UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR

DE

INGENIERÍA Y DISEÑO INDUSTRIAL

**Modelo para la medición con máquinas de visión e
iluminación episcópica mediante la aplicación de
técnicas de resolución subpíxel y aproximación
bayesiana**

TESIS DOCTORAL

Miguel Berzal Rubio

Ingeniero Técnico Industrial

Licenciado en Ciencias

2016

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA,
QUÍMICA Y DISEÑO INDUSTRIAL

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE
INGENIERÍA Y DISEÑO INDUSTRIAL

**Modelo para la medición con máquinas de visión e
iluminación episcópica mediante la aplicación de
técnicas de resolución subpíxel y aproximación
bayesiana**

Autor:

Miguel Berzal Rubio

Directores:

Dr. Emilio Gómez García

Dr. Jesús de Vicente y Oliva

2016

LECTURA DE TESIS

Tribunal nombrado por el Sr. Rector Magnífico de la Universidad Politécnica de Madrid,
el día 18 de enero de 2016.

Presidente: D. Miguel Ángel Sebastián Pérez

Secretario: D. Jesús Caja García

Vocal: D^a Eva María Rubio Alvir

Vocal: D. Pedro José Núñez López

Vocal: D. Lorenzo Sevilla Hurtado

Realizado el acto de defensa y lectura de la tesis el día 4 de febrero de 2016 en la E.T.S.
de Ingeniería y Diseño Industrial.

Los miembros del tribunal han decidido otorgar la siguiente calificación:

El Presidente,

El Secretario,

Fdo: Miguel Ángel Sebastián Pérez

Fdo: Jesús Caja García

El Vocal,

El Vocal,

El Vocal,

Fdo: Eva María Rubio Alvir Fdo: Pedro J. Núñez López Fdo: Lorenzo Sevilla Hurtado

MODELO PARA LA MEDICIÓN CON MÁQUINAS DE VISIÓN E
ILUMINACIÓN EPISCÓPICA MEDIANTE LA APLICACIÓN DE
TÉCNICAS DE RESOLUCIÓN SUBPÍXEL Y APROXIMACIÓN BAYESIANA

Miguel Berzal Rubio

Ingeniero Técnico Industrial

Licenciado en Ciencias

febrero de 2016

Agradecimientos

*Don't you hear my call
Though you're many years away
Don't you hear me calling you
All your letters in the sand
Cannot heal me like your hand
—Brian May—*

En primer lugar deseo dar las gracias a Emilio Gómez García y Jesús de Vicente y Oliva, mis sufridos directores de tesis, por intentar que en todo momento siguiera la senda que me ha conducido hasta la presentación de la memoria; por sus valiosas enseñanzas, por su trabajo, y por su ánimo que me ha llevado a mejorar, dentro de mis posibilidades, la investigación desarrollada.

A Cintia, Jesús y Piera que, al igual que mis directores de tesis, han tratado en todo momento de que no me perdiera por los tortuosos caminos del conocimiento, sin desfallecer nunca.

A Mario, que de su mano Linux y sus amigos vinieron a conocerme.

A Luca, que me ha mostrado el “lado oscuro” de la probabilidad: *la probabilidad bayesiana*.

A Rafa, que con su buen humor y su buen hacer me ha enseñado a ver las cosas de otra manera.

A Javier, que con su ayuda y su tesón cualquier problema parece siempre más sencillo.

A mis compañeros de *Ingeniería Mecánica*, José Antonio y Juan Manuel, y de *EEFF*, Carmen, Yolanda y Luis Miguel, por la ayuda y su cariño.

A mis padres, Juana y Miguel, que se han pasado sufriendo y preguntándome: *¿Cómo lo llevas?*; sin su amor y su ayuda no lo hubiera conseguido. A mi hermana Carmen, después de la *okupacion* su casa no volverá a ser la misma, y a Pilar e Iván, por vuestra ayuda y cariño.

A mi mujer **Olga** que con su amor y paciencia ha conseguido el *milagro* de que entregue la memoria. A mi hija Sara, ya que la mayoría de los abrazos y besos se han quedado pegados en entre las letras del código L^AT_EX, Matlab o Linux. A Iker por su alegría al preguntar: “¿Cuántas hoja llevas escritas?” o “¿Cómo es posible que en un día sólo escribas media hoja!”.

A la otra parte de la familia, en especial a mi cuñado Óscar, que siempre intenta por todos los medios hacer algo de “*Bricomanía*”, por los mejores momentos que nos quedan.

A mi amigo Mariano y a mis compañeros de *HHTT* (¡cómo hemos cambiado!).

A los pequeños: Karla, Saray, Jorge, Gabriel, Delia, Claudia, Dio, Sara, Diana, Iván, Marina, Martina, Nicolás, Álvaro, Lucía, y Eva, por su alegría y su vitalidad (¡todos nacieron después de que obtuviese el DEA!). Y por fin a los medianos: Víctor y Manu.

A todos aquellos, muchísimas personas, que siempre me han trasmitido sus mejores deseos *para que me centre*, y termine este trabajo que ahora les presento.

A TODOS ELLOS: ¡ MUCHAS GRACIAS ! Y ¡ UN ABRAZO MUY FUERTE !

Madrid, diciembre de 2015.

El autor con agradecimiento reconoce los recursos informáticos, conocimientos técnicos y asistencia proporcionada por el Centro de Supercomputación y Visualización de Madrid (CeSViMa).

Resumen

En esta tesis se desarrolla un modelo físico–matemático, original, que permite simular el comportamiento de las máquinas de visión, en particular las máquinas ópticas digitales, cuando reciben información a través de la luz reflejada por los mensurandos. El modelo desarrollado se ha aplicado para la determinación de los parámetros que intervienen en el proceso de caracterización de formas geométricas básicas, tales como líneas, círculos y elipses. También se analizan las fuentes de error que intervienen a lo largo de la cadena metrológica y se proponen modelos de estimación de las incertidumbres de medida a través un nuevo enfoque basado en estadística bayesiana y resolución subpíxel.

La validez del modelo se ha comprobado por comparación de los resultados teóricos, obtenidos a partir de modelos virtuales y simulaciones informáticas, y los reales, obtenidos mediante la realización de medidas de diferentes mensurandos del ámbito electromecánico y de dimensiones *submilimétricas*. Utilizando el modelo propuesto, es posible caracterizar adecuadamente mensurandos a partir del filtrado, segmentación y tratamiento matemático de las imágenes.

El estudio experimental y validación definitiva de los resultados se ha realizado en el Laboratorio de Metrología Dimensional de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería y Diseño Industrial de la Universidad Politécnica de Madrid. Los modelos desarrollados se han implementado sobre imágenes obtenidas con la máquina de visión marca *TESA*, modelo *VISIO 300*.

Abstract

In this PhD Thesis an original mathematic-physic model has been developed. It allows simulating the behaviour of the vision measuring machines, in particular the optical digital machines, where they receive information through the light reflected by the measurands. The developed model has been applied to determine the parameters involved in the process of characterization of basic geometrical features such as lines, circles and ellipses. The error sources involved along the metrological chain also are analyzed and new models for estimating measurement uncertainties through a new approach based on Bayesian statistics and subpixel resolution are proposed.

The validity of the model has been verified by comparing the theoretical results obtained from virtual models and computer simulations, with actual ones, obtained by measuring of various measurands belonging to the electromechanical field and of *submillimeter* dimensions. Using the proposed model, it is possible to properly characterize measurands from filtering, segmentation and mathematical processing of images.

The experimental study and final validation of the results has been carried out in the “*Laboratorio de Metrología Dimensional*” (Dimensional Metrology Laboratory) at the Escuela Técnica Superior de Ingeniería y Diseño Industrial (ETSIDI) (School of Engineering and Industrial Design) at Universidad Politécnica de Madrid (UPM). The developed models have been implemented on images obtained with the vision measuring machine of the brand TESA, model VISIO 300.

Índice general

Índice de tablas	xxi
Índice de figuras	xxiii
1. Introducción	1
2. Objetivos y alcance	5
2.1. Objetivos	5
2.2. Alcance	6
3. Metodología y estructura de la memoria de la tesis	7
3.1. Metodología	7
3.2. Estructura de la memoria de tesis	9
4. Estado del arte	11
4.1. Introducción	11
4.2. Sistema de visión	13
4.2.1. El efecto de la luz y el sistema óptico	13
4.2.2. Tratamiento de las imágenes	15
4.3. Sistema máquina	17
4.4. Incertidumbre y enfoque bayesiano	17
5. Fundamentos teóricos	21
5.1. Introducción	21
5.2. Fundamentos de óptica paraxial	22
5.2.1. Trazado de rayos a través de varias superficies	25
5.2.2. Determinación de los focos y los puntos principales	26
5.2.3. Diafragmas y pupilas	27

5.2.4.	Aberraciones	28
5.2.5.	Aberración esférica	30
5.2.6.	Coma	31
5.2.7.	Astigmatismo y curvatura de campo	32
5.2.8.	Aberraciones cromáticas	34
5.2.9.	Aberraciones de tercer orden	35
5.2.10.	Formulación matricial de la óptica geométrica	35
5.2.11.	Puntos y planos cardinales	37
5.2.12.	Formación de imágenes	39
5.2.13.	Sensibilidad y tolerancias	40
5.3.	Sistemas ópticos	41
5.3.1.	Lentes varifocales y zoom	41
5.3.2.	Objetivos	42
5.3.3.	Objetivos telecéntricos	42
5.4.	Óptica de Fourier	43
5.4.1.	Sistemas lineales invariantes	44
5.4.2.	Restauración de imágenes. Modelo de degradación y mejora	45
5.4.3.	<i>Phase correlation</i>	47
5.4.4.	<i>Digital imagen correlation</i>	49
5.5.	Introducción a la estadística bayesiana	52
5.5.1.	Teorema de Bayes	54
5.5.2.	Análisis secuencial	56
5.5.3.	Pasos para realizar un estudio bayesiano	57
5.5.4.	Algoritmo de Metropolis	57
5.6.	Calibración del píxel	58
5.6.1.	Autocalibración del píxel	60
5.6.2.	Procedimiento alternativo	61
6.	Ajuste de formas	63
6.1.	Introducción	63
6.2.	Mínimos cuadrados	64
6.2.1.	Mínimos cuadrados no lineales	65
6.3.	Caracterización de formas circulares	65
6.3.1.	Definición del problema	67

6.3.2.	Problema MCC	68
6.3.3.	Problema MIC	69
6.3.4.	Problema MZC	69
6.3.5.	Problema LSC	69
6.3.6.	Aproximación de <i>limaçon</i>	69
6.3.7.	Método de los mínimos cuadrados	71
6.3.8.	Implementación del algoritmo de cálculo de formas circulares	71
6.3.9.	Comparación entre los diferentes métodos empleados	73
6.4.	Caracterización de elipses	78
6.4.1.	Determinación de los parámetros de la elipse mediante MMCC	80
6.4.2.	Regresión ortogonal	81
6.4.3.	Determinación de la autocorrelación	84
6.4.4.	Mínimos cuadrados generalizados	85
6.4.5.	Correlación y longitud de corte	87
6.4.6.	Experimentación	87
6.4.7.	Análisis de resultados	93
7.	Sistema óptico	95
7.1.	Introducción	95
7.2.	Normalización de las intensidades de la imagen	96
7.2.1.	Toma de datos	99
7.3.	Calibración del sistema óptico	103
7.4.	Toma de datos	108
7.5.	Resultados	110
7.6.	Alternativa al Modelo CCD	111
7.6.1.	Modelo para transformar el área en intensidad. MCCD1	113
7.6.2.	Clasificación de los píxeles. MCCD2	116
7.6.3.	Modelo inicial. MCCD3	118
7.6.4.	Modelo de vecindad. MCCD4	119
7.6.5.	Criterio bayesiano para la determinación de la distancia	122
7.6.6.	Resultados	128
7.6.7.	Validación del modelo con imágenes sintéticas	130
7.7.	Determinación de las densidades de probabilidad	144
7.7.1.	Generalización del modelo bayesiano	144

8. Sistema mecánico	147
8.1. Introducción	147
8.2. Modelo Matemático	148
9. Modelo máquina	159
9.1. Introducción	159
9.2. Modelo máquina	160
9.3. Validación experimental	163
9.3.1. Medida con tres BPL y amplificación óptica de 4,5x	169
9.3.2. Medida con tres BPL y amplificación óptica de 3x	170
9.3.3. Medida de un BPL con desplazamiento del sistema mecánico	172
10.Resultados experimentales	177
10.1. Introducción	177
10.2. Mensurando 1	179
10.3. Mensurando 2	183
10.4. Mensurando 3	185
10.5. Mensurando 4	188
11.Conclusiones y trabajos futuros	191
11.1. Conclusiones	191
11.2. Trabajos futuros	193
Referencias	197
Anexos	211
A. Máquina Tesa Visio 300	213
A.1. Descripción de la Máquina Tesa Visio 300	213
A.1.1. Función de transferencia	216
B. Densidades de probabilidad	219
C. Certificado de la regla patrón a trazos	229
C.1. Certificado de calibración	229
D. Patrón de puntos	233
D.1. Propiedades del patrón de puntos	233

E. Certificado bloques patrón longitudinales	235
E.1. Certificado de calibración	235
F. Elementos comerciales	239
F.1. Plaquita de corte	239
F.2. Galga extensométrica	240
Índice de Materias	241

Índice de tablas

6.1. Diámetro ($d_n = 1,497$ [mm]) y error de redondez <i>vs</i> α	74
6.2. Valores del diámetro de la pieza LEGO para distintos valores de α	76
6.3. Resultados obtenidos con la simulación en Matlab.	89
6.4. Comparación de las incertidumbres expandidas obtenidas.	90
6.5. Comparación de los métodos de ajuste.	91
7.1. Características ópticas del equipo Tesa Visio 300.	99
7.2. Calibración sistema visión para $Z = 3$	111
7.3. Calibración sistema visión para $Z = 4,5$	111
7.4. Clasificación de los píxeles en función de las distancias a sus vértices.	123
7.5. Coeficientes de Correlación para las Intensidades tipo $T290$	123
7.6. Coeficientes de Correlación para las Intensidades tipo $T3$	124
7.7. Coeficientes de Correlación para las Intensidades tipo $T4$	124
7.8. Tiempo de ejecución del modelo MCCD4.	129
7.9. Dimensiones del mensurando, ángulos entre rectas.	140
7.10. Dimensiones del mensurando, sector circular sintética $\alpha = 112,36^\circ$	141
7.11. Dimensiones del mensurando, elipse sintética.	142
8.1. Notación para los errores en una máquina con tres ejes.	150
9.1. Distancias certificadas de la regla a trazos D701/03.	160
9.2. Medidas para el patrón de trazos con $Z=3$, orientación horizontal.	162
9.3. Medidas para el patrón de trazos con $Z=3$, orientación vertical.	162
9.4. Medidas para el patrón de trazos con $Z=4,5$, orientación horizontal.	163
9.5. Medidas para el patrón de trazos con $Z=4,5$, orientación vertical.	164
9.6. Errores del sistema máquina para $Z=3$ y sus incertidumbres para $k=2$	164
9.7. Errores del sistema máquina para $Z=4,5$ y sus incertidumbres para $k=2$	164

9.8. Distribuciones de los parámetros ópticos para $Z=4,5$ aumentos.	170
9.9. Distribuciones de los parámetros ópticos para $Z=3$ aumentos.	170
10.1. Resumen de medidas experimentales realizadas.	178
10.2. Distribuciones de los parámetros ópticos para $Z=4,5$ aumentos.	182
10.3. Distribuciones de los parámetros ópticos y mecánicos para $Z=3$ aumentos. .	187
B.1. Densidades de probabilidad para T290 y l_{121}	219
B.2. Densidades de probabilidad para T3 y l_{121}	221
B.3. Densidades de probabilidad para T4 y l_{121}	226

Índice de figuras

1.1.	Modelo general para una máquina de visión.	3
5.1.	Refracción en una superficie esférica.	22
5.2.	Relación entre la altura y y los ángulos u y u'	25
5.3.	Refracción de un rayo de luz de una superficie a otra.	26
5.4.	Determinación del plano principal p_2	27
5.5.	Modelo general para las aberraciones.	29
5.6.	Aberración esférica.	30
5.7.	Aberración esférica longitudinal y transversal	31
5.8.	Aberración Coma.	32
5.9.	Localización de rayos en la aberración coma	33
5.10.	Astigmatismo.	33
5.11.	Superficie de Petzval.	34
5.12.	Relación entre los rayos del <i>espacio objeto</i> y el <i>espacio imagen</i>	38
5.13.	Principio de medida de un sistema telecéntrico	43
5.14.	Diagrama de Venn para la descripción de los conjuntos.	53
5.15.	Diagramas de Venn para la intersección y la probabilidad condicionada. . .	53
5.16.	Diagramas de Venn para la subdivisión del Universo.	55
6.1.	Errores de forma	66
6.2.	Definición matemática del problema.	68
6.3.	Definición geométrica de la aproximación de limaçon.	70
6.4.	Aplicación de los métodos de ajuste a una pieza de LEGO.	73
6.5.	Variación diámetro interior del patrón ($d_n = 1,4959$ [mm]) <i>vs</i> α	75
6.6.	Variación error circularía, patrón interior ($d_n = 1,4959$ [mm]), <i>vs</i> α	75
6.7.	Diámetros calculados de la pieza LEGO al variar de α	77

6.8.	Error de redondez de la pieza LEGO al variar de α .	77
6.9.	Defectos en la plantilla de círculos calibrada.	78
6.10.	Imagen de elipse captura por escáner	79
6.11.	Desviaciones ortogonales.	84
6.12.	Función de autocorrelación de las desviaciones ortogonales.	85
6.13.	Intuición gráfica de la longitud de corte.	87
7.1.	Histogramas utilizando $I_{FF\text{Mean}}$ y $I_{FF\text{Max}}$.	99
7.2.	Toma de datos con máquina Tesa Visio 300	100
7.3.	Resultados de la medición del <i>Dark Field</i> en la máquina Tesa Visio 300.	101
7.4.	Resultados de la medición del <i>Flat Field</i> en la máquina Tesa Visio 300.	102
7.5.	Resultados de normalización en el patrón de puntos.	103
7.6.	Método de la autocalibración	104
7.7.	Sistemas de referencia antes y después del ajuste.	104
7.8.	Diferencias entre el algoritmo de Canny y Trujillo Pino	108
7.9.	Determinación de la orientación del patrón	109
7.10.	Patrón de trazos.	110
7.11.	Sistemas de Referencia CCD.	112
7.12.	Cambio de sistema de Referencia	114
7.13.	Figuras sintéticas en las que la intensidad es proporcional al área cubierta.	116
7.14.	Tipos de píxel	117
7.15.	Píxel tipo T4, formato más habitual.	117
7.16.	Selección de las líneas de origen y final para un píxel tipo T290.	118
7.17.	Modelo para la determinación de las propiedades del píxel.	119
7.18.	El modelo se desarrolla a partir de las intensidades en los píxeles I_i .	119
7.19.	Descripción del modelo MCCD4.	120
7.20.	Ejemplo modelo MCC4.	120
7.21.	Pantalla de entrada del superordenador Magerit.	121
7.22.	Distancias con respecto a los vértices	122
7.23.	Longitud l_{121} en función de la intensidad I_k .	125
7.24.	Histogramas para la determinación de la probabilidad de Bayes.	127
7.25.	Variación de las líneas y las áreas de cálculo en modelo de vecindad.	128
7.26.	Probabilidades condicionadas $p(l_{ijk} T290, I)$	131
7.27.	Probabilidades condicionadas $p(l_{ijk} T3, I)$.	132

7.28.	Detalle de la probabilidades condicionadas $p(l_{ijk} T4, I)$	133
7.29.	Definición de área para los tipos T290, T3 y T4.	134
7.30.	Comparación de algoritmos para la detección del borde.	135
7.31.	Imágenes generadas para la validación del método.	136
7.32.	Separación de las curvas del borde para un triángulo y un sector circular. .	137
7.33.	Autocorrelación para las distancias ortogonales.	137
7.34.	Comparación de las desviaciones cuadrática medias en una elipse sintética. .	138
7.35.	Comparación de los algoritmos para la determinación de pequeños detalles. .	139
7.36.	FDP para distintos píxeles.	145
8.1.	Notación para los errores para una máquina de tres ejes.	148
8.2.	Configuración de MMC tipo YXFZ	151
8.3.	Posicionamiento del patrón bidimensional.	154
8.4.	Relaciones entre el modelo mecánico y el modelo de visión.	156
9.1.	Validación experimental mediante dos montajes de BPL.	165
9.2.	Criterio para la determinación de los máximos de intensidad	165
9.3.	Caracterización de máximos de intensidad con luz episcópica.	166
9.4.	Variación de las intensidades para una o dos normalizaciones de la imagen. .	167
9.5.	Generación de una imagen pseudosintética sobre la región de medida. . . .	167
9.6.	Determinación de la intensidad del primer vecino.	168
9.7.	Determinación de la ROI. Comparación de los filtros subpíxel	169
9.8.	Histogramas de las medidas realizadas para un zoom óptico de 4,5x.	171
9.9.	Medida con un montaje de tres BPL para zoom óptico 3x.	172
9.10.	Histogramas de las medidas realizadas para un zoom óptico de 3 aumentos. .	173
9.11.	Modelo para la medida de un BPL con desplazamiento mecánico en un eje. .	174
9.12.	Histogramas para un BPL con desplazamiento máquina de 2,5 [mm].	175
10.1.	Chiclé D60 del carburador de una motocicleta.	180
10.2.	Determinación de los máximos de intensidad.	180
10.3.	ROI y generación de la imagen para la determinación del borde.	181
10.4.	Resultado del ajuste de la circunferencia.	182
10.5.	Distribución para el radio del chiclé.	182
10.6.	Tarjeta impresa de un disco duro utilizada.	183
10.7.	Medida de un detalle de un circuito de un disco duro.	184

10.8.	Resultado del ajuste de la circunferencia mediante regresión ortogonal.	184
10.9.	Distribución para el radio de la tarjeta de un disco duro.	185
10.10.	Cotas de la plaquita de corte TPMN 16 03 08.	185
10.11.	Determinación del borde utilizando los máximos de intensidad.	186
10.12.	Aumento del contraste de una imagen usando el método de la entropía.	187
10.13.	Distribución de medida para el ángulo entre aristas de una plaquita.	188
10.14.	Cotas de la galga HBM XY21-1,5/120.	188
10.15.	Medida de la cota b_1	189
10.16.	Medida de la cota b_2	189
10.17.	Distribución para la distancia b_1	190
10.18.	Distribución para la distancia b_2	190
A.1.	Dimensiones de máquinas Tesa Visio 300.	213
A.2.	Propiedades de la Máquina Tesa Visio 300.	214
A.3.	Propiedades del sistema óptico de la Máquina Tesa Visio 300.	215
A.4.	Valores del campo de visión para un zoom con luz coaxial	215
A.5.	Objetivo y adaptadores de la casa Navitar.	216
A.6.	MTF para una amplificación de $\times 1$	217
A.7.	MTF para una amplificación de $\times 3$	217
A.8.	MTF para una amplificación de $\times 4,5$	218
C.1.	Patrón de trazos.	229
C.2.	Página 1 de 2, del certificado de calibración del patrón de trazos.	230
C.3.	Página 2 de 2, del certificado de calibración del patrón de trazos.	231
D.1.	Patrón de puntos sobre cristal.	233
D.2.	Propiedades del patrón de puntos.	234
E.1.	Caja de bloques patrón longitudinales.	235
E.2.	Certificado calibración BPL(1/3).	236
E.3.	Certificado calibración BPL(2/3).	237
E.4.	Certificado calibración BPL(3/3).	238
F.1.	Dimensiones de la plaquita de corte.	239
F.2.	Detalle del catálogo de HBM.	240

Capítulo 1

Introducción

RESUMEN: En este capítulo se presenta una visión general de los proceso de medida con máquinas ópticas, y se señalan los principios y recursos empleados en el desarrollo de la tesis.

“How often have I said to you that when you have eliminated the impossible, whatever remains, however improbable, must be the truth?”

—Sherlock Holmes, A.C. Doyle.—

Las demandas sociales y las necesidades tecnológicas requieren productos cada vez más avanzados: más ligeros, más ergonómicos, más resistentes, más duraderos... Por este motivo las fases de diseño y producción se vuelven críticas, acarreando necesariamente la implementación de sistemas de calidad avanzados. Para satisfacer las tolerancias de fabricación, cada vez más exigentes, se requieren sistemas de producción progresivamente más estables y equipos de medida con resoluciones e incertidumbres compatibles con dichas tolerancias. Naturalmente, los principios físicos y las limitaciones de ciertos instrumentos de medida dificultan o inhabilitan su uso a partir de un determinado umbral.

Las máquinas de visión constituyen una alternativa para la caracterización de mensurandos en el campo submilimétrico. Su rapidez en la medida, su falta de contacto y su automatización sitúa a estos equipos en un lugar predominante en la metrología actual, generando, además, un considerable interés científico orientado a optimizar su funcionamiento, especialmente la estimación de sus incertidumbres de medida. Como sucede habitualmente en los procesos de creación científica, el avance del conocimiento se produce

como evolución, mejora, optimización... de propuestas previas. En esta tesis se propone un nuevo modelo de análisis y tratamiento estadístico de las imágenes que permite gestionar con adecuada precisión los resultados de medida de las máquinas de visión con luz episcópica.

Si se observa el cuerpo humano, y más concretamente el ojo –la primera y más flexible máquina de visión que incorpora un generador de algoritmos en tiempo real– fácilmente se comprueba que la luz es muy importante ¡en la oscuridad no se ve! En general, el ojo está optimizado para trabajar con la luz natural procedente del sol, que se filtra a través de la atmósfera. Las fuentes de luz de iluminación artificial utilizadas en las máquinas de visión, intentan, por similitud, iluminar de manera homogénea los mensurandos, aunque en la práctica resulta muy complicado debido a las diferentes interacciones de la luz con la materia.

Si se pensara en la luz como un rayo y se enviaran, por ejemplo, diez rayos para la medición de una pieza, si sólo existiese reflexión, el resultado sería un desastre. No se podría determinar prácticamente ni la forma del elemento a medir. La aleatoriedad del proceso de medición mediante sistemas ópticos requiere una gran cantidad de rayos para poder definir el mensurando sin pérdida sensible de información.

En las máquinas de visión, figura 1.1, la información obtenida del mensurando a través de la luz se ha de observar y tratar. La luz interactúa con la materia en los procesos de generación de imágenes, y también con el sistema de captura, produciendo, con frecuencia, información imprecisa o generando información redundante. La luz avanza y llega al sensor. Éste se encarga de *traducir* la información obtenida a través del sistema óptico a un lenguaje que sea comprensible y susceptible de cuantificar. El proceso de *traducción* no siempre resulta exacto, es más, necesariamente va asociado a fuentes de error que será preciso cuantificar. Finalmente, todo concluye con la comprensión de la geometría del mensurando, es decir, con su caracterización metrológica.

Las máquinas de visión, al igual que nuestro cuerpo, se componen, por lo general, de un sistema óptico y un sistema mecánico. El sistema óptico se encarga de iluminar, transmitir y capturar el objeto de estudio, intentando que la información sea lo más fiable posible. Por su parte, el sistema mecánico ajusta la posición del mensurando para realizar la observación en condiciones óptimas. Las imágenes capturadas por el sistema óptico se analizan extrayendo las formas y los bordes del objeto, ajustándolo cuando es necesario y obteniendo las propiedades más probables del mismo.

En esta tesis se estudia el comportamiento de las máquinas de visión cuando reciben

Figura 1.1: *Modelo general para una máquina de visión.*

información a través de la luz reflejada por los mensurandos y para ello se han desarrollado algoritmos para la medida de formas geométricas básicas: rectas, circunferencias, elipses, en el plano de visión de la máquina; también se analizan las fuentes de error que intervienen a lo largo de la cadena metrológica y se proponen modelos de estimación de las incertidumbres de medida.

A lo largo del periodo de investigación y elaboración de esta tesis se han empleado herramientas imprescindibles para entender, al menos parcialmente, la física de los fenómenos ópticos y se han desarrollado modelos basados en principios estadístico-matemáticos contrastados. Sin exclusión de otros, cabe destacar el uso de:

- a.) La *óptica geométrica*, necesaria para analizar la transmisión de la información y las aberraciones que se producen en los sistemas ópticos.
- b.) La *óptica de Fourier*, imprescindible para la comprensión y modelado de fenómenos

más complejos, como la difracción y la polarización.

- c.) Las *técnicas de segmentación* de imágenes, empleadas para identificar características visuales similares en los píxeles.
- d.) Modelos *estadísticos inferenciales y bayesianos*: utilizados en la estimación de las distribuciones de probabilidad, localización y caracterización de píxeles.
- e.) Técnicas de detección con precisión *subpíxel*, para incrementar la resolución de las de imágenes.
- f.) Modelos mecánicos, basados en desarrollos habitualmente empleados en el estudio de *máquinas medidoras por coordenadas* utilizados para estimar los errores geométricos debidos a los desplazamientos de la máquina.
- g.) Método de *Monte Carlo* para la estimación de incertidumbres.
- h.) Métodos *numéricos y programación*, para la gestión de datos y como herramienta matemática.

Capítulo 2

Objetivos y alcance

RESUMEN: En este capítulo se enumeran los objetivos generales y específicos, amén del alcance de la tesis.

“Dicette o pappice vicino a’ noce, ramm’ o tiemp’ ca te spertose”

“Dijo el gusano a la nuez: llegará el día en el que conseguiré perforarte”

—Dicho Napolitano—

§ 2.1. Objetivos

Esta tesis tiene como objetivo general el desarrollo de modelos matemáticos originales para la caracterización de mensurandos con máquinas de visión e iluminación episcópica en el rango *submilimétrico*. Para ello, la investigación se centra en dos aspectos fundamentales: el análisis de los sistemas ópticos y el procesamiento de imágenes mediante técnicas de resolución subpíxel y probabilidad bayesiana.

Los objetivos específicos progresivamente abordados y resueltos a lo largo de esta tesis se relacionan a continuación:

- a.) Análisis y determinación de las variables que intervienen en la cadena de medición con máquinas ópticas.
- b.) Desarrollo de modelos matemáticos, genuinos, para el tratamiento de imágenes a partir de puntos de palpado óptico.

- c.) Desarrollo de modelos matemáticos e implementación de programas informáticos para la segmentación de imágenes y caracterización de píxeles singulares a partir su intensidad. Y validación de ambos a través de imágenes virtuales.
- d.) Implementación de métodos matemáticos de ajuste para la caracterización metrológica de mensurandos.
- e.) Evaluación de incertidumbres a partir de modelos de la probabilidad bayesiana y método de Monte Carlo.
- f.) Comprobación experimental en condiciones de laboratorio y validación de los modelos propuestos mediante la caracterización de distintos tipos de mensurandos, incluyendo bloques patrones longitudinales y piezas pertenecientes al ámbito electromecánico.

§ 2.2. Alcance

Los desarrollos matemáticos asociados a esta tesis y su validación experimental se han diseñado para máquinas de visión con iluminación reflejada o episcópica y para mensurandos en el rango *submilimétrico*. La utilización de otra fuente de luz u otros mensurandos fuera del rango indicado, requeriría adaptaciones de los algoritmos y los procedimientos aquí presentados.

La parte experimental de esta tesis se ha realizado en el Laboratorio de Metrología Dimensional de la ETS de Ingeniería y Diseño Industrial de la UPM, empleando las dos máquinas disponibles: *Tesa Visio 300* (manual) y *ZEISS O-INSPECT 322* (automática). Cabe señalar, no obstante, que los datos presentados en esta memoria se refieren únicamente a los obtenidos con la primera de ellas.

Metodología y estructura de la memoria de tesis

RESUMEN: En este capítulo se presentan los fundamentos metodológicos en los que se ha sustentado la investigación y se indican los contenidos de cada capítulo.

“Todo acto de creación es en primer lugar un acto de destrucción”

—Pablo Picasso—

§ 3.1. Metodología

El trabajo desarrollado en esta tesis doctoral y contenido en la presente memoria se basa, esencialmente, en un método *inductivo*. A través de los estudios realizados y la experiencia previa, es posible afirmar que existen una serie de variables cuya influencia es decisiva sobre los procedimientos de medida y resultados metrológicos de las máquinas de visión. Es conocido que influye, entre otros, la resolución del equipo, el sistema de iluminación, el tipo de montaje óptico y características de las lentes, el método de captura de imágenes, los métodos de filtrado y la segmentación de imágenes. Se sabe, asimismo, que también influyen de manera decisiva los modelos matemáticos de ajuste y los criterios de subdivisión de los píxeles, cuando se emplean.

En definitiva, se conocen cuáles son las variables que intervienen en el proceso y cómo evaluarlas de manera individual. Por lo tanto, partiendo de cada una de ellas y combinando

sus influencias relativas, se pretende obtener un modelo que permita la correlación de todas las variables de entrada y la caracterización de cualquier mensurando, ofreciendo su valor más probable y su incertidumbre asociada, para un determinado factor de cobertura.

Por lo expuesto, resulta muy conveniente, casi imprescindible, fraccionar el estudio en distintas fases de desarrollo para llegar a una conclusión unívoca que pueda en todo caso parametrizarse en función de diferentes condiciones de medida. Consecuentemente, la metodología de trabajo se ha organizado en las ocho fases que se señalan a continuación, donde se anuncian, además, las aportaciones más relevantes y las novedades respecto de trabajos anteriores:

- a.) Revisión bibliográfica de las publicaciones más notables relacionadas con los sistemas metrológicos de visión. Se ha hecho especial hincapié en el conocimiento de los métodos de tratamiento de imágenes.
- b.) Determinación de los parámetros que intervienen en el proceso de caracterización de formas geométricas básicas, tales como líneas, círculos y elipses. Ello implica un conocimiento preciso de los sistemas ópticos habitualmente instalados en las máquinas de visión y su comportamiento físico.
- c.) Definición y desarrollo de modelos matemáticos capaces de relacionar los parámetros anteriores con el proceso de medición seguido por las máquinas de visión. Los modelos implementados y las simulaciones realizadas se han ejecutado mediante el software matemático Matlab®.
- d.) Obtención de modelos físico-matemáticos de simulación y cálculo del comportamiento del instrumento, incluyendo sus sistemas óptico y mecánico.
- e.) Definición de los algoritmos que relacionan las variables y elaboración de modelos mediante el empleo de datos sintéticos, incluyendo métodos de detección de bordes con precisión subpíxel.
- f.) Análisis, depuración y validación de los modelos desarrollados a partir de los resultados obtenidos. Comparación de resultados con otros modelos conocidos.
- g.) Experimentación con diferentes máquinas de medición por visión y caracterización metrológica de diferentes mensurandos, incluyendo distancias entre puntos, distancia entre un punto y una recta, ángulos, medida de circunferencias y medida de elipses.

- h.) Publicación parcial de los resultados de la investigación en revistas indexadas y congresos internacionales, con el propósito de dar a conocer los resultados a la comunidad científica y obtener su aval.

§ 3.2. Estructura de la memoria de tesis

Esta memoria de tesis se ha dividido en 12 capítulos y varios anexos. Los Capítulos 1, 2 y 3 contienen la introducción, objetivos y metodología, respectivamente. El Capítulo 4 desarrolla el estado del arte, en el que se analizan, esencialmente, los trabajos publicados sobre el efecto de la luz en sistemas ópticos y el tratamiento de imágenes digitales, así como los estudios más relevantes orientados a la evaluación de la incertidumbre de las medidas a través del enfoque bayesiano. El Capítulo 5 ofrece los fundamentos teóricos en los que se basan los modelos matemáticos y físicos empleados para la caracterización de los sistemas ópticos. El Capítulo 6 muestra los algoritmos desarrollados para la caracterización de formas geométricas. El Capítulo 7 presenta un modelo físico-matemático para caracterizar el sistema óptico de las máquinas de medida, incluyendo los principios teóricos y el desarrollo del modelo de probabilidad bayesiana empleado en esta tesis. Incluye, asimismo, su validación con datos sintéticos. El Capítulo 8, análogo al anterior, expone el modelo empleado para la caracterización del sistema mecánico, basado en trabajos previos ya publicados. El Capítulo 9 integra los modelos óptico y mecánico, y muestra la metodología sugerida para la caracterización de mensurandos cuando se combinan las fuentes de incertidumbre ópticas y mecánicas. El Capítulo 10 muestra los resultados experimentales obtenidos, en condiciones de laboratorio, sobre mensurandos del campo electromecánico, tales como: discos duros, circuitos impresos, galgas extensiométricas... En el Capítulo 11 se exponen las conclusiones más relevantes obtenidas a lo largo del desarrollo de la tesis. También recoge las líneas de investigación futuras, que constituyen aspectos de interés que se han puesto de manifiesto a lo largo de estos años de trabajo, que no han podido ser abordados por su complejidad y que consideramos de mayor enjundia e interés científico. Finalmente, el Capítulo 12 relaciona las referencias citadas en esta memoria. Como anexos se incluyen las especificaciones técnicas y características de la máquina Tesa Visio 300 empleada en esta tesis, los certificados de calibración de los patrones utilizados, alguno de los códigos fuente más representativos de la investigación, desarrollados en su totalidad por el doctorando y las cotas de los mensurandos utilizados en la parte experimental.

Estado del arte

RESUMEN: En este capítulo se realiza un repaso de los avances científicos de los modelos empleados habitualmente en la obtención de medidas con máquinas ópticas. Se estudian y analizan los principios físicos y estadísticos existentes, para conocer sus limitaciones y, en caso necesario, generar nuevos modelos de simulación.

“There are children playing in the streets who could solve some of my top problems in physics, because they have modes of sensory perception that I lost long ago”

—J. Robert Oppenheimer—

§ 4.1. Introducción

La metrología requiere niveles crecientes de precisión en los ámbitos de la micro y nano-fabricación, habitualmente paralelos a las mayores exigencias funcionales de los productos manufacturados. Los instrumentos ópticos de medida se emplean cada vez más en este campo debido a la dificultad que entraña el uso de sistemas de palpado mecánico [16, 32]. Esto supone el empleo, en muchos casos, de métodos indirectos de medida. Además, el empleo de instrumentos ópticos implica la consideración de otros aspectos que igualmente intervienen en el proceso metrológico, como son: los modelos matemáticos de evaluación, la amplificación empleada, la resolución, las características ópticas del instrumento y el método de adquisición de datos manual/automático, entre los más relevantes [92].

En distintos sectores industriales, las máquinas de visión dotadas con sistemas de cá-

mara digital se usan con mucha frecuencia debido a las posibilidades de automatización de las medidas que ofrecen, fundamentalmente la rapidez en la adquisición de datos, la posibilidad de modelar las operaciones de medida y, sobre todo, la ausencia de contacto [102].

Paralelamente al desarrollo industrial de las máquinas de visión, se ha producido en las últimas décadas un interés creciente en el ámbito de la investigación científica, en particular en el campo de la metrología óptica [50, 70, 138, 144]. La literatura revisada muestra diversos estudios que se centran particularmente en el desarrollo de algoritmos para el tratamiento de imágenes [159], en nuevas propuestas de calibración y/o verificación [28] y en la mejora de procedimientos de medición en continuo [112].

Resulta procedente destacar, además, que existe una abundante producción en la literatura científica metrológica, dedicada al estudio de máquinas medidoras de tres coordenadas (CMMs) que tratan, con frecuencia, de mejorar su precisión y desarrollar modelos de evaluación de sus incertidumbres de medida.

Desde un punto de vista analítico, un equipo óptico puede asimilarse a una máquina medidora de tres coordenadas a la que se ha despojado del eje Z. En principio, tal circunstancia podría parecer una simplificación del problema; sin embargo, a pesar de medir solamente en dos dimensiones, los equipos ópticos digitales incorporan fuentes de incertidumbre adicionales que requieren un estudio específico. Conceptualmente un instrumento óptico de medida se puede dividir en dos partes denominadas: “sistema máquina” y “sistema óptico”. El “sistema máquina” está constituido por una estructura monobloque que soporta la mesa de medida y permite el desplazamiento de los ejes. El “sistema óptico” está constituido por una cámara CCD (*Charged Coupled Device*), que permite la adquisición y la transferencia de las imágenes al ordenador conectado a la máquina. El sistema formado por la cámara CCD sustituye, por lo tanto, el “sistema de contacto del palpador” usado en una CMM convencional. Esta división permite analizar de manera separada los dos sistemas con el objetivo de obtener un modelo adecuado como base para la evaluación de las incertidumbres de medida [11, 92].

El estudio bibliográfico realizado en esta tesis se ha llevado a cabo mediante un análisis por separado de los dos sistemas indicados: “sistema óptico” y “sistema máquina”. Con respecto al primero, se han tomado como variables fundamentales de estudio el sistema de iluminación y los modelos de ajuste y tratamiento de imágenes, proponiendo métodos y procedimientos para la evaluación de incertidumbres. Con respecto al “sistema máquina”, como se ha indicado anteriormente, su configuración se puede asimilar a la de una MMC

convencional por palpado mecánico, por tanto se ha analizado la literatura científica relacionada con las máquinas medidoras de tres coordenadas y se ha adaptado a las máquinas de visión con iluminación episcópica consideradas en esta tesis.

§ 4.2. Sistema de visión

Los sistemas de visión están constituidos por la integración de componentes ópticos, electrónicos y mecánicos, que permiten adquirir, grabar y elaborar imágenes, sea en el espectro de la luz visible o fuera de éste: infrarrojo, ultravioleta, rayos X... La obtención de las imágenes permite identificar determinadas características de las mismas y emplearlas con distintos propósitos: control, clasificación, selección, etc. empleándose en diferentes sectores, desde la industria hasta los servicios [110]. En el ámbito metrológico, la información obtenida a partir de las imágenes se emplea, habitualmente, en sistemas automáticos de decisión para distintas aplicaciones industriales como el control de productos y control de procesos, y también en otras aplicaciones no industriales [80, 81, 136, 157].

El conjunto de procesos que tienen como objeto crear modelos aproximados del mundo real (3D) partiendo de imágenes bidimensionales se denomina *visión artificial* [49, 63, 116, 127]. La visión artificial tiene como fin último reproducir la vista humana, es decir, no solamente la adquisición de una fotografía bidimensional de un área, sino y sobre todo la interpretación del contenido de aquélla. Un sistema de visión artificial está dotado de un sistema de iluminación, una o más cámaras, adquisición y tratamiento de datos y un software. A partir de estos elementos en el ámbito de esta tesis, se ha realizado un estudio de los avances científicos, analizando en particular:

- a.) El efecto de la luz en el sistema óptico e interacción con la materia.
- b.) Las técnicas de tratamiento de imágenes (adquisición, segmentación y detección de bordes).
- c.) Los modelos matemáticos que permite caracterizar metrológicamente la información de los elementos geométricos contenidos en las imágenes (líneas, círculos, elipses...).

4.2.1. El efecto de la luz y el sistema óptico

La naturaleza de la luz ha sido un enigma muy atractivo e interesante para los hombres, desde la más remota antigüedad. Existen distintas fuentes de luz que producen espectros

diferentes y, por tanto, condicionan la adquisición de las imágenes [46, 68]. Tras la generación, la interacción de la luz con la materia y el transporte [10, 64, 71, 88], la luz entra dentro del sistema óptico. Como primera aproximación, la luz se trata como rayos: suponiendo que la propagación se realiza linealmente y que al interactuar con el sistema óptico se propaga cerca de su eje, *óptica geométrica*. Existen muchas referencias sobre este tema, ya que ha sido la forma de diseño de equipos ópticos durante muchos años, pudiéndose determinar, entre otras, la geometría de las lentes y las aberraciones que se producen en el sistema [47, 64, 82, 91, 97, 100, 129, 139]. Sin embargo, fenómenos como la interferencia, la difracción, la polarización o la formación de imágenes, debidos a la naturaleza electromagnética de la luz, son complicados de describir mediante la *óptica geométrica* [10, 46, 64]. A partir de la onda electromagnética, se puede modelar el transporte y la formación de las imágenes [46, 58, 134, 153, 154]. En los procesos anteriores, se usa como herramienta fundamental la transformada de Fourier. Muchos procesos se realizan en el espacio de las frecuencias. La transformada de Fourier es indispensable para analizar los métodos anteriores, generando diversidad de trabajos tanto en el dominio del espacio como en el de las frecuencias [49, 55, 116, 127].

Por lo tanto, una posible clasificación de los sistemas ópticos se puede establecer en función del tipo de luz (proyectada, transmitida, natural, láser, etc.) que utilizan. La mayor parte de la radiación que captura el ojo se hace mediante luz reflejada o episcópica. Por lo que existe gran variedad de máquinas ópticas que utilizan este tipo de iluminación, sin exclusión de otras:

- a.) Lupa.
- b.) Telescopio
- c.) Microscopio metalográfico
- d.) Microscopio confocal
- e.) Microscopio electrónico
- f.) Cámara
- g.) Máquina de visión

Las máquinas de visión utilizan las dos técnicas tradicionales para realizar las medidas: luz episcópica (telescopio) y luz diascópica (microscopio tradicional). La ventaja fundamental de la luz diascópica es el gran contraste entre zonas claras y oscuras, lo cual facilita

el posterior tratamiento de la imagen; el problema fundamental de este tipo de luz es la imposibilidad de medir elementos opacos. La luz episcópica evita la desventaja fundamental de la luz diascópica, pero el contraste en las zonas de medida suele ser bajo y complica la posterior segmentación y normalización de la imagen [24, 65].

Cuando las propiedades del sistema óptico son conocidas, por ejemplo distancias y geometría de las lentes, se puede reproducir su comportamiento utilizando las ecuaciones de la óptica [47, 64, 91, 100, 129, 139] o reordenar estas ecuaciones en forma matricial [82, 93, 97]. Este proceso es complejo, ya que los fabricantes no suelen dar información sobre los componentes utilizados en sus productos, únicamente los diseñadores cuentan con toda esa información. Por este motivo, se suelen modelizar como si se tratase de una caja negra, por lo que en esta tesis se opta por usar las simplificaciones empleando métodos matriciales. A partir de estas simplificaciones, surge el modelo básico de la cámara *pin-hole*. El modelo se generaliza [63, 77] teniendo en cuenta no sólo la amplificación, sino también las distorsiones radiales y tangenciales, utilizadas para la caracterización y calibración de la cámara [12, 13].

4.2.2. Tratamiento de las imágenes

El tratamiento o procesamiento de las imágenes contempla dos fases principales: la segmentación y la normalización. Por segmentación de las imágenes se entiende el conjunto de técnicas de etiquetado (*labelling*) y de detección de los bordes (*edge detection*). La segmentación [156, 55] constituye un paso crítico en el análisis de imágenes, su principal fin es dividirla en partes que tengan una fuerte correlación con objetos o áreas del mundo real contenidos en ella. La imagen queda mediante este proceso dividida en regiones separadas, que son homogéneas entre ellas con respecto a determinadas propiedades como luminosidad, color, reflectividad y contexto.

Los métodos de segmentación se suelen dividir en tres grupos, según las características que utilicen [156]: el primero es el de conocimiento global (*global knowledge*) de la imagen entera o en partes singulares de la misma, que se representa usualmente a través de un histograma de las características fundamentales. Las segmentaciones basadas en los bordes (*Edge-based segmentations*) forman el segundo grupo y las segmentaciones basadas en las regiones (*Region-based segmentations*) el tercero. En teoría, el segundo y el tercero solucionan un problema dual: cada región puede ser representada por su borde cerrado y cada borde cerrado describe una región [55, 104]. De hecho, para una imagen ideal los

algoritmos de *Edge-based* y *Region-based* producen los mismos resultados. En las imágenes reales es difícil obtener una solución unívoca de los bordes exactos desde las regiones y viceversa, debido al ruido, por lo tanto los algoritmos de *Edge-based* y *Region-based* no permiten obtener una correcta segmentación de la imagen. Resultados aceptables se pueden obtener combinando los resultados parciales de los diferentes algoritmos e integrando el conocimiento a priori de la imagen mediante una oportuna optimización de la misma. Es decir, es necesario realizar anteriormente una normalización de la luminancia de la imagen.

Con la normalización de la imagen se pretende minimizar los posibles errores electrónicos del CCD. Este método se ha utilizado desde el comienzo del CCD en astronomía [37, 66, 115]. Una variación sobre este método aplicada al campo de esta tesis es el trabajo de *de Santo et al* [30] que permite corregir los errores sistemáticos debidos a la falta de homogeneidad de la fuente lumínica así como errores en la repuesta del CCD. Una vez realizada la oportuna normalización se ha decidido en el ámbito del presente trabajo de tesis, utilizar los algoritmos de *Edge-based* o detección de bordes [119], debido a las características del proceso de medida empleado.

En los bordes de un mensurando existe una variación brusca de la intensidad. La detección de los píxeles del borde es una tarea fundamental para la mayoría de los sistemas ópticos, ya que la medida depende de la precisión de los algoritmos utilizados. La idea básica de este tipo de algoritmos es la determinación de la primera o la segunda derivada de la intensidad. Entre los algoritmos de *Edge-based* la técnica más utilizada es el algoritmo de Canny [18, 17, 145], que se basa en un modelo matemático que aplica un filtro Gaussiano siguiendo los siguientes tres criterios: 1) buena detección, 2) buena localización y 3) única respuesta a un único borde. Por lo tanto, el algoritmo de Canny permite, utilizando la primera derivada, extraer el borde y además cerrar los contornos. En otros casos únicamente es necesaria la determinación de algún punto de interés, como un vértice, para lo que se suelen utilizar las segundas derivas, como al algoritmo propuesto por Harris [62]. Una vez terminado el proceso de cálculo, el algoritmo devuelve las coordenadas de los centros de los píxeles, por lo que su precisión es igual a un píxel.

Si se desea determinar la orientación y la localización dentro de un píxel, se debe recurrir a las técnicas de detección subpíxel. Según *Jian Ye et al.* [158] las técnicas de *subpixelado* se pueden dividir en tres categorías: técnicas basadas en el **operador momento** [146]; **técnicas basadas en el error cuadrático** [114] en las que se ajusta el comportamiento del borde a un modelo para posteriormente determinar la posición a través de los niveles de grises; y técnicas **de interpolación de las intensidades de las primeras derivas**

como explica Steger [142]. En todos los casos anteriores se requiere una continuidad en la señal de entrada, por lo que la posición del borde del mensurando se obtiene modelando esta señal. *Trujillo Pino et al* [149] proponen un algoritmo basado en la discontinuidad de la señal de entrada, denominado *partial área effect*.

Otras técnicas de segmentación se basan en la transformación de una imagen en otra y en la correlación que existe entre ellas. Para determinar pequeños desplazamientos de intensidades se utilizan habitualmente dos algoritmos: *Digital Imagen Correlation* (DIC), [7, 118, 117] y *Phase Correlación* [128].

§ 4.3. Sistema máquina

El subsistema que representa el denominado “sistema maquina” se puede analizar a partir del supuesto de que una máquina de visión se puede asimilar a una MMC manteniendo constante la coordenada Z durante el proceso de adquisición de las imágenes [11]. Por lo tanto, el modelo matemático que permite configurar el sistema maquina tiene en cuenta los errores geométricos relativos entre el sistema de palpado y el mensurando.

El modelo utilizado en esta tesis es el modelo de las *21 componentes* [65], que es un modelo ampliamente utilizado en este tipo de máquinas, y que permite modelar los errores geométricos de forma que el movimiento de cada uno de sus ejes queda descrito mediante nueve grados de libertad: 6 componentes de error (tres traslaciones, tres rotaciones) y tres errores de orientación.

§ 4.4. Incertidumbre y enfoque bayesiano

En el 1993 se publicó la primera edición de la *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, comúnmente conocida como GUM. En esta Guía se establecen reglas generales para estimar la incertidumbre de las medidas, aunque no ofrece información alguna sobre cómo utilizar esta estimación para la toma de decisiones [126]. Desde su primera publicación hasta la última edición del 2008 [74], la GUM se ha mantenido casi sin cambios. En el 2006 se publicó el Suplemento 1 a la GUM [75] como complemento a la su primera edición. Este suplemento se refiere a la propagación de las distribuciones de incertidumbre utilizando el método Monte Carlo.

Actualmente la GUM reconoce dos métodos para la evaluación de la incertidumbre de medida:

- La “Estructura de la GUM” (GUM Uncertainty Framework – GUF).
- El “Método Monte Carlo” (MCM).

La GUF utiliza métodos determinísticos de estadística clásica (*probabilidad frecuencial*) para la evaluación de las incertidumbres de tipo A y de tipo B y la combinación de la incertidumbre con el método bayesiano de solución analítica, mientras que el MCM es un método probabilístico estocástico. La diferencia básica consiste en el hecho de que la estadística clásica utiliza solamente la información dada por la muestra y la estadística Bayesiana permite utilizar, además, el conocimiento subjetivo que se posee (como por ejemplo aproximaciones con la serie de Taylor o suponer algún tipo de distribución), mientras que el método estocástico se entiende como una secuencia de estados cuya evaluación se determina mediante eventos sucesivos, donde la ley causa-efecto no explica cómo actúa un sistema o fenómeno de manera determinista sino en funciones de probabilidad.

De acuerdo a lo establecido en el Suplemento 1 de la GUM, el MCM es una alternativa práctica al enfoque GUF cuando:

- La linealización del modelo proporciona una representación inadecuada.
- La función de densidad de probabilidad (FDP) para la magnitud de salida se aparta apreciablemente de una distribución normal o de otra distribución conocida debido a una marcada asimetría.

Permitiendo resolver problemas como:

- “*Contribuciones a la incertidumbre que no son del mismo orden de magnitud*” GUM: 1995, G.2.2.
- “*Estimación de la magnitud de salida y su correspondiente incertidumbre típica asociada aproximadamente de la misma magnitud*” GUM: 1995, G.2.1.
- “*Modelos arbitrariamente complicados*” GUM: 1995, G.1.5.
- “*Funciones de distribución de probabilidad (FDP) de las magnitudes de entrada asimétricas*” GUM:1995, G.5.3.

Según Elster [40], la GUM ha demostrado ser un paso importante para la armonización de la evaluación de la incertidumbre. Sus procedimientos contienen elementos propios de estadística clásica y bayesiana. Los suplementos 1 y 2 [75], [76] de la GUM tienden de

hecho hacia el punto de vista bayesiano y producen distribuciones de probabilidad que representan un conocimiento *a priori* sobre el mensurando. Sin embargo, el teorema de Bayes no se aplica de forma explícita, sino que las distribuciones que se asignan a las magnitudes de entrada se propagan mediante el modelo que relaciona las magnitudes de entrada al mensurando. La distribución resultante para el mensurando puede coincidir con una distribución obtenida por la aplicación del teorema de Bayes, pero esto no es cierto en general [40].

La relación entre el análisis de la incertidumbre a través de la probabilidad bayesiana y la aplicación de la GUM y sus suplementos actualmente se está investigando, buscando relaciones entre ambos métodos [42, 41, 48, 87, 99]. Entre todos los trabajos cabe destacar las conclusiones del grupo “*CCT Working Group 3: Uncertainties in contact thermometry*” del BIPM, que en el documento denominado CCT/12-07 [155] afirma cómo en la GUM existe una dualidad de enfoques: frecuentista y bayesiano en la evaluación de la incertidumbre de tipo B, que parece haber abierto la puerta a la revisión de los procedimientos de la GUM y de los suplementos basados enteramente en la estadística bayesiana. Sin embargo, las consecuencias de un cambio hacia un enfoque puramente bayesiano no son triviales, en particular afectarían de la siguiente manera: mensurandos que ya no se pueden representar en el análisis de la incertidumbre por un sólo valor verdadero; las incertidumbres caracterizarían el estado del conocimiento de un experimento en vez del comportamiento real de los instrumentos y mensurandos, y la evaluación de las incertidumbres sería mucho más subjetiva y variable.

A pesar de lo anterior, la gran ventaja de la probabilidad bayesiana es su facilidad para actualizarse y evolucionar. Por este motivo, es muy utilizada en robótica [59], aunque también en campos como las calibraciones [125] o los estudios mecánicos [130].

La probabilidad bayesiana se incorpora en esta tesis como una herramienta para filtrar los datos obtenidos de los modelos de simulación y determinar su incertidumbre asociada, y supone una novedad frente a los algoritmos de borde con precisión subpíxel utilizados hasta ahora.

Capítulo 5

Fundamentos teóricos

RESUMEN: En este capítulo se recogen, fundamentalmente, las bases teóricas, *ópticas y matemáticas*, utilizadas en el desarrollo de esta tesis.

“Do not worry about your difficulties in Mathematics. I can assure you mine are still greater.”

—Albert Einstein—

§ 5.1. Introducción

En una primera aproximación al problema del sistema de visión, se busca comprender el comportamiento físico de los sistema ópticos. Este comportamiento se puede modelar mediante el trazado de rayos, ya sea mediante ecuaciones o a través de su representación matricial, en primera aproximación. Con este segundo enfoque, todo lo que sucede desde el mensurando hasta el sensor CCD se considera como una *caja negra*, matriz. El tercer enfoque que se podría plantear es la formación de imágenes a través de los *sistemas lineales invariantes*. La herramienta fundamental para estos sistemas es la transformada de Fourier. Con todo lo anterior, surgen técnicas de *segmentación* de imágenes como la *correlación de imágenes digitales* (*digital imagen correlation*) o la *correlación de fase* (*phase correlation*). En último lugar, se muestra una breve introducción a la probabilidad bayesiana, utilizada posteriormente en el cálculo de incertidumbres.

§ 5.2. Fundamentos de óptica paraxial

Figura 5.1: Refracción en una superficie esférica.

La trayectoria que describen los rayos de luz, figura 5.1, al entrar en una superficie esférica, se calcula utilizando la ley de Snell, ecuación 5.1.

$$n \sin I = n' \sin I' \quad (5.1)$$

donde n y n' son los coeficientes de refracción del medio inicial y final, respectivamente; I e I' son los ángulos de incidencia y refracción medidos sobre la normal al punto de contacto. Un rayo de luz, línea azul, incide sobre la superficie en el punto Q, el rayo es refractado en dirección al punto P' donde corta al eje óptico, a una distancia L' con respecto al punto O. Si no hubiese modificación de la trayectoria de los rayos, el rayo incidente cortaría al eje óptico en el punto P, a una distancia L del punto O.

El criterio de signo utilizado es el siguiente:

- Los radios son positivos si el centro se encuentra a la derecha de la superficie.
- Las distancias son positivas si se encuentran a la derecha de la superficie.
- Los ángulos de incidencia y refracción, I e I' , son positivos si el rayo tienen que girar en sentido horario para encontrar a la normal.
- Los ángulos de pendiente, U y U'^1 , son positivos si el rayo gira en sentido horario para alcanzar el eje óptico.

¹En óptica se suele utilizar la letra U para determinar los ángulos de la pendiente. Por su parte,

e.) La luz viaja de izquierda a derecha.

En la figura 5.1, todos los valores son positivos a excepción de U y U' . Las ecuaciones para trazar la trayectorias de los rayos se obtienen de la siguiente manera²:

- Utilizando el triángulo PAC:

$$CA = (R - L) \sen U \quad (5.2)$$

- Utilizando el triángulo QAC:

$$\sen I = \frac{CA}{R} \quad (5.3)$$

- Aplicando la ley de Snell:

$$\begin{aligned} n \sen I &= n' \sen I' \\ \sen I' &= \frac{n}{n'} \sen I = \frac{CA'}{R} \end{aligned} \quad (5.4)$$

- Teniendo en cuenta los triángulos CQP' y CQP, se determina el ángulo U' :

$$U' = U - I + I' \quad (5.5)$$

- Sustituyendo en las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$CA' = \frac{n}{n'} CA = \frac{n}{n'} \quad (5.6)$$

- Del triángulo P'A'C se obtiene finalmente la distancia L' :

$$L' = R - \frac{CA'}{\sen U'} \quad (5.7)$$

Por tanto, conociendo la pendiente del ángulo de entrada, U , y su intersección con el eje óptico, L , se determinan las variables U' y L' . Este proceso se aplica en todas las superficies del sistema logrando trazar la trayectoria del rayo de luz.

en metrología, también se usa la letra U para expresar la incertidumbre expandida. Consideramos que el uso del mismo símbolo no induce a confusión, y por eso se mantiene esta nomenclatura a lo largo de toda la memoria.

²Teniendo en cuenta el criterio de signos en cada caso.

La región paraxial de un sistema óptico, es una pequeña zona muy cercana al eje óptico en que los ángulos con que inciden y se refractan los rayos de luz son aproximadamente igual al valor de su seno o su tangente. Esta aproximación de primer orden, permite el cálculo de las propiedades del sistema de una forma rápida y sencilla. Las ecuaciones determinadas anteriormente se simplifican de la siguiente manera:

$$ca = (R - l)u \quad (5.8)$$

$$i = \frac{ca}{R} \quad (5.9)$$

$$i' = \frac{n}{n'}i \quad (5.10)$$

$$u' = u - i + i' \quad (5.11)$$

$$ca' = \frac{n}{n'}ca \quad (5.12)$$

$$l' = R - \frac{ca'}{u} \quad (5.13)$$

Desde este momento, para señalar que se trabaja en la región paraxial, se utilizarán las ecuaciones trigonométricas, calculadas en el apartado anterior, pero en *minúsculas*. Partiendo de las ecuaciones anteriores, se puede obtener la distancia l' en función de l , R , n y n' :

$$l' = \frac{ln'R}{(n' - n)l + nR} \quad (5.14)$$

Agrupando términos:

$$\frac{n'}{l'} = \frac{(n' - n)}{R} + \frac{n}{l} \quad (5.15)$$

El aumento está definido como:

$$m = \frac{h'}{h} = \frac{nl'}{n'l} \quad (5.16)$$

La potencia de una superficie óptica está definida por:

$$\phi = \frac{n' - n}{R} = (n' - n)C \quad (5.17)$$

donde C es la *curvatura*. Si una superficie tiene potencia positiva, el rayo lumínico convergerá hacia el eje óptico; si la potencia es negativa, el rayo se alejará del eje. Si el

radio de la superficie se mide en metros, la potencia se expresa en dioptrías.

5.2.1. Trazado de rayos a través de varias superficies

Figura 5.2: Relación entre la altura y y los ángulos u y u' .

Las ecuaciones anteriores se han de modificar para el trazado de los rayos en diferentes superficies. En la figura 5.2 se muestra cómo un rayo en la zona paraxial incide en la superficie a una altura y desde el eje óptico, y las distancias a las intersecciones con el eje l y l' , antes y después de la refracción.

En la región paraxial todas las superficies son planas y los ángulos se pueden aproximar a su seno o su tangente. Los ángulos u y u' se pueden aproximar de la siguiente manera:

$$u = \frac{-y}{l} \quad (5.18)$$

$$u' = \frac{-y}{l'} \quad (5.19)$$

$$l = \frac{-y}{u} \quad (5.20)$$

$$l' = \frac{-y}{u'} \quad (5.21)$$

Utilizando las ecuaciones anteriores y la ecuación 5.15:

$$\frac{n'u'}{y} = \frac{-(n' - n)}{R} + \frac{nu}{y} \quad (5.22)$$

Multiplicando la ecuación 5.22 por y se obtiene la pendiente después de la refracción:

$$n'u' = nu - y \frac{n' - n}{R} \quad (5.23)$$

Figura 5.3: Refracción de un rayo de luz de una superficie a otra.

En la figura 5.3 se muestran dos superficies de un sistema óptico separadas una distancia t . El ángulo del rayo después de la refracción en la primera superficie es u'_1 . La diferencia entre las alturas es igual a tu'_1 , por tanto la altura en la superficie segunda será:

$$y_2 = y_1 + tu'_1 = y_1 + \frac{tn'u'_1}{n'} \quad (5.24)$$

Particularizando la ecuación 5.22 para las superficies de la figura 5.3 se tiene:

$$n'_1 u'_1 = n_1 u_1 - y_1 \frac{n'_1 - n_1}{R_1} \quad (5.25)$$

$$n'_1 u'_1 = n_2 u_2 \quad (5.26)$$

$$n'_2 u'_2 = n_2 u_2 - y_2 \frac{n'_2 - n_2}{R_2} \quad (5.27)$$

5.2.2. Determinación de los focos y los puntos principales

En general, las distancias focales de un sistema óptico pueden ser fácilmente calculadas trazando un rayo paralelo al eje óptico a través del sistema. La *distancia focal efectiva*, efl^3 , y la *distancia focal posterior*, bfl^4 , se determinan a partir de la figura 5.4. Usualmente la

³Effective Focal Length

⁴Back Focal Length

distancia efl es equivalente a la *distancia focal del sistema*, f :

$$efl = \frac{-y_1}{u'_k} \quad (5.28)$$

$$bfl = \frac{-y_k}{u'_k} \quad (5.29)$$

Figura 5.4: Determinación del plano principal p_2 .

Para determinar la localización del foco anterior habría que girar el sistema y realizar el mismo proceso, obteniéndose la distancia focal anterior, ffl ⁵.

5.2.3. Diafragmas y pupilas

Se denomina *diafragma de apertura* a cualquier elemento que limita la cantidad de luz que pasa a través del sistema óptico. Normalmente éste se coloca detrás de las primeras lentes, con el fin de limitar la entrada de luz y controlar la calidad de la imagen. El *diafragma de campo* limita el tamaño de la imagen a formar. Las *pupilas* ayudan a determinar si un rayo entra o no dentro de un sistema óptico complejo. Por su parte, la *pupila de entrada* de un sistema óptico es la imagen del diafragma de apertura en el espacio objeto. Por tanto, se lanzarán *rayos principales* y horizontales de derecha a izquierda con el fin de determinar la imagen del diafragma de apertura. La *pupila de salida* es la imagen del diafragma de apertura en el espacio imagen. Para ello se trazan rayos principales de izquierda a derecha.

Asociados a estos conceptos se encuentran:

⁵Front Focal Length

- a.) *Rayo axial*, aquel que comienza en el plano objeto sobre el eje óptico y pasa por la altura máxima del diafragma de apertura.
- b.) *Rayo principal*, comienza a la altura del objeto y pasa por el diafragma de apertura a una altura igual a cero, es decir, corta al eje óptico.

En un sistema óptico existen varios elementos que pueden ser el diafragma de entrada, si se denotan por $y^{(k')}$ los diámetros de los posibles candidatos, $z^{(k)}$ el plano del diafragma, y $\mathbf{P}^{[k]}$ como la matriz que describe la trayectoria del rayo [82]

5.2.4. Aberraciones

Las aberraciones [139] se producen debido a la variación existente entre el comportamiento real de un sistema óptico y el comportamiento paraxial. Así para la determinación de las aberraciones se utiliza el trazado exacto de rayos y el trazado paraxial.

Seidel fue el primero en investigar y expresar las aberraciones primarias y en derivar expresiones para su determinación, por este motivo normalmente los defectos primarios que se presentan en una imagen suelen denominarse como *aberraciones de Seidel*.

Se supone un sistema simétrico con respecto al eje axial, por lo que se puede definir un objeto en el plano YZ , figura 5.5.

Se define un rayo proveniente del objeto, pasando por la abertura del sistema, coordenada polar (s, θ) . El rayo corta al plano de la imagen en las coordenadas (x', y') . Las ecuaciones que relacionan estos parámetros se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 x' &= A_1 s \sin \theta \\
 &+ B_1 s^3 \sin \theta + B_2 s^2 h \sin 2\theta + (B_3 + B_4) s h^2 \sin \theta + \\
 &+ C_1 s^5 \sin \theta + C_3 s^4 \sin 2\theta + (C_5 + C_6 \cos^2 \theta) s^3 h^2 \sin \theta + \\
 &+ C_9 s^2 h^3 \sin 2\theta + C_{11} s h^4 \sin \theta + D_1 s^7 \sin \theta + \dots
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned}
 y' &= A_1 s \cos \theta + A_2 h + \\
 &+ B_1 s^3 \cos \theta + B_2 s^2 h (2 + \cos 2\theta) + (3B_3 + B_4) s h^2 \cos \theta + B_5 h^3 + \\
 &+ C_1 s^5 \cos \theta + (C_2 + C_3 \cos 2\theta) s^4 h + (C_4 + C_6 \cos^2 \theta) s^3 h^2 \cos \theta + \\
 &+ (C_7 + C_8 \cos 2\theta) s^2 h^3 + C_{10} s h^4 \cos \theta + C_{12} h^5 + D_1 s^7 \cos \theta + \dots
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Figura 5.5: Modelo general para las aberraciones. Rayo que pasa por un objeto de altura h a través de una apertura, definida su posición como (s, θ) y la intersección con el plano imagen como (x', y') .

Los términos en A de los exponentes de s y h son igual a la unidad. En los términos de B el orden total de los exponentes es 3; en los términos en C el exponente total es de 5, y de 7 en los términos en D . Los términos están relacionados mediante la expresión:

$$\frac{(n+3)(n+5)}{8} - 1 \quad (5.32)$$

Los términos en A están relacionados con la aproximación paraxial o de primer orden. A_2 es la magnificación (h'/h) y A_1 es la medida transversal de la distancia que existe desde el foco paraxial al plano de la imagen. Todos los términos de las ecuaciones 5.30 y 5.31 en general se suelen denominar *aberraciones transversales* y representan las distancias que los rayos se desplazan con respecto a las ecuaciones con aproximación paraxial.

Los términos en B suelen llamarse de “*tercer orden*”, o de aberraciones de Seidel. B_1 es la aberración esférica, B_2 es la aberración de coma, B_3 es el astigmatismo, B_4 es Petzval y B_5 es la distorsión. Los términos en C corresponden con las aberraciones de quinto orden, y los términos en D con las de séptimo orden.

5.2.5. Aberración esférica

La aberración esférica es la variación de la posición del foco con la apertura del sistema óptico. Los rayos cercanos al eje cortan en posiciones cercanas al foco paraxial. A más altura del rayo con respecto al eje óptico, más se desplaza la posición del foco, para este rayo, figura 5.6.

Figura 5.6: *Aberración Esférica. Los rayos que más se alejan del eje óptico, más cerca de la lente intersecan con el eje óptico.*

A partir de la definición anterior se pueden definir, a su vez:

- Aberración Longitudinal Esférica*, distancia del foco paraxial al punto de corte de un rayo con el eje óptico.
- Aberración Transversal o Lateral*, igual que en el caso anterior, pero medido en el eje vertical.
- Aberración Esférica Marginal*, LA_m o TA_m , aberración producida por un rayo que pasa por el límite de apertura de una lente.

Para el cálculo de las aberraciones se trazan dos rayos: uno paraxial y otro trigonométrico, determinándose los puntos de corte, por ejemplo los puntos A y B , figura 5.6; se definen las distancias $l' = OA$ y $L' = OB$. La aberración esférica longitudinal se define como:

$$LA' = L' - l \quad (5.33)$$

Figura 5.7: Representación gráfica de la aberración esférica longitudinal, izquierda, y transversal derecha.

La aberración esférica transversal se relaciona con la longitudinal mediante la siguiente expresión:

$$TA' = -LA' \tan U'_R = -(L' - l') \tan U'_R \quad (5.34)$$

donde U'_R es el ángulo que forma el rayo con el eje óptico. Utilizando este criterio de signos, una aberración negativa suele denominarse como *aberración esférica subcorregida*; una aberración positiva *aberración esférica sobrecorregida*.

Para una rápida interpretación de este tipo de aberraciones, se suelen representar gráficamente: la aberración esférica longitudinal en función de la altura del haz de luz; la aberración esférica transversal en función de la tangente del ángulo de salida de la lente, figura 5.7.

La medida de la aberración transversal está directamente relacionada con el nivel de la borrosidad de la imagen.

5.2.6. Coma

Se define como la variación del aumento o magnificación con la abertura de la lente. Los rayos A y B , figura 5.8, se corresponden con rayos extremos para la lente. La distancia del punto P a la intersección AB , se llama *coma tangencial de la lente*, dada por:

$$Coma_T = H'_{AB} - H'_P \quad (5.35)$$

Figura 5.8: *Coma tangencial.* La altura de enfoque varía con la altura entre el eje óptico y el rayo incidente.

donde H'_{AB} es la altura de la intersección y H'_P la altura del rayo principal.

En la figura 5.9 izquierda, se muestran las diferentes posiciones de los rayos en la abertura exterior de la lente, de A a G , y en una zona más adentro de la lente, A' , B' , C' , D' . En la parte de la derecha de la figura 5.9, se muestra la imagen de los puntos anteriormente mencionados. La distancia PAB se llama *coma tangencial*. La distancia PCD se llama *coma sagital*, siendo su valor un tercio de la coma tangencial. La mitad de la energía transmitida por la lente se concentra en el triángulo que va de P hasta CD en el plano de la imagen. La coma sagital es un indicador sensiblemente mejor que la coma tangencial del tamaño de la borrosidad de la imagen. El efecto de la coma es especialmente distorsionante, ya que se pierde la localización dentro de la imagen. Este tipo de aberración varía con la forma de la lente y con la posición de cualquier diafragma que limite el haz de luz. En sistemas con simetría axial no existe coma en el eje.

5.2.7. Astigmatismo y curvatura de campo

Es preciso hacer algunas indicaciones previas sobre los términos *sagital* y *tangencial*. En general se utiliza un sistema de coordenadas en el cual el eje z es el eje óptico y los ejes x e y forman el plano transversal o sagital del sistema. Todos los esquemas dibujados anteriormente se han dibujado en el *plano tangencial o meridional*, es decir en el plano yz . Dentro de este plano se dibujan los rayos meridionales o tangenciales, cualquier otro rayo

Figura 5.9: Localización de los rayos en la abertura de la lente, izquierda, y su posterior imagen, derecha.

que esté fuera del plano meridional se denomina *rayo oblicuo*. Por su parte, al plano xz se le suele denominar *plano sagital*.

Cuando existe astigmatismo, la imagen de un punto no es un punto sino dos líneas separadas, figura 5.10.

Figura 5.10: Astigmatismo.

La cantidad de astigmatismo es función de la potencia y la forma de la lente, y de la distancia de la abertura o diafragma que limita el haz de luz que pasa a través de la misma.

Todo sistema tiene asociado una *curvatura de campo*, *curvatura de Petzval*, que es función del índice de refracción y de la curvatura de la lente. Si no existe astigmatismo, la

imagen sagital y tangencial coinciden en la *superficie de Petzval*.

En un sistema sin ningún tipo de aberraciones, existe una correspondencia entre los puntos de las superficies objeto e imagen. En la aproximación paraxial, el plano objeto tendrá como imagen otro plano. Partiendo de una superficie esférica S_o , tiene como imagen otro segmento esférico S_i . Si la superficie S_o se aplanar convirtiéndose en un plano, cada punto imagen se moverá hacia la lente siguiendo el rayo principal correspondiente y formando la *superficie de Petzval*. Para una lente convergente la superficie se curva hacia la lente, mientras que para una divergente se curva alejándose de la lente. El desplazamiento Δx con respecto al plano imagen paraxial, a una altura y_i , viene dado por:

$$\Delta x = \frac{y_i^2}{2} \sum_{j=1}^m \frac{n_j}{f_j} \quad (5.36)$$

Figura 5.11: *Superficie de Petzval.*

5.2.8. Aberraciones cromáticas

El índice de refracción (n) varía con la longitud de onda (λ), por tanto las propiedades de un sistema variarán con λ . El índice de refracción disminuye cuando λ aumenta, por tanto el foco para una lente que trabaje, por ejemplo con luz azul, estará más cerca que el de la misma lente con luz roja, es decir, existe un desplazamiento axial.

La imagen de un punto es un punto luminoso con un halo. Si la frecuencia está enfocada

genera un punto brillante. El halo está formado por las frecuencias fuera de foco.

5.2.9. Aberraciones de tercer orden

Las aberraciones primarias son defectos de enfoque o de cambio de tamaño que varían linealmente con la abertura o la oblicuidad, como sucede con la aberración cromática paraxial.

En las aberraciones los términos en y^3 , semiapertura o separación entre los rayos, no tienen componentes en h , altura de la imagen, y se corresponden con los términos de aberración esférica. Los términos y^2h corresponden a la coma. El término yh^2 corresponde al astigmatismo y la curvatura de campo, siendo los términos en h^3 los correspondientes a la distorsión.

Las aberraciones de tercer orden pueden ser calculadas a partir del trazado de dos rayos paraxiales. En las siguientes ecuaciones, los rayos axiales no tendrán subíndices, $y, u, i \dots$, mientras que el rayo paraxial principal llevará un subíndice $p, y_p, u_p, i_p \dots$. El invariante óptico, Inv , se determina a partir de los datos obtenidos por los dos rayos en la superficie de interés.

$$Inv = y_p n u - y n u_p = h n'_k u'_k \quad (5.37)$$

La imagen final, punto de corte en el plano de la imagen con el rayo principal, se determina como sigue:

$$h = \frac{Inv}{n'_k u'_k} \quad (5.38)$$

donde n'_k y u'_k son el índice de refracción y la pendiente después de salir a través de la última superficie.

5.2.10. Formulación matricial de la óptica geométrica

En la aproximación paraxial un rayo viene determinado por la altura del ángulo con respecto al eje óptico $[y \ \theta]^T$.

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

La matriz de 2×2 se llama *matriz de transferencia* [82, 97]. Los coeficientes $[A \ B \ C \ D]$ varían dependiendo de las condiciones de trabajo:

- a.) Propagación en el espacio libre. Existe una variación en la altura pero el ángulo y el coeficiente de refracción se mantienen constantes. Se denomina con la letra $t = z_2 - z_1$ a la distancia recorrida.

$$\mathbf{M} = \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

- b.) Refracción en una superficie esférica. Las alturas, los coeficientes de refracción y los ángulos se relacionan mediante la expresión:

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

- c.) Representación de una lente simple. Utilizando las ecuaciones 5.40 y 5.41 se obtiene la matriz de transferencia de una lente:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{21} \begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_3}{n_3 R_2} & \frac{n_2}{n_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 R_1} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

La matriz $\mathbf{M}_{21}$ es el producto de matrices $\mathbf{T}$ y $\mathbf{R}$. Sabiendo que $\det \{\mathbf{R}\} = \det \{\mathbf{T}\} = 1$, entonces $\det \{\mathbf{M}_{21}\} = 1$. Para que se verifiquen las condiciones anteriores, se utilizan en las ecuaciones anteriores $n\theta$ en vez de únicamente θ . Si se toma $t=0$ la matriz $\mathbf{M}_{21}$ se transforma en:

$$\mathbf{M}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{f} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

En el aire se obtienen los siguientes resultados:

- c.i.) Un rayo horizontal a una altura y_1 , al pasar por una lente delgada, corta al eje z a una distancia f , $\begin{bmatrix} y_1 & \frac{-y_1}{f} \end{bmatrix}^T$
- d.) Reflexión en un espejo esférico. Si R es el radio del espejo esférico, la matriz de transferencia queda definida por 5.41 y la condición $n_2 = -n_1$:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & -1 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

- e.) Reflexión en un espejo plano. En este caso la altura no cambia, pero los ángulos cambian de sentido:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

- f.) Transmisión a través de una lente delgada. En este caso la altura no cambia y los ángulos se relacionan con la altura inicial y la distancia focal de la lente como se indica:

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{y_1}{f} \quad (5.46)$$

Por tanto, la matriz de transferencia será:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

- g.) Transmisión a través de una placa plano paralela. Suele aparecer en sistemas ópticos como compensador de distancias. Su matriz es una particularización de la lente.

$$\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} 1 & t \frac{n_1}{n_2} \\ 0 & \frac{n_1}{n_3} \end{Bmatrix} \quad (5.48)$$

Para obtener la *matriz de transferencia del sistema*, se multiplicarán las matrices de transferencia en orden inverso al que son atravesadas por la luz:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_n \mathbf{M}_{n-1} \cdots \mathbf{M}_3 \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \quad (5.49)$$

5.2.11. Puntos y planos cardinales

Se considera un sistema de lentes en el aire que está representado por una matriz de transferencia entre los puntos V_1 y V_2 , figura 5.12. La matriz de transferencia del sistema será:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + vc & b - au + v(d - cu) \\ c & d - cu \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

Teniendo en cuenta que el determinante de la matriz es igual a uno, y comparando con la formulación de Newton, el sistema óptico se puede asemejar a una lente en la que

Figura 5.12: Relación entre los rayos del espacio objeto y el espacio imagen.

la distancia focal es igual a $f = \frac{-1}{c}$ y la localización de los puntos principales H_1 en $z = z_1 + u_p$ y H_2 en $z = z_2 + v_p$ donde:

$$u_p = \frac{d-1}{c} \quad (5.51)$$

$$v_p = \frac{1-a}{c} \quad (5.52)$$

Así la ecuación de Newton quedará:

$$(f - v_p)(u_p + f) = f^2 \quad (5.53)$$

A partir de las ecuaciones anteriores se pueden obtener las ampliaciones lineal y angular:

$$m = A = \frac{v - v_p}{u - u_p} \quad (5.54)$$

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{1}{m} \quad (5.55)$$

Los planos principales $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$, normales al eje óptico z , pasan por los puntos H_1 y H_2 , son planos en los que la ampliación es igual a uno y son planos conjugados. Sustituyendo

los valores de $u = u_p$ y $v = v_p$ en la ecuación 5.50 se obtiene:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

Como se puede apreciar, la amplificación lineal y angular son iguales a uno ($A = 1$) y los planos $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son conjugados ($B = 0$). Los puntos H_1 , H_2 , F_1 , F_2 , son cuatro de los seis *puntos cardinales* que representan un sistema de lentes para su tratamiento por trazado de rayos. Los otros dos *puntos nodales* N_1 y N_2 para lentes que están en el aire coinciden con los puntos F_1 y F_2 . En resumen, las posiciones de los puntos cardinales son:

- Puntos principales: H_1 en $z = (d - 1)/c + z_1$, H_2 en $z = (1 - a)/c + z_2$.
- Puntos focales: F_1 en $z = d/c + z_1$, F_2 en $z = -a/c + z_2$

De las relaciones anteriores se puede ver que $F_1 H_1 = F_2 H_2 = -1/c = f$ por lo que cada distancia focal está relacionada con su punto principal correspondiente. Con el desarrollo anterior se ha simplificado un sistema de lentes, a una lente delgada de distancia focal f .

5.2.12. Formación de imágenes

Un punto en el *espacio imagen* tiene su *conjugado* en el espacio. Es decir, cualquier rayo que se trace desde un punto en el espacio objeto, tiene que llegar al mismo punto en el *espacio imagen*, figura 5.12. El ángulo θ_2 es independiente de θ_1 , por lo que el factor $B = 0$; el determinante de la matriz $\mathbf{M}_{21} = 1$, por tanto $AD = 1$. La *amplificación lineal* producida por la lente es:

$$m = \frac{y_2}{y_1} = A \quad (5.57)$$

Un rayo que pase por un punto $(0, z_O)$ con un ángulo θ_1 , pasará por $(0, z_I)$ con un ángulo θ_2 . El cociente entre los ángulos se denomina *Amplificación angular*:

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = D \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{m} \frac{n_1}{n_2} \quad (5.58)$$

Cuando $n_1 = n_2$ el aumento lineal es inversamente proporcional al aumento angular.

5.2.13. Sensibilidad y tolerancias

A la hora de estudiar cualquier sistema óptico hay que tener en cuenta los errores producidos tanto en la fabricación como en el montaje de las lentes. Utilizando las matrices de transferencia es posible estudiar las variaciones en la inclinación, descentrado y desenfocado.

Partiendo de una superficie inclinada un ángulo γ , y linealizando la ley de Snell, se obtiene:

$$n_1 (\theta_1 - \gamma) = n_2 (\theta_2 - \gamma) \quad (5.59)$$

Resolviendo para θ_2 y teniendo en cuenta que la altura del rayo no varía, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

Los defectos de inclinación y descentrado se introducen mediante un vector de error respecto al eje óptico:

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta \theta_1 \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

Existen dos alternativas para analizar estos errores:

- Utilizar matrices 2×2 , y vectores para los errores, ecuación 5.62.
- Utilizar matrices 3×3 en coordenadas homogéneas, ecuación 5.63.

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta \theta_1 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \theta_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \Delta y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \Delta \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

En el caso de que existiera algún desplazamiento en el eje z , el error estaría determinado

mediante:

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & \Delta z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} + \begin{bmatrix} 0 & a_{11} \\ 0 & a_{21} \end{bmatrix} \Delta z \quad (5.64)$$

Si el sistema queda determinado por la matriz $\mathbf{S} = \mathbf{A}^{(\mathbf{N})} \dots \mathbf{A}^{(1)}$, y $\mathbf{A}^{(\mathbf{k})}$ representa la matriz del subsistema k -ésimo, la matriz de error queda definida por [82]:

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbf{A}^{(\mathbf{N})} \dots \mathbf{A}^{(\mathbf{k}-1)} \begin{bmatrix} 0 & a_{11}^{(\mathbf{k})} \Delta Z \\ 0 & a_{21}^{(\mathbf{k})} \Delta Z \end{bmatrix} \mathbf{A}^{(\mathbf{k}+1)} \dots \mathbf{A}^{(1)} \quad (5.65)$$

§ 5.3. Sistemas ópticos

Una vez que se ha expuesto la teoría paraxial, que es de uso habitual en la mayoría de las aplicaciones o sistemas ópticos, se muestran algunos de las configuraciones ópticas utilizadas en las máquinas de visión.

5.3.1. Lentes varifocales y zoom

Las lentes *varifocales* son aquellas que tienen una distancia focal variable [82, 97, 101, 139]. Estas lentes se utilizan, por ejemplo, en proyectores de transparencias. Un zoom es un sistema de lentes donde su distancia focal efectiva también puede cambiar, pero las lentes se mantienen con un enfoque nítido.

Cuando cambian los aumentos en el zoom, el sistema tiene que compensarse de tal manera que la distancia focal no varíe con respecto al soporte de las lentes. La *compensación mecánica* se realiza moviendo simultáneamente dos de las lentes, una cambia la distancia focal y la otra mantiene la imagen en un plano fijo. En general estos movimientos no son lineales entre ellos, por lo que se necesitan un sistema complejo de engranajes o levas.

La *compensación óptica* se obtiene cuando al menos tres puntos a lo largo del rango del zoom tienen el mismo plano focal, pero con diferente magnificación. El desenfoque entre los tres puntos es pequeño. Este tipo de compensación necesita tres subsistemas para la formación de la imagen. Se obtienen mejores resultados si se utilizan cuatro grupos de lentes para obtener cuatro puntos.

Existen distintos tipos de zoom, pero la mayoría se diseñan siguiendo los mismos principios básicos.

5.3.2. Objetivos

Actualmente se pueden encontrar en el mercado dos tipos de objetivos para microscopía y máquinas de visión [39]:

- *Objetivos de corrección finita.*
- *Objetivos de corrección infinita.*

Los objetivos finitos forman la imagen a una distancia de la montura del objetivo [60]. En la actualidad la mayoría de los sistemas modernos de microscopía están corregidos a infinito. Para formar la imagen, los rayos deben converger en el plano imagen, por lo que es necesario un sistema adicional, *lente de tubo*. La unión del objetivo infinito y de la lente de tubo es equivalente a un objetivo finito. Un sistema finito tiene más probabilidad de formar aberraciones. Para obtener un mejor rendimiento del sistema infinito los fabricantes tienden a aumentar la *distancia parafocal*, definida como la distancia que hay desde la montura del objetivo hasta el punto de trabajo.

5.3.3. Objetivos telecéntricos

Un objetivo telecéntrico se diseña para la medida de objetos tridimensionales [97]. Esto requiere la ausencia de distorsión en el campo de visión y que la magnificación sea independiente de la profundidad a la que se encuentre el objeto a medir. Esto se puede obtener limitando los rayos que forman la imagen, colocando una pequeña abertura en el plano focal derecho del primer sistema de lentes, figura 5.13.

Tomando paralelos todos los ejes de los conos de luz, puntos P y P_1 , se observa que el aumento no depende de la profundidad a la que están los puntos, eliminando los efectos de perspectiva.

$$P.F. \approx \frac{2,4\lambda f^2}{D^2} = 2,4\lambda(f/\#)^2 \quad (5.66)$$

El diámetro límite de la abertura está determinado por la expresión 5.66, así un objeto puede estar fuera de foco pero mantiene su forma. El problema que pueden presentar este tipo de objetivos es que debido a la pequeña abertura que se utiliza en el plano focal, la cantidad de luz que forma la imagen es pequeña, pudiéndose producir bajo rendimiento de la luz. Si se tienen en cuenta los efectos de la distorsión y las aberraciones, el diseño del sistema se complica bastante.

Figura 5.13: Principio de medida de un sistema telecéntrico

§ 5.4. Óptica de Fourier

Más allá de la potencia matemática del análisis de Fourier, la transformada de Fourier muestra cómo estudiar los procesos ópticos en el dominio de la frecuencia. Desde este punto de vista es muy importante, ya que da una nueva perspectiva física a la hora de resolver diferentes problemas, en especial los de difracción, no tratados.

En esta sección se enumeran algunas propiedades fundamentales para entender los sistemas ópticos como la PSF (“*point spread function*”); también dará lugar a otras formas de afrontar problemas de segmentación de imágenes como la *correlación de fase*, o el degradado de imágenes, *deblurring*.

En último lugar, se muestra la técnica de la “correlación de imágenes digitales”, *digital imagen correlation*, utilizada fundamentalmente para la determinación de deformaciones en sólidos, aunque con utilidades matemáticas suficientes para poder generalizarlas a cualquier detección de formas.

5.4.1. Sistemas lineales invariantes

Un sistema transforma una función $f(x)$ en una función de salida $g(x)$ mediante un operador $O[x]$ [10, 57, 58, 64, 97, 101, 134, 153, 139]:

$$O[f(x)] = g(x) \quad (5.67)$$

Si el sistema es lineal se cumple:

$$O[f_1(x) + f_2(x)] = O[f_1(x)] + O[f_2(x)] = g_1(x) + g_2(x) \quad (5.68)$$

La propiedad de desplazamiento impone que cuando existe un desplazamiento en la función de entrada, en la función de salida se produce un desplazamiento:

$$O[f(x + \Delta x)] = g(x + \Delta x) \quad (5.69)$$

Así pues, un sistema lineal invariante es aquel que es lineal y posee invarianza frente a los desplazamientos.

$$O[\delta(x - x_0)] = PSF(x - x_0) = h(x - x_0) \quad (5.70)$$

La respuesta de un único punto en un sistema lineal se denomina en óptica Función de Dispersión del Punto⁶.

Si se piensa en la función $f(x)$ como una distribución de puntos, la respuesta será la suma de todas las respuestas individuales de cada punto. Matemáticamente esta operación se llama *convolución*. La función de dispersión del punto del sistema lineal invariante viene dada por $h(x)$, la función de salida es $g(x)$ y la de entrada es $f(x)$:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) h(x - \alpha) d\alpha \equiv f(x) * h(x) \quad (5.71)$$

Una propiedad importante de los sistemas lineales invariantes es la posibilidad de crear una función de dispersión del punto de cada componente del sistema y hacer la convolución de todas a la vez:

$$h_{sis}(x) = h_1(x) * h_2(x) * \dots * h_N(x) \quad (5.72)$$

⁶PSF en inglés

La transformada de Fourier descompone una función en frecuencias. Se van a utilizar funciones que dependan de las coordenadas (x, y) por lo que se descompondrán en sus correspondientes frecuencias espaciales (ξ, η) . La transformada de Fourier se puede denotar como $FT\{\}$, escribiéndose en un sistema unidimensional:

$$F(\xi) = FT(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \quad (5.73)$$

donde ξ es la frecuencia espacial en ciclos por distancia. La función inversa viene dada por:

$$f(x) = FT^{-1}(F(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \quad (5.74)$$

En dos dimensiones la transformada de Fourier se puede escribir como:

$$F(\xi, \eta) = FT(f(x, y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i \xi x} e^{-2\pi i \eta y} dx dy \quad (5.75)$$

$$f(x, y) = FT^{-1}(F(\xi, \eta)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) e^{2\pi i \xi x} e^{2\pi i \eta y} d\xi d\eta \quad (5.76)$$

5.4.2. Restauración de imágenes. Modelo de degradación y mejora

El modelo de degradación y mejora propuesto por González y Woods, [46, 56] viene dado, matemáticamente, por la siguiente expresión:

$$g(x, y) = H[f(x, y)] + n(x, y) \quad (5.77)$$

La imagen inicial, $f(x, y)$, es degradada por la función H , que conjuntamente con un término aditivo de ruido, $n(x, y)$, produce la imagen degradada $g(x, y)$. El objetivo fundamental de la restauración es la obtención de la imagen original estimada $\hat{f}(x, y)$, ésta se aproximará en mayor medida a $f(x, y)$ cuanto mayor sea el conocimiento de la función de degradado y de ruido.

Si H es un operador lineal invariante en dominio espacial, la imagen degradada se define por:

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y) \quad (5.78)$$

la operación $*$ es la convolución. Una de las propiedades fundamentales de esta operación se enuncia: “*la transformada de Fourier de la convolución es igual al producto de las transformadas de Fourier de cada una de las funciones*”. Por tanto, la ecuación anterior 5.78 se convierte en:

$$G(\eta, \xi) = H(\eta, \xi) F(\eta, \xi) + N(\eta, \xi) \quad (5.79)$$

donde los términos de las funciones en mayúscula representan la transformada de Fourier de la función correspondiente. Las funciones $H(\eta, \xi)$ algunas veces se denominan “*función de transferencia óptica*” u “*optical transfer function*” (OTF). Por su parte $h(x, y)$ en el dominio del espacio se suele denominar “*función de dispersión del punto*” o “*point spread function*” (PSF).

$$H(\eta, \xi) = |H(\eta, \xi)| e^{-i\phi(\eta, \xi)} \quad (5.80)$$

donde $|H(\eta, \xi)|$ es la “*función de transferencia de modulación*” (MTF) y $\phi(\eta, \xi)$ la “*función de transferencia de fase*” (PTF). La MTF define el cambio de contraste para cada una de las frecuencias espaciales. El contraste se define por:

$$\text{Contraste} = \frac{I_{\text{máx}} - I_{\text{mín}}}{I_{\text{máx}} + I_{\text{mín}}} \quad (5.81)$$

donde $I_{\text{máx}}$ e $I_{\text{mín}}$ es el máximo de irradiancia y el mínimo de irradiancia, respectivamente. Cuando la MTF disminuye a una determinada frecuencia espacial, el contraste disminuye. La reducción del contraste implica un aumento de la borrosidad y, por tanto, una disminución de la resolución en imagen.

Para restaurar una imagen degradada se puede ignorar el ruido, y estimar la función inicial como:

$$\hat{F}(\eta, \xi) = \frac{G(\eta, \xi)}{H(\eta, \xi)} \quad (5.82)$$

Posteriormente se obtiene $\hat{f}(x, y)$ haciendo la transformada inversa de Fourier. A esta aproximación se llama filtrado inverso. Si se tiene el ruido en consideración:

$$\hat{F}(\eta, \xi) = F(\eta, \xi) + \frac{N(\eta, \xi)}{H(\eta, \xi)} \quad (5.83)$$

5.4.3. *Phase correlation*

La relación que existe entre dos imágenes, una de las cuales se ha trasladado, rotado y escalado, está dada por las propiedades de traslación y cambio de escala de la transformada de Fourier [128]. Sean f_1 y f_2 dos imágenes que solo difieren en un desplazamiento (x_0, y_0)

$$f_2(x, y) = f_1(x - x_0, y - y_0) \quad (5.84)$$

Sus correspondientes transformadas de Fourier, F_1 y F_2 , se relacionan:

$$F_2(\xi, \eta) = e^{-j2\pi(\xi x_0 + \eta y_0)} * F_1(\xi, \eta) \quad (5.85)$$

El *cross power spectrum* de dos imágenes con transformadas de Fourier F y F' se define como:

$$\frac{F(\xi, \eta) F'^*(\xi, \eta)}{|F(\xi, \eta) F'(\xi, \eta)|} = e^{j2\pi(\xi x_0 + \eta y_0)} \quad (5.86)$$

donde F^* es la función compleja conjugada de F .

Sea $f_2(x, y)$ la imagen $f_1(x, y)$ rotada θ_0 y traslada (x_0, y_0) , por tanto:

$$f_2(x, y) = f_1(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0 - x_0, -x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0 - y_0) \quad (5.87)$$

Aplicando las propiedades de la transformada de Fourier:

$$F_2(\xi, \eta) = e^{-j2\pi(\xi x_0 + \eta y_0)} F_1(\xi \cos \theta_0 + \eta \sin \theta_0, -\xi \sin \theta_0 + \eta \cos \theta_0) \quad (5.88)$$

Los módulos en ambas imágenes son iguales, ecuación 5.88, por lo que:

$$M_2(\xi, \eta) = M_1(\xi \cos \theta_0 + \eta \sin \theta_0, -\xi \sin \theta_0 + \eta \cos \theta_0) \quad (5.89)$$

Si se supone que la imagen f_1 es la imagen escalada de f_2 con factores de escala (a, b)

en las direcciones x e y . Según las propiedades de la transformada de Fourier:

$$F_2(\xi, \eta) = \frac{1}{|ab|} F_1\left(\frac{\xi}{a}, \frac{\eta}{b}\right) \quad (5.90)$$

Utilizando escalas logarítmicas en los ejes, el movimiento se reduce a una traslación:

$$F_2(\log \xi, \log \eta) = F_1(\log \xi - \log a, \log \eta - \log b) \quad (5.91)$$

es decir:

$$F_2(x, y) = F_1(x - c, y - d) \quad (5.92)$$

donde $x = \log \xi$, $y = \log \eta$, $c = \log a$ y $d = \log b$. La traslación (c, d) se determina utilizando las técnicas de la correlación de fase, y la escala (a, b) se puede determinar a partir de la traslación (c, d) :

$$a = e^c \quad (5.93)$$

$$b = e^d \quad (5.94)$$

Si (x, y) está escalado a $(x/a, y/b)$ la representación polar será:

$$\rho_1 = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad (5.95)$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}(y/x) \quad (5.96)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \left(\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{a} (x^2 + y^2)^{1/2} = \frac{\rho_1}{a} \end{aligned} \quad (5.97)$$

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \tan^{-1}((x/a) / (y/b)) \\ &= \tan^{-1}(y/x) = \theta_1 \end{aligned} \quad (5.98)$$

Conociendo todo lo anterior y teniendo en cuenta la convolución que existe al pasar la imagen por un sistema, se tiene:

$$F_2(\xi, \eta) = F_1(\xi, \eta) \cdot H(\xi, \eta; x, y) \quad (5.99)$$

$$H(\xi, \eta; x, y) = \frac{F_2(\xi, \eta)}{F_1(\xi, \eta)} \quad (5.100)$$

$$= \frac{|ab| F_2(\xi, \eta)}{F_1(\xi/a, \eta/b)} \quad (5.101)$$

5.4.4. *Digital imagen correlation*

El principio de la “*Digital Imagen Correlation*” (DIC) consiste en relacionar o igualar dos conjuntos de imágenes antes y después de una deformación [7, 118]. Para ello se utilizan dos referencias diferentes: la intensidad del píxel y su posición en la imagen. Esta división de referencias se volverá a utilizar en la sección 7.6. Se definen varias áreas de interés o conjuntos de puntos en la imagen inicial de $(2M + 1) \times (2M + 1)$, conjuntos de intensidades y posiciones. Una vez que se conoce la localización del conjunto en la imagen deformada, mediante una transformación de coordenadas u otro método, se pueden determinar los desplazamientos de los mismos, a partir del coeficiente de correlación de las intensidades.

Como la deformación se realiza en entornos pequeños, se podría asumir que el conjunto inicial se transforma en el final mediante una transformación afín. La transformada afín preserva la condición de paralelismo [63, 140, 145], permitiendo: traslaciones, rotaciones, escalado, estiramientos y deslizamientos, tanto verticales como horizontales. Una generalización de la transformada afín es la transformación proyectiva, también llamada perspectiva u homografía. Este tipo de transformación preserva las líneas rectas. En general, en una cámara no se mantienen las líneas rectas, por lo que hay que introducir la distorsión radial [63], como se puede ver, por ejemplo, en la trazabilidad de tamices [33].

En general, la transformación se puede expresar como:

$$x'_i = x_i + \xi(x_i, y_j) \quad (5.102)$$

$$y'_i = y_i + \eta(x_i, y_j) \quad (5.103)$$

Si se admiten traslaciones, rotaciones, deslizamientos y sus posibles combinaciones se puede utilizar:

$$\xi_1(x_i, y_j) = u + u_x \Delta x + u_y \Delta y \quad (5.104)$$

$$\eta_1(x_i, y_j) = v + v_x \Delta x + v_y \Delta y \quad (5.105)$$

En el caso anterior las incógnitas a determinar vienen dadas por el vector $\mathbf{P}_1 = [u \ u_x \ u_y \ v \ v_x \ v_y]^T$. Para estados más complicados se puede utilizar una función de segundo orden:

$$\xi_2(x_i, y_j) = u + u_x \Delta x + u_y \Delta y + \frac{1}{2} u_{xx} \Delta x^2 + \frac{1}{2} u_{yy} \Delta y^2 + u_{xy} \Delta x \Delta y \quad (5.106)$$

$$\eta_2(x_i, y_j) = v + v_x \Delta x + v_y \Delta y + \frac{1}{2} v_{xx} \Delta x^2 + \frac{1}{2} v_{yy} \Delta y^2 + v_{xy} \Delta x \Delta y \quad (5.107)$$

En las ecuaciones anteriores las incógnitas a determinar vienen dadas por el vector:

$$\mathbf{P}_2 = [u \ u_x \ u_y \ u_{xx} \ u_{yy} \ u_{xy} \ v \ v_x \ v_y \ v_{xx} \ v_{yy} \ v_{xy}]^T$$

En todos los casos anteriores se ha supuesto:

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_i - x_0 \\ \Delta y &= y_i - y_0 \end{aligned} \quad (5.108)$$

Hay diferentes tipos de criterios de correlación, aunque los que presentan un mejor rendimiento frente al ruido y las variaciones en la iluminación [117] son:

$$C_{ZNCC} = \sum_{i=-M}^M \sum_{j=-M}^M \frac{[f(x_i, y_j) - f_m] [g(x'_i, y'_j) - g_m]}{\Delta f \Delta g} \quad (5.109)$$

$$C_{ZNSSD} = \sum_{i=-M}^M \sum_{j=-M}^M \left[\frac{(f(x_i, y_j) - f_m)}{\Delta f} - \frac{g(x'_i, y'_j) - g_m}{\Delta g} \right]^2 \quad (5.110)$$

donde:

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \sqrt{\sum_{i=-M}^M \sum_{j=-M}^M [f(x_i, y_j) - f_m]^2} \\
\Delta g &= \sqrt{\sum_{i=-M}^M \sum_{j=-M}^M [g(x'_i, y'_j) - g_m]^2} \\
f_m &= \frac{1}{(2M+1)^2} \sum_{i=-M}^M \sum_{j=-M}^M f(x_i, y_j) \\
g_m &= \frac{1}{(2M+1)^2} \sum_{i=-M}^M \sum_{j=-M}^M g(x'_i, y'_j)
\end{aligned}$$

Estos coeficientes de correlación se calculan para las diferentes posiciones de los píxeles. Al producirse una deformación, estas posiciones varían siendo necesario la utilización de interpolaciones para determinar posiciones subpíxel. Para el píxel central de un sistema de 3×3 el coeficiente de correlación se puede tomar como una función cuadrática.

$$C(x_i, y_j) = a_0 + a_1 x_i + a_2 y_j + a_3 x_i^2 + a_4 x_i y_j + a_5 y_j^2 \quad (5.111)$$

El desplazamiento del centro del conjunto, (u, v) , se puede definir a partir de la localización del máximo del coeficiente de correlación. Con la primera derivada, en x e y , se consigue la primera aproximación de la posición del centro del conjunto:

$$\frac{\partial C(x_i, y_j)}{\partial x} = a_1 + 2a_3 x + a_4 y = 0 \quad (5.112)$$

$$\frac{\partial C(x_i, y_j)}{\partial y} = a_2 + 2a_5 y + a_4 x = 0 \quad (5.113)$$

por tanto:

$$x = \frac{2a_1 a_5 - a_2 a_4}{a_4^2 - 4a_3 a_5} \quad (5.114)$$

$$y = \frac{2a_2 a_3 - a_1 a_4}{a_4^2 - 4a_3 a_5} \quad (5.115)$$

Las incógnitas dependerán de la transformación a aplicar, $\mathbf{P}_1$ o $\mathbf{P}_2$. Partiendo de un vector inicial $\mathbf{P}_0$, el coeficiente de correlación puede desarrollarse en un entorno de $\mathbf{P}_0$

como una serie de Taylor:

$$C(\mathbf{P}) = C(\mathbf{P}_0) + \nabla C(\mathbf{P}_0)(\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{P} - \mathbf{P}_0)^T \nabla \nabla C(\mathbf{P}_0)(\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) \quad (5.116)$$

Haciendo la primera derivada e igualando a cero se obtendrá el extremo buscado, según el criterio de correlación elegido:

$$\nabla \nabla C(\mathbf{P}_0)(\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) = -\nabla C(\mathbf{P}_0) \quad (5.117)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 - \frac{\nabla C(\mathbf{P}_0)}{\nabla \nabla C(\mathbf{P}_0)}$$

El problema que ahora se presenta es el elevado tiempo de cálculo que se necesita para determinar el Hessiano.

$$\nabla \nabla C(\mathbf{P}_0) = \left(\frac{\partial^2 C}{\partial P_i \partial P_j} \right) \quad (5.118)$$

§ 5.5. Introducción a la estadística bayesiana

La estadística es una de las más importantes herramientas para la investigación. En esta tesis se utiliza la estadística bayesiana por la semejanza que tiene con la transformada de Fourier: su maravillosa capacidad de actualización y adaptación. Con esta sección se quiere hacer un resumen de los conceptos que más tarde se utilizarán [6, 9, 23, 53, 84, 86, 135, 143].

La expresión de probabilidad más conocida es debida a Laplace, y define la probabilidad como el cociente entre los casos favorables y los casos posibles:

$$p(x) = \frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Posibles}} \quad (5.119)$$

Partiendo de los axiomas básicos de la probabilidad y de la ecuación anterior, se deduce la probabilidad condicionada.

Los primeros axiomas que se tienen en cuenta son:

- a.) $P(A) \geq 0$, la probabilidad es positiva
- b.) $P(U) = 1$ la probabilidad del universo es igual a 1

Figura 5.14: Diagrama de Venn para la descripción de los conjuntos.

- c.) Si A y B son independientes $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- d.) $P(\phi) = 0$, la probabilidad del conjunto vacío es cero
- e.) $U = U \cup \phi$ y $\phi = U \cap \phi$ por tanto $1 = 1 + P(\phi)$
- f.) $P(\tilde{A}) = 1 - P(A)$
- g.) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(a) Intersección de Conjuntos.

(b) Probabilidad Condicionada.

Figura 5.15: Diagramas de Venn para la intersección y la probabilidad condicionada.

Si el universo se reduce al conjunto A, y A ocurre, la probabilidad de A debe ser igual a 1, probabilidad del universo. De la figura 5.15(b) se puede obtener la probabilidad de B dado A:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (5.120)$$

La probabilidad condicionada para eventos independientes es:

$$P(B|A) = P(B) \quad (5.121)$$

Formalmente se puede invertir los roles de A y B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (5.122)$$

Pero no se consideran los eventos de la misma manera. B es un evento no observable, la aparición o la no aparición de B no es observada. A es un evento observable que se produce con B o con su complementario $\tilde{B}$.

$$P(A \cap B) = p(B) \cdot p(A|B) \quad (5.123)$$

$$p(A \cap \tilde{B}) = p(\tilde{B}) \cdot p(A|\tilde{B}) \quad (5.124)$$

5.5.1. Teorema de Bayes

De la definición de probabilidad condicionada y de la probabilidad marginal,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (5.125)$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \tilde{B}) \quad (5.126)$$

utilizando las ecuaciones anteriores y la regla de la multiplicación, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A \cap \tilde{B})} \quad (5.127)$$

$$P(B|A) = \frac{p(B) \cdot p(A|B)}{p(B) \cdot p(A|B) + p(\tilde{B}) \cdot p(A|\tilde{B})} \quad (5.128)$$

realizando el mismo proceso para las intersecciones se tiene el **Teorema de Bayes**:

$$\boxed{P(B|A) = \frac{p(B) \cdot p(A|B)}{p(B) \cdot p(A|B) + p(\tilde{B}) \cdot p(A|\tilde{B})}} \quad (5.129)$$

Con esta variación se tiene que:

- B y $\tilde{B}$ forman el universo
- B y $\tilde{B}$ son independientes

En general existirá más de un evento que divida el universo. Si se supone que existen n eventos, $B_1, \dots, B_n$

- $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$ forma el universo
- Los eventos son independientes entre si $B_i \cap B_j = \phi$ siendo i distinto de j
- Los eventos B_i dividen el universo
- Un evento A observable es, a su vez, dividido por las particiones, figura 5.16(a)

(a) División del Universo por los conjuntos B_i (b) Reducción del universo a A

Figura 5.16: Diagramas de Venn para la subdivisión del Universo.

Como se puede ver en la figura 5.16(b):

$$p(A) = \sum_{i=1}^n p(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n p(A|B_i) p(B_i) \quad (5.130)$$

Por tanto, la probabilidad condicionada para cada uno de los eventos B_i será:

$$p(B_i|A) = \frac{p(A \cap B_i)}{p(A)} \quad (5.131)$$

Aplicando la ley de la multiplicación:

$$p(B_i|A) = \frac{p(A|B_i)p(B_i)}{\sum_{i=1}^n p(A|B_j)p(B_j)} \quad (5.132)$$

Este es el resultado publicado en 1763, posteriormente a la muerte del Reverendo Thomas Bayes. Las probabilidades marginales $p(B_i)$ se asume que son conocidas a priori, se le llama *distribución inicial o a priori*.

A partir de este momento, se utilizará la siguiente nomenclatura para diferenciar entre *variable* y *parámetro*. Normalmente se utilizan las letras griegas para los parámetros, todo aquello que se quiere estimar, por ejemplo θ ; por su parte las variables representan las evidencias, los datos de los que se parten y se suelen representar con letras del alfabeto latino, comúnmente se utilizan las últimas letras x, y, z .

La regla de Bayes convierte una probabilidad condicionada, *verosimilitud* $p(x|\theta_k)$ obtenida a partir de las mediciones o de los datos observados, y de un conocimiento subjetivo *probabilidad a priori* $p(\theta_k)$, en otra probabilidad condicionada más útil y de rápida aplicación, *probabilidad a posteriori* $p(\theta_k|x)$. En general, se utiliza la expresión 5.133, debido a que los máximos de las *funciones de densidad de probabilidad de verosimilitud* y *a priori* coinciden con la *función de densidad de probabilidad a posteriori*.

$$p(\theta_k|x) \propto p(x|\theta_k)p(\theta_k) \quad (5.133)$$

5.5.2. Análisis secuencial

Una de las grandes ventajas del teorema de Bayes es la facilidad de actualización que tiene: se puede aplicar sucesivamente tomando como probabilidad inicial en cada paso la probabilidad final del paso anterior.

Se desea determinar la probabilidad de θ , mediante dos experimentos x_1 y x_2 [6]:

$$p(\theta|x_1, x_2) = \frac{p(x_1, x_2|\theta)p(\theta)}{p(x_1, x_2)} \quad (5.134)$$

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2|\theta) &= p(x_1|\theta)p(x_2|x_1, \theta) \\ p(x_1, x_2) &= p(x_1)p(x_2|x_1) \end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación 5.134:

$$p(\theta | x_1, x_2) = \frac{p(x_2 | x_1, \theta)}{p(x_2 | x_1)} p(\theta | x_1) \quad (5.135)$$

La ecuación 5.135 es de nuevo el teorema de Bayes, incorporando la información de x_2 tras conocer los resultados de x_1 .

5.5.3. Pasos para realizar un estudio bayesiano

En general, un estudio bayesiano se divide en los siguientes pasos [86]:

- a.) Identificación de los datos relevantes. En esta fase se han de determinar qué escalas se toman para los datos, qué variables se han de determinar, qué parámetros se suponen como datos.
- b.) Definición del modelo de los datos relevantes. Se define la ecuación modelo de los datos con significado físico.
- c.) Definición de la distribución *a priori* de los parámetros, $p(\theta)$. En muchas ocasiones esto no será posible y se utilizarán *distribuciones no informativas*.
- d.) Interpretación de la distribución *a posteriori*.
- e.) Verificación de las predicciones y la exactitud de las mismas.

5.5.4. Algoritmo de Metropolis

El algoritmo de Metropolis es un método de Monte Carlo vía cadenas de Markov, MCMC en inglés, para la obtención de muestras aleatorias para una distribución de probabilidad en la que el muestreo directo es complicado [106]. El procedimiento sirve tanto para determinar la distribución, como para calcular una integral numéricamente, especialmente cuando el número de dimensiones es alto. El algoritmo genera muestras de una función de probabilidad $p(\theta)$, función *a priori* en el espacio multidimensional del parámetro, para determinar el valor de la función $p(\theta|D)$, *función a posteriori*. Donde θ es el parámetro que se busca y D son los datos tomados de las observaciones realizadas. Para ello, se genera una muestra aleatoria del parámetro a estudiar a partir de una distribución conocida. El valor inicial θ_0 se incrementa en un salto aleatorio⁷ $\Delta\theta$, obteniéndose un nuevo valor

⁷ $\Delta\theta$ sigue su propia densidad de probabilidad.

$\theta_1 = \theta_0 + \Delta\theta$. El salto $\Delta\theta$ se realiza si la probabilidad del mismo es lo suficientemente alta, es decir, si $\alpha = \min(1, p(\theta_1)/p(\theta_0))$. El valor se acepta si $\alpha < p(\theta_1)/p(\theta_0)$, en caso contrario el salto se rechaza. El proceso se repite un número suficiente de veces hasta obtener una solución que se estabilice.

El método de Metropolis es muy general y de gran aplicación, pero puede ser muy ineficiente. El muestreo de Gibbs es un tipo de muestreo aleatorio en el espacio de los parámetros como el de Metrópolis. De igual manera, comienza con un punto inicial y la posición actual solamente depende de la posición anterior. La diferencia entre ambos, es la forma de obtener los valores de los parámetros en cada caso. En cada punto del camino recorrido por los saltos, se obtiene aleatoriamente el valor de un parámetro. Para poder afrontar modelos complicados, con muchos parámetros y muchos saltos, y que además se cubra todo el espacio de cada componente del parámetro, se necesita una forma especial de realizar el muestreo: *muestreo de Gibbs*.

El muestreo de Gibbs toma un valor aleatorio inicial para el parámetro θ_i , posteriormente genera otro valor aleatorio para θ_{i+1} a partir de la distribución $p(\theta_{i+1}|\theta_{j \neq i}, D)$. El proceso se repite obteniendo un ciclo ordenado: $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_1, \theta_2, \dots$. En el caso de que el modelo utilice dos parámetros, θ_1 y θ_2 , en primer lugar se generaría aleatoriamente el valor de θ_1 para posteriormente generar θ_2 mediante $p(\theta_2|\theta_1, D)$. El muestreo de Gibbs puede pensarse como un caso especial del algoritmo de Gibbs, en que la distribución propuesta depende de la localización en el espacio del parámetro y de la componente seleccionada. Este muestreo de es especialmente útil cuando la distribución a posteriori, $p(\{\theta_i\} | D)$ no se puede expresar analíticamente y no se puede identificar directamente, pero todas las $p(\theta_i | \{\theta_{j \neq i}\}, D)$ se pueden determinar y obtener una muestra.

El problema fundamental para el muestreo de Gibbs y de Metropolis es que las muestras están correladas, ya que el valor de un parámetro θ_i depende del valor θ_{i-1} ; el proceso se comienza con un valor inicial pudiendo converger, al tomar otro valor inicial puede obtenerse una distribución de salida bastante distinta. Por este motivo es necesario un periodo de arranque o estabilización.

§ 5.6. Calibración del píxel

Al utilizar imágenes para realizar mediciones, es imprescindible conocer la medida y la incertidumbre de medida del elemento básico de las imágenes, el píxel. Naturalmente al

medir un patrón, se deben conocer las propiedades y la incertidumbre del mismo [132]:

$$C = C_o \left(\frac{L_p}{L_m} \right) \quad (5.136)$$

Inicialmente el píxel tiene una longitud C_o , la longitud del mensurando es L_m , la longitud del patrón es L_p y la longitud del píxel calibrado será C . La longitud medida se puede poner en función del número de píxeles N :

$$C = C_o \frac{L_p}{N C_o} = \frac{L_p}{N} \quad (5.137)$$

Utilizando la ley de propagación de varianzas, y suponiendo que la longitud del mensurando y el número de píxeles son independientes, se tiene la siguiente incertidumbre:

$$u_C^2 = \frac{1}{N^2} \left(u_{L_p}^2 + \left(\frac{L_p}{N} \right)^2 u_N^2 \right) \quad (5.138)$$

La contribución del patrón vendrá dada por el certificado de calibración. La incertidumbre en el número de píxeles debe de ser determinada. En el peor de los casos, según diferentes autores, la incertidumbre de medida del número de píxeles será de $\pm 0,2$ píxel [27, 69, 132, 152]. Si se suponen los límites de una gaussiana $\pm 0,2$ para 95 % de probabilidad, la incertidumbre en el número de píxeles será $u_N = 0,1$ píxel.

Los patrones para realizar la calibración pueden ser reglas, por lo que las mediciones se realizan sobre una dimensión, 1D. O bien en dos dimensiones, 2D, como por ejemplo los patrones de puntos. Suponiendo que existe más incertidumbre a la hora de determinar los puntos del borde en un patrón bidimensional que en uno unidimensional, la incertidumbre de la medida será:

$$u_L^2 = u_a^2 + u_b^2 \quad (5.139)$$

donde u_a es la incertidumbre del certificado de calibración, y u_b es la incertidumbre adicional por ser un patrón 2D. Utilizando la suposición dada por Salsbury [132], el error bidireccional es aproximadamente el 0,35 % del campo de visión, y aproximando el campo de visión al diámetro D de la circunferencia máxima que se puede observar para las condiciones de medida, sobre todo intensidad y amplificación. Volviendo a tomar una distribución

como límites de una gaussiana al 95 % de probabilidad, se obtiene una incertidumbre de:

$$u_b = \left(\frac{0,0035}{2} \right) D = 0,00175D \quad (5.140)$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior, la incertidumbre expandida, $k = 2$ sería:

$$U = \frac{2}{N} \sqrt{u_a^2 + \left(\frac{0,1L_p}{N} \right)^2 + (0,00175D)^2} \quad (5.141)$$

5.6.1. Autocalibración del píxel

No es necesario un patrón para determinar el tamaño del píxel. Únicamente se necesitaría algún elemento pequeño de tamaño conocido, localizado en diferentes puntos del campo de medida. La medida del mensurando L , variará dependiendo de la posición, δ . El tamaño aproximado del píxel se puede definir como:

$$C = C_0 \left(\frac{L}{L - \delta} \right) \quad (5.142)$$

Si se expresa δ en función del número de píxeles, $\delta = L - N C_0$, la ecuación se reduce a la obtenida anteriormente, ecuación 5.137. La contribución de la incertidumbre debida a la longitud, u_L debe estimarse: una parte será debida al desplazamiento lineal, u_{LDA} , y la otra a la repetibilidad, u_R .

$$u_L^2 = u_{LDA}^2 + u_R^2 \quad (5.143)$$

La u_R se puede considerar como una incertidumbre tipo B, obteniéndose de la experiencia de la máquina en cada una de las tareas metrológicas. Para la incertidumbre de la medida lineal, se suponen que los desplazamientos se definen por:

$$\delta = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} X \quad (5.144)$$

donde λ es la longitud de onda del error sobre el eje, tomando $L \ll \lambda$; A es la máxima amplitud del error, y X es el valor nominal de movimiento sobre el eje. El método propuesto para estimar el error máximo de desplazamiento a lo largo de una distancia pequeña se basa en el conocimiento a priori del error cometido a lo largo del eje.

Salsbury [132] supone que los errores varían lentamente, y por tanto toma una variación transversal de alrededor de un 10 % – 20 % cada 25 mm. Así para un 10 % y 25mm, se

obtendría: $\lambda = 100mm$, y $A = 2,5mm$. Suponiendo una distribución triangular, se obtiene la incertidumbre (u_c):

$$u_{LDA} = 2,5 \left(\frac{AL}{\lambda} \right) \quad (5.145)$$

La incertidumbre expandida, $k = 2$:

$$U = \frac{2}{N} \sqrt{u_R^2 + \left(\frac{2,5AL}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{0,1L}{N} \right)^2} \quad (5.146)$$

Solución que constituye una aproximación válida para medidas basadas en muy pocos puntos.

5.6.2. Procedimiento alternativo

En la calibración del píxel se hacen diferentes aproximaciones. Si se varía alguna de ellas se obtiene otro modelo, como el que propone Linguori *et al.* [96]. La longitud de medida se determina utilizando la siguiente expresión:

$$s = kN_y \quad (5.147)$$

donde k es la constante de conversión y N_y es la longitud medida en un número de píxeles. Suponiendo que ambos son independientes la incertidumbre será:

$$u_s^2 = k^2 u_{N_y}^2 + N_y^2 u_k^2 \quad (5.148)$$

La incertidumbre del número de píxeles se puede determinar partiendo del número N_y

$$N_y = y_2 - y_1 \quad (5.149)$$

$$u_{N_y}^2 = u_{y1}^2 + u_{y2}^2 \quad (5.150)$$

Liguori *et al.* [96] suponen que la incertidumbre debida el error de cuantización puede

ser $\pm 1/2$ píxel, con una distribución triangular la incertidumbre en el píxel sería:

$$u_{y_i} = \frac{1}{2\sqrt{12}}$$

Sustituyendo en la expresión de la incertidumbre se obtiene:

$$u_{Ny} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \quad (5.151)$$

El factor de conversión de mm a píxel se define como:

$$k = \frac{l_m}{N_l} \quad (5.152)$$

donde l_m es la longitud en mm, y N_l es el número de píxeles medidos en l_m . Por tanto la incertidumbre será.

$$u_k^2 = \frac{l_m^2}{N_l^4} u_{N_p}^2 + \frac{1}{N_l^2} u_{l_m}^2 \quad (5.153)$$

Liguori *et al.* [96] obtienen empíricamente la incertidumbre u_{N_l} , a partir de las medidas realizadas por el mismo operador:

$$u_{N_l} = \frac{1}{2\sqrt{12}} \quad (5.154)$$

La incertidumbre debida a la resolución de instrumento de medida, A, se considera como una distribución uniforme:

$$u_{l_m} = \frac{E}{\sqrt{3}} \quad (5.155)$$

Por tanto la incertidumbre expandida, $k = 2$:

$$U_s = 2\sqrt{k^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{6}}\right) + N_y^2 \left[\frac{l_m^2}{N_l} \left(\frac{1}{2\sqrt{12}}\right)^2 + \frac{1}{N_l^2} \left(\frac{E}{\sqrt{3}}\right)^2\right]} \quad (5.156)$$

Tanto este modelo de estimación como el descrito en 5.6.1 se presentan como una primera aproximación válida para situaciones sencillas de medida (con un bajo número de puntos de “palpado óptico”), o bajo fuertes simplificaciones. Para modelos más complejos, como los desarrollados en capítulos posteriores, se opta por la determinación de la incertidumbre mediante el método de Monte Carlo [75].

Ajuste de formas

RESUMEN: En este capítulo se muestran los algoritmos fundamentales, “particularizados para máquinas ópticas” empleados en el reconocimiento y completa caracterización metrológica de las formas geométricas más utilizadas que, en general, suelen ser: rectas, circunferencias y elipses.

“It is important to do everything with passion, it embellishes life enormously”

—Lev Davidovich Landau—

§ 6.1. Introducción

Al examinar detalladamente la matriz de una imagen se pueden obtener las intensidades de los píxeles y la localización de los mismos. Estos escalares son la base para todos los tratamientos de imágenes, por lo que las propiedades del mensurando se calcularán a partir de ellos. Los modelos de ajuste aquí propuestos caracterizan circunferencias y elipses, determinando a partir de las coordenadas de los píxeles del borde, con mayor o menor precisión, las distancias características de los mensurandos. El procedimiento aritmético fundamental para caracterizar dichos mensurando es el *método de los mínimos cuadrados*.

En general, las coordenadas del borde se obtienen a partir de imágenes capturadas por el equipo óptico, como es el caso de las circunferencias o círculos. Se presentan varios modelos para determinar el radio y el centro de un círculo, tomando como referencia para el estudio un patrón circular interior. La fiabilidad de los algoritmos se prueba en esta tesis

analizando una pieza de LEGO con iluminación transmitida.

Las coordenadas del borde se suelen obtener a partir de una máquina de medida, como en 6.3. Un escáner comercial es una máquina óptica, no diseñada como instrumento de medida, pero que también se utiliza como tal en este capítulo, para obtener datos trazables y caracterizar formas elípticas, apartado 6.4. La ventaja fundamental del escáner es la fácil adquisición de imágenes, ya que existen aplicaciones para este fin en todos los sistemas operativos.

§ 6.2. Mínimos cuadrados

Dada una serie de puntos $\mathbf{X}_i = (x_i, y_i) \big|_{i=1}^n$ y un modelo lineal definido por:

$$f(\mathbf{c}, \mathbf{X}_i) \cong 0 \quad (6.1)$$

siendo $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_m)^T$ los parámetros del modelo. El vector $\mathbf{c}$ se determina minimizando $\min \sum_{i=1}^n f^2(\mathbf{c}, \mathbf{X}_i)$. Escribiendo la función en forma matricial:

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b} \quad (6.2)$$

siendo $\mathbf{A}$ la matriz de los coeficientes de las coordenadas $\mathbf{X}_i$, de m filas por n columnas, y $\mathbf{b}$ el vector columna de los términos independientes. Realizando la minimización de la ecuación 6.2 se obtiene:

$$\min \sum_{i=1}^n f^2(\mathbf{c}, \mathbf{X}_i) = \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{c}\| \quad (6.3)$$

El valor mínimo se determina realizando las derivadas parciales de $f^2(\mathbf{c}, \mathbf{X}_i)$ respecto a los parámetros e igualando a cero, $\frac{\partial f^2(\mathbf{c}, \mathbf{X}_i)}{\partial c_j} = 0$ donde $j = 1, \dots, m$, obteniéndose la siguiente ecuación matricial,

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (6.4)$$

Si $\mathbf{A}$ es de rango completo, la matriz $\mathbf{H} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ tiene inversa y la solución del sistema se obtiene como:

$$\mathbf{c} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (6.5)$$

El estimador de mínimos cuadrados es un estimador de máxima verosimilitud para modelos lineales. La determinación de la inversa de la matriz $\mathbf{H}$, si es de grandes dimensiones conlleva tiempos de computación altos y puede acarrear errores numéricos altos. Existen distintas posibilidades para la determinación de $\mathbf{H}^{-1}$, como la descomposición de Cholesky, $\mathbf{QR}$, o la descomposición “*singular value decomposition*” (SVD) [8, 52].

6.2.1. Mínimos cuadrados no lineales

Se utiliza el método de Gauss-Newton para minimizar $\min \sum_{i=1}^n f^2(\mathbf{c}, \mathbf{X}_i)$, resolviéndose de manera iterativa. Es necesario utilizar una solución inicial $\mathbf{c}_0$, obtenida a partir del método de mínimos cuadrados, de la sección anterior. La solución se obtiene iterando $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}_0 + \Delta_{\mathbf{c}}$ de manera que $f(\hat{\mathbf{c}}, \mathbf{X}_i)$ sea lo más pequeña posible. Linealizando la función:

$$0 \cong f(\mathbf{c}_0 + \Delta_{\mathbf{c}}, \mathbf{X}_i) \cong f(\mathbf{c}_0, \mathbf{X}_i) + J(\mathbf{c}_0, \mathbf{X}_i) \Delta_{\mathbf{c}} \quad (6.6)$$

siendo J el jacobiano, matriz de las derivadas parciales de la función f con respecto a los parámetros $\mathbf{c}$.

§ 6.3. Caracterización de formas circulares

En la caracterización metrológica de formas geométricas circulares, a partir de imágenes obtenidas mediante máquinas ópticas digitales, es posible determinar de manera indirecta las coordenadas del centro, el valor del radio y el *error de redondez*, a través de las coordenadas de tres o más píxeles del borde. La determinación de estos parámetros geométricos se puede realizar a través de cuatro métodos de cálculo ampliamente conocidos: *Least Square Circle* (LSC), *Minimum Zone Circle* (MZC), *Maximum Inscribed Circle* (MIC) y *Minimum Circumscribing Circle* (MCC) [34, 35, 95, 133, 137, 141].

En esta tesis se desarrollan algoritmos propios empleando métodos de optimización lineal (*método Simplex*) [113] para la resolución del *método de la mínima zona* (MMZ), de la *máxima circunferencia inscrita* (MIC) y de la *mínima circunferencia circunscrita* (MCC), utilizando la aproximación de *limaçon* [20, 21] que permite linealizar las restricciones derivadas de los problemas de optimización. Los algoritmos desarrollados se han particularizado para las condiciones metrológicas habituales de las máquinas ópticas digitales a partir de las coordenadas (x_i, y_i) de los píxeles detectados sobre el contorno del perfil circular.

Para la resolución del método LSC se emplea un *modelo de parametrización lineal* (LLS) propuesto por el National Physical Laboratory (NPL) [26], desarrollado a través de un algoritmo propio. Se ha comprobado que este modelo resulta eficaz y fiable para la resolución de circunferencias completas y también para arcos de circunferencia, no presenta dificultades de implementación y su tiempo de cálculo en condiciones estándar se sitúa en torno a los 20 segundos [54].

Por lo que se refiere a la determinación de los errores de forma, solamente el MZC figura 6.1 se ajusta a lo establecido por las normas ANSI e ISO [1, 43]. Sin embargo, este modelo se formula como un problema de optimización con restricciones no lineales (no diferenciable), que resulta difícil de resolver en la práctica. El MCC se reserva para aquellos casos asociados a la condición máxima de material, mientras que el MIC resulta más adecuado para medidas asociadas a la mínima condición de material [35]. El LSM se formula a partir de los principios matemáticos que reducen al mínimo la suma de las desviaciones de los puntos medidos con respecto a la característica circular ajustada [25]. Este método es robusto, pero no sigue las normas internacionales antes citadas y no garantiza la solución mínima.

Figura 6.1: Errores de forma: a) Circunferencia de la mínima zona y circunferencia de los mínimos cuadrados; b) Circunferencia circunscrita y circunferencia inscrita.

La norma ANSI Dimensioning and Tolerance Y14.5 [1] especifica que las tolerancias de forma de un componente deben ser evaluadas respecto a una característica geométrica ideal. Por lo que se refiere a las formas circulares, las normas ISO [43] recomiendan el método de evaluación de la mínima zona y especifican que las características ideales y/o de referencia deben ser establecidas a partir de los datos reales de la medida, de tal manera que la desviación entre ésta y el elemento geométrico sea igual al valor más pequeño posible

Sin embargo, ninguna de estas normas especifica cuál es el método más adecuado para la caracterización precisa de una circunferencia, cuando no se pretende la evaluación de errores de forma sino exclusivamente la determinación de su diámetro y las coordenadas del centro.

Independientemente de la conveniencia o adecuación de los diferentes métodos, las investigaciones realizadas en el campo del cálculo numérico han permitido el desarrollo de diferentes algoritmos capaces de resolver los modelos de ajuste expuestos (LSC, MZC, MCC y MIC), de acuerdo con las metodologías matemáticas de aproximaciones discretas existentes en la literatura [34, 35, 95, 113, 133, 137, 141].

6.3.1. Definición del problema

Como es sabido, la caracterización matemática de un círculo requiere el conocimiento previo de las coordenadas de al menos tres puntos pertenecientes a su borde; a partir de dichas coordenadas es posible determinar su ecuación y, en consecuencia, obtener la posición del centro y su diámetro. Habitualmente, en mediciones reales o calibraciones, existen errores de redondez y resulta imprescindible manejar un número de puntos sensiblemente superior a tres, si se pretende determinar, además, los errores de forma.

En el caso de las máquinas de visión, el software de medida identifica y aísla los píxeles del borde de manera automática, a partir de la imagen digital. En el caso de una circunferencia o arco, el número de píxeles identificados dependerá esencialmente de la amplitud del arco, de la resolución seleccionada y del radio nominal. Cada píxel, matemáticamente identificado por las coordenadas de su centro, representa un punto de la circunferencia problema que puede ser caracterizada de acuerdo a los cuatro métodos descritos.

Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_i, y_i), \dots, (x_n, y_n)$ las coordenadas x e y de los n puntos pertenecientes al perfil circular en el plano bidimensional XY , como muestra la figura 6.2.

Obtenidas las coordenadas de los puntos pertenecientes a la forma circular, es necesario evaluar los parámetros geométricos, el centro (x_0, y_0) y el radio r_0 de un círculo ideal que mejor se aproximan al real. El error de este círculo ideal respecto al i -ésimo punto (x_i, y_i) viene dado por la expresión:

$$e_i = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} - r_0 \quad (6.7)$$

Para los casos en que la forma a evaluar sea una circunferencia casi perfecta, entonces

Figura 6.2: Definición matemática del problema.

el error de forma tenderá a cero, resultando:

$$\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} \approx r_0 \quad (6.8)$$

Matemáticamente los cuatro métodos MCC, MIC, MZC y LSC se pueden plantear como problemas de optimización. Los métodos de optimización o de programación lineal secuencial se emplean a menudo para solucionar los problemas anteriores de metrología computacional de formas circulares y/o esféricas. Efectivamente, las pruebas empíricas ponen de manifiesto que estos métodos consiguen las soluciones requeridas [141]. Estos métodos prevén que los parámetros sean calculados mediante una serie de iteraciones, a partir de los valores de las coordenadas de los píxeles, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_i, y_i), \dots, (x_n, y_n)$, facilitados por el usuario y/o por la máquina. En términos matemáticos, se trata de resolver los siguientes problemas de optimización:

6.3.2. Problema MCC

El centro O_1 de la circunferencia de referencia se determina como el centro de la circunferencia de mínimo radio, r_{MCC} , tal que todos los puntos medidos estén incluidos en el interior de la circunferencia. Matemáticamente se escribe:

$$\begin{cases} \min r_{MCC} \\ (x_{0_{MCC}} - x_i)^2 + (y_{0_{MCC}} - y_i)^2 \leq r_{MCC}^2 \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (6.9)$$

6.3.3. Problema MIC

El centro O_2 de la circunferencia de referencia se determina como el centro del círculo de máximo radio, r_{MIC} , tal que todos los puntos estén fuera de la circunferencia. Matemáticamente se escribe:

$$\begin{cases} \text{máx}(r_{MIC}) \\ (x_{0_{MIC}} - x_i)^2 + (y_{0_{MIC}} - y_i)^2 \geq r_{MIC}^2 & i = 1, \dots, n \\ (x_{0_{MIC}}, y_{0_{MIC}}) \in \text{Conv}\{(x_i, y_i), i = 1, \dots, n\} \end{cases} \quad (6.10)$$

donde “Conv” indica envolvente convexo (*convex-hull*).

6.3.4. Problema MZC

El empleo de este método de cálculo supone encontrar dos circunferencias concéntricas, de radios r_{max}, r_{min} , en cuyo interior queden situados todos los puntos medidos, de tal manera que la distancia entre estas dos circunferencias sea mínima. El problema de las circunferencias de zona mínima se escribe:

$$\begin{cases} \text{mín}(r_{\text{máx}} - r_{\text{mín}}) \\ r_{\text{mín}}^2 \leq (x_{0_{MZC}} - x_i)^2 + (y_{0_{MZC}} - y_i)^2 \leq r_{\text{máx}}^2 & i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (6.11)$$

6.3.5. Problema LSC

Según este criterio, se trata de determinar una circunferencia de radio r_{LSC} , tal que la suma de los cuadrados de las distancias de los distintos puntos a dicha circunferencia sea mínima. Matemáticamente se escribe:

$$\begin{cases} \min \sum e_i^2 \\ \text{donde } e_i = \sqrt{(x_{0_{LSC}} - x_i)^2 + (y_{0_{LSC}} - y_i)^2} - r_{LSC} \end{cases} \quad (6.12)$$

6.3.6. Aproximación de *limaçon*

Los problemas MIC, MCC y MZC son esencialmente problemas de optimización, siendo las restricciones funciones no lineales. Por consiguiente, en primer lugar es necesario convertir estas restricciones en funciones lineales. Para eso se utiliza una geometría particular

llamada *limaçon* [21]. Esta aproximación es válida en presencia de pequeñas excentricidades, una situación absolutamente común en el ámbito de estudio que nos ocupa. Usando la aproximación de *limaçon* la ecuación de la circunferencia puede linealizarse, convirtiendo el algoritmo de cálculo en un proceso más sencillo. La distancia (r_i) de cualquier punto del perfil circular respecto al origen (O) de coordenadas (x_0, y_0) (figura 6.3) se puede calcular como:

$$r_i = x_0 \cos \theta_i + y_0 \sin \theta_i + \sqrt{r_0^2 - (x_0^2 + y_0^2) \sin^2 (\theta_i - \phi_i)} \quad (6.13)$$

donde $\phi_i = \tan^{-1} (y_0/x_0)$.

Figura 6.3: Definición geométrica de la aproximación de *limaçon*.

Aplicando la aproximación de *limaçon* la ecuación 6.13 se aproxima como:

$$r_i = r_0 + x_0 \cos \theta_i + y_0 \sin \theta_i \quad (6.14)$$

Para la demostración de la aproximación de *limaçon* se remite al párrafo 3.2 del artículo Maresca *et al.* [103]. Aplicando la aproximación de *limaçon* (ecuación 6.13), los problemas de optimización de MCC, MIC y MZC definidos por las ecuaciones 6.9, 6.10 y 6.11 se pueden reescribir, respectivamente, como:

$$\text{MMC} \rightarrow \begin{cases} \text{mín}(r_{MCC}) \\ r_{MCC} + x_{0_{MCC}} \cos \theta_i + y_{0_{MCC}} \sin \theta_i \leq r_i, \quad \text{para } i \in [1, n] \end{cases} \quad (6.15)$$

$$\text{MIC} \rightarrow \begin{cases} \text{mín}(-r_{\text{MIC}}) \\ r_{\text{MIC}} + x_{0\text{MIC}} \cos \theta_i + y_{0\text{MIC}} \sin \theta_i \geq r_i, \quad \text{para } i \in [1, n] \end{cases} \quad (6.16)$$

$$\text{MZC} \rightarrow \begin{cases} \text{mín}(r_{\text{máx}} - r_{\text{mín}}) \\ r_{\text{máx}} + x_{0\text{MZC}} \cos \theta_i + y_{0\text{MZC}} \sin \theta_i \geq r_i, \quad \text{para } i \in [1, n] \\ r_{\text{mín}} + x_{0\text{MZC}} \cos \theta_i + y_{0\text{MZC}} \sin \theta_i \leq r_i, \quad \text{para } i \in [1, n] \\ r_{\text{máx}}, r_{\text{mín}} > 0 \end{cases} \quad (6.17)$$

6.3.7. Método de los mínimos cuadrados

En la resolución de este método se emplea un modelo lineal propuesto por el National Physical Laboratory (NPL) [25]. Establecida la siguiente parametrización:

$$S : \quad x^2 + y^2 + a_1x + a_2y + a_3 = 0 \quad (6.18)$$

se determinan los parámetros a_1 , a_2 y a_3 mediante el método de ajuste por mínimos cuadrados. A partir de a_1 , a_2 y a_3 se obtienen las coordenadas del centro (x_0, y_0) y el radio (r_0) de la forma circular.

$$x_0 = -\frac{a_1}{2} \quad (6.19)$$

$$y_0 = -\frac{a_2}{2} \quad (6.20)$$

$$r_0 = \sqrt{\frac{a_1^2}{4} + \frac{a_2^2}{4} - a_3} \quad (6.21)$$

6.3.8. Implementación del algoritmo de cálculo de formas circulares

El algoritmo, de desarrollo propio, combina las imágenes para realizar una única imagen correspondiente al elemento de estudio y a partir de eso permite: (a) obtener el borde de la forma circular, (b) identificar los píxeles que le pertenecen y (c) comparar los resultados obtenidos empleando los métodos de ajuste descritos. Las variables que afectarán

al resultado de las medidas son: la amplitud del sector angular de la forma circular, la amplificación empleada, el número de píxeles considerados sobre el perfil y el radio nominal de la forma geométrica. El algoritmo se ha implementado en MatLab, junto con la eficaz librería para el análisis de imágenes, Toolbox Image Processing. La detección del borde se puede realizar empleando diferentes técnicas basadas en el método del gradiente: *Canny*, *Sobel*, *Roberts*, *Prewitt*, *Laplacian of Gaussian* (LoG) y *Zero Cross* [18, 36, 55, 56]. Tomando en consideración los trabajos de Midoh *et al.* [107, 108], se ha podido corroborar que para imágenes metrológicas obtenidas, la técnica de detección de bordes basada en el filtro de Canny, resulta la más eficaz en cuanto a probabilidad y precisión de extraer la verdadera posición del borde [107]. Adicionalmente se ha utilizado el método global *threshold* calculado a partir del procedimiento propuesto por González y Woods [55, 56].

Seguidamente se indican e ilustran las etapas del proceso de medida.

- a.) El algoritmo recibe como inputs: (a) la imagen a tratar, (b) las coordenadas de los píxeles situados en las esquinas superior izquierda e inferior derecha y (c) la amplitud del sector angular que se desea evaluar.
- b.) Se aplica un valor de *threshold* utilizando el método *global threshold* calculado a partir del procedimiento propuesto por Gonzalez y Woods [55, 56].
- c.) Mediante interacción del usuario se define el sector angular a medir, así como una zona circular dentro de la cual se encuentra el borde a detectar. Utilizando el algoritmo de Canny y aplicando el valor de *threshold*, calculado en el paso anterior, se detecta el borde de la forma circular.
- d.) Se determina la circunferencia de mínimos cuadrados que mejor aproxima los píxeles obtenidos anteriormente.
- e.) Se convierten las coordenadas de los píxeles del borde en coordenadas polares respecto al centro de la circunferencia de los mínimos cuadrados determinada en el paso anterior.
- f.) Se aplica un procedimiento de filtrado, de desarrollo propio, que permite eliminar aquellos píxeles que tienen una probabilidad de aparición inferior a un determinado valor definido por el producto $k\sigma$ donde σ es la desviación típica muestral asociada al radio de la circunferencia de mínimos cuadrados que se ha evaluado a través de los píxeles detectados anteriormente y k es un factor de cobertura (considerando una

(a) Montaje experimental para la medición de una pieza de LEGO. (b) Detalle de la pieza de LEGO en el montaje experimental.

Figura 6.4: *Aplicación de los métodos de ajuste a una pieza de LEGO.*

distribución normal, las probabilidades de aparición aproximadas son del 65 % para $k = 1$ y del 95 % para $k = 2$) [102].

6.3.9. Resultados de la comparación entre los diferentes métodos empleados

Con el propósito de demostrar la fiabilidad del algoritmo de cálculo propuesto, y comparar los resultados obtenidos aplicando los cuatro métodos de ajuste (MZC, LSC, MCI, MCC), se ha realizado un estudio experimental empleando un patrón circular interior de diámetro 1,497 [mm]. Posteriormente se evalúa la aplicabilidad del método analizando una pieza LEGO, figura 6.4.

Ambos elementos han sido previamente medidos por un laboratorio acreditado. El patrón ha sido calibrado utilizando la máquina de visión Mitotuyo Quick Vision (campo de medida ($X \times Y \times Z$): 350 [mm] $\times$ 350 [mm] $\times$ 150 [mm], Resolución: 0,01 [μm], obteniéndose los valores $1,496 \pm 0,003$ [mm] para el diámetro y los valores $13,9 \pm 0,9$ [μm] para el error de redondez.

La pieza LEGO se ha medido utilizando una CMM DEA FDG/SCIROCCO (campo de medida: 1000 [mm] $\times$ 860 [mm] $\times$ 660 [mm], Resolución: 0,1 [μm], obteniéndose los valores de $4,886 \pm 0,070$ [mm] para el diámetro y $37,9 \pm 20$ [μm] para el error de redondez.

En ambos casos la evaluación del radio se ha realizado al variar la amplitud del sector circular tomado sobre el perfil circular. Experimentalmente el patrón y la pieza LEGO se han medido con la máquina de visión TESA Visio 300 usando una amplificación de 4.5x tomando en consideración sectores angulares múltiplos de 30°. Durante el procedimiento

de medición, el ambiente se ha mantenido a una temperatura controlada en un intervalo de 20 ± 1 [°C]. En la tabla 6.1 se muestran, los valores del radio y del error de redondez del patrón circular interior, obtenidos a través del algoritmo de cálculo al variar del ángulo α del sector circular, para los diferentes métodos de ajuste ilustrados.

Tabla 6.1: Valores del diámetro y del error de redondez ($d_n = 1,497$ [mm]) para distintos valores de α .

α [°]	e_{cMZC} [μm]	d_{MZC} [mm]	e_{cLSC} [μm]	d_{LSC} [mm]	e_{cMCC} [μm]	d_{MCC} [mm]	e_{cMIC} [μm]	d_{MIC} [mm]
30	3.3	1.437	3.5	1.418	—	—	—	—
60	4.5	1.489	4.6	1.486	—	—	—	—
90	5.1	1.507	5.4	1.509	—	—	—	—
120	9.5	1.488	9.7	1.493	—	—	—	—
150	10.9	1.497	12.6	1.499	—	—	—	—
180	11	1.496	11.5	1.503	33.4	1.504	—	—
210	11	1.496	11.5	1.501	13.6	1.505	12.7	1.491
240	12.6	1.494	12.8	1.498	13.7	1.505	15.1	1.487
270	11.9	1.494	12.3	1.498	13.2	1.505	17	1.485
300	11.9	1.494	12.2	1.498	12.9	1.505	12.2	1.484
330	13	1.493	13.2	1.497	13.6	1.505	13.2	1.48
360	12.7	1.493	12.8	1.497	13.4	1.505	12.8	1.481

Las figuras siguientes muestran los resultados obtenidos, al variar del sector circular, del diámetro calculado con los cuatro métodos de ajuste (figura 6.5) y del error de redondez (figura 6.6).

Se observa cómo los diámetros calculados con los métodos MCC y MIC se pueden evaluar sólo a partir del valor de α igual a 180 [°] ó 210 [°] respectivamente, porque para valores inferiores de α , las coordenadas de los píxeles que recibe el algoritmo no son suficientes para poder resolver los dos problemas de optimización.

A partir de las figuras obtenidas se muestra cómo para un sector circular de 360 [°], es decir, una circunferencia completa, las circunferencias obtenidas con distintos métodos de cálculo, se desplazan levemente del valor teórico, mientras que en el caso de un sector circular inferior a 360 [°], como en el ejemplo de amplitud 120 [°], la diferencia se hace más marcada y se deduce que la circunferencia de los mínimos cuadrados y de la mínima zona resultan ser la que mejor se aproximan a la circunferencia real.

Comparando los valores del diámetro y del error de redondez obtenidos usando el

Figura 6.5: Diámetros calculados del patrón circular interior ($d_n = 1,4959$ [mm]) al variar de α .

Figura 6.6: Error de redondez del patrón circular interior ($d_n = 1,4959$ [mm]) al variar de α .

método de evaluación LSC para un sector angular de $360 [^\circ]$ con los valores certificados, se obtienen una desviación de $1 [\mu\text{m}]$ para el diámetro y $1,1 [\mu\text{m}]$ para el error de redondez. Teniendo en cuenta que para la amplificación utilizada por la máquina de visión el tamaño de píxel es igual a $1,9 [\mu\text{m}]$, ambos resultados son compatibles.

Los valores del diámetro y del error de redondez de la pieza LEGO se muestran en la tabla 6.2 y se representan en las figuras 6.7 y 6.8.

Tabla 6.2: Valores del diámetro de la pieza LEGO para distintos valores de α .

α [$^\circ$]	e_{cMZC} [μm]	d_{MZC} [mm]	e_{cLSC} [μm]	d_{LSC} [mm]	e_{cMCC} [μm]	d_{MCC} [mm]	e_{cMIC} [μm]	d_{MIC} [mm]
30	3.6	4.814	3.8	4.884	—	—	—	—
60	5.4	4.745	5.7	4.736	—	—	—	—
90	8.9	4.8	10.3	4.788	—	—	—	—
120	17.1	4.874	21.1	4.866	—	—	—	—
150	22.5	4.909	27.4	4.921	—	—	—	—
180	22.5	4.909	26.1	4.918	—	—	—	—
210	23.7	4.903	24.5	4.904	46.4	4.906	24.6	4.882
240	25.5	4.896	25.8	4.896	39.1	4.908	28.6	4.875
270	26	4.894	28.3	4.891	36.3	4.909	32.6	4.868
300	29.7	4.884	33.4	4.888	36.3	4.909	30.5	4.854
330	29.7	4.884	32.9	4.887	36.3	4.909	30.5	4.854
360	29.7	4.884	32.9	4.887	36.3	4.909	30.5	4.854

Comparando los valores del diámetro y del error de redondez obtenidos usando el método de evaluación LSC para un sector angular de $360 [^\circ]$ con los valores certificados, se obtienen desviaciones de $1 [\mu\text{m}]$ para el diámetro y $1,6 [\mu\text{m}]$ para el error de redondez. Como en el caso anterior del patrón circular interior, los resultados son consistentes con los valores obtenidos por el laboratorio acreditado.

En definitiva, se recomienda emplear el algoritmo de minina zona y/o de los mínimos cuadrados propuestos cuando se quiera realizar la caracterización metrológica de arcos de circunferencia. La utilización de los algoritmos anteriores, puede ser un factor decisivo y parece recomendable indicar cuál se ha utilizado en las caracterizaciones de circunferencias o arcos, sobre todo si se trata de cotas críticas. También es un dato crítico la amplitud del arco, por ejemplo en la utilización de plantillas de círculos calibrados, ya que alguno de los círculos puede presentar defectos (figura 6.9(a)) o manchas de suciedad (figura 6.9(b)) que afectan al proceso de medida.

Figura 6.7: Diámetros calculados de la pieza LEGO al variar de α .

Figura 6.8: Error de redondez de la pieza LEGO al variar de α .

Figura 6.9: Defectos en la plantilla de círculos calibrada.

§ 6.4. Caracterización de elipses

Como es conocido, las coordenadas de los puntos del borde son los datos de entrada de los algoritmos para la caracterización de formas. La calidad de estas coordenadas dependerá de la imagen y de los procedimientos de extracción de las mismas. Un escáner comercial es una máquina óptica cuya concepción no es metrológica, pero que se utiliza en esta investigación para la adquisición de imágenes, y aunque resulte sorprendente se utiliza con cierta frecuencia como “instrumento de medida” en diversas áreas como: ingeniería [79, 85], biología [151], arqueología [111] o mineralogía [147], gracias, fundamentalmente, a la facilidad en el procedimiento de adquisición de las imágenes.

En esta investigación se ha utilizado un escáner Canon PIXMA MP630 para la obtención de imágenes del mensurando. Previamente a la toma de medidas, el escáner ha sido calibrado [32], con el fin de tener trazabilidad con el correspondiente patrón primario. Los puntos de medida o de palpado son extraídos a partir de las imágenes tomadas, figura 6.10. La segmentación del borde se puede realizar mediante el algoritmo de Canny [18], aunque en este trabajo se opta por el método del “*thresholding*” [24, 56], por su rápida implementación.

La existencia de correlación entre los puntos de palpado surge de la siguiente idea estadística: sean $x_1, x_2, \dots, x_n$ variables estadísticamente independientes que poseen todas la misma incertidumbre típica $u(x_i) = u_x$, la incertidumbre de su valor medio $y = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$ es $u(y) = u_x/n$. Si entre dichas variables existe correlación, sus coeficientes de correlación son $|r_{x_i, x_j}| = r > 0$, y la incertidumbre de su valor medio se

Figura 6.10: (Izquierda) Imagen de una elipse obtenida directamente del escáner. (Derecha) Puntos del borde de la elipse.

calcula a través de la siguiente expresión [121, 148]:

$$\text{Var}(y) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum x_i\right) = \frac{1}{n^2} (n \cdot \text{Var}(x) + n(n-1)r \cdot \text{Var}(x)) \quad (6.22)$$

$$u(y) = u_x \sqrt{\frac{1-r}{n} + r} = \frac{u_x}{\sqrt{n_p}} \geq \frac{u_x}{n} \quad (6.23)$$

donde n_p se podría denominar “*número efectivo de variables*” o “*número efectivo de puntos de palpado*” en el caso de un problema de metrología por coordenadas. Este efecto de la correlación podría ser tenido en cuenta de una forma sencilla: suponiendo que ese valor medio ha sido obtenido a partir de número n_p , inferior a n , variables independientes.

La influencia de la correlación sobre la incertidumbre del resultado de medida, suele ser significativamente mayor cuando el número de puntos de palpado es muy elevado, ecuación 6.23. Esto es debido a:

- a.) Como se mostrará posteriormente, la correlación entre puntos de palpado se presenta únicamente cuando la distancia entre ellos es inferior a una determinada *longitud de corte o retardo* l_c . Por tanto, si el número de puntos de palpado es bajo y la distancia media entre ellos es superior a l_c no aparecerá correlación alguna o su efecto será despreciable. Sin embargo, cuando el número de puntos de palpado es muy elevado, entonces la distancia media entre puntos de palpado será muy inferior a la longitud de corte l_c .
- b.) Si se realiza la estimación de incertidumbres sin tener en cuenta la presencia de correlación, las expresiones de dichas incertidumbres aparecerán divididas por $\sqrt{n}$,

ecuación 6.23. Si n es muy elevado, el divisor $\sqrt{n}$ hará que las incertidumbres se reduzcan enormemente conduciendo a estimaciones claramente infravaloradas.

El objetivo es poner de manifiesto la presencia de *correlación* entre puntos de palpado en metrología por coordenadas, y como ésta puede influir de forma significativa en la incertidumbre del resultado. La correlación puede ser debida a la presencia de desviaciones introducidas por el instrumento en puntos de palpado cercanos; a la presencia de irregularidades en la pieza a medir, cuya evolución a lo largo del contorno de ésta no sea puramente aleatoria sino que sigan una pauta periódica o cuasi determinista, como por ejemplo la presencia de lóbulos en la sección circular de piezas redondas como taladros, etc.

6.4.1. Determinación de los parámetros de la elipse mediante mínimos cuadrados

La elipse queda definida por la siguiente forma cuadrática:

$$F(p, q) = ap^2 + 2bpq + cq^2 + 2dp + 2fq + g = 0 \quad (6.24)$$

donde (p, q) son las coordenadas cartesianas pertenecientes a los puntos de la elipse, y a, b, c, d, e, f , y g son los coeficientes de la forma cuadrática. Una vez determinados n puntos de palpado, se dispondrá de n parejas de valores (p_i, q_i) que debieran anular las expresiones $F(p_i, q_i) = 0$.

$$ap_i^2 + 2bp_iq_i + cq_i^2 + 2dp_i + 2fq_i + 1 \cong 0 \quad (6.25)$$

Para la caracterización geométrica de la elipse, a partir de n las parejas de valores (p_i, q_i) es necesario calcular las componentes del vector $\mathbf{y} = [a b c d e f g]^T$. Los valores (p_i, q_i) proceden de mediciones y tienen una incertidumbre no despreciable, por lo que las 6.25 no igualan a cero de forma exacta. Se toma el valor de $g = 1$ para evitar la solución trivial, aunque la elipse no pase por el punto $(0, 0)$ [78].

Escribiendo las ecuaciones anteriores en forma matricial: $\mathbf{A}_0$ representa la matriz de los coeficientes de las coordenadas (p_i, q_i) , $\mathbf{y}_0$ el vector de los coeficientes de la forma cuadrática, y $\mathbf{b}$ es el vector columna con los términos independientes, las ecuaciones de la

ecuación 6.25 quedan reducidas a:

$$\begin{pmatrix} p_1^2 & 2p_1q_1 & q_1^2 & 2p_1 & 2q_1 \\ p_2^2 & 2p_2q_2 & q_2^2 & 2p_2 & 2q_2 \\ p_3^2 & 2p_3q_3 & q_3^2 & 2p_3 & 2q_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_n^2 & 2p_nq_n & q_n^2 & 2p_n & 2q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

$$\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{y}_0 \cong \mathbf{b} \quad (6.27)$$

La resolución del sistema, se realiza a través de un ajuste por mínimos cuadrados ordinarios, ecuación 6.28.

$$\mathbf{y}_0 = (\mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0)^{-1} \cdot \mathbf{A}_0^T \mathbf{b} \quad (6.28)$$

Con esta solución, $\mathbf{y}_0$, se minimiza el valor de los residuos e_i , aunque éstos no tienen significado geométrico ni metrológico. La estimación de la varianza de medida, se determina a partir del error cuadrático medio, que es un estimado *insesgado* de la varianza, .

$$e_i = ap_i^2 + 2bp_iq_i + cq_i^2 + 2dp_i + 2fq_i + 1 \quad (6.29)$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-5} \sum_{i=1}^n e_i^2} \quad (6.30)$$

6.4.2. Regresión ortogonal

La mejor solución, desde un punto de vista metrológico, sería aquella que minimizara las desviaciones ortogonales d_i de los puntos de palpado respecto de la elipse finalmente ajustada. Estas desviaciones se miden según la normal a la elipse que pasa por el punto de palpado considerado [2, 3].

$$d_i = \frac{F(p_i, q_i)}{|\nabla F|} = \frac{ap_i^2 + 2bp_iq_i + cq_i^2 + 2dp_i + 2fq_i + 1}{|\nabla F|} \quad (6.31)$$

$$\nabla F = \left[\frac{\partial F}{\partial p_i}, \frac{\partial F}{\partial q_i} \right] = [2ap_i + 2bq_i + 2d, 2bp_i + 2cq_i + 2f] \quad (6.32)$$

El vector gradiente ∇F es un vector normal a la curva $F(p, q)$. Las desviaciones d_i

son función de la solución $\mathbf{y} = [a b c d e f]^T$ elegida. Estas desviaciones pueden linealizarse alrededor de la solución $\mathbf{y}_0 = [a_0 b_0 c_0 d_0 e_0 f_0]^T$, ecuación 6.33.

$$d_i \cong d_{i0} + \frac{\partial d_i}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial d_i}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial d_i}{\partial c} \Delta c + \frac{\partial d_i}{\partial d} \Delta d + \frac{\partial d_i}{\partial e} \Delta e + \frac{\partial d_i}{\partial f} \Delta f \quad (6.33)$$

d_{i0} son aquellas medidas respecto de la elipse obtenida en la ecuación 6.28. Eligiendo convenientemente el vector de incrementos, $\Delta \mathbf{y} = [\Delta a \Delta b \Delta c \Delta d \Delta e \Delta f]^T = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0$ se podrá conseguir que las desviaciones d_i sean casi nulas.

$$0 \cong d_{i0} + \frac{\partial d_i}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial d_i}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial d_i}{\partial c} \Delta c + \frac{\partial d_i}{\partial d} \Delta d + \frac{\partial d_i}{\partial e} \Delta e + \frac{\partial d_i}{\partial f} \Delta f \quad (6.34)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial a} & \frac{\partial d_1}{\partial b} & \dots & \frac{\partial d_1}{\partial f} \\ \frac{\partial d_2}{\partial a} & \frac{\partial d_2}{\partial b} & \dots & \frac{\partial d_2}{\partial f} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial d_n}{\partial a} & \frac{\partial d_n}{\partial b} & \dots & \frac{\partial d_n}{\partial f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta c \\ \Delta d \\ \Delta e \\ \Delta f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_{10} \\ -d_{20} \\ \vdots \\ -d_{n0} \end{pmatrix} \quad (6.35)$$

$$\mathbf{A}_1 \Delta \mathbf{y}_1 = -\mathbf{d}_0 \quad (6.36)$$

La solución del sistema, $\mathbf{y}_1 = [a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1]^T$, se obtiene minimizando iterativamente la suma cuadrática de los residuos del sistema:

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + \Delta \mathbf{y}_1 \quad (6.37)$$

$$\Delta \mathbf{y}_1 = -(\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{d}_0 \quad (6.38)$$

La estimación de la varianza de medida se calcula a partir de la desviación media cuadrática, s_d :

$$s_d = \sqrt{\frac{1}{n-5} \sum_{i=1}^n d_i^2} \quad (6.39)$$

Suponiendo que no existe correlación entre las desviaciones, y que las incertidumbres de éstas son todas iguales, la solución anterior sería, según el teorema de Gauss-Markov, un estimador BLUE, *best linear unbiased estimator*, de la solución verdadera [8, 124, 120], pudiéndose estimar la matriz de covarianzas de $\mathbf{y}_1$, ecuación 6.40. A partir de ésta se pueden

estimar las incertidumbres expandidas $U_{y_{1i}}$ de las componentes de $\mathbf{y}_1$ y los correspondientes coeficientes de correlación $r_{y_{1i}y_{1j}}$, ecuaciones 6.41 y 6.42.

$$\mathbf{C}_{\mathbf{y}_1} = s_d^2 (\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1)^{-1} \quad (6.40)$$

$$U_{y_{1i}} = k \sqrt{c_{y_{1i}}^2} \quad (6.41)$$

$$r_{y_{1i}y_{1j}} = \frac{c_{y_{1i}y_{1j}}}{\sqrt{c_{y_{1i}}^2 c_{y_{1j}}^2}} \quad (6.42)$$

donde $c_{y_{1i}}^2$ es el término i-ésimo de la diagonal, $c_{y_{1i}y_{1j}}$ término que ocupa la posición (i, j) de la matriz $\mathbf{C}_{\mathbf{y}_1}$, y k es el factor de cobertura. La descripción de la elipse de esta forma no es adecuada para su posterior utilización. Por ello son determinadas, a partir de los parámetros a , b , c , d , y f , las coordenadas (x_0, y_0) del *centro de la elipse*, los *semiejes mayor y menor* e_{max} , e_{min} , y el ángulo θ que el semieje mayor forma con el eje horizontal, ecuación 6.43.

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{cd - bf}{b^2 - ac} \\ y_0 &= \frac{af - bd}{b^2 - ac} \\ \theta &= \frac{1}{2} \cot^{-1} \left(\frac{a - c}{2b} \right) \\ e_{max} &= \sqrt{2 \frac{af + cd^2 + gb^2 - 2bdf - acg}{(b^2 - ac) \left[(c - a) \sqrt{1 + 2 \left(\frac{b}{a-c} \right)^2} - (c + a) \right]}} \\ e_{min} &= \sqrt{2 \frac{af^2 + cd^2 + gb^2 - 2bdf - acg}{(b^2 - ac) \left[(a - c) \sqrt{1 + 2 \left(\frac{b}{a-c} \right)^2} - [c + a] \right]}} \end{aligned} \quad (6.43)$$

Definiendo el vector $\mathbf{z}_1 = [x_0 \ y_0 \ e_{max} \ e_{min} \ \theta]^T$, donde $\mathbf{z}_1$ es función del vector $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{z}_1 = \mathbf{H}(\mathbf{y}_1)$. Utilizando el procedimiento descrito en el suplemento 2 de la GUM [76], la matriz de covarianzas $\mathbf{C}_{\mathbf{z}_1}$ puede estimarse utilizando las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial a} & \frac{\partial x_0}{\partial b} & \frac{\partial x_0}{\partial c} & \frac{\partial x_0}{\partial d} & \frac{\partial x_0}{\partial e} & \frac{\partial x_0}{\partial f} & \frac{\partial x_0}{\partial g} \\ \frac{\partial y_0}{\partial a} & \frac{\partial y_0}{\partial b} & \frac{\partial y_0}{\partial c} & \frac{\partial y_0}{\partial d} & \frac{\partial y_0}{\partial e} & \frac{\partial y_0}{\partial f} & \frac{\partial y_0}{\partial g} \\ \frac{\partial \theta}{\partial a} & \frac{\partial \theta}{\partial b} & \frac{\partial \theta}{\partial c} & \frac{\partial \theta}{\partial d} & \frac{\partial \theta}{\partial e} & \frac{\partial \theta}{\partial f} & \frac{\partial \theta}{\partial g} \\ \frac{\partial e_{max}}{\partial a} & \frac{\partial e_{max}}{\partial b} & \frac{\partial e_{max}}{\partial c} & \frac{\partial e_{max}}{\partial d} & \frac{\partial e_{max}}{\partial e} & \frac{\partial e_{max}}{\partial f} & \frac{\partial e_{max}}{\partial g} \\ \frac{\partial e_{min}}{\partial a} & \frac{\partial e_{min}}{\partial b} & \frac{\partial e_{min}}{\partial c} & \frac{\partial e_{min}}{\partial d} & \frac{\partial e_{min}}{\partial e} & \frac{\partial e_{min}}{\partial f} & \frac{\partial e_{min}}{\partial g} \end{pmatrix} \quad (6.44)$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{z}_1} = \mathbf{J}\mathbf{C}_{\mathbf{y}_1}\mathbf{J}^T \quad (6.45)$$

6.4.3. Determinación de la autocorrelación

En el apartado anterior se ha admitido, tanto para el cálculo como para la determinación de la matriz de covarianzas, ecuaciones 6.44 y 6.45, que no existe correlación en las desviaciones ortogonales d_i . Observando la figura 6.11(a) y la figura 6.11(b), la premisa anterior no es cierta, ya que para puntos situados a relativa corta distancia, la correlación es alta: si un punto posee una desviación positiva los puntos vecinos suelen tener también una desviación positiva.

Figura 6.11: *Desviaciones ortogonales.*

Para verificar la hipótesis de independencia de las desviaciones d_i se utiliza la función de autocorrelación [61, 121, 122]. La función de autocorrelación muestra los coeficientes de autocorrelación (20) en función del retardo, ecuación 6.46.

$$r(k) = \frac{\sum_{i=k+1}^n (d_i - \bar{d})(d_{i-k} - \bar{d})}{\sum (d_i - \bar{d})^2} \quad (6.46)$$

En la figura 6.12 se ve la variación del coeficiente de correlación en fundición del retardo “lag”. Para simplificar la determinación de las matrices de covarianzas, se toma como

coeficiente de correlación la línea marcada en negro. Es decir:

$$r_{d_i d_j} = \begin{cases} |i - j| < 300 & r = 0,7 \left(1 - \frac{\text{lag}}{300}\right) \\ |i - j| \geq 300 & r = 0 \end{cases} \quad (6.47)$$

$$c_{d_i d_j} = \begin{cases} i = j & c_{d_i}^2 = s_d^2 \\ i \neq j & c_{d_i d_j} = s_d^2 \cdot r_{d_i d_j} \end{cases} \quad (6.48)$$

Figura 6.12: *Función de autocorrelación de las desviaciones ortogonales.*

La matriz de covarianzas de las desviaciones ortogonales, $\mathbf{C}_d$, se determina utilizando los coeficientes de correlación $r_{d_i d_j}$, ecuación 6.47 y la estimación de la varianza de medida, s_d , ecuación 6.39, $\mathbf{C}_d$ tiene que ser definida positiva, por lo que todos sus autovalores deben ser mayores que cero.

6.4.4. Mínimos cuadrados generalizados

En caso de presencia de correlación y/o desigualdad entre incertidumbres, la suma de cuadrados a minimizar, Q_2 , iterativamente es dada por la ecuación 6.49, y la solución queda determinada en la ecuación 6.50.

$$Q_2 = \mathbf{d}^T [\mathbf{C}_d]^{-1} \mathbf{d} \quad (6.49)$$

$$\Delta \mathbf{y}_2 = \left(\mathbf{A}_1^T [\mathbf{C}_d]^{-1} \mathbf{A}_1 \right)^{-1} \mathbf{A}_1^T [\mathbf{C}_d]^{-1} \mathbf{d}_0 \quad (6.50)$$

$$s_Q = \sqrt{\frac{Q_2}{(n-m)}} \quad (6.51)$$

La solución puede expresarse como $\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_0 + \Delta \mathbf{y}_2$, junto con su matriz de covarianzas, $\mathbf{C}_{\Delta \mathbf{y}_2}$, ecuación 6.52.

$$\mathbf{C}_{\mathbf{y}_2} = \mathbf{C}_{\Delta \mathbf{y}_2} = \left(\mathbf{A}_1 [\mathbf{C}_d]^{-1} \mathbf{A}_1 \right)^{-1} \quad (6.52)$$

Si las distancias ortogonales d_i están distribuidas normalmente, entonces Q_2 seguirá una distribución Chi-cuadrado con $n-m$ grados de libertad, siendo $m = 5$, coeficientes de la forma cuadrática. Por tanto, la variable s_Q , que representa el error cuadrático medio, ecuación 6.50, poseerá esperanza matemática igual a uno [8, 98, 148]. El procedimiento de ajuste por mínimos cuadrados generalizados, descrito del modo anterior, parece bastante elegante y fácil de implementar. Sin embargo, cuando se analiza con un poco más de detalle se observa que implica la inversión de la matriz $\mathbf{C}_{\mathbf{y}_1}$ de dimensiones $n \times n$, donde n es un número muy elevado, no es una tarea fácil y requiere un elevado tiempo de proceso, pudiendo acarrear errores numéricos altos que se traduzcan a su vez en la presencia de errores numéricos significativos en $\mathbf{y}_2$.

Propagación de la incertidumbre utilizando la distancia ortogonal

Si para la estimación de incertidumbres es necesario realizar un ajuste por *Generalized Least Squares* (GLS), será necesario invertir la matriz $\mathbf{C}_d$. Para evitar esto, se propaga la matriz en el ajuste mediante *regresión ortogonal*, es decir se propaga la matriz $\mathbf{C}_d$ a través de dicho ajuste [74, 98]. La matriz de covarianzas, $\mathbf{C}_{\mathbf{y}_3}$, se determina aplicando la ley de propagación de matrices de covarianzas, ecuación 6.53.

$$\Delta \mathbf{y}_3 = - \left(\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1 \right)^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{d}_0 = \mathbf{M} \cdot \mathbf{d}_0 \quad (6.53)$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{y}_3} = \mathbf{M} \mathbf{C}_d \mathbf{M}^T \quad (6.54)$$

La solución del sistema se realiza definiendo $\mathbf{z}_3 = [x_0 \ y_0 \ e_{max}, e_{min} \ \theta]$ y aplicando la transformación $\mathbf{z}_3 = \mathbf{H}(\mathbf{y}_3)$, ecuación 6.43.

6.4.5. Correlación y longitud de corte

Si se eligen subconjuntos de puntos, figura 6.13 tal que sus elementos se encuentren separados entre sí el “lag” o *longitud de corte*, determinado con la función de autocorrelación, estos conjuntos no estarán correlados y el procedimiento descrito de la ecuación 6.36 a la ecuación 6.38 sería aplicable. El número de puntos por subconjunto es $n_p \approx n/\text{lag}$, en este caso el retardo es igual a 300, y el número de subconjuntos es $n_s \approx n/n_p$. Cada subconjunto se ajusta a una elipse, y posteriormente se calcula la media y la desviación típica de los resultados de los n_s subconjuntos. Como incertidumbre expandida de los valores medios, se podría tomar la desviación típica multiplicada por un factor de cobertura $k = 2$.

Figura 6.13: Intuición gráfica de la longitud de corte.

6.4.6. Experimentación

La medición de la elipse se ha realizado mediante el instrumento óptico ya indicado: escáner comercial Canon PIXMA MP630 de hasta una resolución de 4800 ppm y área de trabajo de 216 x 297 mm. Todas las mediciones han sido realizadas con una resolución de 1200 ppm, con el fin de permitir un manejo razonable de las imágenes obtenidas, con el software MATLAB y el hardware, PC con procesador i7 a 2.8 GHz, 8Gb de RAM y sistema operativo Windows 7 Profesional 64 bits.

La elipse se mide a partir de $n = 5144$ puntos de palpado, trabajando con una resolución de 1200 dpi, equivalente a una división de escala de $21,2 [\mu\text{m}]$. Si no existiera correlación entre los puntos, la incertidumbre de medida sería proporcional a $1/\sqrt{n} \approx 1/\sqrt{5144} \cong$

0,014. Al existir correlación el número de subconjuntos es mucho menor que el número de datos, por tanto $1/\sqrt{n_p} = 1/\sqrt{17} \cong 0,24$. Es decir, unas 17 veces superior a la estimación basada en la no presencia de correlación.

Utilizando las ecuaciones 6.27 hasta 6.32, y los 5144 puntos de palpado se obtienen los resultados de la tabla 6.3, fila MMCC ordinarios. Esta solución se considera como la solución inicial, $\mathbf{y}_0 = [a_0 b_0 c_0 d_0 f_0]^T$. $\mathbf{y}_0$ se modifica utilizando la distancia ortogonal, ecuaciones 6.31 hasta la 6.36, obteniéndose $\mathbf{y}_1 = [a_1 b_1 c_1 d_1 f_1]^T$, tabla 6.3 fila Regresión Ortogonal. La matriz de coeficientes de correlación para la solución queda reflejada en la ecuación 6.55.

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}_1} = \begin{pmatrix} 1 & -0,07 & -0,06 & -0,98 & -0,20 \\ -0,07 & 1 & -0,20 & +0,17 & -0,33 \\ -0,06 & -0,20 & 1 & +0,15 & +0,97 \\ -0,98 & +0,17 & +0,15 & 1 & +0,27 \\ -0,20 & -0,33 & +0,97 & +0,27 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.55)$$

Aplicando la transformación de la ecuación 6.44 es calculada la solución:

$$\mathbf{z}_1 = [x_0 y_0 e_{max} e_{min}, \theta]_{(y=y_1)}^T$$

La incertidumbre asociada a esta nueva variable es determinada sustituyendo en la ecuación 6.45 obteniéndose los resultados de la tabla 6.3, regresión ortogonal con cambio de variable, y la correspondiente matriz de los coeficientes de correlación, ecuación 6.56.

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}_1} = \begin{pmatrix} 1 & +0,54 & +0,00 & -0,00 & -0,00 \\ +0,54 & 1 & +0,00 & -0,00 & +0,00 \\ +0,00 & +0,00 & 1 & +0,49 & +0,01 \\ -0,00 & -0,00 & +0,49 & 1 & +0,00 \\ -0,00 & +0,00 & +0,01 & +0,00 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.56)$$

Las incertidumbres obtenidas para $\mathbf{z}_1 = [x_0 y_0 e_{max} e_{min} \theta]_{y=y_1}^T$ son del orden del micrómetro, mucho más pequeñas que la división de escala del instrumento, 21,2 $[\mu\text{m}]$. Esto entra en contradicción con la recomendación general en metrología dimensional que indica que no deben asignarse incertidumbres inferiores a la división de escala del instrumento, o a lo sumo, media división de escala [38].

Tabla 6.3: Resultados obtenidos con la simulación en Matlab.

MMCC	a_0 [mm ⁻²]	b_0 [mm ⁻²]	c_0 [mm ⁻²]	d_0 [mm ⁻¹]	f_0 [mm ⁻¹]	s_0 [mm]
Ordinarios	7,4822E-04	-4,7565E-04	6,4861E-04	-2,7124E-02	2,4778E-02	5,50E-04
Regresión	a_1 [mm ⁻²]	b_1 [mm ⁻²]	c_1 [mm ⁻²]	d_1 [mm ⁻¹]	f_1 [mm ⁻¹]	s_1 [mm]
Ortogonal	7,4846E-04	-4,7564E-04	6,4895E-04	-2,7126E-02	2,4785E-02	2,50E-03
	$U(a_1)$ [mm ⁻²]	$U(b_1)$ [mm ⁻²]	$U(c_1)$ [mm ⁻²]	$U(d_1)$ [mm ⁻¹]	$U(f_1)$ [mm ⁻¹]	
	9,0000E-08	4,0000E-08	9,0000E-08	1,9000E-08	1,8000E-08	
Cambio	x_0 [mm]	y_0 [mm]	e_{max} [mm]	e_{min} [mm]	θ [°]	
Variable	2,2408E+01	-2,1768E+01	1,1190E+01	2,5855E+01	-4,2014E+01	
Regresión	$U(x_0)$ [mm]	$U(y_0)$ [mm]	$U(e_{max})$ [mm]	$U(e_{min})$ [mm]	$U(\theta)$ [°]	
Ortogonal	1,2000E-03	1,2000E-03	1,5000E-03	3,1000E-03	3,9000E-03	
MMCC	x_0 [mm]	y_0 [mm]	e_{max} [mm]	e_{min} [mm]	θ [°]	
Generalizados	2,2408E+01	-2,1768E+01	1,1190E+01	2,5855E+01	-4,2014E+01	
	$U(x_0)$ [mm]	$U(y_0)$ [mm]	$U(e_{max})I$ [mm]	$U(e_{min})$ [mm]	$U(\theta)$ [°]	
	1,6200E-02	1,7600E-02	1,4200E-02	2,4500E-02	5,3300E-02	
Propagación	x_0 [mm]	y_0 [mm]	e_{max} [mm]	e_{min} [mm]	θ [°]	
Regresión	2,2408E+01	-2,1768E+01	1,1190E+01	2,5855E+01	-4,2014E+01	
Ortogonal	$U(x_0)$ [mm]	$U(y_0)$ [mm]	$U(e_{max})$ [mm]	$U(e_{min})$ [mm]	$U(\theta)$ [°]	
	1,6500E-02	1,7700E-02	1,4500E-02	2,4900E-02	5,5000E-02	
Longitud de	x_0 [mm]	y_0 [mm]	e_{max} [mm]	e_{min} [mm]	θ [°]	
corte	2,2408E+01	-2,1768E+01	1,1190E+01	2,5855E+01	-4,2014E+01	
	$U(x_0)$ [mm]	$U(y_0)$ [mm]	$U(e_{max})$ [mm]	$U(e_{min})$ [mm]	$U(\theta)$ [°]	
	1,4300E-02	1,6000E-02	1,2700E-02	1,9000E-02	4,5300E-02	

Tabla 6.4: Comparación de las incertidumbres expandidas obtenidas.

Regresión Ortogonal		$U(x_0)$ [mm]	$U(y_0)$ [mm]	$U(e_{max})$ [mm]	$U(e_{min})$ [mm]	$U(\theta)$ [°]
		0,0012	0,0012	0,0015	0,0031	0,0039
MMCCGG		$U(x_0)$ [mm]	$U(y_0)$ [mm]	$U(e_{max})$ [mm]	$U(e_{min})$ [mm]	$U(\theta)$ [°]
		0,0162	0,0176	0,0142	0,0245	0,0533
Propagación R.Ortogonal		$U(x_0)$ [mm]	$U(y_0)$ [mm]	$U(e_{max})$ [mm]	$U(e_{min})$ [mm]	$U(\theta)$ [°]
		0,0165	0,0177	0,0145	0,0249	0,055
Longitud de corte		$U(x_0)$ [mm]	$U(y_0)$ [mm]	$U(e_{max})$ [mm]	$U(e_{min})$ [mm]	$U(\theta)$ [°]
		0,0143	0,016	0,0127	0,019	0,0453
COMP. 1	MMCCGG/RO	$\Delta U(x_0)$	$\Delta U(y_0)$	$\Delta U(e_{max})$	$\Delta U(e_{min})$	$\Delta U(\theta)$
		14,0476	14,2669	9,2845	7,7817	13,5182
COMP. 2	MMCCGG/PRO	$\Delta U(x_0)$	$\Delta U(y_0)$	$\Delta U(e_{max})$	$\Delta U(e_{min})$	$\Delta U(\theta)$
		0,9852	0,9936	0,9792	0,9837	0,9681
COMP. 3	MMCCGG/LC	$\Delta U(x_0)$	$\Delta U(y_0)$	$\Delta U(e_{max})$	$\Delta U(e_{min})$	$\Delta U(\theta)$
		1,1354	1,0968	1,1138	1,2878	1,1753
COMP. 4	PRO/LC	$\Delta U(x_0)$	$\Delta U(y_0)$	$\Delta U(e_{max})$	$\Delta U(e_{min})$	$\Delta U(\theta)$
		1,1524	1,1039	1,1375	1,3091	1,2140

El análisis de correlación de las distancias ortogonales se ha determinado con ayuda de la función autocorrelación y con las simplificaciones realizadas en las ecuaciones 6.47 y 6.48. La matriz C_d debe ser definida positiva como toda matriz de covarianzas. Para ello se determinan los valores propios, máximo y mínimo, de dicha matriz:

$$\begin{aligned}\lambda_{max} &= +(575,7 [\mu\text{m}])^2 \\ \lambda_{min} &= +(0,5 [\mu\text{m}])^2\end{aligned}$$

Con lo que queda demostrado que $\mathbf{C}_d$ es definida positiva. El procedimiento de los mínimos cuadrados generalizados, MMCC, está descrito en la ecuación 6.50. Determinando los valores de s_Q y Q_2 , ecuaciones 6.49 y 6.51, para el procedimiento de MMCC ordinarios, para la regresión ortogonal, y para MMCC generalizados se obtienen los valores de la tabla 6.5.

Tabla 6.5: Comparación de los métodos de ajuste.

Método de Ajuste	s_Q	Q_2
MMCC ordinarios	1,00560	5196,7
Regresión Ortogonal	1,00533	5194,0
MMCC generalizados	1,00572	5198,0

La mejora teórica introducida por el ajuste de MMCC generalizados queda totalmente compensada por los errores numéricos que aparecen en la inversión de la matriz $\mathbf{C}_d$ conduciendo a peores resultados de ajuste, s_Q y Q_2 superiores, que los obtenidos mediante regresión ortogonal aunque no se tuviera en cuenta la correlación. Por tanto, el resultado $\mathbf{y}_2$ obtenido sería de peor calidad que el resultado $\mathbf{y}_1$ obtenido mediante regresión ortogonal. La estimación de incertidumbres $\mathbf{U}_{\mathbf{y}_2}$ obtenida de esta manera sería mejor, puesto que tiene en cuenta la presencia de correlación, que la obtenida mediante regresión ortogonal, que no tenía en cuenta la presencia de correlación. Por tanto, como resultado se toma $\mathbf{y}_1$, ecuación 6.38, acompañado de la estimación de incertidumbres $\mathbf{U}_{\mathbf{y}_2}$, ecuación 6.52. El resultado $\mathbf{z}_2 = [x_0 \ y_0 \ e_{\text{máx}} e_{\text{mín}} \ \theta]^T_{(y=y_2)}$ es definido utilizando la transformación $\mathbf{z}_2 = \mathbf{H}(\mathbf{y}_2)$, tabla 6.3, MMCC generalizados. La matriz de coeficientes de correlación correspondiente queda

de la siguiente forma:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}_2} = \begin{pmatrix} 1 & +0,56 & +0,05 & -0,01 & -0,03 \\ +0,56 & 1 & -0,00 & -0,00 & +0,01 \\ +0,05 & -0,00 & 1 & -0,27 & +0,05 \\ -0,01 & -0,00 & -0,27 & 1 & -0,01 \\ -0,03 & +0,01 & +0,05 & -0,01 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.57)$$

La propagación de la matriz $\mathbf{C}_d$ a través de la regresión ortogonal se realiza según las ecuaciones 6.53 y 6.54, obteniéndose $\mathbf{C}_{\mathbf{y}_3}$. Al igual que en los casos anteriores, se define un vector $\mathbf{z}_3 = [x_0 \ y_0 \ e_{\text{máx}} e_{\text{mín}} \ \theta]^T_{(y=y_3)}$ y se aplica la transformación $\mathbf{z}_3 = \mathbf{H}(\mathbf{y}_3)$, ecuación 6.43. La matriz de coeficientes de correlación correspondiente queda de la siguiente forma:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}_3} = \begin{pmatrix} 1 & +0,55 & +0,03 & -0,01 & -0,01 \\ +0,55 & 1 & 0,00 & 0,00 & +0,01 \\ +0,03 & 0,00 & 1 & -0,29 & +0,03 \\ -0,01 & 0,00 & -0,29 & 1 & 0,00 \\ -0,01 & +0,01 & +0,03 & 0,00 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.58)$$

Los resultados son prácticamente idénticos a los obtenidos con el ajuste por MMCC generalizados, aunque las incertidumbres son ligeramente superiores, una décima de micrómetro al alza en casi todos los casos. En los coeficientes de correlación tampoco hay diferencias significativas, ecuación 6.58, a lo sumo una variación de 0,02. Por tanto, se comprueba que el procedimiento de propagación de la matriz de incertidumbre $\mathbf{C}_d$ a través de la regresión ortogonal, conduce a los mismos resultados obtenidos mediante un ajuste por MMCC generalizados, pero evitando la inversión de la matriz $\mathbf{C}_d$. Por último se toman $n_s \approx n/n_p \approx 300$ subconjuntos de puntos en los que no existe correlación. Con estos subconjuntos se determina el vector $\mathbf{y}_0 = [a_0 \ b_0 \ c_0 \ d_0 \ f_0]^T$ mediante MMCC ordinarios, para todos los subconjuntos. Posteriormente, se determinan mediante regresión ortogonal los vectores $\mathbf{y}_1 = [a_1, b_1, c_1, d_1, f_1]^T$, y haciendo la correspondiente transformación $\mathbf{z}_1 = [x_0 \ y_0 \ e_{\text{máx}} \ e_{\text{mín}} \ \theta]^T_{(y=y_1)}$ para cada subconjunto. El valor más probable para cada uno de los parámetros de $\mathbf{z}_1$, es la media de los valores de los subconjuntos, y su incertidumbre expandida, el factor de cobertura, $k = 2$, por su varianza tabla 6.4 fila “longitud

de corte"; la matriz de los coeficientes de correlación está dada en la ecuación 6.59.

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}_4} = \begin{pmatrix} 1 & +0,58 & -0,05 & -0,23 & +0,21 \\ +0,58 & 1 & -0,09 & -0,06 & +0,14 \\ -0,05 & -0,09 & 1 & -0,50 & -0,17 \\ -0,23 & -0,06 & -0,50 & 1 & -0,18 \\ +0,21 & +0,14 & -0,17 & -0,18 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.59)$$

6.4.7. Análisis de resultados

Existe un incremento muy elevado en la estimación de las incertidumbres, fruto de la presencia de una fuerte correlación entre puntos de palpado, tabla 6.4 fila COMP 1. Este incremento no alcanza a las 17 preconizadas anteriormente, pero es muy elevado. Este valor límite se alcanzaría únicamente si el coeficiente de correlación entre puntos de palpado inferiores al retardo o "*lag*", hubiese sido exactamente igual a la unidad. Dado que la variación de dicho coeficiente es lineal, ecuación 6.18, el nivel medio de correlación es más bajo y, por consiguiente, es lógico que el incremento de incertidumbre sea menor. Para el caso de los MMCC generalizados, tabla 6.4, las incertidumbres son superiores a media división de escala del instrumento, $21,2/2 = 10,6 [\mu\text{m}]$, por lo que no se entraría en contradicción con la regla habitual en metrología dimensional que indica que no se deben asignar incertidumbres inferiores a media división de escala [38]. Se observa, asimismo, un cambio en el signo del coeficiente de correlación entre las longitudes de los semiejes $e_{\text{máx}}$ and $e_{\text{mín}}$ en la regresión ortogonal y en los MMCC generalizados, que pasa de ser positivo, +0,49 ecuación 6.56, a ser negativo, -0,27 ecuación 6.57, lo que tiene una gran importancia en la estimación de la incertidumbre asociada a la diferencia de longitudes entre semiejes. Las incertidumbres obtenidas en el caso de la longitud de corte son ligeramente inferiores a las obtenidas con los MMCC generalizados y con la propagación a través de la regresión ortogonal, entre un 10 % para la coordenada del centro y_0 y un 30 % para el semieje menor $e_{\text{mín}}$, tabla 6.4 filas COMP. 3 y COMP. 4. A pesar de estas variaciones, se pueden considerar estimaciones correctas, en comparación con las obtenidas por MMCC ordinarios y la regresión ortogonal en las que no se había tenido en cuenta la correlación.

En el caso de los coeficientes de correlación, ecuaciones 6.57, 6.58 y 6.59, las diferencias son un poco superiores en el caso de la longitud de corte, sobre todo en aquellos coeficientes donde aparece x_0 o θ .

Como se ha podido observar en esta sección y en secciones anteriores, sección 5.4.4, la presencia de correlación entre los puntos de medida puede conducir, cuando su número es muy elevado, habitual en metrología óptica, a una clara infravaloración de la incertidumbre del resultado de medida.

La presencia de correlación se ha de tener en cuenta para la estimación de los parámetros que describen el elemento geométrico, elipse en este caso, y sobre todo para la estimación de la incertidumbre de dichos parámetros. La incertidumbre de los parámetros posteriormente se utilizará para la determinación de la incertidumbre de medida, tanto por el método de la GUM [74], como por el del Suplemento 1 de la GUM [75]. Asimismo, se puede tener en cuenta la presencia de dicha correlación, a través de la introducción de una separación crítica entre los puntos, longitud de corte, en la estimación de incertidumbres sin necesidad de recurrir a un procedimiento de ajuste por mínimos cuadrados generalizados.

Sistema óptico

RESUMEN: En este capítulo se desarrolla el método de calibración del subsistema óptico de medida. La calibración se realiza en dos fases. La primera determina la variación en la perpendicularidad de los ejes Θ y la diferencia relativa entre las dimensiones del píxel, A . En la segunda se determina el coeficiente de calibración C_k que permite dotar de trazabilidad al sistema óptico. Para terminar, se presenta un modelo de calibración original, con precisión subpíxel, basado en el teorema de Bayes.

“ El ojo que tú ves no es ojo porque tú lo veas, es ojo porque te ve. ”

—Antonio Machado—

§ 7.1. Introducción

La bibliografía científica presenta diferentes procedimientos para la calibración del subsistema óptico de máquinas de visión [4, 7, 12, 30, 32, 92, 96, 132]. Dichos procedimientos se pueden clasificar en tres subgrupos:

- a.) Calibración del sistema a partir de la calibración del píxel, [4, 132].
- b.) Calibración del sistema a partir de la intensidad obtenida en la imagen, [29, 96].
- c.) Calibración del sistema realizando un modelo teórico del sistema óptico, [12, 32, 92].

Del análisis de los modelos anteriores, se deducen las tareas a desarrollar en este capítulo:

- a.) Normalización de la intensidad en la imagen.
- b.) Calibración del sistema óptico.

La normalización de intensidad es un procedimiento muy utilizado en astronomía desde los orígenes del CCD [37, 72, 73]. Consiste en eliminar el ruido debido a variaciones aleatorias que se producen a lo largo del tiempo, variaciones en el flujo luminoso debido a fuentes externas y a las imperfecciones que puedan existir tanto en el sistema de lentes como en el sensor CCD, tal y como establece de Santo *et al.* [30].

Una vez normalizadas las intensidades que se capturan en la imagen, se procede a la calibración del sistema óptico. Cabe la posibilidad de utilizar un modelo simplificado de cámara denominado cámara *pinhole*, teniendo en cuenta las distorsiones radiales y tangenciales, como desarrollan Caja *et al.* [12], o bien una generalización del modelo de una máquina medidora por coordenadas como proponen de Vicente *et al.* [32]. Debido a que las correcciones que obtienen Caja *et al.* [12, 13, 14, 15] son pequeñas, como era de esperar, el procedimiento que se presenta es más propicio para un laboratorio de metrología que para el ámbito industrial. En esta tesis se utilizan los principios propuestos por de Vicente *et al.* [32] para realizar la calibración del sistema óptico.

§ 7.2. Normalización de las intensidades de la imagen

El CCD asigna a cada píxel un nivel cuantizado, proporcional al número de fotones que chocan contra su área sensible. Diversas causas de errores son conocidas en los CCD, algunas de ellas dan variaciones aleatorias a lo largo del tiempo, otras dan variaciones espaciales, es decir, variaciones en la respuesta de cada píxel al flujo de fotones. Algunos dependen de la temperatura, pero otros no. Con el fin de realizar la normalización de la intensidad recibida por el CCD, se deben tener en cuenta los siguientes conceptos [83, 30]:

- “*Raw Field*” la imagen se toma directamente del CCD y no existe ningún procesamiento adicional
- “*Dark Field*” la imagen es tomada tapando la entrada de luz, por tanto cualquier señal que se tome es debida a la “*dark current*”. La *dark current* es prácticamente

proporcional al tiempo de exposición, pero cae cuando la temperatura del CCD desciende. Esta corriente se produce debido a las colas de la distribución de probabilidad de Maxwell Boltzman [67, 89], al existir una pequeña probabilidad de captura de los electrones. Este ruido puede enmascarar señales que sean débiles.

- “*Flat field*” la imagen se toma enfocando a un punto de iluminación uniforme. La imagen *Flat field* contiene la corriente *Dark Field* y, además, los efectos de eficiencia cuántica, relacionados con la sensibilidad a los fotones [10, 22, 90, 105].
- “*Bias field*” la imagen se toma en completa oscuridad, con un tiempo de exposición lo más pequeño posible. Mide la precarga que existe en los píxeles del CCD. Esta precarga es independiente de la temperatura o del tiempo de exposición.

Generalmente la adquisición por un CCD para cada píxel (i, j) puede ser modelada como:

$$I_{ACQ}(i, j) = I_{BIAS}(i, j) + I_{THERM}(i, j) + r(i, j)I_0(i, j) \quad (7.1)$$

I_{BIAS} , matriz que contiene la parte de ruido no debida a la temperatura; I_{THERM} , matriz que contiene la contribución del ruido que es función de la temperatura; $r(i, j)$, respuesta no uniforme del píxel debida a la luz, su valor varía con la posición (i, j) . Este valor no sólo se debe a imperfecciones en el CCD, sino a polvo y partículas que puedan aparecer sobre el CCD o sobre las lentes. $I_0(i, j)$, imagen deseada, debida únicamente al número de fotones que inciden en cada área del píxel. I_{BIAS} , no depende del tiempo de exposición, mientras I_{THERM} sí.

A temperatura constante y a tiempos de exposición constantes, el *dark frame* puede considerarse:

$$I_D(i, j) = I_{BIAS}(i, j) + I_{THERM}(i, j) \quad (7.2)$$

La imagen tiene una componente aleatoria y otra sistemática. La componente sistemática del *dark frame* tiene que ser corregida. Esta componente se puede evaluar experimentalmente, haciendo la medida de todos los píxeles de n imágenes $\{I_D(i, j)\}$ tomadas cuando el CCD no se expone a ninguna luz incidente. La media se sustrae de la imagen

adquirida:

$$I_C(i, j) = I_{ACQ}(i, j) - \overline{I_D(i, j)} \quad (7.3)$$

Después de la aplicación de la ecuación 7.3, la ecuación 7.1 queda:

$$I_{ACQ}(i, j) = r(i, j) I_0(i, j) \quad (7.4)$$

La matriz $r(i, j)$ puede determinarse experimentalmente: tomando una serie de imágenes $\{I_{FF}(i, j)\}$ manteniendo constante la iluminación, de esta forma el número de fotones que inciden en cada píxel del CCD es el mismo. Haciendo el promedio píxel a píxel de las imágenes anteriores se obtiene $\overline{I_{FF}(i, j)}$, *Flat field*. Considerando la media espacial de la intensidad:

$$I_{FF\,Mean} = \frac{1}{M \cdot N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} \overline{I_{FF}(i, j)} \quad (7.5)$$

donde M y N es el número de píxeles de la imagen. La respuesta de cada píxel puede ser escrita como:

$$r(i, j) = \frac{\overline{I_{FF}(i, j)}}{I_{FF\,Mean}} \quad (7.6)$$

$I_{FF\,Mean}$, se considera el valor de respuesta espacial buscado, mientras $\overline{I_{FF}(i, j)}$ es el valor no uniforme cuando la escena es uniformemente iluminada. Si se utiliza $I_{FF\,Max} = \max(\overline{I_{FF}(i, j)})$ se obtienen resultados muy aproximados, figura 7.1, pero nos ayuda a comparar con la imagen sin corregir.

Por tanto, después de la corrección la expresión que da la imagen de interés es:

$$\begin{aligned} I_0(i, j) &= \frac{I_C(i, j)}{r(i, j)} = \frac{I_{FF\,Max}}{\overline{I_{FF}}} I_C(i, j) = \\ &= \frac{I_{FF\,Max}}{\overline{I_{FF}(i, j)}} [I_{ACQ}(i, j) - \overline{I_D(i, j)}] \end{aligned} \quad (7.7)$$

Figura 7.1: Histogramas utilizando $I_{FF\text{ Mean}}$ y $I_{FF\text{ Max}}$.

7.2.1. Toma de datos

La toma de datos y el trabajo experimental en esta tesis, como ya se ha mencionado, se ha realizado con una máquina Tesa Visio 300, tabla 7.1. En primer lugar se determina el *dark field*, para ello se cubre la máquina y se apagan la luces del laboratorio, manteniendo la temperatura dentro del intervalo $20 \pm 1^\circ\text{C}$, figura 7.2. Se toman imágenes cada treinta segundos durante un periodo aproximado de dos horas.

Tabla 7.1: Características ópticas del equipo Tesa Visio 300.

Amplificación Óptica	Amplificación Total	Campo de Medida [mm] $\times$ [mm]		Tamaño nominal Píxel [μm] / [píxel]
1	33	6,61	4,95	8,60
1,5	50	4,41	3,31	5,75
2	66	3,32	2,49	4,32
2,5	83	2,65	1,99	3,45
3	100	2,20	1,65	2,87
3,5	117	1,89	1,41	2,46
4	133	1,65	1,24	2,15
4,5	150	1,45	1,09	1,89

El *dark field*, en general es insignificante y se ignora en un sistema CCD en el visible usando tiempos de exposición bajos, pero son importantes en sistemas basados en el infrarrojo o cuando se utilizan grandes tiempos de exposición; este efecto se minimiza con la refrigeración del CCD, pero la corrección ha de ser evaluada y aplicada. En este caso, se tiene en cuenta la componente del *dark field*, siendo prácticamente independiente frente a las ampliaciones utilizadas, figura 7.3.

(a) Patrón de puntos y sensores de temperatura en la máquina Tesa Visio 300 . (b) Máquina Tesa Visio 300 cubierta para evitar la influencia de fuentes externas de luz.

Figura 7.2: Toma de datos para normalizar la intensidad de la imagen, con la máquina Tesa Visio 300.

Por su parte, la componente *flat field* dependerá de la intensidad del sistema de iluminación y del sistema óptico con que se realice la captura de la imagen, figura 7.4. Al igual que en el caso anterior, se toman imágenes de una zona iluminada uniformemente durante unas dos horas cada 30 segundos, a una temperatura controlada de 20 ± 1 [°C]. La máquina Tesa Visio 300 tiene un campo de medida de $300 \times [\text{mm}] \times 200 [\text{mm}] \times 150 [\text{mm}]$, resolución de $1 [\mu\text{m}]$, con una mesa de medida manual. El sistema óptico cuenta con un sensor CCD de media pulgada, con un número efectivo de píxeles de 782×582 , y número de píxeles registrado en la imagen de 768×576 . El proceso que se realiza para pasar de unos a otros depende de cada fabricante, por lo que se opta por suponer que el área de medida es el área de detección $6,4 \times 4,8 \text{ mm}^2$, con un tamaño de 768×576 píxeles, lo que se significa un área de detección por píxel de $8,3 \times 8,3 \mu\text{m}^2$. Todas las medidas se han realizado con luz episcópica mediante a un anillo de 48 leds que lleva incorporado la máquina. La intensidad de la luz se ha mantenido constante en todas las tomas de datos al 60 % con el fin de evitar el fenómeno de *blooming* [45]. El *blooming* es un fenómeno por el cual los foto-electrones después de saturar un píxel elevan la intensidad o saturan a sus vecinos.

(a) *Dark Field* medido en la oscuridad para una amplificación óptica de 3.

(b) Desviación del *Dark Field* medido en la oscuridad para una amplificación óptica de 3.

(c) *Dark Field* medido en la oscuridad para una amplificación óptica de 4,5.

(d) Desviación del *Dark Field* medido en la oscuridad para una amplificación óptica de 4,5.

Figura 7.3: Resultados de la medición del *Dark Field* en la máquina Tesa Visio 300.

Figura 7.4: Resultados de la medición del *Flat Field* en la máquina Tesa Visio 300.

Una vez realizada la normalización de la intensidad, el resultado es el que se observa en la figura 7.5. En las imágenes normalizadas las transiciones están mejor definidas, gradiente de intensidad, y por tanto se facilita la segmentación de las mismas.

(a) Imagen del patrón de puntos para $Z = 3$ antes de la normalización.

(b) Imagen del patrón de puntos para $Z = 3$ después de la normalización.

(c) Imagen del patrón de puntos para $Z = 4,5$ antes de la normalización.

(d) Imagen del patrón de puntos para $Z = 4,5$ después de la normalización.

Figura 7.5: Resultados de normalización en el patrón de puntos.

§ 7.3. Calibración del sistema óptico

Como se ha indicado previamente la calibración del sistema óptico se realiza en esta investigación utilizando el modelo de Vicente *et al.* [32] en el que se convierte un escáner comercial en una máquina medidora por coordenadas bidimensional. Para ello se emplea un artefacto sin calibrar, utilizando el concepto de autocalibración [44, 51], figura 7.6. El artefacto se mide en varias posiciones permitiendo la eliminación de los errores geométricos. En este caso se ha utilizado como artefacto un patrón de puntos MAX LEVY, anexo D, de $25 \text{ [mm]} \times 25 \text{ [mm]}$, con paso fijo de $0,125 \text{ [mm]}$ y diámetro de $0,065 \text{ [mm]}$, figura 7.5.

Figura 7.6: Método de la autocalibración: relación entre las posiciones a medir, y las localizaciones del artefacto.

Figura 7.7: Sistemas de referencia antes y después del ajuste.

Sean (p, q) las coordenadas del subsistema de visión en píxeles, figura 7.7. La referencia propia de la máquinas no es cartesiana, ya que si se toman las curvas para $p = cte.$ o $q = cte.$ en general no serán líneas rectas; tampoco se conservará el paralelismo ni la perpendicularidad; el píxel no será cuadrado y habrá diferencias entre el tamaño en p y en q . Debido a lo anterior, la distancia entre dos puntos A y B es igual a $\sqrt{\Delta p^2 + \Delta q^2}$, donde $\Delta p = p_B - p_A$ y $\Delta q = q_B - q_A$ no será invariante ante rotaciones y traslaciones. Este problema se soluciona buscando una función $\mathbf{f}(x, y) = \mathbf{f}(p, q)$, en la que la distancia $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ sea invariante frente a rotaciones y traslaciones.

Para obtener la función $\mathbf{f}$ se realizan las siguientes suposiciones:

- El origen de ambos sistemas es el mismo.
- Es posible elegir la orientación del sistema cartesiano (x, y) , de tal forma que $\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial p}$
- La resolución del sistema (x, y) se toma de forma que $\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial p} = 1$

Por tanto, linealizando la función, se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +A & \frac{1}{2}\Theta \\ \frac{1}{2}\Theta & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

donde $\frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial y}{\partial q} = 2A$ y $\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial p} = \frac{1}{2}\Theta$, donde A representa la diferencia relativa entre las dimensiones del píxel, en las direcciones p y q , y Θ representa la falta de perpendicularidad entre los ejes del sistema de referencia inicial.

Como la distancia $l_p = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre el origen y un punto tiene que mantenerse invariante, asumiendo que A y Θ tienen que ser valores cercanos a cero, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \begin{pmatrix} +A & \frac{1}{2}\Theta \\ \frac{1}{2}\Theta & -A \end{pmatrix} \\ l_p^2 &= x^2 + y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} (\mathbf{I} + \mathbf{G})^T (\mathbf{I} + \mathbf{G}) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \\ &\cong \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} (\mathbf{I} + 2\mathbf{G}) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.9)$$

por tanto:

$$l_p^2 = (1 + 2A)p^2 + 2\Theta pq + (1 - 2A)q^2 \quad (7.10)$$

La ecuación 7.10 se convierte a unidades de longitud multiplicando por la resolución de la máquina E_0 .

Al variar la orientación con respecto al sistema de referencia de la máquina, y si el mensurando es dimensionalmente estable, la distancia l_p del origen a un punto tiene que mantenerse constante, por tanto:

$$l_p^2 = (1 + 2A)p^2 + 2\Theta pq + (1 - 2A)q^2 = L_0^2 \quad (7.11)$$

Utilizando coordenadas polares $p = r \cos \alpha$, $q = r \sin \alpha$, $r = \sqrt{p^2 + q^2}$, $\alpha = \tan^{-1} \frac{q}{p}$ y sustituyendo en 7.11 se obtiene:

$$l_p^2 = (1 + 2A)r^2 \cos^2 \alpha + 2\Theta r^2 \sin \alpha \cos \alpha + (1 - 2A)r^2 \sin^2 \alpha = L_0^2 \quad (7.12)$$

Simplificando y considerando varias orientaciones α_i :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2r_1^2 \cos 2\alpha_1 & -2r_1^2 \sin 2\alpha_1 \\ 1 & -2r_2^2 \cos 2\alpha_2 & -2r_2^2 \sin 2\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -2r_i^2 \cos 2\alpha_i & -2r_i^2 \sin 2\alpha_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_0^2 \\ a \\ \theta \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} r_1^2 \\ r_2^2 \\ \vdots \\ r_i^2 \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{j} = \mathbf{b} \quad (7.14)$$

donde a es la estimación del parámetro A y θ es la estimación de Θ . El sistema se resuelve mediante un problema de mínimos cuadrados ordinarios estimando el vector de los coeficientes $\mathbf{j} = (L_0^2, a, \theta)^T$, y la matriz de covarianza $\mathbf{C}_j$ que representa la incertidumbre de los parámetros debida exclusivamente al proceso de ajuste [76].

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{b} \\ \mathbf{C}_j &= s^2 (\mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \\ s^2 &= \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{e}}{n - 3} \\ \mathbf{e} &= \mathbf{D}\mathbf{j} - \mathbf{b} \end{aligned} \quad (7.15)$$

donde s es el error cuadrático medio, n es el número de ecuaciones utilizadas y 3 es el número de incógnitas.

Una vez determinado $\mathbf{j}$, las coordenadas (p, q) se transforman a un sistema cartesiano (x, y) , y se realiza el proceso de calibración. Para ello se utilizará el factor C_k que se añadirá al modelo con el fin de obtener trazabilidad. Este factor se determina a partir de las mediciones de un patrón certificado. El patrón es una regla con una longitud nominal de 150 [mm] y una separación entre marcas de 0,1 [mm]. La escala ha sido calibrada por un laboratorio acreditado, obteniéndose $U(k=2) = 0,003$ [mm] para todo el campo de medida, anexo C.

Las coordenadas en el sistema cartesiano se corrigen a partir de la ecuación 7.8, aplicando los factores A y Θ . Por su parte, el parámetro de calibración C_k se obtiene a partir de las coordenadas (p, q) de la máquina mediante la expresión:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (1 + C_k) \left[\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +A & \frac{1}{2}\Theta \\ \frac{1}{2}\Theta & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} 1 + C_k + A & \frac{1}{2}\Theta \\ \frac{1}{2}\Theta & 1 + C_k - A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{7.16}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}_v \cdot \mathbf{p} \tag{7.17}$$

Particularizando la ecuación 7.17 para un sistema lineal, teniendo en cuenta que la longitud es función de las diferencias de las coordenadas en el sistema de referencia se obtiene:

$$E_0 (1 + c_k) l_i \cong l_{0i} \tag{7.18}$$

donde E_0 es la constante que transforma las unidades de [píxeles] a [mm], c_k es la estimación de C_k , y l_i y l_{0i} son las distancias medidas y valores del certificado de calibración, respectivamente. La determinación de C_k se realiza resolviendo por mínimos cuadrados el sistema de ecuaciones dado.

$$\begin{aligned}
S &= \sum (l_{0i} - E_0 (1 + c_k) l_i)^2 \\
\frac{\partial S}{\partial c_k} &= 0 \\
c_k &= \frac{E_0 \sum l_{0i} l_i - E_0^2 \sum l_i^2}{E_0^2 \sum l_i^2}
\end{aligned} \tag{7.19}$$

Para la determinación de la incertidumbre de c_k se tienen en cuenta el error cuadrático medio, u_E , y la incertidumbre que existe entre los trazos del patrón, u_0 . No es posible determinar la posible correlación entre las distancias de los trazos del certificado de calibración del patrón y el valor de c_k . Teniendo en cuenta que el coeficiente de correlación varía entre 0 y 1 para los valores l_{0i} del certificado, se toma el caso más desfavorable en el que el coeficiente de correlación es igual a 1. La incertidumbre de c_k será:

$$u(c_k) = \sqrt{u_E^2 + u_0^2} = \sqrt{\frac{s_e^2}{\sum E_0^2 l_i^2} + \left(\frac{\sum E_0 l_i}{\sum E_0^2 l_i^2} \right)^2 u_0^2} \tag{7.20}$$

§ 7.4. Toma de datos

El ajuste del subsistema de visión se ha realizado mediante la técnica de autocalibración usando como artefacto un patrón de puntos, figura 7.5. Como la geometría de la malla no varía con el tiempo, las diferencias que se obtengan en las diferentes medidas, serán debidas exclusivamente a los errores geométricos que introduce el subsistema de visión. Para ello se toman 16 imágenes, correspondientes a cuatro posiciones sobre el patrón, giradas 4 veces, figura 7.6.

Suponiendo que el número de orientaciones es alto y que los errores geométricos varían aleatoriamente al pasar de una orientación a otra, éstos se compensarán al analizar todas las orientaciones. Cada orientación se capturará diez veces, con un intervalo de treinta segundos entre ellas, con luz episcópica, intensidad lumínica del 60 %, y temperatura controlada 20 ± 1 [°C]. Esto se realiza de esta manera para poder tener información sobre la variación de las intensidades con el tiempo. Las imágenes se tratan con Matlab, una vez normalizadas sus intensidades, con el fin de determinar:

- a.) El borde y el paso del patrón de puntos.
 - Coordenadas (p, q) de los puntos que conforman el borde de los círculos del patrón se determinan utilizando el algoritmo de Canny [18].
 - Con estos valores se determinan las zonas en las que existe un punto del patrón, obteniéndose en cada una de ellas el borde con precisión subpíxel mediante el algoritmo de Trujillo Pino [149]. Las diferencias entre ambos algoritmos se pueden observar en la figura 7.8.

Figura 7.8: *Diferencias entre el algoritmo de Canny, en azul, y Trujillo Pino, en rojo, en un trazos de la regla calibrada.*

Figura 7.9: (Izquierda) Determinación de la orientación del patrón mediante el ángulo α , ángulo entre P y $P1$. El punto B representa el centroide y CM el centro de masas. (Derecha) Determinación del paso en un patrón de puntos circulares. La medida se realiza teniendo en cuenta un origen flotante y la distancia entre los vecinos más próximos.

- Conocidas las posiciones del borde, se determina el centro por dos procedimientos, mínimos cuadrados, y regresión ortogonal [31].
- Se determina el eje para determinar la orientación del patrón. El eje se forma mediante el centro de masas, punto CM , y el baricentro, punto B , del patrón de puntos a medir, figura 7.9.
- El paso entre los puntos, distancia entre las coordenadas de los centros, es determinada utilizando los cuatro vecinos más cercanos, figura 7.9. Con este procedimiento se determinan los pasos entre puntos, y sus orientaciones con respecto al subsistema de visión, PQ .

b.) El vector $\mathbf{j} = (L_0^2, a, \theta)$.

- El paso y el ángulo de cada una de las figuras del patrón de puntos, se determina en el sistema PQ . El ángulo se referencia en el sistema del centroide y el baricentro de forma que: $\alpha_{P1} = \alpha_P - \alpha$, donde α_{P1} es el ángulo con respecto al eje $P1$, α_P es el ángulo con respecto a P , y α es el ángulo entre P y $P1$.
- Con todos los valores anteriores se puede determinar la matriz $\mathbf{D}$, ecuación 7.14.

(a) Regla de vidrio calibrada, $U=0,003$ [mm]

(b) Ajuste de los trazos de la regla de vidrio mediante los algoritmos de Trujillo Pino y Canny.

Figura 7.10: *Patrón de trazos.*

- Determinación de la incertidumbre de $\mathbf{j}$
- c.) La resolución del subsistema de visión se obtiene de la tabla de propiedades dada por el fabricante, tabla 7.1 (página 99).
- d.) Determinación de la constante de calibración C_k , mediante la medida de la regla patrón descrita, situada aproximadamente paralela a los ejes de la máquina, figura 7.10.

§ 7.5. Resultados

Aplicando el algoritmo explicado en la sección anterior, se obtienen los resultados de las tablas 7.2 y 7.3 para ampliaciones de 3 y 4,5 aumentos, respectivamente. Los valores de la columna “Media” expresan la media aritmética de los valores tomados. La incertidumbre de medida asociada se determinará mediante el procedimiento descrito en la GUM, [74].

$$\overline{L_0} = \frac{L_{01} + L_{02} + L_{03} + L_{04}}{4} \quad (7.21)$$

$$u^2(\overline{L_0}) = \left(\frac{\partial \overline{L_0}}{\partial L_{01}}\right)^2 u_{L_{01}}^2 + \left(\frac{\partial \overline{L_0}}{\partial L_{02}}\right)^2 u_{L_{02}}^2 + \left(\frac{\partial \overline{L_0}}{\partial L_{03}}\right)^2 u_{L_{03}}^2 + \left(\frac{\partial \overline{L_0}}{\partial L_{04}}\right)^2 u_{L_{04}}^2 \quad (7.22)$$

$$u^2(\overline{L_0}) = \frac{1}{4} (u_{L_{01}}^2 + u_{L_{02}}^2 + u_{L_{03}}^2 + u_{L_{04}}^2) \quad (7.23)$$

Tabla 7.2: Resultado de la calibración para el sistema óptico utilizando luz episcópica, para $Z = 3$, para 4 posiciones diferentes del patrón. La incertidumbre expandida se calcula para un factor de cobertura $k = 2$.

	Posición 01	Posición 02	Posición 03	Posición 04	Media	$U(j_i)$
L_o^2 [-]	1920,17	1916,63	1920,15	1915,25	1918,049	1,85
a [-]	0,00062	0,00064	-0,00056	0,00027	0,00024	0,00066
θ [-]	-0,00053	0,000022	-0,0011	0,0015	-0,000029	0,0016
c_K [-]	-0,005	-0,005	-0,005	-0,005	-0,0050	0,0024

Tabla 7.3: Resultado de la calibración para el sistema óptico utilizando luz episcópica, para $Z = 4,5$, para 4 posiciones diferentes del patrón. La incertidumbre expandida se calcula para un factor de cobertura $k = 2$.

	Posición 01	Posición 02	Posición 03	Posición 04	Media	$U(j_i)$
L_o^2 [-]	4335,18	4335,19	4333,85	4335,55	4334,94	0,66
a [-]	0,00230	0,00038	0,00025	0,00077	0,00093	0,00016
θ [-]	-0,0025	-0,0015	0,0013	-0,0003	-0,00075	0,00026
c_K [-]	-0,0060	-0,0060	-0,0060	-0,0060	-0,0060	0,0036

§ 7.6. Alternativa al Modelo CCD

Para la descripción del modelo CCD se utiliza el símil mecánico, descrito por Janesick, J. y Blouke, M. [72] que aparece en la figura 7.11(a).

La luz que recibe el sensor es proporcional a la intensidad que recibe y, por tanto, al área que existe sobre él. Esto mismo es descrito por Bayley [4] y por Trujillo Pino *et al.* [149]. Partiendo de la premisa anterior, se toman en consideración las siguientes hipótesis:

(a) Ejemplo CCD tomado de [72]

(b) Sistemas de referencia: cartesiano (xy), y del píxel (uv).

Figura 7.11: *Sistemas de Referencia: Sistema Cartesiano, Sistema Píxel, y Sistema de Intensidades.*

- a.) Se trabaja con un plano a una distancia infinitesimal de la superficie del CCD y de las mismas dimensiones.
- b.) Existen tres sistemas de referencia diferentes: sistema de coordenadas del sistema óptico, coordenadas en píxeles y sistema de intensidad de la luz, figura 7.11(b).

El paso de un sistema de referencia a otro es un proceso sencillo, basta multiplicar las coordenadas de un sistema por una matriz y se obtienen las coordenadas en el nuevo sistema.

Utilizando un cambio de base y una traslación:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x/p_x \\ y/p_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ccd_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

En coordenadas homogéneas:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/p_y & ccd_y \\ 1/p_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.25)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}_{\text{CCD}} \cdot \mathbf{x} \quad (7.26)$$

Los valores p_x , p_y , ccd_y , son, respectivamente: el tamaño del píxel en el eje x , el tamaño del píxel en el eje y , y el tamaño del CCD en y , todos en [mm]. Introduciendo los tamaños de píxel p_x y p_y se consigue que las ecuaciones sean dimensionalmente correctas. Con el fin de utilizar la ecuación 7.26 en ambos sentidos se determina la inversa de la matriz $\mathbf{T}_{\text{CCD}}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p_x & 0 \\ -p_y & 0 & ccd_y \cdot p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_{\text{CCD}}^{-1} \cdot \mathbf{u} \quad (7.28)$$

7.6.1. Modelo para transformar el área en intensidad. MCCD1

Para definir este modelo se utilizan los esquemas de la figura 7.12, generando sendos ficheros en Microstation® con los que ver el comportamiento de las áreas y poder determinar los puntos de intersección, y en Matlab® para comparar los resultados anteriores. El paso del sistema cartesiano (x, y) al del píxel (u, v) , filas y columnas, se realiza dividiendo las coordenadas (x, y) entre el tamaño del píxel del CCD, es decir p_x y p_y en mm. Para un sensor de $\frac{1}{2}''$, $6,4$ [mm] $\times$ $4,8$ [mm], el tamaño de píxel efectivo será de $8,33$ [μm] $\times$ $8,33$ [μm], $p_x = p_y = 8,33$ [μm].

$$\alpha_x \leq \frac{x}{p_x} < \alpha_x + 1 \quad (7.29)$$

$$\alpha_y \leq \frac{y}{p_y} < \alpha_y + 1 \quad (7.30)$$

$$u = \frac{x}{p_x} \quad (7.31)$$

$$v = \frac{y}{p_y} \quad (7.32)$$

Una vez dentro del píxel, figura 7.12(c), el valor de (u, v) está delimitado por dos parámetros $\alpha_x \in \mathbb{N}$ y $\alpha_y \in \mathbb{N}$. Debido a la organización de las matrices, y en concreto de las imágenes, los números naturales también servirán como localizadores de la intensidad que recibe el sensor CCD, ya que $\alpha_x + 1$ y $\alpha_y + 1$ es la posición del píxel.

Por tanto, si un píxel tiene su área totalmente cubierta, el CCD indicará I_A , *intensidad del cuerpo*, por el contrario si el píxel recibe toda la intensidad de la fuente de luz, el CCD

(a) Descripción del Problema

(b) Determinación de intensidades.

(c) Sistema de coordenadas

(d) Parámetros para conversión de la intensidad en píxel.

Figura 7.12: Cambio de sistema de Referencia. Paso de coordenadas cartesianas del sistema óptico al sistema de píxeles. Definición del problema.

indicará I_B , *intensidad del fondo*, figura 7.12(d) :

$$I = (I_A - I_B) \cdot A + I_B \quad (7.33)$$

donde A es el área cubierta por la superficie del polígono. Las intensidades determinadas por la ecuación 7.33 $I \in [0, 255]$ donde $I \in \mathbb{R}$. Al guardar la imagen, las intensidades en los píxeles se convierten a una variable integer de 8 bits $I \in \mathbb{N}$, por lo que se produce una pérdida de información.

$$I_N = \text{round}(255 \cdot I) \quad (7.34)$$

donde la función **round** realiza el redondeo del número, I_N son las intensidades redondeadas a su parte entera pertenecientes al intervalo $[0, 255]$, e I es la intensidad real dentro del intervalo $[0, 1]$ obtenida a partir del área.

Para poder crear la imagen a partir de los puntos en las coordenadas cartesianas, primero se convierten las coordenadas a píxeles mediante la ecuación 7.25. Se supone que *los puntos se unen mediante rectas*. Por lo que se definen las rectas que unen dichos puntos, $u = a \cdot v + b$. Los puntos de corte son las intersecciones de las rectas con la cuadrícula teórica del CCD. Para ello se utilizan dos suposiciones:

- a.) Cortes con las horizontales de la cuadrícula del CCD.
- b.) Cortes con las verticales de la cuadrícula del CCD.

En primer lugar se determinan los parámetros de la recta, utilizando los puntos extremos; se introducen las coordenadas conocidas de la cuadrícula del CCD, u_{corte} o v_{corte} ; la coordenada que falta se calcula utilizando la ecuación de la recta. Así para los cortes horizontales se tienen:

$$v'_{\text{cortes}} = \frac{u_{\text{cortes}} - b}{a} \quad (7.35)$$

Y para los cortes verticales:

$$u'_{\text{cortes}} = a \cdot v_{\text{cortes}} + b \quad (7.36)$$

Con el procedimiento anterior queda definido el perímetro de un polígono. Utilizando la función de Matlab **inpolygon** se definen las áreas en los píxeles del borde de la siguiente manera:

- Se analiza el borde píxel por píxel. En cada píxel se pueden encontrar los puntos de corte con la cuadrícula anteriormente determinada.
- El área se calcula con los puntos de corte y las puntos que definen el píxel. La función `inpolygon` indica cuáles de los puntos están dentro del polígono anteriormente descrito.
- Con los puntos que han quedado se determina el área, utilizando la función `polyarea`.
- Una vez determinada área, la intensidad en el píxel está dada por la ecuación 7.33.

Este es el procedimiento que se utiliza para realizar imágenes sintéticas como las mostradas en la figura .

(a) Estrella

(b) Elipse

(c) Borde de una imagen sintética.

(d) Patrón de pentágonos.

Figura 7.13: Figuras sintéticas en las que la intensidad es proporcional al área cubierta.

7.6.2. Clasificación de los píxeles. MCCD2

En general, el proceso de obtención de coordenadas se realiza en sentido inverso al descrito en la sección anterior. Para afrontar esta tarea, en primer lugar se realiza una

clasificación de los píxeles en función de las posibles “áreas” que pueden encerrar dentro, figura 7.14.

Figura 7.14: Tipos de píxel, en función de las caras que corta el área que pasa a través de ellos.

Los píxeles se denominan: como $T0$ si no cortan ninguna de sus caras, $T1$ si corta una cara, $T290$ y $T2180$ si cortan en dos caras a noventa o ciento ochenta grados, $T3$, $T30$ y $T4$ que cortan en 3 o cuatro caras del píxel. Como primera consecuencia de la clasificación y de la relación entre áreas e intensidades, podemos ver en la figura 7.14, que conociendo las intensidades de los píxeles vecinos se pueden determinar el tipo de píxel con el que se está trabajando.

Figura 7.15: Píxel tipo $T4$, formato más habitual.

En una primera observación se eliminan los siguientes tipos: $T0$, $T2180$, y $T30$ ya que para poder analizarlos correctamente debería utilizarse un instrumento de medida con mayor resolución. Siguiendo el razonamiento anterior, el $T4$ debería eliminarse, pero la forma más habitual es la que se muestra en la figura 7.15, en donde $I_2 < I_B$.

7.6.3. Modelo inicial. MCCD3

Con el fin de determinar todas las propiedades de los píxeles $T290$, $T3$, y $T4$, los más habituales, se realiza el siguiente estudio:

- El nombre del tipo de píxel hace referencia al números de lados que el modelo de área toca. El tipo $T290$ toca dos lados a 90° , $T3$ toca tres lados, y $T4$ toca cuatro lados del píxel.
- Se dividen los lados del píxel en *mil partes*.
- En función del tipo de píxel que se genere, se toman puntos en los lados l_1 , l_2 , l_3 o l_4 , según corresponda. Por ejemplo, un píxel tipo $T290$ pueden tomar como origen l_1 , l_2 , l_3 o l_4 y como final l_2 , l_3 , l_4 o l_1 , respectivamente, figura 7.16.
- Se incluyen los vértices 12, 23, 34 y 41 según corresponda al tipo de píxel, siguiendo un sentido antihorario desde el punto de origen hasta el punto final, figura 7.16.

Figura 7.16: Selección de las líneas de origen y final para un píxel tipo $T290$.

- Se calcula el área con los puntos obtenidos anteriormente mediante la función **polyarea**, y la intensidad mediante $I = (I_A - I_B) A + I_B$. Las intensidades de la parte clara y oscura se toman como $I_A = 50$ e $I_B = 200$ respectivamente. Estos valores se generalizarán posteriormente para poder extrapolar el modelo.
- Los modelos correspondientes a $T290$ y $T4$, son complementarios el uno del otro, figura 7.17.

Figura 7.17: Modelo para la determinación de las propiedades del píxel. Se toma como media μ_i y varianza σ_i de los vértices más cercanos al píxel.

7.6.4. Modelo de vecindad. MCCD4

El modelo de vecindad utilizado es el que se muestra en la figura 7.18. El modelo toma como datos las intensidades de los píxeles y sus estadísticos, media μ_i y varianza σ_i . En una primera observación se pueden extraer las siguientes conclusiones:

Figura 7.18: El modelo se desarrolla a partir de las intensidades en los píxeles I_i .

- μ_{min} se corresponde con el punto más interior del píxel. Este punto será la referencia a la hora de localizar los puntos, con precisión subpíxel, sobre el borde de la imagen.
- σ_{max} se corresponde con un punto del borde de la imagen, y $\sigma \approx 0$ se corresponde a puntos cercanos a la intensidad oscura o clara, I_A e I_B , respectivamente.

Siguiendo el mismo procedimiento de generación de áreas de la sección anterior MCCD3, pero generalizado al área de 3×3 píxeles se determinan el tipo del píxel central y el comportamiento de sus ocho vecinos. En la figura 7.20 se representa un ejemplo para un incremento

Figura 7.19: Modelo $MCCD_4$, para la determinación de las distancias con respecto a los vértices.

Figura 7.20: Ejemplo del $MCCD_4$ para un sistema de 3×3 píxeles, con un incremento o paso de 1. Se ha simulado el número de áreas generadas, blanco, y el número de áreas efectivas para el píxel central, rojo.

de 1 píxel, para una imagen de 3×3 . Para el modelo MCCD4 se ha tomado un incremento entre puntos de 0,001 unidades lo que ha generado una salida de aproximadamente 500 000 datos para cada clase de píxel. Este proceso se ha llevado a cabo en el Centro de Supercomputación y Visualización de Madrid (CeSViMa), figura 7.21.

Figura 7.21: Pantalla de entrada del superordenador Magerit.

El modelo MCDD4 para obtener los puntos del borde debe realizar las siguientes operaciones:

- a.) Determinar el centro de masa del área del píxel inicial, mediante la función `polygeom.m`.
- b.) Determinar el vértice más cercano al centro de masa. Este punto se corresponderá con la media de las intensidades mínima μ_{min} , figura 7.19.
- c.) El vértice opuesto al de μ_{min} es de μ_{max} . En algunos casos, cuando intervienen en el cálculo del área cuatro o cinco puntos del píxel, tipos $T3$ y $T4$, se puede utilizar μ_{max} para simplificar los algoritmos. Los puntos del borde, son los puntos más cercanos al μ_{max} , figura 7.19.
- d.) Al final se obtienen las longitudes l_{ijk} con lo que queda totalmente determinada la posición del borde con aproximación subpíxel. La localización de los vértices, como orígenes de las longitudes l_{ijk} , se definen en la parte inferior de la figura 7.22, mediante una serie de intervalos cerrado-abierto.

De la definición de las propias longitudes l_{ijk} y de la observación de los posibles tipos de píxel, se obtiene el cuadro 7.4, generando otro criterio para la determinación del tipo del píxel en función de las longitudes a los vértices.

Figura 7.22: Distancias con respecto a los vértices: definiciones y localizaciones. Intervalo al que pertenecen cada uno de los vértices del píxel.

El modelo busca encontrar las relaciones entre las intensidades y los puntos de corte, como se puede apreciar en la figura 7.18. De los resultados obtenidos del modelo, se puede afirmar que las intensidades están correladas, y son función de la curva generadora de las áreas que inicialmente cubren los píxeles, como se puede ver en las tablas 7.5, 7.6 y 7.7.

7.6.5. Criterio bayesiano para la determinación de la distancia

Las longitudes con respecto a los vértices se han definido en la figura 7.22; al representar una de ellas frente a la intensidad del píxel en el que se desea determinar el borde, figura 7.23, se observa la imposibilidad de obtener alguna relación, aunque ciertamente existe, figura 7.23(b).

Con el fin de utilizar la información obtenida del modelo MCC4, se establece un modelo basado en la probabilidad bayesiana que a continuación se describe. Las variables y los parámetros que se utilizan son los siguientes:

- a.) Intensidad del píxel, $I \in \mathbb{N} \mid I \in [0, 255]^1$.
- b.) Tipo de píxel, $t_{pix} = \{T290, T3, T4\}$. Como se aprecia en la tabla 7.4 el tipo de píxel y la aparición de las distancias está relacionado.

¹Hay que tener en cuenta que la intensidad calculada por MCDD3 y por MCDD4 es un número real, mientras que la obtenida de la lectura de la imagen es un número natural.

Tabla 7.4: Clasificación de los píxeles en función de las distancias a sus vértices que definen el borde. El símbolo ♣ identifica longitudes $l_{ijk} \in [0, 1] \mid l_{ijk} \in \mathbb{R}$.

l_{121}	l_{122}	l_{232}	l_{233}	l_{343}	l_{344}	l_{414}	l_{411}	T. PÍXEL
♣	-	-	♣	-	-	-	-	3
-	-	♣	-	-	♣	-	-	3
-	-	-	-	♣	-	-	♣	3
-	♣	-	-	-	-	♣	-	3
♣	♣	-	-	-	-	-	-	290
-	-	♣	♣	-	-	-	-	290
-	-	-	-	♣	♣	-	-	290
-	-	-	-	-	-	♣	♣	290
♣	-	-	-	-	♣	-	-	4
-	-	♣	-	-	-	-	♣	4
-	♣	-	-	♣	-	-	-	4
-	-	-	♣	-	-	♣	-	4

Tabla 7.5: Coeficientes de Correlación para las Intensidades tipo T290.

T290	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9
I1	1.00	0.60	-0.12	0.60	0.09	-0.59	-0.12	-0.59	-0.67
I2	0.60	1.00	0.60	-0.01	0.16	-0.02	-0.59	-0.84	-0.59
I3	-0.12	0.60	1.00	-0.59	0.09	0.60	-0.67	-0.59	-0.12
I4	0.60	-0.01	-0.59	1.00	0.16	-0.84	0.60	-0.01	-0.59
I5	0.09	0.16	0.09	0.16	1.00	0.16	0.09	0.16	0.09
I6	-0.59	-0.02	0.60	-0.84	0.16	1.00	-0.59	-0.01	0.60
I7	-0.12	-0.59	-0.67	0.60	0.09	-0.59	1.00	0.60	-0.12
I8	-0.59	-0.84	-0.59	-0.01	0.16	-0.01	0.60	1.00	0.60
I9	-0.67	-0.59	-0.12	-0.59	0.09	0.60	-0.12	0.60	1.00

Tabla 7.6: *Coeficientes de Correlación para las Intensidades tipo T3.*

T3	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9
I1	1.00	0.60	0.00	0.60	0.02	-0.60	0.00	-0.60	-0.99
I2	0.60	1.00	0.60	0.00	0.21	0.00	-0.60	-0.82	-0.60
I3	0.00	0.60	1.00	-0.60	0.02	0.60	-0.99	-0.60	0.00
I4	0.60	0.00	-0.60	1.00	0.21	-0.82	0.60	0.00	-0.60
I5	0.02	0.21	0.02	0.21	1.00	0.21	0.02	0.21	0.02
I6	-0.60	0.00	0.60	-0.82	0.21	1.00	-0.60	0.00	0.60
I7	0.00	-0.60	-0.99	0.60	0.02	-0.60	1.00	0.60	0.00
I8	-0.60	-0.82	-0.60	0.00	0.21	0.00	0.60	1.00	0.60
I9	-0.99	-0.60	0.00	-0.60	0.02	0.60	0.00	0.60	1.00

Tabla 7.7: *Coeficientes de Correlación para las Intensidades tipo T4.*

T4	I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9
I1	1.00	0.60	-0.12	0.61	0.09	-0.59	-0.12	-0.59	-0.67
I2	0.60	1.00	0.60	-0.01	0.17	-0.02	-0.59	-0.84	-0.59
I3	-0.12	0.60	1.00	-0.58	0.09	0.60	-0.67	-0.59	-0.12
I4	0.61	-0.01	-0.58	1.00	0.16	-0.84	0.60	-0.02	-0.59
I5	0.09	0.17	0.09	0.16	1.00	0.17	0.08	0.16	0.08
I6	-0.59	-0.02	0.60	-0.84	0.17	1.00	-0.59	-0.01	0.60
I7	-0.12	-0.59	-0.67	0.60	0.08	-0.59	1.00	0.60	-0.12
I8	-0.59	-0.84	-0.59	-0.02	0.16	-0.01	0.60	1.00	0.60
I9	-0.67	-0.59	-0.12	-0.59	0.08	0.60	-0.12	0.60	1.00

(a) Vista general.

(b) Vista ampliada.

(c) Vista para un intervalo pequeño de longitudes $l_{121} \in [0,1,0,101]$.**Figura 7.23:** Longitud l_{121} en función de la intensidad I_k .

- c.) Distancias con respecto a los vértices, $l_{ijk} = \{l_{121}, l_{122}, l_{232}, l_{233}, l_{343}, l_{344}, l_{414}, l_{414}\}$, figura 7.22, donde cualquier longitud $l_{ijk} \in \mathbb{R} \mid l_{ijk} \in [0, 1]$.

La probabilidad bayesiana que se plantea es:

$$\begin{aligned}
 p(l_{ijk} | t_{pix}, I) &= \frac{p(t_{pix}, I | l_{ijk}) p(l_{ijk})}{p(t_{pix} | I) p(I)} = \frac{p(t_{pix}, I | l_{ijk}) p(l_{ijk})}{p(I | t_{pix}) p(t_{pix})} \\
 p(l_{ijk} | t_{pix}, I) &= \frac{p(I | t_{pix}, l_{ijk}) p(t_{pix} | l_{ijk}) p(l_{ijk})}{p(I | t_{pix}) p(t_{pix})} \\
 p(t_{pix}, l_{ijk}) &= p(t_{pix} | l_{ijk}) p(l_{ijk}) = p(l_{ijk} | t_{pix}) p(t_{pix}) \\
 p(t_{pix} | l_{ijk}) &= \frac{p(l_{ijk} | t_{pix}) p(t_{pix})}{p(l_{ijk})} \\
 p(l_{ijk} | t_{pix}, I) &= \frac{p(I | t_{pix}, l_{ijk}) p(l_{ijk} | t_{pix})}{p(I | t_{pix})} \tag{7.37}
 \end{aligned}$$

Como se puede observar, la ecuación 7.37 es igual que la ecuación 5.135 de la sección 5.5.2.

Para la determinación de las probabilidades se utilizan las siguientes suposiciones:

- $l_{ijk} = \{l_{121}, l_{122}, l_{232}, l_{233}, l_{343}, l_{344}, l_{414}, l_{411}\}$ existe una relación entre ellos: el tipo de píxel, tabla 7.4.
- $p(t_{pix})$, figura 7.17. El modelo MCCD4 da como resultado, aproximadamente, el mismo número de elementos para cada tipo de píxel.
- $p(I | t_{pix})$, $p(I | t_{pix}, l_{ijk})$, y $p(t_{pix} | l_{ijk})$ se obtienen del modelo MCCD4, a partir de las matrices de resultados, ecuación de Laplace 7.17.

Si se particulariza, por ejemplo, para una longitud, l_{121} (figura 7.22) y para el tipo de píxel $T290$ (figura 7.17):

$$p(l_{121} | T290, I_k) = \frac{p(I_k | T290, l_{121}) p(l_{121} | T290)}{p(I_k | T290)} \tag{7.38}$$

donde $l_{121i} \in (0, 1]$ e $I_k \in [0, 255]$. Con los valores de (l_{121i}, I_k) y el valor de la probabilidad $p(l_{121i} | T290, I_k)$ se genera una nube de puntos. Algunos ejemplos de las densidades de probabilidad de la ecuación 7.38 se pueden ver en la figura 7.24. Estas figuras variarán en función de los intervalos que se tomen, tanto para las intensidades como para las longitudes.

La solución para una intensidad I_m , será la longitud más probable l_{121m} , es decir, el intervalo en que la probabilidad $p(l_{121i} | T290, I_k)$ sea mayor. Este procedimiento se realiza

(a) Densidad de probabilidad $p(l_{121} | T290)$ (b) Densidad de probabilidad $p(l_{121i} | T290)$ (c) Densidad de probabilidad $p(I_k | T290)$ (d) Densidad de probabilidad $p(I_k | T290, l_{121i})$ **Figura 7.24:** Histogramas para la determinación de la probabilidad de Bayes.

a partir de los valores calculados en el modelo MCC4, tratados con Matlab. El proceso se puede resumir de la siguiente manera:

- a.) *Determinación del intervalo de l_{121i} .* Se toma un subintervalo de trabajo donde determinar la probabilidad: $l_{121i} \in [l_1, l_2] \mid [l_1, l_2] \in [0, 1]$.
- b.) *Determinación del intervalo de I_k .* De la misma manera que con la longitud, se toma un subintervalo de trabajo: $I_k \in [I_1, I_2] \mid [I_1, I_2] \in [0, 255]$.
- c.) *Determinación de la probabilidad.* La probabilidad se determina utilizando la ecuación 7.37.
- d.) *Representación de la gráfica de la probabilidad en función de l_{121} y I_k .* Con los datos anteriores se realiza un gráfico que relacione la probabilidad en función de la longitud y de la intensidad.

Todas las probabilidades de la ecuación 7.38 se obtienen mediante la ecuación de Laplace, ecuación 5.119.

7.6.6. Resultados

El modelo se ha ejecutado en *Magerit*, superordenador del CESVIMA, con los tiempos de ejecución mostrados en la tabla 7.8. El incremento de píxel es la variación que se toma para determinar el área de cálculo del modelo, figura 7.25. No se han podido simular con un intervalo menor de $\Delta\text{píxel} = 0,002$ ya que el tiempo máximo de ejecución permitido por trabajo enviado es de 72 horas.

Figura 7.25: Variación de las líneas y las áreas de cálculo en modelo de vecindad.

Tabla 7.8: *Tiempo de ejecución del modelo MCC4 en función del incremento de píxel.*

$\Delta\text{píxel}$	t [h]
0.008	0.0011
0.005	10.17
0.004	16.00
0.003	29.08
0.002	67.08

En el caso de $\Delta\text{píxel} = 0,002$ se tiene un conjunto de resultados total con más de nueve millones de elementos, para las tres clases de píxeles: $T290$, $T3$ y $T4$.

Se ha tratado de ver la posible relación entre las longitudes calculadas y las intensidades, figura 7.23(a). Como se vio anteriormente, tablas 7.5, 7.6, 7.7, existe cierta correlación entre los datos ya que siguen ciertos patrones, figura 7.23(b). La única forma que se ha encontrado de poder relacionar la intensidad del píxel central y las longitudes l_{ijk} ha sido mediante la ecuación de probabilidad 7.37.

Los resultados se han representado mediante la función **contour** de Matlab, obteniéndose las gráficas que muestran la probabilidad bayesiana en función de la longitud l_{ijk} y la intensidad del píxel central.

Por la definición del algoritmo, las probabilidades resultan:

$$p(l_{121} | t_{pix}, I) \cong p(l_{122} | t_{pix}, I) \cong p(l_{232} | t_{pix}, I) \cong \dots \cong p(l_{411} | t_{pix}, I) \quad (7.39)$$

Es decir, al incluirse todas las posibles rotaciones de un área dentro del píxel, se almacenará la misma pareja de longitudes para las diferentes rotaciones. Por este motivo únicamente existen *tres gráficas* de probabilidad, figura 7.26, frente a las veinticuatro posibles.

Para poder determinar correctamente la orientación, se ha de recurrir a los vecinos del píxel central que se ha tomado como referencia para el estudio.

En las figuras 7.26, 7.27 y 7.28 se muestran las probabilidades de que una longitud tenga un cierto valor, según el modelo MCCD4, en función únicamente de la intensidad del píxel a estudio o el central de la matriz de 3×3 . En realidad, el contenido de las mismas es un criterio de selección para las longitudes dentro del píxel: si se toma la intensidad de un píxel que pertenece al borde, con sus vecinos se determina la orientación del *área* que está representando dicha intensidad, y con el modelo MCCD4 se estiman los puntos

de corte sobre el perfil del píxel. El resumen de cada uno de los gráficos de contorno se muestra en las figuras 7.26(d), 7.27(d) y 7.28(d), donde se representan los tipos de píxeles más probables.

7.6.7. Validación del modelo con imágenes sintéticas

En las figuras anteriores se muestran las distintas probabilidades en función de las longitudes l_{ijk} y las diferentes intensidades I_k . Los gráficos de probabilidades realizan una clasificación de los tipos de píxeles más probables que se darán en la aproximación lineal, figuras 7.26(d), 7.27(d) y 7.28(d).

En una imagen sintética la caracterización del píxel se realiza observando los cuatro vecinos más próximos del píxel a estudio. Es decir, realizando la convolución de la matriz de intensidades con $h_{\text{píxel}}$:

$$h_{\text{píxel}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.40)$$

El tipo de píxel se define en función del número de intensidades iguales a la parte más clara o más oscura, I_B e I_A , obtenidas de la convolución anterior, figura ???. Un tipo T290 se define a partir de dos de los cuatro primeros vecinos tengan su intensidad igual a I_B ; T3 por un primer vecino con intensidad I_A y otro con I_B ; T4 mediante dos primeros vecinos con intensidad I_A . En una imagen ideal en escala de grises, existen dos niveles de intensidad que definen el interior y el exterior de un objeto, I_A e I_B ; y otra serie no definida que es parte del contorno o borde. En una imagen real el proceso no es tan sencillo, como se verá posteriormente, habrá que utilizar el histograma para determinar los niveles para I_A e I_B , pero ya no existe un valor único, sino un intervalo.

(a) Probabilidad $p(l_{ijk} | T290, I_p)$ en función de la longitud l_{ijk} .

(b) Detalle de la probabilidad $p(l_{ijk} | T290, I_p)$ en función de la longitud l_{ijk} .

(c) Detalle de la probabilidad $p(l_{ijk} | T290, I_p)$ en función de la longitud l_{ijk} .

(d) Explicación de las figura 7.26(b) y 7.26(c)

Figura 7.26: Probabilidades condicionadas $p(l_{ijk} | T290, I)$.

(a) Detalle de la probabilidad $p(l_{ijk} | T3, I_p)$ en función de la longitud l_{ijk} .

(b) Detalle de la probabilidad $p(l_{ijk} | T3, I_p)$ en función de la longitud l_{ijk} .

(c) Detalle de la probabilidad $p(l_{ijk} | T3, I_p)$ en función de la longitud l_{ijk} .

(d) Explicación de las figura 7.27(b) y 7.27(c)

Figura 7.27: Probabilidades condicionadas $p(l_{ijk} | T3, I)$.

(a) Probabilidad $p(l_{ijk} | T4, I_p)$ en función de la longitud l_{ijk} .

(b) Detalle de la probabilidad $p(l_{ijk} | T4, I_p)$ en función de la longitud l_{ijk} .

(c) Probabilidad $p(l_{ijk} | T4, I_p)$ en función de la longitud l_{ijk} .

(d) Explicación de las figura 7.28(b) y 7.28(c)

Figura 7.28: Detalle de la probabilidades condicionadas $p(l_{ijk} | T4, I)$.

Figura 7.29: Definición de área para los tipos T290, T3 y T4.

En este modelo, cada tipo de píxel tiene un área asociada a una intensidad. Estas áreas se determinan a partir de la figura 7.29, obteniéndose:

$$A_{T290} = \frac{l_1 \cdot l_2}{2} \quad (7.41)$$

$$A_{T3} = \frac{l_1 + l_2}{2} \quad (7.42)$$

$$A_{T4} = 1 - \frac{l_1 \cdot l_2}{2} \quad (7.43)$$

El algoritmo de validación realiza las siguientes tareas:

- a.) Determina el borde de la figura, en este caso buscando los puntos que no pertenecen a I_A ni a I_B .
- b.) Busca las intensidades de los ocho vecinos de cada píxel del borde.
- c.) A partir de las intensidades, determina las medias de intensidad en cada uno de los vértices, μ_1 , μ_2 , μ_3 y μ_4 , figura 7.18 .
- d.) La clasificación del píxel se realiza en función del número de I_B que tenga el píxel del borde en sus cuatro vecinos.
- e.) Conocido el tipo del píxel, se determina el vértice o los vértices que indican la orientación de cada una de las clases T290, T3 y T4. A partir del vértice de referencia, en el caso de las clases conjugadas T290 y T4 se define el borde. En el caso del tipo T3 la orientación se obtiene a partir del vecino más cercano con valor I_A . Conocida la orientación y los vértices de referencia se determina el borde, figura ??.
- f.) La determinación de las l_1 y l_2 se realiza de la siguiente forma:
 - f.i.) Se realiza una primera aproximación con el criterio bayesiano, que servirá como solución inicial.

- f.ii.) Partiendo de la intensidad del píxel, se determina el área dentro del píxel:

$$I = (I_A - I_B) A + I_B.$$
- f.iii.) El área calculada se iguala a las ecuaciones 7.41, 7.42, 7.43.
- f.iv.) La ecuación anterior se resuelve por mínimos cuadrados no lineales, utilizando la solución inicial de las longitudes anteriormente calculadas.
- g.) Las longitudes determinadas en el paso anterior se suman, siguiendo la orientación de cada píxel, a las coordenadas de los vértices de referencia en cada uno de los casos, obteniéndose las coordenadas del borde que se estaba buscando.

El algoritmo propuesto se compara con los algoritmos de Canny [18], y de Trujillo Pino *et al.* [149]. Como se puede observar, figura 7.30, el algoritmo con precisión subpíxel de Trujillo Pino y el propuesto se ajustan mejor que el de Canny. Por este motivo a partir de este momento sólo se trabajará con los algoritmos de precisión subpíxel.

Figura 7.30: Comparación del algoritmo propuesto (rojo) con los algoritmos de Canny (azul) y Trujillo Pino (amarillo) para detección de borde en una imagen.

Una vez verificada la validez del algoritmo, las coordenadas en píxeles se transforman a unidades de longitud mediante la ecuación 7.28.

La caracterización del mensurando se obtiene indirectamente mediante el ajuste por mínimos cuadrados de rectas, circunferencias y elipses, figura 7.31. Para cada uno de los ajustes se realiza el siguiente proceso:

- a.) En primer lugar se realiza la generación de la imagen virtual, figura 7.31, a partir de las coordenadas de su perímetro, ecuación 7.33.

- b.) Se determinan los puntos del borde por el algoritmo propuesto y por el de Trujillo Pino [149].
- c.) Si el objeto tiene varias curvas se separan, para poder hacer el ajuste por mínimos cuadrados. Si el mensurando a estudio se forma con líneas y curvas, la discriminación de las mismas se realizará mediante el coeficiente de correlación, figura 7.32.
- d.) Se convierten las posiciones en [píxel] por las correspondientes en [mm], mediante la ecuación 7.28.
- e.) Se determina la incertidumbre del algoritmo, mediante el error cuadrático medio, tablas 7.9, 7.10, 7.11.

(a) Triángulo para $Z=4,5$. (b) Sector circular $Z=4,5$. (c) Elipse para $Z=1$. (d) Elipse para $Z=4,5$.**Figura 7.31:** *Imágenes generadas para la validación del método.*

Para la determinación de las dimensiones de la elipse, se ha verificado la *autocorrelación* de las distancias ortogonales del píxel a estudio con todos los demás, figura 7.33. Como se puede observar, la correlación entre sus vecinos es pequeña por lo que no se tendrá en

(a) Separación de las tres líneas de un triángulo. (b) Separación de las tres líneas (2 rectas y 1 arco de circunferencia) de un sector circular.

Figura 7.32: Separación de las curvas del borde para un triángulo y un sector circular.

cuenta, obteniéndose los mismos resultados para la *regresión ortogonal*, la *propagación de la incertidumbre en la regresión ortogonal* y *MMCC generalizados* tabla 7.11.

Figura 7.33: Autocorrelación para las distancias ortogonales.

Las características principales de una imagen sintética son dos: la primera es la homogeneidad en la escala de grises, y por tanto la diferenciación clara de las denominadas intensidades I_A e I_B ; la segunda, el alto gradiente que existe entre las intensidades oscuras y claras y, en consecuencia, la estrechez o pequeño número de píxeles que forman el borde del mensurando. La iluminación es el medio de poder controlar el contraste que existe en una imagen. Las imágenes capturadas con luz diascópica presentan un alto contraste, ya que en general existen dos intensidades predominantes al igual que en el caso anterior, aunque aparece un engrosamiento del borde si se compara con la imagen sintética. En las

(a) Desviación cuadrática media de la distancia (b) Desviación cuadrática media de la distancia
ortogonal mediante MMCC generalizado, utili- ortogonal mediante MMCC generalizado, utili-
zando el algoritmo de Trujillo Pino zando el algoritmo propuesto

Figura 7.34: Comparación de las desviaciones cuadrática medias de las distancias orto-
gonales.

imágenes tomadas con luz episcópica no se cumplen las dos condiciones principales de las imágenes sintéticas, por lo que se complicará el proceso de medida y habrá que recurrir a la convolución con filtros gaussianos con máscaras mayores, con el fin de homogeneizar las intensidades [18, 49, 56, 116, 127, 145, 149].

Para determinar ciertos detalles definidos a partir de la intensidad de un sólo píxel, como por ejemplo el vértice de un triángulo figura 7.35, el algoritmo propuesto presenta mejores resultados que los de Canny y Trujillo Pino, tabla 7.9. Por su parte, el algoritmo de Trujillo Pino *et alt.* se muestra ligeramente más eficaz que el en esta tesis a la hora de medir las propiedades de la elipse, en imágenes sintéticas o con alto contraste, como es el caso de la iluminación diascópica, figura 7.34.

El modelo propuesto sobre un mensurando real con luz episcópica tomado con la máquina óptica Tesa Visio 300, mejorará los resultados del algoritmo de Trujillo Pino como se expondrá en el capítulo de medidas experimentales.

A partir de los datos anteriores, y suponiendo la existencia de un alto contraste en el área de medida se pueden concluir:

- Debido a las buenas incertidumbres del algoritmo de ajuste, con amplificaciones bajas, se podría reducir la incertidumbre de medida, si no se utilizase la parte mecánica de la máquina.
- Como consecuencia de lo anterior, si para realizar la medida se utiliza la técnica de *stitching*², cabe la posibilidad de medir elementos mayores que si se utiliza un

²La técnica del *stitching* consiste en tomar varias imágenes de un mensurando, unir las mediante

Figura 7.35: Comparación de los algoritmos de Canny (azul), Trujillo Pino (amarillo), y el propuesto (rojo), para la determinación de pequeños detalles. Como se puede observar las aristas del triángulo están definidas en una fila de píxeles.

algoritmo de detección del borde con precisión píxel.

algún procedimiento de correlación de la intensidad, y realizar la medida con todas las imágenes a la vez.

Tabla 7.9: Dimensiones del mensurando, triángulo sintético, en función del amplificación utilizando el algoritmo propuesto y el de Trujillo Pino.

	α_1 [°]	$U(\alpha_1)$ [°]	α_2 [°]	$U(\alpha_2)$ [°]	α_3 [°]	$U(\alpha_3)$ [°]
DATOS Z=1	15,17	0,000	82,42	0,000	82,42	0,000
PROP.	15,14	0,055	82,45	0,020	82,41	0,019
TP.	15,13	0,060	82,40	0,022	82,47	0,021
DATOS Z=1,5	15,17	0,000	82,42	0,000	82,42	0,000
PROP.	15,14	0,047	82,42	0,017	82,44	0,016
TP.	15,15	0,050	82,41	0,018	82,44	0,017
DATOS Z=2	15,17	0,000	82,42	0,000	82,42	0,000
PROP.	15,17	0,041	82,42	0,015	82,41	0,014
TP.	15,16	0,043	82,42	0,016	82,43	0,015
DATOS Z=2,5	15,17	0,000	82,42	0,000	82,42	0,000
PROP.	15,17	0,036	82,42	0,012	82,41	0,013
TP.	15,17	0,038	82,42	0,013	82,41	0,014
DATOS Z=3	15,17	0,000	82,42	0,000	82,42	0,000
PROP.	15,17	0,033	82,42	0,012	82,41	0,012
TP.	15,17	0,035	82,42	0,012	82,42	0,013
Z=3,5	15,17	0,000	82,42	0,000	82,42	0,000
PROP.	15,17	0,030	82,42	0,011	82,42	0,011
TP.	15,17	0,032	82,42	0,011	82,42	0,012
Z=4	15,17	0,000	82,42	0,000	82,42	0,000
PROP.	15,17	0,028	82,41	0,010	82,42	0,010
TP.	15,17	0,030	82,41	0,011	82,41	0,011
Z=4,5	15,17	0,000	82,42	0,000	82,42	0,000
PROP.	15,17	0,026	82,42	0,009	82,42	0,009
TP.	15,17	0,028	82,41	0,010	82,41	0,010

Tabla 7.10: Dimensiones del mensurando, sector circular sintético $\alpha = 112,36^\circ$, en función de la ampliación utilizando el algoritmo propuesto y el de Trujillo Pino.

	x_0 [mm]	$U(x_0)$ [μm]	y_0 [mm]	$U(y_0)$ [μm]	r [mm]	$U(r)$ [μm]
Z=1	3,30	0,000	-2,48	0,000	0,501	0,000
PROP.	3,30	0,962	-2,43	1,014	0,501	1,156
TP.	3,30	0,027	-2,43	0,028	0,501	0,032
Z=1,5	2,21	0,000	-1,66	0,000	0,501	0,000
PROP.	2,21	0,709	-1,64	0,741	0,501	0,845
TP.	2,21	0,014	-1,64	0,015	0,501	0,017
Z=2	1,66	0,000	-1,24	0,000	0,501	0,000
PROP.	1,66	0,361	-1,23	0,373	0,501	0,429
TP.	1,66	0,009	-1,23	0,009	0,501	0,010
Z=2,5	1,32	0,000	-0,99	0,000	0,501	0,000
PROP.	1,32	0,280	-0,99	0,290	0,501	0,331
TP.	1,32	0,032	-0,99	0,033	0,501	0,037
Z=3	1,10	0,000	-0,83	0,000	0,501	0,000
PROP.	1,10	0,202	-0,82	0,207	0,501	0,237
TP.	1,10	0,004	-0,82	0,005	0,501	0,005
Z=3,5	0,94	0,000	-0,71	0,000	0,501	0,000
PROP.	0,94	0,160	-0,70	0,167	0,501	0,190
TP.	0,94	0,003	-0,70	0,003	0,501	0,004
Z=4	0,83	0,000	-0,62	0,000	0,501	0,000
PROP.	0,83	0,126	-0,62	0,132	0,501	0,149
TP.	0,82	0,003	-0,62	0,003	0,501	0,004
Z=4,5	0,73	0,000	-0,54	0,000	0,501	0,000
PROP.	0,73	0,101	-0,54	0,105	0,501	0,119
TP.	0,72	0,003	-0,54	0,003	0,501	0,003

Tabla 7.11: Dimensiones del mensurando, elipse sintética, en función de la amplificación utilizando el algoritmo propuesto y el de Trujillo Pino.

Ajuste	Centro				Semiejes				Ángulo	
	x_0	$U(x_0)$	y_0	$U(y_0)$	a	$U(a)$	b	$U(b)$	α	$U(\alpha)$
	[mm]	[μ m]	[mm]	[μ m]	[mm]	[μ m]	[mm]	[μ m]	[°]	[°]
Z=1	3,30	0,0000	-2,48	0,0000	0,40	0,000	0,25	0,000	20,00	0,0000
PROP.	3,30	0,1346	-2,43	0,1045	0,40	1,311	0,25	0,821	19,98	0,0436
TP.	3,31	0,0032	-2,44	0,0024	0,40	1,303	0,25	0,814	20,00	0,0010
Z=1,5	2,21	0,0000	-1,66	0,0000	0,40	0,000	0,25	0,000	20,00	0,0000
PROP.	2,21	0,0706	-1,64	0,0552	0,40	0,588	0,25	0,369	19,99	0,0230
TP.	2,21	0,0016	-1,64	0,0012	0,40	0,582	0,25	0,364	20,00	0,0005
Z=2	1,66	0,0000	-1,24	0,0000	0,40	0,000	0,25	0,000	20,00	0,0000
PROP.	1,66	0,0496	-1,23	0,0388	0,40	0,332	0,25	0,209	19,99	0,0162
TP.	1,66	0,0011	-1,23	0,0008	0,40	0,327	0,25	0,204	20,00	0,0003
Z=2,5	1,32	0,0000	-0,99	0,0000	0,40	0,000	0,25	0,000	20,00	0,0000
PROP.	1,32	0,0333	-0,99	0,0259	0,40	0,210	0,25	0,132	20,00	0,0108
TP.	1,33	0,0008	-0,99	0,0006	0,40	0,207	0,25	0,129	20,00	0,0003
Z=3	1,10	0,0000	-0,83	0,0000	0,40	0,000	0,25	0,000	20,00	0,0000
PROP.	1,10	0,0251	-0,82	0,0196	0,40	0,144	0,25	0,091	20,00	0,0082
TP.	1,10	0,0006	-0,82	0,0004	0,40	0,141	0,25	0,088	20,00	0,0002

—continua en la página siguiente—

—proviene de la página anterior—

Ajuste	Centro				Semiejes				Ángulo	
	x_0	$U(x_0)$	y_0	$U(y_0)$	a	$U(a)$	b	$U(b)$	α	$U(\alpha)$
	[mm]	[μm]	[mm]	[μm]	[mm]	[μm]	[mm]	[μm]	[$^\circ$]	[$^\circ$]
Z=3,5	0,94	0,0000	-0,71	0,0000	0,40	0,000	0,25	0,000	20,00	0,0000
PROP.	0,94	0,0199	-0,70	0,0155	0,40	0,105	0,25	0,066	20,00	0,0065
TP.	0,94	0,0005	-0,70	0,0003	0,40	0,102	0,25	0,064	20,00	0,0002
Z=4	0,83	0,0000	-0,62	0,0000	0,40	0,000	0,25	0,000	20,00	0,0000
PROP.	0,83	0,0165	-0,62	0,0129	0,40	0,079	0,25	0,050	20,00	0,0054
TP.	0,83	0,0004	-0,62	0,0003	0,40	0,077	0,25	0,048	20,00	0,0001
Z=4,5	0,73	0,0000	-0,54	0,0000	0,40	0,000	0,25	0,000	20,00	0,0000
PROP.	0,73	0,0139	-0,54	0,0108	0,40	0,060	0,25	0,038	20,00	0,0045
TP.	0,73	0,0003	-0,54	0,0002	0,40	0,058	0,25	0,036	20,00	0,0001

§ 7.7. Determinación de las densidades de probabilidad para la longitudes l_{ijk} en función del tipo de píxel y de la intensidad

Un vez determinada $p(l_{ijk} | t_{pix}, I)$ es necesario particularizarla en función de la intensidad y del tipo de píxel, para posteriormente poder utilizarla para estimar la incertidumbre de medida mediante el método de Monte Carlo [75]. En la figura se muestran algunas de las distribuciones obtenidas. Estas densidades de probabilidad no pueden utilizarse directamente, ya que no corresponden, *a priori*, a ninguna distribución conocida [74, 75, 121].

Posteriormente a la observación de los histogramas de las funciones $p(l_{ijk} | t_{pix}, I)$, se toma la siguiente aproximación, empleando dos tipos de densidades de probabilidad, según se muestra en el anexo B:

- a.) *Densidad de probabilidad rectangular.* Se utiliza en las tres clases de píxel, T290, T3 y T4, siendo la única que existe en los píxeles tipo T3. En las otras clases, sólo se elige este tipo distribución cuando el número de casos es pequeño, en concreto menor que *seis*, como se explica a continuación.
- b.) *Densidad de probabilidad gaussiana.* Se aplica a los tipos de píxel T290 y T4. Se toma como densidad de probabilidad el ajuste resultante de la suma de dos gaussianas, ecuación 7.44. Para el ajuste de esta ecuación se necesitan al menos seis parejas de datos, por lo que se toma como criterio de corte.

$$f(x) = a_1 \exp \left[- \left(\frac{x - b_1}{c_1} \right)^2 \right] + a_2 \exp \left[- \left(\frac{x - b_2}{c_2} \right)^2 \right] \quad (7.44)$$

7.7.1. Generalización del modelo bayesiano para cualquier intervalo de intensidad

En las secciones 7.6.3 y 7.6.4 se desarrollan los modelos a partir de los cuales se obtienen las densidades de probabilidad $p(l_{ijk} | t_{pix}, I)$. Los modelos toman como parámetros las intensidades mínima y máxima $I_A = 50$ e $I_B = 200$. En la realidad esto no es así, pero con imágenes sintéticas funciona razonablemente bien.

(a) FDP para T290 e I=163

(b) FDP para T290 e I=182.

(c) FDP para T3 e I=62

(d) FDP para T3 e I=144

(e) FDP para T4 e I=72

(f) FDP para T4 e I=111

Figura 7.36: Densidades de probabilidad para los distintos tipos de píxel y diferentes intensidades.

Para poder extrapolar el modelo, y poder aplicarlo a cualquier imagen independientemente del rango de trabajo de sus intensidades, después de determinar el borde del mensurando hay que volver normalizar la imagen, con el fin de ajustar los límites de intensidad a las luminancias para poder utilizar las densidades de probabilidad anteriores. Esta normalización se realiza mediante un ajuste lineal:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} I_{\text{mín}} & 1 \\ I_{\text{máx}} & 1 \end{pmatrix} \quad (7.45)$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \end{pmatrix} \quad (7.46)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} \quad (7.47)$$

$$y = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (7.48)$$

donde $I_{\text{mín}}$ e $I_{\text{máx}}$ son la intensidades mínimas y máximas antes de normalizar, $I_A = 50$ e $I_B = 200$.

Capítulo 8

Sistema mecánico

RESUMEN: En este capítulo se recogen las bases teóricas y prácticas para el modelo del subsistema mecánico. El modelo determina los parámetros E_{ijk} y sus incertidumbres, mediante imágenes del mensurando en distintas posiciones de la mesa de medida.

*La senda de la virtud es muy estrecha y el camino del vicio,
ancho y espacioso.*

—Miguel de Cervantes—

§ 8.1. Introducción

El modelo mecánico se establece individualmente para los diferentes tipos de errores: geométricos o térmicos. La notación para el modelo se establece en la figura 8.1(a), mostrando un eje de traslación de una máquina con seis grados de libertad y seis errores. Una máquina con tres ejes cartesianos tendrá 18 errores, más tres de perpendicularidad entre ellos, es decir veintiuno en total [65]. Los errores en la tabla se determinan utilizando la regla de la mano derecha, figura 8.1(b) y el esquema con los ejes 8.1(a). En el modelo se ha utilizado la nomenclatura de la segunda columna de la tabla 8.1. La norma ISO 230-1:2014 [150] muestra otra nomenclatura, indicada en la tercera columna de la misma tabla. Se ha escogido la nomenclatura no normalizada por ser mas clara, para el autor de esta tesis, a la hora de realizar los cálculos. Aunque utilizando la tabla 8.1 resulta sencillo pasar de una a otra.

§ 8.2. Modelo Matemático

El Modelo matemático depende del tipo de máquina y del movimiento de sus componentes. La máquina con la que se ha realizado el estudio, Tesa Visio 300, tiene una configuración **YXFZ** [65], figura 8.2. Los ejes a la izquierda de la letra **F** representan las direcciones en las que el mensurando se puede mover respecto a la bancada de la máquina, y los ejes a la derecha de **F** son las direcciones en que el sistema de medida puede moverse con respecto a la bancada de la máquina. Para el modelo se utilizan cuatro sistemas de coordenadas:

(a) Errores de traslación en un eje

(b) Regla de la mano derecha. Notación.

Figura 8.1: (Izquierda) Los seis posibles errores al trasladar una distancia en un eje. (Derecha) Notación para los errores en una máquina de tres ejes. Para determinar el nombre del error se utiliza la regla de la mano derecha, donde el pulgar coincide con la dirección del movimiento en cada caso.

- a.) **OXYZ** es el sistema de referencia del mensurando localizado en la mesa, tiene posibilidad de moverse en la dirección y.
- b.) **O₁X₁Y₁Z₁** es el sistema de referencia de la mesa, puede moverse en la dirección x.
- c.) **O₂X₂Y₂Z₂** este sistema está localizado en la bancada de la máquina.
- d.) **O₃X₃Y₃Z₃** sistema de la columna del palpador.

Al mover la mesa una distancia X , el vector de posición se puede modelizar como:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X + \delta_x(X) \\ \delta_y(X) \\ \delta_z(X) \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

Al mismo tiempo que se desplaza, se producen giros sobre el sistema: E_{AX} , E_{BX} , E_{CX} , donde la matriz de rotación se puede expresar como:

$$\mathbf{R}(x) = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon_z(X)) & \sin(\varepsilon_z(X)) & 0 \\ -\sin(\varepsilon_z(X)) & \cos(\varepsilon_z(X)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon_y(X)) & 0 & -\sin(\varepsilon_y(X)) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varepsilon_y(X)) & 0 & \cos(\varepsilon_y(X)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varepsilon_x(X)) & \sin(\varepsilon_x(X)) \\ 0 & -\sin(\varepsilon_x(X)) & \cos(\varepsilon_x(X)) \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

Como los errores son muy pequeños, se puede aproximar:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(x) &= \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_z(X) & 0 \\ -\varepsilon_z(X) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\varepsilon_y(X) \\ 0 & 1 & 0 \\ \varepsilon_y(X) & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon_x(X) \\ 0 & -\varepsilon_x(X) & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_z(X) & -\varepsilon_y(X) \\ -\varepsilon_z(X) & 1 & \varepsilon_x(X) \\ \varepsilon_y(X) & -\varepsilon_x(X) & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.3)$$

Cuando se mueve la mesa en la dirección Y , y el sistema de medida se mueve en la dirección Z , se obtienen un par de vectores que representan dichas traslaciones:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \delta_x(Y) - Y\alpha_{xy} \\ Y + \delta_y(Y) \\ \delta_z(Y) \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

Tabla 8.1: *Notación del para los errores en una máquina con tres ejes.*

Descripción	Errores Modelo		Errores ISO
Error de posicionamiento en cada eje	$\delta_a(A)$	$\delta_x(X), \delta_y(Y), \delta_z(Z)$	E_{XX}, E_{YY}, E_{ZZ}
Errores de rectitud en “b” debido al movimiento en la dirección A	$\delta_b(A)$	$\delta_y(X), \delta_x(Y), \delta_y(Z)$	E_{YX}, E_{XY}, E_{YZ}
Errores de rectitud en “c” debido al movimiento en la dirección A	$\delta_c(A)$	$\delta_z(X), \delta_z(Y), \delta_x(Z)$	E_{ZX}, E_{ZY}, E_{XZ}
Error angular, cabeceo, en la misma dirección del eje	$\varepsilon_a(A)$	$\varepsilon_x(X), \varepsilon_y(Y), \varepsilon_z(Z)$	E_{AX}, E_{AY}, E_{AZ}
Error angular, guiñada, dirección perpendicular	$\varepsilon_b(A)$	$\varepsilon_y(X), \varepsilon_z(Y), \varepsilon_y(Z)$	E_{BX}, E_{BY}, E_{BZ}
Error angular, alabeo, dirección perpendicular	$\varepsilon_c(A)$	$\varepsilon_z(X), \varepsilon_x(Y), \varepsilon_x(Z)$	E_{CX}, E_{CY}, E_{CZ}
Errores de perpendicularidad	α_{ab}	$\alpha_{xy}, \alpha_{xz}, \alpha_{yz}$	E_{C0}, E_{B0}, E_{A0}

(a) Máquina **YXFZ** con sus sistemas de referencia

(b) Cambio de sistemas de referencia

Figura 8.2: Configuración de MMC tipo **YXFZ**.

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \delta_x(Z) - Z\alpha_{xz} \\ \delta_y(Z) - Z\alpha_{yz} \\ Z + \delta_z(Z) \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

Por su parte, las matrices de rotación infinitesimales se obtienen simplemente sustituyendo X por Y o Z.

$$\mathbf{R}(y) = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_z(Y) & -\varepsilon_y(Y) \\ -\varepsilon_z(Y) & 1 & \varepsilon_x(Y) \\ \varepsilon_y(Y) & -\varepsilon_x(Y) & 1 \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

$$\mathbf{R}(z) = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_z(Z) & -\varepsilon_y(Z) \\ -\varepsilon_z(Z) & 1 & \varepsilon_x(Z) \\ \varepsilon_y(Z) & -\varepsilon_x(Z) & 1 \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

La transformación de coordenadas de un punto $\mathbf{P}$ del sistema $\mathbf{OXYZ}$ a un punto $\mathbf{P}_1$ de $\mathbf{O}_1\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1\mathbf{Z}_1$ se realiza de la siguiente manera:

$$\mathbf{R}^{-1}(y)\mathbf{P} + \mathbf{Y} = \mathbf{P}_1 \quad (8.8)$$

De la misma forma, se realiza el paso de $\mathbf{P}_1$ a $\mathbf{P}_2$ en el sistema de la bancada:

$$\mathbf{R}^{-1}(x)\mathbf{P}_1 + \mathbf{X} = \mathbf{P}_2 \quad (8.9)$$

En último lugar, se convierte $\mathbf{P}_2$ a $\mathbf{P}_3$ en el sistema de referencia de los sensores de medida:

$$\mathbf{R}^{-1}(z)\mathbf{P}_2 + \mathbf{Z} = \mathbf{P}_3 \quad (8.10)$$

Utilizando las ecuaciones anteriores, se obtiene el cambio de sistema de referencia total:

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}(y) \{ -\mathbf{Y} + \mathbf{R}(x) [-\mathbf{X} + \mathbf{Z} + \mathbf{R}^{-1}(z)\mathbf{P}_3] \} \quad (8.11)$$

La ecuación anterior se puede expandir en homogéneas como:

$$\begin{pmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_z(Y) & -\varepsilon_y(Y) & 0 \\ -\varepsilon_z(YX) & 1 & \varepsilon_x(Y) & 0 \\ \varepsilon_y(Y) & -\varepsilon_x(Y) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_z(X) & -\varepsilon_y(X) & -\delta_x(Y) + Y\alpha_{xy} \\ -\varepsilon_z(X) & 1 & \varepsilon_x(X) & -Y - \delta_y(Y) \\ \varepsilon_y(X) & -\varepsilon_x(X) & 1 & -\delta_z(Y) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon_z(Z) & \varepsilon_y(Z) & -X - \delta_x(X) + \delta_x(Z) - Z\alpha_{xz} \\ \varepsilon_z(Z) & 1 & -\varepsilon_x(Z) & -\varepsilon_y(X) + \varepsilon_y(Z) - Z\alpha_{yz} \\ -\varepsilon_y(Z) & \varepsilon_x(Z) & 1 & -\delta_z(X) + Z + \delta_z(Z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{p3} \\ Y_{p3} \\ Z_{p3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

Teniendo en cuenta que $\Delta X = X_p - X - X_{p3}$, $\Delta Y = Y_p - Y - Y_{p3}$, $\Delta Z = Z_p - Z - Z_{p3}$, reordenando en la expresión 8.12 se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta X = & -\delta_x(X) - \delta_x(Y) + \delta_x(Z) + Y\alpha_{xy} - Z\alpha_{xz} + Y\varepsilon_z(Y) - \\ & -Z[\varepsilon_y(X) + \varepsilon_y(Y)] - Y_{p3}[-\varepsilon_z(X) - \varepsilon_z(Y) + \varepsilon_z(Z)] + \\ & + Z_{p3}[-\varepsilon_y(X) - \varepsilon_y(Y) + \varepsilon_y(Z)] \end{aligned} \quad (8.13)$$

$$\begin{aligned} \Delta Y = & -\delta_y(X) - \delta_y(Y) + \delta_y(Z) - Z\alpha_{yz} + Z[\varepsilon_x(X) + \varepsilon_x(Y)] + \\ & + X[\varepsilon_z(X) + \varepsilon_z(Y)] + X_{p3}[-\varepsilon_z(X) + \varepsilon_z(Y) + \varepsilon_z(Z)] - \\ & - Z_{p3}[-\varepsilon_x(X) - \varepsilon_x(Y) + \varepsilon_x(Z)] \end{aligned} \quad (8.14)$$

$$\begin{aligned} \Delta Z = & -\delta_z(X) - \delta_z(Y) + \delta_z(Z) - Y\varepsilon_x(Y) - X[\varepsilon_y(X) + \varepsilon_y(Y)] - \\ & - X_{p3}[-\varepsilon_y(X) - \varepsilon_y(Y) + \varepsilon_y(Z)] + Y_{p3}[-\varepsilon_x(X) - \varepsilon_x(Y) + \varepsilon_x(Z)] \end{aligned} \quad (8.15)$$

La máquina óptica mide elementos 2D, por lo que el mensurando se toma en el plano en que $Z = 0$, y al no existir palpador (X_{P3}, Y_{P3}, Z_{P3}) son igual a cero:

$$\Delta X = -\delta_x(X) - \delta_x(Y) + Y\alpha_{xy} \quad (8.16)$$

$$\Delta Y = -\delta_y(X) - \delta_y(Y) \quad (8.17)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores, al realizar la medida el sistema ha cometido errores equivalentes a $-\Delta X$, $-\Delta Y$, $-\Delta Z$. Para compensarlos, a las coordenadas medidas se han de añadir los errores cometidos, es decir:

$$X_p = X + \Delta X = X - \delta_x(X) - \delta_x(Y) + Y\alpha_{xy} = X - \delta_x(X) - \delta_{x'}(Y) \quad (8.18)$$

$$Y_p = Y + \Delta Y = Y - \delta_y(X) - \delta_y(Y) \quad (8.19)$$

Se puede observar que estas modificaciones son semejantes a las que se han tenido en cuenta en el sistema de visión.

Los errores se pueden determinar utilizando distintos polinomios de interpolación. Tal como sugieren Caja *et al.* [12, 13] se utiliza un polinomio de tercer grado:

$$P_n(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (8.20)$$

Sustituyendo la interpolación anterior, dentro de las ecuaciones 8.16 y 8.17, se obtiene:

$$X_p = X - \delta_{xx1}X - \delta_{xx2}X^2 - \delta_{xx3}X^3 - \delta_{xy'1}Y - \delta_{xy'2}Y^2 - \delta_{xy'3}Y^3$$

$$Y_p = Y - \delta_{yx1}X - \delta_{yx2}X^2 - \delta_{yx3}X^3 - \delta_{yy1}Y - \delta_{yy2}Y^2 - \delta_{yy3}Y^3$$

$$X_p = X + f(X, Y) \quad (8.21)$$

$$Y_p = Y + g(X, Y) \quad (8.22)$$

Figura 8.3: Posicionamiento del patrón bidimensional.

Al realizar una medida, figura 8.3, el sistema mecánico se desplazará de una posición (X_1, Y_1) a otra posición (X_i, Y_i) , y la medida estará dada por $\Delta X = X_i - X_1$ y $\Delta Y = Y_i - Y_1$, por lo que las ecuaciones 8.21 y 8.22 quedarán:

$$\Delta X_p = \Delta X + f(\Delta X, \Delta Y) \quad (8.23)$$

$$\Delta Y_p = \Delta Y + g(\Delta X, \Delta Y) \quad (8.24)$$

donde ΔX_p y ΔY_p son las distancias certificadas del patrón. Las distancias ΔX y ΔY dadas por la máquina es la separación entre los centros de dos imágenes, figura 8.4(a). En este caso la medida que se busca, figura 8.4(c), es una función de dos medidas ópticas y una mecánica. Denotando ΔX_{vm} y ΔY_{vm} a las medidas conjuntas del sistema óptico y mecánico, y $f(\Delta X_{vm}, \Delta Y_{vm})$ y $g(\Delta X_{vm}, \Delta Y_{vm})$ los errores producidos en el sistema mecánico, las ecuaciones 8.23 y 8.24 quedan:

$$\Delta X_p = \Delta X_{vm} + f(\Delta X_{vm}, \Delta Y_{vm}) \quad (8.25)$$

$$\Delta Y_p = \Delta Y_{vm} + g(\Delta X_{vm}, \Delta Y_{vm}) \quad (8.26)$$

Hay que tener en cuenta que el patrón puede estar inclinado, figuras 8.3 y 8.4, y que las distancias del certificado de calibración la de regla están dadas únicamente en un eje, ΔD_p . Las variables están definidas en la figura 8.4(c). Para poder analizar los datos del certificado se supone que existe una relación entre los errores, figura 8.4(b), reduciendo las ecuaciones anteriores a:

$$\cos \alpha_x \approx \frac{\Delta X_1 + \Delta X - \Delta X_2}{\sqrt{(\Delta X_1 + \Delta X - \Delta X_2)^2 + \Delta Y_{12}^2}} = \frac{\Delta X_{vm}}{\sqrt{\Delta X_{vm}^2 + \Delta Y_{12}^2}} \quad (8.27)$$

$$\tan \alpha_x \approx \frac{g(\Delta X, \Delta Y)}{f(\Delta X, \Delta Y)} \quad (8.28)$$

$$\Delta D_p = \frac{\sqrt{\Delta X_{vm}^2 + \Delta Y_{12}^2}}{\Delta X_{vm}} [\Delta X_{vm} + f(\Delta X, \Delta Y)]$$

donde ΔD_p son las distancias del certificado de calibración.

Debido a la forma en que se toman las imágenes, la mesa sólo se mueve en un eje coordinado, en este caso $\Delta Y \approx 0$, por lo que no se tendrá en cuenta [19]. Expresando las

(a) Procedimiento de calibración de la parte mecánica del sistema de medida

(b) Relaciones entre ΔX e ΔY y las funciones $f(\Delta X, \Delta Y)$ y $g(\Delta X, \Delta Y)$ de los errores mecánicos

(c) Relación entre los desplazamientos del modelos mecánico y del modelo de visión.

Figura 8.4: Obtención de datos para el modelo mecánico. Relaciones entre el modelo mecánico y el modelo de visión.

ecuaciones anteriores en forma matricial se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \Delta D_{p1}\xi_1 - \Delta X_{vm1} \\ \vdots \\ \Delta D_{pn}\xi_n - \Delta X_{vmn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta X_{vm1} & -\Delta X_{vm1}^2 & -\Delta X_{vm1}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\Delta X_{vmn} & -\Delta X_{vmn}^2 & -\Delta X_{vmn}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{xx1} \\ \delta_{xx2} \\ \delta_{xx3} \end{pmatrix} \quad (8.29)$$

donde $\xi_i = \frac{\Delta X_{vm}}{\sqrt{\Delta X_{vm}^2 + \Delta Y_{12}^2}}$. Reordenando la ecuación anterior se obtiene:

$$\Delta \mathbf{D}_\xi = \mathbf{A}_\xi \mathbf{k}_\xi \quad (8.30)$$

La incertidumbre de los errores debida al ajuste se determina utilizando el error cuadrático medio:

$$\mathbf{e} = \mathbf{A}_\xi \mathbf{k}_\xi - \Delta \mathbf{D}_\xi \quad (8.31)$$

$$s_e^2 = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{e}}{n - 3} \quad (8.32)$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{k}_\xi} = s_e^2 (\mathbf{A}_\xi^T \mathbf{A}_\xi)^{-1} \quad (8.33)$$

$$\mathbf{U}_{\mathbf{k}_\xi} = 2 \cdot \text{diagonal}(\mathbf{C}_{\mathbf{k}_\xi}) \quad (8.34)$$

Operando de la misma forma para el eje Y se obtiene:

$$\cos \alpha_y \approx \frac{\Delta Y_1 + \Delta Y - \Delta Y_2}{\sqrt{(\Delta Y_1 + \Delta Y - \Delta Y_2)^2 + \Delta X_1^2}} = \frac{\Delta Y_{vm}}{\sqrt{\Delta Y_{vm}^2 + \Delta X_{12}^2}} \quad (8.35)$$

$$\Delta D_p = \frac{\sqrt{\Delta Y_{vm}^2 + \Delta X_{12}^2}}{\Delta Y_{vm}} [\Delta Y_{vm} + g(\Delta X, \Delta Y)]$$

Razonando de igual manera que en el caso anterior, la mesa sólo se mueve en un eje coordenado, en este caso $\Delta X \approx 0$, por lo que no se tendrá en cuenta. Expandiendo las ecuaciones anteriores en forma matricial se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \Delta D_{p1}\zeta_1 - \Delta Y_{vm1} \\ \vdots \\ \Delta D_{pn}\zeta_n - \Delta Y_{vmn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta Y_{vm1} & -\Delta Y_{vm1}^2 & -\Delta Y_{vm1}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\Delta Y_{vmn} & -\Delta Y_{vmn}^2 & -\Delta Y_{vmn}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{yy1} \\ \delta_{yy2} \\ \delta_{yy3} \end{pmatrix} \quad (8.36)$$

donde $\zeta_i = \frac{\Delta Y_{vm}}{\sqrt{\Delta Y_{vm}^2 + \Delta X_{12}^2}}$. Expresando las ecuaciones anteriores en forma matricial:

$$\Delta \mathbf{D}_\zeta = \mathbf{A}_\zeta \mathbf{k}_\zeta \quad (8.37)$$

Siguiendo un proceso análogo al del eje X, se determina la incertidumbre debida al ajuste, utilizando el error cuadrático medio:

$$\mathbf{e} = \mathbf{A}_\zeta \mathbf{k}_\zeta - \Delta \mathbf{D}_\zeta \quad (8.38)$$

$$s_e^2 = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{e}}{n - 3} \quad (8.39)$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{k}_\zeta} = s_e^2 \left(\mathbf{A}_\zeta^T \mathbf{A}_\zeta \right)^{-1} \quad (8.40)$$

$$\mathbf{U}_{\mathbf{k}_\zeta} = 2 \cdot \text{diagonal}(\mathbf{C}_{\mathbf{k}_\zeta}) \quad (8.41)$$

Como se puede observar en la figura 8.4, para poder obtener las distancias ΔX_1 y ΔX_2 han de utilizarse los parámetros de calibración del sistema óptico, ecuación 7.17. En realidad, el proceso para la determinación los parámetros δ_{xxi} y δ_{yyi} de las ecuaciones 8.30 y 8.37 es la calibración del sistema máquina, que se tratará en el siguiente capítulo.

Capítulo 9

Modelo máquina

RESUMEN: En este capítulo se realiza la calibración del sistema máquina combinando las ecuaciones ópticas y mecánicas, descritas en los capítulos anteriores.

Mon but n'est pas d'enseigner, je ne suis ni un scientifique ni un professeur. Je suis un découvreur, mon but est d'émerveiller. On aime ce qui nous a émerveillé, et on protège ce que l'on aime.

— Jacques Cousteau—

§ 9.1. Introducción

En este capítulo, utilizando las ecuaciones del sistema óptico, capítulo 7, y las del sistema mecánico, capítulo 8, se definen las ecuaciones del modelo máquina a partir de las cuales se obtienen las medidas con la máquina de visión. El modelo máquina se define a partir de:

- Las medidas realizadas sobre las imágenes del mensurando, aplicando las correspondientes correcciones de calibración.
- Las medidas realizadas empleando, además, el sistema mecánico, con sus correcciones de calibración.

Concluida la definición del modelo, se procede a su validación mediante medidas *submilimétricas* en montajes de bloques patrón longitudinales, BPL.

§ 9.2. Modelo máquina

Una vez descrito el modelo óptico y el modelo mecánico, queda por definir el modelo máquina. Éste determina las coordenadas finales y el resultado de la medida, a partir de las ecuaciones 8.30 y 8.37. La determinación de δ_{xxi} y de δ_{yyi} se realiza en los siguientes pasos:

- a.) Se toman dos imágenes entre los trazos de la regla patrón, la máquina entrega las coordenadas de los centros de cada una de las imágenes.
- b.) Del certificado de la regla patrón, anexo C, se conoce la distancia entre los trazos anteriormente capturados y su incertidumbre asociada.
- c.) A partir de la amplificación con la que se han tomado las imágenes, se seleccionan los parámetros de calibración del sistema óptico y se calculan las distancias del trazo al centro de la imagen.
- d.) La distancia certificada del patrón, ΔD_p tabla 9.1, es igual a una función que depende de las distancias entre los centros de las imágenes y las distancias de los trazos al centro de la imagen; de la igualdad anterior se obtienen los factores correctores δ_{xxi} y δ_{yyi} .

Tabla 9.1: *Distancias certificadas de la regla a trazos D701/03, incertidumbre de medida $U_{(k=2)} = \pm 0,003$ [mm], anexo C.*

Nominal [mm]	Medido ΔD_p [mm]
15	15.0015
30	30.0031
45	45.0042
60	60.0032
75	75.0088
90	90.0074
105	105.0079
120	120.0127
135	135.0133
150	150.0108

Los valores de las distancias obtenidas de las imágenes, tablas 9.2, 9.3, 9.4 y 9.5, se obtienen de la siguiente manera:

- ΔX_1 , ΔX_2 , ΔY_1 y ΔY_2 , a partir de la detección de bordes y la distancia al punto central de la imagen.
- ΔX_{12} y ΔY_{12} se determinan a partir de los baricentros de las regiones delimitadas anteriormente.
- ΔX y ΔY , desplazamiento del sistema mecánico, se obtienen directamente de la máquina.

Las distancias anteriores se corrigen utilizando los parámetros de calibración del sistema óptico. A partir de las ecuaciones 8.30 y 8.37 se obtienen los errores introducidos en el sistema máquina a través del sistema óptico y mecánico.

Teniendo en cuenta los parámetros de calibración del sistema óptico y del sistema mecánico, las coordenadas medidas en el sistema máquina quedan representadas por:

$$\Delta X_p = \Delta X_{vm} - \delta_{xx1}\Delta X_{vm} - \delta_{xx2}\Delta X_{vm}^2 - \delta_{xx3}\Delta X_{vm}^3 \quad (9.1)$$

$$\Delta Y_p = \Delta Y_{vm} - \delta_{yy1}\Delta Y_{vm} - \delta_{yy2}\Delta Y_{vm}^2 - \delta_{yy3}\Delta Y_{vm}^3 \quad (9.2)$$

Las distancias $\Delta X_{vm}(E_0, A, \Theta, \Delta X)$ y $\Delta Y_{vm}(E_0, A, \Theta, \Delta Y)$, se obtienen conjuntamente del sistema de visión y del sistema mecánico, figura 8.4(c):

$$\Delta X_{vm} = \Delta X_1 + \Delta X - \Delta X_2 \quad (9.3)$$

$$\Delta X_1 = E_0 \left[[1 + C_k + A] \Delta p_1 + \frac{1}{2} \Theta \Delta q_1 \right] \quad (9.4)$$

$$\Delta X_1 = \alpha \Delta p_1 + \beta \Delta q_1 \quad (9.5)$$

$$\Delta X_2 = E_0 \left[[1 + C_k + A] \Delta p_2 + \frac{1}{2} \Theta \Delta q_2 \right] \quad (9.6)$$

$$\Delta X_2 = \alpha \Delta p_2 + \beta \Delta q_2 \quad (9.7)$$

$$\Delta X_{vm} = \alpha (\Delta p_1 - \Delta p_2) + \beta (\Delta q_1 - \Delta q_2) + \Delta X \quad (9.8)$$

donde ΔX es la distancia dada por el sistema mecánico; ΔX_1 y ΔX_2 son las medidas utilizando únicamente el sistema óptico; Δp_i y Δq_i son los incrementos de píxeles obtenidos en las dos imágenes tomadas para la medida; α , β y γ parámetros agrupados de la calibración del sistema óptico.

De igual manera se puede hacer con el eje Y:

Tabla 9.2: *Medidas para el patrón de trazos con $Z=3$, orientación horizontal.*

ΔX_1 [mm]	ΔX_2 [mm]	ΔX [mm]	ΔX_{vm} [mm]	ΔY_{12} [mm]	ξ_i [-]
1,053	1,059	14,999	14,993	0,007	1,000
1,053	1,065	29,994	29,982	0,013	1,000
1,053	1,078	44,998	44,972	0,019	1,000
1,053	1,081	59,995	59,966	0,039	1,000
1,053	1,082	74,996	74,967	0,045	1,000
1,053	1,075	89,987	89,965	0,042	1,000
1,053	1,064	104,965	104,953	0,053	1,000
1,053	1,069	119,966	119,949	0,061	1,000
1,053	1,071	134,966	134,948	0,074	1,000

Tabla 9.3: *Medidas para el patrón de trazos con $Z=3$, orientación vertical.*

ΔY_1 [mm]	ΔY_2 [mm]	ΔY [mm]	ΔY_{vm} [mm]	ΔX_{12} [mm]	ζ_i [-]
0,771	0,719	14,998	15,049	0,013	1,000
0,771	0,750	30,023	30,043	0,027	1,000
0,771	0,755	45,042	45,057	0,043	1,000
0,771	0,751	60,044	60,064	0,055	1,000
0,771	0,751	75,051	75,071	0,064	1,000
0,771	0,749	90,061	90,082	0,079	1,000
0,771	0,732	105,054	105,093	0,088	1,000
0,771	0,752	120,089	120,108	0,095	1,000
0,771	0,754	135,097	135,113	0,105	1,000

$$\Delta Y = \Delta Y_1 + \Delta Y - \Delta Y_2 \quad (9.9)$$

$$\Delta Y_1 = E_0 \left[\frac{1}{2} \Theta \Delta p_1 + [1 + C_k - A] \Delta q_1 \right] \quad (9.10)$$

$$\Delta Y_1 = \beta \Delta p_1 + \gamma \Delta q_1 \quad (9.11)$$

$$\Delta Y_2 = E_0 \left[\frac{1}{2} \Theta \Delta p_2 + [1 + C_k - A] \Delta q_2 \right] \quad (9.12)$$

$$\Delta Y_2 = \beta \Delta p_2 + \gamma \Delta q_2 \quad (9.13)$$

$$\Delta Y_{vm} = \beta (\Delta p_1 - \Delta p_2) + \gamma (\Delta q_1 - \Delta q_2) + \Delta Y \quad (9.14)$$

Tabla 9.4: Medidas para el patrón de trazos con $Z=4,5$, orientación horizontal.

ΔX_1 [mm]	ΔX_2 [mm]	ΔX [mm]	ΔX_{vm} [mm]	ΔY_{12} [mm]	ξ_i [-]
0,665	0,655	14,992	15,002	0,005	1,000
0,665	0,656	29,992	30,001	0,010	1,000
0,665	0,661	44,997	45,001	0,017	1,000
0,665	0,652	59,983	59,996	0,021	1,000
0,665	0,656	74,985	74,994	0,025	1,000
0,665	0,661	89,995	89,999	0,029	1,000
0,665	0,662	99,997	99,999	0,036	1,000
0,665	0,648	105,002	105,019	0,040	1,000
0,665	0,662	120,005	120,008	0,043	1,000

Resolviendo las ecuaciones 9.1 y 9.2 se obtienen los parámetros δ_{xxi} y δ_{yyi} , y sus correspondientes incertidumbres de medida, tablas 9.6 y 9.7.

§ 9.3. Validación experimental

La validación experimental se realiza mediante la medida de un montaje de bloques patrón longitudinales, figura 9.1. El BPL central tiene una longitud de $L(k=2) = (0,5 \pm 0,0006)$ [mm], anexo E. A partir del montaje anterior, se pueden realizar tanto medidas por la parte exterior del bloque central, como por la parte interior tomando los otros BPL como referencias de medida.

Como ya se ha expuesto, en el proceso de digitalización de la imagen, el CCD transforma un flujo de luz en un valor que varía entre 0 y 255. La luz que llega a un píxel del CCD,

Tabla 9.5: *Medidas para el patrón de trazos con $Z=4,5$, orientación vertical.*

ΔY_1	ΔY_2	ΔY	ΔY_{vm}	ΔX_{12}	ζ_i
[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[-]
0,498	0,502	15,004	15,000	0,002	1,000
0,498	0,502	30,009	30,006	0,008	1,000
0,498	0,500	45,010	45,008	0,010	1,000
0,498	0,502	60,010	60,006	0,015	1,000
0,498	0,503	75,014	75,009	0,018	1,000
0,498	0,500	75,014	75,012	0,020	1,000
0,498	0,498	105,017	105,017	0,024	1,000
0,498	0,499	120,020	120,019	0,027	1,000
0,498	0,502	135,023	135,020	0,031	1,000

Tabla 9.6: *Errores del sistema máquina para $Z=3$ y sus incertidumbres para $k=2$.*

δ_{xx1}	δ_{xx2}	δ_{xx3}	δ_{yy1}	δ_{yy2}	δ_{yy3}
[-]	[mm ⁻¹]	[mm ⁻²]	[-]	[mm ⁻¹]	[mm ⁻²]
-8,61E-4	5,72E-6	-2,24E-8	2,09E-3	-2,31E-5	9,93E-8
$U_{\delta_{xx1}}$	$U_{\delta_{xx2}}$	$U_{\delta_{xx3}}$	$U_{\delta_{yy1}}$	$U_{\delta_{yy2}}$	$U_{\delta_{yy3}}$
[-]	[mm ⁻¹]	[mm ⁻²]	[-]	[mm ⁻²]	[mm ⁻²]
2,21E-4	4,85E-6	2,54E-8	7,08E-4	1,55E-5	8,12E-8

Tabla 9.7: *Errores del sistema máquina para $Z=4,5$ y sus incertidumbres para $k=2$.*

δ_{xx1}	δ_{xx2}	δ_{xx3}	δ_{yy1}	δ_{yy2}	δ_{yy3}
[-]	[mm ⁻¹]	[mm ⁻²]	[-]	[mm ⁻¹]	[mm ⁻²]
-9,98E-4	6,63E-6	-2,60E-8	2,42E-3	-2,68E-5	1,15E-7
$U_{\delta_{xx1}}$	$U_{\delta_{xx2}}$	$U_{\delta_{xx3}}$	$U_{\delta_{yy1}}$	$U_{\delta_{yy2}}$	$U_{\delta_{yy3}}$
[-]	[mm ⁻¹]	[mm ⁻²]	[mm ⁻¹]	[-]	[mm ⁻²]
1,86E-4	4,09E-6	2,14E-8	5,97E-4	1,31E-5	6,84E-8

(a) Bloques para el montaje con 3 BPL.

(b) Montaje con 3 BPL, separación entre bloques 0,5000 [mm] (nominal).

Figura 9.1: Validación experimental mediante dos montajes de BPL.

Figura 9.2: Criterio para la determinación de los máximos de intensidad a partir de un número impar de puntos.

después de interactuar con la materia, se integra para obtener el valor de salida. Por tanto, en la imagen, intensidades iguales expresarían condiciones de interacción de la luz semejantes. En la realidad este proceso se relaja debido a los errores que se producen en cada uno de los caminos que recorre la luz, en los procesos internos del CCD y en la posterior generación de la imagen.

Una vez capturada la imagen, se realiza la segmentación de la misma. Los algoritmos de detección del borde, en general, en un primer momento aplican un filtro gaussiano para suavizar las intensidades de la imagen, con lo cual se vuelve a perder parte de la información. Para evitar esto, el algoritmo propuesto utiliza el método del umbral, *threshold*, para la determinación de borde del mensurando, evitando el segundo filtro y trabajando directamente con la imagen capturada del mensurando.

(a) Determinación del umbral, montaje 3 BLP, para un máximo de 3 puntos. (b) Determinación del umbral, montaje 3 BLP, para un máximo de 5 puntos.

Figura 9.3: *Caracterización de formas en función del número de puntos que se utilizan para la localización del máximo local.*

La determinación de estas intensidades pertenecientes a zonas semejantes del mensurando puede ser complicada en algunos casos, por lo que se utiliza un algoritmo propio de selección de máximos de intensidad, figura 9.3, anexo ??, el cual se basa en las siguientes ideas:

- En la imagen del mensurando deben existir un número razonables de puntos que materialicen la propiedad a caracterizar.
- La correlación anterior daría lugar a que estos puntos tengan intensidades parecidas.
- En el histograma de la imagen, los puntos del contorno deberían poder detectarse como un máximo local.

- El máximo se define a partir de un número impar de puntos, que puede llegar a caracterizar la propiedad que se desea buscar, áreas o curvas, anexo ???. En los programas utilizados este número es igual a tres: el punto central tiene que tener una ordenada mayor que la de los otros dos, figura 9.2.

(a) Primera normalización, sección 7.2.

(b) Segunda normalización de las intensidades entre $[50, 200]$.**Figura 9.4:** Variación de las intensidades para una o dos normalizaciones de la imagen.

Los datos de las densidades de probabilidad obtenidos en el modelo bayesiano se han creado para unas intensidades de la parte oscura y clara de $I_A = 50$ e $I_B = 200$ respectivamente, sección 7.7. Para poder emplear estos resultados en imágenes reales, es necesario volver a normalizar la imagen y que las intensidades pertenezcan al intervalo $[50, 200]$, anexo ??? sección ???. Como se puede observar en la figura 9.4, el contraste entre el fondo y el borde del mensurando aumenta, lo cual favorece la detección del borde.

(a) Imagen pseudosintética

(b) Detalle del borde la imagen.

Figura 9.5: Generación de una imagen pseudosintética sobre la región de medida para la aplicación del modelo bayesiano.

Aún utilizando los procedimientos anteriores, el proceso de segmentación sigue siendo complicado, por lo que el usuario debe de seleccionar la región de medida mediante el

- c.) Las relaciones entre las distintas distancias l_{ijk} y las intensidades se pueden ver en la figura 9.6. A partir de estas relaciones se calcula $\overrightarrow{l_{lmn}}$ y la intensidad del primer vecino I_2 .
- d.) Se utilizan los coeficientes de las densidades de probabilidad ajustadas a distribuciones rectangulares o a dobles gaussianas, para determinar las distancias l_{ijk} y l_{lmn} , sección B.
- e.) Posteriormente estas distribuciones se ajustan en Matlab a un *objeto de densidad de probabilidad*, *PDF object* en inglés, en el cálculo de incertidumbres.
- f.) El resultado de la distancia es la media de las distancias anteriores.

Las coordenadas obtenidas se ajustan mediante mínimos cuadrados a dos rectas. La distancia entre las rectas se determina como la media de las distancias que existen entre una recta y todos los puntos de la otra y viceversa. El resultado está medido en píxeles, por lo que conocida la amplificación se recuperan los parámetros de calibración del sistema óptico, capítulo 7, para pasar los píxeles a [mm]. Esta tarea se realiza con la función del anexo ?? sección ??.

9.3.1. Medida con tres BPL y amplificación óptica de 4,5x

Utilizando las imágenes anteriores, se procede a la determinación de la medida y su incertidumbre mediante el método de Monte Carlo, teniendo en cuenta la tabla 9.8 y las densidades de probabilidad obtenidas en la aproximación bayesiana.

(a) Región de interés, ROI, definida por el usuario en la zona de medida. (b) Comparativa entre filtros subpíxel.

Figura 9.7: *Determinación de la región de interés y comparación entre los resultados de los filtros subpíxel.*

Tabla 9.8: *Distribuciones de los parámetros ópticos para $Z=4,5$ aumentos.*

Magnitud de Entrada	Valor Medio	D. Típica	Distribución	Grados de Libertad
A [-]	0,00093	0,000082	normal	∞
Θ [-]	-0,00075	0,00013	normal	∞
C_K [-]	-0,0060	0,0018	normal	∞
l_{ijk} [píx]	-	-	kernel (normal)	∞

Todos los modelos se han ejecutado en el superordenador Magerit con tiempos medios de cálculo de 13 minutos, para 10^6 replicaciones. Los histogramas que se obtienen de las medidas exterior e interior del bloque patrón se pueden ver en la figura 9.8. Ambos resultados se ajustan muy bien a una gaussiana.

El resultado para la distancia exterior del BPL es:

$$d_{ext}(k=2) = (0,4997 \pm 0,0018) \text{ [mm]}$$

De la misma manera, la distancia interior entre los bloques patrón es:

$$d_{int}(k=2) = (0,4994 \pm 0,0018) \text{ [mm]}$$

9.3.2. Medida con tres BPL y amplificación óptica de 3x

Se realiza con el mismo montaje la medida de la distancia interior y exterior pero ahora con una amplificación óptica de 3, figura 9.9.

Tabla 9.9: *Distribuciones de los parámetros ópticos para $Z=3$ aumentos.*

Magnitud de Entrada	Valor Medio	D. Típica	Distribución	Grados de Libertad
A [-]	0,00024	0,00066	normal	∞
Θ [-]	-0,000029	0,0016	normal	∞
C_K [-]	-0,0050	0,0024	normal	∞
l_{ijk} [píx]	-	-	kernel (normal)	∞

Observando los histogramas de la figura 9.10 se obtienen los resultados de las medidas de la distancia interior, d_{int} , y de la distancia exterior, d_{ext} .

(a) Histograma para la medida exterior de un bloque patrón longitudinal.

(b) Histograma para la medida interior entre bloques patrón longitudinales.

Figura 9.8: Histogramas de las medidas realizadas para un zoom óptico de 4,5 aumentos.

(a) Medida del exterior de un bloque patrón longitudinal para una amplificación óptica de 3 aumentos. (b) Medida del interior del montaje de tres bloques patrones longitudinales para una amplificación óptica de 3 aumentos.

Figura 9.9: Medida con un montaje de tres BPL para zoom óptico $3x$.

La distancia exterior es:

$$d_{ext}(k=2) = (0,4997 \pm 0,0012) \text{ [mm]}$$

El resultado de la medida de la distancia interior es:

$$d_{int}(k=2) = (0,5008 \pm 0,0013) \text{ [mm]}$$

La determinación de las intensidades del borde y la generación correcta de la imagen *pseudosintética* son de gran importancia para el correcto resultado de la medida.

9.3.3. Medida de un BPL con desplazamiento del sistema mecánico

En ciertas ocasiones, el mensurando es mayor que el campo de medida para la amplificación seleccionada. La medida en estas circunstancias se realiza combinando la aportación del sistema óptico con la del sistema mecánico, como se ha visto anteriormente, ecuaciones 9.1 y 9.2.

El modelo de medida utilizado queda reflejado en la figura 9.11, la distancia entre los bordes del bloque patrón, d , se determina a partir de las contribuciones ópticas, $\vec{d}_1$ y $\vec{d}_2$ y el desplazamiento mecánico, $\overrightarrow{O_2O_1}$. Este proceso se realiza en los siguientes pasos:

- a.) Determinación de $\vec{d}_1$ y $\vec{d}_2$ mediante la captura de dos imágenes sobre el borde del mensurando. Estas medidas son puramente ópticas y, por tanto, no se les aplicará

(a) Histograma para la medida exterior de un bloque patrón longitudinal.

(b) Histograma para la medida interior entre bloques patrón longitudinales.

Figura 9.10: Histogramas de las medidas realizadas para un zoom óptico de 3 aumentos.

Figura 9.11: Modelo para la medida de un BPL fuera del campo de medida del sistema óptico, con desplazamiento mecánico en un eje.

ninguna corrección debida al sistema mecánico.

- b.) Obtención de la distancia $\overrightarrow{O_2O_1}$, mediante el sistema de medida mecánico de la máquina.
- c.) Los puntos con respecto al centro de la primera imagen, O_1 , se ajustan a dos rectas mediante mínimos cuadrados.
- d.) El modelo de medida se basa en la distancia de una recta a un punto: a partir de un número de puntos de la primera recta se calculan las distancias a la segunda recta, y viceversa. El resultado de la medida d es la media de las distancias anteriores.

La verificación del modelo se realiza tomando un bloque patrón de $(2,5 \pm 0,00061)$ [mm] anexo E, con una amplificación óptica de $Z = 3$. El resultado para un millón de repeticiones es, figura 9.12:

$$d_{ext}(k=2) = (2,4980 \pm 0,0026) \text{ [mm]}$$

Figura 9.12: Histogramas para un BPL con desplazamiento máquina de 2,5 [mm].

Resultados experimentales

RESUMEN: En este capítulo se presentan los resultados de las medidas realizadas sobre piezas por aplicación del modelo descrito en esta tesis, teniendo en consideración los errores debidos a los sistemas óptico y mecánico.

*“Nature uses only the longest threads to weave her patterns,
so each small piece of her fabric reveals the organization of
the entire tapestry.”*

—Richard Feynman—

§ 10.1. Introducción

Utilizando los modelos desarrollados en los capítulos 7, 8 y 9, se realizan medidas sobre imágenes de diferentes mensurandos con y sin desplazamientos mecánicos, tabla 10.1. Debido a la complejidad de los procesos de medida, queda justificada la utilización del procedimiento propuesto en el suplemento 1 de la GUM [75] para la determinación de la incertidumbre.

Además de lo señalado en los capítulos precedentes, en función de las características de las imágenes, se utilizan soluciones *ad-hoc*, en las que se emplean herramientas tales como el filtro de la mediana [94, 131, 109, 5] y el método de la entropía local [55, 56, 116, 123]. Se exponen ejemplos de cada tipo y se señalan, en cada caso, las razones que justifican su empleo.

A modo de resumen, se enumeran a continuación las fuentes de incertidumbre que de manera general se tienen en cuenta en el modelo de medida:

Tabla 10.1: *Resumen de medidas experimentales realizadas.*

Nº	Descripción	Zoom	S. Ópt.	S. Mec.	Int. Máx.	Otros Filtros
1	Chiclé carburador	4,5	x		x	Mediana
2	Tarjeta HD	4,5	x		x	Mediana
3	Plaquita corte	3	x	x	x	Entropía
4	Galga	3	x	x	x	Entropía
5	Galga	3	x	x	x	Entropía

- a.) *Intensidad.* La intensidad de la luz que recibe el CCD sufre variaciones con el tiempo. Para determinar su valor, se toman varias imágenes a partir de las cuales se obtiene la incertidumbre máxima.
- b.) *Borde del mensurando.* El borde del mensurando tiene una dependencia muy fuerte con la intensidad en el modelo propuesto, ecuación 7.33. A partir de la intensidad en el píxel, y teniendo en cuenta los resultados del modelo M CCD4, se determina la distribución de probabilidad, sección 7.6.5, que contribuye a la incertidumbre de la posición con precisión subpíxel.
- c.) *Errores del sistema óptico y mecánico.* En este apartado se utilizarán los parámetros del sistema óptico: A , Θ , C_k , sección 7.3; y los del sistema mecánico: δ_{xxi} y δ_{yji} , sección 8.2, que incorporan sus propias fuentes de incertidumbre.

La ecuación modelo será la del sistema máquina:

$$\Delta X_p = \Delta X_{vm} - \delta_{xx1}\Delta X_{vm} - \delta_{xx2}\Delta X_{vm}^2 - \delta_{xx3}\Delta X_{vm}^3 \quad (10.1)$$

$$\Delta Y_p = \Delta Y_{vm} - \delta_{yy1}\Delta Y_{vm} - \delta_{yy2}\Delta Y_{vm}^2 - \delta_{yy3}\Delta Y_{vm}^3 \quad (10.2)$$

$$\Delta X_{vm} = \alpha (\Delta p_1 - \Delta p_2) + \beta (\Delta q_1 - \Delta q_2) + \Delta X \quad (10.3)$$

$$\Delta Y_{vm} = \beta (\Delta p_1 - \Delta p_2) + \gamma (\Delta q_1 - \Delta q_2) + \Delta Y \quad (10.4)$$

$$\alpha = E_0 [1 + C_k + A] \quad (10.5)$$

$$\beta = \frac{E_0}{2} \Theta \quad (10.6)$$

$$\gamma = E_0 [1 + C_k - A] \quad (10.7)$$

donde ΔX es la distancia dada por el sistema mecánico; ΔX_1 y ΔX_2 son las medidas utilizando únicamente el sistema óptico; Δp_i y Δq_i son los incrementos de píxeles obtenidos en

las dos imágenes tomadas para la medida; α , β y γ parámetros agrupados de la calibración del sistema óptico.

La luz modifica su comportamiento al interactuar con el medio circundante y, por tanto, su información asociada. Para poder interpretar dicha información, es necesario realizar diferentes procesos de integración y filtrado. El procedimiento de medida utilizado en este capítulo se realiza en los siguientes pasos:

- a.) Selección de borde mediante el umbral o *threshold*. Mediante un algoritmo propio e interactivo se realiza la búsqueda de máximos en el histograma de la imagen. En general, uno de estos máximos se corresponderá con los puntos del borde del mensurando. Dependiendo del caso, además, se introduce el filtro de la mediana o la entropía local.
- b.) Renormalización de la imagen, para poder aplicar el modelo bayesiano, sección 9.3.
- c.) Aplicación de las densidades de probabilidad, sección 7.7, para la determinación de los puntos del borde.
- d.) Cambio de sistema de referencia. Utilizando las ecuaciones 10.1 a 10.7 se pasan las coordenadas en [píxel] a [mm].
- e.) Proceso de ajuste. Para el proceso de ajuste se aplican los algoritmos del capítulo 6.
- f.) Determinación de la incertidumbre de medida, siguiendo el procedimiento del suplemento de la GUM [75].

§ 10.2. Mensurando 1: chiclé de carburador

La primera medida se realiza a un chiclé (D60) del carburador de una motocicleta, de diámetro nominal 0,6 [mm], sin desplazamiento mecánico.

Se hace una selección de la intensidad que más fielmente reproduce el borde del mensurando, figura 10.2. Para ello se toma el histograma de la imagen previamente normalizada sección 7.2 y se buscan los máximos de intensidad, obteniéndose, en primera aproximación, el borde del elemento a medir.

En el caso que nos ocupa el borde está muy acotado, pero no siempre es así. Por este motivo, se toma una región de interés, ROI en inglés, para limitar todavía más el borde de estudio, figura 10.3(a). Eliminando toda aquella información no tratable, se llega a

(a) Chicle del carburador de una motocicleta. (b) Detalle interior del chicle, imagen de medida.

Figura 10.1: *Chicle D60 del carburador de una motocicleta.*

(a) Máximo de intensidad, área interior. (b) Máximo de intensidad, borde del chicle.

Figura 10.2: *Determinación de los máximos de intensidad.*

una imagen *pseudosintética*, en la que después de renormalizar para fijar los límites de luminancia entre 50 y 200, se añade el borde, figura 10.3(c).

(a) ROI aplicada el chiclé.

(b) Imagen *pseudosintética*.

(c) Detalle del borde de la imagen *pseudosintética*.

Figura 10.3: ROI y generación de la imagen para la determinación del borde.

Una vez limpia la imagen, se aplica el algoritmo para la determinación del borde con precisión subpíxel del filtrado bayesiano. Posteriormente, se determina el radio mediante regresión ortogonal, y se aplica un filtro de la mediana con el que mejorar el resultado, figura 10.4.

La propagación de la incertidumbre se realiza mediante el método de Monte Carlo utilizando los datos de la tabla 10.2.

El resultado puede verse en la figura 10.5, obteniéndose como resultado de la medida:

$$r(k=2) = (0,3107 \pm 0,0012) [\text{mm}]$$

Figura 10.4: Resultado del ajuste de la circunferencia mediante regresión ortogonal y filtro de la mediana.

Tabla 10.2: Distribuciones de los parámetros ópticos para $Z=4,5$ aumentos.

Magnitud de Entrada	Valor Medio	D. Típica	Distribución	Grados de Libertad
A [-]	0,00093	0,000082	normal	∞
Θ [-]	-0,00075	0,00013	normal	∞
C_K [-]	-0,0060	0,0018	normal	∞
l_{ijk} [píx]	-	-	kernel (normal)	∞

Figura 10.5: Distribución para el radio del chiclé.

§ 10.3. Mensurando 2: tarjeta electrónica

Como segunda aplicación práctica de medida sin desplazamiento mecánico, se toma el circuito impreso de un disco duro, figura 10.6. Como en el caso anterior, se utiliza un zoom óptico de $4,5\times$, por lo que se usarán los parámetros de la tabla 10.2.

Figura 10.6: Tarjeta impresa de un disco duro utilizada.

El algoritmo comienza con la normalización de la imagen, figura 10.7(a), para conseguir que las luminancias estén comprendidas entre 50 y 200, según el algoritmo MCCD4. Posteriormente, se aplica un umbral a la intensidad para poder segmentar el borde del mensurando. La selección de la intensidad del *threshold* se realiza mediante un algoritmo original que determina el máximo de luminancia y su desviación, figura 10.7(b). Una vez seleccionado el borde con precisión píxel, se ajusta el borde mediante el algoritmo de filtrado bayesiano, con precisión subpíxel, figura 10.7(c).

La caracterización de la circunferencia a partir del borde, se calcula a partir de los algoritmos de mínimos cuadrados y de mínimos cuadrados ortogonales, obteniéndose el resultado de la figura 10.8.

La dimensión final del radio, figura 10.9, resulta:

$$r(k=2) = (0,2157 \pm 0,0008) [\text{mm}]$$

(a) Imagen original normalizada

(b) Imagen original con detección por *threshold* generalizado (c) Imagen original con detección por *threshold* mediante ROI**Figura 10.7:** Medida de un detalle de un circuito de un disco duro. **Figura 10.8:** Resultado del ajuste de la circunferencia mediante regresión ortogonal.

Figura 10.9: Distribución para el radio de la tarjeta de un disco duro.

§ 10.4. Mensurando 3: ángulo de una plaquita de corte

El tercer mensurando es una plaquita de corte TPMN 16 03 08 de la casa Sandvik, figura 10.10, cuyas dimensiones normalizadas se encuentran en el catálogo del fabricante, anexo F.

Este ejercicio metrológico tiene como propósito determinar uno de los ángulos, de valor nominal 60° , mediante desplazamiento mecánico. En este caso el contraste entre el fondo y el borde de la plaquita es casi inapreciable, por lo que para poder segmentar la imagen se decide emplear el método de la entropía local.

Figura 10.10: Cotas de la plaquita de corte TPMN 16 03 08 de la casa Sandvik.

La determinación de los máximos de intensidad se basa en la selección de píxeles que tienen propiedades parecidas. Este proceso toma el histograma de la imagen y realiza una búsqueda sobre él. En este caso, el filtrado no se realiza de manera eficiente, por lo que se

usa la información asociada a la *la textura* de los píxeles, mediante el método de la entropía local. Al efecto, se utilizan las librerías de Matlab en las que se mide la entropía de los 9×9 vecinos alrededor del píxel de trabajo.

El proceso de medida es equivalente al indicado en la sección 9.3.3:

- Sobre el borde de las aristas de la plaquita se toman dos imágenes, figura 10.12.
- Se aplica el método de la entropía local, figura 10.12.
- Retomando los métodos generales, se determina el máximo de intensidad para obtener el borde en cada una de las imágenes.
- Los conjuntos de píxeles anteriores se ajustan por el método de los mínimos cuadrados.
- Realizando las correcciones de calibración debidas al sistema óptico, se obtiene el ángulo entre las rectas ajustadas.
- La incertidumbre de la medida se estima mediante el método de Monte Carlo.

(a) Imagen original.

(b) Determinación de los máximos de intensidad.

Figura 10.11: *Determinación del borde utilizando los máximos de intensidad.*

Siguiendo el proceso anteriormente descrito, teniendo en cuenta las correcciones del sistema óptico y mecánico, tabla 10.3, y replicando 10^6 veces el modelo, se obtiene el resultado del ángulo entre dos de las aristas de la plaquita de corte, figura 10.13:

$$\alpha(k=2) = (59,7869 \pm 0,0002) [^\circ]$$

(a) Imagen después de aplicar el método de la entropía local. (b) Determinación de los máximos de intensidad, usando el método de la entropía local.

Figura 10.12: Aumento del contraste de una imagen usando el método de la entropía local.

Tabla 10.3: Distribuciones de los parámetros ópticos y mecánicos para $Z=3$ aumentos.

Magnitud de Entrada	Valor Medio	D. Típica	Distribución	Grados de Libertad
A [-]	0,00024	0,00066	normal	∞
Θ [-]	-0,000029	0,0016	normal	∞
C_K [-]	-0,0050	0,0024	normal	∞
l_{ijk} [píxel]	-	-	kernel (normal)	∞
δ_{xx1} [-]	-0,00086	0,00011	normal	∞
δ_{xx2} [mm^{-1}]	0,0000057	0,0000024	normal	∞
δ_{xx3} [mm^{-2}]	-0,000000022	0,000000013	normal	∞
δ_{yy1} [-]	0,0021	0,00035	normal	∞
δ_{yy2} [mm^{-1}]	-0,0000231	0,0000078	normal	∞
δ_{yy3} [mm^{-2}]	0,000000099	0,000000041	normal	∞

Figura 10.13: *Distribución de medida para el ángulo entre aristas de una plaquita de corte.*

§ 10.5. Mensurando 4: galga extensométrica

Como último mensurando se ha elegido una galga extensométrica de la casa HBM XY21-1,5/120, anexo F, cuyas dimensiones se encuentran acotadas en la figura 10.14. Se van a determinar las medidas las longitudes b_1 y b_2 mediante desplazamiento mecánico, figuras 10.15 y 10.16.

Figura 10.14: *Cotas de la galga HBM XY21-1,5/120.*

Debido a la falta de contraste que existe entre el la galga y el fondo se seguirá el procedimiento del apartado anterior, es decir, a partir del histograma y del método de la entropía local se seleccionan las localizaciones de los píxeles del borde para posteriormente aplicar la aproximación subpíxel y ajustar las rectas por mínimos cuadrados. La determinación de la distancia entre dos rectas se realiza utilizando el método general para medidas con desplazamientos, descrito en el capítulo anterior.

Figura 10.15: Medida de la cota b_1 .

Figura 10.16: Medida de la cota b_2 .

A continuación se estima la incertidumbre de las medidas mediante el método de Monte Carlo, utilizando las distribuciones obtenidas mediante la aproximación de bayesiana. En ambos casos, los modelos de medida se replican 10^6 veces obteniéndose como resultado para la longitud b_1 , figura 10.17:

Figura 10.17: Distribución para la distancia b_1 .

$$b_1(k=2) = (1,7741 \pm 0,0032) \text{ [mm]}$$

El resultado de la medida de b_2 , figura 10.18:

$$b_2(k=2) = (2,5001 \pm 0,0034) \text{ [mm]}$$

Figura 10.18: Distribución para la distancia b_2 .

Capítulo 11

Conclusiones y trabajos futuros

RESUMEN: En este capítulo se enumeran las conclusiones de la tesis y se proponen futuros trabajos de investigación.

*While the sun hangs in the sky and the desert has sand
While the waves crash in the sea and meet the land
While there's a wind and the stars and the rainbow
Till the mountains crumble into the plain
Oh yes we'll keep on tryin'*

*Innuendo
—Queen—*

§ 11.1. Conclusiones

En esta tesis se han desarrollado modelos físico-matemáticos para el tratamiento de datos sintéticos y la experimentación con mensurandos reales. Las conclusiones más notables se señalan a continuación:

- Se propone un modelo genuino de calibración del sistema óptico, basado en la transformación lineal del sistema de la máquina en un sistema cartesiano. Su validez práctica se ha demostrado a través de la conversión de un escáner comercial en una máquina óptica.
- A partir del área en una posición del espacio y la intensidad que recibe el CCD de dicha posición, se establece una relación lineal entre las mismas. A partir de la relación anterior, se establecen varios modelos con los que determinar la posición del

borde con precisión subpíxel. El modelo logra generar imágenes sintéticas en las que existe un degradado en el borde que representa razonablemente la realidad.

- Se ha propuesto un modelo de caracterización para los tipos de píxeles a partir del área cubierta. Cada tipo de píxel tendrá unos puntos de corte característicos con su contorno. Estos puntos se determinan con precisión subpíxel.
- Las ideas anteriores se generalizan en un modelo ideal de 3x3 píxeles en el que se generan un gran número de áreas y sus correspondientes intensidades. Los datos que se generan se introducen en un modelo estadístico bayesiano con el que se obtienen las posiciones más probables en el contorno del píxel, para cada intensidad y para cada tipo de píxel. Estas densidades de probabilidad se utilizan para la determinación del borde, y para la estimación de la incertidumbre por el método de Monte Carlo.
- La verificación del algoritmo propuesto para la determinación del borde, se ha comparado con los de Canny (con precisión píxel) y de Trujillo Pino (con precisión subpíxel), en un primer momento utilizando imágenes sintéticas. Como se observa en la tabla 7.9, el modelo propuesto se muestra robusto y consistente para la detección de líneas y pequeños detalles, sobre todo aquellos que se delimitan con una única fila de píxeles. Sin embargo, es sensible de mejora en la caracterización de curvas como los arcos de circunferencia y las elipses.
- Debido a la naturaleza de la luz, las medidas con luz episcópica presentan problemas de homogeneidad de las intensidades y, por tanto, se complica el proceso de segmentación. En los algoritmos anteriormente citados se resuelve con la aplicación de un filtro gaussiano. El procedimiento propuesto en esta tesis realiza la detección del borde mediante la técnica del umbral (*threshold*), que no necesita aplicar un filtro gaussiano. Su empleo en imágenes sintéticas es sencillo y de alta precisión. Con imágenes reales todo cambia, se requiere la generación de *scripts* para la detección de máximos en el histograma de niveles de grises. Estos máximos se relacionan con características semejantes que la luz y el CCD son capaces de distinguir. En general, existe un máximo de intensidades con suficientes puntos de palpado en el borde del mesurando a medir, y las intensidades cercanas al borde no se difunden por los píxeles circundantes, permitiendo la caracterización de mensurandos con incertidumbres razonables, incluso en condiciones de medida poco favorables.
- Las posiciones del máximo en intensidad seleccionado, representan la localización

del borde en píxeles, a las que resulta imprescindible aplicar correcciones ópticas y mecánicas según los modelos descritos, desarrollados en esta tesis. El resultado final de la medida se obtiene mediante modelos de ajuste *ad-hoc* para cada forma geométrica. La incertidumbre de la medida se obtiene mediante el método de Monte Carlo. En este proceso resulta imprescindible la utilización de imágenes *pseudosintéticas*¹ a partir de las cuales realmente se determina el borde con precisión subpíxel.

- El modelo de ajuste con precisión subpíxel desarrollado en esta tesis se ha mostrado, asimismo, eficaz y robusto. Su implementación se ha realizado mediante el software Matlab.
- La validación experimental con patrones y mensurandos de referencia ha resultado satisfactoria, obteniendo resultados de medida compatibles con los valores certificados.
- El modelo desarrollado en esta tesis se ha aplicado con éxito en la medición de diferentes mensurandos en el rango submilimétrico empleando el sistema óptico y la combinación de éste con el sistema mecánico. Ha sido posible caracterizar adecuadamente formas geométricas como circunferencias, y realizar medidas de ángulos y longitudes sobre mensurandos reales en condiciones de medida equivalentes a las de un laboratorio industrial.

§ 11.2. Trabajos futuros

A partir de la experiencia acumulada, se estima que resultaría de interés para la comunidad científica profundizar en otras líneas derivadas del tema de investigación de esta tesis, que podrían conducir a interesantes avances del conocimiento. Durante el desarrollo de la investigación y tras el análisis de los resultados obtenidos han surgido, casi constantemente, nuevas vías para el cambio, actualización y mejora; características, por cierto, de los métodos de Fourier y Bayes empleados en esta tesis, y a juicio del doctorando motor de nuestras vidas.

Los trabajos futuros sugeridos se podrían clasificar en dos grupos:

- a.) Orientados a la modificación y optimización de los algoritmos. Entre ellos:

¹Una imagen *pseudosintética* es aquella en la que sólo se conservan las intensidades normalizadas entre 50 y 200 que pertenecen al borde del mensurando. El resto de información se elimina para una mejor optimización del tiempo de cálculo.

- Identificar automáticamente las condiciones óptimas de medida en función del tipo de iluminación, con el propósito de obtener el mejor contraste con la luz episcópica o reflejada. La automatización del proceso de selección del máximos en el histograma que están directamente relacionados con el mensurando, es necesaria para una mejor clasificación de las condiciones óptimas de medida.
 - Desarrollo de algoritmos multiprocesador, con el fin de reducir el tiempo de cálculo. Los programas actuales sólo trabajan con un procesador. La generalización del código podría reducir drásticamente el tiempo de cálculo.
 - En el modelo MCC4 se ha utilizado una recta para obtener los puntos del borde con precisión subpíxel. Debido a las dimensiones del píxel esta solución funciona relativamente bien. El cambio de la recta por una curva podría ser beneficioso, aunque muy probablemente daría lugar a nuevas clasificaciones del tipo de píxel a utilizar.
 - Generalización del modelo bayesiano, para cualquier tipo de límites de intensidad, pudiendo incluso tomar límites de intensidad flotantes, o relativos al píxel a estudio.
 - Creación de un modelo de bajo coste a partir de una cámara comercial, transformándola en un instrumento de medida. Mediante modificaciones menores de los modelos desarrollados, se podría calibrar la cámara y construir un sistema de medida muy barato.
 - Generación de patrones a partir de dispositivos móviles con pantalla LCD. Estas pantallas cuentan con píxeles de dimensiones conocidas, de color rojo, verde y azul. El desarrollo de modelos de calibración de pantalla adecuados daría lugar a patrones trazables de longitud y de color.
 - Aplicación de filtrado en el espacio de las frecuencias y técnicas de correlación digital para poder mejorar la sensibilidad de los algoritmos en el caso de medidas reales.
- b.) Orientados a cambios conceptuales, que implican modificaciones severas de los procedimientos utilizados en esta tesis. Entre ellos:
- Generalización del modelo óptico, utilizando la óptica de Fourier, y nuevos modelos para describir las aberraciones como los basados en los polinomios de Seidel y Zernique.

- Generación del un modelo puramente estadístico, al estilo de los creados en mecánica estadística: en un sistema de partículas conociendo su campo de energías, se puede determinar su comportamiento macroscópico. O un híbrido basado en la probabilidad inferencial y la probabilidad bayesiana, obteniendo modelos más sencillos a la hora de adaptarse a nuevas situaciones. La generalización de este modelo se podría realizar mediante muestreo de Gibbs y cadenas de Markov.

Referencias

- [1] «ASME Y14.5-2009, Dimensioning and Tolerancing».
- [2] AHN, S. J.; RAUH, W.; CHO, H. S. y WARNECKE, H. J.: «Orthogonal distance fitting of implicit curves and surfaces». *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, **24**(5), pp. 620–638.
- [3] AHN, S. J.; RAUH, W. y WARNECKE, H. J.: «Least-squares orthogonal distances fitting of circle, sphere, ellipse, hyperbola, and parabola». *Pattern Recognition*, 2001, **34**(12), pp. 2283–2303.
- [4] BAILEY, D. G.: «Pixel calibration techniques». En: *Proceedings of the New Zealand Image and Vision Computing Workshop*, pp. 37–42, 1995.
- [5] BARAJAS, C.: *Caracterización geométrica de huellas de dureza Brinell mediante equipos ópticos. Modelo con microscopía confocal*. Tesis doctoral, ETS Ingeniería Industrial, 2015.
- [6] BERNARDO, J. M.: *Bioestadística, una perspectiva bayesiana*. Vicens-Vives, Barcelona, España, 1981.
- [7] BING, P.; HUI-MIN, X.; BO-QIN, X. y FU-LONG, D.: «Performance of sub-pixel registration algorithms in digital image correlation». *Measurement Science and Technology*, 2006, **17**(6), pp. 1615–1621.
- [8] BJÖRCK, A.: *Numerical Methods for Least Squares Problems*. SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1^a edición, 1996.
- [9] BOLSTAD, W. M.: *Introduction to Bayesian Statistics*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2^a edición, 2007.

- [10] BORN, M. y WOLF, E.: *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 7^a edición, 1999.
- [11] CAJA, J.: *Técnicas avanzadas de metrología dimensional indirecta mediante el empleo de máquinas de medición por visión en entornos industriales. Modelo para la estimación de incertidumbres*. Tesis doctoral, ETSIDI - UPM, 2014.
- [12] CAJA, J.; GÓMEZ, E. y MARESCA, P.: «Optical measuring equipments. Part I: Calibration model and uncertainty estimation». *Precision Engineering*, 2015, **40**, pp. 298–304.
- [13] CAJA, J.; GÓMEZ, E. y MARESCA, P.: «Optical measuring equipments. Part II: Measurement traceability and experimental study». *Precision Engineering*, 2015, **40**, pp. 305–308.
- [14] CAJA, J.; GOMEZ, E.; MARESCA, P. y BERZAL, M.: «Development of a calibration model for optical measuring machines». En: *The Manufacturing Engineering Society International Conference, (MESIC 2013)*, volumen 63 de *Procedia Engineering*, pp. 225–233, 2013.
- [15] CAJA, J.; GOMEZ, E.; MARESCA, P. y BERZAL, M.: «Uncertainty estimation for the optical system of optical measuring machines». *Key Engineering Materials*, 2014, **615**, pp. 95–101.
- [16] CAJA, J.; MARESCA, P.; GÓMEZ, E.; BARAJAS, C. y BERZAL, M.: «Metrological characterization of interior circular features using digital optical machines: Calculation models and application scope». *Precision Engineering*, 2014, **38(1)**, pp. 36–47.
- [17] CANNY, J.: «A variational approach to edge detection». En: M.A. Genesereth (Ed.), *Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence*, pp. 54–58. AAAI Press, Washington D.C, 1983.
- [18] CANNY, J.: «A computational approach to edge detection». *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 1986, **(6)**, pp. 679–698.
- [19] CHARY, S. N.: *Production and operations management*. McGraw Hill Higher Education, New Delhi, India, 3^a edición, 2006.

-
- [20] CHETWYND, D. G.: «Roundness measurement using limacons». *Precision Engineering*, 1979, **1(3)**, pp. 137–141.
- [21] CHETWYND, D. G. y PHILLIPSON, P. H.: «An investigation of reference criteria used in roundness measurement». *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, 1980, **13(5)**, pp. 530–538.
- [22] COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B. y LALOE, F.: *Quantum mechanics*. volumen 1,2. Wiley-VCH, New York, 1992.
- [23] CONGDON, P.: *Applied bayesian modelling*. John Wiley & Sons Inc, Chichester, UK, 2003.
- [24] COVENEY, T.: «Dimensional measurement using vision systems. Measurement good practice guide n° 39.» *National Physical Laboratory*, 2014.
- [25] COX, M. G.; FORBES, A. B. y HARRIS, P. M.: «Software support for metrology best practice guide n° 6: uncertainty evaluation». *National Physical Laboratory*, 2010.
- [26] COX, M. G. y HARRIS, P. M.: «Discrete modelling. Software support for metrology best practice guide n° 4», 2007.
- [27] DE CHIFFRE, L. y HANSEN, H. N.: «Metrological limitations of optical probing techniques for dimensional measurements». *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 1995, **44(1)**, pp. 501–504.
- [28] DE FRANCA, J. A.; STEMMER, M. R.; FRANCA, M. B. y PIAI, J. C.: «A new robust algorithmic for multi-camera calibration with a 1D object under general motions without prior knowledge of any camera intrinsic parameter». *Pattern Recognition*, 2012, **45(10)**, pp. 3636–3647.
- [29] DE SANTO, M.; LIGUORI, C.; PAOLILLO, A. y PIETROSANTO, A.: «Standard uncertainty evaluation in image-based measurements». *Measurement*, 2004, **36(3-4)**, pp. 347–358.
- [30] DE SANTO, M.; LIGUORI, C. y PIETROSANTO, A.: «Uncertainty characterization in image-based measurements: a preliminary discussion». *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, 2002, **49(5)**, pp. 1101–1107.

- [31] DE VICENTE, J.; SANCHEZ-PEREZ, A. M.; BERZAL, M.; MARESCA, P. y GOMEZ, E.: «Uncertainty in ellipse fitting using a flatbed scanner: development and experimental verification». *Measurement Science and Technology*, 2014, **25**(1), p. 015005.
- [32] DE VICENTE, J.; SÁNCHEZ-PÉREZ, A.M.; MARESCA, P.; CAJA, J. y GÓMEZ, E.: «A model to transform a commercial flatbed scanner into a two-coordinates measuring machine». *Measurement*, 2015, **73**, pp. 304–312.
- [33] DE VICENTE Y OLIVA, J. y ROYO DURÁN, C.: «Trazabilidad en la verificación de tamices mediante técnicas ópticas». *e-medida. La Revista Española de Metrología*, 2012, **1**(1), pp. 51–62.
- [34] DHANISH, P. B. y MATHEW, J.: «Effect of CMM point coordinate uncertainty on uncertainties in determination of circular features». *Measurement*, 2006, **39**(6), pp. 522–531.
- [35] DHANISH, P.B.: «A simple algorithm for evaluation of minimum zone circularity error from coordinate data». *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 2002, **42**(14), pp. 1589–1594.
- [36] DING, L. y GOSHTASBY, A.: «On the Canny edge detector». *Pattern Recognition*, 2001, **34**(3), pp. 721–725.
- [37] DORESTE CABALLERO, J. L.: «Tratamiento de imagenes CCD astronómicas». http://www.astrosurf.com/aagc/observatorio_astronomico_aagc/articulos/procesado_ccd.pdf (11/12/2015)
- [38] EA-4/02 M: 2013 EVALUATION OF THE UNCERTAINTY OF MEASUREMENT IN CALIBRATION: «European Cooperation for Accreditation», 2013.
- [39] EDMUND OPTICS.: «Edmund optics Web». <http://www.edmundoptics.com/> (11/12/2015)
- [40] ELSTER, C.: «Bayesian uncertainty analysis compared with the application of the GUM and its supplements». *Metrologia*, 2014, **51**(4), pp. S159–S166.
- [41] ELSTER, C. y TOMAN, B.: «Bayesian uncertainty analysis under prior ignorance of the measurand versus using the Supplement 1 to the Guide: a comparison». *Metrologia*, 2009, **46**, pp. 261–266.

-
- [42] ELSTER C., COX M. G. y W., WÖGER: «Draft GUM Supplement 1 and bayesian analysis». *Metrologia*, 2007, **44**, pp. L31–L32.
- [43] EN ISO 1101: 2013.: «Especificación geométrica de productos (GPS). Tolerancia geométrica. Tolerancias de forma, orientación, localización y alabeo (ISO 1101:2012, incluido Cor 1:2013). (Ratificada por AENOR en abril de 2013.)».
- [44] EVANS, C. J.; HOCKEN, R. J. y ESTLER, W. T.: «Self-Calibration: reversal, redundancy, error separation, and absolute testing». *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 1996, **45(2)**, pp. 617–634.
- [45] FELLERS, T. J. y DAVIDSON, M. W.: «Concepts in digital imaging technology. CCD saturation and blooming.».
<http://micro.magnet.fsu.edu/primer/digitalimaging/concepts/ccdsatandblooming.html>(11/12/2015)
- [46] FIETE, R. D.: *Modeling the Imaging Chain of Digital Cameras*. SPIE Press, Washington, 2010.
- [47] FISCHER, R.: *Optical System Design*. McGraw-Hill Professional, 2ª edición, 2008.
- [48] FORBES, A. y SOUSA, J. A.: «The GUM, Bayesian inference and the observation and measurement equations». *Measurement*, 2011, **44**, pp. 1422–1435.
- [49] FORSYTH, D. A. y PONCE, J.: *Computer Vision: A Modern Approach*. Pearson Education, 2ª edición, 2012.
- [50] FRANCESCHINI, F.; GALETTO, M. y GENTA, G.: «Multivariate control charts for monitoring internal camera parameters in digital photogrammetry for LSDM (Large-Scale Dimensional Metrology) applications». *Precision Engineering*, 2015, **42**, pp. 133–142.
- [51] FURUTANI, R. y OZAKI, M.: «Uncertainty of calibration of 2D planar coordinate measuring machine». *Measurement*, 2012, **45(3)**, pp. 427–430.
- [52] GANDER, W.; GOLUB, G. H. y STREBEL, R.: «Least-squares fitting of circles and ellipses». *BIT Numerical Mathematics*, 1994, **34**, pp. 558–578.
- [53] GELMAN, A.; CARLIN, J. B.; STERN, H. S.; DUNSON, D. B.; VEHTARI, A. y RUBIN, D. B.: *Bayesian Data Analysis*. Chapman and Hall/CRC, 3ª edición, 2013.

- [54] GÓMEZ, E.; CAJA, J.; MARESCA, P.; BARAJAS, C. y BERZAL, M.: «The application of the dispersion matrix method in the geometric description of circular forms using optical equipment: theoretical development and experimental verification». *Measurement Science and Technology*, 2009, **20**(12), p. 125301.
- [55] GONZALEZ, R. C. y WOODS, R. E.: *Digital image processing*. Pearson, 3^a edición, 2008.
- [56] GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. E. y EDDINS, S. L.: *Digital image processing using MATLAB*. Gatesmark Publishing, 2^a edición, 2009.
- [57] GOODMAN, J. W.: *Statistical optics*. Wiley-Interscience, 1^a edición, 2000.
- [58] GOODMAN, J. W.: *Introducción a la óptica de Fourier*. UNED Editorial, 2008.
- [59] GORDON, G. y BREAZEAL, C.: «Bayesian activelearning-based robot tutor for children's word-reading skills». En: *Twenty-Ninth AAAI Conference on Artificial Intelligence*, , 2015.
- [60] HALLMEN, J.: «Objetivos de microscopio en la fotografía macro por John Hallme», 2011.
[`http://www.macrosmuymacros.com/index.php?option=com\_content&view=article&id=9&Itemid=32&lang=es\(11/12/2015\)`](http://www.macrosmuymacros.com/index.php?option=com_content&view=article&id=9&Itemid=32&lang=es(11/12/2015))
- [61] HAMILTON, J. D.: *Time series analysis*. Princeton University Press, 1994.
- [62] HARRIS, C. y STEPHENS, M.: «A combined corner and edge detector.» En: *Alvey Vision Conference*, volumen 15, p. 50. Citeseer, 1988.
- [63] HARTLEY, R. y ZISSERMAN, A.: *Multiple view geometry in computer vision*. Cambridge University Press, 2^a edición, 2004.
- [64] HECHT, E. y ZAJAC, A.: *Óptica*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1986.
- [65] HOCKEN, R. J. y PEREIRA, P. H. (Eds.): *Coordinate measuring machines and systems*. CRC Press, 2^a edición, 2012.
- [66] HORNE, K.: «An optimal extraction algorithm for CCD spectroscopy». *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 1986, pp. 609–617.
- [67] HUANG, K.: *Statistical mechanics*. Wiley, 2008.

-
- [68] HUNTER, R. y HAROLD, R. W.: *The measurement of appearance*. Wiley-Interscience, 2^a edición, 1987.
- [69] HÜSER-TEUCHERT, D.: *Performance test procedures for optical coordinate measuring probes: final project report*. European Commission, Directorate-General Science, Research and Development, 1994.
- [70] IDIR, M.; KAZNATCHEEV, K.; QIAN, S. y CONLEY, R.: «Current status of the NSLS-II optical metrology laboratory». *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 2013, **710**, pp. 17–23.
- [71] JACKSON, J. D.: *Classical electrodynamics*. Wiley, 3^a edición, 1998.
- [72] JANESICK, J. y BLOUKE, M.: «Sky on a chip: the fabulous CCD». *Sky and Telescope*, 1987, **74**, p. 238.
- [73] JANESICK, J. y ELLIOTT, T.: «History and advancement of large array scientific CCD imagers». En: S. B. Howell (Ed.), *Astronomical CCD Observing and Reduction Techniques*, volumen 23, p. 1, 1992.
- [74] JCGM 100:2008: «Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement», 2008.
- [75] JCGM 101:2008: «Evaluation of measurement data - Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" - Propagation of distributions using a Monte Carlo method», 2008.
- [76] JCGM 102:2011: «Evaluation of measurement data - Supplement 2 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" - Extension to any number of output quantities», 2011.
- [77] KANATANI, K.: *Statistical optimization for geometric computation: theory and practice*. Dover Publications, 2005.
- [78] KANATANI, K. y RANGARAJAN, P.: «Hyper least squares fitting of circles and ellipses». *Computational Statistics and Data Analysis*, 2011, **55(6)**, pp. 2197–2208.

- [79] KEE, C. y RATNAM, M.: «A simple approach to fine wire diameter measurement using a high-resolution flatbed scanner». *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2009, **40**, pp. 940–947.
- [80] KHAZAEI, N. B.; TAVAKOLI, T.; GHASSEMIAN, H.; KHOSHTAGHAZA, M. H. y BANAKAR, A.: «Applied machine vision and artificial neural network for modeling and controlling of the grape drying process». *Computers and Electronics in Agriculture*, 2013, **98**, pp. 205–213.
- [81] KIANI, S.; MINAEI, S. y GHASEMI-VARNAMKHAFTI, M.: «Fusion of artificial senses as a robust approach to food quality assessment». *Journal of Food Engineering*, 2016, **171**, pp. 230–239.
- [82] KLOOS, G.: *Matrix methods for optical layout*. SPIE Publications, 2007.
- [83] KOLENA, J.: «Calibrating a CCD image».
<http://www.phy.duke.edu/~kolena/hou/calibrating.html> (11/12/2015)
- [84] KOOP, G.; POIRIER, D. J. y TOBIAS, J. L.: *Bayesian econometric methods*. Cambridge University Press, 2007.
- [85] KORIN, I.; LARRAINZAR, C. y IPIÑA, J. PEREZ: «Crack length and stable crack extension measurements from images acquired by means of a conventional flatbed scanner.» *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 2008, **31(10)**, pp. 876–884.
- [86] KRUSCHKE, J.: *Doing bayesian data analysis, second edition: a tutorial with R, JAGS, and Stan*. Academic Press, 2014.
- [87] KYRIAZIS, G. A.: «Comparison of GUM Supplement 1 and bayesian analysis using a simple linear calibration model.» *Metrologia*, 2008, **45**, pp. L9–L11.
- [88] LANDAU, L. D. y LIFSHITZ, E. M.: *The classical theory of fields*. Butterworth-Heinemann, 4^a edición, 1980.
- [89] LANDAU, L. D. y LIFSHITZ, E. M.: *Statistical physics, part 1*. Butterworth-Heinemann, 3^a edición, 1980.
- [90] LANDAU, L. D. y LIFSHITZ, E. M.: *Quantum mechanics: non-relativistic theory*. Butterworth-Heinemann, 3^a edición, 1981.

-
- [91] LANDSBERG, G. S.: *Óptica*. MIR, 1983.
- [92] LAZZARI, A. y LUCULANO, G.: «Evaluation of the uncertainty of an optical machine with a vision system for contact-less three-dimensional measurement». *Measurement*, 2004, **36(3-4)**, pp. 215–231.
- [93] LEE, H. C.: *Introduction to color imaging science*. Cambridge University Press, 1 reissue^a edición, 2009.
- [94] LEYS, C.; LEY, C.; KLEIN, O.; BERNARD, P. y LICATA, L.: «Detecting outliers: do not use standard deviation around the mean, use absolute deviation around the median». *Journal of Experimental Social Psychology*, 2013, **49(4)**, pp. 764–766.
- [95] LI, X. y SHI, Z.: «The relationship between the minimum zone circle and the maximum inscribed circle and the minimum circumscribed circle». *Precision Engineering*, 2009, **33(3)**, pp. 284–290.
- [96] LIGUORI, C.; PAOLILLO, A. y PIETROSANTO, A.: «An automatic measurement system for the evaluation of carotid intima-media thickness». *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, 2002, **50(6)**, pp. 1684–1691.
- [97] LIPSON, A.; LIPSON, S. G. y LIPSON, H.: *Optical physics*. Cambridge University Press, 4^a edición, 2010.
- [98] LIRA, I.: *Evaluating the measurement uncertainty: fundamentals and practical guidance*. CRC Press, 1st^a edición, 2002.
- [99] LIRA, I. y GRIENTSCHNIG, D.: «Equivalence of alternative bayesian procedures for evaluating measurement uncertainty». *Metrologia*, 2010, **47**, pp. 334–336.
- [100] LONGHURST, R.S.: *Geometrical and physical optics*. Longman Group United Kingdom, 3^a edición, 1974.
- [101] MALACARA-HERNÁNDEZ, D. y MALACARA-HERNÁNDEZ, Z.: *Handbook of optical design*. CRC Press, 3^a edición, 2013.
- [102] MARESCA, P.; GOMEZ, E.; CAJA, J.; BARAJAS, C. y BERZAL, M.: «Use of coordinate measuring machines and digital optical machines for the geometric characterization of circumference arcs using the minimum zone method». *Measurement*, 2010, **43(6)**, pp. 822–836.

- [103] MARESCA, P.; GOMEZ, E.; CAJA, J.; BARAJAS, C. y BERZAL, M.: «A Proposal for the Metrological Characterization of Circular Features with Digital Optical Machines». En: *4th Manufacturing Engineering Society International Conference (MESIC 2011)*, volumen 1431 de *AIP Conference Proceedings*, pp. 158–168, 2012.
- [104] MARTIN, D. R.; FOWLKES, C. C. y MALIK, J.: «Learning to detect natural image boundaries using local brightness, color, and texture cues». *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 2004, **26**(5), pp. 530–549.
- [105] MESSIAH, A.: *Quantum mechanics*. Dover Publications, 2014.
- [106] METROPOLIS, N.; ROSENBLUTH, A.W.; ROSENBLUTH, M.N.; TELLER, A.H. y TELLER, E.: «Equation of state calculations by fast computing machines». *The Journal of Chemical Physics*, 1953, **21**(6), pp. 1087–1092.
- [107] MIDOH, Y.; MIURA, K.; NAKAMAE, K. y FUJIOKA, H.: «Statistical optimization of Canny edge detector for measurement of fine line patterns in SEM image». *Measurement Science and Technology*, 2005, **16**(2), pp. 477–487.
- [108] MIDOH, Y.; NAKAMAE, K. y FUJIOKA, H.: «Object size measurement method from noisy SEM images by utilizing scale space». *Measurement Science and Technology*, 2007, **18**(3), pp. 579–591.
- [109] MILLER, J.: «Short report: Reaction time analysis with outlier exclusion: Bias varies with sample size». *The quarterly journal of experimental psychology*, 1991, **43**(4), pp. 907–912.
- [110] MINISTERIO DE EDUCACIÓN: «Aplicación práctica de la visión artificial en el control de procesos industriales.», Febrero 2012.
http://visionartificial.fpcat.cat/wp-content/uploads/UD_1_didac_Conceptos_previos.pdf(11/12/2015)
- [111] MIRIELLO, D. y CRISCI, G.M.: «Image analysis and flatbed scanners. A visual procedure in order to study the macro-porosity of the archaeological and historical mortars». *Journal of Cultural Heritage*, 2006, **7**(3), pp. 186–192.
- [112] MONTIRONI, M. A.; CASTELLINI, P.; STROPPIA, L. y PAONE, N.: «Adaptive autonomous positioning of a robot vision system: application to quality control on

- production lines». *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2014, **30(5)**, pp. 489–498.
- [113] MURTHY, T. S. R.: «A comparison of different algorithms for circularity evaluation». *Precision Engineering*, 1986, **8(1)**, pp. 19–23.
- [114] NALWA, V. S. y BINFORD, T. O.: «On detecting edges». *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 1986, **(6)**, pp. 699–714.
- [115] OLSEN, D.; DOU, C.; ZHANG, X.; HU, L.; KIM, H. y HILDUM, E.: «Radiometric calibration for AgCam». *Remote Sensing*, 2010, **2(2)**, pp. 464–477.
- [116] PAJARES, G. y DE LA CRUZ, J. M.: *Visión por computador. Imágenes digitales y aplicaciones*. RA-MA S.A. Editorial y Publicaciones, 2ª edición, 2007.
- [117] PAN, B.: «Reliability-guided digital image correlation for image deformation measurement». *Applied Optics*, 2009, **48(8)**, pp. 1535–1542.
- [118] PAN, B.; QIAN, K.; XIE, H. y ASUNDI, A.: «Two-dimensional digital image correlation for in-plane displacement and strain measurement: a review». *Measurement Science and Technology*, 2009, **20(6)**, p. 062001.
- [119] PAPARI, G. y PETKOV, N.: «Edge and line oriented contour detection: State of the art». *Image and Vision Computing*, 2011, **29(2)**, pp. 79–103.
- [120] PAVESE, F. y FORBES, A. B. (Eds.): *Data modeling for metrology and testing in measurement science*. Birkhäuser Boston, 1ª edición, 2008.
- [121] PEÑA SANCHEZ DE RIVERA, D.: *Fundamentos de estadística*. Alianza editorial, 2001.
- [122] PEÑA SANCHEZ DE RIVERA, D.: *Análisis de series temporales*. Alianza Editorial, 2010.
- [123] PETROU, M. y GARCIA SEVILLA, P.: *Image Processing: Dealing With Texture*. Wiley, 1ª edición, 2006.
- [124] PLACKETT, R. L.: «Some theorems in least squares». *Biometrika*, 1950, **37(1-2)**, pp. 149–157.

- [125] PORTUGAL, D. y ROCHA, R. P.: «Cooperative multi-robot patrol with bayesian learning». *Autonomous Robots*, 2015, pp. 1–25.
- [126] PÉREZ, M. M.: «Estimación de incertidumbres. Guía GUM». *e-medida. Revista Española de Metrología.*, 2012.
- [127] PRINCE, J. D.: *Computer vision: models, learning, and inference*. Cambridge University Press, 2012.
- [128] REDDY, B. S. y CHATTERJI, B. N.: «An FFT-based technique for translation, rotation, and scale-invariant image registration». *IEEE Transactions on Image Processing*, 1996, **5(8)**, pp. 1266–1271.
- [129] RIEDL, M. J.: *Optical design: applying the fundamentals*. SPIE Publications, 2009.
- [130] RITTO, T. G.; SAMPAIO, R. y AGUIAR, R. R.: «Uncertain boundary condition Bayesian identification from experimental data: A case study on a cantilever beam». *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2016, **68-69**, pp. 176–188. ISSN 0888-3270.
- [131] ROUSSEEUW, P.J. y CROUX, C.: «Alternatives to the median absolute deviation». *Journal of the American Statistical association*, 1993, **88(424)**, pp. 1273–1283.
- [132] SALSURY, J. G.: «Pixel size calibration of video probe measuring machines». En: *Industrial Metrology*, American Society for Precision Engineering, 1999.
- [133] SAMUEL, G. L. y SHUNMUGAM, M. S.: «Evaluation of circularity from coordinate and form data using computational geometric techniques». *Precision Engineering*, 2000, **24(3)**, pp. 251–263.
- [134] SCHMIDT, J. D.: *Numerical simulation of optical wave propagation with examples in MATLAB*. SPIE Press, 2010.
- [135] SERRANO, J.: *Iniciacion a la estadística bayesiana*. La Muralla, S.A., 2003.
- [136] SHENOY, P.; INNINGS, F.; K., TAMMEL; J., FITZPATRICK y AHRNÉ, L.: «Evaluation of a digital colour imaging system for assessing the mixture quality of spice powder mixes by comparison with a salt conductivity method». *Powder Technology*, 2015, **286**, pp. 48–54.

-
- [137] SHUNMUGAM, M. S.: «On assessment of geometric errors». *International Journal of Production Research*, 1986, **24(2)**, pp. 413–425.
- [138] SIEWERT, F.: «Optical Metrology - On the Inspection of Ultra-Precise FEL - Optics». En: Federico Canova y Luca Poletto (Eds.), *Optical Technologies for Extreme-Ultraviolet and Soft X-ray Coherent Sources*, volumen 197 de *Springer Series in Optical Sciences*, pp. 137–149. Springer Berlin Heidelberg, 2015.
- [139] SMITH, W.: *Modern optical engineering*. McGraw-Hill Professional, 4^a edición, 2007.
- [140] SOLOMON, C. y BRECKON, T.: *Fundamentals of digital image processing: a practical approach with examples in Matlab*. Wiley, 1^a edición, 2011.
- [141] SPÄTH, H. y WATSON, G. A.: «On a sequential linear programming approach to finding the smallest circumscribed, largest inscribed, and minimum zone circle or sphere». *Mathematical Communications*, 2001, **6(1)**, pp. 29–38.
- [142] STEGER, CARSTEN: «Subpixel-precise extraction of lines and edges». *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, 2000, **33(3)**, pp. 141–156.
- [143] STONE, J. V.: *Bayes' rule: a tutorial introduction to bayesian analysis*. Sebtel Press, 2013.
- [144] SUDATHAM, W.; MATSUMOTO, H.; TAKAHASHI, S. y TAKAMASU, K.: «Non-contact measurement technique for dimensional metrology using optical comb». *Measurement*, 2016, **78**, pp. 381–387.
- [145] SZELISKI, R.: *Computer vision: algorithms and applications*. Springer, 1^a edición, 2010.
- [146] TABATABAI, A. J. y MITCHELL, O. R.: «Edge location to subpixel values in digital imagery». *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 1984, **(2)**, pp. 188–201.
- [147] TARQUINI, S. y ARMIENTI, P.: «Quick determination of crystal size distributions of rocks by means of a color scanner». *Image Analysis and Stereology*, 2003, **22**, pp. 27–34.
- [148] TAYLOR, J. R.: *An introduction to error analysis: the study of uncertainties in physical measurements*. University Science Books, 2^a edición, 1996.

- [149] TRUJILLO PINO, A.; KRISSIAN, K.; ALEMÁN-FLORES, M. y SANTANA-CEDRÉS, D.: «Accurate subpixel edge location based on partial area effect». *Image and Vision Computing*, 2013, **31**(1), pp. 72–90.
- [150] UNE-ISO 230-1:2014.: «Máquinas-herramienta. Código de verificación de máquinas-herramienta. Parte 1: Precisión geométrica de las máquinas funcionando en vacío o en condiciones cuasi-estáticas».
- [151] VAN DALEN, G.: «Determination of the size distribution and percentage of broken kernels of rice using flatbed scanning and image analysis». *Food Research International*, 2004, **37**(1), pp. 51–58.
- [152] VEZZETTI, C. F.; VARNER, R. N. y POTZICK, J. E.: *Bright-chromium linewidth standard, SRM 476, for calibration of optical microscope linewidth measuring systems*. US Department of Commerce, National Institute of Standards and Technology, 1991.
- [153] VOELZ, D.G.: *Computational Fourier optics: a MATLAB tutorial*. SPIE Press, 2011.
- [154] WILLIAMS, C. S. y BECKLUND, O. A.: *Introduction to the optical transfer function*. SPIE Publications, 2002.
- [155] WILLINK, R. y WHITE, R.: «Disentangling classical and Bayesian approaches to uncertainty analysis». *Informe técnico CCT/12-08*, 2012.
- [156] WILSON, J. N. y RITTER, G. X.: *Handbook of computer vision algorithms in image algebra*. CRC Press, 2ª edición, 2000.
- [157] YANG, Y.; YANG, B.; ZHU, S. y CHEN, X.: «Online quality optimization of the injection molding process via digital image processing and model-free optimization». *Journal of Materials Processing Technology*, 2015, **226**, pp. 85 – 98.
- [158] YE, J.; FU, G. y POUDEL, U. P.: «High-accuracy edge detection with blurred edge model». *Image and Vision Computing*, 2005, **23**(5), pp. 453–467.
- [159] ZHENG, Y.; LIN, S.; KANG, S. B.; XIAO, R.; GEE, J. C. y KAMBHAMETTU, C.: «Single-image vignetting correction from gradient distribution symmetries». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2013, **35**(6), pp. 1480–1494.

Anexos

Máquina Tesa Visio 300

§ A.1. Descripción de la Máquina Tesa Visio 300

Del catálogo de Tesa se han sacado las propiedades de la máquina TESA VISO 300 figuras A.1, A.2, A.3 y A.1(b).

(a) Dimensiones generales de la máquina Tesa Visio 300 fabricante

(b) Alturas de trabajo de la Máquina Tesa Visio 300

Figura A.1: *Dimensiones de máquinas Tesa Visio 300. Obtenidas del catálogo del fabricante.*

Una vez vistas las propiedades que el fabricante muestra en el catálogo, se revisan los elementos interiores de la máquina para determinar características no mostradas en el catálogo. En el interior se determina que el sistema óptico de la máquina está fabricado por la casa Navitar. Revisando las referencias que se pueden observar, y entrando en los catálogos y en la aplicaciones para realizar diferentes configuraciones, se determina que el

TESA-VISIO 300 y 300 DCC			
ESPECIFICACIONES	06830200	06830201	06830202
Número de pedido	TESA-VISIO 300	TESA-VISIO 300	TESA-VISIO 300 DCC
Modelo	TESA-VISTA	PCDmis	PCDmis
Programa	Manual	Manual	Motorizada
Versión	300 x 200	300 x 200	300 x 200
Campo de medida X/Y (en mm)	150	150	150
Campo de medida Z (en mm)	150	150	150
Servomotores con encoders - tacómetros en los tres ejes	•	•	•
Desembragado manual de los ejes X e Y	•	•	•
Ajuste fino de la distancia focal, manual	•	•	•
Iluminación diascópica (1 LED verde)	•	•	•
Precisión X/Y a 20°C	3+10·L/1000	3+10·L/1000	2,4+4·L/1000
Precisión Z a 20°C	3+2·L/100*	3+2·L/100*	3+1·L/100*
Resolución de los encoders (X/Y/Z)	0,05 µm	0,05 µm	0,05 µm
Carga máxima admisible (centrada sobre la mesa)	16 kg	16 kg	16 kg
Dimensiones totales sin monitor ni PC (LxHxP en mm)	680 x 990 x 800	680 x 990 x 800	680 x 990 x 800
Peso (sin monitor y PC)	78 kg	78 kg	78 kg
Límite de temperatura de funcionamiento	20° ± 2°C	20° ± 2°C	20° ± 2°C
Alimentación	115 a 220 Vac ±10% 50 a 60 Hz	115 a 220 V ±10% 50 a 60 Hz	115 a 220 V ±10% 50 a 60 Hz
COMPONENTES EN OPCIÓN			

(a) Propiedades de la Máquina Tesa Visio 300.

SISTEMA ÓPTICO			
Cámara color de alta resolución	•	•	•
Puntero láser	•	•	•
06860048 Zoom motorizado (20x a 130x en pantalla 15")	•	•	•
06860049 Zoom motorizado (20x a 130x en pantalla 15") con luz coaxial (LED blanco)	en opción	en opción	en opción
06860052 Objetivo telecéntrico 2x (60x en pantalla 15")	bajo pedido	—	—
06860030 Lente 0,5x	en opción	en opción	en opción
06860031 Lente 0,75x	en opción	en opción	en opción
06860032 Lente 1,5x**	en opción	en opción	en opción
06860033 Lente 2x**	en opción	en opción	en opción
UNIDADES DE ILUMINACIÓN			
06860053 Iluminación episcópica anular (48 LEDs blancos)	•	•	•
06860054 Luz anular fragmentada (segmentos programables de 4 x 90°)	en opción	en opción	en opción
**Para lentes 1,5x y 2x, es necesario el zoom con luz coaxial			

(b) Propiedades del sistema óptico de la Máquina Tesa Visio 300.

Figura A.2: Propiedades de la Máquina Tesa Visio 300. Obtenidas del catálogo del fabricante.

Figura A.3: *Propiedades del sistema óptico de la Máquina Tesa Visio 300. Sacadas del catálogo del fabricante.*

sistema óptico está compuesto por:

- Objetivo con zoom y luz coaxial* (6.5X Zoom, 3 mm FF, Coax) . La amplificación del sistema varía entre 0,7 y 4,5, la distancia de trabajo es de 92 mm, el campo de trabajo varía entre $6,86 \text{ [mm]} \times 9,14 \text{ [mm]}$ y $1,07 \text{ [mm]} \times 1,42 \text{ [mm]}$, y la profundidad de campo varía entre $0,968 \text{ [mm]} - 0,099 \text{ [mm]}$, figura A.4.
- Adaptadores* para ajustarse a una cámara CCD de $1/2''$.
- Tubo adaptador* sitúa el plano del sensor CDD en el plano de la imagen. Este sistema suele tener algún tipo de zoom y alineamiento que hace que el plano del sensor esté en el plano de la imagen, produciendo un sistema que amplifica y enfoca a la vez, sistema parafoal.

Zoom 6000 Field of View Matrix for Internal Co-axial Zoom 1-60123 (in mm at nominal W.D.)

Lens Attachment	W.D.(mm)	Camera Format/Parameters	.5X Adapter Low - High	.67X Adapter Low - High	1X Adapter Low - High	1.33X Adapter Low - High	2X Adapter Low - High	3.5X Adapter Low - High	5X Adapter Low - High
None 0.023- 0.071	92 (nominal) 90-93 (1) W.D. range	Mag.	0.35X - 2.25X	0.47X - 3.00X	0.70X - 4.50X	.93X - 6.0X	1.40X - 9.00X	2.45X - 15.75X	3.50X - 22.50X
		Field 1/4"	11.43 - 1.78	8.51 - 1.33	5.71 - 0.89	4.3X - 0.67	2.86 - 0.45	1.63 - 0.25	1.14 - 0.18
		Field 1/3"	(2) 11.10 - 2.67	(2) 11.40 - 2.01	8.58 - 1.33	6.45 - 1.0	4.29 - 0.67	2.45 - 0.38	1.72 - 0.27
		Field 1/2"	(2) 11.20 - 3.56	(2) 11.46 - 2.62	11.42 - 1.77	8.6X - 1.33	5.71 - 0.89	3.27 - 0.51	2.28 - 0.36
		Field 2/3"	(2) 11.06 - 4.89	(2) 11.54 - 3.60	11.40 - 2.44	11.0 - 1.83	7.86 - 1.22	4.49 - 0.7	3.14 - 0.49

Figura A.4: *Valores del campo de visión para un zoom con luz coaxial, según el catálogo.*

A.1.1. Función de transferencia

Navitar, el fabricante de la óptica nos ha facilitado las funciones de transferencia de modulación, MTF (sección 5.4.1). Esta información nos indica a qué frecuencias espaciales el contraste es más alto.

(a) Objetivo zoom NAV 1-60123.

(b) Adaptador NAV 1-6015.

Figura A.5: *Objetivo y adaptadores de la casa Navitar.*

Figura A.6: MTF para una amplificación de $\times 1$.

Figura A.7: MTF para una amplificación de $\times 3$.

Figura A.8: *MTF para una amplificación de $\times 4,5$.*

Densidades de probabilidad

En las siguientes tablas se muestran las distribuciones para los distintos tipos de píxel, de las longitudes l_{121} . Por motivos de espacio únicamente se incluyen tres tablas, aunque en realidad existen 24 en total.

Cada tabla muestra las distintas distribuciones, rectangulares (2 límites) o doble gaussiana (6 coeficientes, más dos límites). La distribución rectangular queda definida a partir de los puntos del intervalo donde se define. La doble gaussiana mediante:

$$f(x) = a_1 \exp \left[- \left(\frac{x - b_1}{c_1} \right)^2 \right] + a_2 \exp \left[- \left(\frac{x - b_2}{c_2} \right)^2 \right] \quad (\text{B.1})$$

Tabla B.1: *Densidades de probabilidad para T290 y l_{121} .*

Intensidad	l_{inicial}	l_{final}						
	a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2	l_{inicial}	l_{final}
125	0,98	1,00	-	-	-	-	-	-
126	0,98	1,00	-	-	-	-	-	-
127	0,96	1,00	-	-	-	-	-	-
128	0,94	1,00	-	-	-	-	-	-
129	0,94	1,00	-	-	-	-	-	-
130	0,92	1,00	-	-	-	-	-	-
131	0,90	1,00	-	-	-	-	-	-
132	0,90	1,00	-	-	-	-	-	-
133	10,63	0,94	0,04	-10,45	0,94	0,04	0,88	1,00
134	0,13	0,90	0,03	0,17	0,96	0,05	0,86	1,00
135	0,12	0,89	0,03	0,15	0,95	0,05	0,86	1,00
136	0,10	0,87	0,03	0,14	0,94	0,06	0,84	1,00

Continúa en la página siguiente

Proviene de la página anterior

Intensidad	l_{inicial}	l_{final}						l_{inicial}	l_{final}
	a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2			
137	0,13	0,93	0,07	0,08	0,86	0,03		0,82	1,00
138	0,10	0,86	0,05	0,12	0,94	0,06		0,82	1,00
139	0,07	0,84	0,04	0,11	0,92	0,09		0,80	1,00
140	0,11	0,91	0,09	0,06	0,82	0,03		0,78	1,00
141	0,05	0,82	0,04	0,10	0,91	0,10		0,78	1,00
142	8,41	0,88	0,08	-8,32	0,88	0,08		0,76	1,00
143	0,05	0,80	0,05	0,09	0,90	0,11		0,74	1,00
144	0,05	0,79	0,06	0,09	0,89	0,11		0,74	1,00
145	0,04	0,78	0,06	0,08	0,88	0,12		0,72	1,00
146	0,04	0,76	0,06	0,08	0,87	0,13		0,70	1,00
147	0,05	0,76	0,08	0,07	0,88	0,12		0,70	1,00
148	0,04	0,75	0,07	0,07	0,86	0,14		0,68	1,00
149	0,04	0,74	0,08	0,06	0,86	0,14		0,66	1,00
150	0,04	0,73	0,09	0,06	0,85	0,15		0,66	1,00
151	0,07	0,80	0,17	0,05	0,66	0,00		0,64	1,00
152	0,04	0,72	0,10	0,05	0,86	0,16		0,62	1,00
153	0,06	0,72	0,12	0,04	0,88	0,14		0,62	1,00
154	0,05	0,72	0,13	0,03	0,87	0,18		0,60	1,00
155	0,05	0,71	0,13	0,03	0,87	0,18		0,58	1,00
156	0,05	0,70	0,14	0,03	0,85	0,18		0,58	1,00
157	0,06	0,71	0,15	0,02	0,90	0,17		0,56	1,00
158	0,05	0,69	0,15	0,02	0,88	0,18		0,54	1,00
159	0,06	0,72	0,19	0,01	0,95	0,06		0,54	1,00
160	0,06	0,71	0,18	0,01	0,95	0,07		0,52	1,00
161	0,06	0,70	0,18	0,01	0,95	0,08		0,50	1,00
162	0,06	0,69	0,19	0,01	0,94	0,07		0,50	1,00
163	0,06	0,68	0,19	0,01	0,95	0,08		0,48	1,00
164	0,06	0,67	0,19	0,01	0,94	0,09		0,46	1,00
165	0,04	0,64	0,16	0,02	0,76	0,32		0,46	1,00
166	0,06	0,65	0,19	0,01	0,94	0,09		0,44	1,00
167	0,06	0,63	0,19	0,01	0,93	0,11		0,42	1,00
168	0,06	0,62	0,19	0,01	0,93	0,09		0,42	1,00
169	0,06	0,61	0,19	0,01	0,92	0,11		0,40	1,00
170	0,06	0,60	0,18	0,01	0,91	0,13		0,38	1,00
171	0,04	0,58	0,15	0,02	0,65	0,34		0,38	1,00
172	0,05	0,57	0,17	0,01	0,81	0,30		0,36	1,00

Continúa en la página siguiente

Proviene de la página anterior

Intensidad	l_{inicial}	l_{final}						
	a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2	l_{inicial}	l_{final}
173	0,06	0,57	0,18	0,01	0,90	0,14	0,34	1,00
174	0,04	0,55	0,15	0,02	0,61	0,36	0,34	1,00
175	0,04	0,54	0,16	0,01	0,67	0,36	0,32	1,00
176	0,06	0,54	0,18	0,01	0,87	0,15	0,30	1,00
177	0,04	0,52	0,14	0,02	0,57	0,37	0,30	1,00
178	0,04	0,51	0,15	0,01	0,60	0,39	0,28	1,00
179	0,05	0,49	0,16	0,01	0,65	0,35	0,26	1,00
180	0,04	0,49	0,14	0,02	0,52	0,37	0,26	1,00
181	0,05	0,47	0,15	0,01	0,55	0,39	0,24	1,00
182	0,05	0,46	0,15	0,01	0,57	0,37	0,22	1,00
183	0,05	0,45	0,14	0,02	0,49	0,38	0,22	1,00
184	0,05	0,43	0,14	0,01	0,51	0,38	0,20	1,00
185	0,05	0,42	0,15	0,01	0,55	0,36	0,18	1,00
186	0,05	0,40	0,14	0,01	0,47	0,37	0,18	1,00
187	0,05	0,39	0,14	0,01	0,48	0,35	0,16	1,00
188	0,06	0,37	0,14	0,01	0,51	0,33	0,14	1,00
189	0,06	0,35	0,13	0,01	0,44	0,34	0,14	1,00
190	0,06	0,34	0,13	0,01	0,45	0,32	0,12	1,00
191	0,07	0,32	0,12	0,01	0,45	0,29	0,10	1,00
192	0,07	0,30	0,12	0,01	0,40	0,30	0,10	1,00
193	0,07	0,28	0,11	0,01	0,40	0,27	0,08	1,00
194	0,08	0,26	0,10	0,01	0,38	0,24	0,06	1,00
195	0,09	0,23	0,10	0,01	0,34	0,22	0,06	1,00
196	0,10	0,20	0,09	0,01	0,32	0,18	0,04	1,00
197	0,04	0,15	0,02	0,11	0,18	0,09	0,02	1,00
198	0,14	0,13	0,06	0,03	0,20	0,10	0,02	1,00
199	0,14	0,07	0,04	0,09	0,11	0,06	0,02	1,00
200	3,05	-0,09	0,06	0,88	0,00	0,04	0,02	0,50

Tabla B.2: Densidades de probabilidad para $T3$ y l_{121} .

Intensidad	l_{inicial}	l_{final}
50	0,98	1,00
51	0,98	1,00

Continúa en la página siguiente

Proviene de la página anterior

Intensidad	l_{inicial}	l_{final}
52	0,96	1,00
53	0,94	1,00
54	0,94	1,00
55	0,92	1,00
56	0,90	1,00
57	0,90	1,00
58	0,88	1,00
59	0,86	1,00
60	0,86	1,00
61	0,84	1,00
62	0,82	1,00
63	0,82	1,00
64	0,80	1,00
65	0,78	1,00
66	0,78	1,00
67	0,76	1,00
68	0,74	1,00
69	0,74	1,00
70	0,72	1,00
71	0,70	1,00
72	0,70	1,00
73	0,68	1,00
74	0,66	1,00
75	0,66	1,00
76	0,64	1,00
77	0,62	1,00
78	0,62	1,00
79	0,60	1,00
80	0,58	1,00
81	0,58	1,00
82	0,56	1,00
83	0,54	1,00
84	0,54	1,00
85	0,52	1,00
86	0,50	1,00
87	0,50	1,00
88	0,48	1,00

Continúa en la página siguiente

Proviene de la página anterior

Intensidad	l_{inicial}	l_{final}
89	0,46	1,00
90	0,46	1,00
91	0,44	1,00
92	0,42	1,00
93	0,42	1,00
94	0,40	1,00
95	0,38	1,00
96	0,38	1,00
97	0,36	1,00
98	0,34	1,00
99	0,34	1,00
100	0,32	1,00
101	0,30	1,00
102	0,30	1,00
103	0,28	1,00
104	0,26	1,00
105	0,26	1,00
106	0,24	1,00
107	0,22	1,00
108	0,22	1,00
109	0,20	1,00
110	0,18	1,00
111	0,18	1,00
112	0,16	1,00
113	0,14	1,00
114	0,14	1,00
115	0,12	1,00
116	0,10	1,00
117	0,10	1,00
118	0,08	1,00
119	0,06	1,00
120	0,06	1,00
121	0,04	1,00
122	0,02	1,00
123	0,02	1,00
124	0,02	1,00
125	0,02	1,00

Continúa en la página siguiente

Proviene de la página anterior

Intensidad	l_{inicial}	l_{final}
126	0,02	0,98
127	0,02	0,98
128	0,02	0,96
129	0,02	0,94
130	0,02	0,94
131	0,02	0,92
132	0,02	0,90
133	0,02	0,90
134	0,02	0,88
135	0,02	0,86
136	0,02	0,86
137	0,02	0,84
138	0,02	0,82
139	0,02	0,82
140	0,02	0,80
141	0,02	0,78
142	0,02	0,78
143	0,02	0,76
144	0,02	0,74
145	0,02	0,74
146	0,02	0,72
147	0,02	0,70
148	0,02	0,70
149	0,02	0,68
150	0,02	0,66
151	0,02	0,66
152	0,02	0,64
153	0,02	0,62
154	0,02	0,62
155	0,02	0,60
156	0,02	0,58
157	0,02	0,58
158	0,02	0,56
159	0,02	0,54
160	0,02	0,54
161	0,02	0,52
162	0,02	0,50

Continúa en la página siguiente

Proviene de la página anterior

Intensidad	l_{inicial}	l_{final}
163	0,02	0,50
164	0,02	0,48
165	0,02	0,46
166	0,02	0,46
167	0,02	0,44
168	0,02	0,42
169	0,02	0,42
170	0,02	0,40
171	0,02	0,38
172	0,02	0,38
173	0,02	0,36
174	0,02	0,34
175	0,02	0,34
176	0,02	0,32
177	0,02	0,30
178	0,02	0,30
179	0,02	0,28
180	0,02	0,26
181	0,02	0,26
182	0,02	0,24
183	0,02	0,22
184	0,02	0,22
185	0,02	0,20
186	0,02	0,18
187	0,02	0,18
188	0,02	0,16
189	0,02	0,14
190	0,02	0,14
191	0,02	0,12
192	0,02	0,10
193	0,02	0,10
194	0,02	0,08
195	0,02	0,06
196	0,02	0,06
197	0,02	0,04
198	0,02	0,02
199	0,02	0,02

Tabla B.3: *Densidades de probabilidad para T_4 y l_{121} .*

Intensidad	l_{inicial}	l_{final}						
	a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2	l_{inicial}	l_{final}
50	0,98	1,00	-	-	-	-	-	-
51	0,98	1,00	-	-	-	-	-	-
52	0,96	1,00	-	-	-	-	-	-
53	0,94	1,00	-	-	-	-	-	-
54	0,94	1,00	-	-	-	-	-	-
55	0,92	1,00	-	-	-	-	-	-
56	0,90	1,00	-	-	-	-	-	-
57	0,90	1,00	-	-	-	-	-	-
58	0,19	0,96	0,05	0,15	0,91	0,02	0,88	1,00
59	0,18	0,96	0,04	0,16	0,90	0,03	0,86	1,00
60	0,16	0,94	0,08	0,05	0,88	0,01	0,86	1,00
61	0,14	0,95	0,07	0,10	0,87	0,03	0,84	1,00
62	0,12	0,87	0,04	0,13	0,95	0,06	0,82	1,00
63	0,12	0,92	0,11	0,06	0,85	0,01	0,82	1,00
64	0,11	0,92	0,11	0,14	0,83	0,01	0,80	1,00
65	0,08	0,83	0,04	0,10	0,93	0,09	0,78	1,00
66	0,10	0,92	0,12	0,05	0,81	0,03	0,78	1,00
67	0,09	0,92	0,12	0,06	0,80	0,04	0,76	1,00
68	0,09	0,92	0,12	0,06	0,79	0,05	0,74	1,00
69	0,08	0,79	0,07	0,08	0,94	0,09	0,74	1,00
70	0,05	0,77	0,05	0,08	0,91	0,14	0,72	1,00
71	0,07	0,91	0,14	0,05	0,76	0,05	0,70	1,00
72	0,07	0,92	0,12	0,06	0,75	0,08	0,70	1,00
73	0,07	0,90	0,16	0,05	0,74	0,06	0,68	1,00
74	0,07	0,89	0,16	0,04	0,73	0,06	0,66	1,00
75	0,06	0,93	0,12	0,06	0,73	0,11	0,66	1,00
76	0,06	0,89	0,19	0,04	0,70	0,07	0,64	1,00
77	0,06	0,88	0,19	0,04	0,69	0,07	0,62	1,00

Continúa en la página siguiente

Proviene de la página anterior

Intensidad	l_{inicial} l_{final}							
	a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2	l_{inicial}	l_{final}
78	0,05	0,94	0,12	0,05	0,71	0,14	0,62	1,00
79	0,05	0,87	0,23	0,03	0,67	0,07	0,60	1,00
80	0,05	0,86	0,22	0,03	0,65	0,07	0,58	1,00
81	0,05	0,84	0,28	0,02	0,63	0,07	0,58	1,00
82	0,05	0,83	0,28	0,02	0,62	0,05	0,56	1,00
83	0,05	0,83	0,26	0,02	0,61	0,06	0,54	1,00
84	0,05	0,83	0,32	0,02	0,60	0,06	0,54	1,00
85	0,05	0,83	0,30	0,02	0,58	0,06	0,52	1,00
86	0,04	0,82	0,30	0,02	0,57	0,06	0,50	1,00
87	0,04	0,81	0,35	0,02	0,56	0,06	0,50	1,00
88	0,04	0,82	0,34	0,02	0,55	0,07	0,48	1,00
89	0,04	0,81	0,32	0,02	0,54	0,07	0,46	1,00
90	0,04	0,80	0,36	0,02	0,52	0,08	0,46	1,00
91	0,04	0,82	0,36	0,02	0,52	0,09	0,44	1,00
92	0,04	0,81	0,33	0,02	0,51	0,09	0,42	1,00
93	0,04	0,80	0,36	0,02	0,49	0,11	0,42	1,00
94	0,04	0,81	0,37	0,02	0,49	0,11	0,40	1,00
95	0,03	0,81	0,36	0,02	0,48	0,10	0,38	1,00
96	0,03	0,80	0,37	0,02	0,46	0,13	0,38	1,00
97	0,03	0,80	0,39	0,02	0,46	0,12	0,36	1,00
98	0,03	0,80	0,38	0,02	0,45	0,12	0,34	1,00
99	0,03	0,80	0,39	0,02	0,42	0,16	0,34	1,00
100	0,03	0,80	0,41	0,02	0,42	0,14	0,32	1,00
101	0,03	0,79	0,40	0,02	0,42	0,14	0,30	1,00
102	0,03	0,78	0,42	0,02	0,39	0,17	0,30	1,00
103	0,03	0,81	0,39	0,02	0,39	0,18	0,28	1,00
104	0,03	0,81	0,42	0,02	0,39	0,16	0,26	1,00
105	0,03	0,82	0,37	0,02	0,36	0,24	0,26	1,00

Continúa en la página siguiente

Proviene de la página anterior

Intensidad	l_{inicial}			l_{final}				
	a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2	l_{inicial}	l_{final}
106	0,03	0,78	0,44	0,02	0,35	0,18	0,24	1,00
107	0,03	0,76	0,52	0,01	0,34	0,13	0,22	1,00
108	0,03	0,70	0,63	0,01	0,30	0,12	0,22	1,00
109	0,03	0,71	0,59	0,01	0,30	0,11	0,20	1,00
110	0,03	0,76	0,50	0,01	0,31	0,16	0,18	1,00
111	0,03	0,67	0,67	0,01	0,27	0,09	0,18	1,00
112	0,03	0,73	0,59	0,01	0,28	0,15	0,16	1,00
113	0,02	0,75	0,56	0,01	0,28	0,16	0,14	1,00
114	0,02	0,57	1,04	0,01	0,80	0,00	0,14	1,00
115	0,02	0,73	0,60	0,01	0,24	0,18	0,12	1,00
116	0,02	0,73	0,58	0,01	0,24	0,18	0,10	1,00
117	0,02	0,21	0,29	0,02	0,79	0,45	0,10	1,00
118	0,02	0,71	0,65	0,01	0,20	0,18	0,08	1,00
119	0,01	0,20	0,18	0,02	0,70	0,61	0,06	1,00
120	0,02	0,24	0,41	0,02	0,87	0,34	0,06	1,00
121	0,01	0,16	0,13	0,02	0,63	0,72	0,04	1,00
122	0,02	0,67	0,66	0,01	0,17	0,18	0,02	1,00
123	0,02	0,75	0,61	0,01	0,13	0,25	0,02	1,00
124	0,02	0,75	0,61	0,01	0,13	0,25	0,02	1,00

Certificado de la regla patrón a trazos

§ C.1. Certificado de calibración

Para poder asegurar la trazabilidad se utiliza una regla patrón a trazos, con un campo de medida entre 0 [mm] y 150 [mm], con división de escala de 0,1 [mm], con una incertidumbre expandida $U_{(k=2)} = 0,003$ [mm], figuras C.1, C.2 y C.2.

Figura C.1: Patrón de trazos.

<h1 style="margin: 0;">CERTIFICATE OF CALIBRATION</h1>		0067
ISSUED BY: Trescal Limited	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">D071/03</div>	
DATE OF ISSUE: 01st September 2011	Certificate Number: MC116933002

Park Gate Close, Bredbury Park Way, Bredbury
 Stockport, SK6 2SL
 Tel: 0161 406 7878 Fax: 0161 406 7979
 e-mail: calibration.manchester@trescal.com
 www.trescal.com

Page 1 of 2 Pages

RUSSELL HARGREAVES

APPROVED SIGNATORY
ELECTRONICALLY AUTHORISED DOCUMENT

Customer	PYSER-SGI LIMITED FIRCROFT WAY EDENBRIDGE KENT TN8 6HA
Customer Order No.	88228
Customer Ident/Asset No.	
Manufacturer	GRATICULES PYSER-SGI LTD
Size	PS150
Equipment Description	GLASS SCALE
Serial Number	SC1998
Date of Receipt	26th Aug 2011
Date of Calibration	01st Sep 2011

The ambient conditions at the time of calibration:

Temperature 20 °C ± 1 °C
 Relative Humidity 30 %rh to 55 %rh

The reported expanded uncertainty is based on a standard uncertainty multiplied by a coverage factor k=2, providing a level of confidence of approximately 95%. The uncertainty evaluation has been carried out in accordance with UKAS requirements.

This certificate is issued in accordance with the laboratory accreditation requirements of the United Kingdom Accreditation Service. It provides traceability of measurement to recognised national standards, and to units of measurement realised at the National Physical Laboratory or other recognised national standards laboratories. This certificate may not be reproduced other than in full, except with the prior written approval of the issuing laboratory.

Figura C.2: *Página 1 de 2, del certificado de calibración del patrón de trazos.*

<h2 style="margin: 0;">CERTIFICATE OF CALIBRATION</h2> <h1 style="margin: 0; font-family: sans-serif; font-size: 2em;">Trescal</h1> <p style="margin: 0; font-size: 0.8em;">UKAS ACCREDITED CALIBRATION LABORATORY 0067</p>	<p>(Continuation)</p> <hr/> <p>CERTIFICATE NUMBER</p> <p style="text-align: center;">MC116933002</p> <hr/> <p>PAGE 2 OF 2 PAGES</p>
---	---

Basis of Test: Manufacturer's published accuracy figures.

This measuring scale was examined using an NPL calibrated laser interferometer with the following results:

a) The actual distance between the axis of the test graduations as measured using the laser interferometer:

Nominal position (mm)	Measured Result (mm)
15.00	15.0015
30.00	30.0031
45.00	45.0042
60.00	60.0032
75.00	75.0088
90.00	90.0074
105.00	105.0079
120.00	120.0127
135.00	135.0133
150.00	150.0108

Uncertainty of measurement: ± 0.003 mm

The measured results satisfied the specified tolerances.

Condition on receipt : Satisfactory
 Adjustments made : None
 Equipment used : FC218, 207, 207a
 Cal Procedure N° : 71
 Our Reference N° : DG116933

The reported expanded uncertainty is based in a standard uncertainty multiplied by a coverage factor k=2, providing a level of confidence of approximately 95%. The uncertainty evaluation has been carried out in accordance with UKAS requirements.

Figura C.3: *Página 2 de 2, del certificado de calibración del patrón de trazos.*

Patrón de puntos

§ D.1. Propiedades del patrón de puntos

En la figura D.2 se muestran las propiedades del patrón de puntos utilizado en la calibración del sistema óptico, sección 7.3.

Figura D.1: *Patrón de puntos sobre cristal.*

Figura D.2: Propiedades del patrón de puntos.

Certificado bloques patrón longitudinales

§ E.1. Certificado de calibración

En las siguientes páginas se muestra el certificado de calibración de los bloques patrón longitudinales del Laboratorio de Metrología de la ETSIDI, empleados en esta tesis.

Figura E.1: *Caja de bloques patrón longitudinales.*

S Service suisse d'étalonnage C Schweizerischer Kalibrierdienst S Servizio svizzero di taratura S Swiss Calibration Service
---	---	---	--

CERTIFICAT D'ETALONNAGE KALIBRIERZERTIFIKAT CALIBRATION CERTIFICATE
---	--	---

Laboratoire d'étalonnage accrédité par l'Office fédéral de métrologie et d'accréditation
 Vom Bundesamt für Metrologie und Akkreditierung akkreditierte Kalibrierstelle
 Calibration Laboratory accredited by the Swiss Federal Office of Metrology and Accreditation
 The Swiss Accreditation Service is one of the signatories to the EA Multilateral Agreement for the recognition of calibration certificates

Certificat N° Zertifikat Nr. Certificate No.	<div>14101.03251</div>		
Client Kunde Customer	<div></div>		
N° de commande Auftrags-Nr. Order N°	<div></div>	Date Datum Date	<div>21.05.2003</div>
Objet Gegenstand Object	<div>JEU DE CALES L1120 / ACIER</div>		
Marque Marke Brand Name	<div>CARY</div>		
N° de série Serien-Nr. Serial N°	<div>1368.1120</div>	Type Typ Model	<div>0651515012</div>
Remarques Bemerkungen Remarks	<div>Classe / Grade 0</div>		

Etalonnage effectué pendant la période du Kalibrierung während der Periode vom Calibration was done during the period from	<div>20.05.2003</div> au bis to	<div>21.05.2003</div>	Contrôleur Prüfer Inspector <div>M.L. Coma</div>
--	---------------------------------------	-----------------------	---

Ce certificat d'étalonnage confirme le raccordement aux étalons nationaux qui matérialisent les grandeurs physiques (SI).
 Dieses Kalibrierzertifikat dokumentiert die Rückverfolgbarkeit auf nationale Normale zur Darstellung der physikalischen Einheiten (SI).
 This calibration certificate documents the traceability to national standards, which realize the physical units of measurements (SI).

Les résultats, les incertitudes avec le niveau de confiance et les méthodes de mesure sont donnés aux pages suivantes et font partie du certificat.
 Messresultate, Messunsicherheiten mit Vertrauensbereich und Messverfahren sind auf den folgenden Seiten aufgeführt und sind Teil des Zertifikates.
 The measurements, the uncertainties with confidence probability and calibration methods are given on the following pages and are part of the certificate.

Timbre et date Stempel und Datum Stamp and date	Assurance de la Qualité Laboratoire d'étalonnage SCS	Responsable du laboratoire d'étalonnage Leiter der Kalibrierstelle Head of Calibration Laboratory R. BERSOT <div>AC 7</div>
---	--	--

Le Locle, le 21.05.2003

Ce certificat d'étalonnage ne doit pas être reproduit, sinon en entier, sans l'autorisation écrite du laboratoire.
 Dieses Kalibrierzertifikat darf ohne die schriftliche Zustimmung des Laboratoriums nicht auszugsweise vervielfältigt werden.
 This calibration certificate shall not be reproduced except in full, without written approval of the laboratory.
 Doc. N° C28200950-01

Page	<div>1 / 3</div>
Seite	
Page	

FIRST LAB - CARY - LE LOCLE
 BROWN&SHARPE TESA SA - BUGNON 38 - 1020 RENENS - SWITZERLAND
 Tél +41(0) 21 633 16 00 - Fax +41(0) 21 635 75 35 - www.tesabs.ch

Figura E.2: Página 1 de 3, del certificado de calibración de los bloques patrón longitudinales.

Certificat d'étalonnage Kalibrierzertifikat Calibration certificate		N° 14101.03251
Principe Prüfmittel Principle	Selon ISO 3650 1998	Nach ISO 3650 1998	According to ISO 3650 1998	
Mesurage Messeblauf Measurement	Méthode par comparaison mécanique	Unterschiedmessung	Comparison method of measurement	
Niveau de confiance Vertrauensbereich Confidence Probability	95 %			
Etalon de référence Bezugsnorm Reference Standard	Cales étalons Classe K	Parallelendmasse Kalibriergrad K	Gauge blocks Grade K	
	Certificat d'étalonnage n° : Kalibrierschein n° : metas 11.2-0773 Calibration certificate n° :			
Conditions ambiantes Umgebungsbedingungen Ambient conditions	Température Temperatur Temperature	20 ± 0.1 °C	Humidité relative Relative Luftfeuchte Relative humidity	50 ± 5%
Coefficient de dilatation linéaire Längenausdehnungskoeffizient Coefficient of expansion	$\alpha = 11.5 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$			
Incertitude de mesure Messunsicherheit Uncertainty of measure	$U = \pm(0.06 + 0.5 \cdot L) \text{ } \mu\text{m}$ <div style="display: flex; justify-content: flex-end; margin-top: -10px;"> <div style="text-align: right; margin-right: 10px;">L en m</div> <div style="text-align: right; margin-right: 10px;">L in m</div> <div style="text-align: right;">L in m</div> </div>			
<p>L'incertitude de mesure élargie donnée est l'incertitude-type sur le résultat de la mesure multipliée par le facteur d'élargissement $k = 2$ ce qui, pour une distribution gaussienne, correspond à un niveau de confiance d'environ 95%.</p> <p>Die angegebene erweiterte Messunsicherheit ist die Standardunsicherheit der Messung multipliziert mit einem Erweiterungsfaktor $k = 2$, was für eine Normalverteilung einem Vertrauensniveau von etwa 95 % entspricht.</p> <p>The reported expanded uncertainty of measurement is stated as the standard uncertainty of measurement multiplied by the coverage factor $k = 2$, which for a normal distribution corresponds to coverage probability of approximately 95 %.</p>				
Ce certificat d'étalonnage ne doit pas être reproduit, sinon en entier, sans l'autorisation écrite du laboratoire. Dieses Kalibrierzertifikat darf ohne die schriftliche Zustimmung des Laboratoriums nicht auszugsweise vervielfältigt werden. This calibration certificate shall not be reproduced except in full, without written approval of the laboratory. Doc. N°: C28200960-01			Page Seite Page	<div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; padding: 5px; display: inline-block;"> 2 / 3 </div>
FIRST LAB - CARY - LE LOCLE BROWN&SHARPE TESA SA - BUGNON 38 - 1020 RENENS - SWITZERLAND TEL +41(0) 21 633 16 00 - FAX +41(0) 21 635 75 35 - www.tesabs.ch				

Figura E.3: Página 2 de 3, del certificado de calibración de los bloques patrón longitudinales.

Ln	No	fm	fs	Ln	No	fm	fs	Ln	No	fm	fs
0.500	11.27024	+0.00	0.03	1.270	10.27098	-0.05	0.03	9.000	15.0530	-0.02	0.02
1.000	9.27460	-0.04	0.06	1.280	6.27007	-0.01	0.07	9.500	13.0196	+0.03	0.10
1.0005	3.22560	+0.01	0.04	1.290	12.27156	+0.01	0.08	10.000	14.0529	+0.02	0.03
1.001	20.22400	+0.03	0.02	1.300	1.27457	+0.03	0.09	10.500	11.22459	+0.00	0.05
1.002	13.24378	+0.03	0.01	1.310	5.27133	-0.03	0.05	11.000	8.27957	+0.06	0.03
1.003	5.24627	-0.01	0.02	1.320	19.27134	+0.03	0.05	11.500	3.28046	+0.04	0.03
1.004	6.23513	+0.00	0.06	1.330	14.26993	-0.03	0.03	12.000	2.28115	+0.11	0.03
1.005	9.27438	+0.05	0.08	1.340	9.23220	+0.02	0.06	12.500	4.22038	+0.03	0.06
1.006	2.24793	-0.01	0.04	1.350	5.27025	-0.04	0.04	13.000	9.28034	+0.01	0.04
1.007	24.24522	+0.02	0.08	1.360	24.27226	+0.03	0.04	13.500	4.21183	+0.00	0.05
1.008	22.23470	+0.06	0.01	1.370	9.27221	+0.02	0.02	14.000	11.27981	+0.02	0.06
1.009	11.26814	+0.06	0.04	1.380	22.24436	-0.02	0.02	14.500	12.23448	+0.04	0.03
1.010	5.27862	+0.02	0.08	1.390	19.27356	+0.08	0.02	15.000	16.28159	+0.07	0.07
1.020	8.27539	+0.04	0.06	1.400	19.27759	+0.02	0.02	15.500	8.21703	-0.01	0.03
1.030	11.27705	-0.01	0.04	1.410	12.27054	+0.00	0.02	16.000	13.28090	+0.11	0.06
1.040	6.27631	+0.03	0.02	1.420	18.27055	+0.04	0.02	16.500	13.23449	+0.04	0.05
1.050	4.27511	-0.06	0.06	1.430	24.24011	-0.02	0.04	17.000	15.27952	+0.06	0.08
1.060	12.27752	-0.01	0.02	1.440	13.27317	+0.01	0.04	17.500	1.22682	+0.03	0.04
1.070	16.27696	+0.05	0.10	1.450	16.27249	+0.00	0.01	18.000	17.27811	+0.07	0.08
1.080	11.27542	-0.04	0.06	1.460	2.27718	+0.04	0.06	18.500	12.23157	+0.06	0.06
1.090	15.27729	-0.05	0.06	1.470	9.26952	+0.01	0.05	19.000	17.27987	-0.04	0.05
1.100	11.27215	+0.02	0.05	1.480	14.27295	-0.01	0.03	19.500	17.24217	+0.03	0.03
1.110	9.27375	+0.00	0.05	1.490	7.27294	+0.00	0.01	20.000	13.28191	+0.01	0.08
1.120	7.24091	+0.03	0.03	1.500	10.27177	+0.02	0.04	20.500	4.24583	-0.01	0.04
1.130	23.26859	-0.03	0.06	2.000	2.27174	-0.03	0.04	21.000	17.27549	-0.02	0.05
1.140	19.24398	+0.01	0.01	2.500	10.27031	-0.05	0.02	21.500	14.23454	+0.05	0.06
1.150	7.27682	+0.04	0.05	3.000	3.27299	+0.01	0.02	22.000	5.27982	-0.07	0.09
1.160	20.27689	+0.03	0.10	3.500	15.27217	+0.00	0.05	22.500	18.24458	-0.04	0.02
1.170	17.27553	+0.02	0.04	4.000	19.27453	+0.02	0.03	23.000	10.27653	+0.06	0.06
1.180	12.26755	-0.01	0.07	4.500	9.25259	-0.01	0.02	23.500	9.23951	+0.04	0.07
1.190	5.24828	-0.02	0.02	5.000	5.27810	-0.01	0.04	24.000	7.28220	+0.03	0.09
1.200	3.27692	+0.04	0.07	5.500	15.27144	+0.03	0.05	24.500	16.22014	-0.03	0.04
1.210	5.24630	+0.05	0.05	6.000	16.0632	+0.04	0.03	25.000	4.27986	+0.07	0.05
1.220	21.23102	+0.03	0.04	6.500	20.0195	+0.03	0.04	50.000	5.27990	+0.16	0.08
1.230	15.26957	+0.00	0.03	7.000	20.0656	-0.03	0.02	75.000	11.27989	+0.17	0.11
1.240	10.27172	+0.02	0.03	7.500	3.0177	+0.03	0.04	100.000	4.28155	+0.01	0.03
1.250	8.23103	+0.01	0.03	8.000	3.0648	-0.03	0.04				
1.260	12.26956	+0.00	0.06	8.500	13.0524	+0.02	0.04				

Ce certificat d'étalonnage ne doit pas être reproduit, sinon en entier, sans l'autorisation écrite du laboratoire.
 Dieses Kalibrierzertifikat darf ohne die schriftliche Zustimmung des Laboratoriums nicht auszugsweise vervielfältigt werden.
 This calibration certificate shall not be reproduced except in full, without written approval of the laboratory.
 Doc. N°: C2820C650-01

Page
Seite
Page

3 / 3

FIRST LAB - CARY - LE LOCLE
 BROWN&SHARPE TESA SA - BUGNON 38 - 1020 RENENS - SWITZERLAND
 TEL +41(0) 21 633 16 00 - FAX +41(0) 21 635 75 35 - www.tesabs.ch

Figura E.4: Página 3 de 3, del certificado de calibración de los bloques patrón longitudinales.

Elementos comerciales

§ F.1. Plaquita de corte

Seguidamente se muestran las características de la plaquita de corte TPMN 16 03 08 de la casa Sandvik, utilizada en la parte experimental de esta tesis y cuyas dimensiones se obtienen del catálogo del fabricante, figura F.1.

ISO inserts with radius

		P	M	K	N	S	Dimensions, mm			
		S6	H13A	H13A	H13A	H13A	iC	l	s	rC
12	SPMN 12 03 08	☆	☆	☆	☆	☆	12.7	12.7	3.18	0.8
	SPMN 12 04 08	☆	☆	☆	☆	☆	12.7	12.7	4.76	0.8
15	SPMN 15 04 12	☆	☆	☆	☆	☆	15.88	15.88	4.76	1.2
16	TPMN 16 03 08	☆	☆	☆	☆	☆	9.52	16.5	3.18	0.8
22	TPMN 22 04 12	☆	☆	☆	☆	☆	12.7	22	4.76	1.2

For grade description, see page D172.

Figura F.1: Dimensiones de la plaquita de corte. Detalle del catálogo de la casa Sandvik.

§ F.2. Galga extensométrica

La galga XY21-1,5/120 de la casa HBM ha sido utilizada como mensurando en el capítulo 10. Sus propiedades se han extraído del catálogo del fabricante.

Stock types		Variants	No-minal resistance	Dimensions (mm) [1 inch = 25.4 mm]					Max. perm. effective bridge excitation voltage	Solder terminals
Steel	Aluminum	Others	Ω	Measuring grid			Measuring grid carrier		V	
				a	b1	b2	c	d		
1-XY21-0.6/120		1-XY2x-0.6/120#	120	0.6	2	1.1	7.5	4	2.5	LS 7
1-XY21-1.5/120		1-XY2x-1.5/120	120	1.5	1.7	2.5	6.8	4.5	4.5	LS 7
1-XY21-3/120		1-XY2x-3/120	120	3	4.3	5.3	11.2	9.5	6	LS 5
1-XY21-6/120		1-XY2x-6/120	120	6	8.0	10	17.5	12.7	11	LS 4
1-XY21-1.5/350		1-XY2x-1.5/350#	350	1.5	2.1	2.5	7.4	4.5	5	LS 7
1-XY21-3/350	1-XY23-3/350	1-XY2x-3/350	350	3	4.0	5.3	11.2	9.5	10	LS 4
1-XY21-6/350	1-XY23-6/350	1-XY2x-6/350	350	6	7.8	10	17.5	12.7	19	LS 4
		1-XY2x-3/700#	700	3	4.0	5.3	11.2	9.5	14	LS 5
		1-XY2x-6/700	700	6	7.8	10	17.5	12.7	27	LS 4

XY21

Shear/torsion half bridge
Temperature response matched to steel
with $\alpha = 10.8 \cdot 10^{-6}/K$

XY23

Temperature response matched to aluminum
with $\alpha = 23 \cdot 10^{-6}/K$

XY2x

Temperature response matching at customer's choice,
see page 20

Illustrations show actual size
(Grid length in mm)

Figura F.2: Detalle del catálogo de HBM.

Índice de Materias

- Aberración, 28
 - de coma, 29
 - de Seidel, 29
 - esférica, 29, 30
 - esférica marginal, 30
 - esférica sobrecorregida, 31
 - esférica subcorregida, 31
 - longitudinal esférica, 30
 - primaria, 28
 - transversal, 29
 - transversal o lateral, 30
- Algoritmo
 - de Metropolis, 57
 - de Canny, 72, 78, 108, 135
 - de Trujillo Pino, 108, 111, 135, 136
- Amplificación
 - angular, 38, 39
 - lineal, 38, 39
- Aproximación
 - de limaçon, 65
- Astigmatismo, 29, 33
- Autocorrelación, 84, 87, 91, 136
- Bayes, 56
 - estadística, 52
- método, 193
- modelo, 3, 6, 122, 126, 129, 134, 167–169, 179, 192, 194
- probabilidad, xi, 4, 5, 9, 18, 19, 195
- teorema, 19, 54, 56, 57
- bfl, 26
- Bias field, 97
- Blooming, 100
- BLUE, 82
- Borde, 63
- Cámara
 - pinhole, 96
- Cadenas de Markov, 195
- CCD, 113
 - Cambio de sistema de referencia, 112
- Centro
 - elipse, 83
- Circularidad, 65
- Coma
 - sagital, 32
 - tangencia, 32
- Coma tangencial, 31
- Compensación
 - óptica, 41

- mecánica, 41
- Convolución, 44, 46
- Correlación, 8, 78–80, 87, 88, 92, 93, 129, 136, 166
- DIC, 43
- fase, 43, 48
- imágenes digitales, 49–51
- Cross power spectrum, 47
- Curvatura
 - de Campo, 33
 - de Petzval, 33
- Curvatura de la Superficie, 24
- Dark current, 96
- Dark field, 96, 99
- Dark frame, 97
- Desfase o “lag”, 84
- Diafragma
 - apertura, 27
 - campo, 27
- DIC, 17, 194
- Distancia
 - focal efectiva, 26
 - focal posterior, 26
- Distancia Focal Anterior, 27
- Distorsión, 29
- Distribución
 - de Maxwell Boltzman, 97
 - inicial o a priori, 56
 - no informativa, 57
- Ecuación
 - de Newton, 38
 - Laplace, 52, 128
- efb, 26
- Entropía, 177, 185, 188
- Espacio
 - imagen, 39
 - objeto, 39
- Estadística bayesiana, 52
- ffl, 27
- Filtrado Inverso, 46
- Flat field, 97
- Función
 - de dispersión del punto, 44
- Homografía, 49
- Imagen
 - pseudosintética, 168, 172, 181, 193
 - sintética, 116, 130, 137, 138, 144, 192
- Insesgado, 81
- Intensidad
 - cuerpo, 113
 - fondo, 115
 - borde, 172, 178
 - máximo, 179, 183, 192
 - píxel, 16, 49, 63, 115–119, 121, 122, 126, 129, 130, 137, 166, 168, 178, 191, 192
- Invariante
 - óptico, 35
- Least square circle, 65
- Lente
 - de tubo, 42
- Ley
 - de Snell, 22, 40
- Longitud
 - de corte, 79, 87

- Luz
 - espiscopcia, 108
 - efectivo de puntos de palpado, 79
 - efectivo de variables, 79
 - registrado de píxeles, 100
- Mínima
 - circunferencia circunscrita, 65
 - zona, 65
- Mínimos cuadrados, 63, 71, 74, 80, 81, 106, 107, 135, 169, 183
 - generalizados, 85, 86, 94
 - no lineales, 65, 135
- Matlab
 - contour, 129
 - inpolygon, 115
 - polyarea, 116
- Matriz
 - de transferencia, 36, 37
 - transferencia, 37, 40
- Maxima
 - circunferencia inscrita, 65
- Minimun zone circle, 65
- Modelo
 - máquina, 160
 - mecánico, 160
 - vision, 160
- Modelo parametrización lineal, 66
- Monte Carlo
 - cadena de Markov, 57
 - Método, 4, 6, 17, 18, 57, 62, 144, 168, 169, 181, 192, 193
 - método, 186, 190
- MTF, 46
- Muestreo de Gibbs, 58, 195
- Número
 - efectivo de píxeles, 100
 - Normalización
 - intensidades, 179, 183
 - Objetivo
 - de corrección finita, 42
 - de corrección infinita, 42
 - Operador lineal invariante, 45
 - OTF, 46
 - Parámetro, 56
 - Parafoval, 215
 - distancia, 42
 - Pasos
 - estudio bayesiano, 57
 - Perspectiva, 49
 - Plano
 - conjugado, 39
 - sagital, 33
 - tangencial, 32
 - Probabilidad
 - a posteriori, 56
 - a priori, 56
 - condicionada, 52
 - Propiedad de desplazamiento, 44
 - PSF, 43, 46
 - PTF, 46
 - Puntos
 - cardinales, 39
 - nodales, 39
 - Pupila
 - entrada, 27
 - salida, 27

- Raw field, 96
- Rayo
 - axial, 28
 - meridional, 32
 - oblicuo, 33
 - principal, 27, 28
- Refracción
 - superficie esférica, 22
- Región Paraxial, 23
- Regresión Ortogonal, 91
- Regresión ortogonal, 81, 86, 88, 91, 137, 181, 183
- Semiejes
 - elipse, 83
- Sensibilidad
 - ver Tolerancia, 40
- Sistema
 - lineal, 44
 - lineal invariante, 44
- Stitching, 138
- Superficie de Petzval, 29
- SVD, 65
- Teorema
 - Gauss-Markov, 82
- Textura, 186
- Threshold, 72, 78, 192
- Transformación
 - afín, 49
- Trasnformación
 - proyectiva, 49
- Trazado exacto de rayos, 28
- Trazado paraxial, 28
- Variable, 56
- Varifocal, 41
- Verosimilitud, 56
- ZNCC, 50
- ZNSSD, 50