



CAMPUS  
DE EXCELENCIA  
INTERNACIONAL



**POLITÉCNICA**

"Ingeniamos el futuro"

# **Graduado en Matemáticas e Informática**

Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de  
Ingenieros Informáticos

## **TRABAJO FIN DE GRADO**

Grafos de Cayley

Autor: David Griñán Martínez

Director: Gregorio Hernández Peñalver

MADRID, ENERO 2017

A mi madre, por su paciencia.

A mi padre y mi hermana por su apoyo.

A mis amigos: Dani,Alex,Luis, Alfredo y Carlos; Clara, Dani, Cristina, Javier, Nacho y Dani; Fritz, Sonja, Lukas, Liam, Roberto, Pieter, David, Sergei, Minna, Matt,Lauri, Martin, Korkki y Daniele; Jordi y María.

A los buenos profesores que he encontrado en la FI.

Gracias

## Abstract

Two of the most relevant branches of modern day Mathematics are Group Theory and Graph Theory. Both theories meet in Cayley digraphs. Cayley digraphs are a new way to observe and represent the structure of a group or of a determined set of groups. They are constructed taking as  $V$ , the vertices of the graph, to be the set of the elements in the group and the edges that start from an element in  $V$  connect it with its images operating said element with the elements of set  $S \subset V$ , denominated generator set.

Throughout the months in which this project has been developed, the study points have been the basic structure of these graphs and some of their properties, going from the oldest and widely known results on these graphs to the newer and more recent results, the newest dating from January of this year 2017. This project includes results on hamiltonian circuits, hamiltonian paths, domination, perfect domination and resolving sets.

With this project a double goal is persued, on one hand the aim is to elaborate a *survey* of known results as well as recent results on this topic; and on the other hand the secondary aim is to, from each section, obtain original results that advance on the already known material.

*Keywords:* Cayley, hamiltonian, domination, resolving, digraph.

## Resumen

Dos de las ramas más relevantes de la matemática moderna son la Teoría de Grupos y la Teoría de Grafos. Ambas teorías tienen un punto en común en los grafos de Cayley. Los grafos de Cayley son una manera nueva de observar y representar la estructura de un grupo o de un determinado conjunto de grupos. Se construyen tomando como  $V$ , el conjunto de vértices del grafo, el conjunto de elementos del grupo y las aristas que parten de un elemento de  $V$  lo enlazan con sus imágenes al operar dicho elemento con los elementos del conjunto  $S \subset V$  al que se denomina conjunto de generadores.

A lo largo de los meses en los que se ha desarrollado este trabajo, se ha estudiado la estructura básica de estos grafos y algunas de sus propiedades, haciendo un barrido desde los resultados más antiguos y ampliamente conocidos sobre estos grafos hasta aquellos resultados de más reciente publicación, siendo el más reciente de Enero de este mismo año 2017. Este trabajo incluye resultados sobre circuitos hamiltonianos, caminos hamiltonianos, dominación, dominación perfecta y conjuntos resolventes.

Con este trabajo se persigue un objetivo doble, por un lado se pretende realizar un *survey* de resultados conocidos y de resultados recientes sobre este tema y, por otro, de cada faceta que se estudie de estos grafos se pretende obtener resultados propios que avancen sobre lo ya recopilado.

*Keywords:* Cayley, hamiltoniano, dominación, resolvente, digrafo.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Grafos de Cayley. Cuestiones generales . . . . .	1
1.2. Longitudes de los ciclos . . . . .	5
<b>2. Circuitos y caminos hamiltonianos</b>	<b>7</b>
2.1. Aplicaciones de circuitos hamiltonianos en grafos de Cayley . . . . .	13
<b>3. Dominación en grafos de Cayley</b>	<b>17</b>
3.1. Cuestiones generales . . . . .	17
<b>4. Conjuntos resolventes en grafos de Cayley</b>	<b>27</b>
4.1. Cuestiones generales . . . . .	27
4.2. Dimensión métrica para grafos de grupos abelianos . . . . .	30
4.3. Dimensión métrica para grafos de grupos no abelianos . . . . .	37
4.4. Dimensión métrica para digrafos de Cayley . . . . .	42
<b>5. Conclusiones</b>	<b>49</b>



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Grafos de Cayley. Cuestiones generales

La idea que hay detrás de este trabajo es explorar una nueva manera de interpretar la estructura de un grupo. Parafraseando a Sir William Lawrence Bragg, “Lo importante de la ciencia no es el encontrar nuevos resultados, sino descubrir nuevas maneras de pensar sobre ellos”. Siguiendo esa premisa, en este trabajo se va a tratar de ver la estructura de un grupo desde la perspectiva de los grafos, en concreto los denominados grafos de Cayley.

Los grafos de Cayley deben su nombre al matemático Arthur Cayley, uno de los fundadores de la escuela británica moderna de matemáticas puras, que trató principalmente en teoría de grafos y teoría de grupos. Además, fue miembro de la Royal Society of London for Improving Natural Knowledge y recibió la medalla Copley en 1882. Antes de recibir dicha medalla, Arthur Cayley introdujo los grafos que llevan su nombre en el año 1878. La idea fundamental de estos grafos fue el permitir representar la estructura de un grupo de tal manera que fuera visible más allá de una tabla de operaciones. Es también un enfoque valioso ya que consigue conectar dos ramas en apariencia distintas y usar la sencillez a la hora de visualizar conceptos de una para aportar claridad a la otra.

Por lo general se habla de digrafos de Cayley ya que, aunque hay grafos no dirigidos que pueden ser grafos de Cayley, la gran mayoría son grafos dirigidos. Intuitivamente, un grafo dirigido es un conjunto de vértices y aristas que conectan pares de esos vértices, pero sólo en un sentido, y un grupo es una estructura algebraica que consta de un conjunto no vacío de elementos y de una operación interna en dicho conjunto que satisface las



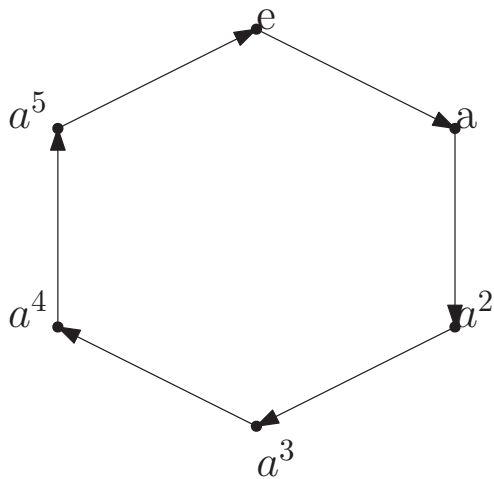


Figura 1.1:  $Z_6$  con conjunto generador  $S = \{1\}$

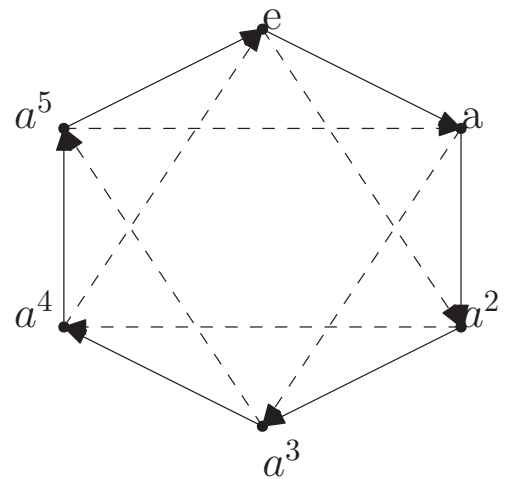


Figura 1.2:  $Z_6$  con conjunto generador  $S = \{1, 2\}$

propiedades asociativa, existencia de elemento neutro y existencia de elemento simétrico u opuesto. A partir de esto, la definición de digrafo de Cayley es la siguiente:

**Definición 1 (Digrafo de Cayley)**

Sea  $G$  un grupo y sea  $S$  un subconjunto de elementos de dicho grupo, se denomina grafo de Cayley  $Cay(S : G)$  al grafo que cumple las condiciones siguientes:

1. Cada elemento del grupo es un vértice de  $Cay(S : G)$
2. Sean  $u, v$  elementos de  $G$ , hay un arco de  $u$  a  $v$  si y solo si  $us = v$  para algún  $s \in S$

Estos grafos también se denominan digrafo de  $G$  con conjunto generador  $S$ .

Cabe destacar que la existencia de un arco de  $u$  a  $v$  no implica que haya un arco de  $v$  a  $u$ , tan solo relaciona los elementos en una dirección. Como el conjunto  $S$  puede tener más de un elemento, Arthur Cayley propuso que se asignara un color a cada arista para distinguir qué generador conecta un par dado de vértices. El resultado de aplicar esta idea es lo que se denomina un *grafo de color del grupo*. De manera similar, en vez de usar colores se pueden utilizar aristas de distintos tipos, ya sean de trazo completo, de rayas interrumpidas o a puntos. En las figuras 1.1 y 1.2 se muestran dos grafos de Cayley, en concreto del grupo  $(Z_6, +)$ :

Como se puede observar, un grafo de Cayley depende del conjunto de generadores que se elija, por lo tanto, para un solo grupo hay tantos posibles grafos como conjuntos de generadores esencialmente distintos se puedan considerar. En la figura 1.3 se muestra un grafo de Cayley asociado a un grupo no finito con un conjunto de generadores de cardinal 2

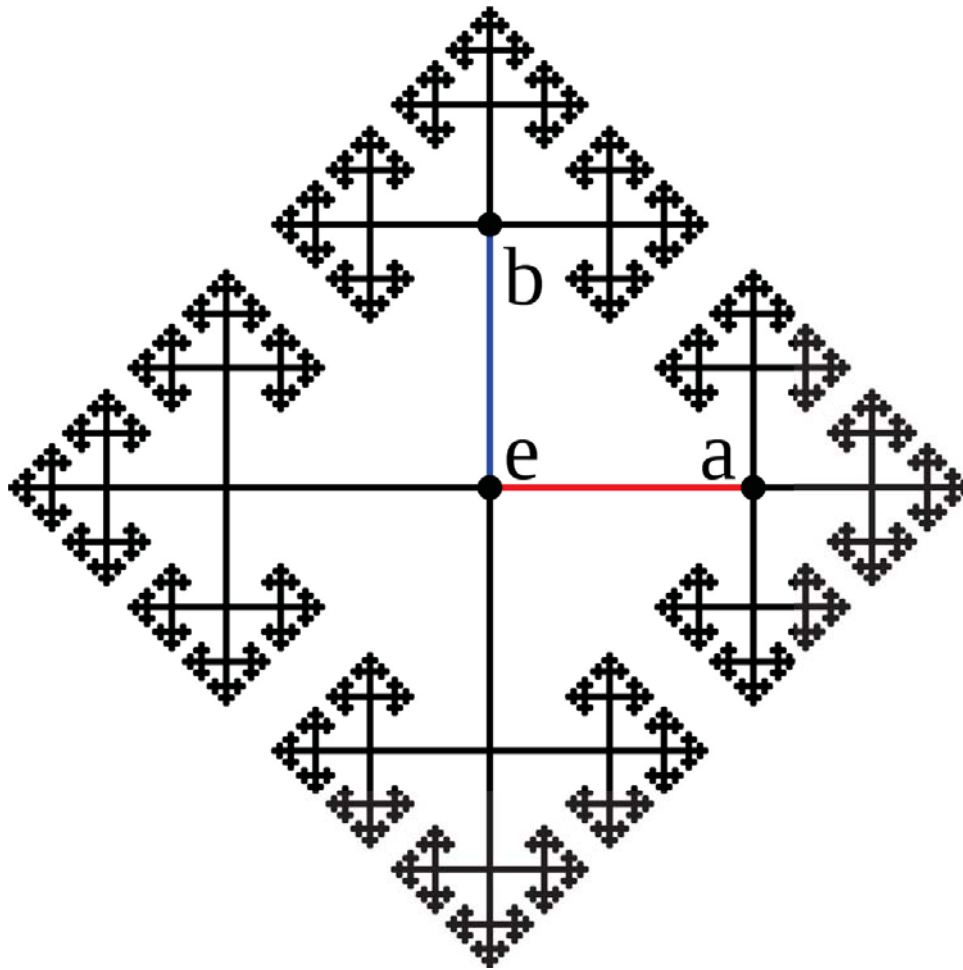


Figura 1.3: Grafo de Cayley de un grupo no finito

Los grafos asociados a grupos no finitos forman árboles dirigidos. Al generar estos grafos se puede aplicar un reescalado en el tamaño de las aristas y esto genera una estructura de tipo fractal, tal y como se aprecia en la imagen 1.3. En este trabajo solo se van a analizar grupos finitos y los resultados conocidos sobre ellos.

Finalmente y antes de pasar al siguiente capítulo, se va a explorar una propiedad común a los grafos de Cayley. A la vista de la definición de cómo se construye un digrafo

de Cayley, se observa que el número de arcos que salen de un vértice cualquiera es igual al número de generadores que hay en  $S$ . Así mismo, parece que el número de arcos que llega a un vértice cualquiera es también el número de generadores que hay en  $S$ . A continuación se pasa a demostrar que esto se cumple para todo digrafo de Cayley.

**Teorema 2** *Sea  $\text{Cay}(S : G)$  un digrafo de Cayley y sean  $\delta^-(v)$ ,  $\delta^+(v)$  los grados de salida y entrada de un cierto  $v \in G$  y  $n = |S|$  entonces:*

$$\forall v \in V, \quad \delta^-(v) = \delta^+(v) = n$$

**Demostración:**

Sea  $v$  un elemento del grupo  $\mathcal{G}$ ,

1.  $\delta^-(v) = n$

Por definición, para cada elemento  $v$  de  $G$  y cada elemento  $g$  de  $S$  se construye el elemento  $vg$  y la arista  $(v, vg)$ . Lo que hay que ver es que para cada vértice  $v$  distintos elementos  $g$  de  $S$  dan lugar a distintas imágenes.

Se razona por reducción al absurdo. Supóngase que  $\exists i, j \mid v * g_i = v * g_j$  y  $g_i \neq g_j$ ,  $i \neq j$ . Como  $v$  es un elemento del grupo  $\mathcal{G}$  entonces  $\exists v^{-1} \mid v^{-1} * v = e$ . Si  $v * g_i = v * g_j$  entonces  $v^{-1} * v * g_i = v^{-1} * v * g_j$  y por tanto  $g_i = g_j$ , lo que contradice que  $g_i \neq g_j$ , por lo que el enunciado anterior se cumple.

2.  $\delta^+(v) = n$

$\forall g \in S$ ,  $S \subset \mathcal{G}$ ,  $\exists g^{-1} \mid g^{-1} * g = e$ . Entonces basta definir  $a = v * g^{-1}$  para cada  $g \in S$  y se cumple que  $(v * g^{-1}) * g = v * (g^{-1} * g) = v$ .

Por consiguiente,  $\delta^+(v) = n$ .

Como los dos casos anteriores se cumplen, se puede concluir que el resultado anterior es cierto. ♣

Al intentar realizar varios dibujos de distintos grafos de Cayley, salta a la vista la aparente simetría que hay en las distintas representaciones. De hecho, una vez representado un grafo de Cayley, se puede borrar el etiquetado de cada vértice, elegir un vértice cualquiera y empezar a etiquetar los demás siguiendo los arcos y, finalmente, se llega a un nuevo etiquetado del grafo que es equivalente al etiquetado original. A continuación se formaliza esta idea:

**Lema 3** *Un grafo de Cayley admite al menos un automorfismo por cada uno de los elementos del grupo.*

*Demostración:*

Sea  $Cay(S : G)$  un digrafo de Cayley, se define la aplicación

$$f : Cay(S : G) \rightarrow Cay(S : G)$$

como  $f(v) = a * v$  para un  $a \in G$ .

1.  $f$  está bien definida, va de  $G$  en  $G$  porque usa la operación del grupo
2. Si  $f(v_1) = f(v_2)$ , es decir,  $a * v_1 = a * v_2$ , como existe  $a^{-1}$  se sigue que  $v_1 = v_2$
3. Sea  $v \in G$ , como existe  $a^{-1}$ , se puede considerar el elemento  $a^{-1} * v$  y se cumple que
 
$$f(a^{-1} * v) = a * a^{-1} * v = v$$

Tal como está definida, se ve que  $f(v) \in G \forall v \in G$ . Sean  $u, v \in G$  y  $g \in S$  tales que  $u * g = v$ , es decir que existe una arista entre  $u$  y  $v$  se intenta demostrar que existe una arista entre  $f(u)$  y  $f(v)$ , es decir,  $f(u) * g = f(v)$ . En efecto, como  $u * g = v$  se cumple que  $a * u * g = a * v$ , es decir que  $f(u) * g = f(v)$  como se quería probar.



Los grafos que cumplen esta propiedad se denominan vértice-transitivos.

## 1.2. Longitudes de los ciclos

Sea  $\mathcal{G}$  un grupo construido con el conjunto de generadores  $S = \{g_i \mid i \in \{1 \cdots n\}\}$ , y sea  $D$  el digrafo de Cayley asociado. Se supone que el conjunto de generadores es independiente, esto es,  $\forall i \in \{1 \cdots n\}, g_i \notin \langle g_j \rangle$  donde  $i \neq j$ . Entonces, de manera informal, parece que si se sale de un vértice y se quiere regresar a él, para poder completar un ciclo, cada uno de los generadores que se usan deberá intervenir un número de veces múltiplo de su orden. Por lo tanto la longitud de cualquier ciclo está estrechamente relacionada con los órdenes de los generadores que intervienen en dicho ciclo.

**Lema 4** *La longitud de un ciclo cualquiera contenido en el digrafo  $\text{Cay}(S : \mathcal{G})$  es combinación lineal de los ordenes de los generadores si estos son independientes.*

**Demostración:**

Sea  $C$  un ciclo cualquiera del grafo de Cayley. Dado que el grafo es vértice transitivo (Lema 3), se puede decir que el elemento neutro está en ese ciclo eligiendo una etiquetación adecuada y se toma como punto de inicio del ciclo. Entonces el ciclo se puede ver como una sucesión de generadores en  $S$ . Entonces, como son independientes, por cada generador distinto que se use, para volver al elemento neutro la sucesión tiene que contener ese generador el mismo número de veces que su orden o un múltiplo de esta cantidad. ♣

## Capítulo 2

# Circuitos y caminos hamiltonianos

Una de las cuestiones más estudiadas sobre grafos dirigidos ha sido la existencia de caminos o ciclos hamiltonianos. Este problema tiene su raíz en un ejercicio planteado por el matemático irlandés Sir William Hamilton en el año 1859. El problema consistía en encontrar una manera de visitar todos los vértices de un dodecaedro regular pasando por sus aristas de tal manera que se visitaran todos los vértices tan solo una vez y se acabara en el vértice de partida. En la figura 2.1 se puede ver una solución a este problema. Comenzando en el 1, basta con seguir los vértices en orden ascendente hasta el 20 y volver al 1 obtener un ciclo. Como el grafo no es dirigido, también se puede recorrer los vértices desde el 20 en orden descendente. El ciclo que se obtiene es el mismo.

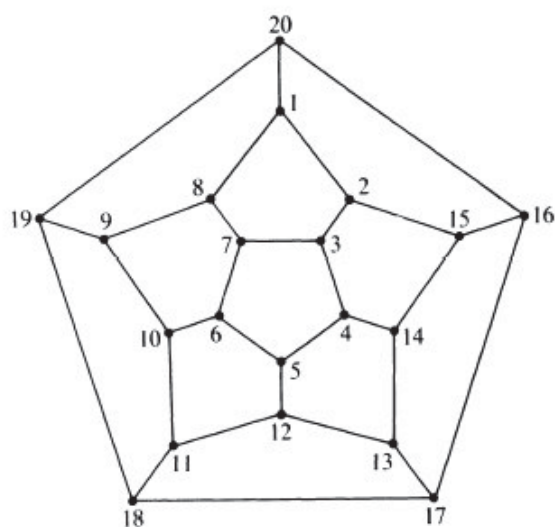


Figura 2.1: Ejemplo de solución del problema de Hamilton

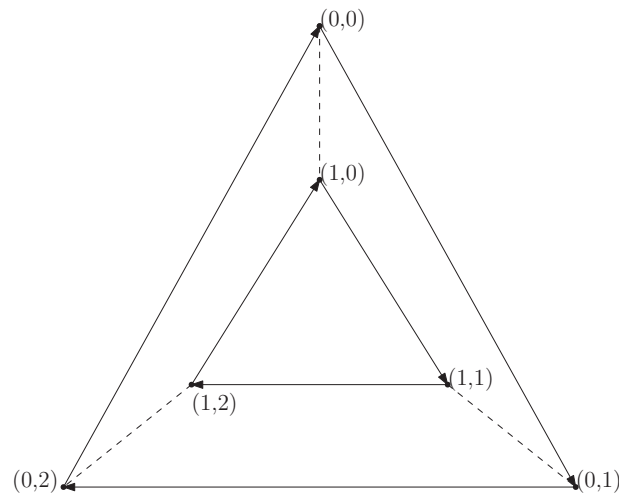


Figura 2.2: Grafo del grupo  $Z_2 \oplus Z_3$

Este tipo de ejercicio es aplicable a cualquier digrafo, y el objetivo es encontrar un ciclo dirigido que pase por todos los vértices sólo una vez volviendo al vértice inicial. Esta sucesión de aristas dirigidas es lo que se denomina un circuito hamiltoniano del grafo. Si se encuentra una sucesión de aristas que pasa por todos los vértices sólo una vez pero no vuelve al vértice inicial se denomina camino hamiltoniano. En este capítulo se va a estudiar la existencia de estos ciclos o caminos hamiltonianos en grafos de Cayley para grupos finitos. Se analizan y detallan las demostraciones originales de los resultados obtenidos por Joseph A. Gallian [1] y se ilustran algunos casos.

Para este estudio se ha seleccionado la familia de grafos asociados a la familia de grupos  $Z_m \oplus Z_n$  con los generadores “canónicos”, es decir,  $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$ . Estos grafos se pueden dividir de varias maneras en distintas subfamilias, en este caso se ha optado por dividirlos en dos: aquellos en los que  $n$  y  $m$  son primos relativos y aquellos en los que no lo son. A continuación se ha estudiado la existencia de ciclos y caminos hamiltonianos, empezando por ciclos, por ser el problema original y más restrictivo. Es evidente que si hay un ciclo hamiltoniano (dirigido o no) y se quita una arista cualquiera, se tiene un camino; pero si se tiene un camino y los vértices extremos no son adyacentes, no se puede generar un ciclo.

En el caso de que  $n$  y  $m$  sean primos relativos, se puede observar la imagen 2.2 como ejemplo de grafo de Cayley para tratar de encontrar dicho ciclo. A continuación, se pasa

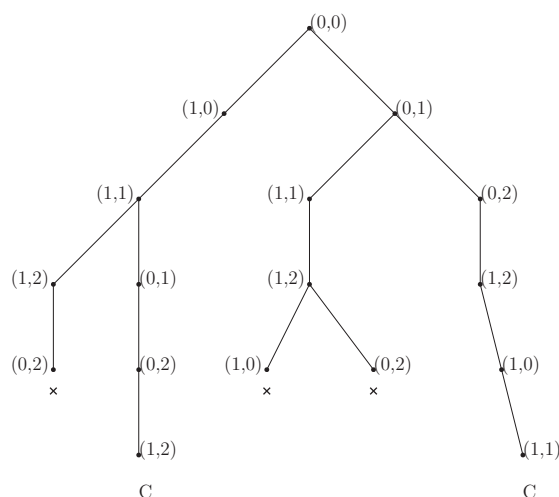


Figura 2.3: Árbol de exploración para buscar el posible ciclo

a desarrollar lo estudiado para estos grafos. Un ejemplo sencillo, con pocos vértices y que admite una representación plana es el digrafo de Cayley del grupo  $Z_2 \oplus Z_3$  con conjunto de generadores  $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$ .

Una exploración directa como la mostrada en la figura 2.3 permite concluir que no hay ningún ciclo hamiltoniano. ¿Será este el caso de todo digrafo de esta familia? En el siguiente teorema se obtiene la respuesta a la pregunta recién formulada.

**Teorema 5** (Gallian [1]) *Sea un grafo  $\text{Cay}(\{(1, 0), (0, 1)\} : Z_m \oplus Z_n)$  donde  $n$  y  $m$  son primos relativos, no existe un circuito en ese grafo que sea hamiltoniano.*

### Demostración:

Para ilustrar esta demostración, se representa el grafo como una red rectangular coordinada usando los elementos del grupo  $Z_m \oplus Z_n$ , tal como se muestra en la figura 2.4, y se razona por reducción al absurdo. Supóngase que existe un ciclo hamiltoniano en el grafo y sea  $(a, b)$  un vértice cualquiera del grafo en el que el ciclo sale horizontalmente, es decir que se aplica el generador  $(0, 1)$ . Esto significa que el vértice  $(a, b + 1)$  está también en el ciclo. Dado lo anterior, se puede deducir que del vértice  $(a - 1, b + 1)$  también se debe salir de forma horizontal. Si no se saliera de forma horizontal, el vértice  $(a, b + 1)$  sería visitado dos veces, lo cual contradice el supuesto de que el ciclo es hamiltoniano. Aplicando esta sencilla idea sucesivamente, se llega a que de los vértices del conjunto  $(a, b) + \langle(-1, 1)\rangle$  se tiene que salir de manera horizontal. Sin embargo, si  $n$  y  $m$  son primos relativos, el conjunto  $\langle(-1, 1)\rangle$  es la totalidad de vértices del grafo. Así, se llega a que el ciclo hamiltoniano



es un conjunto de ciclos disjuntos, ya que si de todos los vértices se sale horizontalmente, de ninguno de ellos se puede salir de manera vertical. Esto contradice el supuesto de que existe un ciclo hamiltoniano. ♣

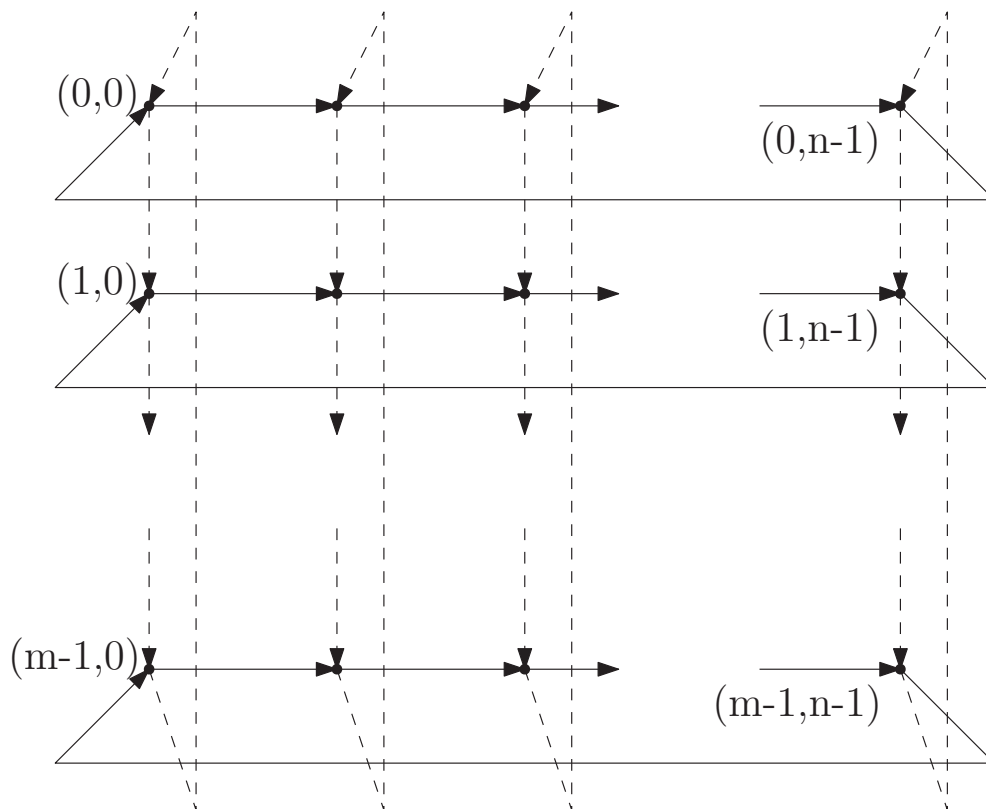


Figura 2.4:  $Cay(\{(1,0), (0,1)\} : Z_m \oplus Z_n)$

A la vista de la demostración anterior, se podría conjeturar que en aquellos grafos en los que  $n$  y  $m$  no son primos relativos sí existe un ciclo hamiltoniano. Sin embargo, según los resultados obtenidos por W.T. Trotter y P. Erdős [3], no todos los grafos de Cayley de la familia de grupos en los que  $n$  y  $m$  no son primos relativos tienen ciclos hamiltonianos. Encontrar un ejemplo que no tenga un ciclo hamiltoniano puede ser complicado. De hecho, el menor ejemplo que se conoce es el grafo  $Cay(\{(1,0), (0,1)\} : Z_n \oplus Z_m)$  con valores  $n = 2^4 * 5 * 11$  y  $m = 2^4 * 3 * 7 * 13$ .

Para el caso afirmativo, sí se conocen subfamilias de grafos de Cayley en las que existe un ciclo hamiltoniano, en concreto para el caso de aquellos grafos en los que  $n|m$ .

**Teorema 6** (Gallian [1]) *Sea un grafo  $Cay(\{(1,0), (0,1)\} : Z_m \oplus Z_n)$  tal que  $n|m$ . Existe un ciclo hamiltoniano en ese grafo.*

### Demostración:

Como  $n|m$ , se puede decir que  $m = k * n$ , por lo que se puede ver el grupo como  $Z_{kn} \oplus Z_n$ . Gráficamente, si se ve el grafo como varios cuadrados de lado  $n$ , el ciclo construido como se muestra a continuación cubre todos los vértices. Empezando en el  $(0,0)$ , se procede a moverse horizontalmente hasta completar el nivel en el vértice  $(n-1,0)$ . Una vez completo, se baja verticalmente al siguiente nivel, y se vuelve a completar moviéndose horizontalmente. Se repite esta estrategia hasta completar el primer cuadrado. A continuación, se baja al cuadrado siguiente y se repite la estrategia. Una vez se han recorrido todos los cuadrados, se acabará en el vértice  $(kn-1,0)$  faltando únicamente moverse una vez más en vertical para cerrar el ciclo en el  $(0,0)$ . En la imagen 2.5 se ilustra cómo se construye un cuadrado del ciclo propuesto. ♣

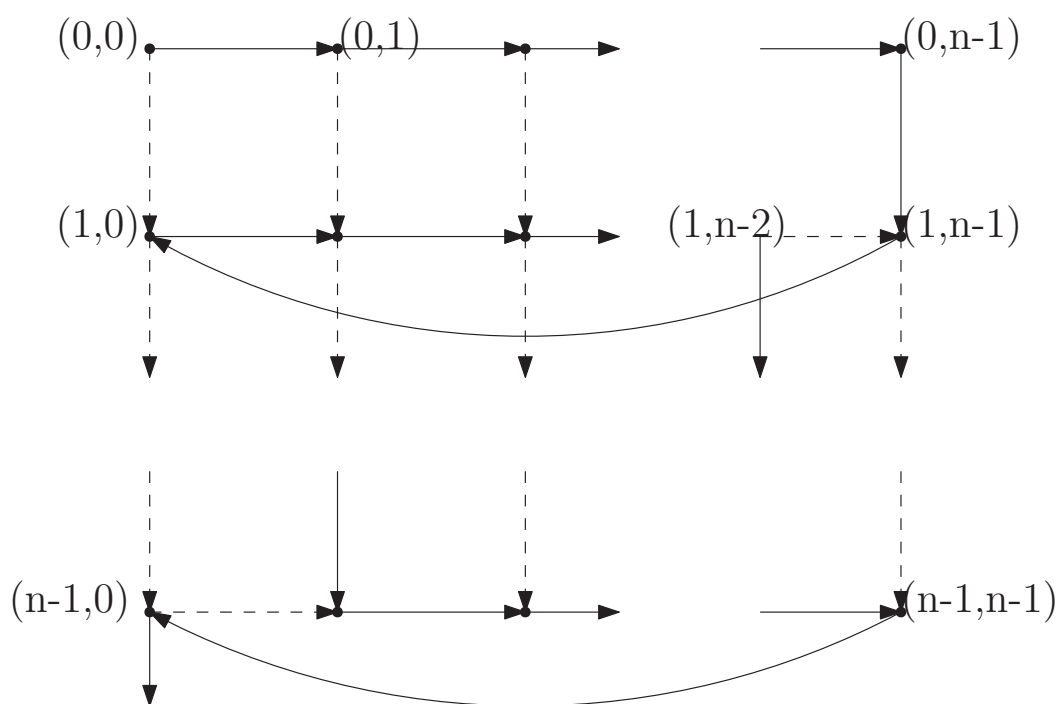


Figura 2.5: Cuadrado del ciclo hamiltoniano

Ahora que ya se ha visto la casuística para ciclos, se estudia lo que ocurre con los caminos. Para el caso de ciclos, en aquellos grupos en los que  $n$  y  $m$  son primos relativos se sabe que no hay ciclo posible que sea hamiltoniano. Si no lo son, hay casos en los que si existe dicho ciclo pero hay otros en los que no, siendo la distinción entre estos algo más compleja. Sin embargo para caminos, tal y como demostraron Holsztýnski y Nathanson por primera vez en 1976 [2], existe un camino hamiltoniano en todo grafo de Cayley de

un grupo abeliano.

**Teorema 7** (Gallian [1]) *Sea un grafo  $Cay(S : G)$  con  $G$  un grupo abeliano y siendo  $S$  un grupo de generadores no vacío, existe un camino hamiltoniano en ese grafo.*

**Demostración:**

Se procede por inducción sobre el cardinal de  $S$ .

1.  $|S| = 1$

Si solo se tiene un generador, el grafo es un ciclo dirigido, por lo que resulta obvio que existe un camino hamiltoniano.

2. Se supone (hipótesis de inducción) que para  $|T| = k \geq 1$  existe un camino hamiltoniano.

3. Hay que comprobar que para un sistema generador  $S$  con  $|S| = k + 1$ , es decir,  $S = T \cup \{s\}$ , también hay camino hamiltoniano.

Para el conjunto de generadores  $T$  se sabe, por hipótesis de inducción, que existe un camino hamiltoniano en  $Cay(T : H)$ , donde  $H = \langle T \rangle$ .

Como  $G$  es un grupo abeliano, tiene sentido construir el grupo cociente  $G/H$ , y las clases laterales a las que da lugar este grupo son  $H, H * s, H * s^2, H * s^3, \dots, H * s^n$  donde  $n = |G|/|H| - 1$ . Sea  $a_1, a_2, \dots, a_k$  una secuencia de generadores que definen un camino hamiltoniano en  $Cay(T : H)$ . Ya que  $T \in S$  para  $Cay(S : G)$  se puede definir un camino utilizando la secuencia de generadores  $a_1, a_2, \dots, a_k$  que cubra todos los elementos de  $H$ . Tras esto, se añade a la secuencia el elemento  $s$ , accediendo así a la clase lateral  $H * s$ . A continuación, se repite una vez más la secuencia  $a_1, a_2, \dots, a_k$  para generar todos los elementos de esta clase. Finalmente, se repite esta estrategia hasta haber visitado todas las clases del grupo cociente, generando así un camino en  $Cay(S : G)$ .

Para construir el camino, se ha utilizado la idea de que dada una secuencia  $a_1, a_2, \dots, a_k$  de generadores que crea un circuito hamiltoniano a partir de un vértice  $a$  en un determinado grafo, esta misma secuencia también genera un camino hamiltoniano en ese grafo empezando desde un vértice cualquiera. Supóngase que se dispone del conjunto de elementos  $\{a, a * a_1, a * a_1 * a_2, \dots, a * a_1 * \dots * a_k\}$ , que son todos los

elementos del grupo contruidos desde  $a$  aplicando la secuencia dada. Si ahora se aplica la secuencia desde un vértice cualquiera distinto de  $a$ , que se va a denominar  $b * a$ , se obtiene el siguiente conjunto:  $\{b * a, b * a * a_1, b * a * a_1 * a_2, \dots, b * a * a_1 * \dots * a_k\}$ . Por reducción al absurdo, supóngase ahora que dos elementos  $b * a * a_1 * \dots * a_s$ ,  $b * a * a_1 * \dots * a_t$  con  $t > s$  del conjunto anterior son iguales. Esto implica que, como existe el elemento  $b^{-1}$ , los elementos  $a * a_1 * \dots * a_s$  y  $a * a_1 * \dots * a_t$  también son iguales, lo cual contradice el supuesto inicial.



## 2.1. Aplicaciones de circuitos hamiltonianos en grafos de Cayley

Dada la estructura de los grafos de Cayley, sirven como excelentes modelos para redes de comunicación de ordenadores. En este caso, la existencia de caminos o ciclos hamiltonianos es una propiedad muy importante a la hora de elaborar algoritmos de ordenación para dichas redes. En concreto, para el diseño y análisis de estas redes se utiliza el conjunto de grupos  $S_n$  tomando como conjunto de generadores al conjunto de trasposiciones. Los caminos y ciclos hamiltonianos en digrafos de Cayley son objeto de estudio también en varios temas de Teoría de Grupos. Al fin y al cabo, un camino hamiltoniano no deja de ser un orden total de los elementos de dicho grupo.

Una de las primeras utilizaciones conocidas de los grafos de Cayley fue en el año 1948. Fue entonces cuando R.A. Rankin utilizó esta interpretación de los caminos en grafos de Cayley como órdenes totales en un grupo para demostrar que ciertos problemas de “sonado de campanas” no se podían resolver con los métodos tradicionales. Más adelante en 1981 utilizando los conceptos anteriormente expuestos sobre caminos hamiltonianos en grafos de Cayley, se diseñó un algoritmo para generar gráficos por ordenador que representaran patrones repetitivos en el plano hiperbólico, similares a algunos patrones diseñados por Escher. Dicho algoritmo permite generar patrones hiperbólicos dibujados a color que se pueden elegir de cinco clases distintas, todas ellas infinitas, de grupos de simetrías.

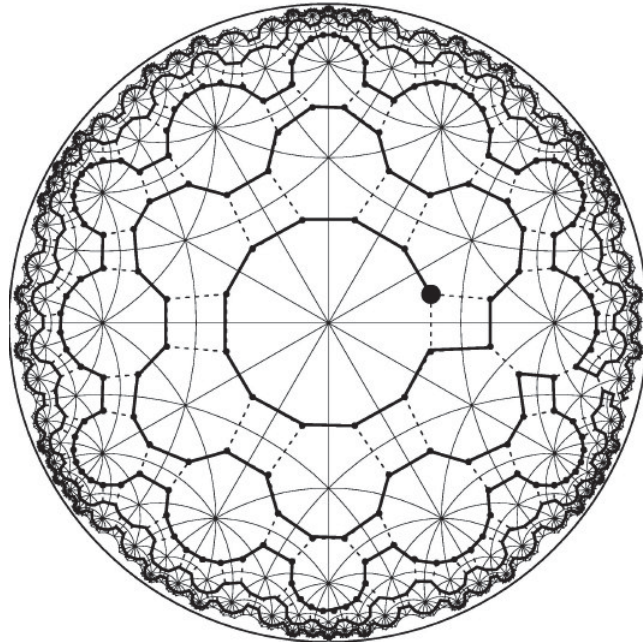


Figura 2.6: Camino hamiltoniano en digrafo de Cayley

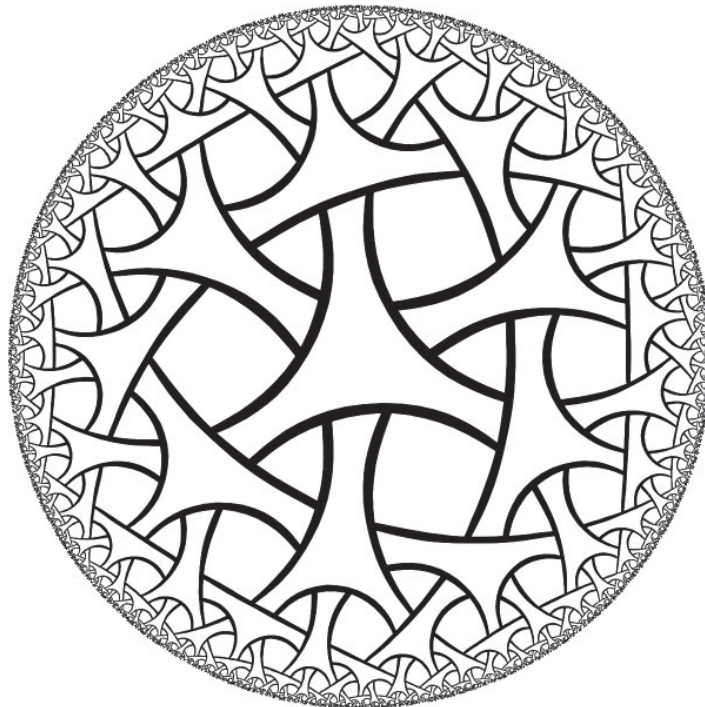


Figura 2.7: Diagrama tipo Escher



Figura 2.8: M.C. Escher Circle limit 1



# Capítulo 3

## Dominación en grafos de Cayley

### 3.1. Cuestiones generales

En esta sección se va a estudiar la existencia de los conjuntos dominantes en digrafos de Cayley. Originalmente, este problema se planteó para grafos y consistía en averiguar si el número de vértices necesarios para dominar un grafo  $G$ , conocido como  $\gamma(G)$ , era menor que un cierto  $K$  dado. Este problema, según demostraron Garey y Johnson en el año 1979 [4], es NP-Completo. En el caso de los grafos de Cayley aparece la dificultad añadida de que se trata de digrafos, por lo que la definición de conjunto dominante cambia un poco respecto de la general. Se define conjunto dominante de la siguiente manera:

**Definición 8 (Conjunto dominante en digrafos)** *Se denomina conjunto dominante para un digrafo  $D(V, E)$  a un subconjunto  $V'$  de  $V$  tal que cada vértice que no pertenece a  $V'$  es apuntado por al menos una flecha desde un vértice del conjunto  $V'$ .*

Ahora que ya se dispone de esta definición, se puede pasar a un concepto algo más fino y que deriva del concepto de conjunto dominante, y es el de conjunto dominante perfecto. Cuando se busca un conjunto dominante, el objetivo es que todo vértice que no esté en él quede “supervisado” por al menos un vértice del conjunto. De esta manera, puede darse el caso de que existan vértices en el grafo que estén vigilados por más de un vértice del conjunto dominante. Esta situación implica que no se están utilizando en su máxima capacidad cada uno de los vértices del conjunto, o lo que es lo mismo, se está vigilando menos de lo que podría conseguir ese conjunto en un principio, a pesar de que el grafo queda dominado y por lo tanto ,el objetivo principal, cumplido. Así surge el concepto



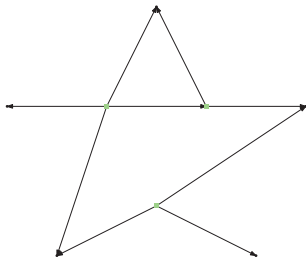


Figura 3.1: Ejemplo de conjunto dominante, en verde

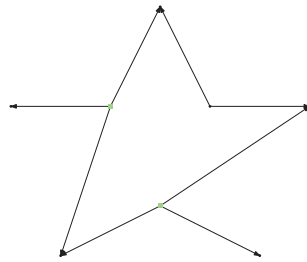


Figura 3.2: Ejemplo de conjunto no dominante, en verde

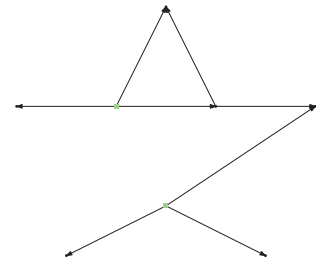


Figura 3.3: Ejemplo de conjunto dominante perfecto, en verde

de conjunto dominante perfecto, que es aquel en el que cada vértice que no pertenece al conjunto dominante está dominado por uno y solo uno de los vértices de dicho conjunto. Formalmente:

**Definición 9 (Conjunto dominante perfecto)** Se denomina conjunto dominante perfecto de un digrafo  $D(V, E)$  a un subconjunto  $V'$  de  $V$  que sea dominante y tal que cada vértice que no pertenece a  $V'$ , es visto desde tan solo un vértice del conjunto  $V'$ .

de los ejemplos anteriores, el que aparece en la figura 3.3 es dominante perfecto y el que aparece en la figura 3.1 es dominante pero no perfecto.

Siguiendo el razonamiento anterior, se puede decir que para aprovechar al máximo cada vértice, toda arista que salga de un vértice del conjunto dominante tendría que tener en el otro extremo a un vértice que no estuviera en este conjunto. Si el grado máximo de cada vértice de un grafo es  $n$ , el número de vértices que puede llegar a dominar un determinado conjunto dominante  $V'$  es:

$$n * |V'|$$

Además, para cualquier conjunto dominante  $V'$ , el número de vértices disponibles para dominar es  $|V| - |V'|$ . Reuniendo estos dos resultados se llega a lo siguiente:

**Teorema 10 (Berge [4])** Sea  $G(V, A)$  un grafo cuyo grado máximo es  $n$  entonces se cumple que:

$$|V'| \geq \frac{|V|}{(n+1)}$$

**Demostración:**

Como  $V'$  es un conjunto dominante, el número de vértices restantes no puede ser mayor que la capacidad de dominación de  $V'$ , por lo que se tiene la siguiente desigualdad:

$$|V| - |V'| \leq n * |V'|$$

Despejando:

$$|V| - |V'| \leq n * |V'| \rightarrow |V'| \geq \frac{|V|}{(n + 1)}$$



Aunque aquí se cita a Berge, el primero en dar una cota inferior para el número de dominación en función del orden del grafo fue Ore.

La demostración que se presenta en este trabajo es original y se obtuvo tras analizar primero el caso de grafos regulares, en los que es más sencillo.

Ahora que se han introducido los conceptos básicos de dominación en grafos, se va a proceder a buscar conjuntos dominantes en distintos grafos de Cayley. Se sabe que todos los vértices de un digrafo de Cayley tienen el mismo grado de salida, que es el número de generadores que se utilicen para construir el grafo. Por lo tanto, estos grafos están en la situación del teorema anterior ya que la demostración sigue siendo válida si se consideran grados de salida en el conjunto dominante y de entrada en los demás.

Como una búsqueda sin más filtros resulta muy compleja, se empieza por el caso en el que se construye el digrafo de Cayley con un solo generador. De esta manera, se tiene un caso del que partir y así poder avanzar según se sube en el número de generadores.

**Un generador**

Con un generador es bastante sencillo ver que los posibles grafos resultantes son ciclos cuya longitud depende del número de elementos del grupo. También, el mayor número de vértices dominables por un determinado vértice en este caso es 1, su grado. Entonces se puede deducir, utilizando el resultado previo, que el número mínimo de vértices necesarios para dominar un digrafo  $D(V, E)$  de este tipo es  $\lceil \frac{|V|}{2} \rceil$ .

Por lo tanto, para la familia de digrafos de Cayley asociados a la familia de grupos  $\mathbb{Z}_{2n}$ , se puede definir el conjunto de vértices  $V' = \{2 * k \mid k \in \{0 \dots n - 1\}\}$  como conjunto candidato. Este conjunto es un conjunto dominante y también es un conjunto dominante

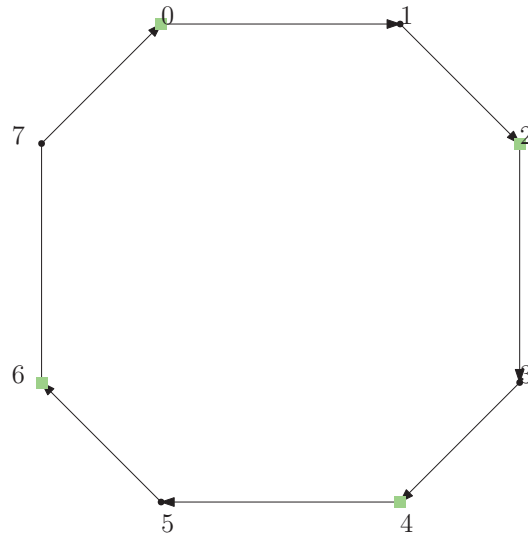


Figura 3.4: Conjunto dominante para un generador(verde)

perfecto, tal como se ilustra en la imagen 3.4. Otra opción es considerar como conjunto dominante a los impares.

### Dos generadores

Trabajar con dos generadores genera grafos que son más complejos que los ciclos (el caso de  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  es bastante similar a un ciclo). Para reducir la complejidad del problema, se van a estudiar aquellos grafos generados por dos elementos que sean independientes entre ellos, tal como se ha definido el capítulo sobre caminos hamiltonianos. Se sabe que el grado de salida de cada vértice es el mismo que el número de generadores utilizados, en este caso, dos. Eso significa que, como mucho, cada vértice puede dominar a otros dos vértices. Igual que antes, se sabe que la cota inferior es  $\lceil \frac{|V|}{3} \rceil$

Por lo tanto, para la familia de digrafos de Cayley de la familia de grupos  $\mathbb{Z}_{3n} \oplus \mathbb{Z}_{3n}$  se puede definir el conjunto de vértices  $V' = \{(a, a + 3 * k) \mid k \in \{0 \dots n - 1\}, a \in \mathbb{Z}_{3n}\}$  como conjunto candidato. A continuación se demuestra que este conjunto es un conjunto dominante y además es un conjunto dominante perfecto y se ilustra en un ejemplo.

**Teorema 11** *El conjunto  $V' = \{(a, a+3*k) \mid k \in \{0 \dots n-1\}, a \in \mathbb{Z}_{3n}\}$  es un conjunto dominante perfecto para los digrafos de Cayley  $\text{Cay}(\{(1, 0), (0, 1)\} : \mathbb{Z}_{3n} \oplus \mathbb{Z}_{3n})$*

**Demostración:**

Se define  $f : (\mathbb{Z}_{3n} \oplus \mathbb{Z}_{3n})^2 \rightarrow \mathbb{Z}_{3n} \oplus \mathbb{Z}_{3n}$  como  $f((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ , donde  $+$  representa la suma módulo  $3n$ . Probar que  $V'$  es un conjunto dominante perfecto es lo mismo que demostrar que  $f$  restringida a  $V' \times S'$  es una función biyectiva donde  $S' = S \cup \{(0, 0)\}$ , es decir,  $S' = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ .

En primer lugar se prueba que es sobreyectiva. Sea  $b \in \mathbb{Z}_{3n} \oplus \mathbb{Z}_{3n}$ .

1.  $b \in V'$

Si  $b \in V'$ , es inmediato que  $b = f(b, (0, 0))$  entonces  $b \in f(V', S')$

2.  $b \in (\mathbb{Z}_{3n} \oplus \mathbb{Z}_{3n}) \setminus V'$

Si  $b \notin V'$  y  $b = (b_1, b_2)$  se sabe que  $b_2 \neq b_1 + 3 * k$  entonces, dada la simetría en los digrafos de Cayley esto se puede reducir a dos casos:

a)  $b = a + (0, 1)$  donde  $a \in V'$ :

Si  $b = a + (0, 1)$  entonces  $b = f(a, (0, 1))$  por tanto  $b \in f(V', S')$

b)  $b = a + (0, 2)$

donde  $a \in V'$ : Para este  $a$  se puede elegir  $c = a + (-1, -1 + 3) \in V'$  y verifica que:

$f(c, (1, 0)) = c + (1, 0) = a + (-1, -1 + 3) + (1, 0) = a + (0, 2) = b$  por lo tanto  $b \in f(V', S')$

Como  $\forall b \in \mathbb{Z}_{3n} \oplus \mathbb{Z}_{3n} \exists a \in V', g \in S' \mid b = f(a, g)$  queda probado que  $f$  es sobreyectiva. En segundo lugar, para probar que es inyectiva basta ver que el cardinal de  $V' \times S'$  es el mismo que el de  $\mathbb{Z}_{3n} \oplus \mathbb{Z}_{3n}$ .

$$|V' \times S'| = |V'| \cdot |S'| = (3n * n) * 3 = 3n * 3n = |\mathbb{Z}_{3n} \oplus \mathbb{Z}_{3n}|$$

Queda probado que es biyectiva. ♣

A la vista de lo anterior, puede parecer complicado intentar generalizar el resultado para la familia de grupos  $\mathbb{Z}_{3n} \oplus \mathbb{Z}_{3m}$ . Si se ve el grafo tal y como se muestra en la figura

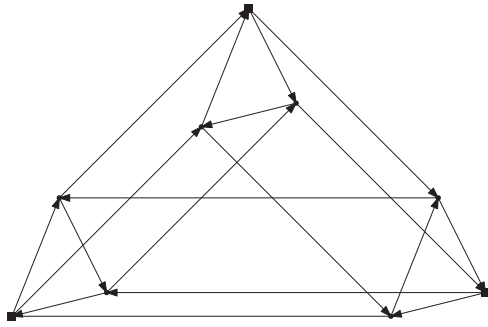


Figura 3.5: Conjunto dominante en  $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$ , marcado en cuadrados

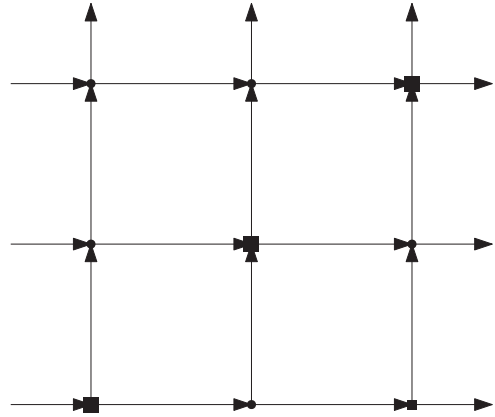


Figura 3.6: Conjunto dominante en  $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$  en red

3.5, ver que el conjunto dado por los vértices marcados con cuadrados es el conjunto dominante  $V'$  descrito anteriormente no es directo. Sin embargo, si en vez de disponer el grafo de esta manera se representa en forma de cuadrícula, la situación cambia. De esta manera, es más visible el conjunto dominante.

Tal y como está la red en la figura 3.6, se ve que cada flecha horizontal de las de salida del digrafo da la vuelta al grafo y conecta por el otro lado en el mismo nivel, así se garantiza que todos los vértices quedan cubiertos. Además, este dibujo da juego para combinarlo como si se tratara de piezas. Si se hiciera una copia de la figura 3.6, se podrían pegar las aristas del borde derecho de la pieza original con las aristas de entrada del borde izquierdo de la copia, y las aristas del borde derecho de la copia con las aristas del borde izquierdo de la pieza original. De esta manera se construye un nuevo digrafo que corresponde al grupo  $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_6$  y que, gracias a como está construida la pieza y el conjunto dominante, sigue estando dominado perfectamente por los vértices señalados por cuadrados. De esta manera se puede ver que el conjunto descrito para los digrafos de la familia  $\mathbb{Z}_{3n} \oplus \mathbb{Z}_{3n}$  también es válido para la familia de digrafos de los grupos de la forma  $\mathbb{Z}_{3n} \oplus \mathbb{Z}_{3m}$ . Formalizando lo anterior:

**Lemma 12** *El conjunto  $V' = \{(a, a + 3 * k \text{ mod } 3m) \mid k \in \{0 \dots n - 1\}, a \in \mathbb{Z}_{3n}\}$  es un conjunto dominante perfecto para los digrafos de Cayley  $Cay(\{(1, 0), (0, 1)\} : \mathbb{Z}_{3n} \oplus \mathbb{Z}_{3m})$*

#### **Demostración:**

Tal y como se ha razonado antes la estructura básica es la que aparece en la figura 3.6. A partir del digrafo de Cayley  $Cay(\{(1, 0), (0, 1)\} : \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3)$  se pueden generar

varias piezas iguales que, al irse añadiendo, generan digrafos de Cayley de la familia de  $Cay(\{(1, 0), (0, 1)\} : \mathbb{Z}_{3n} \oplus \mathbb{Z}_{3m})$  donde se puede visualizar el conjunto dominante. Redirigiendo las aristas de ambas piezas para que las aristas tengan como vértice de destino el vértice equivalente a su vértice original de destino pero en el grafo inicial, se consigue un digrafo resultante que representa al grupo buscado y que además mantiene la propiedad de dominación por vértices que cumplía el grafo original. Se puede decir esto ya que los vértices que antes estaban dominados por vértices de los que se han separado, ahora están dominados por otro vértice equivalente.

Para crear el grafo del grupo  $Cay(\{(1, 0), (0, 1)\} : \mathbb{Z}_{3n} \oplus \mathbb{Z}_{3m})$  para  $n, m$  fijos, basta con “unir”  $n * m$  piezas para formar una cuadrícula de  $n * m$ . ♣

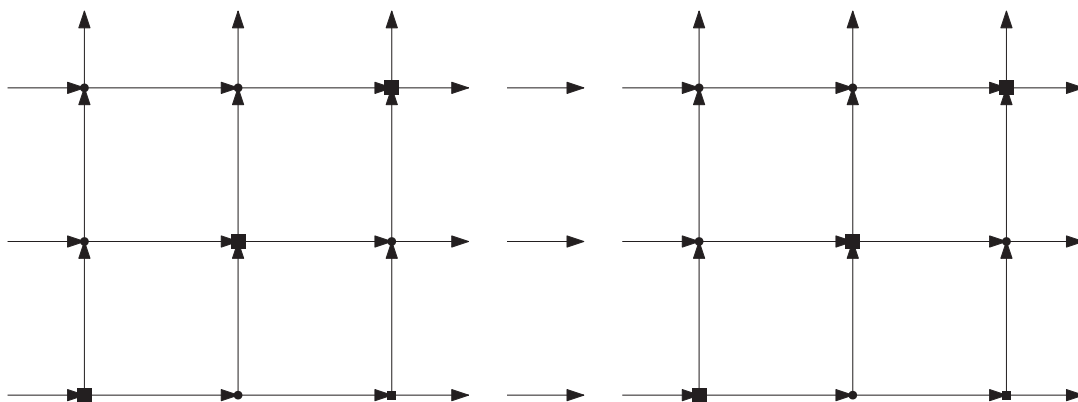


Figura 3.7: Juntar piezas para el grafo de  $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_6$

### Tres generadores

Al igual que se dijo de los digrafos generados por dos generadores, en el caso de tres los grafos generados son quizá incluso más complejos, puesto que una representación en cuadrícula no ayuda a visualizar el conjunto. Siguiendo el razonamiento de los casos anteriores, se sabe que el máximo número de vértices dominados por un vértice dado es tres, por lo que el número mínimo de vértices necesarios para dominar el grafo será  $\lceil \frac{|V|}{4} \rceil$ .

Para probar que este número se alcanza, se hace una prueba formal, análoga al caso de dos generadores. El modelo general sería  $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_t$ , pero para mostrar la construcción en un caso que resulte claro se elige la familia de digrafos de Cayley de la familia de grupos  $\mathbb{Z}_{4n} \oplus \mathbb{Z}_{4n} \oplus \mathbb{Z}_{4n}$ . Para esta familia en particular, el conjunto de vértices seleccionado va a ser  $V' = \{(a, a + 2 * j, a + 2 * k) \mid k, j \in \{0 \dots n - 1\}, a \in \mathbb{Z}_{4n}\}$ .

**Lema 13** *El conjunto  $V' = \{(a, a + 2 * j, a + 2 * k) \mid k, j \in \{0 \cdots n - 1\}, a \in \mathbb{Z}_{4n}\}$  es un conjunto dominante perfecto para la familia de digrafos de Cayley de la familia de grupos  $\mathbb{Z}_{4n} \oplus \mathbb{Z}_{4n} \oplus \mathbb{Z}_{4n}$ .*

**Demostración:**

Se define  $f : (\mathbb{Z}_{4n} \oplus \mathbb{Z}_{4n} \oplus \mathbb{Z}_{4n})^2 \rightarrow \mathbb{Z}_{4n} \oplus \mathbb{Z}_{4n} \oplus \mathbb{Z}_{4n}$  como  $f((a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$  donde  $+$  denota la suma en módulo  $4n$ . El conjunto de generadores será  $S = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ . Entonces demostrar que  $V'$  es un conjunto dominante perfecto es lo mismo que demostrar que  $f$  restringida a  $V' \times S'$  es una función biyectiva donde  $S' = S \cup \{(0, 0, 0)\}$

En primer lugar, se va a demostrar que  $f$  es sobreyectiva. Sea  $b$  un elemento de  $\mathbb{Z}_{4n} \oplus \mathbb{Z}_{4n} \oplus \mathbb{Z}_{4n}$

1.  $b \in V'$

Si  $b \in V'$ , como  $b = f(b, (0, 0, 0))$  entonces  $b \in f(V', S')$

2.  $b \in (\mathbb{Z}_{4n} \oplus \mathbb{Z}_{4n} \oplus \mathbb{Z}_{4n}) \setminus V'$

Si  $b \notin V'$  entonces se sabe que  $b_1 \neq b_2 + 2 * j, b_1 \neq b_3 + 2 * k, b_2 \neq b_3 + 2 * l$ .

Seleccionemos un  $a \in V'$  como referencia donde  $a_3 = b_3$ . Entonces se cumple una de las siguientes:

a)  $b = a + (0, 0, 1)$

$b \in f(V', S')$

b)  $b = a + (0, 0, 1)$

$b \in f(V', S')$

c)  $b = a + (1, 0, 0)$

$b \in f(V', S')$

d)  $b = a + (1, 1, 0)$

Sea  $c = a - (1, 1, 1) + (2, 2, 0)$ . Entonces

$$f(c, (0, 0, 1)) = c + (0, 0, 1) = a - (1, 1, 1) + (2, 2, 0) + (0, 0, 1) = b$$

por lo que  $b \in f(V', S')$

Las otras posibilidades se pueden resolver usando un  $a$  distinto y aplicando uno de los casos anteriores gracias a la simetría en el grafo.

Como  $\forall b \in \mathbb{Z}_{4n} \oplus \mathbb{Z}_{4n} \oplus \mathbb{Z}_{4n} \quad \exists a \in D, g \in S' \mid b = f(a, g)$  entonces  $f$  es sobreyectiva. En segundo lugar, para probar que es inyectiva basta ver que el cardinal de  $V' \times S'$  es el mismo que el de  $\mathbb{Z}_{4n} \oplus \mathbb{Z}_{4n} \oplus \mathbb{Z}_{4n}$ .  $|V' \times S'| = |V'| * |S'| = (4n * 2n * 2n) * 4 = 4n * 4n * 4n = |\mathbb{Z}_{4n} \oplus \mathbb{Z}_{4n} \oplus \mathbb{Z}_{4n}|$

Queda demostrado que es biyectiva. ♣

**Interpretación geométrica:**

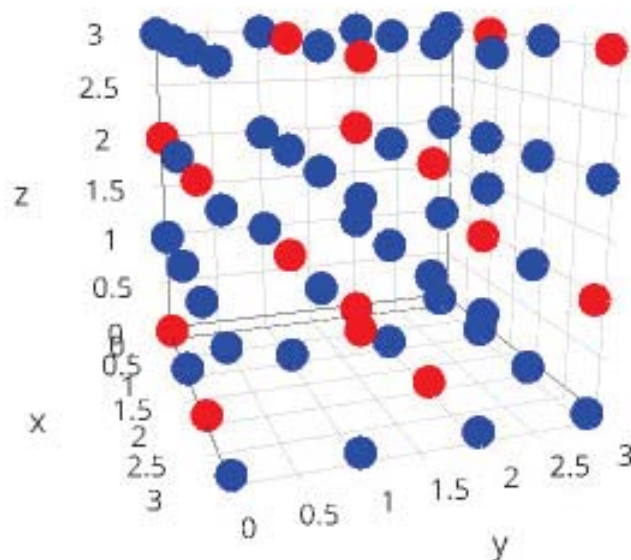


Figura 3.8: Conjunto dominante en  $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$

La imagen 3.8 es un diagrama de puntos en tres dimensiones que representa el grupo  $\mathbb{Z}_{4n} \oplus \mathbb{Z}_{4n} \oplus \mathbb{Z}_{4n}$ . A su vez, la imagen 3.9 representa una capa del diagrama de puntos, eso es, todos los elementos con la misma coordenada  $z$  para un determinado valor de  $z$ .

Si se elige como  $a$  a el punto  $(0, 0, 0)$  de la figura 3.9, que representa la capa inferior de la imagen 3.8, es bastante fácil ver que  $a$  domina a sus imágenes y que  $a + (1, 1, 0)$  es dominado por  $(1, 1, 3)$ . Simétricamente cada vértice azul es dominado por un único vértice rojo.



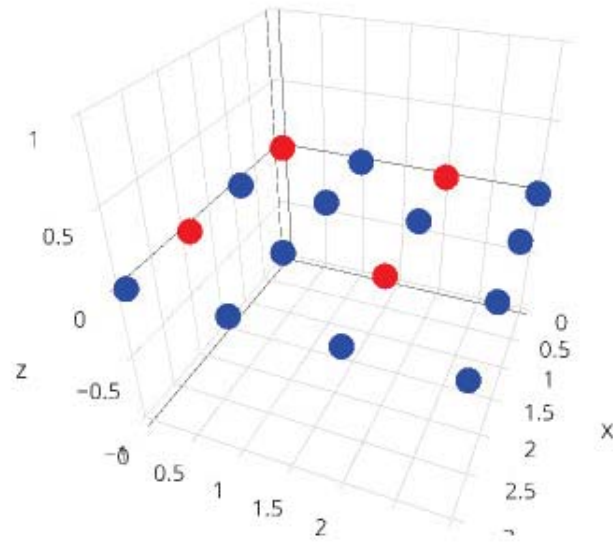


Figura 3.9: Rebanada del grafo de  $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$

En la imagen 3.9 se puede ver una capa de la estructura mostrada en la imagen 3.8.

# Capítulo 4

## Conjuntos resolventes en grafos de Cayley

### 4.1. Cuestiones generales

En este capítulo se muestran resultados relativos a conjuntos resolventes en digrafos de Cayley. Aunque las definiciones básicas sobre distancias en grafos son estándar en la bibliografía consultada, se empieza revisándolos y añadiendo las de los conceptos que no se estudian en el Grado.

Sea  $G(V, E)$  un grafo con  $n$  vértices. Para cualquier par de vértices  $u, v$  de  $G$ , se denomina distancia de  $u$  a  $v$  a la longitud del camino más corto entre  $u$  y  $v$  sobre el grafo  $G$  y se denota como  $\partial(u, v)$ . Se dice que dos vértices que son vecinos si  $\partial(u, v) = 1$ , y se denota como  $u \sim v$ . El vecindario de un vértice dado  $u$  se denota como  $N(u)$  y se define como  $N(u) = \{v \in V \mid u \sim v\}$ . El diámetro de  $G$  se define como  $diam(G) = \max\{\partial(u, v) \mid u, v \in V\}$ .

Dados un vértice de  $G$  y un conjunto ordenado de vértices de  $G$ , denotado como  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ , la representación métrica de  $u$  respecto a  $W$  es el vector de longitud  $k$  definido como  $r(u \mid k) = (\partial(u, w_1), \partial(u, w_2), \dots, \partial(u, w_k))$ . Si dado un conjunto  $W$  se verifica que cada vértice de  $G$  tiene una representación métrica distinta respecto de  $W$ , entonces se dice que  $W$  es un *conjunto resolvente* para el grafo  $G$ . En función de esto, se define la dimensión métrica de un grafo  $G$ ,  $dim(G)$ , como el mínimo cardinal que puede tener un conjunto de vértices  $W$  para que sea un conjunto resolvente del grafo  $G$ . En este contexto, una de las cuestiones más estudiadas es encontrar familias de grafos que tengan

la misma dimensión métrica. El problema es interesante por sí mismo, y además tiene aplicaciones en cuestiones tan diversas como el diseño de algoritmos de descubrimiento y verificación en redes, navegación en robótica, problemas de reconocimiento de patrones y procesado de imágenes, problemas de pesadas con monedas, estrategias para el juego Mastermind, o búsqueda y optimización en combinatoria [12]. El origen de este problema data de 1975 y fue introducido por Slater. Slater estaba trabajando en estaciones de vigilancia de costas por sonar y fue entonces cuando describió la utilidad de estos conceptos aplicados a su trabajo, pero no fue el único en hacerlo. Harary y Melter también descubrieron este problema y trabajaron en él. Encontrar familias de grafos con una dimensión métrica fija es un problema que atrae a muchos investigadores, pese a ser un problema clasificado como NP-Completo en el caso de un grafo general. Sin embargo, en el caso de los árboles se conoce un algoritmo que resuelve el problema en tiempo polinomial. Gracias a todos estos estudios, se tienen resultados sobre algunas familias de grafos, por ejemplo es sencillo ver que los caminos tienen dimensión métrica uno, los ciclos tienen dimensión métrica 2 y los grafos completos de  $n$  vértices tienen dimensión métrica  $n - 1$ . También son conocidos casos más complejos como los grafos  $P_m \times C_n$ , como se enuncia a continuación:

**Teorema 14** [6] *La dimensión métrica de los grafos  $P_m \times C_n$  puede tomar dos valores:*

$$\dim(P_m \times C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \equiv 1(\text{mod } 2), \\ 3 & \text{si } n \equiv 0(\text{mod } 2), m \geq 2 \end{cases}$$

Otro caso para el que se conocen resultados de este valor son las escaleras de Möbius:

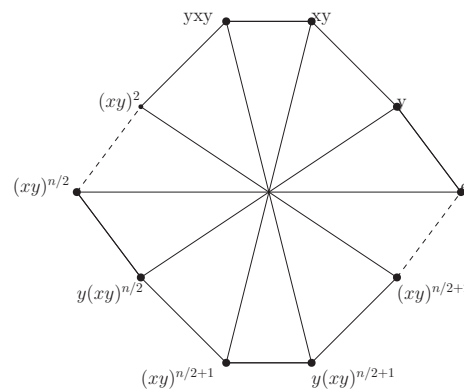


Figura 4.1: Ejemplo de escalera de Möbius

**Teorema 15** [7] *Sea  $n$  un entero par mayor que 8 y  $M_n$  un grafo escalera de Möbius, entonces:*

$$\dim(M_n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n \equiv 2(\text{mod } 8), \\ 3 \leq \dim(M_n) \leq 4 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Las demostraciones de estos resultados pueden verse en [7] y [6]. No se incluyen porque solo interesa el resultado, que se usa para probar un teorema posterior. Sea  $G$  un grupo y  $S$  un subconjunto de vértices de  $G$  que es cerrado tomando el inverso ( $S = S^{-1}$ ) y que no contiene al elemento neutro del grupo. El grafo de Cayley  $\text{Cay}(S : G)$  es un grafo con conjunto de vértices  $G$  y cuyo conjunto de aristas es  $\{uv \mid vu^{-1} \in S\}$ . Los grafos de Cayley son regulares y vértice transitivos como ya se ha demostrado en el capítulo 1. Basándose en [8] se puede probar el siguiente resultado:

**Teorema 16** [8] *Sea  $G = \langle g \rangle$  un grupo cíclico de orden  $n$  y  $S = \{g, g^{-1}, g^{n/2}\}$ , entonces:*

$$\dim(\text{Cay}(S : G)) = \begin{cases} 3 & \text{si } n \equiv 0(\text{mod } 4), \\ 4 & \text{si } n \equiv 2(\text{mod } 4), \end{cases}$$

Los resultados que se enuncian a continuación también son necesarios para la demostración del teorema central de la siguiente sección.

**Teorema 17** *Sea  $G$  un grafo y  $\{u, v, w\} \subset V$  tales que  $u \sim v$  y  $\partial(u, w) = d$ . Entonces,  $\partial(v, w) \in \{d-1, d, d+1\}$ .*

**Demostración:** De la definición de distancia se deduce que  $\partial(v, w)$  puede tomar estos tres valores. Para ver que no puede tomar otros valores se puede razonar por reducción al absurdo.

Si fuera  $\partial(v, w) \leq d-2$  enlazando la arista  $uv$  con un camino mínimo de  $u$  a  $w$  se tendría que  $\partial(u, v) \leq d-1$ , que no puede ser.

Tampoco es posible que  $\partial(v, w) \geq d+2$  ya que por la propiedad triangular se tiene que

$$\partial(v, w) \leq \partial(v, u) + \partial(u, w) = 1 + d$$

♣

Obsérvese que este resultado solo es valido para grafos, en digrafos no tiene por qué cumplirse, como se ve en el ejemplo de la figura 4.2. En este digrafo se tiene que  $u \sim v$ ,  $\partial(u, w) = 1$  y  $\partial(v, w) = 3$ , que no cumple el resultado para grafos.

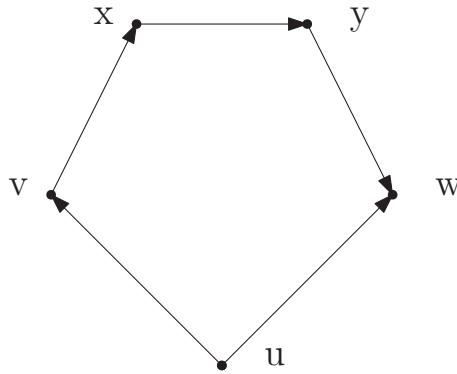


Figura 4.2: Digrafo de ejemplo

**Teorema 18** Sea  $G$  un grafo con  $\dim(G) = 2$  y sea  $W = \{u, v\}$  un conjunto resolvente entonces:

1. existe un único camino mínimo entre  $u$  y  $v$ ,
2. los grados de  $u$  y  $v$  son como mucho 3.

## 4.2. Dimensión métrica para grafos de grupos abelianos

A continuación se van a presentar un conjunto de resultados que serán útiles en el desarrollo de los próximos puntos. Para este desarrollo se va a seguir el hilo de deducción del artículo de Ebrahim Vatandoost, Ali Behtoei y Yasser Golkhandy Pour [10].

**Lema 19** Sea  $G$  un grafo 3-regular bipartito con  $n$  vértices. Entonces  $\dim(G) \geq 3$ .

**Demostración:**

Ya que  $G$  no es ni un camino ni un ciclo,  $\dim(G) \geq 2$ . Se supone, por reducción al absurdo, que  $\dim(G) = 2$  y por lo tanto que sea  $W = \{u, v\}$  un conjunto resolvente del grafo. Asíumase también que  $\partial(u, v) = d$  y que  $N(u) = \{u_1, u_2, u_3\}$ . Usando el Teorema 17 se tiene que  $\partial(u_i, v) \in \{d-1, d, d+1\}$  por cada  $1 \leq i \leq 3$ . Si existe  $i \neq j$  tal que  $\partial(u_i, v) = \partial(u_j, v)$ , entonces ambos tendrían la misma representación métrica, lo cual contradice el supuesto inicial. Sin perder generalidad, se supone que  $\partial(u_1, v) = d-1, \partial(u_2, v) = d$  y  $\partial(u_3, v) = d+1$ . Sean  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  los caminos más cortos entre  $u$  y  $v$  y entre  $u_2$  y  $v$ . Si se unen estos dos caminos mediante la arista  $uu_2$  se obtiene un circuito dentro de  $G$  de orden

impar, lo cual es una contradicción con el hecho de que  $G$  es bipartito (según se puede ver en [11] página 24). Por este motivo, no puede existir un vértice del vecindario de  $u$  que esté a distancia  $d$  de  $v$ , por lo que el conjunto de distancias se reduce a  $\{d-1, d+1\}$ . Como  $u$  tiene tres vértices adyacentes y solo pueden estar a dos posibles distancias, habrá dos vértices del vecindario de  $u$  que equidisten de  $v$ , lo cual contradice que  $W = \{u, v\}$  sea un conjunto resolvente.

El grafo  $Q_3$  que se muestra en la imagen 4.3 es bipartito, 3-regular y permite ver, por exploración directa que ningún par de vértices puede ser conjunto resolvente. ♣

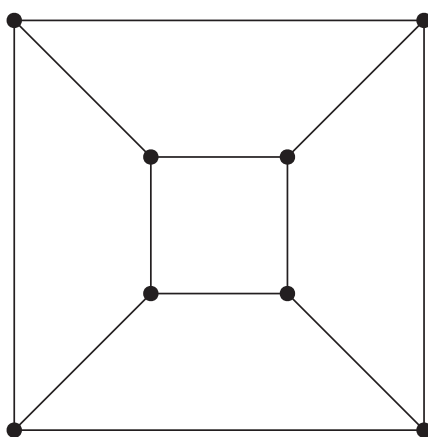


Figura 4.3: Grafo  $Q_3$

**Teorema 20** Sea  $G \cong S_3$  un grupo de orden  $n \geq 3$  y  $S \subset G$  un conjunto generador de  $G$  que no contiene al elemento neutro, que es cerrado tomando el inverso y  $\dim(\text{Cay}(G, S)) = 2$ . También supóngase que  $\text{Cay}(G, S)$  no es un ciclo y que  $W$  es un conjunto resolvente óptimo para  $\text{Cay}(G, S)$ . Entonces se tiene que  $W \cap S = \emptyset$ .

### Demostración:

Como  $\text{Cay}(G, S)$  es vértice-transitivo, se puede asumir que  $e \in W$ , o lo que es lo mismo,  $W = \{e, w\}$  para algún  $w \in G$ . Ya que  $\dim(\text{Cay}(G, S)) = 2$ , por el Teorema 18 se sabe que  $|S| \leq 3$ . Como  $n > 2$ , se tiene que  $|S| \neq 1$ . Si  $|S| = 2$ , entonces  $\text{Cay}(G, S)$  es un ciclo, lo cual contradice los supuestos, por lo que  $|S| = 3$ . Por reducción al absurdo, asumase que  $W \cap S \neq \emptyset$  y que  $S = \{u, v, w\}$ . Atendiendo al orden de  $w$ , se tienen los casos siguientes:

**Caso 1:**  $w$  es de orden 2. En este caso, se verifica  $N(w) \cap S = \emptyset$ . Nótese que  $N(w) = \{e, uw, vw\}$ . Si  $uw \in S$ , como  $u \neq e$  y  $w \neq e$ , solo es posible que  $uw = v$ . Por lo tanto,  $u \sim v$  y  $w \sim v$ . Por lo tanto,  $r(u|W) = r(v|W) = (1, 1)$ , lo cual contradice que  $W$  sea un conjunto resolvente. Si  $vw \in S$  se obtiene un resultado similar, haciendo cierto lo que se había establecido antes. De esta manera, se sabe que  $\partial(e, uw) = \partial(e, vw) = 2$  y por lo tanto  $r(u|W) = r(v|W) = (2, 1)$ , lo cual contradice que  $\dim(\text{Cay}(G, S)) = 2$ .

**Caso 2:**  $w$  no es de orden 2; Como  $S = S^{-1}$  y  $w^{-1} \in S$ , se puede asumir que  $v = w^{-1}$  y que  $u = u^{-1}$ . Una vez más, se va a demostrar que  $N(w) \cap S = \emptyset$ . En este caso,  $N(w) = \{e, uw, w^2\}$ . En principio, asúmase que  $uw \in S$ . El único resultado posible, siguiendo el razonamiento del primer caso, es que  $uw = w^{-1}$ . Por lo tanto,  $w^2 = u$  y como  $O(u) = 2$  entonces  $O(w) = 4$ . A la vista de esto y que  $G = \langle S \rangle$ , se puede ver que  $G$  es isomorfo a  $Z_4$  y que así mismo  $\text{Cay}(S, G)$  es isomorfo a  $K_4$ . Dados los resultados anteriores, se sabe que la dimensión de  $K_4$  es tres, lo cual contradice el enunciado.

Asúmase ahora que  $w^2 \in S$ . De esta manera,  $w^2 \in \{u, w, w^{-1}\}$ . Se puede ver que  $w \neq w^{-1}$ . Si  $w^2 = u$  se vuelve al caso 1 en el que  $O(w) = 4$ . Si  $w^2 = w^{-1}$ , entonces  $O(w) = 3$ . Si  $G$  es abeliano,  $G$  es isomorfo a  $Z_6$ , y por el teorema 16 se sabe que  $\dim(Z_6, S) = 4$ , lo cual contradice el enunciado. Si, por el contrario, se asume que  $G$  es un grupo no abeliano, se puede ver en la figura 4.4 como quedan los vecinos de los vértices  $u, w, w^2, uw$ . Se define  $L = \{www, w^2uw\}$  y se intenta demostrar que  $L \cap S = \emptyset$ . Como  $w \neq u^{-1}$  y  $u \neq e$ ,  $www \neq w$  y  $www \neq w^2$ . Si  $w^2uw = u$  entonces  $uw = wu$ , por lo que  $O(uw) = 6$ , y por lo tanto  $G$  sería isomorfo a  $Z_6$ , lo cual es una contradicción. De esto se concluye que  $L \cap S = \emptyset$ .

Se denomina  $K = \{wu, w^2u, uw^2\}$ , y se va a demostrar que  $K \cap L = \emptyset$ . Para ello se supone que  $www \in K$ . Como  $w \neq e$  y  $www \neq wu$ , se llega a que  $www = uw^2$  o  $www = w^2u$ . De cualquier manera se llega a que  $uw = wu$ , volviendo a la contradicción de que  $G$  sería isomorfo a  $Z_6$ .

Supóngase entonces que  $w^2uw \in K$ . Como  $w \neq e$  se ve que  $w^2uw \neq w^2u$ , por lo que los únicos valores posibles son  $wu$  o  $uw^2$ . En cualquier caso, se puede ver que  $O(uw) = 2$ , y como  $G = \langle S \rangle$ ,  $G$  sería isomorfo a  $S_3$ , lo cual contradice el enunciado.

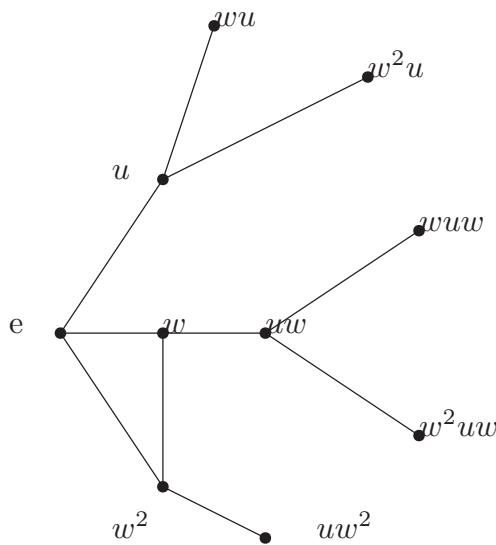


Figura 4.4: Vecinos si  $G$  es no abeliano

Por lo tanto,  $K \cap L = L \cap S = \emptyset$ . De aquí se puede afirmar que  $\partial(e, wuw) = \partial(e, w^2uw) = 3$  y que  $\partial(w, wuw) = \partial(w, w^2uw) = 2$ . De esta manera, las representaciones métricas de ambos vectores serían iguales, lo cual contradice que  $W$  sea un conjunto resolvente.

Como se ha llegado a contradicción para todos los casos de  $w$ , se concluye que  $W \cap S = \emptyset$ . ♣

A continuación, se presentan tres resultados para caracterizar completamente los grafos de Cayley de grupos abelianos con dimensión métrica dos.

**Teorema 21** *Sea  $G = \langle u \rangle$  un grupo cíclico de orden  $n$  y sea  $S = \{u^i, u^{-i}, u^n/2\}$  un subconjunto generador de  $G$ . Entonces  $\dim(\text{Cay}(G, S) = 2)$  si y solo si  $MCD(i, n/2) = 1$  y  $n \equiv 2 \pmod{4}$ .*

**Demostración:**

En primer momento, se supone que  $\dim(\text{Cay}(G, S)) = 2$ . Como  $S$  es un conjunto generador de  $G$ , se tiene que  $MCD(i, n) = 1$  o  $MCD(i, n/2) = 1$ . Si se supone que  $MCD(i, n) = 1$  entonces  $O(u^i) = n$  y  $G = \langle u^i \rangle$ . El Teorema 16 garantiza que  $\dim(\text{Cay}(G, S)) \in \{3, 4\}$ , lo cual contradice el supuesto. Por lo tanto, se tiene que  $MCD(i, n/2) = 1$  y que  $MCD(i, n) \neq 1$  por lo que  $MCD(i, n) = 2$ . De esto se con-



cluye que  $i$  es par y que  $n/2$  es impar, por lo que se cumple que  $n \equiv 2 \pmod{4}$ .

Razonando en el otro sentido, se supone ahora que  $MCD(i, n/2) = 1$  y  $n \equiv 2 \pmod{4}$ . Entonces  $O(u^i) = n/2$ , que es un número impar. Si  $H = \langle u^i \rangle$  entonces, como  $n/2$  es impar y  $O(u^{n/2}) = 2$  se tiene que  $u^{n/2} \notin H$ . Por lo tanto  $|G : H| = 2$  y por lo tanto  $G = H \cup Hu^{n/2}$ . A la vista de lo anterior, se puede ver que  $Cay(G, S)$  contiene dos ciclos disjuntos de longitud  $n/2$  de la forma  $\sigma = e \sim u^i \sim u^{2i} \dots$  y de la forma  $u^{n/2}\sigma$ . También se sabe que para  $1 \leq k \leq n/2$ ,  $u^{ki} \sim u^{ki+n/2}$ . Como  $|S| = 3$ , se puede decir que  $Cay(G, S)$  es isomorfo a  $P_2 \times C_{2k+1}$ , que por el teorema 14 se sabe que es de dimensión dos. ♣

La figura 4.5 corresponde al grafo  $P_2 \times C_{2k+1}$  e ilustra la situación que se describe en el Teorema 21 .

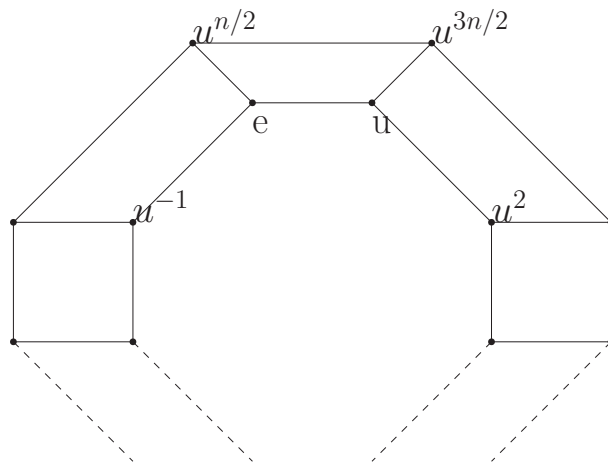


Figura 4.5: Grafo  $P_2 \times C_{2k+1}$

**Teorema 22** Sea  $G$  un grupo abeliano que no es cíclico de orden  $n > 4$ . Sea  $S$  un subconjunto generador de  $G$  tal que  $e \notin S = S^{-1}$ . Entonces,  $\dim(G, S) \neq 2$

### Demostración:

Se razona por reducción al absurdo suponiendo que  $\dim(Cay(G, S)) = 2$ . Por el teorema 18,  $|S| \leq 3$  y, como  $G$  no es cíclico, entonces  $|S| > 1$ . Si  $|S| = 2$  con  $S = \{u, v\}$  y  $S = S^{-1}$  implica que ocurre una de las dos siguientes posibilidades:  $O(u) = O(v) = 2$  ó  $u = v^{-1}$ . Como  $S$  es un conjunto generador y  $G$  no es un grupo cíclico, no puede ocurrir que  $u = v^{-1}$ . En caso de que se cumpla el otro escenario, eso significaría que, por ser  $G$  no cíclico,  $G$  sería isomorfo a  $Z_2 \times Z_2$ , contradiciendo que  $n > 4$ .

Visto lo anterior, se asume que  $|S| = 3$ . Ya que  $G$  es vértice-transitivo, se puede decir que  $W = \{e, w\}$  es un conjunto resolvente de  $\text{Cay}(G, S)$ . Por el teorema 20,  $W \cap S = \emptyset$ ; y se puede asumir que  $S = \{u, v, z\}$ .

Como  $S = S^{-1}$ , un posible escenario es que  $O(u) = O(v) = O(z) = 2$ . En tal caso, y para no caer en contradicción con  $n > 4$ , debe ser  $n = 8$  y  $G$  será isomorfo a  $Z_2 \times Z_4$  o a  $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$ . En cualquiera de los casos anteriores,  $\text{Cay}(G, S)$  es isomorfo al grafo  $P_2 \times C_4$ , que se sabe que tiene dimensión 3 por el teorema 14. Para mayor detalle, véase la figura 4.6. Por lo tanto,  $S = \{u, u^{-1}, v\}$  con  $O(u) = t \geq 2$ ,  $z = u^{-1}$  y  $O(v) = 2$ . Ya que  $S$  es un subconjunto generador de  $G$ , y  $w \notin S$ , se tiene que  $w = u^k v$  con  $1 \leq k \leq t - 1$  o si no  $w = u^k$  para algún  $2 \leq k \leq t - 2$ . Considérense los siguientes casos :

**Caso 1:**  $w = u^k v$  para algún  $k$  tal que  $1 \leq k \leq t - 1$ . Ya que  $u^{-l} = u^{n-l}$  para cualquier entero  $l$ , renombrando  $u = u^{-1}$ , se puede asumir que  $k \leq n/2$  es un entero positivo. Se sabe que  $\partial(e, u^k v) \leq k + 1$ , ya que existe un camino de longitud  $k + 1$  de  $e$  a  $u^k v$ . Si  $\partial(e, u^k v) \leq k$ , entonces existe un camino más corto cuyos vértices son generados mediante combinaciones lineales de potencias de  $u$  y  $v$  o por  $u^{-1}$  y  $v$ . En primer lugar, se supone que está formado por potencias de  $u$  y  $v$ . Como  $G$  es abeliano, hay un entero positivo  $l < k$  tal que  $u^k v = u^l v$ , de lo que se deduce que  $u^k = u^l$ , lo cual no es posible.

Supóngase ahora que el camino más corto que el propuesto inicialmente está formado por combinaciones lineales de  $u^{-1}$  y  $v$ . Hay un entero positivo  $l < k$  tal que  $u^{-l} v = u^k v$ , de lo que se obtiene que  $u^k = u^{-l}$ , por lo que también se tiene que  $k = n - l > n - n/2$ , lo cual contradice el supuesto inicial de este caso. Por lo tanto,  $\partial(e, u^k v) = k + 1$ . En la imagen 4.7 se pueden ver ambos caminos.

Como existen dos caminos mínimos distintos de la misma longitud, hay contradicción con el teorema 18.

**Caso 2:**  $w = u^k$  para algún  $k$  con  $2 \leq k \leq t - 2$ . Como  $u^{-l} = u^{t-l}$  para cualquier entero  $l$ , renombrando  $u = u^{-1}$  en caso de que sea necesario, se puede asumir que  $k \leq t/2$  es un entero positivo. Se ve que  $e \sim u \sim u^2 \dots u^k$  es un camino de longitud  $k$  de  $e$  a  $u^k$  que se llamará  $\sigma$ . Por lo tanto se puede decir que  $\partial(e, u^k) \leq k$ . Si  $\partial(e, u^k) < k$ , existe un camino de  $e$  a  $u^k$  de menor longitud y que está generado por combinación de  $u$  y  $v$ . Supóngase ahora que este camino se separa de  $P$  en el vértice número  $i$  y se vuelve a juntar en el vértice  $j > i$ , como se muestra en la figura 4.8. Como se puede ver, el nuevo camino tiene dos vértices más que  $P$ , lo cual contradice que su longitud sea menor que  $k$ .

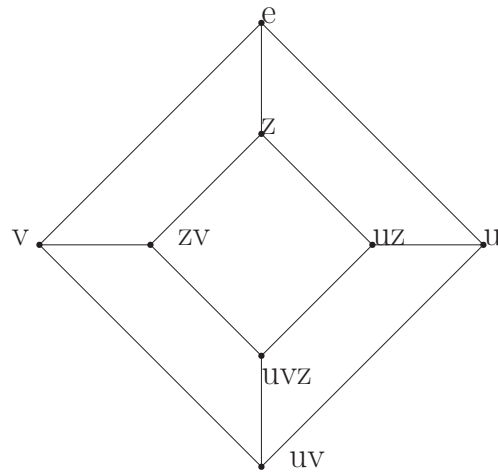


Figura 4.6: Grafo  $P_2 \times C_4$

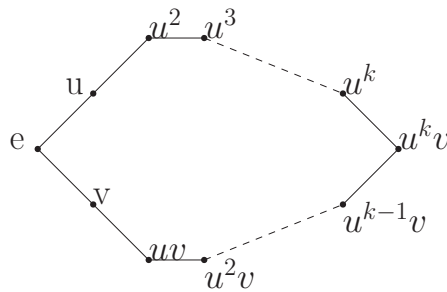


Figura 4.7: Caminos de longitud  $k + 1$

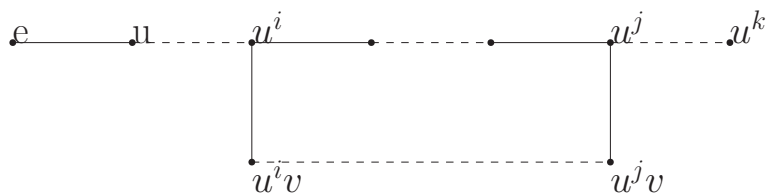


Figura 4.8: Caminos de longitud  $k$

Por lo anterior, se concluye que  $\partial(e, u^k) = k$ . Consecuentemente, se puede asumir que  $k \neq n/2$ . Si no fuera así, se podrían obtener dos caminos de longitud  $n/2$ , lo cual supondría una contradicción con el supuesto inicial.

Utilizando la estructura  $P$ , se tiene que  $N(u^k) = \{u^{k-1}, u^{k+1}, u^k v\}$  con  $\partial(e, u^{k-1}) = k - 1$ . En el caso de que  $k + 1 > t/2$ , eso significaría que  $k \geq t/2$  lo cual contradice el hecho de que  $k < t/2$ . Por lo tanto,  $k \leq t/2$  y en consecuencia  $\partial(e, u^{k+1}) = k + 1$ .

Finalmente, por el teorema 17, como ya se sabe que  $\partial(e, u^{k-1}) = k - 1$  y también que  $\partial(e, u^{k+1}) = k + 1$ , se tiene que  $\partial(e, u^k v) = k$ . Razonando como en el caso anterior, se puede llegar a que  $\partial(e, u^k v) = k + 1$ , lo cual contradice el resultado anterior. Por lo tanto  $W$  no es un conjunto resolvente del grafo y en consecuencia  $\dim(\text{Cay}(G, S)) \neq 2$ . ♣

Con los resultados anteriores ya se está preparado para dar la caracterización que se buscaba.

**Teorema 23** *Sea  $G$  un grupo abeliano de orden  $n > 4$  y sea  $S$  un subconjunto generador tal que  $e \notin S = S^{-1}$ . Entonces  $\dim(\text{Cay}(G, S)) = 2$  si y solo si  $G = \langle u \rangle$  es cíclico y  $S = \{u^i, u^{-i}, u^{n/2}\}$  con  $\text{MCD}(i, n/2) = 1$  y  $n \equiv 2 \pmod{4}$ .*

**Demostración:**

$\Leftarrow$  Con los supuestos del enunciado, por el teorema 21, se sigue que  $\dim(\text{Cay}(G, S)) = 2$ .  $\Rightarrow$  En el otro sentido, si se parte de que  $\dim(\text{Cay}(G, S)) = 2$ , entonces si  $G$  no es cíclico, por el teorema 22 se tiene que  $\dim(\text{Cay}(G, S)) \neq 2$ , lo cual es incorrecto. Por lo tanto, si  $G$  es cíclico entonces por el teorema 21 se obtienen los demás resultados. ♣

### 4.3. Dimensión métrica para grafos de grupos no abelianos

Tal y como se hizo en el punto anterior, se va a seguir el artículo [1] escrito por A. Behtoei y Y. Golkhandy Pour en enero de 2017 para presentar los resultados conocidos en este tema. Para empezar, se van a presentar una serie de resultados básicos para poder construir sobre ellos.

**Teorema 24** *El subconjunto  $\{a^i b, a^j b\}$  es un conjunto generador para el grupo diedrico  $D_{2n} = \langle a, b | a^n = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$  si y solo si  $\text{MCD}(n, i - j) = 1$ .*

**Demostración:**

Resulta sencillo probarlo a partir de la siguiente descripción del subgrupo generado por estos elementos:

$$\langle a^i b, a^j b \rangle = \{a^{(i-j)t}, a^{(i-j)t+i} b, a^{(i-j)t+j} b \mid t \in \mathcal{Z}\}$$

Se supone primero que  $D_{2n} = \langle a^i b, a^j b \rangle = \{a^{(i-j)t}, a^{(i-j)t+i} b, a^{(i-j)t+j} b \mid t \in \mathcal{Z}\}$ . En el caso de que  $MCD(n, i-j) \neq 1$ , se tiene que  $\{a^{(i-j)t}\} \subset \langle a^t \rangle$ , por lo que faltarían elementos en el conjunto.

En la otra dirección, si se cumple que  $MCD(n, i-j) = 1$ , entonces  $\{a^{(i-j)t}\} = \langle a^t \rangle$ , por lo que  $D_{2n} = \langle a^i b, a^j b \rangle = \{a^{(i-j)t}, a^{(i-j)t+i} b, a^{(i-j)t+j} b \mid t \in \mathcal{Z}\}$ . ♣

**Teorema 25** *Si  $4|n$  y  $MCD(n, i-j) = 2$ , el subconjunto  $\{a^i b, a^j b, a^{n/2}\}$  no es un conjunto generador para el grupo diédrico  $D_{2n}$ .*

**Demostración:**

Como  $\langle a^2 \rangle$  y  $\langle a^{i-j} \rangle$  son dos subgrupos cíclicos de orden  $n/2$  en el grupo cíclico  $\langle a \rangle$  se tiene que  $\langle a^2 \rangle = \langle a^{i-j} \rangle \subseteq \langle \{a^i b, a^j b, a^{n/2}\} \rangle$ . Como  $4|n$ , entonces  $a^{n/2} \in \langle a^2 \rangle$  y por lo tanto  $\langle a^i b, a^j b, a^{n/2} \rangle = \langle a^i b, a^j b \rangle$ . Siguiendo el resultado 24, se llega a la conclusión buscada ♣

**Teorema 26** *Sea  $S$  un subconjunto generador de  $D_{2n} = \langle a, b \mid a^n = b^2 = (ab)^2 = e \rangle$  tal que  $e \notin S = S^{-1}$ . Entonces se tiene que  $\dim(\text{Cay}(D_{2n}, S)) = 2$  si y solo si ocurre una de las siguientes situaciones*

1.  $n = |S| = 2$
2.  $S = \{a^i b, a^{-i} b, a^j b\}$  con  $MCD(i, n) = 1$  y  $j \in \{a, 2, \dots, n\}$

**Demostración:**

Como  $D_{2n}$  no es un grupo cíclico, se sabe que  $|S| \geq 2$ .

Supóngase que  $|S| = 2$  y que  $S = \{x, y\}$ . Como  $S = S^{-1}$  eso significa que  $x^2 = y^2 = e$  (por no ser cíclico). Si  $S = \{a^{n/2}, a^j b\}$  para algún  $1 \leq j \leq n$ , entonces la condición  $D_{2n} = \langle S \rangle$  implica que  $n=2$  y que  $D_{2n} = D_4$ , cuya dimensión es dos. De otro modo,  $S = \{a^i b, a^j b\}$  y por el teorema 24 se tiene que  $MCD(i-j, n) = 1$ . Por lo tanto,  $\text{Cay}(D_{2n}, S)$  es un grafo conexo 2-regular (un ciclo) y  $\dim(\text{Cay}(D_{2n}, S)) = 2$ .

Si  $|S| \geq 4$ , el grado de cada vértice en  $Cay(D_{2n}, S)$  es por lo menos 4 y el teorema 15 implica que  $\dim(Cay(D_{2n}, S)) \geq 3$ .

Ahora, se supone que  $|S| = 3$ . Como  $S$  es un conjunto generador y  $e \notin S = S^{-1}$ , se tienen los siguientes casos:

**Caso 1**  $S = \{a^i, a^{-i}, a^j b\}$

Como  $a^j b (a^i)^t a^j b = a^{-it}$ , el orden de  $a^{-i}$  es  $\frac{n}{MCD(i, n)}$  y  $S$  es un conjunto generador, se tiene que  $MCD(i, n) = 1$ . Por lo tanto  $O(a^i) = n$  y los vértices  $a^{ni}, a^{(n-1)i}, \dots, a^{2i}, a^i$  generan un ciclo en  $Cay(S, D_{2n})$ . Como  $a^j \in \langle a^i \rangle$ , existe  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  tal que  $a^j = a^{ki}$ . Por lo tanto,  $n$  vértices de la forma

$$a^{ki} b, a^{(k+1)i} b, \dots, a^{(k+n-1)i} b$$

crean otro ciclo en  $Cay(D_{2n}, S)$ . Ahora para cada  $1 \leq l \leq n$  sea  $M_l = \{a^{li}, a^{(k+n-l)i} b\}$ . Notese que  $a^{ni} = e$  y que  $M_s \cap M_k = \emptyset$  para  $s, k$  cualesquiera dados,  $s \neq k$ . Como  $a^{li} (a^{(k+n-l)i} b)^{-1} = a^{ki} b = a^j b \in S$ , dos vértices  $a^{li}$  y  $a^{(k+n-l)i} b$  son adyacentes en  $Cay(S, D_{2n})$ . Por lo tanto, las aristas  $M_1, \dots, M_n$  forman un emparejamiento perfecto en  $Cay(S, D_{2n})$ , es decir, forman un subconjunto de aristas tal que cada vértice del grafo es adyacente a exactamente una arista del subconjunto. Dado este emparejamiento y los dos ciclos anteriores, se puede ver que  $Cay(S, D_{2n})$  es isomorfo a  $P_2 \times C_n$ . Utilizando el teorema 14, se llega a la conclusión de que  $\dim(Cay(S, D_{2n})) = 2$  si y solo si  $n$  es impar.

**Caso 2**  $S = \{a^i b, a^{n/2}, a^j b\}$  donde  $n$  es par

Sean  $x = a^i b$  e  $y = a^j b$ . Como  $a^{n/2}$  está en el centro del grupo  $D_{2n}$  y  $O(a^{n/2}) = 2$ , se tiene que  $\langle S \rangle = \langle a^i b, a^j b \rangle \cup a^{n/2} \langle a^i b, a^j b \rangle$ . Por lo tanto,  $a \in \langle a^i b, a^j b \rangle$  o  $a \in a^{n/2} \langle a^i b, a^j b \rangle$ . Estas son las únicas posibilidades ya que  $|\langle a^{n/2}, a^i b \rangle| = 4$ , por lo que  $a \notin \langle a^{n/2}, a^i b \rangle$  y  $a \notin \langle a^{n/2}, a^j b \rangle$ .

**Subcaso 2.1**  $a \in \langle a^i b, a^j b \rangle$

Por el lema 24 se tiene que  $MCD(i - j, n) = 1$ . Por lo tanto,  $O(xy) = O(a^{i-j}) = n$  y  $Cay(S, D_{2n})$  contiene un ciclo hamiltoniano con  $2n$  vértices como el siguiente.

$$e \sim y \sim xy \sim \sim yxy \sim (xy)^2 \sim y(xy)^2 \sim \dots \sim y(xy)^{n-1} \sim y(xy)^n = e$$

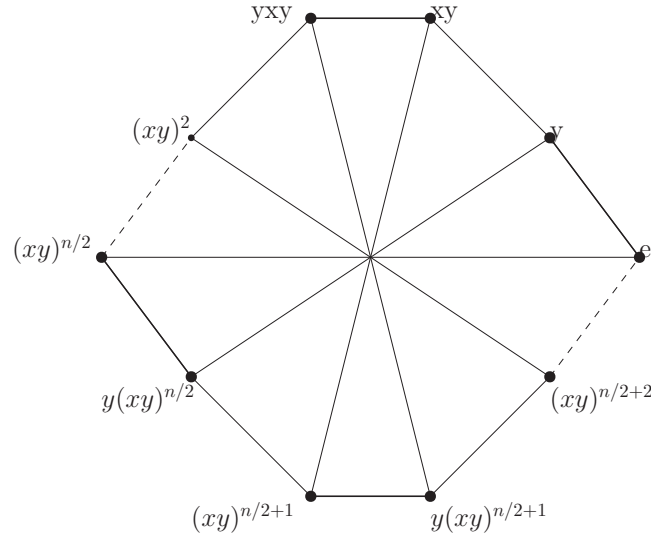


Figura 4.9: Escalera de Möbius

Por cada divisor  $d$  de  $n$ , el grupo cíclico  $Z_n$  tiene un único subgrupo cíclico de orden  $d$ . Como  $\langle a^{i-j} \rangle = \langle a \rangle$  y  $|\langle a^{(i-j)n/2} \rangle| = |\langle a^{n/2} \rangle| = 2$ , se tiene que  $a^{n/2} = (a^{i-j})^{n/2}$ . Para cada  $1 \leq l \leq n/2$  sea  $M_l = \{(xy)^l, (xy)^{(l+n/2)}\}$  y sea  $T_l = \{y(xy)^l, y(xy)^{(l+n/2)}\}$ . Nótese que  $M_s \cap M_k = \emptyset$  y  $T_s \cap T_k = \emptyset$  para  $s, k$  cualesquiera dados  $s \neq k$ . También,  $M_l$  es una arista de  $\text{Cay}(S, D_{2n})$  porque

$$(xy)^{(l+n/2)}(xy)^{-l} = (xy)^{n/2} = a^{(i-j)n/2} = a^{n/2} \in S$$

Por lo tanto  $M_1, M_2, \dots, M_{n/2}$  y  $T_1, T_2, \dots, T_{n/2}$  son emparejamientos en  $X(D_n, S)$ , por lo tanto  $M_1, M_2, \dots, M_{n/2}, T_1, T_2, \dots, T_{n/2}$  es un emparejamiento perfecto para  $\text{Cay}(S, D_{2n})$ . En conclusión, se tiene un ciclo de  $2n$  vértices en el cual vértices que estén enfrentados son adyacentes. Esto implica que  $\text{Cay}(S, D_{2n})$  es isomorfo a una escalera de Möbius (véase imagen 4.9) y por el teorema 15, se tiene que  $\dim(\text{Cay}(S, D_{2n})) \neq 2$ .

**Subcaso 2.2**  $a \in a^{n/2}\langle a^i b, a^j b \rangle$

En este caso, existe  $k \in Z$  tal que  $a = a^{n/2}a^{k(i-j)}$ . Por lo tanto,  $a^{n/2+1} \in \langle a^{i-j} \rangle$  y  $a^2 = (a^{n/2+1})^2 \in \langle a^{i-j} \rangle$ . De aquí se deduce que,  $|\langle a^{i-j} \rangle| \geq |\langle a^2 \rangle| = \frac{n}{2}$  y  $O(a^{i-j}) = \frac{n}{2}$  o bien  $O(a^{i-j}) = n$ . El caso de que  $O(a^{i-j}) = n$  se trata en el subcaso 2.1, así que se pasa a asumir que  $O(xy) = O(a^{i-j}) = n/2$ . Por lo tanto,  $\text{Cay}(S, D_{2n})$  tiene dos ciclos de longitud  $n$  como se muestra a continuación.

$$e \sim y \sim xy \sim yxy \sim (xy)^2 \sim \dots \sim (xy)^{n/2} = e$$

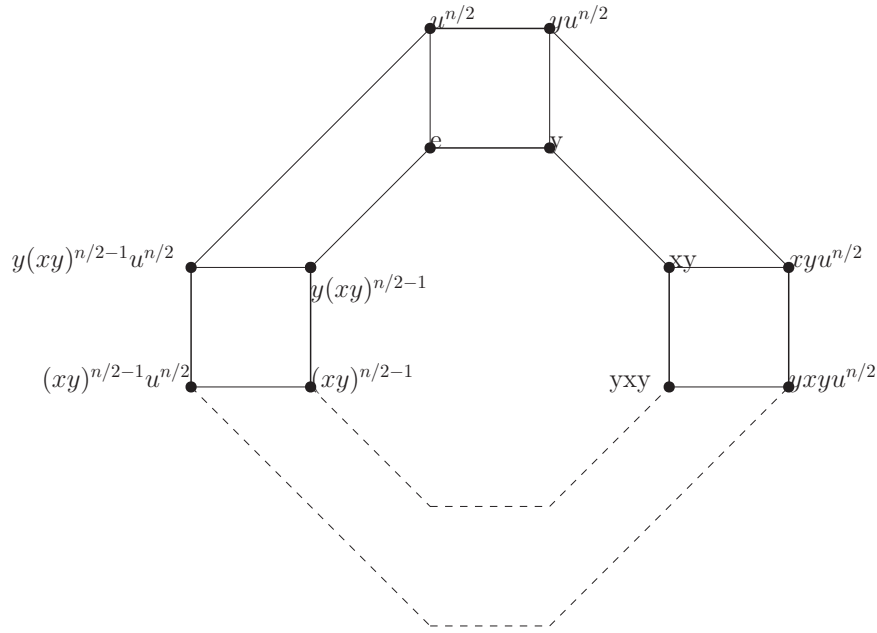


Figura 4.10:  $P_2 \times C_n$

$$a^{n/2} \sim ya^{n/2} \sim xy a^{n/2} \sim yxy a^{n/2} \sim (xy)^2 a^{n/2} \sim \dots \sim (xy^{n/2} = e) a^{n/2} = a^{n/2}$$

El hecho de que  $O(xy) = n/2$  indica que los  $n$  que aparecen en cada ciclo son distintos entre sí. También se puede ver utilizando  $b$  que  $(xy)^t \neq y(xy)sa^{n/2}$  y que  $y(xy)^t \neq (xy)sa^{n/2}$  para cualesquiera  $s, t \in Z$ .

Si existieran  $s, t \in Z$  tales que  $(xy)^t = (xy)sa^{n/2}$  o  $y(xy)^t = y(xy)sa^{n/2}$ , entonces  $a^{n/2} = (a^{ij})^{t-s} \in \langle a^{i-j} \rangle = \langle a^2 \rangle$ . En caso de que esto se cumpla, significaría que  $4|n$  lo cual contradice 25 por lo que todos los  $2n$  vértices son distintos entre sí. Como  $a^{n/2} \in S$ , vértices correspondientes en cada ciclo son adyacentes como se puede ver en la figura 4.10. Por lo tanto, el grafo es isomorfo a  $P_2 \times C_n$ , y por el teorema 14 se concluye que es de dimensión 3.



**Caso 3**  $S = \{a^i b, a^t b, a^j b\}$

Sea  $H = \langle a \rangle$ , entonces el conjunto de vértices del grafo es  $V(\text{Cay}(S, D_{2n})) = H \cup Hb$ . Si  $a^s, a^t \in H$ , entonces  $a^s a^{-t} = a^{s-t} \notin S$ . Por lo tanto, el subconjunto  $H$  de vértices induce un conjunto independiente en el grafo  $\text{Cay}(S, D_{2n})$ . De manera similar,  $Hb$  es un conjunto independiente. En consecuencia,  $\text{Cay}(S, D_{2n})$  es un grafo 3-regular y bipartito con  $2n$  vértices, por lo que según el lema 19 su dimensión es al menos 3. ♣

Del teorema anterior se deduce el siguiente resultado.

**Proposición 27** *Si  $S \subseteq D_{2n}$  tal que  $e \notin S = S^{-1}$  y  $|S| \geq 4$  entonces*

$$\dim(\text{Cay}(S, D_{2n})) \geq 3$$

.

## 4.4. Dimensión métrica para digrafos de Cayley

En las dos secciones previas, se han presentado resultados clásicos y otros muy recientes sobre conjuntos resolventes en grafos de Cayley. Estos resultados solo son válidos para grafos, y no para digrafos. Esto se puede analizando los resultados anteriores en el momento en que se describen las condiciones sobre el conjunto de generadores  $S$ , donde se pide que  $S = S^{-1}$ . Si se impone esta condición en un grafo dirigido, se llega a que, para cualquier arista generada por un elemento  $a$  de  $S$ , existe una arista generada por  $a^{-1}$  que va en la dirección opuesta, dando lugar así un grafo no dirigido. Esto ya da idea de que tratar con grafos no dirigidos no puede seguir la misma estrategia que el caso de los grafos no dirigidos.

También se comentó que resultados como las distancias a las que pueden estar los vecinos de un determinado vértice ya no son ciertos. Siguiendo con el conjunto básico de trabajo, los grafos de Cayley de grupos de la forma  $Z_n \oplus Z_m$  con conjunto generador  $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$ , se puede ver que las distancias desde un vértice particular a uno fijado solo pueden tomar valores en  $\{1, \dots, n-1 + m-1\}$ . Sin embargo, lo que resulta algo más complejo de obtener es el número de vértices que están a una distancia dada  $k$  de un vértice designado  $v$ . Como los grafos de Cayley son vértice-transitivos, se puede tomar como vértice desde el cual medir distancias el vértice  $v = e$ . De esta manera, es sencillo ver

que el vértice más distante desde  $v$  es  $(n-1, m-1)$ . Este vértice se puede descomponer en  $(n-1) * (1, 0) + (m-1) * (0, 1)$ , dejando así visible que la distancia desde el vértice  $v$  es la suma de los coeficientes que multiplican a los generadores. De esta visión se puede obtener una nueva manera de plantear el problema combinatorio. Es sencillo ver que se trata de sumar  $k$  elementos cuando se tienen elementos, en este caso generadores, de dos tipos distintos sabiendo que del primero tipo se tienen  $n-1$  y del segundo tipo se tienen  $m-1$ . Así, el problema es equivalente a contar el número de maneras de repartir  $k$  bolas en dos cajas en las que caben  $n-1$  y  $m-1$  respectivamente. A continuación se resuelve este problema y por claridad se ve la manera de repartir  $k$  bolas en dos cajas de capacidades  $n$  y  $m$ .

**Teorema 28** *Si se dispone de  $n$  elementos idénticos de tipo  $X$  y  $m$  elementos idénticos de tipo  $Y$ , ( $n \leq m$ ), el número de formas de elegir  $k$  elementos de entre los  $n+m$  es  $f(k)$  dada por:*

$$f(k) = \begin{cases} k+1 & \text{si } k \leq n \\ n+1 & \text{si } n < k \leq m \\ m+n+1-k & \text{si } m < k \leq n+m \end{cases}$$

**Demostración:**

Las formas de elegir  $k$  elementos se pueden ver como las formas de repartir  $k$  objetos iguales en dos bloques distintos, de modo que en uno caben a lo sumo  $n$  y en el otro a lo sumo  $m$ . Se pueden dar las siguientes situaciones:

1. Si  $k \leq n$  cabe la opción de poner todas las marcas en el tipo  $X$  y ninguna en  $Y$  y caben todas las opciones consistentes en ir sacando una marca de  $x$  y ponerla en  $Y$  y repetir el proceso. Se tienen las distribuciones siguientes:

$$(k X; 0 Y), (k-1 X; 1 Y), \dots, (0 X; k Y)$$

En total hay  $k+1$  formas.

2. Si  $n < k \leq m$  no se pueden poner todas las marcas en  $X$  y habrá al menos  $k-n$  marcas que deberán estar en  $Y$ . De modo que hay que ver cómo poner  $n$  marcas

entre los tipos  $X$  e  $Y$ , teniendo en cuenta que en  $X$  caben hasta  $n$ , pero en  $Y$  ya solo caben  $m - (k - n) = m + n - k$  marcas.

Si las  $n$  marcas a repartir pueden ser todas de tipo  $Y$ , es decir, si  $n \leq m - (k - n)$ , o lo que es lo mismo, si  $k \leq m$ , esta situación es como la anterior, de modo que se tendrían las distribuciones siguientes:

$$(n X; \widehat{k - n} Y), (n - 1 X; \widehat{k - n + 1} Y), \dots, (0 X; \widehat{k - n + n} Y)$$

En total hay  $n + 1$  formas. Se ha denotado  $\widehat{k - n}$  a las marcas que necesariamente están en  $Y$ .

3. Si  $m < k \leq n + m$  la situación es semejante a la anterior. En primer lugar hay al menos  $k - n$  marcas que deberán estar en  $Y$ , tras esto, en  $X$  caben hasta  $n$ , y en  $Y$  ya solo caben  $m - (k - n) = m + n - k$  marcas. Ahora las  $n$  marcas a repartir ya no pueden ser todas de tipo  $Y$ , por lo tanto se ponen  $n - (m + n - k) = k - m$  de tipo  $X$  y se reparten las  $m + n - k$  entre los tipos  $X$  e  $Y$  de todas las formas posibles:

$$(\widehat{k - m + m + n - k} X; \widehat{k - n} Y), (\widehat{k - m + m + n - k - 1} X; \widehat{k - n + 1} Y), \dots$$

$$\dots, (\widehat{k - m} X; \widehat{k - n + m + n - k} Y)$$

O lo que es lo mismo:

$$(n X; k - n Y), (n - 1 X; k - n + 1 Y), \dots, (k - m X; m Y)$$

En total hay  $m + n - k + 1$  formas. Como antes, se ha denotado  $\widehat{k - n}$  a las marcas que necesariamente están en  $Y$  y  $\widehat{k - m}$  a las marcas que están necesariamente en  $X$ . ♣

Ahora que se conoce algo más de las distancias en estos grafos, se puede pasar a estudiar conjuntos resolventes en ellos. A continuación se muestra el resultado obtenido:

**Teorema 29** *Se considera el grafo  $Cay(\{(1,0), (0,1)\}, Z_n \oplus Z_m)$ . Si  $W$  es un conjunto resolvente para el grafo, entonces  $|W| > 2$*

**Demostración:**

Se va a probar que no puede haber conjuntos resolventes de cardinales 1 ó 2.

**Caso 1** En primer lugar, se supone que  $|W| = 1$ .

Se sabe que el digrafo de Cayley  $Cay(\{(1,0), (0,1)\}, Z_n \oplus Z_m)$  es un digrafo 2-regular, por lo que hay dos vértices que definen una arista que empieza en ellos y acaba en  $w \in W$ . Esos dos vértices estarían a la misma distancia, lo cual contradice que  $W$  sea un conjunto resolvente.

**Caso 2** Se supone que  $|W| = 2$  y sin pérdida de generalidad se supone también que  $n \geq m$ .

El grafo se puede ver como una cuadrícula de  $n$  por  $m$ . Sea  $w$  el primer elemento de un conjunto resolvente  $W$ . Como los grafos de Cayley son vértice-transitivos, es posible fijar el primer vértice  $w$  en cualquiera de los vértices del grafo. Para que las distancias sean más visibles, se elige  $w$  de tal manera que sea el vértice que está más arriba y más a la derecha de la cuadrícula y se van a calcular distancias desde todos los demás hasta él. Se define el conjunto  $T$  como el conjunto de vértices para los que sus “adyacentes de entrada” equidistan de  $w$ . De manera informal, se denominan adyacentes de entrada a un vértice  $t$  a los vértices que definen la arista dirigida  $vt$ . En la figura 4.11 se ilustra el conjunto  $T$  para el grafo  $Cay(\{(1,0), (0,1)\}, Z_3 \oplus Z_4)$  con sus vértices pintados en rojo y en la figura 4.12 se pone en cada vértice su distancia al vértice  $w$ . El conjunto  $T$  es el conjunto  $\{(a,b) : a \in 1 \cdots n-1, b \in 1 \cdots m-1\}$ . Por como está definido el conjunto  $T$ , el segundo vértice de  $W$  no puede estar en  $T$ . Los únicos candidatos disponibles son entonces aquellos vértices  $(a,b)$  en los que  $a = 0$  o  $b = 0$ . En caso de que sea una de las dos opciones exclusivamente, existe un vértice  $t$  en  $T$  que dista 1 del vértice candidato a estar en  $W$ , y en este caso los dos adyacentes de entrada al vértice  $t$  tendrían la misma etiqueta. Por lo tanto, estos vértices no pueden ser el segundo vértice de  $W$ .

El último candidato disponible es el vértice  $(0,0)$ . Se puede ver que  $w$  dista 2 de este vértice y los dos vértices adyacentes de entrada a  $w$  van a tener la misma distancia al vértice  $(0,0)$  tanto si el camino que se usa pasa por  $w$  como si no. En consecuencia, el  $(0,0)$  no puede ser el segundo vértice en el conjunto resolvente.

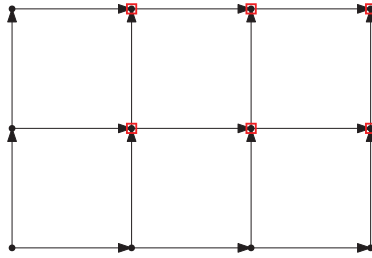


Figura 4.11: Set T.

De esta manera queda probado que cualquier conjunto resolvente de este grafo necesita al menos 3 vértices. ♣

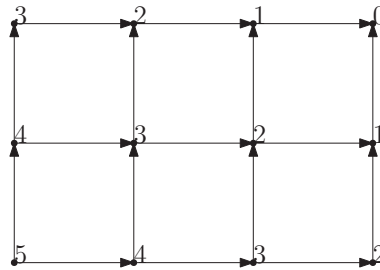


Figura 4.12: Distancias a  $w$

Finalmente, ya que se ha establecido una cota inferior para el cardinal de un conjunto  $W$  resolvente en  $Cay(\{(1, 0), (0, 1)\} : Z_n \oplus Z_m)$ , se va a dar una cota superior para el mismo cardinal.

**Teorema 30** *Se considera el grafo  $Cay(\{(1, 0), (0, 1)\} : Z_n \oplus Z_m)$  y se supone que  $n \leq m$ . Entonces  $|W| \leq n$ .*

**Demostración:**

Sea el digrafo  $Cay(\{(1, 0), (0, 1)\} : Z_n \oplus Z_m)$ , se fija un determinado valor  $1 \leq l \leq m - 1$  y se define el conjunto  $W = \{(0, l), \dots, (n - 1, l)\}$  y se va a probar que es resolvente.

Como estos elementos forman un ciclo, se sabe que no hay dos elementos del conjunto  $W$  que equidisten de un tercero de  $W$ . También, para un  $t$  tal que  $1 \leq t \leq n - 1$ , los elementos del conjunto que sean de la forma  $(t, a) \mid a \in Z_m$  cumplen que tampoco existen puntos que equidisten de  $(t, l)$ . Siguiendo este razonamiento, y explorando cómo se calculan las distancias a los puntos de  $W$ , se concluye que no hay dos elementos con

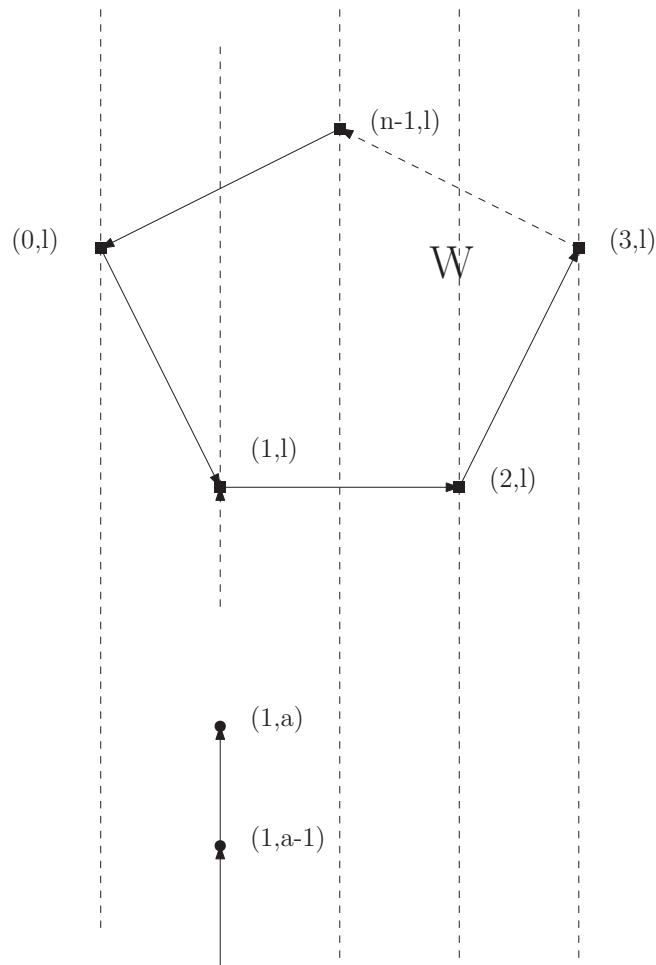


Figura 4.13: Distancias a  $W$

la misma etiqueta, por lo que  $W$  es un conjunto resolvente para  $\text{Cay}(\{(1,0), (0,1)\} : Z_n \oplus Z_m)$ . ♣

En la figura 4.13 se ilustra la construcción de  $W$  y la disposición de los elementos del grafo correspondientes a  $t = 1$ . Sean  $(x, y)$  y  $(z, t)$  dos elementos distintos del grafo. Si  $x = z$ , sus distancias al punto de  $W$  de forma  $(x, l)$  son distintas, luego sus representaciones métricas son distintas. Si  $x \neq z$ , la distancia de  $(x, y)$  a  $(x, l)$  puede ser igual a la distancia de  $(z, t)$  a  $(x, l)$ , pero entonces la distancia de  $(x, y)$  a  $(z, l)$  será distinta a la distancia de  $(z, t)$  a  $(z, l)$ .

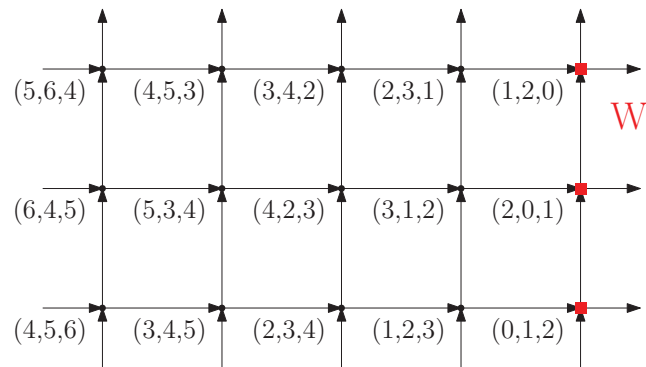


Figura 4.14: Distancias a  $W$  en red

En la figura 4.14 se puede ver el grafo de Cayley del grupo  $Z_3 \oplus Z_5$  con los vértices etiquetados con sus distancias a los elementos del conjunto  $W$ .

# Capítulo 5

## Conclusiones

A lo largo de este trabajo se han analizado conceptos clave sobre los grafos de Cayley y varias características, como la existencia de circuitos y caminos hamiltonianos, los parámetros de dominación y finalmente un estudio sobre conjuntos resolventes. Esta línea de desarrollo ha barrido resultados desde los primeros conocidos hasta los más recientes, como es el caso de los conjuntos resolventes para grafos de Cayley de grupos no abelianos, que data de enero de este mismo año, 2017. Esto muestra que es un campo en el que se está trabajando actualmente, y en el que se pueden esperar muchos más resultados y estudios que exploren en profundidad las cuestiones recogidas en este trabajo.

En el capítulo 4 se muestra que los resultados más relevantes se han obtenido usando argumentaciones de tipo algebraico y que son muy difíciles de probar y mucho más aún de visualizar. Por contra, los resultados que se dan en el capítulo 5, aunque no son tan importantes, son mucho más fáciles de entender porque, además de las pruebas formales, admiten una representación gráfica que permite visualizarlos. En este sentido, cabe destacar que la mayor aportación de este trabajo es la construcción de representaciones gráficas de digrafos que facilitan el estudio de sus propiedades.

Los capítulos 3 y 5 contienen resultados originales, y a partir de ellos, se podrían continuar varias líneas de trabajo. Para empezar, en el apartado de caminos y ciclos hamiltonianos, también es posible estudiar qué grafos o subfamilias de grafos de Cayley son hamiltonialmente laceables. En grafos, este concepto significa que, suponiendo que el grafo sea bipartito, para cada par de vértices  $u$  y  $v$  existe un camino hamiltoniano que empieza en  $u$  y acaba en  $v$  donde cada uno de los extremos del camino pertenece a uno de los dos conjuntos de vértices. Habría que extender esta definición a digrafos y ver después



qué digrafos la cumplen.

En el caso de dominación, se han obtenido conjuntos dominantes perfectos para un par de familias de grafos, pero es fácil observar que son familias que comparten una estructura similar. Siguiendo con esta línea, se podría investigar la expresión general que describa los conjuntos dominantes perfectos para grafos con  $n$  generadores independientes. Finalmente, en los estudios realizados sobre conjuntos resolventes de grafos de Cayley, se ha obtenido una cota superior y una cota inferior para el cardinal del conjunto. Sería interesante desarrollar con más profundidad estos estudios para hallar un resultado más preciso, que estuviera en la línea de los dos artículos mencionados en dicho capítulo.

Por último, y en un nivel más personal, he de decir que la realización de este trabajo me ha dado la oportunidad de seguir mi propia línea de desarrollo, explorando mis capacidades como investigador apoyadas por mis habilidades de estudiante y por la dirección marcada por mi tutor. Este nuevo enfoque me ha permitido descubrir y explorar la combinación de dos ramas de la matemática moderna que han marcado mi carrera como estudiante desde que las conocí por primera vez, el año antes de entrar a la Universidad. Por esto debo decir que además de la gran aportación académica que me ha supuesto este trabajo, también he tenido la inmensa suerte de recibir una aportación muy satisfactoria en lo personal, dándome a conocer el mundo de la investigación matemática, que de otra manera me habría quedado más apartado.


Personalmente, ha supuesto verdadera satisfacción el haber obtenido resultados propios en cada sección estudiada sobre estos grafos.

# Bibliografía

- [1] J. A. Gallian, *Contemporary Abstract Algebra*, Second Edition., 404-423.
- [2] W. Holsztýnski y R.F.E. Strube, *Paths and circuits in Finite Groups*, Discrete mathematics 22 (1978):263-272.
- [3] W.T. Trotter Jr., P. Erdős, "When the cartesian Product of Directed Cycles is Hamiltonian", Journal of graph Theory 2 (1978): 137-142.
- [4] M. Garey, D. Johnson, *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W.H. Freeman, 1979.
- [5] C. Berge, *The theory on graphs and its applications*, (1962).
- [6] J. Caceres, C. Hernando, M. Mora, I. M. Pelayo, M.L. Puertas, C. Seara, D.R. Wood, *On the metric dimension of some families of graphs*, Elect. Notes discrete. math. 22 (2005) 129-133.
- [7] M. Ali, G. Ali, M. Imran, *On the metric dimension of mobius ladders*, Ars Combinatoria 105 (2012) 403-410.
- [8] M. Salman, I. Javaid, M. A. Chaudhry, *Resolvability in circulant graphs*, Acta Mathematica Sinica, English Series 28 (9) (2012) 1851-1864.
- [9] S. Khuller, B. Raghavachari, A. Rosenfeld, *Landmarks in graphs*, Discrete App. Math. 70 (3) (1996) 217-229.
- [10] Ebrahim Vatandoost, Ali Behtoei y Yasser Golkhandy Pour, *Cayley graphs with metric dimension two - A characterization*, (2016)
- [11] D. B. West, *Introduction to graph theory*, 2nd Edition, Pearson Education, Inc, 2001.

- [12] A. Behtoei, Y. Golkhandy Pour, *emph*A characterization of 2-dimensional Cayley graphs on dihedral groups, Imam Khomeini International University, Enero 2017

Este documento esta firmado por

	<b>Firmante</b>	CN=tfgm.fi.upm.es, OU=CCFI, O=Facultad de Informatica - UPM, C=ES
	<b>Fecha/Hora</b>	Mon Jun 12 23:00:23 CEST 2017
	<b>Emisor del Certificado</b>	EMAILADDRESS=camanager@fi.upm.es, CN=CA Facultad de Informatica, O=Facultad de Informatica - UPM, C=ES
	<b>Numero de Serie</b>	630
	<b>Metodo</b>	urn:adobe.com:Adobe.PPKLite:adbe.pkcs7.sha1 (Adobe Signature)