

Apuntes de análisis vectorial

Agustín Martín Domingo <agustin6martin@gmail.com>

Copyright

Esta obra “*Apuntes de Análisis Vectorial*” (texto y figuras) es:

Copyright (C) 2000-2017 Agustín Martín Domingo <agustin6martin@gmail.com>.

Algunos derechos reservados. Obra registrada en safecreative.org y en el RPI.

Versión 1.1, febrero de 2017.

Una copia de esta obra puede encontrarse en <http://oa.upm.es/44666>

Licencia de distribución

Este trabajo se distribuye bajo una licencia *Creative Commons* Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 3.0 España (CC-BY-SA-NC).

Para ver una copia de esta licencia, visite la página de la licencia

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es>

o envíe una carta a Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, EEUU.

Estos apuntes se hacen públicos con la intención de que sean útiles. Aunque se ha tenido cuidado durante su preparación no puede descartarse que aún contengan errores. El autor no garantiza que el contenido de estos apuntes esté libre de errores.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain License. To view a copy of this license, visit

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/>

or send a letter to Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

These notes are provided in the hope they are useful. While they have been carefully elaborated, it is possible that notes still contain some errors. There is absolutely no warranty about its contents.

Resumen de la licencia:

Está permitido...

- Copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra.
- Hacer obras derivadas.

Bajo las siguientes condiciones

Reconocimiento: Se deben reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciadore.

No comercial: No se puede utilizar esta obra para fines comerciales.

Compartir bajo la misma licencia: Si se altera o se transforma esta obra, o se genera una obra derivada, sólo se puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.



Indice

| | |
|---|-----------|
| 1. Escalares y vectores | 1 |
| 1.1. Magnitudes escalares y vectoriales. | 1 |
| 1.2. Vectores libres, deslizantes y ligados. Equipolencia. | 1 |
| 1.3. Operaciones elementales con vectores. | 2 |
| 1.3.1. Suma y resta de vectores. | 2 |
| 1.3.2. Producto de un vector por un escalar. Vector unitario. | 2 |
| 1.4. Representación de un vector. | 3 |
| 1.4.1. Representación analítica de un vector. | 3 |
| 1.4.2. Cosenos directores de un vector. | 3 |
| 1.5. Operaciones con vectores: productos. | 4 |
| 1.5.1. Producto escalar de dos vectores. | 4 |
| 1.5.2. Producto vectorial de dos vectores. | 4 |
| 1.5.3. Producto mixto y doble producto vectorial de tres vectores. | 5 |
| 1.6. Derivada de un vector respecto de una variable escalar. | 6 |
| 1.7. Aplicaciones de los productos escalar y vectorial. | 7 |
| 1.7.1. Ecuación de una recta que pasa por un punto y es paralela a un vector. | 7 |
| 1.7.2. Ecuación de una recta que pasa por dos puntos. | 7 |
| 1.7.3. Proyección de un vector \vec{a} sobre una dirección genérica Δ . | 8 |
| 1.7.4. Proyección de un vector \vec{a} sobre un plano Π . | 8 |
| 1.7.5. Ecuación de un plano que contiene un punto y es perpendicular a un vector. | 8 |
| 2. Campos escalares y vectoriales | 9 |
| 2.1. Campos escalares y vectoriales. | 9 |
| 2.2. Gradiente de un campo escalar. | 10 |
| 2.2.1. Definición del gradiente de un campo escalar. | 10 |
| 2.2.2. Expresión del gradiente de un campo escalar en distintos sistemas de coordenadas. | 11 |
| 2.3. Flujo y divergencia de un campo vectorial. | 12 |
| 2.3.1. Flujo de un campo vectorial. | 12 |
| 2.3.2. Divergencia de un campo vectorial. | 12 |
| 2.3.3. Expresión de la divergencia en distintos sistemas de coordenadas. | 12 |
| 2.3.4. Teorema de Gauss-Ostrogradski o de la divergencia. | 14 |
| 2.4. Circulación y rotacional de un campo vectorial. | 15 |
| 2.4.1. Circulación de un campo vectorial. | 15 |
| 2.4.2. Rotacional de un campo vectorial. | 15 |
| 2.4.3. Componentes del rotacional de un campo vectorial en distintos sistemas de coordenadas. | 17 |
| 2.4.4. Teorema de Stokes. | 19 |
| 2.5. Combinando lo anterior. | 20 |
| 2.5.1. Divergencia del gradiente y gradiente de la divergencia: laplaciana. | 20 |
| 2.5.2. Rotacional del gradiente. | 20 |
| 2.5.3. Divergencia del rotacional. | 21 |
| 2.5.4. Otras relaciones. | 21 |
| 2.5.5. Teorema de Green. | 22 |
| 2.6. Campos conservativos y solenoidales. Potenciales escalar y vector. | 22 |
| 2.7. Campos centrales. | 23 |
| 2.8. Campos de fuerzas conservativos. | 23 |
| 2.8.1. Interacción entre dos masas. Ley de la gravitación de Newton. | 24 |
| 2.8.2. Intensidad del campo gravitatorio terrestre. | 24 |
| 2.8.3. Trabajo del campo gravitatorio. | 24 |
| 2.9. Teorema de Helmholtz. | 25 |
| 3. Sistemas de vectores deslizantes y ligados. | 27 |
| 3.1. Momentos de un vectores deslizante. | 27 |
| 3.1.1. Momento de un vector deslizante respecto de un punto. | 27 |

| | | |
|--------------------------|---|-----------|
| 3.1.2. | Momento de un vector deslizante respecto de un eje. Momento axial. | 28 |
| 3.2. | Sistemas de vectores deslizantes | 28 |
| 3.2.1. | Definiciones | 28 |
| 3.2.2. | Teoremas de vectores deslizantes. | 29 |
| 3.2.3. | Invariantes de un sistema de vectores deslizantes. | 29 |
| 3.2.4. | Eje central. | 31 |
| 3.2.5. | El campo de los momentos de un sistema de vectores deslizantes. | 32 |
| 3.3. | Par de vectores. | 33 |
| 3.4. | Sistemas de vectores equivalentes. | 34 |
| 3.4.1. | Reducción de un sistema de vectores deslizantes. | 34 |
| 3.4.2. | Clasificación de un sistema de vectores deslizantes según el automomento. | 35 |
| 3.5. | Sistema de vectores paralelos. | 36 |
| 3.6. | Centro de vectores paralelos. | 37 |
| A. | Sistemas de coordenadas ortogonales | 39 |
| A.1. | Sistema de coordenadas cartesianas. | 39 |
| A.2. | Sistema de coordenadas cilíndricas. | 42 |
| A.3. | Sistema de coordenadas esféricas. | 45 |
| A.4. | Coordenadas polares planas. | 49 |
| Referencias | | 51 |
| Índice alfabético | | 53 |

Capítulo 1

Escalares y vectores

1.1. Magnitudes escalares y vectoriales.

El concepto general de *magnitud* se refiere a la medida de algo según una determinada escala. Aunque puede referirse a un concepto abstracto (como en las magnitudes matemáticas) y de hecho en este tema lo trataremos esencialmente de forma abstracta, normalmente nos referiremos a *magnitudes físicas* como valores asociados a la medida de una propiedad en un sistema físico en relación a un patrón determinado.

Se dice que una magnitud es *escalar* cuando queda completamente definida por su valor numérico seguido de la unidad en la que se representa dicho valor (salvo en magnitudes adimensionales, donde basta el valor numérico). El valor numérico indica la cantidad de unidades patrón que contiene la medida de la magnitud considerada. Ejemplos de magnitudes físicas escalares son la longitud, el tiempo, la temperatura, la masa, etc ...

Se dice que una magnitud es *vectorial* cuando además de su valor escalar es necesario conocer la dirección y sentido en los que actúa. Ejemplos de magnitudes físicas vectoriales son la velocidad, la fuerza, la aceleración ...

1.2. Vectores libres, deslizantes y ligados. Equipolencia.

Denominamos *vector libre* a un ente geométrico caracterizado por su módulo (valor absoluto numérico), dirección y sentido. Un vector libre queda completamente determinado por tres parámetros.

Decimos que dos vectores son *equipolentes* si ambos tienen el mismo módulo, dirección y sentido, independientemente de su punto de aplicación. Las magnitudes físicas representadas por un vector libre son invariantes frente a las transformaciones que conservan el módulo, la dirección y el sentido del vector. Así, un vector libre puede sustituirse por cualquier vector equipolente el mismo

Además de los vectores libres, caracterizados únicamente por su módulo, dirección y sentido en Mecánica es conveniente mencionar otros dos tipos de vectores, deslizantes y aplicados.

Un *vector deslizante* está caracterizado por su módulo, dirección y sentido, y por su *recta de aplicación* (también denominada *recta soporte* o *recta de acción*). Una magnitud representada por un vector deslizante es invariante frente a una traslación sobre su recta de acción en tanto se conserven el módulo y el sentido, es decir, un vector deslizante puede sustituirse por cualquiera de sus vectores equipolentes aplicados en cualquier punto de su recta soporte.

Para especificar un vector deslizante es necesario proporcionar las componentes del vector y su recta de acción. Para ello se necesita especificar un punto en el plano perpendicular al vector deslizante y ello supone dos parámetros más a sumar a los tres necesarios para el vector libre. Así, se necesitan 5 parámetros independientes para especificar un vector deslizante.

Decimos que un vector es *ligado* (o *fijo* o *aplicado*) cuando está caracterizado por su módulo, dirección y sentido, y por su punto de aplicación. Su descripción completa requiere de 6 parámetros independientes, 3 para especificar el vector y 3 para especificar su punto de aplicación. Un vector ligado sólo es equivalente a un vector equipolente al mismo si está aplicado en el mismo punto.

1.3. Operaciones elementales con vectores.

1.3.1. Suma y resta de vectores.

La relación de equipolencia permite definir la suma de dos vectores, véase la figura 1-1 para su forma gráfica. La suma de vectores satisface las siguientes propiedades,

- *Conmutativa*: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- *Asociativa*: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

En la suma de dos vectores se admite la existencia del *elemento neutro*, un vector $\vec{0}$ tal que $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ y la existencia del elemento *simétrico* o *inverso*, un vector $-\vec{a}$ tal que $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$. La existencia de este elemento inverso permite definir la resta de dos vectores como la suma de un vector con el inverso del otro, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

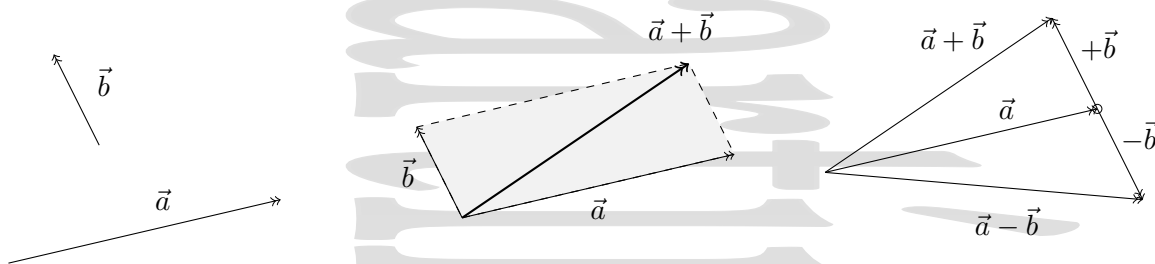


Figura 1-1: Suma y resta de vectores. La suma se puede realizar gráficamente mediante el paralelogramo de lados los dos vectores con el mismo origen, o colocando cada uno de los vectores a continuación del otro.

Nótese esta definición de suma de vectores se aplica exclusivamente a vectores libres. La suma de dos vectores deslizantes únicamente está definida si ambos tienen la misma recta soporte o si sus rectas soporte se cruzan en un punto, pasando la línea de acción del vector suma por el punto de cruce. Por otro lado, la suma de dos vectores ligados sólo está definida si los puntos de aplicación de ambos coinciden.

1.3.2. Producto de un vector por un escalar. Vector unitario.

También se define el producto $\lambda\vec{a}$ de un escalar (número real, $\lambda \in \mathbb{R}$) por un vector libre como un vector de igual dirección que \vec{a} , módulo λ veces mayor y sentido el mismo de \vec{a} si λ es positivo y el contrario si es negativo. Este producto tiene las siguientes propiedades,

- *Distributiva respecto de la suma de escalares*: $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.
- *Distributiva respecto de la suma de vectores*: $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.
- *Asociativa respecto de los escalares*: $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$.
- Admite la existencia del elemento neutro del espacio de los números reales $1\vec{a} = \vec{a}$.

Se define un *vector unitario* o *versor* \vec{u} como un vector de módulo unidad. Como cualquier vector puede escribirse en la forma $\vec{a} = a\vec{u}_a$ donde a es su módulo y \vec{u}_a un vector unitario en la dirección y sentido del mismo, el vector unitario \vec{u}_a siempre puede obtenerse como el cociente entre el vector y su módulo $\vec{u}_a = \vec{a}/a$.

1.4. Representación de un vector.

1.4.1. Representación analítica de un vector.

Dados tres vectores \vec{u}_1 , \vec{u}_2 y \vec{u}_3 no coplanarios y un vector \vec{a} cualquiera, existe un único conjunto de números reales a_1 , a_2 y a_3 tales que se cumple $\vec{a} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3$. Si los vectores \vec{u}_1 , \vec{u}_2 y \vec{u}_3 son los tres vectores unitarios en el sentido positivo de un sistema de referencia cartesiano ($\vec{u}_1 = \vec{i} = \vec{u}_x$, $\vec{u}_2 = \vec{j} = \vec{u}_y$ y $\vec{u}_3 = \vec{k} = \vec{u}_z$), la terna a_1 , a_2 , a_3 proporciona las proyecciones del vector \vec{a} sobre dichos ejes cartesianos.

1.4.2. Cosenos directores de un vector.

Los *cosenos directores* son los cosenos de los ángulos que forma el vector con las direcciones positivas de los ejes cartesianos. Coinciden con las componentes de un vector unitario con la misma dirección y sentido

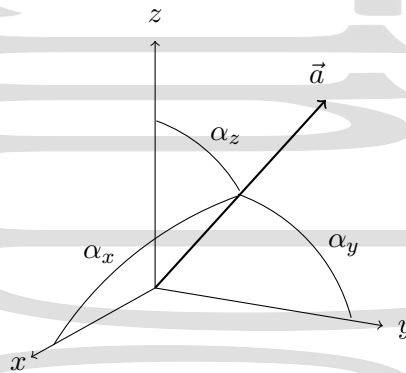


Figura 1-2: Los cosenos directores de un vector \vec{a} son los cosenos de los ángulos que éste forma con las direcciones positivas de los ejes cartesianos.

que el vector \vec{a} analizado

$$\vec{u}_a = \cos \alpha_x \vec{u}_x + \cos \alpha_y \vec{u}_y + \cos \alpha_z \vec{u}_z, \quad (1-1)$$

quedando el vector \vec{a} como

$$\vec{a} = |\vec{a}|\vec{u}_a = a\vec{u}_a = a(\cos \alpha_x \vec{u}_x + \cos \alpha_y \vec{u}_y + \cos \alpha_z \vec{u}_z) \quad (1-2)$$

en función de los cosenos directores.

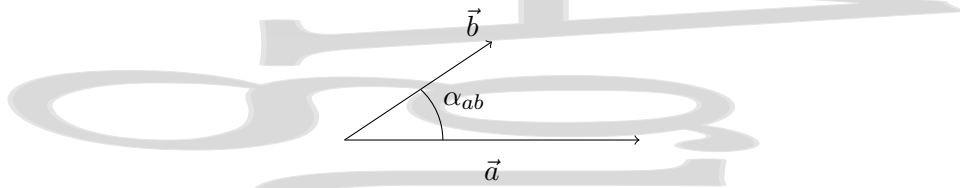


Figura 1-3: Se define el producto escalar de dos vectores \vec{a} y \vec{b} que forman un ángulo α_{ab} como $\vec{a}\vec{b} = ab \cos \alpha_{ab}$.

1.5. Operaciones con vectores: productos.

1.5.1. Producto escalar de dos vectores.

Se define el *producto escalar* de dos vectores como un escalar cuyo valor es el producto de los módulos de dichos vectores por el coseno del ángulo formado por los mismos,

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \alpha_{ab} = ab \cos \alpha_{ab} \quad (1-3)$$

El producto escalar de dos vectores satisface las siguientes propiedades,

- *Propiedad conmutativa*, $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$
- *Propiedad distributiva respecto de la suma*, $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$
- Si λ es un número real ($\lambda \in \mathbb{R}$), se cumple $\lambda(\vec{a}\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\lambda\vec{b})$

La expresión analítica del producto escalar de dos vectores en un sistema de referencia cartesiano es

$$\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (1-4)$$

Si los vectores \vec{a} y \vec{b} son perpendiculares se cumple $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \alpha_{ab} = 0$ y por tanto, la *condición analítica de perpendicularidad* es

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \quad (1-5)$$

1.5.2. Producto vectorial de dos vectores.

Se define el *producto vectorial* $\vec{a} \times \vec{b}$ de dos vectores \vec{a} y \vec{b} como un vector (véase la figura 1-4) con las siguientes características

- *Módulo*: $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \alpha_{ab}$ ($0 \leq \alpha_{ab} \leq \pi$). Obsérvese que el módulo del producto vectorial es el área del paralelogramo descrito por los dos vectores (o el doble del área del triángulo formado por los mismos), véase la figura 1-5.
- *Dirección*: Perpendicular al plano definido por los dos vectores \vec{a} y \vec{b} .
- *Sentido*: El del avance del tornillo (o sacacorchos) al girar el vector \vec{a} hacia el vector \vec{b} por el camino más corto.

El producto vectorial tiene las siguientes propiedades,

- *Anticonmutativa*: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. El producto vectorial no satisface la propiedad conmutativa.
- *Propiedad distributiva respecto de la suma*: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.
- Si λ es un número real ($\lambda \in \mathbb{R}$), se cumple $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$

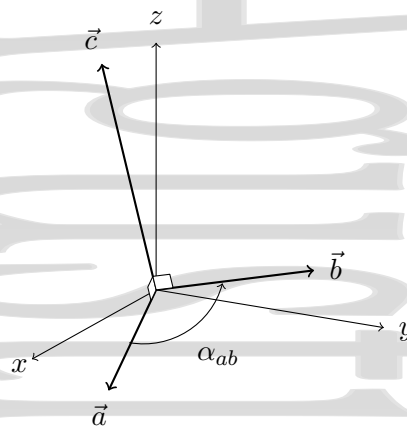


Figura 1-4: Producto vectorial \vec{c} de dos vectores \vec{a} y \vec{b} .

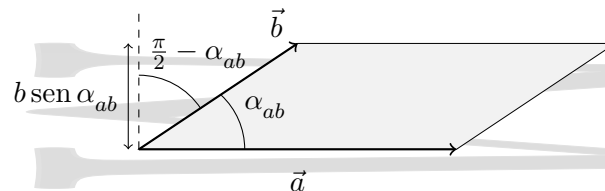


Figura 1-5: El área (generalizada) del paralelogramo definido por los dos vectores es el módulo del producto vectorial.

En un sistema de coordenadas cartesiano, la expresión analítica del producto vectorial viene dada por el desarrollo del determinante

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{1-6}$$

Si los dos vectores \vec{a} y \vec{b} son paralelos, se cumple

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}, \tag{1-7}$$

que es la *condición analítica de paralelismo*. Nótese que esto era de esperar ya que si ambos vectores son paralelos sus componentes deben ser necesariamente proporcionales.

1.5.3. Producto mixto y doble producto vectorial de tres vectores.

El *producto mixto* de tres vectores $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$ es un escalar que geoméricamente representa el volumen del paralelepípedo generado por los tres vectores como lados. Su expresión analítica en coordenadas cartesianas viene dada por el desarrollo del determinante

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \tag{1-8}$$

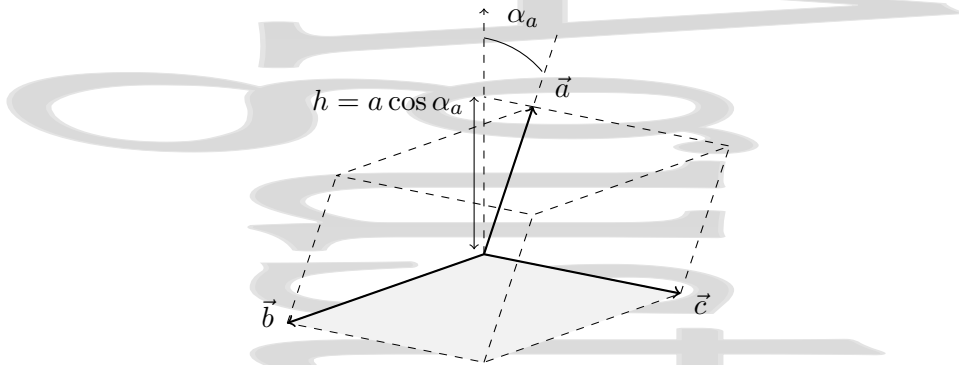


Figura 1-6: Producto mixto $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$. Su valor representa geoméricamente el volumen del paralelepípedo que tiene como lados los tres vectores.

Considerando la interpretación geométrica del producto mixto o las propiedades de los determinantes puede verse que se cumple

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}) \quad (1-9)$$

El *doble producto vectorial* es $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ y puede demostrarse que cumple la relación

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (1-10)$$

1.6. Derivada de un vector respecto de una variable escalar.

Consideremos un vector \vec{v} cuyas componentes dependen del valor de una cierta variable escalar t . En estas condiciones tenemos una función vectorial $\vec{v}(t)$ que en un sistema de coordenadas cartesiano se expresa en la forma

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{u}_x + v_y(t)\vec{u}_y + v_z(t)\vec{u}_z \quad (1-11)$$

con componentes que dependen del parámetro t .

La derivada del vector $\vec{v}(t)$ respecto de la variable t es un nuevo vector cuyas componentes son las derivadas respecto de t de las componentes del vector $\vec{v}(t)$,

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt}\vec{u}_x + \frac{dv_y(t)}{dt}\vec{u}_y + \frac{dv_z(t)}{dt}\vec{u}_z \quad (1-12)$$

Partiendo de las propiedades de la derivada de una función escalar, se tiene que la derivada de un vector respecto de una variable escalar cumple una serie de propiedades

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} + \vec{w}) = \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{w}}{dt} \quad (1-13a)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{w}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{w}}{dt} \quad (1-13b)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \times \vec{w}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{w} + \vec{v} \times \frac{d\vec{w}}{dt} \quad (1-13c)$$

y también se cumple que, si $f = f(t)$ es una función escalar de t ,

$$\frac{d}{dt}(f\vec{v}) = \frac{df}{dt}\vec{v} + f\frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1-13d)$$

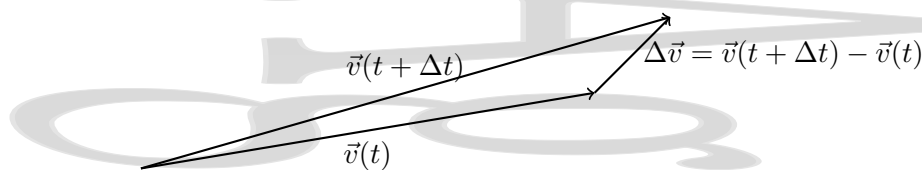
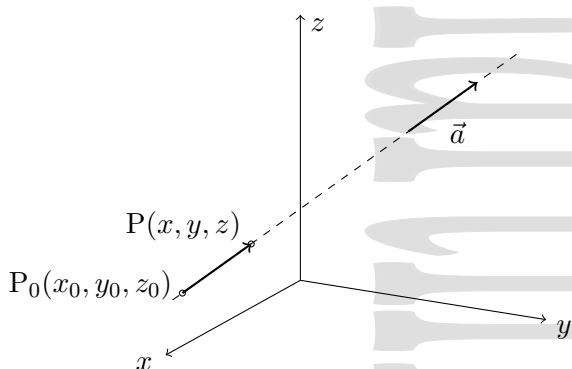


Figura 1-7: Significado geométrico de la derivada de una función vectorial respecto de una variable escalar. La derivada va dirigida en cada punto en la dirección de la “trayectoria” del extremo del vector.

Si consideramos la representación geométrica de un vector como un segmento orientado, al tomar el límite $\Delta t \rightarrow 0$ correspondiente a la derivada, se observa en la figura 1-7 que la derivada de la función vectorial señala en cada punto en la dirección de la “trayectoria” del extremo del vector en dicha representación.

1.7. Aplicaciones de los productos escalar y vectorial.

1.7.1. Ecuación de una recta que pasa por un punto y es paralela a un vector.



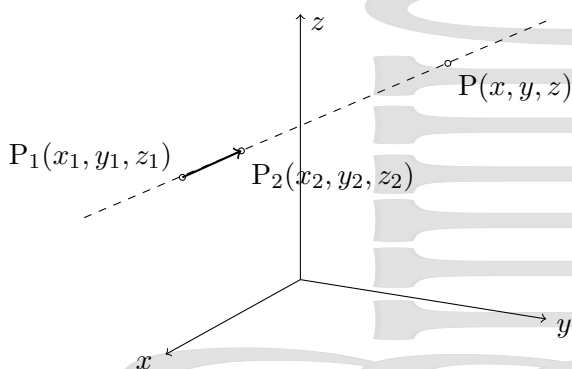
Queremos obtener la ecuación de una recta que pasa por un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es paralela a un vector $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$. Esta recta será el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ tales que el vector $P_0\vec{P}$ es paralelo al vector \vec{a} conocido.

Para ello debe cumplirse que el producto vectorial entre ambos vectores sea nulo, $\vec{a} \times P_0\vec{P} = 0$, resultando la ecuación de la recta deseada

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z} \quad (1-14)$$

o dicho con otras palabras, las componentes de los vectores $P_0\vec{P}$ y \vec{a} son proporcionales al ser éstos paralelos.

1.7.2. Ecuación de una recta que pasa por dos puntos.



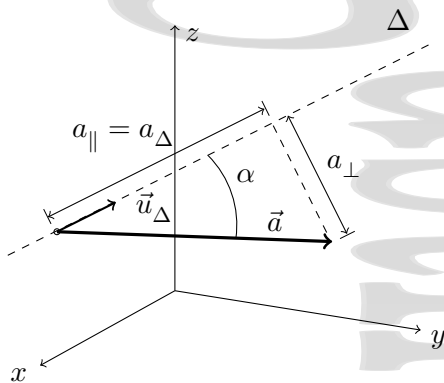
Consideremos los dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ por los que debe pasar la recta cuya ecuación queremos obtener.

Esta ecuación será el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ del espacio tales que los vectores $P_1\vec{P}$ y $P_2\vec{P}$ sean paralelos entre sí y al vector $P_1\vec{P}_2$, por lo que debe cumplirse $P_1\vec{P} \times P_2\vec{P} = P_1\vec{P} \times P_1\vec{P}_2 = P_2\vec{P} \times P_1\vec{P}_2 = 0$, quedando

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (1-15)$$

Los vectores $P_1\vec{P}$ y $P_1\vec{P}_2$ (y también $P_2\vec{P}$) tienen componentes proporcionales al ser paralelos.

1.7.3. Proyección de un vector \vec{a} sobre una dirección genérica Δ .



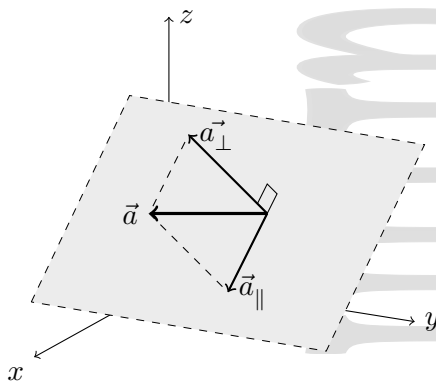
Consideremos un cierto vector genérico \vec{a} y una dirección genérica Δ definida por un vector unitario \vec{u}_Δ . Si el ángulo que forman el vector y la dirección considerada es α , la componente del vector en la dirección dada será, como es sabido, $a \cos \alpha$.

Consideremos ahora el producto escalar del vector \vec{a} por el vector unitario en la dirección considerada. Como el módulo del vector unitario es la unidad, se tiene

$$\vec{a}\vec{u}_\Delta = |\vec{a}||\vec{u}_\Delta| \cos \alpha = a \cos \alpha, \quad (1-16)$$

el valor de la proyección. Así, el producto escalar del vector \vec{a} por un vector unitario en una dirección nos da la componente del vector \vec{a} según esa dirección.

1.7.4. Proyección de un vector \vec{a} sobre un plano Π .



Consideremos un plano Π con un vector unitario \vec{u}_\perp normal al mismo y un vector \vec{a} , del que queremos obtener la proyección \vec{a}_\parallel sobre el plano Π . Como la componente \vec{a}_\perp perpendicular al plano viene dada por

$$\vec{a}_\perp = (\vec{a}\vec{u}_\perp)\vec{u}_\perp$$

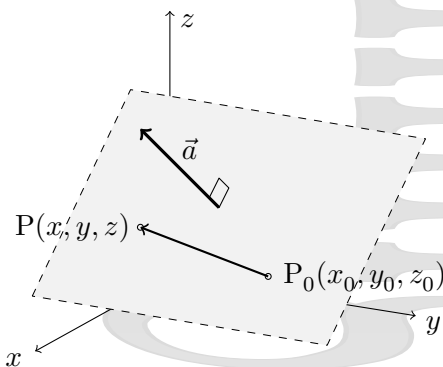
la componente tangencial, que da la proyección del vector \vec{a} sobre el plano vendrá dada por

$$\vec{a}_\parallel = \vec{a} - \vec{a}_\perp \quad (1-17)$$

de módulo

$$|\vec{a}_\parallel| = \sqrt{|\vec{a}|^2 - |\vec{a}_\perp|^2}. \quad (1-18)$$

1.7.5. Ecuación de un plano que contiene un punto y es perpendicular a un vector.



Consideremos un cierto plano Π del que sabemos que contiene un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y que es perpendicular al vector $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$.

El plano buscado será el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ del espacio para los cuales el vector $P_0\vec{P}$ es perpendicular al vector \vec{a} conocido. Para ello debe cumplirse que el producto escalar de ambos vectores sea nulo, $\vec{a} \cdot P_0\vec{P} = 0$, lo que permite obtener la ecuación del plano buscado

$$a_x(x - x_0) + a_y(y - y_0) + a_z(z - z_0) = 0. \quad (1-19)$$

Capítulo 2

Campos escalares y vectoriales

2.1. Campos escalares y vectoriales.

Sea una magnitud escalar f cuya dependencia de las coordenadas espaciales y del tiempo puede expresarse mediante una función de la forma $f(\vec{r}, t)$, que establece un valor de f en cada punto del espacio e instante de tiempo. En este caso se dice que la función $f(\vec{r}, t)$ define un *campo escalar*. La temperatura es un ejemplo de magnitud física que se representa por un campo escalar. La presión en el interior de un fluido es otro ejemplo de campo escalar.

Se denomina *superficie equiescalar* o de nivel al lugar geométrico de los puntos del espacio en los que el campo escalar f tiene el mismo valor en un determinado instante de tiempo. La variación espacial más rápida de f tiene lugar en la dirección perpendicular a la superficie equiescalar, mientras que en direcciones sobre la misma superficie sería nula y en otras direcciones intermedias sería más lenta. Dos superficies equiescalares distintas nunca pueden cortarse, ya que de hacerlo el valor de la función escalar no estaría definido en la línea de corte.

La definición de un *campo vectorial* sería similar a la de un campo escalar, pero con una función vectorial $\vec{G}(\vec{r}, t)$. Por ejemplo, la velocidad de un fluido en cada punto del flujo se representa mediante un campo vectorial de velocidades. El campo eléctrico y el campo magnético son también ejemplos de campos vectoriales.

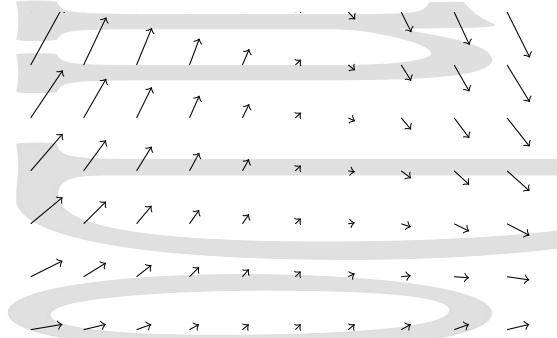


Figura 2-1: Ejemplo de campo vectorial

Para un campo vectorial, se definen las *líneas de campo* como un conjunto de líneas que son tangentes en cada punto al vector \vec{G} del campo vectorial. Matemáticamente esto implica que debe cumplirse

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{G_y}{G_x} \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{G_z}{G_x} \\ \frac{dz}{dy} &= \frac{G_z}{G_y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dx}{G_x} = \frac{dy}{G_y} = \frac{dz}{G_z}, \quad (2-1)$$

que es un sistema de ecuaciones diferenciales que integradas (puede ser difícil) dan las líneas de campo. Como consecuencia de la definición de líneas de campo, éstas no se pueden cortar ya que de hacerlo, el campo no estaría unívocamente definido en el punto de corte.

Un campo, tanto escalar como vectorial, puede ser *estacionario* si su magnitud (o sus componentes, para un campo vectorial) no dependen del tiempo, y *no estacionario* en caso contrario. Asimismo, decimos que un campo es *uniforme* cuando su valor (módulo, dirección y sentido para los campos vectoriales) es el mismo en todos los puntos del espacio y *no uniforme* en caso contrario.

2.2. Gradiente de un campo escalar.

2.2.1. Definición del gradiente de un campo escalar.

Consideremos un campo escalar $f(\vec{r}, t)$ y dos superficies equiescalares próximas correspondientes a valores del campo escalar que difieren en df , separadas por una distancia dn en la dirección perpendicular a la superficie equiescalar dada por un vector unitario \vec{u}_n y por una distancia dl en otra dirección genérica dada por un vector unitario \vec{u}_l que forma un ángulo θ con la normal a la superficie equiescalar, como se muestra en la figura 2-2.

La variación relativa del campo escalar f en esta dirección genérica vendrá dada por

$$\frac{df}{dl}$$

que como ya hemos visto será nula si ésta dirección es tangente a la superficie equiescalar y máxima si es perpendicular a la misma, teniendo distintos valores en otros casos. Como la variación relativa en cualquier dirección tangente a la superficie equiescalar es nula, en la dirección perpendicular se tiene

$$\frac{df}{dn} = \frac{\partial f}{\partial n}.$$

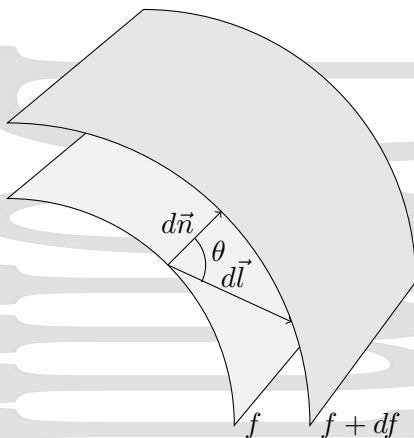


Figura 2-2: Variación de un campo escalar entre dos superficies equiescalares para dos direcciones, una de ellas perpendicular a la superficie.

Definimos el *gradiente de un campo escalar* en un punto como un vector cuya magnitud representa la máxima variación relativa del campo escalar en el entorno de ese punto, dirigido en la dirección y sentido

del aumento más rápido del campo,

$$\vec{\nabla} f = \frac{df}{dn} \vec{u}_n = \frac{\partial f}{\partial n} \vec{u}_n. \quad (2-2)$$

2.2.2. Expresión del gradiente de un campo escalar en distintos sistemas de coordenadas.

Como dn es la proyección de $d\vec{l}$ sobre la dirección perpendicular a las superficies equiescalares, $dn = dl \cos \theta$, donde a su vez $\cos \theta = \vec{u}_n \vec{u}_l$,

$$\frac{df}{dl} = \frac{df}{dn} \frac{dn}{dl} = \frac{df}{dn} \cos \theta = \frac{df}{dn} \vec{u}_n \vec{u}_l = [\vec{\nabla} f] \vec{u}_l.$$

por lo que se tiene

$$df = [\vec{\nabla} f] dl \vec{u}_l = [\vec{\nabla} f] d\vec{l}$$

Por otra parte, desarrollando en serie la función f en función de las variables x , y y z de un sistema de coordenadas cartesianas se tiene

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) (dx, dy, dz) \quad (2-3)$$

donde $d\vec{l} = (dx, dy, dz)$, y comparando con la expresión anterior se tiene que el gradiente de un campo escalar f es, en *coordenadas cartesianas*, de la forma

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z \quad (2-4)$$

Para obtener la expresión del gradiente en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) se hace un desarrollo similar a (2-3) pero en coordenadas cilíndricas,

$$df = \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) (d\rho, r d\phi, dz) \quad (2-5)$$

que, como $d\vec{l} = (d\rho, r d\phi, dz)$, nos da la expresión del *gradiente en coordenadas cilíndricas*,

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{u}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z \quad (2-6)$$

De forma similar se procede para obtener la expresión del gradiente en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , partiendo del desarrollo

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \phi} d\phi = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) (dr, r d\theta, r \sin \theta d\phi) \quad (2-7)$$

que, como $d\vec{l} = (dr, r d\theta, r \sin \theta d\phi)$, nos da la expresión del *gradiente en coordenadas esféricas*,

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{u}_\phi. \quad (2-8)$$

Nótese que para que las expresiones que aparecen en (2-5) y (2-7) sean iguales a los productos escalares es necesario que las direcciones de los vectores unitarios básicos del sistema de referencia coincidan para los dos vectores, lo que ocurre en este caso al estar ambos vectores aplicados en el mismo punto. Esto ocurre siempre en un sistema de coordenadas cartesianas.

2.3. Flujo y divergencia de un campo vectorial.

2.3.1. Flujo de un campo vectorial.

Ya hemos visto el concepto de línea de campo. Cuando se representa gráficamente un campo vectorial la *intensidad del campo* en un punto dado se relaciona de forma cualitativa con una especie de “*densidad de líneas de campo*” en una zona del espacio, de forma que éstas se representan más próximas en las zonas en las que el campo es más intenso y más separadas en las zonas en las que es menos intenso. Análogamente ocurre con el concepto cualitativo de “*número de líneas de campo*” que atraviesan una superficie dada perpendicular al campo en ese punto. De forma cuantitativa, esto se caracteriza matemáticamente para cualquier superficie a través del denominado *flujo del campo vectorial* a través de la superficie,

$$\Phi = \int_S \vec{G} d\vec{S}. \quad (2-9)$$

Para una superficie cerrada S (con $d\vec{S}$ apuntando hacia fuera en cada superficie infinitesimal) el flujo será positivo si hay una salida neta de líneas de campo (es decir, hay una fuente de campo en el interior) y negativo si hay una entrada neta de líneas de campo en el interior (es decir, hay un sumidero de campo).

2.3.2. Divergencia de un campo vectorial.

Si tomamos un elemento de volumen infinitesimal, se define la *divergencia de un campo vectorial* $\vec{\nabla} \cdot \vec{G}$ en un punto como el flujo neto por unidad de volumen del campo vectorial en torno a ese punto,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \vec{G} d\vec{S} = \frac{d}{dV} \oint_{dS} \vec{G} d\vec{S} \quad (2-10)$$

y es una magnitud escalar.

2.3.3. Expresión de la divergencia en distintos sistemas de coordenadas.

Para calcular la expresión de la *divergencia en coordenadas cartesianas* consideraremos el elemento de volumen prismático infinitesimal que se muestra en la figura 2-3, con aristas orientadas según los ejes coordenados, y calcularemos el flujo neto del campo vectorial \vec{G} a través de la superficie cerrada que lo encierra. Éste flujo será la suma de los flujos a través de cada una de las caras de esta superficie cerrada.

Para un campo vectorial de componentes positivas[†], el flujo será negativo (entrante) a través de las caras hacia la parte negativa del eje y positivo (saliente) a través de las caras hacia la parte positiva del eje, con el criterio común de considerar positivo al flujo saliente y negativo al entrante.

Si el prisma infinitesimal está centrado en (x, y, z) , los flujos infinitesimales a través de las caras que se encuentran sobre $x - dx/2$ y sobre $x + dx/2$ son, desarrollando en serie en torno a su valor en (x, y, z) , de la forma

$$d\Phi(x - \frac{1}{2}dx) = d\Phi(x) - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{2} = \left[G_x - \frac{\partial G_x}{\partial x} \frac{1}{2} dx \right] dydz$$

$$d\Phi(x + \frac{1}{2}dx) = d\Phi(x) + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{2} = \left[G_x + \frac{\partial G_x}{\partial x} \frac{1}{2} dx \right] dydz$$

[†] que es lo que tomaremos por omisión, si alguna no lo es el correspondiente cambio de signo se verá automáticamente reflejado.

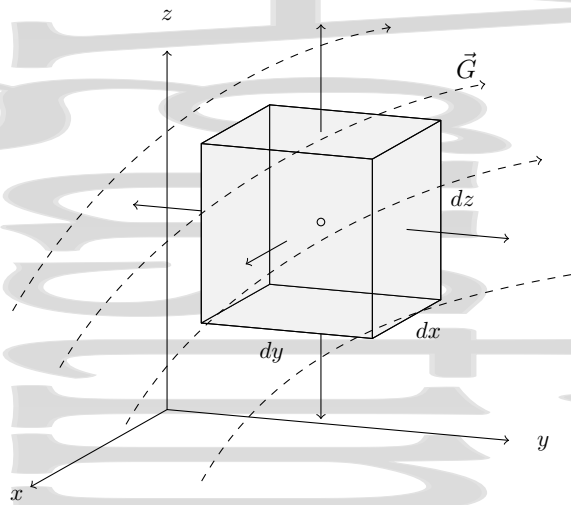


Figura 2-3: Cálculo del flujo de un campo vectorial a través de un elemento prismático infinitesimal con caras perpendiculares a los ejes coordenados.

con $d\Phi(x) = \vec{G} \cdot d\vec{S}_{yz} = G_x dydz$. El flujo neto a través de las caras perpendiculares al eje y será

$$d\Phi_{\pm x} = d\Phi(x + \frac{1}{2}dx) - d\Phi(x - \frac{1}{2}dx) = \frac{\partial G_x}{\partial x} dx dy dz, \quad (2-11a)$$

obteniéndose expresiones similares para el flujo neto $d\Phi_{\pm y}$ a través de las caras perpendiculares al eje y y para el flujo neto $d\Phi_{\pm z}$ a través de las caras perpendiculares al eje z ,

$$d\Phi_{\pm y} = d\Phi(y + \frac{1}{2}dy) - d\Phi(y - \frac{1}{2}dy) = \frac{\partial G_y}{\partial y} dx dy dz \quad (2-11b)$$

$$d\Phi_{\pm z} = d\Phi(z + \frac{1}{2}dz) - d\Phi(z - \frac{1}{2}dz) = \frac{\partial G_z}{\partial z} dx dy dz. \quad (2-11c)$$

Así, el flujo del campo vectorial \vec{G} a través de toda la superficie cerrada dS que contiene el prisma es

$$d\Phi = \left[\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} \right] dx dy dz, \quad (2-12)$$

que a partir de la definición de divergencia (2-10) nos da la expresión de la misma en coordenadas cartesianas,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}. \quad (2-13a)$$

Para obtener la expresión de la divergencia en *coordenadas cilíndricas* se haría un cálculo similar al anterior para el elemento de volumen infinitesimal natural en coordenadas cilíndricas $dV = \rho d\rho d\phi dz$, con superficies infinitesimales $dS_\rho = \rho d\phi dz$, $dS_\phi = \rho dz$ y $dS_z = \rho d\rho d\phi$, obteniéndose

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho G_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial G_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial G_z}{\partial z} \quad (2-13b)$$

y lo mismo para obtener la expresión de la divergencia en *coordenadas esféricas*, con un elemento natural de volumen infinitesimal $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ y superficies elementales $dS_r = r d\theta r \sin \theta d\phi$, $dS_\theta = dr \sin \theta d\phi$ y $dS_\phi = dr r d\theta$, quedando como resultado

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 G_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (G_\theta \sin \theta) + \frac{\partial G_\phi}{\partial \phi} \quad (2-13c)$$

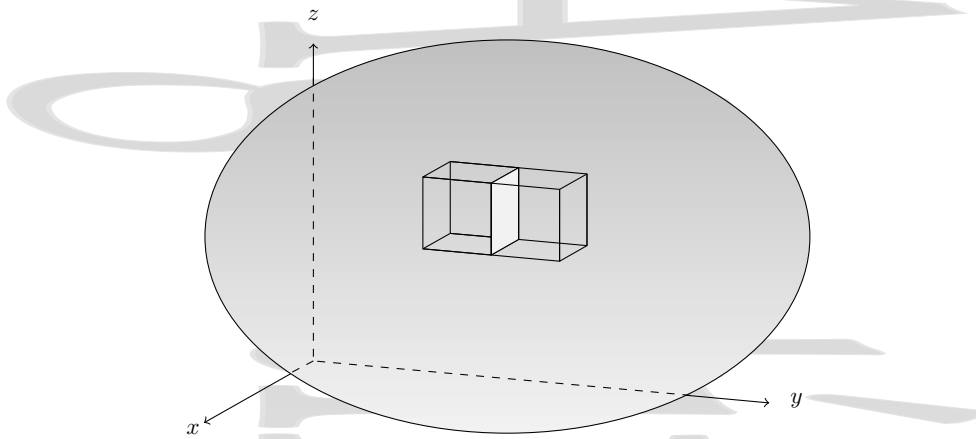


Figura 2-4: Cálculo del flujo neto a través de dos elementos prismáticos infinitesimales de un cierto volumen V encerrado por una superficie S . El flujo a través de la superficie compartida tiene el mismo valor y distinto signo para los dos elementos, por lo que se cancela en la suma.

2.3.4. Teorema de Gauss-Ostrogradski o de la divergencia.

Consideremos ahora un volumen finito V limitado por una superficie cerrada S como se muestra en la figura 2-4, y dentro de ese volumen dos elementos infinitesimales contiguos con una superficie común, cada uno de ellos de volumen dV y limitado por una superficie cerrada dS , de forma que la ecuación (2-10) aplicada a cada uno de ellos es de la forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} dV = \oint_{dS} \vec{G} \cdot d\vec{S}$$

Al sumar las dos expresiones, en la parte que corresponde al flujo se cancelará el flujo a través de la cara común, ya que lo que para un elemento es positivo para el otro será negativo, con ambos flujos de la misma magnitud. Así, quedaría el flujo a través de la superficie que encierra a los dos elementos.

Si ahora consideramos los elementos infinitesimales que forman un volumen finito, aplicamos la ecuación anterior a cada uno de ellos y sumamos, en el flujo resultante nos quedará únicamente el flujo a través de la superficie externa, ya que por la misma razón que antes, los flujos a través de las caras contiguas se cancelarán dos a dos. Así, integrando a todo el volumen se obtiene la expresión

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{G} dV = \oint_S \vec{G} \cdot d\vec{S} \quad (2-14)$$

conocida como *teorema de Gauss-Ostrogradski* o *teorema de la divergencia*, que se aplica a cualquier volumen V limitado por una superficie cerrada S :

El flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada S que delimita una región del espacio de volumen V es igual a la integral de volumen de la divergencia del campo vectorial sobre el volumen V de la región.

2.4. Circulación y rotacional de un campo vectorial.

2.4.1. Circulación de un campo vectorial.

Se define la *circulación* de un campo vectorial \vec{G} entre los puntos A y B a lo largo de una trayectoria dada como la integral a lo largo de la trayectoria de la componente del campo vectorial tangente a la trayectoria en cada punto. Nótese que la circulación es una magnitud escalar y que en general depende de la trayectoria. Su expresión matemática es

$$Circ = \int_A^B \vec{G} d\vec{l}. \quad (2-15)$$

Si \vec{G} fuera una fuerza, la circulación representaría el trabajo realizado por el campo de fuerzas al mover un objeto a lo largo de la trayectoria entre los dos puntos dados. Si \vec{G} fuera la intensidad del campo eléctrico \vec{E} , representaría la diferencia de potencial entre los puntos.

Hemos visto que la divergencia de un campo vectorial $\vec{\nabla} \cdot \vec{G}$ es una medida del flujo neto en el entorno de un punto, que nos refleja si hay una fuente o sumidero de flujo. Igualmente podríamos hablar de una “fuente de vórtice” que nos representa un giro del campo vectorial en el entorno de ese punto. Para caracterizar este vórtice utilizaremos la *circulación* del campo vectorial a lo largo de una trayectoria *cerrada*,

$$Circ = \oint \vec{G} d\vec{l} \quad (2-16)$$

Al igual que para una trayectoria no cerrada, si \vec{G} fuera una fuerza o la intensidad del campo eléctrico, la circulación a través de una trayectoria cerrada representaría respectivamente el trabajo realizado por el campo de fuerzas sobre una masa o la fuerza electromotriz inducida, en ambos casos a lo largo de la trayectoria cerrada. Si \vec{G} fuera la velocidad \vec{v} de movimiento del agua, representaría la componente rotacional del movimiento del agua. Nótese que es posible que la circulación del campo vectorial a lo largo de la trayectoria cerrada sea no nula aunque la divergencia lo sea.

2.4.2. Rotacional de un campo vectorial.

Si tomamos un pequeño elemento de volumen V , limitado por una superficie cerrada S , se define el *rotacional de un campo vectorial* en un punto como el flujo del producto vectorial del vector superficie por el campo a través de una superficie cerrada S en torno al punto, cuando S tiende a 0,

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S d\vec{S} \times \vec{G} = \frac{d}{dV} \oint_{dS} d\vec{S} \times \vec{G}, \quad (2-17)$$

con la normal a la superficie hacia fuera. Como se ve, esta definición es muy parecida a la definición de divergencia, pero para el producto vectorial $d\vec{S} \times \vec{G}$ en vez de para el producto escalar $\vec{G} d\vec{S}$.

Esta definición es útil para obtener la forma explícita del rotacional en distintos sistemas de coordenadas, pero en general es más útil definir el rotacional como un vector cuya componente en una dirección genérica Δ (dada por un vector unitario \vec{u}_Δ) viene dada por

$$(\vec{\nabla} \times \vec{G})_\Delta = (\vec{\nabla} \times \vec{G}) \cdot \vec{u}_\Delta = \frac{d}{dS_\Delta} \oint_{S_\Delta} \vec{G} d\vec{l} \quad (2-18)$$

donde S_Δ representa una superficie plana perpendicular a la dirección Δ y el sentido de recorrido es el positivo respecto del sentido elegido para el vector unitario \vec{u}_Δ .

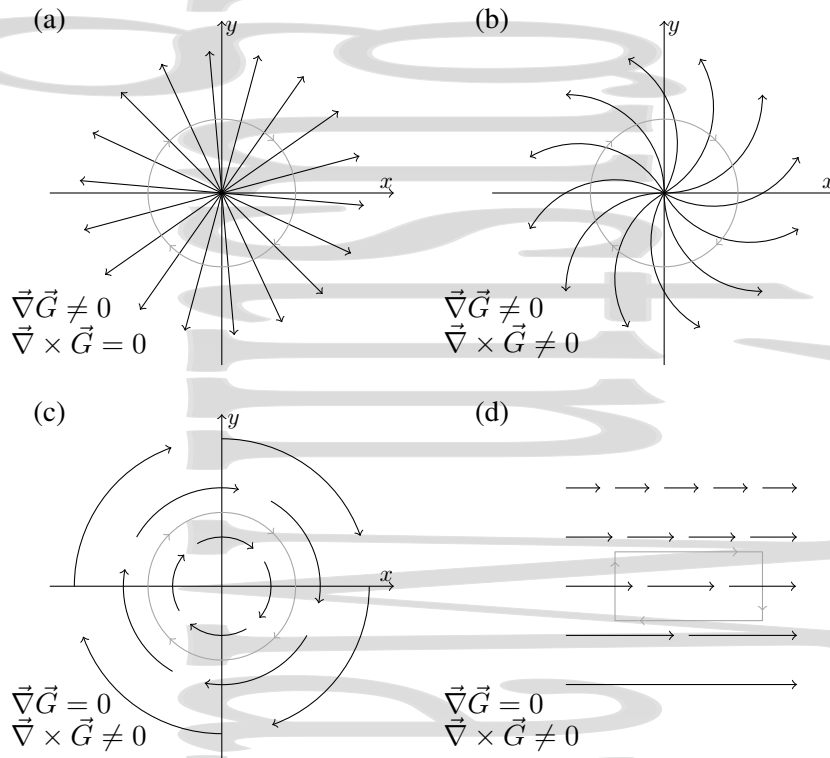


Figura 2-5: Ejemplos de campos vectoriales con distintas posibilidades de divergencia y rotacional. Un campo vectorial uniforme tendría, evidentemente, divergencia y rotacional nulos.

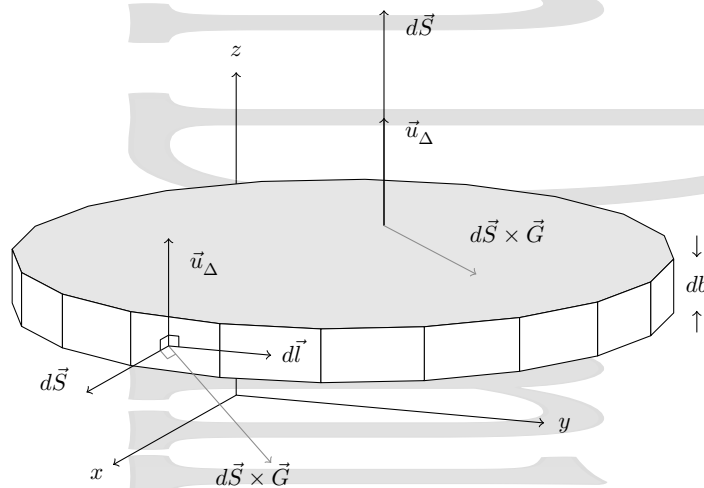


Figura 2-6: Equivalencia entre las dos definiciones de rotacional utilizando una superficie especial. Para las caras superior e inferior, el producto vectorial $d\vec{S} \times \vec{u}_\Delta$ está sobre la superficie perpendicular a \vec{u}_Δ , por lo que no tiene componente sobre esa dirección y únicamente queda la contribución de la estrecha franja transversal. Nótese que el vector $d\vec{l}$ está en la dirección del producto vectorial $d\vec{S} \times \vec{u}_\Delta$.

Ambas definiciones, (2-17) y (2-18) son completamente equivalentes. Para comprobarlo, tomaríamos un elemento de volumen con dos caras perpendiculares a la dirección Δ y una franja estrecha perpendicular a las anteriores en las otras direcciones, de espesor db , como se muestra en la figura 2-6 de forma que podamos considerar que el campo apenas varía en una línea perpendicular que une las dos caras. Podemos escoger este elemento de volumen porque la definición (2-17) es independiente de la forma del volumen.

Sobre las dos superficies perpendiculares a la dirección Δ se cumple que $d\vec{S} \times \vec{G}$ es paralelo a la superficie, luego no tiene componente en la dirección perpendicular Δ . Así, quedaría únicamente la componente según Δ del flujo de $d\vec{S} \times \vec{G}$ a través de la superficie lateral. Como se aprecia en la figura, $\vec{u}_l = \vec{u}_\Delta \times \vec{u}_S$ y, podemos escribir la componente según Δ del flujo de $d\vec{S} \times \vec{G}$ a través de un elemento infinitesimal de superficie,

$$(d\vec{S} \times \vec{G})\vec{u}_\Delta = G dS(\vec{u}_S \times \vec{u}_G)\vec{u}_\Delta = -G dS(\vec{u}_G \times \vec{u}_S)\vec{u}_\Delta$$

Como se cumple la relación del análisis vectorial

$$\vec{A}(\vec{B} \times \vec{C}) = -\vec{B}(\vec{A} \times \vec{C})$$

se cumplirá en particular

$$\vec{u}_\Delta(\vec{u}_G \times \vec{u}_S) = -\vec{u}_G(\vec{u}_\Delta \times \vec{u}_S)$$

y por tanto

$$(d\vec{S} \times \vec{G})\vec{u}_\Delta = G dS \vec{u}_G(\vec{u}_\Delta \times \vec{u}_S) = G \vec{u}_G dS \vec{u}_l = db \vec{G} d\vec{l}$$

al cumplirse $\vec{u}_l = \vec{u}_\Delta \times \vec{u}_S$ y $dS = db dl$. Así, la componente del rotacional según una dirección Δ queda, una vez tomado el límite infinitesimal,

$$(\vec{\nabla} \times \vec{G})_\Delta = (\vec{\nabla} \times \vec{G})\vec{u}_\Delta = \frac{d}{db dS_\Delta} \oint_{S_\Delta} db \vec{G} d\vec{l} = \frac{d}{dS_\Delta} \oint_{S_\Delta} \vec{G} d\vec{l},$$

que es exactamente la ecuación (2-18) con la integral realizada, como allí, sobre el perímetro de la superficie perpendicular al eje Δ .

Para una superficie perpendicular a la dirección así obtenida se tendría la circulación máxima, por lo que también podríamos haber definido el rotacional de un campo vectorial como un vector cuya magnitud es la circulación neta máxima del campo vectorial \vec{G} por unidad de superficie, su dirección es la normal a la superficie en la que la circulación es máxima y su sentido el del avance del tornillo según se recorre la trayectoria (o el contrario si la circulación anterior sale negativa),

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \left[\oint_C \vec{G} d\vec{l} \right]_{\vec{u}_n} = \frac{d}{dS} \left[\oint_C \vec{G} d\vec{l} \right]_{\vec{u}_n}. \quad (2-19)$$

2.4.3. Componentes del rotacional de un campo vectorial en distintos sistemas de coordenadas.

Para obtener la componentes del rotacional en coordenadas cartesianas, consideraremos tres recorridos infinitesimales, cada uno de ellos correspondiente al borde de un rectángulo perpendicular a uno de los ejes y con lados según los otros dos ejes, como se muestra en la parte izquierda de la figura 2-7.

Si empezamos con el recorrido rectangular que se muestra en la figura 2-7, la componente del rotacional sobre el plano yz será la suma de las integrales en los distintos tramos del recorrido cerrado, con un sentido

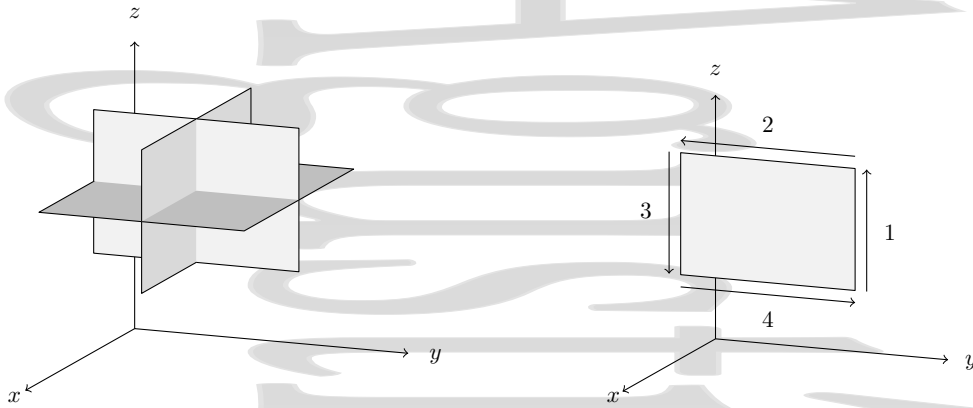


Figura 2-7: Para calcular el valor del rotacional en un punto calcularemos el valor de sus tres componentes según los tres ejes coordenados, tomando tres superficies, cada una de ellas perpendicular a uno de los ejes coordenados y con lados según los otros dos, como se muestra en la parte izquierda de la figura. Así, para calcular la componente x del rotacional tomaremos la superficie que se muestra en la parte derecha, en cuyo contorno la circulación en el sentido mostrado será la suma de las integrales en cada una de las componentes del recorrido.

positivo del recorrido del campo,

$$\begin{aligned}
 (\vec{\nabla} \times \vec{G})_x &= \sum_{1,2,3,4} \int \vec{G} d\vec{l} = \frac{d}{dS} \left[\left(G_z(x, y, z) + \frac{\partial G_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) (+dz) \quad (\text{Tramo 1}) \right. \\
 &\quad + \left(G_y(x, y, z) + \frac{\partial G_y}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) (-dy) \quad (\text{Tramo 2}) \\
 &\quad + \left(G_z(x, y, z) - \frac{\partial G_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) (-dz) \quad (\text{Tramo 3}) \\
 &\quad \left. + \left(G_y(x, y, z) - \frac{\partial G_y}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) (+dy) \right] \quad (\text{Tramo 4})
 \end{aligned}$$

que, teniendo en cuenta que $dS_x = dydz$ queda

$$(\vec{\nabla} \times \vec{G})_x = \frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} \quad (2-20a)$$

y de forma análoga se tiene, para las otras componentes,

$$(\vec{\nabla} \times \vec{G})_y = \frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x} \quad (2-20b)$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{G})_z = \frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y} \quad (2-20c)$$

de modo que el rotacional puede escribirse en *coordenadas cartesianas* como

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = \left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix} \quad (2-21a)$$

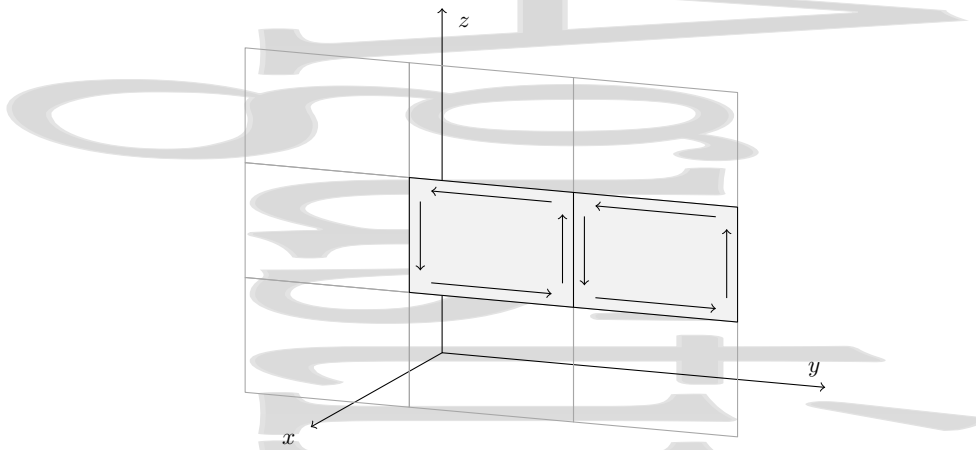


Figura 2-8: La suma de las circulaciones a lo largo de dos trayectorias cerradas que comparten un tramo es la circulación a lo largo de la trayectoria cerrada externa, ya que la contribución del tramo compartido es igual y de distinto signo en cada uno de los dos recorridos.

En *coordenadas cilíndricas* se tomarían tres recorridos perpendiculares a cada eje y de lados según los otros dos. Así, el recorrido perpendicular a \vec{u}_r tendría lados $\rho d\phi$ y dz , el recorrido perpendicular a \vec{u}_ϕ tendría lados $d\rho$ y dz , y el recorrido perpendicular a \vec{u}_z tendría lados $d\rho$ y $\rho d\phi$. Finalmente se obtiene, para coordenadas cilíndricas, la expresión

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial G_z}{\partial \phi} - \frac{\partial G_\phi}{\partial z} \right) \vec{u}_\rho + \left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x} \right) \vec{u}_\phi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho G_\phi) - \frac{\partial G_\rho}{\partial \phi} \right) \vec{u}_z \quad (2-21b)$$

mientras que, siguiendo un procedimiento similar, se obtiene la expresión del rotacional en *coordenadas esféricas*

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{G} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (G_\phi \sin \theta) - \frac{\partial G_\theta}{\partial \phi} \right) \vec{u}_r \\ & + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial G_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r G_\phi) \right) \vec{u}_\theta \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r G_\theta) - \frac{\partial G_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\phi \end{aligned} \quad (2-21c)$$

2.4.4. Teorema de Stokes.

Consideremos ahora la circulación en dos recorridos adyacentes que comparten un tramo, como se muestra en la figura 2-8. La contribución a la circulación del campo vectorial del tramo común será igual y de sentido contrario para los dos recorridos. Así, la circulación a través de la trayectoria cerrada que envuelve a los dos recorridos será igual a la suma de las circulaciones a través de cada uno de los dos recorridos, ya que la contribución del tramo común se cancela.

Si lo que tenemos es una superficie macroscópica S , para cada elemento infinitesimal $d\vec{S}$ de esa superficie la componente del rotacional según $d\vec{S}$ sería $(\vec{\nabla} \times \vec{G})_{d\vec{S}}$ y se cumpliría, a partir de (2-19),

$$(\vec{\nabla} \times \vec{G})_{d\vec{S}} = \oint_{dS} \vec{G} d\vec{l}$$

con el flujo del rotacional a través de dS y la circulación a lo largo de la trayectoria cerrada que limita a dS . Si integramos a la superficie finita S , las contribuciones de los tramos compartidos entre dos elementos de superficie infinitesimales se cancelan y únicamente quedan las contribuciones de los tramos externos,

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{G}) d\vec{S} = \oint_C \vec{G} d\vec{l}, \quad (2-22)$$

que representa el *teorema de Stokes*,

El flujo del rotacional de un campo vectorial a través de una superficie abierta es igual a la circulación del campo vectorial a lo largo del contorno que limita la superficie.

Para el caso particular de una superficie cerrada no hay un contorno (o dicho de otra forma, todos los tramos infinitesimales son compartidos) y, por tanto se cumple

$$\oint_S (\vec{\nabla} \times \vec{G}) d\vec{S} = 0 \quad (2-23)$$

para cualquier superficie cerrada S .

2.5. Combinando lo anterior.

2.5.1. Divergencia del gradiente y gradiente de la divergencia: laplaciana.

La divergencia del gradiente de un campo escalar es una función de gran importancia en muchos campos de la Ciencia y se denomina *laplaciana de un campo escalar*. En coordenadas cartesianas se expresa como

$$\nabla^2 f = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad (2-24a)$$

en coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 f = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} f) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (2-24b)$$

y en coordenadas esféricas

$$\nabla^2 f = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} f) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \quad (2-24c)$$

De forma análoga también se define la *laplaciana de un campo vectorial* como el gradiente de la divergencia que, en coordenadas cartesianas, tiene la forma

$$\nabla^2 \vec{G} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}) = \frac{\partial^2 \vec{G}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{G}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{G}}{\partial z^2}, \quad (2-25)$$

2.5.2. Rotacional del gradiente.

El rotacional del gradiente de una función siempre es idénticamente 0,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) \equiv 0. \quad (2-26)$$

Para demostrar esto, partiremos del teorema de Stokes, y tendremos en cuenta que $\vec{\nabla} f d\vec{l} = df$ de modo que

$$\int_S [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f)] d\vec{S} = \oint_C (\vec{\nabla} f) d\vec{l} = \oint_C df = 0$$

al ser df una diferencial exacta.

2.5.3. Divergencia del rotacional.

La divergencia del rotacional de cualquier campo vectorial es idénticamente nula,

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{G}) \equiv 0. \quad (2-27)$$

Para demostrarlo utilizaremos el teorema de Gauss-Ostrogradski, para cualquier superficie cerrada que

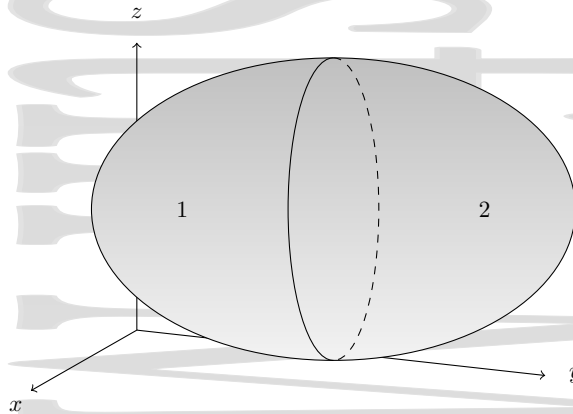


Figura 2-9: Para demostrar la identidad $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{G}) \equiv 0$ tomamos una superficie cerrada que contiene un volumen V y una trayectoria cerrada que divide la superficie en dos.

encierra un volumen V y tomaremos una trayectoria cerrada que divide la superficie cerrada en dos. El flujo a través de la superficie cerrada puede expresarse como la suma de los flujos a través de cada de las dos superficies abiertas limitadas por la trayectoria, y a su vez cada uno de ellos será la circulación a lo largo de la trayectoria que limita cada superficie, que será la misma en los dos casos, pero recorrida en sentidos contrarios, por lo que su suma será nula

$$\begin{aligned} \int_V \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{G}) dV &= \oint_S (\vec{\nabla} \times \vec{G}) d\vec{S} = \int_{S_1} (\vec{\nabla} \times \vec{G}) d\vec{S}_1 + \int_{S_2} (\vec{\nabla} \times \vec{G}) d\vec{S}_2 = \\ &= \oint_{C_1} \vec{G} d\vec{l} + \oint_{C_2} \vec{G} d\vec{l} = 0 \end{aligned}$$

Como esto es cierto para cualquier volumen arbitrario, debe cumplirse la identidad que queríamos demostrar

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{G}) \equiv 0. \quad (2-27)$$

2.5.4. Otras relaciones.

A continuación se muestra el resultado de combinar alguno de los operadores que hemos visto con campos escalares y vectoriales. Comenzamos con la suma de dos campos escalares o vectoriales

$$\vec{\nabla}(f + g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g \quad (2-28a)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla}\vec{F} + \vec{\nabla}\vec{G} \quad (2-28b)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}, \quad (2-28c)$$

seguimos con el producto de un campo escalar y un campo vectorial

$$\vec{\nabla}(f\vec{G}) = (\vec{\nabla}f)\vec{G} + f(\vec{\nabla}\vec{G}) \quad (2-29a)$$

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{G}) = (\vec{\nabla}f) \times \vec{G} + f(\vec{\nabla} \times \vec{G}) \quad (2-29b)$$

y terminamos con unas cuantas relaciones adicionales

$$\vec{\nabla}(\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{\nabla} \times \vec{F})\vec{G} - \vec{F}(\vec{\nabla} \times \vec{G}) \quad (2-30a)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{G}\vec{\nabla})\vec{F} + (\vec{F}\vec{\nabla})\vec{G} + \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) + \vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}) \quad (2-30b)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{G}\vec{\nabla})\vec{F} - \vec{G}(\vec{\nabla}\vec{F}) - (\vec{F}\vec{\nabla})\vec{G} + \vec{F}(\vec{\nabla}\vec{G}) \quad (2-30c)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{G}) - \nabla^2\vec{G} \quad (2-30d)$$

2.5.5. Teorema de Green.

Si tenemos dos campos escalares $f(\vec{r})$ y $g(\vec{r})$ y aplicamos el teorema de la divergencia al vector

$$f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f$$

se tiene

$$\int_V \vec{\nabla}(f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f) dV = \oint_S (f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f) d\vec{S}.$$

El integrando del primer término es, teniendo en cuenta (2-29a)

$$\vec{\nabla}(f\vec{\nabla}g) - \vec{\nabla}(g\vec{\nabla}f) = f\nabla^2g - g\nabla^2f$$

obteniéndose el *teorema de Green*

$$\int_V (f\nabla^2g - g\nabla^2f) dV = \oint_S (f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f) d\vec{S}. \quad (2-31)$$

2.6. Campos conservativos y solenoidales. Potenciales escalar y vector.

Decimos que un campo vectorial es un *campo conservativo* cuando la circulación del mismo depende únicamente de los puntos inicial y final. Evidentemente, si la trayectoria es cerrada, la circulación es nula para un campo conservativo.

Todo campo vectorial que puede expresarse como el gradiente de una función escalar es un campo conservativo. En efecto, la circulación del campo vectorial a lo largo de una trayectoria cualquiera que une A y B es

$$\text{Circ} = \int_A^B \vec{G} d\vec{l} = \int_A^B \vec{\nabla}f d\vec{l} = \int_A^B df = f(B) - f(A) \quad (2-32)$$

al ser $\vec{\nabla}f d\vec{l} = df$ y por tanto df es una diferencial exacta. Esto implica que la circulación de un campo vectorial irrotacional o conservativo entre dos puntos es independiente de la trayectoria y únicamente depende del valor del campo escalar f en los puntos inicial y final.

Si el rotacional de un campo vectorial es nulo, decimos que el campo es *irrotacional*. Como el rotacional de un gradiente es nulo (2-26), un campo conservativo es siempre un campo irrotacional. Asimismo, se

observa fácilmente a partir del teorema de Stokes (2-22) que si el campo es irrotacional su circulación a lo largo de cualquier trayectoria cerrada debe ser nula y por tanto el campo es conservativo.

$$\vec{G} \text{ conservativo} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{G} = 0 \Leftrightarrow \text{Existe } f \text{ tal que } \vec{G} = \vec{\nabla} f$$

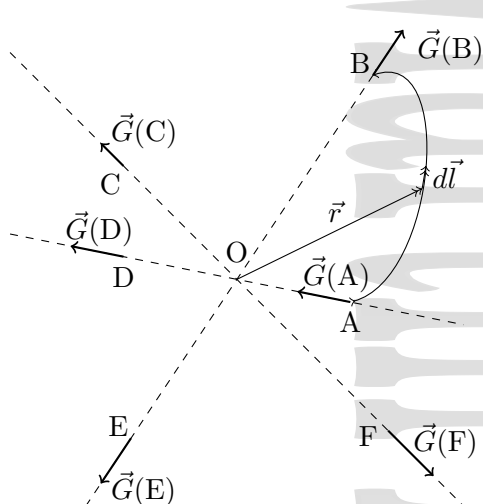
Cuando el rotacional de un campo vectorial no es nulo se dice que el campo es *rotacional* y no puede expresarse en función de un campo escalar.

Para campos de fuerzas, suele utilizarse $U = -f$ como campo escalar asociado, denominándose *potencial escalar*[†] a U .

Si la divergencia de un campo vectorial es nula, decimos que el campo es *solenoidal* y en este caso puede expresarse siempre como el rotacional de otro campo vectorial \vec{A} al que llamamos *potencial vector*.

2.7. Campos centrales.

Estudiemos ahora un tipo particular de campo. Se denominan campos centrales a aquellos en los que los vectores campo o sus rectas de acción pasan por un punto fijo del espacio al que se denomina *origen del campo*.



$$\vec{G} = G(r)\vec{u}_r \quad (2-33)$$

La circulación de un campo central por una trayectoria dada entre dos puntos A y B será

$$\text{Circ} = \int_A^B \vec{G} d\vec{l} = \int_A^B G(r)\vec{u}_r d\vec{l} = \int_A^B G(r) dr$$

donde dr es la proyección sobre la dirección radial del vector desplazamiento en cada punto $d\vec{l}$. Como es una integral de una variable, el resultado depende únicamente de los puntos inicial y final (para un campo central de una forma dada) y por tanto los campos centrales son campos conservativos (o irrotacionales, con $\vec{\nabla} \times \vec{G}_{\text{central}} = 0$).

El flujo de un campo central a través de una superficie esférica con centro en el origen de campos será

$$\Phi = \oint_S \vec{G} d\vec{S} = \oint_S G(r) dS = G(r) \oint_S dS = G(r) 4\pi r^2$$

Figura 2-10: Campos centrales.

2.8. Campos de fuerzas conservativos.

Como todo campo conservativo, un *campo conservativo de fuerzas* puede expresarse como el gradiente de un campo escalar f tal que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$. Sin embargo, para campos de fuerzas conservativos no se utiliza el campo escalar f sino la energía potencial E_p como campo escalar, que coincide con f cambiado de signo, $E_p = -f$. En función de la energía potencial E_p , la fuerza queda en la forma

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p \quad (= \vec{\nabla} f). \quad (2-34)$$

Esto ocurre, por ejemplo, para el campo gravitatorio (que se verá como ejemplo a continuación) y para el campo eléctrico.

[†] Algunos autores utilizan también la palabra potencial escalar para la función escalar sin cambiar de signo.

2.8.1. Interacción entre dos masas. Ley de la gravitación de Newton.

Entre dos masas m_1 y m_2 supuestamente puntuales[†] y separadas una distancia r_{12} actúa una fuerza de interacción atractiva dada por la *ley de la gravitación de Newton*

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{12}. \quad (2-35)$$

En esta expresión, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ es la constante de gravitación y el sentido de \vec{u}_{12} es tal que la interacción sea atractiva.

Como se deduce de la ley (2-35), el campo gravitatorio terrestre es un campo central y por tanto es un campo conservativo.

2.8.2. Intensidad del campo gravitatorio terrestre.

En particular, la Tierra ejerce una fuerza atractiva sobre cualquier cuerpo de masa m sometido a su influencia. El campo gravitatorio terrestre se caracteriza mediante la fuerza atractiva por unidad de masa que se ejercería sobre la masa m cuando esta está situada en cada punto del espacio,

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{m}, \quad (2-36)$$

que nos da la *intensidad del campo gravitatorio* (y que coincide con la aceleración \vec{a} que adquiriría la masa m respecto de la Tierra si estuviera sometida al único efecto de la fuerza de atracción gravitatoria).

La distribución de vectores que actuarían sobre una masa unidad nos daría el campo gravitatorio, representado por su intensidad en cada punto.

El flujo de este campo gravitatorio producido por una masa M a través de una esfera de radio r centrada en el origen del campo será, al ser un campo central,

$$\Phi = g(r)4\pi r^2 = -4\pi MG \quad (2-37)$$

2.8.3. Trabajo del campo gravitatorio.

Si una masa m describe una trayectoria dada entre dos puntos inicial y final A y B bajo la acción de un campo gravitatorio, la circulación de la fuerza \vec{F} ejercida por el campo sobre la masa en cada punto de la trayectoria nos da el trabajo realizado por el campo gravitatorio sobre la masa,

$$\delta W = \vec{F} d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad W_{AB} = \int_A^B \vec{F} d\vec{r}.$$

Un campo vectorial conservativo (y el campo gravitatorio lo es al ser un campo central) puede expresarse en función de un campo escalar mediante la relación

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} f$$

[†]La ley de la gravitación también se cumple entre masas esféricas con la distancia entre los centros de las esferas y en general, si la distancia entre las masas es grande comparada con su tamaño.

quedando

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B df = f_B - f_A.$$

Este campo escalar cambiado de signo es la energía potencial, $E_p = -f$ quedando $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$

$$W_{AB} = f_B - f_A = E_{pA} - E_{pB} = -\Delta E_{pAB}, \quad (2-38)$$

el trabajo realizado por el campo gravitatorio sobre la masa m es igual a la disminución de la energía potencial del sistema de las dos masas.

Como el campo gravitatorio representado por la intensidad \vec{g} del mismo también es un campo central, este campo debe ser conservativo y por tanto, se puede expresar como el gradiente de un campo escalar. Al igual que en el caso del campo de fuerzas y la energía potencial, en este caso también se escoge el campo escalar con el signo contrario para que tenga una mejor relación con la energía. Así, la intensidad del campo gravitatorio se escribe como

$$\vec{g} = -\vec{\nabla} V \quad (2-39)$$

donde V es el *potencial gravitatorio*, energía potencial del campo gravitatorio por unidad de masa m , cumpliéndose

$$W_{AB} = -\Delta E_{pAB} = -m\Delta V_{AB} \quad (2-40)$$

2.9. Teorema de Helmholtz.

El *teorema de Helmholtz* establece lo siguiente. Si para un campo vectorial \vec{G} se cumple

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{G})_{\infty} = 0 \quad (\vec{\nabla} \times \vec{G})_{\infty} = 0$$

el campo vectorial puede escribirse como la suma de una componente irrotacional y una componente solenoidal,

$$\vec{G} = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2-41)$$

donde

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{G}}{|\vec{r}' - \vec{r}|} dV \quad (2-42a)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla} \times \vec{G}}{|\vec{r}' - \vec{r}|} dV \quad (2-42b)$$

siendo \vec{r}' la variable de integración que recorre el volumen V .

Así, podemos decir que

Un campo vectorial está determinado si su divergencia y su rotacional están especificados en todos sus puntos.

Como hemos visto, en una región no limitada, ambos deben anularse en el ∞ . En una región limitada basta con que se estén especificados dentro y se conozca la componente normal en la superficie que limita la región.

Como un campo vectorial puede determinarse a partir de su divergencia y su rotacional se dice que ambos son sus fuentes, las fuentes escalares serían las que definen la divergencia del campo vectorial y las fuentes

vectoriales las que definen el rotacional del campo. Por ejemplo, la densidad de carga de volumen ρ sería la fuente (escalar) del desplazamiento eléctrico, ya que $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ y la densidad de corriente \vec{j} sería la fuente (vectorial) de la intensidad de campo magnético ya que $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$.

Como ya hemos mencionado, para los campos de fuerzas se suele expresar la componente irrotacional (conservativa) mediante un potencial escalar cambiado de signo $U = -f$ (igual a la energía potencial) de forma que la relación con el gradiente del nuevo potencial escalar también está cambiada de signo,

$$\vec{G} = -\vec{\nabla}U + \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (2-43)$$

Capítulo 3

Sistemas de vectores deslizantes y ligados.

3.1. Momentos de un vector deslizante.

3.1.1. Momento de un vector deslizante respecto de un punto.

El momento de un vector deslizante \vec{a} respecto de un punto O (también llamado momento central por algunos autores) viene dado por la expresión

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \times \vec{a} \quad (3-1)$$

De acuerdo con su definición, éste es un vector perpendicular al plano que contiene los vectores \vec{OP} y \vec{a} , y está aplicado en O (cambia si el punto cambia, luego está “ligado” al punto).

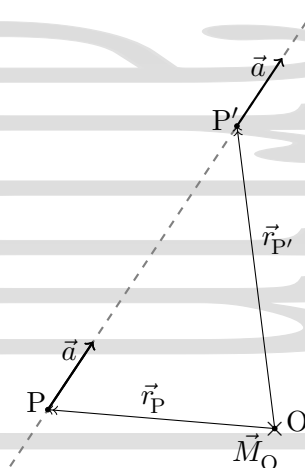


Figura 3-1: Momento central o momento de un vector deslizante respecto de un punto.

Si ahora tomamos el momento del vector \vec{a} aplicado en dos puntos de la recta soporte, se tiene

$$\begin{aligned} \vec{M}_{PO} &= \vec{r}_P \times \vec{a} \\ \vec{M}_{P'O} &= \vec{r}_{P'} \times \vec{a}, \end{aligned}$$

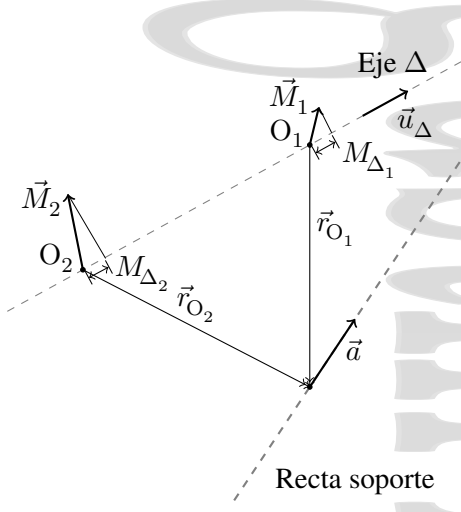
quedando la diferencia

$$\vec{M}_{PO} - \vec{M}_{P'O} = (\vec{r}_P - \vec{r}_{P'}) \times \vec{a} = 0 \quad (3-2)$$

al ser $\vec{r}_P - \vec{r}_{P'} \parallel \vec{PP}'$ (Realmente es $\vec{P}'\vec{P}$).

Así, el momento de un vector deslizante \vec{a} respecto de un punto es invariante respecto de cualquier traslación de dicho vector \vec{a} respecto de su recta soporte, como se espera para un vector deslizante. El momento \vec{M}_O es perpendicular al plano de la figura y, para el caso mostrado en la misma, estaría dirigido hacia el interior del papel.

3.1.2. Momento de un vector deslizante respecto de un eje. Momento axial.



Denominamos *momento axial* o momento de un vector deslizante \vec{a} respecto de un eje Δ al escalar resultante de proyectar, sobre el eje dado, el momento de dicho vector respecto de cualquier punto del eje. Si denominamos \vec{u}_Δ a un vector unitario según el eje, se tiene

$$M_{\Delta_1} = \vec{M}_1 \cdot \vec{u}_\Delta = (\vec{r}_{O_1} \times \vec{a}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

$$M_{\Delta_2} = \vec{M}_2 \cdot \vec{u}_\Delta = (\vec{r}_{O_2} \times \vec{a}) \cdot \vec{u}_\Delta,$$

que da

$$M_{\Delta_1} - M_{\Delta_2} = [(\vec{r}_{O_1} - \vec{r}_{O_2}) \times \vec{a}] \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \quad (3-3)$$

al ser la parte entre corchetes perpendicular a \vec{u}_Δ , ya que el vector $(\vec{r}_{O_1} - \vec{r}_{O_2})$ es paralelo a \vec{u}_Δ .

Figura 3-2: Momento de un vector deslizante respecto de un eje (momento axial).

Así, el momento axial de un vector deslizante \vec{a} respecto de un eje Δ es un invariante respecto de cualquier traslación del vector \vec{a} respecto de su recta soporte y de cualquier traslación del punto sobre el eje.

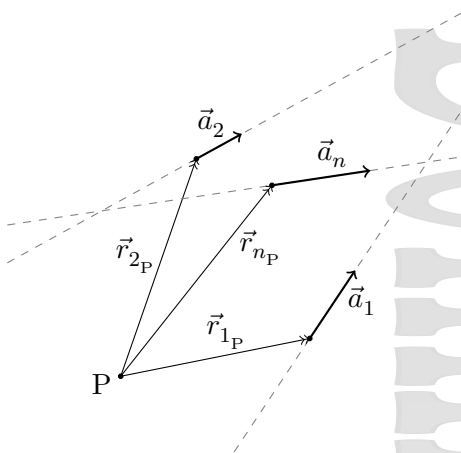
Si la recta soporte y el eje están en el mismo plano, el momento axial M_Δ es nulo ya que todos los momentos son perpendiculares al plano.

3.2. Sistemas de vectores deslizantes

3.2.1. Definiciones

Dado un sistema de vectores deslizantes, cada uno con su recta soporte, se denomina *resultante* \vec{R} del sistema de vectores deslizantes a un vector libre suma de todos los vectores deslizantes del sistema,

$$\vec{R} = \sum_i \vec{a}_i. \quad (3-4)$$



Se denomina *momento resultante* \vec{M}_P de un sistema de vectores deslizantes respecto de un punto P a un vector (en general ligado al punto) resultado de la suma de los momentos de los vectores del sistema respecto de dicho punto,

$$\vec{M}_P = \sum_i \vec{M}_{iP} = \sum_i \vec{r}_{iP} \times \vec{a}_i. \quad (3-5)$$

Figura 3-3: Sistema de vectores deslizantes.

Nótese que para el caso particular de un par de vectores, el momento resultante es un vector libre (véase la sección 3.3).

Denominamos *momento de un sistema de vectores deslizantes respecto de un eje Delta* a la proyección sobre el eje del momento resultante del sistema de vectores deslizantes respecto de un punto de dicho eje. Es lo mismo que la suma de los momentos de cada uno de los vectores del sistema respecto de dicho eje.

Denominamos *recta de momento nulo* a toda recta respecto de la cual el momento del sistema de vectores deslizantes es nulo. Toda recta en el plano perpendicular al momento resultante será una recta de momento nulo.

3.2.2. Teoremas de vectores deslizantes.

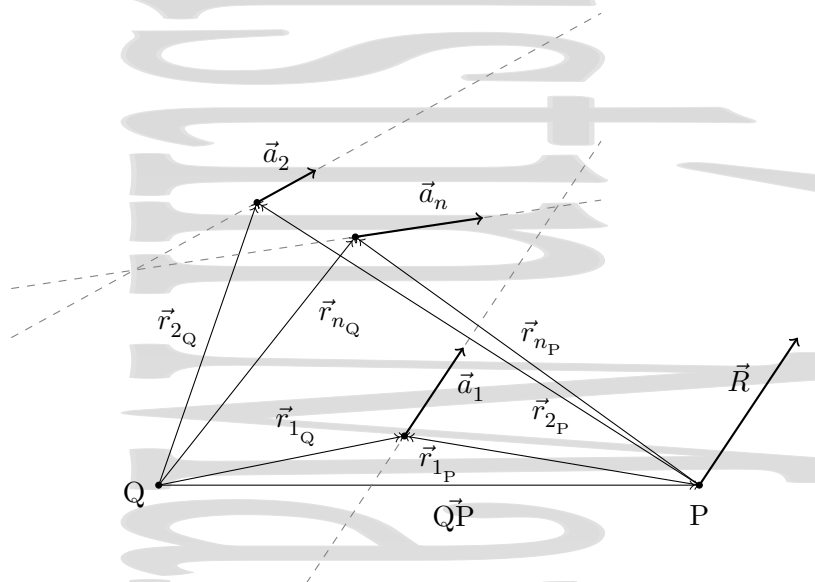


Figura 3-4: Primer teorema de sistemas de vectores deslizantes.

Teorema 1 El momento resultante de un sistema de vectores deslizantes respecto de un punto Q es igual al momento resultante de dicho sistema de vectores deslizantes respecto de otro punto cualquiera P más el momento de la resultante, aplicada en P, respecto de Q.

$$\vec{M}_Q = \vec{QP} \times \vec{R} + \vec{M}_P \quad (3-6)$$

Para comprobarlo no hay más que tener en cuenta que para todos los vectores deslizantes del sistema se satisface la relación $\vec{r}_{iQ} = \vec{QP} + \vec{r}_{iP}$ de modo que se cumple

$$\vec{M}_Q = \sum_i \vec{r}_{iQ} \times \vec{a}_i = \sum_i (\vec{QP} + \vec{r}_{iP}) \times \vec{a}_i = \sum_i \vec{QP} \times \vec{a}_i + \sum_i \vec{r}_{iP} \times \vec{a}_i = \vec{QP} \times \vec{R} + \vec{M}_P$$

Teorema 2 (Teorema de Varignon) El momento resultante de un sistema de vectores concurrentes en un punto P respecto de un punto cualquiera Q es igual al momento, respecto de Q, de la resultante aplicada en el punto de concurrencia P.

Éste es un caso particular del anterior,

$$\vec{M}_Q = \vec{QP} \times \vec{R} + \vec{M}_P = \vec{QP} \times \vec{R} \quad (3-7)$$

ya que $\vec{M}_P = \sum \vec{M}_{iP} = 0$ al pasar todas las líneas de acción por P.

3.2.3. Invariantes de un sistema de vectores deslizantes.

Denominamos invariantes de un sistema de vectores deslizantes a una serie de magnitudes que no cambian en tanto que los vectores del sistema únicamente deslicen sobre sus líneas de acción.

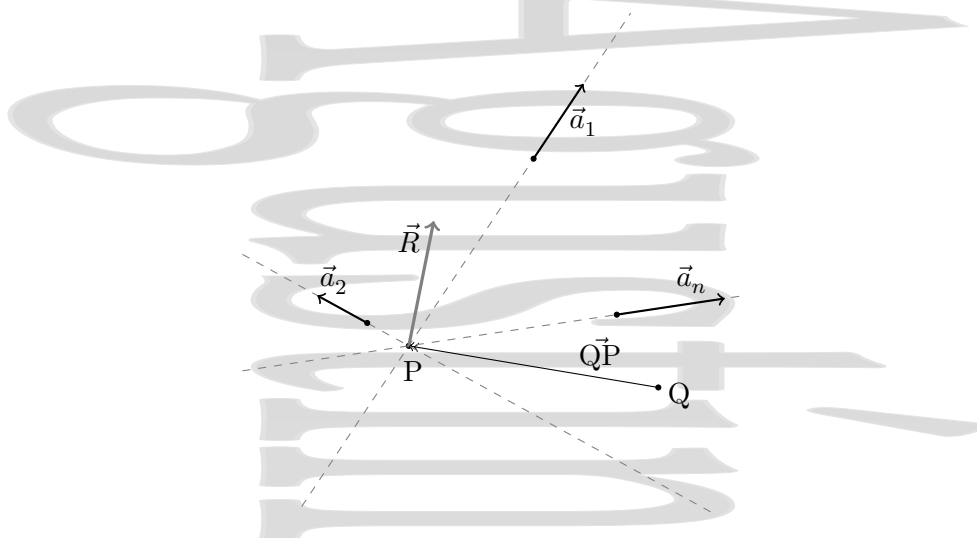


Figura 3-5: Teorema de Varignon

Primer invariante (Invariante vectorial).

Es la *resultante* del sistema de vectores deslizantes,

$$\vec{R} = \sum_i \vec{a}_i \quad (3-4)$$

Segundo invariante (Invariante escalar).

A partir del primer teorema de los vectores deslizantes,

$$\vec{M}_Q = \vec{QP} \times \vec{R} + \vec{M}_P, \quad (3-6)$$

si multiplicamos escalarmente por la resultante \vec{R} se tiene

$$\vec{M}_Q \vec{R} = (\vec{QP} \times \vec{R}) \vec{R} + \vec{M}_P \vec{R} \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_Q \vec{R} = \vec{M}_P \vec{R}$$

al ser $\vec{QP} \times \vec{R}$ perpendicular a \vec{R} . Como esto debe ocurrir para cualquier par de puntos P y Q, se tiene

$$\vec{M} \vec{R} = cte \quad (3-8)$$

El producto escalar $\vec{M} \vec{R}$, denominado *automomento* del sistema de vectores deslizantes, no depende del punto respecto del que se obtiene el momento.

Tercer invariante.

El *tercer invariante* es una consecuencia directa de los dos anteriores y se presenta en dos versiones, escalar y vectorial. Si $\vec{u}_R = \vec{R}/|\vec{R}|$ es un vector unitario en la dirección de la resultante, el tercer invariante, en su *versión escalar*, se escribe como

$$m_0 = \vec{M} \vec{u}_R = \frac{\vec{M} \vec{R}}{|\vec{R}|} \quad (3-9a)$$

y representa la componente del momento resultante del sistema de vectores deslizantes respecto de un punto según la dirección de la resultante \vec{R} .

Esta componente también representa el momento resultante de módulo mínimo de un sistema de vectores deslizantes respecto de un punto. En efecto, como es un invariante siempre estará presente y tendrá el mismo valor, pero el momento puede tener además otra componente cuando se toma respecto de otros puntos, lo que daría un módulo mayor

$$\vec{M} = \vec{M}_{\parallel \vec{R}} + \vec{M}_{\perp \vec{R}} = m_0 \vec{u}_R + \vec{M}_{\perp \vec{R}} \Rightarrow M^2 = m_0^2 + (\vec{M}_{\perp \vec{R}})^2.$$

Esto permite definir una *versión vectorial* del tercer invariante

$$\vec{m}_0 = m_0 \vec{u}_R, \quad (3-9b)$$

que representa el valor del momento resultante cuando se toma desde un punto tal que su módulo es mínimo.

El momento resultante \vec{M} será mínimo cuando no tenga componente perpendicular a la resultante \vec{R} , es decir cuando \vec{M} y \vec{R} sean paralelos.

3.2.4. Eje central.

Denominamos *eje central de un sistema de vectores deslizantes* al lugar geométrico de los puntos del espacio respecto de los cuales el momento resultante del sistema de vectores deslizantes tiene módulo mínimo.

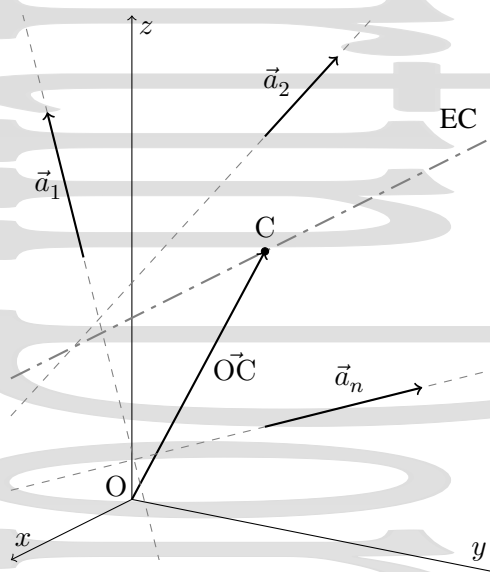


Figura 3-6: Eje central de un sistema de vectores deslizantes.

Si O es el origen de coordenadas (0, 0, 0), $C(x, y, z)$ un punto sobre el eje central del sistema de vectores deslizantes, el vector $\vec{R} = R_x \vec{u}_x + R_y \vec{u}_y + R_z \vec{u}_z$ la resultante del sistema de vectores deslizantes y el vector $\vec{M}_O = M_x \vec{u}_x + M_y \vec{u}_y + M_z \vec{u}_z$ el momento del sistema de vectores deslizantes respecto del punto O, el momento del sistema de vectores deslizantes respecto de un punto C sobre el eje central será el momento del sistema respecto del origen más el momento de la resultante, aplicada en C, respecto del origen,

$$\vec{M}_C = \vec{M}_O - \vec{OC} \times \vec{R}$$

que desarrollado queda

$$M_x \vec{u}_x + M_y \vec{u}_y + M_z \vec{u}_z - \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ x & y & z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} = \\ (M_x - yR_z + zR_y)\vec{u}_x + (M_y - zR_x + xR_z)\vec{u}_y + (M_z - xR_y + yR_x)\vec{u}_z.$$

Para que el momento \vec{M}_C sea mínimo, no debe tener componente perpendicular a la resultante \vec{R} y por tanto debe ser paralelo a la misma. Así, debe cumplirse

$$\frac{M_x - yR_z + zR_y}{R_x} = \frac{M_y - zR_x + xR_z}{R_y} = \frac{M_z - xR_y + yR_x}{R_z} \quad (3-10)$$

conocida como *ecuación del eje central*.

Como consecuencia de la definición de eje central, el momento respecto de cualquier punto del mismo será el momento mínimo \vec{m}_0 . Si consideramos dos puntos C y C' sobre el eje central se cumplirá $\vec{M}_C = \vec{m}_0 = \vec{M}_{C'} + \vec{C}\vec{C}' \times \vec{R} = \vec{m}_0 + \vec{C}\vec{C}' \times \vec{R}$ y por tanto $\vec{C}\vec{C}' \times \vec{R} = 0$. El eje central es siempre paralelo a la resultante \vec{R} (y por tanto debe ser una recta) y el momento mínimo \vec{m}_0 está contenido en el eje central.

3.2.5. El campo de los momentos de un sistema de vectores deslizantes.

La distribución de los momentos resultantes de un sistema de vectores deslizantes respecto de cada punto del espacio forma un *campo de momentos* $\vec{M}(\vec{r}, t)$.

Este campo de los momentos resultantes de un sistema de vectores deslizantes respecto de los distintos puntos P del espacio presenta simetría cilíndrica respecto del eje central.

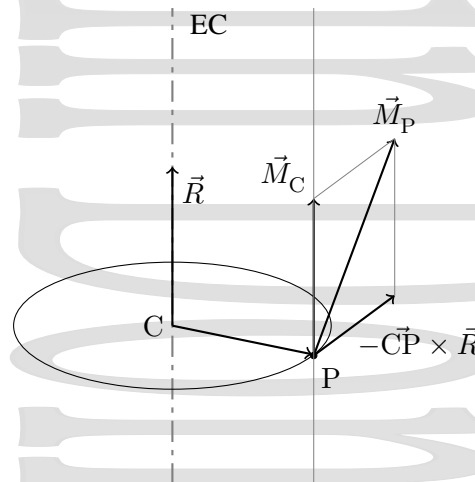


Figura 3-7: El campo de momentos de un SVD tiene simetría cilíndrica respecto del eje central.

En efecto, si consideramos el plano normal al eje central que contiene al punto P y el punto C sobre el eje central que se encuentra también en dicho plano (véase la figura 3-7), el momento \vec{M}_C es igual al momento mínimo \vec{m}_0 al estar sobre el eje central y por tanto, es un invariante. La resultante \vec{R} también es un invariante, por lo que de la expresión

$$\vec{M}_P = \vec{M}_C - \vec{C}\vec{P} \times \vec{R}$$

se tiene que el módulo de $\vec{C}\vec{P} \times \vec{R}$ depende únicamente de $|\vec{C}\vec{P}|$ ya que tanto \vec{M}_C como \vec{R} son invariantes, así como el ángulo entre $\vec{C}\vec{P}$ y \vec{R} (ambos son perpendiculares). Por tanto el campo de momentos $\vec{M}_P(\vec{r}, t)$ tiene simetría cilíndrica respecto del eje central.

Lo anterior tiene un par de consecuencias inmediatas,

- Los momentos resultantes de un sistema de vectores deslizantes respecto de los puntos pertenecientes a una superficie cilíndrica cuyo eje es el eje central, tienen igual módulo.
- Los momentos resultantes de un sistema de vectores deslizantes respecto de los puntos de una recta paralela al eje central son iguales (equipolentes).

3.3. Par de vectores.

Un *par de vectores* es un caso particular de sistemas de vectores deslizantes paralelos. Es todo sistema formado por dos vectores de igual módulo y sentidos opuestos, aplicados según líneas de acción paralelas separadas una distancia d a la que se denomina *brazo del par*.

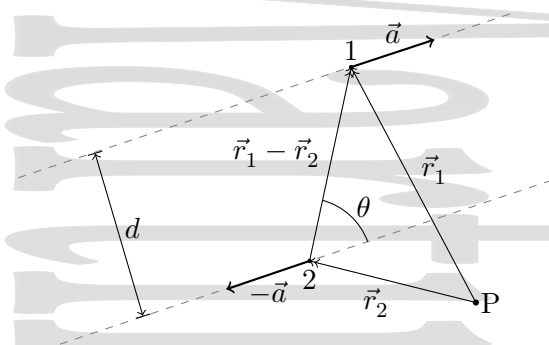


Figura 3-8: Par de vectores.

Evidentemente, la resultante \vec{R} de un par de vectores es nula. El momento del par de vectores respecto de un punto cualquiera P es

$$\vec{M}_{\text{par}} = \vec{M}_P = \vec{r}_1 \times \vec{a} + \vec{r}_2 \times (-\vec{a}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{a} \quad (3-11)$$

que no depende del punto concreto respecto del cual se calcula el momento al ser su valor idéntico para cada punto, y por tanto puede considerarse como un vector libre.

El momento del par de vectores está dirigido en la dirección perpendicular al plano del par y su sentido está dado por el par a través de la regla del tornillo (o del sacacorchos). El módulo del momento del par de vectores es

$$|\vec{M}_{\text{par}}| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| a \sin \theta = a d \quad (3-12)$$

al ser $\sin \theta = d / |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$.

Un par de vectores $[\vec{a}, d]$ es equivalente (tienen la misma resultante y producen el mismo momento) a cualquier otro par $[\vec{a}', d']$ en el mismo plano (o paralelo) y del mismo sentido si $ad = a'd'$ y el sentido de giro es el mismo.

3.4. Sistemas de vectores equivalentes.

Se dice que dos sistemas de vectores deslizantes son equivalentes si tienen la misma resultante \vec{R} y el mismo momento \vec{M}_P respecto de todos los puntos del espacio. Para ello basta que lo tengan respecto de un punto del espacio, ya que para cualquier otro punto P' cambiaría en $\vec{PP}' \times \vec{R}$, pero seguiría siendo el mismo para todos.

3.4.1. Reducción de un sistema de vectores deslizantes.

La *reducción de un sistema de vectores deslizantes* consiste en encontrar un sistema más sencillo equivalente al sistema original. La reducción más sencilla consiste en sustituir el sistema por el conjunto de su resultante \vec{R} aplicada en un punto de reducción P y el momento resultante del sistema de vectores deslizantes respecto del mismo punto P , punto al que denominamos *centro de reducción*. En el caso más sencillo, dicho momento estará producido por un par de vectores en el plano perpendicular al momento, con brazo, módulo y sentido adecuados para dar el mismo valor. Por ello, a menudo se representa el momento correspondiente al sistema equivalente mediante un par de vectores de las características adecuadas. Asimismo, si el par se escoge de forma que uno de los vectores del par se aplica en el punto de reducción y se obtiene la suma de éste y la resultante, el sistema equivalente se puede representar mediante dos vectores, uno la suma de la resultante y de uno de los componentes del par aplicados en el punto de reducción y el otro el otro vector del par de vectores. En este caso, las dos rectas sobre las que se encuentran uno y otro vector se denominan *rectas conjugadas*.

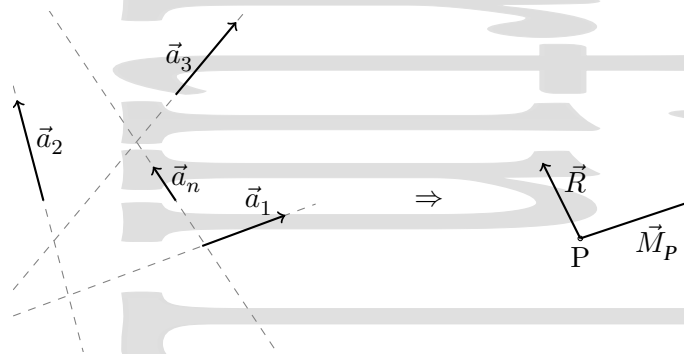


Figura 3-9: Reducción general de un sistema de vectores deslizantes. La reducción más sencilla consiste en la resultante aplicada en el punto de reducción P y un par de fuerzas cuyo momento \vec{M}_P es el momento resultante del sistema de vectores respecto del punto P .

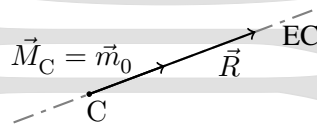


Figura 3-10: Reducción canónica de un sistema de vectores deslizantes. En este caso el punto de reducción se encuentra sobre el eje central y por tanto el momento resultante debe estar dirigido según la resultante (y el eje central).

Si el punto de reducción está sobre el eje central se tiene la denominada *reducción canónica*. En este caso, $\vec{M} \parallel \vec{R}$, con $\vec{M} = \vec{m}_0$ y el sistema se reduce a la resultante aplicada en ese punto del eje central y un momento respecto de ese punto dirigido según la resultante (y por tanto según el eje central).

3.4.2. Clasificación de un sistema de vectores deslizantes según el automomento.

Dependiendo de las características del sistema de vectores deslizantes se tienen algunas de las reducciones más habituales,

1. $\vec{R} = 0$: Si la resultante es nula, su momento respecto de cualquier punto será 0, por lo que a partir del primer teorema de vectores deslizantes (3–6) se concluye que el campo de momentos respecto de los distintos puntos del espacio $\vec{M}(\vec{r}, t)$ debe ser uniforme. Cuando la resultante es nula hay dos casos a destacar,
 - a) $\vec{M} = 0$: En este caso el sistema reducido es el sistema nulo de vectores.
 - b) $\vec{M} \neq 0$: En este caso la reducción más sencilla es un par de vectores que proporcione el momento uniforme \vec{M} .
2. $\vec{R} \neq 0$: Si la resultante no es nula, hay dos casos principales a considerar, dependiendo del valor del momento mínimo,
 - a) $\vec{M}\vec{u}_R = m_0 = 0$: Cuando el momento mínimo es nulo, la reducción más sencilla consiste en la resultante \vec{R} aplicada en un punto de reducción C sobre el eje central.

Cuando el punto de reducción P se encuentra fuera del eje central el sistema reducido más sencillo consiste en la resultante aplicada en ese punto y un momento $\vec{M}_P \perp \vec{R}$ e igual al momento respecto del punto de reducción de la resultante \vec{R} aplicada en el eje central.

Hay algunos tipos de sistemas de vectores típicos que producen un momento mínimo nulo (y por tanto un automomento nulo), debido a que la resultante y el momento resultante son perpendiculares,

- *Sistemas de vectores paralelos*: El automomento de un sistema de vectores paralelos es nulo, como se verá en la sección 3.5.
 - *Sistemas de vectores concurrentes*: En un sistema de vectores concurrentes el momento del sistema respecto de cualquier punto P del espacio es el momento de la resultante aplicada en el punto de concurrencia Q respecto del punto P, $\vec{M}_P = \vec{PQ} \times \vec{R}$. (Teorema de Varignon, véase la página 29). Como dicho momento debe ser necesariamente perpendicular a la resultante, el automomento debe ser 0.
 - *Sistemas de vectores coplanarios*: Si tomamos el momento de cada vector respecto de un punto en el plano común, cada contribución al momento resultante será perpendicular al plano, por lo que el momento resultante será perpendicular al plano. Como por otra parte la resultante estará contenida en el plano, al estarlo todos los vectores del sistema, el automomento debe ser también 0.
- b) $\vec{M}\vec{u}_R = m_0 \neq 0$: Éste es el sistema más general. La reducción más sencilla consiste en la resultante aplicada en un punto C del eje central y el momento resultante del sistema de vectores respecto del punto de reducción C contenido en el eje central. Al estar el punto C contenido en el eje central el momento resultante \vec{M}_C es el momento mínimo y debe estar dirigido según el eje central.

Cuando el punto de reducción no se encuentra sobre el eje central la reducción más sencilla consistiría en la resultante aplicada en el punto de reducción P y un momento igual al momento resultante del sistema de vectores respecto del punto de reducción P, $\vec{M}_P = \vec{M}_C + \vec{PC} \times \vec{R}$.

3.5. Sistema de vectores paralelos.

Consideremos ahora un caso particular de sistemas de vectores, el *sistema de vectores paralelos*. Si \vec{u} es un vector unitario en la dirección común, cada vector del sistema puede escribirse como

$$\vec{a}_i = a_i \vec{u}$$

y por tanto, la resultante queda

$$\vec{R} = \sum_i \vec{a}_i = \left[\sum_i a_i \right] \vec{u} = R \vec{u} \parallel \vec{u}$$

dirigida en la dirección de \vec{u} .

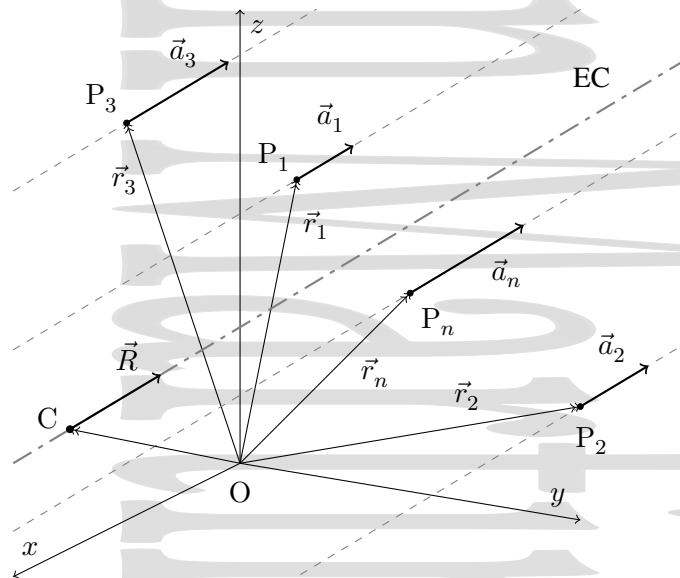


Figura 3-11: Centro de un sistema de vectores paralelos.

El momento resultante del sistema respecto de un punto de reducción cualquiera P será

$$\vec{M}_P = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{a}_i = \left[\sum_i (a_i \vec{r}_i) \right] \times \vec{u}, \quad (3-13)$$

donde \vec{r}_i son los vectores posición de los distintos vectores paralelos respecto del punto de reducción P. Como vemos, el momento resultante de un sistema de vectores paralelos debe ser perpendicular a \vec{u} ($\vec{M}_P \perp \vec{u}$) y por tanto debe cumplirse $\vec{M}_P \cdot \vec{R} = 0$, el automomento de un sistema de vectores paralelos, sean deslizantes o aplicados, es nulo. Esto puede corresponder a dos casos,

- $\vec{R} = 0$: En este caso, el sistema se reduce a un par de vectores paralelos.
- $\vec{R} \neq 0$: En este caso, consideremos un punto de reducción C perteneciente al eje central (reducción canónica). Al ser C un punto sobre el eje central el momento $\vec{M}_C = \vec{m}_0$ respecto del mismo no puede tener componente en la dirección perpendicular a la resultante (y por tanto al eje central). Por otra parte la ecuación (3-13) establece que el momento del sistema de vectores paralelos respecto de un punto de reducción cualquiera y, en particular, respecto de C debe ser perpendicular a la resultante. La única forma de que se cumplan ambas condiciones es que $\vec{M}_C = 0$. Así, un sistema de vectores paralelos de $\vec{R} \neq 0$ se reduce siempre a la resultante \vec{R} contenida en el eje central.

Consideremos ahora el momento del sistema de vectores paralelos respecto del origen de coordenadas O

$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{a}_i = \left[\sum_i (a_i \vec{r}_i) \right] \times \vec{u}.$$

y un punto genérico C perteneciente al eje central. Como el momento de un sistema de vectores paralelos respecto de un punto contenido en el eje central debe ser nulo, se cumplirá

$$\vec{M}_O = \vec{M}_C + \vec{OC} \times \vec{R} = \vec{OC} \times \vec{R} = \left[\sum_i (a_i \vec{r}_i) \right] \times \vec{u} = ([\vec{OC} R] \times \vec{u}).$$

Si pasamos todo al primer miembro, se tiene

$$\left[\sum_i (a_i \vec{r}_i) - [\vec{OC} R] \right] \times \vec{u} = 0,$$

expresión que debe cumplirse sea cual sea el sistema de vectores paralelos. Para ello, la expresión entre corchetes debe ser nula o estar dirigida según la dirección \vec{u} . Esto puede expresarse en la forma

$$\sum_i (a_i \vec{r}_i) - [\vec{OC} R] = k\vec{u} \quad (3-14)$$

en función de una constante de proporcionalidad k . Como C es un punto genérico sobre el eje central, ésta es la *ecuación vectorial del eje central* del sistema (lugar geométrico de los puntos que cumplen la ecuación anterior para los distintos valores de k).

3.6. Centro de vectores paralelos.

Si además de ser vectores paralelos son fijos, podemos definir su centro, contenido en el eje central. Para ello observemos de nuevo la ecuación (3-14). Para $k = 0$ la posición del punto C no depende de la orientación del vector \vec{u} . Esto nos define la posición del denominado *centro de vectores paralelos* G, dada por

$$\vec{OG} R = \sum_i (a_i \vec{r}_i) \quad \Rightarrow \quad \vec{OG} = \frac{\sum_i (a_i \vec{r}_i)}{R}. \quad (3-15)$$

Nótese que la invariancia de la posición del centro de vectores paralelos respecto de la dirección de \vec{u} sólo se cumple si los vectores son fijos, un deslizamiento para una orientación de \vec{u} no se traduce en otro deslizamiento para otra orientación de \vec{u} . Dada la forma en que hemos obtenido el centro de vectores paralelos, éste también es útil para vectores deslizantes, donde simplemente nos daría un punto sobre el eje central para un sistema de vectores paralelos con una cierta orientación de \vec{u} .

Si por ejemplo, $a_i \vec{u}$ representaran el peso elemental ($dm g \vec{u}$) de las partículas de un sistema material, G sería el centro de gravedad[†] del sistema (CDG). Si fueran las masas de cada partícula, el centro de vectores paralelos del sistema representaría el centro de masas (que para cuerpos pequeños coincide con el CDG).

Al ser el centro de vectores paralelos un punto del eje central debe cumplirse que el momento resultante del sistema de vectores paralelos aplicados respecto de un punto cualquiera P es igual al momento de la resultante \vec{R} , aplicada en el centro de vectores paralelos, respecto de P.

[†] Siempre que el sistema sea lo suficientemente pequeño para que \vec{g} pueda considerarse paralela en distintos puntos.

Augustin Martin Jourdain.

Apéndice A

Sistemas de coordenadas ortogonales

Para trabajar con las leyes de la Física en primer lugar necesitamos establecer un *sistema de referencia* respecto del cual vamos a describir los distintos fenómenos y escribir las distintas variables que intervienen, como la posición de cada punto. Este sistema de referencia se establecerá respecto de un conjunto de cuerpos que se consideran en reposo relativo entre sí. Para definir el sistema de referencia respecto de dicho conjunto de cuerpos en primer lugar escogeremos un punto como el *origen de coordenadas* O y en segundo lugar un conjunto de tres direcciones linealmente independientes que parten de ese punto y nos definen una orientación de referencia en el espacio. Por simplicidad estas tres direcciones normalmente se escogen perpendiculares entre sí, de forma que se tiene un *sistema de referencia ortogonal*.

Una vez establecido un sistema de referencia es necesario decidir la forma en que representamos cada punto y cada dirección del espacio vistos desde dicho sistema de referencia, es decir, necesitamos establecer un *sistema de coordenadas*. Alguno de los sistemas de coordenadas utilizará distancias, otros una combinación de distancias y ángulos. En general la elección de un sistema de coordenadas para abordar un problema concreto se hará de forma que éste sea lo más adecuado a las características y geometría de dicho problema, simplificando los cálculos y minimizando la posibilidad de error.

Así, para describir el valor de un campo escalar en cada punto del espacio necesitaremos describir la posición de cada uno de los puntos del espacio en los que está definido el campo y el valor del campo escalar en cada uno de dichos puntos. Asimismo, para describir un campo vectorial necesitaremos describir la posición de cada punto en el que está definido el campo vectorial y el módulo y dirección del campo vectorial en cada punto del espacio y para describir un campo tensorial genérico necesitaremos describir en cada punto la posición del punto y las componentes del tensor correspondiente en el punto.

Para describir la posición de cada punto del espacio en un determinado sistema de coordenadas utilizaremos tres familias de superficies representadas cada una de ellas por una de las condiciones $q_1 = cte$, $q_2 = cte$ y $q_3 = cte$. En el caso general se dice que estas tres superficies definen un *sistema de coordenadas curvilíneas*. En el caso particular en el que estas tres superficies son mutuamente perpendiculares en el punto a describir se dice que tenemos un *sistema de coordenadas ortogonales*.

Los tres sistemas de coordenadas ortogonales más habituales se analizarán a continuación y son el sistema de coordenadas cartesianas (o sistema de coordenadas rectangulares), el sistema de coordenadas cilíndricas y el sistema de coordenadas esféricas.

A.1. Sistema de coordenadas cartesianas.

En *coordenadas cartesianas* o rectangulares se describe la posición de un determinado punto P mediante tres coordenadas (x_p, y_p, z_p) obtenidas a partir de la intersección en el punto de tres planos perpendiculares a los ejes coordenados dados por las condiciones $q_1 = x = x_p$, $q_2 = y = y_p$ y $q_3 = z = z_p$. Los tres vectores unitarios \vec{u}_x , \vec{u}_y y \vec{u}_z perpendiculares a cada uno de los planos en el punto de intersección se denominan *vectores base* y forman una base.

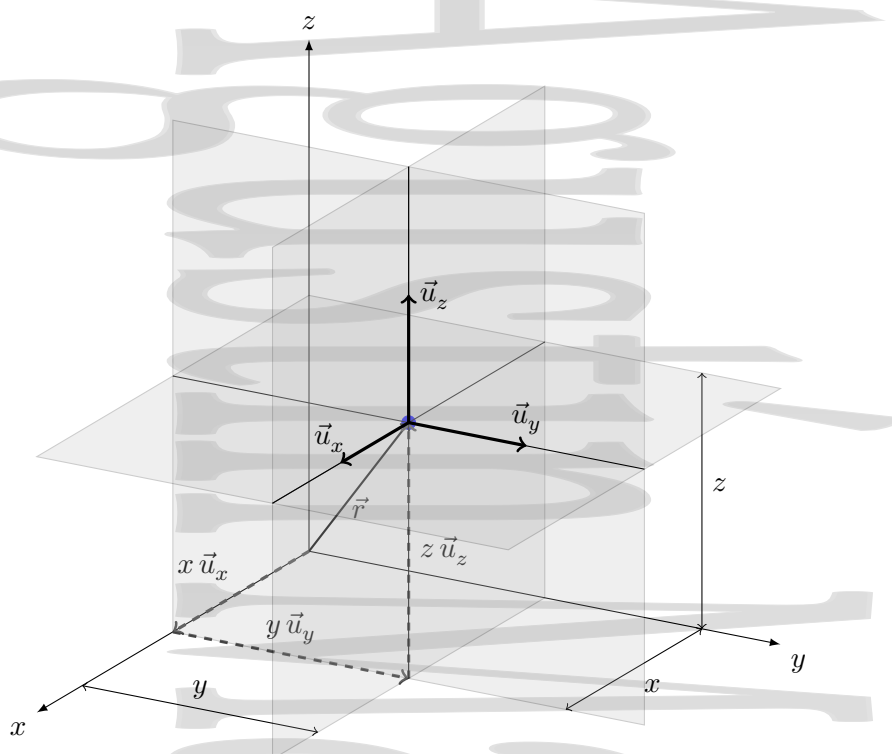


Figura A-1: Sistemas de coordenadas cartesianas

En un sistema orientado a derechas (también denominado de orientación positiva) los tres vectores unitarios base se escogen de forma que se satisfacen las condiciones

$$\vec{u}_x \times \vec{u}_y = \vec{u}_z \quad (\text{A-1a})$$

$$\vec{u}_y \times \vec{u}_z = \vec{u}_x \quad (\text{A-1b})$$

$$\vec{u}_z \times \vec{u}_x = \vec{u}_y. \quad (\text{A-1c})$$

Como los tres vectores unitarios base son mutuamente perpendiculares, deben cumplirse las condiciones

$$\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = \vec{u}_y \cdot \vec{u}_z = \vec{u}_z \cdot \vec{u}_x = 0 \quad (\text{A-2})$$

y

$$\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x = \vec{u}_y \cdot \vec{u}_y = \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z = 1. \quad (\text{A-3})$$

El vector posición \vec{r}_P que da la posición de un cierto punto P se describe en este sistema de coordenadas cartesianas en función de las coordenadas x_P , y_P y z_P en la forma

$$\vec{r}_P = \vec{OP} = x_P \vec{u}_x + y_P \vec{u}_y + z_P \vec{u}_z. \quad (\text{A-4})$$

Si consideramos dos puntos infinitamente próximos, el desplazamiento vectorial infinitesimal $d\vec{r}$ entre ambos vendrá dado por la diferencia entre sus vectores posición que, en coordenadas cartesianas, queda en la forma

$$d\vec{r} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z \quad (\text{A-5})$$

donde dx , dy y dz son las diferencias infinitesimales entre las componentes x , y y z de la posición de ambos puntos.

Utilizando estos vectores base también podemos describir el valor de cualquier vector expresado en este sistema de coordenadas rectangulares, en la forma

$$\vec{p} = p_x \vec{u}_x + p_y \vec{u}_y + p_z \vec{u}_z. \quad (\text{A-6})$$

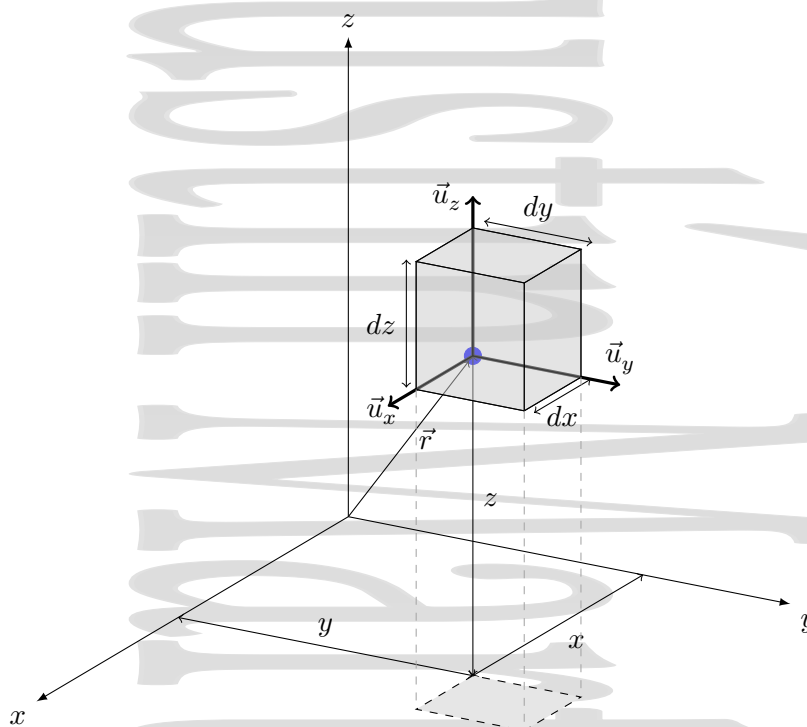


Figura A-2: Elemento de volumen en un sistema de coordenadas cartesianas.

El volumen infinitesimal natural en este sistema de coordenadas rectangulares corresponde a un volumen descrito por variaciones dx , dy y dz respecto del punto P de las coordenadas x , y y z según los tres ejes coordenados

$$dV = dx \, dy \, dz \quad (\text{A-7})$$

Las superficies infinitesimales naturales perpendiculares a cada dirección en un punto vienen dadas por

$$q_1 = x = cte \quad \Rightarrow \quad d\vec{S}_x = dy \, dz \, \vec{u}_x \quad (\text{A-8a})$$

$$q_2 = y = cte \quad \Rightarrow \quad d\vec{S}_y = dx \, dz \, \vec{u}_y \quad (\text{A-8b})$$

$$q_3 = z = cte \quad \Rightarrow \quad d\vec{S}_z = dx \, dy \, \vec{u}_z \quad (\text{A-8c})$$

El sistema de coordenadas cartesianas tiene una característica muy especial, los vectores unitarios \vec{u}_x , \vec{u}_y y \vec{u}_z tienen la misma dirección y sentido para cada punto del espacio y para cada vector que representamos en coordenadas cartesianas. Esta es una particularidad muy importante que por ejemplo permite obtener la diferencia entre los vectores posición de dos puntos cualesquiera como un vector cuyas componentes son las diferencias entre las componentes del vector posición de ambos vectores expresadas en dicho sistema de coordenadas cartesianas.

En el sistema de coordenadas cartesianas, el producto escalar entre dos vectores cualesquiera \vec{p} y \vec{q} , con componentes expresadas en este sistema de coordenadas, se escribe en la forma

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = (p_x \vec{u}_x + p_y \vec{u}_y + p_z \vec{u}_z) \cdot (q_x \vec{u}_x + q_y \vec{u}_y + q_z \vec{u}_z) = p_x q_x + p_y q_y + p_z q_z, \quad (\text{A-9})$$

mientras que el producto vectorial entre ambos vectores es

$$\vec{p} \times \vec{q} = (p_x \vec{u}_x + p_y \vec{u}_y + p_z \vec{u}_z) \times (q_x \vec{u}_x + q_y \vec{u}_y + q_z \vec{u}_z) = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix} \quad (\text{A-10})$$

expresado por simplicidad en forma de determinante. En ambos casos es posible expresar el resultado de forma compacta debido a que los vectores unitarios base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y$ y $\vec{u}_z)$ de los dos vectores \vec{p} y \vec{q} coinciden.

A.2. Sistema de coordenadas cilíndricas.

En *coordenadas cilíndricas* se describe la posición de un determinado punto P mediante tres coordenadas (ρ_P, ϕ_P, z_P) obtenidas a partir de la intersección en el punto de tres superficies que son perpendiculares en el punto. Estas tres superficies son ahora una superficie cilíndrica de radio $q_1 = \rho = \rho_P$ en torno al eje z , un semiplano que tiene al eje z como arista y forma un ángulo $q_2 = \phi = \phi_P$ con el plano xy y un plano paralelo al plano xy que corta el eje z en $q_3 = z = z_P$. Obsérvese que en este caso ρ y z tienen dimensiones

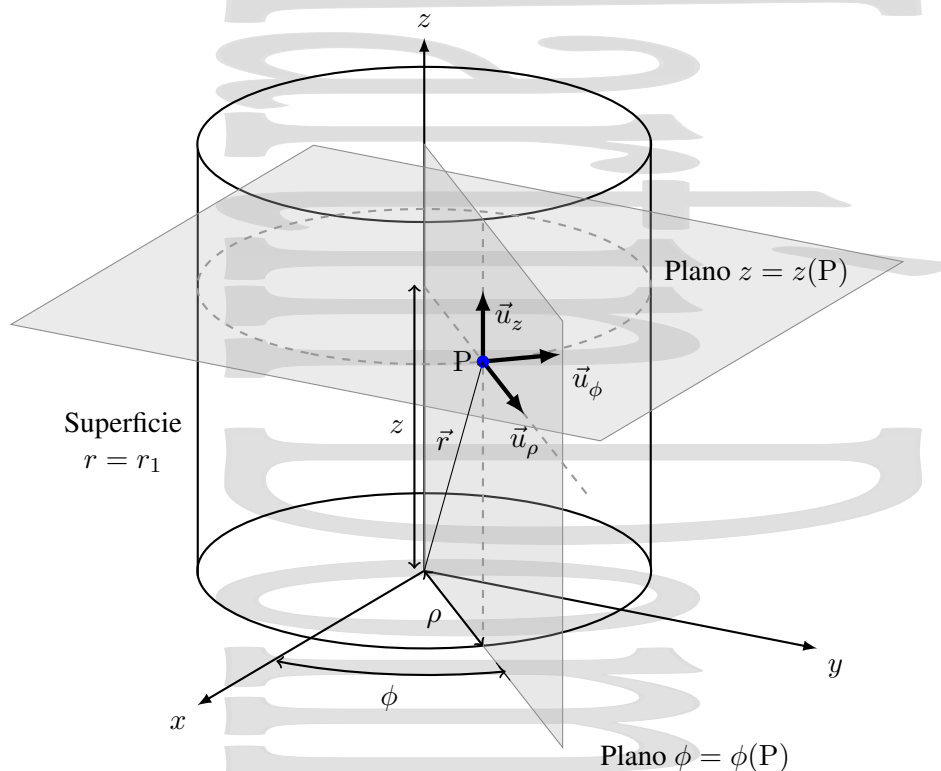


Figura A-3: Sistemas de coordenadas cilíndricas

de longitud, pero no así ϕ , aunque una variación ϕ del ángulo a ρ y z constantes resulta en un recorrido $\rho\phi$ (con ϕ en radianes).

Los tres vectores unitarios \vec{u}_ρ , \vec{u}_ϕ y \vec{u}_z son perpendiculares a cada una de las superficies en el punto de intersección y en un sistema orientado a derechas sus sentidos se escogen de forma que en el punto P se

satisfagan las condiciones

$$\vec{u}_\rho \times \vec{u}_\phi = \vec{u}_z \quad (\text{A-11a})$$

$$\vec{u}_\phi \times \vec{u}_z = \vec{u}_\rho \quad (\text{A-11b})$$

$$\vec{u}_z \times \vec{u}_\rho = \vec{u}_\phi. \quad (\text{A-11c})$$

Como los tres vectores unitarios base son mutuamente perpendiculares, en el punto P deben cumplirse las condiciones

$$\vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_\phi = \vec{u}_\phi \cdot \vec{u}_z = \vec{u}_z \cdot \vec{u}_\rho = 0 \quad (\text{A-12})$$

y

$$\vec{u}_\rho \cdot \vec{u}_\rho = \vec{u}_\phi \cdot \vec{u}_\phi = \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z = 1. \quad (\text{A-13})$$

Podemos relacionar los vectores unitarios \vec{u}_ρ y \vec{u}_ϕ del sistema de coordenadas cilíndricas con los vectores unitarios \vec{u}_x y \vec{u}_y del sistema de coordenadas cartesianas (\vec{u}_z coincide en ambos sistemas de coordenadas),

$$\vec{u}_\rho = \cos \phi \vec{u}_x + \text{sen } \phi \vec{u}_y \quad (\text{A-14a})$$

$$\vec{u}_\phi = -\text{sen } \phi \vec{u}_x + \cos \phi \vec{u}_y \quad (\text{A-14b})$$

$$\vec{u}_x = \cos \phi \vec{u}_\rho - \text{sen } \phi \vec{u}_\phi \quad (\text{A-14c})$$

$$\vec{u}_y = \text{sen } \phi \vec{u}_\rho + \cos \phi \vec{u}_\phi. \quad (\text{A-14d})$$

Esta transformación puede escribirse en forma de cuadro como

$$\begin{array}{c|ccc} & \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \hline \vec{u}_\rho & \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 \\ \vec{u}_\phi & -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ \vec{u}_z & 0 & 0 & 1 \end{array}, \quad (\text{A-15})$$

lo que nos da la *matriz de rotación* \mathcal{R} desde el sistema xyz al sistema en coordenadas cilíndricas

$$\mathcal{R}_{xyz \rightarrow \rho\phi z} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A-16})$$

La matriz de rotación es una matriz unitaria (su determinante es la unidad) y su inversa es igual a su transpuesta (la misma matriz con filas y columnas intercambiadas)

$$\mathcal{R}_{xyz \rightarrow \rho\phi z}^{-1} = \mathcal{R}_{xyz \rightarrow \rho\phi z}^{\text{transpuesta}} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\text{sen } \phi & 0 \\ \text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A-17})$$

Debe observarse que hay una diferencia importante respecto del caso de las coordenadas cartesianas, la orientación de los vectores unitarios \vec{u}_ρ y \vec{u}_ϕ depende del punto (la del vector unitario \vec{u}_z es la misma para todos los puntos).

Esto hace que algunas cosas sean distintas de las que vimos en coordenadas cartesianas. Por ejemplo, las componentes del vector $\Delta \vec{r} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P$ que refleja el cambio vectorial de posición entre dos puntos en coordenadas cilíndricas, en general no pueden expresarse como la diferencia de las coordenadas de los dos vectores posición $\vec{r}_P(\rho_P, \phi_P, z_P)$ y $\vec{r}_Q(\rho_Q, \phi_Q, z_Q)$ ya que los vectores unitarios tienen, en general, distinta orientación.

El vector posición de un punto expresado en el sistema de coordenadas cilíndricas de ese punto sería

$$\vec{r} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z \quad (\text{A-18})$$

donde la dependencia en ϕ está incluida en la orientación del vector unitario \vec{u}_ρ .

Las componentes x , y y z de la posición del punto en el sistema de coordenadas cartesianas están relacionadas con sus componentes ρ , ϕ y z en el sistema de coordenadas cilíndricas mediante las relaciones

$$x = \rho \cos \phi \quad (\text{A-19a})$$

$$y = \rho \sin \phi \quad (\text{A-19b})$$

$$z = z \quad (\text{A-19c})$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{A-19d})$$

$$\phi = \arctan(y/x), \quad (\text{A-19e})$$

que también podrían haberse expresado en forma matricial mediante la inversa de la matriz de rotación (A-17) y le expresión (A-18) para el vector posición en cilíndricas

$$(\vec{r})_{xyz} = \mathcal{R}_{xyz \rightarrow \rho\phi z}^{-1} \cdot (\vec{r})_{\rho\phi z} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad (\text{A-20})$$

Si consideramos dos puntos infinitamente próximos, los vectores unitarios correspondientes a cada posición pueden considerarse aproximadamente paralelos y por tanto la longitud infinitesimal $d\vec{r}$ recorrida en un desplazamiento entre ambos será

$$d\vec{r} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\phi \vec{u}_\phi + dz \vec{u}_z \quad (\text{A-21})$$

donde $d\rho$, $d\phi$ y dz son las diferencias infinitesimales entre las coordenadas ρ , ϕ y z que describen la posición de ambos puntos y los vectores unitarios son los correspondientes al punto P.

El volumen infinitesimal natural en este sistema de coordenadas cilíndricas corresponde a un volumen descrito por variaciones $d\rho$, $d\phi$ y dz de las coordenadas ρ , ϕ y z según los tres ejes coordenados cilíndricos

$$dV = dl_\rho dl_\phi dl_z = \rho d\rho d\phi dz. \quad (\text{A-22})$$

donde cada uno de sus lados tiene una longitud correspondiente a la variación infinitesimal de cada una de las coordenadas manteniéndose constantes las demás,

$$dl_\rho = d\rho \quad (\text{A-23a})$$

$$dl_\phi = \rho d\phi \quad (\text{A-23b})$$

$$dl_z = dz. \quad (\text{A-23c})$$

Las superficies infinitesimales naturales perpendiculares a cada dirección en un punto vienen dadas por

$$q_1 = \rho = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad d\vec{S}_\rho = dl_\phi dl_z = \rho d\phi dz \vec{u}_\rho \quad (\text{A-24a})$$

$$q_2 = \phi = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad d\vec{S}_\phi = dl_\rho dl_z = d\rho dz \vec{u}_\phi \quad (\text{A-24b})$$

$$q_3 = z = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad d\vec{S}_z = dl_\rho dl_\phi = \rho d\phi d\rho \vec{u}_z \quad (\text{A-24c})$$

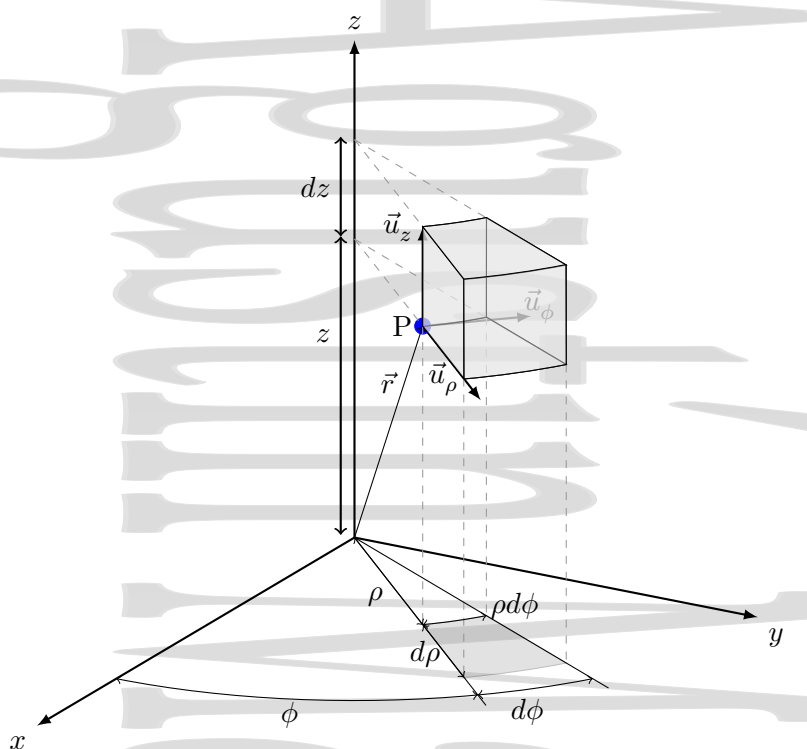


Figura A-4: Elemento de volumen en un sistema de coordenadas cilíndricas.

Utilizando estos vectores base también podemos describir el valor de cualquier vector expresado en este sistema de coordenadas cilíndricas, en la forma

$$\vec{p} = p_\rho \vec{u}_\rho + p_\phi \vec{u}_\phi + p_z \vec{u}_z. \quad (\text{A-25})$$

para un punto en el que los vectores unitarios son éstos. La relación entre las componentes de este vector en el sistema de coordenadas cilíndricas y las componentes correspondientes en el sistema de coordenadas cartesianas se puede obtener utilizando la matriz de rotación (A-16) para la transformación desde el sistema de coordenadas cartesiano al cilíndrico

$$(\vec{p})_{\rho\phi z} = \mathcal{R}_{xyz \rightarrow \rho\phi z} \cdot (\vec{r})_{xyz} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} p_\rho \\ p_\phi \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}. \quad (\text{A-26})$$

A.3. Sistema de coordenadas esféricas.

En *coordenadas esféricas* la posición de un determinado punto P se describe mediante tres coordenadas (r_p, θ_p, ϕ_p) obtenidas a partir de la intersección en el punto de tres superficies perpendiculares en el mismo. Estas tres superficies son una superficie esférica de radio $r = q_1 = r_p$ centrada en el origen de coordenadas, una superficie cónica de ángulo $\theta = q_2 = \theta_p$ con vértice en el origen de coordenadas y un semiplano que tiene al eje z como arista y forma un ángulo $\phi = q_3 = \phi_p$ con el plano xy . Obsérvese que en este caso únicamente r tiene dimensiones de longitud, pero no la tienen ni θ ni ϕ .

Los tres vectores unitarios $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ y \vec{u}_ϕ son perpendiculares a cada uno de las superficies en el punto de intersección y en un sistema orientado a derechas sus sentidos se escogen de forma que en el punto P se

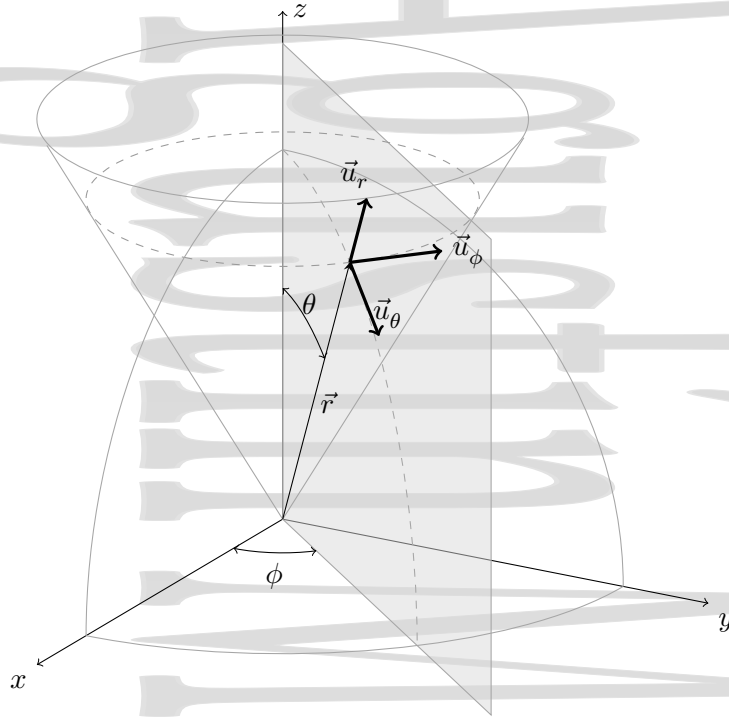


Figura A-5: Sistemas de coordenadas esféricas

satisfagan las condiciones

$$\vec{u}_r \times \vec{u}_\theta = \vec{u}_\phi \quad (\text{A-27a})$$

$$\vec{u}_\theta \times \vec{u}_\phi = \vec{u}_r \quad (\text{A-27b})$$

$$\vec{u}_\phi \times \vec{u}_r = \vec{u}_\theta. \quad (\text{A-27c})$$

Como los tres vectores unitarios base son mutuamente perpendiculares, en el punto deben cumplirse las condiciones

$$\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\theta = \vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_\phi = \vec{u}_\phi \cdot \vec{u}_r = 0 \quad (\text{A-28})$$

y

$$\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r = \vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_\theta = \vec{u}_\phi \cdot \vec{u}_\phi = 1. \quad (\text{A-29})$$

La relación entre los vectores unitarios en el sistema de coordenadas esféricas y en un sistema de coordenadas cartesianas viene dada por las expresiones

$$\vec{u}_r = \sin \theta \cos \phi \vec{u}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{u}_y + \cos \theta \vec{u}_z \quad (\text{A-30a})$$

$$\vec{u}_\theta = \cos \theta \cos \phi \vec{u}_x + \cos \theta \sin \phi \vec{u}_y - \sin \theta \vec{u}_z \quad (\text{A-30b})$$

$$\vec{u}_\phi = -\sin \phi \vec{u}_x + \cos \phi \vec{u}_y \quad (\text{A-30c})$$

$$\vec{u}_x = \sin \theta \cos \phi \vec{u}_r + \cos \theta \cos \phi \vec{u}_\theta - \sin \phi \vec{u}_\phi \quad (\text{A-30d})$$

$$\vec{u}_y = \sin \theta \sin \phi \vec{u}_r + \cos \theta \sin \phi \vec{u}_\theta + \cos \phi \vec{u}_\phi \quad (\text{A-30e})$$

$$\vec{u}_z = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta. \quad (\text{A-30f})$$

que se pueden expresar en forma de cuadro como

$$\begin{array}{c|ccc} & \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \hline \vec{u}_r & \text{sen } \theta \cos \phi & \text{sen } \theta \text{sen } \phi & \cos \theta \\ \vec{u}_\theta & \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \text{sen } \phi & -\text{sen } \phi \\ \vec{u}_\phi & -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \end{array} \quad (\text{A-31})$$

y que nos da la *matriz de rotación* \mathcal{R} desde el sistema xyz al sistema en coordenadas esféricas

$$\mathcal{R}_{xyz \rightarrow r\theta\phi} = \begin{pmatrix} \text{sen } \theta \cos \phi & \text{sen } \theta \text{sen } \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \text{sen } \phi & -\text{sen } \phi \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A-32})$$

Esta matriz de rotación es una matriz unitaria (su determinante es la unidad) y su inversa es igual a su transpuesta

$$\mathcal{R}_{xyz \rightarrow r\theta\phi}^{-1} = \mathcal{R}_{xyz \rightarrow r\theta\phi}^{\text{transpuesta}} = \begin{pmatrix} \text{sen } \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\text{sen } \phi \\ \text{sen } \theta \text{sen } \phi & \cos \theta \text{sen } \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\text{sen } \phi & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A-33})$$

En el sistema de coordenadas esféricas también aparece la misma importante diferencia respecto del caso de las coordenadas cartesianas, pero acentuada. La orientación de los tres vectores unitarios \vec{u}_r , \vec{u}_θ y \vec{u}_ϕ depende del punto. Por este motivo, al igual que en coordenadas cilíndricas, en una expresión como $\Delta \vec{r} = \vec{r}_Q(r_P, \theta_P, \phi_P) - \vec{r}_P(r_Q, \theta_Q, \phi_Q)$ las coordenadas esféricas del vector resultante no son la diferencia de las coordenadas de cada uno de ellos ya que, en general, los vectores unitarios tienen distinta orientación.

El vector posición de un punto en coordenadas esféricas asociadas a dicho punto se escribiría como

$$\vec{r} = \rho \vec{u}_\rho \quad (\text{A-34})$$

donde la dependencia en θ y ϕ está incluida en la orientación del vector unitario $\vec{u}_\rho = \vec{u}_\rho(\theta, \phi)$.

Las coordenadas x , y y z del punto en el sistema de coordenadas cartesianas están relacionadas con las coordenadas r , θ y ϕ del punto en el sistema de coordenadas esféricas mediante las expresiones

$$x = r \text{sen } \theta \cos \phi \quad (\text{A-35a})$$

$$y = r \text{sen } \theta \text{sen } \phi \quad (\text{A-35b})$$

$$z = r \cos \theta \quad (\text{A-35c})$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{A-35d})$$

$$\theta = \arccos(y/r) = \arccos\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \quad (\text{A-35e})$$

$$\phi = \arctan(y/x) \quad (\text{A-35f})$$

que pueden escribirse en función de la forma del vector posición del punto (A-34) y de la matriz de rotación (A-32) correspondiente al paso del sistema de coordenadas cartesianas al sistema de coordenadas esféricas y de su inversa (A-33)

$$(\vec{r})_{xyz} = \mathcal{R}_{xyz \rightarrow r\theta\phi}^{-1} \cdot (\vec{r})_{r\theta\phi} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sen } \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\text{sen } \phi \\ \text{sen } \theta \text{sen } \phi & \cos \theta \text{sen } \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\text{sen } \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A-36})$$

También pueden relacionarse las coordenadas de la posición de un punto en coordenadas cilíndricas y esféricas en la forma (ϕ es la misma en ambos sistemas)

$$\rho = r \operatorname{sen} \theta \quad (\text{A-37a})$$

$$z = r \cos \theta \quad (\text{A-37b})$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \quad (\text{A-37c})$$

$$\theta = \arctan(\rho/z) \quad (\text{A-37d})$$

Si consideramos dos puntos infinitamente próximos, los vectores unitarios correspondientes a cada posición pueden considerarse aproximadamente paralelos y por tanto el desplazamiento vectorial infinitesimal $d\vec{l}$ recorrido entre ambos será

$$d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \operatorname{sen} \theta d\phi \vec{u}_\phi \quad (\text{A-38})$$

donde dr , $d\theta$ y $d\phi$ son las diferencias infinitesimales entre las componentes r , θ y ϕ de la posición de ambos puntos y los vectores unitarios los de P.

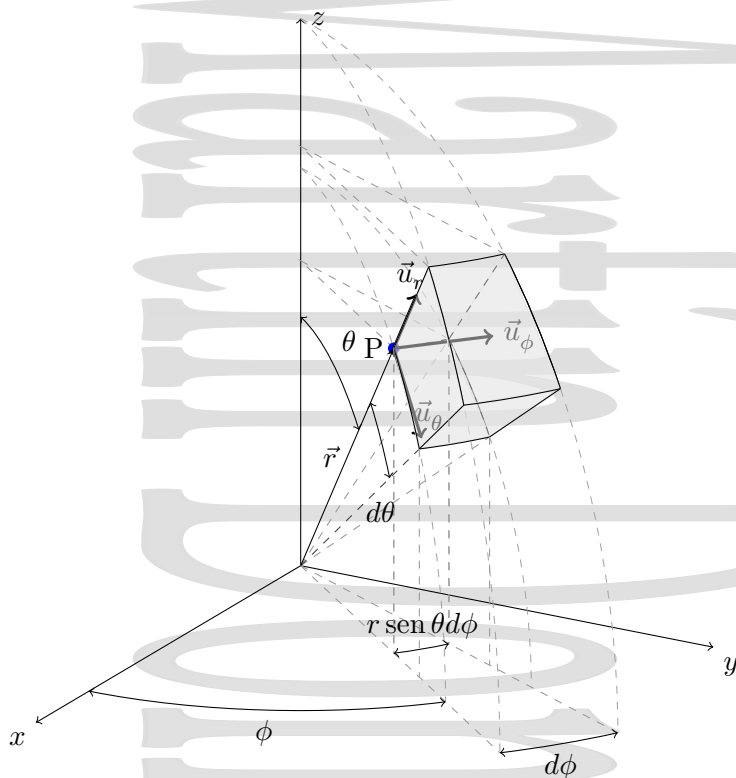


Figura A-6: Elemento de volumen en un sistema de coordenadas esféricas.

El volumen infinitesimal natural en este sistema de coordenadas rectangulares corresponde a un volumen descrito por variaciones dr , $d\theta$ y $d\phi$ de las coordenadas r , θ y ϕ según los tres ejes coordenados cilíndricos

$$dV = dl_r dl_\theta dl_\phi = dr r d\theta r \operatorname{sen} \theta d\phi = r^2 \operatorname{sen} \theta dr d\theta d\phi \quad (\text{A-39})$$

donde cada uno de sus lados tiene una longitud correspondiente a la variación infinitesimal de cada una de

las coordenadas manteniéndose constantes las demás,

$$dl_r = dr \quad (\text{A-40a})$$

$$dl_\theta = r d\theta \quad (\text{A-40b})$$

$$dl_\phi = r \text{ sen } \theta d\phi \quad (\text{A-40c})$$

Las superficies infinitesimales naturales perpendiculares a cada dirección en un punto vienen dadas por

$$q_1 = r = \text{cte} \Rightarrow dS_r = dl_\theta dl_\phi = r^2 \text{ sen } \theta d\theta d\phi \quad (\text{A-41a})$$

$$q_2 = \theta = \text{cte} \Rightarrow dS_\theta = dl_r dl_\phi = r \text{ sen } \theta dr d\phi \quad (\text{A-41b})$$

$$q_3 = \phi = \text{cte} \Rightarrow dS_\phi = dl_r dl_\theta = r d\theta dr \quad (\text{A-41c})$$

Utilizando estos vectores base también podemos describir el valor de cualquier vector expresado en este sistema de coordenadas esféricas, en la forma

$$\vec{p} = p_r \vec{u}_r + p_\theta \vec{u}_\theta + p_\phi \vec{u}_\phi. \quad (\text{A-42})$$

La relación entre las componentes de este vector en el sistema de coordenadas esféricas y las componentes correspondientes en el sistema de coordenadas cartesianas se puede obtener utilizando la matriz de rotación (A-32) para la transformación desde el sistema de coordenadas cartesiano al cilíndrico

$$(\vec{p})_{r\theta\phi} = \mathcal{R}_{xyz \rightarrow r\theta\phi} \cdot (\vec{r})_{xyz} \Rightarrow \begin{pmatrix} p_r \\ p_\theta \\ p_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sen } \theta \cos \phi & \text{sen } \theta \text{ sen } \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \text{ sen } \phi & -\text{sen } \phi \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}. \quad (\text{A-43})$$

A.4. Coordenadas polares planas.

Las *coordenadas polares planas* son un caso particular de coordenadas esféricas o cilíndricas en el que $z = 0$ (o $\theta = 90^\circ = \pi/2$ en esféricas) En estas condiciones (véase la figura A-7) para describir la posición

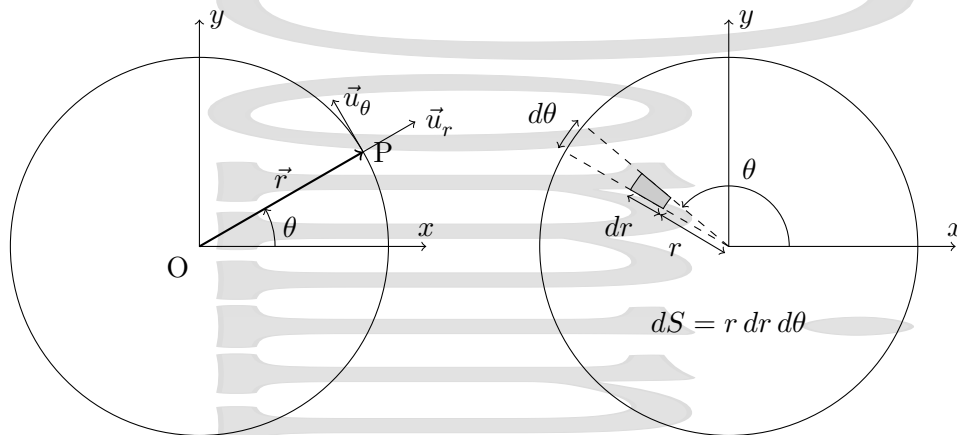


Figura A-7: Coordenadas polares planas.

de un punto P en el plano basta conocer su distancia r al origen de coordenadas y el ángulo que forma el

vector $\vec{r} = \vec{OP}$ con el origen de coordenadas (*ángulo polar*). En coordenadas polares planas se denomina tradicionalmente θ a este ángulo (en vez de ϕ como correspondería particularizando desde coordenadas esféricas).

Al igual que en coordenadas esféricas o cilíndricas los vectores unitarios \vec{u}_r y \vec{u}_θ en coordenadas polares planas dependen del ángulo polar θ y por tanto en general cambian de orientación para distintos puntos del plano,

$$\begin{aligned}\vec{u}_r &= \vec{u}_r(\theta) \\ \vec{u}_\theta &= \vec{u}_\theta(\theta).\end{aligned}\tag{A-44}$$

En función de estos vectores unitarios el vector posición de un punto se expresaría como

$$\vec{r} = r\vec{u}_r = r\vec{u}_r(\theta)\tag{A-45}$$

donde la dependencia en θ aparece a través de la orientación de \vec{u}_r .

Como se aprecia en la figura A-7 la superficie elemental en coordenadas polares planas viene dada por

$$dS = dl_r dl_\theta = r dr d\theta\tag{A-46}$$

con $dl_r = dr$ y $dl_\theta = r d\theta$ las longitudes infinitesimales recorridas cuando varía una coordenada mientras la otra se mantiene constante.

Referencias

- [1] Simmons, S., *Análisis vectorial*. Alhambra, Madrid, 1ª edición, 1968.
- [2] Castañs Camargo, M., *Cálculo vectorial. Vectores deslizantes. Cinemática. Campos*, vol. I de *Apuntes prácticos de Mecánica*. Cátedra de Física, E.T.S. Arquitectura de Madrid, Madrid, 1991.
- [3] Más Robledo, I., *Apuntes sobre la teoría de vectores deslizantes*, vol. 16 de *Cuadernos de apoyo a la docencia*. Instituto Juan de Herrera, ETSAM, Madrid, 1998.
- [4] Hervás Burgos, P., M. Rodríguez Danta y J. Martínez García, *Cuadernos de Mecánica: cinemática y tensores*. Manuales universitarios, Editorial Universidad de Sevilla, Sevilla, 1989.
- [5] Bronshtein, J. y K. Semendiaev, *Manual de Matemáticas para ingenieros y estudiantes*. Mir, Moscú, 1988.
- [6] Más Robledo, I., *Apuntes sobre la teoría de campos*, vol. 14 de *Cuadernos de apoyo a la docencia*. Instituto Juan de Herrera, ETSAM, Madrid, 1997.
- [7] Spiegel, M. R., *Análisis Vectorial*. McGraw Hill, México, 1970.
- [8] Cheng, D. K., *Fundamentos de Electromagnetismo para Ingeniería*. Addison Wesley Longman, México, 1998.
- [9] Martín Domingo, A., *Apuntes de Elasticidad. Parte II*, vol. 368 de *Cuadernos de apoyo a la docencia*, cap. Apéndice A (Tensores). Instituto Juan de Herrera, ETSAM, Madrid, 2012, ISBN: 978-84-9728-415-8.

Augustin Martin Domingo

Índice alfabético

A

- ángulo polar, 50
- asociativa
 - propiedad, 2
 - respecto de los escalares, 2
- automomento, 30

B

- brazo del par, 33

C

- campo
 - conservativo, 22
 - de fuerzas, 23
 - de momentos, 32
 - escalar, 9
 - estacionario, 10
 - irrotacional, 22
 - no estacionario, 10
 - no uniforme, 10
 - rotacional, 23
 - solenoidal, 23
 - uniforme, 10
 - vectorial, 9
- centro
 - de reducción, 34
 - de vectores paralelos, 37
- circulación
 - de un campo vectorial, 15
- condición
 - analítica
 - de paralelismo, 5
 - de perpendicularidad, 4
- conmutativa
 - propiedad, 4
- conmutativa, propiedad, 2
- conservativo, campo, 22
 - de fuerzas, 23
- coordenadas
 - cartesianas
 - divergencia, 12
 - gradiente, 11
 - rotacional, 18
 - cilíndricas
 - divergencia, 13
 - gradiente, 11
 - rotacional, 19
 - esféricas
 - divergencia, 13
 - gradiente, 11
 - rotacional, 19
 - polares planas, 49
- cosenos directores, 3

D

- distributiva
 - propiedad
 - respecto de la suma de escalares, 2
 - respecto de la suma de vectores, 2, 4
- divergencia
 - de un campo vectorial, 12
 - en coordenadas cartesianas, 12
 - en coordenadas cilíndricas, 13
 - en coordenadas esféricas, 13

E

- ecuación
 - del eje central, 32
 - vectorial del eje central, 37
- eje central de un sistema de vectores deslizantes, 31
 - ecuación del, 32
 - paralelos, ecuación vectorial, 37
- equipolencia, 1
- escalar, 1

F

- flujo de un campo vectorial, 12
- fuelle de vórtice, 15

G

- gradiente
 - de un campo escalar, 10
 - en coordenadas cartesianas, 11
 - en coordenadas cilíndricas, 11
 - en coordenadas esféricas, 11
- Green, teorema de, 22

H

- Helmholtz, teorema de, 25

I

- intensidad
 - del campo, 12
 - gravitatorio, 24
- irrotacional, campo, 22

L

- laplaciana
 - de un campo escalar, 20
 - de un campo vectorial, 20
- líneas de campo, 9

M

- magnitud, 1
 - escalar, 1
 - física, 1
 - escalar, 1
 - vectorial, 1
 - matemática, 1

- vectorial, 1
- matriz
 - de rotación, 43, 47
 - inversa de la, 43, 47
- momento
 - axial, 28
 - central, 27
 - de un sistema de vectores deslizantes
 - respecto de un eje, 28
 - respecto de un punto, 28
 - respecto de un punto, 27
- N**
- Newton, ley de la gravitación, 24
- O**
- origen
 - de coordenadas, 39
 - del campo, 23
- P**
- par de vectores, 33
- potencial
 - escalar, 23
 - gravitatorio, 25
 - vector, 23
- producto
 - escalar, 4
 - mixto, 5
 - vectorial, 4
 - doble, 6
- propiedad
 - asociativa, 2
 - respecto de los escalares, 2
 - conmutativa, 2, 4
 - distributiva
 - respecto de la suma de escalares, 2
 - respecto de la suma de vectores, 2, 4
- R**
- recta
 - conjugada, 34
 - de acción, 1
 - de aplicación, 1
 - de momento nulo, 29
 - soporte, 1
- reducción
 - canónica, 34
 - de un sistema de vectores deslizantes, 34
- resultante, 30
- rotacional
 - campo, 23
- coordenadas
 - cartesianas, 18
 - cilíndricas, 19
 - esféricas, 19
 - de un campo vectorial, 15
- S**
- sistema
 - de coordenadas, 39
 - cartesianas, 39
 - cilíndricas, 42
 - curvilíneas, 39
 - esféricas, 45
 - ortogonales, 39
 - rectangulares, 39
 - de referencia, 39
 - ortogonal, 39
 - de vectores
 - concurrentes, 29, 35
 - coplanarios, 35
 - equivalentes, 34
 - paralelos, 36
 - solenoidal, campo, 23
 - superficie equiescalar, 9
- T**
- teorema
 - de Gauss-Ostrogradski, 14
 - de Green, 22
 - de Helmholtz, 25
 - de la divergencia, 14
 - de Stokes, 20
- V**
- vector, 1
 - aplicado, 2
 - deslizante, 1
 - fijo, 2
 - libre, 1
 - ligado, 2
 - unitario, 3
- vectores
 - base, 39
 - deslizantes
 - primer invariante, 30
 - segundo invariante, 30
 - tercer invariante, 30
 - equipolentes, 1
- versor, 3
- vórtice
 - fuelle de, 15