

## **Análisis límite de estructuras de fábrica como problema de contacto unilateral: resolución por el método de Monte Carlo.**

*Magdalena Layos, Fernando.*<sup>1,2</sup>; *Hernando García, José Ignacio.*<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>*Departamento de construcciones arquitectónicas. EUATM.UPM.* <sup>2</sup>*Departamento de estructuras de edificación . ETSAM.UPM*  
*fernando.magdalena@upm.es, joseignacio.hernando@upm.es*

---

### **Resumen**

Se propone, como fundamento para posteriores análisis por métodos probabilísticos menos costosos computacionalmente, una simulación por el Método de Monte Carlo de estructuras antiguas de fábrica modeladas en forma de problema de contacto unilateral con rozamiento entre cuerpos rígidos.

### **Palabras clave**

Monte Carlo, rozamiento, contacto unilateral.

### **I. Introducción:**

La evaluación de la seguridad de las estructuras antiguas de fábrica es un problema abierto. El material es heterogéneo y anisótropo, el estado previo de tensiones difícil de conocer y las condiciones de contorno inciertas. Una de sus características distintivas es su carácter "unilateral", es decir, su escasa o nula resistencia a tracción frente a su elevada resistencia a compresión.

Es un hecho conocido que el colapso de este tipo de estructuras no se produce al alcanzarse, en uno o varios puntos, las tensiones máximas de resistencia a tracción. Por el contrario, al producirse la consecuente fisuración, el material pasa de su comportamiento inicial quasi-frágil a otro que puede considerarse dúctil. Es esta fisuración, real o virtual, la que confiere al material la ductilidad que permite aplicarle los métodos del Análisis Límite [1]. A comienzos de los años 50 [2] se demostró que el análisis límite era aplicable a este tipo de estructuras, considerándose como una herramienta adecuada, ya sea de modo autosuficiente o, simplemente, como una primera aproximación [3].

Por otro lado, esta nueva caracterización del material fábrica (como un conjunto de cuerpos separados por fisuras, reales o virtuales, y en contacto unilateral) implica que no puedan ignorarse las características especiales del comportamiento a rozamiento por deslizamiento, para el cual está demostrado [4] que puede dar lugar a problemas inconsistentes. Éstos pueden no tener solución o tener múltiples soluciones.

En los casos en los que no se produce deslizamiento, la aplicación de los teoremas del análisis límite estándar constituye una herramienta formidable por su simplicidad y robustez. No es necesario conocer el estado real de tensiones, basta con encontrar cualquier solución de equilibrio y que satisfaga las condiciones de límite del material, para saber con seguridad que su carga será igual o inferior a la carga real de inicio de colapso (teorema estático). Además, esta carga de inicio de colapso es única (teorema de la unicidad) y se puede obtener como el óptimo de uno cualquiera entre un par de programas matemáticos convexos duales.

Sin embargo, cuando puedan existir mecanismos de inicio de colapso que impliquen deslizamientos, cualquier solución debe satisfacer tanto las restricciones estáticas como las cinemáticas así como un tipo especial de restricciones disyuntivas, que ligan las anteriores y que pueden plantearse como de complementariedad. En este último caso, el Problema de Complementariedad resultante no presenta características especiales que permitan asegurar la existencia de una solución única, por lo que es necesaria la búsqueda de otros métodos para tratar la incertidumbre asociada a su multiplicidad.

En los últimos años esta búsqueda se ha centrado en encontrar un mínimo absoluto por debajo del cual el colapso sea imposible. Este método es fácil de plantear desde el punto de vista matemático, pero intratable computacionalmente debido a las restricciones de complementariedad (1), que no son ni convexas ni suaves.

$$0 \leq \mathbf{y} \perp \mathbf{z} \geq 0 \quad (1)$$

El problema de decisión resultante es de complejidad computacional No determinista Polinomial - completo (**NP-completo**) y el problema de optimización global **NP-difícil**. Además, en tanto no se demuestre la existencia de un principio de máximo o mínimo, existen dudas en relación a que el esfuerzo empleado en aproximar este mínimo esté justificado.

Está fuera de lugar recurrir a la vía experimental, para constatarlo, en el caso de las construcciones históricas. Como alternativa, el presente trabajo propone, sobre ejemplos sencillos y aprovechando las especiales características de las restricciones de complementariedad (que escritas en forma bilineal son del tipo (2)), hallar la distribución de frecuencias de las acciones desestabilizantes para todas las soluciones de inicio de colapso posibles.

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = 0 ; \mathbf{y} \geq \mathbf{0} ; \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \quad (2)$$

Para ello, se realiza un muestreo de soluciones [5][6] mediante el método de Monte Carlo, comprobando previamente su exactitud utilizando como contraste un método exacto de computación de politopos [7].

El objetivo final es plantear hasta qué punto está justificada la búsqueda del mínimo absoluto y proponer un método alternativo de evaluación de la seguridad basado en probabilidades.

## II. Exposición:

Se propone modelar una junta continua mediante su discretización en múltiples apoyos (Fig. 1). Cuando el contacto es perfecto, éste se produce en todos los apoyos. Cuando es imperfecto, sólo se producirá en algunos, llegando, en el caso extremo de máxima imperfección, a producirse en un único apoyo. Todos los casos posibles se encuentran entre ambos extremos.

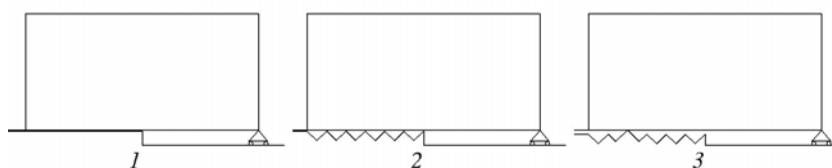


Figura 1. Discretización de una junta mediante múltiples puntos de contacto.

Se pretende obtener la totalidad de las soluciones de inicio de colapso posibles, correspondientes a un mecanismo determinado, con el fin de estudiar la distribución de los valores de las acciones desestabilizantes correspondientes.

De modo muy sintético, una solución de inicio de colapso es la que cumple las restricciones (3).

$$\mathbf{y} \in \{E_y\} ; \mathbf{0} \leq \mathbf{y} \perp \mathbf{z} \geq \mathbf{0} ; \mathbf{z} \in \{K_z\} \Leftrightarrow \mathbf{y} \in \{E_y\} ; \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = 0 ; \mathbf{z} \in \{K_z\} \quad (3)$$

Que se interpreta del siguiente modo: debe ser una solución estática válida,  $\mathbf{y} \in \{E_y\}$ , debe ser una solución cinemática válida,  $\mathbf{z} \in \{K_z\}$ , y deben cumplirse las condiciones de contacto unilateral entre ambas, que pueden

escribirse en forma de restricción de complementariedad  $\mathbf{0} \leq \mathbf{y} \perp \mathbf{z} \geq \mathbf{0}$  o, teniendo en cuenta que las soluciones estática y cinemática se han formulado en función de dos vectores positivos  $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ , escribirse en forma bilineal  $\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = 0$ .

Las especiales características de las restricciones que gobiernan el problema (2) hacen que, una vez elegida de algún modo una parte de la solución y sustituida en el problema original, éste se convierta en lineal, quedando reducido a un sistema de ecuaciones e inecuaciones lineales. En el presente caso, eligiendo un mecanismo de inicio de colapso  $\mathbf{z} = \mathbf{z}'$ , el problema queda reducido a (4).

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}' \Rightarrow \mathbf{y} \in \{E_y\} ; \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}' = 0 \quad (4)$$

En el primer ejemplo que se va a analizar, se somete a la acción desestabilizante de una fuerza externa horizontal  $f$ , que provocará su fallo por deslizamiento hacia la derecha, a un cuerpo (Fig. 1) apoyado, en el lado izquierdo, sobre una junta de contacto con rozamiento discretizada del modo descrito, y, en el lado derecho, sobre un apoyo deslizante.

Representando el mecanismo de colapso por medio de sus restricciones estáticas (de cedencia) equivalentes, a saber, haciendo que la relación entre tangencial, opuesto al deslizamiento, y normal alcance en todos los puntos de contacto el valor del coeficiente de rozamiento del material, se pueden escribir las ecuaciones estáticas, de equilibrio y de cedencia, del problema.

Planteadas las ecuaciones de equilibrio para el caso de  $n+1$  apoyos (Fig. 2), se comprueba que incluso para  $n=1$ , es decir, con dos apoyos con rozamiento en el lado izquierdo, el problema está indeterminado.

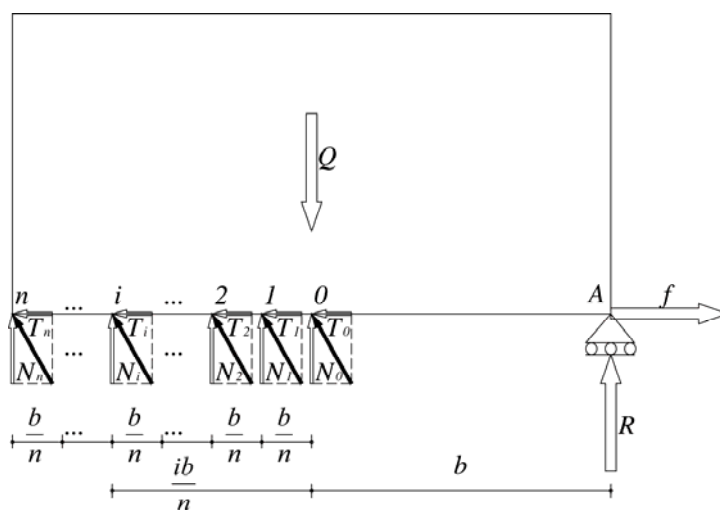


Figura 2. Diagrama de sólido libre (de fuerzas) para una solución estática extrema correspondiente a un mecanismo.

Expresado en forma clásica, como un problema de estática, mediante las ecuaciones de equilibrio en las cuales se han sustituido los valores límites de las restricciones de cedencia, y después de operarlas, se reduce a un sistema de desigualdades (5).

$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{n} N_i \geq 0 ; Q - \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right) N_i \geq 0 ; N_i \geq 0 \quad \forall i | i=0..n \quad (5)$$

Cada desigualdad divide el espacio en dos semiespacios, en uno de los cuales se cumple la desigualdad y en el otro no. El conjunto de todas las desigualdades define un cuerpo poliédrico convexo, en el interior del cual se cumplen todas ellas y que, por tanto, contiene todas las soluciones de inicio de colapso para el mecanismo en estudio. Si el cuerpo es cerrado recibe el nombre de politopo.

Llamando  $\phi$  a la  $\tan \varphi$ , siendo  $\varphi$  el ángulo de rozamiento (en seco, estático de Coulomb) se puede escribir  $f$  :

$$f = \phi(Q - \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} N_i) \quad (6)$$

En el caso en que  $n=1$  el problema es representable gráficamente, lo que permite mostrar la distribución de los valores de la fuerza desestabilizante  $f$  (Fig. 3). En ella se puede apreciar como una de las desigualdades es redundante y no interviene en la definición del poliedro. En el caso en que  $n=1$  el poliedro es un polígono, concretamente un triángulo que es el politopo más simple posible en dos dimensiones.

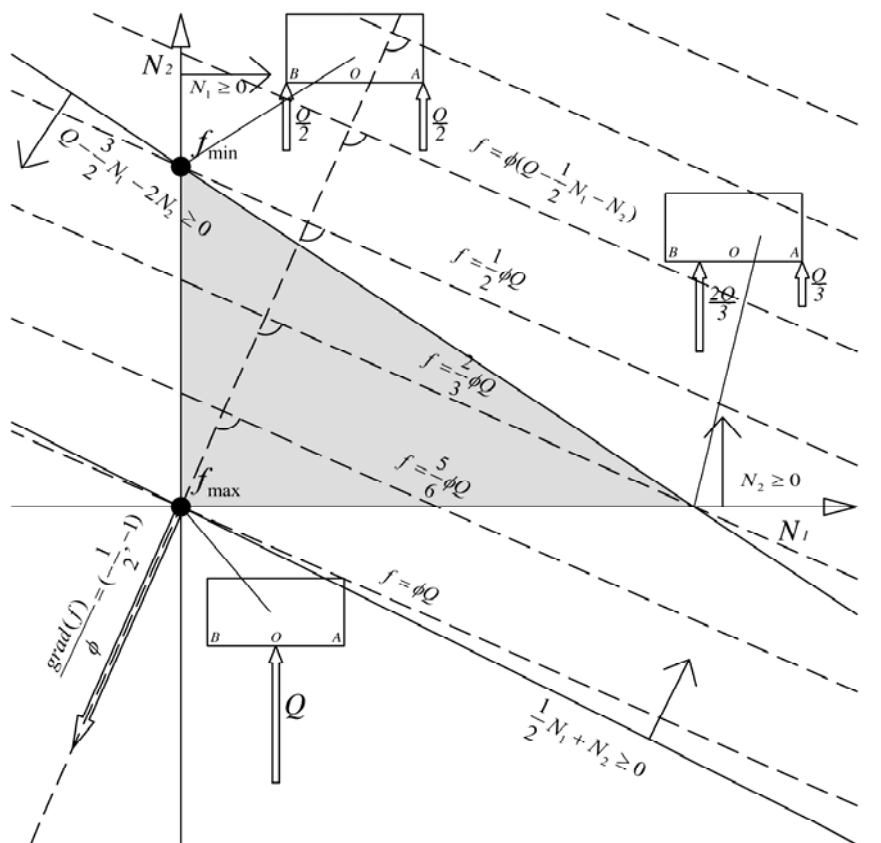


Figura 3. Conjunto de soluciones de inicio de colapso para el caso de dos apoyos con rozamiento y uno deslizante.

Al politopo más simple posible en  $n$  dimensiones se le llama simplex y tiene que estar definido por  $n + 1$  desigualdades que cumplan ciertas condiciones, entre ellas, que el número de restricciones que se corten en un vértice sea el mínimo estrictamente necesario para definirlo, es decir,  $n$ . Para generalizar los razonamientos a  $n$  dimensiones basta sustituir en la argumentación los triángulos por simplex  $n$ -dimensionales.

Definimos como probabilidad de inicio de colapso para una acción dada, la relación entre la cantidad de soluciones para las que el colapso se inicia con una acción menor o igual que la dada y la cantidad total de soluciones de inicio de colapso. En la figura 4 se representan estas cantidades para el caso en que la acción valga  $f = \frac{5}{6} \phi Q$ .

Las cantidades, que de modo general llamamos volúmenes, aunque en el presente caso son superficies, pueden obtenerse por métodos exactos. En este caso por triangulación (Fig. 4) y en el caso  $n$ -dimensional por descomposición en simplex  $n$ -dimensionales. De esta forma se ha realizado, empleando el software VINCI [8] para computación exacta del volumen de un politopo. Sin embargo, el uso de estos métodos está restringido a casos con un pequeño número de dimensiones.

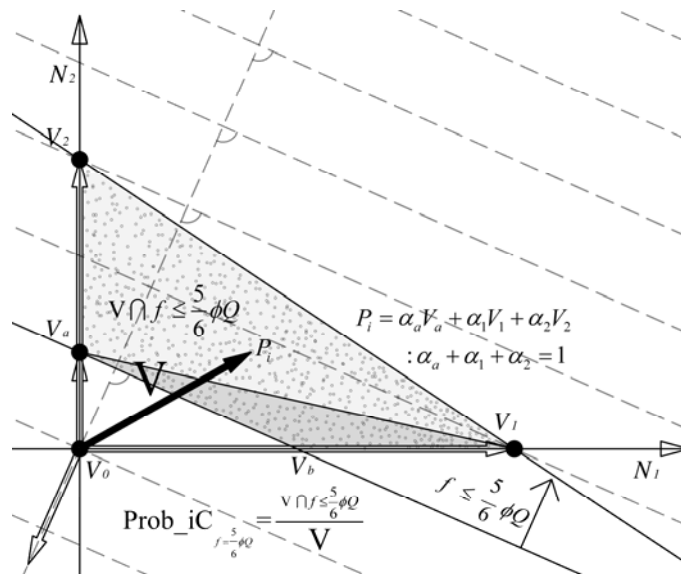


Figura 4. Procedimiento de obtención de un muestreo uniforme sobre un polítopo y la correspondiente distribución de probabilidades.

También pueden obtenerse los volúmenes, y es especialmente apropiado en los casos de muchas dimensiones, por el método de Monte Carlo. Así se ha realizado (para el caso en que  $n=10$ ), utilizando el procedimiento que se describirá más adelante, y se han comparado los resultados con los obtenidos por el método exacto, comprobando que a efectos prácticos son indistinguibles.

Una vez comprobada su equivalencia, se realiza un muestreo directo de los valores de las acciones desestabilizantes  $f$  mediante el procedimiento que se describe a continuación.

Tanto en el procedimiento exacto como en el de Monte Carlo, el primer paso consiste en hallar los vértices del polítopo. En el presente trabajo esto se hace de modo determinista. A partir de estos vértices se obtendrán los puntos del polítopo que constituirán la muestra.

El método más clásico de muestreo por Monte Carlo, conocido como método de rechazo, consiste en hacer un muestreo uniforme sobre un ortoedro que circunscriba al cuerpo, rechazando los resultados que no estén incluidos en el propio cuerpo. Este método no es viable, dado que la relación entre el volumen de un simplex y el del paralelepípedo circunscrito es de  $1/n!$ , esto significa que en el caso de comprobación estudiado con  $n=10$  se admitiría un resultado de cada 3.628.800, por tanto, debe implementarse otro método.

Todo punto sobre el que se va a realizar la muestra valores de  $f$ , mediante la aplicación de la fórmula (6), debe pertenecer al polítopo. Un punto pertenece al polítopo cuando su vector de posición es una combinación lineal convexa de los de sus vértices,  $P_i = \alpha_a V_a + \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots : \alpha_a + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots = 1$ , (Fig. 4).

Quedan por elegir los coeficientes  $\alpha_a, \alpha_1, \alpha_2, \dots$  de modo que la distribución resultante sea uniforme. Para ello se aprovecha [5] una propiedad de los estadísticos de orden de una distribución uniforme sobre el intervalo  $[0,1]$ . El algoritmo que implementa los dos últimos pasos descritos se detalla a continuación.

1º Sea  $p_0 = 0$  y  $p_{n+1} = 1$

2º Generar  $n$  extracciones aleatorias uniformemente distribuidas del intervalo cerrado  $[0,1]$

3º Ordenar en orden ascendente los  $n+2$  puntos  $p_0, \dots, p_{n+1}$

4º Los  $n+1$  coeficientes del vector de posición  $(a_0 V_0, a_1 V_1, \dots, a_n V_n)$  del punto buscado del polítopo vendrán dados por  $a_i = p_{i+1} - p_i$

Aplicando el procedimiento descrito, en el caso de junta perfecta y para diferentes valores de  $n$ , se comprueba (Fig. 5) que conforme aumenta el número de puntos de contacto disminuye la varianza de los valores de la muestra obtenida.

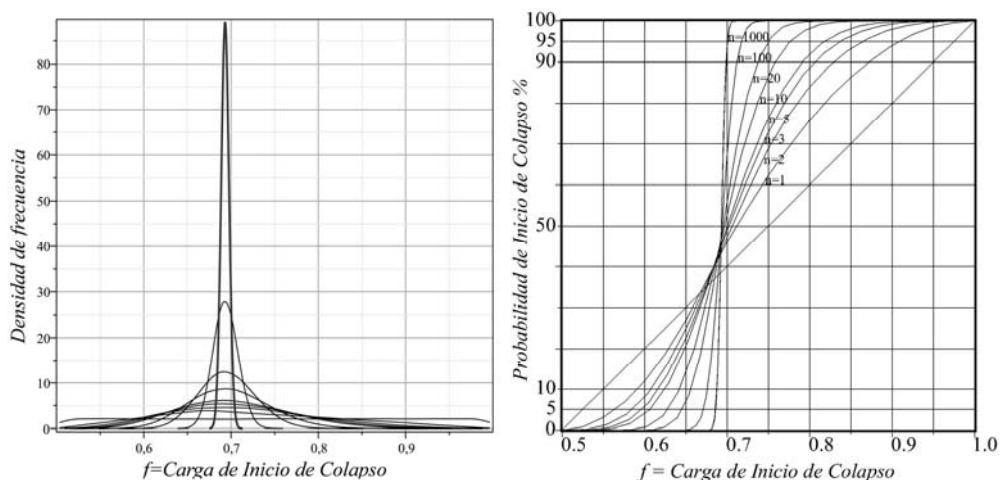


Figura 5. Funciones de distribución y acumulada de frecuencias, de la acción desestabilizante, para distintos valores de  $n$ .

Aplicando los procedimientos descritos se hallan las distribuciones de frecuencia (Fig. 6) de los puntos de paso de la resultante (Fig. 6 izquierda) y de los valores de la acción desestabilizante (Fig.6 derecha). En ambos casos, la curva señalada con 2 corresponde al caso de junta perfecta y la señalada con 3 al de extremadamente imperfecta.

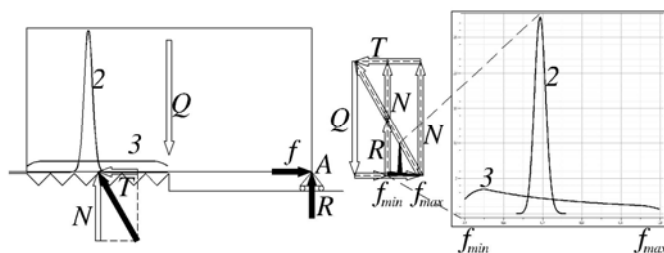


Figura 6. Distribuciones de frecuencias de los puntos de paso de la reacción de contacto, y de las acciones desestabilizantes.

Se puede comprobar, así mismo, que las soluciones, en el caso de junta absolutamente imperfecta, coinciden con los vértices del poliedro, que a su vez coinciden con los casos en que hay contacto en un único punto de cada cara de contacto. Aprovechando este hecho, se pueden obtener directamente las soluciones extremas, es decir, los vértices del poliedro de soluciones de colapso, tal y como se va a hacer en el siguiente ejemplo.

Éste, que puede representar razonablemente el efecto de la traba, al que Rankine denominó "tenacidad friccional", estudia las relaciones de contacto entre dos o tres bloques y, en concreto, la resistencia a su separación horizontal (a "tracción") sujetos a las sollicitaciones transmitidas por el peso de un bloque superior, que actúan en sentido perpendicular a la acción desestabilizante (Fig. 7).

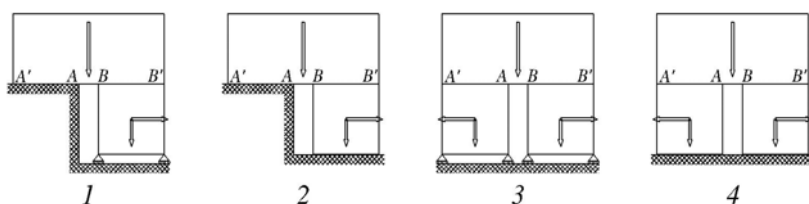


Figura 7. Diferentes casos de estudio para el modelo de traba.

Con carácter previo, es necesario comprobar cuantas de estas caras de contacto son "independientes", es decir, en cuantas de ellas se pueden elegir, aleatoriamente, los puntos de paso de su resultante. Como se observa (Fig. 8 derecha) una vez elegido el punto de paso y el valor de la resultante en la cara superior, quedan determinados ambos en la cara inferior. De ello se deduce que el muestreo puede realizarse, exclusivamente, sobre las dos caras de contacto del bloque superior (Fig. 8 centro)

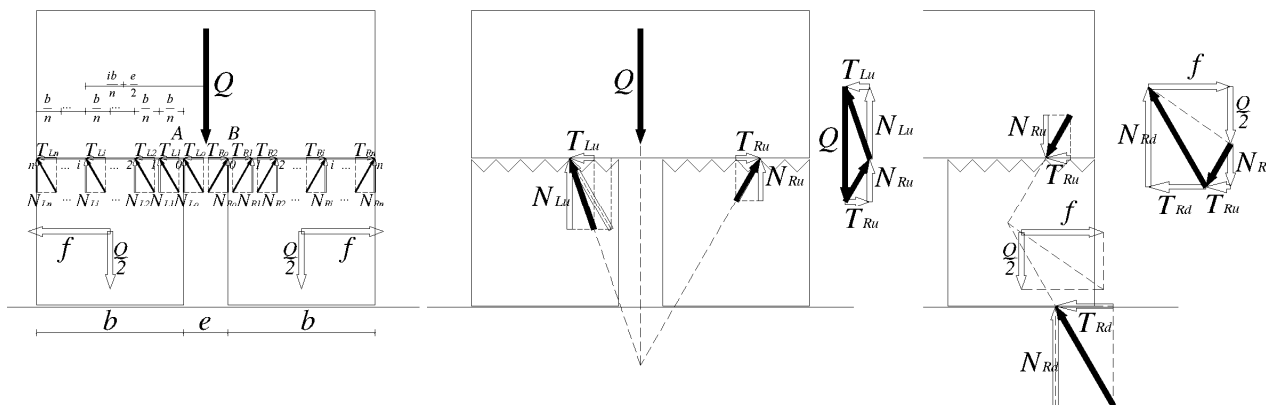


Figura 8. Diagramas de sólido libre (de fuerzas) para las soluciones estáticas extremas correspondientes a los tres mecanismos.

Puesto que los puntos extremos del politopo son aquellos en que todas las variables excepto una toman el valor 0, en este caso, para que pueda existir equilibrio en el bloque superior es necesario que al menos uno de los  $N_{Lj}$  y uno de los  $N_{Rk}$  sean estrictamente positivos. Esta condición puede escribirse:

$$\exists N_{Lj} > 0 \in \{N_{Lj} \mid j = 0 \dots n\} \quad \wedge \quad \exists N_{Rk} > 0 \in \{N_{Rk} \mid k = 0 \dots n\} \quad (7)$$

Los puntos extremos del politopo (soluciones extremas) serán aquellos en los que sólo uno de los  $N_{Lj}$  y uno de los  $N_{Rk}$  sean estrictamente positivos (Fig. 8 centro). Se pueden plantear directamente todas las combinaciones posibles. Siendo, para el caso en que el contacto se produce en el punto  $j$  de la junta izquierda y  $k$  de la junta derecha:

$$N_{Lj} \neq 0 ; N_{Li} = 0 \quad \forall i \neq j ; N_{Rk} \neq 0 ; N_{Ri} = 0 \quad \forall i \neq k \quad (8)$$

Estas combinaciones se pueden presentar en forma de matriz cuadrada de dimensión  $(n+1)$ . El número total de estas combinaciones es, por tanto,  $(n+1)^2$ . Desde el punto de vista computacional, obtener los términos de esta matriz, que contiene los valores de las soluciones correspondientes a los distintos valores de  $j, k$ , puede resolverse mediante dos bucles anidados.

Como parte de los resultados obtenidos, que se representan en la figura 11, se obtiene el mecanismo de inicio de colapso que corresponde a cada una de las soluciones. El presente ejemplo tiene tres posibles mecanismos de inicio de colapso por deslizamiento puro: deslizando el bloque inferior izquierdo, el inferior derecho o ambos a la vez.

Aplicando el método propuesto, se obtienen los siguientes resultados que muestran que los mecanismos o, más exactamente, las soluciones de inicio de colapso que corresponden a ellos no son igualmente probables. En primer lugar (tabla 1 izquierda), los resultados obtenidos para el caso de junta perfecta y una simulación de 10.000 ensayos. En segundo lugar (tabla 1 derecha), para el caso de junta absolutamente imperfecta y discretización en 2, 5, 10, 20, 50, 100 ...  $n$  puntos de contacto.

Contacto perfecto, muestra 10.000		Contacto absolutamente imperfecto (en un único punto)
-----------------------------------	--	---

izquierdo	simétrico	derecho	n	Izquierdo	simétrico	derecho	Nº vértices	Proporción		
								Izq./Sim./Der.		
5.048	0	4.952	2	3	3	3	9	1	1	1
5.030	0	4.970	5	15	6	15	36	2,5	1	2,5
4.915	0	5.085	10	55	11	55	121	5	1	5
5.041	0	4.959	20	210	21	210	441	10	1	10
4.975	0	5.025	50	1.275	51	1.275	2.601	25	1	25
5.006	0	4.994	100	5.050	101	5.050	10.201	50	1	50
			n	$\frac{n(n+1)}{2}$	n + 1	$\frac{n(n+1)}{2}$	$(n+1)^2$	$\frac{n}{2}$	1	$\frac{n}{2}$

Tabla 1. Proporción de soluciones para cada mecanismo, casos de contacto perfecto y absolutamente imperfecto.

Para completar la exposición, se analiza otro modelo muy sencillo en el cual se han fijado las dimensiones para que las restricciones relativas al deslizamiento no sean las únicas que pueden alcanzar sus valores límites. Este caso fue estudiado por Fishwick [9] en su tesis doctoral, siendo éste uno de los motivos por lo cual se conoce el valor del mínimo absoluto de  $f$ . El modelo a analizar está representado en la figura 9 izquierda.

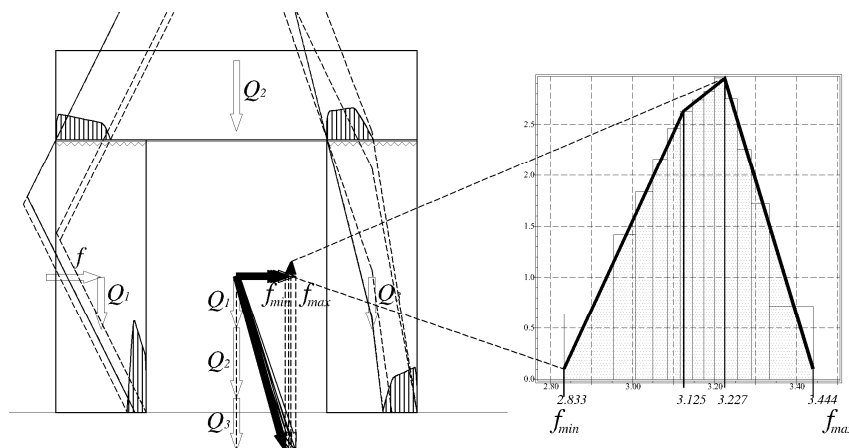


Figura 9. Funciones de distribución de los puntos de paso y de la acción desestabilizante, para el caso de máxima imperfección.

Al tratarse de un caso ya estudiado, se conoce que los posibles mecanismos de colapso por vuelco, aun cuando son válidos, no corresponden a soluciones estáticas válidas y, por tanto, no son de inicio de colapso. Restringiendo el análisis al único mecanismo de inicio de colapso válido, por deslizamiento del bloque izquierdo, en este caso debe completarse el procedimiento ya expuesto con una posterior etapa de rechazo de aquellas soluciones que incumplen la restricción de fallo por vuelco. Ejecutado el procedimiento para el caso de juntas imperfectas, por los motivos que se expondrán a continuación, se representan los resultados (Fig. 9). En el lado izquierdo se representan las distribuciones de los puntos de paso de las resultantes. Puede apreciarse que existen zonas de las caras de contacto por las cuales no pueden pasar las resultantes pues violarían la restricción de vuelco. En el lado derecho se representa la distribución de los valores de la acción desestabilizante  $f$ , coincidiendo los valores máximo y mínimo, respectivamente, con los que se obtienen aplicando el Análisis Límite Estándar y el procedimiento enumerativo de Fishwick. Puede observarse que ambos valores son extremadamente improbables.

Como último punto, queda por tratar el motivo por el cual se ha elegido el caso de junta absolutamente imperfecta, como más significativo, para presentar los resultados del caso anterior.



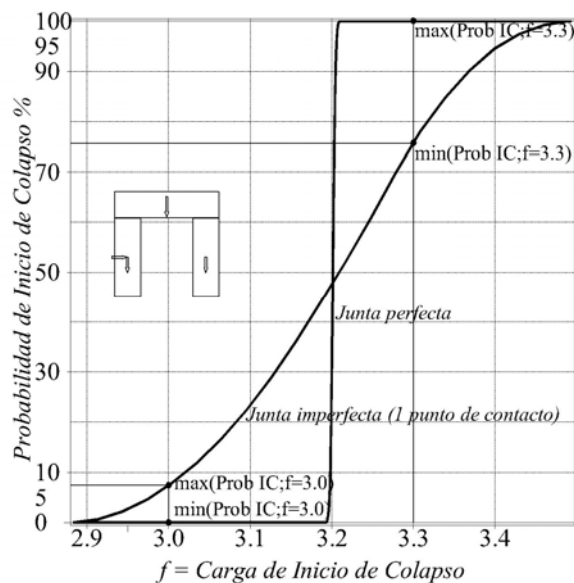


Figura 10. Comparación de las funciones de frecuencia acumuladas para el caso perfecto y absolutamente imperfecto.

Al decidir sobre la seguridad de una estructura, hay que tener en cuenta, no sólo la probabilidad de un suceso, sino también, las consecuencias que se derivan de éste. En los casos que generalmente preocupan, que son aquellos con menor carga de inicio de colapso, la distribución más desfavorable es la correspondiente a las soluciones extremas, es decir, a la junta absolutamente imperfecta (Fig. 10).

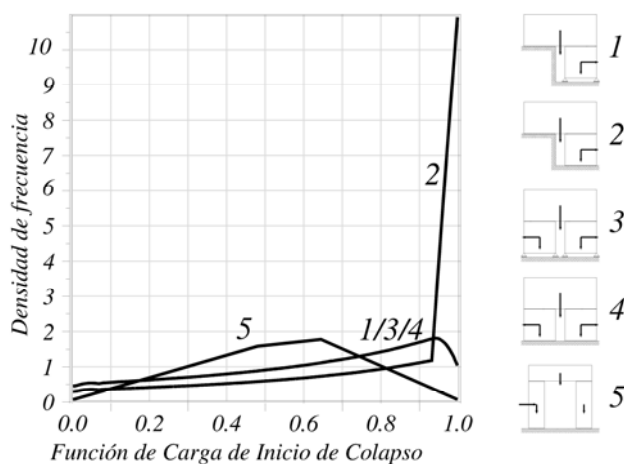


Figura 11. Comparación de las distribuciones de frecuencias para el caso absolutamente imperfecto sobre los distintos modelos.

De acuerdo a lo argumentado en el párrafo anterior, en la figura 11, se resumen los resultados obtenidos para las agrupaciones de dos o tres bloques, en el caso de junta absolutamente imperfecta.

### III. Conclusiones:

Para los casos estudiados, queda demostrado, por un lado, que no es posible determinar a priori la distribución de frecuencias de los valores de las acciones desestabilizantes, al menos en los casos de agrupaciones de pocos sólidos y, por otra parte, que los valores extremos son altamente infrecuentes en comparación con la gran cantidad de casos intermedios, y tanto más cuanto más perfecto y continuo es el contacto.

Los resultados obtenidos confirman el interés de profundizar en el desarrollo del nuevo método propuesto. Éste debe entenderse al nivel de investigación básica, es decir, su objetivo es obtener datos a partir de los cuales implementar otros métodos probabilistas menos costosos computacionalmente.

Uno de estos métodos menos costosos, que adopta, para la probabilidad de inicio de colapso, un enfoque de cota superior y, por tanto, seguro, se ha desarrollado en la tesis doctoral del primer autor [10] (Fig. 12)

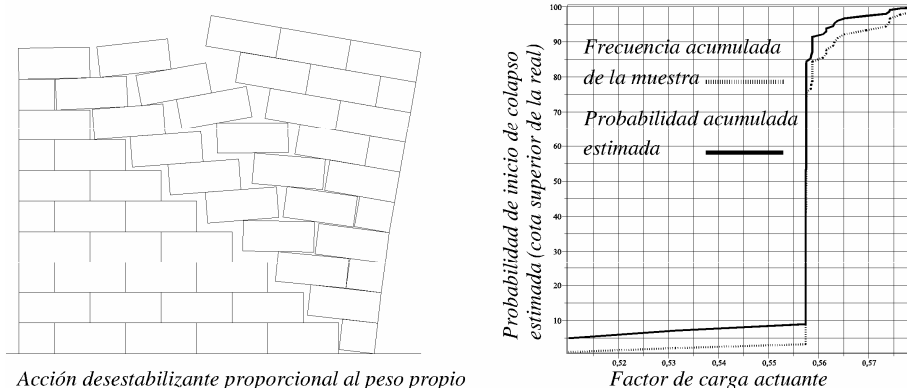


Figura 12. Ejemplo de aplicación de otros métodos probabilistas menos exactos pero menos costosos computacionalmente.

#### IV. Desarrollos:

El método propuesto, en su implementación actual, está limitado a ejemplos con pequeño número de caras en contacto. Esto se debe tanto a la obtención determinista de todas las posibles soluciones extremas (cuyo número viene fijado por  $n^c$ , siendo  $n$  el número de puntos de contacto en que se discretiza cada cara y  $c$  el número de caras de contacto "independientes"), como al creciente número de mecanismos de inicio de colapso posibles según aumenta el número de cuerpos en contacto.

Para el primer problema hay solución, y ya se está trabajando en ella, realizando también de modo probabilista la obtención de las soluciones extremas.

Para el segundo, puesto que se ha mostrado que no todos los mecanismos son igualmente probables, se está trabajando en métodos de muestreo, aplicables a casos de mayor tamaño, que cubran uniformemente el espacio de posibles soluciones y sean independientes de los mecanismos a los que corresponden estas soluciones.

#### Bibliografía:

- [1] Heyman, Jacques. The plasticity of unreinforced concrete. Morley symposium on concrete plasticity and its application. University of Cambridge (2007) 157-162.
- [2] Kooharian, Anthony. Limit Analysis of Voussoir (segmental) and Concrete Arches. Proceedings of American Concrete Institute (1952) vol 49-24, 317-328
- [3] Orduña, Agustín, Lourenço, Paulo B. Limit analysis as a tool for the simplified assessment of ancient masonry structures. Historical Constructions, P.B. Lourenço, P. Roca (Eds.) Guimarães (2001) 511-520
- [4] Painlevé, P. "Sur les lois du frottement de glissement" Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (1895) tome 121, pag 112 – 115.
- [5] Rubinstein, Reuven; Kroese, Dirk. *Simulation and the Monte Carlo Method*. 2nd Ed. Wiley (2008)
- [6] Devroye, Luc. *Non-Uniform Random Variate Generation* Springer-Verlag (1986)
- [7] Büeler, Benno; Enge, Andreas; Fukuda, Komei. "Exact Volume Computation for Polytopes: A practical Study". in: G. Kalai and G. Ziegler, Editors, Polytopes, Combinatorics and Computation DMV-Seminar vol. 29, Birkhauser Verlag (1998-2000)
- [8] Büeler, Benno; Enge, Andreas. VINCI version 1.0.5 Computing volumes of convex polytopes. Laboratoire d'Informatique École polytechnique 91128 Palaiseau France (2003) (bajo licencia GNU-GPL).
- [9] Fishwick, Rupert John. Limit análisis of rigid block structures. Ph.D. thesis. Department of Civil Engineering University of Portsmouth (1996).
- [10] Magdalena Layos, Fernando. El problema del rozamiento en el análisis de estructuras de fábrica mediante modelos de sólidos rígidos. Tesis doctoral. Universidad politécnica de Madrid (2013)