

APLICACION DE LOS METODOS DE
 CONTORNO EN LA FLEXION DE PLACAS
 SANTIAGO HERNANDEZ IBAÑEZ
 AVELINO SAMARTIN QUIROGA

E.T.S.I.I. Zaragoza
 E.T.S.I.C.C.P. Santander

1.- LOS METODOS DE CONTORNO

1.1.- Planteamiento matemático de la flexión de placas

El problema de la flexión de placas delgadas reside, desde el punto de vista matemático, en la resolución de una ecuación diferencial en derivadas parciales de carácter lineal definida en la superficie A de la placa. Su expresión es:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (D_1 + D_2 + D_{xy} + D_{yx}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = P(x, y) \quad (1)$$

El enunciado del problema se completa con las dos condiciones impuestas en el contorno \bar{A} que dependen de las coacciones existentes en los bordes de la placa.

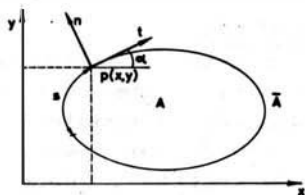


fig. 1.

Estas condiciones de contorno pueden ser de dos tipos:

- a) Condiciones esenciales de contorno (movimientos)
- b) Condiciones naturales de contorno (fuerzas)

Adoptando una notación más compacta para lo expuesto, puede decirse que la cuestión planteada consiste en la resolución de la ecuación (1) definida en el dominio A y que puede escribirse como

$$A(w) = L(w) + b \quad (2)$$

donde L es un operador diferencial y b una función de las variables x, y .

Esta ecuación está sujeta a dos condiciones de contorno a lo largo de A , que podrán ser, en general, esenciales en un subconjunto A_1 y naturales en A_2 . Podrán expresarse, de forma conjunta, por medio de un vector columna $\underline{B}(w)$ de dimensiones 2×1 que tendrán la forma

$$\underline{B}(w) = \underline{M}(w) + \underline{t} \quad (3)$$

se entiende que \underline{M} es un vector 2×1 que contiene los operadores diferenciales y \underline{t} otro vector de las mismas dimensiones en el que se encuentran los valores especificados en cada subcontorno.

La resolución directa, o analítica, de la ecuación (2) sometida a (3) consiste, como se sabe, en realizar las cuadraturas necesarias hasta obtener la función incógnita $w(x, y)$. No obstante, esta obtención solo es posible en casos de geometría muy simple y condiciones de carga y enlaces muy concretos. Este hecho exige buscar otros caminos de carácter esencialmente numérico, que posean más generalidad y complementen el procedimiento anterior.

La mayoría de los métodos se basan en asimilar w a la expresión siguiente:

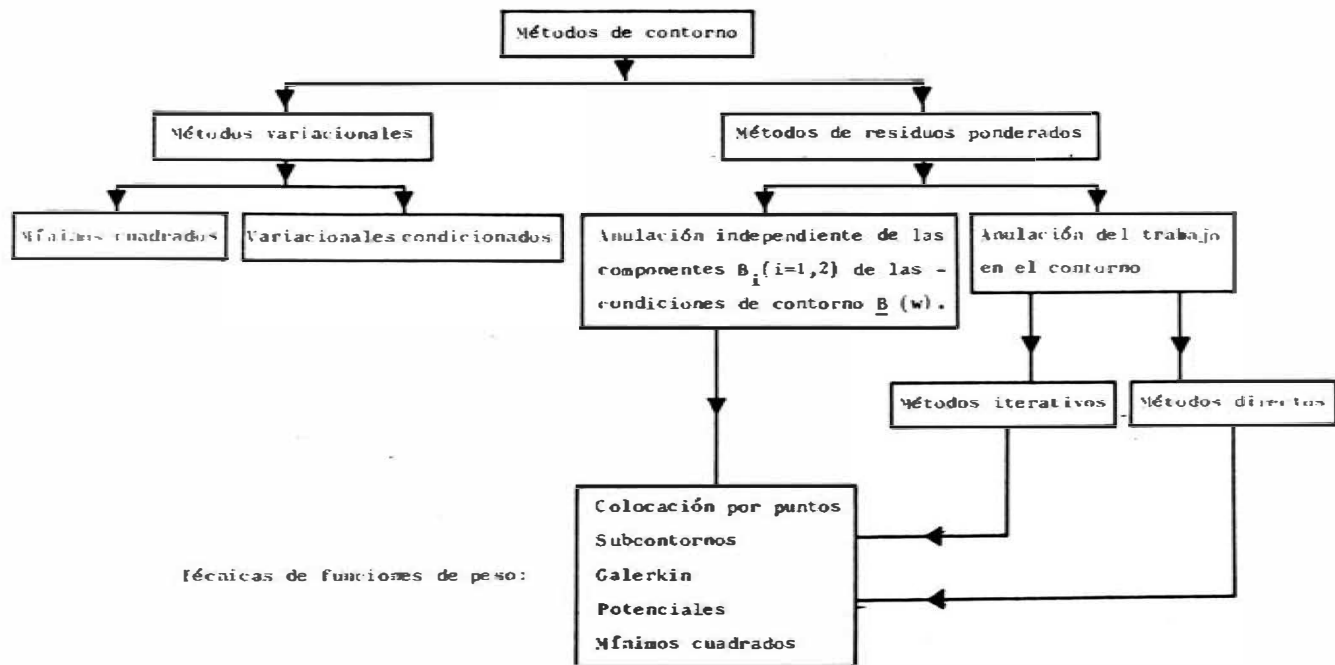
$$\bar{w} = N_i a_i \quad i = 1, n \quad (4)$$

donde N_i son un conjunto de funciones especificadas de antemano y a_i son otro conjunto de coeficientes indeterminados.

1.2.- Métodos de contorno

Se denominan de esta forma los métodos que parten de una función $w(x, y)$ que es solución de la ecuación diferencial asociada al problema. En la literatura técnica reciben también los nombres de "Boundary Methods" o "Método de Trefftz". Puede extenderse su aplicación a aquellos casos de contornos que posean singularidades, para ello se recurre a funciones que sean, también, singulares en esos puntos llamados polos, auxiliándose asimismo con ecuaciones integrales. En este caso reciben el nombre de "Boundary Integral Methods" o "Boundary Integral Equations Methods".

Los métodos de contorno se hallan poco propagados en la literatura técnica, su resolución puede enfocarse tanto desde la utilización de los residuos ponderados en sus distintas variantes, como por la creación



de funcionales para hacer uso de las técnicas de los métodos variacionales. Asimismo, el carácter de vector que puede asignarse a las dos condiciones de contorno existentes (3) abre, nuevamente, diversos planteamientos.

En (I) se ha elaborado una teoría del conjunto de modalidades que aparecen en el Cuadro 1 y se han particularizado las expresiones resultantes para el problema estructural de la flexión de placas.

2.- LA FLEXION DE LOSAS ORTOTROPAS

2.1.- Geometría en planta considerada

Con estos métodos se ha analizado la flexión de placas delgadas. La idealización de este tipo estructural se ha realizado mediante el modelo de la losa ortótropa, definiendo para ella un comportamiento en teoría lineal y régimen elástico sin deformación a esfuerzo cortante.

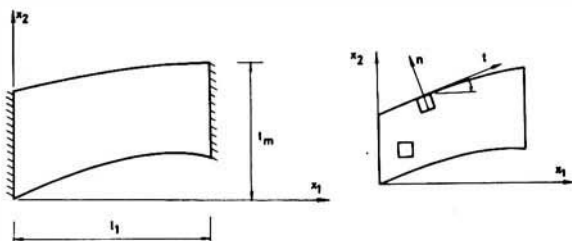


fig. 2.

La geometría estudiada corresponde a una losa con dos lados apoyados paralelos de longitud cualquiera y otros dos lados de geometría arbitraria y condiciones de contorno tanto homogéneas, en cualquiera de sus variantes, como viga de borde. El estudio realizado supone, por tanto, una extensión del modelo de la losa ortótropa, con el que, únicamente, se había analizado la losa rectangular o la losa circular (II).

Dado el carácter genérico de la geometría estudiada, se ha definido el elemento elemental de losa en una dirección α , junto con el convenio de esfuerzos interiores que se indican en las figuras adjuntas.

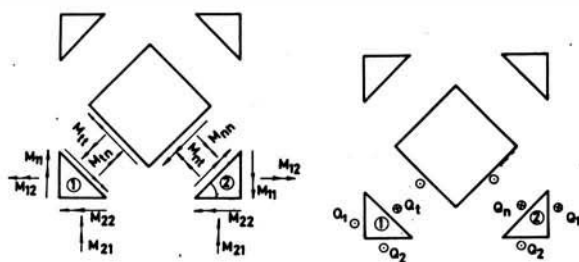


fig. 3.

2.2.- Expresiones asociadas al problema

Utilizando la terminología de (III) la ecuación diferencial en derivadas parciales asociada al problema (1) puede escribirse como

$$K_{11}w',_{1111} + 2K_{12}w',_{1122} + K_{22}w',_{2222} = Z(x,y) \quad (5)$$

Las condiciones de contorno tienen la siguiente expresión.

- Condiciones de borde homogéneas

a) Borde empotrado

$$\left| \begin{array}{c} w \\ w',_n \end{array} \right| = \underline{0} \quad (6.a)$$

b) Borde apoyado

$$\left| \begin{array}{c} w \\ M_{nn} \end{array} \right| = \underline{0} \quad (6.b)$$

c) Borde libre

$$\left| \begin{array}{c} R_n \\ M_{nn} \end{array} \right| = \underline{0} \quad (6.c)$$

d) Borde deslizante

$$\left| \begin{array}{c} R_n \\ M_{nn} \end{array} \right| = \underline{0} \quad (6.d)$$

- Viga de rigidez en bordes rectos

Las condiciones de contorno quedan de la forma:

$$\left| \begin{array}{c} M_{nn} \\ R_n \end{array} \right|_{\text{losa}} - (-1)^{i+1} \underline{T}_i \underline{R}_i \underline{T}_i^t \left| \begin{array}{c} w',_n \\ w''_n \end{array} \right|_{\text{losa}} = \underline{0} \quad (6.e)$$

donde \underline{T}_i es la matriz de transporte que relaciona -- los ejes particulares de la viga con los generales de la losa y \underline{R}_i es la matriz que contiene las rigideces a flexión y \underline{T}_i^t torsión de la viga.

2.3.- Resolución de la ecuación diferencial

La solución general de la ecuación diferencial -

(5) con las condiciones de borde apoyado en $x_1 = 0$ y $x_1 = 1_i$ se ha obtenido de la manera usual, como suma de la solución w_c de la ecuación complementaria y de una solución particular w_o del tipo Levy-Nadai. Esta solución particular se calcula para cada estado indivi

dual de solicitaciones considerado, que proporciona la correspondiente w_{oi} . En consecuencia se cumple que

$$w = w_c + w_o; \quad w_o = \sum w_{oi} \quad (7)$$

Es conocido que la relación $\Delta = K_{12}^2 - K_{11}K_{22}$ entre los parámetros resistentes de la losa da lugar a tres casos de cálculo.

2.3.1.- Solución complementaria

Es la solución de (5) con el segundo miembro nulo, es decir:

$$K_{ij} w_{iijj} = 0 \quad i, j = 1, 2 \quad (8)$$

La solución complementaria puede ponerse de la forma:

$$w_c = \sum_{n=1} w_n(x_2) \text{sen } \lambda_n x_1 \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l_1} \quad (9)$$

El tipo de resolución adoptado es el presentado en (III). Para facilitar su posterior tratamiento por computador se define un vector de resultados \underline{R} .

$$\underline{R} = (w; w_t; w_n; M_{tt}; M_{tn}; M_{nn}; M_{nt}; Q_t; Q_n; R_t; R_n)^t \quad (10)$$

que debe cumplir

$$\underline{R} = \underline{R}_c + \underline{R}_o \quad (11)$$

La solución complementaria adopta la forma

$$\underline{R}_c = \underline{G} (\underline{B} \underline{P} (x_2), \underline{C} \underline{P} (l_m - x_2)) \underline{A} \quad (12)$$

la matriz \underline{G} es

$$\underline{G} = \underline{G}_s \cdot \text{sen } \lambda x_1 + \underline{G}_c \text{ cos } \lambda x_1 \quad (13)$$

siendo \underline{G}_c y \underline{G}_s las matrices que se adjunta y \underline{B} , \underline{P} , \underline{C} las matrices que se definieron en (III) para cada uno de los casos de cálculo.

2.3.3.- Solución particular

La solución particular se ha calculado para tres casos particulares de carga: carga puntual, cuchillo de carga paralelo al eje OX_1 y carga uniforme a todo ancho de la losa. En los tres casos de cálculo de la losa el vector de resultados presenta la forma

$$\underline{R}_o = \underline{G} \underline{B}_o \cdot \underline{A}_o \quad (14)$$

donde \underline{G} es la matriz (13) y \underline{B}_o y \underline{A}_o fueron igualmente definidos en (III).

2.3.4.- Condiciones de contorno

Para las condiciones de contorno, la expresión -

0	0	0	0
$\lambda \cos \alpha$	0	0	0
$-\lambda \sin \alpha$	0	0	0
0	$-(d_1 + d_2) \sin \alpha \cos \alpha \lambda$	0	0
0	$(d_2 \sin^2 \alpha - d_1 \cos^2 \alpha) \lambda$	0	0
0	$(d_1 + d_2) \sin \alpha \cos \alpha \lambda$	0	0
0	$(d_1 \sin^2 \alpha - d_2 \cos^2 \alpha) \lambda$	0	0
$K_{11} \cos \alpha \lambda^3$	0	$-\lambda \cdot (K_1 + d_2) \cos \alpha$	0
$K_{11} \sin \alpha \lambda^3$	0	$\lambda \cdot (K_1 + d_2) \sin \alpha$	0
$-(K_2 \sin^2 \alpha - K_{11} (1 + \sin^2 \alpha)) \cos \alpha \lambda^3$	0	$\lambda ((K_{22} - 2K_1) \sin^2 \alpha - (2K_{12} - K_2) \cos^2 \alpha) \cos \alpha$	0
$-(K_{11} \cdot (1 + \cos^2 \alpha) - K_2 \cos^2 \alpha) \sin \alpha \lambda^3$	0	$\lambda ((2K_1 - K_{22}) \cos^2 \alpha + (2K_{12} - K_2) \sin^2 \alpha) \sin \alpha$	0

1	0	0	0
0	$\sin \alpha$	0	0
0	$\cos \alpha$	0	0
$(K_1 \cos^2 \alpha + K_2 \sin^2 \alpha) \lambda^2$	0	$-(K_1 \cos^2 \alpha + K_{22} \sin^2 \alpha)$	0
$-(K_{11} - K_2) \sin \alpha \cos \alpha \lambda^2$	0	$(K_1 - K_{22}) \sin \alpha \cos \alpha$	0
$(K_{11} \sin^2 \alpha + K_2 \cos^2 \alpha) \lambda^2$	0	$-(K_1 \sin^2 \alpha + K_{22} \cos^2 \alpha)$	0
$-(K_{11} - K_2) \sin \alpha \cos \alpha \lambda^2$	0	$(K_1 - K_{22}) \sin \alpha \cos \alpha$	0
0	$(K_2 + d_1) \sin \alpha \lambda^2$	0	$-K_{22} \sin \alpha$
0	$(K_2 + d_1) \cos \alpha \lambda^2$	0	$-K_{22} \cos \alpha$
0	$-((K_{11} - 2K_2) \cos^2 \alpha - (2K_{12} - K_1) \sin^2 \alpha) \sin \alpha \lambda^2$	0	$(K_1 \cos^2 \alpha - K_{22} (1 + \cos^2 \alpha)) \sin \alpha$
0	$-((K_{11} - 2K_2) \sin^2 \alpha - (2K_{12} - K_1) \cos^2 \alpha) \cos \alpha \lambda^2$	0	$(K_1 \sin^2 \alpha - K_{22} (1 + \sin^2 \alpha)) \cos \alpha$

genérica (3) deja paso a

$$\underline{CC}_i = \underline{F}_{in} \underline{A} + \underline{H}_{in} \quad (15)$$

donde

- el subíndice i expresa el número de borde $i = 1, 2$.
- el subíndice n indica el término del desarrollo de serie.
- la matriz \underline{F} es de dimensiones 2×4 y se obtiene del producto $\underline{G} (\underline{BP}(x_2), \underline{C} \underline{P}(1_m - x_2))$
- el vector \underline{A} contiene las constantes de integración de la ecuación diferencial homogénea, para cada término del desarrollo en serie.
- el vector \underline{H} se obtiene a partir de la solución particular \underline{R}_0 .
- el vector \underline{CC}_i de dimensiones 2×1 , contiene las condiciones de contorno de cada borde.

La obtención de \underline{F} y \underline{H} depende del tipo de condiciones de contorno consideradas.

3.- APLICACION DE LOS METODOS DE CONTORNO A LA FLEXION DE PLACAS ORTOTROPAS

El vector \underline{CC}_i (2×1) representa, como se ha dicho, las condiciones de contorno a que está sujeto el operador diferencial asociado a la flexión de placas. En consecuencia, de acuerdo con el objetivo del trabajo, se han aplicado a \underline{CC}_i cada una de las técnicas de contorno que se han descrito en el Cuadro 1, obteniéndose así las expresiones analíticas correspondientes, que quedan en función de las ecuaciones de los bordes de la placa. Cabe resaltar, que para el caso de bordes rectos todas las funciones que aparecen en el análisis presentan función primitiva conocida, por lo que el problema posee solución analítica. Sin embargo, para dar generalidad al trabajo realizado, el estudio de sensibilidad de parámetros se ha llevado a cabo mediante integración numérica por computador.

3.1.- Estudio de sensibilidad de parámetros

Para comprobar la validez de los métodos de contorno en el estudio de la flexión de placas, se ha desarrollado un proceso de investigación numérica que ha atendido tanto a variables relacionadas con el modelo teórico como a las que correspondían a las losas ortotropas consideradas.

Por ello se ha contemplado lo siguiente:

- a) Aspectos relacionados con el modelo teórico
- a.1) Eficacia relativa a los métodos de contorno.
 - a.2) Características de la integración numérica.
 - a.3) Identificación de las funciones de peso.
- b) Aspectos relacionados con la losa ortótropa considerada
- b.1) Adecuación a distintos órdenes de esviaje.
 - b.2) Comportamiento frente a diferentes tipos de sollicitaciones.
 - b.3) Aplicación a condiciones de contorno diversas.

3.1.1.- Aspectos relacionados con el modelo teórico

Todos los métodos de contorno considerados han demostrado ser válidos para resolver con gran aproximación el caso de losa rectangular, pudiendo señalarse una ligera ventaja para los métodos de Galerkin y mínimos cuadrados. Este último método ha seguido manteniendo su eficacia para el caso de losas esviadas, por lo que el estudio se ha particularizado para el método de los mínimos cuadrados en su formulación variacional.

En este método, el problema se reduce a encontrar la función w con la que se obtiene el valor estacionario del funcional

$$\Pi = \int_A (B_1(\bar{w})^2 + B_2(\bar{w})^2) ds \quad (16)$$

donde

$$\underline{CC}(w) = \begin{vmatrix} B_1(w) \\ B_2(w) \end{vmatrix} \quad (17)$$

Sin embargo es posible mejorar el rendimiento del proceso introduciendo funciones definidas y positivas denominadas de peso, con lo que (16) se transforma en:

$$\Pi = \int_A (K_1 B_1(\bar{w})^2 + K_2 B_2(\bar{w})^2) ds \quad (18)$$

Para estas funciones K_1, K_2 , resulta conveniente que estén relacionadas con el proceso de deformación de la estructura, en nuestro caso concreto los mejores resultados se han obtenido al utilizar como K_1 y K_2 el cuadrado de la condición de contorno asociada a B_1 y B_2 , con lo que el integrando de (18) quedaba transformado en el cuadrado del trabajo de las condiciones de contorno en un punto del mismo. Este hecho ha permitido conocer el criterio general para identificar funciones de peso, en cualquier caso de condiciones de contorno homogéneas.

Dado el carácter numérico de las funciones de pe

so, éstas se convierten en pesos puntuales en los nodos en que se apoya la integración. Esto da lugar a -- que la resolución de un caso se realice de forma iterativa de la manera siguiente. El cálculo comienza utilizándose funciones de peso unitarias, lo que permite resolver el caso en primera aproximación y obtener unos valores iniciales de los pesos; haciendo uso de ellos se procesa nuevamente el caso, generando así un método iterativo que finaliza al obtener entre dos iteraciones sucesivas la convergencia conveniente. Para geometrías rectas esta convergencia se ha producido en la primera iteración, aumentando hasta la segunda para el caso de otras geometrías como se verá mas adelante.

La integración numérica se ha realizado mediante la regla de Simpson. Para el caso de bordes rectos, los resultados convergen con un corto número de puntos de integración, que resulta dependiente de la longitud -- del desarrollo en serie considerado, como se indica en el cuadro adjunto.

Cuadro 2

	Número de puntos de integración									
Términos del desarrollo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	19

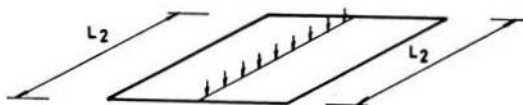
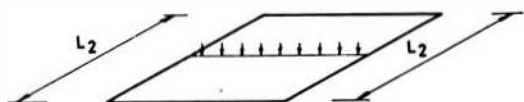
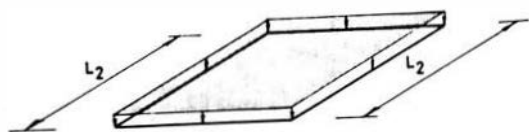
3.1.2.- Geometría, cargas y condiciones de enlace estudiadas

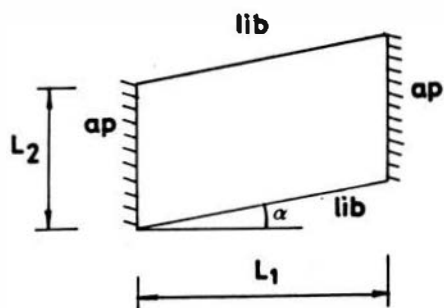
Se han considerado losas romboidales con ángulos de esviaje de 30° y 45°. El estudio de solicitaciones se ha diseñado de forma que permitiese comprobar la -- eficacia del método en diferentes modos de flexión de la placa, por ello se han tratado los siguientes casos de solicitaciones.

- 1) Carga uniforme constante.
- 2) Carga puntual en el centro de la losa.
- 3) Cuchillo de carga perpendicular a los apoyos.
- 4) Cuchillo esviado de cargas.
- 5) Cuchillo de cargas en el centro del vano.

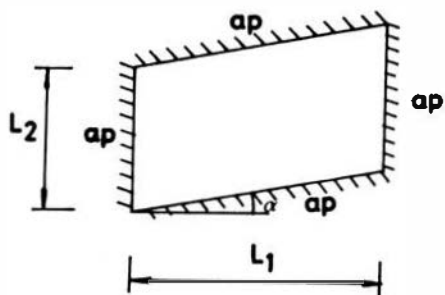
Los distintos casos de carga se observan en la -- figura adjunta (fig. 4).

La condición de contorno de borde apoyado en dos lados opuestos se ha conjugado con coacción de bordes libres o bordes apoyados en los lados oblicuos. Por lo que respecta a las dimensiones de las losas, si se llama L_2 a la longitud de los apoyos prefijados y L_1 a la distancia existente entre ellos, los casos de la





angulo α	$\frac{L_2}{L_1}$		
30°	1,5	1	0,5
45°	1,5	1	



angulo α	$\frac{L_2}{L_1}$
30°	0,66
45°	1

losa que se presentan se describen en la figura 5.

3.2.- Descripción del equipo de cálculo

Como puede observarse, el conjunto de geometrías analizadas corresponde a los casos que aparecen con -- más frecuencia en el ejercicio profesional, por ello -- el soporte informático utilizado ha sido el computador Hewlett-Packard 9835A con intérprete de lenguaje BASIC y 50 K - Bytes de memoria libre de usuario. De esta for-- ma, aunque la capacidad de memoria central presentaba limitaciones para el número de términos del desarrollo en serie a considerar, se podía conocer el comporta-- miento del método con los medios de cálculo de un gabi-- nete técnico.

3.3.- Descripción de los resultados obtenidos

3.3.1.- Losas isótropas con dos bordes apoyados y dos bordes libres

En cada uno de los casos procesados se indica -- el porcentaje total del momento flector en la direc-- ción paralela a los apoyos M_{11} a lo largo de la sec-- ción central, respecto al que resulta de establecer el equilibrio estático pertinente.

Se ha realizado la misma tarea para la reacción de Kirchoff en los apoyos. Se ha constatado las difi-- cultades que presenta esta fuerza vertical en las es-- quinas agudas, y que ya se indicaban en (IV), apare-- ciendo valores elevados en las proximidades de estas -- esquinas; por ello se ha definido en esta zona de irre-- gularidad otros valores, mediante interpolación parabó-- lica, dando lugar a lo que se ha denominado reacción -- modificada y se acompañan los porcentajes correspon-- dientes a cada uno de ellos.

- Losa isótropa con ángulo de esviaje 30° y $L_2 = 1,5 L_1$

Tabla 2

Iteraciones	Rtor	Solicitud	$\frac{M_{11}}{M_{11,exacto}}$ (%)	$\frac{R_{1,modif}}{R_{1,exacto}}$ (%)	$\frac{R_{1,modif}}{R_{1,exacto}}$ (%)
1	4	Carga puntual centrada	89	100.2	95.5
1	4	Cuchillo de carga en el centro del vano	93	87.6	--
1	4	Cuchillo de carga esviado	97	101	99.7
1	4	Cuchillo de carga perpendicular a los apoyos	98.5	94.8	91.9
1	4	Carga uniforme	99	92.6	--

- Losa isótropa con ángulo de esviaje 30° y $L_2 = L_1$
Tabla 3

Iteraciones	Nter	Solicitud	$\frac{M_{11}}{M_{11,exacto}}$ (%)	$\frac{R_1}{R_{1,exacto}}$ (%)	$\frac{R_{1,modif}}{R_{1,exacto}}$ (%)
			(%)	(%)	(%)
1	4	Carga puntual	86	82	--
1	6	Cuchillo de carga en el centro del vano	92.5	127.3	95.5
1	4	Cuchillo de carga esviado	95	93.4	--
1	4	Cuchillo de carga perpendicular a los apoyos	92	96.8	--
1	4	Carga uniforme	98.5	87.5	--

- Losa isótropa con ángulo de esviaje 30° y $L_2 = 0,5L_1$
Tabla 4

Iteraciones	Nter	Solicitud	$\frac{M_{11}}{M_{11,exacto}}$ (%)	$\frac{R_1}{R_{1,exacto}}$ (%)	$\frac{R_{1,modif}}{R_{1,exacto}}$ (%)
			(%)	(%)	(%)
1	6	Carga puntual centrada	53	52	50
1	6	Cuchillo de carga en el centro del vano	96	82	70
1	6	Cuchillo de carga esviado	95	83	64
1	6	Carga uniforme	103,5	73,6	65,0

- Losa isótropa con ángulo de esviaje 45° y $L_2 = 1,5L_1$
Tabla 5

Iteraciones	Nter	Solicitud	$\frac{M_{11}}{M_{11,exacto}}$ (%)	$\frac{R_{1,modif}}{R_{1,exacto}}$ (%)
			(%)	(%)
1	5	Carga puntual centrada	82.5	93.8
1	5	Cuchillo de carga en el centro del vano	84	78
1	5	Cuchillo de carga esviado	85	82.4
1	5	Cuchillo de carga perpendicular a los apoyos	86.6	82.6
1	5	Carga uniforme	92.7	75.6

3.2.2.- Losas isótropas con los cuatro lados apoyados

Para este tipo de losas, solicitadas por carga uniforme, se han comparado los resultados del método de los mínimos cuadrados con los valores proporcionados por Jensen (V) para la flecha y el momento flector máximo en el centro del vano.

- Losa con esviaje 30° y $L_2 = 0,66 L_1$

Iteraciones	Nter	Flecha en el centro	Momento flector max
1	6	100,5%	92%

- Losa con esviaje 45° y $L_2 = L_1$

Iteraciones	Nter	Flecha en el centro	Momento flector max
1	7	98,3%	95%

4.- EJEMPLO DE APLICACION

Con el fin de visualizar la geometría de placas biapoyadas que pretende abarcar el método y para comprobar la eficacia de la extensa información que se logra proporcionar sobre el estado de tensiones y deformaciones en cada punto de la estructura, se ha planteado el cálculo de una placa cuyo trazado en planta puede corresponder al de una obra de fábrica de cinturón arterial urbano o enlace de autopista.

Como se observa en la figura 6, está formada por dos apoyos paralelos de distinta longitud, y dos bordes libres, uno de ellos es recto con un ángulo de esviaje de 30° y el otro está constituido por una curva de acuerdo definida por las coordenadas de nueve de sus puntos. Las longitudes de cada uno de los lados aparece indicada en la misma figura.

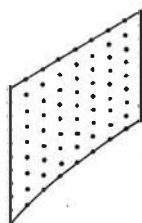


fig. 6.

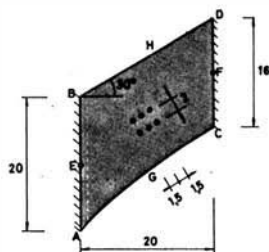


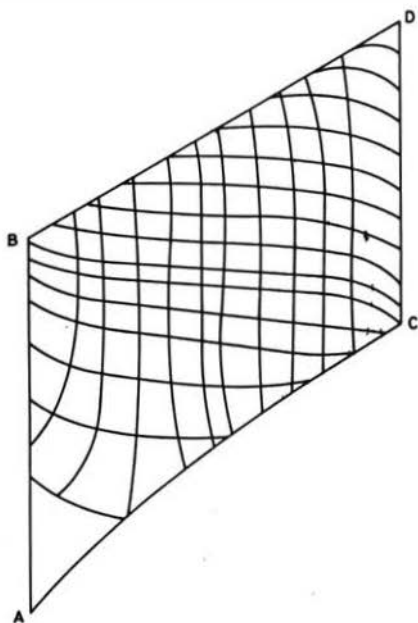
fig. 7.

Las restantes características de la losa son:

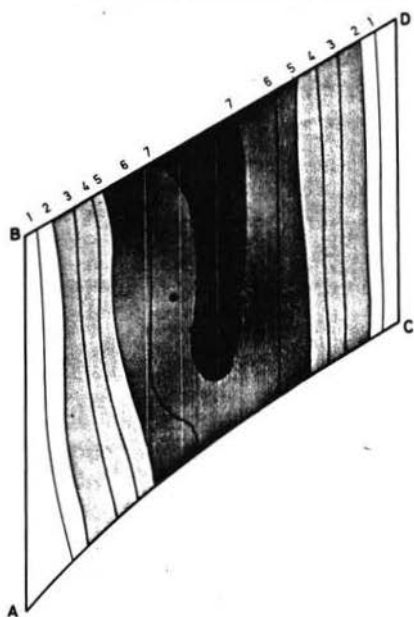
$$E = 2 \times 10^6 \text{ t/m}^2 \quad \nu = 0.15 \quad \text{Espesor: } h = 1 \text{ m.}$$

Como solicitaciones de cálculo se ha adoptado el tren de cargas de la vigente Instrucción española de puentes, disponiendo las cargas puntuales en la forma reflejada en la figura 6.

Se ha procesado el caso en el computador, considerando cuatro términos del desarrollo en serie y llevando a cabo dos iteraciones. Una vez realizado el cálculo se han obtenido los valores del conjunto de esfuerzos interiores y deformaciones que proporciona el programa desarrollado para la malla de puntos que



TRAYECTORIAS DE MOMENTOS FLECTORES PRINCIPALES



LINEAS DE NIVEL DE LA DEFORMADA (mm)

aparece en la figura 7.

Esto ha permitido elaborar los datos que se --
acompañan, que consisten en:

- 1.- Trayectorias de momentos flectores principales
- 2.- Líneas de nivel de la superficie deformada de la losa.

5.- CONCLUSIONES

El conjunto de conclusiones establecidas puede separarse en los siguientes apartados

5.a) Relativas a los métodos de contorno

- Estos métodos, poco propagados en la literatura -- técnica presentan ventajas computacionales importantes.
- Para identificar las funciones de peso asociadas a algunos de estos métodos, resulta conveniente ensayar aquellas que posean cierta relación con el proceso de deformación de la estructura. Para la -- flexión de placas las consideraciones energéticas -- han sido las que han proporcionado mejores resultados.

5.b) Relativas a su aplicación a la flexión de placas

- Se comprueba que el proceso de integración, asociado a estos métodos, es posible realizarlo de forma analítica para el caso de contornos rectos. Asimismo, debido al tipo de funciones $f(x_1)$ que intervienen en el método de mínimos cuadrados, el número de puntos necesario para efectuar la integración numérica de forma eficiente es bastante reducido.
- Todos los métodos de contorno considerados resuelven la losa rectangular. Para las losas esviadas -- puede utilizarse el método de los mínimos cuadrados que logra buenas aproximaciones con muy pocos términos del desarrollo en serie.
- Al contemplar geometrías curvas en los bordes, debe aumentarse el número de puntos de integración. Esto exige únicamente incrementos del tiempo de proceso pero no de memoria central. Esta circunstancia tiene importancia desde el punto de vista de las posibilidades de computación de un gabinete profesional
- La convergencia de los resultados se produce en la primera iteración en el caso de bordes paralelos. - En situaciones más complejas puede requerirse otra iteración adicional.

5.c) Relativas a los resultados

- En general, los resultados en momentos flectores -- pueden calificarse de muy adecuados, aunque sufren cierta merma en el caso de carga puntual. A título indicativo, en losas biapoyadas con dos bordes libres y esviaje de 30° bastan cuatro términos del desarrollo en serie para lograr una aproximación media del 95%. En caso de losas totalmente apoyadas es necesario incrementar la longitud del desarrollo en serie para lograr aproximaciones similares.
- La exactitud de los resultados parece depender en mayor medida de la relación longitud de apoyos/luz libre de la losa, que del ángulo de esviaje.
- Estas conclusiones permiten establecer que los métodos semianalíticos, como es el caso de los presentados, poseen gran idoneidad para abordar problemas estructurales reales, obteniendo los niveles de precisión necesarios con esfuerzos de ordenador menores que los métodos exclusivamente numéricos.

- BIBLIOGRAFIA

- I. S. HERNANDEZ, Aplicación de los métodos de contorno a la flexión de placas de planta arbitraria. Tesis doctoral.
- II. A. SAMARTIN, V. JARIA, E. CASTILLO, Losa ortótropa circular. Hormigón y Acero N° 118.
- III. A. SAMARTIN, J. MARTINEZ. Reparto transversal de la sobrecarga en tableros de puentes. Hormigón y acero n° 113.
- IV. L.S.D. MORLEY. Skew plates and structures. Pergamon Press 1.963.
- V. JENSEN V.S. Universidad Illinois, Bolletín 332, 1.941.