
En favor de la enseñanza de la *programación lineal* en la formación del ingeniero estructural

Jaime Cervera Bravo

Junio de 2010

Resumen En este trabajo se defiende la oportunidad de incorporar la enseñanza de los conceptos y técnicas de programación lineal a la formación estándar del ingeniero estructural, dada la capacidad que dicha rama de la matemática aporta para formalizar de un modo completo los conceptos aplicables a la estática y a la cinemática de la rotura de las estructuras, y a las relaciones teóricas que dichos conceptos mantienen entre sí, de una manera que cabe asemejar a la capacidad que las herramientas del álgebra lineal y las técnicas de solución de sistemas de ecuaciones aportan para entender el comportamiento elástico lineal de las estructuras. A dicha capacidad de formalización debemos añadir la gran difusión de que gozan algunos de los algoritmos de solución aplicables a los problemas de programación lineal, y en particular el algoritmo simplex, que permite su empleo sencillo con herramientas que están a disposición de cualquier estudiante. De este modo, la formación básica para entender las últimas fases del comportamiento estructural puede alcanzar un nivel semejante a la que actualmente se imparte para facilitar la comprensión de las fases iniciales, en el rango elástico lineal.

Palabras Clave: Estática, rotura, superficie límite, simplex, programación lineal.

For the teaching of linear programming in the structural engineer's training

Summary This paper advocates the opportunity to incorporate the teaching of concepts and techniques of linear programming to the standard training of the structural engineer, given the ability that this branch of mathematics provides to formalize in a complete way the concepts applicable to the static and the kinematic of the rupture of structures, and the theoretical relations that these concepts keep within, in a way that resembles the ability that provide the linear algebra tools and the techniques for solving systems of equations to the understanding of the linear elastic behavior of structures. To this formalization capacity must be added the wide dissemination of some algorithms applied to solving linear programming problems, and in particular the simplex algorithm, which allows their use with simple tools that are available to any student. Thus, the basic training that is needed to understand the later stages of the structural behavior can reach a similar level to that achieved in the understanding of the early linear elastic stages.

Keywords: Statics, failure, yield surface, simplex, linear programming.

1. Introducción

La formación básica del ingeniero estructural se apoya de forma casi universal en el conocimiento del comportamiento elástico–lineal de las estructuras, dado que éste aporta un conjunto imbricado y completo de conceptos y relaciones que se repiten de modo consistente en cualesquiera de los problemas de aplicación. El triple conjunto de las relaciones —ecuaciones— de *equilibrio*,

compatibilidad, y de *constitución material*, los conceptos asociados al trabajo y la capacidad de aportar con éste las llamadas formulaciones *débiles*, etc. hacen posible el establecimiento de una red conceptual poderosa, que facilita su asimilación.

Una representación de dicho conjunto de conceptos y relaciones puede ser la que se esquematiza a continuación para el caso de los problemas de estática.

- Interno–externo Cualquier modelo hace empleo de una doble perspectiva en la reflexión, la que corresponde al estudio del *comportamiento interno* o local, de regiones limitadas de la estructura, sometida a esfuerzos \mathbf{f} en sus contactos con el resto de ésta —y a cargas locales en equilibrio con la ley de variación de dichos esfuerzos aunque usualmente se simplifica el problema considerando nulas tales cargas, que se atribuyen al contorno de dichas regiones— y a deformaciones \mathbf{u} asociadas a dichos esfuerzos, y la que corresponde al *comportamiento externo* o referido al conjunto de la estructura, representado por el de un conjunto acotado de puntos en los que se prescriben las cargas \mathbf{F}_l (puntos libres) o los desplazamientos \mathbf{U}_s (puntos de sustentación), y cuyos movimientos — \mathbf{U}_l , en el primer caso— y reacciones — \mathbf{F}_s , en el segundo— representan los de la estructura en su conjunto.
- Equilibrio: Se prescribe la condición de equilibrio de toda la estructura y la de cualquier región aislada de ésta, equilibrio que se expresa en general por el conjunto de ecuaciones $\mathbf{F} = \mathbf{H}\mathbf{f}$ entre las fuerzas vistas desde la perspectiva externa o global —las cargas y reacciones— y vistas desde la perspectiva interna —los esfuerzos interno o fuerzas de extremo de los elementos que componen la estructura—.
- Compatibilidad: Se prescribe igualmente la condición de compatibilidad o de congruencia entre las deformaciones y los movimientos generales de la estructura, que se expresa en el caso de deformaciones pequeñas por el conjunto de ecuaciones $\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{U}$. Dado el carácter dual de las formulaciones resulta ser $\mathbf{H} = \mathbf{B}^T$.
- Constitución o rigidez material: Las propiedades de los materiales utilizados implican relaciones que deben cumplirse entre los esfuerzos internos y las deformaciones internas, relaciones que se expresan en la forma $\mathbf{f} = \mathbf{k}\mathbf{u}$.
- Principio del trabajo virtual: Establece que el trabajo interno realizado por un sistema esfuerzos internos \mathbf{f} en una deformación dada \mathbf{u} es igual al trabajo externo realizado por las cargas \mathbf{F} en el movimiento \mathbf{U} siempre que el sistema estático \mathbf{f}, \mathbf{F} esté equilibrado y el sistema cinámico \mathbf{u}, \mathbf{U} sea compatible, aunque ambos sistemas correspondan a

estados diferentes de la misma estructura, e incluso a estados que violen las condiciones complementarias —por ejemplo un estado equilibrado que viole la compatibilidad—

- Solución: Las anteriores ecuaciones permiten deducir el cuadro de relaciones entre cargas y desplazamientos generales de la estructura, en la forma $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{U}$. Dicho cuadro de relaciones resulta de obtener $\mathbf{K} = \mathbf{H}\mathbf{k}\mathbf{B}$, o lo que es lo mismo, $\mathbf{K} = \mathbf{B}^T\mathbf{k}\mathbf{B}$, pudiendo resolverse los movimientos \mathbf{U} a partir de las cargas \mathbf{F} para cualquier condición de carga, si la matriz \mathbf{K} puede invertirse.
- Cambio de representación: El anterior conjunto de ecuaciones $\mathbf{F} = \mathbf{B}^T\mathbf{f}$, $\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{U}$ y $\mathbf{K} = \mathbf{B}^T\mathbf{k}\mathbf{B}$ puede interpretarse sencillamente como un sistema de ecuaciones de *cambio de ejes coordenados* o un cambio de representación, que transforma la información sobre el comportamiento de la estructura entre dos sistemas alternativos, el *interno* y el *externo*.
- Condiciones de viabilidad de la estructura: Finalmente se establecen las condiciones de comprobación restringiendo los valores de esfuerzo o de movimiento a valores menores que las resistencias o los movimientos admisibles, con expresiones de la forma

$$\psi \mathbf{f} \leq d\mathbf{r}_b \quad (1)$$

$$\psi \mathbf{f} - d\mathbf{r}_b \leq \mathbf{0}$$

$$\Phi \mathbf{U} \leq \mathcal{P}\mathcal{Y} \quad (2)$$

En dichas expresiones, las matrices ψ y Φ expresan respectivamente la forma de combinar esfuerzos o desplazamientos para obtener los valores de comparación que deben contrastarse con los límites establecidos en \mathbf{r}_b y \mathcal{Y} , en tanto que las matrices d y \mathcal{P} expresan cuáles de dichos límites deben aplicarse a cada uno de estos valores de comparación. Por ejemplo $d\mathbf{r}_b$ podría fijar la comparación de todas las secciones de las vigas de un pórtico contra una sola resistencia básica, si el diseño se hace con sección constante.

Dicho conjunto de relaciones puede esquematizarse en el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{u} & \longleftarrow & \text{COMPATIBILIDAD}(\mathbf{B}) & \longleftarrow & \mathbf{U} \\
 & \searrow & \updownarrow & \swarrow & \\
 \text{MATERIAL} \downarrow \mathbf{k} & & \text{Trabajo interno} = & \text{Trabajo externo} \downarrow \mathbf{K} & \\
 & \nearrow & \updownarrow & \nwarrow & \\
 \mathbf{r} \ \rangle d, \psi \ \mathbf{f} & \longrightarrow & \text{EQUILIBRIO}(\mathbf{H} = \mathbf{B}^T) & \longrightarrow & \mathbf{F} \\
 \mathbf{U} \ \langle \Phi, \mathcal{P} \ \mathcal{Y} & & & &
 \end{array} \quad (3)$$

En dicho esquema se simboliza cómo puede usarse la compatibilidad y la igualdad entre trabajo interno y

externo para probar el equilibrio y viceversa, el equilibrio y dicha igualdad para probar la compatibilidad, de la misma manera que equilibrio y compatibilidad aseguran dicha igualdad entre ambas formas de medir el trabajo. Dicho esquema se particulariza de forma diferente en cada problema mediante la construcción concreta de las matrices \mathbf{B} y \mathbf{k} que resultan extremadamente sencillas una vez adoptado el modelo de la estructura. En ésta, los componentes elementales —barras o elementos— definen \mathbf{k} , mientras que los modos de deformación admitidos, —que ligan los movimientos a las deformaciones— definen \mathbf{B} , deduciéndose de éstas dos el resto de relaciones precisas para deducir los desplazamientos y esfuerzos correspondientes al estado de cargas considerado.

En el núcleo de la solución al problema está la capacidad de resolver los sistemas de ecuaciones lineales implícitos en la inversión de \mathbf{K} . De modo que la capacidad de resolver sistemas de ecuaciones lineales está en la base de esta formulación, aun cuando la propia técnica usada para resolver dichas ecuaciones no tiene interés particular ninguno: lo habitual es que se trate de una caja negra contenida en algún tipo de herramienta electrónica, pero su mera posibilidad permite una formulación completa y cerrada del problema estructural

En el campo del análisis en rotura o de la carga última, tal y como mostraré en este artículo, puede llegarse a una formulación igualmente rica y completa, que sin embargo no resulta formar parte de los contenidos habituales en la formación de los especialistas en el campo de las estructuras, lo que provoca que tales métodos se consideren como si perteneciesen a un rango teórico de menor categoría. No me refiero aquí sólo a la diferencia en los campos de aplicación de ambos enfoques, aunque el importantísimo desarrollo de los métodos basados en extensiones del enfoque elástico parecen haber eclipsado las posibilidades de aplicación del enfoque en rotura. Se trata no sólo de la diferencia potencial en extensión en los campos de aplicación de ambas aproximaciones que, a través de la necesidad de asegurar estabilidad y ductilidad suficiente puede invalidar el enfoque en rotura en un amplio espectro de situaciones. Me refiero más bien al estatus meramente teórico para el que el enfoque en rotura sería de *menor rango*, menos general, más restringido en clases de problemas, en tanto que se aplica de forma muy especializada, y con estructura formal menos completa, frente a la generalidad y *universalidad* con que puede aplicarse el enfoque elástico y frente a la complejidad en su formalismo.

Aportaré, por ello, una descripción completa de los elementos necesarios para formular rigurosamente los problemas de la estática de la rotura. En dicha formulación la existencia de una herramienta matemática

para resolver los problemas de *programación lineal* —o de optimización lineal— el algoritmo *simplex*, se revela de importancia análoga a la capacidad de resolver sistemas de ecuaciones en la formulación elástica, y por ello quedará suficientemente fundada la intención que da título al artículo.

Cabe añadir en este punto que la existencia de un algoritmo eficiente para resolver la clase de problemas a que puede dar lugar la formulación en rotura data nada menos que de 1947 [1], siendo interesante reseñar que algunos de los máximos desarrolladores de las productivas extensiones del enfoque elástico, como es O.C. Zienkiewicz, trabajaron sobre programación lineal aplicada a las estructuras nada menos que en 1959 [2], desarrollando líneas iniciadas tan pronto como 1951 [3].

El texto contiene un primer apartado en el que se presenta el conjunto de elementos necesarios para obtener soluciones a la estática y la cinemática del colapso, con el empleo exclusivo de expresiones —ecuaciones o inecuaciones— lineales. Dichos elementos permiten establecer un conjunto completo y cerrado de conceptos y de relaciones entre las variables que describen el problema estructural, a nivel local y global, y a ello se dedica el apartado siguiente. El análisis del clásico problema del pórtico simple en rotura permite ejemplificar la totalidad de los conceptos y relaciones definidos, y mostrar su potencial formativo.

2. Elementos básicos del análisis en rotura

2.1. Teoremas fundamentales

Consideramos a continuación el enunciado de los teoremas fundamentales del análisis límite, cuya demostración aplicada a los problemas de plasticidad asociada es ampliamente conocida [4], enunciado que puede ser como sigue:

Teorema 1 (Teorema estático o del límite inferior)

Si en una estructura, para un sistema de cargas dadas

- *puede establecerse un estado de tensiones o esfuerzos internos en equilibrio, y*
- *para dichos esfuerzos no se alcanza la condición de rotura o plastificación completa*

entonces la estructura no colapsa para dichas cargas, o lo que es lo mismo, las cargas dadas suponen un límite inferior a la carga de rotura de la estructura.

Para que el teorema sea de aplicación, no deben producirse fenómenos de inestabilidad (pandeo), y las secciones que plastifican deben presentar ductilidad sufi-

ciente para que se produzcan deformaciones plásticas apreciables sin rotura.

Teorema 2 (Teorema cinemático o del límite superior)

Es el dual del anterior: si para un esquema de colapso compatible arbitrariamente establecido se calculan cargas que pierden en dicho colapso tanta energía como la que se disipa en la deformación plástica, puede asegurarse que la estructura colapsará bajo dichas cargas, o lo que es lo mismo, que tales cargas constituyen un límite superior para la carga de rotura de la estructura.

Como en el caso del análisis elástico, los dos teoremas precedentes suponen una visión dual del problema, cuya concurrencia determina una solución completa del problema, hiperestático en general:

Teorema 3 (Teorema de unicidad)

En el caso de que se cumplan las condiciones de los dos teoremas precedentes, a saber,

- *que exista un estado equilibrado de esfuerzos con las cargas actuantes.*
- *que los esfuerzos sean en cualquier región de la estructura iguales o menores a los que provocan la plastificación de dicha región*
- *que exista un estado de colapso cinemáticamente compatible cuyas rótulas —o regiones en flujo plástico— se correspondan con las posiciones en las que el esfuerzo es igual al de plastificación*

puede asegurarse que la carga considerada es la carga de rotura de la estructura,

pues efectivamente, al coincidir en un mismo estado de cargas el límite superior y el límite inferior, dicho estado debe corresponder a la carga de rotura.

Hay que hacer notar que las condiciones del teorema de unicidad reproducen en el análisis plástico las tres condiciones que usamos en análisis elástico para determinar las soluciones, a saber

- EQUILIBRIO: la *admisibilidad estática*, por la que el estado de esfuerzos está equilibrado con las cargas
- COMPATIBILIDAD: la *admisibilidad cinemática*, por la que la geometría de colapso es compatible, y
- RESISTENCIA: que también podríamos denominar condiciones de *congruencia material* o *admisibilidad material*, (o *ecuaciones constitutivas*), por la que los esfuerzos son los que provocan la plastificación en las regiones en que se postula dicho estado, y menores a éstos en el resto de la estructura.

De este modo, la solución —única— al problema planteado se obtiene cuando confluyen las tres condiciones.

2.2. Ecuaciones

A partir de los teoremas fundamentales del método, podemos derivar procedimientos de solución, aplicados al estudio de las estructuras de barras, en las que podemos plantear tanto las condiciones de carga —y de equilibrio— como la cinemática de colapso —y su compatibilidad— en forma discreta, referidas a un número finito de secciones prefijadas en las que consideremos la posibilidad de aparición de rótulas o deformaciones plásticas.

Para ello vamos a escribir las ecuaciones de que disponemos

- Usamos \mathbf{F} para las cargas, que estarán equilibradas por los esfuerzos \mathbf{f} de las secciones elegidas para representar el problema, siendo la condición de EQUILIBRIO:

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}\mathbf{f} \quad (4)$$

Hay que señalar que si hemos establecido a priori un dimensionado para la estructura, lo habitual será que no conozcamos inicialmente ni las cargas \mathbf{F} , que deben ser las de rotura, y que buscamos sean superiores o iguales a las aplicadas a la estructura, ni los esfuerzos que las equilibran \mathbf{f} , aunque si hemos definido cómo se representan, sí podremos establecer \mathbf{H} sin dificultad. Una forma habitual de plantear el problema consiste en prefijar un vector de carga dado \mathbf{F}_I y buscar el factor de carga γ correspondiente a la condición de equilibrio en el instante de la rotura: $\gamma\mathbf{F}_I = \mathbf{H}\mathbf{f}$. Volveremos sobre ello.

- Usamos \mathbf{U} para los movimientos de la estructura necesarios para describir las posibles cinemáticas de colapso, de los que pueden deducirse por COMPATIBILIDAD las deformaciones plásticas \mathbf{u} de las secciones implicadas en cada geometría de colapso, ignorando las deformaciones elásticas, que no variarían en el proceso. Para movimientos pequeños:

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (5)$$

con $\mathbf{H} = \mathbf{B}^T$ como sabemos que sucede si se representan de forma concordante tanto cargas y movimientos como esfuerzos y deformaciones. En dicha expresión, tanto \mathbf{u} como \mathbf{U} representan *velocidades* o diferencias de deformación y movimiento entre dos estados sucesivos en el movimiento de colapso.

- Definimos finalmente las condiciones de RESISTENCIA, las que identifican las condiciones de plastificación o, en la analogía usada para describir éstas, las que definen a la superficie límite de rotura, mediante un sistema de inecuaciones o desigualdades para los esfuerzos, representando usualmente las sollicitaciones y las correspondientes resistencias en formas

agregadas: en barras los usuales esfuerzos normal, cortante y momento, y las condiciones de los correspondientes diagramas de interacción, en la forma de la ecuación 1:

$$\boldsymbol{\psi} \mathbf{f} - \mathbf{r} \leq \mathbf{0} \quad (6)$$

Cada fila de la anterior expresión matricial contiene una expresión lineal que representa una de las condiciones límite correspondiente a los esfuerzos o combinaciones de esfuerzos \mathbf{f} asociados a los coeficientes no nulos de dicha fila. La expresión 6 es, por lo tanto, una aproximación a las condiciones de plastificación que representa la posible superficie límite no lineal mediante un conjunto finito de condiciones lineales o hiperplanos. En dicha aproximación cada término de \mathbf{r} representará, bien una resistencia aislada —una capacidad resistente— si $\boldsymbol{\psi}$ tiene un único término no nulo en la fila considerada, bien un coeficiente que establece un límite a las condiciones de interacción entre varias capacidades resistentes en el caso de que $\boldsymbol{\psi}$ tenga varios términos no nulos en dicha fila.

Es útil señalar que los términos de cada fila de $\boldsymbol{\psi}$ representan —para módulo unitario— las componentes del versor perpendicular al correspondiente plano de rotura, siendo por ello $\boldsymbol{\psi} \mathbf{f}$ las proyecciones de los esfuerzos sobre cada una de dichas direcciones mientras que los términos de \mathbf{r} representan las distancias desde el origen, que corresponde al vector de esfuerzos nulo, hasta dichos planos, distancias medidas en las direcciones definidas por tales versores.

Por razón de la *regla de flujo de von Mises*, para el caso de plasticidad asociada, evidentemente, las deformaciones en el proceso de rotura deben ser ortogonales a las variaciones de esfuerzos plásticos, es decir, deben ser perpendiculares a la superficie de rotura. Por lo tanto se describen de una de las dos maneras siguientes: si el estado límite se da para una sola de las condiciones descritas por las ecuaciones de resistencia, es decir, si sólo hay un plano activo en la situación de rotura considerada, se representará con un vector paralelo a uno de los versores de los planos que la aproximan; si la rotura corresponde a una arista o un vértice de la superficie considerada, es decir, si el límite se da simultáneamente para varias de las condiciones límite, se describirá con vectores obtenidos por combinación lineal de coeficientes positivos de los versores de los planos activos simultáneamente pues en ese caso la deformación puede orientarse en cualquiera de las direcciones del ángulo contenido entre las perpendiculares a los planos que confluyen en esa posición. Como el vector debe orientarse hacia el exterior de la superficie lo anterior puede expresarse en la forma siguiente:

- Regla de flujo: en la condición de rotura la (velocidad de) deformación es ortogonal a la superficie límite.

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\lambda}_p \quad (7)$$

En dicha expresión, cada columna de $\boldsymbol{\psi}^T$ es uno de los versores de los hiperplanos que definen la superficie límite, y $\boldsymbol{\lambda}_p$ es una lista de multiplicadores (un vector columna) que tendrán valor positivo si el correspondiente hiperplano es activo, y valor nulo si no lo es. La expresión es efectivamente una forma de representar una combinación lineal de los versores de los planos activos —de las ecuaciones que expresan plastificaciones efectivas—, combinación que está situada en el cono que define las deformaciones posibles en el colapso si se restringen los $\boldsymbol{\lambda}_p$ a valores positivos.

Usamos ahora las ecuaciones anteriores: si multiplicamos escalarmente cada una de las ecuaciones (6) que expresa uno de los planos de la superficie límite por el correspondiente multiplicador tendremos sistemáticamente un valor nulo dado que, o bien el plano es activo y por lo tanto la correspondiente fila de la ecuación debe ser nula y el multiplicador no nulo, o bien el plano no es activo, y la fila será entonces no nula —y menor a cero— pero en ese caso deberá ser nulo el multiplicador.

Tenemos, pues, que los planos activos están asociados a la condición (de colapso) siguiente:

$$(\boldsymbol{\psi} \mathbf{f} - \mathbf{r})^T \boldsymbol{\lambda}_p = 0 \quad (8)$$

Podemos aplicar finalmente el teorema cinemático, que establece que si en un movimiento de colapso que podamos imaginar —que sea admisible— se iguala el trabajo desarrollado por las cargas en dicho movimiento a la disipación de energía plástica que se produce en las secciones que deben plastificar en dicho movimiento, puede asegurarse que tales cargas corresponderán a una cota superior a las que efectivamente resiste la estructura. Esto puede expresarse en la forma

$$\mathbf{U}^T \mathbf{F} \geq \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (9)$$

En dicha expresión la situación de igualdad se dará si se cumplen también las condiciones del teorema estático, es decir, si las cargas y esfuerzos están en equilibrio y no hay región alguna del cuerpo en el que se supere la condición de resistencia.

2.3. Obtención de soluciones

2.3.1. Cinemática de colapso

Obtenemos ahora las ecuaciones que resuelven el problema desde la perspectiva cinemática. Para ello apli-

camos la condición de admisibilidad material descrita por la regla de flujo 7 al desarrollo de la ecuación que caracteriza los planos de rotura activos 8, combinada con la condición dada por el teorema cinemático 9 obteniendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^T \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\lambda}_p - \mathbf{r}^T \boldsymbol{\lambda}_p &= 0 \\ \mathbf{f}^T \mathbf{u} - \mathbf{r}^T \boldsymbol{\lambda}_p &= 0 \\ \mathbf{F}^T \mathbf{U} - \mathbf{r}^T \boldsymbol{\lambda}_p &\geq 0 \end{aligned}$$

Si añadimos la ecuación de compatibilidad 5 sustituyendo en ella las deformaciones por su valor tal como lo determina la regla de flujo 7 tendremos finalmente el conjunto de condiciones que caracteriza a la solución:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^T \mathbf{U} &\geq \mathbf{r}^T \boldsymbol{\lambda}_p \\ \mathbf{B}\mathbf{U} &= \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\lambda}_p \\ \boldsymbol{\lambda}_p &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (10)$$

Las ecuaciones 10 expresan la afirmación del teorema cinemático y la condición de compatibilidad en función de las variables globales de carga y movimiento y de los multiplicadores que localizan las posiciones de rotura —y que expresan su deformación plástica, como se deduce de la primera ecuación, que mide energías disipadas— Las ecuaciones permiten deducir soluciones a problemas típicos de análisis plástico.

Si por ejemplo suponemos conocidas las resistencias \mathbf{r} , representamos la carga en función de un factor de carga γ en la forma $\mathbf{F} = \gamma \mathbf{F}_I$, para un vector de carga prefijado \mathbf{F}_I , y normalizamos el desplazamiento (al medir el desplazamiento como *velocidad*, es habitual usar un factor de referencia común para todos los movimientos; estos se expresan como *modo*, o en forma adimensional, proporcional, siendo el factor común el que puede expresar la evolución de la deformación en el tiempo) de forma que $\mathbf{F}_I^T \mathbf{U} = 1$, tendremos que las ecuaciones anteriores equivalen al problema de hallar los \mathbf{U} , $\boldsymbol{\lambda}_p$ que minimizan el factor de carga $\gamma = \mathbf{r}^T \boldsymbol{\lambda}_p$ para las condiciones lineales dadas:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda}_p} \gamma(\boldsymbol{\lambda}_p) &= \min_{\mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda}_p} (\mathbf{r}^T \boldsymbol{\lambda}_p) \\ \mathbf{F}_I^T \mathbf{U} &= 1 \\ \mathbf{B}\mathbf{U} &= \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\lambda}_p \\ \boldsymbol{\lambda}_p &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (11)$$

Dicho problema no es más que un problema de programación lineal, resoluble con las herramientas de dicho campo de la matemática, y en particular con el algoritmo *simplex* ya citado.

Análogamente puede hacerse si las cargas derivan de la combinación de una parte constante y otra variable,

en una forma como $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \gamma \mathbf{F}_I$; normalizando ahora la parte variable tendríamos

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda}_p} \gamma(\boldsymbol{\lambda}_p) &= \min_{\mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda}_p} (\mathbf{r}^T \boldsymbol{\lambda}_p - \mathbf{F}_0^T \mathbf{U}) \\ \mathbf{F}_1^T \mathbf{U} &= 1 \\ \mathbf{B}\mathbf{U} &= \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\lambda}_p \\ \boldsymbol{\lambda}_p &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (12)$$

Cualquiera de los problemas anteriores propone obtener los movimientos que, manteniendo la compatibilidad, corresponden a la condición de colapso para el menor factor de carga que lleva la estructura a la rotura. La solución al problema de programación lineal —de minimización— permite obtener simultáneamente el factor de carga —que es la función *objetivo* del problema— y los vectores \mathbf{U} y $\boldsymbol{\lambda}_p$ que definen, el primero los movimientos generalizados de la estructura en el colapso, el segundo las *deformaciones* de las secciones representadas en el modelo de resistencia en dicho proceso de colapso, es decir las deformaciones plásticas de las secciones que rompen, marcando los planos activos.

Conocidos los movimientos, es posible reconstruir los esfuerzos de la estructura, dado que pueden obtenerse ecuaciones suficientes para ello. Efectivamente,

- el factor de carga identifica la carga actuante \mathbf{F} , y
- a las ecuaciones de equilibrio pueden añadirse ahora las de resistencia de las secciones *activas*, o que plastifican, que ahora son conocidas.

2.3.2. Dualidad: Estática de colapso

Resulta de sumo interés analizar ahora las implicaciones que las condiciones de dualidad comunes a todos los problemas de programación lineal suponen para el problema que estamos analizando [5]. Para ello reescribimos las ecuaciones 11 en otro formato más compacto, unificando la expresión de las restricciones para todas las variables del problema. Tendremos el problema allí enunciado, que la literatura matemática denomina *primal*:

$$\begin{aligned} \min \left(\gamma = [\mathbf{r}^T \ \mathbf{0}^T] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_p \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}^T & -\mathbf{B} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{F}_I^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_p \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\lambda}_p &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (13)$$

Se trata en éste, como hemos visto, de determinar la configuración de colapso que hace mínima la disipación, respetando las condiciones de compatibilidad, y para un formato normalizado en la velocidad de desplazamiento.

El problema *dual* del anterior, de acuerdo a los principios de las teorías de programación lineal no es otro que el

$$\begin{aligned} & \text{máx} \left(\Gamma = [\mathbf{0}^T \ 1] \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \Gamma \end{bmatrix} \right) \\ & \begin{bmatrix} \psi & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}^T & \mathbf{F}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \Gamma \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ & \Gamma \geq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

En dicho problema, las variables de *decisión* pueden identificarse con los esfuerzos \mathbf{f} y el factor de carga Γ . El problema propone hallar los esfuerzos correspondientes al máximo factor positivo Γ que, aplicado a las cargas, permite que éstas alcancen el equilibrio con los esfuerzos, sin que éstos superen las condiciones de resistencia. Puede comprobarse que, efectivamente, los grupos de ecuaciones que corresponden a las restricciones son precisamente las de resistencia y las de equilibrio. Cabe señalar que aunque tras aplicar la dualidad en la forma general las ecuaciones de equilibrio quedan formuladas en términos de inecuación, pueden restringirse con facilidad a igualdades estrictas.

Este enfoque permite por tanto obtener directamente tanto los esfuerzos como el factor de carga de rotura de la estructura para la configuración de cargas elegida \mathbf{F}_I .

Se trata de la formulación directa del problema de maximización que se deriva de aplicar el teorema estático, puesto que se formula explícitamente tanto el equilibrio como la no violación de la condición de resistencia, lo que asegura que la carga de rotura es superior a la considerada. Esto justifica la formulación del problema como un problema de maximización: se trata de hallar la mayor carga que cumple simultáneamente con ambas condiciones.

La confluencia de las soluciones de ambos problemas 13 y 14 en una solución única, con $\text{mín}(\gamma) = \text{máx}(\Gamma)$, cota superior la primera, cota inferior la segunda, puede identificarse con el teorema de unicidad, aunque también es consecuencia de los teoremas paralelos de dualidad descritos en la literatura de la programación lineal.

Resulta finalmente muy interesante reiterar que γ expresa la energía disipada por las resistencias en el movimiento de colapso normalizado: es la disipación plástica en dicho movimiento. De la expresión con la que se calcula en 11 puede verse con claridad que la mejora en la carga de rotura —en el factor de carga— será más eficaz si se interviene mejorando las resistencias de \mathbf{r} para las que las deformaciones λ_p resulten mayores. Dicha información, claramente visible en la formulación cinemática del problema no está disponible, en cambio, en la solución que aporta la formulación estática del problema.

Nótese que si aplicamos la dualidad a la segunda forma, ecuación 12, de plantear el problema, llegaremos a una solución estática en la que el factor de carga se aplicará sólo a la parte variable de la carga

$$\begin{aligned} & \text{máx}_{\mathbf{f}, \Gamma} (\Gamma) \\ & \begin{bmatrix} \psi & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}^T & \mathbf{F}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \Gamma \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ -\mathbf{F}_0 \end{bmatrix} \\ & \Gamma \geq 0 \end{aligned} \quad (15)$$

3. Formalizando las teorías de rotura

3.1. Cargas de rotura y mecanismos de colapso

Hemos visto en apartados anteriores que el problema de rotura puede formularse desde la perspectiva cinemática o del límite superior, o desde la perspectiva estática, o del límite inferior. Cuando ambos límites coinciden se cumplen las condiciones del teorema de unicidad, obteniéndose la carga de rotura. Si recordamos ambos enfoques teníamos, en el primero, el problema de minimizar γ para las variables de decisión \mathbf{U}, λ , en la forma de la ecuación 11

$$\begin{aligned} & \text{mín}_{\mathbf{U}, \lambda} \gamma(\lambda) = \text{mín}_{\mathbf{U}, \lambda} (\mathbf{r}^T \lambda) \\ & \mathbf{F}_1^T \mathbf{U} = 1 \\ & \mathbf{B}\mathbf{U} = \psi^T \lambda \\ & \lambda \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (16)$$

y en el segundo el problema de maximizar Γ en la forma de la ecuación 14

$$\begin{aligned} & \text{máx}_{\mathbf{f}, \Gamma} \Gamma \\ & \psi \mathbf{f} \leq \mathbf{r} \\ & \mathbf{B}^T \mathbf{f} = \Gamma \mathbf{F}_I \\ & \Gamma \geq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

La solución del problema, cuando $\text{mín}(\gamma) = \text{máx}(\Gamma)$ nos arroja un conjunto de ecuaciones que podemos resumir ahora, usando para la carga de rotura $\mathbf{F} = \gamma \mathbf{F}_I$, y recordando la definición de γ en el problema cinemático:

Equilibrio	$\mathbf{F} = \mathbf{B}^T \mathbf{f}$
Compatibilidad	$\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{U}$
Resistencia	$\psi \mathbf{f} \leq \mathbf{r}$
Regla de flujo	$\psi^T \lambda = \mathbf{u}$
Colapso	$(\psi \mathbf{f} - \mathbf{r})^T \lambda = 0$
Disipación	$\mathbf{u}^T \mathbf{f} = \mathbf{U}^T \mathbf{F} = \lambda^T \mathbf{r}$

Podemos generalizar las soluciones obtenidas en las anteriores ecuaciones si consideramos que las cargas \mathbf{F} corresponden a las de rotura para una de las direcciones posibles de la acción, la definida por la carga inicial \mathbf{F}_I que se ha hecho crecer hasta el máximo valor \mathbf{F} que la estructura es capaz de soportar para esa *orientación* o combinación de cargas.

Si analizásemos el problema con otra *orientación* inicial \mathbf{F}_{II} llegaríamos a otra solución límite y así sucesivamente, de modo que podemos imaginar la envolvente para todas ellas, definiendo así la capacidad de carga generalizada de la estructura con expresión análoga a la que hemos usado para la del conjunto de las secciones

$$\Psi \mathbf{F} \leq \mathbf{R} \quad (18)$$

La ecuación no es más que la definición de una superficie límite en el espacio de las cargas que, por las ecuaciones de equilibrio, pueden considerarse como un *agregado* de las solicitaciones, espacio para el que la existencia de dicha superficie límite y el cumplimiento en ella de la regla de ortogonalidad estaría probada, de acuerdo con la regla de flujo de Von Mises.

Podemos por ello postular para la estructura completa la existencia de los parámetros globales \mathbf{A} , donde cada uno de ellos representará uno de los posibles mecanismos de colapso, activo si es no nulo, e inactivo en caso de anularse.

La condición de colapso quedaría representada por la ecuación

$$(\Psi \mathbf{F} - \mathbf{R})^T \mathbf{A} = 0 \quad (19)$$

Para cada uno de los mecanismos de colapso globales Λ_j resultará mera cuestión de geometría la determinación de las secciones que plastifican, es decir, la determinación de los multiplicadores activos λ_{ij} y su valor: puesto que el producto escalar $\lambda^T \mathbf{r}$ expresa la disipación plástica que se produce en las secciones que plastifican, o rótulas, en el mecanismo, deberá igualar a la disipación plástica considerada en la estructura en su conjunto, que se expresaría con $\mathbf{A}^T \mathbf{R}$, lo que permite relacionar la geometría de colapso general descrita por \mathbf{A} con las rotaciones o aplastamientos descritos por λ . Para pequeños desplazamientos podrá expresarse λ como expresión lineal de \mathbf{A} , en la forma

$$\lambda = \mathbf{L} \mathbf{A} \quad (20)$$

que expresa la compatibilidad entre las descripciones local y global de la configuración o mecanismo de rotura.

Ahora tendremos para la condición de colapso

$$\begin{aligned} (\psi \mathbf{f} - \mathbf{r})^T \lambda &= \mathbf{f}^T \psi^T \lambda - \mathbf{r}^T \lambda = \\ \mathbf{f}^T \psi^T \mathbf{L} \mathbf{A} - \mathbf{r}^T \mathbf{L} \mathbf{A} &= (\mathbf{f}^T \psi^T \mathbf{L} - \mathbf{r}^T \mathbf{L}) \mathbf{A} = \\ (\mathbf{L}^T \psi \mathbf{f} - \mathbf{L}^T \mathbf{r})^T \mathbf{A} &= 0 \end{aligned}$$

Si comparamos la última expresión con la ecuación 19, si en esta última sustituimos \mathbf{F} por $\mathbf{B}^T \mathbf{f}$, considerando que $(\mathbf{L}^T \mathbf{r})^T \mathbf{A} = \mathbf{r}^T \mathbf{L} \mathbf{A} = \mathbf{r}^T \lambda = \mathbf{R}^T \mathbf{A}$ y que las dos expresiones deben ser ciertas para todas las combinaciones de rotura \mathbf{f} resultarán las identidades

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{L}^T \mathbf{r} \quad (21)$$

$$\mathbf{L}^T \psi \equiv \Psi \mathbf{B}^T \quad (22)$$

La primera de ellas expresaría la forma de transformar las capacidades resistentes, obteniendo las representadas desde la perspectiva global de la estructura —las diferentes cargas de rotura— a partir de las capacidades resistentes de las secciones de ésta.

Dichas expresiones nos permiten cerrar el conjunto de relaciones que caracterizan las configuraciones y las cargas de rotura desde la doble perspectiva sea interna sea global de la estructura, con las variables y ecuaciones de la tabla 1, a las que debe añadirse la ecuación 22 para cerrar el conjunto.

Todo ello puede esquematizarse en el diagrama siguiente, en el que resulta evidente la similitud al que sintetiza el modelo elástico representado en 3:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{u} & \longleftarrow & \text{COMPATIBILIDAD}(\mathbf{B}) & \longleftarrow & \mathbf{U} \\ & \swarrow \psi^T & \psi^T \mathbf{L} = \mathbf{B} \Psi^T & \Psi^T \searrow & \\ & \downarrow \lambda & \longleftarrow \mathbf{L} & \downarrow \mathbf{A} & \downarrow \\ \text{Tr. interno} = \text{Disipación interna} & \leq & \text{Disipación externa} = \text{Tr. externo} & & \\ & \uparrow \mathbf{r} & \longrightarrow \mathbf{L}^T & \longrightarrow & \uparrow \mathbf{R} \\ & \nearrow \psi & \mathbf{L}^T \psi = \Psi \mathbf{B}^T & \Psi \nwarrow & \\ \mathbf{f} & \longrightarrow & \text{EQUILIBRIO}(\mathbf{H} = \mathbf{B}^T) & \longrightarrow & \mathbf{F} \end{array} \quad (23)$$

Cabe señalar, por tanto, que el conjunto de relaciones ψ , Ψ , \mathbf{B} , \mathbf{L} desempeñan en el análisis en rotura un papel comparable al desempeñado en análisis elástico por las relaciones \mathbf{k} , \mathbf{K} y \mathbf{B} .

4. El ejemplo del pórtico en rotura

4.0.1. Pórtico simple con dos cargas independientes

Como ejemplo, al objeto de revisar el procedimiento completo propuesto en el apartado 2.3 así como la formalización del apartado anterior, analizaremos el caso clásico de un pórtico simple sometido a dos cargas, horizontal F_1 y vertical F_2 . La forma más sencilla del problema es considerar fijas ambas cargas, y en ese caso buscar el factor de carga γ que caracteriza a la resistencia del pórtico frente a ambas cargas amplificadas por el mismo factor.

	parámetros locales	parámetros globales
fuerzas	solicitaciones \mathbf{f}	cargas \mathbf{F}
movimientos	deformaciones \mathbf{u}	desplazamientos \mathbf{U}
capacidades	resistencias \mathbf{r}	cargas límite \mathbf{R}
configuraciones	rótulas λ	mecanismos Λ
COM-EQU	$\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{U}$	$\mathbf{F} = \mathbf{B}^T \mathbf{f}$
CNF-CAP	$\lambda = \mathbf{L}\Lambda$	$\mathbf{R} = \mathbf{L}^T \mathbf{r}$
(Resistencia)	$\psi \mathbf{f} \leq \mathbf{r}$	$\Psi \mathbf{F} \leq \mathbf{R}$
Regla de flujo	$\psi^T \lambda = \mathbf{u}$	$\Psi^T \Lambda = \mathbf{U}$
Colapso	$(\psi \mathbf{f} - \mathbf{r})^T \lambda = 0$	$(\Psi \mathbf{F} - \mathbf{R})^T \Lambda = 0$
Disipación	$\mathbf{f}^T \mathbf{u} = \mathbf{r}^T \lambda$	$\mathbf{F}^T \mathbf{U} = \mathbf{R}^T \Lambda$

Tabla 1. Ecuaciones que caracterizan las configuraciones de rotura

Establecemos por tanto, de acuerdo a la sección 2.3,

$$\mathbf{F} = \gamma \mathbf{F}_I = \gamma \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

siendo las configuraciones U_1 y U_2 las que se derivan de la rotura independiente y asociada a la dirección de acción de cada una de las cargas, tal como se representa en la figura 1.

En dicha figura se identifican los puntos de máximos momentos, que por tanto describen las posiciones requeridas para determinar los esfuerzos relevantes —y las posibles posiciones de las rótulas plásticas— y, dadas las posibles configuraciones para las combinaciones de cargas previstas, sólo en el caso de la sección 2 —identificada en la figura por el momento o la rotación plástica— es posible concebir valores de momento con signos diferentes según que la carga dominante sea la horizontal, o la vertical. En casos más generales, en que no sea factible tal determinación a priori, el tratamiento que apliquemos a esta sección sería común a todas, como podría serlo en este ejemplo si considerásemos posibles valores negativos para las cargas.

Tendremos, por lo tanto, como valores relevantes para esfuerzos \mathbf{f} y deformaciones \mathbf{u} los siguientes:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} M_{1p} \\ M_{2p} \\ M_{3p} \\ M_{4p} \\ M_{5v} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \theta_{1p} \\ \theta_{2p} \\ \theta_{3p} \\ \theta_{4p} \\ \theta_{5v} \end{bmatrix}$$

y podremos establecer como ecuaciones de equilibrio $\mathbf{F} = \mathbf{H}\mathbf{f}$ y compatibilidad $\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{U}$ las siguientes:

$$\gamma \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & \frac{1}{h_2} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h_2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{l} & 0 & \frac{2}{l} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{1p} \\ M_{2p} \\ M_{3p} \\ M_{4p} \\ M_{5v} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_{1p} \\ \theta_{2p} \\ \theta_{3p} \\ \theta_{4p} \\ \theta_{5v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & 0 \\ \frac{1}{h} & -\frac{2}{l} \\ \frac{1}{h} & 0 \\ \frac{1}{h} & \frac{2}{l} \\ 0 & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Las condiciones de resistencia se establecen suponiendo la rotura de cada una de las secciones consideradas, para cada caso de rotura posible: establecemos como lista de resistencias la siguiente, considerando resistencias plásticas definidas por los valores de los momentos de rotura y, sólo para la sección 2, la posibilidad de romper con momentos de signo diferente según predominen las cargas horizontales o las verticales.

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} M_{pp1} \\ M_{pp2a} \\ M_{pp2b} \\ M_{pp3} \\ M_{pp4} \\ M_{pv5} \end{bmatrix}$$

siendo entonces las condiciones de resistencia posibles $\psi \mathbf{f} - \mathbf{r} \leq \mathbf{0}$ las seis siguientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{1p} \\ M_{2p} \\ M_{3p} \\ M_{4p} \\ M_{5v} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{pp1} \\ M_{pp2a} \\ M_{pp2b} \\ M_{pp3} \\ M_{pp4} \\ M_{pv5} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

La solución del problema, de acuerdo a 11 exige obtener los valores de $\lambda_p \geq \mathbf{0}$ que minimizan el factor $\gamma = \mathbf{r}^T \lambda_p$ para las condiciones $\mathbf{B}\mathbf{U} = \psi^T \lambda_p$ y

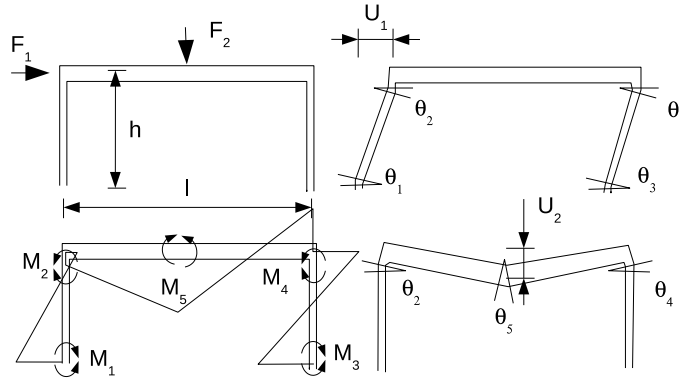


Figura 1. Componentes de la estática y la cinemática de rotura en pórtico simple

$\mathbf{F}_I^T \mathbf{U} = 1$ que, sin más que operar las expresiones anteriores, definen las restricciones siguientes:

$$\begin{bmatrix} \frac{U_1}{h} \\ \frac{U_1}{h} - \frac{2U_2}{l} \\ \frac{U_1}{h} \\ \frac{U_1}{h} + \frac{2U_2}{l} \\ \frac{4U_2}{l} \\ U_1 F_1 + U_2 F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 - \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

siendo

$$\gamma = \lambda_1 M_{pp1} + \lambda_2 M_{pp2a} + \lambda_3 M_{pp2b} + \lambda_4 M_{pp3} + \lambda_5 M_{pp4} + \lambda_6 M_{pv5}$$

Puede verse en las ecuaciones anteriores cómo las expresiones de compatibilidad fuerzan la unificación de los multiplicadores λ_i en torno a la combinación de dos que podríamos considerar independientes: λ_1 que responde a la rotura de la sección inferior del pilar por la rotura de pórtico descrita por el movimiento U_1 , y λ_6 que responde a la rotura del vano de la viga por la rotura de tablero descrita por el movimiento U_2 , resultando λ_4 idéntico a λ_1 , y λ_2 y λ_5 combinaciones de los dos independientes.

Las soluciones, que pueden obtenerse numéricamente para los casos en los que los valores de cargas y resistencias estén definidos, pueden también explorarse algebraicamente para caracterizar las distintas posibilidades. Contando con que γ es una suma de valores que deben ser positivos o nulos, su minimización, asegurando que se cumple la última ecuación que asegura algún movimiento de colapso, nos deja tres casos posibles, a saber

- Rotura de pórtico: cuando $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_6 = 0$. En este caso en el colapso sólo se da el movimiento U_1 , pues λ_3 puede anularse para minorar la suma del conjunto, de modo que los multiplicadores activos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5$ tienen todos el mismo valor, que es el

desplome del pórtico, igual a la rotación en las cuatro rótulas en pie y cabeza de pilares, y las ecuaciones describen el equilibrio de la carga horizontal a través de las diferencias de momentos entre cabeza y pie de ambos pilares, con las cuatro rótulas que requiere el mecanismo de colapso.

- Rotura de tablero: cuando $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_6 > 0$. En este caso el movimiento de colapso es el U_2 , y los multiplicadores no nulos $\lambda_3, \lambda_5, \lambda_6$ son precisamente los que definen las rótulas de la rotura de tablero. Las ecuaciones describen la resistencia máxima posible frente a la carga vertical, contando con los momentos en cabeza de pilares y en vano de viga.
- Rotura combinada: cuando ambos λ_1 y λ_6 son no nulos. En este caso lograr el menor valor en γ exige minorar $\lambda_2 M_{pp2a} + \lambda_3 M_{pp2b}$ manteniendo constante, como dice la segunda ecuación, la diferencia $\lambda_2 - \lambda_3$, lo que puede lograrse si se anulan ambos multiplicadores λ_2 y λ_3 y se asegura que se cumple $\frac{U_1}{h} - \frac{2U_2}{l} = 0$ o lo que es lo mismo cuando $U_2 = U_1 \frac{l}{2h}$. Esto configura el mecanismo combinado en el que la cabeza del primer pilar no alcanza la plastificación, pues es precisamente eso lo que indica el que los correspondientes multiplicadores sean nulos, si además constatamos que la ecuación describe precisamente la condición requerida para mantener el ángulo inicial entre pilar y viga. Las cuatro rótulas del mecanismo combinado estarán por lo tanto en pie del primer pilar, vano de viga, y cabeza y pie del segundo pilar.

Se ve por tanto con mucha claridad cómo expresan los multiplicadores las condiciones activas —las rótulas del mecanismo de colapso—: sus valores corresponden precisamente con la rotación que en la cinemática de colapso se produce asociada al momento resistente —o capacidad— de la correspondiente sección y, como se ve en el caso de la sección 2, seleccionando el valor

que aporta trabajo positivo dado el signo del momento existente en el correspondiente mecanismo de colapso.

Podemos finalmente dibujar la capacidad resistente del pórtico en un gráfico en el que los ejes coordenados sean las cargas \mathbf{F} , tal como se hace en la figura 2 que no es más que la proyección en el espacio de las cargas de la figura que representa la superficie límite en el espacio de los esfuerzos, siendo la expresión de proyección la establecida por las ecuaciones de equilibrio.

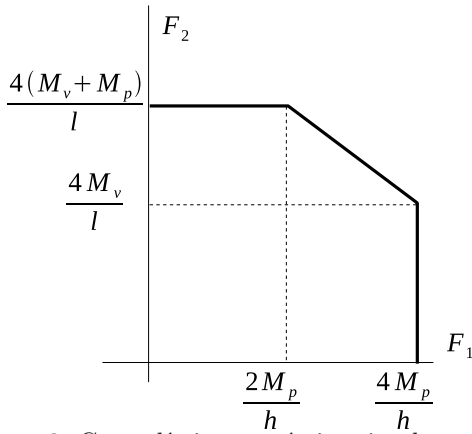


Figura 2. Carga límite en pórtico simple

Hasta aquí el abordaje al problema se ha hecho desde la formulación cinemática, ecuación 13. El modo alternativo sería formular las condiciones del teorema estático de acuerdo a la 14 es decir, asegurando el cumplimiento simultáneo de las condiciones de resistencia y de equilibrio para la mayor carga posible.

Las condiciones de resistencia son las 25, y las de equilibrio las indicadas en 24, aunque sustituiremos en ellas γ por Γ , tratando ahora de magnificar Γ .

Si consideramos la primera de las dos ecuaciones de equilibrio, mayorar Γ implicará maximizar la suma $\frac{1}{h}(M_{1p} + M_{2p} + M_{3p} + M_{4p})$ sin superar la resistencia, de modo que si igualamos todas las de los pilares, el límite estará cuando la suma $\frac{4M_p}{h}$ iguale a la carga expresada en esa ecuación, lo que representa la rama vertical de la figura límite 2. La rama corresponde al mecanismo de pórtico identificado más arriba, y no puede ir más allá de la horizontal que supone el cumplimiento de la segunda ecuación y por tanto con $\Gamma F_2 \leq \frac{4M_v}{l}$.

Si consideramos en cambio la segunda ecuación de equilibrio, se puede mayorar Γ llevando al máximo la suma $\frac{2}{l}(-M_{2p} + M_{4p})$ maximizando simultáneamente el valor de M_{5v} sin superar en pilares la resistencia M_p — en valor absoluto— y en vano la M_v lo que lleva a usar momentos de signo negativo en 2. Esto nos lleva por lo tanto al límite de $\frac{4}{l}(M_p + M_v)$ para la carga ΓF_2 —la rama horizontal de la misma figura, que corresponde

al mecanismo de tablero— aunque la condición obtenida no podrá superar el límite marcado por la primera ecuación con $\frac{2M_p}{h} \leq \Gamma F_1$.

Para las situaciones en que simultáneamente ΓF_1 supera $\frac{2M_p}{h}$ y ΓF_2 supera $\frac{4M_v}{l}$, deberemos maximizar Γ cumpliendo simultáneamente ambas ecuaciones y, por tanto, maximizando $\Gamma = (M_{1p} + M_{2p} + M_{3p} + M_{4p})/(hF_1) = (-2M_{2p} + 2M_{4p} + 4M_{5v})/(lF_2)$. Esto liga linealmente F_1 con F_2 en un límite que como puede verificarse incluye los descritos para los dos mecanismos precedentes, y que corresponde al mecanismo combinado definido por la oblicua de la misma figura que corta al eje horizontal en $\frac{1}{h}(4M_p + 2M_v)$ y al vertical en $\frac{1}{l}(8M_p + 4M_v)$ por lo que queda representada por la ecuación

$$F_1 h(8M_p + 4M_v) + F_2 l(4M_p + 2M_v) = (8M_p + 4M_v)(4M_p + 2M_v)$$

$$2F_1 h + F_2 l = 8M_p + 4M_v \quad (26)$$

El versor de dicha recta límite tiene la misma orientación que el vector de componentes $[1, \frac{l}{2h}]$

Es interesante representar las condiciones límite expresadas por la figura en la forma de la ecuación 6 pero referidas al espacio de las cargas, en vez del al de las solicitaciones en el formato $\Psi \mathbf{F} \leq \mathbf{R}$, ecuación 18. Aunque en rigor, el vector representado por la segunda fila de Ψ debería ser un versor de módulo unidad, reduciendo en idéntica escala el módulo de R_2 , no lo hacemos aquí en aras de *percibir* mejor el sentido de la ecuación:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{l}{2h} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \frac{4M_p}{h} \\ \frac{4M_p + 2M_v}{h} \\ \frac{4(M_p + M_v)}{l} \end{bmatrix} \quad (27)$$

En esta representación, la ortogonalidad a la superficie límite se expresaría haciendo $\mathbf{U} = \Psi^T \mathbf{A}$ de acuerdo a la forma que adopta la ecuación 7 en el espacio global de las cargas, de modo que los movimientos de colapso podrían expresarse en la forma

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{l}{2h} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (28)$$

lo que expresa que el desplazamiento lateral será la suma del derivado del mecanismo de pórtico (A_1) más el del mecanismo combinado (A_2), mientras que el descenso de vano depende de una expresión del movimiento combinado más el derivado del desplazamiento del mecanismo de tablero (A_3), para la combinación que resulte activa en el colapso, que sólo puede ser, o uno

de los tres, o dos en los puntos en que ambos mecanismos coinciden, para los vértices de la superficie de colapso.

Puede verificarse cuál es el mecanismo activo trasladando la ecuación 8 al espacio de las cargas, en la forma $(\Psi \mathbf{F} - \mathbf{R})^T \mathbf{A} = \mathbf{0}$, ecuación 19, que expresa que o bien se cumple estrictamente la condición de resistencia y el correspondiente multiplicador es no nulo —y está activo— o el multiplicador debe ser nulo y estará inactivo si existe exceso de resistencia.

Podemos comprobar finalmente las afirmaciones contenidas en el apartado 3.1. Para ello postulamos la existencia de la relación $\mathbf{L}\mathbf{A} = \boldsymbol{\lambda}$, ecuación 21, que podemos construir con cierta facilidad explorando los multiplicadores activos λ_i para cada uno de los mecanismos de rotura A_j , considerando los A_j descritos por el desplazamiento unidad en el correspondiente mecanismo de colapso (pórtico, combinado y de tablero), y para los λ_i las correspondientes rotaciones en las rótulas, considerando en el caso de la sección 2 la que corresponda al signo positivo en la disipación, es decir, λ_2 para el caso de la rotura de pórtico, y λ_3 para la rotura de tablero, de acuerdo a la figura 3.

Tenemos entonces que la relación postulada es

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 \\ \frac{1}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{l} \\ \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 \\ \frac{1}{h} & \frac{2}{h} & \frac{2}{l} \\ 0 & \frac{2}{h} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

Para dicho valor de la matriz \mathbf{L} podemos verificar inmediatamente la afirmación de dicho apartado contenida en la ecuación 22 de que $\mathbf{L}^T \boldsymbol{\psi} = \Psi \mathbf{B}^T$ sin más que comprobar los productos correspondientes:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 \\ \frac{1}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 \\ \frac{1}{h} & \frac{2}{h} & \frac{2}{l} \\ \frac{2}{h} & \frac{4}{l} & \frac{2}{h} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{l}{2h} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{l} & 0 & \frac{2}{l} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 \\ \frac{1}{h} & 0 & \frac{1}{h} & \frac{2}{h} & \frac{2}{l} \\ 0 & -\frac{2}{l} & 0 & \frac{2}{l} & \frac{4}{l} \end{bmatrix}$$

Es muy interesante observar la correspondencia entre las superficies límite, la definida en el espacio de los esfuerzos \mathbf{f} , frente a la definida en el espacio de las cargas \mathbf{F} , dado que éste puede expresarse como una proyección del anterior, definida mediante la aplicación de las ecuaciones de equilibrio. En la figura 4 se representan las del caso analizado, reduciendo el espacio de

los esfuerzos, de cinco dimensiones, a las tres más representativas, suponiendo iguales los valores de f_1 , f_3 (y f_4 en la primera parte de la figura), y donde los subíndices indican la posición de esfuerzos, cargas y capacidades límite en las ecuaciones definidas anteriormente.

Finalmente, si en este ejemplo queremos considerar la posibilidad de rotura en los pilares por el efecto combinado de los momentos y los esfuerzos normales, tendremos que añadir parámetros de esfuerzo adicional en el vector \mathbf{f} para representar dichos esfuerzos normales y, por ende, parámetros de deformación \mathbf{u} asociados a éstos. Es razonable considerar el acortamiento del pilar por flujo plástico localizado, pero como esa deformación no puede describirse con los movimientos indicados en el ejemplo, se necesitará añadir movimientos independientes adicionales U_3, U_4, \dots , tal como en la figura 5, movimientos para los que aparecerán nuevas ecuaciones de equilibrio y compatibilidad. Puede hacerse notar que el movimiento parece indistinguible a efectos macroscópicos independientemente de que la deformación se localice en el pie o en la cabeza del correspondiente pilar, como corresponde al hecho de que los normales son idénticos en cabeza y pie. Aunque la combinación con el estado de momentos flectores depende en cada sección de la pareja normal–momento, como el normal es idéntico en cabeza y pie, podemos usar un sólo parámetro de *deformación con aplastamiento* que estará en la sección para la que la combinación con el momento corresponda a una configuración de rotura, aun cuando en la figura está representado como un aplastamiento localizado en cabeza.

Puede verse en la figura que bastarían dos movimientos globales adicionales para dar cuenta de los acortamientos separados de cada soporte. Las ecuaciones de compatibilidad implícitas en la figura se han elegido para que los nuevos movimientos globales involucren deformaciones en las piezas, pero no involucren a ninguno de los movimientos —o grados de libertad global— considerados previamente. El añadido de esos dos movimientos globales exige el correspondiente añadido de dos cargas asociadas a éstos F_3, F_4 —tal vez nulas, como en el ejemplo propuesto— para mantener la congruencia del modelo.

Necesitaremos finalmente condiciones de resistencia adicionales: si obviamos las situaciones que no se van a dar —aplastamiento por normal centrado, puesto que siempre habrá momentos— quedan aún sin embargo las condiciones de rotura de cabeza o de pie de cada pilar por momento y normal combinados, con ecuaciones, tal vez no lineales, que una vez linealizadas mediante su descomposición en segmentos suponen para cada segmento expresiones del tipo $\alpha N_i + \beta M_i \leq 1$ fáciles de incorporar a la expresión de resistencia 6, tareas todas

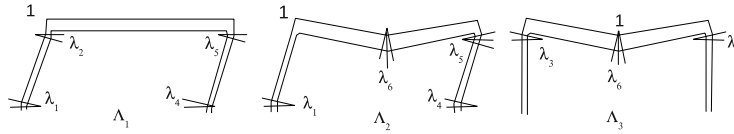


Figura 3. Mecanismos de colapso de pórtico

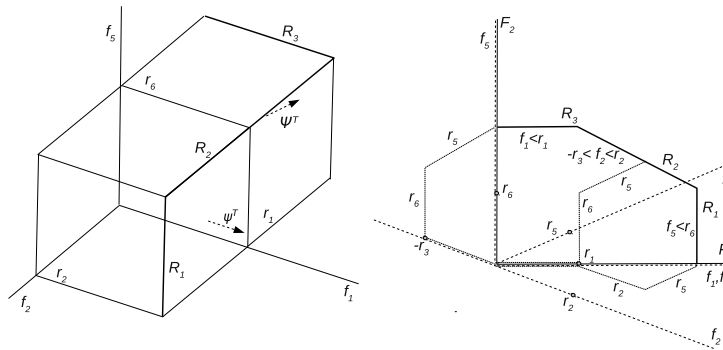


Figura 4. Poliedros límite en pórtico

ellas que puede desarrollar el propio lector como ejercicio.

La figura 5 puede servir de referencia para dicho ejercicio.

5. Conclusiones

- En este trabajo se ha presentado una forma completa de formular y resolver los problemas de estática que podrían agruparse bajo la denominación de análisis en rotura.
- Dicha formulación es uno de los campos de aplicación de los métodos denominados de *programación lineal* resolubles con algoritmos de amplia difusión, y en particular por el *simplex*, que cuenta con más de sesenta años de vigencia.
- Dicha formulación permite establecer paralelismos teóricos de gran importancia entre los enfoques de análisis elástico o el de rotura, paralelismo cuyo trasfondo matemático no es el caso tratar aquí aunque, como demuestra Jesús Ortiz en una aportación reciente [6], deriva de una manera única de abordar el problema físico.
- El notable éxito obtenido por las extensiones del enfoque que hemos llamado elástico ha ocultado el potencial explicativo del enfoque en rotura que, como señalan los artículos pioneros ya reseñados en las citas [2,3], o como ejemplifico en otro lugar [7], aporta una abstracción que, además de poder generalizarse a amplios tipos de estructura, tiene un magnífico

potencial para aportar instrumentos de *síntesis*, es decir, de dimensionado automático.

- Por dichas razones resulta de gran interés aprovechar los procesos de evolución académica en que estamos inmersos a raíz de la puesta en marcha del llamado EEES (Espacio Europeo de Educación Superior) para empezar a introducir su estudio sistemático en la formación del especialista de estructuras.

Agradecimientos

Debo manifestar mi agradecimiento a José Ignacio Hernando y a Jesús Ortiz, del Departamento de Estructuras de Edificación de la UPM, por haberme incitado no sólo a usar sino sobre todo a repensar el marco teórico que ofrecen los algoritmos de programación lineal a los problemas de carga última.

Referencias

5.1. Citas

- 1.- El algoritmo simplex, en sus diversas versiones, resulta ser uno de los más productivos de las teorías matemáticas del pasado siglo XX. Desarrollado por George B. Dantzig en 1947 para la planificación de actividades de la Fuerza Aérea de los EEUU, es actualmente uno

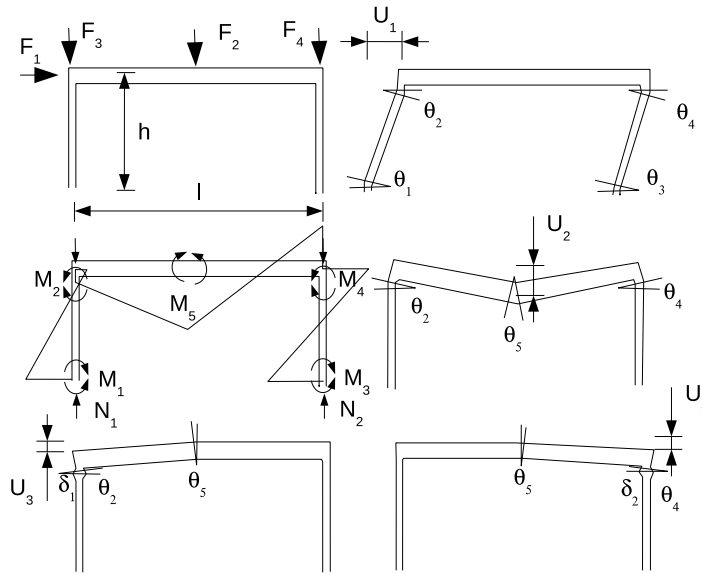


Figura 5. Componentes de la cinemática de rotura, con acortamientos en pilares

de los elementos canónicos básicos de las teorías económicas y de la planificación de las grandes corporaciones industriales. Véase [3]. La creación posterior de algoritmos capaces de competir con él, o de superarle en eficacia, como los de punto interior [4], no oscurece de ningún modo su importante papel. La generalidad de uso del algoritmo hace que sea una de las herramientas estándar en los paquetes numéricos informáticos disponibles en muchos contextos, tanto de los especializados, como en los de propósito general, sea por estar directamente contenido en el paquete básico —como en las herramientas de álgebra simbólica como Maple, Mathematica o Maxima— sea por estar disponible como complemento o rutina descargable —como en versiones antiguas del paquete de ofimática OpenOffice— Está disponible en las versiones más recientes de las hojas de cálculo habituales: Excel 07 >Datos >Análisis >Solver ; OpenOffice 3.x >Herramientas >Solver.

2.- Aplicando a vigas en flexión los avances que se iniciaron para estructuras trianguladas. Liderado por Charnes, en él participaba el joven Zienkiewicz: [2].

3.- Trabajo pionero de Charnes aplicado a la rotura de cerchas [1].

4.- Uno de los textos clásicos del área es [7].

5.- Para más detalles véase cualquier texto de programación lineal, o de programación lineal y no lineal —de optimización— como pueden ser [5, 6]. En [3] se destaca el papel de Von Neumann en la formulación del teorema de dualidad. En general el problema de mini-

mización

$$\min_{\mathbf{x}} (\mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x})$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

tiene como dual el de maximización

$$\max_{\mathbf{y}} (\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{y})$$

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

6.- Jesús Ortiz, en abril 2010, en una comunicación personal titulada *Teoría veraz e inmisericorde de estructuras*.

7.- Texto del autor, de 2010, titulado *Concebir y analizar estructuras* y disponible en el archivo digital de la UPM en su Versión 3.0: <http://oa.upm.es/189>.

5.2. Referencias

Referencias

1. A. Charnes and Greenberg H. J. (1951) Limit analysis of structures formed from rigid blocks. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 57(480).
2. A. Charnes, C.E. Lemke, and O.C. Zienkiewicz (1959) Virtual work, linear programming and plastic limit analysis. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 251(1264):110–116.
3. George B. Dantzig (1963) *Linear programming and extensions*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
4. N. Karmarkar (1984) A new polynomial-time algorithm for lineal programming. *Combinatorica*, 4(4):373–395.
5. David G. Luenberger (1989) *Programación lineal y no lineal*. Addison-Wesley Iberoamérica, Mexico, versión en español de M.López Mateos.
6. Stephen G. Nash and Ariela Sofer (1996) *Linear and Nonlinear Programming*. McGraw-Hill series in industrial engineering and management sciences. McGraw-Hill.
7. B. G. Neal (1956) *The plastic methods of structural analysis*. J. Wiley and Sons, Inc., New York and London.