiendo que se encuentra en ménsula, es decir, que se ha calculado la longitud de pandeo como dos veces la altura libre de la pila.

Pila	Geometría			Cuantía de armadura	
	Altura(m)	Sección tipo (m)	Esbeltez (λ_i)	Base (cm ² /m)	Cabeza
Lateral P1	40	5.0x2.5	81.434	50	Media de la mín.y la de la base
Central P2	60	5.0x2.5	122.151	50	Media de la mín.y la de la base
Central P3	60	5.0x2.5	122.151	50	Media de la mín.y la de la base
Lateral P4	40	5.0x2.5	81.434	50	Media de la mín.y la de la base

Tabla 5-1 Puente tipo 1. Definición de las pilas

El “puente tipo 2” es también un puente “regular” que trata de representar un viaducto de múltiples vanos de altura de pilas similares. Los vanos centrales tienen una luz de 50 m y las 5 pilas centrales son de la misma altura (50 m) y están conectadas al tablero mediante dos aparatos de apoyo tipo POT que transmiten la carga vertical y longitudinal del tablero a la pila manteniendo la compatibilidad de movimientos entre ambos elementos estructurales. El resto de las pilas son más cortas pero tienen aparatos de apoyo de teflón en su cabeza; suponiendo que el rozamiento de estos apoyos es muy pequeño (a efectos de este estudio se supondrá $\mu=0$), su existencia no es relevante para los efectos que se están analizando, puesto que no contribuyen a dar rigidez a la subestructura sino que sólo absorben parte de la carga horizontal que actúa sobre el tablero.

En la *Fig. 5-2* que sigue se muestra el alzado esquemático del puente. Los datos básicos de definición de las pilas se presentan en la *Tabla 5-2*. Es de notar que la esbeltez indicada es la correspondiente a la dirección longitudinal del puente y suponiendo que se encuentra en ménsula, es decir, que se ha calculado la longitud de pandeo como dos veces la altura libre de la pila.

Fig. 5-2 Puente tipo 2. Alzado longitudinal esquemático

Pila	Geometría			Cuantía de armadura	
	Altura(m)	Sección tipo (m)	Esbeltez (λ_i)	Base (cm ² /m)	Cabeza
P2	50	5.0x2.5	101.8	50	Media de la mín.y la de la base
P3	50	5.0x2.5	101.8	30	Media de la mín.y la de la base
P4	50	5.0x2.5	101.8	30	Media de la mín.y la de la base
P5	50	5.0x2.5	101.8	30	Media de la mín.y la de la base
P6	50	5.0x2.5	101.8	50	Media de la mín.y la de la base

Tabla 5-2 Puente tipo 2. Definición de las pilas

El “puente tipo 3” es un puente un poco menos “regular” que los anteriores, ya que trata de representar un puente no simétrico. Se trata de un puente de 6 vanos de luces 55+4x70+55 m. Tal y como se muestra en la *Fig. 5-3* las alturas de pilas son 20, 40, 60, 60 y 30 m. La conexión de todas las pilas al tablero se hace mediante dos aparatos de apoyo tipo POT que transmiten la carga vertical y longitudinal del tablero a la pila manteniendo la compatibilidad de movimientos entre ambos elementos estructurales.

Fig. 5-3 Puente tipo 3. Alzado longitudinal esquemático

Los datos básicos de definición de las pilas se presentan en la

Tabla 5-3. Es de notar que la esbeltez indicada es la correspondiente a la dirección longitudinal del puente y suponiendo que se encuentra en ménsula, es decir, que se ha calculado la longitud de pandeo como dos veces la altura libre de la pila.

Pila	Geometría			Cuantía de armadura	
	Altura(m)	Sección tipo (m)	Esbeltez (λ_i)	Base (cm ² /m)	Cabeza
P1	20	5.0x2.5	40.7	70	Media de la mín.y la de la base
P2	40	5.0x2.5	81.4	50	Media de la mín.y la de la base
P3	60	6.0x2.5	120.2	50	Media de la mín.y la de la base
P4	60	6.0x2.5	120.2	50	Media de la mín.y la de la base
P5	30	5.0x2.5	61.1	70	Media de la mín.y la de la base

Tabla 5-3 Puente tipo 3. Definición de las pilas

5.1.2 EJEMPLO REAL

En las páginas que siguen se reproducen tres planos de definición geométrica del Viaducto de Torrallo. Se trata de un puente de 6 vanos de luces 37+4x47+37 m de luz. Las alturas de las cinco pilas son 21, 43, 52, 49 y 24 m., respectivamente. Estas pilas tienen una sección transversal con forma de aproximada de cajón monocelular: las dimensiones en cabeza son de 5.5x2.3 m y el espesor de las paredes es de 0.25 m; en este cálculo se van a tomar pilas de

5.0x2.5 m y espesor de 0.30 m.. Los fustes son de canto constante en ambas direcciones, transversal y longitudinal. Se disponen aparatos de apoyo tipo POT fijos en las pilas centrales P2, P3 y P4 y deslizantes de teflón en las pilas laterales P1 y P5.

A efectos de cálculo se han tomado unas pilas de canto constante que tengan unas rigideces y dimensiones “efectivas” similares a las del puente en estudio. Así, lo tomado en este cálculo es lo que se resume en la tabla siguiente.

Pila	Geometría			Cuantía de armadura	
	Altura(m)	Sección tipo (m)	Esbeltez (λ_i)	Base (cm ² /m)	Cabeza (cm ² /m)
P1	21	5.0x2.5	42.8	10	Min = 10
P2	43	5.0x2.5	87.7	30	Min = 10
P3	52	5.0x2.5	106.1	80	Min = 10
P4	49	5.0x2.5	100.0	40	Min = 10
P5	24	5.0x2.5	49.0	10	Min = 10

Tabla 5-4 Viaducto de Torallo. Definición de las pilas

Fig. 5-4 Viaducto de Torallo. Planta y sección tipo

Fig. 5-5 Viaducto de Torallo. Alzado longitudinal

Fig. 5-6 Viaducto de Torallo. Alzado de pilas

Fig. 5-7 Viaducto de Torallo. Definición de aparatos de apoyo

Fig. 5-8 Viaducto de Torallo. Armadura de pilas (I)

Fig. 5-9 Viaducto de Torallo. Armadura de pilas (II)

5.1.3 “CASOS PARAMÉTRICOS”

Los tres puentes tipo analizados en los casos anteriores tienen pilas cuya esbeltez llega a alcanzar los 120, aproximadamente. La razón de haberlos elegido es que, previsiblemente, los efectos de 2º orden serían relevantes en el dimensionamiento. En este apartado se van a definir otros puentes similares a los primeros pero cuyas pilas son, en casi todos los casos, menos esbeltas; se va a aplicar el método de cálculo definido en este documento, para demostrar que lo propuesto es válido también para un rango de esbelteces menores y mayores.

En particular, los puentes que se han estudiado responden a las características básicas que se definen de forma resumida a continuación.

- Puentes de 4 vanos
 - o Luces 40+50+50+40 (simétricos)
 - Alturas de pilas 20,40,40,20 m
 - Alturas de pilas 40,60,60,40 m (puente tipo 1)
 - Alturas de pilas 50,70,70,50 m
- Puentes de 5 vanos simétricos
 - o Luces 55+70+70+70+55 (simétricos)
 - Alturas de pilas 20,40,40,40,20 m
 - Alturas de pilas 40,60,60,60,40 m
 - Alturas de pilas 50,70,70,70,50 m
 - o Luces 55+70+70+70+55 (no simétricos)
 - Alturas de pilas 20,30,40,40,20 m
 - Alturas de pilas 20,40,60,60,30 m (puente tipo 3)
 - Alturas de pilas 20,50,70,70,40 m
- Puentes multivano de alturas de pilas iguales
 - Luz vano= 50 m , Altura de pila= 20 m
 - Luz vano= 50 m , Altura de pila= 50 m (puente tipo 2)
 - Luz vano= 50 m , Altura de pila= 60 m

5.2 COMPARACIÓN DE RESULTADOS

En las figuras que siguen se muestran los resultados obtenidos al aplicar el método iterativo propuesto a los puentes tipo 2 y 3. Los resultados obtenidos en el cálculo del puente tipo 1 ya han sido presentados en el apartado 4.2.5.3. También se presentan los resultados obtenidos para el cálculo del Viaducto de Torallo, que se toma como modelo de calibración del método de cálculo propuesto.

En particular se presentan los siguientes resultados obtenidos en las sucesivas iteraciones, correspondientes a la combinación de cargas en ELU que da el mayor flector longitudinal en pilas que, en este caso, resulta la hipótesis predominante.

- Evolución de la rigidez “efectiva” longitudinal de las pilas
- Evolución del movimiento longitudinal del tablero

- Evolución de las fuerzas “virtuales” en cabeza de pila que representan el efecto de la no linealidad geométrica.
- Evolución del flector en base de pila

En las figuras se han representado también los resultados que se obtienen al realizar el cálculo de comprobación con el modelo de pila aislada y un cálculo no lineal global de la estructura completa. Estos valores son a los que debe tender los resultados de las diferentes iteraciones efectuadas. Se incluyen gráficos que presentan los valores absolutos de las magnitudes calculadas y, también, en términos adimensionales.

También se incluye al final de cada apartado unas tablas que muestran, de forma resumida, los valores numéricos de los resultados obtenidos.

5.2.1 PUENTE TIPO 2

Pila (combinación 11 ELU)	Corrimiento longitudinal en cabeza de pila obtenido en la primera iteración del cálculo iterativo (mm)	Corrimiento longitudinal en cabeza de pila obtenido en cálculo iterativo (mm)	Corrimiento longitudinal en cabeza de pila obtenido en cálculo no lineal en pila aislada (mm)	Corrimiento longitudinal en cabeza de pila obtenido en cálculo no lineal completo (mm)	Error relativo (%)
Pila P2	345	829	786	878	-5.5 / -10.5
Pila P3	311	796	752	844	-5.6 / -10.9
Pila P4	276	759	712	809	-6.1 / -12.0
Pila P5	241	721	672	774	-6.8 / -13.1
Pila P6	207	681	629	739	-7.9 / -14.9

Tabla 5-5 Puente tipo 2. Combinación 11 ELU. Comparación de corrimientos longitudinales en cabeza de pilas

Pila (combinación 11 ELU)	Flector longitudinal en base de pila obtenido en la primera iteración del cálculo iterativo (mkN)	Flector longitudinal en base de pila obtenido en cálculo iterativo (mkN)	Flector longitudinal en base de pila obtenido en cálculo no lineal en pila aislada (mkN)	Flector longitudinal en base de pila obtenido en cálculo no lineal completo (mkN)	Error relativo (%)
Pila P2	58300	70389	64634	69529	1.2 / -7.0
Pila P3	53317	57090	50861	54428	4.9 / -6.6
Pila P4	48342	55313	49219	53235	3.9 / -7.5
Pila P5	43370	53356	47456	52022	2.6 / -8.8
Pila P6	38392	61573	56195	62464	-1.4 / -10.0

Tabla 5-6 Puente tipo 2. Combinación 11 ELU. Comparación de flectores longitudinales en base de pilas

Fig. 5-10 Puente tipo2. Evolución de la rigidez “efectiva” longitudinal de las pilas

Fig. 5-11 Puente tipo 2. Evolución del movimiento longitudinal del tablero

Fig. 5-12 Puente tipo 2. Evolución de las fuerzas “virtuales” en cabeza de pila que representan el efecto de la no linealidad geométrica.

Fig. 5-13 Puente tipo2. Evolución del flector en base de pila

5.2.2 PUENTE TIPO 3

Pila (combinación 11 ELU)	Corrimiento longitudinal en cabeza de pila obtenido en la primera iteración del cálculo iterativo (mm)	Corrimiento longitudinal en cabeza de pila obtenido en cálculo iterativo (mm)	Corrimiento longitudinal en cabeza de pila obtenido en cálculo no lineal en pila aislada (mm)	Corrimiento longitudinal en cabeza de pila obtenido en cálculo no lineal completo (mm)	Error relativo (%)
Pila P1	116	149	151.1	147	1.0 / 2.7
Pila P2	66	99	102.3	97	2.7 / 5.1
Pila P3	13	45	51.2	45	0.8 / 6.7
Pila P4	-39	-11	-5.7	-8	44.7 / -28.7
Pila P5	-92	-67	-71.6	-60	10.8 / 18.3

Tabla 5-7 Puente tipo 3. Combinación 11 ELU. Comparación de corrimientos longitudinales en cabeza de pilas

Pila (combinación 11 ELU)	Flector longitudinal en base de pila obtenido en cálculo iterativo (mkN)	Flector longitudinal en base de pila obtenido en cálculo iterativo (mkN)	Flector longitudinal en base de pila obtenido en cálculo no lineal en pila aislada (mkN)	Flector longitudinal en base de pila obtenido en cálculo no lineal completo (mkN)	Error relativo (%)
Pila P1	104662	103381	97370	95186	8.6 / 2.3
Pila P2	19773	30927	27008	26071	18.6 / 3.5
Pila P3	14518	18394	18811	18142	1.4 / 3.7
Pila P4	9464	11750	12642	12438	-5.5 / 1.6
Pila P5	-33434	-31808	-28977	-25626	24.1 / 13.1

Tabla 5-8 Puente tipo 3. Combinación 11 ELU. Comparación de flectores longitudinales en base de pilas

Fig. 5-14 Puente tipo3. Evolución de la rigidez “efectiva” longitudinal de las pilas

Fig. 5-15 Puente tipo 3. Evolución del movimiento longitudinal del tablero

Fig. 5-16 Puente tipo 3. Evolución de las fuerzas “virtuales” en cabeza de pila que representan el efecto de la no linealidad geométrica.

Fig. 5-17 Puente tipo3. Evolución del flector en base de pila

5.2.3 EJEMPLO REAL

Pila (combinación 11 ELU)	Corrimiento longitudinal en cabeza de pila obtenido en cálculo iterativo (mm)	Corrimiento longitudinal en cabeza de pila obtenido en cálculo no lineal en pila aislada (mm)	Corrimiento longitudinal en cabeza de pila obtenido en cálculo no lineal completo (mm)	Error relativo (%)
Pila P2	622	671	616	1.0/8.9
Pila P3	587	648	583	1.0/11.0
Pila P4	556	614	551	1.0/16.3

Tabla 5-9 Viaducto de Torallo. Combinación 11 ELU. Comparación de corrimientos longitudinales en cabeza de pilas

Pila (combinación 11 ELU)	Flector longitudinal en cabeza de pila obtenido en cálculo iterativo (mkN)	Flector longitudinal en cabeza de pila obtenido en cálculo no lineal en pila aislada (mkN)	Flector longitudinal en cabeza de pila obtenido en cálculo no lineal completo (mkN)	Error relativo (%)
Pila P2	50475	51273	49553	1.9/3.5
Pila P3	59422	63564	59948	-1.0/6.0
Pila P4	47886	49663	47139	1.6/5.3

Tabla 5-10 Viaducto de Torallo. Combinación 11 ELU. Comparación de flectores longitudinales en base de pilas

Fig. 5-18 Viaducto de Torallo. Evolución de la rigidez “efectiva” longitudinal de las pilas

Fig. 5-19 Viaducto de Torallo. Evolución del movimiento longitudinal del tablero

Fig. 5-20 Viaducto de Torallo. Evolución de las fuerzas “virtuales” en cabeza de pila que representan el efecto de la no linealidad geométrica.

Fig. 5-21 Viaducto de Torallo. Evolución del flector en base de pila

5.2.4 “CASOS PARAMÉTRICOS”

Como ya se ha expuesto anteriormente, se ha aplicado el método propuesto a 13 puentes con distribuciones de luces variadas y alturas de pilas de 20 a 70 m. Las esbelteces de las pilas dirección longitudinal variaban entre 40 y 120, supuesta cada pila trabajando en ménsula exenta.

En el Anexo 9 se presentan unas tablas que resumen de forma muy condensada los largos y complejos cálculos realizados de los 13 puentes tipo definidos en el apartado 5.1.3. Se presentan los corrimientos longitudinales en cabezas de pilas y los flectores obtenidos en las bases de las pilas en los tres tipos de cálculos realizados, a saber:

- Cálculo iterativo “elástico” conforme al método que se está proponiendo.
- Cálculo de comprobación empleando el modelo no lineal de pila aislada con coacción parcial en cabeza.
- Cálculo no lineal completo de la estructura global.

A continuación se presentan unas figuras que muestran el error relativo que se comete al aplicar el método iterativo elástico propuesto con respecto a la solución obtenida con el cálculo no lineal completo. Se presentan los gráficos correspondientes al error relativo resultante en términos de corrimiento longitudinal de la cabeza de pila y de esfuerzo flector longitudinal en base de pila.

Fig. 5-22 “Casos paramétricos”. Error relativo en la estimación del corrimiento longitudinal en cabezas de pilas

Fig. 5-23 “Caos paramétricoss”. Error relativo en la estimación del momento flector en bases de pilas

6 CONCLUSIONES, APORTACIONES ORIGINALES Y POSIBLES FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

6.1 LIMITACIONES Y EXCLUSIONES DEL MÉTODO PROPUESTO

6.1.1 EXCLUSIONES

En capítulos anteriores se ha propuesto un método iterativo para resolver el pandeo de pilas esbeltas de hormigón armado constituyentes de la subestructura de un puente. Dicho procedimiento se ha aplicado a un llamado “puente tipo”. En el capítulo precedente se ha aplicado dicho método a varios puentes más para mostrar su validez y su rango de aplicación. El método propuesto es un método iterativo que emplea el cálculo elástico. En su desarrollo se han considerado las siguientes bases de partida que limitan su aplicación:

- Puentes de carretera
- Puente recto
- Las acciones a considerar son las establecidas en el Eurocódigo 1 (EN1991).
Así mismo, las combinaciones de acciones y los correspondientes coeficientes de mayoración de acciones serán los definidos en los Eurocódigo 0 (EN1990).
- Se asume que el tablero del puente se apoya en las pilas en aparatos de apoyo que podrán ser fijos (POT), de teflón o de material elastomérico.
- En longitudinal no existe transmisión de flectores del tablero a la pila (es decir, el tablero no se empotra en las pilas), pero en transversal sí existe dicha continuidad de momentos (se disponen dos aparatos de apoyo en la dirección transversal).
- La sección transversal de las pilas es un cajón unicelular de espesor constante. Los fustes de las pilas son de canto y ancho constante. La cuantía de armadura del fuste varía linealmente con la altura de la pila.

Así, por tanto, quedan fuera del ámbito de aplicación del método de cálculo propuesto los puentes que cumplan alguna de las siguientes condiciones:

- Puentes de ferrocarril o en los que la acción sísmica sea significativa
- Puentes sensiblemente curvos

- Puentes en que haya una concomitancia significativa de las cargas que generan máxima flexión longitudinal en las pilas y de las cargas que provocan la máxima flexión transversal en ellas.
- Pilas con sección transversal variable

6.1.2 LIMITACIONES A LA APLICACIÓN DEL MÉTODO PROPUESTO

Se presentan a continuación algunas consideraciones relativas a algunos aspectos que no se han considerado en los cálculos realizados en este trabajo y que pueden afectar a los resultados obtenidos. En particular se trata de los siguientes asuntos:

- Consideración de la flexión biaxial.
- Influencia de las inestabilidades de la flexión transversal en el cálculo global.
- Influencia del valor del módulo elástico del hormigón, E_c , en los cálculos realizados.
- Afección de la fluencia del hormigón de las pilas.

6.1.2.1 CONSIDERACIÓN DE LA FLEXIÓN BIAxIAL

En general se admite que si los esfuerzos de flexión transversal no son muy grandes, entonces se puede operar considerando de forma separada la flexión en los dos ejes principales. Así, por ejemplo, la EHE (EHE, 1999) indica que para secciones rectangulares con armadura constante en toda la altura del elemento, esto se cumple cuando el punto de aplicación se encuentra dentro de la zona rayada representada en la Fig. 6-1.

Fig. 6-1 Límites de excentricidad del axil para poder considerar la flexión en dos ejes de forma separada (figura tomada de la EHE)

En los casos que se han estudiado, siempre ha resultado dimensionante la combinación en ELU que generaba máxima flexión longitudinal en las pilas. En estas combinaciones actúa el viento longitudinal sobre las pilas y sobre el tablero y, entonces, la flexión transversal concomitante es muy baja. Aún así, en este trabajo se han empleado en el dimensionamiento los ábacos definidos en el apartado 3.5.3: se trata de diagramas de interacción axil-momento flector que consideran la flexión biaxial según los dos ejes principales.

En las hipótesis en que predomina el viento transversal también hay efectos longitudinales no despreciables en algunas pilas, mayormente en las pilas laterales en que la retracción y fluencia del tablero provocan flexiones longitudinales apreciables. En estos casos está más que justificada la consideración de la flexión biaxial o esviada, tal y como se ha hecho mediante el uso de los mencionados diagramas de interacción axil-flector

6.1.2.2 INFLUENCIA DE LA INESTABILIDAD PRODUCIDA POR LA FLEXIÓN TRANSVERSAL

Las doce combinaciones de cálculo en ELU que resumen las situaciones pésimas de carga son las que se definen en la *Tabla 4-2* que se reproduce a continuación.

Tipo	Acción	Combinaciones											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
G	Peso propio	1	1	1	1.35	1.35	1.35	1.35	1	1	1	1	1
G	Cargas muertas	1	1	1	1.35	1.35	1.35	1.35	1	1	1	1	1
G	+50% pavimento	0	0	0	1.35	1.35	1.35	1.35	0	0	0	0	0
G*	Reología	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35
T	Térmicas	0	0	0.9	0	0	0.9	0	0	1.5	0	0	0.9
W	Viento transversal	0.9	0	0	0.9	0	0	0	0	0	1.5	0	0
W	Viento vertical	0.9	0	0	0.9	0	0	0	0	0	1.5	0	0
W	Viento longitudinal	0	0.9	0	0	0.9	0	0	0	0	0	1.5	0
L	SC horizontal	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.5
L	SC vertical uniforme	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	0.60	0	0	0.60
L	SC vertical vehículos	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.125	0	0	1.125

Tabla 6-1 Combinaciones de cálculo en ELU

Son de destacar las siguientes consideraciones:

- La combinación 11 es la que da máxima flexión longitudinal en las pilas y que resulta dimensionante en todos los casos estudiados. La flexión transversal que aparece es nula o despreciable.
- Las combinaciones 10 y 12 son las que dan máxima flexión transversal en las pilas. La flexión longitudinal concomitante no es pequeña y se debe al efecto del acortamiento reológico del tablero que arrastra las a las pilas generándolas una flexión longitudinal significativa.

Sin embargo, el comportamiento de la estructura en ambas situaciones (combinación 11= máxima flexión longitudinal en pilas y combinación 10 o 12= máxima flexión transversal en pilas) es radicalmente diferente, en lo que respecta a la importancia de los fenómenos de segundo orden. Para demostrarlo, se muestran en las tablas que siguen los corrimientos de las cabezas de pilas y los esfuerzos en la base de las pilas del “puente tipo” definido en el apartado 4.1.2 correspondientes a las dos combinaciones en ELU referidas (combinación 11 y 12) que resultan pésimas en para la flexión longitudinal y transversal, obtenidos con dos cálculos diferentes:

- En la estructura completa calculada en régimen elástico lineal y considerando las inercias brutas de las secciones.
- En la estructura completa calculada en régimen no lineal completo considerando la fisuración del hormigón y el efecto de la no linealidad geométrica.

Pila (combinación 11 ELU)	Corrimiento longitudinal en cabeza de pila obtenido en cálculo elástico con inercias brutas (mm)	Corrimiento longitudinal en cabeza de pila obtenido en cálculo no lineal completo (mm)	Flector longitudinal en base de pila obtenido en cálculo elástico con inercias brutas (kNm)	Flector longitudinal en base de pila obtenido en no lineal completo (kNm)
Pila P1	278	509	67671	61423
Pila P2	234	465	36295	43251
Pila P3	188	419	31758	41189
Pila P4	142	373	37256	50506

Tabla 6-2 Puente Tipo. Combinación 11 ELU. Comparación de resultados cálculo elástico – cálculo no lineal completo

Pila (combinación 12 ELU)	Corrimiento transversal en cabeza de pila obtenido en cálculo elástico con inercias brutas (mm)	Corrimiento transversal en cabeza de pila obtenido en cálculo no lineal completo (mm)	Flector transversal en base de pila obtenido en cálculo elástico con inercias brutas (kNm)	Flector transversal en base de pila obtenido en no lineal completo (kNm)
Pila P1	50	52	36501	34710
Pila P2	93	96	31176	35110
Pila P3	93	96	31176	35111
Pila P4	50	52	36501	34710

Tabla 6-3 Puente Tipo. Combinación 12 ELU. Comparación de resultados cálculo elástico – cálculo no lineal completo

En los resultados se observa que el efecto de la no linealidad en el trabajo transversal es despreciable, lo que no sucede en la Combinación 11 de máxima flexión longitudinal en la pila más solicitada. Esta situación era de esperar ya que la esbeltez de las pilas en dirección longitudinal es mucho mayor que la que resulta en dirección transversal, tal y como se observa en la tabla que sigue. En esta tabla se ha supuesto la pila libre en cabeza para el movimiento longitudinal y con el corrimiento libre pero rígidamente coaccionada al giro en dirección transversal.

Pila	Altura de pila (m)	Esbeltez en dirección longitudinal	Esbeltez en dirección transversal
Pila P1	40	81	23
Pila P2	60	122	34
Pila P3	60	122	34
Pila P4	40	81	23

Tabla 6-4 Puente Tipo. Esbelteces de pilas

En los cálculos realizados con el método iterativo propuesto se ha considerado el efecto de la fisuración del hormigón al trabajar en flexión esviada compuesta, tal y como ya se ha comentado. También se ha expuesto reiteradamente cómo se tiene en cuenta el efecto de la no linealidad geométrica en el cálculo de los esfuerzos de flexión. Los resultados que se resumen en la *Tabla 6-2* y en la *Tabla 6-3* muestran que el efecto de la no linealidad es muy importante en el trabajo longitudinal pero de muy reducida magnitud en el trabajo transversal, lo cual avala el método propuesto, que considera la geometría deformada en el cálculo de esfuerzos longitudinales y no lo tiene en cuenta en el cálculo transversal.

6.1.2.3 INFLUENCIA DEL VALOR DE e_c CONSIDERADO EN LOS CÁLCULOS

En todos los cálculos realizados se ha considerado que el hormigón de las pilas era un C30/35, que es bastante habitual en este tipo de elementos estructurales. Conforme a lo indicado en el Eurocódigo 2 (EN1992-1-1, 2004), el valor que se toma para el módulo de deformación, E_c , del hormigón es:

$$E_c = 8500 \sqrt[3]{f_{ck} + 8} \quad (MPa)$$

Que para un hormigón como el dado (C30/35) resulta un módulo elástico de 28576 MPa. Si el hormigón fuera de menor resistencia, por ejemplo, C25/30, resultaría un módulo de 27264 MPa, es decir un 95% del anterior. Si, sin embargo, el hormigón fuera de mejor calidad, C35/40, el E_c resultaría ser 29779 MPa, es decir un 4% mayor que el de referencia. Es decir, que la utilización de un hormigón “algo” diferente al supuesto en este trabajo, genera diferencias en las deformaciones a considerar del entorno de sólo un $\pm 5\%$, aproximadamente. Esto significa que el método propuesto también es aplicable al caso en que se utilice un hormigón diferente al supuesto, sin más que empleando en los cálculos elásticos a realizar el módulo elástico de deformación longitudinal, E_c , que corresponda al hormigón constituyente de las pilas. Es más, también se pueden utilizar los ábacos definidos en este trabajo que son función, en la mayoría de los casos, de la flecha adimensional, δ/H , que se produce en cada caso de carga y que ha sido estimada con un hormigón C30/35, pero que, dado el pequeño error que se comete si se trata de otros hormigones, siguen siendo suficientemente aproximados como para que siga siendo válido su empleo.

6.1.2.4 INFLUENCIA DE LA FLUENCIA DEL HORMIGÓN DE LA PILA

En general, la situación pésima de cálculo de un pilar viene dada, como ya se ha comentado, por la situación en que el flector longitudinal es máximo. Si este flector es producido por unas cargas permanentes, entonces la fluencia puede tener influencia en el valor de la flecha final y, por tanto, en el valor del momento de segundo orden resultante. Por eso en diversas normativas, por ejemplo en el ACI 318 (ACI 318, 2011), se establece que, en tal caso, se podrá calcular siguiendo lo expuesto en sus diferentes apartados, pero tomando una inercia de las secciones del pilar que sea igual a la que corresponda en el cálculo que se esté realizando, pero dividida por el coeficiente $1+\beta$, donde β es el cociente entre el cortante en cabeza de pila producido por las cargas permanentes y el cortante total en la misma cabeza de pila en la combinación considerada.

En base a lo expuesto en el apartado 6.1.2.3 anterior, se puede tener en cuenta el efecto de la fluencia de una forma similar a lo expuesto para el caso de que el hormigón tenga una deformabilidad diferente a la del hormigón que se ha tomado como referencia. Es decir, se podrán utilizar todos los ábacos de este trabajo considerando siempre la flecha adimensional,

δ/H , que se produce realmente bajo las cargas de cada combinación que se esté estudiando y, en este caso, añadiendo la deformación extra que suponga, en cada caso, la consideración de la fluencia en la pila.

6.2 CONCLUSIONES

6.2.1 CONCLUSIONES RELATIVAS A LA CONSIDERACIÓN DE LAS NO LINEALIDADES

6.2.1.1 INFLUENCIA DE LA FISURACIÓN DEL HORMIGÓN

En el Capítulo 2.2 se ha presentado un resumen de lo que plantean algunas normativas de uso común (Eurocódigo 2, Código Modelo, ACI 318, EHE-11) empleadas en el dimensionamiento de elementos de hormigón armado, en lo referente a la consideración de las inestabilidades en el comportamiento de piezas comprimidas. En particular, tanto el Eurocódigo 2 (EN1991-2, 2004) como la Norma ACI318 (ACI 318, 2011) abogan por emplear en los cálculos una inercia reducida para tener en cuenta la pérdida de rigidez que supone la fisuración. Así, la ecuación (2-49) y la (2-56), cuantifican dichas reducciones en ambas normativas, respectivamente.

Sin embargo estas expresiones no son de aplicación inmediata al caso de estructuras claramente traslacionales, como son los puentes. Así, por ejemplo, la aplicación de la fórmula (3-16) al caso de las pilas del puente tipo 1 estudiado, da un resultado negativo, circunstancia que es físicamente imposible y que demuestra la no aplicabilidad de la formulación propuesta para el caso de pilas esbeltas con sección monocajón.

Se presentan a continuación algunos gráficos que muestran la pérdida de rigidez de las pilas en función de diferentes parámetros del cálculo. Así, se presenta lo que se obtiene en términos de I_{fis}/I_b en las pilas pertenecientes a los 3 puentes tipo “canónicos” y al resto de “casos paramétricos” analizados, en función de los siguientes parámetros adimensionales:

- Relación flecha en cabeza/altura de pila (δ/H)
- Cuantía de armadura en la base (ω)
- Axil reducido en cabeza de pila ($v=N_d/A_c f_{cd}$)
- Flector reducido en base de pila ($\mu=M_d/A_c f_{cd} h$)

Los resultados que se muestran corresponden a la combinación en ELU que produce máxima flexión longitudinal en las pilas, que es la más condicionante en todos los cálculos realizados.

Fig. 6-2 Variación de I_{fis}/I_b en función del desplazamiento en cabeza

Fig. 6-3 Variación de I_{fis}/I_b en función de la cuantía de armadura en la base

Fig. 6-4 Variación de I_{fis}/I_b en función del axil reducido en la cabeza

Fig. 6-5 Variación de I_{fis}/I_b en función del flector en la base

Es evidente que la fisuración de las secciones transversales dependerá del nivel de axil y flexión que exista en cada sección de cada pila. Por eso, la mejor correlación entre el valor de I_{fis}/I_b y el resto de los parámetros se produce cuando se considera la reducción de rigidez efectiva de la pila en función del axil reducido (v) y del nivel de flexión, que también se puede representar mediante la flecha que se produce en la cabeza de la pila, es decir, con el factor δ/H . También la cuantía de la armadura influye, puesto que hace que, a igualdad de flector y axil, la inercia fisurada aumente cuando aumenta la cuantía de armadura.

Acorde con estas disquisiciones cualitativas, en el método de cálculo que se propone se cuantifica la pérdida de rigidez efectiva mediante el uso de unos ábacos de elaboración propia para este trabajo, que dependen de:

- las dimensiones de la sección transversal de la pila,
- la flecha en cabeza de la pila, expresada por el cociente δ/H ,
- el axil reducido (v), y
- la cuantía de armadura (ω) y su variación a lo largo de la pila.

Como conclusión se puede decir que la aproximación que se obtiene aplicando el método propuesto es bastante ajustada, tal y como muestran los gráficos que se incluyen en el apartado 6.2.2.

6.2.1.2 INFLUENCIA DE LA NO LINEALIDAD GEOMÉTRICA

En el Capítulo 2.3 se ha hecho un repaso de la bibliografía existente en lo referente a la forma de tener en cuenta la geometría deformada en el cálculo de esfuerzos. Es decir, a cómo se debe considerar la no linealidad geométrica en el cálculo de elementos comprimidos.

En este trabajo se ha optado por aplicar el método de la “magnificación de momentos”, propuesto, con diversos matices, tanto por el Eurocódigo 2 (EN1991-2, 2004) como por la Norma ACI 318 (ACI 318, 2011). Este método consiste en “amplificar” el valor del momento de cálculo que se tendría en primer orden para considerar que, en segundo orden, las flechas crecen y, por tanto, también aumenta la excentricidad con que se aplica el axil y aumenta, en consecuencia, el momento flector que solicita a cada sección de la pieza comprimida. Una forma habitual de considerar este hecho es el emplear un “factor de amplificación”, Ψ , de valor:

$$\Psi = \frac{1}{1 - \frac{N_d}{N_{cr}}}$$

donde N_d es el axil actuante y N_{cr} es el axil crítico de Euler

Sin embargo, este método tiene el inconveniente de que para estimar el axil crítico de Euler hay que hay que conocer el valor de la longitud de pandeo o característica del elemento comprimido... y este valor es algo incierto o difícil de valorar en el caso de una pila de un puente continuo. Esto es así, porque las pilas de un puente no están exentas en cabeza, sino que tienen parcialmente coaccionado su movimiento por la existencia del tablero que hace colaborar al resto de la subestructura. En el Capítulo 2 se ha discutido la influencia de esta coacción en el pandeo, llegándose a la conclusión de que no es baladí su consideración o no.

Por eso, en este trabajo se propone un método para cuantificar la influencia de la no linealidad geométrica que es independiente del valor de la carga crítica y, por ende, de la longitud de pandeo. Se basa en la definición del llamado en algunos escritos norteamericanos “índice de estabilidad”; en realidad, consiste en sustituir la excentricidad “extra” del axil por la actuación de unos cortantes “virtuales” aplicados en las cabezas de cada pila de forma que den una flexión “equivalente” a la que produce la excentricidad adicional con la que se aplica el axil al considerar la geometría deformada en la cálculo de esfuerzos.

Se presentan a continuación algunos gráficos que muestran los valores de dichos cortantes virtuales en términos adimensionales ($Q^*/A_c f_{cd}$) en función de diferentes parámetros del cálculo. Así, se presenta lo que se obtiene en términos de $Q^*/A_c f_{cd}$ en las pilas pertenecientes a los 3 puentes tipo “canónicos” y de los “casos paramétricos” analizados, en función de los siguientes parámetros adimensionales:

- Relación flecha en cabeza/altura de pila (δ/H)
- Cuantía de armadura en la base (ω)
- Axil reducido en cabeza de pila ($v=N_d/A_c f_{cd}$)
- Flector reducido en base de pila ($\mu=M_d/A_c f_{cd} h$)

Los resultados que se muestran corresponden a la combinación en ELU que produce máxima flexión longitudinal en las pilas, que es la más condicionante en todos los cálculos realizados.

Fig. 6-6 Variación del cortante virtual en función del desplazamiento en cabeza

Fig. 6-7 Variación del cortante virtual en función de la cuantía de armadura en la base

Fig. 6-8 Variación del cortante virtual en función del axil reducido en la cabeza

Fig. 6-9 Variación del cortante virtual en función del flector en la base

El valor de estos cortantes virtuales se obtiene mediante el uso de otros ábacos de elaboración propia para este trabajo, que dependen de:

- las dimensiones de la sección transversal de la pila,
- la flecha en cabeza de la pila, expresada por el cociente δ/H ,
- la cuantía de armadura (ω) y su variación a lo largo de la pila.

Como conclusión se puede decir que el ajuste que se obtienen aplicando el método propuesto es bastante bueno, tal y como muestran los gráficos que se incluyen en los apartados que siguen.

6.2.2 CONCLUSIONES RELATIVAS A LOS RESULTADOS DEL CÁLCULO ITERATIVO REALIZADO

El fenómeno del pandeo hace intervenir la deformada en la obtención de los esfuerzos. Por tanto, la cuantía de estos depende, en alguna medida, de las coacciones que se presenten en los extremos de la pieza comprimida. Así, por ejemplo, la carga crítica de una ménsula es ocho veces menor que la de un soporte empotrado-apoyado. En el apartado 2.1.2 se ha evaluado cualitativamente la influencia que tiene la existencia de una coacción parcial al corrimiento en la cabeza de una pila.

En el caso de las pilas de los puentes, éstas ven coaccionado su movimiento por la presencia del tablero, que transmite las acciones horizontales de una pila a otra, manteniendo la compatibilidad de movimientos propia de cualquier solución estructural. Esto sucede siempre que se dispongan aparatos de apoyo fijos (POT) o de material elastomérico o que se empotre la pila en el tablero. En todos estos casos, no es fácil de estimar correctamente el valor de dicha coacción que, como ya se ha justificado, tienen una influencia bastante importante en el cálculo.

En este trabajo se ha propuesto un método iterativo que considera correctamente el efecto de la coacción al movimiento que ejerce la subestructura de un puente cuando una pila esbelta trata de moverse en perpendicular a su directriz. Así, se propone calcular la estructura completa en régimen elástico pero considerando una rigideces efectivas, diferentes en cada pila, que simulan el efecto de la fisuración que se produce en las secciones de hormigón armado de la pila cuando están trabajando en flexión compuesta, como es el caso. La estimación de estas rigideces se hace basándose en lo que se obtiene de emplear unos ábacos creados al efecto en este trabajo.

Se muestra a continuación una figura que presenta el error cometido en la estimación de la flecha en cabeza para todas las pilas de los puentes “tipo” canónicos analizados. Se compara la flecha obtenida con el método iterativo propuesto y la que resulta de un cálculo global completo en segundo orden. Se ha eliminado de esta figura el resultado correspondiente a las pilas P4 y P5 del puente tipo 3 dado que el valor del corrimiento resultante es muy bajo y hace que un error de pequeña magnitud aparezca como un error relativo muy importante que, sin embargo, tiene una importancia real despreciable.

Fig. 6-10 Error relativo obtenido en la estimación de los corrimientos longitudinales en cabeza empleando el método iterativo propuesto.

Se muestra a continuación una figura que presenta el error cometido en la estimación del flector en la base de la pila para todas las pilas de los puentes “tipo” canónicos analizados. Se compara el flector obtenido con el método iterativo propuesto y el que resulta de un cálculo global completo en segundo orden. Los resultados se expresan en términos adimensionales de momento reducido, $(M_{\text{fis}} - M_2) / A_c f_{cd} h$, donde M_{fis} es el flector obtenido aplicando el método iterativo propuesto y M_2 es el que se obtienen de un cálculo no lineal global de la estructura completa.

Fig. 6-11 Error relativo obtenido en la estimación de los flectores en base de pila empleando el método iterativo propuesto.

Se observa en la *Fig. 6-11* la magnífica aproximación obtenida aplicando el método iterativo propuesto lo que valida totalmente la metodología empleada y dando cumplimiento fin al objetivo de este trabajo que era definir un método para calcular las pilas esbeltas de hormigón armado, considerando correctamente las no linealidades del problema pero sin tener que acudir a un cálculo no lineal de la estructura completa.

6.2.3 CONCLUSIONES RELATIVAS A LA COACCIÓN A CONSIDERAR EN LAS CABEZAS DE PILAS

Como resultado del cálculo elástico iterativo de la estructura completa se obtienen las flechas en las cabezas de pilas y los flectores en sus bases. Además, como colofón del cálculo, se propone un método para comprobar la validez de los resultados obtenidos. Se propone emplear un modelo de pila aislada pero con coacción elástica en la cabeza, para representar la acción que ejerce el resto del puente sobre cada pila en cuestión. Se definen los criterios para asignar la rigidez correcta al muelle a disponer y también se definen los valores de las cargas a aplicar en la cabeza de la pila. Este modelo se deberá calcular con un programa de cálculo que permita considerar, en un modelo simple de una única barra, tanto las no linealidades geométricas como las mecánicas para obtener, otra vez, las flechas en cabeza y los flectores en la base de las pilas. Comparando estos resultados con los que resultan del cálculo iterativo se comprueba la validez de los resultados obtenidos.

Para comprobar la validez y adecuado ajuste de estos procedimientos de cálculo se presentan en las dos figuras que siguen las diferencias relativas que se obtienen al calcular tanto las flechas como los flectores con los dos métodos utilizados para los puentes tipo analizados, a saber: cálculo iterativo elástico (tipo 1), cálculo no lineal del modelo de pila aislada con coacción elástica en cabeza (tipo 2). Las figuras muestran la diferencia relativa de los resultados con lo obtenido empleando un cálculo de comprobación en régimen no lineal de la estructura completa (tipo 3).

Fig. 6-12 Comparación de las flechas en cabeza de pilas calculadas con los tres métodos utilizados

Fig. 6-13 Comparación de los flectores en bases de pilas calculadas con los tres métodos utilizados

Las figuras anteriores muestran un ajuste bastante bueno entre los resultados obtenidos con el modelo de pila aislada, con coacción elástica en cabeza, calculado en segundo orden con los resultados que se obtienen empleando un cálculo completo de segundo orden de toda la estructura. Esta correlación avala el método propuesto para calcular la coacción equivalente a disponer en la cabeza de cada pila para considerar el efecto del resto de las pilas al pandeo de cada una de ellas en particular.

6.3 POSIBLES FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Este trabajo está orientado a resolver, de forma alternativa al cálculo de segundo orden general, el problema de la inestabilidad de pilas esbeltas de puentes. Se han considerado sólo pilas de sección constante aunque la armadura puede variar en su altura. Una posible línea de investigación futura puede ser el extender el estudio realizado a pilas de sección transversal variable. La metodología propuesta seguiría siendo válida pero habría que emplear unos ábacos diferentes para cuantificar de forma ajustada el efecto de la fisuración del hormigón y de las no linealidades geométricas que se producen en la pila aislada sometida a flexo-compresión.

En este trabajo se ha considerado que el hormigón de las pilas era tipo C30/35 y que no se tenían en cuenta los efectos de la fluencia del hormigón de la pila. Aunque se ha mencionado

anteriormente cómo tener en cuenta de forma simplificada en el cálculo este aspecto, la evaluación más ajustada de la afección de la fluencia del hormigón de las pilas en los fenómenos no lineales propios del pandeo de piezas esbeltas podría ser otra futura línea de investigación.

En el presente trabajo se ha supuesto que el tablero transmite las cargas a las pilas mediante aparatos de apoyo; estos pueden ser fijos (tipo POT), deslizantes (de teflón) o de material elastomérico. No se ha considerado la situación de “puentes integrales” en que el tablero y la pila tienen una conexión rígida. Si este fuera el caso se podría seguir una sistemática similar pero algo más compleja, ya que se deberían emplear unos ábacos que hicieran intervenir no solo la flecha longitudinal sino también el giro en cabeza de pila. Además, en el cálculo de la coacción equivalente a disponer en la cabeza de pila, se deberían disponer dos muelles: uno que coaccionara el corrimiento longitudinal y otro el giro de flexión longitudinal.

Esta situación de empotramiento del tablero en la pila es, sin embargo, la habitual para el trabajo transversal, puesto que es muy común disponer un doble apoyo que transmite las cargas verticales y el momento transversal del tablero a la pila. Por tanto, si se quiere aplicar el método iterativo propuesto a un caso en que la flexión o la inestabilidad transversal sean predominantes, se debería aplicar lo dicho en el párrafo anterior. Es decir, se debería considerar el giro y la flecha como condicionantes de la situación de la cabeza de pila, pero se podría aplicar un método similar al propuesto en este trabajo. En este sentido hay que resaltar que la esbeltez de las pilas en dirección transversal es mucho menor que en longitudinal por dos motivos, al menos:

- por una parte, como ya se acaba de indicar, en transversal las pilas se empotran en el tablero, habiendo continuidad de corrimiento y giro transversal entre tablero y pilas, y
- por otra, la inercia de las secciones del fuste suele ser mayor para la flexión transversal que para la longitudinal, ya que el canto transversal de la pila suele ser mayor que el longitudinal.

Además también hay que considerar que el acortamiento del tablero debido a la fluencia y retracción del hormigón y a los efectos térmicos no afectan al comportamiento transversal de un puente recto. Por todos estos motivos, los efectos de las no linealidades son bastante menores en transversal que en longitudinal.

6.4 APORTACIONES ORIGINALES Y CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS PROPUESTOS

Se planteaba al inicio de este documento la cuestión de intentar definir un procedimiento que permitiera abordar el problema complicado del pandeo de pilas esbeltas de puentes pero empleando herramientas de cálculo no tan complejas como las que resuelven “el pandeo global de una estructura multibarra, teniendo en cuenta todas las no linealidades, incluidas las de las coacciones”. Es decir, se trataría de encontrar un procedimiento, que pudiera ser iterativo, que

resolviera el problema planteado de forma aproximada, pero suficientemente ajustada al resultado real, pero empleando programas “convencionales” de cálculo que fueran capaces de:

- por una parte, en la estructura completa:
 - o calcular en régimen elástico lineal una estructura plana o espacial multibarra compleja;
- por otra, en un modelo de una sola barra aislada:
 - o considerar las no linealidades geométricas y mecánicas a nivel tenso-deformacional,
 - o considerar la no linealidad producida por la fisuración del hormigón,
 - o considerar una coacción “elástica” en el extremo de la pieza.

Tal y como se demostrado en los capítulos precedentes, este objetivo ha quedado plenamente cumplido, ya que en este documento se define este procedimiento iterativo-aproximado, se expone cómo se deben calcular los diferentes parámetros que intervienen en los cálculos y se comprueba la validez de sus resultados.

Además, para conseguir estos objetivos se han elaborado unos ábacos de nueva creación que permiten estimar la reducción de rigidez que supone la fisuración en secciones huecas monocajón de hormigón armado. Es de destacar que la metodología aplicada para obtener estos ábacos es aplicable a otras dimensiones de pilas y a otras tipologías de secciones transversales, co lo que los ábacos propuestos no sólo son una aportación original sino que además son universalizables a otros casos. Lo mismo se puede decir de los ábacos – y la correspondiente metodología empleada para su creación – definidos para la cuantificación del cortante virtual equivalente a la actuación excéntrica del axil en cabeza.

También se han creado unos novedosos diagramas de interacción axil-flector válidos para este tipo de secciones monocajón de hormigón armado en flexión biaxial que constituyen un avance pues permiten predimensionar de forma sencilla la armadura de flexión.

Por último, hay que reseñar que otro de los objetivos de este trabajo – que, además, le daba título - era cuantificar el valor de la coacción que existe en la cabeza de una pila debido a que el tablero transmite las cargas de una pila al resto de los integrantes de la subestructura y ésta, por tanto, colabora a reducir los movimientos de la cabeza de pila en cuestión. Es decir, la cabeza de una pila no está exenta, lo cual mejora su comportamiento frente al pandeo. El régimen de trabajo de esta coacción es claramente no lineal, ya que la rigidez de las pilas depende de su grado de fisuración. Además, también influye cómo las afecta la no linealidad geométrica que, para la misma carga, aumenta la flexión de segundo orden de cada pila. Se puede decir que este objetivo prioritario de este trabajo ha sido alcanzado ya que en este documento se define cuánto vale esta coacción, cómo hay que calcularla y se comprueba el ajuste de los resultados obtenidos con este cálculo al que resulta si se aplica un modelo no lineal completo.

REFERENCIAS

AASHTO *Standard Specifications for Highway Bridges [Book]*. - Washington DC : American Association of State Highway Officials, 1977.

ACI 318 *Building Code Requirements for Structural Concrete ACI 318-11 [Book]*. - Michigan : ACI, 2011.

Arenas J.J. and Villegas L. *Diagramas axil-momentos-curvaturas de una sección de hormigón armado solicitada por flexo-compresión plana o biaxial [Journal]* // *Hormigón y Acero*. - Madrid : [s.n.], 1983. - 148.

Arenas J.J. *Cálculo de soportes de hormigón armado en teoría de segundo orden. Ábacos de dimensionamiento directo. [Book]*. - Madrid : Editores Técnicos Asociados, 1980.

Arenas JJ and Villegas L *Estudio de una pila esbelta, en ménsula, de hormigón armado, con sección y armadura variables a lo largo de su altura, solicitada por acciones contenidas en uno o dos planos principales [Journal]* // *Hormigón y Acero*. - Madrid : [s.n.], 1983. - 149.

Bonet J.L., M.L. Romero and Miguel P.F. *Effective flexural stiffness of slender reinforced concrete columns under axial forces and biaxial bending [Journal]*. - Detroit : Elsevier, 2011. - January 2011 : Vol. Engineering Structures.

De Abreu e Presa de Castro A.A. *Aspects on non linear geometric and material analysis of three dimensional framed structures [Book]*. - Porto : Universidad de Porto, 2009.

EHE *Instrucción de hormigón estructural [Book]*. - Madrid : Ministerio de Fomento, 1999.

Elnashai AS *Advanced inelastic static (pushover) analysis for earthquake applications [Journal]*. - Londres : Structural Engineering and Mechanics, 2001. - 1 : Vol. 12.

Elnashai AS *Static pushover versus dynamic collapse analysis of RC buildings [Journal]*. - Londres : Engineering Structures, 2001. - Vol. 23.

EN1990 *Eurocódigo 0. Parte 2. Combinaciones de acciones. Puentes [Book]*. - Bruselas : CEN, 2007.

EN1991-2 *Eurocódigo 1, Parte 2. Acciones a considerar en el proyecto de estructuras. Parte 2.- Puentes [Book]*. - Bruselas : CEN. Centro Europeo de Normalización, 2004.

EN1992-1-1 *EUROCODIGO 2. PARTE 1.1. Estructuras de hormigón. Reglas generales y de edificación [Book]*. - Madrid : Aenor, 2004.

Fernández A. & Domínguez J. *Diagramas de interacción de secciones cajón de hormigón armado en flexión biaxial [Book]*. - Madrid : Torroja Ingeniería (www.torroja.es), 2015.

- Fuentes A.** *Cálculo práctico de estructuras de edificios en hormigón armado [Book].* - Madrid : Editores Técnicos Asociados, 1980.
- Huguang Gong** *An improved nonlinear static analysis based on displacement [Journal].* - Hunanh : [s.n.], 2005.
- IAP2011, Ministerio de Fomento** *Instrucción de acciones a considerar en el proyecto de puentes de carreteras [Book].* - Madrid : Ministerio de Fomento, 2011.
- Jimenez Montoya P., García Meseguer, A. and Morán, F.** *Hormigón Armado [Book].* - Barcelona : Gustavo Gili, 1969.
- Kawashima K** *Evaluation of seismic performance of Japanese bridge piers designed with the previous codes [Conference]// 2nd Japan-UK workshop on implications of recent earthquakes.* - Tokyo : [s.n.], 1998.
- Khuntia M and Ghosh S.K.** *Flexural stiffnees of reinforced concrete columns and beams: Experimental verification [Journal].* - [s.l.] : ACI Strucutral Journal, 2004. - 3 : Vol. 101.
- Khuntia M. and Ghosh, S.K.** *Flexural stiffness of reinforced concrete columns and beams: Analytical approach [Journal].* - [s.l.] : ACI Structural Journal, 2004. - 3 : Vol. 101.
- Kuzmanovic A.** *Preliminary Design of slender reinforced concrtehighway bridge pier systems [Book].* - Toronto : University of Toronto, 2014.
- Lai S.M and MacGregor J.G.** *Geometric non linearities in unbraced multistory frames [Journal].* - [s.l.] : ASCE, 1983. - 11 : Vol. Proceedings ASCE Vol 109.
- Lawrie R.A** *Bridge column design. Today's procedures and needs for improvement [Journal].* - Denver : Federal Highway Administration, 1980.
- Lawson RS** *Nonlinear static pushover analysis: why, when and how? [Conference]// 5th National Earthquake conference.* - Chicago : [s.n.], 1994.
- Leonhardt F.** *Vorlessungen uber Massivbau [Book].* - Sttutgart : Springer, 1977. - Vol. 4.
- López Agui J.C. and et al** *El estado último de inestabilidad en la InstrucciónEHE [Book Section] // La EHE explicada por sus autores / book auth. Varios.* - Madrid : Leinfor Siglo XXI, 2000.
- Lopez Agui JC** *Estabilidad de pilares esbeltos de hormigón. Estado límite último de inestabilidad [Book].* - MDRID : IECA, 1997.
- Mac Gregor J.G and S.E Hage** *Stability analysis and design concrete [Journal].* - [s.l.] : ASCE, 1977. - ST 10 : Vol. Proceedings ASCE Vol 103.
- MacGregor J.G, Breen, J.E and Pfrang, E.** *Design of slender concrete columns [Journal].* - Framington Hills, MI : American Concrete Institute, 1970. - Jan 1970 : Vol. ACI Journal.
- MacGregor J.G.** *Design of slender concrete columns - Revisited [Journal].* - [s.l.] : ACI, 1993. - MAY-June 1993 : Vol. ACI Strucutral Journal.

- Manzelli A.A and Harik I.E.** Approximate moment-curvature relationship for slender columns [Journal]. - Michigan : ASCE, 1993. - 1993-119 : Vol. Journal of structural Engineer.
- Menn C.** Prestressed Concrete Bridges [Book]. - Basel : Birkhauser, 1990.
- MODEL CODE** Model Code 2010 [Book]. - Laussane : Fib, 2010.
- Morán F.** Cálculo práctico de pilas altas de viaductos en teoría de segundo orden [Journal] // Hormigón y Acero. - Madrid : [s.n.], 1989. - 171.
- Ortega MA, Romero JL and de la Rosa E** Un estudio del comportamiento de pilares incluyendo el régimen no lineal de los materiales [Journal]. - Madrid : [s.n.], 2006. - 240.
- Papanikolaou V** Developement and verification of adaptative pushover analysos procedures [Conference] // MSc Dissertation. - Londres : Imperial College, 2000.
- Ping Ye Lie** Non linear analytical models. Methods and examples for concrete structures [Journal]. - 2006.
- Poston R.W. [et al.]** Design of slender, nonprismatic and hollow concrete bridge piers [Report]. - Austin : Texas DOT. University Of Texas at Austin, 1983.
- Poston R.W. [et al.]** Design of slender, nonprismatic, and hollow concrete bridge piers [Journal]. - Austin : University of Texas at Austin, 1983.
- Poston R.W. [et al.]** Hollow concrete bridge pier behavior [Journal]. - [s.l.] : ACI, 1985. - Nov-Dec 1985 : Vol. ACI Journal.
- Poston R.W., Breen, J.E: and Roesset, J.M.** Analysis of non prismatic or hollow slender concrete bridge piers [Journal]. - [s.l.] : ACI, 1983. - Sept-Oct 1985 : Vol. ACI Journal.
- Poston R.W., Diaz, M and Breen, J.E.** Design Trends for concrete bridge piers [Journal]. - [s.l.] : ACI, 1986. - Jan-Feb 1986 : Vol. ACI Journal.
- Simon-Talero J.M. and Perez Caldentey A.** Análisis elástico fisurado de secciones y elementos de hormigón y mixtos // Apuntes Hormigón y Estructuras Metálicas. - Madrid : ETS Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, UPM, 2013.
- SOFISTIK** SOFISTIK, Programa de cálculo de estructuras. Manual de uso. [Book]. - [s.l.] : SOFISTIK, 2010.
- Sung YC** Non linear analysis of reinforced concrete member [Conference] // NARC 2004. - Taipei : [s.n.], 2004.
- Timoshenko Stephen P, Gere J** Theory of elastic stability [Book]. - New York : Mc Graw Hill, 1961.
- Tso WK** Pushover procedure for seismic analysis of buildings [Journal]. - Londres : Progress in structural engineering and materials, 1998. - 3 : Vol. 1.
- Unidad Docente de Hormigón Estructural** Prontuario informático del Hormigón Estructural 3.1.7 según EHE-08 [Book]. - Madrid : ETS Ingenieros de Caminos, C y P, 2012.

Vianello *Graphische Untersuchung der knickfestigkeit gerader stabe* [Book Section] // *Zeitschrift des vereins Deutscher Ingenieure*. - 1898.

Villegas L and Arenas JJ *Pilas altas de viaductos contruidos por avance en voladizo* [Journal] // *Hormigón y Acero*. - MADrid : [s.n.], 1984. - 153.

Villegas L and Arenas JJ *Resultados de la investigación relativa a la influencia de los diferentes parámetros que intervienen en el comportamiento de las pilas altas en ménsula* [Journal] // *Hormigón y Acero*. - Madrid : [s.n.], 1984. - 152.

Villegas Luis *Análisis en teoría de segundo orden de pilas altas de viaductos,. Aplicación al proyecto de pilas construidas por avance en voladizo* [Book]. - Santander : *Tesis Doctoral*. Universidad de Cantabria, 1981.

Wood B. Beaulieu D., Adams P. *Column design by PDelta method* [Journal]. - [s.l.] : ASCE, 1976. - 1976 ST3 : Vol. *Journal of the Structural Division*.

Yamazaki Fumio *A simplified method of constructing fragility curves for highway bridges* [Journal] // *Earthquake Engineering and Strcutural Dynamics*. - Tokyo : [s.n.], 2003. - Vol. 32.

Yu-Chi Sung *A study on pushover analyses of reinforced concrete columns* [Journal]. - Taipei : *Structural Engineering and Mechanics*, 2005. - 1 : Vol. 21.

Zhi-Wei Miao *Study on the accuracy and applicability of the pushover analysis* [Conference] // *Earthquake ressitant Engineering and Retrofitting*. - Beijing : [s.n.], 2008.