Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Arquitectura

Departamento de Estructuras y Física de la Edificación

***Límites de ductilidad y de servicio al cálculo en carga última de
estructuras de hormigón armado y de fábrica***

TESIS DOCTORAL

Juan Francisco de la Torre Calvo
Arquitecto

Director: Valentín Quintas Ripoll
Doctor Arquitecto

Año 2016

“Don Ciccio tuonava ancora: - Per voi, signori, è un'altra cosa. Si può essere ingrati per un feudo in più, per un pezzo di pane la riconoscenza è un obbligo. Un altro paio di maniche ancora è per i trafficanti come Sedàra, per i quali approfittare è legge di natura. Per noi piccola gente le cose sono come sono. [...]

Fu la regina Isabella, la spagnola, che era duchessa di Calabria allora, a farmi studiare, a permettermi di essere quello che sono, Organista della Madre Chiesa, onorato dalla benevolenza di Vostra Eccellenza; e negli anni di maggior bisogno, quando mia madre mandava una supplica a Corte, le cinque onze di soccorso arrivavano sicure come la morte, [...]

Elemosine le chiamano ora, queste generosità di veri Re; lo dicono per non dover darle loro; ma erano giuste ricompense alla devozione. E oggi se questi santi Re e belle Regine guardano dal cielo, che dovrebbero dire? Il figlio di don Leonardo Tumeo ci tradì! Meno male che in Paradiso si conosce la verità. [...]

Ero un fedele suddito, sono diventato un borbonico schifoso, Ora tutti savoiard sono! Ma i savoiard me li mangio col caffè, io! E tenendo fra il pollice e l'indice un biscotto fittizio lo inzuppava in una immaginaria tazza.”

*Giuseppe Tommasi di Lampedusa
“Il Gattopardo”*

Don Ciccio Tumeo seguía bramando: - Para ustedes, señores, es distinto. Se puede ser ingrato por un feudo de más, por un pedazo de pan es obligado el agradecimiento. Asunto distinto es para los traficantes como Sedàra, para los que sacar provecho es ley natural. Para nosotros, pequeña gente, las cosas son como son. [...] Fue la Reina Isabel, la española, que era duquesa de Calabria entonces, quien me permitió estudiar, ser lo que soy, Organista de la Madre Iglesia, honrado por la benevolencia de Su Excelencia; y en los años de mayor necesidad, cuando mi madre mandaba un suplicatorio a la Corte, las cinco onzas de socorro llegaban seguro, como la muerte. [...] Ahora limosna les dicen, esta generosidad de verdaderos Reyes; lo dicen para no tener que darlas ellos; pero eran justas recompensas a la devoción. Y hoy si estos santos Reyes y bellas Reinas miran desde el cielo, ¿qué deberían decir? ¡El hijo de Leonardo Tumeo nos traicionó! Menos mal que en el Paraíso se sabe la verdad. [...] Era un fiel súbdito, y me he convertido en un borbónico asqueroso. ¡Ahora todos saboyanos son! ¡Pero a los saboyanos me los como con café, yo!- Y teniendo entre el pulgar y el índice una galleta ficticia la mojaba en una taza imaginaria.

Agradecimientos

Consta a cualquiera en su sano juicio que cuanto hacemos no es mérito propio en todo. De otros se recibe enseñanza, instrucción, apoyo, afecto, comprensión y cuanto conforma la posibilidad de ser algo digno y de dignamente actuar, y hasta de llegar a producir algo que merezca la pena. Así que, cuanto haya en este trabajo de digno y que merezca la pena, vaya a quienes de un modo u otro han contribuido.

A Julia Fuentes y Alberto Bustamante por alguna traducción y por algunas gráficas y dibujos. A Ana Magdalena Pérez Muñoz, por haber dado formato a varias interfaces de procedimientos de cálculo.

A los amigos, los de verdad, que son siempre imprescindibles. De un lado, Javier Carlos, Álvaro, Cristina, Maite, Miguel, Beatriz y Peri, del tiempo de infancia y hoy todavía cercanos. De otro lado, Juana, Gloria y Alejandro, Ana Isabel, Jesús, Félix, Tatiana y Juanjo, del tiempo batido del fin de la ilusión. De entre medias, Daniel, Alfonso, Juan, David y Elena -y su pequeñito siempre feliz-. Y Natalia. Beatriz y Raquel. Y Eva y Elena. Josenia y Esteban. De allende los Alpes, Raffaele con Loredana y Beatrice; Carlo; Laura y Alessandro con su Lorenzaccio. También Marisol, Max, Giovanni y Giacomo. De la Galia, Guy, ya muerto, y Germaine. Y a Yvette, bellotas y membrillo.

A los compañeros del Departamento de Estructuras y Física de la Edificación, de quienes he aprendido mucho y con quienes he compartido mucha parte de vida. En especial a Julia Villa, que decidió hace poco que ya le bastaba lo hecho. También en especial a José Ignacio Hernando, del que he aprendido mucho, mucho me ha ayudado y con el que me río tanto. Sin deshonrar a otros varios, de los que también he aprendido y me han ayudado.

A los compañeros y colegas de profesión, que también han sido de gran ayuda y sustento en esta vida. En especial, a Luis Casas López-Amor, gran ingeniero y más grande persona.

De manera particular, también, a Valentín Quintas Ripoll, director de esta tesis. Porque en su día, como profesor, acabó por inocularme el virus de las estructuras. Porque con él comencé mi carrera docente y de él aprendí a impartir clases. Porque ha tenido una paciencia infinita en este viaje sin término aparente. Gran persona también, todo bonhomía.

A mi familia, terrible paraíso del infierno, porque es, para bien o para mal, algo inalienable que tanto da la vida como la amarga. En concreto, a mi padre, que murió descerrajado por el cáncer, hace ya mucho tiempo, queriendo simplemente que le dejaran en paz para poderse sentar a leer debajo de un árbol. Y no lo consiguió.

Por último, a Xavier Serra Stecher, Clara y Miguel Serra Fernández-Cuartero -que completó y remató los dibujos de este trabajo-, marido e hijos de Ana, que son, como dice Miguel, mi segunda familia. Y a Ana, por todo.

Sea.

Resumen

Límites de ductilidad y de servicio al cálculo en carga última de estructuras de hormigón armado y de fábrica

En este trabajo se aborda una cuestión central en el diseño en carga última de estructuras de hormigón armado y de fábrica: la posibilidad efectiva de que las deformaciones plásticas necesarias para verificar un estado de rotura puedan ser alcanzadas por las regiones de la estructura que deban desarrollar su capacidad última para verificar tal estado. Así, se parte de las decisiones de diseño que mediante mera estática aseguran un equilibrio de la estructura para las cargas últimas que deba resistir, pero determinando directamente el valor de las deformaciones necesarias para llegar a tal estado. Por tanto, no se acude a los teoremas de rotura sin más, sino que se formula el problema desde un punto de vista elasto-plástico. Es decir, no se obvia el recorrido que la estructura deba realizar en un proceso de carga incremental monótono, de modo que las regiones no plastificadas contribuyen a coaccionar las libres deformaciones plásticas que, en la teoría de rotura, se suponen. En términos de trabajo y energía, se introduce en el balance del trabajo de las fuerzas externas y en el de la energía de deformación, aquella parte del sistema que no ha plastificado. Establecido así el balance energético como potencial del sistema es cuando la condición de estacionariedad del mismo hace determinados los campos de desplazamientos y, por tanto, el de las deformaciones plásticas también. En definitiva, se trata de un modo de verificar si la ductilidad de los diseños previstos es suficiente, y en qué medida, para verificar el estado de rotura previsto, para unas determinadas cargas impuestas.

Dentro del desarrollo teórico del problema, se encuentran ciertas precisiones importantes. Entre ellas, la verificación de que el estado de rotura a que se llega de manera determinada mediante el balance energético elasto-plástico satisface las condiciones de la solución de rotura que los teoremas de carga última predicen, asegurando, por tanto, que la solución determinada -unicidad del problema elástico-coincide con el teorema de unicidad de la carga de rotura, acotando además cuál es el sistema de equilibrio y cuál es la deformada de colapso, aspectos que los teoremas de rotura no pueden asegurar, sino sólo el valor de la carga última a verificar. Otra precisión se basa en la particularidad de los casos en que el sistema presenta una superficie de rotura plana, haciendo infinitas las posibilidades de equilibrio para una misma deformada de colapso determinada, lo que está en la base de, aparentemente, poder *plastificar a antojo* en vigas y arcos.

Desde el planteamiento anterior, se encuentra entonces que existe una condición inherente a cualquier sistema, definidas unas leyes constitutivas internas, que permite al mismo llegar al inicio del estado de rotura sin demandar deformación plástica alguna, produciéndose la plastificación simultánea de todas las regiones que hayan llegado a su sollicitación de rotura. En cierto modo, se daría un colapso de apariencia frágil. En tal caso, el sistema conserva plenamente hasta el final su capacidad dúctil y tal estado actúa como representante canónico de cualquier otra solución de equilibrio que con idéntico criterio de diseño interno se prevea para tal estructura. En la medida que el diseño se acerque o aleje de la solución canónica, la demanda de ductilidad del sistema para verificar la carga última será menor o mayor. Las soluciones que se aparten en exceso de la solución canónica, no verificarán el estado de rotura previsto por falta de ductilidad: la demanda de deformación plástica de alguna región plastificada estará más allá de la capacidad de la misma, revelándose una carga de rotura por falta de ductilidad menor que la que se preveía por mero equilibrio.

Para la determinación de las deformaciones plásticas de las rótulas, se ha tomado un modelo formulado mediante el Método de los Elementos de Contorno, que proporciona un campo continuo de desplazamientos -y, por ende, de deformaciones y de tensiones- incluso en presencia de fisuras en el contorno. Importante cuestión es que se formula la diferencia, nada desdeñable, de la capacidad de rotación plástica de las secciones de hormigón armado en presencia de cortante y en su ausencia. Para las rótulas de fábrica, la diferencia se establece para las condiciones de la excentricidad -asociadas al valor relativo de la compresión-, donde las diferencias entre las regiones plastificadas con esfuerzo normal relativo alto o bajo son reseñables.

Por otro lado, si bien de manera un tanto secundaria, las condiciones de servicio también imponen un límite al diseño previo en carga última deseado. La plastificación lleva asociadas deformaciones considerables, sean locales como globales. Tal cosa impone que, en estado de servicio, si la plastificación de alguna región lleva asociadas fisuraciones excesivas para el ambiente del entorno, la solución sea inviable por ello. Asimismo, las deformaciones de las estructuras suponen un límite severo a las posibilidades de su diseño. Especialmente en edificación, las deformaciones activas son un factor crítico a la hora de decidirse por una u otra solución. Por tanto, al límite que se impone por razón de ductilidad, se debe añadir el que se imponga por razón de las condiciones de servicio.

Del modo anterior, considerando las condiciones de ductilidad y de servicio en cada caso, se puede tasar cada decisión de diseño con la previsión de cuáles serán las consecuencias en su estado de carga última y de servicio. Es decir, conocidos los límites, podemos acotar cuáles son los diseños *a priori* que podrán satisfacer seguro las condiciones de ductilidad y de servicio previstas, y en qué medida. Y, en caso de no poderse satisfacer, qué correcciones debieran realizarse sobre el diseño previo para poderlas cumplir.

Por último, de las consecuencias que se extraen de lo estudiado, se proponen ciertas líneas de estudio y de experimentación para poder llegar a completar o expandir de manera práctica los resultados obtenidos.

Abstract

Ductility and serviceability limits for reinforced concrete and masonry structures ultimate load design

This work deals with a main issue for the ultimate load design in reinforced concrete and masonry structures: the actual possibility that needed yield strains to reach a ultimate state could be reached by yielded regions on the structure that should develop their ultimate capacity to fulfill such a state. Thus, some statically determined design decisions are posed as a start for prescribed ultimate loads to be counteracted, but finding out the determined value of the strains needed to reach the ultimate load state. Therefore, ultimate load theorems are not taken as they are, but a full elasto-plastic formulation point of view is used. As a result, the path the structure must develop in a monotonous increasing loading procedure is not neglected, leading to the fact that non yielded regions will restrict the supposed totally free yield strains under a pure ultimate load theory. In work and energy terms, in the overall account of external forces work and internal strain energy, those domains in the body not reaching their ultimate state are considered. Once thus established the energy balance of the system as its potential, by imposing on it the stationary condition, both displacements and yield strains appear as determined values. Consequently, what proposed is a means for verifying whether the ductility of prescribed designs is enough and the extent to which they are so, for known imposed loads.

On the way for the theoretical development of the proposal, some important aspects have been found. Among these, the verification that the conditions for the ultimate state reached under the elasto-plastic energy balance fulfills the conditions prescribed for the ultimate load state predicted through the ultimate load theorems, assuring, therefore, that the determinate solution -unicity of the elastic problem- coincides with the unicity ultimate load theorem, determining as well which equilibrium system and which collapse shape are linked to it, being these two last aspects unaffordable by the ultimate load theorems, that make sure only which is the value of the ultimate load leading to collapse. Another aspect is based on the particular case in which the yield surface of the system is flat -i.e. expressed under a linear expression-, turning out infinite the equilibrium possibilities for one determined collapse shape, which is the basis of, apparently, deciding at *own free will* the yield distribution in beams and arches.

From the foresaid approach, is then found that there is an inherent condition in any system, once defined internal constitutive laws, which allows it arrive at the beginning of the ultimate state or collapse without any yield strain demand, reaching the collapse simultaneously for all regions that have come to their ultimate strength. In a certain way, it would appear to be a fragile collapse. In such a case case, the system fully keeps until the end its ductility, and such a state acts as a canonical representative of any other statically determined solution having the same internal design criteria that could be posed for the that same structure. The extent to which a design is closer to or farther from the canonical solution, the ductility demand of the system to verify the ultimate load will be higher or lower. The solutions being far in excess from the canonical solution, will not verify the ultimate state due to lack of ductility: the demand for yield strains of any yielded region will be beyond its capacity, and a shortcoming ultimate load by lack of ductility will appear, lower than the expected by mere equilibrium.

For determining the yield strains of plastic hinges, a Boundary Element Method based model has been used, leading to a continuous displacement field -therefore, for strains and stresses as well- even if cracks on the boundary are present. An important aspect is that a remarkable difference is found in the rotation capacity between plastic hinges in reinforced concrete with or without shear. For masonry hinges, such difference appears when dealing with the eccentricity of axial forces -related to their relative value of compression- on the section, where differences between yield regions under high or low relative compressions are remarkable.

On the other hand, although in a certain secondary manner, serviceability conditions impose limits to the previous ultimate load stated wanted too. Yield means always big strains and deformations, locally and globally. Such a thing imposes, for serviceability states, that if a yielded region is associated with too large cracking for the environmental conditions, the predicted design will be unsuitable due to

this. Furthermore, displacements must be restricted under certain severe limits that restrain the possibilities for a free design. Especially in building structures, active displacements are a critical factor when choosing one or another solution. Then, to the limits due to ductility reasons, other limits dealing with serviceability conditions should be added.

In the foresaid way, both considering ductility and serviceability conditions in every case, the results for ultimate load and serviceability to which every design decision will lead can be bounded. This means that, once the limits are known, it is possible to bound which *a priori* designs will fulfill for sure the prescribed ductility and serviceability conditions, and the extent to which they will be fulfilled. And, in case they were not, which corrections must be performed in the previous design so that it will.

Finally, from the consequences derived through what studied, several study and experimental fields are proposed, in order to achieve a completeness and practical expansion of the obtained results.

Índice

Agradecimientos

Resumen

Abstract

Índice

1.- Introducción

1.1.- Acerca del título	1.1
1.2.- Precisiones del léxico empleado	1.3
1.3.- Sobre el devenir de la investigación y del trabajo	1.8
1.4.- Estado del arte	1.17
1.5.- Propuesta de esta tesis	1.29

2.- Planteamiento teórico

2.1.- Sistemas rígido-plásticos	2.1
2.1.1.- El criterio de flujo de Von Misses	2.1
2.1.1.1.- Precisión para superficies planas de rotura	2.6
2.1.2.- El teorema del límite inferior	2.7
2.1.3.- El teorema del límite superior	2.8
2.1.4.- Convergencia de los límites inferior y superior	2.9
2.2.- Sistemas elasto-plásticos	2.10
2.2.1.- Potencial del sistema. Determinación estática y cinemática	2.10
2.2.1.1.- Unicidad de las soluciones	2.15
2.2.2.- Concomitancia y simultaneidad: ductilidad demandada y posible	2.17
2.2.3.- Factores de diseño, elásticos y canónicos. Redistribución	2.22
2.3.- Conclusiones y aplicación	2.25

3.- Estructuras de hormigón armado

3.1.- Entorno de aplicación.....	3.1
3.2.- Modelo general	3.1

3.3.- Armado de secciones: ductilidad y resistencia.....	3.7
3.3.1.- Armado para máxima resistencia: valores límite.....	3.9
3.3.2.- Armado para máxima deformación: valores últimos.....	3.9
3.3.3.- Armado para máxima resistencia y máxima deformación.....	3.12
simultáneas: estrategia dual	
3.3.4.- Estrategia cualquiera para agotamiento del hormigón.....	3.16
3.4.- Modelo de rótula de hormigón armado.....	3.19
3.4.1.- Aplicación del Método de los Elementos de Contorno.....	3.19
3.4.2.- Régimen de fisuración del hormigón	3.20
3.4.3.- Régimen de adherencia del acero corrugado	3.21
3.4.4.- Régimen de plastificación del hormigón.....	3.22
3.4.5.- Régimen de plastificación del acero corrugado	3.23
3.5.- Giros de las rótulas de hormigón armado.....	3.23
3.5.1.- Rótulas sin cortante.....	3.23
3.5.2.- Rótulas con cortante	3.27
3.5.3.- Interacción entre momento flector y cortante.....	3.29
3.6.- Consideraciones de servicio	3.31
3.6.1.- Régimen de fisuración de las secciones de hormigón armado.....	3.31
3.6.2.- Régimen de deformación de las barras de hormigón armado.....	3.31
3.6.3.- Criterios límite para condiciones de servicio.....	3.34
3.7.- Límites de ductilidad y de servicio.....	3.34
3.7.1.- Determinación de los coeficientes canónicos.....	3.34
3.7.1.- Gráficas de resultados de ductilidad para distintas.....	3.38
condiciones de diseño	
3.7.2.- Gráficas de resultados de servicio para distintas.....	3.42
condiciones de diseño	
3.7.3.- Límites conjuntos de ductilidad y servicio.....	3.43
para distintas condiciones de diseño	

4.- Estructuras de fábrica

4.1.- Imposibilidad de aplicación del modelo.....	4.1
4.2.- Modelo de rótula de fábrica.....	4.4
4.2.1- Giros de las rótulas de fábrica.....	4.4
4.2.2.- Interacción entre momento flector y normal: excentricidad.....	4.9
4.3.- Algún caso de aproximación.....	4.9

5.- Conclusiones

5.1.- Conclusiones generales.....	5.1
5.2.- Sobre el diseño en carga última de estructuras de hormigón armado.....	5.1
5.3.- Sobre el diseño en carga última de estructuras de fábrica.....	5.3
5.4.- Consecuencias: comprobaciones a realizar y campos por explorar.....	5.4

6.- Bibliografía

ANEJOS

Anejo 1.- Modelo de rótulas de hormigón armado y de fábrica

Anejo 2.- Resultados de los casos estudiados de hormigón armado

Anejo 3.- Resultados de los casos estudiados de fábrica

Capítulo 1.- Introducción

[...] *“Our civilization is decadent, and our language -so the argument runs- must inevitably share in the general collapse. It follows that any struggle against the abuse of language is a sentimental archaism, like preferring candles to electric light or hansom cabs to aeroplanes. Underneath this lies the half-conscious belief that language is a natural growth and not an instrument which we shape for our own purposes.”* [...]

George Orwell
“Why I write”

[...] *“Nuestra civilización es decadente, y nuestro lenguaje -prosigue el argumento- debe compartir inevitablemente el colapso general. Se deriva de ello que cualquier lucha contra la corrupción del lenguaje es un arcaísmo sentimental, como quien prefiere las velas a la luz eléctrica o las calesas a los aviones. En esto subyace la creencia semiconsciente de que el lenguaje es de generación espontánea y no un instrumento que acomodamos a nuestras propias intenciones.”* [...]

Índice

1.1.- Acerca del título	1.1
1.2.- Precisiones del léxico empleado	1.3
1.3.- Sobre el devenir de la investigación y del trabajo	1.8
1.4.- Estado del arte	1.17
1.5.- Propuesta de esta tesis	1.29

1.- Introducción

1.1.- Acerca del título

Resulta algo un tanto extraño, pero un trabajo como éste, una tesis doctoral, debe empezar su camino con la presentación de un título. Éste, en buena lógica, debiera ser la palabra final que recogiera de un golpetazo seco y certero la sustancia del texto que titula. Pudiera parecer una mera estupidez, pero nombrar algo antes de crearlo totalmente condiciona esto último. ¿Y si sucediera que el artefacto resultante no cuadrara con el nombre que le dimos? En cierta medida, una tesis doctoral es, en este asunto, un fracaso anunciado y cierto siempre, porque nunca podremos asegurar que el devenir de la exploración del problema propuesto, o la mera redacción de cuanto se explique, se acompañe perfectamente con el título - el nombre que le pusimos- con lo que queríamos proponer y explicar. En este caso, parcialmente ha sido así -no todo se ciñe expresamente al significado del título- pero en gran medida sí se ciñe el discurso a la propuesta del título. Digamos que, creo, la expectativa que el título ponía a disposición ha sido en bastante medida satisfecha. Si me fuera posible, matizaría el título y lo reescribiría como *Influencia de los criterios de servicio y ductilidad en el diseño en carga última de estructuras de barras de hormigón armado y de fábrica*. No es tan distinto, pero cambiaría la carga un tanto mesiánica de *límites* por la más razonable de *influencia*, así como matizaría que las estructuras analizadas se ciñen al modelo de barras, las más comunes en edificación, dejando de lado las superficiales y las masivas, que pueden ser otro cantar bien distinto.

Asumiendo que el título recoge en gran medida lo que se refiere de aquí en adelante, explicar su enunciado supone expresamente entrar en la sustancia de lo referido. La ventaja del título de antemano es que acota el dominio de lo que se pretende abordar, lo que no deja de ser un sesgo, pero la realidad es compleja y, hoy por hoy, el ser humano sólo es capaz de manejarla con modelos que forzosamente la castren. En la medida en que la acotación o castración recoja suficientemente una parte sustancial y coherente de la realidad, el modelo nos será de utilidad. Pretender abarcar la totalidad no es tarea de gigantes o genios, sino de despistados, presuntuosos e imbéciles. Entrando entonces en la redacción concreta del título, es un tanto chocante que tratándose de carga última se coloque como límites paralelos el de *servicio* frente al de *ductilidad*, pues la piedra angular que valida un análisis o diseño -en esto entraré más adelante- en carga última es la siempre deseada ductilidad suficiente, quedando en el ostracismo la satisfacción de otras condiciones. Además, parece que mezclar las condiciones de servicio con las de ductilidad es una amalgama bastarda que pervierte el asunto, como quien pretende mostrar profundidad a base de oscuridad o fingir refinamiento a base de *snobismo*. No hay tal cosa, sino que la mescolanza aparente se basa en que, en el diseño de las estructuras, la decisión es única y todas las circunstancias que intervienen acaban por interferirse mutuamente. Así, en un ejemplo algo tontorrón, si debemos hacer un sistema de vigas continuas de hormigón armado, de bastante esbeltez, nos encontraremos que la satisfacción de las condiciones de deformación de las barras nos obligará a sobrearmanar las secciones en tracción, a incorporar armadura en compresión para mitigar la fluencia, o a estrategias similares si el ambiente es agresivo y necesitamos limitar la fisuración. Todas estas decisiones, que nada tienen que ver con la necesidad de garantizar la resistencia en carga última de las piezas, inciden sin embargo en su comportamiento resistente y, en mucha medida, en las condiciones de ductilidad de las secciones críticas. El diseño único con que las piezas se ejecutan supone un solo comportamiento en todos los órdenes y obviarlo no es coherente. A la inversa, si deseamos mejorar las condiciones de ductilidad, abordaremos el diseño con criterios que, sin duda, alterarán las condiciones de servicio del sistema.

Aparece entonces, según lo inmediatamente anterior, la cuestión del enfoque del problema. Podría haber simplemente abordado la cuestión de la ductilidad, ya de por sí bastante intrincada, pero le he añadido las condiciones de servicio. Cada cual es hijo de su entendimiento y de su experiencia, y la mía me ha llevado a tener que proyectar y construir muchas estructuras. En tal labor, resulta imposible desligar unas cuestiones de otras, pues el producto final es único y todo tiene que ser satisfecho de un golpe. Como decía antes, la solución - el diseño- es única. Mil veces se debe tantear, considerar por adición, comparación o sustracción cada uno de los matices que cada condicionante aporta, pero resultaría enormemente agradecido poder, así como el resultado es único, tomar una decisión previa que fuera única y, a ser posible, certera para todas las exigencias planteadas. ¿Pretendo entonces nada más que mostrar reglas y criterios de *practicón*? ¿Es malo ser un *practicón*? Ni una cosa ni otra. La *practiconería* supone uno de los procedimientos de pereza mental más adormecedores para el intelecto, pero obviar que el diseño y la construcción de una estructura requiere de ciertos usos repetidos y sistemáticos, de ciertas

reglas concretas que todos los intervinientes en el proceso puedan abordar, es negar el mismo principio de la técnica. Es éste asunto espinoso, pero la lectura de "*Pregunta sobre la técnica*" de M. Heidegger, es muy clarificadora. Sin pretender codearme con el filósofo, no debemos olvidar que la teoría de estructuras no existe por sí misma, como parte del conocimiento teórico del universo, sino que es legataria de la mecánica aplicada a ciertas necesidades concretas del ser humano. Si no tuviéramos que guarecernos, si no necesitáramos privacidad, si no fuéramos gregarios y jerárquicos, si no necesitáramos salvar la hoz de un río, no habríamos necesitado en absoluto preguntarnos acerca de los fenómenos mecánicos que soportan las construcciones. Nada sabríamos de estructuras de edificios, ni de pasarelas, ni de puentes, ni de ferrocarriles, ni de presas ni de cuantas construcciones sabemos levantar hoy. Pero si hemos podido construir cada vez con mayor fiabilidad, con mayor control, con más conciencia, con mayor economía, con más conocimiento y cada vez superando mayores retos de toda clase, ha sido precisamente por el estudio conceptual de los fenómenos mecánicos subyacentes. Algo que ha transformado la construcción en los últimos ciento cincuenta años ha sido el conocimiento teórico: hemos podido sustituir las reglas empíricas, el lento avance por repetición mejorada, por la predicción consciente y certera del comportamiento de las construcciones, a la par que la industria provea los medios y los materiales para hacer cierto el adelanto. En consonancia con esto, nada hay de *practiconería bajuna* en las pretensiones de este escrito, sino que, al revés, se ha pretendido ser riguroso y complejo en la medida necesaria para establecer reglas claras que permitan el diseño de una estructura con precisión y, si fuera posible, sencillez. Nada hay de cuentas de la vieja, ni de bastas concepciones simplistas en lo que se propone. Si las hubiera, es por error o desconocimiento, pero no por intención. Tampoco se ha querido llegar al virtuosismo académico, tentación frecuente en los medios universitarios o de investigación, hasta el punto de que algunas exageraciones en el inicio me hicieron patinar por, precisamente, el exceso citado. Por suerte se han anulado con el reposo del devenir del trabajo.

Abordando la cuestión de fundamento semántico que se refiere al título -o a la intención de este escrito-, entraré en la palabra -entre maldita y añorada- *diseño*. Se dice en el título *cálculo*, no *análisis* o *diseño*. En inglés -esa lengua de tenderos y asesinos discretos- la diferencia sería nula, pues *design* abarca el todo. En el fondo, se trata de proyectar, y tal labor requiere de un análisis, de un dimensionado, de una serie de decisiones que acaban por darnos un diseño, un artefacto definido para una misión concreta, pero que siempre necesita de cálculos. Por tanto, he de reconocer que el título es errado en este aspecto, porque debería haber dicho *diseño*. Pero estamos acostumbrados -mal acostumbrados- a hablar de cálculo de estructuras como la disciplina general que abarca todos los aspectos de las estructuras. Se llega al punto de la denigración cuando, en el mercado profesional, a quien proyecta y construye estructuras se lo denomina frecuentemente "*calculista*". Viene a ser como decir que Cervantes era escribiente. Es confundir el medio con el fin. Para más desgracia, como si fuera de alta competencia el *cálculo* y el resto mera palabrería de segundo orden. Necesitamos calcular porque es el medio con el que podemos interpretar, analizar y decidir acerca de los fenómenos mecánicos de una estructura, pero es un medio, no el fin a que nos dedicamos. Entonces, ¿por qué no consta la palabra *diseño* en lugar de la de *cálculo*? Pues por descuido del momento y, sin duda, porque en el subconsciente, cuando se habla de *diseño*, se suele entender -al menos es lo que a mí me asalta el entendimiento- esa actividad inconsciente de crear cosas monas, bonitas, agradables, que suele ser actividad exhibida públicamente como muestra de sensibilidad innata, ayuna de cualquier necesidad de rigor o disciplina. Malos tiempos para el diseño, entonces.¹

Y tal es la intención de la polisémica palabra "*diseño*". Ciertamente, supone algo fundamental, pues no es lo mismo diseñar -proyectar- una estructura que peritarla. Y veremos cuánto de importante tiene hacer una cosa u otra. Podemos encontrarnos con que el diseño de una estructura satisface tranquilamente las condiciones necesarias para unas exigencias acotadas, pero que su peritaje con intención de llevarla a su estado último -caso muy común en la reutilización de estructuras o de su rehabilitación- revela que las condiciones para las que se ha diseñado no se satisfacen. ¿Por qué? Pues precisamente, en el caso que nos ocupa, porque no existe un cuerpo coherente de procedimientos de diseño en carga última que nos asegure que las condiciones de partida se satisfacen al final. Por tanto,

¹ Cuando se habla del diseño, en su significado corrupto -el de lo bonito y "sensible"-, tengo la manía de citar dos cosas. La primera, la aseveración del poeta Ángel Valente -tipo antipático y soberbio donde los hubiera- acerca de que "*la estética es el estado ínfimo del arte*". Otra es la reacción de un fabricante de muebles italiano que, llegado a España para ver si producía ciertos diseños patrios, comenzó a preguntar al "*diseñador*" acerca del tipo de tubo de una silla, de su espesor, del tipo de cromado, de las características mecánicas del acero a emplear, del tipo de tornillos, del espesor y tipo de las maderas a emplear, del sistema de plegado de las mismas y acerca un sinnúmero de datos necesarios para saber cómo fabricar aquello. El "*diseñador*" fue incapaz de responder una sola de las preguntas del fabricante. Era inconsciente de que su silla estaba sin diseñar. Era un aparato con forma de silla, pero no podía asegurarse que realmente lo fuera.

aunque no se recoja expresamente en el título, se encontrará la referencia complementaria al diseño de piezas, que es su peritaje. Y la intención última es asegurar que el diseño, una vez peritado, cumple efectivamente las condiciones para las que se concibió.

Otra sorpresa aparente que recoge el título es que se citan estructuras de hormigón armado y de fábrica. Parecen ser dos mundos distintos y, de hecho, en cuanto a campos de investigación y académicos casi lo son con exclusión mutua casi categórica. En la práctica de la construcción, de hecho, lo son. Y tiende a verse que la construcción en fábrica es una reminiscencia de un modo de construir antiguo, o que se ciñe a estudios y operaciones acerca de construcciones antiguas, que sí son fundamentalmente de fábrica². Tales cosas son ciertas, sin duda, pero la exclusión mutua poco tiene de sentido si se observa que como caracterización en su comportamiento mecánico, ambos son materiales pétreos y, por tanto, similares. En ambos casos, claramente, la baja deformación última del material en compresión supone una limitación severa a la capacidad dúctil de las secciones críticas. Por así decir, el problema es en ambos casos el mismo y no hay diferencias de concepto que justifiquen la separación. Punto más, el devenir profesional me ha llevado a construir, reparar y rehabilitar muchas estructuras de fábrica, en unos casos armada o postesada y en otros como mera masa pétreo, lo que me ha impelido a tener que conocer su comportamiento con cierta profundidad. Los problemas que se deben abordar en uno y otro caso son conceptualmente idénticos y la mayor diferencia estriba en la capacidad resistente y la rigidez de uno y otro material. Por así decir, la fábrica puede ser considerada un hormigón de poca capacidad mecánica o el hormigón una fábrica muy capaz.

En realidad, la aseveración inicial de que el poner el título antes que el contenido es una maniobra que nos aboca al fracaso seguro, no es totalmente verdad³. Poniéndose uno un tanto hegeliano, en realidad, el título de algo condensa una idea ya amarrada y acotada, aunque sea previamente. Y se es capaz de enunciarlo cuando de verdad el entorno ya está definido y sus límites bien plantados. Es lo que permite expresarse en cualquier caso: sólo podemos enunciar con rotundidad y sin duda lo que ya obra acabado y cierto en nuestro pensamiento. Si no, balbuceamos. Y un título no puede balbucear. Una frase recortada actúa como un disparo en la noche.

1.2.- Precisiones del léxico empleado

Si bien en el campo de las estructuras, como en muchos otros, el lenguaje dominante sea el matemático, resulta imposible llevar a cabo ningún discurso sin el empleo del lenguaje común. Ciertamente, éste, para cada campo puede desarrollar una jerga propia en que el significado sea uno específico que puede o no coincidir con el común. La mayor parte de las veces el término de la jerga suele ceñirse a un matiz del significado general, pero no tiene por qué ser así. Además, la economía de la palabra, lo sintético, lo conciso, lo eufónico, llevan a emplear términos de significado rotundo y claro dentro del campo de la jerga, pero que no se atiene estrictamente al significado estricto del término común. Y para un lego representa tal cosa una confusión que lo aleja del discurso que se pretende. Más aún sucede con los neologismos, donde acuñar un nuevo término y que el concepto subyacente sea claro y preciso, requiere de tiempo y uso continuado para asentarse. Así, aquí se pretende explicar qué significado estricto tienen ciertos términos que se emplearán en el discurso y que, de no definirse adecuadamente, pueden hacerlo ininteligible, cuando no carente de sentido.

Pudiera parecer una nadería lo que se expone, pero el rigor semántico y sintáctico es el que permite la transmisión de un discurso claro, conciso, honesto y, cosa muy importante, comprensible para

² Eladio Dieste, ese fino hombre que construyó sus magníficas estructuras de fábrica armada y postesada, sólo conocido mundialmente al final de su vida, fue invitado a dictar unas conferencias sobre sus obras en Alemania. La tradición de construcción en fábrica no es tan potente allí como en los países mediterráneos. Menos aún, casi nadie considera hoy día, ni en el mundo anglosajón ni en el latino, que la fábrica obre más que como cerramiento o recubrimiento, pero nunca como estructura. Quizá como muro portante en construcciones de poco porte, pero no más. Así se encontró Dieste que los alemanes no entendían cómo funcionaban sus estructuras: si le quitaban el ladrillo sobrante, quedaba una endeble masa de mortero toda disgregada y discontinua. Le costó Dios y ayuda convencer a los alemanes de que la masa estructural principal era el ladrillo y que éste aportaba capacidades mecánicas que doblaban las del hormigón convencional.

³ Siempre me ha producido mucha risa, y más pavor, una frase algo conocida acerca del devenir del relato de las cosas en la extinta URSS: “*Nunca sabes qué pasado te deparará el futuro*”. Ni pensar quiero que el futuro ya presente de esta tesis se hubiera hecho incompatible con su pasado, grabado en un título ya inamovible. Habría sido terrible. Básicamente, porque no tengo los medios de que los estalinistas disponían para tales circunstancias.

otros con la menor imprecisión posible.

Pues bien, como se trata de lenguaje común, la referencia ha sido siempre el canon de base de acuerdo común, como quien al clasificar una planta se ciñe al tratado de Linneo. Como este texto está en español, como referencia se ha tomado el Diccionario de la Real Academia Española de la Lengua, en su versión digital. Hay una cierta trampa en esto, porque si para todo hubiera seguido este patrón, habría tenido que cambiar el nombre de numerosos conceptos de la jerga de la mecánica y las estructuras cuyo significado no tiene duda alguna en el contexto. Sin embargo, abusando de la imprecisión de origen de ciertos términos que asumimos como claros y de contorno definido, he decidido emplear otros igual de imprecisos en origen, pero cuya rotundidad los hace más ágiles y claros, siempre y cuando la perversión semántica quede clara sin asomo de duda. Es decir, hay ciertos conceptos novedosos que se incorporan en esta tesis, con significado estricto dudoso, y que se han justificado mediante comparación: otros de significado estricto dudoso comúnmente empleados se aceptan sin problema y nadie conocedor de la jerga duda acerca del límite preciso que tiene su significado en el contexto.

Por explicar lo anterior, tomemos lo comúnmente aceptado del término rígido-plástico, aplicado a un material. Nadie duda de que tal cosa se refiere a un material en que no se desarrollan deformaciones hasta que la tensión no alcanza su tensión de rotura y que, tras llegar a este punto, las deformaciones del mismo son tan grandes como sea menester sin variación de la tensión del material. Entonces, en sentido estricto, no podemos decir que sea rígido-plástico, en absoluto. Si es rígido inicialmente, lo puede ser en una cierta cantidad, poca o mucha, pero lo que representa el comportamiento antes descrito es que es inicialmente infinitamente rígido, no simplemente rígido. Deberíamos decir infinitamente rígido-plástico. Definido como rígido-plástico, en su sentido estricto, lo es también lo que denominamos elasto-plástico, porque el primer tramo del comportamiento del material presenta rigidez y el segundo, llegado a la tensión de rotura, no lo es, es plástico. Y muchas veces, cuando decimos elasto-plástico, tampoco lo es estrictamente, porque en realidad no hay comportamiento elástico, ya que a medida que aumentan las deformaciones hay disipaciones de energía que no permiten que el camino de carga y el de descarga sean el mismo, anulando el comportamiento elástico. Pero sucede que la contundencia del término acuñado, conocido por todos los iniciados en la jerga, resulta clara y útil, a pesar de la imprecisión semántica de origen, que en realidad se ha disuelto en la aceptación común de los usuarios de los límites que tiene el término en el entorno en que se aplica.

Comencemos con el término **elástico**. Según el DRAE, primera acepción:

elástico, ca.

(Del lat. mod. elastĭcus, dúctil).

1. adj. Dicho de un cuerpo: *Que puede recobrar más o menos completamente su forma y extensión tan pronto como cesa la acción que las alteraba.*

Hay de primeras dos imprecisiones. La primera es que en su origen latino significa *dúctil*, que para nosotros no es lo mismo. La segunda es que *“puede recobrar más o menos su forma y extensión”*. Es decir, *puede* recobrar y *más o menos*, y es lo mismo que *dúctil*. Pues bien, en nuestra jerga, diremos que un material es elástico si forzosamente ha de recobrar la forma y la extensión originales cuando cesa la acción que las altera. Más precisamente, diremos que un material es elástico si en el proceso de carga no hay disipación de energía y, por tanto, los caminos de carga y de descarga son el mismo. Y un sistema es elástico si tampoco globalmente presenta disipación de energía ante una acción que lo altere y que, cesada ésta, el sistema torna a su estado original.

Sigamos con **plástico**. La tercera acepción se refiere a materiales.

plástico, ca.

(Del lat. plastĭcus, y este del gr. πλαστικός).

[...]

3. adj. Dicho de un material: *Que, mediante una compresión más o menos prolongada, puede cambiar de forma y conservar esta de modo permanente, a diferencia de los cuerpos elásticos.*

Se define como diferente de los cuerpos elásticos, estableciendo la dicotomía elástico / plástico en términos similares a los de la mecánica de sólidos. Pero refiere el comportamiento sólo a la compresión, la establece como “*más o menos prolongada*” y “*puede*” cambiar de forma y conservar el cambio permanentemente. En nuestro caso, diremos que es plástico el comportamiento de un material si, al ser solicitado por una acción, resulta en una disipación de energía que impide que, cesada la acción, el material vuelva a su estado original, conservando en él en alguna medida la huella de la acción extinguida. Acudiendo al proceso de carga y descarga, entonces sucederá que los caminos de ambos procesos no serán el mismo, permaneciendo en el material, tras retrotraer la carga aplicada, ciertas deformaciones que, precisamente, denominaremos plásticas. O sea, por comparación con lo dicho para elástico, forzosamente no recobrará la forma y extensión originales al cesar la acción. En un sistema, por tanto, se denominará plástico a aquel comportamiento que suponga que en el proceso de aplicarle una acción incremental, se producen disipaciones de energía que provocarán que, retirada la acción, el sistema no vuelva al estado original, sino a uno con zonas plastificadas, precisamente las que disiparon la energía que no permite que el sistema sea elástico.

Toca el turno ahora a **lineal**. Tomada la quinta acepción:

lineal.

(Del lat. *lineālis*).

[...]

5. *adj. Fís. y Mat. Que tiene efectos proporcionales a la causa.*

Dice que la causa y el efecto guardan proporcionalidad, lo que casa con el uso que en mecánica de sólidos se le da. Sin embargo, deberíamos precisar en nuestro caso que la proporcionalidad es constante. Si la proporcionalidad varía, se cumpliría la definición del DRAE, pues si recurrimos a incrementos de causa e incrementos de efecto, la proporción entre ambos puede variar para cada incremento sin violar la definición. Por tanto, consideraremos que un material tiene comportamiento lineal si la tensión que adquiere es proporcional a la deformación que sufre y que esta proporcionalidad es constante. Es decir, cumple la ley de Hooke. Para un sistema, diremos que es lineal si la acción que se le aplica y su efecto sobre el sistema guardan una proporción constante. En términos energéticos, el trabajo de una acción incremental habrá, por tanto, de variar linealmente mientras que la energía potencial acumulada variará cuadráticamente.

Acudamos ahora a **dúctil**. Tomemos las cinco acepciones, pues todas guardan relación con lo que tratamos:

dúctil.

(Del lat. *ductilis*).

1. *adj. Dicho de un metal: Que admite grandes deformaciones mecánicas en frío sin llegar a romperse.*

2. *adj. Dicho de un metal: Que mecánicamente se puede extender en alambres o hilos.*

3. *adj. maleable.*

4. *adj. Dicho de algún cuerpo no metálico: Fácilmente deformable.*

5. *adj. Acomodadizo, de blanda condición, condescendiente.*

Sin duda, queda claro que se trata de la capacidad de un material para ser deformado sin romperse. Aun cuando se ciñe a los metales en las dos primeras acepciones -cosa no extraña sino de bastante sentido común, pues los metales son los materiales claramente más dúctiles-, lo generalizaremos para cualquier material, pero matizando las deformaciones a que nos referimos. Diremos entonces que un material es **dúctil** si es capaz de deformarse sin romperse más allá del límite elástico, es decir, que es capaz de deformarse plásticamente, cuando sin aumentar las tensiones del mismo sí pueden aumentar las deformaciones. Aplicado a un sistema mecánico, que el mismo es capaz de deformándose sin romperse

-sin alterar la compatibilidad ni, por tanto, las condiciones de equilibrio- aun cuando una o varias regiones del mismo hayan agotado su capacidad resistente. Por tanto, la ductilidad de un material o un sistema nos dirá en qué medida son dúctiles. Por contraposición, será frágil aquel material o sistema que carezca de ductilidad.

Con las anteriores definiciones tenemos, por ahora, bastante para abordar las siguientes. Si comenzamos por el ejemplo del principio, denominaremos como **rígido-plástico** un material que no desarrolla deformaciones hasta que no llega a su capacidad resistente máxima, llamada tensión de rotura, y que estas deformaciones pueden ser tan grandes como se quiera. Es decir, es un material de rigidez infinita hasta llegar a su tensión de rotura, que súbitamente pasa a rigidez nula a partir de ese punto y con ductilidad infinita. Llevado a un sistema, éste será rígido-plástico si no desarrolla desplazamientos ni deformaciones hasta que un número suficiente de regiones del mismo alcanzan su máxima capacidad resistente, punto a partir del cual se desarrollan en magnitud tan grande como se precise, es decir, con ductilidad infinita.

Si restringimos la condición de rigidez infinita inicial anterior, definiremos como **elasto-plástico** un material que inicialmente acompasa los incrementos de deformación a los de las tensiones, aun cuando ese acompasamiento no sea constante y ni tan siquiera puramente elástico. Es decir, violamos la condición estricta de lo elástico y permitimos disipaciones de energía en el proceso de aplicar una acción incremental. Llegado a la tensión de rotura, la rigidez del material -las tensiones desarrolladas por el material en función de sus deformaciones- se tornará nula y las deformaciones podrán aumentar sin aumento de la tensión del material, pero hasta un valor máximo de deformación que denominaremos deformación última o de rotura. Llevado a un sistema, éste desarrollará incrementos de desplazamientos y de deformaciones internas acompasados a los incrementos de las acciones -si bien la relación de acompasamiento no tiene por qué ser constante- que se le suministren, hasta un punto en que un suficiente número de regiones llevadas a este estado supongan que el sistema cede en sus desplazamientos sin necesidad de que se incremente la acción, estado que denominaremos de rotura. Lo anterior define los comportamientos no lineales de los sistemas que se estudiarán aquí.

Entrando en un concepto acuñado en esta tesis, bastante controvertido, deberemos definir un caso específico del anteriormente enunciado como elasto-plástico en que, para un sistema -que no para un material-, las regiones que llegan a su estado último o de rotura, produciéndose deformaciones plásticas, lo hacen simultáneamente para una acción determinada, que será precisamente la que provoque el colapso del mismo. En tal caso, el comportamiento de todo el sistema y de todas las regiones del sistema habrán mantenido sus deformaciones dentro del tramo elástico -si bien no lineal y con la posibilidad de disipación de energía en el proceso incremental, violando lo estrictamente elástico- hasta llegar a agotar la capacidad última de las regiones necesarias de manera simultánea. En tal caso, al no haber aparecido hasta llegar al estado último ninguna deformación plástica, no habrá habido demanda de ductilidad por parte de ninguna región del sistema, conservando plenamente la capacidad de deformación plástica del mismo, es decir llegando al inicio del proceso de plastificación de manera simultánea en todas las regiones críticas que hayan de plastificar. Ello conllevará que la ductilidad del sistema se haya conservado intacta hasta verificarse la carga de rotura. Si acudimos al hecho de que conserva entonces hasta llegar a la situación última o de rotura toda la ductilidad, diríamos que el sistema es plenamente dúctil. Si queremos un término más rotundo, podríamos decir entonces *pandúctil*, pero tiene un tanto de pedantería y el defecto de que puede confundirse con el enunciado de lo rígido-plástico, donde la ductilidad es tanta como se quiera, no siendo el caso. Por contra, se puede acudir a definir el sistema no por la capacidad que tenga de deformación plástica o dúctil, sino por la demanda de tal deformación que se solicite en el proceso incremental de carga. En tal caso, puesto que el régimen de comportamiento hasta llegar a la rotura es ajeno a la capacidad dúctil del sistema -puede incluso no tener capacidad dúctil alguna-, se podría denominar como *adúctil*. Tiene el defecto de que el prefijo “a” supone negación, pudiéndose entonces entender como que carece de ductilidad, que es frágil. Pero si la negación se aplica a la necesidad de ductilidad, a que es indiferente a la capacidad dúctil, a que no interviene la ductilidad en el proceso de llevar el sistema a su estado último, podemos entonces decir que es adúctil. Pero en su sentido estricto, adúctil niega la condición de dúctil del sistema, y no es lo que sucede.

En conclusión, diremos que el sistema tiene un comportamiento **plenamente dúctil** cuando en el proceso de llevarlo paulatinamente hasta su estado último no interviene en absoluto su capacidad dúctil, no hay demanda alguna de ductilidad en ninguna región del sistema, y dicha capacidad dúctil se preserva

intacta hasta el inicio de la rotura, en que toda ella se desencadena hasta producirse la rotura efectiva, semejando una rotura aparentemente frágil.

Debemos también precisar lo que significa en la paulatina aparición de las regiones plastificadas del sistema dos conceptos que se emplearán, que en muchos casos pueden tener igual significado, o confundirse: simultaneidad y concomitancia. En primer lugar, definamos qué significa **simultaneidad**. Según el DRAE:

simultáneo, a.

(Del lat. *simul*, juntamente, a una).

1. adj. Dicho de una cosa: Que se hace u ocurre al mismo tiempo que otra. *Posesión simultánea*.

Puesto que simultáneo significa algo que sucede a la vez que otro evento, diremos que existe **simultaneidad** en la plastificación de las regiones cuando dos o más de ellas lleguen a su capacidad resistente máxima -y, por ende, comiencen a desarrollar deformaciones plásticas- para un mismo valor de la acción que solicita el sistema. Si sucediera que todas las regiones que deben plastificar para llevar a su estado último el sistema, iniciasen el proceso de plastificación para la misma acción solicitante, diremos que existe **simultaneidad total**, caso que, como veremos, se da sólo para un comportamiento plenamente dúctil del sistema. Relación que, además, es biunívoca.

Debemos acudir ahora a **concomitancia**. Según el DRAE:

concomitante.

(Del lat. *concomitans*, -*antis*, de *concomitari*, acompañar).

1. adj. Que aparece o actúa conjuntamente con otra cosa.

La definición del DRAE dice que aparece o actúa conjuntamente. En este caso, castraremos la aparición y dejaremos sólo la acepción de actuar. Por tanto, cuando dos regiones o más de las que hayan de plastificar en el proceso incremental de la acción sobre el sistema, diremos que existe **concomitancia** cuando todas ellas, para un cierto recorrido incremental de la acción, estén desarrollando deformaciones plásticas. Es decir, para un tramo del incremento de la acción solicitante, dichas regiones han desarrollado deformaciones iguales o mayores a la elástica, pero menores que la de rotura. Cuando exista concomitancia entre todas las regiones que hayan de plastificar, diremos entonces que existe **concomitancia plena**. Veremos que la existencia de la concomitancia plena es indispensable para que se revele el estado último del sistema sin limitación por falta de ductilidad. Si dicha concomitancia plena se reduce a un solo valor de la acción solicitante del sistema, diremos que existe concomitancia puntual, caso que será precisamente el límite para el cual es posible verificar el estado último sin quiebras previas por exceso de demanda de ductilidad.

Por último, como ya se ha visto y seguirá sucediendo a lo largo de este trabajo, se encuentran referencias sistemáticas a *carga última*, *estado último*, *carga de rotura*, *estado de rotura*, *estado límite*, *cinemática o deformada de colapso*, etc... Son en realidad distintos modos de enunciar una misma cosa, con matices. Cuando un sistema se carga hasta un punto en que ya no es capaz de admitir más carga, dicha carga sería la de rotura, ya que para dicho valor de carga se llevaría el sistema a la rotura, a su colapso. Ese estado en que el sistema ya colapsa, es el estado de rotura, o estado último, o estado límite o estado de colapso. La carga -en realidad la distribución de cargas- que lleva el sistema a tal estado, es entonces la carga última, o carga de colapso, o carga límite o carga de rotura. Y el estado de desplazamientos asociado a dicho estado sería la deformada de colapso, o el campo de desplazamientos en rotura, o la deformada de rotura, etc... De igual modo, diseño, cálculo o análisis en carga última, o en estado límite, es el diseño o cálculo o análisis que se realiza de un sistema precisamente en el estado de carga última, o límite, o de colapso, etc...

Sin que tenga que ver directamente con lo anterior, pero siendo parte de cómo entender este texto, advertir que las citas a la bibliografía se consignan con el nombre del autor seguido del año de la publicación entre corchetes, o bien tanto autor como año entre corchetes ambos, según proceda.

1.3.- Sobre el devenir de la investigación y del trabajo

La idea primitiva de esta tesis es legataria de una corriente bastante difundida actualmente, pero que en el Departamento de Estructuras de la ETSAM subyace desde hace muchos años; la de abordar el cálculo plástico de manera general para el proyecto de estructuras, o para el diseño, por ser coherente con lo dicho. Esto no excluye el acero, pero puesto que comencé con trabajos, hace muchos años, de investigación que se ceñían al comportamiento en carga última de hormigón armado y luego entré en contacto con las fábricas, casi inmediatamente, la idea se acunó en estos dos materiales, dejando de lado el acero, que rara vez presenta problemas de ductilidad, y más por configuración geométrica de las secciones que por las propias cualidades del material. Además, por ser un material mecánicamente simétrico, el acero presenta un comportamiento distinto al de los materiales pétreos y, en buena lógica, si cabe una separación conceptual frente a los materiales pétreos. El planteamiento de la tesis que subyace se puede encontrar ya escrito en Vázquez [1987], a partir de un planteamiento previo, publicado más tarde, de Aroca [1988]. El primer escrito sirvió de base para que dentro del Departamento de Estructuras de la ETSAM se desarrollara un proyecto de investigación financiado por el CAICYT (hoy CICYT) sobre diseño en carga última de piezas lineales de hormigón armado. Fue suerte adversa que cuando se empezaron a obtener resultados esperanzadores, la financiación cesó y aquello quedó inconcluso. Sin embargo, aquella intención no ha quedado en el vacío total y algunos trabajos posteriores de Vázquez [1995] y Quintas [1994] sobre losas de hormigón armado en rotura casan con aquélla.

De vuelta al planteamiento, el problema de fondo es el que sigue existiendo actualmente: si se diseña una pieza lineal en carga última con unos determinados criterios a nivel local y global, hasta qué punto tal carga última será realmente alcanzada y bajo qué condiciones de deformación, estado de servicio, proceso de carga, etc...

La práctica común, sancionada universalmente, suele consistir en determinar unas solicitaciones de las piezas que componen una estructura reticulada en régimen elástico lineal con secciones brutas para las cargas ponderadas -que formarían la carga última del sistema- y con dichas solicitaciones proceder a determinar las secciones y armados necesarios para resistirlas. Como acotaciones, se incluye la comprobación para las cargas en servicio de que la fisuración y las deformaciones básicamente no superan ciertos valores, sea por confort real o visual, sea por compatibilidad con los elementos constructivos unidos a la estructura. En realidad, todo lo anterior es de una incoherencia absoluta. Las solicitaciones se obtienen para unas leyes constitutivas que no son las reales de la estructura analizada, pues en el proceso de carga las secciones alteran su rigidez, en gran medida en función del armado que poseen, cosa que se determina a toro pasado. Por tanto, estamos suponiendo que el sistema tiene un comportamiento elástico lineal y daría lo mismo aplicar la ponderación de las cargas a éstas o aplicarlos a las solicitaciones obtenidas con las cargas sin ponderar. Además, si hemos supuesto el proceso elástico lineal, para determinar el estado de servicio, bastará con realizar la proporción inversa que marca el coeficiente de ponderación con las solicitaciones determinadas para el dimensionado, y con ellas determinar fisuraciones y deformaciones. Para colmo de incoherencia, estos cálculos -que necesariamente preestablecen las solicitaciones de servicio de que partimos- se hacen de manera bastante precisa considerando el efecto de la fisuración, el de la fluencia, el de la retracción, el de la secuencia de carga, etc... que nos darían unas solicitaciones en servicio que pueden o no ser aquéllas de las que hemos partido. Es decir, procesamos con enorme precisión unos datos cuya validez nadie puede asegurar.

Es decir, el sistema que manejamos es del todo incoherente y, en realidad, sólo conocemos la distribución de cargas que con una cierta seguridad -el coeficiente global de ponderación de las cargas- queremos resistir. Lo demás queda como un *pot pourri* de números que pueden no tener nada que ver con la realidad de lo que estamos abordando. En justa consecuencia, afirmar entonces que nos dediquemos a enunciar el problema sólo en carga última y obviemos el resto es de lo más razonable.

Podría resolverse el problema de manera recurrente, planteando una hipótesis *razonable* de solicitaciones para la carga última y luego comprobando cuáles son las deformaciones derivadas de tal decisión y corregir las incompatibilidades encontradas. Hecho esto, volvemos a hacer el análisis con la nueva distribución de esfuerzos elegida y volvemos a corregir lo necesario. Es lo que, de otro modo, se explica en Vázquez [1987]. Realizar esto para cada caso podría ser extenuante y, desde luego, es imposible de aplicar si uno se atiene a la necesidad de que los procedimientos de cálculo y de construcción tienen que adquirir una suficiente simplicidad para que la sociedad pueda servirse de ellos a

través de que los encargados de ponerlos en uso puedan abordar el problema de manera sistemática. Parece esto una estupidez, pues los coches, por ejemplo, se hacen por centenares de miles y son todos tan complejos y bien calibrados como el que sirvió de prototipo. Bien, ésta es la cuestión: en la construcción no hay prototipos, pues cada una es única y genuina y no hay prototipo que copiar. Para obras de cierto porte sí tiene todo el sentido emplear sistemas complejos de análisis por especialistas, y de hecho sucede así.

Volviendo al planteamiento de base, antes se ha citado el término *razonable*. Bien, esto es lo que en realidad matiza todo este sistema incoherente sobre el que diseñamos estructuras de barras de hormigón armado. En realidad, la normativa y el uso actuales han introducido limitaciones y correcciones al diseño o cálculo en rotura de las estructuras de barras. Tal cosa queda reflejada, por ejemplo, en lo que denominamos redistribución limitada, es decir, alterar la distribución de esfuerzos de las piezas, cumpliendo el equilibrio, para adaptarlas a una ley que tienda más a igualar los valores absolutos de las máximas solicitaciones de distinto signo. También, para comprobar que las deformaciones no son excesivas para verificar la carga última requerida, existen modelos de rótulas en las propias normativas que nos indican la máxima posible deformación que podemos acumular en las regiones plastificadas, de modo que calculemos las que nos requiere el modelo y comprobemos que no van más allá de lo seguro. Con estas correcciones, y otras destinadas a impedir deformaciones excesivas en estado de servicio, digamos que hemos conseguido contener la incoherencia dentro de unos límites que la propia práctica ha sancionado como válidos. Pero la incoherencia de fondo subsiste, sin que esté resuelta. Es decir, no hay un sistema coherente y compacto para diseñar piezas de hormigón en carga última que nos permita asegurar desde un inicio que estamos cumpliendo con las limitaciones necesarias y que, además, lo haga de forma coherente.

Para las fábricas sucede otro tanto, si bien el campo de aplicación sea más reducido y, desde luego, pocas veces tenga que ver con el diseño de una nueva estructura, sino más bien con el peritaje de una estructura ya existente, por lo general, antigua. Pero la incoherencia es la misma: no hay un cuerpo coherente de análisis y comprobación que permita asegurar hasta qué punto las condiciones de carga última se satisfacen ni qué consecuencias tiene tal comprobación en las consideraciones de servicio.

En el fondo, hay una perversión que permanece por el modo en que se ha introducido y se sigue enseñando -creo- el análisis límite o en carga última. Sin entrar en antecedentes, se viene a proponer lo siguiente, tomando el ejemplo de una barra biempotrada con carga repartida normal a su directriz, que es el modelo más fácil con que comenzar. Resulta que los materiales estructurales -¿cualquiera?- presentan una tensión última que pueden soportar y que, para ella, las deformaciones siguen creciendo mucho -¿cuánto es mucho?- sin que aumente la tensión que aportan, lo que llamamos plastificación. Esta propiedad se traslada al comportamiento local de las secciones. Así, una sección soporta un normal máximo -normal último- cuando todas las fibras de la misma han alcanzado para el material dado la tensión última, sin que la sección se separe de la yuxtapuesta. Soportaría asimismo un momento último cuando al curvarla, el régimen de tensiones fuera tal que todas las fibras a un lado del baricentro habrían agotado su capacidad en compresión y al otro lado del mismo en tracción⁴. Integradas estas tensiones en la sección, nos da el referido momento último, para el cual la sección puede seguir rotando sin romperse. Para tensiones tangenciales sucede otro tanto, pero lo obviaremos por el momento. Entonces, como los materiales son mecánicamente simétricos -¿todos?- o al menos pueden serlo a escala de sección, ¿por qué no igualar la capacidad resistente para solicitaciones de un signo y de otro y aprovechar su capacidad total? Pues bien, hagámoslo. Es más, si disponemos piezas con capacidades resistentes distintas por regiones, ¿por qué no adecuar las solicitaciones a resistir precisamente a las que efectivamente resisten las secciones correspondientes? Digamos que en un vistazo rápido, la cosa es de lo más tonto: conocido el momento isostático de las cargas ponderadas -carga última- sobre la barra, distribuimos los esfuerzos como mejor nos parezca, siempre y cuando se guarde el equilibrio con el momento isostático de esas cargas ponderadas. Para colmo, la necesidad de cálculo es nimia: un par de cuentas y se acabó. Quizá para estructuras más complejas, como pórticos, la cuestión sea más intrincada, pero siempre viene en socorro la formulación cinemática del problema de rotura que reduce todo a una sola ecuación. Fácil como pocas otras cosas.

Para las fábricas se puede aplicar otro tanto sin más, pero suele ser común determinar el estado

⁴ Esto no es exacto del todo, pero así se dice por simplicidad.

límite de rotura mediante procedimientos gráficos, superponiendo a la superficie capaz de la estructura el trazado de la resultante de las fuerzas.

Lo anterior es un poco caricaturesco, pero es lo que se suele percibir a primera vista cuando se entra en análisis en carga última. Sin embargo, se esconden varios vicios de origen que pervierten el concepto y dejan la superficie clara con el fondo lleno de cieno. Por la propia historia de la aplicación del análisis en carga última -y a otros métodos de análisis-, casi todo lo anterior es aplicable al acero -que es el representante canónico de los materiales elásticos lineales y con tramo plástico considerable-, porque es un material mecánicamente simétrico, las deformaciones plásticas que puede desarrollar son enormes frente a las elásticas, se suele producir industrialmente en formas que son simétricas y homorresistentes a lo largo de las mismas, etc... Pero para los materiales pétreos es otra historia bien distinta, y a éstos se les ha supuesto, por facilidad de exposición académica, un igual discurso. Digamos que, en honor a la verdad, hasta un cierto punto, el paralelismo es cierto y bastante útil, pero no totalmente.

Sin embargo, siendo lo expuesto un procedimiento tan sencillo, ¿por qué renunciar a él sin más? Pues bien, precisamente éste es un punto de partida de esta tesis: aplicar el sistema antes expuesto, tan sencillo, pero sabiendo previamente qué consecuencias se derivan de cada decisión tomada de ese modo tan simple. Por tanto, saber si las deformaciones plásticas posibles serán suficientes para que se revele el estado de rotura global sin que haya roturas previas locales, si los regímenes de deformación para la carga de servicio se mantendrán dentro de unos límites aceptables, si la fisuración de las piezas será suficientemente baja para las condiciones de durabilidad, y con qué estrategia de constitución interna de las secciones se podrán verificar tales condiciones.

Para ello, se pensó entonces que el camino era claro. Como abarcarlo todo es imposible, se ciñó el campo de lo estudiado a las barras en flexión en hormigón armado y a los arcos de fábrica. Como lo más habitual es que las cargas que se aplican tengan distribución más o menos uniforme -en los modelos, que no en la realidad-, se toman cargas de tal tipo. Así, para los tipos de hormigón y de acero de armar convencionales, para distintas estrategias de armado a escala local y a escala global, con distintas condiciones de esbeltez de las piezas, se desarrollaría un modelo no lineal de carga que nos proveyera todos los datos relevantes hasta la rotura. Para los arcos de fábrica se procedía de igual manera, pero con la excentricidad máxima de la resultante en la sección como parámetro asimilable al armado en hormigón.

De el análisis de la gama acotada de los casos a estudiar se obtendrían los datos relevantes que, comparados con las exigencias de partida, nos diera un diagnóstico previo de las consecuencias de cada decisión inicial. Es decir, tendríamos las bases de un diseño compacto, coherente y seguro para el cálculo en carga última de este tipo de estructuras.

Planteada la cuestión que se quiere estudiar y definidos los límites de la misma, ha de buscarse el modo de resolverla. Ciertamente, una parte enorme consiste en conocer lo que sobre el campo elegido ya exista, y la labor de purga de lo superfluo frente a lo fundamental resulta indispensable. Más aún, antes de proceder a separar paja de grano ha de saberse diferenciar lo uno de lo otro. Esto se aborda en el siguiente punto de esta introducción.

Para las cuestiones del comportamiento en servicio ya existen métodos sancionados de comprobación, como para el comportamiento no lineal de secciones de hormigón armado o de fábrica, por lo que crear el modelo no lineal hasta carga última consistía simplemente en ser coherente y preciso con los postulados de partida. Y desde luego, las bases teóricas de partida estaban ya bien asentadas y eran más que conocidas. Pero una cuestión peliaguda se escapaba a lo anterior y sigue siendo algo difícil de acotar: un modelo claro de rótula. Es decir, modelizar la región plastificada con precisión, a la par que hacerlo coherente con el resto del modelo en que se iba a insertar. Sin entrar en explicaciones que pertenecen al cuerpo central de este trabajo, la cuestión fundamental a desarrollar era cómo obtener un modelo claro y preciso de las rótulas plásticas. Hay muchos modelos y hasta codificados -el EC establece su regla y EHE08 también-, pero en ninguno se encuentra más que una base de comprobación y parcial de cuánto puede girar una rótula de hormigón armado, sin que esté claro el margen de aplicación. En el caso de quien escribe, se contaba además con los resultados empíricos de una serie de ensayos de ductilidad realizados dentro del proyecto de investigación del DEE de la ETSAM, que resultaron por desgracia poco útiles. En la búsqueda de cómo modelizar el comportamiento de las rótulas y crear un modelo teórico, resultan varios factores los determinantes a tener en cuenta, y que se citan sistemáticamente en cualquier

texto sobre este asunto: la ductilidad del acero de armado, la estrategia de armado seguida en la sección, la fisuración de las secciones, la ligazón entre acero y masa de hormigón y la capacidad de plastificación del hormigón. Así, como se verá, el fenómeno resistente en situación última de una rótula depende de demasiados factores y, observados como preferentes unos u otros, se obtienen soluciones distintas. Lo que sí es claro que, dichas regiones, como bien se advierte en Schlaich [1987], son regiones singulares que no pueden responder a la hipótesis general de Navier-Bernouilli de deformaciones planas, que se da en los dominios alejados de las irregularidades. Hay muchos modelos acerca de esto, sea para fábrica como para hormigón, pero todos adolecen de que, formulados o bien de manera simplificada o por modelos de elementos finitos, el campo de desplazamientos no es continuo, se combinan zonas de fractura con zonas de plastificación y toda una suerte de irregularidades que requieren de una previsión en la formulación o de simplificaciones que permitan abordar el asunto.

La casualidad puede ayudar en ocasiones y tal fue el caso. Estudiando métodos de análisis numérico, aparte del ya muy empleado de los Elementos Finitos (*FEM*), di en entrar en otro método de igual origen pero con ventajas frente al anterior en algunos casos: el método de los Elementos de Contorno (*Boundary Element Method, BEM*). Ambos son métodos que, mediante técnicas de residuos ponderados o similares, permiten la transformación de una ecuación diferencial aplicada a un dominio en una ecuación integral sobre el mismo dominio, que debe valorarse en el interior del dominio y en su contorno. La diferencia conceptual entre las soluciones del *FEM* y del *BEM* reside en que en el segundo caso la integral sobre el interior del dominio es directamente evaluable como un valor concreto, sin necesidad de discretizarlo, restando todas las incógnitas de evaluación sobre el contorno. Pero la ganancia fundamental del BEM frente al MEF en este caso es que proporciona como solución una función continua y derivable de la variable fundamental en todo el dominio. Como limitación tiene que su formulación se puede aplicar a sistemas lineales elásticos, lo que cuadraría poco con las necesidades de simular un comportamiento último de un sistema no lineal ni elástico. Sin embargo, sin dejar el campo del BEM, la técnica de la formulación dual de los elementos permite la simulación correcta de los efectos de fisuración, mediante la simple alteración del contorno del dominio, precisamente donde las fisuras hayan de aparecer, sin que se deba prever su trazado y siquiera su existencia a priori. Por otro lado, aun cuando la formulación del problema se pueda ceñir sólo al contorno, no excluye la introducción de incógnitas en el dominio, por lo que la inserción de refuerzos de acero en el dominio es del todo posible sin alteración alguna de lo anterior. Quedaría la objeción de que el comportamiento del material -sea hormigón o fábrica- no es lineal, pero no supone limitación si describimos por aproximación el comportamiento no lineal como sucesivos comportamientos lineales. En fin de cuentas, el empleo de la técnica del BEM para definir el comportamiento de las rótulas tanto permite asumir la no linealidad mecánica debida a la fisuración, como la debida a la plastificación del material de base -sea fábrica u hormigón-, como el comportamiento conjunto del acero con el material de base, mantengan la ligazón de adherencia o no. Lo que resulta más curioso es que la idea de esta aplicación del BEM procede de una técnica empleada en la industria aeronáutica para valorar piezas fisuradas con cosidos transversales, si bien lo que aquí se ha empleado haya sido distinto, por motivos que tampoco vienen al caso, pero que se resumen en que el modelo que generó la idea es puramente elástico lineal y no existe propagación de las fisuras. La referencia a esto último se puede encontrar en Aliabadi et al., [1999].

Así, habiendo explorado cómo enunciar un modelo teórico de la rótula suficientemente preciso, fue una aplicación de algo totalmente ajeno al asunto lo que dio la pista de cómo resolver el problema. En cierta medida, como se verá, podremos saber gracias a qué mecanismos una rótula es capaz de proporcionar más giro o menos y, por el modelo completo de barras abordado, cuál es la influencia del giro que las secciones no críticas puedan asumir *en ayuda* de la rótula. Como también se podrá observar que, para igual constitución, no es sólo el momento flector el que regula la capacidad de giro, sino que el cortante que haya de transferirse a través de ella influye en su capacidad de giro, cosa que atinadamente ya se expresaba en Vázquez, [1987].

Ciertamente, por circunstancias que no vienen al caso, entre la idea original y su desarrollo han pasado muchos años. En buena lógica la sospecha de que lo que se concibió hace mucho tiempo como algo propio y genuino ya haya sido realizado y hasta sobrepasado es fundada. Tras buscar en los muchos medios y fondos que existen sigue sin haber nada similar a lo enunciado, lo que ha permitido aplicar el modelo inicialmente pensado. Desconozco el motivo, pero es de señalar que el BEM cuenta con menos aplicaciones y estudios que el ya muy empleado FEM. En realidad, miento, porque sí existen limitaciones a la aplicación del BEM, pues para cada ecuación planteada se debe conocer la solución fundamental del

problema de Green, cosa que no sucede siempre. O bien, existiendo, la enjundia del problema tampoco requiere más refinamiento que lo que ya se conoce o se puede abordar por una técnica más genérica como es el FEM. Aun así, el conocimiento del BEM es mucho menos extendido que el del FEM.

En cualquier caso, este trabajo no versa sobre la aplicación del BEM a los problemas de ductilidad de las rótulas plásticas de fábrica u hormigón armado. Todas las formulaciones empleadas y las distintas técnicas incorporadas ya existen y, si así se quiere, la única nueva aportación sería haberlas imbricado unas sobre otras para formar un modelo de rótula plástica que no existe, pero sin que sea una propuesta que realmente afecte a las bases de la formulación del BEM. Es por ello que, cuanto al modelo de la rótula formulado con el BEM se ha hecho, consta en los anejos y no en el cuerpo central de este trabajo. Ha sido un medio para resolver lo que se pretendía, no el fin que se buscaba. Más aún, a la vista de los resultados, si en algo puede este trabajo continuarse, es mediante la comparación de los resultados teóricos con ensayos pertinentes, lo que permitirá corregir lo concluido o bien darlo por acertado, que es lo que se pretende.

Entrando en una explicación más detallada del porqué del planteamiento y del procedimiento empleado en el estudio, de manera un poco sectaria, diremos que existe la escuela de los defensores a ultranza del análisis en carga última, que suelen quedarse en la sencillez del procedimiento que, para estructuras sencillas adinteladas, requieren de un aparato matemático de lo más simple. En palabras de este tiempo, un pelotazo estupendo: en dos patadas alcanzo lo que otros sólo llegan a alcanzar tras mucho denuedo. Tomando el archiconocido ejemplo de la viga biempotrada ya mencionado, supuestas definidas las capacidades últimas a flexión de las secciones de los empotramientos y del centro del vano, para una carga repartida uniforme, su valor último alcanza un valor que se determina enunciando que el isostático de tal carga es la semisuma de los momentos últimos de las secciones extremas más el de la sección central. Si se puede hacer algo tan tonto como esto, ¿para qué hace falta andarse con más zarandajas? ¿No son ganas de “épater le bourgeois” contar que existen rótulas plásticas, que además tienen que rotar y otras beldades? ¿Ir más allá es acaso algo más que mero diletantismo y virtuosismo académico? Planteado así el problema, huelga seguir con esta tesis, porque el problema está más que resuelto. Sin embargo, aparte de ser ésta una mentalidad –a mi juicio– que impediría avanzar en el conocimiento, el anterior sistema encierra mil trampas conceptuales que, sin negar la sencillez de la operación matemática, imponen severas limitaciones al campo de aplicación de la misma. Obviar esto lleva a confusiones tremendas y a aplicar los procedimientos de carga última a casos en que los resultados teóricos difieren gravemente de la realidad física. Además, la diferencia ésta del lado de la inseguridad.

Por otro lado, está muy difundida –y enormemente acrecentada desde el uso generalizado de ordenadores– la visión según la cual, todo aquello que no va acompañado de una cohorte de millares de cálculos y datos no es cosa seria a tener en cuenta y se califica de simple chapuza. Parece como si la sencillez fuera resultado de la racanería intelectual o de la falta de conocimiento sesudo. Parece confundirse la oscuridad de un razonamiento con la profundidad del mismo⁵. Precisamente, suele ocurrir lo contrario: lo sencillo, que no lo simple, es el resultado de la decantación de lo complejo.

Si ni una cosa ni otra son, ¿de qué se trata entonces? Bien sencillo. Se trata de realizar un modelo completo del comportamiento en carga última de piezas sometidas que nos permita realizar un diagnóstico de hasta qué punto el algoritmo sencillo enunciado antes es fiable y qué criterios de diseño son óptimos para garantizar la capacidad de la estructura para alcanzar la carga última, sin merma de seguridad por falta de ductilidad ni inviabilidad por inadecuación a las exigencias de servicio. Por tanto, por un lado, se pretende discriminar en qué casos la carga última se alcanza, por otro, cuando tal cosa no sucede, qué merma sufre la carga última misma y, por último, con qué criterios de diseño se debe abordar una pieza para garantizar su adecuación a las necesidades de seguridad en carga última y a su viabilidad en servicio.

En conclusión, se trata de realizar los “cálculos sesudos” de manera sistemática una sola vez,

⁵ Al hilo de esto, recuerdo una conferencia, hace ya bastante tiempo, de Félix Candela, en sus últimos años de vida, donde explicaba la amargura que tenía que pasar cada vez que mostraba algunos de los cálculos que hacía para construir sus paraboloides. Más o menos, decía, le miraban de reojo con desconfianza al ver que, para “paraguas” sencillos, el cálculo no ocupaba más allá de un folio. Y, efectivamente, para ciertas hipótesis de carga, la ecuación diferencial de estas estructuras es de lo más tonto y se resuelve en un pispás con dos cuentas de la vieja, sin merma alguna de precisión. Pues no, aunque en ese folio estuviese completamente expresada toda la enjundia de lo que se analizaba, no valía, tenía que resultar más críptico.

para extraer conclusiones que permitan abordar con expresiones algebraicas sencillas el análisis en carga última de piezas flectadas –con o sin compresión-. De este modo, podremos aligerar la carga de trabajo para cualquier caso que nos planteemos, pero evitando que en la sencillez del procedimiento se nos escapen los matices que precisamente permiten la veracidad del mismo. Desde un punto de vista conceptual, valdrá también para acotar los distintos estados del problema, quedando no sólo en una mera “*practiconería*” útil. Es más, considero esto último de mayor importancia que lo primero.

Sé que, de cualquier modo, quienes son amigos del gran cortejo numérico, si es que consideran que el que se desarrolla en esta tesis es acertado y suficiente, dirán que debe realizarse para cada caso que se plantee, sin –aparente- atajo alguno: nunca en cuatro operaciones bien hechas con conocimiento se aborda la complejidad de un problema serio, porque se supone que cuatro operaciones no son suficientes para alojar el conocimiento. Por contra, los que no observan la complejidad conceptual del análisis en carga última y sólo atisban la envoltura de su sencillez para casos canónicos, seguirán diciendo que hay poco más que patrañas en tanto número y que las cuatro operaciones, por sí mismas y sin más, son todo cuanto hay que decir acerca del asunto.

Por explicarlo con un ejemplo sencillo y en modo muy grosero –pero no impreciso-, pongámonos en la piel de un amante del cálculo en rotura, que nada quiere saber de melindres elásticos o, más precisamente, de las deformaciones, y tomemos de nuevo la consabida viga biempotrada con carga repartida, de hormigón armado y –al modo de la escuela mexicana de carga en rotura- “propongamos” un diagrama equilibrado de momentos flectores.

Ilustración 1: Esquema de solicitaciones y deformaciones de carga hasta rotura de una viga biempotrada.

Tomaremos momentos negativos Mu^- y positivos Mu^+ de valores absolutos similares para el estado final de rotura, y para una carga uniformemente distribuida de rotura qu . Dimensionada la armadura, podemos proceder a cargar la viga. El equilibrio se verifica en rotura como $|Mu^+|/|Mu^-| - Miso = \theta^6$, con $Miso = qu \cdot L^2/8$, siendo L la distancia entre empotramientos, la luz de la viga. Resulta que, para inercias constantes⁷, al incrementar la carga el momento flector de las secciones de los extremos crece

⁶ Cuya representación gráfica sería la superficie de rotura que define el problema.

⁷ No es que por tener armadura igual la inercia sea constante, ya que influye la fisuración en función de la flexión y, a la larga en el proceso de carga, la plastificación, pero lo tomamos así por simplicidad del discurso.

inicialmente, mientras estamos en régimen elástico, más rápido que el positivo del centro del vano, siendo los primeros del orden del doble del segundo. Pero la proporción entre momentos negativos y positivos se mantiene constante para cada incremento de carga. Esto supone que las secciones de los extremos alcanzan su capacidad última M_u antes que la sección central llegue a M_u , para un valor de la carga $q_e < q_u$. Por tanto, para llegar a agotar la capacidad de la viga deberemos seguir cargándola hasta que la sección central alcance su capacidad última también. Pero esto ha de hacerse mediante incremento exclusivo del momento flector positivo, bloqueado el negativo de ambos extremos, lo que supone indefectiblemente que éstos han de rotar para que se verifique la conocida redistribución. Esto es, se han formado rótulas plásticas que deben rotar lo suficiente como para que la sección central alcance su capacidad última –aspecto inobservado en la formulación algebraica del problema-. El valor del giro de la rótula, supuesta la inercia de la viga constante, es del orden de $\theta_p = q_u \cdot L^3 / (96 \cdot EI)$ ⁸. Este giro se concentra en la cercanía de las secciones extremas, por lo que una región cercana a éstas –la rótula- ha de ser capaz de proporcionar el mencionado giro. Éste se permite en la medida en que las fibras traccionadas se puedan alargar y las comprimidas acortar, sea siguiendo el patrón de la deformación plana o cualquier otro. Eso sí, el giro se verifica en relación al canto de la pieza, como suma de los valores absolutos de las deformaciones en tracción y compresión divididas por dicho canto. Por tanto, cuanto menor sea el canto de la pieza, mayor es la capacidad de curvatura o, entendido a la inversa, más tenderá a curvarse cuanto menor sea el canto, para igual momento flector. Tal como se enuncia, parece entonces que cuanto menor es el canto, mayor es la capacidad de giro, pero, como se verá, resulta decisivo el canto relativo al desarrollo lineal de la pieza, esto es, a la esbeltez. De hecho, si tomamos como identificador del problema la esbeltez, siendo la inercia I proporcional al cubo del canto ($I = \alpha \cdot h^3$), y definida aquélla como la relación entre longitud de la pieza y canto de la misma ($\lambda = L/h$) el giro necesario anterior toma la expresión $q_u \cdot \lambda^3 / (96 \cdot E \cdot \alpha)$. Esta expresión, dentro de lo rudimentario de su obtención, indica que el giro depende geoméricamente de la esbeltez de la pieza y que, por tanto, las piezas poco esbeltas requieren giros pequeños para poder alcanzar la redistribución frente a las más esbeltas, que requieren de más giro. Todo esto queda inadvertido en el simple planteamiento en carga última, y es relevante precisamente para verificar dicha carga última.

Así, en este sencillo enunciado, podemos incluir algo imprescindible para la comprensión de los límites de ductilidad. La capacidad de giro de las secciones de la rótula viene determinada por las dimensiones de la sección y su armado. Si lo cuantificamos tenemos lo que llamaremos el **giro posible** de la rótula. Sin embargo, si dicha sección es el extremo de una pieza muy esbelta, se le exigirá un giro para verificar la carga última mucho mayor que si es el extremo de una pieza poco esbelta. Este giro que se le exige es lo que denominaremos el **giro necesario** para que se pueda verificar la redistribución que permita llegar al estado de carga última de la pieza. De la relación entre el giro posible de la rótula y el giro necesario que se le exige, nacerá el límite de ductilidad. Es evidente que sólo en la medida en que el giro necesario sea menor o igual que el giro posible, la rótula será capaz de llevar a cabo su contribución a la redistribución. Si, por el contrario, el giro necesario es mayor que el giro posible, el primero no se verificará más que con la rotura física de la rótula, desapareciendo el momento último de las secciones del empotramiento, llevando irremediablemente al colapso –por transferencia súbita de todo el isostático al momento positivo del centro del vano- sin haberse llegado a la carga última prevista. En este segundo caso, la carga última prevista como la semisuma de los valores absolutos de los momentos últimos negativos más el positivo no se alcanza, pero no por falta de resistencia, sino por falta de ductilidad.

Conclusión inseparable de lo anterior es que, por tanto, no podemos enunciar el momento último de una sección sin más, obviando su pertenencia a una pieza u otra. En realidad, sí, ese momento último es invariante, pero al desligarlo del giro posible, estamos incurriendo en un error que infinidad de veces pasa inadvertido: como hemos deshecho la compatibilidad, al ser el momento último independiente de la curvatura de la sección, no importa cuál sea ésta y, por ende, el giro acumulado, porque el momento último no varía. Esta afirmación, que se difunde ampliamente, contiene tres errores. El primero, que se deshace la compatibilidad. Nada más falso, porque compatibilidad y equilibrio son una misma cosa, y, sin otro remedio, si enunciamos el equilibrio, enunciamos inseparablemente la compatibilidad. Una cosa es que, al asumir que la pendiente de la relación M/C –la rigidez de la sección- es nula, quede indeterminado el valor de la curvatura y otra cosa es que la curvatura –o el giro- no existan con un valor determinado. El segundo error es que se piense que no importa cuál sea la curvatura. En realidad, tampoco en una rótula

⁸ q_u sería la carga última, L la luz entre apoyos de la pieza y EI la rigidez de la sección, supuesta ésta constante a lo largo de la pieza, tal como ya se enunció en el ejemplo de origen.

plástica podemos hablar formalmente de curvaturas, pero sí de giros –su familiares de siguiente categoría-. Pues sí, importa –¡y tanto!- cuál sea ese giro, porque es el que limita la capacidad de redistribución. Por último, el tercer error consiste en que el momento último lo hemos determinado en ausencia de compresiones, pero, tal como los requeteconocidos ábacos de interacción indican, el momento último depende de cuál sea el grado de compresión de la sección, y viceversa. En realidad, debemos tener en cuenta lo que se denomina la superficie de rotura de la sección, que es lo que expresan los mencionados ábacos⁹.

Hasta aquí se ha tratado de condensar lo que se refiere al estado límite último y los límites de ductilidad. Abordemos ahora lo que se refiere al servicio. Evidentemente, por propia definición, los estados de servicio no se relacionan directamente con los últimos. Sin embargo, es moneda corriente aceptar que entre el estado de servicio y el último existe meramente una relación lineal. Esto es, los esfuerzos en estado último y los de estado de servicio guardan la proporción de los coeficientes de ponderación de las acciones. Esto se admite como procedimiento habitual al considerar el análisis elástico lineal de las estructuras, pero es del todo falaz en el comportamiento real de las estructuras de hormigón armado. Las cuantías de armado variables en cada sección implican rigideces variables a lo largo de las piezas, efecto que se acusa según cada sección llega al estado de figuración y se aproxima al estado último. Por tanto, podemos convenir que, si las posibilidades de redistribución son ciertas para el estado último supuesto, sólo a él podemos referirnos como resultado cierto. Esto se basaría en uno de los principios de la teoría de rotura, que indicaría que una solución de equilibrio cualquiera es viable si la respuesta de la estructura es capaz de adaptarse a dicha solución. No así sería la consideración de los esfuerzos en servicio, que serían los últimos a menor escala, cosa que no tiene nada que ver con la realidad física. De hecho, ciñéndonos a las piezas en flexión pura, para mayores solicitaciones últimas de las secciones, dispondremos mayor armado, que conlleva mayor rigidez de las mismas frente a las que presenten menor armado por el menor valor de las solicitaciones últimas. Así, puesto que el análisis convencional parte de las rigideces brutas de las secciones sin fisurar y sin variación en función de la solicitación, la realidad viola estos principios. Las secciones con mayor armado de una pieza flectada –en principio, las de los extremos- presentan mayor rigidez, acumulando una fracción mayor del isostático que la prevista en el análisis lineal en los estados iniciales de carga. Por el contrario, las secciones de menor armado –las del centro- presentarán menor rigidez y, por ende, menor fracción del isostático que la prevista inicialmente. Además, la fisuración en un caso y otro serán distintas, con lo que la alteración de la rigidez de cada sección por tal motivo, variará según el armado y la solicitación, alterando de nuevo la andadura de la ley de flexiones sobre la pieza. En definitiva, el apriorismo de la decisión acerca de las solicitaciones en servicio es erróneo y será en función del armado definido para el estado último de rotura que se condicione cuáles sean realmente las solicitaciones en servicio.

Volviendo al ejemplo clásico de la viga biempotrada, pero supuesto un análisis elástico lineal para las cargas en estado último con rigideces brutas sin fisuración, la ley de momentos flectores tenderá a valores dobles en los extremos que en el centro del vano. Asumiendo constante el brazo de palanca de todas las secciones, el armado en los extremos será del orden del doble que en el centro del vano. Esto supone que, inicialmente, las secciones extremas son más rígidas que las centrales, lo que llevará a que, en el estado de servicio, la ley de momentos flectores no guarde la relación del doble a favor de los extremos, sino de casi el triple, de nuevo a favor de estos mismos. Por tanto, sea para el cálculo de las deformaciones como para el estado de fisuración, es el armado dispuesto para la hipótesis de carga última el que condiciona el estado de servicio.

Hasta hace no demasiado tiempo –diríamos que hasta la aparición de la fórmula de Branson para la determinación de la rigidez equivalente en secciones de hormigón-, el cálculo de deformaciones y, en menor medida, el de fisuraciones en hormigón armado, no pasaban de ser un ejercicio de mero virtuosismo académico o una investigación básica para definir por completo el modelo de comportamiento del hormigón armado. La razón residía en que lo habitual era la construcción de piezas poco esbeltas –básicamente en edificación-, que difícilmente presentan problemas de deformaciones que acarreen problemas. Consecuentemente, tampoco había demasiado problema con la fisuración, excepción hecha de las estructuras expuestas a la intemperie, sobre todo en ambientes agresivos. Ahora mismo, la construcción tiende a soluciones planas de poco canto, incluidas las tan aberrantes y difundidas vigas planas. Estas sí presentan problemas de deformación, siendo la activa la causa de grandes cantidades de

⁹ La determinación de los modelos de rotura, o superficies de rotura, se puede abordar por simple nube de puntos, pero resulta muy clarificador el seguir el teorema de flujo de Von Misses, aparte de ser muy elegante.

patologías en la edificación. También presentan problemas de fisuración excesiva, lo que importa para la durabilidad de la estructura. Parejo al uso casi abusivo de este tipo estructural, los requisitos de durabilidad y de compatibilidad mecánica con otros materiales de la edificación, se han elevado a niveles casi históricos, que rayan en el absurdo. Por la combinación demoníaca de ambos factores, tanto el control de las deformaciones como el de la fisuración han pasado a ser un problema de orden preferente. Hasta tal punto es así que difícilmente se teme que alguna estructura colapse, pero se teme como una vara verde el que aparezca la más ínfima de las fisuras, porque en ese momento el rosario de dolores de cabeza, explicaciones absurdas y exigencias desmedidas puede no tener fin. De esta situación de absurdo integral tienen en gran parte culpa las administraciones públicas –y más claramente los políticos, como personas-, que practican un garantismo normativo del todo demagógico e irresponsable. Pero éste es asunto ajeno a lo que nos ocupa. Lo que hace a nuestro caso es que no hay diseño de estructura que pueda obviar las condiciones de servicio y, por ello, se han tenido en cuenta en este trabajo.

Como consecuencia de lo anterior, si suponemos resuelto el problema de cuáles son las estrategias de armado preferentes para optimizar la ductilidad y poder así verificar la carga última con seguridad, deberemos también saber qué implicaciones tiene en el comportamiento en servicio de las piezas, pues de nada vale que garanticemos la resistencia si en servicio la estructura es –valga la redundancia- inservible.

Para cerrar esta parte, explicaremos la inclusión de la fábrica junto al hormigón. Suele extrañar este asunto porque tal cosa, efectivamente, casa poco con la bibliografía o la taxonomía al uso, pero tiene todo el sentido. De hecho, sólo el desarrollo industrial distinto de uno y otro sistemas constructivos parecen estar en la base de su separación académica. También el que las fábricas suelen corresponder a edificaciones antiguas o de poco porte y que las de hormigón lo sean a estructuras recientes o de cierta importancia. De todos modos, siempre existen casos, como el de Dieste y, con perdón y tanta humildad como se requiera, de quien esto escribe, en que se han construido estructuras actuales y de cierto porte con fábrica, ya sea masiva, armada o postesada. Pero, es cierto, son casos muy raros.

El caso es que todos los materiales pétreos presentan superficies de rotura iguales y no difieren en nada, cualitativamente, las del hormigón en masa, armado y postesado de las de fábrica en masa, armada o postesada. En nada. Sólo, en una cierta mayor influencia de la ligazón entre el esfuerzo normal y el cortante en fábrica que en hormigón, por la diferencia de que en la primera existen juntas de distinto tipo que condicionan su comportamiento masivo, mientras que en el segundo se trata de un material, en principio, continuo e isótropo. Por lo demás, son materiales iguales cualitativamente.

Para la fábrica, nos ceñiremos a la que se construye en masa, ya que la armada o la postesada son de uso muy escaso. También las excluirémos por evitar el agrandamiento del campo de este estudio. Nos constriñe esto al estudio de estructuras comprimidas básicamente, porque sin compresión, la fábrica no es capaz de asumir flexiones. Casi diría que la fábrica sin compresiones no existe. Pero resulta, desde el punto de vista académico del mayor interés, pues aparecerán las compresiones, que, como veremos, condicionan gravemente el momento último de las secciones y su capacidad de rotación. Por tanto, existirán límites al cálculo en carga última en estos casos tanto por la limitación de la capacidad de flexión como por la capacidad dúctil de la estructura.

Por tanto, el procedimiento a emplear en esta tesis, partiendo de un estudio de comparación del comportamiento mecánico de las secciones con distinta constitución interna, habría consistido en la aplicación sistemática del modelo completo a toda una gama de posibilidades en función de parámetros relevantes en el diseño en carga última de piezas de hormigón armado o de fábrica, acabando por definir criterios de partida seguros que permitan valorar la capacidad última de las barras constituidas de un modo o de otro, y con los límites de servicio definidos de partida.

Sin embargo, realizados los modelos para distintos parámetros se observó que existía una constante tendencia en algo muy concreto. Para una misma constitución interna de las piezas de hormigón armado, propuesta una determinada distribución interna -armado local y distribución del mismo-, para distintas leyes de solicitaciones en rotura impuestas como diseño de partida, en el proceso incremental de carga, la relación entre las solicitaciones máximas en el momento de iniciarse la primera plastificación y la definida en rotura tendían a disminuir a medida que se acercaban a un cierto valor, hasta el punto de hacerse nula la diferencia. Y esta diferencia nula se producía de manera indiferente para cualquier

esbeltez de la pieza. Es decir, que para una decisión local de diseño de las secciones, aparecía una decisión de diseño concreta a escala de toda la pieza que permitía al sistema llegar a la rotura conservando la proporción entre solicitaciones máximas positivas y negativas en todo el recorrido: o sea, según la proporción que tendrían las mismas solicitaciones al llegar al estado de rotura. Por ende, además, en tal caso, las deformaciones plásticas eran nulas en todo el recorrido y se desencadenaban todas simultáneamente al llegar a dicho estado.

Lógicamente, tal cosa no podía ser casual y debía responder a algo que no estaba enunciado expresamente. Ello requirió entonces entrar en un planteamiento teórico que ni por asomo se había pensado desarrollar¹⁰. La parte teórica a enunciar no pasaba de hacer una referencia a los teoremas de rotura y a sus limitaciones en términos de imposibilidad de determinación de las deformaciones y, por tanto, falta de garantías de satisfacción de la ductilidad, aparte de falta de control de las condiciones de servicio, y la comparación que entre considerar el recorrido y el mero enunciado en carga última existía. Aparte, los fundamentos de comportamiento mecánico de las secciones y de los sistemas planteados. Pero una parte considerable de lo que aparece en el capítulo 2, es algo que se pergeñó con una gran cantidad del resto del trabajo realizado, y con muchos de los resultados ya obtenidos. Evidentemente, la elaboración de esta parte no prevista supuso pánico en dos dosis. La primera, no ser capaz de encontrar la razón de fondo teórica que justificase tales resultados repetitivos y sistemáticos. La segunda, que, capaz de encontrarla, no cuadrara con los resultados obtenidos. Por suerte, ambas cosas no sucedieron y tanto se ha encontrado la razón de lo que los resultados indicaban como aquélla es coherente con éstos.

De este desarrollo teórico se han extraído algunas conclusiones interesantes (v. 1.5) que, además, han permitido ordenar y referir los resultados de los modelos de manera mucho más clara y concisa que en su ausencia.

Al final, en el fondo, se ha dado la razón a los aplicadores a ultranza de los modelos de carga última sin más. Como ya se ha dicho, si es algo tan sencillo, ¿por qué renunciar a ello? Eso sí, no toda la razón, porque lo que se deriva de esta tesis es precisamente lo que queda oculto de simplemente aplicar distribuciones de solicitaciones en carga última *al buen tuntún*: qué consecuencias tiene tanto en la satisfacción de la carga última como en las condiciones de servicio la elección de unos criterios de carga última a escala de sección y a escala de la pieza completa.

1.4.- Estado del arte

Hablar del estado de rotura de las construcciones es en el fondo hablar de la más básica e intuitiva percepción que cualquier lego en el asunto percibe: que aquello aguante y no se caiga. En gran medida, por tanto, es casi hablar de la misma esencia de las estructuras en su sentido más primitivo y originario. Por ello es que sólo el desarrollo del conocimiento de la mecánica de las construcciones ha permitido entrar en profundidades mayores que la mera cuestión de que una estructura soporte la carga a que deba ser sometida sin colapsar.

Podríamos así remontarnos a los mismos orígenes de la ciencia para empezar a hablar del fenómeno de la resistencia de los materiales y de las construcciones. Sin embargo, siendo más concisos y menos pretenciosos, podríamos formalmente comenzar a hablar del análisis de la capacidad portante de los cuerpos con las aportaciones de Leonardo da Vinci en el siglo XV [Cervera, 1982]. Pero no podemos olvidar a Arquímedes, con su enunciado del concepto de brazo de palanca, cuestión vital para el entendimiento de la mecánica de sólidos, que si bien no dice nada acerca de la capacidad resistente de los cuerpos, sí determina un mecanismo principal en el equilibrio de los sólidos. Pero Leonardo da Vinci es el primero que formalmente se plantea la resistencia de elementos constructivos concretos como pilares, vigas, ménsulas, etc... De hecho, el genial cocinero, se plantea un modo totalmente abstracto y racional de abordar el conocimiento y, en lo que nos interesa, si bien no lo cite expresamente, viene a distinguir entre el equilibrio de los cuerpos y su capacidad resistente, ligándolos. Ahora nos parece algo evidente, pero sin la visión de Leonardo no lo sería. Es pena que no dejara sus escritos editados de manera sistemática.

¹⁰ Esto me recuerda una de las aseveraciones de Descartes en su *“Discurso del método”*. La evidencia de que la sangre fluye en el cuerpo humano no es suficiente para aseverar que tal cosa sucede. Ha de haber una razón previa que explique por qué ha de fluir la sangre en el ser humano.

El que se suele considerar padre de la mecánica, e incluso de la ciencia moderna, es Galileo Galilei (1564-1642), cuyos conocimientos de mecánica sí quedaron expuestos en su famoso “*Discorsi e dimostrazioni intorno à due nuove scienze...*”, editado por primera vez en 1638 en Leiden, precisamente por el editor neerlandés Elzevir, fundador de la hoy archiconocida Elsevier. De hecho, S.P. Timoshenko, en su “*History of strength of materials*”, cita como comienzo la obra de Galileo, dejando a da Vinci sólo para la introducción. De lo que aquí nos ocupa, Galileo establece relaciones entre los pesos que una determinada pieza puede soportar, para una posición determinada de los pesos, indicando que dicha posición acaba por producir el colapso de la misma pieza sin alteración del propio peso. En el fondo, está ya distinguiendo algo inherente a lo que nos ocupa: la capacidad de la sección de la pieza es una propiedad inherente a ella y que, en función de cómo sea el sistema en que se inserte y dónde dentro del sistema, la sección será capaz o no de resistir los esfuerzos. Además, traza reglas racionales que tienen que ver con el tamaño, el peso propio, las proporciones entre sólidos equirresistentes, las leyes no lineales que permiten garantizar la resistencia por cambio de tamaño. En definitiva, sorprende la cantidad enorme de conceptos nuevos y originales que hoy seguimos empleando, si bien ya más sistematizados y mejor definidos.

Es de señalar que, hasta el tiempo de Galileo, la referencia matemática de base para desarrollar las demostraciones mecánicas era la geometría. Pero en paralelo -algo antes, en realidad-, está apareciendo el álgebra (*al-jabr*, en árabe, que significa casar, acompasar, cuadrar) en Italia, gracias a la actualización que Cardano (1501-1576) hace de los conocimientos, ya antiquísimos, del padre del álgebra, Al-Kwaritmi -de cuya latinización proviene *algoritmo*-, a través de las ediciones que existen de la escuela de traductores de Toledo. Y entonces empieza a cambiar algo: empieza a existir un lenguaje matemático propio y preciso que es capaz de asumir la abstracción del lenguaje común sin necesidad de referencia a la geometría. Así, el propio concepto de incógnita empieza a manejarse y suele ser bautizada como x , por simple referencia sonora a *shay*, que significa cosa, en árabe. Digamos que el álgebra es el arte de casar las cosas entre sí.

Pero no sólo el álgebra, pues ya entrados en el siglo XVII, Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1716) desarrollan el cálculo diferencial e integral, cuyas bases permiten desarrollos matemáticos hasta entonces conceptualmente imposibles. A Newton debemos además la teoría de la gravitación universal, enunciada en sus “*Principia...*” y el concepto ya clarificado de fuerza, en relación a la masa, mediante la aceleración. A Leibniz la creación del sistema binario, sin el cual la computación actual no existiría.

Tales herramientas permitirán posteriores trabajos fundamentales de la mecánica de sólidos, como son las curvas elásticas y los problemas asociados a ellas, enunciados por los hermanos Bernoulli (1654-1705, Jakob) y por Euler (1707-1783). Pero entre medias de Galileo y los anteriores aparece Hooke (1635-1703), que enuncia su archisabida ley de los materiales según la cual la tensión que desarrolla un material y su deformación unitaria conservan una razón constante, que es precisamente el módulo de deformación longitudinal o módulo de Young (si bien éste es posterior). Esto conlleva que un cuerpo realizado con un material que responda a la ley de Hooke mantendrá una proporción constante entre las fuerzas que se le apliquen y los desplazamientos que sufra. Por tanto, por primera vez se enuncia que los materiales tienen una ley constitutiva interna que liga las tensiones que sufre con sus deformaciones unitarias y que tal cosa se transmite a la escala de un sistema. La ley de Hooke es conceptualmente un avance incuestionable.

En el clima intelectual que se crea en los albores de la Ilustración, cobran gran fuerza las academias nacionales de ciencias, siendo las más señeras las de París, Berlín y San Petersburgo. Esto permite que la ciencia cuente con el apoyo del poder y con el prestigio y la fortuna de sus actores. Tal cosa supone un despegue definitivo del conocimiento, elevado a categoría de política de Estado. Es entonces cuando Euler, siguiendo la estela de los Bernoulli, elabora sus teorías de las curvas elásticas, la de la estabilidad mecánica de las barras comprimidas y otras aportaciones que han sido básicas en el análisis de estructuras.

De las consecuencias de aquellas academias nacionales de ciencias, aparece, ya en pleno siglo XVIII, J.L. Lagrange (1736-1813), que primero estudia en la Academia Militar de Turín¹¹, luego va a la

¹¹ Por entonces Turín, y el Piamonte, formaban parte del Ducado de Saboya, unido con Cerdeña, conformando el Reino de Cerdeña. La capital correspondía a Turín, junto con Annecy y Chambéry. De hecho, Lagrange se llamaba Gian Luigi Lagrangia,

academia nacional de Berlín y, finalmente, a la de París. Coetáneo suyo, Coulomb (1736-1806), que ingresa en el cuerpo de Arquitectos Militares -luego convertido en cuerpo de Ingenieros-, encargándose del mantenimiento y nuevas construcciones militares de la Martinica.

Lagrange, aparte de dedicar muchos estudios al álgebra, en la mecánica es quien define los conceptos de fuerzas generalizadas ligado a las coordenadas generalizadas, fundamento del planteamiento del equilibrio mediante trabajos virtuales. Es asimismo el creador del cuerpo básico de las ecuaciones que rigen la mecánica. Pero es de destacar que, al manejar ya el concepto de trabajo, se liga en una sola magnitud los dos campos que convergen en el problema mecánico: la estática y la cinemática. Esto no es baladí, pues es el fondo -creo- del desarrollo posterior de la mecánica de sólidos tal como la formulamos y la manejamos actualmente.

Coulomb hace una aportación -entre otras muchas- ajena a todo lo anterior hasta el momento, en términos de lo que el estado de rotura se refiere. Al tener que ocuparse de la estabilidad de los taludes, del afianzamiento de excavaciones y de otros comportamientos del terreno, que presentan colapsos con

Ilustración 2: Esquema de Coulomb para el estudio de empujes del terreno contra un muro de contención

bastante facilidad, se pregunta acerca de este problema y crea lo que podría ser el primer enunciado claro del estado de rotura de un medio. Su análisis del comportamiento de los terrenos para determinar el equilibrio de las contenciones, suponen abordar el comportamiento de un sistema en su situación última. Lo mismo que su determinación del carácter friccional del colapso local de los terrenos granulares supone la primera propuesta del comportamiento último en rotura de un material.

Ilustración 3: Representación del equilibrio límite -rotura- entre tensiones normales y tangenciales de los materiales granulares según el criterio de Coulomb.

Fuente: Nielsen, 1984.

En el fondo, la creación de los politécnicos, tras la ilustración, y de los cuerpos de ingenieros, suponen que empiece a tenerse en cuenta de manera concreta algo que era sólo una preocupación disipada: la seguridad de las construcciones. Y esto, en gran medida, porque a la elaboración teórica de modelos basados en la observación de la realidad física, se añade la sistemática de realizar pruebas y ensayos controlados, de los que derivar datos empíricos ciertos con los que crear y acotar los modelos

pero siendo la lengua oficial, y de uso muy común en todo el Piamonte, el francés, quedó para la posteridad su versión francesa. Incluso hoy en día, el francés es de uso común en toda la vertiente italiana de los Alpes occidentales.

teóricos a aplicar. Esta disposición de cosas supone el verdadero impulso al desarrollo de la mecánica de los sólidos, que generará en un siglo mucho más conocimiento y desarrollo, tanto técnico como intelectual, que lo acumulado hasta entonces.

Volviendo al campo que estrictamente nos ocupa, en el siglo XVIII, por las necesidades obvias del desarrollo industrial precoz y por la conformación inicial de los estados modernos, que requerían de un control más ágil y sencillo del territorio, la construcción de puentes y carreteras se convierte en asunto fundamental. Hasta el momento, los puentes de fábrica eran remedos o repeticiones de los que los romanos habían erigido, sin que un fundamento serio de su comportamiento hubiera emergido desde entonces. Es más, afirma Timoshenko [1953-1983] que tras la caída del imperio romano y durante toda la Edad Media y el Renacimiento, la construcción de puentes fue absolutamente minoritaria comparada con la de la época romana y la posterior a 1750. Así, el primer análisis de Lahire (1640-1718) sobre el equilibrio de los arcos de piedra se centra en el problema de su colapso por causa del deslizamiento entre dovelas, lo que sería un primer enunciado incipiente de la plasticidad no asociada. Pero es Coulomb de nuevo el que advierte de la necesidad de no sólo incluir el deslizamiento como causa del colapso, sino la

*Ilustración 4: Deformada de colapso de un arco según Coulomb.
Fuente: Timoshenko, 1953.*

rotación entre partes que puede suceder para llegar al colapso de un arco. Es decir, un primer enunciado del la rotura según la plasticidad asociada¹². Resulta claro ver que el dibujo que hace entonces Coulomb acerca del modo de colapso de los arcos es idéntico a lo que hoy seguimos manejando. Implícitamente, está señalando que la rotura tiene que ver con el campo de desplazamientos, no sólo con las condiciones de resistencia del material. Es decir, que hay una ligazón entre el equilibrio planteado y la conformación de un campo de desplazamientos que verifique el colapso.

El interés por el comportamiento de arcos y bóvedas continua y tiene una ocasión de oro de mostrarse como teoría aplicable a la práctica cuando en 1742 Poleni (1683-1761) es llamado por el Papa Benedicto XIV para inspeccionar y peritar la cúpula de la Basílica de San Pedro, fuertemente agrietada. En su memoria de estudio aparece la superposición sobre la sección de la cúpula del trazado de la resultante de las fuerzas que actúan a lo largo de tal sección, lo que es exactamente la técnica empleada actualmente en el análisis límite de estructuras abovedadas por métodos gráficos. Si la resultante está dentro de la superficie capaz de la estructura, ésta es segura. En el fondo, sin saberlo, está aplicando los teoremas de rotura -aún inexistentes- a las estructuras con materiales pétreos, incapaces de actuar en tracción.

En el mundo napoleónico y postnapoleónico, instituidos los politécnicos, ya establecida en gran medida la secuela del pensamiento ilustrado es cuando finalmente la mecánica de sólidos se asienta y tiene un progreso definitivo. Aparecen muchas aportaciones fundamentales que hoy día siguen en pie y que son la base de los planteamientos actuales. Y con la técnica del acero fundido empieza a vislumbrarse la posibilidad de sustituir la fábrica masiva de los puentes por estructuras más livianas en hierro, si bien esto aún tardaría en verificarse, pues varios de los primeros intentos acabaron en colapsos estrepitosos. La mera traslación de los tipos en fábrica se reveló una trampa cuando se acudió sin más al hierro. Sólo estudios posteriores durante el siglo XIX permitirían el cambio de material de manera segura y eficaz.

¹² La plasticidad asociada es la que cumple las condiciones de normalidad de Von Mises, mientras la no asociada es la que es ajena a lo anterior. En términos sencillos, la plasticidad asociada tiene que ver con la rotación relativa entre superficies internas del sistema, mientras que la no asociada se relaciona con los problemas de deslizamiento entre superficies internas de la estructura.

Ilustración 5: Composición del antifunicular de cargas sobre la sección de la cúpula de la Basílica de San Pedro, por Poleni, 1748.

Por entonces, Navier (1785-1836) desarrolla su actividad, creando grandes aportaciones. La que más nos interesa en nuestro caso es que generaliza las ecuaciones diferenciales de la flexión de barras y constata claramente la existencia de los sistemas estáticamente indeterminados o hiperestáticos, para los cuales el planteamiento del equilibrio no es bastante para poderlos analizar. Sobre todo, a él se debe la hipótesis que lleva su nombre que indica que las secciones planas de una barra normales a la directriz de la misma, siguen conservando la planitud -tras traslación y/o giro- una vez la barra se deforma. Y de ahí se deriva la relación de la curvatura de una barra con respecto al momento flector que la solicita, y que seguimos empleando, que coincide con el planteamiento anterior de Bernoulli. En términos de rotura, Navier determina que ésta se produce para alargamientos o acortamientos del material excesivos para una determinada resistencia de rotura, por lo que entra de plano en la consideración de la seguridad, planteada como la comparación de los esfuerzos de un elemento comparados con los de resistencia ya determinados. Y en la combinación de la resistencia del material con las deformaciones que deba sufrir, plantea de lleno -sin mencionarlo- que existe un trabajo último máximo interno que puede desarrollar el material. Sólo algo más tarde esto se haría explícito.

También Cauchy (1789-1857), que crea todo un cuerpo de doctrina acabado sobre elasticidad, donde ya los conceptos de fuerza externa e interna se deslindan y donde escribe de manera generalizada para cualquier cuerpo las ecuaciones de equilibrio en tres dimensiones, conjugando además éstas con las de compatibilidad de deformaciones internas del mismo. De ello deriva el cálculo de los desplazamientos del cuerpo en tres dimensiones. También define con precisión el concepto de tensión, que extrae de la homóloga presión empleada en hidráulica. También Poisson (1791-1840) llega a formular las tres ecuaciones de equilibrio del punto en un sólido en régimen elástico, sujetas a tres condiciones de contorno y demuestra que estas tres ecuaciones de equilibrio no son sólo necesarias, sino suficientes para determinar el estado de tensiones del cuerpo. Añade a ello la relación entre deformaciones unitarias en ejes ortogonales -conocida como el coeficiente que lleva su nombre- y que acaba por definir la compatibilidad y la constitución interna de los materiales, hasta ahora sólo definida por el módulo de elasticidad. Si bien en nada se centran en la rotura de los materiales o de los sistemas estructurales, no hay

duda de que sin su aportación, los posteriores desarrollos no habrían sido posibles.

Siguiendo esta estela aparecen los estudios de Lamé, Clapeyron, Béchancourt y otros, de los que me interesa reseñar Clapeyron (1799-1864) y Saint-Venant (1797-1886). El primero ya establece que el equilibrio se da cuando el trabajo de las fuerzas exteriores sea igual al acumulado por la energía de deformación interna del sistema. Es decir, ya claramente se establece el equilibrio bajo la formulación energética, como estacionariedad del balance energético del sistema. Es decir, ya plantea el comportamiento mecánico en los términos en que actualmente manejamos la mecánica de sólidos. Aportaciones posteriores acabarán por afirmar esta tendencia.

Por su parte, Saint-Venant, añade una concepción relevante en los sistemas mecánicos. Hasta el momento, en todos los modelos empleados se suponía una cierta continuidad en el dominio de aplicación del problema elástico o resistente. Las discontinuidades no son consideradas y tal cosa no parece muy desatinada, porque suponen una excepción que raramente se da. Sin embargo, en el estudio de la flexión de barras, Saint-Venant enuncia que, si en un vínculo el sistema de fuerzas es sustituido por otro equivalente, el estado de deformaciones y de tensiones de la barra no se altera en nada a una cierta distancia del vínculo, distancia que ha de tenerse en cuenta dependiendo del modo en que el medio tienda a disipar las concentraciones locales de fuerzas externas. Simplificadamente, la distorsión producida en un medio por una discontinuidad en las fuerzas exteriores ocupa una región del medio de dimensiones similares a la que la discontinuidad tenga. Luego se indicará por qué se considera esta aportación de la mayor importancia, aparte de la que evidentemente tiene en sí como parte del conocimiento de la mecánica de los sólidos, abriendo el campo a, por ejemplo, la mecánica de la fractura, el análisis de las discontinuidades mecánicas o geométricas en un medio, etc... Este principio subyace en la definición a priori que se hace en esta tesis de cuál es la región acotada en que se desarrollan las plastificaciones en una barra -rótula- y está en la base de las formulaciones del problema de Green, en que se basa la solución fundamental empleada para el campo de desplazamientos de la propia rótula.

Möhr (1835-1918) realiza varias aportaciones valiosísimas. Aparte de sus teoremas tan útiles para el cálculo de deformaciones de las líneas elásticas y de su construcción del círculo que lleva su nombre -relacionando el sistema de tensiones en direcciones cualesquiera con las canónicas o principales-, en el campo de la rotura establece su ley marcando una envolvente de todas las posibles roturas en distintas distribuciones de tensiones como el equilibrio límite entre tensiones que lleva a la rotura. La envolvente, al definirse la rotura como aquella para la cual la tensión tangencial es la máxima posible, coincide con la enunciada por Coulomb para sus materiales granulares.

Ilustración 6: Criterio -superficie- de rotura de un material según Mohr.
Fuente: Timoshenko, 1953.

Sin embargo, a pesar de que el criterio de rotura de Mohr es conceptualmente acertado, todavía prescinde de cuáles sean las deformaciones asociadas al estado de rotura del material. Es decir, no entra aún en el enunciado según la concepción energética del comportamiento mecánico.

Son en realidad Castigliano (1847-1888) y Menabrea (1799-1864) los que acaban de incorporar las formulaciones de trabajo y energía a la formulación de los problemas de la mecánica de los sólidos. D'Alembert (1717-1783) si bien ya hubiera incorporado un formato “energético” al enunciado del equilibrio mediante el Principio de los Trabajos Virtuales, no está en realidad enunciando el equilibrio en

términos de energía, ya que no se trata de un balance energético real, sino del que se desprendería mediante una alteración diferencial de los desplazamientos -o de las fuerzas- que mantienen un cuerpo en equilibrio. Sin embargo, Castigliano, partiendo del potencial enunciado por Clapeyron como suma del trabajo de las cargas exteriores y de la energía de deformación -interna o potencial- del sistema, deriva que el desplazamiento asociado a una fuerza externa aplicada al sistema es la variación de la energía de deformación respecto de dicha fuerza. Complementariamente, la fuerza asociada a un desplazamiento determinado es la variación de la energía de deformación del sistema respecto de dicho desplazamiento. Aparte de la enorme utilidad que se deriva de los teoremas de Castigliano, es clarísimo cómo de la evaluación del potencial se puede obtener la parte cinemática y la estática del sistema, como gradientes del mismo en función de una u otra cosa. Arriesgando un tanto, el campo de desplazamientos no es más que el gradiente del potencial en función de las fuerzas aplicadas y las fuerzas aplicadas son el gradiente del potencial en función de los desplazamientos. Como consecuencia ineludible, si bien Menabrea no lo enunciara así, su teorema indica que la variación de la energía de deformación respecto de las fuerzas que aparecen en las coacciones del sistema es nula. Es decir, como la coacción supone un desplazamiento nulo, si derivamos la energía de deformación del sistema respecto de la fuerza asociada a la coacción, debe resultar el desplazamiento de la coacción, que es nulo. Por tanto, la variación de la energía de deformación respecto de la fuerza asociada a la coacción ha de ser nula.

Las dos anteriores citas no aportan nada en sí en el campo de la rotura -aparentemente- pero son necesarias porque acaban por conformar el comportamiento de un sistema mecánico como derivante del potencial de energía del mismo, maniobra formal potentísima sin la cual hoy no podríamos desarrollar casi nada de lo que hacemos y de lo que se ha hecho en los últimos cien años. La aportación definitiva que permitiría la aplicación del balance energético y los teoremas derivados, sería la del método de Rayleigh-Ritz. Rayleigh (1842-1919) dedicó gran parte de su esfuerzo a resolver problemas dinámicos y de propagación de ondas, lo mismo que Ritz (1878-1909), que empleó su tiempo en labores parecidas. En realidad, quien elabora el método es Ritz, pero Rayleigh reclama haberlo empleado antes en sus escritos, por lo que se conoce de ambos. Formalmente es en realidad Ritz quien debiera ser considerado el padre, pues Rayleigh no formula completamente el método, mientras que Ritz sí. En definitiva, el método consiste en sustituir la variable fundamental del problema expresado en términos variacionales por una función “cualquiera” que se atenga a las condiciones de contorno y permita la variación suficiente de la variable dentro del dominio en que se plantea el problema. Aplicada esta función al balance energético del sistema, se obtiene una solución numérica aproximada del problema. Ritz lo aplicó inicialmente a los problemas de determinación de los modos propios de oscilación de un cuerpo -determinación de los autovalores de un sistema homogéneo- por aproximación, método aún hoy empleado en problemas dinámicos con bastante éxito. Si se aplica el método de Rayleigh-Ritz de manera generalizada, subdividiendo el dominio del problema y conectando cada subdominio con los adyacentes, se obtiene una solución numérica del problema más precisa, en principio. Dicho un tanto burdamente, la sistemática de este procedimiento es la base del método de los elementos finitos, que acabaría por compilar Zienkiewicz [1982] en los años 60 del siglo XX. Si mediante la formulación del problema de Green se encuentra una solución fundamental en el dominio, el problema queda reducido a discretizar el contorno del dominio, lo que es la base del método de los elementos de contorno, completada para problemas mecánicos por Brebbia, Telles y Wrobel [1984] a principio de los años 80 del pasado siglo.

Pero quien realmente acaba por concretar las bases del comportamiento en rotura de un material o de un sistema es Von Mises (1883-1953), con su teorema del flujo, que mejoraba el modelo de Tresca para los materiales elastoplásticos. Enunciado de manera un tanto tosca, la diferencia entre Tresca y Von Mises es que el primero se rige por el criterio de rotura de Mohr (máxima tensión tangencial) y el segundo el de la máxima energía interna posible del sistema. Es decir, Von Mises mantiene una concepción energética de la rotura mientras que Tresca apela sólo a la parte estática, sin observar la cinemática. Esto incide de nuevo en lo mismo que el modelo de rotura de arcos de Coulomb: la rotura para una carga última no es sólo una cuestión resistente, sino que está asociada a un campo de desplazamientos concreto, que es el que lleva a la rotura. La rotura se produce para una convergencia de un equilibrio determinado con unos desplazamientos determinados. A escala interna, para unas sollicitaciones determinadas con unas deformaciones determinadas. Y a escala del material, para unas tensiones determinadas asociadas a unas deformaciones unitarias determinadas.

Ilustración 7: Representación gráfica del criterio de rotura de Von Mises. Fuente: Nielsen, 1984

Aparte de Von Mises, existen las aportaciones de Drucker, Prager, Gzovdev,... que rondan una concepción similar, pero que no consiguen demostrar la existencia de los teoremas del límite inferior y superior, ni el de la unicidad de la carga de rotura, cosa que mediante la formulación de Von Mises sí es posible. Y lo es porque observa simultáneamente la componente estática como la cinemática, formulando el problema desde el punto de vista energético, que es el modo más potente y completo de formularlo.

Ilustración 8: Portada de "Calcul plastique des constructions", de Massonet y Save, 1961.

Pero realmente se puede decir que arranca el diseño en rotura o en carga última gracias a las publicaciones de Johansen [1948], con sus estudio del comportamiento en carga última de losas de hormigón armado. Y otra aportación fundamental es la de Massonet y Save [1961], generalizando los procedimientos del diseño en rotura de las construcciones, si bien ellos están sistemáticamente refiriendo el problema al acero laminado, a materiales dúctiles. Igual que en el problema de Johansen, la capacidad última de las placas está ligada a la capacidad dúctil del acero de armar, no al hormigón.

También la aportación de Heyman y Baker [1969] supone una generalización de los conceptos de rotura a sistemas estructurales conocidos, básicamente pórticos y arcos. Por tanto, el inicio de la consideración en rotura de los sistemas estructurales es una disciplina relativamente reciente, a pesar de lo cual ha ganado un peso considerable en el campo del diseño estructural, aunque no con demasiada coherencia.

Con el desarrollo del hormigón armado como técnica habitual de construcción, aparece desde el principio el problema de la capacidad dúctil o plástica del propio hormigón cuando las estructuras han de trabajar a flexión, lo que supone casi la totalidad de la construcción convencional desde los años 30 del siglo pasado hasta ahora. El acero es suficientemente dúctil como para casar bien en la consideración de rotura -las deformaciones plásticas pueden considerarse infinitas a efectos prácticos-, pero el hormigón no. Sin embargo, aun cuando los primeros modelos de rótula de hormigón armado sean ya de los años 60 [Coccia, 2007], la cuestión de la ductilidad del hormigón armado queda aún reducida a un segundo plano. El hormigón armado, tal como lo conocemos hoy, se empieza a emplear en 1850 y Coignet construye el

primer edificio residencial con él. También se emplea en puentes y otras construcciones, pero su análisis y dimensionado se ciñe aún al modelo clásico ligado a la elasticidad lineal, no al dimensionado en rotura de las secciones y los elementos, tal como hacemos hoy. Sin embargo, los ensayos de Mörsch y Ritter a principios del siglo XX, sobre piezas flectadas, empiezan a advertir las particularidades del hormigón armado en cuanto a su fisuración, que provoca la separación del continuo en zonas comprimidas separadas entre sí por fisuras que deben coserse con armaduras en tracción, tensión para la que el hormigón es incompetente. Su modelo de zonas comprimidas inclinadas cosidas por barras en tracción sigue vigente hoy en día y es precursor de los modelos de bielas y tirantes -solución de rotura- que se usan habitualmente. Sólo Schlaich [1987], en su magnífico y clarísimo estudio para un sistema coherente de análisis en rotura del hormigón armado, llega mucho después a generalizar esta concepción del comportamiento del hormigón armado mediante modelos de zonas comprimidas -bielas- y zonas traccionadas -tirantes- ligados en equilibrio.

Sin embargo, sólo en los años 40 del siglo pasado se comienza a considerar la constitución interna del hormigón y a emplear modelos de carga última, ya que hasta entonces se había operado con el hormigón con tensiones admisibles como si tuviera una constitución interna de tipo lineal. De los ensayos realizados en EEUU durante la Segunda Guerra Mundial se deriva la ecuación constitutiva del hormigón con un tramo parabólico y otro de valor constante, que es la que conocemos hoy como modelo parábola-rectángulo, y con su equivalencia en un bloque rectangular de tensión última reducida.

Ilustración 9: Modelo de comportamiento del hormigón armado según Whitney (1942). Fuente: Engineers Outlook, 2010.

Esto permite que el comportamiento de las secciones de hormigón armado pase de ser considerado, durante los años 50, con las bases del análisis elástico a las del de rotura o estado último, con la aplicación de los correspondientes coeficientes parciales de seguridad. Así se asienta la teoría de dominios de deformación de las secciones y el cálculo y dimensionado práctico de secciones de hormigón armado que se pueden encontrar en los manuales de Leonhardt o Jiménez Montoya, por citar los más conocidos en nuestro entorno, aparecidos en los años 60.

Pero a la vez que el acero y el hormigón armado se convierten en los materiales protagonistas de la construcción, pasada la posguerra española, la construcción estructural en fábrica casi desaparece, y también cualquier estudio teórico más o menos actualizado acerca de su comportamiento mecánico.

En cualquier caso, la cuestión de la ductilidad de un sistema queda desde el principio fuera de la investigación. En el fondo no es una insensatez, porque las estructuras de hormigón que se construyen son bastante masivas y de poca esbeltez, con cuantías de acero realmente bajas. Esto supone que la masa de hormigón a disposición de las secciones es alta y, además, que las deformaciones van a ser bajas. Por tanto, la capacidad de las secciones para deformarse es grande y encima la demanda de tales deformaciones es baja. Ocuparse de la ductilidad puede ser un mero ejercicio académico o de diletantismo. Igual sucede para el cálculo de deformaciones: son estructuras poco esbeltas y no cabe preguntarse a efectos prácticos por sus deformaciones. La propia práctica sanciona lo anterior, porque no se detectan problemas por una u otra causas. Pero, desde luego, el sistema es incoherente por lo ya enunciado antes en este capítulo: la posible identidad entre lo analizado para diseñar la estructura y la

respuesta de ésta queda totalmente en duda.

Esto no quita para que, en el campo de la investigación, se comience a estudiar cuál pueda ser el comportamiento de las regiones plastificadas en hormigón armado. En Coccia [2007] aparece una excelente síntesis de los modelos de rótulas plásticas que se han formulado a lo largo de la historia. Los iniciales, de los primeros años 60, parten de una mera integración de las curvaturas en el entorno de la zona plastificada, como suma de las deformaciones máximas del hormigón y del acero respecto del canto de la pieza en una cierta longitud, que es el único parámetro a determinar. Modelos posteriores ya entran en el régimen de fisuración, en la cuantía de armado en tracción y compresión, en la relación entre el canto útil de la pieza y su canto total, en el grado de confinamiento del hormigón, etc... El más claro y temprano es el de Bachmann (1970), donde ya enuncia claramente que los ensayos revelan que la orientación de las fisuras incide en la deformación de la zona plastificada. Si la zona plastificada está sometida a cortante las fisuras se inclinan y aumenta la capacidad de deformación de la zona, mientras que si no es así, la capacidad de deformación se limita más que en el caso anterior. Se añade también el efecto de la adherencia de las armaduras al hormigón, donde también influye en gran medida la presencia de cortante en la rótula, por la presencia de una tensión de adherencia de variación acusada cerca de la sección de apoyo.

$$\Theta = \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{d - c_0} = \frac{1}{d - c_0} \sum_{i=1}^n w_i \quad (4.18)$$

Ilustración 10: Modelo de rótula de Bachmann.
Fuente: Coccia, 2007.

La hipótesis de Bachmann resultó bastante aceptada y posteriores estudios de Langer (1987) y Li (1996) demostraron lo muy acertada que era. Es de notar la similitud que guarda con modelos de bielas y tirantes que se emplearían mucho después, y cómo coincide con la hipótesis de rótula con biela inclinada debida a cortante propuesta por Vázquez Espí [1987].

En otros modelos, como el de Tue (1996), se aborda la capacidad rotacional de la zona plastificada en función de las cuantías de la armadura de tracción y de compresión. Otros modelos posteriores fijan su objetivo en unos u otros parámetros, sin que en realidad se proponga más que una evaluación de cuál es la capacidad de rotación de una rótula. Coccia [2007] acaba por proponer su propio modelo, que se basa en la integración de curvaturas en la región plastificada, separando la parte elástica de ellas y la plástica, con una variación lineal del momento flector, obteniendo resultados que compara con ciertos ensayos, que resultan en deformaciones mayores que las que predice su modelo. Hay que señalar que el modelo de Coccia se basa en una viga isostática con una carga puntual centrada, lo que, caso de dar con una formulación satisfactoria se referirá siempre a lo local, a la rótula, pero no a su inserción dentro de un sistema que coaccione la misma.

Y la cuestión de las deformaciones de las regiones plastificadas en flexión – rótulas plásticas- ha quedado siempre enquistada en esa visión: cuánta deformación puede acumular la región plastificada. Tal cosa ha sido traspasada a la normativa, desde los códigos-modelo CEB-FIP, hasta las normativas nacionales -como EHE08 [AA.VV., 2008], la actual en vigor en España- o la internacional, como el Eurocódigo 2 [AA.VV., 2008], EC2, en adelante.

Aparte de la cuestión normativa, en España, las investigaciones principales en ductilidad y carga última de hormigón armado -no tanto a escala de rótula, sino de piezas- se deben a Marí [1987],

Roca et al. [1988], que, lógicamente revertieron en las condiciones normativas de EHE08 y EC2. Incipiente es el estudio de Manterola [1967], que también aborda la cuestión en un sistema de barras, si bien sencillo.

Pero, realmente, sólo las aportaciones de Aroca [1988], Vázquez Espí [1987] y Rodríguez Santiago [1988], abordan la cuestión importante de considerar el análisis y el diseño de las estructuras de hormigón armado como un cuerpo coherente que desde un principio se atenga a las condiciones reales de comportamiento en carga última de los sistemas. Puede parecer extraño, pero por más búsquedas que he realizado buscando modelos similares, nada hay. Incluso Levi y Debernardi [1991], que realizan en el Politecnico di Torino durante mucho tiempo ensayos y modelos de carga última en piezas, no abordan jamás el problema desde el diseño de la estructura, sino como comprobación, y casi siempre local. Ciertamente, esto no es casual y creo que se deba más bien a que el modelo incoherente que empleamos resulta al final capaz e inseguro, aparte de por una cierta pérdida de visión del fundamento de los problemas, asunto que sucede infinitud de veces en nuestra sociedad, como bien refleja Hernández Capa [2013], si bien no estoy seguro de que tal sea la causa. Lo que parece indudable es que el enorme desarrollo que existe de propuestas y modelos para carga última -ya sean locales o globales- casi nunca abordan el problema concreto y, desde inicio de los años 90, parece haberse disipado el interés en comprobaciones secundarias, modelos debidos a efectos locales, digamos una hilatura fina que pudiera dar a entender que el núcleo del problema está resuelto.

Fig. 8. Truss model of a beam with cantilever: (a) model; (b) distribution of inner forces; (c) magnitude of inner forces derived from equilibrium of a beam element.

Ilustración 11: Modelo de bielas y tirantes de una viga de hormigón armado, según Schlaich (1987).

Lo que ha supuesto una avance más de orden práctico que conceptual es la inclusión de los modelos locales de bielas y tirantes para el análisis en carga última de estructuras de hormigón armado, a partir del estudio de Schlaich [1987]. De hecho, toda la normativa actual recoge el modelo, y lo refiere a las regiones con discontinuidades como nudos entre barras o con concentración de cargas. A partir de unas fuerzas externas en equilibrio -para las cargas ponderadas, cargas últimas-, se puede encontrar un mecanismo interno de resistencia, al que se añaden limitaciones de tensiones en acero u hormigón,

precisamente por asegurar la deformabilidad compatible del mecanismo empleado. Dado que se plantea como equilibrio, dichos mecanismos son un límite inferior a la carga última que pueden soportar, cuestión implícita en su planteamiento que no advierten expresamente las normas. Digamos que esos mecanismos nos aseguran que pueden resistir “al menos” esa carga, no “como mucho”. Pero es mejor así, porque los códigos y normas son para un proceder seguro y no para meterse en aventuras de dudoso destino.

No puede obviarse la cuestión de las deformaciones en hormigón armado, y los fenómenos ligados a ellas, como es la fisuración, que incide en la durabilidad de las estructuras. Hasta hace no más de unos veinte años, el cumplimiento de los límites de servicio de las estructuras quedaba casi siempre como una comprobación secundaria que era necesario hacer. En hormigón armado, el cálculo de deformaciones era cosa más o menos ignota o nebulosa, como ya se ha dicho. Pero la aparición de las *frankensteinianas* vigas planas -deberíamos decir vigas esbeltas- en los años 70, y de uso aún hoy importante, supuso darse cuenta de que las deformaciones diferidas de las piezas flectadas de hormigón armado eran algo a controlar muy severamente. La cantidad de daños que se han derivado de estructuras excesivamente deformadas de hormigón de aquella época es un rosario de cuentas infinitas. La aportación de Branson, enunciada en 1971 e incorporada más tarde por la ACI a su código modelo, y el CEB (en el EC2), y finalmente por la instrucción española. Estudios sistemáticos de su aplicación se encuentran en Ortiz y del Río [1989, 1991, 1994], que sirvieron de base para lo enunciado en la normativa española posterior, junto con las aportaciones de Calavera y otros. En esta tesis se siguen los preceptos de estos estudios y los normativos de EHE08 y EC2, pero no como análisis aparte, sino que en la formulación no lineal del problema se tienen en cuenta las ecuaciones constitutivas de las secciones de hormigón armado según estos modelos. Para la determinación de las deformaciones, dada la enorme cantidad de variables que intervienen en las deformaciones del hormigón, se ha realizado un supuesto acotado y sencillo que permita establecer un límite claro, pero no más.

Pero a la par que parecía en hormigón armado decaer la implantación de un modelo coherente de diseño en carga última, ha reverdecido desde los años 90 la aplicación de ese mismo análisis para estructuras de fábrica, básicamente gracias al impulso original de Heyman [1995, 1999], aplicado a la mecánica de las construcciones antiguas. En este planteamiento se plantean siempre equilibrios bajo la base de que, no pudiendo las fábricas trabajar en tracción, la resultante de los esfuerzos en cualquier superficie interna de la estructura debe estar dentro del sólido capaz de la misma. Es común que, además, esto se lleve a cabo por el método más simple y visual, que es mediante la estática gráfica, ya en gran desuso desde que los medios de computación son potentes y de uso común. Huerta [2004] acaba por compilar todo un sistema de aplicación de estos métodos a las estructuras antiguas, a la par que, a través del instituto Juan de Herrera, ha traducido y difundido la obra de Heyman, y a través de la Sociedad de Historia de la Construcción ha dado gran vuelo a estos métodos de análisis a escala internacional en el mundo hispanoamericano.

Pero digamos que esta *escuela*, por así decir, aplica un tanto ligeramente el análisis límite o en rotura, pues nunca entra en la cuestión intrincada de cuáles son las deformaciones ligadas a los equilibrios planteados y se *conforma* con haber encontrado una situación de equilibrio satisfactoria que, por extensión de lo enunciado en los teoremas de rotura, se conviene que es segura. Digamos que esto es cierto en la medida en que las construcciones antiguas son sobreabundantes en material y muy raramente los niveles de tensiones se acercan a los de rotura del material, como difícilmente la masividad de las mismas permite que los desplazamientos y las deformaciones internas tengan relevancia. Conceptualmente, tiene severas limitaciones este procedimiento, máxime cuando se trata de tener que cumplir no sólo con un estado con cargas ponderadas suficientemente seguro, sino con las condiciones de servicio [Fdez.-Cuartero et al., 2014].

Y no solo eso, ya que Quintas [2010] muestra la invalidez del procedimiento de suponer grandes excentricidades de las resultantes en la comprobación en carga última de arcos de fábrica, tornando el método estático -seguro- en inseguro. Básicamente, se centra en el error muy extendido de confundir la línea de empujes con la línea de presiones. Es decir, medir la excentricidad de la resultante de una sección como la relación entre el momento flector y el empuje del arco y -lo correcta- la relación del mismo momento con el esfuerzo normal a la propia sección.

Ilustración 12: Análisis en rotura de un arco de fábrica, según Heyman, 1999.

Pero en este desarrollo de la aplicación de los criterios de rotura sí existe otra visión más compleja y, a mi juicio, más acertada, que ha desarrollado modelos en carga última de mayor validez. Así, los trabajos de Cervera [2010], Gálvez et al. [2004], Molins et al. [1998], Roca et al. [1988, 2013, 2014] abordan la cuestión del comportamiento en rotura de estructuras de fábrica de manera más estricta. En algunos casos, como el de Cervera, se ciñe a la determinación de configuraciones de colapso de arcos directamente en rotura, pero no simplemente encontrando una configuración de equilibrio, sino determinando la pareja estático-cinemática que realmente define el estado último. En los otros casos, se recurre al estudio del comportamiento de la fábricas ateniéndose a sus ecuaciones constitutivas hasta rotura, considerando tanto la plastificación por compresión del material como su fisuración por tracción excesiva. La ventaja de estos análisis frente a los simplificados antes enunciados es que la enjundia completa del problema se puede aplicar a cualquier condición, sin las limitaciones antes enunciadas para la obtención sin más de un sistema equilibrado, que puede servir para peritaje de estructuras sobreabundantes, pero difícilmente puede darnos patrones seguros para otros casos.

En definitiva, el estado actual de cosas es que desde los enunciados de Von Mises y de Johansen, no hay grandes avances conceptuales y siquiera se ha llegado en hormigón armado a un modelo completo y coherente de diseño y de cálculo en carga última o rotura. Tampoco se ha llevado a cabo esto en las estructuras de fábrica, con menor recorrido e incidencia que las de hormigón. En esta tesis se pretende, nada menos, que empezar a sentar las bases para tal cosa.

1.5.- Propuesta de esta tesis

Al final de todo lo explicado hasta aquí, adelantándonos al propio desarrollo y a sus conclusiones, conviene saber qué se desprende de fondo del trabajo realizado, con alguna precisión más de lo que se desprende del resumen. En esto es fundamental el nombre que define esta tarea: tesis. Según el DRAE:

tesis.

(Del lat. *thesis*, y este del gr. *θέσις*).

1. f. *Conclusión, proposición que se mantiene con razonamientos.*
2. f. *Opinión de alguien sobre algo.*
3. f. *Disertación escrita que presenta a la universidad el aspirante al título de doctor en una facultad.*
4. f. *Mús. Golpe en el movimiento de la mano con que se marca alternativamente el compás.*

La cuarta acepción, por más que se refiera a un juego de cartas bastante practicado en horas lectivas por los estudiantes universitarios en los respectivos bares, no hace al caso de lo que se pretende explicar. La tercera acepción es evidentemente la definición de lo que es este trabajo. Pero importa que esta acepción deriva evidentemente de las dos anteriores, que son las de fondo que interesan aquí. Es decir, este trabajo deber contener una propuesta sobre algo, que sea conclusión razonada sobre el asunto o que contenga una opinión acerca de ese mismo algo, lo que no excluye el razonamiento previo necesario para mantenerla.

Tomada entonces la definición anterior, este trabajo contiene una tesis de fondo fundamental y que se razona según un modelo teórico previo que explica el problema y que se desarrolla posteriormente en el estudio de una casuística acotada, revelando la efectiva aparición en los casos concretos del postulado teórico previo, y que se ha empleado como referencia para derivar una propuesta concreta para el procedimiento del diseño en carga última de estructuras de hormigón armado y fábrica masiva.

En concreto, en la parte teórica se encontrarán varias aseveraciones demostradas¹³:

- Que la carga de rotura predicha mediante los teoremas de rotura o de carga última coincide con la carga última alcanzada en un desarrollo no lineal que considere el recorrido por el cual el sistema llega a dicha carga, revelando además un campo de desplazamientos y de deformaciones determinado. Y que es precisamente la inclusión de la parte del sistema que se conserva en estado previo a la plastificación -en estado elástico- la que condiciona las deformaciones plásticas que sean necesarias para verificar el estado de rotura previsto.
- Que en todo sistema con constitución interna elasto-plástica local determinada, existe un estado de distribución de las solicitaciones últimas de las regiones críticas que permiten que el sistema llegue a su estado último sin aparición de deformaciones plásticas, haciendo indiferente la capacidad dúctil que la constitución interna de las distintas regiones sean capaces de proveer al sistema.
- Que dicho estado anterior puede actuar como representante canónico de todos los sistemas que con idéntica constitución interna local existan -pero variando la distribución de las solicitaciones en el estado último del sistema- y que las deformaciones plásticas de cada uno de ellos derivan exclusivamente de cuánto se aparte la distribución de las solicitaciones últimas de las que presenta el estado canónico.
- Que mediante la comparación de un diseño de rotura elegido con su representante canónico, se pueden predecir las consecuencias en términos de carga última y de comportamiento en servicio que este diseño tendrá.

De lo anterior, estudiando previamente el comportamiento local que distintas leyes constitutivas suponen en el proceso de carga, se compara este comportamiento local -el posible- con el que, insertado lo local en un sistema global, se demanda por parte de todo el sistema -lo necesario- para verificar distintas condiciones: las de ductilidad y las de servicio. Así, se propone:

- Las bases de una estrategia completa de decisión de la constitución de las piezas de modo

¹³ Para los términos elástico, elasto-plástico, rotura, último, etc... ver lo explicado en el punto 1.2 de este capítulo.

que se asegure, desde el propio diseño referido a la capacidad última, que tanto dichas condiciones como las de servicio se satisfacen.

- Tales bases de diseño pueden ser siempre referidas a las soluciones canónicas, que obran como fieles de balanza de cada caso
- En caso de no satisfacerse las condiciones, qué correcciones, si son posibles, han de introducirse en el diseño inicial para poder cumplir las condiciones impuestas.

Quizá suene algo presuntuoso, pero se sientan unas bases para un diseño en carga última seguro, racional, consciente y compacto para estructuras de barras o lineales de hormigón armado y de fábrica, que es precisamente algo que aún no existe, y que es el fundamento del problema que se planteaba al principio. Es decir, de lo que esta tesis concluye, creo, se puede derivar un modelo para un diseño coherente en carga última.

También se deriva de lo anterior que muchas de las prácticas hasta ahora empleadas en ciertos medios para la determinación de las soluciones de rotura de sistemas de barras, nada tienen de seguras y, más aún, para sistemas como los arcos de fábrica, el convencional análisis límite es de utilidad nula si se quiere realmente acudir a analizar su capacidad en rotura.

Capítulo 2.- Planteamiento teórico

[...] *Las befas levantan sus flámulas, vuelan las piedras
y llamean en el aire los brazos.
Cóleras y soberbias desatan las lenguas.
Pasa el soplo encendido de un verbo popular y judaico.*

-¡Mengua de hombres!

*El sacristán se vuelve con saludo de iglesia, y bizcando los ojos
sobre el misal abierto, reza en latín la blanca sentencia:*

Qui sine peccato est vestrum, primus in illan lapidem mittat.

*El sacristán entrega a la desnuda la vela apagada y de la mano
la conduce a través del atrio, sobre las losas sepulcrales...
¡Milagro del latín! [...]*

*[...]-¡Apartémonos de esta danza! [...]
[...]-¡Sellar la boca para los civiles, y aguantar mancuerna!*

*Los oros del poniente flotan sobre la quintana. Mari-Gaila,
armoniosa y desnuda, pisando descalza sobre las piedras
sepulcrales, percibe el ritmo de la vida bajo un velo de
lágrimas. Al penetrar en la sombra del pórtico, la enorme
cabeza del idiota, coronada de camelias, se le aparece como
una cabeza de ángel. Conducida de la mano del marido, la
mujer adúltera se acoge al asilo de la iglesia, circundada del
áureo y religioso prestigio, que en aquel mundo milagrero, de
almas rudas, intuye el latín ignoto de las divinas palabras.
[...]*

Ramón María del Valle-Inclán
“Divinas palabras”

Índice

2.1.- Sistemas rígido-plásticos	2.1
2.1.1.- El criterio de flujo de Von Misses	2.1
2.1.1.1.- Precisión para superficies planas de rotura	2.6
2.1.2.- El teorema del límite inferior	2.7
2.1.3.- El teorema del límite superior	2.8
2.1.4.- Convergencia de los límites inferior y superior	2.9
2.2.- Sistemas elasto-plásticos	2.10
2.2.1.- Potencial del sistema. Determinación estática y cinemática	2.10
2.2.1.1.- Unicidad de las soluciones	2.15
2.2.2.- Concomitancia y simultaneidad: ductilidad demandada y posible	2.17
2.2.3.- Factores de diseño, elásticos y canónicos. Redistribución	2.22
2.3.- Conclusiones y aplicación	2.25

2.- PLANTEAMIENTO TEÓRICO

Abordaremos en esta parte el planteamiento teórico del problema expuesto para después aplicarlo en concreto a los casos que nos ocupan de hormigón armado y de fábrica. Básicamente, tal como se ha dicho, la cuestión aquí discutida aparece cuando, en el planteamiento habitual de las soluciones de carga última, se prescinde del recorrido que el sistema ha de realizar hasta llegar a dicha carga, por lo que se obvian las deformaciones que hayan de verificarse en dicho recorrido. Plantearemos inicialmente el problema de manera general a partir de la contabilidad de la energía de deformación del sistema para enunciar, en primer lugar, los teoremas ya conocidos de carga última para, después, introducir los matices necesarios que implican considerar el recorrido de la puesta en carga. En realidad se trata de emplear el mismo planteamiento, primero según el criterio clásico del comportamiento rígido-plástico del comportamiento de los materiales y luego según el comportamiento elasto-plástico de los mismos.

En el primer caso, se supone que los materiales no desarrollan deformación alguna hasta llegar las tensiones a su valor último y que aquélla es tan grande como se precise, en realidad infinita. Tal cosa casa bien como modelo para materiales como el acero laminado, pues la deformación de rotura es enorme respecto de la elástica -resultando el tramo elástico despreciable en comparación- y también enorme en valores absolutos, por lo que suponer su comportamiento como rígido-plástico es del todo coherente. En el segundo, sin embargo, consideraremos que el material se comporta elásticamente desde la tensión nula hasta la última, a partir de la cual las deformaciones plásticas se desarrollan. Digamos que este caso también se aplicaría a materiales que suponemos rígido-plásticos, pero es una precisión que no nos llevaría a nada. Sin embargo, para materiales como el hormigón -o el propio hormigón armado- donde las deformaciones últimas no son enormes frente a las elásticas y, de hecho, son deformaciones relativamente pequeñas en valor absoluto, nos encontraremos que la consideración del tramo elástico es del todo relevante.

Desde un punto de vista energético, la única diferencia entre el primer y segundo casos es la consideración del trabajo interno de la estructura en todo el dominio que se mantiene en régimen elástico, que en el primer caso se desprecia. A efectos de las deformaciones, además, supone que la indeterminación de éstas que aparece en el primer caso se convierte en determinación gracias a la aparición del término de trabajo elástico interno. De ahí que podamos entonces valorar cuáles son las deformaciones necesarias para verificar un estado de rotura y compararlas con las posibles de cada parte de la estructura, que vienen dadas por el diseño que de ella se haya realizado. Es decir, se puede abordar el problema de la ductilidad del sistema, si es suficiente o no para verificar un estado de rotura determinado.

2.1.- Sistemas rígido-plásticos

2.1.1- El criterio de flujo de Von Misses

Siguiendo el orden expresado por Nielsen (1984), tomemos un sistema mecánico que ocupa un dominio Ω con contorno Γ , sometido a unas acciones exteriores q , resultando en un campo de desplazamientos u , tal como aparece en la ilustración 1. Internamente, aparecerán esfuerzos o solicitaciones S y deformaciones e . Procediendo para un material rígido-plástico con una ley de comportamiento según la figura 2, nos encontraremos que, llegados al estado de rotura, en las n regiones en que se ha producido el agotamiento de la capacidad del material se habrán producido las solicitaciones¹ últimas S_{ui} , que pueden desarrollar deformaciones últimas de rotura e_{ui} , correspondientes a las zonas del dominio Ω_R . Esto habrá sucedido para una carga máxima o última q_u . Evidentemente, dichas solicitaciones últimas habrán de satisfacer la condición de equilibrio del sistema en su estado último, lo que podemos expresar como una función :

$$f(S_{u1}, S_{u2}, \dots, S_{un}) = 0; \quad [2.1]$$

¹ Tal como se indica solicitaciones podríamos indicar tensiones, si nos refiriéramos, por ejemplo, a un volumen en estado triaxial. En realidad debe tomarse el concepto de solicitación, como el de deformación, de manera generalizada, entendidos como el par dual que produce trabajo interno en el sistema.

Ilustración 1: Modelo de sistema mecánico.

Si suponemos que el medio tiene un comportamiento -ecuación constitutiva- rígido-plástico² (v. ilustración 2), hasta llegar a las sollicitaciones últimas S_{ui} el sistema no habrá sufrido deformación alguna, y sólo existirán las deformaciones plásticas -en realidad las últimas, al deber maximizar el trabajo interno, como se verá- asociadas a estas sollicitaciones, que notaremos como e_{ui} .

Ilustración 2: Ecuación constitutiva rígido-plástica.

² No necesariamente con igual capacidad resistente en todas las regiones.

Esto se traslada al comportamiento del cuerpo, que no habrá entonces sufrido desplazamiento alguno u hasta llegar a la rotura. Como las deformaciones últimas -plásticas- son tan grandes como se precise, lo mismo sucederá con el desplazamiento u , pero quedando ambos -como se verá- de valor indeterminado.

Ilustración 3: Relación entre carga y desplazamientos para comportamiento rígido-plástico.

Por tanto, sólo las regiones plastificadas, realizarán trabajo y dicho trabajo W unitario acumulado internamente por el sistema, será:

$$W = \sum_{i=1}^n S_{ui} e_{ui} = S_u e_u; \quad [2.2]$$

donde³:

$$S_u = (S_{u1}, S_{u2}, \dots, S_{un}); \quad [2.3]$$

y

$$e_u = (e_{u1}, e_{u2}, \dots, e_{un}); \quad [2.4]$$

Nótese que $e_{ui} \leq e_{ri}$, es decir que las deformaciones plásticas en el estado último del sistema son menores o iguales a las de rotura del material, por más que teóricamente en este caso lo estemos considerando de deformación última infinita. Establece el teorema de flujo de Von Mises que la rotura se verificará cuando se alcance el máximo posible de trabajo que el sistema pueda acumular. Esto es, que para un determinado vector de deformaciones e_u , el vector de solicitaciones S_u ha de ser tal que el trabajo W alcance su máximo. Por tanto, supuesto e_u determinado, deberemos resolver el problema de maximización:

³ Se prescinde de ahora en adelante, para simplificación de las ecuaciones, de precisar si los vectores y matrices son traspuestos o no, pues el significado físico de un vector y de su traspuesto son idénticos y en nada cambia el significado de lo escrito.

$$dW = dS_u e_u = \sum_{i=1}^n dS_{ui} e_{ui} = 0; \quad [2.5]$$

sujeto a la condición expresada en [2.1]

$$f(S_u) = 0; \quad [2.6]$$

Se debe tener en cuenta que la condición [2.1] supone que las soluciones $f(S_u) > 0$ son imposibles -las solicitaciones deberían ser mayores que las máximas posibles- y que $f(S_u) < 0$ son soluciones que no han agotado la capacidad última de la estructura, ya que exigiría que al menos una de las n regiones plastificadas no hubiera llegado a su solicitación última, lo que no es un estado de rotura. Es decir, $f(S_u)$ representa la superficie de rotura del sistema y cualquier vector de solicitaciones que cumpla tal condición es una solución de rotura a efectos de equilibrio.

Ilustración 4: Superficie de rotura: representación de las ecuaciones de equilibrio en carga última.

Por tanto, si suponemos que el sistema de solicitaciones que lleva a la rotura el sistema para un e_u determinado no es S_u sino $S_u + dS_u$, éste deberá también satisfacer la condición [2.1], siendo evidentemente dS_u una variación de posición del vector de solicitaciones contenida en la superficie de rotura $f(S_u) = 0$. Por tanto:

$$f(S_u + dS_u) = 0; \quad [2.7]$$

Lo que supone que tanto para S_u como para $S_u + dS_u$ su extremo ha de recaer en la superficie de rotura $f=0$. Por ello, suponiendo que f es una función continua, convexa y derivable, sin puntos singulares:

$$\sum_1^n \frac{\partial f}{\partial S_{ui}} dS_{ui} = \frac{\partial f}{\partial S_{u1}} dS_{u1} + \frac{\partial f}{\partial S_{u2}} dS_{u2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial S_{un}} dS_{un} = 0; \quad [2.8]$$

lo que, para que [2.5] se satisfaga, implica que tal cosa sucede si y sólo si:

$$e_{ui} = \gamma \frac{\partial f}{\partial S_{ui}}; \quad [2.9]$$

lo que implica que el vector e_u es normal a la superficie f , tal como aparece representado en la ilustración anterior. De ello deriva entonces que exista el factor γ , puesto que si el producto escalar del vector tangente a la superficie y el normal es evidentemente nulo, cualquier vector normal y sus proporcionales siguen cumpliendo la condiciones simultáneas de [2.5] y [2.8]. A este criterio se lo conoce como criterio de normalidad, al resultar el vector de deformaciones plásticas normal a la superficie de rotura. En principio se supone siempre que $\gamma \geq 0$, por lo que la normalidad es además en sentido centrífugo respecto de la superficie de rotura.

Resulta precisamente de la condición de normalidad que las deformaciones plásticas queden indeterminadas en su valor y sólo se puedan determinar como una relación entre los distintos valores de e_{ui} . Por tanto, e_u nos define un modo de colapso cuyos valores absolutos son desconocidos, pero no así la relación entre ellos. De todo lo anterior, la obtención de e_u supone que la solución al problema reside en un punto de la superficie de rotura, precisamente aquel para el que, conocido S_u , el vector e_u resulta normal a la superficie y el trabajo interno del sistema es el máximo posible. Es decir, no podemos definir el agotamiento del sistema sólo por unas sollicitaciones que lo lleven a ello o sólo por unas deformaciones que lo provoquen, sino que es la combinación de ambas cosas lo que determina el colapso del sistema. Sin embargo, hasta el momento, nada de lo indicado supone que la solución sea única. Es decir, que nada de lo anterior impide que pudiéramos encontrar otro vector $S_u + \Delta S_u$ que satisficiera iguales condiciones para un mismo vector e_u .

Ilustración 5: Variación del vector de sollicitaciones en equilibrio

En tal caso obtendríamos un nuevo trabajo W' :

$$W' = (S_u + \Delta S_u) e_u = S_u e_u + \Delta S_u e_u = W + \Delta W ; \quad [2.10]$$

Si la superficie de rotura resulta convexa, sucederá entonces que $\Delta W < 0$, por lo que:

$$W > W' ; \quad [2.11]$$

Entonces, si la superficie de rotura es efectivamente convexa, cualquier incremento ΔS_u que se aplique proporcionará un trabajo interno inferior a W , lo que implica que W es el valor máximo absoluto del trabajo interno que puede desarrollar el sistema y que el punto de la superficie de rotura alcanzado nos da una solución única de solicitaciones y deformaciones para tal estado. Por ello, entonces la rotura se habrá alcanzado para el S_u inicial estimado con las deformaciones e_u asociadas, sin que ninguna otra combinación pueda ser solución de rotura, ni a la par ni con solicitaciones superiores a S_u .

2.1.1.1.- Precisión para superficies planas de rotura.

Existe para lo anterior una excepción o caso particular que se da si llegamos a la convexidad límite, es decir, a la planitud de la superficie de rotura.

Ilustración 6: Superficie plana de rotura

En tal caso sucederá que:

$$\Delta S_u \parallel f'(S_u) = 0 ; \rightarrow \Delta S_u \perp e_u ; \rightarrow \Delta W = 0 ; \quad [2.12]$$

Y por tanto:

$$W' = W ; \quad [2.13]$$

Ilustración 7: Invariabilidad del trabajo interno e indeterminación estática para superficies planas.

Como consecuencia, cualquier punto de la superficie plana es un punto en el que se verifica un máximo del trabajo interno del sistema, lo que deja el juego de solicitaciones de rotura S_u indeterminado y sólo ceñido a $f(S_u)=0$, ya que al ser e_u constante, se verificará:

$$\forall S_u \in f(S_u)=0, dW = d(S_u e_u) = 0; \quad [2.14]$$

Es decir, que si la superficie de rotura resulta plana, **a la indeterminación cinemática del vector e_u se une la indeterminación estática del vector S_u y cualquier punto de la superficie de rotura indica una solución de rotura asociada a un vector S_u determinado, pero con e_u idéntico para todas las soluciones.** En realidad, la indeterminación de e_u se ciñe sólo a sus valores absolutos, porque la relación entre los distintos e_{ui} es fija para todas las soluciones, al ser el vector normal a la superficie constante e igual para todas ellas. O sea, que **a una deformada de colapso determinada le corresponden infinitas soluciones estáticas, todas ellas igualmente válidas.** O bien, que **para infinitas soluciones de equilibrio en el estado de rotura, todas ellas tienen el mismo vector de deformaciones de manera absolutamente indistinta.** Esto, como veremos, es de importancia decisiva en el problema concreto de las estructuras de barras, pues es el **fundamento de que exista la posibilidad de redistribución de esfuerzos o la libre elección del estado de rotura a priori.**

2.1.2.- El teorema del límite inferior

Según lo enunciado en el apartado anterior, el criterio de flujo de Von Mises impone que sólo la solución de rotura proporciona un trabajo interno máximo entre todas las soluciones estáticamente determinadas, es decir entre todas las soluciones que cumplan $f(S_u)=0$. Supongamos que tenemos dicha solución de rotura expresada por los vectores S_u y sus correspondientes deformaciones plásticas

e_u . Expresando el equilibrio en forma del Principio de los Trabajos Virtuales, llamando q_u a las cargas exteriores aplicadas al sistema, en realidad la carga última o de colapso, se obtiene:

$$\int_{\Omega} q_u u dV = \int_{\Omega} S_u e_u d\Omega; \quad [2.15]$$

Supongamos que tomamos ahora otra solución estáticamente determinada S_u' , que equilibra también las cargas $q' = q_u$ y que cumple la condición límite $f(S_u) = 0$. Si conservamos el campo de desplazamientos u y de deformaciones e_u , la anterior expresión reazará como:

$$\int_{\Omega} q' u dV = \int_{\Omega} S_u' e_u d\Omega; \quad [2.16]$$

De acuerdo con [2.11] deberá ser que:

$$S_u' e_u < S_u e_u; \quad [2.17]$$

Por tanto, el trabajo de las cargas realizado en el primer caso debe por fuerza ser mayor que el realizado en el segundo caso y, por ello:

$$\int_{\Omega} q' u d\Omega < \int_{\Omega} q_u u d\Omega; \rightarrow q' < q_u; \quad [2.18]$$

lo que contraviene la presunción de que ambos sistemas estáticamente determinados puedan equilibrar una carga igual. Por tanto, para cualquier solución estáticamente determinada se verificará siempre que la carga equilibrada por ésta será siempre estrictamente menor que la equilibrada por la solución de rotura. Intepretado a la inversa, la carga que se equilibra mediante un sistema estáticamente determinado que no corresponda al estado de rotura será siempre menor que la carga que efectivamente produce la rotura, marcando un límite inferior de dicha carga. O bien, para una carga determinada, las solicitaciones obtenidas serán mayores que las que aparecen en la situación de rotura real.

Por tanto, la aplicación de una solución estáticamente determinada arbitraria siempre dará valores seguros, sea en estimación de la carga última para unas solicitaciones últimas prescritas como en las solicitaciones para una carga última determinada.

2.1.3.- El teorema del límite superior

Procediendo como para el caso anterior, establecemos que para la solución de rotura se satisface [2.15]. Supongamos que encontramos un vector de solicitaciones S_u' que equilibra una carga $\lambda q_u (\lambda \geq 1)$. Conservando el campo de deformaciones y de desplazamientos de la solución de rotura, el Principio de los Trabajos Virtuales nos impone entonces que:

$$\int_{\Omega} \lambda q_u u d\Omega = \int_{\Omega} S_u' e_u d\Omega; \quad [2.19]$$

De nuevo, [2.11] impone que:

$$S_u' e_u < S_u e_u; \quad [2.20]$$

lo que implica:

$$\int_{\Omega} \lambda q_u u d\Omega < \int_{\Omega} q_u u d\Omega; \rightarrow \lambda < 1; \quad [2.21]$$

lo que contraviene el postulado de inicio. Es decir, resulta imposible encontrar entonces una solución estáticamente determinada tal que la carga de rotura supere aquella determinada por el criterio de normalidad. Expresado de otro modo, sólo es posible $\lambda \geq 1$ si y sólo si tomamos un campo de desplazamientos compatible u' y, por tanto, de deformaciones plásticas e_u' tales que:

$$u' \neq u; \rightarrow e_u' \neq e_u; \quad [2.22]$$

pues sólo en tal caso se podría verificar:

$$\int_{\Omega} \lambda q_u u' d\Omega < \int_{\Omega} q_u u d\Omega; \quad [2.23]$$

$$S_u' e_u' < S_u e_u; \quad [2.24]$$

Por tanto, si el campo de desplazamientos y de deformaciones plásticas asociado no coincide con el que efectivamente determina la rotura real, en que se satisface la normalidad, la carga última determinada será siempre mayor que la real de rotura, dándonos un límite superior a dicha carga. A la inversa, para una carga determinada, el vector de solicitaciones determinado en tales condiciones será menor que el de la rotura real.

En consecuencia, la aplicación de una solución cinemática compatible arbitraria siempre será insegura, pues nos aportará una carga última superior a la real para un vector de solicitaciones últimas determinado o bien, para una carga determinada, nos aportará un valor del vector de solicitaciones inferior al real de rotura.

2.1.4.- Convergencia de los límites inferior y superior: teorema de unicidad de la carga última

De acuerdo con los dos teoremas antes enunciados podemos entonces decir que existe una solución estáticamente determinada de modo que los valores de solicitaciones de las regiones que han alcanzado su capacidad última están sobre la superficie de rotura o son interiores a ella. Por otro lado, las deformaciones asociadas a dichas solicitaciones se pueden obtener a partir de un campo de deformaciones -deformada de colapso- compatible con los vínculos.

Para el primer caso, la carga asociada es siempre menor o igual que la última de rotura y para el segundo es siempre mayor o igual. Por tanto, cuando se cumplan simultáneamente ambas condiciones, la carga asociada sólo puede ser igual a la carga última. Es decir, el valor de esta carga última es único.

En realidad, no es la carga última la que tiene un valor único, sino que, siendo q un sistema de cargas, lo que es único es el factor de carga λ , expresado como se ha hecho en 1.3, de modo que:

$$q = \lambda \cdot q_1; \rightarrow q_u = \lambda_u \cdot q_1; \quad [2.25]$$

Lo anterior entonces supone que el proceso de carga se incrementa linealmente de modo que todos los términos del sistema de carga q_1 se incrementan en idéntica proporción λ , hasta que se produzca la rotura. Esto ha de ser así, porque, en caso contrario, si cada elemento del sistema de cargas pudiera aumentar arbitrariamente de manera independiente de los demás, estaríamos alterando el sistema de cargas. Por tanto, definido un sistema de carga q_1 se verifica que hay un valor λ_u último para el cual el sistema q_1 se ha incrementado llevando a la rotura el sistema.

Por expresarlo de manera general, si la rotura se produce por el agotamiento de la capacidad de n puntos o subdominios del sistema, el sistema de cargas aplicado será un vector:

$$\lambda_i = \frac{q_i}{q_1}; \rightarrow q = q_1(1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n); \quad [2.26]$$

siendo los factores λ_i constantes que definen el sistema de cargas a escala unitaria, es decir, como una base de referencia del mismo. Así,

$$q_u = \lambda_u \cdot q = \lambda_u \cdot q_1(1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n); \quad [2.27]$$

de modo que cada uno de los términos de carga del sistema es, en el estado de rotura:

$$q_{iu} = q_1 \cdot \lambda_u \cdot \lambda_i;$$

Sin embargo, lo anterior no significa que sólo exista una deformada posible de colapso pero sí ha de significar por fuerza que si existen varias deformadas de colapso posibles para todas ellas se verifique la misma carga de colapso. De igual modo, también puede suceder que haya varias soluciones estáticamente determinadas, pero entonces todas esas soluciones han de revelarse para la misma carga última.

Y si tomamos una rotura local en que no todas las partes del cuerpo queden involucradas en el colapso, sucederá inevitablemente que sólo podremos saber que las solicitaciones de las regiones en estado último pertenecen a la superficie de rotura y que el resto, el de la parte no involucrada en la rotura local, queda indeterminado y puede adquirir cualquier valor interno o perteneciente a la superficie de rotura.

Por tanto, **la unicidad se restringe estrictamente al valor de la carga última** y no a la solución estática o a la deformada de colapso, que pueden ser múltiples.

Un ejemplo claro multiplicidad de soluciones estáticas son los problemas con superficies de rotura planas. En tal caso, existen infinitas soluciones estáticas posibles que dan como lugar una misma deformada de colapso, ya que el vector normal a la superficie de rotura se mantiene constante en cualquier punto del plano; y para todos ellos se revelará la misma carga última, si bien para cada punto el vector de solicitaciones variará.

Ejemplos de multiplicidad de deformadas de colapso, podemos encontrarlos en sistemas simétricos, donde una deformada y su simétrica dan como resultado una misma carga última e idénticas solicitaciones en todos los puntos del sistema.

2.2.- Sistemas elasto-plásticos.

Procederemos ahora del mismo modo anterior, pero considerando que el medio no tiene una ecuación constitutiva rígido-plástica -que es siempre una idealización- sino elasto-plástica.

En esta caso no sucederá entonces que el trabajo interno de cada región sea nulo hasta que no se llegue a la sollicitación última, sino que se corresponderán deformaciones y sollicitaciones para cualquier incremento de carga aplicado al sistema.

2.2.1.- Potencial del sistema. Determinación estática y cinemática.

Tomemos ahora la ley de tensiones frente a deformaciones unitarias o, de manera generalizada, la de sollicitaciones frente a las deformaciones conjugadas, para un sistema que presente tanto un tramo elástico como otro plástico. Consideraremos que las sollicitaciones no crecen a partir de un cierto valor de las deformaciones, punto que convencionalmente viene llamado límite elástico. A partir de éste las deformaciones progresarán sin variación de las sollicitaciones. Este progreso supondrá la acumulación de una energía interna del sistema para cada región o punto del sistema, que se producirá a la par que se

desarrolla un trabajo exterior, producto de la acción de las fuerzas exteriores y de los desplazamientos que sufran éstas al deformarse el sistema. La suma del trabajo interno -la energía de deformación, W - más el externo, U , conformará el potencial completo Π del sistema, sobre el dominio Ω . Así:

$$U = \int_{\Omega} \int_u q \cdot du \cdot d\Omega; \quad [2.28]$$

$$W = \int_{\Omega} \int_e s \cdot de \cdot d\Omega; \quad [2.29]$$

$$\Pi = U + W = \int_{\Omega} \left(\int_u q \cdot du + \int_e s \cdot de \right) d\Omega; \quad [2.30]$$

El equilibrio del sistema se alcanzará cuando, definido q , el sistema sea estacionario, es decir⁴:

$$d\Pi = 0; \quad [2.31]$$

Dejemos a un lado por el momento el equilibrio del sistema y también el trabajo exterior. Ciñéndonos a la energía de deformación W del medio, encontraremos entonces, que por unidad de dominio, su valor será:

$$dW = \int_e s \cdot de; \quad [2.32]$$

con una ley constitutiva de comportamiento elasto-plástico que implica:

$$\begin{aligned} dS &= Dde; \forall e \leq e_e; \\ S &= S_u; \forall e \geq e_e; \end{aligned} \quad [2.33]$$

Ilustración 8: Ley constitutiva elasto-plástica

⁴ Hacer el potencial completo estacional es equivalente a minimizar la energía de deformación, ya que por el principio de conservación del trabajo, aun cuando internamente sólo se acumule en deformación una parte del trabajo externo, éste, será por fuerza igual a la máxima deformación de cada punto por su máxima sollicitación para el estado enunciado. Así, podemos decir que $U = \Psi \cdot W$ y, por tanto, $\Pi = (\Psi + 1)W$.

correspondiendo la primera de las dos ecuaciones anteriores al tramo elástico y la segunda al plástico.

Para distintos puntos de dicha ley constitutiva de una región o punto, obtendremos que dW adquiere los siguientes valores⁵:

$$e < e_e \rightarrow dW = \alpha(e) \cdot s \cdot e; \quad [2.34]$$

$$e = e_e \rightarrow dW = \alpha(e_e) \cdot s_u \cdot e_e; \quad [2.35]$$

$$e_e \leq e_u \leq e_r \rightarrow dW_u = \alpha(e_e) \cdot s_u \cdot e_e + s_u \cdot (e_u - e_e); \quad [2.36]$$

$$e = e_r \rightarrow dW_R = \alpha(e_e) \cdot s_u \cdot e_e + s_u \cdot (e_r - e_e); \quad [2.37]$$

Esto supone que en ningún caso un punto o una región del sistema puede presentar deformaciones mayores que e_r y, por tanto, la energía de deformación que puede acumular es como máximo dW_R . En el caso rígido-plástico no existía en la definición de sus ecuaciones constitutivas límite alguno a las deformaciones plásticas e_u , así como no se desarrollaba trabajo interno dW si $e < e_e$. Por tanto, no había límite a la energía de deformación en punto o región algunos del sistema. Ahora existe un límite local a la energía de deformación de cada región o punto, lo mismo que cualquiera de ellos aporta energía de deformación desde el inicio del proceso de carga, no sólo cuando se alcanza la sollicitación última.

Por supuesto, no tiene por qué ser que todas las regiones del dominio presenten igual ecuación constitutiva y, por tanto, supondremos que para cada región puede variar dicha ley.

Ilustración 9: Leyes constitutivas elasto-plásticas para regiones distintas de un mismo sistema.

⁵ El coeficiente $\alpha(e)$ no es más que la proporción entre el área que queda encerrada bajo la curva para el par de coordenadas (e, s) y el área del rectángulo $e \cdot s$. Análogamente, $\alpha(e_e)$ es la proporción entre el área encerrada bajo la curva para el par de coordenadas (e_e, s_u) y el área del rectángulo $e_e \cdot s_u$. Por ejemplo, si el material en el tramo elástico tuviera comportamiento lineal, sería $\alpha(e) = 1/2$ y $\alpha(e_e) = 1/2$.

Veamos qué sucede entonces en un sistema de constitución elasto-plástica. Para completar el juego de ecuaciones necesarias para el desarrollo, la ligazón entre cada región del sistema y el conjunto se rige por:

$$\begin{aligned} de &= B du ; \\ dq &= H ds ; \end{aligned} \quad [2.38]$$

correspondiendo la primera de las anteriores ecuaciones a la compatibilidad entre deformaciones y desplazamientos y la segunda al equilibrio entre las acciones exteriores y las sollicitaciones internas⁶. Aunque no se demuestra aquí, en realidad ambas relaciones son la misma, de modo que formalmente $H=B$, lo que significa que si se enuncia un equilibrio, se está también enunciando una compatibilidad de deformaciones con los desplazamientos. A la inversa, es lo mismo, pues si tomamos una determinada relación de compatibilidad, de igual manera estamos definiendo el equilibrio⁷. Si aplicamos [2.32] y [2.38] a [2.30], obtenemos:

$$\Pi = \int_{\Omega} \left(\int_0^u q \cdot du + \iint_0^u BDB du^2 \right) d\Omega ; \quad [2.39]$$

El equilibrio se alcanzará cuando el potencial se haga estacionario, es decir, aplicando [2.31]. Suponiendo que hemos discretizado el campo de desplazamientos del sistema con n distintos desplazamientos u_i en puntos determinados, aparecerá un sistema de n ecuaciones a partir de la anterior aplicación, es decir:

$$\frac{d\Pi}{du_i} = 0 ; \rightarrow u_i ; \quad [2.40]$$

cuya solución es precisamente el valor de cada uno de los u_i que rigen el campo de desplazamientos. El sistema es, por tanto, compatible y determinado y tiene solución única. En el proceso de carga, supongamos que hacemos crecer la carga q hasta un valor q_e tal en que en un punto se alcance el límite elástico correspondiente a una región o punto del sistema. Es decir, supongamos que en un primer punto o región se alcanza su máxima sollicitación, S_{ul} , y, por tanto, ese mismo punto ha alcanzado la deformación elástica máxima e_{el} , pero sin rebasarla. Llamando u_e a los desplazamientos asociados a ese estado, y Π_e al potencial del sistema en dicho caso, estaremos, al determinarlos, obteniendo el estado del sistema justo antes de que ocurran deformaciones plásticas. Por tanto, [2.39] y [2.40], serán ahora:

$$\Pi_e = \int_{\Omega} \left(\int_0^{u_e} q_e du + \iint_0^{u_e} BDB du^2 \right) d\Omega ; \quad [2.41]$$

$$\frac{d\Pi_e}{du_{ei}} = 0 ; \rightarrow u_e ; \quad [2.42]$$

⁶ En realidad estas relaciones también se cumplen para un medio rígido-plástico, pero no se han enunciado antes para no añadir ruido, ya que no son formalmente necesarias para el desarrollo expuesto.

⁷ Esto deshace uno de los errores inadvertidos cuando se aplica el análisis en rotura, pues siempre se dice que se deshacen las relaciones de compatibilidad y nos quedamos con el equilibrio. Nada más falso, pues definido un equilibrio es implícito que se ha definido una compatibilidad, por más que lo que suceda sea que deformaciones y desplazamientos han quedado indeterminados, pero no así la relación entre ellos, que es precisamente la compatibilidad.

⁸ Formalmente, en la integral debiera constar q y no q_e , ya que sigue siendo la carga q genérica a integrar desde el inicio hasta que los desplazamientos sean u_e , caso para el que la carga habrá alcanzado el valor q_e . Pero por claridad de la notación se ha colocado a la carga que se integra el subíndice del estado al que llega. Así se ha seguido haciendo en adelante.

dándonos por tanto el equilibrio justo en el momento en que comenzaría la primera de las plastificaciones. En un aumento de carga hasta q_{el} , dado que ahora hay una región que ha agotado su capacidad elástica, el aumento de la energía de deformación respecto a la fase anterior será total y forzosamente por vía plástica en la región en que se haya verificado el agotamiento del tramo elástico. Así, será que:

$$\Pi_{el} = \int_{\Omega} \left(\int_0^{u_{el}} q du + \iint_0^{u_{el}} BDB du^2 \right) d\Omega + \int_{\Omega_R} (SuI[e_{ul} - e_{el}]) d\Omega; \quad [2.43]$$

donde aparece sumando a los términos del régimen elástico en todo el dominio, Ω , la suma de la energía de deformación acumulada por la región plastificada, sujeta al dominio Ω_R . Ahora aparece una nueva variable, que es la deformación plástica de la región plastificada. Pero siguen existiendo los u_i del campo de deformaciones, y, por tanto, [2.40] será ahora:

$$\frac{d\Pi_{el}}{du_{ei}} = 0; \frac{d\Pi_{el}}{de_{ul}} = 0 \rightarrow (u_{ei}, e_{ul}); \quad [2.44]$$

Es decir, la deformación plástica asociada a este equilibrio es determinada, lo mismo que lo son los desplazamientos del cuerpo completo. Este equilibrio se mantendrá hasta que una nueva región o punto del sistema llegue a la plastificación. En un paso intermedio en que se hubieran producido plastificaciones en k ($k < m$) puntos o regiones, para una carga q_{ek} , el potencial y el equilibrio rezarían del modo siguiente:

$$\Pi_{ek} = \int_{\Omega} \left(\int_0^{u_k} q_{ek} du + \iint_0^{u_{ek}} BDB du^2 \right) d\Omega + \sum_{i=1}^k \int_{\Omega_R} S_{ui}[e_{ui} - e_{ei}] d\Omega; \quad [2.45]$$

$$\frac{d\Pi_{ek}}{du_{ei}} = 0; \frac{d\Pi_{ek}}{de_{ui}} = 0 \rightarrow (u_{ei}, e_{ui}); \quad [2.46]$$

siendo de nuevo el sistema determinado. Así, sucesivamente, llegarán a producirse tantas m plastificaciones como sean necesarias para que el sistema llegue a la rotura completa. En tal caso, las anteriores ecuaciones se escribirán para una carga que es la de rotura q_u , es decir:

$$\Pi_u = \int_{\Omega} \left(\int_0^{u_u} q_u du + \iint_0^{u_u} BDB du^2 \right) d\Omega + \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_R} S_{ui}[e_{ui} - e_{ei}] d\Omega; \quad [2.47]$$

$$\frac{d\Pi_u}{du_{ui}} = 0; \frac{d\Pi_u}{de_{ui}} = 0 \rightarrow (u_{ui}, e_{ui}); \quad [2.48]$$

Por tanto, tanto los desplazamientos como las deformaciones plásticas necesarias para llegar a la rotura son determinados y únicos. Esto supone que, al considerar la porción del sistema que queda en régimen elástico, el estado de carga que lleva a la rotura del sistema lo hace por un camino determinado, tanto estática como cinemáticamente. Así, el enunciado de los teoremas de límite inferior y límite superior decaen al considerar la porción del sistema que queda en régimen elástico, que fuerza, por así decir, a que el sistema llegue a una solución única, que debiera ser aquella de rotura que se deriva del enunciado del teorema de flujo de Von Misses.

Gráficamente, si representamos el incremento de carga frente a los desplazamientos, observaremos que el comportamiento elasto-plástico de la constitución del medio se traslada a la escala de todo el dominio, quedando una ley similar que para sollicitaciones y deformaciones. Sucede, por tanto, como sucedía en el caso del medio rígido-plástico, que el sistema global también se ceñía a la ley

constitutiva del medio.

Ilustración 10: Ley de carga frente a desplazamientos de un sistema de constitución elasto-plástica.

2.2.1.1- Unicidad de las soluciones

Para comprobar que el anterior enunciado es cierto, tomemos las condiciones de rotura que se expresaban según el criterio de flujo de Von Misses. El potencial del sistema en estado último es el enunciado en [2.47]. Si se cumple el criterio de flujo de Von Misses el estado de rotura se verifica para unas deformaciones últimas que satisfacen que:

$$e_{ui} = \gamma \frac{df}{dS_{ui}}; \quad [2.49]$$

Sustituyendo en el potencial del estado de rotura:

$$\Pi_u = \int_{\Omega} \left(\int_0^{u_u} q_u du + \iint_0^{u_u} BDB du^2 \right) d\Omega + \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_R} S_{ui} \left(\gamma \frac{df}{dS_{ui}} - e_{ei} \right) d\Omega; \quad [2.50]$$

Puesto que en el instante de producirse la rotura el equilibrio ha de existir, habrá de ser que:

$$d\Pi_u = 0; \quad [2.51]$$

Por tanto, será:

$$d \left[\int_{\Omega} \left(\int_0^{u_u} q_u du + \iint_0^{u_u} BDB du^2 \right) d\Omega \right] + \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_R} \left(dS_{ui} \gamma \frac{df}{dS_{ui}} - dS_{ui} e_{ei} \right) d\Omega = 0; \quad [2.52]$$

Como dS_{ui} también pertenece a $f(S_{ui})=0$, entonces, como se vio en [2.8]⁹, será:

$$\sum_{i=1}^m \int_{\Omega_R} dS_{ui} \gamma \frac{df}{dS_{ui}} = 0; \quad [2.53]$$

Por lo que, tomando la diferencial de potencial de rotura, y separando los términos de trabajo interior y exterior:

$$d \left[\int_{\Omega} \left(\int_0^{u_u} q_u du + \int_0^{u_u} \int_0^{u_u} B dDB du^2 \right) d\Omega \right] = \sum_{i=1}^m \left(\int_{\Omega_R} dS_{ui} e_{ei} d\Omega \right); \quad [2.54]$$

Entonces, puesto que q_u es inalterable -es la carga última que se aplica al sistema-, y los desplazamientos obtenidos también -la deformada de colapso final está fijada-, puesto que no se han considerado variaciones por no linealidad geométrica, habrá de ser por fuerza que B no pueda variar -lo que comportaría también la alteración del equilibrio del sistema-, lo que obliga a que la única posibilidad de variación recaiga sobre las ecuaciones constitutivas D . Es decir:

$$\int_{\Omega - \Omega_R} \left(\int_0^{u_u} q_u du + \int_0^{u_u} \int_0^{u_u} B dDB du^2 \right) d\Omega = \sum_{i=1}^m \left(\int_{\Omega_R} dS_{ui} e_{ei} d\Omega \right); \quad [2.55]$$

Lo anterior implica ineludiblemente que, entonces, para que existan variaciones en las sollicitaciones últimas S_{ui} tal cosa sólo puede producirse mediante la variación de las ecuaciones constitutivas del sistema. Puesto que éstas son dadas, es imposible su variación y, por tanto, no es posible la variación de las sollicitaciones últimas halladas antes para un campo de desplazamientos determinado, que definiría la cinemática de colapso. Como consecuencia ineludible, si se definen las ecuaciones constitutivas del sistema, la solución obtenida en rotura a través del comportamiento elasto-plástico hasta llegar a la rotura coincide con la rotura que preconiza el teorema de flujo de Von Misses. En definitiva, **el proceso de carga considerando el régimen elástico-plástico del sistema, llega a una solución única que coincide con la rotura en carga última de la consideración sólo plástica del sistema.** Esto último siempre me ha parecido evidente y, cuando se realiza un cálculo por etapas de un sistema elasto-plástico, se llega a la misma solución que la de rotura correcta, la que corresponde al criterio de Von Misses. Pero tal cosa ha de demostrarse, pues no basta una casuística, por grande que sea, o una intuición asentada -que traiciona no pocas veces- para afirmar que tal cosa suceda. De este modo queda entonces la seguridad de que uno u otro análisis llegan al mismo estado y que las dos soluciones son una sola. Es decir, por el camino que se compruebe el estado en carga última se está abordando una solución única.

Acudiendo de nuevo a las superficies planas de rotura, vimos que cualquier solución estática perteneciente a la superficie es posible, pues en todos los casos la cinemática de colapso es la misma y, por tanto, cumplirá las condiciones del criterio de flujo de Von Misses. En la anterior ecuación queda claro, entonces, que efectivamente tal cosa sólo será posible alterando las ecuaciones constitutivas del sistema, que es lo que denominamos redistribución, lo que sería simplemente alterar las ecuaciones constitutivas “a voluntad” para adecuar el estado de rotura -cinemáticamente definido- al equilibrio buscado. Aparece aquí un matiz importante. La llamada redistribución no es más que la alteración de las condiciones estáticas respecto de una distribución de sollicitaciones que se supone representante canónica y con deformaciones plásticas. Más adelante veremos que en esto se obvia que tomar el estado elástico con ecuaciones constitutivas constantes -la famosa distribución 2/1 entre momentos flectores negativos y positivos en vigas continuas- como referencia en que no existen deformaciones plásticas es una

⁹ Formalmente, en [2.8] aparecía la misma expresión pero sin la integral en el dominio de las regiones plastificadas Ω_R , pero porque entonces se obviaba la existencia de tal dominio, al ser todo él sin parte elástica, y se asignaba puntualmente la plastificación, no en el dominio de ella. Al considerar la plastificación a una región y no a un punto, aparece la integral sobre ella.

arbitrariedad cuando no se cumple la anterior condición de distribución de las ecuaciones constitutivas, ya que si éstas no son constantes la distribución de esfuerzos en que no exista plastificación es otra distinta a la supuesta y, por tanto, la redistribución así efectuada es una arbitrariedad en que siquiera sabemos si realmente existe la tal redistribución ni si ésta es posible.

2.2.2.- Concomitancia y simultaneidad: ductilidad demandada y posible

Tomemos un estado de carga intermedio entre la carga que agota la capacidad elástica de la primera región plastificada, q_e , y la última, q_u , lo que nos lleva de nuevo a las expresiones [2.45] y [2.46], que son:

$$\Pi_{ek} = \int_{\Omega} \left(\int_0^{u_k} q_{ek} du + \iint_0^{u_k} BDB du^2 \right) d\Omega + \sum_{i=1}^k \int_{\Omega_r} S_{ui} [e_{ui} - e_{ei}] d\Omega; \quad [2.55]$$

$$\frac{d \Pi_{ek}}{d u_{ei}} = 0; \frac{d \Pi_{ek}}{d e_{ui}} = 0 \rightarrow (u_{ei}, e_{ui}); \quad [2.56]$$

La solución del sistema nos indica cuál es el campo de desplazamientos y cuáles son los valores de las deformaciones plásticas de cada región que ya ha agotado su capacidad elástica para cada valor de carga aplicada. En este progreso de aumento de la carga y de aparición e incremento de las plastificaciones llegamos al estado de inicio de la plastificación de las regiones necesarias para verificar el estado de carga última. Es decir, definimos el estado en que la última región m por plastificar para revelar el estado de rotura ha llegado al límite elástico. O sea:

$$\Pi_{e(m-1)} = \int_{\Omega} \left(\int_0^u q_u du + \iint_0^u BDB du^2 \right) d\Omega + \sum_{i=1}^{m-1} \int_{\Omega_r} S_{ui} [e_{ui} - e_{ei}] d\Omega; \quad [2.57]$$

$$\frac{d \Pi_{e(m-1)}}{d u_{ui}} = 0; \frac{d \Pi_{e(m-1)}}{d e_{ui}} = 0 \rightarrow (u_{ui}, e_{ui}); \quad [2.58]$$

quedando el trabajo de la región m que ha agotado su capacidad elástica dentro del término de deformaciones elásticas del potencial. Por tanto, hemos llegado a un estado en que en las m regiones que requieren llegar a la plastificación se revela:

$$e_m = e_{em}; \quad [2.59]$$

$$e_{ki} = e_{ui} \leq e_{ri} \quad \forall k \leq m-1;$$

Esto supone que, entonces, para llegar al estado en que todas las regiones necesarias plastifiquen ha de existir la **concomitancia de deformaciones plásticas** en el proceso de carga, y que dicha concomitancia ha de mantenerse hasta que la última región agote su capacidad elástica y comience el colapso del sistema. Conlleva lo anterior que las deformaciones plásticas desarrolladas por cada región han de llegar a una cierta cantidad que no agote en cada una de ellas la capacidad de acumulación de trabajo interno W_R , es decir, las deformaciones necesarias para el colapso no hayan llegado al valor de rotura.

Es decir:

$$dW_i = S_{ui} [(\alpha(e_{ei}) - 1)e_{ei} + e_{ui}] \leq dW_R = S_{ui} [(\alpha(e_{ei}) - 1)e_{ei} + e_{ri}] \rightarrow e_{ui} \leq e_{ri}; \quad [2.60]$$

Si representamos la evolución de las solicitaciones de cada región que debe plastificar en función de los desplazamientos del sistema -recordando que la compatibilidad B nos permite relacionar las deformaciones con los desplazamientos- la concomitancia que se expresa en la ecuación [2.57] sería como sigue:

Ilustración 11: Concomitancia en las deformaciones plásticas durante el proceso de carga.

Expresemos ahora la relación entre deformación de rotura y la elástica como δ_i , que podemos denominar **factor de ductilidad**, de modo que:

$$e_{ri} = \delta_i e_{ei}; \quad [2.61]$$

quedando [2.60] como:

$$dW_i = S_{ui} [(\alpha(e_{ei}) - 1)e_{ei} + e_{ui}] \leq dW_R = S_{ui} (\alpha(e_{ei}) - 1 + \delta_i)e_{ei} \rightarrow \frac{e_{ui}}{e_{ei}} \leq \delta_i; \quad [2.62]$$

El **factor de ductilidad** es una propiedad que se deriva de las ecuaciones constitutivas D , por lo que, entonces, dicho factor nos mide la capacidad dúctil posible de cada región del sistema, o bien, el incremento de las deformaciones plásticas máximo respecto de las elásticas. Por otro lado, el proceso de carga demanda de ciertas regiones unas deformaciones plásticas que, referidas a la elásticas, nos mide la ductilidad efectiva que el sistema demanda de cada región para poderse verificar su llegada al estado de rotura:

$$\frac{e_{ui}}{e_{ei}} = \delta_{efi}; \quad [2.63]$$

Pero esta **ductilidad demandada** o efectiva no es propiedad de la región plastificada por sí sola, como sucedía para el factor de ductilidad, sino que está ligada a las condiciones de todo el sistema a lo largo de su proceso de carga. Por tanto, si el sistema demanda una cierta ductilidad de cada región que es menor o igual que el factor de ductilidad de la misma, la concomitancia necesaria se producirá. En caso

contrario, si la demanda supera a la capacidad limitada por el factor de ductilidad, el sistema no podrá llegar al estado conjunto de rotura. Es decir:

$$\begin{aligned} \delta_{efi} \leq \delta_i &\rightarrow \text{ductilidad suficiente} \rightarrow \text{existe concomitancia de deformaciones plásticas} \\ \delta_{efi} > \delta_i &\rightarrow \text{ductilidad insuficiente} \rightarrow \text{no hay concomitancia de deformaciones plásticas} \end{aligned} \quad [2.64]$$

Lo anterior debe satisfacerse para todas las regiones que hayan de plastificar, con lo que si todas ellas tienen igual factor de ductilidad -en realidad, iguales ecuaciones constitutivas-, no así tienen que satisfacer igual ductilidad demandada, y la primera región que inicie la plastificación habrá de aportar mayor deformación plástica que las que lo hagan más adelante en el proceso de carga, siendo más susceptible de no poderla satisfacer que las siguientes.

Veamos qué efecto tiene esto en el cómputo del potencial del sistema. Tomando un estado intermedio como el expresado en [2.45] y [2.46], supongamos que en la determinación de sus deformaciones plásticas sucede que la primera región en entrar en régimen plástico agota su capacidad de deformación, es decir, llega al límite de energía de deformación que puede acumular. Entonces, el potencial toma la siguiente expresión, resuelta su estacionalidad y conocidas, por tanto, las deformaciones plásticas:

$$\begin{aligned} \Pi_{ek} = & \int_{\Omega} \left(\int_0^{u_k} q_{ek} du + \iint_0^{u_{ek}} BDB du^2 \right) d\Omega + \sum_{i=2}^k \int_{\Omega_R} S_{ui} [e_{ui} - e_{ei}] d\Omega \\ & + \int_{\Omega_R} S_{ul} (\delta_1 - 1) e_{el} d\Omega; \end{aligned} \quad [2.65]$$

Supongamos que ahora, llegado a su límite de rotura -y de trabajo interno- la primera región, seguimos con el incremento de carga y añadimos a la anterior Δq_{ek} , de modo que podrán aumentar los desplazamientos en una cierta cantidad Δu_{ek} y las deformaciones plásticas aún no agotadas en Δe_{ui} y sujetos a que las sollicitaciones y deformaciones últimas S_{ui} y $e_{ul} = e_{rl}$ no pueden hacerlo :

$$\begin{aligned} \Pi_{ek+\Delta k} = & \int_{\Omega} \left(\int_0^{u_{ek}+\Delta u_{ek}} (q_{ek} + \Delta q_{ek}) du + \iint_0^{u_{ek}+\Delta u_{ek}} BDB du^2 \right) d\Omega \\ & + \sum_{i=2}^k \int_{\Omega_R} S_{ui} [e_{ui} + \Delta e_{ui} - e_{ei}] d\Omega + \int_{\Omega_R} S_{ul} (e_{rl} - e_{el}) d\Omega; \end{aligned} \quad [2.66]$$

Teniendo en cuenta [2.65], obtenemos:

$$\begin{aligned} \Pi_{ek+\Delta k} = & \Pi_{ek} + \int_{\Omega} \left(\int_{u_{ek}}^{u_{ek}+\Delta u_{ek}} q_{ek} du + \int_0^{u_{ek}+\Delta u_{ek}} \Delta q_{ek} du + \iint_{u_{ek}}^{u_{ek}+\Delta u_{ek}} BDB du^2 \right) d\Omega \\ & + \sum_{i=2}^k \int_{\Omega_R} S_{ui} \Delta e_{ui} d\Omega = \Pi_{ek} + \Pi_{\Delta ek}; \end{aligned} \quad [2.67]$$

Este nuevo potencial, tiene una parte ya conocida del estado de desplazamientos y deformaciones (u_{ek}, e_{uk}) que resulta en el valor de Π_{ek} , que es por tanto un valor conocido, lo

mismo que los desplazamientos u_{ek} y las deformaciones últimas anteriores e_{ui} lo son, pues pertenecen al estado anterior, k . Quedan entonces como variables nuevas del potencial, los incrementos de desplazamientos Δu_{ek} y los incrementos de deformación, Δe_{ui} . Por tanto, el potencial $\Pi_{\Delta ek}$ ya no depende del comportamiento de la región 1, y como Π_{ek} , conocidos desplazamientos y deformaciones plásticas asociadas a él, obra como una constante, no influirá en la condición de estacionalidad de la suma de ambos. Quedarán ahora como variables los mismos desplazamientos elásticos y los nuevos valores de deformaciones elásticas menos la región que ha llegado a la rotura, lo que significa que el número de variables se reduce y, como consecuencia, los incrementos de potencial dependerán de una variable menos. Es decir, si aparece en un paso intermedio para una carga $q_{ek} < q_u$ el agotamiento de una región plastificada, el sistema cambia y se convierte en otro en que la región que ha llegado a la rotura no aporta más energía de deformación al sistema. Ahora, todo incremento de trabajo exterior deberá asumirse por parte del sistema que quede en régimen elástico y por las deformaciones plásticas del resto de regiones ya en régimen plástico o por plastificar. Pero esto sólo es posible si el incremento de carga es capaz de no demandar más deformación plástica a la región agotada y conservarla en su deformación de rotura. En caso contrario, si la región agotada efectivamente se rompe, habrá que descontar entonces del cómputo de deformaciones internas la liberada por la región agotada al ceder y liberar la vinculación que supone para el sistema.

Lo anterior no significa forzosamente que el sistema haya colapsado, sino que un colapso local de una región altera el mismo y se convierte en otro sistema distinto. Por tanto, **la carga última a que se pudiera llegar no será nunca la del sistema inicial**, sino la de otro. Si la llegada a la rotura se verificase para un cierto número de regiones de modo que el sistema ya no pudiera seguir acumulando más energía interna, sí se daría el colapso, pero para un sistema transformado que no es el original. En definitiva, para que el sistema no cambie y pueda llegar a su carga última ha de verificarse lo indicado en [2.64] y la concomitancia del tramo plástico de las deformaciones de las regiones involucradas ha de existir aunque sea en su posición límite puntual, cuando coincidiera que la carga última se verifica para el inicio de la plastificación de la última región que entre en tal estado con el agotamiento de la deformación -o rotura- de alguna de las regiones que comenzaron su plastificación para una carga inferior a la carga última. Es decir, si no hay concomitancia de deformaciones plásticas, **la carga última del sistema original no se verifica y se produce la rotura para una carga inferior a la prevista por los teoremas de rotura, precisamente por falta de ductilidad de ese sistema**. Representando lo anterior de modo similar a la ilustración 11, se obtiene lo siguiente:

Ilustración 12: Falta de concomitancia de las deformaciones plásticas. (Con un círculo se señala el punto de inicio de las deformaciones plásticas de cada curva)

Precisemos que la concomitancia siquiera necesita de un cierto margen, pues si esta se da puntualmente, es decir, coincide para un desplazamiento determinado que la energía de deformación máxima de una región se ha agotado a la vez que la última en plastificar empieza a hacerlo, se satisfará igualmente la condición de ductilidad suficiente expresada en [2.64], lo que podríamos denominar **concomitancia límite**. Gráficamente:

Ilustración 13: Condición de concomitancia límite de las deformaciones plásticas. (Con un círculo se señala el punto de inicio de las deformaciones plásticas de cada curva)

Tomemos ahora [2.41] en que el sistema está todo él en régimen elástico y escribámoslo enunciando expresamente la energía de deformación elástica de las regiones que vayan a plastificar, si bien no lo hayan hecho aún:

$$\Pi_e = \int_{\Omega - \Omega_R} \left(\int_0^{u_e} q_e du + \iint_0^{u_e} BDB du^2 \right) d\Omega + \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_R} \alpha(e_i) S_i e_i d\Omega; \quad [2.68]$$

Tomemos ahora el sistema en su estado último, expresado en [2.47], y hagamos la misma operación, teniendo en cuenta que todas las regiones susceptibles de plastificar ya lo han hecho:

$$\Pi_u = \int_{\Omega - \Omega_R} \left(\int_0^{u_u} q_u du + \iint_0^{u_u} BDB du^2 \right) d\Omega + \sum_{i=1}^m \left(\int_{\Omega_R} [\alpha(e_{ei}) S_{ui} e_{ei} + S_{ui} [e_{ui} - e_{ei}]] d\Omega \right); \quad [2.69]$$

Supongamos que el proceso de carga ha sido tal que al llegar al estado de rotura sucede que las deformaciones plásticas son nulas, lo que equivaldría a que todas las regiones involucradas en la plastificación en el estado de rotura agotan su capacidad elástica simultáneamente. En tal caso se verifica:

$$e_{ui} - e_{ei} = 0; \rightarrow \Pi_{u(e_{ei})} = \int_{\Omega - \Omega_R} \left(\int_0^{u_u} q_u du + \iint_0^{u_u} BDB du^2 \right) d\Omega + \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_R} \alpha(e_{ei}) S_{ui} e_{ei} d\Omega; \quad [2.70]$$

Si comparamos [2.68] y [2.70], es evidente que ambos potenciales son el mismo pero en que las deformaciones elásticas son unas cualesquiera intermedias en el primer caso y las del límite elástico en el segundo. De esto se deduce que si el sistema es capaz de llegar a un estado en que todas las regiones a plastificar agoten sus deformaciones elásticas simultáneamente, el sistema llegará al estado último elásticamente y sin demanda de ductilidad en ninguna región, pues no hay deformaciones plásticas. En definitiva, si se llega a la simultaneidad en el agotamiento de las deformaciones elásticas, el sistema llega a la rotura elásticamente y la rotura se verifica sin demanda alguna de ductilidad. Es decir, **la simultaneidad conlleva la elasticidad del sistema hasta la rotura, y la verificación de la carga última asociada con total seguridad, haciendo indiferente la capacidad dúctil del sistema**. Es decir, existe la posibilidad de que el sistema se comporte de manera plenamente dúctil al llegar a las sollicitaciones de rotura, lo que anula el problema de la ductilidad demandada frente a la ductilidad posible, ya que no se demanda nada de esta última. Además, en tal caso, el sistema se comporta de manera elástica hasta la rotura y la aparición de regiones plastificadas en simultánea en todas ellas para una misma carga, que es precisamente la de rotura. Gráficamente, al modo de las gráficas análogas:

Ilustración 14: Simultaneidad en el inicio de las deformaciones plásticas de un sistema.

Acudiendo al anterior concepto de concomitancia de deformaciones plásticas -condición necesaria para poder verificar la rotura-, en el caso del comportamiento plenamente dúctil, ésta queda garantizada siempre, pues nunca puede entonces suceder que la rotura de una región plastificada suceda antes de la llegada al límite elástico de la última de las regiones que lo haga. La simultaneidad supone la plena concomitancia.

2.2.3.- Factores de diseño, constitutivos y canónicos. Redistribución

Todo lo anterior supone que una vez definido el cuerpo de ecuaciones constitutivas del sistema y sus vínculos, el camino que lleva a la rotura es único y determinado. La práctica común de decidir *a priori* cuál es la distribución de esfuerzos que llevan a la rotura será por tanto una mera decisión arbitraria si no es coherente con la capacidad dúctil del sistema, lo que equivale a que haya concomitancia en las deformaciones plásticas de todas las regiones plastificadas. En su límite, la concomitancia se convierte en simultaneidad de agotamiento de las deformaciones elásticas en esas mismas regiones, llegando a un comportamiento plenamente dúctil del sistema, que llegará a la rotura en régimen elástico para plastificar

simultáneamente todas las regiones afectadas. Por tanto, puede existir una distribución de ecuaciones constitutivas del sistema que lleve a la elasticidad del sistema en todo su proceso de carga y que nos libere de la exigencia de ductilidad, lo que sería óptimo para constituciones poco dúctiles.

Tomemos ahora como referencia el valor de una de las solicitaciones últimas -por ejemplo, la de la primera región que llega a la plastificación- y refiramos todas ellas a ésta:

$$S_{ui} = \frac{S_{ul}}{K_i}; \quad [2.71]$$

Por tanto, el potencial del estado de rotura, a partir de [2.69], se expresará ahora como:

$$\Pi_u = \int_{\Omega - \Omega_R} \left(\int_0^{u_u} q_u du + \iint_0^{u_u} BDB du^2 \right) d\Omega + S_{ul} \sum_{i=1}^m \frac{1}{K_i} \int_{\Omega_R} [e_{ui} - e_{ei}(1 - \alpha(e_{ei}))] d\Omega; \quad [2.72]$$

Llamaremos a los K_i **coeficientes de diseño**, pues nos indicarán en la ecuación de la superficie de rotura, $f(S_u) = 0$, en qué medida contribuye cada región plastificada en la satisfacción de la carga última y que podemos decidir al diseñar el sistema. Por ello los denominaremos de diseño. Evidentemente será $K_1 = 1$. Del mismo modo, llamemos S_{ei} a las solicitaciones en las regiones que hayan de plastificar en el momento en que agota el estado elástico la primera región plastificada y enunciaremos unos **coeficientes constitutivos**, K'_i , tales que:

$$S_{ei} = \frac{S_{ul}}{K'_i}; \quad [2.73]$$

siendo evidentemente de nuevo $K'_1 = 1$. La denominación de constitutivos se debe a que, decididos los de diseño, las ecuaciones constitutivas de cada región están unívocamente determinadas, por lo que dependerán de dichas ecuaciones constitutivas, sin poderlos decidir arbitrariamente. Acudiendo a [2.68], en el momento en que aparece el agotamiento de la deformación elástica de la primera región, para una carga q_{e1} , será:

$$\Pi_{e1} = \int_{\Omega - \Omega_R} \left(\int_0^{u_{e1}} q_{e1} du + \iint_0^{u_{e1}} BDB du^2 \right) d\Omega + S_{ul} \sum_{i=1}^m \frac{1}{K'_i} \int_{\Omega_R} \alpha(e_i) e_i d\Omega; \quad [2.74]$$

Igual que hicimos anteriormente, supongamos que las ecuaciones constitutivas son tales que al llegar al estado de rotura no se han desarrollado deformaciones plásticas, es decir, el caso de [2.70], lo que lleva [2.71] a:

$$\Pi_u = \int_{\Omega - \Omega_R} \left(\int_0^{u_u} q_u du + \iint_0^{u_u} BDB du^2 \right) d\Omega + S_{ul} \sum_{i=1}^m \frac{1}{K_i} \int_{\Omega_R} \alpha(e_{ei}) e_{ei} d\Omega; \quad [2.75]$$

Como se explicó en el punto anterior, si al llegar a la rotura no se han desarrollado deformaciones plásticas, el potencial de rotura y el de un estado cualquiera intermedio son el mismo, siendo simplemente el de rotura aquél en que las deformaciones son las del límite elástico. Por tanto, si en [2.74] sustituyéramos e_i por e_{ei} , debería obtenerse el potencial de rotura [2.75]. Realizando tal operación se obtiene:

$$S_{ul} \sum_{i=1}^m \frac{1}{K'_i} \int_{\Omega_R} \alpha(e_{ei}) e_{ei} d\Omega = S_{ul} \sum_{i=1}^m \frac{1}{K_i} \int_{\Omega_R} \alpha(e_{ei}) e_{ei} d\Omega; \rightarrow K_i = K'_i = K_{0i}; \quad [2.76]$$

Por tanto, para una cierta constitución interna del sistema con unos vínculos dados, si las regiones críticas que han de plastificar presentan una capacidad última en proporciones K_{0i} el sistema se mantendrá en régimen elástico y las solicitaciones de las regiones críticas mantendrán una proporción constante hasta llegar a la rotura. Como consecuencia, con esa distribución se asegura la simultaneidad, se puede prescindir de la concomitancia -que es segura, aunque sea puntual- y el comportamiento del sistema en todo su recorrido es plenamente dúctil. Por ello, llamaremos a K_{0i} **coeficientes canónicos**, que en tal caso harán que los coeficientes de diseño y constitutivos coincidan precisamente con los canónicos. Por tanto, si se dan los coeficientes canónicos en el diseño de capacidades últimas, el potencial tomará como expresión para todo el recorrido de carga hasta la rotura:

$$\Pi_{K_0} = \int_{\Omega-\Omega_R} \left(\int_0^u q du + \iint_0^u BDB du^2 \right) d\Omega + S_{ul} \sum_{i=1}^m \frac{1}{K_{0i}} \int_{\Omega_R} \alpha(e_i) e_i d\Omega; \quad [2.77]$$

Supongamos ahora que tomamos la constitución interna del sistema -por tanto los K_{0i} son conocidos-, pero de tal modo que los coeficientes de diseño no sean los canónicos, lo que implica que tampoco los constitutivos han de serlo, pero indiquemos dichos coeficientes como proporción de los mismos. Es decir:

$$S_{ui} = \frac{S_{ul}}{K_i} = \frac{S_{ul}}{\psi_i K_{0i}}; S_{ei} = \frac{S_{ul}}{K'_i} = \frac{S_{ul}}{\psi'_i K_{0i}}; \quad [2.78]$$

En régimen totalmente elástico del sistema, para el momento en que la primera región plastifica, el potencial tomará entonces la expresión:

$$\Pi_{eI} = \int_{\Omega-\Omega_R} \left(\int_0^{u_{eI}} q_{eI} du + \iint_0^{u_{eI}} BDB du^2 \right) d\Omega + S_{ul} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\psi'_i K_{0i}} \int_{\Omega_R} \alpha(e_i) e_i d\Omega; \quad [2.79]$$

y en el estado de rotura:

$$\Pi_u = \int_{\Omega-\Omega_R} \left(\int_0^{u_u} q_u du + \iint_0^{u_u} BDB du^2 \right) d\Omega + S_{ul} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\psi_i K_{0i}} \int_{\Omega_R} [e_{ui} - e_{ei}(1 - \alpha(e_{ei}))] d\Omega; \quad [2.80]$$

o bien, considerando [2.77] en el estado de rotura:

$$\Pi_u = \Pi_{u, K_0} + S_{ul} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\psi_i K_{0i}} \int_{\Omega_R} (e_{ui} - e_{ei}(1 - \psi_i \alpha(e_{ei}))) d\Omega; \quad [2.81]$$

Tanto en caso del régimen elástico del sistema como del de rotura, podemos expresar el potencial en función de la distribución plenamente dúctil y, específicamente, en el caso del potencial de rotura, al ser suma del potencial plenamente dúctil más otro término, sabemos con certeza que las deformaciones plásticas proceden en exclusiva del segundo término del potencial, pues el de distribución canónica no demanda deformaciones plásticas. Por tanto, la distribución de esfuerzos últimos K_0 actúa como representante canónico de todos los posibles coeficientes de diseño o constitutivos del sistema, pudiéndose referir cualquier otra solución de coeficientes de los esfuerzos a la que presenta el representante canónico. Por ello hemos denominado a dichos coeficientes canónicos.

2.3.- Conclusiones y aplicación

Resumiendo lo expuesto en los apartados anteriores, encontramos que la consideración del rango elástico de un sistema supone la determinación tanto de los desplazamientos del mismo como de las deformaciones plásticas sucesivas que aparecen en el proceso que lleva a la carga última. Además, podemos comprobar que este sistema determinado de solución única, lleva a un estado de rotura que es compatible con el criterio de flujo de Von Misses, lo que hace entonces coincidir la carga última preconizada por los teoremas de rotura para un sistema rígido-plástico con la que se verifica para la consideración del sistema como elasto-plástico.

Ahora bien, así como en el modelo rígido-plástico no existen deformaciones -ni desplazamientos- hasta que se llega a la plastificación, en el elasto-plástico sí se desarrollan desde el inicio deformaciones y desplazamientos, lo que obliga a que, dado que una región puede comenzar su plastificación antes que otras, ésta no haya agotado la capacidad plástica antes de que la última de las regiones en plastificar haya agotado su estado elástico, para que se produzca la concomitancia de deformaciones plásticas de todas las regiones y se pueda verificar la cinemática del estado de rotura. En caso contrario, existe falta de ductilidad, porque el sistema completo solicita de una determinada región deformaciones que irían más allá que la de rotura. Si tal cosa sucede, no es seguro que el sistema colapse, pero sí es seguro que cambia y que la carga de rotura que pudiera verificarse es la de otro sistema, no la del original considerado. En términos energéticos, la ductilidad es suficiente si en el cómputo total de la energía de deformación todas las regiones del sistema han de aportar una energía menor o igual a W_R , máxima energía que una región puede acumular. No habrá ductilidad suficiente si para revelarse la rotura alguna región debiera poder aportar más energía acumulada que W_R . Digamos que la diferencia entre la consideración rígido-plástica y la elasto-plástica difieren en que la parte del sistema que permanece en estado elástico coacciona las posibilidades de plastificación de las regiones críticas, y ya no son libres e independientes unas de otras. Además, la incertidumbre que se expresa en los teoremas del límite inferior y del límite superior decae en el momento en que el sistema es determinado, dando como lugar a una única solución, que sigue cumpliendo las condiciones de rotura del criterio de flujo de Von Misses.

En realidad, lo que sucede es que al expresar las ecuaciones constitutivas D , estamos condicionando todo el sistema hasta la rotura y es lo que hace la solución única. De hecho, para una determinada constitución interna D , aparece la posibilidad de que las deformaciones plásticas sean nulas, para una relación entre solicitaciones últimas de las regiones críticas determinada. En ese caso, el sistema conserva totalmente el régimen elástico hasta llegar a la rotura, anulando la demanda de ductilidad y haciendo que el comienzo de la plastificación sea simultáneo en todas esas regiones, lo que supone garantizar la llegada a la rotura del sistema y que todas las regiones críticas, incluso si presentaran rotura frágil, pudieran aportar su máxima capacidad de energía de deformación para llegar a la carga última. Es lo que se ha llamado una distribución de esfuerzos plenamente dúctil, que además conlleva que puede ser considerada como representante canónico de todas las soluciones que tengan el mismo criterio de constitución interna, pues cualquiera otra solución de distribución de solicitaciones en carga última puede expresarse por un potencial que es función del plenamente dúctil. En otras palabras, cuando en jerga convencional hablamos de redistribución, el punto desde el que medir la redistribución es precisamente el que nos indica la distribución plenamente dúctil. Cuando más alejemos el sistema de esta solución más crecerán las demandas de deformaciones plásticas en las regiones críticas, lo que supone un aumento de la ductilidad demandada por el sistema. Si la demanda es suficientemente baja, como para que las deformaciones posibles -ligadas al enunciado de las ecuaciones constitutivas- sean suficientes, el sistema llegará a la rotura predicha. En caso contrario, el sistema no llegará a dicha rotura. Podrá alterarse y convertirse en otro, pero entonces el estado de rotura global no corresponderá al del sistema inicial nunca.

Aparecería un corolario del desarrollo realizado, como conclusión ineludible, que, de cualquier modo, no me atrevería a afirmar sea cierta y la dejaré en categoría de conjetura. Si el estado de rotura se alcanza para una máxima deformación interna posible según el criterio de Von Misses y, por otro lado, recurriendo al balance energético mediante el potencial completo del sistema en régimen elasto-plástico, el equilibrio se alcanza para una mínima energía de deformación -interna- posible -para un máximo trabajo de las cargas-, puesto que en ambos casos hemos probado que nos referimos al mismo estado, la ductilidad será suficiente si la máxima energía de deformación que puede acumular el sistema al llegar a

la rotura es precisamente la mínima necesaria para que se alcance el equilibrio en tal estado. Si la mínima energía necesaria para llegar al equilibrio es mayor que la máxima que puede acumular el sistema, entonces el estado de rotura no se verificará para la carga predicha, sino para una inferior, precisamente aquella para cuyo equilibrio la energía de deformación mínima necesaria iguala a la máxima que el sistema ha podido acumular internamente. Es decir, como parece evidente dentro de todo el discurso realizado, que no es posible valorar la carga última del sistema sin evaluar simultáneamente las deformaciones del mismo, pues no siempre éstas permiten una acumulación de trabajo suficiente para verificar la carga predicha. Y es un problema de comparación de lo local con lo global: basta que una región del sistema haya de proveer un trabajo interno mayor que W_R para que se produzca el fracaso anticipado del sistema. Lo que equivale, dado que las solicitaciones últimas son inamovibles, a que las deformaciones que una región pueda desarrollar vayan más allá que lo que el sistema le demanda.

Sabido todo lo anterior, lo aplicaremos del modo que sigue. En el caso de los elementos de hormigón en flexión, encontraremos para distintas estrategias de armado de las secciones -que son las ecuaciones constitutivas D -, con distintas características de hormigón y de acero -en realidad las de más uso- cuáles sean los factores canónicos que nos aseguran la plena ductilidad del sistema. A partir de ellos, tomaremos distintas soluciones de coeficientes de diseño de solicitaciones en estado último que, comparándolas con las canónicas, nos indicarán la cantidad de deformación plástica necesaria para llegar a la rotura en cada sección crítica. Si dicha deformación es menor que la que la sección puede aportar, la rotura se verificará. En caso contrario, la carga de rotura será la que aparezca con el agotamiento de la deformación plástica de la sección crítica interesada, pues en tal caso no sólo cambia el sistema, sino que llega a la rotura por incapacidad de asumir el resto de la pieza los incrementos de solicitaciones a que se ve sometida. Es decir, la carga última se verá limitada por falta de ductilidad, no por falta de resistencia.

En el caso de las fábricas el procedimiento es similar, pero con el añadido del efecto de la compresión. Formalmente, al poderse abrir fisuras tan amplias como se desee -cosa que en el hormigón no es posible por la armadura de tracción- la ductilidad queda sólo ligada a cuál sea el fondo de tensiones de compresión en las secciones, lo que nos dará la curvatura máxima de rotura. Por tanto, en este caso, la estrategia de dimensionar tendrá que ver con cuál es el fondo de compresión máximo que empleamos. Y con él podremos determinar cuál es el estado plenamente dúctil para cada fondo comprimido determinado y compararlo con otras distribuciones de diseño en estado último, que sean distintas de las canónicas.

En ambos casos, como en cualquiera otra aplicación de este modelo teórico, ha de verse que los coeficientes constitutivos son determinados a partir de los criterios de cuál sea el sistema canónico y el de diseño empleado en la solución última deseada. Es decir, la distribución canónica es determinada y propiedad del sistema para un determinado criterio de D , y la distribución de rotura con coeficientes de diseño distintos a los canónicos es una decisión de diseño arbitraria, que condiciona el las solicitaciones cuando el sistema alcanza su máxima deformación interna en estado elástico.

De forma sintética, si llamamos k al criterio local de diseño de las secciones y K al diseño global:

$$f(S_u)=0 \cup (k, K) \rightarrow D(k) \rightarrow K_0; \text{ si } K=K_0 \rightarrow K'=K_0 \rightarrow q_u \text{ garantizada}$$

$$f(S_u)=0 \cup (k, K) \rightarrow D(k) \rightarrow K_0; \text{ si } K \neq K_0 \rightarrow K' \neq K_0 \rightarrow q_u \text{ no garantizada}$$

En el primer caso es absurdo considerar cuál sea la capacidad dúctil de cada sección, porque no se demanda ductilidad alguna. En el segundo es indispensable, pues debemos asegurarnos de que la ductilidad demandada sea menor que la posible en las regiones críticas.

Así, como factores de diseño de un determinado sistema tendremos k a escala local, que condiciona D , y K , que sería la distribución de k en el dominio, para satisfacer la condición de rotura $f(S_u)=0$. Por tanto, se trata de verificar para cada k , conocido el K_0 correspondiente, qué K son posibles porque la ductilidad sea suficiente y cuáles no son posibles por lo contrario, a partir de K_0 , que nos dará los menores desplazamientos posibles y deformaciones plásticas nulas. Se trata finalmente de eso: saber *a priori* qué diseños de inicio son posibles y cuáles no, y de entre los posibles tener idea cabal de las consecuencias que tendrá en su comportamiento en servicio y en carga última.

Capítulo 3.- Estructuras de hormigón armado

*[...] J'ai fini par ne plus m'ennuyer du tout
à partir de l'instant où j'ai appris à me souvenir.
Je me mettais quelquefois à penser à ma chambre et,
en imagination, je partais d'un coin pour y revenir
en dénombrant mentalement tout ce
qui se trouvait sur mon chemin. Au début, c'était vite fait.
Mais chaque fois que je recommençait, c'était un peu plus long.
[...]*

Albert Camus
“L'étranger”

[...] He acabado por no hastiarme en absoluto a partir del momento en que aprendí a recordar. A veces me ponía a pensar en mi habitación e, imaginariamente, partía de una esquina para volver a ella enumerando mentalmente todo lo que se encontraba en mi camino. Al principio, era rápido. Pero cada vez que volvía a empezar, se hacía un poco más largo. [...]

Índice

3.1.- Entorno de aplicación.....	3.1
3.2.- Modelo general	3.1
3.3.- Armado de secciones: ductilidad y resistencia.....	3.7
3.3.1.- Armado para máxima resistencia: valores límite.....	3.9
3.3.2.- Armado para máxima deformación: valores últimos.....	3.9
3.3.3.- Armado para máxima resistencia y máxima deformación.....	3.12
simultáneas: estrategia dual	
3.3.4.- Estrategia cualquiera para agotamiento del hormigón.....	3.16
3.4.- Modelo de rótula de hormigón armado.....	3.19
3.4.1.- Aplicación del Método de los Elementos de Contorno.....	3.19
3.4.2.- Régimen de fisuración del hormigón	3.20
3.4.3.- Régimen de adherencia del acero corrugado	3.21
3.4.4.- Régimen de plastificación del hormigón.....	3.22
3.4.5.- Régimen de plastificación del acero corrugado	3.23
3.5.- Giros de las rótulas de hormigón armado.....	3.23
3.5.1.- Rótulas sin cortante.....	3.23
3.5.2.- Rótulas con cortante	3.27
3.5.3.- Interacción entre momento flector y cortante.....	3.29
3.6.- Consideraciones de servicio	3.31
3.6.1.- Régimen de fisuración de las secciones de hormigón armado.....	3.31
3.6.2.- Régimen de deformación de las barras de hormigón armado.....	3.31
3.6.3.- Criterios límite para condiciones de servicio.....	3.34
3.7.- Límites de ductilidad y de servicio.....	3.34
3.7.1.- Determinación de los coeficientes canónicos.....	3.34
3.7.1.- Gráficas de resultados de ductilidad para distintas.....	3.38
condiciones de diseño	

3.7.2.- Gráficas de resultados de servicio para distintas.....	3.42
condiciones de diseño	
3.7.3.- Límites conjuntos de ductilidad y servicio.....	3.43
para distintas condiciones de diseño	

3.1.- Entorno de aplicación

Evidentemente no es abordable en un trabajo como éste la generalidad de todas las estructuras de hormigón armado. Básicamente, lo estudiado se refiere a vigas continuas, y el modelo empleado es el de una viga biempotrada de canto constante con la estrategia de disposición de la armadura que se explica en el siguiente punto, y siempre con secciones rectangulares. Además, la casuística de materiales -hormigón y acero- es enorme, por lo que lo aquí expuesto se ciñe a los materiales más comunes en edificación convencional actualmente, con sus coeficientes de ponderación habituales, a saber:

Hormigón	HA25	$f_{ck}=25 \text{ N/mm}^2$	$\gamma_c=1,50$
Acero	B500S	$f_{yk}=500 \text{ N/mm}^2$ $f_u=550 \text{ N/mm}^2$ $\epsilon_u=12 \%$	$\gamma_s=1,15$

siendo f_{ck} la resistencia característica del hormigón, γ_c es el coeficiente de minoración de la resistencia característica del hormigón, f_{yk} el límite elástico del acero, γ_s su coeficiente de minoración para resistencia, f_u la tensión en rotura del mismo, y ϵ_u la deformación asociada a dicha tensión de rotura. el límite elástico del acero. Así, las resistencias de cálculo de los materiales serán:

Hormigón	HA25	$f_{cd}=25/1,50=16,67 \text{ N/mm}^2$
Acero	B500S	$f_{yd}=500/1,15=434,78 \text{ N/mm}^2$

Además, para las cargas se emplean los siguientes coeficientes de ponderación:

Cargas permanentes	$\gamma_G=1,35$
Cargas no permanentes	$\gamma_Q=1,50$

En lo que se expone más adelante, puesto que todos los procedimientos intermedios usados para llegar a los resultados se ciñen a lo habitual y ya recogido en códigos y manuales, se especificará sólo aquello que resulte necesario u original, obviando todo lo ya convenido. Así, todos los cálculos de propiedades mecánicas de las secciones de hormigón (inercias brutas y equivalentes, rigideces, etc...), de los modelos de fisuración o de cálculo de deformaciones se obvian, pues se han abordado con los procedimientos habituales y nada aportan al discurso.

3.2.- Modelo general

El modelo general parte de las premisas indicadas en el modelo teórico. Es decir, para una viga cualquiera se trata de encontrar cuál es la distribución de esfuerzos -momentos flectores, en este caso- que permite llegar a verificar la carga de rotura sin que se hayan producido deformaciones plásticas. Y esto ha de hacerse para distintas estrategias locales de armado de las secciones, y para distintas esbelteces de las vigas, entendida la esbeltez como la relación entre la luz de la misma y el canto útil, que se definen más adelante.

Tal como se plantea en la introducción, plantearemos una solución arbitraria de equilibrio de la viga en su estado de rotura, lo que nos proporcionará las ecuaciones constitutivas de cada región, al dimensionar las secciones para que puedan resistir dichas solicitaciones en estado último. Es decir, definimos D para cada sección de la viga. Definido esto, en un proceso de carga incremental, mediante un modelo no lineal de análisis -ejecutado en 15 pasos de carga y cada paso resuelto con el método de Newton-Raphson modificado- se determinan las deformaciones, los desplazamientos y las solicitaciones asociados a cada paso de carga, hasta llegar a la última, si es que tal cosa sucede. Aplicado esto mismo

para distintos esbelteces de la pieza, podemos tener una gama de resultados que, por convergencia, nos indiquen cuál es la distribución de esfuerzos canónica o plenamente dúctil. En todos los casos, se detecta cuál es la distribución de esfuerzos para la que la primera sección ha agotado su capacidad elástica y debe comenzar con deformaciones plásticas. De este modo, obtenemos la relación entre la distribución de diseño empleada y aquella que es elástica. Cuando ambas situaciones converjan en un solo valor, estaremos ante la distribución plenamente dúctil o canónica, que es el referente que queremos encontrar.

Ilustración 1: Modelo de viga: disposición de armado, Leyes de momentos flectores, Deformadas elásticas y Deformada virtual de colapso.

Siguiendo la figura anterior, $M(qu)$ representa la ley de momentos flectores elegida arbitrariamente para equilibrar la carga qu , con valor negativo extremo Mu^- y positivo Mu^+ . $M(qe)$ representa la ley de momentos flectores para la cuál la primera sección -en principio, las de los extremos empotrados- ha agotado su capacidad elástica y llega al valor de sollicitación Mu^- , para el cual, el momento en el centro del vano llegará al valor de sollicitación Me^+ y la carga soportada es qe . Por tanto, el equilibrio en estado de rotura será:

$$f(S_u)=0 \rightarrow M_{uneg} + M_{upos} - \frac{q_u L^2}{8} = 0; \quad (1) \quad [3.1]$$

Ahora bien:

$$M_{upos} = \frac{M_{uneg}}{K} \rightarrow M_{uneg} \left(1 + \frac{1}{K}\right) - \frac{q_u L^2}{8} = 0; \quad [3.2]$$

Con lo que K sería el coeficiente de diseño de la solución empleada. De manera análoga, será:

$$M_e = \frac{M_{uneg}}{K'} \rightarrow M_{uneg} \left(1 + \frac{1}{K'}\right) - \frac{q_e L^2}{8} = 0; \quad [3.3]$$

que sería el coeficiente elástico del sistema. Por tanto:

$$q_e = \frac{1 + \frac{1}{K}}{1 + \frac{1}{K'}} q_u; \quad [3.4]$$

Si ahora planteamos el potencial del sistema para cuando se llega a qe :

$$\Pi = 2 \left(\int_0^{L_0} \left(\int_0^{v_e} q_e du + \iint_0^{v_e} BDB du^2 \right) dL + \int_{L_0}^{L/2} \left(\int_0^{v_e} q_e du + \iint_0^{v_e} BDB du^2 \right) dL \right); \quad [3.5]$$

La condición D -constitutiva- es la rigidez de la sección EI , que podemos asumir constante sin error demasiado considerable, con E_{ineg} en la zona de momentos negativos y E_{ipos} en la zona de momentos positivos. B sería la condición de compatibilidad -o de equilibrio- que es para flexión:

$$C = \frac{d^2 u}{dl^2} = \frac{M}{EI}; \quad [3.6]$$

Por tanto:

$$\Pi = 2 \left(\int_0^{L_0} \left(\int_0^{v_e} q_e du + \iint_0^{v_e} \frac{M(q_e)^2}{EI_{neg}} du^2 \right) dL + \int_{L_0}^{L/2} \left(\int_0^{v_e} q_e du + \iint_0^{v_e} \frac{M(q_e)^2}{EI_{pos}} du^2 \right) dL \right); \quad [3.7]$$

De manera idéntica, cuando se supere la carga qe y se llegue a qu , una parte de la estructura habrá quedado en régimen elástico, pero en los extremos habrán aparecido los giros θ ligados a M_{uneg} , precisamente los giros plásticos necesarios para poder verificar el estado de rotura. Por tanto, el potencial

¹ $M_{uneg} = Mu^-$ y $M_{upos} = Mu^+$.

elástico se incrementará en:

$$\Delta \Pi = 2 \left(\int_0^{L'_0} \left(\int_{v_e}^{v_u} (q_u - q_e) du + \int_0^{v_e} \frac{(M(q_u) - M(q_e))^2}{EI_{neg}} du^2 \right) dL \right) + 2 \left(\int_{L'_0}^{L/2} \left(\int_{v_e}^{v_u} (q_u - q_e) du + \int_0^{v_e} \frac{(M(q_u) - M(q_e))^2}{EI_{pos}} du^2 \right) dL \right); \quad [3.8]$$

y el potencial total será:

$$\Pi_{tot} = \Pi + \Delta \Pi + 2M_{uneg} \Theta; \quad [3.9]$$

Como M_{uneg} es conocido y depende del diseño K , si tenemos en cuenta [3.4] y que la rigidez de una sección es del modo:

$$EI = \frac{Ebd^3}{\alpha}; \quad [3.10]$$

y tomamos como parámetro la esbeltez de la pieza ($\lambda = L/d$), de [3.9] se deduce que:

$$\Theta = \frac{q_u \lambda^3}{\gamma \beta} \left(\frac{1 - \frac{K}{K'}}{K + 1} \right); \quad [3.11]$$

Es decir, el giro plástico depende de la esbeltez de la pieza, de cuál sea la rigidez de las secciones, y de la relación que haya entre el coeficiente de diseño y el elástico. El coeficiente β que aparece en la expresión tiene en cuenta la variación de E y de γ la variación de α a lo largo de la pieza. Si buscamos que el giro sea nulo, lo podrá ser si la carga lo es, si la esbeltez es nula o si la rigidez de las secciones es infinita, que son tres casos absurdos, el primero por no tener sentido y los dos siguientes por imposibilidad física de ello. Por tanto, sólo el segundo término puede darnos soluciones reales. Así:

$$K' > K \rightarrow \Theta > 0;$$

$$K' = K \rightarrow \Theta = 0; \quad [3.12]$$

$$K' < K \rightarrow \Theta < 0;$$

Por tanto, si tomamos un coeficiente de diseño $K = K' = K_0$, entonces no habrá demanda de ductilidad y se podrá alcanzar la carga última q_u de rotura aun cuando la ductilidad del sistema sea nula. Si tomamos un coeficiente de diseño menor que K_0 -por tanto ($K' > K$)-, aparecerá entonces un giro Θ indispensable para poder verificar la carga última. Si tomamos $K > K_0$ -por tanto ($K' < K$) - aparecerá un giro negativo, lo que implica que entonces la sección no ha llegado a su límite de capacidad y que, por tanto, la plastificación ha de producirse necesariamente en otra distinta: en el centro, con momentos flectores positivos.

Tal como el modelo teórico preveía, existe una distribución de solicitaciones que hacen el sistema perfectamente dúctil y respecto del cual podemos hacer un diagnóstico de otra solución distinta para idéntica constitución interna local -armado de las secciones- y que es independiente de la geometría concreta de la pieza -no depende de la esbeltez ni del tamaño-. Esto vale también para casos de carga distintos, como las puntuales, pero con una precisión respecto de la carga repartida. Así como en este caso la deformación plástica depende de la esbeltez de la pieza cuando no nos ceñimos a la distribución

canónica o plenamente dúctil, en el caso de las cargas puntuales depende de nuevo de la esbeltez y del tamaño -L-, siendo el giro inversamente proporcional a éste.

Lo anterior se puede expresar gráficamente del siguiente modo, referido a las leyes de momentos flectores:

Ilustración 2: Leyes de momentos flectores para distintas distribuciones de K y K' . Mu representa la distribución en el estado de rotura.

Tengamos en cuenta algo importante y es que la ecuación de equilibrio en rotura [3.1] es lineal, lo que significa que la superficie de rotura es plana. Precisamente por ello, todas las distribuciones que tomemos para los esfuerzos de rotura están por fuerza ligados a una misma deformada de colapso, es decir, tenemos la seguridad de que las regiones que han de plastificar son siempre las mismas y no han de buscarse para cada caso particular. Veremos que esto es vital para los arcos de fábrica.

Si representamos [3.1] obtendremos lo que aparece en la ilustración 3. En un punto indeterminado, en principio, de la superficie aparecerá la solución K_0 , que como hace crecer linealmente los esfuerzos para cada paso de carga, tiene un recorrido lineal. Si tomamos ahora un recorrido K cualquiera aparecerá que inicialmente que el recorrido hasta llegar a su intersección con la superficie de rotura toma una pendiente $K' > K$, lo cual significa que llegará a $Mu-$ antes que a $Mu+$, por lo que deberá proseguir el proceso sobre la recta de $M = Mu-$, para verificar el estado último. Este tramo horizontal nos dará la medida de cuánto sea el giro plástico de los empotramientos que deben desarrollar. De esta manera sencilla es posible tener un diagnóstico claro del comportamiento hasta la rotura.

Dado que la cantidad de valores distintos de los momentos flectores es grande, resulta más sencillo sustituir los valores absolutos por los valores relativos, $M-/Mu-$ y $M+/Mu+$, quedando una figura como la representada en la ilustración 4. Esta figura representa lo mismo que la anterior, pero al ser adimensional permite representar de manera genérica cualquier caso a analizar. Este gráfico es el que se

3.3.- Armado de secciones: ductilidad y resistencia

Puesto que el problema que abordamos contiene las deformaciones que las regiones plastificadas deben asumir, se aborda previamente cuáles son estas deformaciones locales que las secciones de hormigón armado pueden asumir como máximo para su máxima resistencia. El problema, como veremos, reside en que la estrategia de armado que permite una mayor resistencia de la sección no es aquella que nos permite la mayor deformación. Por tanto, si el problema global que planteamos exige una gran deformación de las regiones plastificadas, deberemos sacrificar la resistencia en pos de la deformación. Pero existe una estrategia que permite ambas cosas, pero que se verá es excesivamente costosa y, por tanto, poco conveniente.

Como ley constitutiva del hormigón se ha tomado la convencional parabólico-rectangular, asumiendo para el cálculo de la resultante la simplificación rectangular.

Ilustración 5: Ley constitutiva del hormigón

Para el acero se ha tomado la ley bilineal (ilustración 6) si bien se supone que la tensión del mismo no puede superar f_{yk} y que en el tramo elástico lineal su módulo de deformación longitudinal es constante y vale $E=210000 \text{ N/mm}^2$.

Como convencionalmente se supone, se considera que, por la adherencia de las armaduras de acero con el hormigón -que se considera perfecta-, la sección de hormigón se ha roto por deformación del acero cuando su deformación media alcanza el 10‰ . También se acepta la suposición de Bernoulli-Navier de que las secciones transversales de las barras mantienen su planitud una vez deformadas y que la fibra neutra -donde las tensiones se hacen nulas- no sufre alargamiento ni acortamientos.

Bajo estas premisas se han analizado cuatro casos:

- Estrategia para máxima resistencia de las secciones
- Estrategia para máxima deformación de las secciones
- Estrategia dual para máximas resistencia y deformación
- Estrategia general con distintas formas de armado.

Ilustración 6: Ley constitutiva del acero

Para seguir lo que se indica más adelante, se definen ciertos parámetros que se enuncian continuamente. Tomada la sección rectangular de la viga:

definiremos:

- b** ancho de la sección
- h** canto de la sección
- d** canto útil de la sección
- c** recubrimiento mecánico de las armaduras
- β** d/h

γ c/h

Denominaremos también:

z brazo de palanca de la sección armada

x altura de la zona comprimida de hormigón

$k=z/d$

$\mu=x/d$

3.3.1.- Armado para máxima resistencia: valores límite.

En este caso, nos encontramos con la sección deformada de la siguiente manera:

Ilustración 7: Estado de mayor resistencia para una sección de hormigón armado

Como es bien conocido, el máximo momento flector que soporta la sección de hormigón armado -prescindiendo de la armadura comprimida- es el que se produce con el mayor bloque comprimido de hormigón aprovechando al máximo la capacidad mecánica a tracción de la armadura, esto es, cuando ésta alcanza su tensión en el límite elástico f_{yd} . Dicha situación la denominaremos límite, dado que se define a partir del valor límite de la zona comprimida de hormigón. En tal caso será:

$$\epsilon_y = \frac{f_{yd}}{E_s}; \quad [3.13]$$

donde E_s es el módulo de deformación longitudinal del acero. Con la asunción del modelo parábola-rectángulo para el comportamiento del hormigón en rotura, su máxima deformación unitaria será

$$\epsilon_c = 3,5\text{‰}; \quad [3.14]$$

Suponiendo la deformación plana de la sección, se obtiene

$$\frac{\varepsilon_c}{x_l} = \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_y}{d}; \quad [3.15]$$

siendo d el canto útil de la sección. Obtenemos entonces

$$\mu_l = \frac{x_l}{d} = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_y}; \quad [3.16]$$

El brazo de palanca límite z_l respecto del canto útil de la sección será entonces

$$\kappa_l = \frac{z_l}{d} = 1 - 0.40 \cdot \mu_l; \quad [3.17]$$

Por tanto, el momento flector límite que se obtiene para esta consideración es:

$$M_l = 0.80 \mu_l (1 - 0.40 \cdot \mu_l) fcd b d^2; \quad [3.18]$$

Equilibrando la capacidad mecánica del hormigón comprimido con la del acero traccionado, obtenemos que el área de acero necesaria es:

$$As_l = \frac{0.80 b \mu_l d fcd}{f_y d}; \quad [3.19]$$

Si asumimos que el acero de armado tiene una tensión media de cálculo $f_y d = 434 \text{ N/mm}^2$, las anteriores expresiones toman los siguientes valores:

$$\mu_l = 0.636; \quad [3.20]$$

$$\kappa_l = 0.745; \quad [3.21]$$

$$M_l = 0.379 fcd b d^2; \quad [3.22]$$

$$As_l = 0.606\% fcd b d; \quad [3.23]$$

para una curvatura límite de la sección C_l de

$$C_l = \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_y}{d} = \frac{5.50\%}{d}; \quad [3.24]$$

lo cual supone una rigidez K_l de la sección

$$K_l = \frac{M_l}{C_l} = \frac{0.80 \mu_l (1 - 0.40 \cdot \mu_l) fcd b d^3}{\varepsilon_c + \varepsilon_y}; \quad [3.25]$$

que para los valores numéricos anteriores toma el valor

$$K_l = 68.91 fcd b d^3; \quad [3.26]$$

3.3.2.- Armado para máxima deformación: valores últimos.

Ahora bien, la anterior estrategia nos aportará el máximo momento capaz de la sección, pero no su máxima curvatura posible. Al limitar la deformación del acero a su valor elástico aprovechamos el mayor fondo de compresión posible del hormigón a la vez que la máxima capacidad mecánica de la armadura, pero dejamos de lado que si queremos mejorar la ductilidad, o sea, la deformación de la sección en su estado último, llevar el acero a su alargamiento en rotura nos daría una mayor curvatura en su estado último. Sin embargo, tal cosa supone que el fondo comprimido de hormigón habrá de reducirse, resultando en un menor momento último de la sección. En resumen, el dilema se presenta en que si queremos tener la máxima capacidad resistente de la sección limitamos su deformación última al no aprovechar el tramo dúctil de deformaciones del acero. Por contra, si queremos garantizar una mayor capacidad de deformación de las secciones en estado último habremos de limitar su capacidad resistente, al desaprovechar una parte del hormigón disponible para participar en la capacidad resistente de la sección.

Ilustración 8: Estado de mayor deformación para una sección de hormigón armado

Dicho lo anterior, procedamos ahora con el criterio de aprovechar la máxima deformación de la sección, agotando las deformaciones últimas tanto del hormigón como del acero. En realidad, según el modelo convencional empleado, tomaremos que la sección ha llegado a su máxima capacidad por deformación en tracción del acero cuando éste presente una deformación media en una región de la pieza de

$$\varepsilon_{su} = 10 \text{‰}; \quad [3.22]$$

Para este caso, en principio, despreciando la capacidad de la armadura comprimida, el fondo de hormigón comprimido en estado último será:

$$\mu_u = \frac{x_u}{d} = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_{su}}; \quad [3.23]$$

y, por tanto, el brazo de palanca de la sección frente al canto útil:

$$\kappa_u = \frac{z_u}{d} = d(1 - 0.40\mu_u); \quad [3.24]$$

En consecuencia, el momento máximo que puede aportar la sección en esta situación será:

$$M_u = 0.80 \mu_u (1 - 0.40 \cdot \mu_u) f_c d b d^2; \quad [3.25]$$

y el área de acero traccionado necesaria:

$$A_{s_u} = \frac{0.80 b \mu_u d f_c d}{f_y d}; \quad [3.26]$$

Para los valores conocidos de e_c y de e_{su} , las anteriores expresiones toman los siguientes valores:

$$\mu_u = 0.259; \quad [3.27]$$

$$\kappa_u = 0.896; \quad [3.28]$$

$$M_u = 0.185 f_c d b d^2; \quad [3.29]$$

$$A_{s_u} = 0.493 \% f_c d b d; \quad [3.30]$$

y la curvatura C_u tomará el valor:

$$C_u = \frac{13.50 \%}{d}; \quad [3.31]$$

con la correspondiente rigidez K_u :

$$K_u = \frac{M_u}{C_u} = 14.37 f_c d b d^3; \quad [3.32]$$

3.3.3.- Armado para máxima resistencia y máxima deformación simultáneas: estrategia dual.

Según lo visto en los dos puntos anteriores, la estrategia de mayor resistencia aporta el doble de capacidad resistente que la de mayor ductilidad, pero con una capacidad de curvatura casi dos veces y media menor que ésta. Como consecuencia, la estrategia de mayor resistencia es casi cinco veces más rígida que la estrategia de mayor ductilidad. En cuanto a cuantías, la de mayor resistencia consume sólo un 23% más de armadura que el de mayor deformación.

El anterior aserto supone entonces que, en una región en que se vaya a producir una rótula, si la estrategia de armado se ha seguido para aprovechar al máximo la resistencia de las secciones, nos encontraremos que la capacidad de giro de la rótula de dicha región será pequeña, demandando además, en el periodo elástico, gran cantidad de momento flector, dada su alta rigidez. Si tomamos la opción de la máxima ductilidad, en periodo elástico la sección no demandará tanto momento flector y, por tanto, no se sobrecargará con mucha anticipación, permitiendo por añadidura un giro de la zona plastificada de la rótula bastante elevado.

Sin que aún exista una demostración fehaciente -que se abordará más adelante-, lo anterior hace ver claramente que la plastificación de una pieza hasta rotura y sus posibilidades de llegar a tal situación no serán iguales si el criterio de armado de las secciones críticas es uno u otro. Si, por ejemplo, en una viga biempotrada con carga repartida uniforme, tendemos a agotar la capacidad resistente en las secciones de los apoyos, mientras que armamos con criterios de máxima ductilidad en la sección central, los momentos flectores en periodo elástico crecerán enormemente en los extremos frente al momento flector de la sección central. Así, cuando agote su capacidad resistente en los extremos, dado que el momento flector del centro habrá aumentado muy poco, demandará una gran cantidad de giro de las secciones plastificadas de los extremos, que tienen tal capacidad severamente limitada, pudiéndose producir la rotura de éstas antes de que se verifique la plastificación de la sección central. Si, por el contrario,

asignamos criterios de ductilidad a las secciones extremas y de resistencia a la central, las primeras tenderán a asumir, en el periodo elástico, menor esfuerzo relativo a cada incremento de carga, repartiéndose desde el principio el esfuerzo en mayor medida con la sección central. Así, cuando las secciones extremas lleguen al valor de plastificación, el incremento necesario para que plastifique la central será relativamente menor, demandando en consecuencia menor giro de las secciones de los extremos, que lo podrán alcanzar gracias a la mayor ductilidad de las secciones involucradas.

Por tanto, la libre elección de la relación entre momento último negativo y positivo para verificar una carga última no es indiferente al criterio de armado empleado en las secciones críticas. Por decirlo en modo grosero, la igualación de momentos que habitualmente tomamos de la teoría clásica de rotura de barras, será o no será la adecuada dependiendo de la estrategia de armado seguida para las secciones. Tampoco es indiferente de la estrategia seguida en las secciones no críticas, pero éste es asunto que queda para más adelante.

Llegados a este punto, si tenemos en cuenta que la capacidad de deformación de las secciones es necesaria para que se produzca una adecuada plastificación, pero a la vez es interesante aprovechar suficientemente la capacidad resistente de las mismas, sería ideal encontrar un compromiso entre la capacidad resistente y la capacidad de deformación. Esto es, dado que a mayor resistencia tenemos menor deformación -ductilidad limitada- y, a la inversa, conseguir grandes deformaciones supone una mengua en la resistencia -resistencia limitada-, interesaría encontrar el modo de que ni la resistencia ni la ductilidad se vieran limitadas innecesariamente.

Ilustración 9: Estado de mayores deformación y resistencia para una sección de hormigón armado

Para este fin, consideraremos ahora la armadura inserta en el bloque comprimido. Su misión será, al estar comprimida, añadir capacidad de compresión, evidentemente. Pero además, será una fuerza de compresión muy excéntrica, cercana a las fibras extremas, las de mayor deformación unitaria. Esto supone que, si el bloque comprimido de hormigón se redujera, mediante la inserción de una cierta cantidad de armadura en su seno, podemos compensar la pérdida de fuerza de compresión debida a la menor profundidad de la fibra neutra. Así, como llevar la deformación del acero traccionado hasta su máxima deformación última supone indefectiblemente disminuir la zona comprimida de la sección, tal pérdida la supliremos con una cierta sección de acero comprimido que la compense. A esta estrategia de armado la denominaremos dual, pues tanto atiende a conseguir la máxima resistencia última como a la máxima deformación posible.

Por tanto, en este caso, la curvatura de la sección será la misma que para el armado de máxima deformación, su bloque comprimido también y el brazo de palanca referido al hormigón comprimido también. Lo anterior supone entonces que considerando sólo el hormigón comprimido:

$$M_{u1} = 0.80 \mu_u (1 - 0.40 \cdot \mu_u) fcd b d^2; \quad [3.33]$$

$$A_{s_{u1}} = \frac{0.80 b \mu_u d fcd}{f_y d}; \quad [3.34]$$

Si tomamos como óptimo de resistencia el anterior momento límite M_l , necesitaremos entonces añadir al momento M_{u1} anterior la cantidad M_{u2}

$$M_{u2} = M_l - M_{u1} = M_l - M_u = 0.80 (\mu_l (1 - 0.40 \cdot \mu_l) - \mu_u (1 - 0.40 \cdot \mu_u)) fcd b d^2; \quad [3.35]$$

Tomando los valores numéricos ya empleados antes, se obtiene

$$M_{u2} = 0.194 fcd b d^2; \quad [3.36]$$

Este momento ya no puede ser asumido con participación del hormigón, sino que deberá asumirlo el par formado por una armadura comprimida y un incremento de armadura en tracción, denominadas ambas $A_{s_{2dual}}$, de modo que

$$A_{s_{2dual}} = \frac{M_{u2}}{f_y d (d - c)}; \quad [3.37]$$

Ahora, si

$$\begin{aligned} d &= \beta h; \\ c &= \gamma h; \end{aligned} \quad [3.38]$$

obtenemos que la cuantía de acero comprimido² -e incremento de la armadura traccionada- será:

$$\frac{A_{s_{2dual}}}{b h} = \frac{0.194 fcd \beta^2}{f_y d (\beta - \gamma)}; \quad [3.39]$$

Por tanto, si en la zona comprimida se añade una armadura de la cuantía anterior, conseguiremos que la sección en rotura llegue a la máxima deformación posible, igualando a su vez el máximo momento flector que la sección puede resistir en estado límite por contribución del hormigón. Así, la cantidad de acero en tracción para la estrategia dual será

$$A_{s_{dual}} = A_{s_{u1}} + A_{s_{2dual}} = \left(0.207 + \frac{0.194}{(1 - \gamma/\beta)} \right) \frac{fcd b d}{f_y d} = (0.493\% + \frac{0.461\%}{(1 - \gamma/\beta)}) fcd b d; \quad [3.40]$$

y la de acero comprimido

$$A_{s_{2dual}} = \frac{0.461\%}{(1 - \gamma/\beta)} fcd b d; \quad [3.41]$$

De este modo, entonces, la rigidez de la sección la tomaremos como la relación entre el máximo momento de la sección, el límite M_l , y la curvatura máxima posible de la misma, C_u , resultando que la rigidez dual es:

² En realidad habría que considerar que el acero en compresión puede no tener la misma capacidad en tracción que en compresión, pero dado que, como ya se ha explicado, el valor promedio de $f_y d$ es 434 N/mm², coincidirá con la máxima tensión en compresión para deformaciones del 2 por mil, valor habitual de deformación máxima asumible por el acero para compatibilizar su trabajo con el hormigón.

$$K_{dual} = \frac{M_{dual}}{C_{dual}} = \frac{M_l}{C_u} = \frac{0.80 \mu_l (1 - 0.40 \mu_l) fcd b d^3}{13.50 \%}; \quad [3.42]$$

que para los valores numéricos ya conocidos resulta:

$$K_{dual} = 28.10 fcd b d^3; \quad [3.43]$$

El brazo de palanca de la sección z_{dual} con armado de estrategia dual, frente al canto útil será:

$$\kappa_{dual} = \frac{z_{dual}}{d} = \frac{0.80 \mu_l (1 - 0.40 \mu_l)}{0.80 \mu_u + \frac{0.194}{1 - \gamma/\beta}}; \quad [3.44]$$

que para los valores numéricos conocidos toma el valor:

$$\kappa_{dual} = \frac{0.379}{0.207 + \frac{0.194}{1 - \gamma/\beta}}; \quad [3.45]$$

En definitiva, esta estrategia de armado nos proporciona simultáneamente la mayor capacidad resistente y la mayor deformación posibles de la sección de hormigón definida. Su rigidez duplica a la de la sección armada puramente por ductilidad y es dos veces y media menos rígida que la armada por resistencia. En cuanto a la cantidad de acero empleada, será seguro mayor que la armada para máxima ductilidad, pero dependiendo del recubrimiento de la sección obtendremos mayores o menores cuantías, teniendo en cuenta que tenemos tanto armado de compresión como de tracción. Para los valores habituales de g/b , que oscilan entre 0,03 para piezas de gran sección y 0,10 para las de pequeña sección, para un hormigón convencional de $fcd = 16.67 \text{ N/mm}^2$ (HA25), la cuantía $As_{2\text{ dual}}/bd$ presenta valores del orden del 8 por mil, llegando al 12 por mil para hormigones de $fcd = 23.33 \text{ N/mm}^2$ (HA35). Es decir, la estrategia dual tiene un coste en armadura nada despreciable. Para tener una idea cabal de lo que supone esta estrategia en términos de coste de armadura, se representan las siguientes gráficas:

Ilustración 10: Cuantías relativas de armadura para las distintas estrategias de armado

Resulta evidente que la estrategia dual de armado es muy costosa, pues es hasta casi dos veces y media más costosa en armadura que la estrategia resistente y casi tres veces más costosa que la estrategia puramente dúctil. Ya sólo la armadura de compresión a añadir es tanta como la necesaria para la estrategia dúctil y sólo un poco menos que la implicada en la estrategia resistente.

Ahora bien, si acudimos al brazo de palanca, la comparación resulta como sigue:

Ilustración 11: Brazo de palanca relativo de las secciones para distintas estrategias de armado

Efectivamente, la estrategia dual da como resultado un brazo de palanca muy alto, del mismo orden o mayor que el de la estrategia dúctil pura -gracias al descentramiento de la fuerza de compresión de la armadura comprimida, que aumenta el brazo de palanca-, y siempre mayor que el de la estrategia resistente.

En definitiva, la estrategia dual aporta una gran ductilidad, una rigidez considerable y un brazo de palanca alto, pero con un coste de armadura considerable. La estrategia resistente es sin duda la más económica, pues presenta cuantías algo mayores que la puramente dúctil, pero aprovecha al máximo el hormigón y el acero como elementos resistentes. La estrategia dúctil es barata en armadura, pero aporta poca rigidez y desperdicia una gran cantidad del hormigón que se podría emplear a efectos resistentes, dando sin embargo holgura para las grandes deformaciones si fueran necesarias. Es decir, cada una de las tres estrategias presenta inconvenientes de coste y, dada la mayor incidencia en el coste de la cuantía de acero que no de los volúmenes de hormigón, podemos convenir que el armado dual es muy caro, a pesar de ser el de mejores prestaciones sin duda.

En realidad, el armado de estrategia dual es un límite máximo al que tender como socorro extremo, puesto que si no necesitamos demasiada ductilidad en las secciones críticas no hará falta llegar a tal extremo, sino que podremos encontrar una solución *a metà strada* que mejore la capacidad de deformación en lo que se necesite pero sin un sobrecoste innecesario. Dado que siempre existe una armadura de compresión, por pequeña que sea, el aprovechamiento de ésta, con las correcciones que hagan falta, puede suponer un medio de mejorar la ductilidad de las secciones sin necesidad de incurrir en gastos enormes. Armar directamente por resistencia, salvo casos de piezas muy masivas, puede ser poco conveniente por el riesgo de fallo frágil o no suficientemente dúctil. Armar con la estrategia dúctil requerirá siempre secciones de mayor dimensión que las definidas para las otras dos estrategias y, si bien el coste relativo del hormigón frente al acero es pequeño, si las masas de hormigón han de aumentar en mucho -junto con las de encofrados, apeos, armados de piel, longitud de cercos, etc...- pueden no suponer un incremento pequeño, sino que merezca la pena aumentar la cuantía de acero en un poco para ahorrar mucho volumen de hormigón.

3.3.4.- Estrategia cualquiera para agotamiento del hormigón

En los casos anteriores se han definido valores límite de la estrategia de armado de las secciones. Sin embargo, con el fin de poder tener datos acerca de las consecuencias que tiene cualquier estrategia de armado de una sección de hormigón, se ha procedido a determinar su estado bajo las siguientes condiciones:

-Agotamiento en compresión del hormigón	$\varepsilon_c = -0,0035$
-Diferentes cuantías de armado comprimido	$2,80\% \leq C = A_{s2}/bh \leq C_{\text{máx.}}$

siendo $C_{\text{máx.}}$ la cuantía correspondiente a la estrategia dual. El procedimiento seguido ha sido idéntico al expresado en los apartados anteriores, lo que no se repite por evidente inutilidad.

Como resultados se han obtenido:

- Momento último relativo $M_u/fcd \cdot b \cdot d^2$ en relación al brazo de palanca relativo $k=z/d$
- Bloque comprimido relativo $\mu=x/d$ en relación al brazo de palanca relativo $k=z/d$
- Curvatura relativa C/d en relación al brazo de palanca relativo $k=z/d$
- Cuantía total de acero $(A_{s1}+A_{s2})/bh$ en relación al brazo de palanca relativo $k=z/d$

Los resultados constan en la página siguiente. Lo que es evidente de la inspección de los resultados es que la capacidad dúctil está directamente relacionada con el pequeño fondo comprimido de hormigón, sea gracias a armados escasos con secciones abundantes como a armados copiosos (tanto en tracción como en compresión), ganando en este último caso además resistencia. Pero las estrategias de armados copiosos son costosísimas, del orden del doble que las de armados leves. Los armados abundantes con bajos brazos de palanca aportan gran resistencia, pero apenas aportan capacidad de deformación.

En el fondo, el criterio de los casos límite anteriores se revela claramente en los resultados para casos cualesquiera.

3.4.- Modelo de rótula de hormigón armado

3.4.1.- Aplicación del Método de los Elementos de Contorno

Como se explica en el anejo 1, se he empleado un modelo de elementos de contorno para la definición del comportamiento de la rótula. Ésta se ciñe a un entorno igual a un canto útil de la sección. Esta decisión se basa en distintos motivos:

- El principio de Saint Venant indica que la distorsión de los efectos de continuidad en una barra, debidas a alteraciones locales, se disipan en una región de dimensión similar a la de las alteraciones. Por tanto, si el empotramiento, que es el que supone la alteración de la continuidad tiene de dimensión el canto útil, su efecto se disipará en esa misma dimensión.
- El modelo de bielas y tirantes universalmente aceptado, y que coincide con el criterio para el comportamiento mixto momento flector – cortante definido según Ritter-Mörsch, describe por omisión una región de compresión de descarga contra el apoyo inclinado 45°, lo que supone que el efecto del apoyo se ha trasladado tanto como la altura de la sección, es decir, de nuevo el canto.
- Dicha consideración, además, se recoge en los modelos de rótulas de Coccia [2007] -a partir del de Bauchmann- y de Vázquez Espí [1989], con resultados satisfactorios. Por ello, se nombra este modelo como BCV (Bauchmann-Coccia-Vázquez)

Realizado el modelo, se obtienen los resultados para tres estados de la rótula, en su cara ligada a la viga:

- Momento de fisuración
- Momento de plastificación del acero traccionado
- Momento último de la sección (ligado a la máxima curvatura posible)

El modelo, para hacerlo compatible con el resto de la viga a la que estaría unido, tiene como condición de contorno en la sección de contacto con la viga una ley de desplazamientos que conserven la cara contenida en un plano al deformarse, para ser consonante con el comportamiento uniforme que se le supone al resto.

Ilustración 12: Modelo de rótula

En el lado empotrado se suponen inamovibles en los puntos en que el hormigón esté comprimido y libres aquellos en que aparezca la fisuración.

Lógicamente, como se analiza un entorno de una dimensión, el giro del extremo ligado a la viga habrá acumulado los giros elástico y los plástico. Para deslindar uno de otro, se ha seguido el criterio de tomar como elástico el giro hasta el momento en que el acero plastifica. Por tanto, la diferencia entre el giro total acumulado menos el ligado a la plastificación del acero es el que se ha considerado plástico. Este criterio casa con el que preconiza el Eurocódigo 2 (EC2).

En todos los casos se ha introducido el efecto del cortante, ya que incide precisamente en la conformación de las bielas de descarga y porque en los modelos tomados de referencia ya se señala su influencia no despreciable, sobre todo en la apertura de fisuras y en la orientación de las mismas. Curiosamente, este efecto no se tiene en cuenta en los modelos normativos.

Para la fisuración, aunque la técnica de los elementos de contorno permite que sea libre su aparición y propagación, se ha seguido un patrón previo de separación de fisuras que se indica más adelante. Lo mismo que su inclinación, estimada a partir de las tensiones elásticas que aparecen en la masa traccionada de hormigón a partir del efecto del momento flector y del cortante. Evidentemente, cuanto mayor es el cortante mayor es la inclinación que se ha encontrado.

Por último, como en el resto de casos explorados, la rótula se ha analizado con diversas cuantías de acero comprimido (A_s2/bh), con tres categorías:

- Cuantía comprimida baja $C-(‰)=2,80$
- Cuantía comprimida media $C-(‰)=6,40$
- Cuantía comprimida alta $C-(‰)=10,00$

La razón de tomar una cuantía comprimida mínima de tal valor procede de que siempre hay una cierta cuantía de acero comprimido, por más que se desprecie en el cálculo resistente. Como el mínimo normativo de la misma es $2'80‰$ (en realidad en tracción, pero esa armadura suele ser la de base de montaje y llega a meterse en las zonas de hormigón comprimido), se ha tomado ésta como referencia mínima. El máximo del $10‰$ se ha tomado porque es un límite inferior de la cuantía máxima de compresión que se debe añadir para un comportamiento dual de la sección.

3.4.2.- Régimen de fisuración del hormigón

Para la comprobación de la fisuración y como patrón de uso en el modelo de rótula, se ha establecido el régimen que aparece en el art. 49 de EHE08. Para ello ha sido necesario prever primero un patrón de diámetro equivalente y de relación del número de armaduras respecto al ancho de la sección. Suponiendo un ancho variable entre 300 y 600 mm con armaduras de distinto calibre, se han determinado ambos factores, siguiendo el criterio de separación entre armaduras de la figura siguiente.

Ilustración 13: Disposición de armaduras en el ancho de una viga

El resultado del cálculo es:

b (mm)	f (mm)	n	s (mm)	n/b (mm-1)	n/b medio	n medio	φ medio	φ medio1		
300	12,00	8	20,57	0,03		7,03	17,01			
400	16,00	10	20,00	0,03	0,0234	9,37	18,43			
500	20,00	11	22,00	0,02		11,71	19,29	18,65		
600	25,00	12	21,82	0,02		14,05	19,86			
									φ medio gral.	n/b medio gral.
									19,11	0,023

b (mm)	f (mm)	n	s (mm)	n/b (mm-1)	n/b medio	n medio	φ medio	φ medio2		
300	25,00	5	28,75	0,02		6,86	17,89			
400	20,00	9	20,00	0,02	0,0229	9,15	19,34			
500	16,00	12	22,55	0,02		11,44	20,22	19,56		
600	12,00	17	21,00	0,03		13,73	20,80			

Tabla 1: Cálculo del diámetro equivalente (mm) y de la separación media inversa n/b (1/mm)

Con estos datos se determina la abertura de fisura como:

$$w_k = \beta s_m \varepsilon_{sm}; \quad [3.46]$$

donde $\beta=1'70$ tiene en cuenta el tipo de carga que produce la fisuración (directa en este caso), s_m es la distancia entre fisuras y ε_{sm} es la tensión en servicio del acero traccionado contando con la colaboración del hormigón traccionado entre fisuras. A su vez:

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left[1 - k_2 \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right] \geq 0,4 \frac{\sigma_s}{E_s}; \quad [3.47]$$

$$s_m = 2c + 0'20 s 0'40 k_1 \frac{\Phi A_{c,eficaz}}{A_s}; \quad [3.48]$$

siendo $c=30 \text{ mm}$ el recubrimiento de las armaduras, s la separación entre barras ($b/n=1/0,023$) y k_1 la curvatura de la zona comprimida de hormigón, Φ es el diámetro equivalente y $A_{c,eficaz}$ es el área de hormigón de la sección afectada en la formación de la fisura, que no es la zona fisurada, y A_s el área total de las armaduras de acero en tracción. La fracción σ_{sr}/σ_s es la relación entre la tensión del acero en el momento de la fisuración de la sección y la de ese mismo acero en la sección fisurada para el momento flector con el que se calcula la abertura de fisura, tensiones ambas que son particulares de cada sección y armado, y de las solicitaciones de cada caso. Por ello no se concluye nada general aquí.

Procesando los anteriores datos, se obtiene que:

$$s_m = 73,06 \text{ mm} \rightarrow s_m = 75 \text{ mm};$$

lo que emplearemos en la definición del modelo de rótula. Entonces, según la tabla 5.1.1.2 de EHE08, se definen cuatro categorías de fisuración según la agresividad del ambiente, ligadas a cuatro aberturas de fisuras distinta. Cada una de ellas estará entonces ligada a un cierto momento flector, que denominaremos del siguiente modo:

M (mKN)	$w_k (mm)$
MI	0,4
MII	0,3
MIII	0,2
MIV	0,1

Calculando los $M_I, \dots, M_{IV}$ a partir de las aberturas de fisuras, y comparándolos con los momentos flectores en servicio de cada caso, se determina qué régimen de fisuración es capaz de soportar dicho estado de servicio.

3.4.3.- Régimen de adherencia del acero corrugado

El régimen de adherencia del acero y el hormigón se ha determinado según el art. 32.2 de EHE08, que establece que el acero corrugado tiene como tensión tangencial última de adherencia el valor

$$\tau_{bu} = 12,74 - 0,19 \phi; \quad [3.49]$$

Tomando el diámetro de la barra como el equivalente ($\phi = 19 \text{ mm}$), la tensión de adherencia de cálculo será:

$$\tau_{bd} = \frac{12,74 - 0,19 \cdot 19}{1,50} = 6,09 \text{ N/mm}^2; \quad [3.50]$$

Como la tensión normal del acero es para un momento flector cualquiera, asumiendo que el brazo de palanca z no varía en el entorno en que se determina la tensión tangencial de adherencia, obtendremos que en el límite de la capacidad adherente:

$$\tau_{bd} = \frac{V_u}{z \cdot n \cdot \pi \cdot \phi}; \rightarrow Vu = \tau_{bd} \cdot n \cdot \pi \cdot \phi; \quad [3.51]$$

siendo n el número de armaduras en tracción de la sección y V_u el esfuerzo cortante para el que se agotaría la capacidad adherente entre el acero y el hormigón. El cortante podemos referirlo a la sección de hormigón como:

$$V_u = \alpha_v f_{cd} b d; \quad [3.52]$$

Igualando las dos expresiones anteriores y sustituyendo los datos conocidos, se obtiene:

$$\alpha_v = 0,501 \frac{z}{d}; \quad [3.53]$$

Como z/d varía entre los valores 0'77 y 0'89, como se ha visto, resultará:

$$\alpha_v = 0,386 \dots 0,446; \quad [3.54]$$

Si la disposición de armadura de cortante es mediante cercos o barras rectos paralelos a la sección, el máximo de α_v es 0'30, por lo que cabe esperar que en ningún caso las armaduras se suelten de la masa de hormigón. Con este criterio se ha verificado si las armaduras deslizan o no. Pero se ha tomado como límite absoluto sin paso intermedio de deslizamiento. Es decir, si las tensiones tangenciales de contacto del acero con el hormigón son menores que τ_{bd} , se supone que el acero está perfectamente adherido al hormigón. En caso contrario, se supone que el acero desliza libremente en la masa de hormigón.

3.4.4.- Régimen de plastificación del hormigón

El modelo de comportamiento del hormigón ya se ha explicado anteriormente, pero para su inserción en el modelo de la rótula se ha realizado una pequeña alteración con el fin de que no existan relaciones nulas entre tensiones y deformaciones, lo que causa inestabilidad numérica. Cuenta esta modificación con la ventaja de que se parece más a la ley constitutiva real del hormigón que la

parabólico-rectangular, que es eficaz a efectos de resistencia y para ello debe ser empleada. La transformación es la que se representa en la siguiente ilustración.

La subdivisión en tres tramos lineales se ha realizado de manera que en cada vértice de cambio de pendiente la energía de deformación acumulada por la ley curva y por la lineal sean idénticas, para no desvirtuar el comportamiento en cada paso. Además, la subdivisión lineal es necesaria para aplicar modelos de elementos de contorno, pues sólo es capaz de simular procesos lineales, por lo que la no linealidad debe por fuerza ser representada por una poligonal.

3.4.5.- Régimen de plastificación del acero corrugado

Para el acero corrugado se ha seguido el mismo procedimiento, pero más sencillo, por cuanto ya el acero presenta un tramo lineal hasta el límite elástico. Por tanto, asumiendo que la rotura se produce para una tensión f_u y con una deformación en rotura ε_u , la ley constitutiva del acero, ya representada antes, se puede expresar como:

$$\sigma = E_s \varepsilon; (\varepsilon \leq f_{yd} / E_s);$$

$$\sigma = f_{yd} + \frac{(f_u - f_{yd})}{\varepsilon_u - \frac{f_{yd}}{E_s}} \left(\varepsilon - \frac{f_{yd}}{E_s} \right); (\varepsilon > \frac{f_{yd}}{E_s}); \quad [3.55]$$

que expresada de otro modo es la misma ecuación que aparece en el anejo 1.

3.5.- Giros de las rótulas de hormigón armado

3.5.1.- Rótulas sin cortante

Con los anteriores datos se ha elaborado el modelo de rótula para distintas cuantías de acero, ya indicadas, y con distintos fondos de la zona comprimida. Como resultado se obtienen las siguientes gráficas de deformadas -sólo algunas, destinadas a explicar los resultados- y de valores de giros asociados a ellas, todas en ausencia de cortante. La primera gráfica representa la deformada (escala 10:1) y la segunda la evolución del giro total respecto del tanto por uno de momento flector aplicado. Lógicamente el primer quiebro corresponde al momento de fisuración y el segundo al de plastificación del acero.

C-(‰)	x/h	z/d	HA	B	Θ tot. (mrad)	Θ fis (mrad)	Θ fis p (mrad)	Θ plas (mrad)	Vd/fcdbd
2,80	0,16	0,96	25	500	19,33	0,15	2,45	16,88	0,00

Deformada

(M/Mu) / Giro

C-(‰)	x/h	z/d	HA	B	Θ tot. (mrad)	Θ fis (mrad)	Θ fis p (mrad)	Θ plas (mrad)	Vd/fcddb
2,80	0,25	0,92	25	500	12,60	0,14	1,76	10,84	0,00

Deformada

(M/Mu) / Giro

C-(‰)	x/h	z/d	HA	B	Θ tot. (mrad)	Θ fis (mrad)	Θ fis p (mrad)	Θ plas (mrad)	Vd/fcddb
2,80	0,50	0,81	25	500	6,30	0,13	1,19	5,11	0,00

Deformada

(M/Mu) / Giro

Estos resultados que se han mostrado son para el caso de armado mínimo en compresión y con distintos fondos de zona comprimida (x/h). Es evidente que cuanto mayor es la zona comprimida menor es la capacidad de rotación total de la rótula y menor lo es también la parte plástica de la misma, el deseado giro plástico que aporta ductilidad.

De cualquier modo, para recoger la generalidad de los valores empleados, se han confeccionado las gráficas que recogen todos los valores hallados y que figuran en el punto 3.5.3.

3.5.2.- Rótulas con cortante

Por poder comparar con el caso anterior, se representan a continuación las soluciones de las rótulas con idénticas condiciones, pero en presencia de un cortante de valor $0,30f_{cd} \cdot b \cdot d$.

C-(‰)	x/h	z/d	HA	B	Θ tot. (mrad)	Θ fis (mrad)	Θ fis p (mrad)	Θ plas (mrad)	Vd/f _{cd} b·d
2,80	0,16	0,98	25	500	34,79	0,15	2,49	32,30	0,30

Deformada

(M/Mu) / Giro

C-(°/oo)	x/h	z/d	HA	B	Θ tot. (mrad)	Θ fis (mrad)	Θ fis p (mrad)	Θ plas (mrad)	Vd/fcddb
2,80	0,25	0,93	25	500	19,38	0,14	1,77	17,61	0,30

Deformada

(M/Mu) / Giro

C-(‰)	x/h	z/d	HA	B	Θ tot. (mrad)	Θ fis (mrad)	Θ fis p (mrad)	Θ plas (mrad)	Vd/fcddb
2,80	0,50	0,81	25	500	8,51	0,13	1,19	7,32	0,30

Deformada

(M/Mu) / Giro

Es evidente que la aparición del cortante incrementa las deformaciones de la rótula por dos motivos. El primero es que la apertura de fisuras es mayor y éstas tienden a inclinarse, haciendo pivotar la rótula respecto del punto inferior del empotramiento, aproximadamente. Pero también las tensiones tangenciales introducen una deformación por distorsión, si bien no muy grande.

3.5.3.- Interacción entre momento flector y cortante

Visto entonces que el cortante influye en las deformaciones de la rótula, y no sólo el momento flector, determinados los giros plásticos de una gama de casos, variando la cuantía en compresión, la altura del bloque comprimido y el valor del cortante, podemos relacionar el **giro plástico** de cada caso (giro posible) con los obtenidos en los análisis efectuados. En las gráficas que siguen se compara además el resultado obtenido con el modelo del Eurocódigo 2 para giros de rótulas plásticas, que no tiene en cuenta el cortante.

El criterio general que se desprende es que las cuantías pequeñas en compresión con fondos comprimidos pequeños y en presencia de cortante permiten giros en su estado último mucho mayores que en otros casos. La ausencia de cortante con armados de compresión abundantes y zonas comprimidas grandes son los casos que menor ductilidad aportan.

Con respecto al EC2, nuestro modelo BCV se ajusta bastante bien con cuantías de compresión bajas y sin cortante, mientras que con las altas el modelo BCV permite giros menores que EC2 para

Ilustración 14: Comparación entre el modelo de rótula plástica EC2 y BCV

fondos de

compresión altos, alternándose los términos para fondos de compresión bajos. De cualquier modo, por establecer una comparación homogénea, dado que EC2 no recoge el efecto del cortante, en la figura 14 aparece el trazado medio de las curvas de BCV en comparación con EC2, viendo que los valores son muy similares. Con esta curva promedio procederemos en adelante.

3.6.- Consideraciones de servicio

3.6.1.- Régimen de fisuración de las secciones de hormigón armado

El régimen de fisuración admisible de las secciones de hormigón es el que se ha descrito ya en 3.4.2., sin que quepa hacer precisión más alguna.

3.6.2.- Régimen de deformación de las barras de hormigón armado

La cuestión de las deformaciones de las barras de hormigón armado flectadas supone uno de los problemas más difíciles de acotar por la gran cantidad de factores que intervienen: edad de puesta en carga del hormigón, historial de cargas, proporción entre cargas permanente y no permanentes, humedad del ambiente, temperatura, curado del hormigón,... Dado que no se pretende más que acotar un valor seguro, se debe tomar un modelo simplificado y con condiciones precisas. Así, se tomará para el estado de cargas lo que suele ser habitual en edificación convencional:

- Peso propio de la estructura: 40%
- Peso de acabados y tabiquería: 30%
- Carga de uso: 30%

Por tanto, el coeficiente medio global de las cargas será:

$$\gamma f_g = (0'40 + 0'30) \cdot 1,35 + 0'30 \cdot 1'50 = 1,41;$$

Aplicaremos el método simplificado de deformaciones que se indica en EHE08, que dicta que las deformaciones diferidas se obtienen mediante las instantáneas multiplicadas por un factor

$$\lambda = \frac{\xi}{1 + 50\rho'};$$

donde ξ depende del tiempo pasado entre el momento en que entra la carga en acción y el momento en que se determina la deformación diferida, y ρ' es la cuantía de armadura comprimida de la sección. Por tanto, deberemos estimar las deformaciones para distintas cuantías en compresión, C -, en la notación empleada hasta ahora.

Por tanto, para una carga determinada, denominaremos la deformación instantánea y la total como v_i y v_t . Así

$$v_t = v_i \cdot (1 + \lambda);$$

Considerando además que a medida que la estructura entra en carga pierde rigidez, la deformación instantánea para cada carga será distinta. Observando los valores de la rigidez de la sección en función del momento flector, la rigidez de las mismas cuando entra en carga los acabados y tabiquerías se ha reducido a un 55% de la que presentaba cuando sólo actuaba el peso propio. Finalmente, cuando entra la sobrecarga, esta reducción llega al 35% del valor original.

Por tanto, si disponemos del valor de la deformación total de todas las cargas como deformación instantánea, podemos decir que la deformación debida a cada carga por separado será:

$$v_{tot0} = v_{pp} + v_{acab} + v_{uso} = 0,40 \cdot v_0 + 0'30 \cdot \frac{v_0}{0'55} + 0'30 \cdot \frac{v_0}{0'35};$$

Para obtener las diferidas deberemos multiplicar cada una de ellas por sus %lambda correspondiente. La suma de lo anterior más las diferidas nos dará el total de la deformación. Pues bien, para las deformaciones totales se impone la condición normativa de que

$$v_{tot} \leq L/300;$$

Y para la diferencia entre la total y la que se produce cuando entran en carga los elementos rompibles (acabado y tabiquería) denominada deformación activa se impone el límite normativo de

$$v_{act} \leq L/500;$$

Por tanto, si denominamos a la flecha instantánea inicial para todas las cargas a un tiempo como

$$v_0 = L/\delta;$$

podremos determinar el valor de δ a partir de las dos anteriores condiciones. En la siguiente tabla aparecen los parámetros empleados para realizar la operación antes explicada y los resultados de δ obtenidos, indicándose el momento de entrada de cada carga (t_0) y el del momento en que calculamos (t_f) que será 1800 días para la deformación total y 90 días para la el inicio de la deformación activa.

t (días)	ζ
15	0,50
30	0,70
60	0,85
90	1,00
180	1,20
360	1,40
1800	2,00

ρ' (‰)		2,80		Flecha total			
	fracción	t0 (días)	tf (días)	λ	vtot/v0	L/vtot	L/v0
peso propio	0,40	30	1800	1,14	2,48	300	745
cargas muertas	0,30	60	1800	1,83			
uso	0,30	360	1800	1,59			
Flecha activa							
	fracción	t0 (días)	tf (días)	λ	vact/v0	L/act	L/v0
peso propio	0,40	30	90	0,26	1,61	500	804
cargas muertas	0,30	60	90	0,24			
uso	0,00	90	90	0,00			

ρ' (‰)		5,20		Flecha total			
	fracción	t0 (días)	tf (días)	λ	vtot/v0	L/vtot	L/v0
peso propio	0,40	30	1800	1,03	2,34	300	703
cargas muertas	0,30	60	1800	1,66			
uso	0,30	360	1800	1,44			
Flecha activa							
	fracción	t0 (días)	tf (días)	λ	vact/v0	L/act	L/v0
peso propio	0,40	30	90	0,24	1,48	500	742
cargas muertas	0,30	60	90	0,22			
uso	0,00	90	90	0,00			

ρ' (‰)	7,60	Flecha total					
	fracción	t0 (días)	tf (días)	λ	vtot/v0	L/vtot	L/v0
peso propio	0,40	30	1800	0,94	2,23	300	668
cargas muertas	0,30	60	1800	1,52			
uso	0,30	360	1800	1,32			
	fracción	t0 (días)	tf (días)	λ	vact/v0	L/act	L/v0
peso propio	0,40	30	90	0,22	1,38	500	690
cargas muertas	0,30	60	90	0,20			
uso	0,00	90	90	0,00			

ρ' (‰)	10,00	Flecha total					
	fracción	t0 (días)	tf (días)	λ	vtot/v0	L/vtot	L/v0
peso propio	0,40	30	1800	0,87	2,13	300	639
cargas muertas	0,30	60	1800	1,39			
uso	0,30	360	1800	1,21			
	fracción	t0 (días)	tf (días)	λ	vact/v0	L/act	L/v0
peso propio	0,40	30	90	0,20	1,29	500	647
cargas muertas	0,30	60	90	0,18			
uso	0,00	90	90	0,00			

Como valor medio ponderado tomaremos, entonces, que las deformaciones de las barras no serán críticas si la deformación elástica a plena carga de servicio no supera **L/700**.

3.6.3.- Criterios límite para condiciones de servicio

Como resumen, entonces, las condiciones de servicio para validar una solución de diseño para un determinado coeficiente de diseño es doble:

- que el momento flector en servicio en el centro del vano no supere el asociado a la máxima abertura de fisura admisible
- que la deformación elástica a plena carga no supere el valor L/700

Las condiciones de fisuración se imponen sólo al momento flector positivo porque la cara superior suele estar cubierta por acabados que protegen la estructura, quedando sólo la inferior como cara atacable por el medio ambiente.

3.7.- Límites de ductilidad y de servicio

3.7.1.- Determinación de los coeficientes canónicos

Para la determinación de los coeficientes canónicos o de diseño plenamente dúctil se ha elaborado una gama de datos para ser introducidos en el modelo no lineal empleado. Esta gama de datos es la siguiente, siempre para HA25 y B500S:

C-(‰)	λ	K	z/d^3
2,80	10	1	1
6,40	20	2	2
10,00	30	3	3
			4

³ Indica una variación del brazo de palanca efectivo que variará desde el que proporciona el acero en el límite elástico (1) hasta el que se tiene para deformación del acero al 10‰.

Analizados todos estos casos, que constan en el anejo 2, se obtienen los resultados pertinentes, que son:

- K coeficiente de diseño en rotura del que se parte
- K' coeficiente elástico que indica en qué momento se llega a la primera plastificación
- δ deformación relativa a la luz de la viga para la carga de servicio ($q_s = q_u/1.41$)
- Giro total de la rótula
- Comparación del momento flector positivo en servicio con los $MI \dots MIV$ para fisuración

Además, gráficamente, el modelo aporta los siguientes resultado, que permiten un diagnóstico sencillo a primera vista:

Carátula de datos y resultados

ROTURA	K	k(z/d)	$\mu(x/d)$	C- (‰)	λ	HA25	L/v	K'	K'/K	Θ^- mrad	Θ^+ mrad
NEG	1,000	0,89	0,26	2,80	20	B500S	679,29 DEF. EXC.	2,390	2,39	-8,107	-2,305

Ley de momentos flectores

Mu calc: Ley de momentos flectores calculada por el modelo // **Mu diseño:** Ley de momentos flectores de diseño (K) // **Ms teor:** Ley de momentos flectores para carga de servicio // **Me calc:** Ley de momentos flectores en el momento del inicio de la plastificación (K') // **MI...MIV:** valor de momento flector asociado a cada abertura de fisura (representa sólo los que interfieran con los momentos flectores en servicio)

Evolución de los momentos flectores en el proceso de carga

Evolución de los momentos flectores frente a la deformación del centro del vano

Deformadas

us: deformada para la carga de servicio q_s // **ur:** deformada en rotura // **v. lim:** deformación máxima elástica admisible ($L/700$).

Tomados los datos anteriores de todos los casos, para cada grupo de datos homogéneo, se trazan las gráficas K/K' para distintas esbelteces, del siguiente modo:

K0	2,29	k(z/d)	0,81	$\mu(x/d)$	0,51	C- (°/oo)	2,80	HA25 B500S
-----------	-------------	---------------	-------------	------------------------------	-------------	------------------	-------------	-----------------------

K/K'

De modo que se obtiene el valor de **K0** (canónico plenamente dúctil de cada grupo), comprobándose que es idéntico para todas las esbelteces con idéntica constitución interna, tal como prevé el modelo teórico. Los valores de **K0** obtenidos para todos los grupos de resultados son los siguientes:

Ilustración 15: Valores de distribución canónicos o plenamente dúctiles $K0$ en función del fondo comprimido de la sección y de la cuantía de armadura comprimida.

Parece haber una diferencia grande -la hay- en la distribución del valor de $K0$ para cuantías bajas frente a las medias o altas con fondos comprimidos escasos. Esto se debe a que el criterio de diseño empleado se ciñe a las secciones de momento flector negativo, lo que determina un brazo de palanca, que se decide conservar para el momento positivo. Esta decisión, que parece no demasiado lógica, es práctica habitual al dimensionar secciones armadas: conservar como patrón de diseño el canto, independientemente de la armadura comprimida y obviando cuál sea el fondo comprimido.

3.7.1.- Gráficas de resultados de ductilidad para distintas condiciones de diseño

Continuando con el proceso, determinados los coeficientes $K0$, dado que no siempre será posible o deseable diseñar la solución con dicha distribución, deberemos saber qué margen tenemos en los coeficientes de distribución de diseño K para que no se produzca la rotura por falta de ductilidad. Puesto que el modelo nos proporciona el giro total de la rótula, para cada caso de $K \neq K0$ podremos determinar el giro plástico por resta entre el giro total de la rótula detectado en K menos el detectado en $K0$, ya que el de este caso es sólo elástico y, por tanto, la diferencia será el giro plástico de la solución K . Es decir:

$$\Theta_{plas}(K) = \Theta_{tot}(K) - \Theta_{tot}(K0); \quad [3.56]$$

Con este procedimiento podemos entonces saber cuál es el giro plástico máximo asociado a cada caso, y de ello saber cuáles son los límites mínimos y máximos de K para asegurar que la ductilidad es suficiente. Si nos ceñimos sólo a la rótula de momento negativo, el K superior en realidad nos dice cuál es la distribución de solicitaciones que llevaría a la rotura la rótula de los empotramientos si la rotura comenzase en los momentos flectores positivos. Digamos entonces que su valor es meramente testimonial.

Abordado el sistema, se obtienen los siguientes resultados para los límites de K que aseguran la ductilidad del diseño escogido, valores que denominaremos $Klim$ en función de la esbeltez de la pieza, dejando la referencia en cada caso de cuál es el valor $K0$ del que se parte. Los resultados constan en las siguientes páginas, separados en tres tablas para cuantías de compresión bajas, medias y altas.

3.7.2.- Gráficas de resultados de servicio para distintas condiciones de diseño

Del mismo modo en que se ha procedido a limitar los valores límites de K por razones de ductilidad, se procede ahora para las condiciones de servicio. Ha de decirse que finalmente las condiciones de fisuración no se han incluido, pues su significado en los casos estudiados es escaso. Sólo para exigencias de abertura de fisura pequeñas (0'1 mm y 0'2 mm) se encuentran límites y para esbelteces altas, lo que es un problema ajeno al tipo de estructuras que tratamos. Por tanto, se ha obviado.

Sin embargo, la deformación sí impone límites a las posibilidades de tomar una diseño K u otro. En las siguientes gráficas se representan los valores máximos de esbeltez que se pueden alcanzar con distintos armados de compresión, distintos fondos comprimidos y distintos factores de diseño. O bien, los valores mínimos de K para que, con una determinada esbeltez se satisfagan las necesidades de deformación impuestas.

En las anteriores gráficas se ha tomado como límite que nunca se diseñen barras con $K < 1$, ni con esbelteces $\lambda < 10$.

Si acudimos a los valores concretos obtenidos, nos encontramos que para cuantías en compresión bajas -el dimensionado habitual- es difícil superar esbelteces de 25, y sólo con brazos de palanca muy altos, lo que casa bien con los valores que se preconizan en EHE08 y EC2. Para cuantías en compresión altas, es imposible superar la esbeltez de 25, lo que parece un contrasentido, ya que correspondería a sobreamados en compresión, destinados a aumentar la rigidez de las piezas cuando el efecto de la fluencia y la retracción es acusado. Pero tiene sentido desde el momento en que la comprobación de la pieza se hace para llevarla a su carga última -que será muy alta- y se toma para el cálculo de deformaciones una fracción de dicha carga. Es decir, los sobreamados son eficaces cuando la carga última de diseño está por debajo de la carga última posible del sistema.

3.7.3.- Límites conjuntos de ductilidad y servicio para distintas condiciones de diseño

Dado que debemos buscar la satisfacción simultánea de las condiciones de servicio y de ductilidad, juntando ambos criterios se obtienen los siguientes resultados. De la conjunción de ambos criterios aparecen los resultados que se representan en las siguientes gráficas, donde aparece el mínimo valor de K que se debe emplear para distintas esbelteces, de modo que se cumplan simultáneamente las exigencias de ductilidad y de servicio.

Resulta claro que las esbelteces altas requieren de K muy altos, de modo que en realidad la rotura de las secciones empezaría por el centro del vano y no por los empotramientos, lo que se mitiga bastante si el brazo de palanca de las secciones críticas es alto. En no pocos casos, los problemas de deformación obligan a tomar $K > K_0$, por lo que entonces sí entraría en juego aplicar los K_{lim} superiores por ductilidad, pero determinados para las secciones del centro del vano, ya que sería en ese punto donde se encontraría en realidad el problema de ductilidad.

Capítulo 4.- Estructuras de fábrica

“¡¡Us, us, us!!
¡¡Se cae'r so' a pedazo'!!

Una paisana de un pueblo de la Sierra Morena, pasando por la calle en pleno agosto a la hora de la canícula.

Índice

4.1.- Imposibilidad de aplicación del modelo.....	4.1
4.2.- Modelo de rótula de fábrica.....	4.4
4.2.1- Giros de las rótulas de fábrica.....	4.4
4.2.2.- Interacción entre momento flector y normal: excentricidad.....	4.9
4.3.- Algún caso de aproximación.....	4.9

4.- Estructuras de fábrica

4.1.- Imposibilidad de aplicación del modelo

La exploración de los casos de arcos de fábrica ha cosechado un fracaso total. Ni un solo caso de los explorados -constan algunos en el anejo 3- ha dado resultados satisfactorios. Es decir, podríamos obviar cuanto sigue. Sin embargo, que el fracaso se ciña a todos y cada uno de los casos ha de tener una razón de fondo y no puede ser mera casualidad. Es decir, algo en el planteamiento es erróneo.

De partida se contaba con ciertas incongruencias sabidas, las más relevantes las siguientes:

- Considerar sólo los momentos flectores en la definición de la rotura suponía obviar las compresiones de la fábrica, que son las que precisamente permiten su funcionamiento estructural. Pero el planteamiento del equilibrio de aquel modo es correcto, en principio.
- El empleo de la técnica gráfica en el análisis en rotura suele cometer un error -que se asume suficientemente pequeño- al tomar como lugar de paso de las resultantes de las fuerzas internas la línea de empujes en lugar de hacer lo mecánicamente correcto, que es tomar la línea de presiones, es decir la resultante sobre una sección dando un corte por ella.
- Como en el resto de casos en que se emplean directamente los teoremas de rotura, las deformaciones quedan ocultas, con lo cual no se puede saber si las deformaciones plásticas de las regiones a agotar satisfarán la demanda que el sistema les haga.

Con todo ello, se proponía al final, como en el caso del hormigón armado, obtener unas acotaciones al empleo directo de los teoremas de rotura según las consecuencias que se derivasen en servicio y en la propia rotura, ceñido este caso a cuál fuera la capacidad dúctil de la fábrica sola, que armada es otro cantar.

Pues bien, ni un solo resultado de los centenares explorados ha proporcionado algún dato útil. El modelo planteado no ha valido para nada, simplemente para poder afirmar que la determinación de la rotura de un arco por las formulaciones de rotura no se revela jamás en el modelo elastoplástico. Esto tendría como consecuencia que la demostración hecha en el modelo teórico de que el estado de rotura al que se llega con un modelo elastoplástico no lineal es el mismo que se predice mediante los teoremas de rotura sería falsa.

Puesto a introducir todos los datos ordenados para redactar este capítulo me di cuenta de que tal cosa es una sandez: proporcionar datos que no valen para nada. Pero en una última reflexión pensé en qué sucedería si en lugar de plantear el problema del arco en términos de momentos flectores se hiciera a través de los normales y sus excentricidades.

Planteado el problema del modo en que se ha planteado el del hormigón armado, podíamos plantear el equilibrio ($f(S_u)=0$) del siguiente modo (v. fig. 1):

$$\alpha_h = \frac{y_m}{h}; \alpha_m = \frac{M(xm)}{M_{iso}}; \quad [4.1]$$

$$M_m + M_e(\alpha_h - 1) - M_c \alpha_h - M_{iso}(\alpha_h - \alpha_m) = 0; \quad [4.2]$$

$$M_m + \left(\frac{1}{K_e}(\alpha_h - 1) - \frac{1}{K_c} \alpha_h \right) - M_{iso}(\alpha_h - \alpha_m) = 0; \quad [4.3]$$

Ilustración 1: Modelo de arco

La representación gráfica de [4.2] es evidentemente un plano, como aquí se demuestra:

Ilustración 2: Superficie de rotura del arco

Por tanto, el sistema de escoger las regiones a plastificar y asignarles proporciones de rotura entre ellas puede hacerse sin más problemas, para investigar qué proporción nos da el régimen de plena ductilidad y referir los demás a él. Tal como hemos hecho con el hormigón.

Sin embargo, si consideramos que cada momento último de las secciones está asociado a un normal que agota la sección -ése es su estado último irrevocable- sucederá que entonces los anteriores momentos últimos Me , Mm y Mc se expresarán como:

$$M_i = N_i \cdot e = N_i \cdot (h/2 - hf/2); \quad [4.4]$$

siendo h el canto de la sección del arco, b su ancho, y hf el doble de la distancia de la resultante de la compresión al borde más cercano a ella. Ahora bien, si el material resiste fd , entonces:

$$hf = \frac{N_i}{b \cdot fd}; \quad [4.5]$$

por tanto será:

$$M_i = N_i \cdot e = N_i \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{N_i}{2b \cdot fd} \right); \quad [4.6]$$

Ilustración 3: Relación entre el normal y el momento flector en una sección de fábrica

que es la ley parabólica que expresamos siempre para el comportamiento de una sección de fábrica en rotura. Por tanto, si el material del arco es siempre de resistencia fd , con una sección de dimensiones $b \cdot h$, es evidente que si el normal varía de valor de una sección a otra, resulta inviable que la distribución de momentos en rotura sea con valores iguales en todas las secciones. Por tanto, si expresamos **la superficie de rotura con todos sus términos reales**, dicha superficie **no es plana, sino parabólica** y los coeficientes de diseño deberían aplicarse por tanto a los normales de compresión y a las excentricidades simultáneamente, pero con valores distintos para ambos. Tampoco sería viable que el normal fuera constante sin más, haciendo constante también la excentricidad, porque representaría lo mismo que tomar la superficie de rotura errónea mencionada.

Ilustración 4: Ley parabólica de agotamiento de una sección de fábrica

Ésta es la razón de fondo del fracaso del modelo planteado. Al ser la superficie convexa y no plana, ya no se cumple la condición de que la deformada de colapso se mantiene para cualquier distribución arbitraria de solicitaciones que satisfagan el equilibrio, sino que para cada solución de equilibrio distinta la configuración de la forma de rotura cambiará. Por tanto, al realizar distribuciones de diseño para los valores de K_e y K_c en [4.3], supuesto que se aplican para el valor de solicitación

de una sección ya prevista del arco, no se está en realidad prediciendo nada, porque el cambio de solicitaciones estará asociado a otra deformada de colapso diferente de la que ignoramos en principio todo.

Por tanto, el procedimiento explicado para las vigas de hormigón armado resulta del todo inválido en este caso, **por no ser la superficie real de rotura plana.**

De cualquier modo, como durante el desarrollo de los modelos y la inspección de resultados alguna cuestiones de interés sí han quedado, en lo que sigue se citan tales cosas.

4.2.- Modelo de rótula de fábrica

El modelo de rótula para fábrica es del todo similar al de hormigón armado, como se explica en el anejo 1, pero tiene interés mostrar su comportamiento por la diferencia sustancial de la ausencia de acero. Así como la relación entre momentos flectores y giros en el hormigón armado no tiene saltos o discontinuidades, en el caso de la fábrica sí, pues al fisurarse la sección hay un cambio abrupto de rigidez que se revela en un cambio súbito en el fondo comprimido de la sección.

También tiene interés que en el hormigón armado, los fondos de zona comprimida pequeños permiten giros de la rótula mayores, al permitir el acero alargándose un pivotamiento contra la máxima deformación comprimida del hormigón. Aquí no, pues el centro de pivotamiento es justo la línea neutra y se llega a la deformación excesiva de la fábrica que provoca la rotura. Lo mismo sucede con fondos de compresión grandes, pero en este caso de manera similar a la del hormigón armado.

4.2.1- Giros de las rótulas de fábrica

A continuación se muestran las deformadas (escala 20:1) de la rótula de fábrica para distintos fondos comprimidos, es decir para distintos grados de agotamiento por compresión excéntrica, que nos daría el momento que soporta la rótula.

Los giros determinados son los asociados al momento de la fisuración de la sección, antes y después de fisurarse, que corresponde con los valores de Θ_{fis} y $\Theta_{fis p}$, respectivamente, y al momento último de rotura Θ_{tot} . Por diferencia entre el giro total y el de fisuración justo antes de fisurarse se ha determinado el giro plástico.

Como se observa, entre los dos giros justo en el momento de fisurarse se produce un escalón en la relación entre momento y giro, que refleja la rotura súbita de la zona traccionada. Lógicamente, el escalón es de mayor entidad cuanto menor es el fondo comprimido, por la mayor cantidad de sección que pasa a fisurarse.

	x/h		f_d (N/mm ²)		Θ tot. (mrad)	Θ fis (mrad)	Θ fis p (mrad)	Θ plas (mrad)	
	0,16		6,47		8,69	0,11	3,57	8,59	

Deformada

(M/Mu) / Giro

	x/h		fd (N/mm2)		⊖ tot. (mrad)	⊖ fis (mrad)	⊖ fis p (mrad)	⊖ plas (mrad)	
	0,25		6,47		16,51	0,11	4,32	16,41	

Deformada

(M/Mu) / Giro

	x/h		f_d (N/mm ²)		Θ tot. (mrad)	Θ fis (mrad)	Θ fis p (mrad)	Θ plas (mrad)	
	0,50		6,47		5,26	0,11	0,83	5,16	

Deformada

(M/Mu) / Giro

	x/h		f_d (N/mm ²)		Θ tot. (mrad)	Θ fis (mrad)	Θ fis p (mrad)	Θ plas (mrad)	
	0,90		6,47		0,84	0,11	0,14	0,73	

Deformada

$(M/M_u) / \text{Giro}$

4.2.2.- Interacción entre momento flector y normal: excentricidad

Por último se presenta la gráfica siguiente, con la relación entre el fondo comprimido de la rótula y el giro plástico de la misma, observándose que la mayor ductilidad se alcanza para fondos comprimidos en el entorno de un 25% del canto de la sección. Es decir que la excentricidad de la resultante de compresiones en la sección es también la que marca su comportamiento dúctil y no sólo el resistente.

En lo que revela esta gráfica está el fundamento de que, en los pocos casos en que el modelo global de arco ha detectado alguna solución, ésta haya sido inválida por falta de ductilidad. En las excentricidades altas la capacidad dúctil de la rótula es escasa y en las compresiones altas también. Así, si se asocia la capacidad última de las secciones a excentricidades cuanto mayores mejor, el fracaso por falta de ductilidad está asegurado.

4.3.- Algún caso de aproximación

De los casos explorados, se expone uno -y los que constan en el anejo 3- que representa los pocos en que el modelo ha dado algún resultado *aprovechable*. Se presentan en el anejo arcos de medio punto ($\lambda_g = 2,00$, relación entre la luz del arco y su altura en la clave), donde las soluciones viables que no fracasan por imposibilidad de equilibrio, pues simplemente la resultante de las fuerzas está fuera de la superficie capaz, se ciñen a esbelteces mecánicas (relación entre el desarrollo del arco y su canto) en el entorno entre $13 \leq \lambda_m \leq 17$, y para relaciones de compresión entre el normal del empotramiento y el de la clave del doble a favor del empotramiento. En tales casos, además, el trazado de la línea de empujes (posición del empuje respecto de la directriz del arco en cada sección) y el de la de presiones (posición de la resultante de las fuerzas internas con respecto a la directriz del arco) tienden a confundirse, por más que representen cosas distintas. Además, el bloque comprimido está severamente limitado en su rango, siendo casi imposible comprimir más allá de un 40% de la sección de la clave sin que la solución sea inviable.

Esta solución posible que se presenta, como las que constan en los anejos, consiguen llegar al equilibrio, pero del modo de aplicación estático según los criterios habituales en fábrica, consistentes en que la resultante esté dentro de la superficie capaz de la estructura. Por supuesto, si se aplican criterios de resistencia de la sección, deberíamos tomar valores de esbeltez geométrica mayores o bien de esbeltez mecánica menor para poder garantizar el equilibrio y que no se llega a la rotura de la sección.

$K=Ne/Nc$	x/h (cen)	λg	λm
2,00	0,20	2,00	17,00

forma / línea empujes / línea presiones

Se aprecia que la excentricidad en la base ha de ser por fuerza menor que en la clave, por el incremento de la compresión. Tomada como referencia la posición de la resultante en la clave se han buscado los valores de referencia de K (compresión en el empotramiento frente a la compresión en la clave) que nos han dado como resultado que la línea de presiones fuera tangente como mucho a la forma del arco. Realmente es una solución poco útil, porque la sección intermedia del arco ha roto con toda seguridad, al superarse la excentricidad máxima posible por resistencia de la fábrica. Pero aún antes de llegar a tal estado, el modelo ha detectado la rotura en el entorno por falta de ductilidad (que se representan en la gráfica por rombos sobre la directriz del arco en las secciones en que ha ocurrido). Es evidente, entonces, que el trazado de la resultante sobre el arco, con las condiciones que se quiera, no asegura ni la resistencia ni la ductilidad suficiente de la estructura.

Pero lo que se manifiesta muy claramente en esta gráfica es la razón de la imposibilidad del planteamiento de origen. En el rombo azul se representa la sección sobre la que se había supuesto la rotura para cualquier distribución de solicitaciones posible (empleo de la ecuación lineal en rotura, o superficie de rotura plana). Sin embargo, para puntos de la directriz más bajos que el representado, que ya ha presentado rotura por falta de ductilidad, aparecen mayores momentos flectores sobre el arco y compresiones mayores que en el punto de referencia. Es decir, la rotura real, al alterar las solicitaciones de secciones cualesquiera, ha desplazado la posición de la rótula a la que corresponde según su superficie

curva de rotura, no manteniéndola en la posición que prevé la falsa ley plana de rotura.

Por tanto, el planteamiento para arcos de fábrica no puede ser ni el tradicional de la línea de empujes ni es posible encontrar un sistema paramétrico de diseño que prevea las roturas en zonas determinadas. Es decir, el planteamiento que se ha hecho para las vigas de hormigón, en que para un parámetro de diseño K se puede referir su solución a un K_0 determinado, en los arcos no se puede hacer de manera tan sencilla, pues la alteración de las proporciones entre solicitaciones últimas altera la posición de las zonas plastificadas, por ser la superficie de rotura del sistema no plana.

Capítul 5.- Conclusiones

[...] *Establertes clarament les coses en aquestes termes,
no crec que en aquest moment calgui dir res més
-llevat d'agrair al lector la seva curiositat si és que es produeix
i la crítica potser se suscitarà, que jo voldria tan viva com correspon
a l'esforç que tots plegats hem de fer.* [...]

Josep Pla i Casadevall
“El quadern gris”

[...] Establecidas claramente las cosas en estos términos, no creo que en este momento quepa decir nada más -aparte de agradecer al lector su curiosidad si es que se produce y la crítica quizá se suscite, que yo querría tan viva como corresponde al esfuerzo que conjuntamente hemos de hacer.
[...]

Índice

5.1.- Conclusiones generales.....	5.1
5.2.- Sobre el diseño en carga última de estructuras de hormigón armado.....	5.1
5.3.- Sobre el diseño en carga última de estructuras de fábrica.....	5.3
5.4.- Consecuencias: comprobaciones a realizar y campos por explorar.....	5.4

5.- CONCLUSIONES

5.1.- Conclusiones generales

En lo encontrado en este trabajo, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- En cualquier estructura se puede encontrar, para cada condición de constitución interna, una distribución de esfuerzos que lleve el sistema al inicio colapso sin demanda de ductilidad
- Dicho estado de solicitaciones actúa como referente canónico de cualquiera otra distribución de solicitaciones en equilibrio que arbitrariamente -si la superficie de rotura es plana- se pueda plantear, y cualquier estado de deformaciones plásticas y de desplazamientos de una de estas soluciones puede cuantificarse en función de la cercanía a la solución canónica mencionada. Si la superficie de rotura no fuera plana, las condiciones cambiarían, pues habría que buscar para cada solución plenamente dúctil o canónica cuál es la configuración cinemática correspondiente, lo cual para superficies de rotura planas no sucede, pues la cinemática de colapso se mantiene.
- La carga última de un sistema, obtenida mediante el recorrido de carga hasta la rotura, coincide con la carga última determinada por el teorema de unicidad de los teoremas de rotura, quedando además las deformaciones y el campo de desplazamientos determinados, junto con las solicitaciones en estado último
- El estado canónico de rotura, para piezas lineales, es independiente de la esbeltez de las mismas, anulando así la dicotomía entre deformaciones demandadas y posibles, mientras que la demanda de deformaciones plásticas, en otro caso, depende de la esbeltez de la pieza, en distinto grado dependiendo de cuál sea el tipo de carga
- Desde un punto de vista energético, la coincidencia del planteamiento potencial del equilibrio con la carga última en rotura, implica que la ductilidad es suficiente si la máxima energía de deformación acumulada por el sistema es igual a la mínima necesaria para verificar dicho equilibrio, enunciado que se deja como mera conjetura, pues si bien del desarrollo teórico así se desprende, no se tiene la certeza de que la aseveración sea del todo correcta. Implícitamente reside el que la parte del sistema que queda en estado elástico coacciona cuánta pueda ser la deformación plástica de las regiones que hayan de llegar hasta su estado límite último.

Estos resultados, que no se ciñen al hormigón o la fábrica, sino que son generales para cualquier sistema constituido con un medio elastoplástico, podrían emplearse para la optimización de estructuras de cualquier tipo. Es decir, asumiendo una extrapolación un tanto arriesgada, si la cantidad de estructura y la deformación de la misma, que dependen de su trabajo interno, se pueden minimizar, estaremos ante un óptimo. Puesto que los sistemas canónicos o plenamente dúctiles suponen la ausencia hasta rotura de deformaciones plásticas, la energía de deformación -interna- del sistema será siempre menor que otro sistema no canónico, pudiendo, quizá, representar un óptimo en consumo y deformación. Estas exploraciones son del tipo de las que se pueden encontrar en Quintas Ripoll [1989, 2010] o Vázquez Espí [1995]. También en Cervera et al. [2010].

Como propuesta general, si se puede abordar el estudio de cualquier tipo estructural bajo la óptica de determinar cuál es el representante canónico del problema, el que mantiene las condiciones elásticas hasta llegar a su carga última, podremos entonces escribir patrones de referencia que nos guíen sobre las variaciones que respecto de ese patrón sean previsibles en un diseño concreto.

5.2.- Sobre el diseño en carga última de estructuras de hormigón armado

En el caso del hormigón armado, la determinación de las distribuciones canónicas o plenamente dúctiles, permite una referencia a partir de la cual poder establecer, para condiciones de diseño interno

determinadas, la viabilidad de otra distribución de solicitaciones bajo unas premisas de ductilidad y servicio preestablecidas, de modo que la aplicación del teorema estático no derive en consecuencias inseguras -por falta de ductilidad- o inservibles -por exceso de deformación o de fisuración-. De este modo se pueden establecer unos límites claros de esbeltez de la pieza y configuración interna de las secciones que permitan asegurar que una determinada distribución de solicitaciones en estado último es satisfactoria, sin necesidad de comprobaciones posteriores.

Sin embargo, en esta tesis sólo está la base para tal tarea, pues la casuística es enorme. Por un lado, aquí sólo se ha abordado el proceso para unos materiales y condiciones que son las más usuales, pero que en absoluto son extrapolables a cualquier otro caso sin más. En concreto, habría que establecer unas categorías expresas y bien acotadas sobre las que aplicar el método, que recogieran los siguientes aspectos al menos:

- **Geometría de las secciones** de las barras: secciones rectangulares, secciones en T (con comportamiento muy distinto para momentos flectores de signo distinto)
- **Tipos de hormigón y de acero** a emplear: la combinación de ambos determina las deformaciones en servicio y las posibles deformaciones en estado último. Los aceros de mayor ductilidad proporcionarán mayores posibilidades de ductilidad, mientras que los hormigones de alta resistencia presentarán problemas por la menor deformación en rotura que los hormigones normales. Asimismo, la fisuración de los hormigones de alta resistencia siguen patrones distintos a los de resistencia normal, pues se puede producir la rotura del árido de la masa y no sólo de la masa cementicia, que es lo que sucede en hormigones normales. Esto condicionará el comportamiento en servicio, sea por la apertura de fisuras como por la deformación, a consecuencia de la alteración de la inercia fisurada de las secciones.
- Las distintas **estrategias de armado local**, es decir, de las secciones, pudiendo aplicarse criterios distintos a secciones críticas de la misma barra según las necesidades de ductilidad o de deformación a cumplir. Básicamente se trataría de abordar el diseño de la sección según el fondo comprimido y la cuantía de armadura comprimida, precisando ambos parámetros para distintas necesidades de las secciones en su estado último o de servicio.
- Las distintas **estrategias de distribución del armado** a lo largo de la pieza, según se mantengan constantes los armados por regiones extensas o se ajusten en mayor medida a la demanda resistente de cada tramo de menor dimensión. Es decir, del despiece en grupos de armaduras que se haga.
- Distintos **tipos de sustentación** de los extremos, pues deberá analizarse para los vanos extremos, donde uno de los extremos prácticamente está libre de coacción al giro, o para la continuidad de vigas de distintas luces entre apoyos, o para condiciones de secciones variables a lo largo de los vanos.
- **Tamaño de la estructura**, que incide enormemente en cuál sea la fracción permanente de carga frente a la sobrecarga, lo que incide en las condiciones de servicio gravemente. Y no sólo, pues si la carga permanente es la práctica totalidad de la carga, podemos entonces considerar el estado de cargas como totalmente permanente, lo que permitiría un margen de ajuste de la solución canónica o plenamente dúctil mucho mayor, ya que se determina para unas acciones externas determinadas, cuya variabilidad puede suponer cambios considerables en cuál sea esa solución canónica.
- **Tipos y relación de cargas**, pues si bien no son frecuentes o deseables, las cargas puntuales no han sido exploradas -y en este caso la solución canónica sí depende del tamaño de la estructura- y sólo se ha empleado la carga distribuida. Si las sobrecargas a emplear, además, son altamente variables en magnitud y posición, entonces habría que estudiar cuál sería el referente canónico a emplear, pues para cada estado de cargas distinto se alteraría éste.

Pero resuelto lo anterior, podríamos aplicar con seguridad distribuciones predefinidas de solicitaciones en las vigas con la seguridad de que se satisfacen las condiciones de ductilidad y de servicio previamente impuestas. Es decir, podremos aplicar el teorema estático de la rotura, tan sencillo en la práctica, habiendo eliminado la incertidumbre acerca de su validez.

Desde luego, una práctica indiscriminada de distribución de esfuerzos en carga última de manera arbitraria es algo totalmente desaconsejable, y desde luego jamás para esbelteces medias ($\lambda=20$) o altas ($\lambda=30$) se debe emplear la distribución equirresistente ($M_u^+=M_u^-$; $K=1.00$), pues fácilmente deriva en excesos de deformación en servicio y en ductilidades o escasas o muy ajustadas, tanto como para temer que no sea posible la verificación de la carga última. Y como línea general de conclusión, la certera afirmación de Schlaich et al. [1987] de ceñirse en lo posible, al diseñar estructuras en carga última, a lo que dicte el estado elástico es un procedimiento prudente y acertado.

Hay un campo importante en que el método empleado puede ser de ayuda. En el **análisis y dimensionado sísmico** en hormigón armado, uno de los factores primordiales para afirmar la seguridad de una solución es la capacidad de ductilidad del sistema, de modo que en la mayor medida posible pueda disipar la energía recibida del sismo mediante grandes deformaciones internas de las secciones críticas. Si podemos establecer una solución canónica en su comportamiento estático, sabremos entonces que toda la ductilidad posible del sistema está a disposición del efecto dinámico, lo cual supone una ganancia considerable. Además, si no se ha seguido el patrón canónico de distribución de esfuerzos, podemos entonces cotejar cuál es la reserva dúctil de las secciones para verificar si la seguridad ante la acción sísmica es suficiente. Habría que introducir el matiz del comportamiento de las rótulas ante acciones sísmicas, por dos motivos. Por un lado, por el fenómeno de carga-descarga debido a la alteración del sentido de las fuerzas sísmicas durante su existencia. Pero, además, por esa misma alternancia en el sentido de las fuerzas sísmicas, puesto que en estructuras porticadas de cierta altura se produce en los empotramientos de las vigas contra los pilares la denominada inversión -las solicitaciones de flexión cambian de signo-, habrá que observar entonces cuál es la cuantía de compresión como de tracción, ya que se pueden alternar en su comportamiento, y no será entonces la disposición del armado en la sección el mismo -ni su ductilidad ante las solicitaciones- que si no existe la mencionada inversión.

5.3.- Sobre el diseño en carga última de estructuras de fábrica

Sobre las estructuras lineales de fábrica -arcos, en realidad- cabe expresar un fracaso en cierto modo anunciado. Por simple aberración mecánica, la suposición de que las excentricidades de la resultante pueden ser tan grandes como se desee debe desecharse. Es más, se obtiene claramente que si se desea verificar un máximo de capacidad dúctil de las secciones, no debe recurrirse a excentricidades relativas de la resultante lejanas a 0.375 -correspondientes a una profundidad de la zona comprimida de 0.25-, para las secciones críticas. Además, el empleo en el análisis límite o en rotura del procedimiento gráfico debiera alterarse para emplear la resultante de las fuerzas sobre la sección -línea de presiones- frente a la del empuje -línea de empujes-, pues es lo que mecánicamente es correcto.

En realidad, lo erróneo del proceso habitual reside en una extrapolación de los procedimientos de flexión pura, donde sólo los momentos flectores intervienen en la definición de la rotura de las secciones, cuando es la combinación de las compresiones con los momentos flectores la que la determina. Es decir, se está sistemáticamente obviando la existencia de las compresiones en la determinación del estado de rotura. De hecho, si enunciamos el problema desde el punto de vista de las flexiones, encontramos que la sección intermedia del arco -ni la central ni la del empotramiento- que alcanza el mayor momento flector no se corresponde con aquella donde se produce la rótula, pues la combinación de las compresiones con las flexiones lleva la sección de rotura algo más cerca de los empotramientos que lo que dicta la sola inclusión de las flexiones. Por tanto, emplear como en el caso de las vigas, la cinemática de colapso predicha por el convencional procedimiento de aplicar el procedimiento estático, es una solución insegura, pues no detecta la realidad del estado de rotura. Es decir, no podemos emplearlo como referencia para comprobaciones posteriores. De hecho, el problema de fondo está en que al suponer el equilibrio del sistema sólo a través de los momentos flectores se está enunciando una superficie de rotura del sistema que es falsa -es una superficie plana- cuando la realidad es que no es plana al considerar los normales y sus excentricidades, pues la definen funciones parabólicas.

La realidad más evidente es que si queremos garantizar la mayor ductilidad posible, determinada la excentricidad óptima que lleva a la mayor deformación de las rótulas, por el aumento de la compresión hacia los empotramientos, obligaría entonces a dimensionar los arcos con cantos variables crecientes desde la clave hasta el empotramiento, cosa que no en pocos casos se da. Si el canto de los arcos ha de ser constante, entonces no queda más remedio que alterar las condiciones de ductilidad de unas secciones críticas frente a otras, pues si tomamos una excentricidad como referencia para una de ellas, las demás quedan determinadas unívocamente, limitadas por la tensión en rotura del material, y en tal caso, como se ha visto el sistema fracasa siempre.

Ahora bien, lo anterior tiene matices importantes. Cuando la estructura tiene una capacidad sobreabundante respecto de las solicitaciones, el análisis límite convencional por métodos gráficos, no dando resultados precisos, sí los da con suficiente cercanía como para poder aceptar su diagnóstico. Y más aún cuando se trata de arcos muy tendidos (λ_g alta), donde la diferencia entre trazar la línea de presiones o la de empujes supone una diferencia nimia. Pero con la precisión de que, conceptualmente, es un procedimiento errado. Por tanto, el empleo del método estático por procedimientos gráficos lo podemos considerar “seguro” sólo bajo las condiciones anteriores, que precisamente se cumplen casi siempre en estructuras históricas, campo en el que se emplea con gran profusión. En otros casos o como herramienta de diseño se torna en un método inseguro y de utilidad nula. Los resultados de este trabajo así lo revelan.

Por tanto, los procedimientos a emplear para estimar el análisis en rotura de arcos de fábrica -si bien el expuesto aquí no puede ser uno de ellos- debiera ceñirse más bien a los que aparecen en Cervera [2010] o Roca et al. [2013, 2014].

Un último apunte, algo ajeno a la enjundia de este trabajo, es que por comparación con lo que sucede en el hormigón -por analogía de comportamiento mecánico con la fábrica- es muy relevante observar la gran aportación que el acero supone, que va más allá de la simple capacidad de suplir las tracciones que se generan al abrirse las fisuras y poder equilibrar los momentos flectores mediante ausencia de compresiones. Observando los giros de las rótulas, es la presencia del acero la que permite -en realidad su tramo dúctil- que el hormigón armado tenga ductilidad más o menos acusada. No es que sea esto novedad alguna, pero sí incide en que las construcciones de fábrica armada, ajenas a casi cualquier normativa, pueden asimilarse sin peligro a los modelos de hormigón armado. Personalmente, supone la certeza más o menos clara de que las construcciones que con tal procedimiento he levantado se han diseñado con un modelo correcto y no aleatorio y simplemente imaginado.

5.4.- Consecuencias: comprobaciones a realizar y campos por explorar

Lo analizado en este trabajo deja abiertas ciertas incógnitas y abre ciertas líneas de investigación que se podrían proponer.

En primer lugar, para el hormigón armado, el modelo de rótula empleado, por más que sea algo refinado, debiera ser contrastado con resultados experimentales. Así, realizar ensayos hasta rotura de piezas hiperestáticas de hormigón armado o fábrica debería darnos la pauta de hasta qué punto el modelo empleado es preciso. Los resultados obtenidos son bastante consonantes con lo que la normativa indica, con lo que cabría suponer que no es un modelo muy errado. Es más, aporta precisiones que el EC2 obvia, como es el efecto del esfuerzo cortante en las deformaciones plásticas de las rótulas.

Por otro lado, la misma afirmación teórica de que existe una distribución canónica de solicitaciones que lleva la estructura hasta colapso sin demanda de ductilidad, debiera comprobarse experimentalmente. No tanto por la existencia en sí de tal estado, que no tiene duda, sino por acotar si los valores teóricos encontrados coinciden con los reales en la práctica. Igualmente habría de hacerse con las deformaciones elásticas calculadas, por corregir o validar los resultados obtenidos.

Curiosamente, no existen demasiados ensayos de comportamiento en carga última con estructuras hiperestáticas. Por ejemplo, Carpinteri y Debernardi, en el Politécnico de Turín, han realizado

muchos ensayos de modelos para cotejar el comportamiento de las rótulas de hormigón, pero siempre sobre piezas isostáticas, lo que supone obviar el condicionamiento que la parte elástica del cuerpo supone sobre la capacidad dúctil del sistema, que es realmente el problema a abordar. Es decir, los anteriores ensayos debieran producirse sobre piezas hiperestáticas para poder comparar lo obtenido aquí con ellos.

Con las anteriores experimentaciones, entonces, sería posible elaborar toda una doctrina de diseño previo de piezas hiperestáticas de hormigón armado, que pudieran incorporarse a manuales y códigos, de modo que se pudiera cotejar *a priori* y con seguridad que un diseño concreto -en constitución interna y en distribución de esfuerzos- es capaz de satisfacer condiciones impuestas de principio. Que sigue siendo algo pendiente, a pesar de la gran cantidad de avances que existen ya acerca de las comprobaciones en rotura de elementos de hormigón armado. Pero la elaboración a partir del diseño de un sistema coherente de diseño en carga última sigue estando pendiente. Aplicando el modelo explicado en esta tesis, se podrá abordar tal cosa.

Respecto al procedimiento de empleo de la técnica de los Elementos de Contorno para la simulación del comportamiento en rotura de las rótulas, los resultados son bastante satisfactorios en principio. Por tanto, cabría intentar aplicar esta técnica de manera general para estructuras de fábrica, por ejemplo. Como se explica en el anejo correspondiente, la introducción de la fisuración del material, así como su plastificación, no supone un problema acusado y la reproducción de ambos fenómenos tiene de referencia muchos modelos a emplear. Los últimos referidos a fisuración, si bien no empleados en este trabajo, los realizados por Sancho Aznal et al. [2013].

Por último, acudiendo a la teoría del diseño de estructuras -reiterando lo ya dicho-, la existencia de los representantes canónicos de distribución de esfuerzos para constituciones internas determinadas, en su demostración teórica, no ha acudido a definir si el sistema es de un material u otro, o si la forma es una u otra, por lo que se me antoja que, como concepto, pudiera ser generalizable a cualquier tipo estructural con cualquier material, lo que abriría un amplio campo en la investigación de este asunto. Pero es una idea tomada un tanto al vuelo que ignoro si puede ser realmente de utilidad o de avance en el conocimiento del diseño de estructuras. Queda o para otros o para más adelante.

Juan F. de la Torre
Madrid, enero de 2016

Bibliografía

[...] “Es pues, de saber, que este sobredicho hidalgo,
los ratos que estaba ocioso -que eran los más del año-,
se daba a leer libros de caballería...”
”...y así llevó a su casa todos cuantos pudo haber dellos;...”
“... y aquellas razones suyas le parecían de perlas...”
“Con estas razones perdía el pobre caballero el juicio,
y desvelábase por entenderlas y desentrañarles el sentido,
que no se lo sacara ni las entendiera el mismo Aristóteles,
si resucitara para solo ello.” [...]

Miguel de Cervantes Saavedra
“El ingenioso Hidalgo Don Quijote de la Mancha”

De la presente bibliografía diría que sólo una fracción minoritaria ha sido empleada de manera directa en el desarrollo de esta tesis. Más se ha acudido a los textos fundamentales de concepto o innovadores que a desarrollos derivados posteriores. Sin embargo, se citan artículos y libros que, sin haber sido de tanto uso, permiten tener referencias de lo que se cita y se discute a lo largo de ella. En algún caso se cita sólo alguna obra o artículo de un autor, como representativos de su trabajo, porque no existe una sola publicación que condense el total. También en otros casos se cita alguna referencia como tal, sin más, simplemente para señalarla en el texto general como tendencia o aportación existente, pero sin ligazón concreta con esta tesis.

Es de señalar algo curioso y no irrelevante. Habiendo utilizado para actualizar la bibliografía algunos buscadores especializados de los más potentes, la cantidad de referencias de los últimos diez años frente a las anteriores se ha más que decuplicado. A la par, las referencias a libros frente a las de artículos y otros textos de menos tamaño y profundidad, se han reducido drásticamente, hasta el punto de que casi se puede decir que los libros están al borde de la extinción. Esto supone, a mi juicio, dos problemas graves. El primero es que la cantidad de información existente es de tal tamaño que es ya inmanejable, porque la categorización ya no da para abarcar toda la dispersión de asuntos que bajo un mismo término se alojan. El segundo es que, al estar desapareciendo los libros como tales -compilaciones de textos sueltos sobre un tema, hay bastantes- el conocimiento que está quedando escrito no está compilado en un cuerpo de doctrina conjunto y coherente, sino que es una suerte de casuística dispersa que se puede agrupar en fajos de elementos similares yuxtapuestos, pero que no conforman un árbol, una estructura de pensamiento compacto. Quizá esto no sea malo y suceda que, por edad, aprendí de otro modo y ya me haya quedado fuera de los modos nuevos.

- AA.VV.; “Eurocode 2: EN 1992-1-1-2008. Part 1: General rules and rules for buildings”. European Committee for Standardization, European Commission, 2008, Brussels.
- AA.VV.; “Eurocode 6: EN 1996-1-1-2005. Part 1: General rules and rules for buildings”. European Committee for Standardization, European Commission, 2005, Brussels.
- AA.VV.: “Instrucción de hormigón estructural EHE08”. R.D. 1247/2008. Ministerio de Fomento, 2008, Madrid.
- AA.VV.: “Código Técnico de la edificación. Seguridad Estructural. Fábrica. (CTE-DB-SE-F)”. R.D. 314/2006. Ministerio de la Vivienda (extinto), 2006 Madrid.
- Alarcón, E., Reyero, P. “Guía de introducción al Método de los Elementos de Contorno”. ETSI Industriales, Universidad Politécnica de Madrid, 1983 Madrid
- Alarcón, E., Doblare, M., Sanz-Serna, J. “Evaluación de integrales singulares y cuasisingulares en el método de los elementos de contorno bidimensional mediante transformaciones no lineales”. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y diseño en Ingeniería, vol. 7, 1991 Barcelona.
- Alarcón, E., “Elementos de Contorno Adaptables”. Hormigón y Acero, nº, 149, 1983; Madrid.
- Aliabadi, M.H.; Corradi, S.; Marchetti, M.; “A variable stiffness plasticity dual boundary element formulation for fracture mechanics”. Transactions on Modelling and Simulation, Vol. 10, WIT Press, 1995, Southampton.
- Aroca Hernández-Ros, R. “Estrategias de armado en estructuras reticuladas de hormigón”. Informes de la construcción, vol. 40, 1988, Madrid
- Ávila Jalvo, J.M. “Equilibrio y estabilidad. Un ejercicio aplicado en una cúpula sencilla para diferenciar estos conceptos, para medir el segundo a través del balance de su energía potencial...y añadiendo unos comentarios finales acerca de para qué vale todo esto a la hora de observar el patrimonio construido”. SRC.
- Bairán, J.M., Marí, A.R., Mohr, S. “Estudio del comportamiento del hormigón armado y tangentes mediante modelos seccionales de interacción completa”. Informes de la Construcción, vol. 62, abril-junio 2010, Madrid
- Bairán García, J.M. “Proyecto de estructuras de hormigón armado con armaduras de alta ductilidad”. Tesina de especialidad. Universidad Politécnica de Cataluña, 2007 Barcelona.
- Brebbia, C.A.. “The boundary element method for engineers”. Pentech Press, 1984 London.
- Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., Wrobel, L.C.. “Boundary Element Techniques”. Springer Verlag, Berlin, 1984.
- Calavera Ruiz, J.; Corres Peiretti, H.; Fernández Gómez, J.A.; León González, F.J.; “Leyes de esfuerzos para el dimensionamiento de forjados hipertestáticos de hormigón pretensado. Análisis experimental hasta rotura”. Hormigón y acero, nº 177, 1990, Madrid.
- Calvo, E., Gracia, L. “Estrategias de colocación no nodal en el Método de los Elementos de Contorno en elasticidad bidimensional”. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, vol. 19, 2003 Barcelona.
- Carpinteri, A.; Aliabadi, M.H.; “Computational fracture mechanics in concrete technology”. WIT Press, 1999, Southampton.
- Carpinteri, A.; Lacidogna, G.; Accornero, F.; “Evolution of the Fracturing Process in Masonry Arches”. Journal of Structural Engineering, ASCE, vol. 141, nº 5, 2015 Reston, Virginia.

- Cladera Bohigas, A., Marí Bernat, A.R., “*ELU de cortante en vigas: Aproximación histórica y verificación experimental del tratamiento de la EHE*”. Hormigón y acero, vol. 221. Madrid
- Cerrolaza, M., Alarcón, E. “*Un nuevo procedimiento numérico para la evaluación de integrales singulares de valor principal de Cauchy en métodos de Contorno*”. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, vol. 5, 1989 Barcelona.
- Cervera, J. “*Un criterio robusto para la medida del margen -coeficiente- de seguridad*”. Informes de la Construcción, vol. 62, 2010 Madrid
- Cervera Bravo, J. “*En favor de la enseñanza de la programación lineal en la formación del ingeniero estructural*”. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y diseño en Ingeniería, vol. 15, 2010 Barcelona
- Cervera Bravo, J. “*Los métodos de programación lineal aplicados al análisis en rotura: el caso de los arcos de fábrica*”. ETS Arquitectura, Universidad Politécnica de Madrid, 2010, Madrid.
- Cervera Bravo, J., Vázquez Espí, M. “*Galileo, Maxwell, Michell, Aroca: midiendo el rendimiento estructural*”, Departamento de Estructuras de Edificación, Univesidad Politécnica de Madrid, 2011, Madrid,
- Cervera Bravo, J.. “*Cálculo de estructuras y resistencia de materiales: origen y desarrollo de los conceptos utilizados*”. Tesis Doctoral. ETS Arquitectura, Universidad Politécnica de Madrid, 1982, Madrid.
- Coccia, S., “*Nuova modellazione del comportamento delle cerniere plastiche nel c.a.*”. Tesis Doctoral. Università di Roma Tor Vergata, 2007, Roma.
- Corres Piretti, H.; Rodríguez Cazar. R.; “*Diagrama momento curvatura de secciones de hormigón armado y pretensado sometidas a carga instantánea y diferida. Modelo teórico y contrastación experimental*”. Hormigón y acero, nº 166, 1988, Madrid.
- Fernández-Cuartero Paramio, A.; Torre Calvo, J.F.; “Ejemplo de cumplimiento de los límites de ELU y ELS en la restauración de construcciones antiguas de fábrica”. Cursos avanzados; Durabilidad, rehabilitación y sostenibilidad. Seminario 8: Criterios y aplicación de los requisitos de seguridad a edificios existentes. IETcc, CSIC, 2014.
- Galileo Galilei Linceo. “*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze, attenenti alla meccanica e i movimenti locali*”. Ed. Losada, 1945, Buenos Aires.
- Gálvez Ruiz, J.C.; Reyes Pozo, E.; Casati Calzada, M.J.; “*Comportamiento mecánico de estructuras de fábrica de ladrillo*”. Hormigón y acero, nº 234, 2004 Madrid.
- Gómez Lera, S., Paris, E., Alarcón, E. “*Treatment of singularities in 2D domains using BIEM*”. Applied Mathematical Journal. SRC
- Hernández Capa, A. “*TIC para empresas e instituciones. La última burbuja*”. Autoedición, 2013 Madrid
- Heyman, J.; Baker, J.F.; “*Plastic desing of frames*”. Cambridge University Press, 1969, Cambridge.
- Heyman, J.; “*The stone skeleton. Structural engineering of masonry architecture*”. Cambridge University Press, 1995, Cambridge.
- Heyman, J.; “*The science of structural engineering*”. Imperial College Press, 1999, London.
- Heyman, J.; “*Estructuras de fábrica. Teoría, historia y restauración*”. Trad. y ed.: Huerta Fernández, S.; Instituto Juan de Herrera- CEHOPU-CEDEX, 1995, Madrid.

- Heyman, J.; *“Análisis de estructuras. Un estudio histórico”*. Trad.: Huerta Fernández. S.; Instituto Juan de Herrera, 1999, Madrid.
- Huerta Fernández, S.; *“Arcos, bóvedas y cúpulas: geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica”*. Insituto Juan de Herrera, 2004, Madrid.
- Johansen, K.W. *“The ultimate strength of Reinforced Concrete Slabs”*. final Report. Third Congress, IABSE 1948, Liège.
- Lahuerta, J.A. *“Cálculo de la fábrica armada”*. Informes de la Construcción, vol. 44, 1992, Madrid.
- Ley Urzáiz, J.; Calavera Ruiz, J.; *“Estudio experimental de leyes momento curvatura en servicio de piezas de hormigón armado sometidas a flexión pura”*. Hormigón y acero, nº 233, 2004 Madrid.
- Leitao, V.; Aliabadi, M.H.; Rooke, D.P.; *“Elastoplastic dual boundary elements: Application to crack problems”*. Transactions on Modelling and simulation, vol. 8, WIT Press, 1994 Southampton.
- Levi, F.; Debernardi, P.G.; Bosco, C.; *“Steel ductility, rotational capacity and non-linear analysis of reinforced concrete structures”*. Proceedings, Internationa Symposium on Concrete Engineering, 1991, Nanjing,
- Manterola Armisen, J.; *“Mecanismos de redistribución en estructuras de hormigón armado cargadas hasta rotura”*. Informes de la Construcción, vol. 19, 1967, Madrid.
- Marí Bernat, A.R. *“Dimensionamiento de secciones de hormigón armado orientado a garantizar un nivel de ductilidad”*. Informes de la Construcción, vol. 39, 1987 Madrid
- Marí Bernat, A. R., *“Ductilidad seccional y redistribución de esfuerzos en estructuras hiperestáticas de hormigón armado y pretensado”*. Hormigón y Acero, vol. 163, Madrid
- Massonet, Ch.; Save, M. *“Calcul plastique des constructions”*. Centre Belgo-Luxembourgeois d'information de l'acier (ASBL), 1961.
- Michel, Albin. *“Dictionnaire des Mathématiques. Fondements, probabilités, applications”*. Ed. Universalis, 1998, Paris.
- Molins i Borrell, C.; Roca Fabregat, P.; *“Análisis resistente de construcciones de fábrica. Aplicación a puentes arco”*. Hormigón y acero, nº 209, 1998, Madrid.
- Murcia Vela, J.; *“Cálculo práctico de flechas diferidas en estructuras de hormigón armado”*. Hormigón y Acero, nº 215, 2000 Madrid.
- Murcia Vela, J.; *“Algunas conclusiones del análisis en el tiempo de estructuras de hormigón armado, relativas al cálculo de flechas diferidas”*. Hormigón y Acero, nº 188, 1993 Madrid.
- Nielsen, M.P.. *“Limit analysis and concrete plasticity”*. Prentice-Hall, 1984, New Jersey.
- Ortiz Herrera, J. *“Introducción al estudio de las ecuaciones constitutivas de los materiales estructurales”*. Apuntes. 1988, Madrid.
- Ortiz Herrera, J.; Río Bueno, A.; *“Método simplificado para el cálculo de flechas en vigas de hormigón armado, adoptado al EUROCÓDIGO EC-2”*. Hormigón y acero, nº 173, 1989 Madrid.
- Ortiz Herrera, J.; Río Bueno, A.; *“Estudio crítico del cálculo de flechas en vigas de hormigón armado según la instrucción EH-88”*. Hormigón y acero, nº 173, 1989 Madrid.

Ortiz Herrera, J.; Río Bueno, A.; “*Limitación de deformaciones en estructuras de edificación*”. Hormigón y acero, nº 180, 1991 Madrid.

Ortiz Herrera, J.; Río Bueno, A.; “*Límites de esbeltez por razones de deformación en estructuras de hormigón armado de edificación*”. Hormigón y acero, nº 193, 1994 Madrid.

Paris, F., Garrido, J.A. “*Aspectos numéricos de la aplicación del método de los elementos de contorno al problema de contacto*”. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y diseño en Ingeniería, vol. 2, 1986 Barcelona.

Perera, R., Alarcón, E. “*FE-BE coupling methods for elastoplasticity*”. Communications in Numerical...

Quintas Ripoll V. “*Sobre el teorema de Maxwell y la optimización de arcos de cubierta*”. Informes de la Construcción, vol. 40, 1989 Madrid.

Quintas Ripoll, V. “*Sobre los teoremas de rotura, sus corolarios y su aplicación al cálculo de arcos de fábrica*”. Informes de la Construcción, vol. 62, 2010 Madrid.

Quintas Ripoll, V. “*Sobre el método estático en el cálculo a rotura de placas de hormigón armado*”. Hormigón y Acero, nº 190, 1994, Madrid.

Reverter, A., Alarcón, E. “*Elementos de contorno jerarquizados*”. Anales de Ingeniería Mecánica, año I, nº1, 1983, Madrid

Rodríguez Santiago, J.. “*Un método de condensación de grados de libertad para la comprobación del comportamiento no lineal de pórticos de hormigón armado*”. Informes de la Construcción, vol. 40. 1988, Madrid.

Roca, P., Marí, A. R., “*Evolución hasta rotura de estructuras laminares de revolución de hormigón pretensado*”. Hormigón y Acero, vol. 166, Madrid

Roca, P.; Portal, J.; Saloustros, S.; Pelà, L.; “*Assessment of structural damage in historical constructions using numerical models : the case of the church of the Poblet Monastery* “. International Conference on Structural Analysis of Historical Construction, p.1-13. 2014 México D.F.

Roca, P.; Cervera, M.; Pelà, L.; “*Continuum model for inelastic behaviour of masonry*”. Congresso dell'Associazione Italiana di Meccanica Teorica e Applicata, p. 1-10, 2013 Bologna.

Samartín Quiroga, A.. “*Elasticidad*”. Ed. Bellisco, 1990, Madrid.

Sánchez Pérez, M.; Pérez Caldentey, A.; Corres Peiretti, H.; “*Comportamiento en rotura y en servicio de puentes de vigas prefabricadas in situ con continuidad de negativos*”. Hormigón y acero, nº 233, 2004, Madrid.

Sancho Aznal, J.M.; Gálvez Ruíz, J.; Planas Rosselló, J.; Reyes Pozo, E.; Cendón Franco, D.; Casati Calzada, M.J.; “*An embedded cohesive crack model for finite element analysis of quasi-brittle materials*”. Engineering fracture mechanics, v. 109 ; Elsevier, 2013 Philadelphia.

Sancho Aznal, J.M.; Reyes Pozo, E.; Gálvez Ruíz, J.; Casati Calzada, M.; Cendón Franco, D.; Planas Rosselló, J.; “*An embedded cohesive crack model for finite element analysis of brickwork masonry fracture*”. Engineering Fracture Mechanics, v. 76 (n. 12); Elsevier, 2009 Philadelphia.

Schlaich, J.; Schäfer, K.; Jennewein, M.; “*Toward a consistent design of structural concrete*”. PCI journal, Special Report, May-June, 1987 Chicago.

Timoshenko, S.P.. “*History of strength of materials*”. Dover Publications, Inc, 1953-1983, New York

Varona Moyá, F.; Carcía Andión, L.; López Juárez, J.A.; “*El análisis lineal con redistribución limitada y los criterios*

de ductilidad de las secciones en la EHE-08". Hormigón y Acero, nº 257, 2010 Madrid.

Vázquez Espí, M.. "*Una lectura insólita de la norma EH*". Informes de la Construcción, vol. 39, 1987, Madrid

Vázquez Espí, M.. "*Un nuevo algoritmo para la optimación de estructuras: el recocido simulado*". Informes de la Construcción, vol. 46. 1995, Madrid.

Zienkiewicz, O.C.. "*El método de los elementos finitos*". Ed. Reverté, 1982 Barcelona

Anejo 1.- Modelo de rótulas de hormigón armado y de fábrica

Índice

Anejo 1.- Modelo de rótulas de hormigón armado y de fábrica

1.- Formulación integral de contorno para el estado plano.....	A1.1
2.- Integración en el dominio y en el contorno	A1.6
3.- Incógnitas en el dominio	A1.8
4.- Solución del sistema	A1.9
5.- Modelización de fisuras y propagación. Formulación dual.....	A1.11
6.- Plastificación del acero.....	A1.13
7.- Plastificación del hormigón.....	A1.14
8.- Diferencias entre la rótula de hormigón armado y de fábrica.....	A1.14

1.- Formulaci3n integral de contorno del estado plano

Dado que la elecci3n del comportamiento de la r3tula se ha expresado como una regi3n en estado plano de tensiones -se obvia o se desprecia el confinamiento transversal a la r3tula, o el comportamiento bidireccional-, su formulaci3n ha de partir de las ecuaciones del estado plano de tensiones, aplicado a un dominio en coordenadas (x_1, x_2) , que, por ahora definiremos de manera gen3rica como un dominio finito, convexo y cerrado. Tomando el juego completo de tensiones σ_{ij} y de fuerzas m3sicas b_i , el equilibrio se expresa en las dos direcciones como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + b_1 &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + b_2 &= 0;\end{aligned}\tag{A1.1}$$

que expresaremos de manera general como:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0;$$

Para las tensiones σ_{ij} existen unas ecuaciones constitutivas que las relacionan con las deformaciones del medio ϵ_{ij} . Asumiendo que la relaci3n es lineal obtendremos y teniendo en cuenta la simetría del sistema ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \tau_{ij}$; $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$; $\gamma_{ij} = \epsilon_{ij} + \epsilon_{ji}$), las anteriores relaciones se resumen en forma vectorial como:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix};\tag{A1.2}$$

donde E es el m3dulo de elasticidad longitudinal del material y ν el coeficiente de Poisson del mismo.¹ Sin realizar la agrupaci3n de t3rminos por simetría, las anteriores relaciones constitutivas se expresan como:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{11} + \nu \epsilon_{22}); \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1-\nu}{4} \epsilon_{12}; \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \epsilon_{11} + \epsilon_{22}); \\ \sigma_{21} &= \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1-\nu}{4} \epsilon_{21};\end{aligned}\tag{A1.3}$$

que notaremos de manera gen3rica como:

¹ Precisemos que las anteriores ecuaciones han obviado la deformaci3n unitaria ϵ_{33} , perpendicular al plano del problema, por lo que suponemos que tambi3n estas deformaciones son nulas. En realidad, estamos tomando un sistema plano puro, con tensi3n y deformaci3n plana.

$$\sigma_{ij} = D \varepsilon_{ij}; \quad [A1.4]$$

Asimismo, las ecuaciones de compatibilidad del estado plano nos indican que

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}; \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}; \gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}; \quad [A1.5]$$

Esto es

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}); \quad [A1.6]$$

que escribiremos de manera genérica como

$$\varepsilon_{ij} = u_{i,j}; \quad [A1.7]$$

Por tanto, hemos definido el cuerpo completo de funciones que definen el problema elástico en el dominio de la rótula ($\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i$) y las necesarias relaciones de equilibrio, compatibilidad y mixtas (o constitutivas). Las anteriores relaciones se han escrito para un punto cualquiera del dominio, y específicamente, la de equilibrio es una ecuación diferencial lineal no homogénea, que convertiremos en integral mediante la aplicación de la técnica de los residuos ponderados. Para ello, en el dominio plano de la rótula Ω , con un contorno Γ , la ecuación integral se obtiene ponderando por una función u' definida sobre todo el dominio Ω , que será:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) u' d\Omega = 0; \quad [A1.8]$$

Si integramos por partes el primer sumando anterior -lo que equivale a aplicar el Teorema de la Divergencia-, la anterior ecuación pasa a ser:

$$\int_{\Omega} b_i u' d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma_{ij} u' d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}' d\Omega = 0; \quad [A1.9]$$

operación en que está implícito que la función u' es tal que posee las mismas propiedades que u y, por tanto:

$$\sigma_{ij,j}' + b_i' = 0; u_{i,j}' = \varepsilon_{ij}'; \sigma_{ij}' = D \varepsilon_{ij}'; \quad [A1.10]$$

condición que equivale a plantear el equilibrio por el Teorema de los Trabajos Virtuales tomando una función virtual u' que satisfaga el equilibrio. Si el sistema es lineal, entonces es de aplicación la superposición de estados y la ley de Betti, por lo que:

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}' = \sigma_{ij}' \varepsilon_{ij}; \quad [A1.11]$$

de donde, entonces, podemos escribir:

$$\int_{\Omega} b_i u' d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma_{ij} u' d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij}' \varepsilon_{ij} d\Omega; \quad [A1.12]$$

Teniendo en cuenta las propiedades asignadas a u' y operando el segundo término de la igualdad anterior obtenemos:

$$\int_{\Omega} b_i u' d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma_{ij} u' d\Gamma = \int_{\Omega} b_i' u d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma_{ij}' u d\Gamma; \quad [A1.13]$$

Observemos que los términos a considerar en todo el dominio Ω se refieren a las fuerzas másicas b_i y b_i' , mientras que σ_{ij} y σ_{ij}' deben estimarse sólo en el contorno Γ del dominio. Así, si las fuerzas másicas son conocidas en todo el dominio, la integración debe estimarse sólo en el contorno, reduciendo el problema a las variables $-u$, en realidad- en el contorno nada más. Las fuerzas másicas del sistema real b_i son conocidas y forman parte del planteamiento del problema, por lo que la única integral sobre todo el dominio que resta por definir es la de la fuerza másica b_i' , por ahora no definida. Supongamos que b_i' es una fuerza puntual unitaria situada en un punto $(x=\xi)\in\Omega$, esto es:

$$b_i' = \Delta(\xi, x) \rightarrow \begin{cases} x \neq \xi; \Delta(\xi, x) = 0; \\ x = \xi; \Delta(\xi, x) = \infty; \end{cases} \quad [A1.14]$$

que es la función Delta de Dirac, cuya propiedad integral es:

$$\int_{\Omega} \Delta(\xi, x) d\Omega = 1; \rightarrow \int_{\Omega} \Delta(\xi, x) u(x) d\Omega = u(\xi); \quad [A1.15]$$

Tomar la anterior función b_i' supone que $\forall x \neq \xi, b_i' = 0$, por lo que la función u' , para satisfacer las condiciones antes impuestas, habrá de ser la solución fundamental del problema homogéneo $\sigma_{ij,j}' = 0$ ², con un punto singular en $x = \xi$, aspecto que se abordará más adelante. Por el momento, la ecuación integral planteada sobre el dominio, será ahora:

$$\int_{\Omega} b_i u' d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma_{ij} u' d\Gamma = u(\xi) + \int_{\Gamma} \sigma_{ij}' u d\Gamma; \quad [A1.16]$$

o, despejando $u(\xi)$

$$u(\xi) = \int_{\Omega} b_i u' d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma_{ij} u' d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{ij}' u d\Gamma; \quad [A1.17]$$

lo que es la **identidad de Somigliana**, que nos permite estimar el valor del campo de desplazamientos en cualquier punto $x \in \Omega$, mediante el sencillo sistema de hacer que $x = \xi$, lo que recibe el nombre de colocar la función en dicho punto.³ Esto supone que, entonces, la función u' habrá de variar también para cada colocación, por lo que será entonces $u'(\xi, x)$, como escribiremos de ahora en adelante, significando que es un campo de desplazamientos $\forall x \in \Omega$, colocado en $x = \xi$.

Continuando ahora con el desarrollo de la última igualdad, hemos de precisar que la propiedad integral de la función Delta de Dirac anteriormente expresada es cierta sólo para puntos $x \in \Omega; x \notin \Gamma$, pero si $x \in \Omega; x \in \Gamma$, entonces el entorno de x sólo está parcialmente dentro de Ω , por lo que entonces la integral de dominio debe ser estimada teniendo en cuenta sólo la porción de dominio Ω que queda dentro de Ω en el entorno de x . Es decir, cuando $x = \xi \in \Gamma$ la integral es singular y debe ser estimada fuera del concepto clásico de integral de Riemann y aplicarse el de valor principal de Cauchy. Así, de manera general, diremos que

$$\int_{\Omega} \Delta(\xi, x) d\Omega = c_i (c_i \leq 1); \rightarrow \int_{\Omega} \Delta(\xi, x) u(x) d\Omega = c_i u(\xi); \quad [A1.18]$$

En realidad el coeficiente c_i es de muy sencilla estimación, pues es la porción de dominio contenida

² En realidad es $\sigma_{ij,j} = \Delta(\xi, x)$, lo que es el problema que se resuelve mediante una fórmula de Green, obtenida para este caso por Kelvin.

³ Por tanto, si necesitamos estimar el desplazamiento en n puntos, tomaremos n veces la función b_i' colocada cada vez en el punto preciso, esto es, haciendo $x = \xi$ cada vez en el punto escogido.

por el contorno frente al total del mismo, en el entorno del punto escogido. Así, en los casos prototípicos⁴, sucederá:

$$c_i = 1; x \in \Omega;$$

$$c_i = \frac{1}{2}; x \in \Gamma;$$

$$c_i = \frac{1}{4}; x \in (\Gamma_1 \cap \Gamma_2); \Gamma_1 \perp \Gamma_2;$$

$$c_i = \frac{\alpha}{2\pi}; x \in (\Gamma_1 \cap \Gamma_2); \alpha = \alpha(\Gamma_1 \cap \Gamma_2);$$

[A1.19]

Por tanto, la identidad de Somigliana expresada para cualquier punto del dominio Ω , incluido su contorno Ω , será:

$$c_i u(\xi) = \int_{\Omega} b_i u'(\xi, x) d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma_{ij} u'(\xi, x) d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{ij}' u(x) d\Gamma; \quad [A1.20]$$

Ilustración 1: Determinación de los coeficientes C_i

Retomando el discurso previo a la estimación de c_i , entonces sólo queda por estimar el valor de la integral de dominio de las fuerzas másicas del sistema analizado ponderado por la función $u'(\xi, x)$, pero si ésta resulta conocida, como veremos más adelante, sólo queda por estimar el valor de dos integrales sobre el contorno. La primera es la del producto de las tensiones σ_{ij} en el contorno por la función de ponderación $u'(\xi, x)$ y la segunda es la de los términos conjugados de la anterior.

σ_{ij}' es conocida si $u(\xi, x)'$ es conocida, pues $\sigma_{ij}' = D \epsilon_{ij}' = D u(\xi, x)'_{i,j}$. Sean las tensiones σ_{ij} que las σ_{ij}' , al integrarlas sobre el contorno, si las expresamos como las tensiones a lo largo de éste y referidas al mismo como

$$p_{ij} = \sigma_{ij} n_j; p_{ij}' = \sigma_{ij}' n_j; \quad [A1.21]$$

⁴ En Brebbia [1984] aparece una demostración rigurosa de los siguientes valores. La obtención de los mismos se basa en realizar la integral subdividiendo el dominio completo Ω en el entorno ϵ del punto y en $\Omega - \epsilon$, realizándola para el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

siendo n_j los cosenos directores de los ejes (x_1, x_2) con respecto al vector n perpendicular al contorno -el cambio de variable en la integral es idéntico-, podremos entonces escribir la anterior igualdad como:

$$c_i u(\xi) = \int_{\Omega} b_i u'(\xi, x) d\Omega + \int_{\Gamma} p_{ij} u'(\xi, x) d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ij}' u(x) d\Gamma; \quad [A1.22]$$

Por último, escribiremos la ecuación anterior teniendo en cuenta que al ser un problema plano, en realidad hablamos de $u_i(\xi)$ y $u_{ij}'(\xi, x_i)$, es decir el desplazamiento real tiene dos componentes (u_1, u_2) y la solución fundamental tiene dos componentes en cualquier punto debidas a una fuerza puntual de dos componentes $(u_{11}', u_{21}', u_{12}', u_{22}')$. La función $u_{ij}'(\xi, x_i)$, que es la **solución fundamental** del problema ya mencionado $\sigma_{ij,j}' = 0$, es la obtenida por Kelvin, cuya expresión es:

$$u_{ij}'(\xi, x) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu')} G ((3-4\nu') \ln(r) \delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}); \quad [A1.23]$$

donde δ_{ij} representa el operador delta de Kronecker ($i=j \rightarrow \delta_{ij}=1; i \neq j \rightarrow \delta_{ij}=0$) y r -en realidad $r(\xi, x)$ - la distancia entre el punto de aplicación ξ y el punto considerado x , esto es:

$$r = \sqrt{r_i^2 + r_j^2};$$

$$r_i = x_i(x) - x_i(\xi); \quad [A1.24]$$

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{r_i}{r};$$

Como última precisión, ν' toma los siguientes valores:

$$\nu' = \nu \quad \text{y} \quad [A1.25]$$

$$\nu' = \frac{\nu}{1+\nu}$$

para deformación plana y para tensión plana, respectivamente, siendo éste último el modelo elegido en este caso⁵. Mediante las relaciones ya establecidas, será además

$$p_{ij}'(\xi, x) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu')r^2} \left[((1-2\nu')\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}) \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu')(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right]; \quad [A1.26]$$

En consecuencia, si tomamos del dominio Ω un punto $x=\xi$, podemos conocer sus desplazamientos mediante la ecuación somigliana, que es una función continua y derivable en todo el dominio Ω .⁶ Así, si la función $u_i(\xi)(i=1,2)$ es conocida, podremos entonces para todo punto

⁵ Como se puede apreciar, la diferencia entre tomar un modelo de tensión plana o de deformación plana, a efectos prácticos, es nimia. Para el caso del hormigón, cuyo ν oscila entre 0'10 y 0'15, supone considerar estos dos valores como límites para deformación plana o bien, tomando el modelo de tensión plana, entre 0'09 y 0'13.

⁶ Por tanto, nos proporciona una ley de desplazamientos única, continua y derivable en todo el dominio en que se plantea el problema, propiedad fundamental para elegir este planteamiento frente a la subdivisión del dominio que plantea el FEM, ya que la continuidad del campo de desplazamientos en este último no está asegurada -por ejemplo, los consabidos elementos no conformes- y, por tanto, recoger las concentraciones o disipaciones de deformaciones o tensiones no puede realizarse más que aplicando una

$(x = \xi) \in \Omega$ escribir:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i(\xi)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\xi)}{\partial x_i} \right); \sigma_{ij} = D \varepsilon_{ij}; \quad [A1.27]$$

expresiones con las que tendríamos resuelto el estado completo de desplazamientos, deformaciones y tensiones en el dominio Ω .

2.- Integración en el dominio y en el contorno

Conocida la expresión de la identidad de Somigliana para cualquier punto del dominio Ω , incluido su contorno Γ , debemos ahora calcular el valor de las integrales que la forman. Comenzaremos por la única que se refiere al dominio, que lo es de funciones conocidas:

$$\int_{\Omega} b_i u_{ij}'(\xi, x_i); \quad [A1.28]$$

Es claro que si $b_i \equiv 0$, la integral anterior es nula, pero abordaremos el caso general en que no sea así⁷. Esta integral, dado que $u_{ij}'(\xi, x_i)$ sólo es singular en $x = \xi$, puede estimarse por mera cuadratura numérica sobre el dominio Ω , salvo cuando se produce la singularidad, caso en que se debe recurrir de nuevo a la integración mediante el valor principal de Cauchy. Este procedimiento es farragoso y complicado y resulta mucho más eficaz, a efectos prácticos, como se verá más adelante, determinar los valores necesarios mediante la imposición al sistema de que un movimiento como sólido rígido ha de aportar tensiones nulas al sistema. Digamos que, por tanto, la integral sobre el dominio tiene solución conocida.

Con la integral de contorno que recoge las presiones en el contorno derivadas de la solución fundamental

$$\int_{\Gamma} p_{ij}' u(x) d\Gamma \quad [A1.29]$$

sucede algo idéntico a la anterior integral: es singular en $x = \xi$, lo que nos obliga a determinarla como valor principal de Cauchy. Sin embargo, de nuevo, su estimación se puede realizar mediante el mismo procedimiento anterior: la consideración de la atensionalidad ligada al desplazamiento como sólido rígido del sistema. Y para la restante integral de contorno,

$$\int_{\Gamma} p_{ij} u_{ij}'(\xi, x_i) d\Gamma; \quad [A1.30]$$

al contener la función $u_{ij}'(\xi, x_i)$ sucede de nuevo que la integral es singular y deberemos operar como ya se ha explicado, lo que dejamos para más adelante⁸

discretización y una formulación específicas que ya planteen desde el inicio las mismas. En este caso, con una solución de contorno, el campo de desplazamientos es continuo y, dada la unicidad del problema elástico, si es conocido aquél lo son de manera unívoca los demás campos: de deformaciones, de tensiones y de fuerzas exteriores. No sucede así si lo que es conocido es el campo de fuerzas exteriores, pues para ese mismo campo existen infinitas soluciones del campo de desplazamientos que satisfacen las condiciones de partida.

⁷ En nuestro caso, las fuerzas másicas pueden ser despreciables -ya que siempre introduciremos las tensiones como presiones en el contorno, y sólo la densidad provoca una fuerza másica en la dirección y sentido de la gravedad, pero tan pequeña que la podemos despreciar- pero las abordaremos directamente, pues nos son necesarias para la inserción del efecto de la introducción del acero en la masa del hormigón y para considerar la plastificación del hormigón.

⁸ En el caso de funciones singulares en un punto del dominio la forma de obtener su valor se realiza mediante el llamado valor principal de Cauchy. Si hay una singularidad en una función $f(x)$ -los valores de la función no están acotados- en el punto $(x = \xi) \in \Omega$ entonces podemos escribir $\int_{\Omega} f(x) d\Omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Omega - \varepsilon} f(x) d\Omega + \int_{\varepsilon} f(x) d\Omega \right]$, con ε como entorno cerrado de ξ .

En cualquier caso, podemos escoger una serie de puntos -nodos- del contorno y del dominio donde nos sea necesario estimar la solución del problema, estimando así la solución del mismo en cualquier punto mediante la determinación del mismo en puntos escogidos. La formulación habitual del BEM suele recoger sólo puntos del contorno, pero en nuestro caso necesitamos también estimar la solución en puntos interiores -la solución depende de condiciones internas al contorno-, por lo que no podemos obviar los puntos internos al mismo. En concreto, para la formulación que perseguimos, en que necesitamos abordar puntos del dominio que estén sobre las líneas en que se inserten los refuerzos de acero e, inevitablemente y por interés del problema, puntos del contorno, haremos las siguientes operaciones:

1. Dividiremos el contorno Γ en s partes
2. Cada línea de refuerzos interna a Ω la dividiremos en t partes
3. En cada parte del contorno estableceremos l nodos
4. En cada parte de las líneas internas estableceremos m nodos

Cada una de las s y t partes indicadas serán los elementos de contorno del propio contorno y de las líneas interiores⁹, mientras que los l y m nodos de cada parte serán los puntos en los que estimaremos el valor de la solución del problema. Por tanto, la ecuación [A1.22] se expresará ahora, para cada punto de colocación $x=\xi$ como:

$$c_i u(\xi) = \sum_{1^{ta}} \int_{\Omega_t} b_{ij} u_{ij}'(\xi, x) d\Omega_t + \sum_1^s \int_{\Gamma} p_{ij} u_{ij}'(\xi, x) d\Gamma - \sum_1^s \int_{\Gamma} p_{ij}' u_{ij}(x) d\Gamma; \quad [A1.31]$$

donde la integral de dominio Ω ahora se ha restringido a Ω_t significando que se realiza la integral de dominio sólo en aquella parte en que haya fuerzas internas, que coincide con las líneas donde dispondremos refuerzos de acero, subdivididas cada una en t elementos o tramos.

Ilustración 2: Modelo de rótula. Elementos y nodos.

⁹ En sentido estricto, las t partes de las líneas interiores, al no estar en el contorno, no son estrictamente elementos de contorno, pero al formularse mediante una solución de contorno, en nada cambian conceptualmente respecto a las s líneas del contorno, por lo que les damos igual nombre.

Ahora podremos hacer variar la función incógnita $u_{ij}(x)$ en función de los valores que adquiriera en cada uno de los l nodos de cada elementos en el contorno o de los m nodos de cada uno de los elementos interiores. Así, para los elementos en el contorno:

$$u_i = \sum_1^l \eta_i a_i; \quad [A1.32]$$

y para los interiores:

$$u_i = \sum_1^m \eta_i a_i; \quad [A1.33]$$

Ahora bien, como $\epsilon_{ij} = u_{i,j}$, $\sigma_{ij} = D \epsilon_{ij}$ y $p_{ij} = \sigma_{ij} n_j$, entonces será

$$p_{ij} = D \sum_1^l \eta_{i,j} a_i n_j = \sum_1^l \eta_{pi} p_i; \quad [A1.34]$$

por lo que la ecuación [A1.31] pasa a ser:

$$\begin{aligned} c_i u(\xi) = & \sum_1^{2t} \int_{\Omega_t} b_i u_{ij}'(\xi, x) d\Omega_t + \sum_1^s \sum_1^l \int_{\Gamma} \eta_{pi} p_i u_{ij}'(\xi, x) d\Gamma \\ & - \sum_1^s \sum_1^l \int_{\Gamma} p_{ij}' \eta_i a_i d\Gamma; \end{aligned} \quad [A1.35]$$

donde η_i son las funciones de forma elegidas para cada elemento y $\eta_{i,j}$ sus derivadas correspondientes, de modo que η_{pi} para que sea coherente con η_i deberá tener un grado menos que ésta. De este modo, la anterior ecuación, dependerá de los valores nodales a_i de todos los nodos elegidos en el contorno. Consideremos por ahora que las fuerzas másicas b_i son conocidas. Entonces, para cada punto del contorno podemos escribir la anterior ecuación -en realidad dos, una para cada dirección del desplazamiento-, quedando entonces un sistema de tantas ecuaciones como valores nodales debamos encontrar, lo que nos permitirá resolver el problema.

3.- Incógnitas en el dominio

Queda por definir la introducción de las fuerzas másicas b_i . Resulta que en este caso no son fuerzas conocidas, sino que forman parte del cuerpo de incógnitas que debemos determinar. Por el momento, dejemos de un lado lo definido para el dominio en los t tramos indicados. En una barra que supondremos sólo presenta rigidez ante esfuerzo axial, si la sección es A y el módulo de elasticidad es E_s , la fuerza que aquella desarrolla será:

$$F = E_s A \epsilon_s; \quad [A1.36]$$

siendo ϵ_s la deformación longitudinal de la barra. Ahora bien, al estar inserta la barra dentro de la masa del hormigón, sus desplazamientos habrán de compatibilizarse -en principio- con los del dominio Ω . Puesto que hemos escrito que dividíamos cada línea en t partes, haciendo que los desplazamientos fueran una función de los m valores nodales de cada elemento:

$$\epsilon_s = D u_{i,j} = D \sum_1^m \eta_{i,j} a_i \quad [A1.37]$$

Por tanto, la fuerza que aporta la barra de acero insertada en la masa de hormigón será:

$$F = E_s A \sum_1^m \eta_{i,j} a_i; \quad [A1.38]$$

Puesto que lo que debemos introducir son fuerzas másicas, la anterior fuerza no es una fuerza másica, sino que será su variación a lo largo del recorrido de la barra la que genere sobre el dominio una fuerza másica, es decir, las tensiones tangenciales de adherencia entre la barra y el hormigón, siendo las tensiones tangenciales de signo contrario en el dominio que en la línea de inserción del refuerzo. O sea:

$$b_i = -f_i = -\frac{\partial F}{\partial x_i} = -E_s A \sum_1^m \eta_{i,j} a_i; \quad [A1.39]$$

En definitiva, la ecuación completa que deberemos entonces escribir para cada nodo será:

$$\begin{aligned} c_i u(\xi) = & -E_s A \sum_1^{2t} \sum_1^m \int_{\Omega_t} \eta_{i,j} a_i u_{ij}'(\xi, x) d\Omega t \\ & + \sum_1^s \sum_1^l \int_{\Gamma} \eta_{pi} p_i u_{ij}'(\xi, x) d\Gamma - \sum_1^s \sum_1^l \int_{\Gamma} p_{ij}' \eta_i a_i d\Gamma; \end{aligned} \quad [A1.40]$$

donde las incógnitas remanentes son los desplazamientos nodales a_i -en el contorno o en el dominio- y las presiones nodales en el contorno p_i . Puesto que tenemos $s \cdot l$ nodos en el contorno y $2t \cdot m$ en el dominio, tendremos en total $k = s \cdot l + 2t \cdot m$ nodos, lo que supone que tendremos $2k$ valores de a_i y $2k$ valores de p_i , pues hemos de considerar las dos direcciones del espacio plano. Si aplicamos la anterior ecuación a los k nodos en ambas direcciones, tendremos un sistema de $2k$ ecuaciones con $4k$ incógnitas. La imposición de las condiciones esenciales -en desplazamientos a_i - o naturales -en presiones p_i - o mixtas¹⁰ del problema permitirá que sea un sistema compatible y determinado. Agrupando ahora en la anterior ecuación los términos que dependen de los desplazamientos y los que de las presiones, obtenemos:

$$\begin{aligned} c_i u(\xi) = & E_s A \sum_1^{2t} \sum_1^m \int_{\Omega_t} \eta_{i,j} a_i u_{ij}'(\xi, x) d\Omega t \\ & + \sum_1^s \sum_1^l \int_{\Gamma} p_{ij}' \eta_i a_i d\Gamma = \sum_1^s \sum_1^l \int_{\Gamma} \eta_{pi} p_i u_{ij}'(\xi, x) d\Gamma; \end{aligned} \quad [A1.41]$$

4.- Solución del sistema

Dado que aplicamos -colocamos, en jerga del BEM- la anterior ecuación en k nodos y en dos direcciones, la escritura simultánea de todas las ecuaciones implicadas en el problema dará lugar a un sistema de $2k$ ecuaciones, del modo:

$$\tilde{C} \tilde{a} + \tilde{B} \tilde{a} + \tilde{H} \tilde{a} = \tilde{G} \tilde{p}; \quad [A1.42]$$

donde

¹⁰ Si imponemos condiciones de desplazamientos se conocen como condiciones de tipo Dirichlet, si son en el campo de las presiones son del tipo Neumann y si son mixtas son del tipo Robin.

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{12} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{k1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{k2} \end{bmatrix}; \quad [A1.43]$$

será una matriz diagonal conteniendo los coeficientes de cada uno de los desplazamientos de cada nodo en cada dirección al plantear la ecuación en cada nodo y en cada dirección. Nótese que $u(\xi)$ ha sido nombrado así para indicar que es el desplazamiento del punto en el que se coloca la función de Dirac, pero en realidad tiene dos componentes, en direcciones x_1 y x_2 , y pertenece al vector de desplazamientos $\tilde{a}$, esto es, $u(\xi) \in \tilde{a}$. La matriz $\tilde{B}$ contendrá los coeficientes de los desplazamientos debidos a las fuerzas másicas, $\tilde{H}$ los coeficientes de los desplazamientos debidos a las presiones de ponderación en el contorno y $\tilde{G}$ los coeficientes de las presiones en el contorno, siendo todas ellas matrices cuadradas de $2k \times 2k$. Los coeficientes C_{ij} los podíamos estimar de la manera indicada anteriormente en [A1.19], sabiendo además que $i=j \rightarrow C_{ij} \neq 0; i \neq j \rightarrow C_{ij} = 0$; , pero veremos que no resulta necesario. Además, en B_{ij} si $i \neq j$ la integral para calcular el coeficiente no es singular, mientras que si $i=j$, lo es y requiere de una cuadratura especial. Lo mismo sucede con H_{ij} y G_{ij} . Por tanto, los términos de la diagonal de $\tilde{B}$, $\tilde{H}$ y $\tilde{G}$ son de costosa estimación. Sin embargo, si agrupamos las matrices de coeficientes, obtenemos:

$$(\tilde{C} + \tilde{B} + \tilde{H})\tilde{a} = \tilde{G}\tilde{p}; \rightarrow \tilde{K}\tilde{a} = \tilde{G}\tilde{p}; \quad [A1.44]$$

Por tanto

$$i=j \rightarrow K_{ii} = C_{ii} + B_{ii} + H_{ii}; \quad [A1.45]$$

$$i \neq j \rightarrow K_{ij} = B_{ij} + H_{ij}; \quad [A1.46]$$

Los términos K_{ij} son de fácil estimación, pero los K_{ii} no, porque contienen integrales singulares todos sus sumandos. Pero existe un modo sencillo de calcularlos si consideramos un desplazamiento de sólido rígido cualquiera, donde es evidente que las presiones han de ser nulas, es decir $\tilde{p} = \tilde{0}$, por lo que

$$\tilde{K}\tilde{I} = \tilde{0}; \rightarrow k_{ii} = -\sum_{j=1}^{2k} k_{ij}; (j \neq i) \quad [A1.47]$$

lo que implica que los términos de la diagonal de $\tilde{K}$ son siempre la suma de los términos restantes de su misma fila cambiada de signo. Para la matriz $\tilde{G}$ no reza lo mismo, pues no sucede que con desplazamientos nulos la ley de presiones haya de ser una determinada, por lo que no queda más remedio que estimar las integrales singulares en G_{ii} con la cuadratura logarítmica, lo que simplemente es más engorroso.

De cualquier modo, hemos llegado a un sistema lineal de ecuaciones que podemos resolver cuando impongamos las condiciones de contorno del problema. Esto depende de las condiciones que aparezcan en cada sector del contorno Γ , lo que entra directamente en el modelo concreto de rótula elegido y en la descripción de cada distinto comportamiento a medida que progresan las fisuras o se producen plastificaciones o se desacopla la armadura de la masa de hormigón por excesiva tensión tangencial. Por tanto, si ahora imponemos las condiciones de contorno, que serán sólo del tipo Dirichlet ($a_i = \bar{a}_i$) o del tipo Neumann ($p_i = \bar{p}_i$) y separamos en los vectores $\tilde{a}$ y $\tilde{p}$ las partes que son datos, $\bar{u}$

y $\bar{p}$, de las que quedan como incógnitas, que no cambiaremos de notación, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \tilde{K} & \tilde{K}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_p & \tilde{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \tilde{p} \end{bmatrix}; \rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{K} - \tilde{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_p & \tilde{K}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \tilde{a} \end{bmatrix}; \quad [A1.49]$$

siendo la solución del sistema entonces:

$$\begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{K} - \tilde{G} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{G}_p & \tilde{K}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \tilde{a} \end{bmatrix}; \quad [A1.50]$$

obteniendo así cuáles son los valores de las incógnitas nodales que definirán por completo la solución del problema en todo el dominio Ω y en el contorno Γ .

Resueltas las incógnitas, podemos entonces aplicar las ecuaciones para obtener las deformaciones y las tensiones en los puntos donde residan las incógnitas.

5.- Modelización de fisuras y propagación. Formulación dual

Para la modelización de las fisuras, basta con considerarlas un contorno interno que se puede separar, imponiendo las condiciones de continuidad del medio cuando la fisura no se ha abierto. Por simplicidad, en este caso se supone que la fisura está cerrada si la tensión del material está por debajo de la tensión última de tracción y que está cerrada si sucede lo contrario. Para poder simular una variación al menos parabólica de las tensiones en el contorno, las funciones de forma empleadas son del modo:

$$\eta_i(\xi) = A(x-a)(x-c)(x-d); \quad [A1.51]$$

tanto para desplazamientos como para deformaciones. Hay que notar que los puntos de colocación son interiores al elemento, con el fin de evitar el cruce de fisuras con nodos y de éstas con nodos del refuerzo de acero interior. Además, evita la contradicción de las esquinas o cambios bruscos del trazado del contorno, donde las condiciones a imponer en el nodo serían dos distintas, según el contorno al que se le asignase el nodo.

Ilustración 3: Funciones de forma de los elementos de contorno.

Constituido el modelo completo sin fisuras, la propagación de ésta se simula de manera muy sencilla. Aplicando la formulación dual, colocados los nodos sobre su trazado, si la fisura está cerrada, las condiciones serán -teniendo en cuenta el criterio de signo de flujo a través del contorno-:

$$\begin{aligned} p1i &= p1d ; \\ p2i &= p2d ; \\ u_{1i} &= -u_{1d} ; \\ u_{2i} &= -u_{2d} ; \end{aligned} \quad [A1.52]$$

En cambio, si la fisura se abre, las condiciones a imponer son:

$$\begin{aligned} p1i &= p1d ; \\ p2i &= p2d ; \\ p1i &= 0 ; \\ p2i &= 0 ; \end{aligned} \quad [A1.53]$$

Ilustración 4: Modelización de las fisuras. Formulación dual.

Ahora bien, la aparición de fisuras supone que los nodos del contorno aumentan, como los elementos del contorno. Si la fisura supone z elementos más en el contorno, con l nodos por elemento, la anterior matriz $\tilde{C}$ [A1.43], pasaría a ser

$$\tilde{C}_f = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{2k \times 2k} & \tilde{C}_{2k \times (2z \cdot l)} \\ \tilde{C}_{(2z \cdot l) \times 2k} & \tilde{C}_{(2z \cdot l) \times (2z \cdot l)} \end{bmatrix}; \quad [A1.54]$$

y de igual modo:

$$\tilde{B}_f = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{2k \times 2k} & \tilde{B}_{2k \times (2z \cdot l)} \\ \tilde{B}_{(2z \cdot l) \times 2k} & \tilde{B}_{(2z \cdot l) \times (2z \cdot l)} \end{bmatrix}; \quad [A1.55]$$

$$\tilde{H}_f = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{2k \times 2k} & \tilde{H}_{2k \times (2z \cdot l)} \\ \tilde{H}_{(2z \cdot l) \times 2k} & \tilde{H}_{(2z \cdot l) \times (2z \cdot l)} \end{bmatrix}; \quad [A1.56]$$

$$\tilde{G}_f = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{2k \times 2k} & \tilde{G}_{2k \times (2z \cdot l)} \\ \tilde{G}_{(2z \cdot l) \times 2k} & \tilde{G}_{(2z \cdot l) \times (2z \cdot l)} \end{bmatrix}; \quad [A1.57]$$

quedando [A1.44] como:

$$\left(\tilde{C}_f + \tilde{B}_f + \tilde{H}_f \right) \tilde{a}_f = \tilde{G}_f \tilde{p}_f; \rightarrow \tilde{K}_f \tilde{a}_f = \tilde{G}_f \tilde{p}_f; \quad [A1.58]$$

dado que también habrán pasado los desplazamientos nodales y sus presiones asociadas a ser:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_f &= \tilde{a} + \tilde{a}_{(2z \cdot l)}; \\ \tilde{p}_f &= \tilde{p} + \tilde{p}_{(2z \cdot l)}; \end{aligned} \quad [A1.58]$$

A efectos prácticos, lo más sencillo es desde el inicio prever una suficiente cantidad de líneas de fisura donde se hayan previsto -que es nuestro caso- cuando estén cerradas e imponer las condiciones duales de fisura cerrada en ellos. Luego, a medida que se detecte su apertura se alteran las condiciones para fisura abierta y se vuelve a resolver el sistema. Así no hace falta reelaborar el sistema de nuevo para cada progreso de fisura, sino sólo cambiar las condiciones de contorno en determinados nodos. Si no se puede prever la posición de las fisuras, será entonces necesario reelaborar el sistema para cada progreso de aquéllas.

6.- Plastificación del acero

Dado que las inserciones de acero pueden plastificar, se alterará su ecuación constitutiva pasada la deformación elástica $\epsilon_s \geq \epsilon_y$. En tal caso, [A1.36] pasará a ser:

$$F = A \left((E_s - E_y) \epsilon_y + E_y \epsilon \right); \quad [A1.59]$$

siendo E_y el módulo de elasticidad del acero una vez superada la tensión del límite elástico. Por tanto, [A1.38] se escribirá como:

$$F - (E_s - E_y) A \epsilon_y = E_y A \sum_1^m \eta_{i,j} a_i; \quad [A1.60]$$

y [A1.39] como:

$$b_i = -f_i = -\frac{\partial F}{\partial x_i} = -E_y A \sum_1^m \eta_{i,j,j} a_i; \quad [A1.61]$$

siguiendo el resto del procedimiento como se ha expresado antes.

7.- Plastificación del hormigón

Dado que el hormigón también presenta cambios en su ecuación constitutiva, cuando se pase de un estado al sucesivo -se ha supuesto una ley polilineal de su comportamiento- las tensiones serán:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 + D_y \varepsilon_{ij}; \quad [A1.62]$$

donde σ_0 son las tensiones ya existentes en el momento del cambio de ecuación constitutiva, que pasa de ser D a D_y . Por tanto, integrando en el dominio, la identidad de Somigliana [A1.17] quedará como

$$u(\xi) = \int_{\Omega} (b_i - \sigma_0) u' d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma_{ij} u' d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{ij}' u d\Gamma; \quad [A1.63]$$

a partir de la cual todo el proceso es idéntico al ya explicado.

8.- Diferencias entre la rótula de hormigón armado y de fábrica

Este modelo se ha empleado tanto para la rótula de hormigón como para la de fábrica. Ambos casos son idénticos y lo único que debe hacerse en todo lo anterior para conformar la rótula de fábrica es prescindir de todos los términos, elementos y nodos que se refieren al acero. El resto es exactamente igual.

Anejo 2.- Resultados de los casos estudiados de hormigón armado

M (mKN) / v (mm)

Ley límite de la viga

ROTURA	K	K(z/d)	$\mu(x/d)$	C- (°/100)	λ	HA25	L/v	K'K	Θ^-	Θ^+
NEG	1,000	0,89	0,26	2,80	10	B500S	0,47	1,774	1,77	1,77
							DEF. OK		-1,407	-0,54

Momentos flectores (mKN)

Deformada (mm)

Θ^-	Θ^+
1,77	1,77
-1,407	-0,54

M (mKñ) / v (mm)

Ley límite de la viga

ROTURA	NEG	K	1,000	K(z/d)	0,86	$\mu(x/d)$	0,38	C- (°100)	2,80	λ	10	HA25	B500S		K'	1,774	K/K	1,77	Θ^-	mrad*m	Θ^+	mrad*m
													L/v	DEF. OK								

Momentos flectores (mKñ)

Deformada (mm)

ROTURA	K	K(z/d)	$\mu(x/d)$	C- (°/100)	λ	HA25	L/v	K'	K/K	Θ^-	Θ^+
NEG	1,000	0,77	0,63	2,80	10	B500S	0,62	1,774	1,77	mrad*m	mrad*m
							DEF. OK			-0,877	-0,41

ROTURA POS	K	3,000	K(z/d)	0,86	$\mu(x/d)$	0,38	C-(°/100)	2,80	λ	10	HA25		B500S	DEF. OK	K'	2,418	K'/K	0,81	Θ^- mrad*m	Θ^+ mrad*m																		
											L/v	0,43																										
Momentos flectores (mK)																																						
<p>This graph shows the moment M (in mK) versus length L (in m). The x-axis represents L (m) from 0.00 to 1.60, and the y-axis represents M (mK) from -100 to 300. Three curves are plotted: 'Mu calc (mKx-1)' (green line with squares), 'Mu diseño (mKx-)' (purple line with triangles), and 'Mu teor (mKx-1)' (red line with circles). All curves start at (0,0) and increase to a peak of approximately 260 mK at L=1.2 m, then decrease. The 'Mu teor' curve is the highest, followed by 'Mu diseño', and then 'Mu calc'.</p>																																						
Momentos flectores (mK)																																						
<p>This graph shows the moment M (in mK) versus length L (in m). The x-axis represents L (m) from 0.00 to 1.60, and the y-axis represents M (mK) from -100 to 300. Three curves are plotted: 'Mu calc (mKx-1)' (green line with squares), 'Mu diseño (mKx-)' (purple line with triangles), and 'Mu teor (mKx-1)' (red line with circles). All curves start at (0,0) and increase to a peak of approximately 260 mK at L=1.2 m, then decrease. The 'Mu teor' curve is the highest, followed by 'Mu diseño', and then 'Mu calc'.</p>

ROTURA POS	K	3,000	K(z/d)	0,81	$\mu(x/d)$	0,51	C- (°100)	2,80	λ	10	HA25 B500S	L/v	0,51	K'	2,418	K'/K	0,81	Θ^-	mrad°m	Θ^+	mrad°m
												DEF. OK						-0,886		-0,36

Diagrama de Momentos

ROTURA POS	K	3,000	K(z/d)	0,77	$\mu(x/d)$	0,63	C- (°100)	2,80	λ	10	HA25 B500S	L/v	0,55	K'	2,418	K/K	0,81	$\Theta-$	mrad*m	$\Theta+$	mrad*m
												DEF. OK						-0,949		-0,4	

Ley límite de la viga

Deformada (mm)

uS (mm)
uT (mm)
0
v. lim

ROTURA	NEG	K	1,000	K(z/d)	0,86	$\mu(x/d)$	0,38	C- ⁽¹⁰⁰⁾	2,80	λ	20	HA25		K'	2,390	K/K	2,39	Θ^-	Θ^+
												B500S	L/v						
																		-2,837	-0,64

ROTURA	K	1,000	K(z/d)	0,81	$\mu(x/d)$	0,51	C- (°/100)	2,80	λ	20	HA25	L/v		K'	2,390	K'/K	2,39	Θ^-	Θ^+	
											B500S	1,57	DEF. EXC.			-3,085		-0,69		
Momentos flectores (mKN)

M (mKN) / v (mm)

Ley límite de la viga

ROTURA	K	K(z/d)	$\mu(x/d)$	C- (°/o)	λ	HA25	L/v	K'	K/K	Θ^-	Θ^+
NEG	2,000	0,86	0,38	2,80	20	B500S	0,98	2,245	1,12	mrad°m	mrad°m
							DEF. OK			-1,423	-0,59

Momentos flectores (mKN)

Deformada (mm)

M (mKñ) / v (mm)

Ley límite de la viga

ROTURA POS	K	3,000	K(z/d)	0,89	$\mu(x/d)$	0,26	C- (°100)	2,80	λ	20	HA25 B500S	L/v	0,66	K'	2,128	K/IK	0,71	Θ^-	mrad°m	Θ^+	mrad°m
												DEF. OK						-0,845		-0,26	

Momentos flectores (mKñ)

Deformada (mm)

ROTURA	K	k(z/d)	$\mu(x/d)$	C- (°100)	λ	HA25	Momentos flectores		K'/K	Θ^-	Θ^+
POS	3,000					B500S	L/v	DEF- OK	2,418	mrad*m	mrad*m
							0,88		0,81	-1,059	-0,32

Momentos flectores (mKN)											
M (mKN)	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	0,00	0,50	1,00	1,50
Mb calc (mKN*1)	250	200	150	100	50	0	-50	-100	-150	-200	-250
Md diseño (mKN*1)	250	200	150	100	50	0	-50	-100	-150	-200	-250
Mb teor (mKN*1)	250	200	150	100	50	0	-50	-100	-150	-200	-250
Md teor (mKN*1)	250	200	150	100	50	0	-50	-100	-150	-200	-250
Mb calc (mKN*1)	250	200	150	100	50	0	-50	-100	-150	-200	-250
Md calc (mKN*1)	250	200	150	100	50	0	-50	-100	-150	-200	-250

ROTURA POS	K	3,000	K(z/d)	0,81	$\mu(x/d)$	0,51	C- (°100)	2,80	λ	20	HA25	L/v		K'	2,418	K'/K	Θ^- mrad*m	Θ^+ mrad*m
											B500S	1,01	DEF. EXC.					
																	-1,190	-0,35

ROTURA POS	K	3,000	k(z/d)	0,77	$\mu(x/d)$	0,63	C- (°/100)	2,80	λ	20	Momentos flectores (mKN)				K'/K	0,85	Θ^- mrad°m	Θ^+ mrad°m
											HA25 B500S	L/v	DEF. EXC.	K'				
																1,10	-1,258	-0,38
DEF. EXC.																		

Momentos flectores (mKN)																		
400																		
300																		
200																		
100																		
0																		
-100																		
-200																		

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

M (mKN)

<

ROTURA	NEG	K	1,000	k(z/d)	0,86	$\mu(x/d)$	0,38	C- (°/oo)	2,80	λ	30	HA25	L/v		K'	2,390	K'/K	2,39	Θ^-	Θ^+
												B500S	DEF.	EXC.			mrad°m		mrad°m	
													2,10					-3,358	-0,62	

Momentos flectores (mKN)										
M (mKN)	0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50
Mm calc (mKN*1)	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
Mm desd (mKN*1)	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
Mm hor (mKN*1)	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
Mm calc (mKN*1)	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900

ROTURA INDIF.	K	2,000	K(z/d)	0,89	$\mu(x/d)$	0,26	C- (°100)	2,80	λ	30	HA25 B500S	L/v		K'	2,000	K'/K	1,00	Θ - mrad°m	Θ + mrad°m
												1,13	DEF. EXC.					-1,164	-0,31

Momentos flectores (mK^N)

Diagrama de Momentos

ROTURA	K	K(z/d)	$\mu(x/d)$	C- (°/o)	λ	HA25	L/v	K'	K/K	Θ^-	Θ^+
NEG	2,000	0,86	0,38	2,80	30	B500S	1,47	2,245	1,12	mrad*m	mrad*m
							DEF. EXC.			-1,611	-0,62

Ley límite de la viga

Deformada (mm)

ROTURA	K	K(z/d)	$\mu(x/d)$	C- (°/100)	λ	HA25	L/v	K'	K/K	Θ^-	Θ^+
NEG	2,000	0,81	0,51	2,80	30	B500S	1,65	2,245	1,12	mrad°m	mrad°m
							DEF. EXC.			-1,754	-0,51

Diagramas

ROTURA POS	K	3,000	K(z/d)	0,89	$\mu(x/d)$	0,26	C- (°/100)	2,80	λ	30	HA25 B500S	L/V	0,98	K'	2,273	K'/K	0,76	Θ^-	mrad°m	Θ^+	mrad°m
												DEF. OK						-0,934		-0,26

ROTURA POS	K	3,000	K(z/d)	0,86	$\mu(x/d)$	0,38	C- (°100)	2,80	λ	30	HA25 B500S	L/V	K'	2,418	K'/K	0,81	Θ - mrad°m	Θ + mrad°m
												1,30					-1,199	-0,32

ROTURA	NEG	K	1,000	K(z/d)	0,89	$\mu(x/d)$	0,26	C- (°/o)	6,40	λ	10	HA25		K'	1,774	K/K	1,77	Θ^-	mrad°m	Θ^+	mrad°m
												L/v	DEF. OK								
												0,58						-1,576		-0,58	

Momentos flectores (mKN)

Diagrama de Momentos

ROTURA	NEG	K	1,000	K(z/d)	0,83	$\mu(x/d)$	0,51	C- (°100)	6,40	λ	10	HA25		K'	1,774	K/K	1,77	Θ^-	Θ^+
												L/V	DEF. OK						
												0,66						-0,935	-0,45

Ley límite de la viga

Deformada (mm)

- u5 (mm)
- u4 (mm)
- 0
- v. lim

Diagrama de Momentos

ROTURA						HA25				
INDIF.	K	k(z/d)	$\mu(x/d)$	C- ^(r/100)	λ	B500S	L/V	K'	K/K	Θ^-
	2,000	0,83	0,51	6,40	10		0,62	2,000		Θ^+
							DEF. OK		1,00	mrad°m
										-1,154
										-0,45

M (mKN) / v (mm)

Ley límite de la viga

ROTURA	K	K(z/d)	$\mu(x/d)$	C- (°/100)	λ	HA25	L/V	K'K	Θ^-	Θ^+
INDIF.	2,000	0,79	0,63	6,40	10	B500S	0,66 DEF. OK	2,000	1,00 mrad*m	-1,226 mrad*m

Momentos flectores (mKN)

Deformada (mm)

M (mKñ) / v (mm)

Ley límite de la viga

ROTURA POS	K	K(z/d)	$\mu(x/d)$	C- (°/o)	λ	HA25 B500S	L/v	K'	K/IK	Θ^- mrad*m	Θ^+ mrad*m
	3,000	0,89	0,26	6,40	10		0,40 DEF. OK	2,273	0,76	-0,683	-0,27

Momentos flectores (mKñ)

Deformada (mm)

M (mKN) / v (mm)

Ley límite de la viga

ROTURA POS	K	3,000	K(z/d)	0,86	$\mu(x/d)$	0,38	C- (°/m)	6,40	λ	10	HA25 B500S	L/V	0,49	K'	2,418	K'/K	0,81	Θ^-	mrad*m	Θ^+	mrad*m
												DEF. OK						-0,838		-0,35	

Momentos flectores (mKN)

Deformada (mm)

M (mKN) / v (mm)

Ley límite de la viga

ROTURA POS	K	3,000	K(z/d)	0,79	$\mu(x/d)$	0,63	C- (°/100)	6,40	λ	10	HA25 B500S	L/v	0,60	K'	2,564	K'/K	0,85	Θ^-	-0,991	Θ^+	-0,4
------------	---	-------	--------	------	------------	------	------------	------	-----------	----	------------	-----	------	----	-------	------	------	------------	--------	------------	------

Momentos flectores (mKN)

Deformada (mm)

Θ^-	Θ^+
-0,991	-0,4

ROTURA	K	k(z/d)	$\mu(x/d)$	C- (°/o)	λ	HA25	L/v	K'	K'/K	Θ^-	Θ^+
NEG	1,000	0,89	0,26	6,40	20	B500S	1,38	2,390	2,39	mrad*m	mrad*m
							DEF. EXC.			-2,635	-0,75

Momentos flectores (mKñ)

—■— Ml. calc. (mKñ-1)
—▲— Ml. diseño (mKñ-)
—◆— Ml. real (mKñ-1)
—●— Ml. calc. (mKñ-1)

ROTURA		K	1,000	K(z/d)	0,86	$\mu(x/d)$	0,38	C-(°100)	6,40	λ	20	HA25		B500S		K'	2,390	K'IK	2,39	Θ^- mrad°m	Θ^+ mrad°m
NEG												DEF.	EXC.	L/v	1,57						
Momentos flectores (mKN)

M (mKñ) / v (mm)

Ley límite de la viga

ROTURA	K	K(z/d)	μ(x/d)	C- (°/100)	λ	HA25	L/v	K'	K'/K	Θ- mrad*m	Θ+ mrad*m
NEG	1,000	0,79	0,63	6,40	20	B500S	1,73	2,390	2,39	-3,183	-0,7

Momentos flectores (mKñ)

Deformada (mm)

M (mKñ) / v (mm)

Ley límite de la viga

ROTURA	K	K(z/d)	$\mu(x/d)$	C- (°/m)	λ	HA25	L/v	K'	K/K	Θ^-	Θ^+
NEG	2,000	0,89	0,26	6,40	20	B500S	0,97	2,245	1,12	mrad°m	mrad°m
							DEF. OK			-1,204	-0,39

Momentos flectores (mKñ)

Deformada (mm)

ROTURA	NEG	K	2,000	K(z/d)	0,86	$\mu(x/d)$	0,38	C- (°100)	6,40	λ	20	HA25	B500S	L/v		K'	2,245	K'/K	1,12	Θ^-	mrad*m	Θ^+	mrad*m
														1,12	DEF. EXC.

ROTURA	K	K(z/d)	$\mu(x/d)$	C- (‰)	λ	HA25	L/v	K'	K/K	Θ^-	Θ^+
NEG	2,000	0,83	0,51	6,40	20	B500S	1,23	2,245	1,12	mrad*m	mrad*m
							DEF. EXC.			-1,501	-0,38

M (mKN) / v (mm)

Ley límite de la viga

ROTURA	NEG	K	2,000	K(z/d)	0,79	$\mu(x/d)$	0,63	C- (°100)	6,40	λ	20	HA25	B500S		K'	2,245	K/K	1,12	Θ^-	mrad*m	Θ^+	mrad*m
													L/v	DEF. EXC.								

Momentos flectores (mKN)

Deformada (mm)

ROTURA POS	K	3,000	K(z/d)	0,89	$\mu(x/d)$	0,26	C-(°/100)	6,40	λ	20	HA25 B500S		K'IK	Θ^- mrad*m	Θ^+ mrad*m		
											L/v	DEF-OK					
											0,82	DEF-OK	K'	2,273	0,76	-0,898	-0,27

Momentos flectores (mKN)

Position (m)	Ma calc (mKN+1)	Ma diseño (mKN+)	Ma teor (mKN+1)	Ma teor (mKN+1)
0,00	250	250	250	250
0,50	180	180	190	190
1,00	110	110	120	120
1,50	40	40	50	50
2,00	-30	-30	-20	-20
2,50	-100	-100	-90	-90
3,00	-120	-120	-110	-110

Legend:

- Ma calc (mKN+1)
- Ma diseño (mKN+)
- Ma teor (mKN+1)
- Ma teor (mKN+1)
- 0

ROTURA POS	K	3,000	K(z/d)	0,83	$\mu(x/d)$	0,51	C- (°100)	6,40	λ	20	HA25 B500S	L/V	1,14	K'	2,564	K/K	0,85	Θ^-	mrad°m	Θ^+	mrad°m
												DEF. EXC.						-1,208		-0,38	

M (mKN) / v (mm)

Ley límite de la viga

ROTURA POS	K	3,000	K(z/d)	0,79	$\mu(x/d)$	0,63	C- (°100)	6,40	λ	20	HA25 B500S	L/v	K'	K/K	Θ^- mrad°m	Θ^+ mrad°m
												1,19	2,709	0,90	-1,263	-0,39
												DEF. EXC.				

Momentos flectores (mKN)

Deformada (mm)

M (mKñ) / v (mm)

Ley límite de la viga

ROTURA	NEG	K	1,000	K(z/d)	0,89	$\mu(x/d)$	0,26	C- (°/o)	6,40	λ	30	HA25	B500S	L/v		K'	2,390	K'/K	2,39	Θ^-	mrad°m	Θ^+	mrad°m
														2,01	DEF. EXC.								

Momentos flectores (mKñ)

Deformada (mm)

ROTURA	NEG	K	1,000	K(z/d)	0,86	$\mu(x/d)$	0,38	C- (°/o)	6,40	λ	30	Momentos flectores			
												HA25	L/V	K'	K'/K
												B500S	2,32	2,390	2,39
													DEF. EXC.	Θ^-	Θ^+
														mrad°m	mrad°m
														-3,395	-0,63

ROTURA	NEG	K	1,000	K(z/d)	0,83	$\mu(x/d)$	0,51	C- (°100)	6,40	λ	30	HA25	B500S	L/v		K'	2,390	K'/K	2,39	Θ^-	mrad*m	Θ^+	mrad*m
														2,47	DEF. EXC.								

Mu calc (mKx-1)
Mu diseño (mKx-)
Mu real (mKx-1)
Mu calc (mKx-1)
0

uS (mm)
uR (mm)
0
v. lim

M (mK) / v (mm)

Ley límite de la viga

ROTURA	NEG	K	1,000	K(z/d)	0,79	$\mu(x/d)$	0,63	C- (°/o)	6,40	λ	30	HA25		K'	2,390	K'/K	2,39	Θ^-	mrad*m	Θ^+	mrad*m
												L/v	DEF. EXC.								
												2,55						-3,718		-0,68	

Momentos flectores (mK)

Deformada (mm)

M (mKñ) / v (mm)

Ley límite de la viga

ROTURA	NEG	K	2,000	K(z/d)	0,89	$\mu(x/d)$	0,26	C- ^(r/o)	6,40	λ	30	HA25		K'	2,245	K/K	1,12	Θ^-	Θ^+
												B500S	L/v						
																		mrad°m	mrad°m
																		-1,345	-0,4

Momentos flectores (mKñ)

Deformada (mm)

Diagrama de Momentos

ROTURA	NEG	K	2,000	K(z/d)	0,79	$\mu(x/d)$	0,63	C- (°100)	6,40	λ	30	HA25	B500S	L/v		K'	2,245	K'/K	1,12	Θ^-	Θ^+
														1,91	DEF. EXC.					-1,874	-0,54

Ley límite de la viga

Deformada (mm)

ROTURA POS	K	3,000	k(z/d)	0,89	$\mu(x/d)$	0,26	C- (°100)	6,40	λ	30	HA25 B500S	L/V	1,23	K'	2,273	K/K	0,76	Θ^-	mrad*m	Θ^+	mrad*m
												DEF. EXC.						-0,986		-0,27

ROTURA POS	K	3,000	K(z/d)	0,86	$\mu(x/d)$	0,38	C-(°/100)	6,40	λ	30	Momentos flectores (mKN)				K'/K	Θ - mrad°m	Θ + mrad°m		
											HA25 B500S	L/v	DEF. EXC.	K'					
																	0,81	-1,204	-0,33

</

ROTURA POS	K	K(z/d)	0,79	μ(x/d)	0,63	C- (°100)	6,40	λ	30	HA25 B500S	L/V	1,79	K'	2,709	K'/K	0,90	Θ- mrad°m	Θ+ mrad°m
												DEF. EXC.					-1,428	-0,39

ROTURA	NEG	K	1,000	K(z/d)	0,87	$\mu(x/d)$	0,38	C- ⁽¹⁰⁰⁾	10,00	λ	10	HA25		K'/K	Θ^-	Θ^+	
												L/v	B500S				
													0.69		1.77	mrad*m	mrad*m
													DEF. OK	K'	1.774	-0.953	-0.41

0,69

DEF. OK

-0,963

-0,41

M (mKñ) / v (mm)

Ley límite de la viga

ROTURA	NEG	K	1,000	K(z/d)	0,80	$\mu(x/d)$	0,63	C- ⁽¹⁰⁰⁾	10,00	λ	10	HA25		K'	2,036	K/K	2,04	$\Theta-$	mrad*m	$\Theta+$	mrad*m
												L/v	0,70								
												DEF. OK									
																		-0,975		-0,47	

Momentos flectores (mKñ)

Deformada (mm)

M (mK) / v (mm)

Ley límite de la viga

ROTURA	K	k(z/d)	$\mu(x/d)$	C- (°/o)	λ	HA25	L/v	K'K	Θ^-	Θ^+
NEG	2,000	0,89	0,26	10,00	10	B500S	0,53	2,245	1,12	0,914
							DEF. OK			0,33

Momentos flectores (mK)

Deformada (mm)

ROTURA	NEG	K	2,000	K(z/d)	0,87	$\mu(x/d)$	0,38	C- (°100)	10,00	λ	10	HA25	B500S		K'K	1,12	Θ^-	mrad*m	Θ^+	mrad*m
													L/v	DEF. OK						

Θ^- mrad*m
 Θ^+ mrad*m

ROTURA POS	K	K(z/d)	μ(x/d)	C- (°100)	λ	10	HA25		K'	K'/K	Θ- mrad°m	Θ+ mrad°m
							B500S	L/v				
	3,000	0,87	0,38	10,00				0,52 DEF. OK	2,273	0,76	-0,843	-0,33

M (mKN) / v (mm)

Ley límite de la viga

ROTURA POS	K	3,000	K(z/d)	0,84	$\mu(x/d)$	0,51	C- (°100)	10,00	λ	10	HA25 B500S	L/v	K'	2,418	K'/K	0,81	Θ^- mrad*m	Θ^+ mrad*m
												0,59 DEF. OK					-0,937	-0,37

Momentos flectores (mKN)

Deformada (mm)

uS (mm)
uT (mm)
0
v. lim

ROTURA POS	K	K(z/d)	$\mu(x/d)$	C- (°100)	λ	HA25 B500S	L/V	K'	K'/K	Θ^- mrad*m	Θ^+ mrad*m
	3,000	0,80	0,63	10,00	10		0,63 DEF. OK	2,564	0,85	-1,013	-0,41

ROTURA	NEG	K	1,000	K(z/d)	0,89	μ(x/d)	0,26	C- (‰)	10,00	λ	20	HA25	B500S		K'	2,390	K'/K	2,39	Θ-	Θ+
													L/v	DEF. EXC.					mrad*m	mrad*m
													1,53						-2,704	-0,61

ROTURA	K	K(z/d)	μ(x/d)	C- (°/100)	λ	HA25	L/v	K'	K'/K	Θ- mrad°m	Θ+ mrad°m
NEG	1,000	0,87	0,38	10,00	20	B500S	1,68	2,390	2,39	-2,952	-0,67
							DEF. EXC.

ROTURA	K	1,000	K(z/d)	0,84	$\mu(x/d)$	0,51	C-(°/o)	10,00	λ	20	HA25	L/v		K'	2,390	K'/K	2,39	$\Theta-$	$\Theta+$
											B500S	1,76	DEF. EXC.			mrad*m		mrad*m	
NEG																		-3,127	-0,87

Momentos flectores (mKN)

Mu cable (mKN-1)

Mu diseño (mKN-)

Mu teor (mKN-1)

Mu cable (mKN-1)

Mu teor (mKN-1)

0

ROTURA	NEG	K	1,000	K(z/d)	0,80	$\mu(x/d)$	0,63	C- (°100)	10,00	λ	20	HA25	B500S	L/v		K'	2,390	K'/K	2,39	Θ^-	mrad*m	Θ^+	mrad*m
														1,79	DEF. EXC.

M (mKN) / v (mm)

Ley límite de la viga

ROTURA	K	K(z/d)	$\mu(x/d)$	C- (°/o)	λ	HA25	L/v	K'	K/K	Θ^-	Θ^+
NEG	2,000	0,87	0,38	10,00	20	B500S	1,24	2,245	1,12	mrad*m	mrad*m
							DEF. EXC.			-1,437	-0,38

Momentos flectores (mKN)

Deformada (mm)

ROTURA POS	K	3,000	k(z/d)	0,89	μ(x/d)	0,26	C- (°100)	10,00	λ	20	HA25 B500S	L/v	K'	2,273	K/IK	0,76	Θ- mrad*m	Θ+ mrad*m
												0,91 DEF. OK					-0,930	-0,27

ROTURA POS	K	K(z/d)	0,87	μ(x/d)	0,38	C- (°100)	10,00	λ	20	HA25 B500S	L/V	K'	K/IK	Θ- mrad*m	Θ+ mrad*m
	3,000										1,07	2,273	0,76	-1,070	-0,33
Momentos flectores															
DEF. EXC.

M (mKN) / v (mm)

Ley límite de la viga

ROTURA POS	K	K(z/d)	μ(x/d)	C- (°100)	λ	HA25 B500S	L/V	K'	K'/K	Θ- mrad°m	Θ+ mrad°m
	3,000	0,80	0,63	10,00	20		1,24	2,564	0,85	-1,264	-0,39

Momentos flectores (mKN)

Deformada (mm)

ROTURA	K	K(z/d)	$\mu(x/d)$	C- (°/o)	λ	HA25	L/V	K'	K'/K	Θ^-	Θ^+
NEG	1,000	0,89	0,26	10,00	30	B500S	2,25	2,390	2,39	mrad°m	mrad°m
							DEF. EXC.			-3,102	-0,77

ROTURA	K	K(z/d)	$\mu(x/d)$	C- (°/o)	λ	HA25	L/V	K'	K'/K	Θ^-	Θ^+
NEG	1,000	0,87	0,38	10,00	30	B500S	2,45	2,390	2,39	mrad*m	mrad*m
							DEF. EXC.			-3,368	-0,63

M (mK) / v (mm)

Ley límite de la viga

ROTURA	K	K(z/d)	$\mu(x/d)$	C- (°/m)	λ	HA25	L/v	K'	K'/K	Θ^-	Θ^+
NEG	1,000	0,84	0,51	10,00	30	B500S	2,57	2,390	2,39	mrad*m	mrad*m
							DEF. EXC.			-3,620	-0,97

Momentos flectores (mK)

Deformada (mm)

ROTURA	K	K(z/d)	$\mu(x/d)$	C- (°/m)	λ	HA25	L/v	K'	K/K	Θ^-	Θ^+
NEG	1,000	0,80	0,63	10,00	30	B500S	2,63	2,390	2,39	mrad*m	mrad*m
							DEF. EXC.			-3,708	-0,99

M (mK) / v (mm)

Ley límite de la viga

ROTURA	K	k(z/d)	$\mu(x/d)$	C- (°/o)	λ	HA25	L/v	K'	K/K	Θ^-	Θ^+
NEG	2,000	0,89	0,26	10,00	30	B500S	1,60	2,245	1,12	mrad*m	mrad*m
							DEF. EXC.			-1,313	-0,33

Momentos flectores (mK)

Deformada (mm)

ROTURA	K	K(z/d)	$\mu(x/d)$	C- (°100)	λ	HA25	L/v	K'	K'/K	Θ^-	Θ^+
NEG	2,000	0,84	0,51	10,00	30	B500S	1,95	2,558	1,28	mrad*m	mrad*m
							DEF. EXC.			-1,755	-0,44

ROTURA	K	K(z/d)	$\mu(x/d)$	C- (°100)	λ	HA25	L/v	K'	K'/K	Θ^-	Θ^+
NEG	2,000	0,80	0,63	10,00	30	B500S	2,01	2,558	1,28	mrad*m	mrad*m
							DEF. EXC.			-1,807	-0,4

ROTURA POS	K	3,000	k(z/d)	0,89	$\mu(x/d)$	0,26	C- (°100)	10,00	λ	30	HA25 B500S	L/v	1,37	K'	2,128	K/IK	0,71	$\Theta-$ mrad°m	$\Theta+$ mrad°m
												DEF. EXC.						-1,007	-0,27

M (mKN) / v (mm)

Ley límite de la viga

ROTURA POS	K	3,000	K(z/d)	0,87	$\mu(x/d)$	0,38	C- (°100)	10,00	λ	30	HA25 B500S	L/V DEF. EXC.	K'	2,418	K/K	0,81	Θ^- mrad°m	Θ^+ mrad°m
												1,60					-1,179	-0,32

Momentos flectores (mKN)

Deformada (mm)

Mu calc (mKN·1)
Mu diseño (mKN·1)
Mu test (mKN·1)
Mu calc (mKN·1)

us (mm)
ur (mm)
0
v. lim

M (mKñ) / v (mm)

Ley límite de la viga

ROTURA POS	K	3,000	K(z/d)	0,80	$\mu(x/d)$	0,63	C- (°100)	10,00	λ	30	HA25 B500S	L/v		K'	2,709	K/K	0,90	Θ^- mrad°m	Θ^+ mrad°m
												1,86	DEF. EXC.						

Momentos flectores (mKñ)

Deformada (mm)

Anejo 3.- Resultados de los casos estudiados de fábrica

K=Ne/Nc	x/h (cen)	λg	λm
2,00	0,10	2,00	13,00

forma / línea empujes / línea presiones

K=Ne/Nc	x/h (cen)	λg	λm
2,00	0,10	2,00	15,00

forma / línea empujes / línea presiones

$K=Ne/Nc$	x/h (cen)	λg	λm
2,00	0,10	2,00	17,00

forma / línea empujes / línea presiones

$K=Ne/Nc$	x/h (cen)	λg	λm
2,00	0,15	2,00	17,00

forma / línea empujes / línea presiones

$K=Ne/Nc$	x/h (cen)	λg	λm
2,00	0,20	2,00	13,00

forma / línea empujes / línea presiones

$K=Ne/Nc$	x/h (cen)	λg	λm
2,00	0,20	2,00	15,00

forma / línea empujes / línea presiones

$K=Ne/Nc$	x/h (cen)	λg	λm
2,00	0,20	2,00	17,00

forma / línea empujes / línea presiones

$K=Ne/Nc$	x/h (cen)	λg	λm
2,00	0,25	2,00	17,00

forma / línea empujes / línea presiones

K=Ne/Nc	x/h (cen)	λg	λm
2,00	0,30	2,00	13,00

forma / línea empujes / línea presiones

$K=Ne/Nc$	x/h (cen)	λg	λm
2,00	0,30	2,00	15,00

forma / línea empujes / línea presiones

$K=Ne/Nc$	x/h (cen)	λg	λm
2,00	0,30	2,00	17,00

forma / línea empujes / línea presiones

$K=Ne/Nc$	x/h (cen)	λg	λm
2,00	0,40	2,00	13,00

forma / línea empujes / línea presiones

$K=Ne/Nc$	x/h (cen)	λg	λm
2,00	0,40	2,00	15,00

forma / línea empujes / línea presiones

K=Ne/Nc	x/h (cen)	λg	λm
2,00	0,50	2,00	13,00

forma / línea empujes / línea presiones

$K=Ne/Nc$	x/h (cen)	λg	λm
2,00	0,50	2,00	15,00

forma / línea empujes / línea presiones

$K=Ne/Nc$	x/h (cen)	λg	λm
2,00	0,60	2,00	13,00

forma / línea empujes / línea presiones

$K=Ne/Nc$	x/h (cen)	λg	λm
2,00	0,60	2,00	15,00

forma / línea empujes / línea presiones

K=Ne/Nc	x/h (cen)	λg	λm
2,00	0,70	2,00	13,00

forma / línea empujes / línea presiones

$K=Ne/Nc$	x/h (cen)	λg	λm
2,00	0,70	2,00	15,00

forma / línea empujes / línea presiones

$K=Ne/Nc$	x/h (cen)	λg	λm
2,00	0,80	2,00	13,00

forma / línea empujes / línea presiones

$K=Ne/Nc$	x/h (cen)	λg	λm
2,00	0,90	2,00	13,00

forma / línea empujes / línea presiones

$K=Ne/Nc$	x/h (cen)	λg	λm
2,00	1,00	2,00	13,00

forma / línea empujes / línea presiones