UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA

LA GEOMETRÍA ANALÍTICA COMO HERRAMIENTA DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE FÁBRICAS HISTÓRICAS

TESIS DOCTORAL

David Mencías Carrizosa
Arquitecto

2017

LA GEOMETRÍA ANALÍTICA COMO HERRAMIENTA DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE FÁBRICAS HISTÓRICAS

Autor:

David Mencías Carrizosa
Arquitecto

Directores:

Dña. Pepa Cassinello Plaza
Dra. Arquitecto

D. Ignacio Payá Zaforteza
Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

2017

POLITÉCNICA

Tribunal nombrado por el Sr. Rector Magfco. de la Universidad Politécnica de Madrid, el
día de de 20....

Presidente: _____

Vocal: _____

Vocal: _____

Vocal: _____

Secretario: _____

Suplente: _____

Suplente: _____

Realizado el acto de defensa y lectura de la Tesis el día..... de..... de 20... en la
E.T.S.I. /Facultad

Calificación

EL PRESIDENTE

LOS VOCALES

EL SECRETARIO

A mis niñas Eli, Daniela e Irene

A mis padres

RESUMEN

La primera etapa en cualquier evaluación o actuación en un edificio histórico, entre ellos los que se encuentran contruidos con fábricas, pasa por realizar un levantamiento geométrico y constructivo, para posteriormente volcar la información obtenida en un ordenador y realizar un modelo informático del mismo. Esta información se codifica computacionalmente mediante una serie de técnicas de modelado y sirven de base a futuros trabajos, entre ellos, el análisis estructural, que permitirá bien entender el comportamiento estructural bien determinar el nivel de seguridad actual o futuro.

Esta tesis tiene por objetivo diseñar un método de análisis estructural computerizable que, a partir de la información analítica contenida en los modelos geométricos y constructivos informáticos, permita la evaluación del equilibrio aplicando el Teorema del limite inferior del Análisis Limite de fábricas históricas. Especialmente indicada para estructuras tales como arcos, bóvedas, cúpulas y estribos, el equilibrio de estos tipos se encuentra determinado por parámetros geométricos, dado que el origen de las cargas a las que se ven sometidas es fundamentalmente de peso propio, y la determinación de estas es geométrica.

Para ello este trabajo, se divide en tres partes claramente diferenciadas. La primera se centra en una investigación teórica que, haciendo un recorrido por los procedimientos de levantamiento geométrico y constructivo de los edificios históricos y las técnicas de modelado computerizado, identifica los parámetros analíticos necesarios para la definición geométrica. A partir de ellos, se propone un método que emplea la Geometría Analítica contenida en dichos modelos para que, añadiendo la información constructiva y estructural, se pueda determinar la ecuación de la curva o superficie de empujes que verifica el equilibrio. Una vez obtenida, la visualización del mismo, se evalúa gráficamente sobre el modelo original, lo que permite analizarlo de manera intuitiva, directa y sencilla el equilibrio global de este tipo de estructura. A partir de él, se diseña un algoritmo computerizable, que sirve para implementar un prototipo de herramienta informática.

En la segunda parte del trabajo se realiza una investigación práctica, en la que se verifica la validez del algoritmo mediante la aplicación a una serie de estructuras geométricas, tanto planas como espaciales, tales como arcos, bóvedas y cúpulas. Asimismo se realiza la calibración y validación mediante el estudio comparativo del análisis de un modelo de arco mediante diversas técnicas de determinación de la curva de empujes y diversos modelos geométricos. Se estudia el empleo de la herramienta con la aplicación a casos reales, modelizados a partir de diversas técnicas y diversos tipos constructivos.

La investigación concluye con una tercera parte dedicada a la realización de una serie de ensayos fotoelásticos que permiten la visualización del recorrido de las cargas en el interior de modelos de estructuras de fábrica.

ABSTRACT

A geometric and construction surveying used to be a first stage in any evaluation or intervention in historic building, including those that are built with masonry. Then the information obtained will be dumped it into a computer to build a virtual model. These data are coded through a series of modelling techniques and serve as a basis for future work, as structural analysis, that allow either to understand structural behaviour or to determine the current or future security level.

This dissertation aims to design a computational structural analysis method that, based on the analytical information contained in geometric and construction computer models, to allow the equilibrium to be evaluated, using lower bound theorem of limit analysis. The equilibrium of arches, vaults, domes and buttresses are determined by geometric parameters and are mainly subjected to self-weight loads that are geometrically established. Therefore these types of structure are especially indicated to be analysed using geometric procedures.

For that purpose, this work is divided into three separate parts. The first focuses on a theoretical research through the geometric and construction surveying of historical buildings and computer model techniques, in order to identify the analytical parameters necessary for the geometric definition. Based on this information and adding construction and structural features, a method that use Analytic Geometry contained in these models is proposed in order to establish the equation of the curve or surface in equilibrium. Once obtained, its visualization is evaluated directly on the model, which allows an intuitive, direct and simple procedure of analysis of global equilibrium of this type of structures. On that basis, a computer algorithm is designed that allow to implement an prototype of computer tool.

A practical research is performed in the second part of the work, where the designed algorithm is validated with the help of the application in plane and spatial structures such as arches, vaults and domes. Furthermore the calibration and validation is carried out by a comparative study of the analysis of an arch using different ways of obtain the thrust line and different geometric models. The use of the tool applied in real cases with different models and constructive type is also performed.

The third part of the research is dedicated to the realization of a series of photoelastic tests that allow the visualization of the path of the loads inside the models of masonry structures.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero dar las gracias a mis directores, Pepa Cassinello e Ignacio Payá, por su tiempo, dedicación y ayuda. Gracias a Pepa, por haberme abierto las puertas del apasionante mundo de la investigación y por contagiarme de la tremenda ilusión con la que se embarca en cada tarea, empezando por la emoción y pasión con la que hablaba de los esqueletos pétreos de las catedrales góticas en los cursos de Doctorado. A Nacho también quiero darle las gracias por su enorme disponibilidad y su siempre dispuesta amabilidad a la hora de atenderme, de leer y releer y corregir. Gracias por la positiva acogida que le brindó a este tema en las III Jornadas de Enseñanza de Ingeniería Estructural, cuya participación fue el origen de esta tesis.

Quiero dar las gracias a la Fundación Juanelo Turriano, por haber apoyado este trabajo por medio de la beca de Doctorado así como por las facilidades que me ha proporcionado a lo largo de este tiempo, y en su nombre a su gerente, Bernardo Revuelta por su cercanía y amabilidad.

Tengo que dedicar unas palabras de agradecimiento muy especial a los profesores Julián García y Fernando Magdalena de la Escuela Técnica Superior de Edificación de Madrid, por el magnífico trabajo realizado en el desarrollo de la fotoelasticidad aplicada a fábrica y por su ayuda para la realización de la fase práctica, por sus comentarios y por lo fácil que hacen trabajar con ellos.

Quería dar las gracias también al matemático José Luis Muñoz, del IES Salvador Dalí y del Instituto Geogebra Maslam al-Mayriti por haberme introducido en el mundo de la Geometría Dinámica y guiado a través del Geogebra. Muchas gracias también por las revisiones, comentarios y sugerencias que me ha ido realizando desde el principio del trabajo. También quería darle las gracias a la profesora Lourdes Tello, del Departamento de Matemáticas de la ETSAM, por atender mis dudas sobre Geometría y por un muy inspirador curso de Doctorado sobre Modelización y Análisis Numérico, que ha marcado la realización de esta tesis.

Quiero mostrar unas palabras de agradecimiento a mis compañeros de la IE Universidad, por introducirme en el mundo de la Investigación, y especialmente a los profesores Joaquín Grau y Margarita Arroba, que me han brindado su apoyo.

Gracias a mis padres, por haberme inculcado los valores y proporcionado las herramientas para ser quien soy y poder llegar hasta aquí, y muy especialmente por el apoyo y la ayuda, que como padres y abuelos me siguen presentando.

Quería darle las gracias a mis hijas, que aunque pequeñas, son plenamente conscientes del tiempo que les he quitado para poder a llegar a escribir esto.

Por último quería dar las gracias a mi correctora, revisora, diseñadora gráfica, delineante, maquetadora, ayudante de laboratorio, público, psicóloga, coach, compañera de trabajo, pero sobre todo, a la mitad de vida, a mi mujer, Elisabet. Gracias porque sin ti, casi nada hubiera sido posible, pero esto tampoco.

“El arco es el mayor invento del arte clásico”

Eduardo Torroja.

Razón y Ser de los tipos estructurales

ÍNDICE

21	PARTE I: ANÁLISIS DE EDIFICIOS HISTÓRICOS DE FÁBRICA
23	1. INTRODUCCIÓN
25	1.1 La arquitectura de fábrica y las fábricas de la arquitectura
29	1.2 La restauración del patrimonio arquitectónico: el entendimiento estructural
31	1.3 El análisis estructural de edificios históricos
33	1.4 La Geometría Analítica y sus aplicaciones
39	2. CONTENIDO Y ESTRUCTURA DEL TRABAJO
45	3. HIPÓTESIS, OBJETIVO Y MÉTODOS
47	3.1 Hipótesis
49	3.2 Objetivos
53	3.3 Métodos de investigación
57	4. ANÁLISIS DE FÁBRICAS. ANTECEDENTES Y ESTADO DE LA CUESTIÓN
59	4.1 Análisis de estructuras de fábrica históricas
69	4.2 Análisis Límite y Equilibrio: enfoques y aplicaciones
77	4.3 Resumen
81	PARTE II: ANÁLISIS ESTRUCTURAL MEDIANTE GEOMETRÍA ANALÍTICA
83	5. CARACTERIZACIÓN GEOMÉTRICA Y CONSTRUCTIVA DE ESTRUCTURAS DE FÁBRICA
85	5.1 El levantamiento geométrico en el proceso de toma de datos
97	5.2 Modelado geométrico. Técnicas y procedimientos
109	5.3 Levantamiento constructivo de edificios existentes
113	5.4 Materiales, caracterización y construcción
121	6. FUNDAMENTOS TEÓRICOS
123	6.1 Líneas de empujes
143	6.2 Análisis límite de estructuras de fábrica
151	6.3 Propiedades analíticas de modelos geométricos
157	7. DISEÑO DE LA SOLUCIÓN
159	7.1 Planteamiento general
167	7.2 Datos geométricos y constructivos
177	7.3 Resolución de las ecuaciones de equilibrio
185	7.4 Representación y validación
189	7.5 Extensión del método

203	8. ALGORITMO E IMPLEMENTACIÓN
205	8.1 Algoritmo de programación
211	8.2 Implementación de la solución
 219	 PARTE III: CASOS DE ESTUDIO. APLICACIONES Y RESULTADOS
221	9. VALIDACIÓN Y EVALUACIÓN
223	9.1 Ejemplos de aplicación en estructuras idealizadas
241	9.2 Estudio comparativo de los diferentes métodos
255	10. APLICACIÓN A CONSTRUCCIONES REALES
257	10.1 Puente sobre el Arroyo Meaques, Madrid
265	10.2 Ruinas de la ermita de Santa María de Hontoba, Guadalajara
275	10.3 Sainte-Capelle, París
291	10.4 Discusión de los resultados
 295	 PARTE IV: VISUALIZACIÓN EXPERIMENTAL MEDIANTE ENSAYOS FOTOELÁSTICOS
297	11. INTRODUCCIÓN A LA FOTOELASTICIDAD
299	11.1 Breve introducción a la fotoelasticidad
305	11.2 Fotoelasticidad aplicada a estructuras de fábrica
311	12. ENSAYOS DE MODELOS FOTOELÁSTICOS
313	12.1 Descripción de los métodos empleados
323	12.2 Resultados de los ensayos realizados
329	13. COMPARACIÓN Y EVALUACIÓN DE LOS RESULTADOS
331	13.1 Comparación de métodos
337	13.2 Discusión de los resultados
 341	 PARTE V: CONCLUSIONES
343	14. CONCLUSIONES
345	14.1 Conclusiones generales
349	14.2 Futuras líneas de investigación
 353	 REFERENCIAS
 369	 ANEXOS
371	ANEXO I: NOTACIÓN

373	ANEXO II: FUNCIONES Y VARIABLES Y EMPLEADAS EN LA PROGRAMACIÓN
375	ANEXO III: EJEMPLOS DE ECUACIONES GEOMÉTRICAS
377	ANEXO IV: EJEMPLOS DE ECUACIONES DE EQUILIBRIO
379	ANEXO V: EVALUACIÓN DE LA PRECISIÓN EN INTERPOLACIÓN DE INTERPOLACIÓN DE CURVAS IDEALIZADAS

PARTE 1

ANÁLISIS DE EDIFICIOS HISTÓRICOS DE FÁBRICA

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

1.1 La arquitectura de fábrica y las fábricas de la arquitectura

1.2 La restauración del patrimonio arquitectónico: el entendimiento estructural

1.3 El análisis estructural de edificios históricos

1.4 La Geometría Analítica y sus aplicaciones

1.1. LA ARQUITECTURA DE FÁBRICA Y LAS FÁBRICAS DE LA ARQUITECTURA

Los materiales estructurales de edificios históricos

Las estructuras de fábricas han estado ligadas directamente a la evolución histórica de la construcción arquitectónica. Desde las primeras obras de ladrillo en Mesopotamia hace más de 4000 años, probablemente secados al sol en lugar de los actuales cocidos (Heyman 2001) hasta la revolución industrial a finales del s. XVIII con la irrupción de nuevos materiales estructurales como el hierro fundido en primer lugar y el acero, posteriormente y a finales del s. XX el hormigón armado, la hegemonía de las fábricas como material de construcción y sistema estructural ha sido muy destacada. Este hecho es muy evidente en las construcciones históricas que han perdurado hasta nuestros días, que abarcan prácticamente la totalidad de las tipologías arquitectónicas y de la ingeniería: religiosa, palaciega, civil, residencial, ingeniería de transporte (puentes de carretera, puentes de ferrocarriles, viaductos,...), hidráulica (acueductos, presas), ...

Sin embargo, a partir del desarrollo del movimiento moderno a principios del s. XX, la ruptura con el pasado es muy evidente en prácticamente la totalidad de los aspectos: concepción, funcionalidad, materiales de construcción, sistemas estructurales,... (Benévolo 1963), lo que provoca un desplazamiento y dejar relegado de manera muy notable a los sistemas constructivos empleados con anterioridad. Es por ello que las fábricas, en otro momento símbolo de la durabilidad de las construcciones, quedan aparcadas de la primera línea de la arquitectura y la construcción.

Por otra parte, evaluando la historia de la construcción de forma global, que si se considera que se desarrolla a lo largo de 60 siglos, éste ha sido el material estructural de la arquitectura que ha sobrevivido en 58 de estos 60 siglos, por lo se puede afirmar casi con rotundidad que es el principal material constructivo del patrimonio histórico.

Las construcciones con valores patrimoniales deben conservarse y mantenerse y para ello, la protección del Patrimonio desempeña un papel fundamental. En España, El Registro General de Bienes de Interés Cultural recogido por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, es responsabilidad de la Dirección General de Bellas Artes y Bienes Culturales y de Archivos y Bibliotecas, y reúne la información de los bienes a los que las Comunidades Autónomas¹ o el Gobierno Central han decidido establecer algún tipo de protección. De los 16.146 entradas incorporadas en su categoría de Inmuebles, descartando los jardines históricos, los sitios históricos, los sitios arqueológicos y los bienes no categorizados, se obtienen 14.705 bienes protegidos. Cabe destacar que de ellos, sólo 77 edificios poseen estructura de hormigón o mixta hormigón con otro material, lo que representa

¹ La Protección del Patrimonio es una de las competencias que en España, se encuentra transferidas a las comunidades autónomas. Cada Comunidad Autónoma posee su propio catálogo del que envía información al Ministerio de Cultura, ya que es la correspondiente Conserjería autonómica la encargada de la establecer la protección de los bienes muebles e inmuebles que a su juicio, crea conveniente.

un 0,5 % de los inmuebles declarados Bienes de Interés Cultural. Esto permite hacerse una idea de la importancia de las estructuras de fábrica en los edificios y construcciones patrimoniales.

Categoría	Número de BIC
Monumentos	13.796
Jardines históricos	100
Conjunto histórico	909
Sitio histórico	286
Sitio arqueológico	982
Otros	73
TOTAL	16.146

tabla 1.1 Distribución de los monumentos catalogados BIC según las categorías

Qué son fábricas

Bajo el término de “fábricas” se esconde un gran cajón donde tiene cabida un gran número de materiales constructivos que se caracterizan fundamentalmente por ser materiales que se encuentran en abundancia en la naturaleza (piedra, barro, arcilla, ...), que con una pequeña transformación artesanal (desbaste, labra, cocido, ...) se disponen unos sobre otros mediante ciertas leyes de traba, para conformar sistemas que se comportan de manera más o menos unitaria, aunque pueden estar compuesto por uno o varios tipos (fig 1.1). Para ello puede o no disponerse de material de junta, ya que ésta no es imprescindible que exista para que pueda trabajar unitariamente, ya que se conservan numerosos ejemplos históricos, contruidos de fábricas a hueso que se mantienen en perfecto estado en la actualidad.

Ya la el Diccionario de la RAE define en su 2ª acepción, al término fábrica como “*Construcción, o parte de ella, hecha con ladrillos o piedras naturales o artificiales, entrelazados entre sí con mortero*”, quedando muy clara, incluso etimológicamente, la relación entre traba y fábrica. Sin embargo no todas las construcciones que emplean piedra o ladrillo son fábricas en el sentido anteriormente descrito. Tanto los nuevos sistemas de cerramientos de fachadas (trasventiladas, aplacados de fachada) como las estructuras mixtas de ladrillo armado, pueden considerarse en esta denominación, ya que el comportamiento y la función que llevan a cabo son radicalmente diferentes. También están compuesto por materiales cerámicos o pétreos pero la disposición de las piezas no desempeñan un papel determinante ni la transmisión de esfuerzos se realiza mediante los mismos mecanismos.

La arquitectura de fábrica histórica se fundamenta en tres elementos básicos: el arco, la bóveda y la cúpula. Sin embargo la bóveda y la cúpula no dejan de ser superficies tridimensionales generadas a partir del arco plano, por lo que a la hora de enmarcarlo en la historia, el entendimiento y la explicación se han centrado en los arcos en primer lugar, para trasladarlo posteriormente al resto.

fig 1.1 Sección de muro trabado reproducido bajo la entrada *La construcción medieval* del Diccionario Razonado de Arquitectura Francesa de los ss. XI al XVI que muestra un aparejo romano (Violet le duc 1859)

Las estructuras de fábrica en la actualidad

A partir de la segunda mitad del s. XX, la arquitectura de fábrica quedó completamente relegada a un plano meramente histórico. Desde el punto de vista constructivo, la fábrica se ha empleado bien como elemento estructural mediante muros de carga o bien como cesamiento vertical donde los muros de carga se han aligerado de tal forma que han formado estructuras de pórticos, conformadas

fig 1.2 Figura bajo la entrada de principio de la construcción del Diccionario Razonado de Arquitectura Francesa de los ss. XI al XVI que muestra un aparejo romano (Violet le duc 1859)

mediante vigas a flexión y machones o pilastras a compresión (Grau 2007).

Junto con el estudio de las estructuras de fábricas, las bóvedas han tenido un impulso renovado en los últimos 15 años, iniciándose desde el punto de vista de investigación teórica a partir del desarrollo de la rama de la ciencia de la Historia de la Construcción (Huerta 2004). Además, a pesar de perderse toda la tradición de construcción en fábrica en el mundo occidental (Huerta 2005), un renovado interés por las estructuras de fábricas se ha centrado en crear nuevas formas complejas con bóvedas de ladrillo, tanto desde un punto de vista académico como profesional. Ejemplo de ello es la construcción en la Bienal de Venecia de 2016, un prototipo a escala real del aeropuerto para drones de Ruanda, diseñado por Norman Foster y ejecutado por el especialista en bóvedas medievales Carlos Martín (fig 1.3a).

Otro de los aspectos que está tomando impulso en las últimas fechas es la posibilidad de ejecución de geometrías no convencionales, gracias a las tecnologías de posicionamiento en el espacio de las piezas de las fábricas. Uno de los ejemplos más evidentes es el caso anterior, en el que ha sido necesario el empleo de sistemas de posicionamiento topográfico, para situar cada pieza en las tres coordenadas del espacio. Tradicionalmente era la mano del albañil, la que con su experiencia y unos medios auxiliares muy sencillos, debía posicionar la pieza. Cuando cada una de ellas se encuentra en un plano y un ángulo diferente al anterior, es necesario recurrir a medios más sofisticados para llevarlo a cabo.

El empleo de geometrías libres en el diseño formal que puedan construirse finalmente y trasladar la idea dibujada (generalmente con potentes sistemas informáticos) a la realidad, ha sido el objetivo de algunos de los arquitectos más vanguardistas de las últimas décadas, como Norman Foster, Zaha Hadid, Shigeru Ban, Alejandro Zaera, ... (Azagra y Bernabeu 2012) .

Las cáscaras son uno de los pocos sistemas estructurales con los que las geometrías libres se pueden llevar a cabo y la solución constructiva para llevarlo a cabo ha sido por medio de fábricas ligeras. En concreto, el uso de la bóveda tabicada, ha sido determinante gracias, fundamentalmente, a dos de sus características: el empleo de pequeñas piezas fácilmente replanteables, que permite la formación de superficies continuas con las curvaturas deseadas² y el uso de morteros de yesos con un fraguado muy rápido, que permite evitar el empleo de cimbras o con apenas unos camones (fig 1.3b). Estas características junto con los costes reducidos que estos materiales poseen, auguran un gran desarrollo para este sistema.

fig 1.3 Bóveda tabicada de forma libre para el 7º Forum Urbano Mundial en Medellín (López López et al. 2014) (izq) y prototipo de aeródromo para drones en Ruanda diseñado por Norman Foster para la 15ª Bienal de Venecia 2016 (Fuente: Foster & Partners) (dch)

² Salvo que la curvatura de Gauss de la superficie, sea muy pequeña el empleo de piezas cerámicas pequeñas, habitualmente menores que los ladrillos convencionales, permite la adecuación a gran cantidad de diseños. Esto permite ejecutar transiciones muy rápidas entre curvaturas positivas y negativas, permitiendo una gran libertad en el diseño.

1.2. LA RESTAURACIÓN DEL PATRIMONIO ARQUITECTÓNICO: EL ENTENDIMIENTO ESTRUCTURAL

La intervención en edificios históricos suele acarrear diversas dificultades añadidas, que no se encuentran en otro tipo de actuaciones. Cabe destacar, las relativas a la descripción geométrica, la definición material y constructiva y al estado de conservación así como la determinación de los daños existentes (Roca 2011). En diversas ocasiones, no es posible caracterizar los materiales con los que se han ejecutado las construcciones así como tampoco averiguar los sistemas constructivos que lo posibilitan, ya sean por dificultades de acceso a la información material y/o documental del edificio o ya sea por el propio desconocimiento de los intervinientes, ya que la Historia de la Construcción es una disciplina muy reciente (Huerta 2011), a la que muchos profesionales dedicados al patrimonio no han tenido acceso en su fase de formación.

Es por ello que a las estructuras arquitectónicas en edificios patrimoniales, no es posible aplicar tanto los reglamentos vigentes para estructuras como la práctica habitual en intervención estructural. Algunos reglamentos, como la norma española de estructuras de fábrica, Documento Básico de Seguridad Estructural – Fábricas, hace referencia expresa a que no es de aplicación a estructuras “*como los que confían la estabilidad exclusivamente a su grueso [...] y aquellas en las que su grueso se consigue a partir de rellenos amorfos entre dos hojas de sillares*” (España. Ministerio de la Vivienda 2006). Esta definición deja claramente fuera a toda estructura histórica.

Es por ello, que el punto de partida para el acercamiento y el entendimiento de una edificio histórico se antoja ciertamente complejo. Para facilitar a los técnicos esta labor, el International Council on Monuments and Sites (ICOMOS) publicó en 2003 una serie de Recomendaciones para el Análisis, Conservación y Restauración de las Estructuras del Patrimonio Arquitectónico, divididos en Principios y Directrices (ICOMOS/ISCARSAH Committee 2005).

De lo recogido en este documento cabe destacar dos ideas importantes. La primera se centra en el hecho que la estructura no es sino una sistema dentro de un bien completo, perteneciente al patrimonio arquitectónico y no puede ser separada de él; la restauración de la estructura no es un fin en sí mismo sino una parte del conjunto, que debe garantizar los requisitos de seguridad y exigencias de conservación, del bien patrimonial al que pertenezca.

Por otra parte, dado que la estructura tiene por objeto fundamental garantizar, con la fiabilidad requerida, la estabilidad del conjunto y la resistencia necesaria para un periodo de tiempo determinado, las actuaciones realizadas deben fundamentarse en la evaluación de seguridad y un buen entendimiento del comportamiento estructural. Dado que el fundamento de la gran mayoría de estructuras de obras nuevas dista enormemente de las históricas y su acercamiento es completamente diferente, las herramientas tanto metodológicas como tecnológicas con las que se realice, es comprensible que también sean diferentes. A este respecto las recomendaciones advierten que “*a menudo, la aplicación de coeficientes de segu-*

fig 1.4. Portada de la Guía para el análisis, conservación y restauración estructural del Patrimonio arquitectónico (ICOMOS/ISCARSAH Committee 2005)

General Secretariat International Council on Monuments and Sites	ICOMOS	International Council on Monuments and Sites
RECOMMENDATIONS FOR THE ANALYSIS, CONSERVATION AND STRUCTURAL RESTORATION OF ARCHITECTURAL HERITAGE		
GUIDELINES		
1 General outline		
2 Acquisition of data, information and investigation		
2.1	General	
2.2	Historical, structural and architectural investigations	
2.3	Survey of the structure	
2.4	Field research and laboratory testing	
2.5	Monitoring	
3 The structural definition		
3.1	General aspects	
3.2	The structural scheme and damage	
3.3	Material characteristics and design processes	
3.4	Actions on the structure and the materials	
4 Diagnosis and safety evaluation		
4.1	General aspects	
4.2	Verification of the causes (Diagnosis)	
4.3	Safety evaluation	
4.3.1	The problem of safety evaluation	
4.3.2	Material analysis	
4.3.3	Condition analysis	
4.3.4	The design approach	
4.3.5	The experimental approach	
4.4	Decisions and reporting	
5 Structural damage, materials decay and remedial measures		
5.1	General aspects	
5.2	Material decay	
5.3	Traces	
5.4	Iron and steel	
5.5	Reinforced concrete	
Appendix 1 - Committee members		
Appendix 2 - Glossary		

ridad concebidos para obras nuevas conduce a la adopción de medidas que resultan excesivas, e incluso imposibles de llevar a la práctica. En estos casos, puede estar justificado recurrir a otras soluciones respecto a la seguridad, si así lo aconsejan unos análisis específicos y otras consideraciones aplicables al caso". Es en este punto donde las técnicas empleadas y la metodología distan de las extendidas en la actualidad y es por ello que éstas, deban tomarse con mucha precaución.

La evaluación sobre seguridad, según el mencionado documento (ICOMOS/IS-CARSAH Committee 2005), debe *"estudiar conjuntamente las conclusiones de los análisis cualitativos y cuantitativos: la observación directa, la investigación histórica, el análisis estructural y, en su caso, los resultados experimentales y las pruebas que se hayan realizado"*. Es necesario hacer énfasis en que el procedimiento para afrontar las actuaciones en el sistema estructural de los edificios patrimoniales pasa en una primera fase por la observación, que es en la que se realiza un levantamiento geométrico y material (véase Capítulo 2) antes de cualquier otra consideración estructural.

Por último, es necesario remarcar que todos los principios y directrices aplicables al patrimonio arquitectónico, que es a quién se dirige ICOMOS, puede ser extensible al resto de construcción histórica, ya que la forma de entender, evaluar y actuar en un edificio histórico es independiente de que sea catalogado o no como bien protegido. Por tanto el análisis de estructuras de fábrica, a las que se enfoca el presente trabajo, parte de estos principios y los hace extensivos a cualquier estructura histórica.

1.3. EL ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE EDIFICIOS HISTÓRICOS

El objetivo de los constructores medievales era dimensionar los elementos estructurales (bóveda, estribos, contrafuertes, ...) para que se mantuvieran en pie. Tradicionalmente se han diseñado y construido mediante reglas basadas en la geometría, que han dado lugar a construcciones que no sólo siguen maravillando, sino que a veces cuesta entender. La base de esa construcción ha sido la geometría y la proporción, en función de los materiales y los medios disponibles. Dichas reglas, han sido descritas en diversos tratados, de los cuales algunos de ellos han llegado hasta la actualidad (Huerta 1996).

Hasta la introducción del racionalismo científico, ningún constructor, ingeniero ni arquitecto se planteó en conocer el estado real de una estructura (Heyman 1999), por lo que todo se basaba en el buen hacer del constructor que a partir de reglas heredadas, que en un primer momento fueron exclusivamente de proporción para aparecer posteriormente relaciones numéricas (Recuenco 2012). La ciencia de las estructuras no ha sabido explicar el funcionamiento de bóvedas y arcos hasta la segunda mitad del s. XIX y a pesar de ello, sigue siendo uno de los misterios de la arquitectura (Kurrer 2012).

Cuando se empieza a desarrollar la ciencia estructural y se separa ciencia de ingeniería en el s. XVIII (Heyman 2001) el objetivo del diseño empieza a centrarse en el dimensionado de la estructura con la cantidad mínima de material. Esta concepción se ha continuado hasta nuestros días y aunque se han añadido conceptos como seguridad, servicio, ... la esencia se ha mantenido.

Cualquier estudio estructural que se realice tiene por objetivo o bien el peritaje de una estructura existente o bien el dimensionado de una nueva. Cuando el objeto de estudio es un edificio histórico, los objetivos varían ligeramente ya que el edificio ya se encuentra dimensionado. Por tanto los propósitos pueden ser, entre otros, los siguientes:

- Entender el comportamiento estructural y el recorrido de las cargas
- Determinar la seguridad del estado actual de la estructura
- Evaluar la seguridad ante una modificaciones de las condiciones o ante un estado de daños
- Dimensionar elementos de refuerzo
- Restaurar las condiciones iniciales de los sistemas

Como se ha comentado anteriormente, el primer paso de la intervención en un edificio existente es entender su estructura, qué elementos participan de la misión estructural y cuál es el recorrido de las cargas hasta la cimentación. A ojos de arquitectos e ingenieros actuales este trabajo parece vanal, pero en un edificio medieval las funciones que hoy separamos claramente no lo estaban tanto y los sistemas constructivos cumplían varias funciones simultáneas. Esta investigación es fundamental cualitativa en un primer momento y cuanto más sencillas sean las herramientas que se empleen para ello, más evidente e intuitivo será el

resultado. En un segundo momento el análisis a realizar puede ser más profundo, incorporando métodos cuantitativos, que puedan servir para determinar su grado de importancia.

Este es el caso, por ejemplo, de ciertos rellenos de bóvedas, que en un primer momento sería necesario evaluar si intervienen o no en el comportamiento estructural y cómo esto afecta al equilibrio global del conjunto. Una segunda etapa debería pasar por la incorporación de sus características que permite evaluar, por ejemplo, la necesidad de mantenerlo, sustituirlo o completarlo hasta un nivel determinado, una vez se establezca su grado de implicación,

El grado de seguridad que una estructura posee ante su colapso es la mayor preocupación que un arquitecto o ingeniero estructural posee en la intervención. Lo fundamental de un edificio es que sea suficientemente seguro para utilizarse. Recurrir a procedimientos actuales para determinar esta seguridad, aplicando herramientas actuales a edificios históricos no parece una estrategia muy adecuada, como se ha comentado en apartado anterior. Deben emplearse métodos y herramientas acordes a las características de la obra a la que se realicen. Por ello establecer la seguridad de una estructura histórica como el cociente entre una tensión obtenida por el análisis de un modelo (a veces muy imperfecto o muy distante de la realidad) y un valor límite del material, cuando caracterizar el material es muy complejo, no parece la estrategia más adecuada.

La modificación de las condiciones iniciales de un edificio u obra de ingeniería o la evaluación ante un proceso patológico, suele ser los motivos habituales por los que se realiza el análisis estructural. Conocer el origen y la importancia de los daños es fundamental para poder intervenir correctamente, y si su origen es estructural, con mayor razón. En este caso los daños existentes suelen dar pistas de cómo está actuando la estructura, que si no ha colapsado, significa que algún mecanismo de traslado de cargas existe aunque no sea evidente, por muchos análisis que digan lo contrario.

La modificación de las cargas en un edificio, por ejemplo, puede ser pretendido o completamente involuntario. Este último es el caso de los nidos de cigüeñas en las partes altas de los edificios. La posición asimétrica de una carga concentrada importante, puede suponer la modificación del comportamiento de la cúpula produciendo esfuerzos no previstos que la estructura no es capaz de soportar.

Por último, en ocasiones es necesario no evaluar la estructura existente sino proyectar elementos nuevos, que deban trabajar en conjunto con los anteriores. Para su dimensionado, es necesario determinar las solicitaciones a las que está sometida la estructura existente como puede ser el caso, por ejemplo, de la apertura de un hueco de paso en el estribo lateral de una bóveda.

fig 1.5. Nido de cigüeñas en la cubierta de la cúpula Sur de la Real Fábrica del Vidrio de la Granja de San Ildefonso, Segovia (Imagen del autor)

1.4 LA GEOMETRÍA ANALÍTICA Y SUS APLICACIONES

Definición y orígenes de la Geometría Analítica

La Geometría Analítica se puede definir de manera muy simple como la resolución de problemas geométricos usando el Álgebra (González 2003), que tiene su origen en el s. XVII, denominándose en un principio geometría cartesiana debido a que se estudia dentro de un sistema cartesiano de coordenadas.

Se encarga de describir y estudiar las figuras geométricas mediante el análisis matemático y el álgebra, estableciendo una correspondencia entre los puntos de un espacio en $\mathbb{R}^n$ y n números reales ordenados, es decir un sistema de coordenadas (González Urbaneja 2007). De esta manera se puede establecer en $\mathbb{R}^2$ una relación entre curvas y ecuaciones de dos variables. Recíprocamente para cada ecuación de dos variables está definida una curva que determina un conjunto de puntos en el plano, en relación a un sistema de coordenadas, previamente establecido.

$$f(x, y) = 0 \quad (1.1)$$

Del mismo modo, en $\mathbb{R}^3$ se relacionan curvas en el espacio y sistemas de dos ecuaciones con tres variables.

La Geometría Analítica es por tanto, una especie de diccionario entre el Álgebra y la Geometría que asocia pares de números a puntos y ecuaciones a curvas (González Urbaneja 2003). Esto permite que, por ejemplo, para resolver el problema geométrico de determinar el punto de la intersección de dos curvas representadas por las ecuaciones (1.2), basta con resolver el sistema de ecuaciones formado por ambas de forma algebraica.

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 0 \\ f_2(x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

La resolución gráfica en el plano muchas veces es inmediata y fácilmente visualizable, pero al trasladar estos mismos al espacio, los problemas geométricos resultan mucho más difícil de comprender, por lo que la resolución algebraica sirve de herramienta directa y inequívoca.

Asimismo, la Geometría Analítica, permite establecer la relación entre ciertas propiedades geométricas asociadas a un elemento geométrico y la ecuación algebraica que lo representa, como son la longitud, el área bajo la curva, el área de una superficie, ... lo que resulta de enorme interés para resolver problemas asociados a la geometría, como pueden ser problemas estructurales (Mencías 2015). La Geometría Analítica trata de obtener, por una parte, la ecuación de una curva en un sistema de coordenadas y por otra, a partir de una ecuación, polinomio o

función, determinar los puntos que cumplen dicha condición para un sistema de coordenadas.

Esta rama aparece casi simultáneamente al de otras ramas matemáticas en el s. XVII, denominado en ocasiones el siglo de oro de las Matemáticas, donde surgen el Cálculo Infinitesimal de Leibniz y Newton, la Geometría Proyectiva, la Teoría de Números y el Cálculo de Probabilidades. La autoría final de su alumbramiento se discute entre Descartes y Fermat (González Urbaneja 2003), ya que sus trabajos se desarrollan en paralelo, a partir de la evolución metodológica de la Geometría griega e incluyendo nuevos procedimientos más sencillos y resolutivos. Fermat, con su publicación de *Ad locos planos et solidos isagoge*, en 1636 y Descartes, con *La Géométrie*, en 1637, establecen las bases del sistema de coordenadas.

Las aportaciones que realiza Descartes (González Urbaneja 2003), permiten establecer los fundamentos de la Geometría Analítica que se describen a continuación:

- La introducción de las coordenadas
- La aplicación del método de Análisis
- El trazado de una curva construyendo ordenadas a partir de abscisas
- La aplicación del Álgebra simbólica a los problemas geométricos
- La derivación de ecuaciones de los lugares geométricos y la construcción geométrica de las soluciones de ecuaciones
- El estudio de las propiedades de las curvas dadas por sus ecuaciones sobre todo de las derivadas de ecuaciones lineales y cuadráticas
- La representación gráfica de una curva dada mediante la expresión analítica funcional
- La derivación de fórmulas fundamentales para resolver problemas sobre puntos notables, rectas, planos, ángulos, paralelismo, perpendicularmente, distancias, áreas, ...
- La clasificación general de curvas y superficies de segundo orden

El desarrollo de la Geometría Analítica se continuó por parte de Gauss, en los inicios del s. XIX, creando la Geometría Diferencial, donde se amplía las curvas y superficies a todas las variedades diferenciables, usando para ello el cálculo diferencial, que permitían incluir geometrías euclidianas y no euclidianas, al incorporar las variedades como los objetos geométricos a estudiar.

Es por ello, que este campo de las Matemáticas trata de describir mediante ecuaciones y funciones, las figuras geométricas, para luego poder obtener de ellas, mediante el análisis matemático, información y diversas propiedades, tales como longitud del arco de una curva, área de una superficie, volumen contenido entre dos superficies, ... Como se describe en el Capítulo 5, desde el punto de vista del análisis estructural, la determinación de estas propiedades asociadas a la geometría es lo que hace interesante el empleo de la Geometría Analítica.

En este punto hay que hacer un comentario acerca de los límites entre la Geometría Analítica y la Geometría Diferencial, ya que estos no se encuentran rígidamente definidos. En este trabajo se hace referencia a la Geometría Analítica en el contexto de la aplicación del Álgebra a la Geometría, «y de un modo más general, a la exploración de los fenómenos naturales por la Matemática, de la cual la Física matemática actual es el ejemplo en que se ha desarrollado más» (Bell 1949).

La geometría y el modelado informático: CAD, CAE e IGA

El empleo de herramientas informáticas casi en cualquier disciplina para realizar cualquier tarea, es un hecho innegable a día de hoy. Tanto en arquitectura como en ingeniería civil, mecánica, industrial, aeroespacial o naval, el punto de partida comienza con la elaboración de un modelo geométrico informático que reúna las dimensiones, forma y tamaño del objeto a estudiar.

Los programas informáticos de Diseño Asistido por Ordenador (Computer-Aided Design, CAD), se pusieron en marcha en los años 80 del siglo XX y se ha popularizado en la segunda mitad de la década de los 90, llegándose a emplear para la enseñanza de la geometría descriptiva a nivel universitario e incluso preuniversitario. El diseño realizado con CAD se caracteriza por emplear geometría exacta con una precisión milimétrica, que queda constreñida a la formulación que se emplea en su modelización geométrica en función del propio software modelador (Lovadina et al. 2014). El uso de CAD permite un control exhaustivo, a veces incluso, excesivo de la geometría y un nivel de detalle extraordinario, manteniendo una fidelidad completa al diseño realizado.

Para la realización de diversos análisis y simulaciones asociados a los diseños realizados en CAD se han empleado módulos conectados a programas CAD, de manera que el modelado realizado anteriormente sea el punto de partida para los trabajos de análisis. Estas herramientas han sido tradicionalmente empleadas en ingeniería mecánica y su desarrollo máximo se ha obtenido en ese campo.

fig 1.6 Diferencias entre el análisis FEM de presión de aire de un modelo CAD y un modelo IGA (Lovadina et al. 2014)

Los software de cálculo de estructuras, tradicionalmente han aboradado el modelo mediante un entorno propio, adaptándose a sus propias necesidades. En ocasiones disponen de conexiones para la importación de la geometría de determinados estándares pero depende de la voluntad del propio desarrollador de incorporar dichos estándares. Por ejemplo un software muy extendido para el análisis FEM, como es el SAP2000 v19 importa formatos DXF / DWG (formato estándar de Autodesk AutoCAD) o conexión con REBIT, pero no modelos geométricos 3dm realizados con Rhinoceros o modelos BIM de ArchiCAD, que deben realizarse conforme a unas reglas muy específicas para garantizar la compatibilidad.

Dirigido al campo de la ingeniería mecánica, nació el Análisis por Método de los Elementos Finitos (Finite Elements Method, FEM) que como se ha comentado en el apartado anterior, es uno de los métodos más extendidos para el análisis estructural y con ciertas adaptaciones, para la comprobación y evaluación de estructuras de fábrica. Como el propio nombre indica, el método tiene que discretizar la geometría realizando una partición en n elementos finitos, Por ello el análisis se realiza de la geometría aproximada, en el sentido que es discreta en lugar de continua, como el propio diseño pretendía y que por otra parte, necesitaba de un proceso previo de generación de su propia geometría mediante mallas, aspecto éste que supone más de 80 % del tiempo de análisis.

Con la intención de emplear la geometría continua y reducir estos cuellos de botella, se ha desarrollado en los últimos años el Análisis Isogeométrico (Isogeometric Analysis, IGA). La presentación del IGA se realiza en el artículo publicado por Hughes, Cottrell y Bazilevs (Hughes et al. 2005) y el número de artículos científicos en este campo ha ido creciendo de manera exponencial en los últimos 10 años. La idea parte de usar como modelo de análisis FEM las mismas funciones que sirven para describir la geometría en CAD mediante geometría modelada con B-splines racionales no uniformes (Non-uniform rational B-spline, NURBS).

El procedimiento anterior, partía de definir mediante un entorno CAD un modelo geométrico continuo y parametrizado, que se evita errores causados por la modelización y además aumenta la precisión del análisis.

Modelización y análisis

Cualquier análisis, por medios informáticos ya sea estructural o de cualquier otro tipo, requiere de un proceso previo de modelización del objeto que se desee analizar, esto es, definir mediante técnicas computacionales las características relevantes que se deseen analizar. En el caso de las construcciones y obras de fábrica, las propiedades fundamental es que son necesarias para su análisis estructural y verificación del equilibrio son, por un lado la definición geométrica y por otro, la definición constructiva. Sin embargo, la modelización geométrica es un paso previo a cualquier proceso de intervención en construcciones históricas, por lo que dicho modelo ya se encuentra disponible.

Como la definición de los modelos geométricos, como se describe más detalladamente en el Capítulo 2.2, se realiza mediante técnicas algebraicas y se almacena como geometría analítica, por qué no emplear dicha información directamente para realizar el análisis, sin tener que realizar un proceso intermedio de modelización estructural.

CAPÍTULO 2. CONTENIDO DE LA TESIS

2.1 CONTENIDO Y ESTRUCTURA DEL TRABAJO

El trabajo de investigación para la realización de la presente tesis se ha dividido en tres bloques diferenciados: una primera parte de investigación teórica, una segunda de aplicación práctica y una tercera de visualización experimental. El esquema del presente trabajo se presenta siguiendo la misma organización, donde se le añade una primera parte dedicada a la introducción del tema y presentación de objetivos, hipótesis y métodos y se finaliza con una última dedicada a las conclusiones y futuras líneas de investigación.

Parte 1: Introducción, objetivos y métodos

En esta sección se introduce y presenta el problema del análisis estructural de edificios históricos de fábrica. Para ello, por una parte, en el **Capítulo 1** se expone en relación a la edificación histórica, mediante la introducción de ciertos aspectos de intervención en el Patrimonio. Por otra parte se expone y define la Geometría Analítica y como se conectan los modelos, mientras en el presente **Capítulo 2** se describe el contenido y estructura de la investigación así como de los textos presentes en el trabajo.

El **Capítulo 3** expone la hipótesis, objetivos y métodos de investigación. El **Capítulo 4** se centra en el estado de la cuestión, haciendo un recorrido general en primer lugar para, a continuación, resaltar los últimos avances en análisis de edificios históricos de fábrica mediante análisis límite, así como describir la motivación y justificación del trabajo.

Parte 2: Análisis mediante geometría analítica

En el **Capítulo 5** se hace un repaso a los conceptos generales de las áreas que intervienen en el presente trabajo. En primer lugar cómo se adquiere la información geométrica de un edificio existente y cómo se construye el modelo informático a partir de la misma y se identifican los parámetros necesarios. La determinación constructiva y la caracterización de las fábricas se expone a continuación.

En el **Capítulo 6** se exponen los fundamentos teóricos en los que se basa la propuesta divididos en tres áreas. La primera consiste en la determinación de la línea de empujes, deteniéndose en la transcripción analítica de la misma, con figuras y notación actualizadas. A continuación se enumeran las características principales del Análisis Límite aplicado a estructuras de fábrica para finalmente exponer los fundamentos de Análisis Matemático de Curvas y Superficies, que se aplican en este trabajo.

Posteriormente, en el **Capítulo 7** se describe la solución metodológica propuesta, etapa por etapa, desde la obtención de la información del modelo, hasta la resolución y visualización de los resultados, pasando por la obtención de las ecuaciones de equilibrio. Este capítulo concluye con la descripción de la extensión del método propuesto a otros planteamientos, tanto de tipos estructurales como acciones así como sus posibles aplicaciones.

Esta sección finaliza describiendo el algoritmo de programación con el que se ha llevado a cabo el prototipo de herramienta informática que se ha desarrollado para validar la metodología propuesta, así como su implementación y los lenguajes de programación empleados.

Parte 3: Casos de estudio. Aplicaciones y resultados

En esta sección se muestra la aplicación de la herramienta a diversos tipos de estructuras para la verificación del equilibrio. En el **Capítulo 9**, se presenta el análisis de diversos tipos de arcos idealizados, tanto enjuntados como exentos, así como el de bóvedas y cúpulas, donde se exponen los resultados obtenidos. A continuación se realiza un estudio comparativo para un mismo arco, con carga vertical lineal, con varios métodos, para validar el análisis realizado,

En el **Capítulo 10**, se muestra la aplicación específica en tres edificios históricos de fábrica, como son el Puente sobre el Arroyo Meaques en Madrid, las ruinas de la Ermita de Santa María de Hontoba, Guadalajara y la Sainte-Chapelle de París, y se verifica el equilibrio de cada uno de ellos, con las condiciones establecidas previamente.

Parte 4: Comprobación experimental mediante ensayos fotoelásticos

La última parte de la investigación que se presente en esta tesis doctoral, comprende la fase experimental realizada mediante los ensayos fotoelásticos. En el **Capítulo 11**, se presenta en primer lugar una breve introducción a la fotoelasticidad así como al comportamiento de los materiales birrefringentes ante la luz polarizada, para posteriormente presentar los antecedentes y las referencias en estos trabajos que han servido de punto de partida.

A continuación, en el **Capítulo 12**, se describe la metodología y el diseño de la fase experimental para seguidamente, mostrar los resultados de los ensayos realizados. El **Capítulo 13** finaliza con el estudio comparativo entre los resultados de los ensayos fotoelásticos y los del análisis teórico mediante la metodología analítica propuesta.

Parte 5: Conclusiones

Por último se presentan las conclusiones en el **Capítulo 14**, que se han alcanzado una vez concluida la investigación, tanto específicas de los trabajos realizados como generales, así como la evaluación sobre la hipótesis planteada. Por último se presenta las líneas futuras de investigación así como aquellos aspectos que no han tenido cabida en la presente tesis doctoral pero son de interés para ser desarrollados.

Referencias y Anexos

Las referencias empleadas en el texto se representan agrupadas en esta sección. El trabajo se complementa con una serie de anexos, donde se presenta la notación, así como información adicional al propio trabajo que incluye el listado de variables y funciones empleadas en cada fase de la programación, así como ejemplos de resultados y de ecuaciones geométricas y de equilibrio que han sido obtenidas en el transcurso de algunos de los ejemplos presentados.

CAPÍTULO 3. HIPÓTESIS, OBJETIVOS Y MÉTODOS

3.1 Hipótesis

3.2 Objetivos

3.3 Métodos de investigación

3.1. HIPÓTESIS

El ámbito del presente trabajo, como se ha expuesto anteriormente en la introducción, hace referencia al análisis estructural de los edificios históricos cuyo sistema estructural se realiza con fábrica. Para ello se emplea la definición geométrica del mismo que se encuentra almacenada por medio de técnicas analíticas para su visualización y tratamiento con herramientas computacionales en los modelos geométricos informáticos.

Dentro de los objetivos que tiene el análisis estructural, que han sido enunciados anteriormente, se encuentra la evaluación del equilibrio, de manera cualitativa y de la seguridad geométrica de la estructuras de fábrica, que como se explica más detenidamente durante el desarrollo del presente texto, es el enfoque más adecuado para la evaluación global y validación de la estructuras históricas realizadas con este material.

El trabajo de investigación que se plantea en la presente tesis se centra en la relación entre Geometría Gráfica y Geometría Analítica, ya que se trata de dos manifestaciones de una misma realidad, una empleada en el dibujo tradicional y la otra en el dibujo informatizado. Por ello se plantea recuperar técnicas históricas de análisis estructural y en muchos casos, los propios métodos y técnicas con las que se ha llevado a cabo el diseño de los propios edificios históricos a los que va destinado el trabajo, por medio de la aplicación de técnicas computacionales en el ámbito geométrico. De esta manera se pueda manifestar y visualizar los resultados gráficos habiéndose obtenido por medio de técnicas analíticas.

Por ello, la hipótesis planteada, cuyo objeto es la comprobación a lo largo del trabajo y que se concluye con su demostración, se enuncia a partir de lo anteriormente expuesto de la siguiente manera:

“Es posible analizar la estabilidad de estructuras de fábrica históricas aplicando la teoría del análisis límite a partir del levantamiento geométrico y constructivo, utilizando para ello, la geometría analítica computacional”

3.2. OBJETIVOS

El trabajo que se presenta, profundiza en la relación entre forma y estructura enfocado en el tipo estructural donde su manifestación quizá sea la más evidente. Los métodos de análisis estructurales de edificios existentes parten de la definición geométrica y constructiva de los mismos y para llegar a ellas es necesario realizar un levantamiento. Posteriormente este levantamiento dará lugar a un modelo geométrico virtual donde se incorpore esta información, que además es el punto de partida del análisis estructural.

Por ello parece muy interesante, dado que es necesario disponer de dicho modelo para cualquier trabajo que se desee realizar, poder realizar la verificación del equilibrio de una estructura de fábrica (que permite validar o invalidarla directamente aplicando el Análisis Límite), cuando toda la información que se necesita está contenida en el mismo.

Tradicionalmente, los modelos para el análisis parten de la geometría y necesitan de un paso intermedio para poder ser evaluada. Si este paso intermedio no existe, tanto el proceso como los resultados se simplifican. De esta manera y aplicando este enfoque, la disposición del modelo geométrico conlleva de manera inmediata el análisis del equilibrio por medio del Análisis Límite y si este se visualiza mediante el mismo procedimiento gráfico directamente sobre el modelo del que se extrae la información, se obtiene un método sencillo, intuitivo y fácilmente manejable.

Este método otorgaría a aquellos que intervienen en un edificio histórico de una herramienta directa, útil y rápida para poder tomar decisiones a la hora de una intervención o simplemente la valoración de la seguridad en un determinado momento, exclusivamente a partir del modelo CAD que incorpore la información constructiva.

Objetivo Principal

Por todo ello, el objeto principal alcanzado, ha sido establecer las bases teóricas y prácticas, para el desarrollo de una herramienta informática de análisis estructural de construcciones históricas de fábrica, que empleando el análisis límite y mediante la determinación de las curvas y superficies de empujes, permita evaluar cualitativamente la condición de equilibrio comprobando su aplicabilidad.

Esto ha permitido que, a partir de los sistemas actuales que adquisición de información geométrica y cómo esta es convertida en modelos informáticos, se pueda desarrollar un prototipo de aplicación informática versátil y con un amplio campo de aplicación. No se ha tratado tanto de realizar un nuevo procedimiento sino de rescatar un método clásico de determinación geométrica tradicionalmente gráfica, actualizándolo por medio del empleo de técnicas computacionales analíticas, que permite tanto un acercamiento global como uno local.

Este método, como cualquier otro que sea útil para la intervención en edificación histórica, es capaz de incorporar la información de daños que habitualmente se presenta en este tipo de construcciones como es el caso de fisuraciones, agrietamientos y movimientos.

Objetivos Particulares

Para lograr el objetivo principal anteriormente señalado, se han marcado objetivos particulares, que se han dividido en las tres partes que componen esta tesis doctoral, como son una primera fase de investigación teórica, otra de una investigación práctica y por última una de investigación experimental.

Los objetivos particulares alcanzados con la presente investigación, en primer lugar, en referencia a la investigación teórica, son los siguientes:

- Se ha estudiado y evaluado las técnicas de levantamiento geométrico y constructivo existentes que se encuentran más extendidas, así como los medios que dichos instrumentos emplean para obtener, almacenar y transferir la información.
- Se ha estudiado los diferentes técnicas de modelado de la información geométrica y los procedimientos analíticos que los procedimientos informáticos de diseño emplean.
- Se ha verificado que la geometría analítica computerizable es aplicable a la descripción de estructuras existentes de fábrica, de manera que se pueda comprobar que de los modelos geométricos a partir del levantamiento se pueden obtener la información analítica que permita la verificación del equilibrio.

En relación al desarrollo empírico de la investigación se han alcanzado los siguientes objetivos:

- Se ha desarrollado un algoritmo sencillo que permite el análisis estructural mediante la aplicación de la teoría de análisis límite basado en la descripción geométrica y constructiva de las construcciones de fábrica históricas.
- Se ha comprobado que el algoritmo propuesto es adecuado, práctico y sencillo a partir del análisis tanto de diferentes modelos teóricos idealizados de construcciones históricas (arco de medio punto, arco apuntado, bóveda de medio cañón, bóveda de arista,...) como de estructuras de fábrica existentes bien estudiadas y documentadas, tanto de edificaciones como de ingeniería.
- Se ha realizado un estudio comparativo de los distintos modelos geométricos y los métodos de análisis gráficos y analítico, de manera que se pueda evaluar la idoneidad y precisión de uno u otro método.
- Se han sentado las bases para el desarrollo de herramientas, tanto metodológicas como informáticas, para ayudar al análisis estructural de construcciones existentes históricas.

Por último, en relación a la fase experimental de la investigación se han alcanzado los siguientes objetivos:

- Establecer un método de visualización del recorrido de las fuerzas en el paso de las de estructuras discontinuas con la monitorización de las cargas, tanto aplicadas como en los apoyos.
- Realizar una comparación entre los datos empíricos obtenidos con los modelos teóricos empleando el método analítico por medio del prototipo de herramienta informática desarrollada.

Además se pretende que esta investigación sirva como apoyo, en futuras líneas de investigación, para el desarrollo de métodos comprobación basados en la geometría y que puedan ser competitivos desde el punto de vista de fiabilidad y credibilidad, ante los otros más modernos basados en el cálculo numérico

3.3 MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN

Métodos de investigación teórica

Como se ha mencionado anteriormente en el Capítulo 1.6, el principal objetivo del trabajo es emplear la geometría analítica existente en el modelado geométrico de una construcción de fábrica, para que, junto a su información constructiva, se permita verificar su equilibrio.

Por ello la investigación teórica trata de establecer un procedimiento que finalmente desemboque en un algoritmo computacional. Para ello la investigación teórica se ha centrado en tres ámbitos en los que discurre la tesis:

- Levantamiento y modelado geométrico: como se muestra en el Capítulo 2.2 se hace un recorrido por las técnicas de levantamiento y qué tipo de información se almacena existen, fundamentalmente a nivel profesional consolidado, para después establecer las técnicas de modelado y su formulación analítica.
- Análisis matemático de curvas y superficies: Se ha llevado a cabo una investigación transversal que incluye establecer los procedimientos mediante geometría analítica que se realizan mediante geometría gráfica, que incluye tanto el álgebra vectorial como el análisis numérico.
- Verificación del equilibrio estructural y sus consecuencias: La investigación en el campo del análisis estructural ha establecido, partiendo del análisis gráfico de estructura planas, cómo extender el procedimiento a otros modelos así como a otras condiciones de contorno. De aquí deriva la generalización del concepto de superficie de empujes

La investigación teórica se ha llevado a cabo mediante consulta bibliográfica fundamentalmente, no sólo de artículos sino de manuales y textos plenamente consolidados, ya que en éstos se encuentran los fundamentos que rigen hoy en día los software que se emplean a nivel profesional y académico. Estos planteamientos, en cuanto fundamentos teóricos que dotan de validez a la metodología, se recogen en el capítulo 6, y son los que sirven de aplicación al desarrollo siguiente.

Como la metodología propuesta rescata un método gráfico ampliamente extendido en el s. XIX, con técnicas y procedimientos del s. XXI, ha sido necesario recuperar, actualizar y nombrar según criterios contemporáneos algunos desarrollos como el de la ecuación analítica de la línea de empujes de principios del s. XX, presente en el segundo apartado del Capítulo 6.1.

Asimismo por la visualización experimental mediante la fotoelasticidad, ha sido necesario realizar previamente una pequeña investigación teórica que permita establecer la validez de los resultados obtenidos. A pesar de que las técnicas fotoelásticas han dejado de encontrarse en primera línea del análisis estructural hace décadas y sus fundamentos teóricos se remontan a principios del s. XX, re-

sulta asimismo muy interesante poder recuperarlos para compararlos con métodos antiguos, realizados con técnicas modernas.

Para poder implementar la solución se ha recurrido a soluciones informáticas disponibles, y en cuanto ha sido posible de Código Abierto o que la documentación para el desarrollador se encontrara publicada. Como se muestra en el Capítulo 8, el algoritmo computacional se ha desarrollado de manera versátil, para que pueda servir en diferentes plataformas CAD.

Se ha pretendido deliberadamente que el trabajo no discurriera por el campo de la optimización computacional, ya que no se trata de buscar la manera más barata en términos de recursos informáticos, sino proponer una posible. El autor es plenamente consciente que esta tarea puede hacerse con mucha más eficiencia.

Para poder realizar la implementación del algoritmo, también ha sido necesario recurrir a la documentación en línea de los lenguajes de programación empleados, así como la de sus librerías, y de aquellos SDK (kit de desarrollo de software) disponibles para los entornos con los que se ha trabajado.

Métodos de investigación práctica

En esta fase de la investigación, para validar tanto el algoritmo de las soluciones como el diseño de la herramienta, se ha realizado un prototipo de solución computerizada, usando para ellos los medios técnicos disponibles, tanto de hardware como de software. Estos últimos, en la medida de su disponibilidad, han tratado de ser de código abierto y libres, con la intención de que pueda ser más fácilmente accesible, tanto en la investigación doctoral como por parte de la comunidad científica para poder replicar los resultados.

Dado que los recursos informáticos que puede necesitar un análisis de una estructura muy detallada son francamente importantes, se ha tratado de implementar soluciones que puedan ejecutarse en ordenadores personales. Las comprobaciones se han realizado en los siguientes equipos:

- Ordenador de sobremesa, HP 6200; procesador Intel Core i5-2400, 3.10 GHz; 4 GB RAM; Tarjeta gráfica Intel HD Graphics 2000 integrada; Sistema operativo Windows 7 Professional
- Ordenador portátil Lenovo G50; procesador Intel Core i7-5500U, 2.40 GHz; 6 GB RAM; Tarjeta gráfica AMD Radeon R5 M330 1 GB Intel HD Graphics 5500 integrada; Sistema operativo Windows 10 Home.

Se ha realizado la comprobación del equilibrio en los diversos modelos que se detallan en el Capítulo 9, de manera que se pueda abarcar algunos ejemplos significativos de tipos edificatorios y constructivos más habituales en la edificación histórica de fábrica, ante situaciones de carga también más habituales.

En primer lugar, se valida la metodología por un lado en estructuras geométricas idealizadas planas, como es el caso de arcos de diversos tipos, tanto exentos como enjutados. Asimismo se muestra la extensión del método a estructuras geométricas espaciales, como el caso de algunos tipos comunes de cúpulas y bóvedas, que incluye la presencia de rellenos en aquellas donde es habitual encontrarlas. De esta manera se verifica, por un lado que no existen fallos en el procedimiento ni etapas no resueltas, que den lugar a errores, tanto en la programación como en el análisis.

Una vez comprobado que el método es correcto y que los resultados obtenidos son adecuados con la obtención de los resultados cualitativos y cuantitativos para diversas estructuras geométricas idealizadas, se presenta la validación de la herramienta mediante el estudio comparativo del análisis de líneas de empuje obtenido por varios métodos que corresponde al arco con carga continua analizados por Mas-Guindal (2012), con los siguientes métodos:

- Geometría gráfica con CAD con planos radiales
- Geometría gráfica con CAD con planos verticales
- Geometría Dinámica con curvas primitivas
- Geometría Dinámica con curvas interpoladas
- Geometría analítica con modelo de puntos
- Geometría analítica con modelo de curvas primitivas
- Geometría analítica con modelo de curvas aproximadas

La investigación práctica se concluye con la presentación de tres ejemplos de edificios y construcciones que se eligen tanto por las posibilidades de aplicación como por el tipo de modelado del que se parte:

- Puente sobre el Arroyo Meaques, Madrid, modelado partiendo del levantamiento fotogramétrico.
- Iglesia de Nuestra Señora de Hontoba, Guadalajara, modelado a partir de restitución fotográfica.
- Sainte Chapelle, París, modelado por idealización de geometría a partir de documentación planimétrica.

Métodos de investigación experimental

Como se ha comentado en el capítulo anterior, las líneas de empujes son una entidad teórica, que sirve para representar un posible lugar de paso de la resultantes de las fuerzas en el interior de la fábrica. Por tanto, éstas no puede verificarse empíricamente dado que en la realidad no existen como tal. Sin embargo, lo que sí existe físicamente es la manifestación física del estado tensional interno de un objeto sometido a una serie de acciones externas, que sí pueden ser visualizadas y verificadas experimentalmente.

Por ello, la última fase de la investigación, tiene por objeto mostrar la manifestación física del paso de las fuerzas en el interior de un modelo de estructura de fábrica, por medio de la visualización de la concentración de tensiones. El método que se estima más adecuado para este objetivo es mediante la realización de ensayos fotoelásticos, que permite recuperar asimismo una metodología experimental clásica empleada anteriormente para estos fines.

Para ello se ha diseñado una campaña de ensayos fotoelásticos para la obtención de las zonas de concentración de esfuerzos y localizar las corrientes de tensiones, que pueden relacionarse, al menos cualitativamente, con una de las posibles posiciones de las líneas de empujes.

Mediante el uso de un polariscopio con polarizadores circulares (tal y como se describe el Capítulo 12) que ha sido construido específicamente para el ensayo de medios discontinuos de estructuras de fábrica, se han obtenido las imágenes que representan la localización de los esfuerzos a los que se ve sometidos los modelos ensayados. Estos se han realizados con resina epoxídica de 0.5 mm, mediante planchas planas que representan las siguientes estructuras:

- Arco de dovelas continuas enjutado de medio punto
- Arco de dovelas discontinuas enjutado de medio punto

Las fuerzas aplicadas en los ensayos sobre dichos modelos han sido monitorizadas y registradas para evaluar los esfuerzos que aparecen como reacción en los apoyos así como la fuerza aplicada, de manera que se determina la parte de las cargas que intervienen en el equilibrio.

En estos ejemplos, frente a los habituales en las estructuras construidas, el peso propio origina una carga muy pequeña como para poder manifestarse las tensiones en los materiales fotoelásticos ensayados. Es por ello necesario aplicar una fuerza puntual que amplifique estos efectos.

Posteriormente se ha realizado la comparación con los valores resultantes de los mismos modelos, mediante la metodología analítica y se han comparado los resultados gráficos de ambos trabajos.

CAPÍTULO 4. ANTECEDENTES Y ESTADO DE LA CUESTIÓN

4.1 Análisis de estructuras de fábrica históricas

4.2 Análisis Límite y Equilibrio: enfoques y aplicaciones

4.3 Resumen

4.1 ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS DE FÁBRICA HISTÓRICAS

Métodos de análisis de fábricas

A la hora de realizar el análisis estructural de fábricas en construcciones históricas, los enfoques con los que se pueden abordar son muy numerosos y la elección dependerá de uno u otro, de la información disponible y el fin para el que se utilicen los resultados obtenidos.

Una clasificación muy habitual (Huerta 2004; Ramos 2015) es separar entre los métodos clásicos o pre-científicos y los avanzados o científicos. Sin embargo, con el objeto de ilustrar el enclave dentro de los métodos de análisis es conveniente la distinción entre métodos clásicos (previos al desarrollo de la ciencia de las estructuras), métodos científicos tradicionales, métodos tradicionales realizados por medios informáticos y los métodos avanzados de cálculo computacional, según se expresa a continuación:

- Métodos clásicos
 - Reglas geométricas de proporcionalidad
 - Analogía catenaria
 - Estabilidad y equilibrio
- Métodos científicos
 - Línea de empujes
 - Análisis elástico lineal
 - Análisis límite
 - Fotoelasticidad
- Métodos avanzados
 - Análisis de bloques rígidos
 - Modelos simplificados
 - Análisis FEM
 - Análisis DEM

A continuación se pasan a describir brevemente, deteniéndose un poco más en aquellos que sirven antecedentes al objeto de la presente tesis, incluyendo los de carácter histórico.

Métodos clásicos

El cálculo tradicional

El cálculo tradicional de bóvedas, arcos y estribos, estaba basado en la experiencia acumulada y transmitida, fruto de la observación de las construcciones que se mantenían en pie y también de las que se hundían. Huerta (2004) ensalza la labor de dichos constructores calificándolos de científicos ya que «si el método científico consiste en el enunciado de leyes [...] cada edificio construido fue un experimento con éxito [...] y cada ruina una fuente valiosa de información». A partir de ellas, dependiendo de cada época y los materiales empleados, se usaban una

proporción entre el espesor del elemento estructura, la luz que salvaba o una relación entre los distintos elementos.

Estas reglas geométricas, que permitían dimensionar los elementos estructurales acertadamente a los constructores, se ha extendido desde la antigüedad clásica hasta prácticamente el s. XIX. Fueron recogidas y codificadas en diversos tratados, que sirvieron como base para la realización de muchas de las obras que han llegado hasta nuestros días.

Este hecho es debido fundamentalmente a dos circunstancias. Por una parte se debe a que las tensiones que soportan las construcciones históricas se encuentran generalmente muy por debajo de las tensiones de rotura, entre uno y dos órdenes de magnitud por debajo (Heyman 2004) por lo que los mecanismos de colapso no se producen por exceso de tensión en la sección crítica sino por la falta de equilibrio global o local, que suele ser un problema fundamentalmente geométrico (Huerta 2005). Por otra parte, se debe a que los materiales empleados poseen una dispersión relativamente baja entre sus propiedades mecánicas.

El conocimiento del enjutado de los arcos, que es completamente necesario para la estabilidad de las bóvedas de las catedrales góticas en zona sísmica (Cassinello 2005) estaba reflejado en el tratado *El Arte y Uso de la Arquitectura* de Fray Lorenzo de San Nicolás de 1639 (fig 4.1). El enjutado de los arcos es clave para garantizar la estabilidad ante esfuerzos horizontales.

Entre los tratados más extendidos que sirvieron para el dimensionado de numerosos edificios que han llegado a nuestros días hay que localizarlos en el Renacimiento italiano (Palladio 1625; Alberti 1485; Serlio 1552) mientras en España, el más destacado puede mencionarse, el de Rodrigo Gil de Hontañón (Huerta 2001).

Durante los siglos XVII se continúa por sistematizar las reglas que llevaban más de dos siglos empleándose, como en tratado del mencionado Fray Lorenzo de San Nicolás. A partir de entonces empiezan a coexistir las reglas totalmente empíricas con las científicas (Huerta 2004) que continuarán hasta el siglo XVIII con algunos autores como Dupuit, Séjourné y Rankine (Ramos 2015).

La catenaria

La introducción del método científico en el análisis estructural, tal y como lo conocemos hoy en día, empieza por parte de Galileo en el s. XVII con el enunciado de la ley cuadrado - cubo. No es hasta que Robert Hooke publica el símil de la cadena colgante (Heyman 2004), donde se empieza el entendimiento racional de los arcos de piedra (fig 4.2).

2. The true Mathematical and Mechanical form of all manner of Arches for Building, with the true buttment necessary to each of them. A Problem which no Architectonick Writer hath ever yet attempted, much less performed. abccc ddeeeeee fgg iiiiiiiii lllmmmmnnnnnoopr ssstttttruuuuuuux.

fig 4.1 Portada del tratado El Arte y Uso de la Arquitectura de Fray Lorenzo de San Nicolás de 1639 en su edición de 1796 por Plácido Barco (Fray Lorenzo de San Nicolás 1639)

fig 4.2 Monograma que descifrado expresa la similitud entre la cadena colgante y el funcionamiento de un arco (Hooke 1675)

la estructura viene determinada por estar la línea de empujes contenida en su interior.

Los conocidos ensayos de Barlow (1846) demostraron empíricamente la existencia de la línea de empujes y su localización, mediante la colocación de tablillas de madera entre las dovelas de piedra en diferentes posiciones, para evidenciar el paso de las fuerzas por la posición prefijada (fig 4.6). La descripción matemática rigurosa se encuentra realizada por Milankovitch (1907) para arcos y Milankovitch (1910) para estribos.

Estática gráfica

El cálculo de empujes mediante procedimientos analíticos suponía una tarea complicada y poco práctica para los ingenieros de mediados del s. XIX. Mohrmann recoge las tablas del trabajo de Ungewitter (1890) que permitían el rápido cálculo de los empujes de bóvedas para una serie de parámetros constructivos y dimensiones geométricas. Según Heyman (1995) “el uso de las tablas ofrecía al proyectista valores inmediatos de los empujes [...] pero para cada iglesia había que realizarse los cálculos específicos”.

Por ello se buscaron otros procedimientos que pudieran ser eficaces y sencillos para determinar la línea de empujes y entre ellos se encontró la estática gráfica. El uso de polígonos de fuerzas era conocido y aplicado en el s. XVII por Le Hire aunque no fue hasta mediados de XIX que se popularizó y equiparó el cálculo analítico con el gráfico mediante dibujo de antifuniculares (Culmann 1866). La aceptación fue tan amplia que durante las siguientes décadas se publicaron numerosos manuales de estática gráfica y en todos ellos había al menos un capítulo dedicado al cálculo de líneas de empujes (Huerta 1995). Ampliamente conocidos son los trabajos de Cremona (1879) para la resolución de problemas estructurales con métodos gráficos como los polígonos funiculares (fig 4.7).

fig 4.6 Ilustración del resultado de los experimentos para la localización de líneas de empuje (Barlow 1846)

fig 4.7 Polígono funicular mediante estática gráfica mostrada en el capítulo de arcos (Cremona 1879)

fig 4.8 Línea de presiones y empuje del segundo cuerpo del cimborrio de la catedral de Valencia (Llopis, 2014) (izq) y Línea de empujes y presiones de la Iglesia parroquial San Miguel Arcángel de Jalance, Valencia (Navarro, 2010) (dch)

fig 4.9 Análisis de una cúpula con la obtención de las líneas de empujes mediante geometría gráfica Wittmann (1879)

El empleo de la estática gráfica se extendió notable la primera mitad del s. XX, ampliándose a la resolución de numerosos problemas estructurales (Wolf 1921). Los polígonos funiculares han continuado empleándose hasta la actualidad, con el uso de medios gráficos con CAD (fig 4.8a y 4.8b). Numerosos estudios recientes de equilibrio de estructuras de fábrica por medio de líneas de empujes se han determinado utilizando CAD o como herramienta didáctica (Mas-Guindal 2011).

En estructuras espaciales como las bóvedas de arista y las cúpulas simples y dobles, la técnica de cortes sucesivos (con la que se discretiza un elementos tridimensional mediante una serie de estructuras planas paralelas) permitía analizar estructuras espaciales (Huerta 2004). La primera vez que se emplea este método fue Wittmann (1879) (fig 4.9) y se popularizó con las contribuciones de Planat (1887).

Análisis elástico lineal

A pesar que en la historia de la ciencia de las estructuras, el problema del funcionamiento de los arcos ha ocupado un lugar separado del resto de estructuras hasta finales del s. XIX (Heyman 2004)¹, el desarrollo del cálculo elástico trató de unificar los planteamientos para el resto de materiales con los arcos de fábrica. Poncelet (1835) enuncia cómo aplicar la teoría de la elasticidad para encontrar la posición “exacta” de la línea de empujes.

¹ Cabe recordar que en la teoría elástica de Navier (1826), se muestra por separado los arcos elástico y los arcos de fábrica, y que aún introduciendo en ambos los conceptos de tensión, no aplica el modelo elástico al arco de fábrica, separando sus planteamientos (Kurrer 2009)

Pero es Winkler (1879) quien propone la aplicación de esta teoría que en el último tercio del s. XIX se encontraba en pleno desarrollo. Al realizarlo, tiene que establecer ciertas suposiciones sobre el comportamiento del material y las condiciones de los apoyos, estimando que no alteran de manera importante el resultado (Huerta 2005). Es conocido que estas suposiciones suponen una alteración muy notable del comportamiento de la estructura. Para aplicar de manera sencilla la teoría elástica se popularizó el empleo de ciertas simplificaciones, como la incorporación de tres rótulas, que reducían enormemente el proceso de cálculo haciendo la estructura isostática.

Análisis plástico: análisis límite

La aplicación del análisis plástico, desarrollado inicialmente para vigas y pórticos de acero en el segundo cuarto del s. XX (Heyman 2004), supuso el primer avance en el análisis de estructuras de fábrica en más de 60 años, dado que el estudio de éstas se ha quedado relegado a un segundo plano.

El primero en aplicar esta nueva teoría a fábricas fue Kooharian (1952) aunque ha sido Jacques Heyman quién ha desarrollado el análisis límite en arcos y estructurar de fábricas, recuperando la idea que vaticinó Gregory más de 250 años antes sobre equilibrio de arcos (Heyman 1995).

Con la aplicación de los Teoremas Fundamentales del Análisis Límite, el equilibrio se asegura encontrando una posición compatible con las cargas de la línea de empujes en el interior de la fábrica (fig 4.10). Dado que en el presente trabajo se centra en el análisis límite para el análisis de estructuras de fábricas, los fundamentos se detallan en el Capítulo 6.1.

La aplicación del análisis límite a estructuras de fábrica se ha desarrollado de manera muy importante en las últimas décadas, empleando tanto herramientas gráficas como analíticas realizadas por medios informáticos. En el apartado siguiente se explican con más detenimiento estos desarrollos, que incluyen tanto modelos dinámicos de bloques como líneas de empujes.

Fotoelasticidad

La fotoelasticidad ha sido una herramienta de análisis estructural muy útil hasta épocas relativamente recientes, para muy diversos tipos de estructura. Dado que los resultados sobre el comportamiento de los modelos destacan por ser muy intuitivos, esta técnica compitió durante parte del s. XX con la resolución analítica de estructuras, especialmente en los problemas de geometrías irregulares o tridimensionales, donde los modelos de cálculo resultaban ser demasiado simplistas.

El descubrimiento del fenómeno fotoelástico se remonta a las observaciones de Brewster en 1816, aunque no fue hasta el inicio del s. XX cuando se establecieron la relación entre líneas isocromas e isoclinas con las tensiones principales. Pos-

fig 4.10 Agrietamiento de arcos y mecanismos de colapso (Heyman 1999)

fig 4.11 Imagen del ensayo fotoelástico de la sección transversal de la catedral de Bourges (Mark 1982)

fig 4.12 Imagen del ensayo fotoelástico de muro de fábrica sometido a esfuerzo axial (Bigoni y Noselli 2010)

teriormente el desarrollo de nuevos materiales plásticos y resinas fotoelásticas permitió que se extendieran y crearan numerosos laboratorios en Europa, Japón y Estados Unidos a partir de finales de los años 20 del s. XX.

En España, las técnicas eran conocidas y estudiadas ya en los años 30, pero el gran impulsor de esta técnica fue Leonardo Villena, quien, animado por Eduardo Torroja, desarrolló su actividad profesional desde el Laboratorio Central de Ensayos de Materiales, empleándose por numerosos ingenieros como alternativa al cálculo analítico. En el último tercio del s. XX, coincidiendo con el surgimiento del cálculo automático, los métodos ópticos fueron cayendo en desuso y siendo desplazados por los numéricos, gracias fundamentalmente al apoyo informático.

La aplicación en el análisis de estructuras históricas es ampliamente conocida el trabajo de Robert Mark para determinar tensiones en las secciones transversales de catedrales góticas (Mark 1982) (fig 4.11). La experimentación fotoelástica en medios discretos, salvo en alguna aplicación en suelos granulares, éste ha sido su más claro ejemplo hasta fechas recientemente, donde se incorporan los trabajos de Bigoni y Noselli (2010) en muros (fig 4.12) y Magdalena, García y Mencías (2016).

Esta técnica permite una visualización del recorrido de las cargas y un procedimiento cuantitativo pero fundamentalmente cualitativo que “muestra” de forma evidente las corrientes de tensiones. Anteriormente Heinrich (1973) planteó la localización de las líneas de empujes mediante correlaciones fotoelásticas (fig 4.13). Como se comentará más adelante, este es el método experimental adecuado para representación de la posición de las líneas de empujes, con las salvedades que todo modelo reducido posee.

Métodos avanzados

Las técnicas de análisis que se han desarrollado las últimas décadas con ayuda de medios informáticos, parte en muchos casos de teorías o modelos anteriores, que se han implementado de manera más eficiente o más compleja aplicando mayor número de variables o de condicionantes. En otros casos se han realizado aproximaciones novedosas o se han aplicado en estructuras de fábricas, las que pro-

fig 4.13 Relación entre las tensiones reflejadas en un ensayo fotoelástico y las líneas de empuje en un arco de medio punto (Heinrich 1973)

vienen de otros materiales, como es el caso de los análisis FEM (Finite Element Model o Modelo de Elementos Finitos) y DEM (Discrete Element Model).

Análisis de bloques rígidos

La aproximación cinemática computacional de las estructuras de fábrica se ha desarrollado de manera importante los últimos años. La posibilidad de determinar mecanismos de fallo mediante formación de rótulas, es una aplicación de los teoremas del análisis límite. Las aplicaciones informáticas de estas técnicas son numerosas, dado el potencial del análisis límite, y sus enfoques diversos que abarcan desde análisis de cargas dinámicas en puentes de fábrica en modelos planos mediante el software RING (LimitState 2007) a los mecanismos de rotura tridimensionales cinemáticos.

Orduña y Lorenço (2003, 2005a, 2005b) han establecido un modelo general para el análisis límite tridimensional por resistencia de estructuras de fábrica, que se basa en reglas de no asociación entre bloques y en esfuerzos a compresión limitados (fig 4.14).

Modelos simplificados

Frente a análisis donde se propone el aumento de la información a manejar, la tradición del cálculo estructural ha buscado siempre la simplificación, con la intención que sea más manejable y entendible los resultados. Entre los modelos simplificados destacan las denominados modelos de Formulación Matricial Generalizada para elementos lineales o estructuras de esqueleto (Roca 2010), que describen geometrías complejas bi o tridimensionales, mediante barras con descripciones perfeccionadas del material (tensiones de rotura, ductilidad o aplastamiento en compresión).

Entre las estructuras o partes donde se han aplicado esta técnica destacan la mezquita Pequeña de Santa Sofía (Roca 2004) o la torre de la fachada de Barcelona (Andreu et al 2006) (fig 4.15).

Por otra parte, se ha intentado realizar diversos modelos para la aproximación computacional de macroelementos rígidos y deformables, que analizan paños o muros completos como un único elemento reduciendo los grados de libertad y por tanto los requisitos computacionales para su solución (Brencich et al 1998), especialmente ante cargas dinámicas.

Análisis mediante modelo de elementos finitos

La aplicación del análisis elástico lineal mediante elementos finitos a las estructuras de fábrica fue llevada a cabo inicialmente en las década de los 70 del s. XX, empleándose por Dawe (1974) para analizar la carga última de arcos de fábrica. Esta metodología ha sido criticada debido al empleo de modelos continuos con

fig 4.14 Modo de fallo de un muro cargado verticalmente en su plano (Lorenço y Orduña 2003)

fig 4.15 Modelo de barras de la torre de la fachada de la catedral de Barcelona (Andreu et al 2006)

propiedades elásticas precisas y conocidas (Kurrer 2009), a pesar de realizarse importantes esfuerzos por solventarlas.

Los avances en la modelización de estructuras de fábrica para análisis FEM ha sido muy notable en los últimos años. Precisamente para vencer esta dificultad, se han establecido diferentes estrategias que se pueden clasificar en (Roca 2010):

- Macromodelos
- Micromodelos
- Homogenización
- Modelos Discontinuos

El primero de ellos se trata del más popular debido a las menores necesidades de cálculo que presenta. Consistente en la modelización de la fábrica como un único material donde no se distingue pieza de junta, estableciendo un material ficticio continuo, homogéneo y ortotrópico. Una ejemplo de esta aproximación fue realizada por Lourenço (1996) para análisis no lineal de cargas en el plano de muros basados en la teoría plástica.

Los micromodelos, separan los parámetros constitutivos de las piezas de los del mortero e incluyen la interfase mortero-pieza. Tanto la pieza como el mortero se modelizan como materiales continuos y a la unión se le asigna unas propiedades que determinarán la posibilidad de agrietamiento local. Se trata de la aproximación más precisa a la realidad (Roca 2010), pero la que requiere más recursos computacionales.

A medio camino de los modelos macro y micro, se encuentran los modelos homogenizados, donde la fabrica es un medio continuo cuyos parámetros se derivan de los elementos constituyentes y de la disposición geométrica. La simplificación de la geometría se realiza mediante la repetición de una unidad básica o célula en dos ejes, vertical y horizontal, con inserción de juntas regularmente en las dos direcciones. Milani et al (2006a, 2006b y 2006c) (fig 4.16). La mesoscala tridimensional modeliza elementos sólidos y la interfaz de mortero para obtener las cargas de colapso (Zhang et al. 2016).

La modelización de la fisuración de la fábrica, por otra parte inherente a ella (Mas-Guindal 1996), no es posible realizar en este tipo de aproximaciones. Por ello, se plantea un tipo que consiste en la inclusión de nodos dentro del modelo que respondan a las discontinuidades del material. Una de las primeras aplica-

fig 4.16 Muro de fábrica modelizado mediante técnicas de homogenización (Milanie et al. 2006b)

ciones de esta técnica se encuentra en el análisis de los contrafuertes de Santa Sofía de Estambul (Mark et al. 1993) (fig 4.17).

Análisis mediante modelo de elementos discretos

La modelización mediante elementos discretos (análisis DEM) se caracteriza por modelar la unión entre las diferentes piezas que interactúan a lo largo de sus bordes, permitiendo reproducir los desplazamientos y rotaciones de sus componentes y entender los mecanismos cinéticos de colapso. El cálculo de tensiones está basado en el método FEM, aunque presenta una gran diferencia en la situaciones de rotura, ya que esta no se presenta por alcanzar un límite tensional sino por producirse desplazamientos excesivos.

Inicialmente aplicado en los estudios de rocas y suelos, el empleo de análisis DEM se ha extendido a las estructuras de fábrica con cargas sísmicas (Pagnoni 1994), idealizando el material como discontinuo donde los nudos se modelizan mediante nodos de contacto entre los bloques elásticos, permitiendo una serie de movimientos y giros (fig 4.18).

La aplicación más evidente de esta metodología se presenta en el análisis de estructuras conformadas por sillares de piedra o piezas de ladrillo de dimensiones regulares, resultando muy visuales y gráficos los resultados mostrados.

fig 4.17 Análisis FEM de la Basílica de Santa Sofía de Estambul (Mark et al. 1993)

fig 4.18 Movimientos y giros permitidos para el análisis DEM (Gilbert 2007)

4.2 ANÁLISIS LÍMITE Y EQUILIBRIO: ENFOQUES Y APLICACIONES

Introducción

Como se ha visto en el apartado anterior, el apoyo informático ha producido un gran desarrollo en los métodos de análisis de estructuras de fábrica, que verifican tanto el equilibrio como la resistencia, ante cargas estáticas y dinámicas, modelizando el material de manera lineal o no lineal, ... Sin embargo la recuperación de métodos clásicos bajo nuevos enfoques ha recibido un importante empuje en las dos últimas décadas.

Éstas se pueden clasificar fundamentalmente en dos grupos: las que buscan la determinación de una posible línea de empujes, el empuje resultante o el equilibrio funicular por un lado y aquellas que discretizan la estructura mediante bloques rígidos o análisis DEM.

Muchos ejemplos de los expuestos a continuación están planteados inicialmente, bien para bóvedas de edificación o bien para puentes. Sin embargo, el planteamiento y la aplicación práctica, puede ser fácilmente trasladable de unos a otros, con unas pequeñas adaptaciones. Por un lado los puentes deben soportar cargas dinámicas pero en cambio su geometría es muy sencilla, por otra, las estructuras de edificios son mucho más complejas espacialmente pero las cargas que soportan son más sencillas.

Líneas de empujes: funiculares

Equilibrio mediante funiculares

Este tipo de análisis parte, al igual que en la estática gráfica clásica de funiculares, de la discretización de las cargas aplicándolas en puntos concretos de la estructura, ya sea mediante equilibrio como por cierre de los polígonos funiculares.

La herramienta CADenary (Kilian 2004) es un ejemplo del empleo de modelos clásicos en entornos computacionales. En ella se crea un entorno virtual tridimensional para reproducir los modelos físicos de cables colgantes mediante la exploración de polígonos funiculares o de muelles elásticos (Kilian y Oschendorf 2005), tanto para verificar el equilibrio de una estructura existente como para búsqueda de la forma resistente o form-finding (fig 4.19)

Jorquera (2007) ha estudiado el comportamiento de los puentes arco espaciales lo que le permite diseñar un método iterativo de resolución de antifuniculares tridimensionales, específicamente diseñado para puentes arco, pero fácilmente extensibles a otras configuraciones, de las cargas producidas por los tirantes de puentes (Jorquera y Manterola 2012).

Funiculares interactivos

Interactuar con el polígono de fuerzas en tiempo real ha abierto la posibilidad de otra serie de herramientas muy didácticas e intuitivas como es el caso de Intera-

fig 4.19 Imágenes de la aplicación CADenary (Kilian 2004)

tive Thrust (Block, Ciblac y Ochsendorf 2006), que se emplea la construcción del antifunicular a partir de un polígono de fuerzas en tiempo real (fig 4.20) sobre una base de tipos de estructuras predefinidas (arco semicircular, colapso de un arco con cuatro rótulas, estribo,...), realizado sobre la base del software de geometría dinámica Cabri.

eEQUILIBRIUM (Lachauer y Block 2014) es otra herramienta desarrollada a partir de la anterior con una finalidad didáctica, pero que amplía los casos estudiados, no sólo de estructuras de fábrica sino de otros materiales como pórticos de hormigón celosías de acero. El método empleado se reduce a la aplicación de polígonos funiculares y construcciones geométricas sencillas que proporcionan información visual muy intuitiva. La posibilidad de computación algebraica de métodos gráficos permite la creación de dichas herramientas informáticas (Van Mele y Block 2014).

Dentro del entorno didáctico la geometría dinámica se ha mostrado como una herramienta muy útil, que permite relacionar geometría-estructura-forma de manera muy notable (Mencías 2013, Mencías 2014). A diferencia de los ejemplos anteriores donde se discretizaban las fuerzas, el uso de la geometría dinámica permite determinar las cargas de peso propio (que es la carga fundamental de éstas), estableciéndose cargas continuas y líneas de empujes en base a las mismas (fig 4.21). Este procedimiento se realiza sobre el software de geometría dinámica libre Geogebra (International GeoGebra Institute 2012), que permite la visualización analítica y gráfica de manera simultánea.

Redes de empujes

La estática gráfica mediante funiculares, al ser trasladada a estructuras espaciales como las bóvedas, suponen una serie de dificultades, ya que el recorrido de las cargas se hace más complejo. La técnica de los cortes sucesivos era conocida ya en el s. XIX pero hasta finales del s. XX no aparece un “tratamiento espacial” de la línea de empujes. O’Dwyer (1999) fue uno de los primeros que propuso el modelado de las bóvedas mediante una red de fuerzas discretas para establecer las tensiones principales (fig 4.22), estableciendo diversos caminos predefinidos para la transmisión de esfuerzos.

fig 4.20 Imagen de la app Interactive Thrust (Block et al. 2006)

fig 4.21 Uso de la geometría dinámica para la determinación de curvas de empujes (Mencías 2014)

fig 4.22 Red de fuerzas en bóvedas (O’Dwyer 1999)

fig 4.23 Fundamento teórico sobre reciprocidad entre polígono funicular y las superficie de del método TNA (Block 2009)

Como el recorrido de las cargas no es posible conocerlo de antemano, Block (2009) ha propuesto un método para establecer el polígono funicular espacial que denomina Análisis de Red de Empujes (TNA, Thrust Network Analysis). Partiendo de la discretización de las cargas verticales, se basa en la identidad recíproca entre la proyección horizontal de las compresiones en una cáscara y el polígono funicular de las cargas gravitatorias (fig 4.23) o reformuladas para una malla primaria que permita incluir acciones horizontales (Marmo y Rosati 2017).

Aplicando el método anterior, se ha desarrollado una aplicación form-finding bajo el entorno gráfico del software CAD Rhinoceros, denominada RhinoVault (Ripman et al 2012). Tiene la particularidad de trabajar directamente en un entorno gráfico mediante el empleo de la modelización geométrica y permite la exportación de los modelos para la fabricación digital. Mediante el uso de esta herramienta se han realizado construcciones de geometría libre trabajando únicamente a compresión, como la mostrada en el Capítulo 1 (fig 1.3)

Líneas de empuje: cálculo analítico

El cálculo analítico de líneas de empuje, que en el s. XIX se abandonó por la dificultad y complejidad que entrañaba, actualmente no supone ningún esfuerzo adicional gracias al empleo de cálculo computacional.

La aplicación Carybo (VaultZafra 2012) determina la línea de empujes en arcos, bóvedas, contrafuertes, estribos, arbotantes, escaleras y muros. La estructura se discretiza en una serie de rebanadas verticales, que sirven para determinar el peso propio y una vez añadida las sobrecargas, la posición y valor de los empujes. (fig 4.24) Cabe destacar la inclusión de fisuras, lo que conduce a reducir las posibilidades de posición de la línea de empujes, obligándola a pasar por las zonas no agrietadas.

fig 4.24 Ejemplo de aplicación del software Carybo (VaultZafra 2012)

Esta misma aplicación ha sido trasladada a una plataforma para móviles con la App Calculadora de Bóvedas (VaultZafra 2013), pero reducido a bóvedas de medio cañón. En este caso el motor de cálculo se encuentra en un servidor externo, em-

fig 4.25 Herramienta de análisis realizada sobre hoja de cálculo Excel para análisis límite de bóveda con rellenos (Ramos 2015)

pleándose el sistema de computación en la nube o cloud-computing de manera que se reducen los recursos informáticos necesarios para su puesta en marcha.

También cabe mencionar las aplicaciones analíticas de las hojas de cálculo, que permiten la resolución numérica y la visualización gráfica, de los análisis e interactuar de manera directa tanto con la geometría como las cargas. Un ejemplo de ello es el realizado por Ramos (2015) para el análisis límite de bóvedas de fábrica con rellenos en el trasdos (fig 4.25).

Análisis FEM

Entre los diversos métodos de modelización de estructuras de fábrica para análisis FEM que se han desarrollado recientemente, han aparecido algunos enfoques novedosos, que se resumen a continuación.

Cabe destacar, en primer lugar, el empleo del Análisis Isogeométrico, IGA, (ver Capítulo 1) aplicado a las estructuras de fábrica. Cazzani et al. (2014) han propuesto una herramienta numérica para analizar elásticamente arcos planos modelizados geométricamente mediante NURBS, denominada ArchNURBS. Esta herramienta también se encuentra como aplicación de Matlab, a modo de plugging, aunque menos operativa dado que no se trata de una aplicación gráfica (Chiozzi 2016),

La modelización geométrica de datos obtenidos mediante técnicas digitales de levantamiento es otro tema de desarrollo en este momento. Como herramienta de toma de datos precisa, el láser escáner puede servir para contribuir en la fase inicial, al proceso de análisis global (Schueremans y Van Genechten 2009). Por otra parte, Riveiro et al. (2011) presentan un modelo geométrico tridimensional preciso aplicado al puente de fábrica de Cernadela en Mondariz, Pontevedra. En él proponen la modelización mediante el software de diseño CATIA, para determinar la geometría y realizar un análisis de un macromodelo FEM para determinar tensiones y desplazamientos. Asimismo, empleando el mismo método, se estudia las diferencias en la carga de colapso del puente medieval de Monforte de Lemos, Lugo, según se realice con la geometría real o la idealizada (Conde et al. 2016).

fig 4.25 Análisis de puente arco de fábrica con carga dinámica mediante RING (LimitState 2007)

Análisis DEM y bloques rígidos

Aunque en la literatura científica, en ocasiones existe confusión con ambos modelos (ya que uno fundamentalmente analiza estado de tensiones y otro de equilibrio), ambos pueden servir para enfocar el análisis límite desde un punto de vista cinemático.

Para el análisis de puentes de fábrica con cargas dinámicas de tráfico, el empleo de modelos de bloque permite la estimación de la posición de la línea de empujes mediante la formación del número de rótulas necesarias para la transformación de la estructura en un mecanismo (fig 4.25). Este es planteamiento del software Ring (LimitState 2007), desarrollado para modelos planos. Un planteamiento similar se realiza en el software Archie-M (Obvis 2010), que combina tratamiento gráfico y analítico, empleando el teorema del límite inferior (ver capítulo 6.1) para considerar la seguridad del puente.

fig 4.26 Análisis DEM de estructura abovedada (Azevedo et al. 2000)

fig 4.27 Análisis de una bóveda cuatrimpartita definida mediante un modelo NURBS (sup) mediante la determinación del mecanismo de colapso cinético (inf) (Chiozzi, Milani y Tralli 2017)

Ante cargas sísmicas, el planteamiento de colapso es similar a los producidos por las cargas de tráfico, ya que requiere que se produzcan una serie de movimientos de las dovelas o en los bloques que conforman la fábrica para producir el colapso. Esta propuesta la realiza Azevedo et al. (2000) para estructuras planas abovedadas (fig 4.26).

Empleando geometría definida mediante NURBS, Chiozzi, Milani y Tralli (2017), han desarrollado un algoritmo por el cual, a partir de una estructura de fábrica definida por una superficie paramétrica, se realiza un mallado donde cada elemento se representa como un cuerpo rígido y se evalúa la carga de colapso aplicando el Teorema del Límite Superior del Análisis Límite (fig 4.27).

Para ello, se han empleado softwares que a pesar diseñarse para simular medios rocosos, se trasladan al análisis estructural como es el caso de UDEC (Itasca 2012) para modelos planos y 3DEC (Itasca 2014) para espaciales (fig 4.28). Los modelos de fallo tridimensionales de bóvedas permiten verificar experimentalmente las simulaciones realizadas con este tipo de software mediante maquetas de bloques colocados a hueso (Van Mele et al. 2012) (fig 4.29).

Modelling in 3DEC

fig 4.28 Modelado y análisis de un tramo de bóveda de la Basílica de Vezelay (deJong y Tarrío 2015)

En un estudio muy reciente (Kavanaugh et al. 2017) se ha comparado el análisis estructural de un estribo de la Catedral de Amiens, por medio, entre otros, de dos modelos discontinuos por un lado el análisis DEM empleando el software con el 3DEC y por otro mediante métodos gráficos mediante línea de empujes. Una de las conclusiones obtenida reside en la enorme facilidad e inmediatez con la que se pueden realizar los análisis gráfico, necesitando 24 veces menos de tiempo en el configuración y 37 veces menos en el tiempo de ejecución.

Recapitulación

Como se ha comentado anteriormente el desarrollo de la teoría estructural de fábrica tiene cuatro periodos claramente distinguibles:

- Hasta el s. XVIII: reglas empíricas y geométricas
- s. XVIII - mediados s. XX: métodos científicos (equilibrio y elasticidad)

fig 4.29 Colapso de bóveda de arista por acciones sísmica (Van Mele et al. 2012)

- A partir de mediados s. XX: análisis límite (plasticidad)
- Último cuarto s. XX - Actualidad: desarrollo computacionales de métodos anteriores y nuevas modelizaciones mediante computación

El momento actual se caracteriza fundamentalmente por el apoyo del cálculo automático y las posibilidades que esto implica en vista de los grandes avances que se han demostrado.

El trabajo de los últimos años en el análisis de estructuras de fábrica ha seguido fundamentalmente dos caminos: buscar modelos que se aproximen más al comportamiento no homogéneo, tanto simplificándolos como haciéndolos más complejos y por otra parte mediante el desarrollo de herramientas sencillas e intuitivas, con un resultado fiable, que dote de seguridad y credibilidad a los análisis tradicionales.

Asimismo, como se ha visto anteriormente, la realidad edificatoria es geométricamente compleja al igual que la propia realidad constructiva, pero se disponen de herramientas tecnológicas que permiten modelizarla con mucha profusión de datos y precisión de los mismos. Aprovechar esta información para disponer de un modelo de análisis es uno de los caminos en los que se está avanzando, integrando la información de diversas fuentes es una única aplicación.

Sin embargo, como se puede comprobar en la revisión de la literatura científica anteriormente descrita, los modelos sencillos dejan de lado la información constructiva, dicretizando cargas en función de las piezas constituyentes o en función de una arbitraria subdivisión. En estos procedimientos es necesario crear en primer lugar un nuevo modelo geométrico, que habitualmente se idealiza (Análisis DEM y Bloques Rígidos) y se aleja de la realidad geométrica, especialmente en los casos de estructuras históricas, donde ésta se encuentra deformada y agrietada.

En los procedimientos en los que se puede emplear geometría real (Block 2009, Ripman et al 2012) porque parten de un modelo geométrico basado en CAD, las características constructivas se ven simplificadas hasta el punto que las estructuras de fábricas se trasforman en superficies sin espesor, cuando la historia del análisis de estructuras de fábrica evidencia que la razón del equilibrio radica en que poseen espesor.

4.3 RESUMEN

El estudio del estado del arte realizado en esta Tesis ha mostrado que los métodos existentes para la evaluación del equilibrio mediante Análisis Límite necesitan, o bien un modelo expresamente desarrollado para el análisis estructural o bien, una discretización más o menos arbitraria del propio modelo geométrico.

El empleo de curvas y superficies NURBS como método de modelización por aproximación, se ha identificado que, estando muy desarrollado para análisis FEM no lo está en absoluto ni en Análisis Límite ni para su aplicación a edificación histórica. Especialmente relevante es esta circunstancia cuando uno de los grandes avances en CAD de las últimas fechas se ha realizado con la incorporación de la NURBS en el modelado geométrico arquitectónico.

Se ha identificado asimismo que los avances de métodos de análisis tradicional intuitivo y directo mediante geometría gráfica, ha quedado relegado a un ámbito docente y cuando es aplicado en el profesional, no se emplea los avances tecnológicos disponibles, recurriéndose en muchos casos al dibujo tradicional. Es por ello que recuperar esta técnica y actualizarla, con procedimientos computerizados se estima altamente necesaria.

En este contexto, esta Tesis aporta las contribuciones siguientes:

- Identificar las técnicas más habituales de levantamiento geométrico y constructivo y qué elementos y datos se emplean en la modelización correspondiente
- Identificar y describir las variables que se emplean en la modelización geométrica en función del tipo de modelo, según las técnicas más extendidas y que sirven para definir analíticamente los elementos geométricos.
- Proponer un método que emplea la definición analítica geométrica contenida en los modelos anteriores para verificar, por medio de medios geométricos, el equilibrio de las estructuras de fábrica.
- Disponer de un algoritmo computerizable que, empleando el método geométrico analítico, obtenga la información geométrica contenida en los modelos y permita su análisis estructural.
- Definir un método para visualizar el recorrido de las cargas por medio del empleo de la fotoelasticidad para estructuras discretas de fábrica comparándolo con la estimación de las líneas de empujes por la metodología propuesta.

La investigación contenida en la presente Tesis desemboca en la elaboración de un prototipo de herramienta, igualmente sencilla, intuitiva y fiable que la estática gráfica vectorial, pero que incluya la realidad constructiva, esto es, el espesor de las estructuras de fábrica, parámetro fundamental para garantizar la estabilidad.

Dado que el levantamiento geométrico y la caracterización constructiva es el primer paso a dar en cualquier trabajo de intervención en edificios históricos, parece bastante útil aprovechar esta información para emplearla como modelo independientemente de cómo esta información esté codificada. Dicha codifica-

ción en el modelado informático, se realiza mediante formulaciones matemáticas bastante extendidas (que se describen ampliamente en el capítulo siguiente), de las que se puede extraer la información analítica necesaria para el equilibrio, esto es, las funciones de peso propio de la estructura, sin necesidad de discretización alguna, dado que dichas cargas, no son en ningún caso discretas.

La conexión entre modelo geométrico y el análisis estructural mediante líneas de empujes no está desarrollada y es en este punto donde se aporta el avance, más significativo, tanto desde el punto de vista teórico como metodológico, con el presente trabajo.

PARTE 2

ANÁLISIS ESTRUCTURAL MEDIANTE GEOMETRÍA ANALÍTICA

CAPÍTULO 5. CARACTERIZACIÓN GEOMÉTRICA Y CONSTRUCTIVA DE ESTRUCTURAS DE FÁBRICA

5.1 El levantamiento geométrico en el proceso de toma de datos

5.2 Modelización geométrica. Técnicas y procedimientos

5.3 El levantamiento constructivo de edificios existentes

5.4 Materiales, caracterización y construcción

5.1 EL LEVANTAMIENTO GEOMÉTRICO EN EL PROCESO DE TOMA DE DATOS

El levantamiento de los edificios históricos

En toda intervención en edificios existentes, el punto de partida debe pasar siempre por un estudio en profundidad del propio edificio, tanto de cómo pudo ser en su origen, como en el estado en que se encuentra en el momento de la actuación, pasando por todas sus fases históricas, en la medida de lo posible. Para ello, el primer paso debe ser el levantamiento, que tiene por objetivo final, la representación actual de la alteración de la geometría original que ha sufrido un edificio (Latorre y Cámara 2010), que debe distinguirse del dibujo arquitectónico, que tiene por objeto la representación idealizada de la arquitectura u obra de ingeniería proyectada y aún no construida, ya sea como herramienta para proyectar como para comunicar una idea.

El levantamiento, es por tanto, una representación lo más real y fidedigna posible de la construcción en la medida que ésta sea accesible y cuando no sea así, con las suposiciones e hipótesis necesarias que sean coherentes con ella. Por ello, el levantamiento tiene una primera parte de adquisición de la información y una segunda de entendimiento y elaboración de la información obtenida, por lo que el conocimiento geométrico y constructivo previo, son necesarios para reducir los posibles errores.

El levantamiento nace como disciplina en el Renacimiento, con la necesidad de estudio y comprensión que los arquitectos tenían de los edificios romanos (Latorre y Cámara 2010), ya que ésta sería la inspiración para sus nuevas construcciones que realizarían posteriormente (fig 5.1).

Pero no sería hasta prácticamente el siglo XVIII donde se sistematizaría el estudio de la arquitectura histórica, que al igual que en otras ramas del conocimiento de

fig 5.1 Sección y detalles del Panteón de Agripa, Roma, realizado por Andrea Palladio en 1622. (Fuente: Wikimedia Commons)

esa época, como la Botánica, el dibujo servía como descripción y clasificación de la realidad. La idea era agrupar tipológicamente los edificios para poder realizar una clasificación de los diferentes estilos, dibujando aquellos más notables.

fig 5.2 Representación del arco del Trajano en Benevento, Italia, que muestra su estado de deterioro realizado por Piranesi en 1839 (Fuente: Wikimedia Commons)

Los aspectos constructivos de los edificios históricos empezaron a tenerse en cuenta en el momento que hubo que hacer frente a su intervención, una vez evaluado su estado de conservación (fig 5.2.). Las teorías sobre restauración se han ido sucediendo a lo largo del s. XIX y principios del s. XX, por diferentes autores, criticándose habitualmente unos autores a otros (Torres Balbás, 1920), a pesar de que la finalidad del levantamiento en todos los casos, ha sido la misma: conocer el edificio con profundidad antes de intervenir.

Técnicas de levantamiento arquitectónico

A lo largo de la historia, las técnicas han ido evolucionando según se han ido transformado las herramientas de medición y dibujo. Éstas se pueden clasificar fundamentalmente, por un lado como analógicas, a las técnicas tradicionales del dibujo manual y analítico (fig 5.3), y por otro como digitales (Latorre y Cámara 2010), que no aparecen hasta el último tramo del s. XX, donde se evidencia un verdadero avance en la precisión de los datos obtenidos.

No es el ánimo de este trabajo exponer de manera exhaustiva las técnicas de levantamiento existente, pero sí poner de manifiesto la importancia que esta fase del proceso de intervención tiene como elemento de análisis estructural y cómo se trata de su primera etapa (Mencías et al. 2015).

En primer lugar se deben separar por un lado los sistemas de adquisición de la geometría y la información de los de representación, que también pueden ser analógicos y digitales. Los primeros hacen referencia a la medición de los elementos principales del bien existente, así como la descripción de los detalles y los

fig 5.3. Alzado de Notre Dame de Rouen croquizado y geometrizado, con referencia a ciertos detalles (Viollet le duc 1859)

fig 5.4 Representación croquizada de la planta de la iglesia de San Felipe Neri en Crevillente (Alicante) (Pérez-Sánchez y Piedecausa-García 2016)

elementos escultóricos o adicionales, así como de los sistemas constructivos, que se pueden clasificar en:

- Sistemas simples
- Sistemas topográficos
- Sistemas fotográficos
- Métodos físicos

Sistemas de medición simples

Se tratan de los sistemas tradicionales empleados en las mediciones arquitectónicas habitualmente a lo largo de la historia. Comprenden la cinta métrica y el flexómetro, que se han sido empleados en combinación con plomadas, niveles y otras herramientas tecnológicas como el distanciómetro láser, para disponer de la información situada en varios planos.

Se tratan de mediciones lineales, casi siempre accesibles directamente por el observador, de elementos significativos decididos previamente (fig 5.4). Estos puntos de medida, serán seleccionados en función de que sirvan de soporte para un trazado geométrico, habitualmente idealizado. A la hora de representar la toma de datos realizada, es necesario el conocimiento de la geometría pitagórica para *traducir* las formas arquitectónicas en formas geométricas. Este es el caso en el que si el observador entiende que un arco es de medio punto, deberá tomar las medidas del punto inicial, el punto final, la posición de la clave y el radio, para posteriormente poder dibujar la semicircunferencia correspondiente, a partir de tres puntos y determinar la posición del centro (fig 5.5).

Sistemas de medición topográfica

La topografía ha sido tradicionalmente la rama de la ingeniería que se ha ocupado de realizar la medición y descripción de los terrenos, las construcciones y los edificios, y situarlos en el espacio o el plano. Estos conocimientos se han trasladado a la arquitectura, usándose las mismas técnicas y herramientas que para este campo se han empleado. Entre los sistemas topográficos tradicionales caben destacar:

- Nivel topográfico
- Teodolito
- Sistemas GPS
- Estación total
- Escáner láser

fig 5.5. Toma de datos para posicionar un arco escarzano (Dibujo del autor)

Todos ellos tienen por objeto, usando una técnica u otra, posicionar espacialmente cada uno de los puntos estudiados, a partir de uno o varios puntos bases, que generalmente coinciden con el lugar donde se encuentra posicionada la herramienta de medición y el observador. Por tanto, sirve para que, midiendo distan-

cias relativas se obtenga la posición de elementos significativos, que deben ser establecidos previamente por el observador. Se trata de un método selectivo con discriminación de los puntos a estudiar. La medición de las direcciones observadas pueden ser de ángulos (usando el teodolito), de distancias lineales (con GPS, donde la medición mediante triangulación se realiza por parte de un observador situado en la órbita terrestre) o de ambos (como en el caso de la estaciones totales). Ésta última representa el nivel más bajo de automatización (Martín Talaverano 2014).

La gran mayoría de estos aparatos, que inicialmente eran herramientas analógicas, como el teodolito o el nivel, se han transformado en las últimas décadas en herramientas digitales, como la estación total, quedando registradas las medidas realizadas en un medio de almacenamiento digital, para poder ser volcadas y tratadas posteriormente por un software informático específico. Los puntos medidos deben ser anotados en un croquis para poder identificarlos posteriormente (fig 5.5).

La medición también puede ser indiscriminada, es decir, establecer un mallado de puntos que se irradian desde el observador, que puede ser bien estático (desde uno o varios puntos base, se lanzan los haces de mediciones) o bien dinámico (donde el punto de observación se encuentra en movimiento y éste registra múltiples radiaciones). Este procedimiento es el que emplea el escáner láser, terrestre muy extendido últimamente en los procesos de levantamiento por su relativa sencillez y su enorme cantidad de información obtenida. Se trata de un dispositivo de alto grado de automatización que, sin embargo, deja sin medir todos los puntos que se encuentran ocultos a la visión directa desde la herramienta (fig 5.6).

fig 5.5 Identificación de los puntos seleccionados para la medición con estación total, de la Iglesia de San Salvador de Priesca, Asturias (Martín Talaverano 2014)

fig 5.6. Sección longitudinal realizada por barrido del escáner láser 3D de la Iglesia parroquial San Miguel Arcángel de Jalance, Valencia (Durán et al. 2010)

fig 5.7 Ruinas de la Iglesia de Monasterio de Córcoles en Guadalajara (Torres Balbás 1920)

En algunos casos esa ingente cantidad de puntos, denominadas “nubes de puntos” puede ser contraproducente, ya que el tratamiento de la información puede necesitar de muchos recursos técnicos y humanos, tanto en la fase de medición como en la representación

Sistemas de medición fotográfica

Desde los inicios de la fotografía, ésta ha sido muy útil en la representación arquitectónica tanto para la documentación como para el levantamiento (fig 5.7). A diferencia de los métodos anteriores, que son directos, el uso de la fotografía se basa en mediciones respecto a una imagen previamente tomada. Se pueden clasificar, en función de la posición del observador en:

- Fotografía terrestre
- Fotografía aérea

En la primera, la posición de la cámara se encuentra a nivel del suelo o próximo a este, quedando generalmente ocultos los elementos que se encuentran por encima del plano del observador. Suele ser habitual para el levantamiento de alzados, tanto interiores como exteriores. Por otra parte la fotografía aérea, ya sea desde avión, satélite o en fechas más recientes mediante dron, permite realizar levantamientos topográficos de áreas más extensas, así como establecer emplazamientos y levantar plantas de cubiertas.

En relación a la obtención de datos en la fase de medición, el empleo de la fotografía cobra enorme impulso con el desarrollo de la fotogrametría, que tiene por objeto la restitución dimensional de los elementos fotografiados y permite medir objetos, superficies o la misma superficie terrestre a partir de imágenes por procedimientos fotográficos (Almagro 2004) .

La fotogrametría se fundamenta en que realiza el proceso inverso a la representación de la perspectiva cónica a partir del registro fotográfico, ya sea este analógico o digital (fig 5.8). Su desarrollo ha sido muy notable en las últimas décadas, siendo una herramienta muy extendida para la documentación del patrimonio.

No es posible la restitución únicamente utilizando un haz de direcciones, (que además sólo proporciona medidas relativas entre los puntos restituidos) por lo que esta técnica debe ser complementada por medidas in situ para determinar los valores absolutos. En sus inicios, durante los primeros años del s. XX, la restitución se realizaba a partir de la identificación de puntos homólogos a partir de dos imágenes, mediante herramientas manuales que permite obtener su posición relativa y representarlo.

Durante gran parte del s. XX el desarrollo de la fotogrametría se basó en el empleo de aparatos de restitución analógica, bien por procedimientos mecánicos, ópticos o mixtos (fig 5.9). Con el desarrollo informático, el cálculo automático ha permi-

fig 5.8 Identificación y localización de los puntos en el espacio mediante un único haz (arriba) o mediante dos haces (abajo) (Almagro 2004)

tido la restitución de enormes cantidades de puntos, inicialmente de imágenes analógicas y posteriormente de las digitales, en tiempo real, lo que ha popularizado esta técnica. Las herramientas necesarias también son de uso común, tales como cámaras digitales convencionales y ordenadores personales dotados de un software específico.

Mediante la fotogrametría se pueden aplicar dos técnicas, cuya utilidad son notablemente diferentes. Por un lado, la restitución permite obtener ortoimágenes que recuperan la representación tradicional planimétrica de elementos planos del edificio (fig 5. 10). Diversos softwares permiten realizar este proceso de manera más o menos automática, algunos específicamente creados para ellos y otros que se emplean para otro propósito y posee esta función como adicional. Esta técnica no genera como tal ninguna información geométrica, de modo que los puntos o líneas han de delinearse a mano, directamente sobre la ortofoto (Martín Talaverano 2014).

Por otra parte, también es posible generar modelos tridimensionales a partir de al menos dos fotografías que, mostrando los mismos puntos, se hayan obtenidos desde ángulos diferentes. De esta manera, una vez identificados los puntos homólogos, es posible determinar la posición en el espacio. Cómo identificar estos puntos, ha derivado en dos procedimientos diferentes: la fotogrametría estereoscópica y la fotogrametría convergente o multi-imagen (Martín Talaverano 2014).

La primera consiste en, mediante el uso de dos fotografías que se hayan tomado del mismo objeto a la misma distancia pero con un pequeño desplazamiento lateral, dar la sensación de tridimensionalidad e identificar la posición de los puntos homólogos con el uso de gafas polarizadores y esteroscopios. Se trata por tanto de una labor manual, en el que se han de dibujar los elementos geométricos que se desean.

La segunda, y a efectos prácticos, la más extendida por su facilidad, emplea un software informático para de manera automatizada se identifiquen los puntos

fig 5.9 Restituidor analítico Leica SD2000 de la Escuela de Estudios Árabes, CSIC. (Almagro 2004)

fig 5.10 Fotografía (izq) y ortofoto rectificada (dch) de un muro de la Iglesia de Santa María de Alaejos, Valladolid (Martín Talaverano 2014)

fig 5.11 Modelo tridimensional fotogramétrico del Puente sobre el Arroyo Meaques (Mencías y Calle 2014)

con el grado de exactitud deseado, a partir de gran cantidad de fotografías redundantes. Al tratarse de un procedimiento digital, los puntos obtenidos ya son directamente volcados a un modelo tridimensional, ahorrándose el tiempo de representación (fig 5.11). Además, en la medición y posición geométrica se pueden obtener mayor cantidad de información que la meramente numérica, tal como texturas, colores, ... que puede ser interesante para el levantamiento.

En resumen, es por tanto una técnica de determinación de ciertos puntos en el espacio ya sea mediante un procedimiento manual o automático.

Métodos físicos

- Georradar
- Termografía
- Espectrografía

Generalmente, todas estas técnicas se emplean tanto para documentar lugares no accesibles directamente como para determinar la composición constructiva de los edificios. La información sobre los materiales constituyentes se obtiene bien por reflexión de ondas electromagnéticas en el subsuelo (georradar), bien por captación de radiación infrarroja y cálculo de las temperaturas (termografía, fig 5.11) o bien por reflexión de ondas de luz (espectrografía). Todas ellas no determinan información geométrica directamente sino que se tratan de métodos complementarios a alguno de las anteriores.

fig 5.11. Uso de la termografía en el levantamiento geométrico e interpretación constructiva (Pérez-Sánchez y Piedecausa-García 2016)

Las técnicas más habituales son el escáner láser 3D y la fotogrametría, siendo muy discutida la idoneidad de un método frente a otro (Rubio et al 2014). Sin embargo, a efectos prácticos, de ambas técnicas se obtienen la posición espacial o planimétrica de determinados puntos del objeto estudiado, que tendrán que ser tratados mediante los sistemas de representación, para dar lugar al levantamiento final.

Representación y modelización

En la actualidad, los sistemas de representación están dominados por los entornos digitales en los que la información obtenida in situ, ya sea por un procedimiento u otro, se vuelca en un ordenador, siendo la diferencia fundamental en si se trata de representación bi o tridimensional y si existe información adicional que se le puede añadir a la información gráfica. La clasificación tradicional de los sistemas de representación (Latorre y Cámara 2010) se divide en:

- Representación analógica
- Representación digital

Representación analógica

Tradicionalmente, se ha empleado la representación plana, generalmente diédrica o axonométrica para la medición fidedigna y para trasladar la información al papel. La intención en muchos casos es mostrar la realidad idealizada, no una representación fidedigna de la realidad (Latorre y Cámara 2012). Ésta puede ser mediante la croquización o mediante el dibujo delineado, ya sea a mano alzada o mediante útiles de dibujo (fig 5.12).

En lo referente al empleo de la modelización geométrica, que es el punto de partida del presente trabajo, ninguna de ellas permite la obtención de la representación analítica, por lo que no se entrará en más detalle.

Representación digital

La representación digital se fundamenta en trasladar la información obtenida en el proceso de medición a un software específico, para poder representar y en su caso modelar, el objeto arquitectónico medido. El tipo de software a emplear dependerá, por un lado del tipo de información obtenida y por otro de lo que se pretenda realizar con dicha información. Cada uno de ellos codifica la información geométrica de una determinada manera, que será objeto de descripción pormenorizada en el apartado siguiente. Clasificados en función del tipo de información que se vuelca, se pueden mencionar los siguientes:

- Dibujo planimétrico
- Dibujo espacial
- Modelo alámbrico
- Modelo tridimensional
- Modelo BIM

La primera de ellas consiste en trasladar directamente la metodología del dibujo arquitectónico analógico al digital, empleando para ello el software de CAD como un mero tablero de dibujo para la delineación de la información obtenida. (fig 5.13) Para ello se “dibujan” las formas geométricas más o menos idealizadas entendidas por el observador. Se trata, por tanto, de un procedimiento fundamen-

fig 5.12 Fachada del Palacio de Pedro I en Tordesillas (Valladolid) realizado por medios manuales de delineación (Almagro 2004)

fig 5.13 Figura 19. Alzado sur de la iglesia de Nuestra Señora de Campanario de Almazán, Soria.(Martín Talaverano 2014)

talmente intelectual por el cual la discriminación de los elementos en función de su grado de importancia y el entendimiento del objeto de representación es determinante, mientras el programa informático sólo efectúa la función de soporte.

Este tipo de representación, permite decidir previamente el elemento geométrico a representar. Si se ha realizado la medición de manera tradicional, se podrá representar el elemento canónico (una semicircunferencia para representar un arco de medio punto idealizado), una poligonal (que representa las dovelas del arco) o un conjunto de segmentos a partir de las posiciones reales. En todas ellas es el usuario el que decide la geometría y con qué intención la dibuja.

Cuando se importa información digital masiva (proviniente de un escáner láser o un levantamiento fotogramétrico) para la realización de un dibujo planimétrico la discriminación de los puntos medidos a incluir y cuáles no, resulta una tarea en ocasiones enormemente costosa y tediosa. Existen diversos procedimientos para refinar la información, de manera más o menos automatizada, que incluyen los programas informáticos o ciertos plugins externos, aunque la labor intelectual es innegable (fig 5.14).

El volcado de información topográfica obtenido por herramientas digitales se realiza de manera indiscriminada. El método más simple de representación con-

fig 5.14 Esquema de puntos obtenidos por estación total de las bóvedas del presbiterio y del brazo crucero de la catedral de Santa María de Sigüenza, Guadalajara (Martín Talaverano 2014)

siste en trazar las líneas principales que conforman la forma del edificio, importando las mediciones realizadas (Álvarez et al. 2003), estableciendo una representación matizada de la realidad.

La geometría por tanto se modeliza de manera individualizada, determinado los contornos de los elementos constructivos y se separa de manera manual en diversas capas de información (que corresponden habitualmente a capas o layers del propio software). Se realiza por tanto, un plano en el sentido tradicional del dibujo, estableciendo elementos geométricos inconexos entre ellos, tales como puntos, segmentos o curvas.

El dibujo tridimensional no supone ninguna variación fundamental a la representación planimétrica, salvo que se emplea la posición de los elementos respecto a los tres ejes coordenados. La información geométrica debe ser interpretada y valorada previamente a la elaboración del dibujo, ya que ésta suele ser limitada y al tratarse de una selección discriminada de puntos que representan los elementos que entendían en el trabajo anterior como más importantes.

Si la información previa es una nube de puntos obtenida de manera indiscriminada, el trabajo de gabinete puede ser muy importante, ya que para realizar la representación es necesario valorar cada punto y establecer su pertenencia al elemento constructivo, ya que no contiene más información que las coordenadas cartesianas de cada punto y en ocasiones su color.

En caso de que el objeto arquitectónico sea sencillo, la representación tridimensional se puede convertir en una yuxtaposición de planos que conforman el volumen exterior e interior, realizados mediante procedimiento planimétrico. Reune la simplicidad e inmediatez de un dibujo en el plano con el establecimiento de posiciones relativas en el espacio. Sin embargo, no es un modelo tridimensional como tal, tal y como se describe a continuación, ya que los elementos geométricos que lo conforman se encuentran individualizados.

fig 5.15 Modelo alámbrico de la iglesia de Santa María de Alaejos, Valladolid. (Martín Talaverano 2014)

fig 5.16 Nube de puntos exhaustiva de la catedral de Santa María la Blanca de Vitoria (Latorre 2012)

El modelo alámbrico, ya sea realizado mediante un sistema de medición u otro, consiste en formar, a partir de los puntos obtenidos bien las aristas bien los ejes, de los volúmenes que conforman el edificio (fig 5.15). Se trata por tanto de establecer una primera relación geométrica, que se encuentra a caballo entre el dibujo y el modelo. Todavía no es posible configurar todo el levantamiento como único objeto y es necesario una interpretación racional de la información para entender el edificio o construcción que se encuentra representado.

La modelización tridimensional (aunque aplicable en el sentido general, también puede ser en el plano) cambia el enfoque del tratamiento de la información obtenida. Se trata de la creación de un objeto, donde la geometría conforma el propio objeto virtual. Se trata de la evolución de los sistemas CAD, donde no sólo se busca una representación, sino servir de antesala a los procedimientos CAE, de manera que en un único procedimiento se obtenga un objeto que sirva de representación y estudio, y además de una base geométrica, que con las correspondientes caracterizaciones, servirá para el análisis (generalmente estructural y térmico, pero también acústico, de sistemas de ventilación, ...) posterior.

La conexión entre CAD y CAE e IGA, como se ha comentado anteriormente permite la reducción del trabajo, los tiempos y los errores, ya que es la misma información la que sirve de soporte para todas las actuaciones posteriores.

Desde el punto de vista geométrico, la modelización tridimensional establece las curvas y superficies que definen volumétricamente al edificio o sus partes. Esta creación puede ser más o menos compleja, en función del tipo de software y el procedimiento empleado, pero generalmente se basa en la creación de superficies o curvas de manera automática, para luego ajustarlas o tratarlas posteriormente de manera manual. Es habitual emplear este procedimiento con los sistemas indiscriminados de medición, ya que necesitan de un procesado digital para poder obtener la modelización (fig 5.16). Existen algunos softwares de fotogrametría convergente que incorporan la modelización geométrica y añadiendo la propia imagen a la superficie, lo que crea modelos geométricos y fotográficos.

Por último cabe destacar el modelo BIM (Building information Model) denominado modelo de sólidos, que se encuentra mucho más extendido en el diseño de obra nueva que en la intervención en edificación existente (Martín Talaverano 2014). Esta metodología se basa en la creación de modelos virtuales mediante elementos constructivos paramétricos y la vinculación a bases de datos externas (Angulo 2012).

Se trata de un sistema actualmente poco extendido en Patrimonio fundamentalmente por dos dificultades. La primera es la caracterización de los materiales, ya que siendo muy fácil en obra nueva, en edificación existente no suele ser tan sencilla y en especial en fábricas como se comenta en apartado 2.4. Por otra parte la estandarización y parametrización de elementos constructivos en Patrimonio

fig 5.17 Proceso de modelado y modelo BIM de la Casa Hylas en el conjunto arqueológico de Itálica, Sevilla (Angulo 2012).

a) Fotografía inicial
b) Modelo alámbrico realizado por fotogrametría

c) Modelo de superficies realizado a partir de los contornos alámbricos

d) Modelo de sólidos BIM

es mucho más complicada, dada la extensa cantidad de parámetros controlables y no controlables, que los elementos constructivos de edificación existentes poseen. Además cuenta con la dificultad de la excesiva simplificación geométrica que es necesaria realizar para adaptarse a los parámetros del software (fig 5.17).

2.2 MODELADO GEOMÉTRICO. TÉCNICAS Y PROCEDIMIENTOS

Introducción

Como se ha comentado en el capítulo anterior, el objetivo final de un levantamiento es obtener la representación de la construcción del objeto en un entorno digital, para poder luego servir de base a futuros trabajos. El primer paso consiste en realizar la modelización geométrica que se basa en representar el objeto real mediante técnicas computacionales. Estos modelos pueden ser físicos, moleculares o matemáticos, (Zorin et al 2000) pero en este apartado se hará referencia a los primeros, dado el ámbito del presente trabajo. En este caso, el objetivo de la representación es la obtención de un modelo geométrico y constructivo de la obra existente que sirva de base para el análisis estructural.

El punto de partida será, por tanto, la información obtenida en el levantamiento, bien mediante técnicas digitales bien digitalizando la información analógica, que como se ha expresado anteriormente, no dejan de ser o bien ciertos puntos estimados como significativos o bien una gran cantidad de puntos tomados indiscriminadamente.

A partir de ellos se conforma una base de datos, por medio de un software CAD, que interpreta dicha información y la visualiza en un entorno digital, con los que, por medio de algoritmos automáticos o mediante procedimientos manuales, se modela el objeto. Estos modelos se pueden representar por medio de:

- Modelado de Puntos
- Modelado Alámbrico
- Modelado de Curvas y Superficies
- Modelado de Sólidos
- Modelado de Físicos

No existe un método único y la elección depende de diversos factores, que se resumen fundamentalmente en dos: la capacidad tecnológica disponible, tanto hardware como software, y el objetivo de la modelización, ya que el aumento de la resolución del modelo aumenta de manera muy notable las necesidades informáticas (fig 5.18).

fig 5.18 Diversos modelos con diferentes resoluciones para modelar una vaca (Zorin et al. 2000)

Los modelos, en función del espacio geométrico donde se realiza, pueden ser (Vendrell 2008):

- 2D: modelización de elementos planos en $\mathbb{R}^2$
- 2 1/2D: modelización de elementos planos en $\mathbb{R}^3$
- 3D: modelización de elementos tridimensionales en $\mathbb{R}^3$
- 4D: modelización 3D con información temporal.

A efectos geométricos, los dos primeros son equivalentes, ya que la información que se presenta se hace para una coordenada z constante, por lo que no añade información adicional. Por otra parte, los modelos 4D, que incluyen parámetros temporales como la iluminación variable o el movimiento, se salen fuera del objeto del presente trabajo. Por otra parte la base de datos asociadas a un modelo (estructura de datos, en terminología informática) debe permitir que, mediante un conjunto de algoritmos y operaciones, dar soporte a la información geométrica correspondiente a un objeto.

Modelado de Puntos

El modelo de puntos visualiza los puntos tomados mediante el levantamiento, en un entorno gráfico, generalmente tridimensional, que se puede almacenar como:

- Nubes de puntos
- Mapas de profundidad

Las nubes de puntos son conjuntos de puntos no estructurados posicionados en un espacio 3D, que permiten una visualización por acumulación (fig 5.19). La información almacenada es la más sencilla posible, una tabla con las coordenadas X , Y , Z de cada punto (tabla 5.1). El formato asc lo archiva mediante tres números reales, separados por un espacio en blanco (Código ASCII¹ #32).

Header	X	Y	Z
p_1	507.778	499.790	113.841
p_2	507.879	498.934	114.043
p_3	507.815	498.167	114.053
p_4	507.873	499.228	114.150

Los mapas de profundidad son una técnica que generalmente parte de la adquisición de la información por parte de un escáner que suele incluir la información del color, lo que permite una visualización muy realista, si la densidad de puntos así lo permite. Se obtiene añadiendo a la información anterior, los valores de los colores, generalmente en el sistema RGB o CMYK, dependiendo del escáner con que se haya tomado. El ejemplo que se muestra a continuación, está tomado del

1 El formato ASCII (acrónimo de American Standard Code for Information Exchange, es un código de caracteres basados en el alfabeto latino más una serie de caracteres de control, que utiliza 8 bits para almacenar la información y sirve de compatibilidad para la representación de textos

fig 5.19 modelo de puntos de la bóveda Norte de la Real Fábrica de Vidrio de La Granja, Segovia (Vega y Alamillo 2016)

tabla 5.1 Primeras entradas del archivo de modelo de puntos de la bóveda Norte de la Real Fábrica de Vidrio de La Granja, Segovia (Vega y Alamillo 2016)

fig 5.20 modelo de puntos mediante mapa de profundidad de la bóveda Norte de la Real Fábrica de Vidrio de La Granja, Segovia (Vega y Alamillo 2016)

tabla 5.2 Primeras entradas del archivo de modelo de mapa de profundidad de la bóveda Norte de la Real Fábrica de Vidrio de La Granja, Segovia (Vega y Alamillo 2016)

formato pcd (Point Cloud Data) a partir de los datos de la nube de puntos obtenida (tabla 5.2, fig 5.20) en el levantamiento de la bóveda Norte de la Real Fábrica de Vidrio de La Granja, Segovia.

Header	X	Y	Z	R	G	B
p_1	507.778	499.790	113.841	125	126	147
p_2	507.879	498.934	114.043	132	133	153
p_3	507.815	498.167	114.053	119	119	145
p_4	507.873	499.228	114.150	119	116	133

fig 5.21 modelo alámbrico de un arco de piedra representado mediante curva poligonal inferior y superior, coincidiendo con las dovelas (Dibujo del autor)

tabla 5.3 ejemplo de tabulación de la información del modelo alámbrico de un tetraedro mediante una tabla de vértices (izq), artistas (centro) y secuencia de aristas (dch)

Modelos alámbricos

Los modelos alámbricos son aquellos modelos tridimensionales más sencillos que existen, ya que representan el objeto mediante aristas y vértices. Los vértices son los puntos obtenidos del levantamiento mientras las aristas se representan analíticamente mediante ecuaciones de rectas (fig 5.21).

Los recursos empleados son reducidos, ya que la base de datos solo almacena coordenadas de puntos, identificadores de líneas, ecuaciones de rectas y secuencia de conexión. Por ello se trata de la opción más fácil de redibujado y regenerado, y aquella en la que se requieren recursos informáticos menores.

Tanto si la representación es en el plano como si es en el espacio, las curvas que se obtienen son poligonales que pasan por los puntos de control, por lo que se trata de la interpolación más sencilla, que es lineal.

Vértice	Coordenadas	Arista	Inicio	Fin	Arista	Inicio	Fin
V ₁	(x ₁ , y ₁ , z ₁)	A ₁	(x ₁ , y ₁ , z ₁)	(x ₂ , y ₂ , z ₃)	A ₁	V ₁	V ₂
V ₂	(x ₂ , y ₂ , z ₂)	A ₂	(x ₂ , y ₂ , z ₂)	(x ₃ , y ₃ , z ₃)	A ₂	V ₂	V ₃
V ₃	(x ₃ , y ₃ , z ₃)	A ₃	(x ₃ , y ₃ , z ₃)	(x ₁ , y ₁ , z ₁)	A ₃	V ₃	V ₁
V ₄	(x ₄ , y ₄ , z ₄)	A ₄	(x ₂ , y ₂ , z ₂)	(x ₄ , y ₄ , z ₄)	A ₄	V ₂	V ₄
		A ₅	(x ₁ , y ₁ , z ₁)	(x ₄ , y ₄ , z ₄)	A ₅	V ₁	V ₄
		A ₆	(x ₄ , y ₄ , z ₄)	(x ₃ , y ₃ , z ₃)	A ₆	V ₄	V ₃

Este tipo de representación posee la desventaja de la visualización de modelos tridimensionales, ya que aparecen las ambigüedades y dificultades de representación derivadas de la salida de datos 3D en un soporte 2D, como es la pantalla. Se emplea habitualmente como una primera aproximación (Vendrell 2008).

Modelos de Curvas

El modelo geométrico plano mediante curvas es el más habitual en la representación de edificación y habitualmente es la que proporciona mayor exactitud y control sobre la forma. Matemáticamente, cualquier curva puede entenderse como el recorrido de un punto en un espacio $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ y una superficie como la deformación de un plano en el espacio (Cordero y Cortés 2002).

La información se almacena como elementos unidimensionales (puntos) o bidimensionales (curvas o segmentos). Para ello se toma, bien una primitiva (cuando se estima que la realidad hace referencia a una figura geométrica idealizada) o bien, en base a ciertos puntos que construyen una curva o superficie por aproximación o interpolación. La descripción de curvas (fig 5.22), se puede realizar mediante:

- Conjunto vectorial de puntos
- Representación analítica

Las funciones pueden representarse mediante ecuaciones explícitas, implícitas o paramétricas. El uso más habitual para la descripción de curvas en el espacio es por medio de una descripción polinómica, dada la mayor facilidad de cálculo que suponen, siendo la representación paramétrica la que habitualmente emplean los programas CAD.

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \quad (5.1)$$

Esto es debido, por una parte, a que el conjunto vectorial de puntos es poco operativo, ya que para que éste posea un cierto nivel de aproximación, la proximidad de los puntos sería tal que la cantidad de puntos necesarios sería elevadísimo, aumentando así las necesidades de recursos y reduciendo la operatividad. Por otra parte, la representación de curvas exactas mediante ecuaciones concretas es viable para cierto número de primitivas, pero en el caso de necesitar el modelador mayor libertad, éstas suelen ser escasas.

Desde el punto de vista de la representación matemática, destacan tres técnicas que se emplean dependiendo del grado de exactitud que se desee y de la información disponible:

- Interpolación
- Aproximación
- Control de forma

fig 5.22 Representación de una curva mediante conjunto vectorial de puntos y mediante la representación analítica (Dibujo del autor)

Interpolación

La interpolación trata de construir una función, que para valores predeterminados de la variable independiente, tome ciertos valores conocidos. Se trata de la aplicación al modelado geométrico del procedimiento clásico de aproximación a funciones o a conjuntos.

Los métodos de interpolación son numerosos y existen para diversas aplicaciones. Se empezaron a desarrollar en el s. XVIII en el marco del análisis matemático. A continuación se enuncian, algunos de ellos aunque su descripción matemática se desarrollará en el capítulo 6 en relación a la representación de curvas modeladas (fig 5.24):

- Interpolación lineal
- Lagrange
- Hermite
- Splines lineales
- Splines cúbicos

Cabe mencionar que para realizar la interpolación de un gran número de puntos, la interpolación polinomial (Lagrange, Hermite, Newton) requiere una gran capacidad de cálculo, pudiéndose producir errores tanto numéricos como distorsiones respecto a la curva deseada, como el fenómeno de Runge. Cabe destacar que estos errores se minimizan eligiendo los nodos específicamente y un método de interpolación adecuado al tipo de datos.

Aproximación

Las curvas aproximadoras surgen a partir de la Splines interpoladoras, donde se emplea una base especial de polinomios que permite el control local de las curvas. Escrita inicialmente en 1912 por S. Bernstein para la aproximación uniforme a funciones continuas, se pueden mencionar las siguientes;

- Bézier
- B-splines

Las curvas de Bézier se aproximan a partir de $n+1$ puntos de control $P_0, \dots, P_n$, creándose una polígono de control con la unión de dichos puntos, que determina la forma de la curva. Las curvas de Bézier desarrolladas inicialmente para el diseño automovilístico en los años 60, en paralelo por P. Bézier y P. De Casteljaú, parte de la interpolación lineal sucesiva de dos segmentos consecutivos del polígono interpolador (Rueda 2015). Se definen matemáticamente como:

$$C(t) = \sum_{k=0}^n P_k B_k(x) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (5.2)$$

fig 5.24. Representación de una curva interpolada (Dibujo del autor)

fig 5.24. Representación del polígono de control de una curva aproximada (Dibujo del autor)

fig 5.25. Representación de una curva de Bernstein (Dibujo del autor)

toman de los polinomios de Berstein como base:

$$B_k(x) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-1} \quad (5.3)$$

La ventaja del empleo de estas curvas radica en su invarianza ante transformaciones afines tales como isometrías, semejanzas y transformaciones proyectivas, lo que resulta muy útil tanto para modelizar como para visualizar los modelos en soportes digitales. Sin embargo presentan dos limitaciones importantes (Pottman et al 2007): un gran número de puntos de control reduce la capacidad de control de diseño de la curva (dado que pierde semejanza con el polígono de control) y cada punto de control posee implicación global en la forma, por lo que la modificación de uno de ellos modifica globalmente la curva.

Las curvas B-splines, toman su nombre de las Splines (herramienta manual empleada para el diseño de cascos de barcos, que mediante una serie de pesos permitía controlar la forma, (fig 5.26) con el prefijo B que hace referencia a “básico”. Se trata de una curva formada por la sucesión de segmentos curvos de Bézier (Piegl 1997). Se define a partir de $n+1(P_0, \dots, P_n)$ puntos de control, el grado k de la curva menor o igual que n y un vector de nudos $X = (a = x_1, \dots, x_{n+k+2}=b)$,

$$C(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_{i-1} N_{i,k+1}(t) \quad a \leq t \leq b \quad (5.4)$$

con las bases de funciones B-splines definidas de forma recursiva por las fórmulas de Cox-De Boor,

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq t \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$N_{i,l}(t) = \frac{(t-x_i)N_{i,l-1}(t)}{x_{i+l}-x_i} + \frac{(x_{i+l+1}-t)N_{i+1,l-1}(t)}{x_{i+l+1}-x_{i+1}}, \quad l = 2, \dots, k \quad (5.5)$$

El vector de nudos X , se trata de una lista creciente de números reales, con multiplicidad menor o igual que $k + 1$. La longitud del vector dependen del número de puntos de control y del orden, y sus valores hace referencia a la conexión de los trozo,

$$X = [x_1, \dots, x_{n+k+2}] = [a, \dots, b] \quad (5.6)$$

Estas curvas permiten un mayor control del diseño y la forma final, por medio de los puntos del polígono de control y del grado de la curva. Además permite controlar la continuidad entre curvas, lo que asegura el grado de la misma según la exigencia. Aunque en ocasiones, con la continuidad geométrica es necesaria, en otras, para suavizar, es necesaria dar continuidad a las tangentes o a las curvaturas, igualando sus correspondientes vectores.

fig 5.26 Herramienta tradicional “spline” para el trazado de cascos de barcos (Pottamnn et al 2007)

Control de forma

La edición de curvas primitivas formuladas mediante las ecuaciones anteriormente expuestas, es el procedimiento que realiza la modelización mediante control de forma. Para ello es necesario un tipo de representación que permita la edición rápida, inmediata y con efectos locales de los puntos de control, de todos los tipos de curvas incluyendo las cónicas, que no pueden ser representadas mediante polinomios.

Para ello se dispone de las curvas NURBS (Non Uniform Rational B-Splines, B-Splines Racionales No Uniformes), (fig 5.27) que se han popularizado rápidamente entre los programas de CAD, debido a la versatilidad que produce su modelado. Además, en los últimos años se han empleado para confeccionar los modelos geométricos para análisis FEM, que realiza el análisis isogeométrico (IGA).

fig 5.27 Curva NURBS con su puntos de control (Dibujo del autor)

fig 5.28 Proyección de una curva en $\mathbb{R}^3$ en una NURBS en $\mathbb{R}^2$ para representar un círculo (Hughes et al 2005)

Su formulación parte de los mismos parámetros que las curvas B-spline, ya que se puede definir a partir de la proyección de una curva en un hiperplano en $\mathbb{R}^4$ sobre un espacio en $\mathbb{R}^3$ y de forma representable de una curva en $\mathbb{R}^3$ sobre un plano $\mathbb{R}^2$ (fig 5.28).

La curva se define en forma de cociente de polinomios (racional) donde el numerador es la parametrización de una B-spline multiplicado por un coeficiente $w_i > 0$, denominado peso, que tiene el efecto de desplazar localmente la curva:

$$C(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} w_{i-1} B_{i-1} N_{i,k+1}(t)}{\sum_{i=1}^{n+1} w_{i-1} N_{i,k+1}(t)}, \quad a \leq t \leq b \quad (5.7)$$

Las bases dependen del grado de la curva, pero como se muestra (fig 5.29), se tratan de funciones fácilmente representables y obtenibles, de manera que el proceso se simplifica de manera notable.

Modelos de Superficies

El modelado de superficies es el procedimiento más extendido tanto en edificación como en ingeniería civil, en elementos espaciales y esta es la tendencia que

fig 5.29 funciones base cúbicas (Píegl 1995)

se están siguiendo en los procedimientos de análisis: crear modelos tridimensionales, aunque sea partiendo y manipulando curvas planas.

Superficies interpoladas, de Bezier y NURBS

Se trata de la extensión al espacio de las formulaciones descritas anteriormente para curvas, pero con tres variables o dos parámetros. Las superficies de Bézier requieren un conjunto de $(m+1) \times (n+1)$ puntos de control (fig 5.29)

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m J_{m,i}(v) J_{n,j}(u) B_{i,j} \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (5.8)$$

con los polinomios de Bernstein,

$$\begin{aligned} J_{m,i}(v) &= \binom{m}{i} v^i (1-v)^{m-i} \\ J_{n,j}(u) &= \binom{n}{j} u^j (1-u)^{n-j} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Por extrapolación de las curvas NURBS, las superficies con puntos de control y pesos en las dos direcciones (fig 5.29 y fig 5.30a).

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} w_{i,1} B_{i,j} N_{i,p}(t)}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{i-1} N_{i,k+1}(t)}, \quad a \leq t \leq b \quad (5.10)$$

Mallas

El mallado de un modelo se realiza mediante la construcción de una serie de polígonos convexos a partir de un número de puntos (fig 5.30 b). Por tanto permite crear la “piel” en el espacio de un objeto mediante elementos planos. Habitualmente se emplean triángulos aunque para determinadas geometrías son necesarios cuadriláteros o hexágonos.

Permite el trabajo con diferentes resoluciones, ya sea para la visualización como para el modelo matemático, lo que permite optimizar los recursos. El aumento de resolución se consigue añadiendo polígonos mediante la subdivisión.

La estructura de datos es similar a la de los modelos alámbricos, ya que se almacena por un lado los vértices, por otro las aristas y finalmente las caras o polígonos. La creación de las mallas, se puede realizar mediante diferentes procedimientos. Cabe destacar la triangulación de Delaunay, que determina la condición de que la circunferencia circunscrita de cada triángulo de la malla no contenga ningún vértice de otro triángulo, implementándose diversos algoritmos que lo verifican o modifican la triangulación en caso de no verificarse. Diversos plugins o aplicaciones específicas realizan estas tareas adicionalmente a los programas de CAD.

fig 5.29. Superficie de Bézier con una sus puntos de control (Piegl 1995)

fig 5.29. Superficie NURBS generada a partir de un rectángulo con dominio $u: 0 - 20$ y arco de circunferencia para un dominio $v: 0 - 10\pi$ (Dibujo del autor)

fig 5.30 Bóveda norte de la Real Fábrica de Vidrio de La Granja, modelizada mediante NURBS (a) y mallas triangulares (b) (Modelo y dibujos del autor)

En el procedimiento de mallado automatizado se pueden producir errores e incongruencias con el modelo físico, lo que obliga a un refinado y revisión manual, que a veces se convierte en un auténtico trabajo artesanal.

Subdivisión

La subdivisión parte de un malla y consigue mayor resolución, y por tanto más exactitud con el modelo original, a partir de aplicar una regla de subdivisión a la misma. Mediante una secuencia de refinamientos, se consigue una superficie con mayor suavidad de la malla, aunque en estados previos, el modelo puede pasar a ser ésta, una malla menos tupida, lo que aumenta el rendimiento computacional.

Las reglas que se emplean pueden ser bien para modificar topológicamente el objeto o bien para posicionar nuevos vértices, pero ambos métodos se caracterizan por el mismo principio, añadir información localizada o de forma general (fig 5.30).

fig 5.30. Subdivisión de una malla poligonal de triángulos mediante la inclusión de nuevos vértices (Zorin et al. 2000)

Modelos de Sólidos

Los modelos de sólidos, como se ha comentado anteriormente, no son habituales en edificación existente, por lo que las técnicas de modelado se enunciarán brevemente con objeto de completar el recorrido del presente capítulo.

Este tipo permiten representar no solo la superficie externa sino el interior del objeto y dotarlo de propiedades, tanto para caracterizar su comportamiento como para describir objetos no homogéneos. Cabe destacar que el modelo de sólidos permite incorporar información no estrictamente geométrica, lo que sirve para caracterizar constructivamente el objeto. Las técnicas principales son:

- Modelos de descomposición
- Modelos constructivos (CSG)
- Modelos de fronteras (Boundary representation o BREP)

La primera de ellas, describe el sólido como un conjunto de células elementales o jerarquías de divisiones espaciales, que yuxtapuestas, ocupan el espacio del sólido. Esta adición, se puede realizar mediante la numeración exhaustiva de todos los componentes (voxels). Este ha sido tradicionalmente el modelo geométrico para el análisis FEM.

El modelo constructivo CSG (Constructive Solid Geometry, Geometría de Sólido Constructiva) establece una serie de normas para combinar las formas primitivas iniciales (obtenidas por procedimientos previamente determinados como la extrusión, la rotación, por recorrido, ...) y una serie de operadores booleanos (unión, intersección y diferencia). Los objetos se representan mediante árboles binarios que especifican las operaciones realizadas.

El modelo de fronteras o representación de contornos, conforma objetos espaciales encerrado por caras, que pertenecen a superficies cerradas (que encierra un volumen en el espacio de tres dimensiones) y orientables (determinando la normalidad de la superficie) y las curvas que lo limitan. Se verifica la validez topológica del objeto a través de la Fórmula de Euler - Poincaré. Esta modelización se puede transformar de manera sencilla a un modelo de superficies, simplemente eliminando la información del secuenciación de las caras.

La información habitualmente se almacena o bien en listas (por un lado la información geométrica y por otro los atributos o propiedades que se asocian) o bien en mediante winged-edged (aristas - aladas) que incluye información topológica. El almacenamiento por listas permite una mayor sencillez tanto en el algoritmo de asignación como el de lectura, a pesar de limitarse la características más sencillas, siendo ésta la forma de describir la información que se aplicará en el algoritmo de programación formulado (ver Capítulo 8).

fig 5.31 modelo de descomposición realizado mediante adición de voxels (Foley et al. 1997)

fig 5.32 esquema de formación de un modelo constructivo CSG (Foley et al. 1997)

fig 5.33 esquema de representación de un modelo BREP (Vendrell 2008)

Otros modelos

Con objeto de representar otro tipo de datos, se emplean diferentes modelizaciones gráficas, que son específicos para el objetivo deseado, como el modelado de fluidos, de elementos naturales, de telas en movimiento o de campos tensoriales, por ejemplo . Estos se pueden clasificar como:

- Geometría fractal
- Modelos gramaticales
- Sistemas de partículas
- Modelos por características físicas
- Modelos de visualización científica

2.3 LEVANTAMIENTO CONSTRUCTIVO DE EDIFICIOS EXISTENTES

El levantamiento constructivo, denominado por los italianos *il rilievo materico* (Parenti 1995), tiene por objeto la catalogación y clasificación constructiva y de material de los paramentos de un edificio, a partir de su identificación previa. Se trata por tanto de un apartado de la fase documental de un edificio, previa al diagnóstico y la intervención, que incluye, al igual que en el levantamiento geométrico, una primera parte de identificación y una segunda de documentación.

Arqueología de la arquitectura

La aplicación de técnicas arqueológicas al levantamiento arquitectónico, también denominado análisis estratigráfico, tiene su origen en la década de 1970 en Italia, discutiéndose la autoría entre un arqueólogo, Riccardo Francovich y un arquitecto Roberto Parenti, aunque posteriormente publican conjuntamente las bases de esta metodología (Francovich y Parenti 1988), aplicada fundamentalmente a edificios de fábrica.

Esta metodología consiste en aplicar el método Harris a la lectura de muros, con “una utilización análoga a las prácticas llevadas a cabo en los estratos arqueológicos horizontales, permiten ampliar el conocimiento del contexto, que por analogía podemos llamar de la estratigrafía vertical: las técnicas constructivas, los motivos decorativos, el acabado de los elementos, la factura de los huecos, etcétera” (Parenti 1995). Dado que el estudio de un edificio histórico puede englobar una enorme cantidad de materias, desde la antropología de los pobladores hasta la composición atómica del mortero, Parenti hace hincapié en definir la escala adecuada, que conecta con lo que denomina la unidad de referencia, que no es otro que el elemento constructivo estudiado, estableciendo escalones de definición sucesivos de manera que “ya que al pasar de un eslabón a otro, se da solamente un salto de escala” (Parenti 1995).

Para ello, el objeto arquitectónico de estudio se divide en tres niveles: el primero la determinación de la masa muraria (denominada Unidades Estratigráficas Murarias, UEM), la segunda la posición vertical, sus contornos y dimensiones macroscópicas y la tercera la caracterización de sus componentes constructivos. Todo ello reflejado gráficamente y documentalmente, lo que requiere de un levantamiento geométrico previo, con alguna de las técnicas que se ha mencionado en el apartado anterior.

Dentro de los paramentos verticales los elementos a estudiar se dividen a su vez, en revestimientos, muros de fábrica y cimentaciones. Cada elemento se compone de uno o más volúmenes, que con características comunes, se relaciona con los demás, estableciéndose un perímetro delimitador y grafiándolo sobre una representación geométrica o fotográfica (fig 5.34). Además a la información de cada unidad, se le asocia una ficha o base de datos, donde se registra toda la información obtenida.

fig 5.34 Identificación de los elementos constructivos de una fachada (Parenti 1995)

La lectura de estratos de un edificio tiene por un lado la dificultad de la determinación de las propias UEM, ya que un edificio puede ser muy complejo y no estar fácilmente accesible y por otro lado, todas las unidades se relacionan geométricamente con el resto a través de perímetro delimitador, quedando yuxtapuestas unas a otras.

Aplicaciones

Las aplicaciones de la lectura de paramentos son muy amplias ya que sirven de instrumento de registro de los sucesos acaecidos al edificio (Parenti 1995, 19-29):

- Caracterización de los elementos constructivos
- La definición del modelo constructivo
- La datación cronológica del proceso constructivo
- Las fases de desarrollo de un centro habitado
- La evidencia de los seísmos del pasado

Además de las aplicaciones anteriores, a la base geométrica se le puede asociar gran cantidad de información obtenida bien de trabajos de campo bien de trabajos de laboratorio, permitiendo la elaboración de diversas cartografías de datos (López González 2015):

- Caracterización de los materiales
- Cartografía de lesiones y daños
- Resultados de pruebas instrumentales in situ
- Resultados de datos de laboratorio
- Caracterización constructiva

Al igual que una fábrica no es un material estructural homogéneo, la estructura que conforma un edificio tampoco suele serlo. Por ello, es necesario establecer las distintas divisiones entre elementos que puedan caracterizarse de igual manera, de forma que pueda realizarse un análisis más acertado (fig 5.35).

fig 5.35 Alzado Norte de la Iglesia de San Miguel de Sacramento (Martínez-Monedero 2015)

Modelo constructivo

Conseguir un modelo constructivo, lo más fidedigno con la realidad posible, es fundamental para realizar un análisis correcto. Una dificultad importante en este tipo de edificios es separar en sistemas constructivos siguiendo la visión actual. Separar estructura del cerramiento no es posible en edificación histórica o tradicional y determinar claramente sus funciones tampoco. Por ello, el modelo constructivo es el primer paso para establecer el modelo estructural, que será objeto del análisis correspondiente. Dada la complejidad de las estructuras de fábrica, cuyo comportamiento en muchos casos no resulta evidente, es necesaria la valoración de su “complejidad estática [...] para la modelización del edificio con el fin de entender su comportamiento y la respuesta a los posibles accidentes imprevisto” (Parenti 1995).

Datación cronológica

Dado que los edificios históricos que llegan a nuestros días suelen ser el resultado de numerosas intervenciones, reformas, modificaciones y sustituciones, realizar una caracterización constructiva de sus estructuras de fábricas suele ser un ejercicio de búsqueda de la “historia” del propio edificio (fig 5.36). Para conocer y entender el propio edificio, es necesario previamente entender su comportamiento estructural y es muy habitual que ésta haya sufrido una sucesión de cambios o ajustes en su vida útil. Es importante señalar, que si es posible conocer cómo se ha ido conformando constructivamente un edificio, más sencillo será determinar cómo se comporta en el momento actual.

fig 5.36 Datación cronológica de las diferentes fábricas de la Catedral de Santa María la Blanca de Vitoria (Latorre 2012)

A estos efectos, la cronología constructiva del edificio permite establecer con mayor facilidad la técnica constructiva con la que se ha ejecutado y será posible una mayor precisión al caracterizar las fábricas. Las características principales de estas técnicas suelen mantener rasgos comunes entre construcciones cronológica y territorialmente similares, tales como los materiales, aparejo y secciones, elaboración y acabado, y morteros (Parenti 1995).

Cartografía de lesiones

Los mapas de daños son un instrumento habitual y muy útil en los procesos de intervención en edificios existentes. Situar espacialmente los daños suele ayudar a determinar los orígenes de los mismos y facilitar su intervención mediante la localización de la lesión y la identificación de los elementos y materiales constructivos, especialmente sus componentes (Monjo y Maldonado 2001). Los daños cartografiables son muy variados y obedecen generalmente a clasificaciones habituales en los tratados de rehabilitación. De ellas, desde el punto de vista mecánico las más importantes son las grietas. Éstas indican una discontinuidad del material, lo que, como se menciona más adelante (Capítulo 7.5) muestran el camino de transmisión de los empujes.

Relación entre geometría y construcción

El interés de esta metodología en relación al tema del presente trabajo, se centra en la posibilidad de identificación constructiva de los elementos constituyentes de una estructura de fábrica y su ubicación espacial, o lo que es lo mismo, la relación entre la caracterización constructiva de una fábrica y el elemento geométrico que lo engloba ya sea una porción del plano delimitada por curvas o una porción del espacio delimitada por superficies. Es por tanto necesario una caracterización constructiva que añadir a la geométrica y que conforme finalmente un modelo estructural completo.

fig 5.37 Modelización geométrica y constructiva de la fachada de la Catedral de Santa María la Blanca de Vitoria (Latorre y Cámara 2009)

2.4 MATERIALES, CARACTERIZACIÓN Y CONSTRUCCIÓN

Como se ha comentado en el capítulo anterior, una fábrica como material, es cualquier construcción realizada con piezas trabadas, unidas entre sí con o sin mortero. Es, necesariamente, un material compuesto donde cada constituyente posee unas propiedades diferentes del material constituido, característica ésta que era conocida desde la antigüedad.

La construcción con fábricas se ha desarrollado históricamente según zonas y épocas, por lo que englobar todas las fábricas, bajo una única denominación tiene de a ser muy simplista. Las bóvedas romanas de “Opus Latericium”, los sillares labrados de piedra de una catedral gótica, los muros de mampuesto concertado de una pequeña ermita o los arcos de piedra a hueso de un puente medieval, poco tienen que ver desde el punto de vista de material de construcción. De todas maneras, mantienen una serie de rasgos comunes que permiten extraer una serie de conclusiones que ha permitido trabajar con todas ellas bajo un único enfoque.

Por otra parte, a la hora de abordar el estudio de los materiales estructurales, es habitual también describir sus propiedades mecánicas, y en especial sus parámetros resistentes y elásticos (lineales y no lineales). Todo ello con el fin de modelizar la estructura bajo prescripciones elásticas y determinar sus tensiones y desplazamientos, que es la práctica más extendida en los modelos de análisis estructural actuales. Sin embargo en el análisis de las fábricas históricas, donde conocer la tensión desempeña una función secundaria (Huerta 2004), la descripción exhaustiva de las propiedades mecánicas no resulta crucial. Por ello a continuación se describen las que se han considerado necesarias para poder caracterizar y modelizar la estructura a estudiar bajo este enfoque.

Las piezas

Los materiales más habituales en la ejecución de los edificios históricos que han sobrevivido hasta nuestros días, han sido fundamentalmente la piedra natural, el ladrillo y en menor medida, los tapiales. Intentar recoger las características de materiales tan heterogéneos ha sido una labor ingente, que ha quedado reflejado en los tratados y estudios de construcción durante los tres últimos siglos.

La piedra

La piedra, al igual que otros muchos materiales de construcción, ha estado ligada a la disponibilidad local, empleándose gran cantidad de tipos diferentes y siendo sus propiedades ligeramente diferentes unas a otras según de la cantera de la que se extraía. Diversos autores a lo largo de la historia, han intentado estudiar sus propiedades de manera científica especialmente a partir del s. XVIII y recogerlos en distintos tratados, a partir de ensayos bajo condiciones de laboratorio de probetas extraídas de las propias canteras (Huerta 2004).

La resistencia a compresión ha sido uno de los primeros parámetros a estudiar. Como se puede observar en la figura 2.38 las resistencias varían sensiblemente

KIND OF STONE.	No. of Quarries.	No. of Tests.	ULTIMATE CRUSHING STRENGTH.					
			Pounds per Square Inch.			Tons per Square Foot.		
			Min.	Max.	Mean.	Min.	Max.	Mean.
Granite	10	37	2 045	27 738	19 379	147	1 990	1 400
Limestone ..	15	35	3 634	24 121	9 438	261	1 740	680
Marble	10	21	6 872	17 780	12 709	495	1 280	910
Sandstone...	19	84	4 353	15 163	9 333	313	1 090	670

PIEDRAS.	Cargas de rotura por cm. ² — Kilogramos.
Basalto y pórfido.....	2.000 á 2.500
Granito.....	350 á 800
Areniscas.....	4 á 800
Calizas duras.....	150 á 500
Calizas blandas.....	50 á 150
Ladrillos.....	40 á 150

te entre los expuestos por unos u otros autores según su procedencia. Se puede comprobar que la resistencia a compresión simple de las piedras empleadas en estructuras es ciertamente elevada y oscila entre 50 y 200 N/mm², mientras la resistencia a tracción es notablemente reducida, entre 4 y 15 N/mm² (Delbecq 1983).

Autores a lo largo de la historia (Baker y Wiley 1909; León, Martínez y Martín-Caro 2001), recogen los valores de resistencia a compresión de gran variedad de tipos de piedra y la estimación de la resistencia a tracción, a partir del valor anterior (fig 5.38).

fig 5.38 Propiedades de diversos tipos de piedra según diversos tratados (Baker, 1902) (izq) y (Gaztelu, 1896) (dch)

	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX
Silex												
Piedra de Redueña												
Pizarra												
Piedra Berroqueña												
Piedra de Colmenar												
Piedra de Novelda y otras												

fig 5.39 Clasificación de los tipos de piedras empleadas en construcción empleadas tradicionalmente en la ciudad de Madrid (Menduiña y Font 2005)

Para poder caracterizar correctamente la fábrica es necesario identificar adecuadamente la piedra con la que se ejecutó y en la manera de lo posible, localizar la cantera original. Este es el caso, por ejemplo, de la roca de granito, conocida como piedra Caleño, con la que se han realizado gran parte de los edificios históricos de Ávila que han sido extraídas de la cercanas canteras de la Colilla (García y Escudero 2011).

El Grupo de Petrología aplicada a la Conservación del Patrimonio (Universidad Complutense de Madrid - Consejo Superior de Investigaciones Científicas), ha estudiado con profundidad los tipos de rocas y las canteras históricas de dónde han sido extraídos, de numerosos edificios y puentes de la Comunidad de Madrid (Menduiña y Font 2005), cuyo conocimiento es fundamental para poder intervenir en cualquier construcción (fig 5.39).

El peso específico de las piedras determina en gran medida el peso específico de la fábrica, existiendo una cierta variabilidad entre sus valores característicos, pero se puede establecer una horquilla de 21,0 - 30,0 kN/m³ a partir de los valores especificados en el CTE.

CLASE DE FÁBRICA.	Peso del m. ³ — Kilogramos.	Coefficiente de resistencia por cm. ² — Kilogramos.
Sillería.....	2.000 á 2.700	15 á 40
Mampostería.....	2.000 á 2.300	3 á 20
Hormigón ordinario.....	2.300 á 2.400	3 á 5
Hormigón de cemento.....	2.300 á 2.400	6 á 14
Ladrillo.....	1.700 á 1.800	3 á 10

El módulo de elasticidad de los materiales pétreos (que no deja de ser un parámetro relativamente moderno), es más difícil de caracterizar ya que en algunas rocas este valor depende del valor de carga. Se pueden tomar los valores geotécnicos, que varían entre 8000 y 15.000 MN/m² como orientativos para rocas duras. En fábricas con juntas, este parámetro prácticamente no influye en el conjunto, ya que es el valor del mortero, el material más flexible, el que lo determina (Ramos 2015).

Tanto la denominación de sus partes como las dimensiones de las piezas, son parámetros que dependen de la práctica local, ya que ni la nomenclatura ni los sistemas de unidades no se extendieron hasta la segunda mitad siglo XIX. A pesar de que el Sistema Internacional de medidas es el oficialmente adoptado por muchos países, todavía subsisten algunas medidas locales como el pie castellano y el pie catalán, especialmente empleado en la fabricación de las piezas. Por tanto, se trata de características muy locales, que varían en función la demarcación geográfica.

fig 5.41 Muestras de arcillas de tejas en La Sagra (Toledo) para diferentes tipos de cocción (López-Arce 2012)

La resistencia a compresión de los ladrillos cocidos históricos es un valor sensiblemente alto, aunque menor que los materiales pétreos. Poseen valores similares a los actuales, entre 7 y 30 N/mm² (Huerta 2004) mientras que la resistencia a tracción es muy pequeña, pudiéndose estimar como un 3% de la resistencia a compresión, lo que resulta un valor comparativamente reducido a las rocas.

El peso específico de los ladrillos viene determinado por dos factores: los materiales que los constituyen y las temperaturas de cocción, cuya consecuencia más evidente es la coloración superficial. A partir de la identificación de las canteras de arcillas originarias, es posible la reproducción de ladrillos históricos (fig 5.41), como se realizó para el caso de los ladrillos empleados en la restauración de edificios históricos en Toledo (López-Arce 2012). Sin embargo el peso específico es un valor relativamente constante, que se suele estimar entorno de 16 a 18 kN/m³.

El módulo de elasticidad de los ladrillos también es muy variable y depende, al igual que el caso anterior, de la humedad y la tensión de trabajo.

Los morteros empleados en estructuras históricas han sido tradicionalmente morteros de cal (tanto aérea como hidráulica) y morteros bastardos, donde se les

añadía cemento al mortero de cal como acelerante del fraguado. En la construcción tabicada ha sido habitual el empleo de morteros de yeso debido a su rápido fraguado. Los morteros modernos a base de cemento, no se desarrollan hasta el s. XIX (Álvarez, Martín y Casado 1995).

La resistencia a compresión es muy variable que depende del tipo de mortero y su composición. Los resultados de los ensayos se empiezan a reflejar a partir del s. XIX. El ingeniero José Marvá, en 1902 recoge los valores publicados por diversos autores, especialmente franceses, en el s. XIX, que como puede observarse se sitúa entre 1 N/mm² de un mortero de cal y arena a los más de 14 N/mm² de un mortero de cal hidráulica (Marvá 1902).

La resistencia a tracción es notablemente menor que la de los ladrillos (Huerta 2004). El peso específico de los morteros de cal puede variar entre 15 y 20 kN/m³ (Ramos 2015). Baker (1902) estima el peso del mortero seco en 16 kN/m³ a la hora de evaluar las cargas a cimentación (fig 5.42).

El módulo de elasticidad es difícil de caracterizar, ya que varía en función del tipo de mortero, la tensión y se suele recomendar la caracterización del mortero de la fábrica a estudiar a partir de probetas del mortero estradas del propio fábrica.

Los rellenos

Los constructores medievales conocían la necesidad estructural de rellenar el trasdós de la bóveda para garantizar la estabilidad. En los tratados como el de Fray Lorenzo de San Nicolás de 1639, aparecen indicado hasta que altura hay que rellenar las bóvedas y cómo debe disponerse, así como la ejecución de muretes transversales de refuerzo sobre los riñones (Huerta 2004).

El comportamiento estructural de los rellenos no ha sido considerado a lo largo de la historia, hasta hace muy poco tiempo, no se consideraba su existencia ni su función. Cabe destacar la aportación de Ramos Casqueiro a este aspecto, donde realiza una clasificación según su origen, los empujes que generan y cómo intervinen en la estabilidad del conjunto (Ramos 2015).

El peso específico es muy difícil de obtener sin analizar el relleno en cuestión. Ramos (2015) propone el empleo de los valores de suelo para realizar una estimación previa, si no se tienen datos más fiables, obtenidos por ejemplo de publicaciones o normas geotécnicas (fig 5.43). Se pueden estimar estos valores que oscilan entre 14 y 22 kN/m³, que son similares a los de las fábricas.

	Rígido	Granular firme	Granular	Aligerado	Escombros
Reparto de cargas	***	***	**	**	*
Pre-compresión de las bóvedas	***	**	**	*	*
Estabilización (empuje y rozamiento)	-	**	**	-	-
Estabilización (empuje activo/pasivo)	-	***	***	-	-
Misión estructural (paso de la l.d.p.)	***	***	-	*	-
Reducción de la luz estructural	***	***	-	*	-
“Verticalización” de reacciones	***	***	**	*	*

AUTORES	MATERIALES	Capacidad de tracción por compresión en kilogramos por cm ²
Vicat.....	Mortero ordinario de cal y arena.....	19
	Idem, id.....	35
Rondelet.....	Morteros de puzolana de Nípolos y de Roma	37
	Enlucido de unas minas romanas.....	76
	Mortero de las ruinas de la Bastilla.....	55
Vicat.....	Idem de cal hidráulica ordinaria.....	74
	Idem de id. eminentemente hidráulica.....	144
	Mortero de cal hidráulica:	
	285 kgs. de cal por m ³ de arena.....	2,7
	de 5 a 10 días.....	4,3
	de 11 a 15.....	5 a 5,5
Datos recogidos por.....	300 a 300 kilogramos de cal por m ³ de arena.....	9,5
Réa.....	de 3 a 4 meses.....	16,3
	de 4 a 6 id.....	23,7 a 41
	de 6 a 12 id.....	39,5
	500 kgs. de cal por m ³ de arena.....	70 a 74
Rondelet.....	Yeso amasado con agua.....	50
	Idem id. con lechada.....	75
Vicat.....	Idem id. suplen.....	90
	Idem id. clares.....	42

fig 5.42 Resistencias a compresión de morteros recopiladas de varios autores (Marvá 1902)

fig 5.43 Tabla de tipos de rellenos en el trasdós de las bóvedas (Ramos 2015)

La fábrica

Las fábricas que se han construido a lo largo de la historia, son tan dispares como los materiales que se han empleado en ellas, y como se ha comentado anteriormente, se configuran fundamentalmente por factores locales. También se han empleado fábricas mixtas, como sillares bien definidos en las hojas exteriores y rellenos de diversos tipos en interior o bien en el mismo paño, fábrica de sillares enmarcando otras de ladrillo, como el conocido aparejo toledano.

Por tanto, intentar dar valores comunes de estos materiales a su resistencias o a sus propiedades constitutivas (generalmente elásticas) para realizar un análisis estructural en un problema ciertamente difícil (Huerta 2004). Algunos autores han intentado caracterizar las fábricas para poder ser analizadas por medios informáticos (Lourenço 1996), en función de la escala a la que se analiza.

El aparejo desempeña una función fundamental para intentar conferir una cierta unidad de trabajo al conjunto y este aspecto era conocido desde la antigüedad. Los diversos “opus” romanos, parece que entendían la necesidad de la traba.

De forma general, las fábricas, se caracterizan por ser:

- Anisótropas
- Heterogéneas
- Discretas

Estos materiales poseen un comportamiento muy diferente según la dirección de las acciones, aspecto que ya se conocía desde la antigüedad, de manera que la disposición de las piezas de la fábrica se hacía para facilitar la transmisión de los esfuerzos en la dirección apropiada, esto es, perpendicular a los tendeles (fig 2.44).

La heterogeneidad es evidente, al estar compuesto por materiales de distinta naturaleza, como es la pieza y el mortero. Incluso dentro de las propias piezas existe heterogeneidad, ya que ni todos los ladrillos de una fábrica tenían la misma composición y se cocían de manera uniforme, ni las piedras de una cantera son todas homogéneas.

fig 5.44 Modos de fallo bajo carga biaxial (Lourenço 1996)

Por último, la fábrica se caracteriza, en muchas ocasiones, por ser un sistema discreto donde se distinguen los componentes (pueden quedar fuera de esta clasificación ciertos tipos de materiales continuos, como los tapiales y los hormigones, que generalmente se agrupan dentro de las fábricas y los rellenos). A efectos de transmisión de cargas, que sea un sistema discreto es determinante ya que las lesiones mecánicas se localizan en los puntos más débiles, que generalmente es el mortero, evidenciando aún más el carácter discontinuo de la fábrica.

Como se ha comentado anteriormente, al estar compuesto por diversos constituyentes y cada uno poseer parámetros diferentes, la caracterización homogénea del conjunto es complicada. Desde el punto de vista estructural este aspec-

to se ha estudiado en profundidad (Martínez 2003), estableciéndose los diversos comportamientos antes las diferentes acciones. Sin embargo, se van a destacar a continuación sólo los parámetros que son necesarios para realizar los análisis estructurales propuestos más adelante.

Resistencia a compresión

Durante el s. XIX, se desarrolló la idea de que se podía determinar la resistencia de la fábrica a partir de los elementos que lo componen (Huerta 2004), llegándose a la conclusión a finales del mismo siglo, que podían romperse fábricas de piedra a compresión a tensiones superiores a las del propio mortero, por lo que el material más débil, no determina la resistencia global.

Las fábricas están sometidas principalmente a esfuerzos de compresión y específicamente de compresión uniaxial perpendicular a los lechos, aunque por expansión del mortero, se pueden desarrollar tensiones biaxiales en un plano paralelo a las juntas.

Para determinar la resistencia característica a compresión se han propuesto varias formulaciones que combinan la resistencia de la pieza y del mortero, como la generalización descrita en el Eurocódigo de Fábricas (Comité Europeo de Normalización 1993):

f_k = K f_b^a f_m^b (5.12)

- donde:
- f_k = resistencia compresión de la fábrica
 - f_b = resistencia a compresión de la pieza
 - f_m = resistencia a compresión del mortero
 - K = coeficiente en función de la composición constructiva el muro y tipo de pieza (0.40 - 0.80)
 - a = factor de resistencia de la fábrica (0.65 - 0.85)
 - b = factor de resistencia del mortero (0 - 0.25)

A falta de ensayos específicos del material estudiado, se pueden obtener valores aproximados a partir de tabulaciones en función del tipo de pieza y del mortero, como las descritas en el Código Técnico de Fábricas (España. Ministerio de la Vivienda 2006) (fig 5.45a) o en las recomendaciones de la CIB en 1980 (Delbecq 1983) (fig 5.45b).

fig 5.45 Resistencia a compresión simple según CTE (Ministerio de la Vivienda 2006) (a) y Dalbecq 1983 (b)

Tabla 4.4 Resistencia característica a la compresión de fábricas usuales f_k (N/mm²)									
Resistencia normalizada de las piezas, f_b (N/mm²)	5		10		15		20		25
Resistencia del mortero, f_m (N/mm²)	2,5	3,5	5	7,5	7,5	10	10	15	15
Ladrillo macizo con junta delgada	-	-	3	3	3	3	3	3	3
Ladrillo macizo	2	2	4	4	6	6	8	8	10
Ladrillo perforado	2	2	4	4	5	6	7	8	9
Bloques aligerados	2	2	3	4	5	5	6	7	8
Bloques huecos	1	1	2	3	4	4	5	6	6

Résistance caractéristique à la compression simple des pierres f_pk	Résistance caractéristique à la compression simple de la maçonnerie suivant les mortiers (Tableau n° 5)				Résistance moyenne à la compression simple des pierres f_pm (MPa)
	M4	M3	M2	M1	
2,0	1,3	1,4	1,4	1,4	2,5
5,0	2,9	3,3	3,4	3,5	6,5
7,5	3,5	4,1	4,5	4,9	10,0
10,0	4,1	4,7	5,3	6,2	13,0
15,0	5,1	5,9	6,7	8,2	20,0
20,0	6,1	6,9	8,0	9,7	26,5
30,0	7,2	8,6	10,2	12,0	40,0
40,0	8,1	10,4	12,0	14,3	53,0
60,0	-	-	16,0	18,8	80,0

Resistencia a tracción

La resistencia a tracción depende fundamentalmente de la adherencia entre la pieza y el mortero. En caso de no existir, como en fábricas colocadas a hueso, esta puede considerarse nula.

La modelización de interfase entre mortero y pieza, es una de los objetivos de algunos modelos computacionales (Lourenço 1996). Esta representa uno de los retos más difíciles actualmente, debido fundamentalmente al todavía gran desconocimiento acerca del comportamiento del rozamiento en fábricas (Magdalena 2014).

Dado el bajo valor de la resistencia a tracción de las piezas, la resistencia a tracción suele despreciarse directamente como en el caso del Eurocódigo que especifica “*aunque la fábrica tiene resistencia a tracción, generalmente no se emplea en el cálculo*” (Comité Europeo de Normalización 1993), aunque en fábricas de tipo murario, éstas suelen ser significativas y definir las como nulas.

Módulo de elasticidad

El comportamiento de la fábrica está caracterizado por la no linealidad del material, desde el momento de la puesta en carga (fig 5.46, curva 1). Según EC-6 (Comité Europeo de Normalización 1993), la curva elastoplástica ante una sollicitación de compresión uniaxial se puede asimilar al tipo parábola rectángulo (fig 5.46 curva 2), aunque en el caso de evaluación en diseño de la fábrica, esta se puede simplificar a un tramo elástico inicial y un tramo plástico final (fig 5.46 curva 3).

El tramo inicial, hasta un tercio de la tensión de rotura, se puede considerar como una recta cuya pendiente el módulo de elasticidad E . Esta se puede establecer, en ausencia de ensayos específicos, como un valor proporcional a la resistencia a compresión (España. Ministerio de la Vivienda 2006):

$$E = 1000 f_k \quad (5.13)$$

fig 5.46 Curvas tensión - deformación típica (1), idealizada como parábola - rectángulo (s) y diagrama para diseño (3), según Eurocódigo 6 (Comité Europeo de Normalización 1993)

Peso específico

En ocasiones, el análisis que se quiere realizar, requiere de caracterizar las fábricas con los parámetros específicos que quizás necesiten un estudio en profundidad para su determinación. Este es el caso del trabajo de Pérez-Gálvez, Rodríguez-Liñán y Rubio, que para realzar un análisis FEM, realiza un estudio en profundidad para determinar las características mecánicas de los muros de fábrica de ladrillo en la arquitectura doméstica sevillana de los siglos XVIII y XIX que concluye con el desarrollo de una metodología específica para evaluar esta característica (Pérez-Gálvez, Rodríguez-Liñán y Rubio 2009).

Sin embargo, si no existen estos estudios, es posible determinar un valor medio de peso específico a partir de los pesos específicos de los componentes. Desde el punto de vista del equilibrio, como se comentará más adelante, sería muy arriesgado estimar como peso específico del conjunto el valor de la pieza, dado que se obtienen valores mayores.

Generalmente, se pueden extraer aproximaciones válidas, en caso de no disponer de datos experimentales, en numerosas tabulaciones, tanto en obras clásicas (fig 5.47a) como en normas actuales (fig 5.47b).

KIND OF MASONRY.	WEIGHT IN LBS. PER CU. FT.	Fábricas	
Brick-work, pressed brick, thin joints.....	145	Bloque hueco de cemento	13,0 a 16,0
“ ordinary quality.....	135	Bloque hueco de yeso	10,0
“ soft brick, thick joints.....	100	Ladrillo cerámico macizo	18,0
Concrete, best.....	160	Ladrillo cerámico perforado	15,0
“ porous.....	130	Ladrillo cerámico hueco	12,0
Granite or Limestone, well dressed throughout.....	165	Ladrillo silicocalcáreo	20,0
“ “ “ rubble, well dressed, with mortar.....	155	Mampostería con mortero	
“ “ “ “ roughly dressed, with mortar....	150	de arenisca	24,0
“ “ “ “ well dressed, dry.....	140	de basalto	27,0
“ “ “ “ roughly dressed, dry.....	135	de caliza compacta	26,0
Mortar, dried.....	100	de granito	26,0
Sandstone. (Deduct $\frac{1}{10}$ from the result for the corresponding granite or limestone masonry as above.).....	—	Sillería	
		de arenisca	26,0
		de arenisca o caliza porosas	24,0
		de basalto	30,0
		de caliza compacta o mármol	28,0
		de granito	28,0

fig 5.47 Peso específicos aparentes de distintas fábricas según a) Baker (1902) (izq) y según CTE (Ministerio de la Vivienda 2006) (dch)

Caracterización estructural

Como resumen de lo anteriormente expuesto se puede mencionar que los parámetros resistentes y elásticos de una fábrica dependen fundamentalmente de los materiales y es necesario caracterizarlos previamente, de manera independiente. Se pueden obtener valores orientativos a partir de las tabulaciones bibliográficas, que han sido resumidas en la fig 5.48 (Ramos 2015)³.

Parámetro	Máximo	Medio	Mínimo
Densidad (kN/m ³)	24,30	20,40	17,70
Módulo de deformación (MPa)	40400	8220	1425
Coefficiente de Poisson	0,30	0,19	0,10
Resistencia a compresión (MPa)	20,00	8,54	3,00
Resistencia a tracción (MPa)	0,60	0,26	0,00

³ Aunque existe en ocasiones en la literatura confusión entre los términos densidad, peso específico y peso específico aparente, se ha estimado, en los casos que hace referencia al peso del material por unidad de volumen, como sinónimos todos ellos.

fig 5.48 Resumen de datos de fábricas (Ramos 2015)

CAPÍTULO 6. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

6.1 Líneas de empujes

6.2 Análisis límite de estructura de fábrica

6.3 Propiedades analíticas de modelos geométricos

6.1 LÍNEAS DE EMPUJE

Introducción y definiciones

Línea de empujes

Como se ha descrito en el Capítulo 3, el concepto de líneas de empujes¹ se establece en el primer tercio del s. XIX, simultáneamente y de forma independiente en Alemania, Francia e Inglaterra y descrito de manera más pragmática o más matemática según el enfoque de cada autor.

Se define como el lugar geométrico que une la posición de la resultante de los esfuerzos en el interior de un macizo de fábrica y representa la trayectoria de las fuerzas en la estructura. Los planos de corte que se establecen son arbitrarios, por lo que dicha línea depende de las cargas (que son inherentes a la propia estructura) y la familia de planos elegida (fig 6.1).

fig 6.1 Línea de empujes y línea de presiones (Moseley 1843)

En este punto hay que hacer la distinción entre lo que Moseley (1843) denomina línea de resistencia, *line of resistance*, que coincide con el concepto anteriormente descrito de línea de empujes y la línea de presiones, *line of pressure*, que se puede entender como la envolvente de las direcciones de los empujes (Huerta 2004).

Línea de inclinaciones

Entendiendo la fábrica como material heterogéneo compuesto de piezas y mortero, para que no se produzca el colapso se debe cumplir la condición de que las piezas no se deslicen entre sí, por ninguna de las superficies de contacto.

Para verificar esta condición el ángulo que forma la dirección de la resultante en cada plano de sección debe estar comprendido dentro de los límites que se definen por un cono recto cuyo eje es normal a la superficie de contacto en el centro de empujes y cuyo ángulo es el doble del ángulo de rozamiento entre los sólidos. La intersección de las direcciones resultantes en cada sección es tangente a la línea denominada línea de inclinaciones.

La forma geométrica se puede obtener mediante el análisis de la estructura, aunque al igual que la línea de empujes, depende de la familia de secciones elegidas, para una geometría y unas cargas determinadas, es decir, de las superficies de unión entre las diversas partes que componen la estructura.

Por tanto, para conocer el estado de equilibrio de una estructura, es necesario conocer ambas líneas: la línea de empujes y la línea de inclinaciones, dando la primera la posición y la segunda la dirección de la resultante correspondiente. Como se muestra en el apartado siguiente, en la práctica, para cargas fundamen-

¹ Como expresa Huerta (2004), en castellano se ha empleado generalmente “curva de presiones” como traducción del francés *courbe de pression*. El concepto en Física de presión está relacionado con la magnitud de una fuerza por unidad de superficie, en lugar de una única fuerza. En este texto se empleará la traducción del inglés *line of thrust* como línea de empujes, que hace referencia a la magnitud fuerza.

talmente verticales, ambas líneas se confunden y pueden considerarse coincidentes (Huertas 1990).

Polígono funicular, antifuncular y línea de empujes

Los polígonos funiculares han sido, y siguen siendo, una herramienta muy útil para estudiar las trayectorias de empujes en arcos de fábricas. Desde el punto de vista de la estática, el problema de la cadena colgante y el del arco, es el mismo (Hooke 1685, Heymann 1982), por lo que el uso tradicional de funiculares para establecer el equilibrio de un sistema ante una serie de fuerzas exteriores es simétricamente equivalente (fig 6.2). Si se invierte el trazado del funicular se obtiene el antifuncular, donde las fuerzas horizontales son de compresión.

El cálculo gráfico vectorial, mediante la definición de los vectores deslizantes (con dirección, sentido y magnitud) de las cargas que intervienen en el equilibrio, permite la transformación homotética de los triángulos de fuerzas (fig 6.3), asumiendo los valores previos de las reacciones como conocidos y modificando la magnitud de la fuerza horizontal H , con la razón de proporcionalidad k :

$$k = \frac{P'p}{Pp} = \frac{Q'q}{Qq} = \frac{R'r}{Rr} = \frac{H}{H'} \quad (6.1)$$

En el caso de que se modificara el centro de homotecia C , la transformación sería también afin, por lo tanto el polígono de fuerzas resultantes son figuras afines

$$\frac{O''X}{O'X} = \frac{qQ'}{qQ''} \quad (6.2)$$

Si las cargas verticales en equilibrio no son puntuales sino continuas el antifuncular no será poligonal sino una curva continua. y para determinarlo existen dos procedimientos a seguir. El primero y más evidente, discretizar las cargas y transformarlas en puntuales, atribuyéndolas un área tributaria (como por ejemplo, el área de la dovela) u otro más trivial de elección libre, y continuar con el

fig 6.2 Homotecia del polígono funicular conocidas las reacciones verticales (Heyman 1982)

fig 6.3 Homotecia (izq) y transformación afin genérica (dch) del polígono funicular conocidas las reacciones verticales (Heyman 1982)

fig 6.4 Figura original del trabajo de Milankovitch (1906) según Focé (2006)

mismo procedimiento anterior. El polígono funicular equivalente será, por tanto, tangente a la curva funicular.

El segundo es trabajar con cargas continuas directamente, lo que imposibilita el procedimiento gráfico, que no geométrico, empleando como se describe más adelante la geometría analítica y cuyo objeto de la presente tesis es su demostración. La curvatura del antifunicular en cada punto es función de la intensidad de la carga local y de la fuerza horizontal H (Aroca 2002).

Determinación analítica de la línea de empujes: Milankovich

La definición matemática más rigurosa de la línea de empujes se establece a principios de s. XX por el matemático serbio Milutin Milankovitch para arcos (1907) y estribos (1910). Ésta ha sido trascrita primero por Huerta (1990) y posteriormente por Focé (2007), de la que a continuación se presenta su justificación y explicación detallada. La nomenclatura se ha mantenido respecto al original (fig 6.4) adaptándose a la notación matemática actual.

Centro de gravedad de una dovela infinitesimal

Antes de entrar en la ecuación de la línea de empujes, conviene detenerse en definir con claridad la posición del centro de gravedad de un elemento diferencial de arco, para posteriormente poder establecer el equilibrio y por tanto la posición de la resultante. Para ello se define un fragmento de arco determinado por dos planos, que seccionan en la curva del intradós en N y N_n y en la curva del extradós en N' y N'_n (fig 6.5).

El centro de gravedad del fragmento de arco definido por N , N_n , N' y N_n' se encuentra en S . Si se considera que la sección $N_n N_n'$ se aproxima infinitamente a la sección NN' , entonces el centro de gravedad S se situará en un punto límite que

fig 6.5 Definición de fragmento de arco (Dibujo del autor)

puede denominarse G (fig 6.6). Será este punto límite el centro de gravedad (cdg) de la sección NN' .

Para localizar la posición del centro de gravedad G , se definen las siguientes dimensiones geométricas del elemento diferencial de arco (fig 6.7), establecido por dos secciones que se cortan en un punto Ω :

- $NN'_1N'_2$: elemento diferencial de arco
- δ : longitud del segmento NN'
- M : punto medio del segmento NN' , por lo que $M = NN'/2 = \delta/2$
- r : la distancia entre el punto de corte de las secciones y el punto medio del segmento ΩM

Se puede determinar el centro de gravedad G como la diferencia entre los centros de gravedad de los dos triángulos denominados $\Omega N N'_1$ y $\Omega N N'_2$, a cuyas superficies se les denomina df_1 y df_2 respectivamente (fig 6.7). Los centros de gravedad se encontrarán en el baricentro de dichos triángulos, a una distancia de Ω que se puede definir como:

$$d(\Omega, cdg(df_1)) = \frac{2}{3} \left(r + \frac{\delta}{2} \right) \quad (6.3)$$

$$d(\Omega, cdg(df_2)) = \frac{2}{3} \left(r - \frac{\delta}{2} \right) \quad (6.4)$$

Tomando momentos estáticos de las dos superficies (fig 6.8) respecto a Ω e igualando la diferencia entre ellas al momento estático de Ω se obtiene:

$$S_{total} = S_{df1} - S_{df2} \quad (6.5)$$

$$d(G, \Omega) A_{total} = d(df_1, \Omega) df_1 - d(df_2, \Omega) df_2 \quad (6.6)$$

Por otro lado, sabiendo que el cociente entre las superficies de ambos triángulos es igual a:

$$\frac{df_1}{df_2} = \frac{\left(r + \frac{\delta}{2} \right)^2}{\left(r - \frac{\delta}{2} \right)^2} \quad (6.7)$$

De las dos ecuaciones (6.6) y (6.7), se obtiene la distancia del centro de gravedad:

fig 6.6 Definición del cdg del fragmento de arco (Dibujo del autor)

fig 6.7 Definición del cdg del elemento diferencial de arco (Dibujo del autor)

fig 6.8 Obtención de los triángulos df_1 y df_2 y sus cdgs (Dibujo del autor)

fig 6.9 Casos en los que el centro de gravedad coincide con el punto medio (Dibujo del autor)

$$\overline{G\Omega} = r + \frac{\delta^2}{12r} \quad (6.8)$$

y por tanto, el centro de gravedad del elemento diferencial se encuentra del punto medio a una distancia:

$$\overline{M\Omega} = \frac{\delta^2}{12r} \quad (6.9)$$

Por ello, el centro de gravedad de la sección está separado del punto medio de la sección y no coincide con éste. Sólo coincidirán en los siguientes casos (fig 6.9):

- $r = \infty$ las secciones son paralelas y no se cortan en Ω
- $\delta = 0$ el arco tiene un espesor nulo y es infinitamente delgado

fig 6.10 Definición geométrica del arco infinitesimal (Dibujo del autor)

Definición geométrica y notación

Para definir la línea de empujes, ya sea mediante geometría gráfica o analítica, es necesario previamente definir el sistema, tanto en dimensiones como en cargas. Se pretende determinar la línea de empujes para un arco $ABCD$, resistente, sometido a fuerzas exteriores y a su propio peso. Se considera también que el cuerpo es prismático y sus generatrices son perpendiculares al plano del dibujo (fig 6.10) .

Tomando el sistema cartesiano de coordenadas (fig 6.11), se define como positivo la dirección del peso del eje x:

fig 6.11 Definición geométrica y puntos notables del arco (Dibujo del autor)

- E posición del centro de empujes de una sección NN'
- x, y coordenadas del centro de empujes E
- ϕ ángulo de la sección NN' con respecto al eje x

Se consideran x, y, ϕ como variables independientes.

- δ longitud del segmento NN'
- M punto medio de la sección NN' donde $NM = \delta/2$
- ϵ distancia entre E y M (distancia del centro de empujes al punto medio de la sección)
- G centro de gravedad de la sección NN'
- β espesor del arco medido en la perpendicular al plano xy
- r longitud del segmento $M\Omega$

Definición de cargas exteriores

Las fuerzas representadas como vectores y las funciones de cargas exteriores se especifican a continuación (fig 6.12):

- R vector empuje en la sección NN'

fig 6.12 Definición de cargas exteriores (Dibujo del autor)

- V componente vertical de R $R_x = V$
- H componente horizontal de R $R_y = H$
- P carga por unidad de longitud en el extradós
- α ángulo que forma la carga P en cada punto con el eje x
- K vector empuje en la sección AB
- P componente vertical de K $R_x = P$
- Q componente horizontal de K $R_y = Q$

Se puede considerar que P y α son funciones de la variable independiente ϕ

Caracterización del material

Se considera un material homogéneo de peso específico aparente constante para toda la estructura:

- γ peso específico aparente de la fábrica

Elemento diferencial de arco

Suponiendo una sección infinitamente próxima a NN' , que se corta en el punto Ω , se pueden definir los siguientes elementos (fig 6.13):

- $d\phi$ ángulo infinitamente pequeño entre los planos perpendiculares a la estructura que contiene NN' y $N_I N'_I$
- EI posición del centro de empujes de la sección $N_I N'_I$
- MI posición del punto medio de la sección $N_I N'_I$
- de diferencial de arco exterior $N_I N'_I$
- dm diferencial de arco medio MM_I
- di diferencial de arco interior NN_I

Ecuaciones de equilibrio

Si se sustituye la parte de la estructura situada a la izquierda del plano $N_I N'_I$ por la fuerza R_I aplicada en el punto E_I sobre elemento diferencial de arco, actúan las siguientes fuerzas de forma simplificada (figs 6.15 y 6.16):

- R empuje sobre la sección NN' , aplicado sobre el punto E y descompuesto en sus componentes V y H
- R_I empuje sobre la sección $N_I N'_I$, aplicado sobre el punto E_I
- dG peso del elemento diferencial de arco, que como las secciones NN' y $N_I N'_I$ se encuentran infinitamente próximas, se puede suponer aplicado en el cdg de la sección NN' , esto es en G
- Pde carga sobre el diferencial de arco, que por la misma razón que la carga dG , se puede considerar que $P = Pde$, situado en el punto N

fig 6.13 Nomenclatura del elemento diferencial de arco (Dibujo del autor)

fig 6.13 Fuerzas actuando sobre el elemento diferencial de arco (Dibujo del autor)

fig 6.14 Fuerzas actuando sobre el elemento diferencial de arco (Dibujo del autor)

fig 6.15 Simplificación de las fuerzas actuando sobre el elemento diferencial de arco (Dibujo del autor)

Utilizando la condición de equilibrio, donde el momento en cualquier punto de la estructura sea nulo y tomando momentos respecto al punto E_1 , se obtiene la ecuación de siguiente (fig 6.16):

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow M_V - M_H - M_{dG} - M_{Pde} = 0 \quad (6.10)$$

que desarrollada resulta:

$$Vdx - Hdy - M_{dG} - M_{Pde} = 0 \quad (6.11)$$

Como los puntos E y E_1 se encuentran infinitamente próximos, la distancia entre dG y Pde puede considerarse igual tanto a E como a E_1 .

El momento de dG respecto al punto E_1 será el peso propio del elemento diferencial de arco por la proyección horizontal de la distancia entre el cdg (denominado G) y E_1 que es la misma distancia que a E (denominado ϵ):

$$M_{dG} = dG (GM + \epsilon) \sin \phi \quad (6.12)$$

El valor de dG será el volumen del prisma cuya base es un trapecio circular multiplicado por el peso específico del material:

$$dG = A_{\text{trapecio}} h \gamma = \frac{\pi (R^2 - r^2) \alpha}{2\pi} \beta \gamma = (\delta r d\phi) \beta \gamma \quad (6.13)$$

por lo que, sustituyendo en la ecuación (6.13) lo obtenido en la ecuación (6.9) los momentos que ejercen las fuerza dG serán (fig 6.16):

$$M_{dG} = ((\delta r d\phi) \beta \gamma) \left(\frac{1}{12} \frac{\delta^2}{r} \right) \sin \phi \quad (6.14)$$

El momento de Pde respecto al punto E_1 será el valor de la fuerza en el punto N' por su brazo de palanca que corresponde con la distancia perpendicular al vector PDE (fig 6.17):

$$M_{Pde} = Pde N' E \sin(\phi - \alpha) = Pde \left(\frac{\delta}{2} + \epsilon \right) \sin(\phi - \alpha) \quad (6.15)$$

Sustituyendo (6.14) y (6.15) en la ecuación de equilibrio (6.11) se obtiene:

fig 6.16 Momento respecto a E de la fuerza dG (Dibujo del autor)

fig 6.17 Momento respecto a E de la fuerza Pde (Dibujo del autor)

$$V dx - H dy - \delta r d\phi \beta \gamma \left(\frac{\delta^2}{12 r} \right) \sin \phi - P d\epsilon \left(\frac{\delta}{2} + \epsilon \right) \sin(\phi - \alpha) = 0 \quad (6.16)$$

Suponiendo que existe una sección AB cuyo centro de empujes E_o tiene coordenadas (x_o, y_o) y el empuje K se puede descomponer en una componente horizontal Q y una vertical P (fig 6.18), que son las condiciones de contorno, que verifique:

$$\begin{aligned} V &= P \\ H &= Q \end{aligned} \quad (6.17)$$

Estableciendo el equilibrio de fuerzas verticales y horizontales, se obtiene que:

$$\sum F_v = 0 \Rightarrow V = P + \beta \gamma \int_{x_0}^x \delta r d\phi + \int_{x_0}^x p \cos \alpha de \quad (6.18)$$

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow H = Q - \int_{x_0}^x p \sin \alpha de \quad (6.19)$$

Derivando la ecuación (6.16) respecto a x y dividiéndolo por H , se obtiene la ecuación general de la línea de empujes:

$$\frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{H} \left[\beta \gamma \delta r \left(\frac{\delta^2}{12 r} + \epsilon \right) \sin \phi \frac{d\phi}{dx} - P d\epsilon \left(\frac{\delta}{2} + \epsilon \right) \sin(\phi - \alpha) \frac{de}{dx} \right] \quad (6.20)$$

De la ecuación (6.19) se deriva una importante conclusión apuntada por Milankovich (Foce 2007), que consiste en que la dirección de la fuerza resultante R en el punto E no coincide con la dirección de la tangente a la recta tt' , por lo que asimismo no coincide con la curva funicular, a diferencia de lo que se había afirmado en numerosos estudios del s. XIX sobre la ecuación de la línea de empujes.

Caso particular 1: Cargas verticales

En el caso particular en el que la estructura esté sólo sometida a carga vertical en su extradós y a carga de peso propio, el ángulo de la carga exterior será nulo ($\alpha = 0$) y los planos de corte son perpendiculares a la directriz del arco, esto es $\Omega M = r$ las ecuaciones (6.18) y (6.19) se convierten en:

$$V = P + \beta \gamma \int_{x_0}^x \delta p d\phi + \int_{x_0}^x p de \quad (6.21)$$

fig 6.18 Descomposición de fuerzas (Dibujo del autor)

$$H = Q \quad (6.22)$$

Y la ecuación (6.20) en:

$$\frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{H} \left[\beta \gamma \delta r \left(\frac{\delta^2}{12 r} + \epsilon \right) \operatorname{sen} \phi p \frac{d\phi}{dx} - p de \left(\frac{\delta}{2} + \epsilon \right) \operatorname{sen} \phi \frac{de}{dx} \right] \quad (6.23)$$

Esta ecuación representa los casos habituales en bóvedas y algunos arcos, con cargas verticales exteriores producidas por los rellenos y juntas entre las piezas perpendiculares a la directriz.

Caso particular 2: Familia de planos verticales y cargas verticales

En el caso particular en el que la familia de planos sean paralelos y verticales, el ángulo que forma el plano de corte con la vertical será nulo ($\phi = 0$) por lo que la ecuación de equilibrio de momentos (6.20) se simplifica en:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V}{H} \quad (6.23)$$

que es un caso particular a la ecuación anterior y que erróneamente se había generalizado como la ecuación de la línea de empujes como se ha comentado anteriormente. Se trata del caso en que la dirección de la fuerza resultante R coincide con la dirección de la tangente de tt' .

Al simplificar estimando que todas las cargas son verticales (caso muy habitual en estructuras históricas de fábrica en situación no sísmica) la función peso $w(x)$ puede representar tanto el peso propio como la carga en el extradós e intradós, el resultado será:

$$V = P + \int_{x_0}^x w(x) dx \quad (6.24)$$

$$H = Q \quad (6.25)$$

que se definirá a partir de la función integral del peso propio. Entonces la ecuación (6.23) quedará

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{Q} \left(P + \int_{x_0}^x w(x) dx \right) \quad (6.26)$$

Derivando respecto a x se obtiene:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{w(x)}{Q} \quad (6.27)$$

La expresión anterior (6.27) se trata de una ecuación diferencial lineal de segundo orden que se puede resolver conociendo los valores iniciales para $y(x_0) = y_0$ y $y'(x_0) = y'_0$:

$$y = y_0 + \frac{1}{Q} \int_{x_0}^x du \int_{x_0}^u w(u) du + \frac{P}{Q} (x - x_0) \quad (6.28)$$

que es la ecuación general de la línea de empujes para cargas y planos verticales, o lo que es lo mismo, para un sistema de coordenadas cartesianas, según Milankovitch (1907).

Caso particular 3: Familia de planos radiales y cargas verticales

El estudio de la línea de empujes para planos radiales es estudiada en el apartado específico dedicado a la búsqueda de lo que Milankovitch denomina *mathematische Stärke* (espesor matemático), es decir, el espesor mínimo que debe tener un arco para que sea estable y encaje en su interior la línea de empujes.

La particularización del caso general descrita en el apartado anterior, es estudiado para un arco simétrico, cuyo eje de simetría se encuen-

fig 6.19 Figura original del trabajo de Milankovitch (1906) según Focé (2006) sobre el arco de espesor mínimo en coordenadas polares

tra en la sección AB (fig 6.19) de un arco semicircular de espesor constante a , radio de curvatura constante r , sometido a cargas verticales. De esta manera, en eje sólo se encuentra aplicada una carga horizontal Q a una distancia ρ_0 del centro de curvatura Ω .

Situando el centro del arco en el origen de coordenadas, para un espesor constante y un peso específico unitario, las ecuaciones (6.21) y (6.22) se convertirían en:

$$V = ar \int_0^\phi d\theta = ar\phi \quad (6.29)$$

$$H = Q \quad (6.30)$$

y la ecuación (6.22) en:

$$\frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{H} ar \left(\frac{a^2}{12r} + \varepsilon \right) \text{sen}\phi \frac{d\phi}{dx} \quad (6.31)$$

Realizando el cambio de coordenadas de cartesianas a polares, la distancia entre el centro de curvatura y la posición del centro de empujes se pueden expresar como ρ y el ángulo que forma con la vertical ϕ , por lo que las coordenadas cartesianas pasan a ser:

$$x = \rho \text{sen } \phi \quad (6.32)$$

$$y = \rho_0 - \rho \text{sen } \phi \quad (6.33)$$

La excentricidad de la resultante pasa a ser $r - \rho$. A partir de las expresiones anteriores, las distancias infinitesimales dx y dy se pueden expresar como:

$$dx = \text{sen}\phi d\rho + \rho \cos\phi d\phi \quad (6.34)$$

$$dy = -\cos\phi d\rho + \rho \text{sen}\phi d\phi \quad (6.35)$$

y sustituyendo en la ecuación (6.8) que determina el centro de gravedad será:

$$\rho(ar\phi \cos\phi + ar \text{sen}\phi - Q \text{sen}\phi)d\phi + (ar\phi \text{sen}\phi + Q \cos\phi)d\phi \frac{a}{12}(a^2 + 12r^2)\text{sen}\phi d\phi \quad (6.36)$$

Integrando la ecuación anterior (6.36), ésta se convierte en:

$$\rho(ar\varphi \sin\varphi + Q \cos\varphi) = -\frac{a}{12}(a^2 + 12r^2)\cos\varphi + C \quad (6.37)$$

cuya constante de integración C se despeja como problema de valor inicial $\varphi = 0$ y $\rho = r_0$:

$$C = \rho_0 Q + \frac{a}{12}(a^2 + 12r^2) \quad (6.38)$$

de lo que resulta la ecuación explícita de la línea de empujes en coordenadas polares según Milankotch:

$$\rho = \frac{\rho_0 Q + \frac{a}{6}(a^2 + 12r^2)\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{ar\varphi \sin\varphi + Q \cos\varphi} \quad (6.39)$$

Determinación analítica de la curva funicular vectorial

La ecuación de la curva funicular se puede determinar analíticamente a partir de la propia definición de triángulo en equilibrio de manera sencilla. Continuando con el caso anterior de un semiarco de espesor y peso específico constante, sometido exclusivamente a cargas verticales, la definición de fuerzas externas sigue el mismo proceso para los mismos ejes coordenados. Si el conjunto de cargas discretas $F_0, F_1, \dots, F_n$ aplicados en los puntos $P_0, P_1, \dots, P_n$ se sustituye por la función de peso propio $w(x)$. La carga vertical en un punto P_n , se puede definir como:

$$w(P_n) = \sum_{k=0}^n P_k \quad (6.40)$$

Se parte de la premisa que la función peso es nula en el punto de inicio del trazado del funicular, dado que ésta va aumentando a medida que avanza en el sentido positivo del eje de las ordenadas (fig 6.20)

$$w(P_0) = 0 \quad (6.41)$$

Para una curva plana Γ en su forma explícita o en su parametrización natural con $t = x$ (dado que no puede existir puntos singulares en una curva funicular, como se explicará más adelante), el vector tangente será:

$$\vec{T} = (1, f'(x_0)) = \frac{\Gamma'(x)}{\|\Gamma'(x)\|} \quad (6.42)$$

fig 6.20 Representación vectorial del funicular de cargas (Dibujo del autor)

Por otra parte, si la pendiente de la curva en un punto es paralela al polígono funicular en dicho punto, entonces:

$$m = \tan \theta = \frac{H}{w(x_0)} \quad (6.43)$$

Igualando la pendiente del vector tangente (6.31) con la de la curva funicular (6.32) y extendiéndola a su dominio se obtiene la ecuación diferencial de la curva funicular, que coincide con la ecuación (6.23) que es la correspondiente a la familia de planos verticales, empuje horizontal constante y coordenadas cartesianas:

$$f'(x) = \frac{w(x)}{H} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{V}{H} \quad (6.44)$$

Resolviéndola, para el valor inicial de pendiente inicial $m(P_o)$ conocido, que es la pendiente en el primer punto donde se empieza a trazar el funicular, dando lugar una familia de curvas paralelas que quedan fijadas haciéndolas pasar por el punto P de coordenadas (x_o, y_o) :

$$y = y_o + \frac{\sum_{i=0}^n F_n}{Q} + m(x - x_o) \quad (6.45)$$

que coincide con la ecuación analítica en forma y resultado (6.28), en lo que se puede afirmar que el trazado geométrico gráfico y el analítico son equivalentes, para coordenadas cartesianas.

Consecuencias geométricas de la ecuación de la línea de empujes

A partir del estudio de las ecuaciones (6.28), (6.39) y (6.45), simplificadas para cargas de peso propio, se pueden extraer algunas conclusiones geométricas y que tienen consecuencias a la hora de calcular el trazado de dicha curva.

La primera consiste en una trivialidad: si no existen cargas verticales, la línea de empujes es una recta horizontal mientras que si el peso propio es nulo $w(x)=0$ se trata de una recta de pendiente no nula (Foce 2007) que transformándose la ecuación (6.23) en la ecuación punto-pendiente de una recta será:

$$y = y_o + \frac{P}{Q}(x - x_o) \quad (6.46)$$

Dado que las cargas se pueden representar como una función del eje horizontal (en este caso x) según (6.24) o como un conjunto de vectores discretos según

(6.40), todas las cargas verticales se pueden expresar bien como función bien como conjunto vectorial discretizando la función continua. Por tanto todas las acciones verticales se pueden expresar en una única función $w(x)$, que incluye las funciones continuas del peso propio de la estructura, acción vertical de los rellenos y cargas variables, como se apuntaba anteriormente.

Por otra parte la descripción de Milankovitch (1907) hace referencia a un arco de espesor constante. Esta simplificación puede ser cierta en algunos casos, mientras en otros es muy conservadora, especialmente en estructuras históricas deformadas. La generalización de la función peso para anchos no constantes se realiza en el apartado siguiente.

Lo mismo puede ocurrir cuando el material no es homogéneo o no se puede asimilar a un material con un peso específico constante. En estos casos la variable β , deberá ser una función respecto a la variable independiente x , como también se describe en el Capítulo siguiente.

Por último cabe reseñar, que si la función de las cargas verticales es una función a trozos, la pendiente de la curva no es única en el valor inicial y final del dominio, o lo que es lo mismo, no es derivable en dicho punto. Se produce, por tanto, una curva que posee sólo continuidad geométrica, clase C^0 y no C^1 , como son el caso de las curvas obtenidas por integración de una función continua. Esto significa que una curva obtenida con cargas discretas es una poligonal y una curva obtenida con cargas continuas, una curva. Esta conclusión es importante a la hora de enlazarlo con las técnicas de modelado geométrico, ya que el primer caso será lo que los programas CAD denominan una polilínea (conjunto de segmentos) y en el segundo una curva interpoladora, ya sea Spline o NURBS.

Indeterminaciones

Las posibilidades de trazado de curvas o polígonos funiculares son infinitas ya que al ser un problema indeterminado no permite fijar de antemano “la línea de empujes real”. Como se ha mencionado en el Capítulo anterior, en esta búsqueda es en la que se enzarzaron los ingenieros de la segunda mitad del s. XIX, en pleno desarrollo de la teoría elástica.

La ecuación general (6.28) descrita por Milankovitch (1907) hace referencia a una carga puntual situada en el punto inicial de la curva, por lo que se resuelve por medio de tres condiciones iniciales (posición inicial, pendiente y valor de empuje) mientras que la ecuación (6.39) parte de la simplificación que en la clave la pendiente es nula (o lo que es lo mismo, cada semiarco sólo empuja horizontalmente uno contra otro). Sin embargo, estas ecuaciones se pueden resolver con diversos valores de contorno, que quedan determinadas geométricamente, como puede ser:

- Un punto de paso, el valor del empuje horizontal y la pendiente del empuje en dicho punto
- Tres puntos de paso
- Dos puntos de paso y el valor del empuje horizontal
- Cualquier otra combinación de puntos de paso, valor de empuje y pendiente en un punto de paso

Estas condiciones también pueden venir impuestas por las condiciones del material. Como se comenta en el apartado siguiente, las fábricas no son capaces de soportar tracciones o la resistencia es tan baja que directamente se desprecia, por lo que la curva de empujes debe permanecer en el interior del espesor de la estructura. Esta condición restringe entre dos curvas límites las posibles soluciones, por lo que la solución general se encuentra acotada.

Influencia de la familia de planos en arcos

La familia de planos considerada en los cálculos gráficos ha sido habitualmente la junta entre piezas, especialmente cuando las dovelas tienen un tamaño importante como en el caso de arcos de piedra. Al realizar esto se asegura que la componente paralela a la junta es la mínima, reduciéndose el valor obtenido de tensiones tangenciales y por tanto del posible fallo por deslizamiento. Sin embargo la propia adherencia del mortero o la fricción entre piezas sometidas a compresiones importantes en relación a las tangenciales, hacen que en la realidad el deslizamiento esté impedido (Heyman 1999). Esta circunstancia era conocida implícitamente desde la antigüedad en la construcción de arcos y bóvedas, ya que no es posible descimbrar hasta que no es colocada la clave y ésta entra en carga.

fig 6.21 Cambio de plano de corte de la línea de empujes (Dibujo del autor)

Las juntas reales de las dovelas se pueden sustituir por planos de corte verticales que simplifica mucho los cálculos (analíticos o gráficos) de la línea de empujes (Huerta 2004). La consideración de juntas no verticales conlleva a empujes no tangentes a la línea de empujes, por lo que pueden existir componentes paralelos a la junta que provoque tensiones tangenciales. Sin embargo, dado que se asume que el deslizamiento está impedido (ver Capítulo 6.2), dado que las tensiones tangenciales son muy bajas para generar movimientos, esta componente no es significativa.

Sin embargo la obtención del valor del empuje respecto a un plano cualquiera a partir del empuje conocido respecto a planos verticales es un procedimiento sencillo. Si se conoce el punto de paso del empuje, que resulta de la intersección de la curva de empujes Γ con el plano vertical χ , la carga vertical sería la resultante de restarle el peso correspondiente al triángulo AFB y sumarle el correspondiente a AEC (Föppl 1903). El empuje será el vector resultante de la composición de la fuerza horizontal anterior con la resultante de los pesos propios (fig 6.21).

fig 6.22. Caso general de estribos sometidos a carga horizontal y peso propio y definición geométrica de cargas (Milankovitch 1910)

El valor del peso propio añadido y sustraído, es generalmente pequeño por lo que la variación del empuje que resulta es pequeña y puede despreciarse (Huerta 2004).

Línea de empujes en estribos

Las diferencias entre las líneas de empujes en estribos si se emplean familias de planos verticales y horizontales es notable (fig 6.22), aunque en este caso las condiciones de equilibrio (ver apartado siguiente) se mantienen. El deslizamiento horizontal en estribos ya no está geoméricamente impedido, por lo que si se eligen planos verticales, se deberán hacer comprobaciones locales de deslizamiento entre las piezas, con el fin de verificar este extremo.

Analíticamente, la línea de empuje es similar a la formulación para arcos y el planteamiento de Milankovitch (1910), aunque en este trabajo, el matemático serbio, se centró en encontrar el diseño óptimo para unos requisitos estáticos y geométricos determinados (Foce 2006).

Partiendo del caso general de un estribo sujeto a un empuje horizontal, cuyas juntas son horizontales (por otra parte, habitual en todas las estructuras murarias de fábrica), está sometido a su propio peso y a una carga K en el punto E_0 (fig 6.22) La línea de empujes traza la trayectoria E_0EE_1 y, siguiendo el razonamiento de la dovela infinitesimal en los arcos, se establece el equilibrio de momentos de un segmento horizontal infinitesimal $NN'N_1N_1'$, alrededor de E_1 , donde V y H son las cargas aplicadas al segmento y M_g el momento del peso infinitesimal dG del segmento analizado que será:

$$Vdx - Hdy + M_g = 0 \quad (6.47)$$

Dado que el momento M_g es un infinitesimal de segundo orden puede ser despreciado, quedando la ecuación igual que en el caso de los arcos (6.23) para planos verticales:

fig 6.23 Formación de gajos por agrietamiento de una cúpula (Heyman 1996)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V}{H} \quad (6.48)$$

La resolución de esta ecuación diferencial sigue el mismo procedimiento que la ecuación (6.23), pero intercambiando las variables dependiente e independiente:

$$V = P + \int_{y_0}^y w(y) dy \quad (6.49)$$

$$H = Q \quad (6.50)$$

Milankovitch no realiza una generalización de la ecuación ya que sólo está interesado por el diseño de los estribos que se ajusten a una serie de condicionantes, como aquel que hace pasar la línea de empujes por el centro del estribo o aquel de resistencia constante (Foce 2006). De todos modos la ecuación se puede resolver conociendo las condiciones de contorno e iniciales:

$$y = y_0 - \frac{(x - x_0)}{H} \left(P + \int_{y_0}^y w(y) dy \right) \quad (6.51)$$

Línea de empujes en cúpulas

Las cúpulas en sentido moderno y desde el punto de vista estructural, pueden asimilarse a cáscaras donde el espesor, constante o variable, es pequeño respecto a su dimensión total. Dado que se trata de una superficie de doble curvatura, a priori, el comportamiento será muy diferente de los modelos planos de arcos.

Heyman (1996) ha determinado que, dado que las cúpulas a partir de un meridiano determinado (que ronda los 25°) requieren de tracciones para mantener el equilibrio y la fábrica no es capaz de soportarlo, ésta “se divide en gajos separados por grietas meridionales” (fig 6.23).

Este fue el planteamiento del trabajo de Poleni (1748) para la cúpula de San Pedro de Roma comentado en el Capítulo anterior y es la que se puede aplicar en cúpulas de fábrica. Por tanto cada gajo puede asimilarse a un semiarco de ancho variable, y aplicar la ecuación general cartesiana (6.28) donde β es una función de x , que recorre el dominio de la semiluz de la cúpula y tiene por valor:

$$\beta(x) \in \left[0, \frac{L}{2}\right] \quad (6.52)$$

Línea de empujes en bóvedas

El enfoque que se realiza al análisis de las bóvedas depende fundamentalmente de la geometría, ya que el tipo de comportamiento varía de manera notable de unas a otras. Sin embargo se pueden detener fundamentalmente en dos de los tipos más extendidos que se describen a continuación.

Bóvedas de cañón

Las bóvedas de cañón, independientemente de su sección transversal, con apoyo continuo, no dejan de ser una sucesión de arcos yuxtapuestos que se puede asimilar a un arco de ancho igual a la longitud de la bóveda, que incluirá las cargas habituales de relleno de los hombros. Por tanto la aplicación de la ecuación en cartesianas (6.28) o polares (6.39) es inmediata.

Bóvedas de crucería

En el caso de bóvedas de crucería, éstas han merecido un detenimiento especial (Heyman 1999) ya que el comportamiento dista mucho de las anteriores. En primer lugar la existencia de nervios diagonales, se asimilar al comportamiento de arcos cuya geometría idealizada no se corresponde con arcos de circunferencia y varía según se produzcan por la intersección de bóvedas de medio punto o de cañón.

Los empujes constantes, que debe soportar el arco diagonal (Heyman 1999), empleando el método de los cortes (aplicada en función del despiece de la plementería), se pueden determinar como función radial en coordenadas polares será:

$$N_{\theta} = -wa \cos \theta \quad (6.53)$$

donde w , es el peso por unidad de superficie de la bóveda, a la semiluz de la bóveda y θ el ángulo respecto a la vertical.

La transformación a una función respecto a la proyección horizontal x , se puede realizar mediante un cambio de parámetro, de manera que si el origen de coordenadas se sitúa en el centro de la bóveda, esta será:

$$N(x) = -w(x, \beta)x \quad (6.54)$$

donde el peso propio depende de la ordenada pero también del espesor, que es una función de la ordenada asimismo.

El análisis se puede hacer de un cuarto de bóveda, extendiéndolo posteriormente a la totalidad de la estructura (fig 6.24). La evaluación de los arcos diagonales

fig 6.24 Cuarto de bóveda (sup) necesario para analizar una bóveda de crucería completa (inf) según Heyman (1999) teniendo en cuenta los dos ejes de simetría (Dibujo del autor)

fig 6.25 Líneas de empujes activos y pasivos (Heyman 1996)

vendrá determinado por las cargas que deposita la plementería y por el empuje en la clave del propio arco.

A partir del empuje en la bóveda, de valor constante o variable, se puede estimar la posición de la línea de empujes de los arcos formeros y fajones forzando a que la tangente en la clave sea horizontal.

Línea de empujes en arbotantes

El arbotante, como elemento transmisor de esfuerzos horizontales de las bóvedas, ha sido estudiado de manera sistemática a luz de la teoría de empujes (Ungewitter 1901), determinándose que la dirección que toman los empujes depende de forma que éste posee.

Este comportamiento se puede asimilar al de un arco adintelado inclinado (Heyman 1995), del mismo modo que los arcos con directriz circular. En este caso, la estructura es capaz de soportar dos estados, que Heyman (1995) denomina estado pasivo y estado activo, que son a su vez, las curvas límite.

En el primero, la línea de empujes parte de la parte inferior del arbotante en su contacto con la bóveda hasta el contrafuerte, siendo tangente a la cara superior del arbotante. El segundo parte del mismo punto pero llega hasta la cara superior, y al ser más tendido, implica un empuje horizontal mayor (fig 6.25).

6.2 ANÁLISIS LÍMITE DE ESTRUCTURAS DE FÁBRICA

Introducción

La teoría de carga última o teoría plástica, fue formulada originalmente en el segundo cuarto del s. XX para los entramados metálicos. Varios autores posteriormente (Koooharian 1952, Prager 1959) trasladaron estas ideas a arcos de dovelas. Sin embargo, Jacques Heymann es reconocido como el “padre” de la teoría plástica aplicada a estructuras de fábrica, con la publicación en 1966 del artículo “*The stone skeleton*” donde explica y discute, rigurosa y universalmente por primera vez, la aplicabilidad de la teoría de carga última a cualquier estructura portante de fábrica y no sólo a los arcos de dovelas” (Kurrer 2008).

A partir de entonces, como se ha comentado en el Capítulo 3, se han desarrollado numerosos métodos para resolver el equilibrio o determinar estados de tensiones a partir de esta teoría. A continuación se expresan sus principios, en relación a la aplicación a las condiciones de estabilidad.

Condiciones del material

Principios del análisis límite

Heyman (1966, 1995, 1999) sistematiza las afirmaciones que se han aplicado implícita o explícitamente en proyecto científico de arcos y bóvedas en los siglos XVIII y XIX (Huerta 2004) y que se resumen en:

1. La fábrica no tiene resistencia a tracción.
2. Las tensiones son tan bajas que, a efectos prácticos, la fábrica tiene una ilimitada resistencia a compresión.
3. El fallo por deslizamiento es imposible.

La primera afirmación, aunque algo conservadora, es perfectamente aplicable ya que como material compuesto, si no está sometido a compresión previa que aumente el rozamiento, la adherencia en la interfase es nula. Esta afirmación se ha mantenido en numerosas normas y códigos a la hora de caracterizar las fábricas y se aplica habitualmente en la práctica estructural.

La segunda afirmación se verifica habitualmente ya que las tensiones a las que están sometidos los edificios históricos están uno o dos órdenes de magnitud por debajo de su resistencia (Huerta 2004).

La última se comprueba gracias a que las estructuras de fábrica están sometidas casi exclusivamente a sollicitaciones de compresión, lo que implica un rozamiento suficientemente elevado para evitar el deslizamiento, salvo en determinados puntos (como el arranque de los estribos) que necesitan una comprobación adicional, tal y como se ha mencionado anteriormente.

fig 6.25 Diagrama momento-axil de un material de resistencia limitada (a) y con resistencia a compresión infinita (b). Formación de rótulas por giro de las piezas (c) (Heyman 1982)

Superficie de cedencia

El fallo de un material que se asume como infinitamente resistente y que no puede deslizar, como es el caso de la fábrica en el análisis límite, se plantea a partir de la consideración de la superficie de cedencia con resistencia a compresión ilimitada y sin resistencia a tracción (fig 6.25a). La posición de la combinación de axil y momento flector se debe situar en el interior de los dos arcos de parábolas para que no se produzca la rotura del material.

Para valores bajos de axil, en relación a la resistencia, los esfuerzos se situarían cerca del origen, donde las ramas parabólicas se pueden sustituir por sus dos rectas tangentes, de manera que se puedan mantener los principios de resistencia a compresión ilimitada y resistencia a tracción nula (fig 6.25b).

Por otra parte, que la resultante se encuentre en un extremo de la estructura, indica que se ha producido una articulación (fig 6.26), dado que para mantener el equilibrio es necesario recurrir a las tracciones y el material al carecer de resistencia, debe rotar, respecto al punto de aplicación de la fuerza (fig 6.25c).

Las tensiones a compresión se pueden estimar, por un lado mediante la sección reducida con el ancho equivalente a la posición centrada (lo que se obtendría por tanto sería una distribución rectangular de tensión constante) (fig 6.27). Por otro lado, mediante la posición excéntrica de la resultante, que en relación al Núcleo Central de Inercia (o tercio central), diera lugar una distribución trapezoidal o triangular. Todas estas evaluaciones deben hacerse con la componente perpendicular a la junta, dado que considerando que el deslizamiento está impedido, las tensiones tangenciales pueden despreciarse (Huertas 2004).

De todo esto se deduce que para la aplicación del Análisis Limite los esfuerzos deben estar contenidos en el interior del material (Heyman 1996).

Principios del análisis límite: teoremas

La teoría incluye tres teoremas fundamentales que constituyen la base para el análisis estructural de fábricas, que se definen a continuación:

- **Teorema de la seguridad o del “límite inferior”:** Se ocupa de los estados de equilibrio de una estructura. Una estructura de fábrica es segura (en términos

fig 6.26 Formación de articulaciones reales de un arco (Ramos 2015)

fig 6.27 formación de rótulas en secciones con resistencia a compresión ilimitada (sup) y limitada (inf) (LimitState Ltd 2016)

de estabilidad) si es posible encontrar una situación de equilibrio compatible con las cargas que no viole la condición límite de la superficie de cedencia, esto es, las cargas se transmiten siempre dentro de la fábrica.

- **Teorema de la inseguridad o del “límite superior”:** Se ocupa de los valores de la carga que producen el colapso de la estructura. Una estructura fracasará si desarrolla un número suficiente de articulaciones como para convertirse en un mecanismo de colapso cinemáticamente admisible. Un arco de fábrica se hundirá si podemos dibujar una línea de empujes que, tocando alternativamente el trasdós y el intradós, produce un número de articulaciones que lo convierta en mecanismo, esto es cuatro o más.
- **Teorema de la unicidad:** Establece que la carga de colapso de una estructura es única. Expresado sencillamente: es imposible encontrar en una estructura simultáneamente situaciones de equilibrio y de colapso (una estructura se hunde o no se hunde; no puede sostenerse y hundirse simultáneamente)

La potencia del teorema de la seguridad radica en que esta solución no tiene que ser la “real”, basta con encontrar una solución para demostrar que la estructura es segura. Por tanto, un arco de fábrica será seguro si es posible dibujar una línea de empujes contenida en su interior.

Es por ello que una vez determinada dicha línea, el arco será seguro, según el primer teorema del análisis límite y por ello, para establecer el equilibrio es fundamental poder dibujar una curva acorde con las cargas exteriores.

Curvas límites: máximos y mínimos

En estas condiciones, cuando la línea de empujes es tangente al extremo de la fábrica, ya sea la curva del intradós o del extradós en arcos, se produce una articulación. Cuando en un arco se alcancen tres articulaciones una estructura isostática (fig 6.28) y cuatro un mecanismo de colapso.

En un arco escarzano simétrico (fig 6.29a), las articulaciones se producirán en la clave y en los apoyos, pero con esa condición se pueden determinar dos curvas. La primera se produce con la articulación en la clave en el extradós y la articulación

fig 6.28 Formación de las articulaciones que convierten al arco en una estructura isostática (a), (c) y (e) con sus correspondientes líneas de empujes (b), (d) y (f) (Heyman 1982)

fig 6.29 Líneas de empuje máximo y mínimo para distintos tipos de arcos (Mehrtens 1903)

en los apoyos en el intradós. En cambio en la segunda se produce al revés, la articulación de la clave en el intradós y en los apoyos en el extradós.

Obteniendo los valores de los esfuerzos, La primera posee el empuje horizontal mínimo mientras la segunda el máximo. Ambas curvas representan las curvas límites por lo que todas las curvas seguras se encuentran entre los límites de empujes de ambas curvas.

En arcos semicirculares (fig 6.29b) y apuntados fig 6.29c) los puntos de contacto difieren de los anteriores, en los riñones y los hombros, en lugar de en la clave y los apoyos. Cabe mencionar que los puntos situados en el eje de simetría de los arcos deben considerarse como puntos dobles, por lo que los arcos de medio punto y escarzanos (fig 6.28a y fig 6.28c) que poseen una articulación en la clave necesitan de otras dos más para convertirse en isostáticas mientras los arcos apuntados (fig 6.28e) requieren de cuatro rótulas, cuando las condiciones de cargas y geometría son simétricas.

Modificaciones de la geometría y agrietamientos

Las modificación de la geometría de los arcos o de las condiciones de carga son producidos por los efectos propios de la construcción (descimbrado, labra de las dovelas no completamente ajustada, retracción de los morteros, ...) o de las condiciones de contorno (asientos o cedimientos de la cimentación, cargas variables, cargas puntuales asimétricas, sismo, ...). Estas perturbaciones han sido estudiadas por Heyman (1996) retomando los estudios del s. XIX anteriores (Huerta 2004).

Los arcos para adaptarse a estos cambios, sólo poseen el recurso de agrietarse, modificando la geometría inicial de la estructura, especialmente cuando los cambios son importantes, aumentando los empujes horizontales. El estudio de los agrietamientos, que son visibles y evidentes en muchas estructuras, no suponen un motivo de preocupación en muchos casos, sino una metodología de trabajo para su análisis (Mas-Guindal 1996).

Las grietas y la geometría deformada de un edificio existente indican claramente cómo se encuentra trabajando y muestran de manera muy gráfica por dónde están atravesando los empujes. De hecho indican por dónde no están pasando, por lo que la introducción de las grietas en el modelo de análisis, reducen las posibles

fig 6.30 Líneas de empuje en arcos agrietados (Mas Guindal 1996)

líneas de empuje compatibles con la geometría limitando mucho más las posibilidades de equilibrio (fig 6.30).

Seguridad de arcos y estribos

Coefficiente de seguridad geométricos en arcos

Que la línea de empujes pueda encajar dentro de la forma del arco, significa que el arco posee un coeficiente geométrico de seguridad. Dicho coeficiente se puede definir como el cociente entre el espesor del arco y el espesor necesario para dibujar la línea de empujes.

Si el coeficiente para el dimensionado fuese 3, la línea de empujes debería poderse inscribir en el tercio central del arco, que se conoce como “regla del tercio central” en el que el proyectista se asegura que no van a existir tracciones como consecuencia de una distribución rectangular, trapezoidal o como máximo triangular, ocupando la totalidad del ancho del arco. En el caso de que el coeficiente geométrico de seguridad fuera 2, la línea de empujes podría incluirse en el interior de un arco de la mitad de espesor.

Según Heyman (1999), en la práctica los valores seguros para el coeficiente geométrico de seguridad en la construcción de arcos están alrededor de 2. Este coeficiente deberá cubrir las asimetrías originadas en la construcción o en las cargas durante la vida útil de la estructura, así como los asentos o movimientos de los apoyos. También debe asumir la presencia de cargas accidentales o aquellas no previstas inicialmente.

Coefficiente de seguridad geométrico en estribos

Dado que el proyecto y el análisis de estribos ha sido considerado históricamente un problema secundario frente al problema del empuje de arcos y bóvedas (Huerta 2004), la estimación de elemento rígido y monolítico hace de la verificación de la estabilidad un tema de sencilla resolución. Esta se verifica en el momento que la resultante pase por la base del mismo.

La consideración de que el deslizamiento está impedido en estribos, se encuentra francamente del lado de la inseguridad a efectos locales, por lo que en caso de cargas concentradas en la parte superior es necesario que en las primeras hiladas no se produzca el deslizamiento.

El coeficiente geométrico es análogo al considerado en arcos anteriormente descrito y consiste en el cociente entre el semiancho del estribo y la distancia entre la posición del empuje y el punto medio. Igualmente un coeficiente geométrico mínimo de 3 implica que el empuje pasa por el Núcleo Central de Inercia y no existen tracciones.

fig 6.31 Equilibrio de un estribo (a), coeficiente de seguridad respecto a la línea empujes (b) y situación límite de rotura de un estribo por deslizamiento parcial (Oschendorf et al 2004)

La fractura de estribos de fábrica ha sido estudiada asimismo por Oschendorf, Hernando y Huerta (2004) ya que una habitualmente, al tener una carga puntual importante en la parte superior, este no gira monolíticamente sino que una cuña se rompe definiendo una superficie de fractura (fig 6.31).

Partiendo de una distribución de tensiones lineales, como exponen Heyman (2001), se concluyen que para verificar la estabilidad de estribos se debe cumplir:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{W_0}{3(H' \frac{1}{6} d^2 \gamma)} \quad (6.55)$$

donde, α es el ángulo de la superficie de fractura respecto a la horizontal, W_0 y H , la componente vertical y horizontal del empuje en punto inicial de la fractura, d el ancho del estribo y γ el peso específico de la fábrica.

Estructuras espaciales

La literatura científica ha separado tradicionalmente cada elemento estructural y lo ha tratado de explicar de manera independiente. Constructivamente un arco y un estribo son muy diferentes, aunque en ambos casos pueda aplicarse de manera simplificada y especialmente a efectos globales de estabilidad, el análisis límite.

En cambio bóvedas y cúpulas, tradicionalmente se han simplificado, asimilándose a una sucesión de estructuras planas, mediante el método de los cortes, que ya se encontraba explicado en el s. XIX (Wittmann, 1879; Ungewitter 1890) (fig 6.32). El comportamiento de una superficie de doble curvatura no es analizado completamente por este tipo de técnicas, aunque sin embargo, permitían un análisis suficientemente seguro para determinar el equilibrio.

fig 6.32 Estudio del equilibrio de una bóveda cuartipartita mediante el método de los cortes (Wittmann 1879)

Encadenamiento de elementos estructurales

Dado que la estructuras de fábrica se han estudiado en función de los tipos descritos en el capítulo anterior (bóveda, arcos, arbotantes, estribos, ...), cada una de ellas posee su propia forma de trabajo, por lo que al intentar estudiar de forma global un edificio o construcción, surge la dificultad de qué planteamiento realizar que sea apto para todas las partes que las constituyen.

La forma de evaluar el equilibrio empleada para una bóveda resultaría difícil trasladarla a un estribo por lo que desde el s. XIX se han propuesto realizar el análisis mediante el encadenamiento elemento a elemento (Ungewitter 1890, Pieper 1983).

De esta manera el análisis se va realizando de un elemento sustentador al sustentado, sucesivamente, desde los puntos más altos hasta la cimentación. Por ello cada elemento por separado se analiza aplicando el teorema del límite superior del análisis límite, se acotan los valores máximo y mínimos de empujes y se trasladan a los elementos inferiores. Según Ramos (2015) “este cálculo aislado elemento a elemento y su posterior encadenamiento permite evaluar las reacciones y la estabilidad de cada uno de los elementos y por tanto del conjunto”.

Esta metodología permite el traslado de las acciones horizontales y evaluar si entre los límites superior e inferior fijados por el elemento anterior, se encuentra un empuje válido. Sin embargo debe tenerse en cuenta que, en este tipo de análisis parcial, cada elemento de forma independiente debe verificar el equilibrio y establecerse los límites de empujes, incluyendo la componente vertical que proviene de un nivel superior. En caso contrario puede estimarse que un elemento de for-

fig 6.33 Análisis de la sección transversal de la catedral de Santiago de Compostela, mediante el encadenamiento de la bóveda, el arbotante y el estribo (Ramos 2015)

ma independiente puede ser estable bajo un empuje ficticio, como es el caso del estribo (fig 6.33).

Corolario

Lo que Huerta denomina el enfoque del equilibrio de las estructuras de fábrica (Huerta 1999; 2001; 2005) como corolario del Teorema de la Seguridad, es la premisa básica de este trabajo, que se puede resumir en que “para demostrar que una estructura es segura basta con encontrar una distribución de esfuerzos internos que no viole la condición de cedencia o límite de material, en el caso de la fábrica que se encuentre en su interior.

Por ello, esta condición se puede aplicar para estructuras existentes y esta se verifica en el momento que sea posible el **dibujo de la curva de empujes en el interior de la estructura**. Este planteamiento retoma la idea expuesta de Gregory (1697) sobre la catenaria y el equilibrio de arcos,

6.3 PROPIEDADES ANALÍTICAS DE MODELOS GEOMÉTRICOS

(a)

(b)

(c)

fig 6.34 Curva explícita (a), paramétrica con puntos singulares (b) y paramétrica sin puntos dobles (c) (Dibujos del autor)

Introducción

Las propiedades geométricas asociadas a las curvas y superficies relacionadas con las ecuaciones algebraicas que las representan, se estudian mediante la Geometría Analítica, tal y como se ha comentado en el Capítulo 1.4. Aunque como se verá más adelante, para su determinación es necesario recurrir al Cálculo Diferencial e Integral, las ecuaciones geométricas parten del planteamiento analítico. En estos casos, la forma más sencilla es adoptar la expresión explícita por lo que función y ecuación de la curva, son conceptos análogos.

Como la expresión explícita puede considerarse como un caso particular de la ecuación paramétrica con parametrización $t = x$, la reparametrización puede realizarse para un intervalo continuo siempre y cuando no existan puntos singulares. Se consideran siempre que dichas curvas deben ser regulares de clase C^1 al menos. Cuando la tangente de la curva no es única en un punto (esto es, no es diferenciable en ese punto y por tanto, existe un cambio de tangente) para mantener lo afirmado anteriormente, es necesario que estén definidas como dos curvas independientes. Físicamente esta afirmación representa que las estructuras de fábrica no tienen “entrantes” y “salientes” ni puntos dobles (fig 6.34)¹.

Como se ha visto en el apartado 6.1, el cálculo de la curva de empujes de arcos planos, según ecuación (6.28) es función del peso propio de la estructura respecto a la variable longitud, esto es, respecto a la proyección horizontal de la estructura. El peso es una propiedad íntimamente ligada al área o al volumen (según el caso), es decir, es una propiedad geométrica y constructiva, que se determina a partir de la propia geometría del elemento estudiado y a partir de la caracterización constructiva que estima el peso específico.

Función área

Relación entre área y peso

La masa de una sección plana homogénea es un parámetro que depende exclusivamente de su área y su densidad. Lo mismo ocurre con una porción del espacio, delimitada por superficie o lo que es lo mismo, un sólido en términos de modelado, aunque quienes realmente lo determinan son las superficies exteriores, ya que la pertenencia de un punto o no a dicha región, no modifica el peso.

Esta relación es en la que se basa la presente tesis, ya que se puede afirmar que existe una relación biunívoca entre Área y Peso en $\mathbb{R}^2$ y Volumen y Peso en $\mathbb{R}^3$ y que aprovechando dicha relación se puede establecer el equilibrio de una estructura de fábrica a partir del análisis límite de líneas de empuje.

¹ La realidad construida indica que las superficies que definen los elementos estructurales, por muy complejos que sean estos, se pueden modelizar como continuos y para asegurarse de que esto es así como se realiza, por ejemplo, el refinamiento de mallas.

Función área de una curva explícita en cartesianas

Analíticamente el área de la sección, cuya función delimitadora es conocida y se encuentra limitada inferiormente por el eje x , se puede obtener de manera inmediata mediante la aplicación del teorema fundamental del cálculo, que expresa (Larsson 1999):

Si una función f es continua en el intervalo cerrando $[a,b]$ y F es una antiderivada de f en el intervalo $[a,b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (6.56)$$

En caso de áreas planas su estimación es igualmente inmediata con el cálculo del área de una región entre dos curvas. Para ello se debe asegurar que ambas funciones sean continuas en el intervalo $[a,b]$ y que la curva $f(x)$ se encuentre por encima de $g(x)$, eso es $g(x) \leq f(x)$, se determina que será:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \quad (6.57)$$

La función integral del área $A(x)$, de la región comprendida entre las curvas f y g , se expresa a partir de (6.56) aplicando el segundo teorema del cálculo, para el intervalo $[a,b]$

$$A(x) = \int_a^x [f(u) - g(u)] du \quad (6.58)$$

Función área de una curva explícita en cartesianas

Aplicando el mismo teorema que en el caso anterior, para poder obtener el área de una curva explícita en coordenadas polares, se parte de la curva expresada como:

$$r : \theta \in [\alpha, \beta] \rightarrow r(\theta) \in \mathbb{R} \quad (6.59)$$

el área bajo la misma será:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(\theta)^2 d\theta \quad (6.60)$$

De ello, se deduce que la función área comprendida entre dos curvas r y s , en coordenadas polares será, por tanto:

$$A(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\theta} (r(\varphi)^2 - s(\varphi)^2) d\varphi \quad (6.61)$$

Función área de una curva paramétrica

Una curva paramétrica Γ se encuentra definida como el conjunto de puntos en el plano que cumplen las condiciones de dos ecuaciones o funciones (aunque no necesariamente deben ser funciones) respecto a un parámetro t :

$$\Gamma : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b \quad (6.62)$$

La función área bajo la curva en el intervalo $[\alpha, \beta]$, se define como:

$$A = \int_a^b y \, dx = \int_{\varepsilon}^{\beta} g(t) f'(t) \, dt \quad (6.63)$$

Del mismo modo que en el caso anterior, para curvas explícitas, la función área de la región delimitada por dos curvas Γ_1 y Γ_2 , definidas como:

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases} \quad \Gamma_2 : \begin{cases} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b \quad (6.64)$$

será aplicando la expresión (6.56), con la advertencia que ambas curvas deben estar parametrizadas respecto al mismo parámetro en el mismo intervalo de manera que se cumpla que $x_1(a) = x_2(a)$ e $y_1(b) = y_2(b)$.

En curvas paramétricas empleadas en CAD, en muchas ocasiones cada curva posee un intervalo diferente y no se cumple esta condición, por lo que no podría aplicar la expresión (6.56), sin antes modificar la parametrización. Para ello, se puede realizar la normalización de las curvas de manera que el intervalo de t con un intervalo de $0 \leq t \leq 1$ con el siguiente cambio de parámetro:

$$\begin{aligned} t \in [t_0, t_1] &\Rightarrow t = (1-u)t_0 + ut_1 = t_0 + u(t_1 - t_0) \\ \Rightarrow \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} &\in [0, 1] \Rightarrow 1 - u = \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0} \end{aligned} \quad (6.65)$$

por lo que la función área será:

$$A(t) = \int_{t_0}^t [y_1(s) - y_2(s)] x_1'(s) \, ds \quad (6.66)$$

Cabe destacar en este punto, que como se ha mencionado en el Capítulo 5.2, las curvas de Bezier, las B-spline, así como las curvas NURBS son curvas paramétricas en t , en un intervalo cerrado $[a, b]$ de clase al menos C^2 , por lo que el procedimiento para obtener las funciones área es el anteriormente descrito.

Función peso

Función peso a partir de una curva explícita

La función peso de una sección plana de espesor constante y homogénea, se conforma a partir de la función área (6.46):

$$w(x) = \beta\gamma \int_a^x [f(u) - g(u)] du \quad w: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (6.67)$$

Si el espesor se puede expresar como una función de x (ver Capítulo 7.2), así como constructivamente el peso específico del material se puede formular como función de x conocida, la formulación general para la función peso será:

$$w(x) = \beta(x)\gamma(x) \int_a^x [f(u) - g(u)] du \quad I = [a, b] \subseteq \mathbb{R} \quad (6.68)$$

Función peso a partir de una curva paramétrica

Del mismo modo se pueden extrapolar la expresión (6.49) obteniéndose la siguiente función:

$$w(t) = \beta(t)\gamma(t) \int_{t_0}^t [f(s) - g(s)] f(s) ds \quad I = [a, b] = [0, 1] \quad (6.69)$$

Partición del intervalo

La partición del intervalo de cualquiera de las funciones anteriores supone la discretización de las cargas, esto es transformar las cargas continuas en cargas puntuales. Se trata del mismo procedimiento que en el cálculo de funiculares mediante geometría gráfica se realiza al asignar vectores a las cargas de las dovelas.

Función volumen

Del mismo modo que en curvas planas el área se obtiene por cálculo integral de la curva, la función volumen se obtiene por integración de las superficies.

Función volumen de una superficie explícita

Dadas dos superficies $\Sigma_1(x, y)$ y $\Sigma_2(x, y)$ en su representación explícita en el mismo intervalo como:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f_1(x, y) \end{cases} \quad \Sigma_2 : \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f_2(x, y) \end{cases} \quad D \subset \mathbb{R}^2 \quad (6.70)$$

La función volumen en x e y , para un intervalo $[a, x]$ x $[b, y]$ se obtiene por extrapolación de la ecuación (6.58):

$$V(x, y) = \int_a^x \int_b^y [f(x, y) - g(x, y)] dy dx \quad (6.71)$$

Función volumen de una superficie paramétrica

Dadas dos superficies Σ_1 y Σ_2 con representación paramétrica regular definidas mediante funciones continuas como:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} x = x_1(u, v) \\ y = y_1(u, v) \\ z = z_1(u, v) \end{cases} \quad \Sigma_2 : \begin{cases} x = x_2(u, v) \\ y = y_2(u, v) \\ z = z_2(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2 \quad (6.72)$$

La función volumen será la siguiente expresión:

$$V(u, v) = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial(y_2, z_2)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z_2, x_2)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x_2, y_2)}{\partial(u, v)}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{\partial(y_1, z_1)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z_1, x_1)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x_1, y_1)}{\partial(u, v)}\right)^2} du dv$$

$$D = \{(u, v) : u_0 \dots u, v_0 \dots v\} \quad (6.73)$$

De las anteriores expresiones de superficie, hay que destacar la posibilidad de establecer coordenadas paramétricas u, v de manera que sea muy sencillo establecer la relación entre coordenadas cartesianas y paramétricas.

Consecuencias geométricas

Geoméricamente se pueden establecer algunas consecuencias de la función peso, que coinciden en algunos casos con las extraídas para la línea de empujes:

La función peso es direccionable, ya que parte de un valor a , que define el valor inicial del intervalo y se establece un sentido de aumento. Por tanto el intervalo se puede definir como función vectorial en $\mathbb{R}$.

La segunda consecuencia de que la función peso tenga un punto inicial, es que puede o no coincidir con el punto inicial del elemento estudiado. Esto significa que la función peso puede iniciarse en el intervalo de la estructura o no.

El caso más evidente de esta circunstancia es el de los arcos simétricos, donde el inicio del intervalo a , se sitúa en el eje de simetría, dando lugar a dos curvas simétricas de intervalo con incrementos positivos y negativos:

$$\begin{aligned} w_1(x) & \quad [a,b] \quad a > b \\ w_2(x) & \quad [a',b'] \quad a' < b' \end{aligned} \quad (6.74)$$

Como la función peso representa una magnitud vectorial con la dirección fija vertical y sentido descendente, es adecuado establecer el inicio del intervalo en el punto más alto y el final más bajo. Este lo asume Heyman (1999) implícitamente a la hora de evaluar la línea de empujes en bóvedas (ver capítulo anterior).

Por otro lado, las curvas que definen la región deben ser continuas en el intervalo lo que implica que las curvas delimitadoras sean al menos de clase C^1 .

CAPÍTULO 7. DISEÑO DE LA SOLUCIÓN

7.1 Planteamiento general

7.2 Datos geométricos y constructivos

7.3 Resolución de las ecuaciones de equilibrio

7.4 Representación y validación

7.5 Extensión del método

7.1 PLANTEAMIENTO GENERAL

Introducción

El planteamiento tradicional de las líneas de empuje ha partido de transformar la realidad en modelos planos fácilmente resolubles, ya sea porque se ha simplificado bien la geometría bien la construcción o bien ambos aspectos. Algunas de las herramientas que plantean modelos tridimensionales, tal y como se ha comentado en el Capítulo 3.3, se simplifican asimismo mediante la discretización de la información geométrica y de las cargas.

A partir de la revisión de la literatura científica, se han identificado tres claros entornos, que corresponden con tres modelos geométricos (fig 7.1):

- 2D: Modelos planos en entornos CAD tridimensionales, con espesores constantes y conocidos
- 2 1/2 D: Modelos volumétricos asimilables a planos con espesores variables conocidos
- 3D: Modelos espaciales de estructuras tridimensionales, de dimensiones y espesores conocidos

En una primera fase se plantea la resolución del segundo de los modelos mencionados en $\mathbb{R}^2$, que incluyen los primeros, mediante funciones que determinan el espesor variable en relación a la dimensión horizontal. Posteriormente se plantea cómo extender esta metodología a modelos tridimensionales definidos por superficies paramétricas.

Por otra parte, el equilibrio de una estructura de fábrica aplicando el análisis límite se puede verificar con el dibujo de una única línea de empujes en su interior, pero como se ha expuesto en el Capítulo anterior, la ecuación de dicha línea es una curva paramétrica de la que se obtiene varias familias de curvas que con representar una sola de ellas, se cumpla la condición límite del material.

El procedimiento que se describe a continuación tiene por objeto dibujar una curva compatible con las condiciones establecidas, que sea dinámicamente modificable a partir de los parámetros establecidos.

fig 7.1 Ejemplo de estructura en modelo 2D, sección Catedral Beauvais (a), 2 1/2 D, Puente del Arroyo Meaques Madrid (b) y 3D, Monasterio de Santa María del Paular (c) (Dibujos a y b, del autor, dibujo c, Fernández 2013)

Se trata por tanto de trasladar el método geométrico gráfico de las líneas de empuje realizado con vectores (Heyman 1999, Huerta 2004, Mas-Guindal 2011) a un método geométrico analítico que pueda ser computerizable, aprovechando la información contenida en los modelos geométricos. La elección de este método se debe a la simplicidad, inmediatez y claridad a la hora de presentar los resultados que posee, ya que recupera mediante cálculo automático analítico el procedimiento por el cual se ha dimensionado implícita o explícitamente muchos de los edificios históricos a los cuales va dirigido el presente procedimiento.

Ámbito de aplicación

La metodología propuesta está dirigida a edificios, construcciones y obras realizadas con sistemas constructivos de fábrica, en los términos descritos en el Capítulo 2.2.

Como se comentará en el apartado 7.5, la descripción metodológica implementada parte de estructuras en modelos 2D y 2 1/2D, para luego presentar cómo extender el procedimiento a estructuras tridimensionales. Asimismo es de aplicación a algunas estructuras que se pueden asimilar a estructuras planas como se ha comentado en el capítulo anterior, como es el caso de cúpulas de revolución agrietadas, bóvedas de cañón o de nervios.

Hipótesis de partida y supuestos

Material

El método expuesto, al ser aplicable a estructuras históricas, está enfocada para fábrica no reforzadas que estén compuestas exclusivamente bien por piezas y mortero o bien por piezas a hueso.

La fábrica, independientemente de su morfología y composición, se caracteriza bajo los principios del análisis límite, esto es, que la resistencia a compresión es infinita y la resistencia a tracción nula, cumpliendo por tanto, los supuestos para la aplicación de dicho análisis.

La información constructiva que debe ser conocida para poner en marcha el análisis debe ser al menos la siguiente (fig 7.2):

- Estratos tipológicos del mismo tipo de fábrica, con su envolvente geométrica
- Peso específico de dichos estratos

El planteamiento del método se ha establecido de tal manera que se puedan implementar la suma vertical de los pesos de los distintos estratos. Este punto se comentará más detenidamente en el apartado siguiente.

fig 7.2 Identificación constructiva de la estructura: materiales y estratos (Dibujo del autor)

fig 7.3 Influencia del empuje de los rellenos en línea de empujes en puentes de fábrica (Harvey 1987) redibujado por Huertas (2004)

Rellenos

Se han considerado la posibilidad de incluir la contribución de los rellenos a la estabilidad global, tal y como es necesario emplear para asegurar el equilibrio para ciertos tipos de estructuras. Sin embargo, de la clasificación morfológica de los mismos (Ramos 2015) se han considerado que todos ellos sean de tipo rígido, de manera que la modificación de la posición de los empujes no varían la geometría de la estructura.

Por otra parte, los rellenos considerados se han estimado para que dichos rellenos transmitan exclusivamente cargas verticales, por lo que la carga en el trasdós que producen no tengan componente vertical. Esta consideración quedaría del lado de la seguridad, a partir de lo estudiado por Harvey (1987) sobre influencia de la acción de los rellenos sobre la forma de las líneas de empujes (fig 7.3).

Geometría

La geometría que define la estructura, para la implementación de la metodología, debe ser continua y no existir huecos ni vacíos en ella, de manera que sea posible un dominio continuo de la geometría, sea esta explícita o paramétrica (ver Capítulo 6.3).

En caso de existir esta circunstancia en los modelos geométricos importados de forma automática, es fácilmente corregible empleando técnicas de refinado de mallas o bien modificando los puntos de interpolación (Cordero y Cortés 2002). Si, por el contrario, la modelización se ha realizado de manera manual, la adaptación a esta condición es inmediata,

Esta circunstancia implica que las ecuaciones que definen la envolvente son continuas en todo su dominio y al menos de clase C^2 .

Aspectos constructivos de la modelización

A la hora de arrancar el método analítico propuesto, se ha de partir de la modelización geométrica de la edificación estudiada, incorporando los aspectos constructivos relacionados con la geometría, esto es, definiendo la envolvente a partir de la sección constructiva. Esta debe ser definida a partir de la información incorporada al modelo y que pueda servir para la discriminación de la envolvente (ver Capítulo 7.2).

Es necesario, por tanto, para la aplicación del método propuesto, haber establecido previamente la sección constructiva, con objeto de definir tanto la estructura de fábrica a analizar como la relación con el resto de elementos constructivos, como puede ser el apoyo de otros elementos estructurales, definición de la cimentación, revestimientos, Esta fase, puede ser realizarse de manera inmediata en algunos tipos de edificios (especialmente los carentes de revestimientos), pero

fig 7.4 Determinación de la sección constructiva en el modelo geométrico de un muro de fábrica que soporta una cubierta de madera laminada (Dibujo del autor)

puede ser fracamente dificultosa en otros. Las simplificaciones que se realicen de la sección constructiva deberán tenerse en cuenta a la hora de realizar el análisis estructural.

Acciones

La metodología se diseña para estructuras cargadas verticalmente, ya sea mediante peso propio de la estructura, carga de otros elementos constructivos (cubiertas, cerchas o rellenos) y sobrecargas de uso o nieve (fig 7.5).

Esta hipótesis se fundamenta en que las estructuras históricas han sido diseñada implícita o explícitamente para soportar cargas verticales (Huerta 2004), siendo las cargas horizontales en muchos casos, como el viento, despreciables frente a la magnitud de las verticales.

Las cargas horizontales dinámicas merecen un estudio aparte que se sale del ámbito de este procedimiento. Hasta el momento no existen casos de aplicación de análisis límite mediante líneas de empujes y siendo éste un tema complejo, debería estudiarse con profundidad en otra investigación.

No se han tenido en cuenta acciones de tipo térmico, ya que dichas cargas, habitualmente no son significativas en estructuras de fábrica. Tampoco se han implementado cargas accidentales, que debido al muy diverso origen de estas, la generalización bajo un único tipo, sería una simplificación excesiva.

Encadenamiento

Para el establecimiento global de la curva de empujes se ha empleado la técnica del encadenamiento tal y como se describe en el apartado 6.1. Para ello se han identificado previamente los elementos constitutivos de la estructura entre dos grupos fundamentales: arcos, arbotantes, pilares, pilastras y estribos por un lado y bóvedas y cúpulas por otro. De esta manera se pueden separar fácilmente los elementos que trabajan como planos de los espaciales (fig 7.6).

Cabe destacar que para resolver el equilibrio global y determinar las curvas límite de empujes máximos y mínimos, compatibles con la geometría, ésta se realiza con la totalidad de las cargas que descenden de elementos espacialmente superiores. Esta consideración es especialmente relevante en estribos y arbotantes, que en caso contrario pueden producirse situaciones, como por ejemplo que un arbotante soporte una acción horizontal infinita, como el ejemplo mostrado en la figura 6.28 del Capítulo anterior.

Equilibrio global y equilibrio parcial

El método propuesto puede ser aplicable tanto a nivel global de una construcción completa como a una parte de la estructura. Los modelos geométricos de partida pueden ser tanto de una edificación completa, como de una serie de partes

fig 7.5 Tipos de acciones estimadas en el análisis (Dibujo del autor)

fig 7.6 Esquema de encadenamiento de la sección transversal de una estructura de fábrica (Dibujo del autor)

fig 7.7 Familia de planos prevista en el análisis con sistema de coordenadas cartesianas (sup) y con sistema de coordenadas polares (inf) (Dibujos del autor)

conectadas entre sí (mediante el encadenamiento anteriormente expuesto) o un elemento autónomo e independiente.

En determinados momentos, el estudio global de una estructura completa, puede no ser necesario y requerir estudios de elementos concretos de manera independiente. Este es el caso, por ejemplo, de una bóveda concreta o de las escaleras dentro del edificio, como la estudiadas por Benítez y Valiente (2015) de la estabilidad estructural de las escaleras de caracol. Por ello, este procedimiento se ha previsto que sea igualmente aplicable, tanto a estructuras completas como a parciales.

Familia de planos y esterotomía: consideraciones y simplificaciones

Dado que la elección de planos verticales o radiales en arcos y bóvedas (esto es un sistema de coordenadas cartesiano o polar) no modifica substancialmente los valores de la resultantes como se ha explicado en el apartado anterior, parece sensato elegir los más fáciles de implementar, esto es, los primeros, dado que los sistemas CAD trabajan fundamentalmente con coordenadas cartesianas.

Sin embargo, el empleo de coordenadas polares se asemeja más a las esterotomía constructiva, dado que en muchas ocasiones, los lechos de las dovelas en arcos y bóvedas suelen seguir una disposición radial (Palacios 2009).

En ocasiones que se requiera mayor precisión, el sistema de coordenadas, y por tanto de familia de planos) deberá ser la que se asemeje más a la disposición de los lechos, ya que pueden producir variaciones de uno u otro, como en el caso de determinar el espesor mínimo que garantice la estabilidad (Makris y Alexakis 2013).

Por el contrario, a la hora de analizar estribos puede surgir la duda, ya que como se ha comentado, el trazado es sensiblemente diferente entre una familia de planos y otra. Sin embargo, dado que una de las intenciones del método diseñado es que sea aplicable de forma global a todos los elementos de la estructura, se ha optado en este caso por continuar con la familia de planos verticales manteniendo $\alpha = 0$, lo que permite aplicar la ecuación (6.28) a toda la estructura (fig 7.7a).

Esta circunstancia implica que es necesario la comprobación local del deslizamiento entre las piezas de los estribos, lo cual deberá realizarse en el punto más desfavorable. La identificación de dicho punto es posible mediante la localización del punto con menor relación entre componente vertical y horizontal como se desarrollará más adelante (Capítulo 7.5).

Por otra parte, la elección del mismo conjunto de planos en toda la estructura permite la “visualización” continua del trazado de los empujes, lo que incrementa la facilidad de uso y la operabilidad del presente método.

Sin embargo, en el caso de análisis local de elementos cuya geometría se traza mediante arcos de circunferencia (como el caso de arcos y bóvedas de esterotomía radial y espesor constante) y que pueda ser analizada de manera independiente, la disposición de planos más adecuada es la radial, por lo que será necesario el empleo de arcos radiales, trazados desde el centro de los arcos (fig 7.7b). En este caso será aplicable la ecuación (6.39) en lugar de las (6.28). Para ello, debe ser posible establecer un centro, siendo esta circunstancia un ejercicio teórico en estructuras reales que se encuentran deformadas, frente a las idealizadas cuya localización es inmediata.

Verificación estructural

De las tres condiciones que debe reunir una estructura de cualquier naturaleza para ser apta, en relación a las estructuras de fábrica de edificios históricos el enfoque del equilibrio ha demostrado ser el más adecuado (Huerta 2004). Cabe mencionar en este punto lo expresado por Huerta (2005):

El hecho de considerar sólo soluciones de equilibrio que respeten la característica esencial del material, que sólo resiste compresiones, lleva a plantearse sólo las cuestiones realmente relevantes. [...] La tarea no es sencilla y ningún programa informático nos dará una solución única que se pueda considerar como real [...]

fig 7.8 Esquema de los pasos principales del procedimiento (Figura del autor)

Por tanto, en aplicación del Teorema de la Seguridad del Análisis Límite, se puede analizar estructuralmente y verificar el equilibrio y por ello, la seguridad estructural encontrando una solución a la ecuación general de empujes, cuya imagen en todo el dominio, esté contenida entre las envolvente superior e inferior de la estructura, es decir, que su dominio esté acotado entre dos valores previamente conocidos y obtenidos del modelo geométrico.

Nomenclatura y terminología

La nomenclatura para la definición geométrica sigue la establecida en la descripción analítica de curvas y superficies por Burgos y García-Maroto (2008) mientras en la modelización geométrica la empleada por Cordero y Cortés (2002) a partir de los textos de Piegel (1997) en lo que se considera uno de los libros fundamentales de NURBS. En aspectos relacionados al Análisis Límite de estructuras de fábrica ha sido empleada la establecida por Heyman (1996).

En el Anejo 1 se presenta una detallada de la nomenclatura empleada en la exposición del presente trabajo.

Pasos principales

Dado que el presente trabajo tiene como objetivo presentar un método computerizable para verificar el equilibrio a partir de los modelos geométricos y de la información constructiva obtenida, mediante técnicas computerizables, a continuación se pasa a describir los pasos que han sido identificados para transformar información geométrica y constructiva en el dibujo del equilibrio, en la que se fundamente la aportación de la presente tesis (fig 7.8):

- Obtención de la información geométrica
- Obtención de la información constructiva
- Definición de cargas externas
- Establecimiento de la ecuación de equilibrio
- Parametrización de la curva de empujes
- Representación gráfica de la curva de empujes
- Verificación de la estabilidad

A continuación se exponen cada uno de estos pasos agrupados en las tres etapas fundamentales en las que se compone este procedimiento:

- Datos geométricos y constructivos
- Ecuaciones de equilibrio
- Ecuación de la curva de empujes

7.2 DATOS GEOMÉTRICOS Y CONSTRUCTIVOS

fig 7.8 Tipos de modelización de partida: modelo de puntos, modelo alámbrico y modelo de curvas (Dibujo del autor)

La primera etapa en el procedimiento planteado pasa por obtener la información geométrica, que como se ha comentado anteriormente ha debido de ser adquirida y modelizada previamente. Por otra parte debe ser relacionada con la información constructiva, expresada fundamentalmente por el peso específico aparente de las fábricas, de manera que coincidan las envolventes. Por último es necesario definir las acciones exteriores, transformarlas en cargas y establecer sus funciones.

Obtención de la información geométrica

Como se ha mostrado en el Capítulo 2.1, todas las técnicas empleadas para realizar el levantamiento arquitectónico pasan por determinar un número finito de puntos obtenidos. En función del tipo de modelización geométrica que se haya realizado, esos puntos se habrán convertido en una representación u otra. Estas pueden ser (fig 7.8):

- Modelo de puntos
- Modelo alámbrico
- Modelos de curvas, que se puede dividir en:
 - Curvas idealizadas
 - Curvas interpoladas
 - Curvas aproximadas

Puntos de partida

Los puntos de partida se pueden expresar como un conjunto de puntos P . Dado que el modelo geométrico es tridimensional aunque se simplifique para estructuras planas el conjunto de n puntos, tomando del plano de trabajo el plano OXZ .

$$P = \{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\} = \{(x_0, 0, z_0), (x_1, 0, z_1), (x_2, 0, z_2), \dots, (x_n, 0, z_n)\}$$

Este conjunto vectorial estará formado por un vector de puntos, que se puede dividir en función de sus coordenadas en los subconjuntos en:

$$P_x = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$P_z = \{z_0, z_1, z_2, \dots, z_n\}$$

Si ese conjunto representa los puntos de paso de una función interpoladora, se pueden denominar nodos de interpolación y soportes de interpolación, respectivamente, por lo que se justifica la denominación y de las coordenadas respecto al eje z .

En los modelos de puntos y alámbricos, la obtención de los conjuntos P_x y P_z , es inmediata. En el primer caso, exista o no información del color se obtiene partiendo de la lectura de los formatos de la primera y tercera columnas de los puntos.

En el caso del modelo alámbrico, el conjunto P se obtiene directamente de los vértices del modelo de modo que $V = P$.

En el caso que las curvas representadas estén interpoladas, la obtención es inmediata, ya que el propio conjunto de puntos de interpolación pasa a ser los puntos de soporte y la imagen de los mismos.

Si la geometría se encuentra modelada con curvas por aproximación, la información almacenada es la lista P^* del polígono de control, la lista de pesos W de los nodos (en caso de NURBS o una lista de n valores unitarios para curvas de Bézier), el grado k de la curva y el vector K de nudos X . Como se puede comprobar, la información a tratar aumenta de manera importante al trabajar con NURBS.

En curvas idealizadas o en programas de CAD, donde no sea posible acceder a la información analítica del modelo¹, se deben obtener una serie de puntos representativos para que puedan realizarse una posterior interpolación numérica. Para determinar qué puntos deben tomarse para realizar la interpolación más eficientes, entendida esta como la que consigue una precisión mayor con menor cantidad de datos, se ha comparado el valor del área bajo una curva obtenida por la integración de la función interpolada (según el procedimiento descrito en el Capítulo 7.3) de los siguientes procedimientos de interpolación con el área obtenida de forma analítica con una precisión de 8 bits²:

- Interpolación de Lagrange
- Interpolación mediante splines lineales
- Interpolación mediante splines cúbicos

La elección de las interpolaciones anteriormente mencionadas se debe a que a partir de ella se obtiene un polinomio interpolador de grado $n-1$. Este hecho facilita enormemente el objetivo final que es la obtención de la función peso, dado que la integración de polinomios es inmediata.

Dichos métodos de interpolación se combinan con los siguientes tipos de soportes:

- Soportes de Chebyshev de 16 bits
- Soportes de Chebyshev redondeados a 2 decimales
- Soportes equidistantes de 16 bits

con lo que se obtiene 9 combinaciones. Para todas ellas se ha comparado un arco realizado mediante una semicircunferencia con una luz que varía entre 1 y 8 m,

1 Ciertos programas CAD no permiten acceder a la información analítica del modelado que se realiza, ya sea por celo corporativo o por tratarse de software de código cerrado sin acceso por parte del usuario. En estos casos se pueden tratar todas las situaciones igualmente como curvas idealizadas.

2 El número de bits indica el número máximo de cifras significativas para cada números almacenado como coma flotante. Una precisión de 16 bits indica 2^9 cifras significativas mientras una de 8 bits 2^4

fig 7.9 Comparación de la eficiencia en la interpolación de arcos de medio punto de 4.0 m de luz (izq) y 6.0 m de luz (dch) (Gráfico del autor)

con incrementos de 0.5 m, dado que el fenómeno de Runge es más acusado en interpolaciones con imágenes muy próximas, lo que ocurre en arcos de medio punto y no en arcos escarzanos, por ejemplo.

Los datos de los resultados para los distintos tipos de interpolación, cuyos valores para diferentes número de nodos y diámetros se puede consultar en el Anejo V, pretende orientar cuál sería la toma de datos más adecuada para este tipo de curvas. La eficiencia μ se ha medido por medio del ratio entre la resolución en términos computacionales (número de polinomios de la interpolación por el grado del polinomio interpolados entre el número de bits empleados) y la precisión (error relativo entre el área analítica y la interpolada):

$$\mu = \frac{N^{\circ} \text{ polinomios} \cdot \text{grado}}{\text{error} \cdot n^{\circ} \text{ bits}} * 100 \tag{7.1}$$

Como se muestra en las figuras 7.9a y 7.9b, para arcos de 4 y 6 m, respectivamente la interpolación que proporciona una relación computacionalmente más eficiente es la obtenida mediante polinomio de Lagrange con 4 soportes de Chebyshev, con lo que se obtienen polinomios de 4º grado, que son relativamente fáciles de manejar, a nivel computacional, y de integrar.

A modo de resumen de lo anteriormente descrito, la Tabla 7.1 muestra la información geométrica obtenida según cómo se encuentre modelada:

	Tipo de Modelo	Información	Descripción
	Modelado de Puntos		
tabla 7.1 Resumen de información la geométrica obtenida del modelo	Nube de puntos	<i>P</i>	Puntos de la nube
	Mapa de profundidad	<i>P</i>	Puntos de la nube
	Modelo alámbrico	<i>P</i>	Vértices

Modelo de curvas

Curvas interpoladas	P	Puntos de interpolación
Curvas aproximadas	P^*, k, K, W	Polígono de control, grado, vector nodos y pesos
Curvas primitivas	P	Puntos para interpolar

Diferenciación de la envolvente

La exportación de la información modelada no tiene ninguna aplicación en cuanto no esté asociada a las curvas que forman la envolvente de la estructura a estudiar. Por ello, es necesario definir qué puntos o curvas forman parte de ella. Al menos será necesario establecer un conjunto que forme la envolvente superior, denominándolo G_{sup} y otro conjunto que forme la cara inferior, G_{inf} , que coincidan en la coordenada x inicial y final, ya que, como es lógico, un elemento estructural tiene que estar definido por un contorno cerrado ya sea este cóncavo o convexo (fig 7.10).

Si la información modelada tiene su fundamentación en un conjunto de puntos, será necesario discriminar previamente qué conjunto de puntos pertenece a qué envolvente. Asimismo si esta se realiza con curvas, cada conjunto de curvas se asociará al conjunto correspondiente, de manera que se produzca la siguiente relación:

$$\left. \begin{array}{l} P_{inf} \subset P \\ P_{sup} \subset P \end{array} \right\} \Rightarrow P = \left\{ \{P_{inf}\} \{P_{sup}\} \right\} \quad (7.2)$$

Por otra parte, se debe establecer una relación previa al análisis entre los subconjuntos de puntos y el elemento geométrico al que pertenece, de manera que se pueda establecer fácilmente una correlación entre elementos geométricos y propiedades físicas. Esta relación se define como:

$$G = \{G_0, G_1, \dots, G_n\} \Leftrightarrow P = \left\{ \{P_0, \dots, P_i\} \{P_{i+1}, \dots, P_j\} \dots \{P_{j+1}, \dots, P_k\} \right\} \quad (7.3)$$

El modelo geométrico puede contener mucha más información que no es requerida para el análisis, tales como la inclusión de mobiliario, decoración, detalles, hueco, ... Si esta no se asocia a ningún elemento de la envolvente, pasará desapercibida a efectos del presente método y no requerirá su eliminación para el desarrollo posterior.

En la Tabla 7.2 se resumen la información geométrica obtenida según cómo se encuentre modelada:

fig 7.10 Curvas que definen la envolvente de una estructura, diferenciándose entre la inferior y la superior (Dibujo del autor)

tabla 7.2 Resumen de información sobre la envolvente asociada a los conjuntos de puntos o curvas

Tipo de Modelo	Envolvente	Descripción
Modelado de Puntos		
Nube de puntos	$P_{inf} P_{sup}$	Puntos de la nube
Mapa de profundidad	$P_{inf} P_{sup}$	Puntos de la nube
Modelo alámbrico	$P_{inf} P_{sup}$	Vértices
Modelo de curvas		
Curvas interpoladas	$P_{inf} P_{sup}$	Puntos de interpolación
Curvas aproximadas	$G_{inf} G_{sup}$	Curvas NURBS
Curvas primitivas	$G_{inf} G_{sup}$	Curvas primitivas

Dominio de funciones y parámetros

Para poder asegurar la continuidad de la función peso debe cumplirse que la proyección horizontal de la envolvente superior e inferior coincide, de manera que no se defina erróneamente un elemento estructural con un contorno no cerrado. Para garantizar el cumplimiento de esta condición el método a emplear difiere en el caso de puntos respecto a curvas.

En el primero de ellos, para garantizar que el dominio de la función peso que se establecerá es único, se debe dar la condición que los valores máximos de los subconjuntos coinciden:

$$\begin{aligned}\min(P_{x,sup}) &= \min(P_{x,inf}) \\ \max(P_{x,sup}) &= \max(P_{x,inf})\end{aligned}\tag{7.4}$$

En el caso de curvas es necesario distinguir el tipo de representación. Si son curvas explícitas, la condición que se comprueba será la (7.3) con los puntos iniciales y finales. Este caso incluye todo tipo de curvas primitivas. Si la curva es paramétrica (Bézier, B-Spline o NURBS), será necesario normalizar previamente el dominio de la curva, mediante el cambio de parámetro a $t = \{1..0\}$. A partir de ese momento, la comprobación se simplifica a que coincidan las funciones en x de las curvas iniciales y finales de ambos subconjuntos:

$$\begin{aligned}G_{0,sup}(x(t)) &= G_{0,inf}(x(0)) \quad t = 0 \\ G_{n,sup}(x(t)) &= G_{n,inf}(x(t)) \quad t = 1\end{aligned}\tag{7.5}$$

Ordenación de puntos y nodos

Como se ha mencionado en el capítulo anterior, la ecuación de la línea de empujes implica una direccionalidad, esto es, los puntos que están contenidos se encuentran ordenados en una dirección determinada. Esto implica que las curvas que van a definir esta deben estar orientadas según el mismo criterio. Para ve-

rificar esta circunstancia se debe cumplir que el vector de puntos se encuentre ordenado según valores crecientes de la ordenada:

$$P_x = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ donde } x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \quad (7.6)$$

En caso que esta condición no se cumpla, se debe reordenar el vector P, mediante un sencillo procedimiento en el que se comparan sucesivamente parejas de valores y se les asigna una posición en el interior del mismo. Diversas librerías informáticas incluyen este procedimiento, de manera que para la implementación se han recurrido a ellas.

Por ello también se necesario que tanto las curvas como los puntos estén ordenados con un determinado criterio, ya que la información asociada a ellas, debe seguir el mismo orden, con el fin de no producirse errores. Esta circunstancia es especialmente relevante cuando se complejiza la información incluida en el modelo, con la que se describe a continuación.

Obtención del espesor³

Como se ha mencionado, para el desarrollo de este procedimiento se ha tenido en cuenta tanto las situaciones de espesor constante como las que no. La primera de ellas, se limita a asociar a cada grupo de curvas un valor de espesor, de manera que se asocie la posición del vector de curvas con el conjunto de espesores. Es habitual la simplificación en un espesor constante toda la estructura analizada, pero dado, que el cálculo automático lo permite sin necesidad de recurrir a esta simplificación. La relación será la siguiente:

$$G = \{G_0, G_1, \dots, G_n\} \Leftrightarrow \beta = \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n\} \quad (7.7)$$

Del mismo modo que se obtiene la información en el plano OXZ, se realiza la obtención para el plano OXY en espesores variables, de manera que se crea otro conjunto de puntos proyectados sobre el plano horizontal (fig 7.11), que puede interpolarse o aproximarse para establecer las funciones espesor:

$$Q = \{Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_n\} = \{(x_0, y_0, 0), (x_1, y_1, 0), (x_2, y_2, 0), \dots, (x_n, y_n, 0)\} \quad (7.8)$$

fig 7.11 Modelización geométrica de un elemento de espesor variable (Dibujo del autor)

³ En esta investigación se considera espesor a la dimensión perpendicular al plano de estudio, frente al ancho de la estructura que es la distancia entre la envolvente superior e inferior en un punto. Esta terminología aparece intercambiada en algunos textos, por lo que se estima necesaria su aclaración.

Modelización de la información constructiva

La información constructiva necesaria para realizar el análisis que debe incorporarse al modelo pasa, en primer lugar, por distinguir geométricamente cada uno de los elementos que lo componen, separándolos tipológicamente.

Esta discriminación es necesariamente geométrica, por lo que el procedimiento a realizar es el mismo que el anterior. Cabe destacar que en el caso de estratos superpuestos, para mantener la premisa de no existir vacíos en la estructura, se debe dar la condición de que la envolvente superior de un estrato más bajo sea la envolvente inferior del estrato situado inmediatamente encima.

El parámetro necesario para verificar el equilibrio es el peso específico aparente de la fábrica analizada. Como este valor se asimila a una constante para cada tipo de fábrica, homogeneizándolo entre sus distintos componentes, es necesario establecer una relación entre el grupo de curvas que definen la envolvente y su peso específico:

$$G = \{G_0, G_1, G_2, \dots, G_n\} \Leftrightarrow \gamma = \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\} \quad (7.9)$$

Cabe indicar que la unidad de superficie a las que están referidas las magnitudes de los materiales debe coincidir con las unidades en las que se ha modelizado geométricamente.

No se descarta que en este procedimiento se puedan emplear valores no constantes de estas magnitudes, ya que la implementación es muy sencilla: asociar a un punto geométrico de la estructura un valor y determinar la función que los relaciona, ya sea por interpolación o por aproximación, del mismo modo que se determina la función geométrica. Sin embargo, como se ha comentado, en la práctica este valor se toma constante y no merece la pena profundizar en este aspecto.

Modelización de las acciones

Las acciones a las que va a verse sometida la estructura en su análisis se clasifican en dos tipos, que deben modelizarse de manera independiente:

- Peso propio de la estructura
- Acciones exteriores

Peso propio

La modelización del peso propio de la estructura es un parámetro fundamentalmente geométrico que se obtiene a partir del volumen del elemento, aplicando la ecuación (6.53) con la introducción de las funciones de peso propio. Este punto se desarrolla con más detenimiento en el apartado siguiente.

Acciones exteriores

La modelización de las acciones exteriores sobre la estructura se puede realizar del mismo modo que en el resto de tipos estructurales, distinguiendo entre cargas puntuales y continuas.

Las primeras se modelizan a partir de su posición en el eje x y su magnitud (dado que son tratados como vectores deslizantes), transformándola en una función discontinua, de manera que pueda añadirse fácilmente al resto de cargas:

$$N_i(x) = \begin{cases} 0 & x \neq x_0 \\ V & x = x_0 \end{cases} \quad (7.10)$$

Las cargas continuas de valor constante o variable cuyo origen es externo (sobrecargas de uso, sobrecargas de nieve,) se pueden expresar mediante una función del mismo modo que las cargas puntuales, esto es:

$$q_i(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \{x_0 \dots x_f\} \\ Q(x) & x \in \{x_0 \dots x_f\} \end{cases} \quad (7.11)$$

Las cargas cuyo origen están en la propia construcción (peso propio de elementos constructivos, rellenos, ...) pueden modelizarse como cargas exteriores empleando la función (7.11) cuando su aplicación no coincide con elementos estructurales o pueden ser asimilables a un incremento del peso propio de la estructura.

Este procedimiento, es el habitual en los cálculos gráficos (Mas-Guindal 2011), por lo que se opta por él. Para ello es necesario hacer una transformación del peso específico aparente de la fábrica que adicione esta carga. Se podría homogeneizar aumentando el ancho de la estructura para que fuera equivalente, pero como este procedimiento modificaría la comprobación de la estabilidad, queda descartado.

El peso específico equivalente se define cómo aquel que debería tener la fábrica para que a partir de la función área de la estructura, fuera equivalente de a la carga total. Si se trata de un elemento constructivo con área $A'(x)$ y peso específico γ' conocido, esta se puede expresar cómo:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \gamma \cdot A(x) + \gamma' \cdot A'(x) = \gamma^* \cdot A(x) \\ \gamma^* &= \frac{\gamma \cdot A(x) + \gamma' \cdot A'(x)}{A(x)} = \gamma + \frac{\gamma' \cdot A'(x)}{A(x)} \end{aligned} \quad (7.12)$$

mientras que si se trata de una carga distribuida uniformemente conocida:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \gamma \cdot A(x) + q(x) = \gamma^* \cdot A(x) \\ \gamma^* &= \frac{\gamma \cdot A(x) + q(x)}{A(x)} = \gamma + \frac{q(x)}{A(x)} \end{aligned} \tag{7.13}$$

7.3 RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO

La segunda etapa del procedimiento descrito pasa por transformar la información estrictamente geométrica en información estructural, por lo que es necesario establecer tanto las funciones peso como las cargas exteriores, para posteriormente introducirlas en la ecuación general de la línea de empujes

Funciones geométricas: ecuaciones implícitas y explícitas

La transformación de la información obtenida del modelo geométrico según se resume en la Tabla 7.1, debe separarse entre los siguientes métodos, que se emplean,:

- Interpolación lineal
- Interpolación polinomial
- Ecuación de curva aproximada

Se trata de establecer funciones geométricas con un parámetro común a toda la estructura, que se puede computar fácilmente para obtener las funciones peso. La función geométrica debe realizarse dos veces, una para cada grupo de la envolvente, esto es, el superior y el inferior.

Interpolación lineal

Se trata de la más sencilla, fácilmente manipulable e informáticamente más eficiente de las posibles interpolaciones. Tiene por el contrario la desventaja del alejamiento a la forma idealizada. Dado que la técnica de mallado a partir de nubes de puntos tridimensionales es la técnica más habitual empleada en modelización, el “mallado” en el plano sería la interpolación lineal de enormes cantidades de puntos.

Para aproximarse de manera más precisa al objeto es necesario una enorme cantidad de puntos. El manejo de esta gran cantidad de información por un lado posee la dificultad de su computación, pero por otro las funciones interpoladas son las más sencillas posibles. Por ello se puede afirmar que es el procedimiento más indicado para los modelos de puntos y alámbricos.

Cada tramo entre dos puntos consecutivos $P_0(x_0, y_0)$ y $P_1(x_1, y_1)$, se comprueba que la distancia de la proyección horizontal entre dichos puntos es la menor entre las del conjunto, en el sentido positivo del recorrido y tendrá la siguiente ecuación:

$$y = i(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(y_1 - y_0) + y_0 \quad (7.14)$$

La ecuación global de la curva Γ , en su forma explícita, será una función a trozos definida por cada uno de los segmentos de los que se componen, siendo el dominio de cada uno de ellos:

$$\Gamma(x) = \begin{cases} i_0(x) & \text{si } x_0 \leq x < x_1 \\ i_1(x) & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ \dots & \dots \\ i_{n-1}(x) & \text{si } x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \quad (7.15)$$

Interpolación polinomial

En el caso que el punto de partida sea un conjunto de puntos pequeños (en relación a la profusión de puntos obtenidos de una nube de puntos), realizar una interpolación lineal sería reducir mucho la precisión, por lo que lo más conveniente es una interpolación polinomial, dada la facilidad de computación que presenta.

Se han estudiado los tres tipos de interpolación que se mencionan en el apartado anterior, que son:

- Interpolación de Lagrange
- Interpolación mediante splines lineales
- Interpolación mediante splines cúbicos

Para cada uno de ellos existen implementados procedimientos en diversas librerías matemáticas o se puede implementar de manera sencilla, tanto de cálculo simbólico como de cálculo numérico, por lo que la computación no supone una distinción entre ellos.

Lo que si supone diferencia es la cantidad de información manejada en cada procedimiento. Sirva de ejemplo, la interpolación de los siguientes puntos, obtenidos como nodos de Chebyshev:

P_0	(0.00,0.00)
P_1	(0.93,1.82)
P_2	(5.25,2.25)
P_3	(3.57,1.82)
P_4	(4.50,0.00)

fig 7.12 Representación de la curva interpolada mediante el polinomio de Lagrange (a) splines lineales (b) y splines cúbicos (c) (Dibujos del autor)

que representa el semicírculo de radio 4.5 y centro en (0.00,2.25). La interpolación mediante el polinomio de Lagrange, splines lineales y esplines cúbicos respectivamente, para coeficientes redondeados a dos dígitos (fig 7.12):

$$P(x) = -0.06x^4 + 0.54x^3 - 1.951x^2 + 3.36x$$

$$s(x) = \begin{cases} 1.96x \\ 0.33x + 1.52 \\ -0.33x + 2.98 \\ -1.96x + 8.81 \end{cases}$$

$$S(x) = \begin{cases} -0.41x^3 + 2.31x \\ 1.25x + 0.34(x-0.93)^3 - 1.15(x-0.93)^2 + 0.66 \\ 0.34(x-2.25)^3 + 0.21(x-2.25)^2 + 2.25 \\ 1.25x + 0.41(x-3.57)^3 - 1.15(x-3.57)^2 + 6.27 \end{cases}$$

Por tanto, como se muestra en el Anejo II, el procedimiento que aporta mayor precisión en relación al tiempo de procesado y cantidad de información, es la primera.

Es por ello que los puntos que provengan de curvas primitivas o requieran reconstruir la forma se interpolarán siguiendo el procedimiento de Lagrange, cuya ecuación explícita de la interpolación de Lagrange será el polinomio desarrollado:

$$y = P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x) \quad (7.16)$$

La ecuación global será, al igual que en el caso anterior, una función a trozos, cuyos segmentos son cada una de los polinomios interpoladores:

$$\Gamma(x) = \begin{cases} P_0(x) & \text{si } x_0 \leq x < x_1 \\ P_1(x) & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ \dots & \dots \\ P_{n-1}(x) & \text{si } x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \quad (7.17)$$

Curvas aproximadas: NURBS

En el caso que la curva obtenida sea una NURBS, la recomposición para poder manipularla pasa por introducir los parámetros obtenidos (Tabal 7.1) en la ecuación NURBS (5.3) y recomponer los polinomios de Bernstein (5.4). La computación general puede dar lugar a expresiones ciertamente extensas, cuya determinación puede ser más compleja.

Al tratarse de una curva paramétrica, se duplica la información en las dos coordenadas. El encadenamiento de las diversas curvas que conforman cada envolvente se puede expresar, asimismo, como una función a trozos de curvas paramétricas.

$$\Gamma(t) = \begin{cases} C_0(t) & \text{si } t_0 \leq t < t_1 \\ C_1(t) & \text{si } t_1 \leq t < t_2 \\ \dots & \\ C_{n-1}(t) & \text{si } t_{n-1} \leq t \leq t_n \end{cases} \quad (7.18)$$

reparametrizando cada curva de manera que se cumpla:

$$\begin{aligned} C_0(t_0) &= P_{0x} \\ C_1(t_1) &= P_{1x} \\ &\dots \\ C_{n-1}(t_{n-1}) &= P_{n-1x} \\ C_n(t_n) &= P_{nx} \end{aligned} \quad (7.19)$$

Cabe mencionar que en todos los casos anteriores, para que el intervalo del dominio global de la función de la envolvente sea cerrado y continuo, el intervalo de cada trozo debe ser abierto, cerrado $[x_{i-p}, x_i]$ salvo el último que debe ser cerrado, cerrado $[x_{n-p}, x_n]$, ya que deben incluir tanto a P_0 como a P_n .

Dirección de las funciones

En este punto hay que realizar una aclaración respecto al significado geométrico de las funciones anteriores. Dado que éstas se encuentran direccionadas, en función de cómo se introdujo la geometría, los valores positivos del eje x de la función peso puede no coincidir con la dirección de lectura.

Para subsanar esta discrepancia se plantean dos métodos. El primero forzar a que la introducción de la lectura de la geometría siga el valor positivo del eje x, de manera que todo lo anterior se mantenga intacto y seguir el procedimiento habitual en análisis matemático, donde las funciones se ordenan con el intervalo de menor a mayor.

El otro planteamiento es introducir entre la lectura de la geometría un cambio de coordenadas entre el de introducción $S=(O,X,Y,Z)$ al de lectura de datos $T=(C,U,V,W)$, donde C tendrá las coordenadas $(P_{0x}, 0, P_{nz})$ y el vector u la dirección OP_n .

Función peso

La obtención de la función peso global de la estructura se fundamenta en la yuxtaposición de funciones peso de cada uno de los elementos encadenados, del mismo modo que ocurre con las funciones geométricas.

Como el peso es una función física cuyo valor inicial es conocido (el peso acumulado en el punto más alto es nulo) la integral definida pasa a ser indefinida, aplicando la ecuación general en cartesianas de la función peso (6.66) para curvas explícitas se obtiene; mediante la función integral:

$$w(x) = \beta(x)\gamma(x) \int_{\gamma}^x [\Gamma_{SUP}(u) - \Gamma_{INF}(u)] du + C \quad (7.20)$$

Del mismo modo, se puede obtener para coordenadas polares, :

$$w(t) = \begin{cases} x = \beta(t)\gamma(t) \int_{t_0}^t [\Gamma_{sup}(s) - \Gamma_{inf}(s)] \Gamma_{sup}(s) ds + C \\ y = f(t) \end{cases} \quad (7.21)$$

En el caso de curvas paramétricas, la ecuación (6.52), realizando el cambio de parámetro, queda de la siguiente manera:

$$w(t) = \begin{cases} x = \beta(t)\gamma(t) \int_{t_0}^t [\Gamma_{sup}(s) - \Gamma_{inf}(s)] \Gamma_{sup}(s) ds + C \\ y = f(t) \end{cases} \quad (7.22)$$

En las anteriores ecuaciones (7.20), (7.21) y (7.22) se muestra la constante de integración C , dado que se tratan de integrales indefinidas. Al transformar la función peso en representación explícita, da lugar a una familia de curvas parametrizadas por C . La particularización de la solución se muestra a continuación.

Subdivisión del dominio

Los intervalos de los trozos de las funciones de la envolvente superior e inferior no tienen por qué coincidir (de hecho, la geometría exterior de los arcos no guarda relación directa con la geometría interior y la proyección horizontal de los puntos iniciales y finales no coinciden, debido a que el ancho del arco lo impide). Por ello, la función peso deberá tener un intervalo en cada función que sea la menor entre la superior e inferior (fig 7.13).

fig 7.13 Subdivisión del dominio para la función peso a partir de la envolvente superior e inferior (Dibujo del autor)

Concatenación

En una función a trozos es tan importante determinar la propia función, como el dominio de sus segmentos, ya que resultan imprescindibles para establecer los

valores de la ordenada dónde se produce los cambios de función. Como se ha expresado en el capítulo anterior, ésta debe ser continua y al menos de clase C^2 . El sentido físico de esta imposición es evidente ya que el peso que desciende por una estructura se va incrementando a medida que avanza y no puede ni disminuir ni aumentar bruscamente.

Por ello es necesario concatenar las funciones de manera que la imagen del valor final de cada trozo coincida con el valor inicial del siguiente. Esta circunstancia sirve para resolver la constante de integración C , particularizado la solución general a una única curva.

Peso total

A partir de la función peso global $w(x)$, la determinación del peso total es inmediata, obteniendo la imagen de la función para x_f . En función de cómo se haya planteado la dirección y el origen de coordenadas, ésta puede ser el total de la estructura o la mitad de ella, según exista o no algún eje de simetría.

Función cargas exteriores

La función de las cargas exteriores se introduce en el proceso de cálculo a partir de la modelización, tal y como se ha expresado en el apartado anterior, manteniendo los intervalos de las funciones geométricas, de manera que se encuentre homogeneizados los dominios. Esta circunstancia posee una importancia crucial, ya que para establecer la ecuación de equilibrio el sistema de referencia debe ser el mismo tanto para la geometría (implícitamente el peso propio, que es la acción principal en este tipo de estructuras) como en las acciones.

Las cargas verticales finalmente serán la suma de todas las funciones, cada una de ellas expresada como funciones a trozos:

$$v(x) = w(x) + \sum_{i=0}^n N_i + \sum_{k=0}^m q_k \quad (7.23)$$

En este caso las funciones se podrán representar como curvas de clase C^1 , ni siquiera con continuidad geométrica, ya que pueden existir cargas puntuales que introduzcan discontinuidades en la función cargas exteriores.

Resolución de la ecuación general de la curva de empujes

Ecuación general: EDO y EDP

La ecuación general de la ecuación del equilibrio en el caso de la familia de planos verticales (6.23) para curvas explícitas es una EDO (ecuación diferencial ordinaria) de primer grado, como problema de valor inicial que se transforma en la ecuación (6.28) para esfuerzos horizontales constantes. En este caso dicha ecuación

(6.28) vuelve a ser una función a trozos, dado que $v(x)$ está expresado asimismo del mismo modo y debe integrarse cada segmento de manera independiente.

$$e(x) = \begin{cases} y_0(x) & \text{si } x_0 \leq x < x_1 \\ y_1(x) & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ \dots & \dots \\ y_{n-1}(x) & \text{si } x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \quad (7.24)$$

Si la función que representa las acciones verticales es continua, la resolución es inmediata ya que en cada punto inicial de cada segmento el valor de la pendiente es el mismo que en el punto final de la anterior. En caso contrario, se deberán concatenar los segmentos de funciones para asegurarse que ésta es continua.

En el caso de curvas paramétricas, cuando la función peso está parametrizada bajo el mismo parámetro, la ecuación general (6.23) se transforma en una EDP (ecuación diferencial parcial) de primer grado, que se resuelve de la misma manera que la expresión (6.23) debiendo añadir además de los valores de iniciales, en función del parámetro t .

Cabe destacar la importancia de haber normalizado las funciones, es decir, convertir su dominio a 0..1, de manera que se puede reparametrizar cada segmento, simplificando la función empujes de una concatenación de dominios que se incrementan una unidad:

$$e(x) = \begin{cases} y_0(t) & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ y_1(t) & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ \dots & \dots \\ y_{n-1}(t) & \text{si } n-1 \leq t \leq n \end{cases} \quad (7.25)$$

Concatenación de funciones empujes

Al igual que en el caso de la función peso, la función empujes debe ser continua y al integrar dicha función vuelve a aparecer una constante de integración, que vuelve a producir una familia de curvas. La particularización se obtiene concatenándolas sucesivamente de manera que den lugar una curva de clase C^1 .

Obtención de las reacciones

Las reacciones en los extremos de la estructura, especialmente con vistas a encastrar los elementos estructurales, se obtiene de manera inmediata, dado que se han obtenido por separado las funciones verticales y horizontales. Por ello, sus componentes serán:

$$\begin{aligned}
 R_0 & \begin{cases} R_V = w(P_{x_0}) \\ R_H = H \end{cases} \\
 R_n & \begin{cases} R_V = w(P_{x_n}) \\ R_H = H \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{7.26}$$

Obtención de las curvas límite

Como se ha expresado anteriormente, las curvas de empujes válidas se encuentran acotadas entre las curvas límite compatibles con la condición del material. Geométricamente dichas curvas representan la particularización de la familia de curvas parametrizadas con la variable empuje horizontal, obteniendo un valor máximo y mínimo.

Esas curvas se particularizan cuando se producen $n-1$ rótulas, siendo n el número de grados de libertad de la estructura. En caso de estructuras de planas serán isostáticas al formarse tres rótulas (Heyman 1999), que analíticamente se puede expresar como:

1. La curva $e(x)$ en el punto $P(x_0, y_0)$ es tangente a la curva envolvente, por lo que los vectores tangentes en P a Γ_i y e , son paralelos
2. El punto P pertenece a ambas curvas por lo que la imagen de ambas funciones es igual a y_0

$$\begin{cases} r_e'(x_0) \parallel r_{\Gamma_i}'(x_0) \\ e(x_0) = \Gamma_i(x_0) = y_0 \end{cases}
 \tag{7.27}$$

7.4 REPRESENTACIÓN Y VALIDACIÓN

En esta última etapa del método expuesto, verifica la estabilidad de la estructura, y por tanto la seguridad, a partir de las afirmaciones del Teorema de la Seguridad del Análisis Límite aplicado a fábricas.

Verificación gráfica del equilibrio

La comprobación del equilibrio de la estructura, como se ha enunciado anteriormente, se realiza mediante el dibujo de una línea de empujes compatible con las cargas. Dado que el resultado de las ecuaciones (7.24) y (7.25) son una serie de familias de curvas, dibujando una de ellas quedaría resuelto el equilibrio.

Para ello la representación de una curva tanto explícita como implícita es inmediata, trasladando dichas ecuaciones al programa de modelado geométrico con el que se ha tomado la información. En función de las características propias de cada software CAD se realizará de una manera u otra, pero en el fondo, el procedimiento se limita a su representación.

Sin embargo, como la familia de soluciones no está determinada por una solución única (ver Capítulo 6.1), la representación no es posible sin antes tomar una serie de decisiones, que pasan, generalmente por:

- Establecer un punto de paso de la curva, generalmente el punto inicial o el punto más alto, $I_0(x_0, y_0)$ (fig 7.14)
- Establecer la pendiente en dicho punto (valor de m en x_0) que equivale en el procedimiento gráfico a situar verticalmente el polo O (fig 7.15)

fig 7.14 Elección del punto de paso I_0 (Dibujo del autor)

fig 7.15 Elección de la tangente en I_0 (Dibujo del autor)

Si los valores de empuje no se encuentran acotados, por no haber establecido las curvas límite, se pueden estimar un valor de empuje inicial aleatorio y a partir de él modificarlo hasta encontrar el que se acomode a la condición de equilibrio en el caso que exista. Este procedimiento en esencia es el mismo que el método de Fuller para cálculo vectorial (Huerta 2004), pero con la ventaja que la curva se encuentra parametrizada en H y la representación de geometrías paramétricas resulta muy sencillo e inmediato con los softwares CAD existentes.

De todas maneras, las soluciones a la familia de curvas son numerosas y éstas se discuten en detalle en el Capítulo 7.5, dado que existen varios parámetros que pueden modificarse.

Cabe destacar que este procedimiento que se estima como el más adecuado dado que, desde el punto de vista intuitivo y visual, la representación gráfica es el más conveniente. Debido a que este procedimiento parte de un entorno geométrico gráfico, deba ser mostrado en el mismo entorno gráfico, aunque para llegar a ellas se hayan empleado la geometría analítica.

Verificación analítica del equilibrio

La verificación analítica, más “oscura” desde el punto de vista intuitivo, debe hacer la misma comprobación que en el caso anterior: que todo punto de la curva de empujes esté situado en la porción del plano delimitado por la envolvente superior e inferior. Si se recurren a las funciones empuje y envolventes se puede expresar como:

$$\Gamma_{\text{sup}}(a) \geq e(a) \geq \Gamma_{\text{inf}}(a) \quad \forall a \in I[x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R} \quad (7.28)$$

Dado que la verificación en todos los puntos del dominio es una tarea imposible (el dominio de las funciones pertenece al conjunto de números reales y por tanto existen infinitos puntos que comprobar), ésta se puede hacer en el punto más desfavorable. Para ello introduciendo las funciones distancia entre la función empuje y la envolvente:

$$\begin{aligned} d(\Gamma_1, e) &= d_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ d(\Gamma_2, e) &= d_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned} \quad (7.29)$$

El punto de comprobación coincidirá con el mínimo de las distancias mínimas a las envolventes, que se pueden expresar como:

$$x^* = \min(\min(d(\Gamma_1, e)), \min(d(\Gamma_2, e))) \quad (7.30)$$

Por tanto el punto de comprobación será en dicho punto:

$$\Gamma_{\text{sup}}(x^*) \geq e(x^*) \geq \Gamma_{\text{inf}}(x^*) \quad (7.31)$$

Coefficiente de seguridad geométrico

El coeficiente de seguridad geométrico se puede expresar a partir de la definición realizada por Heyman (1999) como la relación entre el espesor menor del arco donde se puede encajar la línea de empujes que arcos de espesor constantes coincide con el cociente entre el área de la estructura real frente al área que ocupa la línea de empujes (fig 7.16):

$$\gamma = \frac{A_{\text{tot}}}{A_{\text{red}}} = \frac{e_{\text{tot}}}{e_{\text{red}}} \quad (7.32)$$

Este concepto está planteado para estructuras idealizadas, donde el modelado de las curvas se realiza por medio de primitivas (arcos de circunferencia y rectas en

fig 7.16 coeficiente geométrico en curvas homotéticas (Dibujo del autor)

la mayor parte de los casos). Sin embargo las estructuras reales no suelen ser dos curvas homotéticas por lo que el concepto de seguridad geométrico puede ser adaptado.

fig 7.17 coeficiente geométrico de curvas no homotéticas (Dibujo del autor)

El límite de seguridad, $\gamma = 1$, se produciría cuando se formen tres rótulas (que coincide con la transformación de la estructura en isostática) al ser la curva de empujes tangente en uno y dos puntos respectivamente, a las curvas que forman la envolvente. Por ello, la seguridad en cada punto será función de la distancia que existe entre la curva de empujes a cada uno de las curvas exteriores.

Cuando estas funciones (7.29) sean mínimas, será en el punto en la que se producirá la rótula, ya que al variar el empuje horizontal, la curva de empujes se aproximará sucesivamente al borde. Por ello se puede definir el coeficiente instantáneo, dado que las distancias varían, por extrapolación de la ecuación (7.16) se puede expresar como:

$$\gamma_0 = \frac{\min(d_1, d_2)}{d(\Gamma_2, \Gamma_2)} \quad (7.33)$$

El coeficiente global de seguridad, se puede expresar como cociente entre el ancho real de la estructura y el ancho que ocupa la línea de empujes entre los dos puntos más cercanos a los extremos:

$$\gamma = \frac{e_{tot}}{e_{reduc}} \quad (7.34)$$

Las condiciones que deben darse para que el punto P de la curva envolvente de la estructura $\Gamma_i(x)$, sea el más cercano a la curva de empujes $e(x)$, se produce cuando la función distancia sea mínima, esto es que su derivada sea nula. Si ambas curvas tienen parametrizaciones distintas, los vectores tangentes en P, en t_0 y s_0 , son paralelos, por lo que su producto escalar coincide con el producto de los módulos:

$$\begin{cases} \min(d(\Gamma_i, e) & i = 1..2 \\ \overline{r}_\Gamma'(x_0) \times \overline{r}_e'(x_0) \end{cases} \quad (7.35)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial x_1(t_0) - x_2(s_0)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2(t_0) - x_2(s_0)}{\partial t} \right)^2 = 0 \\ |\overline{r}_\Gamma'| \times |\overline{r}_e'| = \|\overline{r}_\Gamma'\| \|\overline{r}_e'\| \end{cases} \quad (7.36)$$

Comprobación del deslizamiento en estribos

La otra comprobación que, junto con la verificación del equilibrio global, es señalada como crítica según Heyman (1999) es el deslizamiento horizontal entre piezas en el arranque de estribos. El punto más desfavorable para realizar dicha comprobación se encuentra dónde el empuje horizontal es mayor (en este caso constante) y la tensión vertical menor (esto es, la parte superior del estribo donde entra el empuje) (fig 7.18).

Esta comprobación se encuentra fuera del Análisis Límite Estándar, dado que uno de sus fundamentos establece que éste se encuentra impedido. Para ello se puede recurrir a soluciones simplificadas como el criterio de rotura Mohr-Coulomb (Ramos 2015) o soluciones más complejas como modelos de sólidos rígidos (Magdalena 2013).

Atendido a la simplicidad a pesar de perder precisión, se estima que el procedimiento más adecuado es el primero, empleando un ángulo de deslizamiento nulo del lado de la seguridad:

$$f_v = f_{v0} + \mu\sigma \quad (7.36)$$

donde f_{v0} es la resistencia al deslizamiento pura, σ la tensión normal y μ el coeficiente de rozamiento del mortero con la pieza.

La tensión normal que aumenta el rozamiento sólo puede provenir de las cargas situadas por encima del plano horizontal que define la entrada, que en su situación más desfavorable, corresponde con el peso propio del propio estribo situado por encima del punto (fig 7.19). Si se denomina a este punto $I(I_x, I_y)$, y a la intersección con la envolvente superior del estribo $C(C_x, C_y)$, donde $C_y = I_y$, el plano de la envolvente inferior será $y = I_y$. El peso del estribo W_e se puede determinar del mismo modo que el resto de funciones de peso propio (ver Capítulo 7.2 y Capítulo 7.3). Si b es el ancho total del estribo y el espesor total se verificará que no se produce deslizamiento cuando se cumpla la condición:

:

$$\tau_{des} = \frac{H}{be} = \frac{H}{(C_y - I_y) \int_{I_x}^{C_x} \beta(x) dx} \leq f_v = f_{v0} + \mu \frac{\int_{I_x}^{C_x} (\Gamma_{ext}(x) - I_y) dx}{(C_y - I_y) \int_{I_x}^{C_x} \beta(x) dx} \quad (7.37)$$

fig 7.18 Punto de verificación del deslizamiento en estribos. Redibujado por el autor a partir de Huerfano (2004)

fig 7.19 Acciones que intervienen en el deslizamiento de estribos (Dibujo del autor)

7.5 EXTENSIÓN DEL MÉTODO

En el presente apartado se exponen varios aspectos de cómo se puede extender el método descrito anteriormente a otras situaciones con condicionantes más complejos, como el caso de modelos tridimensionales a partir del planteamiento de modelos 2D y 2 1/2 D.

También se plantea cómo se puede introducir en el modelo, y por tanto en el proceso de verificación, información adicional que se obtiene habitualmente en la toma de datos constructiva como es el mapa de lesiones, o cómo estimar la evolución de un cierto daño o proceso patológico.

Por otra parte, además de la información obtenida de las curvas paramétricas, que verifique el equilibrio por geometría gráfica es posible, mediante la aplicación de este método, la obtención de otros datos tanto analíticos como gráficos, necesarios para otros estudios estructurales posteriores o que precisen de más detalle y de evaluaciones más específicas.

fig 7.20 Fuerzas que interviene en el equilibrio de un diferencial de arco con acciones horizontales no constantes (Dibujo del autor)

Acciones exteriores horizontales

Para implementar una acción horizontal (dado que la resolución de Milankovitch fue realizada para acciones exteriores nulas) y determinar la ecuación de la línea de empujes correspondiente, se puede partir de la ecuación general en cartesianas (6.20), particularizándola para planos verticales ($\phi = 0$):

$$Vdx - Hdy - P_H dx \varepsilon = 0 \quad (7.38)$$

Separando las acciones exteriores en dos funciones verticales $p_V(x)$ y horizontales $p_H(x)$ como acciones verticales (fig 7.20), las expresiones (6.18) y (6.19) quedarían:

$$\begin{aligned} V &= P + \beta \gamma \int_{x_0}^x A dx + \int_{x_0}^x p_V dx \\ H &= Q - \int_{x_0}^x p_H dx \end{aligned} \quad (7.39)$$

Sustituyendo las expresiones (7.39) en (7.38), e integrando respecto a y , la solución general será:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x \frac{V - P_H e}{H} dx \quad (7.40)$$

La ecuación anterior sería la representación analítica en cálculo gráfico, de aquella en el que el punto desde donde se toman los vectores del antifunicular se desplaza horizontalmente siguiendo una ley (fig 7.21). De esta manera se puede evaluar, por ejemplo, la incorporación de la acción del viento al análisis global, que

fig 7.21 Representación vectorial del empujes horizontales no constantes (Dibujo del autor)

en el caso de una acción constante H , la función respecto a x será la inversa de la función de la envolvente exterior.

Rellenos con empujes no verticales

La existencia de los rellenos sobre el trasdós de la bóveda es un elemento fundamental para garantizar la estabilidad en muchos tipos de estructuras de fábrica. Gracias a las recientes aportaciones de Ramos (2015) mencionadas en el Capítulo anterior, su función puede ser repartir las cargas puntuales en la parte superior (especialmente en cargas puntuales), añadir peso a la estructura que ayude a centrar las cargas, aumentar el rozamiento y disminuir la posibilidad de deslizamiento entre bloques, estabilizar el efecto de cargas asimétricas o permitir el paso de las acciones en su interior, estabilizando la estructura.

Según el mismo autor, las acciones de los rellenos se pueden clasificar en función del tipo de relleno en:

- Rígidos: las acciones pueden descomponerse en sus componentes verticales y horizontales, empleando para ello el criterio de Mohr-Columb considerando conservadoramente que no existe cohesión
- Granulares firmes: se puede descartar la acción horizontal que provoca el relleno ya que por el efecto silo por un lado y por el deslizamiento del relleno cuando el ángulo del trasdós aumenta respecto a la horizontal, cerca de los apoyos.
- Granulares cohesivos: el pequeño valor de la cohesión considerada del relleno granular provoca un valor del empuje nulo en la superficie, según expresa Ramos (2015) según la formulación de Rankine.

Se puede estimar que todos ellos, transmiten acciones horizontales y verticales sobre la estructura, en mayor o menor medida, según su consideración y naturaleza. La acción vertical se puede introducir como un aumento del peso propio en función de la relación de pesos específicos y dimensiones considerado en la ecuación (7.20) o (7.21), según el tipo de modelización, mientras la componente horizontal se puede estimar como una acción variable respecto a la tangente del ángulo del trasdós, esto es, respecto a la derivada de la envolvente superior:

$$H(x) = w_r(x) \operatorname{tg} \alpha = w_r(x) \Gamma'_{\text{sup}}(x) \quad (7.41)$$

Arcos enjutados y exentos

La clasificación fundamental de los arcos, desde el punto de vista mecánico, se encuentra en que estos estén enjutados o no (Torroja 1955). Por ello, es necesario mencionar cómo se pueden analizar cada uno u otro tipo de arcos según la metodología propuesta.

En los primeros, la flexión está impedida por el muro que lo acompaña, por lo que el propio muro permite transmitir los empujes y el comportamiento de éste puede tenerse en cuenta mediante dos consideraciones:

- La enjuta es un relleno rígido, caracterizado de la misma manera que las fábricas, con su peso específico aparente
- La enjuta es una parte del arco, con una disposición de juntas horizontales y verticales

La primera se puede implementar como relleno rígido tal y como se ha expuesto el apartado anterior mientras que la segunda puede como parte de la estructura, que está compuesta de dos estratos de igual o diferente composición constructiva.

Dado que el método geométrico analítico propuesto realiza la determinación de la línea de empujes y es probable que dicha línea pueda pasar por la enjuta para garantizar la estabilidad, se estima más conveniente la segunda, por lo que así se lleva a cabo en los casos de aplicación que se muestran en el Capítulo 10.

Modelado de lesiones: deformaciones y roturas

En la intervención sobre estructuras de fábrica y especialmente en las relativas al Patrimonio, la evaluación de los daños existentes resulta crucial para poder evaluar tanto su capacidad portante como la idoneidad de las intervenciones. Como se ha descrito anteriormente, las estructuras modifican su geometría a lo largo del tiempo para adaptarse a la modificación de sus condiciones, tales como cambios en las acciones, movimientos en los apoyos,... y esto produce una serie de lesiones en la estructura, que deben evaluarse y considerarse previas a cualquier propuesta de intervención (fig 7.22)

fig 7.22 Grietas típicas de bóvedas cuartipartitas estudiadas por Sabouret (Heyman 1999)

La incorporación de mapas de lesiones en el modelo geométrico es una práctica habitual en los procesos de toma de datos constructivos en intervenciones, por lo que dicha información debe poderse transferir al modelo estructural. Las lesiones mecánicas, que son las específicas de los elementos estructurales de fábrica (Monjo y Maldonado 2001) pueden clasificarse en:

- Deformaciones: por desplome, alabeo o pandeo
- Roturas: grietas, que afectan a todo el espesor o fisuras, que sólo afecta a la superficie

Las primeras se manifiestan, evidentemente, en la geometría de la estructura y por tanto se incorporan al modelo geométrico desde el momento que se realiza el análisis. Es importante volver a subrayar que para que el análisis sea válido y responda a la realidad, debe realizarse con la geometría real del momento en que se realiza, en lugar de la geometría idealizada con la que se debió proyectar.

fig 7.23 Evaluación del equilibrio sin considerar la existencia de discontinuidades debida a lesiones (Huerta y Fuentes 2013)

Dentro de las lesiones mecánicas más significativas a lo que a la estabilidad se refiere, se encuentran las roturas. La incorporación al método geométrico analítico de dicha información pasa por introducir la discontinuidad del material, que se puede realizar mediante tres procedimientos.

El primero de ellos consiste en obviar la discontinuidad del material en el análisis y determinación de la línea de empujes y hacerlo pasar por ella, siendo consciente de que para que las compresiones sean transmitidas el contacto entre piezas debe existir (Huerta y Fuentes 2013). De esta manera se acepta una discontinuidad en la transmisión de cortantes pero no de compresiones, por lo que en ese punto el deslizamiento no está impedido y debe comprobarse posteriormente (fig 7.23).

El segundo (fig 7.24a) consiste en introducir una discontinuidad en el geométrico. Para ello, de forma más o menos acusada, se puede definir en la envolvente superior o inferior un conjunto de segmentos conexos que simulen la posición y profundidad del daño.

La consecuencia inmediata de esto se encuentra en la modificación del peso propio del elemento estructural, ya que al reducirse el área, proporcionalmente se reducirá el peso, especialmente si se realiza de forma poco realista, ya que el agrietamiento sin desprendimiento no produce una reducción de la masa del elemento.

Por otra parte, este procedimiento no es aplicable a modelos de puntos y alámbricos, ya que no existe una curva inicial que defina previamente la envolvente. En aperturas de fisuras menores del orden de la tolerancia del modelo (esto es, si el modelo se realiza en unidades de milímetros y la apertura de fisura es de dé-

fig 7.24 Inclusión de lesiones mediante modificación de la envolvente (izq) y mediante la exclusión del conjunto de puntos (dch) (Dibujos del autor)

cimas de milímetro) tampoco es aplicable, el análisis se saltaría la situación del daño y no se tendría en cuenta.

La última (fig 7.24b) pasa por lo que se puede denominar una discontinuidad analítica, esto es, definir un conjunto de puntos del intervalo por los que no puede transmitirse empujes. Si A es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ definidos por una envolvente superior y otra exterior, Γ_{sup} y Γ_{inf} , respectivamente, esto se podría expresar como:

$$A = \{P_0, P_1, \dots, P_n\} \in \mathbb{R}^2 : \Gamma_{\text{sup}} \cap \Gamma_{\text{inf}} \quad (7.42)$$

La diferencia de facilidad o complejidad de la implementación entre los procedimientos anteriormente descritos, es notable. Mientras la primera no necesita implementación, simplemente ser consciente de realizar la verificación del deslizamiento posteriormente. La segunda tampoco necesita de puesta en marcha de ninguna acción adicional al método general descrito, ya que la propia metodología “lee” la discontinuidad como parte de la envolvente.

La última requiere de una verificación adicional, donde a la expresión (7.42) habrá que añadir la comprobación del conjunto de puntos A , que se puede simplificar en dos, que corresponden con el principio y el final de la lesión (entendida esta como una línea que recorre la estructura). Esto el más cercano a la envolvente inferior y el más cercano a la superior.

Movimientos de la estructura

En el estudio de los procesos patológicos de una estructura es habitual circunscribirla al momento temporal del estudio, o en un periodo que abarque desde las actuaciones e intervenciones documentadas hasta el momento actual. Es lo que García y Escudero (2011) denominan “la pequeña historia de la construcción”. Se trata, por tanto, del estudio del pasado del edificio.

Por otra parte, la verificación de una estructura histórica de fábrica a partir del modelo geométrico da lugar a la “foto fija” de esa estructura, en un momento muy determinado que coincide con el del levantamiento. Se trata del estudio del presente del edificio

Pero el conocimiento de la evolución de los movimientos de este tipo de estructura es crucial para determinar el grado de seguridad o la urgencia de la intervención (Mencías y Calle 2014). Es necesario saber qué puede ocurrir si se desploma el estribo una cierta distancia o cuanto más se puede hundir la cimentación hasta producirse el colapso o que se reduzca el nivel de seguridad a valores inaceptables. Se trata del estudio del futuro del edificio.

El método geométrico gráfico permite realizar el estudio de una manera muy farragosa, tediosa y artesanal. Se trata de construir una línea de empujes para cada posición geométrica, dado que ésta se encuentra íntimamente ligada a la geometría de la estructura y una mínima modificación provoca cambios notables en la posición de la línea de empujes (Heyman 1999).

La posibilidad de computerizar esta labor tan monótona y repetitiva resulta vital para reducir tiempos y costes en los análisis. Antecedentes de este procedimiento se encuentran en los trabajos de Block y Oschendorf (2006) mencionados en el Capítulo 3, para un determinado modelo geométrico y de daño, mediante cálculo vectorial.

Poder realizar este estudio con cualquier geometría estructural, con cualquier tipo de acciones y con cualquier movimiento es lo que permite el método geométrico analítico, ya que las ecuaciones de equilibrio iniciales no se modifican al variar la geometría, sólo la posición de la curva de empujes. y esta, se encuentra parametrizada conforme a valores de paso de la geometría deformada.

En el caso de que las condiciones de contorno se modifiquen, por ejemplo, por el giro de un estribo, y se alteraran la posición de las cargas, la posibilidad de tener el procedimiento computerizado y que pueda ser recalculado de manera inmediata permite una agilidad importante en el proceso.

De todas maneras, el análisis presentado no pretende incluir efectos dinámicos ni de mecánica de fractura, donde sería necesario introducir nuevos condicionantes que los geométricos y constructivos mencionados.

Evaluación de tensiones de compresión

Como se ha comentado en el Capítulo anterior, las tensiones normales de servicio de las estructuras históricas de fábrica suelen ser bajas, incluso uno o dos órdenes por debajo de la tensión de rotura. Sin embargo, en algunas ocasiones es necesario poder evaluarlas en algún punto concreto bajo la premisa del Análisis Límite Estándar, esto es, que el valor de servicio no se aproximará al límite. En algunos casos la determinación gráfica de las tensiones puede ser muy sencilla mientras en los casos de geometría irregular puede complicarse notablemente.

Una vez conocida la posición y magnitud de la resultante obtenida de la curva de empujes, dado que es una función geométrica, la distribución de tensiones dependen de la sección de la fábrica, que también es una función geométrica. Por ello, su evaluación se puede realizar mediante un procedimiento sencillo, dado que se parte de funciones geométricas.

El procedimiento simplificado para obtener las tensiones se ha realizado tradicionalmente partiendo de la totalidad de la sección y determinando la excentricidad geométrica de la resultante ξ respecto al centro de gravedad (Wolf 1921).. Con

fig 7.25 Determinación de tensiones normales para un sistema de coordenadas cartesiano (Dibujo del autor)

fig 7.26 Determinación de tensiones normales para un sistema de coordenadas polar (Dibujo del autor)

una distribución de configura un prisma trapezoidal de esfuerzos (o un paralelepípedo si la excentricidad es nula), se puede definir analíticamente (fig 7.25) a partir de la posición de la línea de empujes (Heyman 1982). Para el caso de realizar el análisis en coordenadas polares por medio de planos verticales, el esfuerzo perpendicular a la sección será únicamente el horizontal y el área estará definida por el espesor β y el ancho de la sección t :

$$\sigma = \frac{R}{\beta t} \pm \frac{R\xi}{\beta t^2} = \frac{R}{\beta t} \left(1 \pm \frac{6\xi}{t} \right) \quad \text{para } \xi \leq \frac{t}{6} \quad (7.43)$$

Escribiendo la formulación anterior como función respecto a x , se obtiene la expresión general de las tensiones máximas y mínimas en un punto cuando la resultante se encuentra dentro del Núcleo Central de Inercia en coordenadas cartesianas:

$$\sigma(x) = \frac{H}{\beta(x)t(x)} \left(1 \pm \frac{6|e(x) - (\Gamma_{\text{sup}}(x) - \Gamma_{\text{inf}}(x))/2|}{t(x)} \right) \quad (7.44)$$

Si el conjunto de planos del análisis es radial, para el sistema de coordenadas polares (fig 7.26), la función anterior se puede expresar del mismo modo, con la única diferencia que la resultante perpendicular al plano de corte se obtendrá de la composición respecto al plano $\phi + \pi/2$ de la resultante vertical V y horizontal H del empuje:

$$\sigma(\phi) = \frac{H \cos \phi + V(\phi) \sin \phi}{\beta(\phi)t(\phi)} \left(1 \pm \frac{6|\rho(\phi) - (\Gamma_{\text{sup}}(\phi) - \Gamma_{\text{inf}}(\phi))/2|}{t(\phi)} \right) \quad (7.45)$$

En el caso del paso de la resultante fuera del tercio central, aparecerán tracciones entre las piezas que la fábrica que, al no ser capaz de soportarlas, la fábrica se fisurará (Heyman 1982). El bloque de tensiones resultantes se podrá obtener geoméricamente a partir del equilibrio del volumen de tensiones (Wolf 1921):

$$\sigma = \frac{R}{3\beta \left(\frac{t}{2} - \xi \right)} \quad \text{para } \xi > \frac{t}{6} \quad (7.46)$$

La función que representa la tensión normal máxima para coordenadas cartesianas será:

$$\sigma(x) = \frac{H}{3\beta(x) \left(\frac{t(x)}{2} - \left| e(x) - \left(\Gamma_{\text{sup}}(x) - \Gamma_{\text{inf}}(x) \right) / 2 \right| \right)} \quad (7.47)$$

mientras que en coordenadas polares será:

$$\sigma = \frac{H \cos \varphi + V(\varphi) \operatorname{sen} \varphi}{3\beta(\varphi) \left(\frac{t(\varphi)}{2} - \left| \rho(\varphi) - \left(\Gamma_{\text{sup}}(\varphi) - \Gamma_{\text{inf}}(\varphi) \right) / 2 \right| \right)} \quad (7.48)$$

Geometría estática y dinámica

De la capacidad de relación entre la geometría y los parámetros que lo determinan, surge la geometría dinámica, expresión computerizada entre geometría gráfica y analítica. Existen diversos software que permiten visualizar de manera inmediata dicha relación, con las ventajas que ello conlleva.

Nacida en el ámbito docente, la geometría dinámica es un campo que se encuentra en este momento en pleno desarrollo y expansión. Los programas de geometría dinámica se han convertido en uno de los recursos informáticos que mejor permiten la interactividad del usuario con las ideas matemáticas.

En este momento existen diversos programas de software dedicados a geometría dinámica. Entre ellos el más extendido, quizá pueda ser GeoGebra (International GeoGebra Institute 2012), que se trata de un software gratuito de código abierto para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, combinando módulos de geometría interactiva con álgebra computerizada, cuyo origen se encuentra en la tesis de Master de su creador, Markus Hohenwarter en 2002 (Hohenwarter y Lavicza, 2010)

Mediante el empleo de la geometría gráfica convencional, los análisis de equilibrio se pueden considerar estáticos. En cambio con el empleo de geometría analítica se puede aplicar el término dinámico dado que se muestra la relación entre la geometría analítica que se encuentra en el procesado y la gráfica, que se encuentra en la visualización de los resultados.

En el Capítulo 9, se presenta con más detalle el empleo del programa de Geometría Dinámica, Geogebra para la validación del procedimiento, ya que se trata de un software eminentemente matemático con una finalidad didáctica, lejos de las capacidades gráficas de los programas de CAD.

Aproximación a fenómenos locales desde el equilibrio global

El estudio de fenómenos locales en una fábrica es de gran importancia a la hora de realizar una intervención. Por ejemplo, la viabilidad de colocar un tirante en

un punto depende, en muchos casos, de lo que ocurre en dicho punto y no en el resto de la estructura. Lo mismo sucede con discontinuidades puntuales tales como vacíos, fenómenos de aplastamiento a nivel de mortero, fisuración de la interfase, ... muy habituales, por otra parte, en este tipo de estructura.

El análisis límite del equilibrio no presenta una solución directa y única a estos problemas, ya que parte de unos supuestos del material, que a nivel local son muy conservadores (resistencia a tracción nula) o muy poco (resistencia a compresión ilimitada y deslizamiento impedido).

Sin embargo esta teoría sí que dota de un intervalo de soluciones, definidas por las curvas límite. Sabiendo que para que se cumpla la verificación del equilibrio, la resultante de las acciones debe pasar entre un intervalo de posiciones con un intervalo de valores, respecto al plano de corte elegido, las posibilidades de solución se ven reducidas.

Existen muchas formas de estudiar los planteamientos locales, pero requieren de un conocimiento con más profundidad tanto del material como de las solicitaciones. Pero dado que existen infinitos estados de equilibrio las posibles solicitaciones también pueden ser infinitas, estas estarán acotadas entre un límite superior y otro inferior. Por tanto, se puede realizar una primera aproximación a lo que ocurre en un punto de la estructura a nivel local (deslizamiento, compresión, valores de tensiones) a partir del planteamiento general de equilibrio del Análisis Límite conociendo el rango de soluciones posible de localización y magnitud de los empujes.

Extensión a cúpulas y bóvedas: Superficies de empujes

Como se ha mencionado anteriormente, el método se ha diseñado para ser aplicado a estructuras que se pueden reducir a planas con espesores constantes o con espesores variables. Sin embargo, también se ha estudiado la posible aplicación a estructuras desde el punto de vista geométrico, empleando la misma metodología.

Cabe mencionar que analíticamente no supone ninguna diferencia, ya que las funciones de una variable en $\mathbb{R}$ pueden ser extendidas directamente a dos variables en $\mathbb{R}^2$. Dado que como se ha reseñado en el Capítulo 5.1, en numerosas ocasiones el levantamiento geométrico se realiza sobre modelos tridimensionales, es necesario detenerse a expresar las particularidades que implicaría el trabajo con superficies en lugar de curvas.

Superficie de empujes

La verificación de la estabilidad en general de estructuras históricas tridimensionales de doble curvatura, pasa por determinar la trayectoria de los empujes,

que extrapolando el concepto de curva plana al espacio, se puede definir como superficie de empujes (Ayala y Tomasoni 2011).

Ésta, por extensión del concepto de línea de empujes, se entiende como la posición de la resultante de las cargas aplicadas en una estructura respecto a dos conjuntos de planos no paralelos. Si en el Capítulo anterior se establecía como premisa que la familia de planos era vertical siguiendo el eje x , para la superficie de empujes se puede fijar que los planos sean paralelos al plano OXZ por un lado y paralelos al plano OYZ por otro. En el fondo, esta idea no deja de asumir implícitamente la técnica clásica de los cortes de estructuras, donde el conjunto de planos primarios discretizaban las cargas de peso propio.

Por ello es necesario establecer una familia primaria de planos, respecto a los que se establece el ancho de la estructura (fig 7.27a) y otra secundaria, respecto a los cuales se localizan los empujes (fig 7.27b), que en este caso son curvas paralelas a dichos planos. La elección de la familia de planos, puede ser cualquier otra e incluso no tratarse de planos sino de superficies, como por ejemplo, si las envolventes se encuentran parametrizadas respecto a u y v , usando coordenadas curvilíneas o coordenadas polares en caso de superficies de revolución.

El dominio de la función en la que se encuentran representadas los conjuntos de planos primar será una carta en $\mathbb{R}^2$ cuya imagen en el espacio serán las envolventes superiores e inferiores. En el caso de coordenadas cartesianas, la carta será la proyección sobre $z = 0$ de las propias superficies, y si la familia de planos es vertical paralela a los planos coordenados, el propio dominio de la función representa el dominio de integración. Cabe recordar que a las superficies tridimensionales (como extensión del método aplicado a figuras planas) es también aplicable la direccionalidad, que en este caso se representa respecto a dos variables (fig 7.28), ya que las cargas se trasladan siguiendo un recorrido establecido por razones constructivas (ver apartado siguiente).

La ecuación de la superficie de empujes en coordenadas cartesianas será, extrapolando la ecuación (6.28) a funciones de peso explícitas de dos variables, siendo v la familia primaria y u la secundaria:

$$z(x, y) = z_0 + \frac{1}{H} \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y dvdu \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y w(u, v) dvdu + \frac{P(y)}{H} (x - x_0) \quad (7.49)$$

Del mismo modo que la ecuación de la curva de empujes en estructuras planas da lugar a una familia de curvas, la ecuación (7.49) da lugar a familias de superficies parametrizadas respecto a la curva Γ_0 , el empuje H y la pendiente de la recta tangente a la curva Γ_0 paralela a los planos secundarios.

Como punto de partida se toma el mismo planteamiento realizado por Heyman (1996), en la que se divide el estudio separando entre cúpulas y bóvedas, tal y

fig 7.27 Familia de planos primaria (sup) y secundaria (inf) para una superficie genérica (Dibujo del autor)

fig 7.28 Dominio de una superficie que corresponde a un cuarto de bóveda cuatriptita, direccionada según el recorrido de las cargas desde la clave hasta el apoyo (Dibujo del autor)

fig 7.29 Arco de espesor variable definido radialmente (Dibujo del autor)

como se menciona en el Capítulo 6.1. Las primeras se pueden estudiar como estructuras de revolución, en las que el sólido se genera por medio de un arco que gira en torno a un eje vertical, mientras las segundas cabe diferenciar el comportamiento de la plementería de los nervios.

Cúpulas

Tal y como se comentó anteriormente, la resolución del equilibrio de una cúpula de revolución agrietada puede ser fácilmente convertible en una serie de arcos, con un espesor variable, colocados radialmente. Dicho espesor, viene determinado por el número de gajos en los que se divida la cúpula para el análisis.

En una aproximación mediante un número de sistema de arcos discretos donde la técnica de los cortes se emplea radialmente, para un número de cortes N , que divide una cúpula de revolución completa en gajos cuyo ángulo de revolución es $\phi = 2\pi/N$ la función espesor se define como (fig 7.29):

$$\beta(x) = (R_0 + x)\phi \quad (7.50)$$

donde R_0 es el radio de la cúpula en la cota superior, por lo que todo el procedimiento anteriormente descrito sería de aplicación directa e inmediata.

Se puede, asimismo, evaluar la cúpula mediante la función empujes continua en x e y , (7.41) situando el eje de coordenadas en el centro de la misma, de manera que la direccionalidad venga dada por un dominio creciente desde el punto más alto (centro) al más bajo (cualquiera del diámetro exterior, y por lo tanto con una coordenada x o y de valor absoluto mayor).

En el caso que exista un óculo o la cúpula no estuviera cerrada por disponer de linterna o cupulín, la curva inicial de empujes estará situada entre el contorno superior e inferior de la propia cúpula, cuya condición debe establecerse previamente a la representación de los empujes.

En estos casos, fundamentalmente en geometrías asimilables a revolución, suele ser computacionalmente más sencillo realizar el cambio de parámetro a una generación radial, con siguiente cambio de variable:

$$y = \text{sen}(\phi) \sqrt{-\frac{x^2}{\text{sen}(\phi)^2 - 1}} \quad (7.51)$$

siempre y cuando se pueda establecer un centro, labor a veces francamente difícil, cuando de estructuras deformadas se tratan. En cualquier parametrización de superficies, el empleo de coordenadas paramétricas es siempre posible, especialmente si la geometría se ha definido de esta manera.

Bóvedas

En la verificación de la estabilidad en bóvedas de crucería y en general de todas las estructuras históricas nervadas, se deben separar por un lado el comportamiento de los nervios del correspondiente a la plementería (Mas-Guindal 2011), estudiando primero la superficie que define espacialmente la bóveda y posteriormente los nervios y arcos fajones y formeros.

Para el estudio de la estabilidad de la plementería, se debe verificar mediante la comprobación de la superficie de los empujes respecto a la envolvente superior e inferior que lo delimita. Por ello, para aplicar la metodología analítica presentada, la función volumen, que posteriormente deriva en la función peso propio, se debe asimismo definir respecto a dos familias de planos verticales (fig 7.30).

Por esta circunstancia, la denominación de la familia primaria o secundaria variará según el cuarto de bóveda analizado, lo que obliga a estudiar de manera independiente cada fragmento de bóveda separándolas por los nervios. Esto no supone ninguna dificultad en el procedimiento si se emplea el encadenamiento de estructuras, como se ha mostrado anteriormente. La disposición de la plementería debe incorporarse a la información constructiva de la que debe disponerse previamente al análisis (fig 7.31).

El análisis de bóvedas con multiplicidad de nervios (como el caso de bóvedas estrelladas o las de abanico) puede realizarse siguiendo el mismo proceso, con la única diferencia de que el conjunto de planos de estudio no serán ortogonales entre sí, y deberá variar en función de las posiciones de los nervios del contorno.

Las leyes de empujes entre las porciones de bóvedas pueden ser tanto constantes como variables con el valor reducido en la clave (fig 7.32), caso este último más habitual en las construcciones históricas (Heyman 1999). Implementar el segundo de ellos, no supone más que introducir en la función $H(y)$ en la ecuación de la superficie de empujes (7.41). Dicha función la proporciona Heyman (1995) como solución de la bóveda como cáscara y tiene la siguiente expresión, donde w es el peso medio de la bóveda en proyección horizontal, que se puede sustituir por el valor inicial:

fig 7.30 Familia de cortes paralelos a las claves de una bóveda cuatropartita (Dibujo del autor)

fig 7.31 Diferentes disposiciones de la plementería de para el estudio de la bóveda (Ungewitter 1890)

fig 7.32 Empujes constantes (sup) y reducido en la clave (inf) según Heyman (1999) (Dibujos del autor)

$$H(y) = -2wy = -2\gamma(x_0) \left(\Sigma_{\text{sup}}(x_0) - \Sigma_{\text{sup}}(x_0) \right) \quad (7.52)$$

A la hora de analizar los nervios, éstos no dejan de ser una serie de arcos que reciben las acciones que trasmite la plementería. Por tanto puede analizarse tanto como arcos cuyas acciones son las reacciones de la superficie de la plementería como elemento encadenado a los plementos como arcos que reciben un peso de ancho variable. El mismo procedimiento cabe realizar para arcos formeros y fajones, cuyos empujes proviene de la plementería (Mas-Guindal 2011).

La transmisión de los empujes horizontales estudiados por Heyman (1996) que se realiza radialmente, puede ser evaluado intercambiando las direcciones de los planos, pasando a ser la primaria la radial y la secundaria, la longitudinal. En este caso se deberá realizar el cambio de variable correspondiente, para visualizar la variación de la línea de empujes.

CAPÍTULO 8. ALGORITMO E IMPLEMENTACIÓN

8.1 Algoritmo de programación

8.2 Implementación de la solución

8.1 ALGORITMO DE PROGRAMACIÓN *Introducción*

Uno de los objetivos de la tesis es presentar un algoritmo que sea fácilmente implementable que pueda ser aplicable en un conjunto muy amplio de obras históricas de fábrica, de tal forma que pueda desarrollarse una herramienta informática de manera efectiva y útil y sobretodo intuitiva. Las ventajas de disponer de esta herramienta, desde el punto de vista de evaluación estructural, son evidentes ya que se puede disponer de un análisis estructural y evaluar el equilibrio de una manera interactiva y visualmente directa a partir de la información recogida en el levantamiento.

Para poder describir el algoritmo de manera que pueda ser implementado eficazmente (proceso que se describe en el apartado siguiente) y atender a un gran abanico de situaciones, tanto geométricas como constructivas y estructurales, es necesario identificar, en el método analítico, el entorno computacional donde debe realizarse. Los identificados son los siguientes:

1. Software CAD: entorno gráfico donde se vuelca el levantamiento y se modeliza geométricamente la construcción, de donde se obtiene la información geométrica y se verifica gráficamente el equilibrio.
2. Software CAS (Sistema de álgebra computacional o Computer Algebra System): manipulación, cálculo y resolución de ecuaciones de equilibrio mediante expresiones simbólicas, gracias a los módulos de cálculo simbólico.

Los pasos, que el proceso de verificación descrito en el Capítulo anterior, con indicación del entorno donde se realiza, se muestran en la figura 8.1 y se resumen en:

- Obtención de datos geométricos: CAD
- Construcción de funciones geométricas, constructivas y estructurales: CAS
- Resolución del equilibrio: CAS
- Verificación del equilibrio y parametrización de soluciones: CAD

Obtención de datos geométricos

Dado que la información puede estar modelada fundamentalmente mediante 3 técnicas diferentes (puntos, curvas primitivas y curvas aproximadas) según se ha identificado en la primera parte de la investigación teórica, de cada uno de ellos se obtiene diferente información, que debe quedar almacenada y codificada de manera que el CAS pueda interpretarla sin lugar a errores.

En primer lugar es necesario definir qué elementos pertenecen a qué envolvente (superior e inferior / extradós e intradós), acción que no puede interpretarse de manera automática y debe realizarse manualmente. A partir de ello, con cada

fig 8.1 Esquema de los pasos principales del procedimiento indicando en el entorno informático donde se realiza (Figura del autor)

grupo de geometrías se debe hacer la evaluación de a qué tipo de modelización pertenece:

- Modelo de puntos: los puntos se almacenan para continuar el proceso, bajo el mismo procedimiento que las curvas interpoladas linealmente
- Modelo de curvas primitivas: se toman los nodos y sus imágenes, según el algoritmo de Chebysev, tal y como se ha justificado en el apartado 7.2.
- Modelos de curvas aproximadas: se almacenan, para cada curva el vector nodos, polígono de control, pesos y grado, de manera que pueda reconstruirse posteriormente cada curva.

Cabe mencionar en este punto que, para poder implementar este algoritmo, la información del modelo geométrico debe estar disponible y accesible. Esto significa que el software donde se haya realizado la modelización debe disponer de algún módulo de programación que permita el acceso a dicha información, del tipo AutoLSIP para AutoCAD o RhinoCommon en Rhinoceros o lenguajes genéricos implementados en entornos CAD, como C/C++, VB o Python.

Construcción de funciones

La construcción de funciones geométricas a trozos, pasa por la reconstrucción de cada uno de los elementos geométricos, asociando un dominio a cada uno de ellos, por medio de un bucle, para cada tipo de los modelos anteriormente expuestos:

- Modelo de puntos: interpolación lineal
- Modelo de curvas primitivas: interpolación de Lagrange
- Modelo de curvas aproximadas: reconstrucción de polinomios de Bernstein

Todas las anteriores funciones consisten en polinomios o funciones racionales, por lo que el interés fundamental se centra en la inmediatez de su manipulación por medio del cálculo integral.

La función constructiva, también a trozos, se construye a raíz de asociar un valor de peso específico a un dominio, que debe estar relacionado con un conjunto de curvas, de manera que el dominio de dicha curva se asocie al dominio de la función constructiva.

Las funciones de cargas exteriores se introducen del mismo modo que en cualquier otro procedimiento informático estructural, en función del tipo de acción, conformándose finalmente mediante la suma de todas, como función a trozos:

- Carga puntual: magnitud y coordenadas del punto de aplicación
- Carga lineal: magnitud y coordenadas inicial y final de la recta de aplicación
- Carga superficial: magnitud y coordenadas de los vértices del rectángulo de aplicación

Para computar la función peso siguiendo el procedimiento que se ha explicado anteriormente, es necesario realizar la subdivisión y ordenación del dominio, de manera que coincida entre las envolventes superior y la inferior, para posteriormente, mediante cálculo integral simbólico, obtener la solución.

La acción vertical total será la suma de los segmentos de las funciones peso y de carga exteriores, también de manera simbólica, ya que asimismo se encuentra expresada con las mismas variables. La computación de este paso puede hacerse de forma global y luego subdividir el dominio o mediante la suma de segmento a segmento, siendo este último las más eficiente desde el punto de vista del procedimiento computerizado.

A continuación se debe realizar la concatenación de funciones, determinando las constantes de integración y asegurando la continuidad de cada uno de los segmentos.

Resolución del equilibrio, coeficiente de seguridad y curvas límite

Finalmente, el CAS proporciona la ecuación de la curva de empujes, por aplicación de las ecuaciones mostradas en el Capítulo anterior, por medio de funciones a trozos asociadas al dominio de la función carga vertical.

La obtención de las curvas límite se computa directamente sobre la función analítica anterior, resolviendo el sistema de ecuaciones de equilibrio y obteniéndose como solución una pareja de valores de empuje y una pareja de puntos de paso. En caso de que el equilibrio no pueda verificarse y que la ecuación de la curva de empujes no represente el equilibrio, las dos soluciones obtenidas intersecarán con la envolvente, extremo que se comprueba antes de exportar al CAD las soluciones.

Como el coeficiente de seguridad geométrico depende de la solución concreta de la curva de empujes, mediante el CAS se puede parametrizar el valor en dicha función respecto a las distancias entre las envolventes y la curva de empujes.

Tanto la ecuación de la curva de empujes, como las soluciones de las curvas límites y el coeficiente de seguridad parametrizado, son los datos necesarios para afrontar la última fase.

Verificación del equilibrio y parametrización de soluciones

La verificación gráfica se realiza mediante la particularización de la ecuación parametrizada. Muchos programas CAD permiten la visualización de parametrizaciones, por lo que la representación final pasa por seleccionar del modelo gráfico los elementos geométricos que lo solucionen (puntos de paso necesarios, pendiente de un punto, ...) o los valores oportunos (empujes entre la horquilla obtenida de las curvas límite).

Esta introducción puede ser de manera estática (en el sentido que de un valor se obtiene una única curva) o de manera dinámica (permitiendo la variación en tiempo real de la curva solución, en función de la modificación de los parámetros). Para esto último es necesario que el entorno CAD o el lenguaje de programación asociado, tenga esta función, siendo la visualización dinámica de resultados el procedimiento más intuitivo que el método analítico permite.

Resumen del algoritmo de programación

El diagrama de flujo del algoritmo anteriormente expuesto se muestra en la fig 8.2

fig 8.2 Diagrama de flujo del algoritmo de implementación (Figura del autor)

8.2 IMPLEMENTACIÓN DE LA SOLUCIÓN

Para comprobar que el algoritmo es computerizable y que la aplicación del método analítico es posible y efectiva (objeto, por otra parte para cuya comprobación se presenta esta tesis) es necesario implementarlo a nivel práctico, mediante un lenguaje de programación y un entorno informático. A continuación se muestra cómo se ha llevado a cabo el desarrollo de un prototipo computacional, valiéndose para ello de diferentes softwares comerciales disponibles, que se describen en detalle en los siguientes apartados.

Modelo geométrico

Como se ha mencionado en el capítulo anterior, la base para el diseño del algoritmo debe ser por un lado un software CAD y otro CAS. Para los ejemplos y casos de aplicación que se muestran a continuación, el modelado geométrico se ha realizado mediante el software Rhinoceros (McNeel 2007). Esta elección se fundamenta en los dos aspectos que se detallan a continuación.

El primero es la versatilidad que dicho programa permite en los tipos de modelado a partir del levantamiento, dado que es capaz de importar diversos formatos gráficos para creación de nubes de puntos, permite creación de mallas, curvas y superficies NURBS así como el diseño y delineación de formas geométricas primitivas. Por tanto permite la modelización de la información geométrica obtenida del levantamiento que se explica en el Capítulo 3.

El segundo, y quizás el más interesante para el propósito de este trabajo, es que dispone de una plataforma de desarrollo y lenguajes de programación tanto propios, como RhinosScripting, como generalistas como Rhino.Python que implementa el lenguaje Python en entorno .NET. Esto le ha permitido convertirse en un entorno para numerosas aplicaciones (Rippman 2016) y disponer de abundante documentación en línea. El hecho que Rhinoceros esté construido sobre la base de la librería OpenNURBS de código abierto, permite el acceso a numerosas herramientas libres y gratuitas.

El procedimiento analítico, como se ha comentado anteriormente, tiene su origen en un modelo geométrico previamente construido, por lo que se parte, en todo momento de un archivo 3dm previamente elaborado.

Obtención de la información geométrica

Para la obtención de los datos geométricos se emplea el plug-in de lenguaje de programación visual Grasshopper (Ruten 2007) que incorpora Rhinoceros, empleado fundamentalmente para diseño generativo y paramétrico que tiene la ventaja de una interacción muy directa entre la geometría y el usuario. Mediante una rutina implementada en IronPython con el uso de RhinoScripting, se selecciona de manera independiente los elementos geométricos que conforman cada una de la envolventes. Éstas, según se traten de un modelo u otro, se almacenan en un tipo de información y otro, siguiendo el esquema presentado en la figura

fig 8.3 Diagrama de flujo de la implementación de la obtención de información geométrica (Figura del autor)

8.3. Dado que IronPython no soporta el CAS elegido y no dispone de otro alternativo, es necesario exportar la información a un fichero externo temporal, que servirá para enlazar con el siguiente proceso. Dicho fichero, que se crea como fichero de texto de datos con extensión CSV (Comma-separated value, valores separados por comas) con las coordenadas separadas por comas (Código ASCII #44) y los puntos por retornos de línea (Código ASCII #13), que en el caso de puntos tiene la siguiente estructura, por cada envolvente, con $n \geq 2$:

Header	X_1	X_2	...	X_n
P1 / $\Gamma 1$	$P1_{x1}$	$P1_{x2}$	...	$P1_{xn}$
P2/ $\Gamma 2$	$P2_{x1}$	$P2_{x2}$	...	$P1_{xn}$
...	...	...	...	...
Pm/ Γm	Pm_{x1}	Pm_{x2}	...	Pm_{xn}

tabla 8.1 Estructura de datos de los archivos CSV con exportación geométrica de nodos X de los puntos de cada envolvente.

Header	Y_1	Y_2	...	Y_n
P1 / $\Gamma 1$	$P1_{y1}$	$P1_{y2}$	...	$P1_{yn}$
P2/ $\Gamma 2$	$P2_{y1}$	$P2_{y2}$	...	$P1_{yn}$
...	...	...	...	...
Pm/ Γm	Pm_{y1}	Pm_{y2}	...	Pm_{yn}

tabla 8.2 Estructura de datos de los archivos CSV con exportación geométrica de nodos Y (imagen de la función) de los puntos de cada envolvente.

tabla 8.3 Estructura de datos de los archivos CSV con exportación geométrica de curvas aproximadas.

En el caso de exportación de pesos, nodos y grado, posee el fichero formato similar:

Header	k	x1	...	xi	sep	w1	...	wm
Γ_1	k1	k11	...	k1i	#	w11	...	w1m
Γ_2	k2	k21	...	k2i	#	w21	...	w2m
...	...	...	...	...	...	...	...	...
Γ_n	kn	kn1	...	kni	#	wn1	...	wnm

Establecimiento de funciones y resolución analítica

Software y librerías empleados

Para continuar el lenguaje de programación empleado en el paso anterior, el procedimiento para el establecimiento de las funciones (geométricas, de peso y de carga) se ha realizado en Python mediante cuadernos de IPython (Pérez y Granger 2007). La ventaja de esta elección radica en que por medio de la instalación de una única distribución de código abierto, como es el caso de Anaconda, se puede disponer de las librerías libres necesarias para realizar la computación, como resulta ser la librería empleada Scipy (Oliphant et al 2001).

Cabe destacar, también la posibilidad de emplear el *cloud computing* (computación remota en la nube), con un CAS remoto como SAGEMath, que incorpora el paquete SymPy. Esta circunstancia no se ha podido comprobar, en el desarrollo del presente trabajo pero se debe mencionar por las enormes posibilidades que presenta.

El paquete para la computación simbólica empleado es la librería SymPy incluido en Scipy, que ofrece un entorno de cálculo simbólico y numérico comparable con otros softwares de código cerrado tales como Mathlab o Maple, pero con la ventaja de ser código abierto, libre, gratuito y escalable, es decir, sólo es necesario cargar las funciones y clases empleadas en el proceso. Este hecho aligera enormemente los recursos computacionales requeridos para el procedimiento.

Para el manejo de vectores y matrices, se emplea la librería Numpy (van der Walt, Colbert y Varoquaux 2011), que permite la definición y manejo de matrices de n -dimensiones y dispone de aplicaciones de álgebra lineal para su transformación. Esta capacidad será la que se emplee para manejar las funciones a trozos.

Funciones

Una vez leídos los datos de los elementos geométricos de los ficheros csv, con n nodos, estos se conforman en una lista de n valores. Por cada uno de ellos se obtiene el polinomio o bien por interpolación lineal (de grado 1), la interpolación de Lagrange (de grado $n+1$) o las bases B-splines mediante el algoritmo recursivo de Cox-De Boor (Piegel 1997).

A partir de la ellos se obtiene la matriz de Γ_{sup} y Γ_{inf} de $m \times 3$ dimensiones, mediante un numpy.array para cada envolvente, donde se almacena en $\Gamma_{m,1}$ la función, en $\Gamma_{m,2}$ el valor inicial del dominio y en $\Gamma_{m,3}$ el valor final del mismo.

Siguiendo el mismo procedimiento se crean las matrices de las funciones de cargas exteriores y de características constructivas (introducidas por el usuario), con los valores del dominio acotados.

Las funciones área A_{sup} y A_{inf} se llevan a cabo mediante un procedimiento en el cual se calcula la función integral entre $\Gamma_{m,m-1}$ y x , concatenando las funciones mediante la constante de integración $C = A_{m-1}(\Gamma_{m-1,2})$.

En este punto del método es en el que se debe realizar la partición del intervalo, para hacer coincidir los dominios de ambas funciones. Previamente se verifica que el inicio del dominio de las dos primeras funciones coincide así como el punto final del dominio de las últimas funciones, para asegurar que la estructura está definida por una envolvente conexa (ver Capítulo 7.2).

La ordenación y partición del dominio se realiza por comparación sucesiva de los dominios superior e inferior y añadiendo tantas filas a la matriz como sean necesarias (fig 8.4). Se aprovecha la creación de los subintervalos para restar las funciones áreas, introduciendo la función espesor y ancho, obtener, por tanto, la función peso propio ($w(x)$) que se almacena asimismo. Esto es posible mediante matrices unidireccionales definidas previamente como nulas, ya que los numpy.array no permiten su declaración de matrices vacías sin asignar valores previamente.

fig 8.4 Diagrama de flujo de la obtención de la función peso (Figura del autor)

La suma de cargas verticales externas se realiza directamente sobre la función peso propio, dado que se asume que los nodos de inserción de la carga coinciden con el inicio o final de alguna de las funciones, para obtener la función peso vertical. Todo ello se vuelve almacenar en un numpy.array con la estructura declarada anteriormente y volviendo a concatenar todos los segmentos.

Por último, el proceso de implementación de la ecuación de la curva de empujes, pasa por formular, para cada segmento de la función de cargas verticales, de manera simbólica, la ecuación general (6.28). El conjunto de funciones, con su dominio se graban en un fichero con un formato similar al anterior, junto con otro fichero de dominios de coma flotante.

Header	Tramo 1	Tramo 1	...	Tramo n
$e(x) / e(t)$	e_o	e_1	...	e_n

Header	Tramo 1	Tramo 1	...	Tramo n
D	D_o	D_1	...	D_n

En el caso de realizarse el procedimiento para curvas paramétricas, el dominio normalizado de n curvas es conocido $(0,1,2,...,n)$, sin embargo, para la representación es necesario la parametrización de la componente horizontal, que combinada con la ecuación de empujes, $e(t)$, dará lugar a las dos ecuaciones paramétricas de una curva plana.

Header	Tramo 1	Tramo 1	...	Tramo n
$x(t)$	$x_o(t)$	$x_1(t)$	...	$x_n(t)$
t	0	1	...	n

Por otra parte se resuelve el sistema de ecuaciones, por medio de las herramientas de cálculo numérico del paquete numpy, y en caso de tener solución, se obtienen los valores máximo y mínimo de los empujes, que se graban en un fichero

fig 8.5 Diagrama de flujo de la implementación para la obtención de la línea de empujes (Figura del autor)

fig 8.6 Ejemplo de salida de la consola de IPython con el resultado del análisis (Imagen del autor)

de texto, con la estructura de coma flotante y los puntos de paso que dan lugar a dicho empuje y la pendiente en ese punto.

Header	H	IOX	IOY	IOZ	m(IO)
Max/Min	valor	I _{ox}	I _{oy}	I _{oz}	m

Todo ello, se muestra en la consola de la terminal de Ipython, con objeto de detectar posibles errores de programación en el proceso de depuración del lenguaje (fig 8.6).

La exportación de los resultados de la línea de empujes se realiza por medio de otro archivo de intercambio de texto, para poder comunicar la información entre el CAS y el CAD.

Representación de la solución particularizada

La última fase del proceso pasa por leer las soluciones elaboradas en el CAS y mostrarlas en el software CAD. Al igual que en la primera fase, se emplea Rhinoceros (McNeel 2007) para la salida gráfica mediante el empleo del lenguaje de programación de geometría paramétrica Grasshopper con el componente RhinoPython. La visualización del resultado de la curva o superficie de empujes, se realiza mediante un componente que lee las funciones genéricas de la línea de empuje obtenidas en el paso anterior así como los dominios de la función a trozos (fig 8.7a). A partir de ahí se particularizan por medio de las entradas geométricas y numéricas necesarias. Las primeras (punto de paso inicial, punto de paso

fig 8.7 Componentes de Grasshopper para la lectura de Funciones y Dominios (a) y para la particularización de la curva de empujes (b) (Imagen del autor)

final,...) se obtienen directamente del modelo geométrico, por medio del componente Grasshopper específico que permite al usuario la selección del elemento.

La segunda se realiza mediante la introducción de un valor numérico único o mediante el empleo de un deslizador (*slider*; componente de Grasshopper que permite una introducción variable de los valores), para poder definir dinámicamente la curva particularizada (fig 8.7b).

Los valores de empujes máximos y mínimo son exportados a otro fichero de intercambio y leídos por un componente específico de Grasshopper que define el dominio numérico del deslizador. La pendiente inicial se obtiene asimismo mediante el cociente entre la reacción vertical en el punto de partida y el empuje horizontal. Dicha reacción se obtiene como una fracción de la mitad del peso total que oscila entre 0 y 2.

La ventaja principal de emplear el mismo soporte radica en que la solución se visualiza directamente sobre el modelo geométrico, lo que permite asimismo, disponer de parámetros dinámicos permitiendo la interactividad y la inmediatez de la visualización de los resultados, siendo esta, una de las grandes ventajas del procedimiento (fig 8.8).

Por otra parte, al estar ligado el análisis estructural al modelo geométrico, la modificación de este último provoca la modificación automática del primero, lo que conlleva asimismo la ventaja de poder manipular la geometría para visualizar las consecuencias estructurales.

fig 8.8 Ejemplo de salida gráfica del resultado del análisis en Rhinoceros de un arco enjutado (Imagen del autor)

PARTE 3

CASOS DE ESTUDIO: APLICACIONES Y RESULTADOS

CAPÍTULO 9. CALIBRACIÓN Y EVALUACIÓN

9.1 Ejemplos de aplicación en estructuras idealizadas

9.2 Estudio comparativo de los diferentes métodos

9.1 EJEMPLOS DE APLICACIÓN EN ESTRUCTURAS IDEALIZADAS

A continuación se muestran una serie de ejemplos de aplicación para estructuras geoméricamente sencillas, como muestra de la validez del procedimiento analítico. En ellas, se realiza la verificación el equilibrio mediante el dibujo de la línea de empujes, en el interior de la misma aplicando el prototipo de solución informática descrita en el Capítulo anterior. En todas ellas, para mostrar la aplicabilidad del procedimiento, se particulariza la curva de empuje genérica mediante los siguientes condicionantes:

- Punto de paso I_0 : situado en el punto medio de la clave, esto es en el eje de simetría de las estructuras que son simétricas o en $x = 0$ en caso contrario.
- Pendiente m en I_0 : para las estructuras simétricas, de geometría y carga, se condiciona a que curva de empujes en I_0 sea horizontal, por lo que m es nulo, mientras que en caso de un arbotante, se establece además el caso de un pendiente horizontal producida por un empuje vertical V_0 con el objeto de recrear el empuje pasivo.

Los resultados del análisis que se muestran son aquellos que son necesarios para la validación técnica de la estabilidad y por extensión en los casos que se mencionan en el Capítulo 6, para la validación estructural. Esta información es la que se recogen en informes técnicos de estabilidad (Huerta y Fuentes 2013), trabajos académicos sobre estabilidad de estructuras de fábrica edificios existentes (Benito 2011, Llopis 2014) o los resultados del análisis límite obtenidos por softwares comerciales (LimitState 2007) consistentes en:

- Dibujo de una curva de empuje, acorde a las cargas y acciones establecidas y particularizada para un valor de empuje horizontal y la carga total vertical obtenida, en el interior de la estructura y relleno o enjuta.
- Posición del punto de paso de la curva por los arranques y la clave o por el punto más cercano a cada envolvente según el tipo de estructura, en dimensiones absolutas y posición relativa en tanto por 1.
- Coeficiente geométrico de seguridad para dicha curva de empujes
- En algunos casos, valores máximo y mínimos de los empujes horizontales

Los ejemplos analizados se tratan de modelos geométricos modelizados todos ellos mediante curvas primitivas. Estas se dividen en tres grupos:

- Estructuras planas exentas: diferentes tipos de modelos 2D de arcos de diferentes tipos
- Estructuras planas enjutadas: modelos 2D de arcos de diferentes tipos enjutados y
- Estructuras espaciales: ejemplos de modelos 3D de cúpulas (revolución de arcos) y bóvedas (traslación de arcos) de diferente geometría.

Se estima un peso específico aparente constante de valor $\gamma = 28 \text{ kN/m}^3$ y un ancho constante en los dos primeros casos de 1.0 m. Las cargas exteriores son nulas, analizados exclusivamente a carga vertical de peso propio.

Arcos planos exentos

Arco de medio punto

El arco de medio punto presentado (fig 9.1a) salva una luz de 8.61 m, mediante una semicircunferencia cuyo centro se sitúa en el punto medio, con un espesor constante de 1.19 m (fig 9.1b). Se realiza mediante un único estrato de fábrica, de material homogéneo y peso específico constante.

fig 9.1 Arco de medio punto exento: vista general (a) y definición geométrica (b) (Dibujos del autor)

El resultado de una curva particularizada que verifica la estabilidad se obtiene con los siguientes parámetros y coeficiente de seguridad geométrico (fig 9.2a):

- $I_0 = 0.62$ m interior / 0.57 m exterior
- $H = 93.63$ kN
- $I_1 = 0.97$ m interior / 0.58 m exterior
- $\gamma_{\text{geom}} = 2.55$

Las curvas límite tienen por valores de empujes (fig 9.2b):

- $H_{\text{max}} = 135.17$ kN
- $H_{\text{min}} = 63.63$ kN
- $V = 218.58$ kN

fig 9.2 Resultado del análisis para una curva particularizada (a) y curvas límite con los valores de empujes y los puntos donde se producen las articulaciones (b) (Dibujos del autor)

$H = 95.63$ kN
 $\gamma_{\text{geom}} = 2.48$

(a)

$H_{\text{max}} = 134.02$ kN
 $H_{\text{min}} = 63.47$ kN

$V = 223.24$ kN

H_1

(b)

Arco apuntado

fig 9.3 Arco apuntado exento: vista general (a) y definición geométrica (b) (Dibujos del autor)

El resultado para una curva genérica que verifica la estabilidad se obtiene con los siguientes parámetros y se obtiene el siguiente coeficiente de seguridad geométrico (fig 9.4a):

- $I_0 = 0.36 \text{ m interior} / 0.43 \text{ m exterior}$
- $H = 23.30 \text{ kN}$
- $I_1 = 0.45 \text{ m interior} / 0.58 \text{ m exterior}$
- $\gamma_{\text{geom}} = 2.67$

Las curvas límite tienen por valores de empujes (fig 9.4b):

- $H_{\text{max}} = 32.22 \text{ kN}$
- $H_{\text{min}} = 16.54 \text{ kN}$
- $V = 112.82 \text{ kN}$

fig 9.4 Resultado del análisis para una curva particularizada (a) y curvas límite con los valores de empujes y los puntos donde se producen las articulaciones (b) (Dibujos del autor)

Arco rebajado

El arco rebajado mostrado (fig 9.5a), posee una luz de 7.08 m, realizado mediante un arco de circunferencia con radio interior de 4.32 m y espesor constantes de 1.18 m (fig 9.5b). Se realiza mediante un único estrato de fábrica, de material homogéneo y peso específico constante.

fig 9.5 Arco rebajado exento: vista general (a) y definición geométrica (b) (Dibujos del autor)

El resultado para una curva genérica que verifica la estabilidad se obtiene con los siguientes parámetros y se obtiene el siguiente coeficiente de seguridad geométrico (fig 9.6a):

- $I_0 = 0.64$ m interior / 0.54 m exterior
- $H = 117.84$ kN
- $I_1 = 0.45$ m interior / 1.10 m exterior
- $\gamma_{geom} = 12.55$

Las curvas límite tienen por valores de empujes (fig 9.6b):

- $H_{max} = 183.92$ kN
- $H_{min} = 62.08$ kN
- $V = 161.14$ kN

fig 9.6 Resultado del análisis para una curva particularizada (a) y curvas límite con los valores de empujes y los puntos donde se producen las articulaciones (b) (Dibujos del autor)

Arbotante

Se analiza un arbotante como ejemplo (fig 9.7a), que salva una luz de 4.46 m, realizado mediante un arco de circunferencia y espesor variable entre 1.24 m y 3.43 m (fig 9.7b). Se realiza mediante un único estrato de fábrica, de material homogéneo y peso específico constante.

fig 9.7 Arco adintelado inclinado o estribo: vista general (a) y definición geométrica (b) (Dibujos del autor)

El resultado para una curva genérica que verifica la estabilidad se obtiene con los siguientes parámetros y el coeficiente de seguridad geométrico obtenido es (fig 9.8a):

- $I_0 = 0.35$ m interior / 0.90 m exterior
- $H = 100.20$ kN / $V_0 = 0.00$
- $I_1 = 2.096$ m interior / 1.34 m exterior
- $\gamma_{\text{geom}} = 3.36$

Las curvas límite tienen por valores de empujes (fig 9.8b):

- $H_{\text{max}} = 250.62$ kN / $V_0 = 0.00$
- $H_{\text{min}} = 31.35$ kN / $V_0 = 0.189$ V
- $V = 151.01$ kN

fig 9.8 Resultado del análisis para una curva particularizada (a) y curvas límite con los valores de empujes y los puntos donde se producen las articulaciones (b) (Dibujos del autor)

$H = 100.20$ kN / $V_0 = 0.00$ kN
 $\gamma_{\text{geom}} = 3.36$

(a)

$H_{\text{max}} = 250.62$ kN / $V_0 = 0.00$
 $H_{\text{min}} = 31.35$ kN / $V_0 = 0.189$ V

$V = 151.01$ kN

(b)

Estructuras planas enjutasas

Arco de medio punto

El arco de medio punto analizado (fig 9.9a), posee la misma geometría que en el caso anterior al que se le añade una enjuta de altura 6.80 m de altura (fig 9.9b). Se realiza, tanto arco como enjuta, mediante un único estrato de fábrica, de material homogéneo y peso específico constante.

fig 9.9 Arco de medio punto enjutado: vista general (a) y definición geométrica (b) (Dibujos del autor)

El resultado para una curva genérica que verifica la estabilidad se obtiene con los siguientes parámetros y se obtiene el siguiente coeficiente de seguridad geométrico (fig 9.10a):

- $I_0 = 0.58 \text{ m interior} / 0.61 \text{ m exterior}$
- $H = 241.24 \text{ kN}$
- $I_1 = 0.66 \text{ m interior} / 0.90 \text{ m exterior}$
- $\gamma_{\text{geom}} = 2.52$

Las curvas límite tienen por valores de empujes (fig 9.10b):

- $H_{\text{max}} = 365.33 \text{ kN}$
- $H_{\text{min}} = 164.59 \text{ kN}$
- $V = 675.52 \text{ kN}$

fig 9.10 Resultado del análisis para una curva particularizada (a) y curvas límite con los valores de empujes y los puntos donde se producen las articulaciones (b) (Dibujos del autor)

Arco apuntado

El arco apuntado enjutado que se muestra de ejemplo (fig 9.11a), tiene la misma geometría que en el ejemplo anterior con una enjuta de 7.50 m de altura (fig 9.11b). Se realiza mediante un único estrato de fábrica, de material homogéneo y peso específico constante, tanto arco como enjuta.

fig 9.11 Arco apuntado enjutado: vista general (a) y definición geométrica (b) (Dibujos del autor)

El resultado para una curva genérica que verifica la estabilidad se obtiene con los siguientes parámetros y se obtiene el siguiente coeficiente de seguridad geométrico (fig 9.12a):

- $I_0 = 0.30$ m interior / 0.49 m exterior
- $H = 83.35$ kN
- $I_1 = 0.61$ m interior / 0.42 m exterior
- $\gamma_{geom} = 2.93$

Las curvas límite tienen por valores de empujes (fig 9.12b):

- $H_{max} = 120.20$ kN
- $H_{min} = 56.15$ kN
- $V = 422.94$ kN

fig 9.12 Resultado del análisis para una curva particularizada (a) y curvas límite con los valores de empujes y los puntos donde se producen las articulaciones (b) (Dibujos del autor)

Arco rebajado

El arco rebajado analizado en este ejemplo(fig 9.13a), tiene la misma geometría que el anterior, al que se le añade una enjuta de 412 m de altura, (fig 9.13b). Se realiza mediante un único estrato de fábrica, de material homogéneo y peso específico constante.

fig 9.13 Arco rebajado enjutado: vista general (a) y definición geométrica (b) (Dibujos del autor)

El resultado para una curva genérica que verifica la estabilidad se obtiene con los siguientes parámetros y se obtiene el siguiente coeficiente de seguridad geométrico (fig 9.14a):

- $I_0 = 0.64 \text{ m interior} / 0.54 \text{ m exterior}$
- $H = 117.84 \text{ kN}$
- $I_1 = 0.45 \text{ m interior} / 1.10 \text{ m exterior}$
- $\gamma_{\text{geom}} = 12.55$

Las curvas límite tienen por valores de empujes (fig 9.14b):

- $H_{\text{max}} = 183.92 \text{ kN}$
- $H_{\text{min}} = 62.08 \text{ kN}$
- $V = 161.14 \text{ kN}$

fig 9.14 Resultado del análisis para una curva particularizada (a) y curvas límite con los valores de empujes y los puntos donde se producen las articulaciones (b) (Dibujos del autor)

fig 9.15 Arco adintelado inclinado o estribo: vista general (a) y definición geométrica (b) (Dibujos del autor)

Arbotante con estribo

Se analiza un arbotante que traslada los empujes a un estribo de manera independiente (fig 9.15a), que salva una luz de 5.30 m, realizado mediante dos arcos de circunferencia de 5.35 m y 4.23 m de radio. El arbotante tiene espesor variable entre 1.45 m y 3.75 m, mientras el estribo una altura de 12.00 m y un canto constante de 2.68 m (fig 9.7b). Se realiza mediante un único estrato de fábrica, de material homogéneo y peso específico constante.

El resultado para una curva genérica que verifica la estabilidad se obtiene con los siguientes parámetros y el coeficiente de seguridad geométrico obtenido es (fig 9.16a):

- $I_0 = 0.73\text{m interior} / 0.73\text{ m exterior}$
- $H = 116.38\text{ kN} / V_0 = 0.00$
- $I_1 = 2.36\text{ m interior} / 0.32\text{ m exterior}$
- $\gamma_{\text{geom}} = 2.05$

La única curva límite que verifica el equilibrio es tangente al estribo y tienen por valores de empujes (fig 9.16b):

- $H_{\text{min}} = 42.60\text{ kN} / V_0 = 0.046\text{ V}$
- $V = 883.37\text{ kN}$

Dado que el empuje se localiza por el tercio exterior, no es necesario comprobar el ancho reducido por fractura parcial del estribo, ya que esta no se produce.

fig 9.16 Resultado del análisis para una curva particularizada (a) y curvas límite con los valores de empujes y los puntos donde se producen las articulaciones (b) (Dibujos del autor)

Estructuras espaciales

Cúpula semiesférica

fig 9.17 Vista general de la cúpula semiesférica (a) y su geometría (b) (Dibujos del autor)

La cúpula estudiada que se muestra a continuación (fig 9.17a) se trata de un casquete esférico, de que salva 15.50 m de luz con un espesor constante de 1.00 m (fig 9.17b). Se realiza con un único estrato de fábrica cuyo peso específico tiene un valor de 24.0 kN/m^3 y que carece de acciones exteriores, por lo que sólo existe carga vertical de peso propio.

El análisis se realiza siguiendo la premisa de que la cúpula se agrietará, siguiendo los meridianos, por lo que el comportamiento es equivalente a una sucesión de arcos colocados radialmente, y equilibrados dos a dos. Por ello, en el caso de no existir óculo, es necesario que los empujes se equilibren por medio del paso del eje central, entre la altura del vértice de la superficies exterior y la interior.

La superficie se analiza, como se ha comentado en el capítulo 7.5, mediante dos familias de planos. Se ha elegido como la primaria, los planos verticales radiales, que definen el espesor variable como función que depende del radio de revolución θ . Como familia de planos secundaria se ha optado por el conjunto de planos verticales perpendiculares a los anteriores.

La superficie genérica que verifica el equilibrio, se particulariza mediante los parámetros que se mencionan a continuación (fig 9.18a):

- $I_0 = 0.50 \text{ m interior} / 0.50 \text{ m exterior}$
- $H = 339.13 \theta \text{ kN/rad}$
- $I_1 = 0.37 \text{ m interior} / 0.63 \text{ m exterior}$
- $\gamma_{\text{geom}} = 1.56$

Las superficies límites (fig 9.18b), que producen el número de articulaciones suficientes para transformar en isostática se muestra a continuación:

- $H_{\text{max}} = 492.12 \theta \text{ kN/rad}$
- $H_{\text{min}} = 307.22 \theta \text{ kN/rad}$
- $V = 1739.04 \theta \text{ kN/rad}$

Cabe mencionar que al ser una superficie de revolución, dicha articulación forma una circunferencia, coincidiendo con el paralelo en el que se forma la articulación. En el caso de la superficie de empuje máximo corresponde con la circunferencia exterior de la base y el vértice de la envolvente inferior, mientras que el caso de empuje mínimo, se trata de una circunferencia en la envolvente exterior y otra interior.

fig 9.18 Resultado del análisis para una curva particularizada (a) y curvas límite con los valores de empujes y los puntos donde se producen las articulaciones (b) (Dibujos del autor)

Cúpula apuntada

fig 9.19 Vista general de la cúpula apuntada con linterna (a) y su definición geométrica (b) (Dibujos del autor)

La cúpula apuntada que se analiza (fig 9.19a) se genera mediante la revolución de dos arcos apuntados, cuyos centros se sitúan a la cota del arranque de la misma. Salva una luz de 15.0 m con un espesor variable entre 1.25 m en el arranque y 0.75 m en la parte superior (fig 9.19b). La cúpula dispone de una abertura superior de 4.00 m de diámetro.

Se realiza con un único estrato de fábrica cuyo peso específico tiene un valor constante de 24.0 kN/m^3 . En el perímetro se le añade una carga circular, con la intención de recrear el peso vertical de una posible linterna, de valor 1 kN/grad , por lo que el análisis de la misma se realiza con el peso propio y la carga exterior adicional.

Asimismo, se analiza con la premisa de encontrarse grietas, por lo que los gajos resultantes se asimilan a arcos enfrentados. Sin embargo, al disponer de un óculo, el empuje horizontal, en este caso debe transmitirse radialmente, quedando equilibrada mediante un anillo de compresión superior (Heyman 1996).

Al igual que en el caso anterior, se dispone de una familia de planos principal de disposición radial y una secundaria perpendicular a la misma.

En este caso, la superficie que verifica el equilibrio, es particularizada mediante los siguientes parámetros (fig 9.20a):

- $I_0 = 0.30 \text{ m interior} / 0.52 \text{ m exterior}$
- $H = 255.88 \theta \text{ kN/rad}$
- $I_1 = 0.73 \text{ m interior} / 0.52 \text{ m exterior}$
- $\gamma_{\text{geom}} = 1.79$

Los empujes máximos y mínimos que generan las superficies límites (fig 9.20b), son las que se expresan a continuación:

- $H_{\text{max}} = 324.70 \theta \text{ kN/rad}$
- $H_{\text{min}} = 210.39 \theta \text{ kN/rad}$
- $V = 2063.51 \theta \text{ kN/rad}$

Al igual que en el caso anterior, al tratarse de una superficie de revolución, las tangencias de las superficies límites con las envolventes dan lugar a circunferencias en los meridianos. Cuando el empuje es mínimo la circunferencia de tangencia se da en el tradós y en el intradós de la cúpula, mientras que, cuando el empuje es máximo, aparece en un meridiano del interior.

fig 9.20 Resultado del análisis para una curva particularizada (a) y curvas límite con los valores de empujes y los puntos donde se producen las articulaciones (b) (Dibujos del autor)

Bóveda de cañón

fig 9.21 Vista general de la bóveda de cañón con relleno en los hombros (a) y geometría (b) (Dibujos del autor)

La bóveda de medio cañón que se presenta para el análisis (fig 9.21a) se conforma mediante la traslación de dos arcos de medio punto que corresponden con dos semicircunferencias. La luz que salva la bóveda es de 15.0 m mientras que posee una dimensión longitudinal también de 15.0 m. El espesor de la bóveda es constante de 0.83 m y posee un relleno en los riñones hasta los 5.40 m, como suele ser habitual en este tipo de estructuras (Mas-Guindal 2011). Dicho relleno se conforma mediante el trasdós de la bóveda y un muro vertical de 0.60 m de espesor (fig 9.21b).

La estructura se realiza mediante dos materiales. Por un lado la fábrica que tiene un peso específico constante y uniforme de 24.0 kN/m^3 y por otro el relleno, que se considera como rígido, con un peso específico de 18 kN/m^3 .

Al tratarse de una estructura de traslación, se puede analizar como plana de espesor constante o con dos familias de planos. Se considera esta segunda, estableciendo la familia primaria perpendicular al eje de traslación y la secundaria, los planos verticales perpendiculares a los anteriores.

La superficie particularizada de la solución general que verifica el equilibrio con los siguientes parámetros (fig 9.22a):

- $I_0 = 0.44\text{m interior} / 0.39\text{ m exterior}$
- $H = 127.08\text{ kN/m}$
- $I_1 = 1.17\text{ m interior} / 0.26\text{ m exterior}$
- $\gamma_{\text{geom}} = 1.34$

Las superficies límites que se obtienen con los empujes máximos y mínimos (fig 9.22b), son las que se expresan a continuación:

- $H_{\text{max}} = 148.32\text{kN/m}$
- $H_{\text{min}} = 100.08\text{ kN/m}$
- $V = 408.65\text{ kN/m}$

Al tratarse de una superficie de traslación, las articulaciones de las curvas límite se manifiestan mediante rectas paralelas al eje de traslación, que se manifiesta en el vértice superior de la envolvente exterior en la superficie de empuje mínimo y en el tradós, en un ángulo de 37° con la horizontal, las del intradós. El relleno, al considerarse rígido, permite que la superficie de máximo empuje pase por su interior, llegando a producir la articulación en el borde exterior.

fig 9.22 Resultado del análisis para una curva particularizada (a) y curvas límite con los valores de empujes y los puntos donde se producen las articulaciones (b) (Dibujos del autor)

Bóveda de arista

fig 9.23 Vista general de la bóveda de arista con relleno en el tradós (a) y su geometría (b) (Dibujos del autor)

Se analiza una bóveda de arista (fig 9.23a) generada por la intersección de dos bóvedas de cañón semicirculares, lo que conforma cuatro cuartos de bóveda. Dicha bóveda se genera asimismo por la traslación de dos arcos de medio punto, tratándose geométicamente de dos semicircunferencias, con una luz de 15 m. La bóveda posee un espesor constante de 0.15 m y se enclava mediante 4 arcos torales, dos arcos perpiaños y dos fajones, que se corresponden asimismo con dos arcos de circunferencias con un espesor de 0.64 m. La bóveda se estabiliza mediante un relleno en el trasdós que comprende el espesor de la bóveda y los arcos, hasta una altura de 5.57 m (fig 9.23b), lo que representa una altura de 0.7 de la altura total, tal y como muestra en uno de los ejemplos Mas-Guindal (2011).

Al igual que en el caso anterior, la estructura se realiza mediante la yuxtaposición de dos materiales: la fábrica y el relleno. El primero posee un peso específico constante y uniforme de 24.0 kN/m^3 mientras el otro, considerado rígido, posee peso específico de 18 kN/m^3 . El análisis se realiza por cada cuarto de bóveda, que al ser simétrico respecto los dos ejes, se estima que el empuje en la clave es horizontal. Como se ha explicado anteriormente, se trata de un arco plano de espesor

variable que va desde los 7.5 m en la clave hasta un espesor nulo en el arranque. Por ello se ha considerado la familia primaria de planos verticales paralelos a las arcos torales, mientras la secundaria los planos verticales paralelos al eje que une las claves, que corresponde a la familia perpendiculares a los anteriores. No se consideran acciones exteriores.

La superficie particularizada de la solución general que verifica el equilibrio de la plementería se ha obtenido con los siguientes parámetros (fig 9.24a):

- $I_0 = 0.12 \text{ m interior} / 0.03 \text{ m exterior}$
- $H = 196.92 \text{ kN/m}$; $V = 342.44 \text{ kN/cuarto de bóveda}$
- $I_1 = 2.45 \text{ m superior} / 3.12 \text{ m inferior}$
- $\gamma_{\text{geom}} = 2.52$

Los arcos formeros y fajones, se verifica el equilibrio con la siguiente particularización de las curvas (fig 9.24b):

- $I_0 = 0.03 \text{ m interior} / 0.61 \text{ m exterior}$
- $H = 54.20 \text{ kN}$; $V = 13.43 \text{ kN}$
- $I_1 = 1.00 \text{ m superior} / 4.57 \text{ m inferior}$
- $\gamma_{\text{geom}} = 2.83$

fig 9.24 Resultado del análisis para una superficie particularizada en la plementería (a) y en los arcos torales (b) (Dibujos del autor)

9.2 ESTUDIO COMPARATIVO DE LOS DIFERENTES MÉTODOS

Introducción

Mediante el estudio comparativo de distintos métodos de resolución del equilibrio de un mismo ejemplo, se presenta la verificación y validación de la herramienta de geometría analítica. Para ello se presenta el estudio de la misma estructura, un arco escarzano de espesor constante, en dos situaciones de carga exteriores. La primera se analiza con carga continua y peso propio

Los casos estudiados han sido extraídos de Mas-Guindal (2012), de manera que sirvan de comprobación y validación, la comparación de los resultados obtenidos con los expresados en dicho texto. Como se ha mencionado en el Capítulo 4.2, los análisis que se realizan son los siguientes:

1. Geometría Gráfica con CAD con planos radiales
2. Geometría Gráfica con CAD con planos verticales
3. Geometría Dinámica con curvas primitivas
4. Geometría Dinámica con curvas interpoladas
5. Geometría Analítica con modelo de puntos
6. Geometría Analítica con modelo de curvas primitivas
7. Geometría Analítica con modelo de curvas aproximadas

Las dos primeras se realizan con cálculo vectorial empleando la estática gráfica mediante el software de diseño AutoCAD (Autodesk 2015). Los casos 3 y 4 se realizan analíticamente con la representación gráfica realizado con Geogebra (International GeoGebra Institute 2012), empleando como envolvente en el primero las curvas primitivas (arcos de circunferencia) mientras en el otro el polinomio interpolado de Lagrange.

Los análisis 5, 6 y 7 se realizan mediante el prototipo de Geometría Analítica presentado en el capítulo anterior, con las diferentes modelados geométricos que se han establecido como punto de partida: nube de puntos, curvas primitivas interpoladas y curvas aproximados por curvas NURBS.

Como se muestra a continuación, cada uno de los análisis, presenta distintos grados de precisión, por lo que uno de los elementos a estudiar es la variación de los resultados entre ellos.

En cada uno de los análisis se presenta, con el ánimo de establecer la comparación anteriormente definida, la línea de empujes particularizada con el valor del empuje horizontal cuando ésta pasa por el eje de simetría ($x = 0$) a un tercio de la base y por los extremos a dos tercios del borde exterior. Asimismo se obtienen los valores de empuje que corresponden a las curvas límite, esto es, empuje máximo y empuje mínimo.

Arco rebajado de carga continua

El arco escarzano que se presenta a continuación (fig 9.25) según lo define Mas-Guindal (2012): “consiste en un semiarco de piedra [...] tiene directriz circular y soporta además de su peso propio, la acción de las cargas de cañón de piedra”. Se realiza mediante granito cuyo peso específico es 28 kN/m^3 , mientras la carga exterior es 150 kN/m .

fig 9.25 Arco rebajado con carga continua extraído de Mas Guindal (2012) (Dibujos del autor)

1. Geometría gráfica con CAD con planos radiales

El primer caso en analizar parte del dibujo geométrico de dicho arco realizado mediante AutoCAD, siguiendo el mismo procedimiento que sirve de ejemplo. Se realiza una serie de cortes radiales (Mas Guindal 2012) que sirven para posicionar los planos de corte de dónde se obtendrán la línea de empujes (fig 9.26). Cabe mencionar que estos cortes radiales son un tanto arbitrarios, ya que no pueden asimilarse a dovela debido a la ausencia de clave. Estas dovelas virtuales sirven asimismo para discretizar las cargas de peso propio y las exteriores.

fig 9.26 Definición geométrica del arco analizado mediante CAD con planos radiales (Dibujos del autor)

Se trata de un arco de espesor constante, lo que equivale a un arco exento plano. Las cargas de peso propio de cada pieza se determinan a partir del volumen de las mismas, mientras la carga lineal se determina en función de la proyección horizontal de la curva del trasdós. Al tratarse de una figura geométrica simétrica

respecto a la clave, se analiza sólo el semiarco derecho. Las cargas se muestran en la tabla 9.1:

tabla 9.1 Pesos y cargas para el análisis geométrico gráfico del arco rebajado con planos radiales

Pieza	Volumen [m³]	Peso [kN]	Longitud [m]	Carga [kN]	Total [kN]
#1	2,191	61,349	1,790	268,500	329,8488
#2	2,191	61,349	1,735	260,250	321,5988
#3	2,191	61,349	1,628	244,200	305,5488
#4	2,191	61,349	1,427	214,050	275,3988
#5	2,191	61,349	1,270	190,500	251,8488
#6	2,191	61,349	1,030	154,500	215,8488
TOTAL					1700.09

El resultado gráfico de las líneas de empuje límites (dado que se tratan de poligonales y no de curvas propiamente dichas(se muestra en la fig 9.27, siendo los valores de empujes:

- $H_{\max} = 2048.13 \text{ kN}$
- $H_{\min} = 1048.37 \text{ kN}$
- $V = 1700.09 \text{ kN}$

fig 9.27 Línea de empujes límite obtenidas mediante geometría gráfica con planos de corte radiales (Dibujos del autor)

La línea particularizada que verifica el equilibrio (fig 9.28), con los puntos de paso fijos, posee un empuje horizontal:

- $H = 1610.83 \text{ kN}$

fig 9.28 Línea de empujes en equilibrio obtenidas mediante geometría gráfica con planos de corte radiales (Dibujos del autor)

2. Geometría gráfica con CAD con planos verticales

El segundo caso analizado se realiza, al igual que el anterior, mediante geometría gráfica a través de vectores con CAD, pero se diferencia del anterior en los planos de corte. Posee la misma definición geométrica, pero en este caso se plantean una serie de planos verticales perpendiculares al plano que contiene al arco que se emplea tanto para discretizar las cargas como para determinar la resultante de la línea de empujes (fig 9.29). De esta manera se asemeja el procedimiento gráfico al método analítico planteado.

fig 9.29 Definición geométrica del arco analizado mediante CAD con planos verticales (Dibujos del autor)

Geoméricamente, se definen igual que en el caso anterior, como un arco de espesor constante, con las cargas de peso propio de cada pieza determinadas a partir del volumen de las mismas. La carga lineal asignada a cada pieza también se determina en función de la proyección horizontal de la curva del trasdós. Al igual que el caso anterior, se analiza sólo el semiarco derecho, por tratarse de una figura simétrica y establecer como condición que la pendiente de la curva de empujes en el eje es nula. Las cargas asignadas a cada vector se muestran en la tabla 9.2:

tabla 9.2 Pesos y cargas para el análisis geométrico gráfico del arco rebajado con planos verticales

Pieza	Volumen [m³]	Peso [kN]	Longitud [m]	Carga [kN]	Total [kN]
#1	2,042	57,182	1,564	234,600	291,782
#2	2,034	56,949	1,516	227,400	284,349
#3	2,016	56,437	1,423	213,450	269,887
#4	1,983	55,521	1,286	192,900	248,421
#5	1,927	53,945	1,110	166,500	220,445
#6	1,828	51,178	0,900	135,000	186,178
#7	1,317	36,870	1,126	168,900	205,770
TOTAL				1706.83	

Una vez realizado el análisis vectorial, el resultado de las líneas de empuje que dan lugar a valor máximo y mínimos (fig 9.31), son los siguientes:

- $H_{\max} = 2002.04 \text{ kN}$
- $H_{\min} = 999.02 \text{ kN}$
- $V = 1706.83 \text{ kN}$

fig 9.30 Línea de empujes límite obtenidas mediante geometría gráfica con planos de corte verticales (Dibujos del autor)

El caso concreto de la línea de empujes que pasa por los puntos fijos mencionados anteriormente que verifica el equilibrio (fig 9.31), posee el siguiente empuje horizontal:

- $H = 1560.50 \text{ kN}$

fig 9.31 Línea de empujes en equilibrio obtenidas mediante geometría gráfica con planos de corte verticales (Dibujos del autor)

3. Geometría Dinámica con curvas primitivas

Los dos siguientes análisis se realizan mediante el software de geometría dinámica GeoGebra. El primero se define las curvas superior e inferior de la envolventes como funciones explícitas con ordenada positiva de arco de circunferencia (fig 9.32), de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\text{sup},1} &= \sqrt{-x^2 + 10.3^2} & -8.93 \leq x \leq 8.93 \\
 \Gamma_{\text{inf},1} &= -0.575x - 0.013 & -8.93 \leq x < -7.80 \\
 \Gamma_{\text{inf},2} &= \sqrt{-x^2 + 9^2} & -7.80 \leq x < 7.80 \\
 \Gamma_{\text{inf},3} &= 0.575x + 0.013 & 7.80 \leq x \leq 8.93
 \end{aligned} \tag{9.1}$$

Geométricamente se define igual que los anteriores y posee las mismas cargas. La asignación de cargas peso propio se realiza en función de la función volumen, que al tratarse de un arco simétrico, su dominio se encuentra entre $x = 0$ y $x = 8.93$. La carga exterior se define como carga continua constante $Q = 150 \text{ kN/m}$.

El análisis se realiza siguiendo el procedimiento descrito en el Capítulo 7, por lo que se emplea la definición analítica de la estructura, obteniéndose la función a trozos de la línea de empujes, que se representa sobre el mismo modelo. Los resultados de empuje mínimo (fig 9.33a) y empuje máximo (fig 9.33b) son los siguientes:

- $H_{\max} = 1846.50 \text{ kN}$

- $H_{\min} = 939.20 \text{ kN}$

Del mismo modo que en los casos anteriores, la particularización se realiza fijando los tres puntos de paso mencionados y obteniendo el siguiente resultado de empuje horizontal (fig 9.31):

- $H = 1472.00 \text{ kN}$

fig 9.32 Definición geométrica y analítica del arco analizado con Geometría Dinámica con curvas primitivas (Dibujo e Imagen del autor)

fig 9.33 Curvas de empujes límite máximas (izq) y mínima (dch) obtenidas mediante geometría dinámica con curvas primitivas (Imágenes del autor)

fig 9.31 Curva de empujes en equilibrio obtenidas mediante geometría dinámica con curvas primitivas (Imagen del autor)

4. Geometría Dinámica con curvas interpoladas

Para poder comparar con la interpolación de Lagrange realizada mediante el método analítico propuesto, se realiza un análisis mediante geometría dinámica interpolando los puntos mencionados a continuación. Para ello se emplea el comando *Polinomio* de GeoGebra, que devuelve el polinomio interpolador de Lagrange:

tabla 9.3 Nodos para la interpolación de las envolventes mediante el polinomio de Lagrange

$\Gamma_{\text{sup},1}$	(0.00,10.31)	(1.84,10.14)	(4.46,9.29)	(7.09,7.48)	(8.93,5.15)
$\Gamma_{\text{inf},1}$	(0.00,9.01)	(1.61,8.86)	(3.90,8.12)	(6.19,6.54)	(7.80,4.5)
$\Gamma_{\text{inf},2}$	(7.80,4.50)	(8.93,5.15)

fig 9.35 Definición geométrica y analítica del arco analizado con Geometría Dinámica con curvas interpoladas (Dibujo e Imagen del autor)

Al igual que los casos anteriores, al ser simétrico solo es necesario el análisis del semiarco positivo, por lo que el dominio que se encuentra en el dominio negativo se obtiene por simetría axial. Las funciones resultantes son las siguientes:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{sup},1} &= -\frac{3.38 \cdot 10^{15}}{5 \cdot 10^{18}} x^4 + \frac{1.65 \cdot 10^{15}}{2.5 \cdot 10^{17}} x^3 - \frac{3.37 \cdot 10^{15}}{5 \cdot 10^{18}} x^2 + \frac{1.65 \cdot 10^{15}}{2.5 \cdot 10^{17}} x \\ \Gamma_{\text{inf},1} &= -\frac{2.42 \cdot 10^{15}}{2.5 \cdot 10^{17}} x^4 + \frac{7.92 \cdot 10^{15}}{1 \cdot 10^{18}} x^3 - \frac{2.42 \cdot 10^{15}}{2.5 \cdot 10^{17}} x^2 + \frac{7.92 \cdot 10^{15}}{1 \cdot 10^{18}} x\end{aligned}\quad (9.2)$$

fig 9.36 Curvas de empujes límite máximas (izq) y mínima (dch) obtenidas mediante geometría dinámica con curvas interpoladas (Imágenes del autor)

El análisis realizado sigue el mismo procedimiento que en el caso anterior obteniéndose asimismo la función a trozos de la línea de empujes con los valores empuje mínimo (fig 9.36a) y empuje máximo (fig 9.36b) son los siguientes:

fig 9.37 Curva de empujes en equilibrio obtenida mediante geometría dinámica con curvas interpoladas (Imagen del autor)

- $H_{\max} = 1957.11 \text{ kN}$
- $H_{\min} = 998.27 \text{ kN}$

La particularización se realiza (fig 9.37), asimismo, fijando los tres puntos de paso m y obteniendo el siguiente resultado de empuje horizontal:

- $H = 1539.31 \text{ kN}$

5. Geometría Analítica con modelo de puntos

Los siguientes análisis se realizan aplicando el método propuesto por medio del prototipo de herramienta informática con distintos modelos. De esta manera se puede comparar el resultado con los anteriores y así determinar el grado de variación y precisión que se obtiene con cada uno de ellos.

En primer lugar se realiza un modelo de puntos (fig 9.38), que coinciden con los vértices de las piezas analizadas en el caso 1. Al igual que en las situaciones anteriores, es necesario únicamente introducir los elementos del semiarco positivo al tratarse de una estructura simétrica.

fig 9.38 Definición geométrica y modelo del arco analizado con Geometría Analítica con modelo de puntos (Dibujos del autor)

El análisis se realiza aplicando la herramienta descrita en el Capítulo 8, por medio de la interpolación lineal entre puntos consecutivos y obteniéndose la función a trozos de la línea de empujes, entre la envolvente superior e inferior. Por último se representa la salida sobre el modelo inicial, que se reconstruye para

fig 9.39 Curvas de empujes límite máximas y mínima obtenidas mediante geometría analítica con modelo de puntos (Dibujo del autor)

$$H_{\max} = 1958.17 \text{ kN}$$

$$H_{\min} = 992.07 \text{ kN}$$

visualizar los resultados. Los valores de empuje mínimo y empuje máximo (fig 9.39) obtenidos son los siguientes:

- $H_{\max} = 1958.17 \text{ kN}$
- $H_{\min} = 992.07 \text{ kN}$
- $V = 1706.58 \text{ kN}$

fig 9.40 Curva de empujes en equilibrio obtenida mediante geometría analítica con modelo de puntos (Dibujo del autor)

$$H = 1539.31 \text{ kN}$$

La particularización que verifica la estabilidad se realiza fijando los tres puntos de paso y obteniendo el siguiente resultado de empuje horizontal (fig 9.40):

- $H = 1539.31 \text{ kN}$

fig 9.41 Definición geométrica y modelo del arco analizado con Geometría Analítica con modelo de curvas primitivas (Dibujos del autor)

6. Geometría Analítica con modelo de curvas primitivas

En este caso, la estructura se modeliza geoméricamente mediante curvas primitivas en Rhinoceros (fig 9.41). Estas se tratan exclusivamente de arcos de circun-

ferencia y segmentos, que posteriormente se interpolarán en función del número de puntos obtenidos, que en este caso es el mismo que en el análisis 4.

La interpolación se realiza mediante la obtención de 3 nodos de Chebyshev junto a los extremos, lo que da lugar a un polinomio interpolador de grado 4, al igual que las funciones del caso 4 (9.2).

La representación de los resultados se realiza sobre el modelo inicial, cuyas curvas límites dan lugar a los valores de empuje mínimo y empuje máximo (fig 9.42) obteniéndose los siguientes datos:

- $H_{\max} = 1957.11 \text{ kN}$
- $H_{\min} = 998.27 \text{ kN}$
- $V = 1707.69 \text{ kN}$

fig 9.42 Curvas de empujes límite máximas y mínima obtenidas mediante geometría analítica con modelo de curvas primitivas (Dibujo del autor)

$$H_{\max} = 1957.11 \text{ kN}$$

$$H_{\min} = 998.27 \text{ kN}$$

Del mismo modo que en los casos anteriores, la particularización se realiza fijando los tres puntos de paso mencionados y obteniendo el siguiente resultado de empuje horizontal (fig 9.43):

- $H = 1539.31 \text{ kN}$

7. Geometría Analítica con modelo de curvas aproximadas

Por último se realiza un análisis mediante geometría analítica empleando para ello un modelo construido con curvas NURBS de grado 3 y pesos iguales a la unidad, dado que los arcos de circunferencia que definen la estructura, así lo permi-

fig 9.43 Curva de empujes en equilibrio obtenida mediante geometría analítica con modelo de curvas primitivas (Dibujo del autor)

$$H = 1539.31 \text{ kN}$$

fig 9.44 Definición geométrica y modelo del arco analizado con Geometría Analítica con modelo de curvas aproximadas NURBS (Dibujos del autor)

ten (fig 9.44). Estas curvas de Bézier se obtiene a partir de su polígono de control y se reconstruyen posteriormente por medio de las bases B-Spline.

El resultado del análisis se muestra directamente sobre el modelo, una vez obtenida la correspondiente curva de empujes genérica paramétrica. Las curvas límite obtenidas (fig 9.45) permiten conocer los valores de empujes máximo y mínimo que las producen:

- $H_{\max} = 2028.20 \text{ kN}$
- $H_{\min} = 1016.67 \text{ kN}$
- $V = 1714.38 \text{ kN}$

fig 9.45 Curvas de empujes límite máximas y mínima obtenidas mediante geometría analítica con modelo de curvas aproximadas NURBS (Dibujo del autor)

$$H_{\max} = 2028.20 \text{ kN}$$

$$H_{\min} = 1016.67 \text{ kN}$$

Del mismo modo que en los casos anteriores, la particularización se realiza fijando los tres puntos de paso mencionados y obteniendo el siguiente resultado de empuje horizontal (fig 9.43):

fig 9.46 Curvas de empujes límite máximas y mínima obtenidas mediante geometría analítica con modelo de curvas aproximadas NURBS (Dibujos del autor)

$$H = 1579.39 \text{ kN}$$

- $H = 1539.31 \text{ kN}$

Resultados de referencia

Los resultados obtenidos que sirven de punto de partida, son los que se reflejan en el mencionado texto Mas-Guindal (2012) bajo el epígrafe “Arco de dovelas de piedra”.

Los valores límite que se citan son los siguientes:

- $H_{\max} = 2069.00 \text{ kN}$
- $H_{\min} = 1043.00 \text{ kN}$
- $V = 1706.90 \text{ kN}$

Mientras la particularización de la curva que verifica estabilidad suficiente arroja el siguiente empuje horizontal:

- $H = 1482.00 \text{ kN}$

Discusión de los resultados

Como se observa, los resultados obtenidos, tanto para las curvas límite como para la particularización de la curva de empuje para los puntos de paso prefijados, son

tabla 9.4 Resumen de los resultados de empujes máximos, mínimos y empuje resultante para el punto de paso prefijado

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	Ref	Med
$H_{\max}$	2048,13	2002,04	1846,50	1854,40	1957,11	1958,17	2028,20	2069,00	1980,10
$H_{\min}$	1048,37	999,02	939,20	938,40	998,27	992,07	1016,67	1043,00	998,64
H_{eq}	1610,83	1560,50	1441,00	1472,00	1539,31	1539,31	1579,39	1482,00	1539,31

relativamente diferentes, que se resumen en la tabla 9.4 y se muestran en la fig 9.47.

Estas diferencias deben evaluarse desde dos puntos de vista. Por un lado el tipo de familia de planos para un mismo modelo (como en el caso de los análisis 1 y 2 y los valores de referencia) y por otro el tipo de modelo empleado (3 y 4 por un lado y 5, 6 y 7 por otro).

La familia de planos para el mismo modelo y procedimiento muestra, en los casos analizados una variación entre el 2.25 % y el 4.71%, lo que indica que la variación es más significativa cuanto menor es el empuje, siempre siendo menor en el caso de los planos verticales. Cabe mencionar también que el valor de referencia en el caso del empuje máximo es probablemente erróneo, (donde se muestra más diferencia con los datos obtenidos), ya que la curva obtenida es secante al trasdós en lugar de tangente dado que se ha obtenido directamente por traslado del funicular, lo que daría lugar a un mecanismo de colapso.

fig 9.47 resultado comparativo de los análisis realizados para el arco rebajado con carga lineal (Gráfico del autor)

Comparando los resultados obtenidos por el mismo procedimiento, pero con modelo diferentes, empleando el CAS de GeoGebra, indica que los valores son muy similares entre las curvas límite, y con una ligera variación del 2.15 % en la particularización. Sin embargo la diferencia es mucho mayor con respecto a la mediana de todos los ensayos.

La explicación a esto puede encontrarse en dos circunstancias. La primera en la propia precisión del CAS y en el número de dígitos significativos que emplea. Dado que se trata de un software de divulgación matemática, este aspecto no está especialmente cuidado, pero para la comparación entre ellos sí es útil. La segunda es el entorno de visualización, dado que al tratarse de un software no específico de diseño, la visualización y la particularización se realiza mediante el mencionado deslizador. Esto aporta la necesaria falta de precisión en los resultados.

En relación a la comparación entre los análisis realizados mediante la metodología analítica se muestra que la variación entre el modelo de puntos e interpolado es mínima (entre un 0.05% y 0.62%), mientras comparado con el modelo NURBS supone una variación entre el 3.58% y el 2.48% , que es menor que entre los dos primeros análisis.

Sin embargo si se toma como valor a comparar la mediana entre todos los obtenidos, el valor de empuje medio es exactamente el obtenido por los análisis 5 y 6 y varía ligeramente (5.54%) con respecto al 7.

Cabe mencionar también que los resultados obtenidos con el modelo de curvas aproximadas, se acerca a los obtenidos mediante cálculo gráfico vectorial con planos radiales, aunque el método sea diferente, pero el modelo se asemeja mucho más que por ejemplo una curva polinómica o una poligonal. Esto indica que la elección del modelo posee más importancia que el método elegido.

Como se puede observar con esta comparación y ya se ha mencionado anteriormente, el método de análisis no es único y no existe una “verdadera línea de empujes”. Lo que sí se desprende de la comparación mostrada, es que la precisión dependen de la calidad de modelo pero no en tanto se añada más información sino en cuanto el modelo se aproxime más al objeto construido.

Es por ello que la técnica de curvas por aproximación, supone una representación más adecuada que reduce la cantidad de información a modelizar frente, por ejemplo al modelo de puntos (que requiere para n puntos $n-1$ tramos de la función) o el modelo de interpolación (que requiere polinomios de grado n). Además si se normalizan dichas curvas, el dominio siempre va a ser 0..1, lo cual reduce la información a incorporar.

Por último, a partir de las diferencias tanto relativas como absolutas entre los resultados obtenidos, se puede afirmar que, a efectos prácticos, las discrepancias entre los valores no son significativas a la hora de evaluar una estructura histórica de fábrica. Esto se fundamenta principalmente en el hecho que con los coeficientes de seguridad (en este caso geométricos) que se establecen para validar la estructura, la variación de los empujes para uno u otro modelo se encuentra en un rango el cual es asumible por ello.

CAPÍTULO 10. APLICACIÓN A CONSTRUCCIONES REALES. ESTUDIO DE CASOS

10.1 Puente sobre el Arroyo Meaques, Madrid

10.2 Ruinas de la ermita de Santa María de Hontoba, Guadalajara

10.3 Sainte-Capelle, París

10.4 Discusión de los resultados

10.1 PUENTE SOBRE EL ARROYO MEAQUES, MADRID

Introducción histórica

En la región de Madrid se conservan diversos puentes de carácter histórico, que muestran como ha ido evolucionando el diseño a lo largo del tiempo, pero empleando prácticamente los mismos sistemas constructivos a lo largo del tiempo. La Conserjería de Cultura, Deporte y Turismo de la Comunidad de Madrid (Dirección General de Turismo, 2009), con el fin de promocionar los Puentes Históricos editó una guía para dar visibilidad a una serie de puentes notables, que podían ser objeto de interés turístico y científico. Para ello se crean una serie de rutas turísticas que recogen ciertos lugares de interés así como edificios y puentes históricos que se encuentran a su paso.

Entre ellos, de los que se encuentran en el municipio de Madrid, se destacan una serie de construcciones, mandadas construir por Carlos III con el fin de delimitar y cerrar el “Real Bosque”, hoy denominado como Casa de Campo, a finales del s. XVIII. En la confluencia con los arroyos que acceden a ésta por el Oeste, se encuentra un tipo de puente, denominado “reja”, con la doble función de permitir por una parte el paso del agua y por otra, servir de cerramiento.

Por el borde Oeste de la Casa de Campo, quedan relativamente bien conservados restos de dicha cerca, realizada mediante tramos de diversos tipos de fábrica (fig 10.1). En este límite, se introducen una serie de pequeños arroyos que recorren transversalmente la misma y que desembocan en el Río Manzanares, situados en el límite Este.

La entrada del Arroyo de Prado del Rey y del Arroyo Meaques en la Casa de Campo se realiza por una de estas rejas. El entorno de ambas se encuentra modificado por la urbanización de los accesos y el desarrollo urbanístico del municipio de Pozuelo de Alarcón, sirviendo estos cerramientos como delimitación municipal. Fue levantada en 1780, por Francisco Sabatini, como parte del cierre Oeste del parque.

fig 10.1 Vista parcial de la tapia Oeste de la Casa de Campo, en su delimitación entre los municipios de Madrid y Pozuelo de Alarcón (Fotografía del autor)

fig 10.2 Vista general del Puente sobre el Arroyo Meaques de Madrid (Fotografía del autor)

Definición geométrica

El puente sobre el Arroyo Meaques (fig 10.2) consiste en un paño rectangular simétrico de 18.32 m de longitud y de altura variable de 3.61 m en el centro y 3.25 m en los extremos, donde se abren tres arcos escarzanos, apoyados sobre cuatro pilas (fig 10.3).

Tanto las pilas centrales como los estribos, disponen de tajamares con el fin de cortar la corriente de agua en los casos de crecida de río y reducir la acción sobre la estructura. En la actualidad, el estribo izquierdo y parcialmente el derecho se han visto enterrados por la canalización del arroyo en el entorno del acceso.

Descripción constructiva

El paño principal se realiza mediante fábrica de ladrillo macizo de tejar y mortero de cal, de 4 pies y 1/2 de espesor con lo que se obtiene un ancho total del puente de entre 100 y 110 cm (fig 10.4a). Se encuentra llagueada vertical y horizontalmente, con juntas de 3 a 5 cm. Los ladrillos de los arcos, tanto el central como los laterales, se disponen radialmente respecto al centro de la circunferencia que define el intradós.

fig 10.3 Definición geométrica del Puente sobre el Arroyo Meaques, Madrid (Dibujo del autor)

fig 10.4 Detalles de los elementos constructivos del Puente: fábrica de ladrillo (izq) y pilas de granito (dch) (Fotografías del autor)

El arranque de estos sobre las pilas forma aproximadamente 40° respecto a la horizontal, por lo que lo más probable es que arranquen sobre un plano inclinado. Éste dato no se puede comprobar directamente ya que el intradós de los arcos se encuentra enfoscado, en lo que es un trabajo de mantenimiento muy posterior. El valor del peso específico de la fábrica se puede establecer en 18.0 kN/m^3 (Pérez-Gálvez, Rodríguez-Liñán y Rubio 2009).

Por otra parte, tanto las pilas como los estribos, están contruidos mediante sillares regulares de gran tamaño de granito de Guadarrama (fig 10.4b). Dichas piezas se encuentran labradas siguiendo una disposición semicircular y forman los tajamares, mientras que en la zona central de la pila están labrados en forma de bloque recto y tienen una altura aproximada entre 38 y 42 cm. La pieza inferior situada sobre el actual lecho del arroyo, sobresale ligeramente en dirección perpendicular al plano del puente, formando una pequeña basa, construida del mismo material. La piedra con la que está construida esta parte del puente, es la denominada Piedra Berroqueña, procedente del Suroeste de la Sierra de Guadarrama, con un peso específico de 27.0 kN/m^3 (Menduiña y Fort 2005).

tabla 10.1 Caracterización de los materiales que se encuentran en el Puente sobre el Arroyo Meaques, Madrid

Material	Peso específico [kN/m^3]
Fábrica de ladrillo macizo de tejar	18.0
Fábrica de granito de Guadarrama	27.0

Levantamiento y modelización geométrica

Para obtener la descripción geométrica del puente, se realiza inicialmente un levantamiento convencional por medio de flexómetro y telémetro láser. En dicho levantamiento se toman todas las medidas de manera que pueda dibujarse posteriormente mediante CAD. La simplificación de la geometría se realiza idealizando las figuras geométricas que lo componen en el proceso de dibujo: por un lado se establece la simetría respecto al eje axial del puente y por otro se igualan las dimensiones de los elementos geométricos que originalmente debieron ser iguales. Esto permite la reducción del trabajo a la hora de introducir el modelo geométrico (fig 10.5).

fig 10.5 Simplificación del modelo geométrico mediante idealización de la geometría (Dibujo del autor)

Posteriormente se realiza una verificación geométrica del modelo inicialmente mediante una restitución fotogramétrica empleando el software 123D Catch (Autodesk 2013), con el fin de comprobar la validación de las medidas obtenidas mediante el levantamiento (fig 10.6). Dicho proceso de restitución permite obtener un modelo tridimensional directamente importable por los programas de diseño. En este caso, el resultado es un modelo de mallas tridimensionales al que se le incorpora la información del color con objeto de incluir la información fotográfica.

Dado que el modelo de mallas contenía numerosas imprecisiones y errores, fundamentalmente fruto de elementos ajenos al modelo a estudiar, tales como reja, vegetación, pavimento, topografía, ... la información de dicho modelo se descarta a la hora de realizar el análisis.

Por último, se modeliza tridimensionalmente el objeto de análisis, partiendo del dibujo idealizado, mediante un modelo de superficies aproximadas con el software Rhinoceros, importando previamente la geometría bidimensional del levantamiento convencional (fig 10.7). De esta forma se dispone de un modelo geométrico apto para el empleo de la herramienta diseñada.

fig 10.6 Modelo fotogramétrico realizado con 123D Catch (Modelo e imagen del autor)

fig 10.7 Modelo geométrico tridimensional mediante superficies (Modelo y dibujo del autor)

Análisis estructural

El análisis estructural se realiza mediante el empleo del prototipo de herramienta descrito en el Capítulo 8 que emplea la geometría analítica mediante el método propuesto.

Para ello se parte de las superficies del modelo del que se extraen las dos familias de isocurvas, dando lugar por un lado a las curvas situadas en el plano de análisis y por otro las curvas que definen el espesor de cada elemento. El espesor es constante en los elementos de fábrica de ladrillo, mientras los tajamares es variable. Sin embargo, dado que la localización de la línea de empujes se realiza según planos verticales perpendiculares al plano que contiene al eje longitudinal del puente, la dimensión de los tajamares no interviene, por lo que ésta se desprecia. Por tanto, se consideran las pilas de espesor constante e igual al resto del puente.

Se distinguen dos estratos constructivos, uno por cada material descrito que se caracteriza por su peso específico según la Tabla 10.1 y las cargas aplicadas son exclusivamente las de peso propio de los elementos constructivos. No se ha tenido en cuenta la posible acción horizontal dinámica de la corriente del arroyo a la hora de realizar el análisis.

Se realizan dos análisis con diferentes situaciones de carga. En la primera, se aplican únicamente cargas de peso propio de la estructura, cuyo origen se encuentra en los elementos constructivos modelizados. Por otra parte en el segundo análisis a la situación de carga de peso propio se incorpora una sobrecarga de 5 kN/m^2 situada sobre el arco derecho, de manera que se pueda ver la modificación de la línea de empujes correspondiente.

Verificación del equilibrio y particularización de la superficie de empujes

Una vez determinada la ecuación general de las curvas de empujes para cada análisis, éstas se particularizan mediante el punto de paso en la clave de cada uno de los vanos y con la pendiente de dicho punto (fig 10.8 y 10.10). Los resultados son los siguientes:

ANÁLISIS 1: PESO PROPIO

Arco central

- $I_0 = 0.50 \text{ m interior} / 0.33 \text{ m exterior}$
- $H = 70.51 \text{ kN} / V_0 = 0.00$
- $m = 0$

Arco lateral

- $I_0 = 0.50 \text{ m interior} / 0.30 \text{ m exterior}$
- $H = 65.98 \text{ kN}$
- $m = 0.0148$

Estribo interior

- $I_1 = 0.61 \text{ m interior} / 0.63 \text{ m exterior}$

Estribo exterior

fig 10.8 Resultados de la verificación de la estabilidad y particularización de la curva de empujes del Análisis 1 (Dibujo del autor)

fig 10.9 Visualización de los resultados y verificación del equilibrio mediante la inclusión de la curva de empujes en el interior de la estructura del Análisis 1 (Dibujo del autor)

- $I_1 = 1.52 \text{ m interior} / 0.88 \text{ m exterior}$

Con todo ello se obtiene el siguiente coeficiente geométrico de seguridad global:

- $\gamma_{\text{geom}} = 4.49$

ANÁLISIS 2: PESO PROPIO + SOBRECARGA

Arco central

- $I_0 = 0.50 \text{ m interior} / 0.33 \text{ m exterior}$
- $H = 70.51 \text{ kN} / V_0 = 0.00$
- $m = 0$

Arco lateral derecho

- $I_0 = 0.53 \text{ m interior} / 0.28 \text{ m exterior}$
- $H = 52.76 \text{ kN}$
- $m = 0.473$

Arco lateral izquierdo

- $I_0 = 0.51 \text{ m interior} / 0.30 \text{ m exterior}$
- $H = 65.98 \text{ kN}$
- $m = 0.0148$

Estribo interior derecho

- $I_1 = 0.65 \text{ m interior} / 0.59 \text{ m exterior}$

Estribo interior izquierdo

- $I_1 = 0.61 \text{ m interior} / 0.63 \text{ m exterior}$

Estribo exterior derecho

- $I_1 = 1.41 \text{ m interior} / 0.99 \text{ m exterior}$

fig 10.10 Resultados de la verificación de la estabilidad y particularización de la curva de empujes del Análisis 2 (Dibujo del autor)

Estribo exterior izquierdo

- $I_1 = 1.52 \text{ m interior} / 0.88 \text{ m exterior}$

Con lo que se obtiene el siguiente coeficiente geométrico de seguridad global:

- $\gamma_{\text{geom}} = 4.49$

Lo que sirve para concluir que la curva de empujes obtenida para cada análisis, posee seguridad suficiente, que se visualiza directamente en el modelo geométrico (fig 10.9 y 10.11).

fig 10.11 Visualización de los resultados y verificación del equilibrio mediante la inclusión de la curva de empujes en el interior de la estructura del Análisis 2 (Dibujos del autor)

10.2 RUINAS DE LA ERMITA DE STA. MARÍA DE HONTOBA, GUADALAJARA

Introducción y contexto geográfico

El segundo ejemplo que se presenta para su análisis es el correspondiente a las ruinas de la ermita de la Santa María de Hontoba que se encuentran en el municipio de Hontoba en la provincia de Guadalajara. Perteneciente a la comarca de La Alcarria Baja, este pequeño municipio de algo más de 300 habitantes, se sitúa en el límite occidental de la provincia, lindando con la provincia de Madrid en los términos municipales de Loranca de Tajuña y Pioz.

Entre los arroyos de Hontoba y de Renera, afluentes del río Tajuña que en este tramo entra y sale de las comunidades de Madrid y Castilla La Mancha sucesivamente, se sitúa un promontorio que alcanza los 901 msnm donde se encuentran las ruinas (fig 10.10) que domina hacia el este el valle medio del Tajuña y hacia el sur el valle del arroyo de Hontoba (con una altitud media de 700 msnm) y el alto del Carabo,

Origen y evolución histórica

La existencia de un convento en este enclave es citado en el s. XVIII por fray Antonio de San Ignacio (García 1997b). Asimismo explica la existencia anterior al siglo XVI de una pequeña ermita medieval, que fue sustituida por el edificio del que actualmente existen sus ruinas y se edificó en la segunda mitad del siglo XVII.

La ermita, originalmente pudo pertenecer a la Orden de Calatrava, por lo que dada la situación en lo alto del promontorio que domina el valle medio del Tajuña, es posible que su origen sea el de «fortaleza o atalaya defensiva en tiempos de la reconquista cristiana, dirigida en esta comarca por los caballeros de la Orden de Calatrava» (García 1997b).

fig 10.10 Vista del promontorio donde se sitúan las ruinas de la ermita de Santa María de Hontoba (Fotografía del autor)

Según Fray Antonio de San Ignacio (García 1990), la actual edificación se inició en 1652, no finalizándose hasta 1662. La edificación pasó a pertenecer al convento de Santa Ana de Tendilla para pasar después a manos de la Orden de los Jerónimos. Tras la desamortización de Mendizábal de 1836, la ermita empezó su deterioro progresivo al quedar deshabitada, puesto que nadie se hizo cargo de su mantenimiento.

A pesar de ello, en la actualidad se sigue realizando anualmente una romería desde el municipio de Hontoba hasta el santuario, en honor a la Virgen de los Llanos (García 1997b), a pesar de encontrarse el edificio en estado ruinoso. Desgraciadamente, en la actualidad, las ruinas tienen como uso principal servir de estacionamiento y cobijo para el ganado ovino local con un evidente estado de abandono (fig 10.11)

Descripción geométrica

Entre los restos de las edificaciones que se levantaron originalmente, queda accesible fundamentalmente la ermita así como una construcción anexa a la entrada

fig 10.11 Vista interior de las ruinas de la ermita de Santa María de Hontoba hacia la cabecera (izq) y hacia la portada (dch) (Fotografías del autor)

fig 10.12 Levantamiento planimétrico de la ermita (Dibujos del autor a partir de Jaurreta 2015)

de la misma. Excavada en roca y a los pies de la ermita, se encuentran una serie de espacios, que pudieron servir de bodegas, caballerizas y otros espacios de servicio. De ellas quedan apenas unos muros que permiten intuir su función original.

De las edificaciones originales no se ha podido localizar levantamiento ni descripción gráfica alguna. El único levantamiento existente es el realizado a nivel académico teórico (Jaurrieta 2015) para evaluar su intervención.

La planta tiene forma de cruz latina de una única nave, con unas dimensiones totales de algo más de 32.00 m el brazo mayor y 18.05 m el brazo menor (fig 10.11), y los muros que quedan en pie se disponen con altura aproximadamente constantes, a pesar de situar sus arranques a cotas distintas.

El contrato de obras para la finalización del edificio ha sido localizado por Aurelio García López (García 1997) entre los protocolos de Pastrana, y está fechado el 24 de Julio de 1658. Esta documentación sirve para establecer una serie de supuestos, especialmente constructivos, para recuperar la geometría y características fundamentales de la construcción. Sirve, asimismo, de fuente primordial para las descripciones de materiales y sistemas de la época e intentar reconstruir la definición de lo que se ha perdido en la actualidad.

En dicho documento legal, se especificaba en relación a los muros «Que a de levantar las paredes de ella desde el estado que tienen arriba trece pies y medio que es desde unos dentellones que están formados para la cornisa de yeso por la parte de adentro». A partir de ello también se deduce, que el crucero se cerraba con una cúpula de media naranja sobre arcos de medio punto, y la nave principal, con bóveda de medio cañón.

Cabe destacar, la altura del suelo del altar respecto al resto de la nave principal, ya que aparecen una serie de mechinales a una altura importante, que parecen indicar la posición de un forjado intermedio. Bajo éste altar se situaba una pequeña cripta, que debería servir para el enterramiento del promotor de la obra, que se especificaba como una de las premisas del contrato original (García 1997).

Descripción constructiva

El estado ruinoso del edificio y el deterioro de los revestimientos, así como el colapso parcial de parte de la estructura muraria, permite la observación directa y la determinación de la composición constructiva del edificio, sin necesidad de calas ni prueba destructiva alguna. Los muros del edificio principal se conforman mediante combinación de diversas fábricas, principalmente mampostería de piedra caliza, ladrillo, sillerías o tapias.

En la fachada principal, se combinan verdugadas de ladrillo con cajones de mampostería formando el aparejo toledano, con refuerzo de sillería de piedra caliza en las esquinas (fig 10.13a), habiéndose o desprendido o desmontado los sillares de la esquina Sur.

Los desprendimientos en los muros perimetrales permiten intuir que se encuentran contruidos mediante una hoja exterior de mampostería seleccionada y una hoja interior de mampostería más tosca para revestimiento en la fachada princi-

fig 10.13 Detalles de los elementos constructivos de piedra caliza (izq) y la fábrica de mampostería (Fotografías del autor)

pal y tapia calicestrada en el resto. Los muros terminan revocándose el interior con un grueso revestimiento de yeso (fig 10.13b).

Del contrato de obras (García 1997), como se ha mencionado anteriormente, es posible extraer gran cantidad de información constructiva de la edificación original y cómo el edificio estaba inicialmente planteado. Sobre la construcción del crucero, que era uno de los elementos pendientes de acabar en dicho contrato, se especifica cómo se ejecutará diciendo «Y a de hacer cuatro arcos torales para la media naranja en los cuales han de cortar las paredes y han de ser de mampostería con sus esquinas en Piedra labrada y han de tener de grueso de tres pies de alto lo que baste para que quepa bien la media naranja».

En dichos arcos, que se encuentran en pie aunque con los revocos desprendidos, se puede comprobar que están ejecutados realmente con 3 pies y medio de fábrica de ladrillo, colocados radialmente a salvo la parte del centro del arco que se ejecuta a sogá (fig 10.14). La causa de este cambio de aparejo es desconocido.

Por otra parte, de las “paredes” que conformaban el cimborrio, apenas quedan algunos tramos sobre los arcos, pero efectivamente, se encuentra ejecutados con mampostería y piedra labrada en esquinas. La esquina sureste del cimborrio, aún posee una pieza de remate de granito, que es probable que corresponda con el alero, con lo cual la altura definitiva del elemento vertical.

De la bóveda de media naranja no ha llegado nada hasta nuestros días, salvo las pechinas, que se encuentran ejecutadas asimismo con ladrillo macizo y mampostería.

A partir de la información constructiva disponible se ha procedido a caracterizar constructiva los materiales, para asignarle los valores de peso específico necesarios para el análisis. Los arcos, realizados con ladrillo macizo se ha estimado en 18,0 kN/m² (Pérez-Gálvez 2009) mientras que la fábrica de mampostería en 24,0 kN/m². La sillería de las esquinas, realizada en piedra caliza se estima en un peso específico de 28,0 kN/m².

tabla 10.2 Caracterización de los materiales que se encuentran en las ruinas de la ermita de Santa María de Hontoba

Material	Peso específico [kN/m ³]
Fábrica de ladrillo macizo	18.0
Fábrica de mampostería	24.0
Sillería de caliza	28.0

Levantamiento y modelización geométrica

Como se ha mostrado anteriormente, el edificio se encuentra en estado ruinoso y los pocos elementos que quedan en pie, están cercanos al colapso. Dada la in-

fig 10.14 Geometría de los arcos torales (Dibujos del autor)

formación disponible entre las ruinas de la edificación y la documentación existente, y sin ánimo de aventurar elemento constructivo alguno, se parte de la geometría documentada (Jaurreta 2015) idealizándola y simplificándola, para poder acometer el análisis (fig 10.14), comprobando a partir de restitución fotográfica y comprobación de medidas in situ, las principales medidas.

Una vez idealizada y simplificada la geometría de los arcos que conforman el crucero, que son los elementos analizados estructuralmente, se ha elaborado un modelo tridimensional CAD, que permite contextualizar los elementos estudiados y completar la información (fig 10.15).

Verificación del equilibrio y particularización de la superficie de empujes

A partir de estos supuestos, y utilizando la geometría dinámica como herramienta de análisis y empleando los modelos en CAD a partir de los levantamientos existentes, se ha realizado el análisis estructural de los cuatro arcos del crucero.

fig 10.15 vista exterior (izq) e interior (dch) del modelo tridimensional de las ruinas de la ermita de Santa María de Hontoba (Modelo y dibujos del autor)

Una vez determinada la ecuación general de las curvas de empujes, incluyendo la información geométrica y constructiva en el método analítico, éstas se particularizan mediante el punto de paso en el arranque izquierdo de cada arco y con la pendiente de dicho punto (fig 10.16), manteniendo el mismo empuje horizontal en todos los arcos, de manera que se más sencillo comparar los coeficientes de seguridad resultantes. Unificar el valor del empuje no es necesario para verificar el empuje, ya que se pueden encontrar curvas válidas con diferentes valores, pero se ha estimado conveniente por el hecho de reducir el abanico de soluciones. Los resultados son los siguientes:

- $H = 70.51 \text{ kN}$

Arco formero Norte

- $I_0 = 0.23 \text{ m interior} / 0.80 \text{ m exterior}$
- $I_1 = 2.04 \text{ m}$
- $I_2 = 2.45 \text{ m}$
- $m = 0$

Arco formero Sur

- $I_0 = 0.13 \text{ m interior} / 0.90 \text{ m exterior}$
- $I_1 = 0.98 \text{ m}$
- $I_2 = 2.06 \text{ m}$
- $m = 0$

fig 10.16 Resultados de la verificación de la estabilidad y particularización de la curva de empujes en cada arco (Dibujos del autor)

Arco fajón Oeste

- $I_0 = 0.30$ m interior / 0.70 m exterior
- $I_1 = 2.47$ m
- $I_2 = 2.21$ m
- $m = 0$

Arco fajón Este

- $I_0 = 0.12$ m interior / 0.88 m exterior
- $I_1 = 2.31$ m
- $I_2 = 2.25$ m
- $m = 0$

Con todo ello se obtienen los siguientes coeficientes geométricos de seguridad:

- Arco formero Norte: $\gamma_{\text{geom}} = 1.27$
- Arco formero Sur: $\gamma_{\text{geom}} = 1.14$
- Arco fajón Oeste: $\gamma_{\text{geom}} = 1.52$
- Arco fajón Este: $\gamma_{\text{geom}} = 1.39$

Lo que sirve para concluir que las curvas de empujes obtenidas poseen seguridad suficiente, que se visualiza directamente en el modelo geométrico (fig 10.17).

fig 10.17 Visualización de los resultados y verificación del equilibrio mediante la inclusión de la curva de empujes en el interior de la estructura (Dibujo del autor)

La capilla de la Sainte Chapelle de París, es uno de los ejemplos más reconocidos e icónicos en la historia de la arquitectura de la liberación estructural que produce la incorporación de las bóvedas de crucería apuntadas. En ella se culmina, mediante la sencillez estructural y la ligereza visual, el gótico radiante (Cohen 2014). Situada en la Île de la Cité de París, en el corazón del París medieval, se localiza en el interior del complejo destinado al Palacio de Justicia que ocupa el antiguo Palais de la Cité, también denominada La Conciergerie (fig 10.18).

El inicio de las obras de construcción se encuentra fechado en torno a 1244, a partir de la bula papal de Inocencio IV y aunque no existe consenso sobre su autoría, se la atribuye al maestro de obras de Sainte Denis y del transepto de la catedral de Notre Dame de Paris, Pierre de Montreuil (Medina 2012). La consagración se realiza el 26 de Abril de 1248, finalizándose las obras en un tiempo muy reducido y

| 275

quedando expuestas en ella algunos de los tesoros más valiosos que Luis IX pocos años antes había adquirido, como el la corona de espinas de Jesucristo y un trozo de la Santa Cruz.

Durante la Revolución francesa, dado que se trataba de un símbolo religioso y de la realeza, sufrió expolio y ataques, tanto del mobiliario como de la propia construcción. La flecha que situaba en el centro de la nave se desplomó y los tímpanos fueron derribados. A partir de 1836, el Ministerio de Obras Públicas acometió la restauración del edificio por parte de Félix Duban y Jean-Baptiste Lassus, estando a sus órdenes a partir de 1840 Eugène Viollet-Le-Duc, como inspector de trabajo. En este momento se aplican las nuevas ideas sobre restauración en las que participan un amplio equipo de historiadores, arqueólogos y medievalistas y donde se aprovecha para construir una escalera exterior para acceder a la nave superior (Finance 2014).

Descripción geométrica

La volumetría de la edificación se conforma a partir de una única pieza, de 33.90 m de largo por 11.27 m de ancho en la que se alojan las dos capillas mencionadas (fig 10.19). La superior, con un altura de la clave de 19.91 m, prevista para el uso de los miembros de la Casa Real, tenía acceso inicialmente desde los aposento reales del Palacio y carecía de acceso exterior.

fig 10.19 vista general exterior de la Sainte Chapelle de París (Fuente: Parsifall - Wikimedia Commons)

En cambio, la capilla inferior, de proporciones más modestas, con una altura libre de 6.55 m, estaba destinada a la servir de parroquia del palacio para el resto de cortesanos y sirvientes del mismo y se accedía directamente desde el Cour du la Ste. Chapelle (Patio de la Santa Capilla).

De nave única, la capilla superior dispone de cuatro tramos de bóveda de crucería que recorren el ancho total (fig 10.20a) de 9.93 m, mientras la inferior se subdivide en tres naves, siendo la central de 6.72 m de ancho (fig 10.20b). Los cuatro tramos en los que se desarrolla el cuerpo central tiene un ancho de 5.91 m. Se remata en la cabecera por medio un ábside de 7 tramos radiales que continua el esquema de las naves.

A los pies se sitúa un pórtico de entrada, mediante tres naves en las los capillas, que se remata mediante terraza a la mitad de la altura de la capilla superior. Asimismo se disponen de dos torreones entre el cuerpo principal y el de acceso, simétricas, que superar en altura los estribos laterales.

Sobre la tercera nave, se sitúa la aguja que se levanta sobre una estructura de piedra que descansa sobre un entramado de madera sobre las estribos perimetrales. Estos son de sección rectangular cuyas dimensiones se reducen según se eleva la sección y se disponen perpendicularmente a las fachadas en la dirección de los arcos perpiaños.

fig 10.20 Planta de la capilla superior (izq) y la capilla inferior (dch) (Viollet-Le-Duc 1856)

fig 10.21 Alzado superior de la nave (izq) y sección transversal (dch) según Viollet-le-Duc (1856)

Construcción y sistema estructural

La descripción de la estructura del edificio debe separarse entre la capilla superior y la inferior, dado que morfológicamente se distinguen muy claramente. Sin embargo, en ambos casos, la característica fundamental reside en la posibilidad de situar en el exterior del edificio el sistema de contrarresto, de manera que al interior el muro exterior permite alojar vidrieras del ancho de cada tramo de la nave, siendo común en toda la sección vertical.

En las fachadas la abertura de muro es prácticamente total (fig 10.21a) distinguiéndose en la parte superior un gablete que remata el arco apuntado que permite la apertura del muro. Este arco aloja asimismo, dos arcos apuntados más pequeños que a su vez aloja otros cuatro que conforman las vidrieras, hasta el zócalo de la capilla superior. Dicha estructura de arcos se repiten en todos los vanos de la nave, así como en el ábside.

La bóveda superior se realiza mediante cuatro arcos diagonales que nacen en los estribos y que se cubren mediante plementería (fig 10.21b). No se ha podido localizar la disposición de la plementería por lo que se estima que es perpendicular a los arcos formeros. De la planimetría que sirve de base, tampoco se puede saber si se trata de bóveda apuntada, ya que la plementería realiza una movimiento de subida y de bajada mientras la claves se encuentran a la misma altura. Se ha estimado, para el análisis que no se encuentra apuntada.

Asimismo tampoco se puede deducir de la información gráfica disponible de la existencia o no de relleno en los hombros de la bóveda superior, pero ésta ha sido necesaria en su consideración para asegurar el equilibrio de la misma. Se ha estimado que se ha rellenado con un material rígido que posee un peso específico de 18 kN/m^3 hasta una altura de 2.46 m (0.65 de la altura de la bóveda). Este valor se encuentra en el rango del indicado como característico para las bóvedas góticas de 0.608 - 0.955 respecto a la altura de la bóveda (Ramos 2015).

El material con el que se realiza la construcción es piedra caliza, que muy probablemente sea de la misma cantera que parte de la Catedral de Notre Dame y otras muchas obras medievales de París (Lote et al. 2013). Dicha cantera se encontraban entonces fuera de la ciudad pero que el desarrollo urbano de París incorporó y que sirvieron para crear en el s. XVII las catacumbas parisinas. La fábrica con que se realiza esta obra se estima que posee un peso específico de 25.0 kN/m^3 .

Las bóvedas de la capilla inferior también se trata de bóvedas cuatrimpartitas de arcos apuntados, pero se distingue fundamentalmente en que la nave central se apoya en pilares exentos situados en los extremos. Asimismo se dispone de un arbotante que recoge los empujes de la nave central y los traslada a los estribos exteriores (fig 10.22). Las pequeñas naves laterales se cubren con bóvedas cuatrimpartitas que descansan sobre pilastras adosadas a los estribos y sobre los arcos peripiaños de la nave central. La plementería de estas bóvedas se encuentra rellena

fig 10.22 Dibujo del detalle del arbotante de la capilla inferior (dch) (Viollet-le-Duc 1856) e imagen del mismo (izq) (Cohen 2015)

por la parte superior hasta conseguir el plano horizontal que conforma el suelo de la capilla superior.

Finalmente la cubierta a dos aguas, se realiza mediante cerchas de madera colocadas sobre los arcos perpiaños (fig 10.21b) que apoyan directamente sobre los estribos.

Los parámetros constructivos que se han empleado en el análisis se resumen a continuación:

tabla 10.3 Caracterización de los materiales estructurales de la Sainte-Chapelle de París

Material	Peso específico [kN/m ³]
Relleno rígido	16.0
Sillería de caliza	25.0

Modelización geométrica

A partir de la planimetría obtenida de Viollet-le-Duc (1856) y los datos de medición realizados por Cohen (2015), se ha realizado un modelo tridimensional de las cuatro naves centrales. Se ha partido de los dibujo planimétricos, para dotarles del espesor correspondiente mediante extrusión recta o según un carril.

Los nervios han sido simplificados a figuras geométricas rectangulares así como las columnillas adosadas a los estribos que las soportan. Asimismo se ha simplificado los arcos formeros y perpiaños de manera que se ajusten a las dimensiones expresadas en las secciones y alzados. Asimismo en el modelo tridimensional se ha simplificado el dibujo y los elementos ornamentales de las fachadas, así como de los interiores, dejando principalmente los elementos estructurales que se deseaban analizar.

Por otra parte no se ha incluido en el dibujo ni la aguja, por desconocer tanto su geometría como su resolución constructiva, así como la cubierta de madera. Sin embargo este hecho no supone afección al análisis estructural en cuanto el no incluir dicho peso se encuentra del lado de la seguridad.

Se dispone, por tanto, de un modelo geométrico tridimensional de superficies realizado en Rhinoceros apto para poder extraer la información que sirva para el análisis mediante el método analítico.

Verificación del equilibrio y particularización de la superficie de empujes

La verificación del equilibrio de la estructura global se ha realizado mediante la concatenación de elementos independientes, tal y como se explicó en el Capítulo 7 y realizando el traslado de elementos sustentado a sustentante tanto de empujes horizontales como de cargas verticales.

fig 10.23 (Página siguiente) Modelo geométrico global de la estructura de la Sainte-Chapelle de Paris (Modelo y dibujo del autor)

Dada la complejidad, tanto volumétrica como estructural, del edificio los resultados del análisis se presentan de manera individual para cada conjunto de elementos analizados, así como finalmente, de manera global.

Bóveda capilla superior

La bóveda cuatrimpartita de la capilla superior, se analiza teniendo en cuenta que posee dos ejes de simetría, uno longitudinal y otro transversal. Además no se estima relleno sobre la clave ni carga alguna por lo que se parte que la tangente de la línea de empujes en los dichos ejes es horizontal.

Se analiza por un lado la plementería, bajo la hipótesis de que la dirección de las piezas es paralela a los ejes de simetría, y por otro los nervios diagonales. Se ha empleado asimismo la hipótesis de que el empuje en la clave es nulo y en los arcos formeros y fajones, es máximo siguiendo una ley cúbica como se ha comentado en el Capítulo 7.5.

Se ha estimado que es necesario asumir un relleno en los hombros, especialmente en el tramo de bóveda Sur, de un relleno con una altura de al menos un tercio de la altura de la bóveda, como se muestra en las figuras 10.24a y 10.24b.

Se parte asimismo de la hipótesis que el empuje horizontal es el mismo en las dos direcciones así como que la recta de paso se sitúa en la misma coordenada vertical. La superficie resultante sobre el modelo geométrico se muestra en la fig 10.24a y los valores del resultado son los siguientes:

Plementería tramo de bóveda Sur

- $H_{\max} = 35 \text{ kN/m}$
- $H_{\min} = 0 \text{ kN/m}$
- $I_o = 0.02 \text{ m interior} / 0.32 \text{ m exterior}$
- $m = 0$
- $V_{\text{tot}} = 83.27 \text{ kN}$

fig 10.24 Resultado de la superficie de empujes de la plementería (izq) y de los nervios diagonales (dch) sobre el modelo (Dibujos del autor)

Plementería tramo de bóveda Norte

- $H_{\max} = 35 \text{ kN/m}$
- $H_{\min} = 0 \text{ kN/m}$
- $I_0 = 0.02 \text{ m interior} / 0.32 \text{ m exterior}$
- $m = 0$
- $V_{\text{tot}} = 71.57 \text{ kN}$

La superficie de empujes en equilibrio de los nervios corresponde a la totalidad de la carga depositada en un eje por el tramo de la bóveda Sur y por el otro de por el tramo Norte, lo que (fig 10.24b), lo que da los siguientes resultados:

- $H_{\max} = 139.41 \text{ kN}$
- $I_0 = 0.18 \text{ m interior} / 0.34 \text{ m exterior}$
- $m = 0$
- $V_{\text{tot}} = 171.94 \text{ kN}$

Arcos formeros y fajones capilla superior

Los arcos formeros y perpiaños, se analizan de manera independiente, estimándose en cada uno de ellos dos órdenes, uno superior y otro inferior, según el modelo geométrico esimado, cada uno con espesor y una dimensión diferente.

Se analizan de manera independiente, estimándose que los fajones carecen de muro enjutado sobre él mientras que los perpiaños poseen el muro correspondiente al espacio entre el arco y la parte superior de la fachada (que coincide con la posición del canalón longitudinal de recogida de pluviales de la cubierta inclinada).

En este caso ha sido necesario, para verificar el equilibrio, disponer de una carga puntual en la clave, de manera que la tangente en el punto más alto no sea horizontal sino con una cierta inclinación, como es habitual por otra parte, en este tipo de arcos. Los resultados particularizados se muestran en el modelo geométrico directamente, por una parte de los arcos inferiores (fig 10.25a) y por otra de los de orden superior (fig 10.25b)

Arco perpiaño inferior

- $H = 3.04 \text{ kN}$
- $I_0 = 0.20 \text{ m interior} / 0.34 \text{ m exterior}$
- $V_{\text{clave}} = 0.72 \text{ kN}$
- $m = -0.1161$
- $V_{\text{tot}} = 7.57 \text{ kN}$

Arco formero inferior

- $H = 2.57 \text{ kN}$
- $I_o = 0.07 \text{ m interior} / 0.21 \text{ m exterior}$
- $V_{\text{clave}} = 2.41 \text{ kN}$
- $m = -0.4572$
- $V_{\text{tot}} = 13.54 \text{ kN}$

fig 10.25 Resultado de la superficie de empujes de los arcos perpiaños y formeros inferiores (izq) y superiores (dch) sobre el modelo (Dibujos del autor)

Arco perpiaño superior

- $H = 9.58 \text{ kN}$
- $I_o = 0.04 \text{ m interior} / 0.29 \text{ m exterior}$
- $V_{\text{clave}} = 0 \text{ kN}$
- $m = 0$
- $V_{\text{tot}} = 22.67 \text{ kN}$

Arco formero superior

- $H = 19.47 \text{ kN}$
- $I_o = 0.11 \text{ m interior}$
- $V_{\text{clave}} = 8.88 \text{ kN}$
- $m = -0.2259$
- $V_{\text{tot}} = 48.81 \text{ kN}$

Muro fachada superior

El muro exterior, bajo el canalón, anteriormente mencionado se ha dividido en diversos elementos más sencillos para su análisis de manera individual y posteriormente se han presentado conjuntamente.

Por un lado se presenta el gablete como un elemento totalmente independiente, que se componen de un arco apuntado bajo una carga triangular, que apoya directamente en los estribos. Como la totalidad del gablete puede considerarse

como resistente, el mero hecho de encontrarse la superficie de empujes en su interior, indica su estabilidad (fig 10.26a). La obtención de dicha superficie se ha obtenido con los siguientes parámetros-

Gablete

- $H = 7.06 \text{ kN}$
- $I\theta = 0.27 \text{ m interior} / 2.37 \text{ m exterior}$
- $V_{\text{clave}} = 0 \text{ kN}$
- $m = 0$
- $V_{\text{tot}} = 9.19 \text{ kN}$

Las arquivoltas que se encuentran bajo el gablete en los muros exteriores se analizan como arcos enjutados que reciben la carga del muro que se sitúa sobre ellos hasta la coronación. En su claves se han estimado una serie de elementos decorativos que producen una carga puntual, la cual ha sido necesaria para la evaluación positiva del equilibrio (fig 10.26b). Los valores resultantes son los siguientes:

Arquivoltas

- $H = 19.47 \text{ kN}$
- $I_0 = 0.27 \text{ m interior}$
- $V_{\text{clave}} = 9.35 \text{ kN}$
- $m = -0.2646$
- $V_{\text{tot}} = 99.39 \text{ kN}$

Arcos ojivales

fig 10.26 Resultado de la superficie de empujes en el muro exterior superior del gablete (izq), arquivoltas (centro) y ventanal ojival (dch) sobre el modelo (Dibujos del autor)

Este último elemento que se analiza en el muro es la estructura de piedra de los arcos ojivales que alojan las famosas vidrieras de la Sainte-Chapelle, las cuales dotan del ambiente lumínico tan característico. Estos arcos se componen de un arco principal bajo el cuál se sitúa un rosetón de mayores dimensiones bajo el que se alojan dos arcos menores.

Estos arcos, a su vez alojan sendos rosetones menores bajo los cuales se encuentran asimismo dos arcos ojivales. Cada uno de ellos dispone de pequeñas columnillas que permiten la apertura del muro. El análisis se realiza elemento a elemento (fig 10.26c) y sus resultados se muestran a continuación:

Arco ojival principal

- $H = 2.88 \text{ kN}$
- $I_o = 0.09 \text{ m interior} / 0.18 \text{ m exterior}$
- $V_{\text{clave}} = 0.98 \text{ kN}$
- $m = -0.342361111111$
- $V_{\text{tot}} = 29.88 \text{ kN}$

Arco ojival secundario

- $H = 1.28 \text{ kN}$
- $I_o = 0.06 \text{ m interior} / 0.13 \text{ m exterior}$
- $V_{\text{clave}} = 0.27 \text{ kN}$
- $m = -0.211102423769$
- $V_{\text{tot}} = 27.35 \text{ kN}$

Arco ojival terciario

- $H = 0.26 \text{ kN}$
- $I_o = 0.01 \text{ m interior} / 0.07 \text{ m exterior}$
- $V_{\text{clave}} = 0.03 \text{ kN}$
- $m = -0.133079847909$
- $V_{\text{tot}} = 6.68 \text{ kN}$

Bóveda capilla inferior central

Cada tramo de la capilla inferior dispone de una bóveda central inscrita en un cuadrado en planta así como dos laterales de proporciones rectangulares. Tanto

fig 10.27 Resultado de la superficie de empujes de la bóveda central de la capilla inferior correspondiente a la plementería (izq) y a los nervios (dch) sobre el modelo (Dibujos del autor)

la central como la lateral se analizan del mismo modo y con las mismas premisas que las superiores: empuje en ejes variable, empuje en clave mínimo, empuje en formeros y fajones máximo, empujes coincidente y punto de aplicación en los dos tramos.

A diferencia del caso anterior no se ha estimado un relleno adicional en los hombros, ya que la propia bóveda se dispone bajo el relleno que configura el piso de la nave superior. En este caso no se ha distinguido entre plementería y relleno considerando que este último es rígido, como se muestra en el modelo . Además la nave central dispone de un arbotante, situado a una altura de 5.30 m sobre el suelo, lo que permite a los empujes de la bóveda central ser transmitidos directamente a los estribos exteriores. Asimismo, se analiza de manera independiente la plementería, con la misma consideración que el caso anterior y los nervios diagonales, cuyos resultados (fig 10.26) se muestran a continuación:

Plementería tramo de bóveda Norte y Sur

- $H_{\max} = 51.9 \text{ kN/m}$
- $H_{\min} = 0 \text{ kN/m}$
- $I_o = 0.06 \text{ m interior} / 0.23 \text{ m exterior}$
- $m = 0$
- $V_{\text{tot}} = 111.31 \text{ kN}$

Nervios diagonales

- $H_{\max} = 9.62 \text{ kN}$
- $I_o = 0.07 \text{ m interior} / 0.28 \text{ m exterior}$
- $m = 0$
- $V_{\text{tot}} = 225.17 \text{ kN}$

Muro fachada inferior

El muro exterior, a la altura de la capilla inferior, se abre mediante un arco ojival muy tendido para alojar un pequeño rosetón circular junto a dos elementos decorativos laterales. Estos sirven para iluminar ligeramente la nave lateral. Sobre ellos se sitúan las cargas que bajan de las columnillas de los arcos ojivales de la capilla superior. La curva de empujes resultante que verifica el equilibrio (fig 10.29a) se realiza con los siguientes parámetros:

- $H_{\max} = 58.60 \text{ kN}$
- $I_o = 0.25 \text{ m interior}$
- $m = 0$
- $V_{\text{tot}} = 63.76 \text{ kN}$

Asimismo sobre este último se sitúa un arquivolta, que se puede asimilar a un arco apuntado enjutado (fig 10.29b), con los siguientes resultados:

- $H_{\max} = 19.18 \text{ kN}$
- $I_0 = 0.26 \text{ m interior}$
- $m = 0$
- $V_{\text{tot}} = 60.28 \text{ kN}$

fig 10.25 Resultado de la superficie de empujes del arco ojivales del muro inferior (izq) y de la arquivolta (dch) sobre el modelo (Dibujos del autor)

Equilibrio global

El equilibrio global se verifica mediante la yuxtaposición de los diferentes elementos, siguiendo el procedimiento de encadenamiento de los diferentes elementos, tal y como se ha desglosado anteriormente. A nivel individual, los valores particularizados de cada superficie mostrados, permite asegurar que el equilibrio queda verificado.

La seguridad estimada para los elementos de la estructura, obtenida a partir del coeficiente de seguridad geométrico, varía en función de la particularización realizada. En el caso de la bóveda superior oscila entre el 1.684 del formero superior y 1.523 del formero inferior mientras el perpiaño superior posee un coeficiente de 2.006 y el inferior 1.18. Como se ha comentado, estos valores se obtienen para una de las múltiples curvas posibles contenidas entre las curvas límites que indican el empuje máximo y el mínimo.

Los nervios diagonales de la bóveda superior posee un coeficiente de seguridad de 6.37, dado que se encuentran estabilizados por medio de los rellenos, así como posee un espesor mucho mayor que el resto de elementos. La seguridad tanto de los nervios de la bóveda inferior como de los arcos perimetrales, se dispara al considerar todo el espesor de rellenos como aptos para la estabilidad.

El equilibrio de un edificio complejo, como el analizado, se puede comprobar asegurando que los diferentes tramos de la superficie de empujes en la totalidad del edificio se encuentra contenido en el interior de la fábrica (fig 10.25), y que a nivel global posee un coeficiente de seguridad mínimo que coincide con el menor de los valores obtenidos, esto es 1.18.

fig 10.26 (Página siguiente) Modelo verificación global del equilibrio de la estructura de la Sainte-Chapelle de París (Dibujo del autor)

10.4 DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Como se ha mencionado anteriormente, los análisis realizados en este capítulo, no tienen por objeto estudiar las edificaciones analizadas sino establecer la validez de la aplicación del método propuesto y del prototipo de herramienta implementada, a estructuras más complejas reales.

Dado que la propia validez del método y la calibración de los resultados, se ha comprobado en el capítulo anterior, mediante el estudio comparativo de los diversos métodos gráficos y analíticos respecto a un ejemplo publicado, se evalúa fundamentalmente la aplicabilidad, así como la adecuación de los resultados de manera cualitativa y la idoneidad del procedimiento. Asimismo se mencionan características en relación a la capacidad tanto operativa de la herramienta como a la expresiva de los resultados.

Modelización geométrica y constructiva

En relación a los modelos geométricos de los que se extrae la información, cabe destacar que los casos reales estudiados se realizan mediante diferente técnicas, como son el modelo de curvas idealizadas transformado a modelo de superficies (en el primer ejemplo), un modelo alámbrico para la obtención de los contornos que mediante extrusión ortogonal se transforma en modelo tridimensional (en el segundo ejemplo) y por último, una sucesión y yuxtaposición de superficies.

Todos ellos tienen la ventaja de trabajar mediante ecuaciones explícitas, y dado que el análisis se ha realizado con familias de planos verticales en coordenadas polares, las ecuaciones geométricas y de equilibrio, han sido formuladas respecto a las variables x , y , z .

La sencillez constructiva del Puente sobre el Arroyo Meaques presenta, por cambio, la posibilidad de evaluar fácilmente la incorporación de sobrecargas parciales. Cabe destacar, que en este tipo de estructuras, es posible incorporar en el modelo el terreno, ya que en muchos casos de puentes de carreteras y viaductos, éste es parte fundamental para garantizar la estabilidad de las estructuras, no sólo por la acción estabilizadora del peso del propio terreno sino por poder alojar los empujes en su interior, como condición estructural.

En relación a la evaluación parcial de la iglesia, cabe mencionar que dada la gran presencia de revestimientos en su interior (en el exterior si hubieron existido, han desaparecido completamente), el modelado geométrico ha partido de la determinación de la sección constructiva en relación a las fábricas, según se ha comentado en el apartado 7.1, aspecto éste que no ha sido necesario en los otros dos casos estudiados.

Resolución y particularización dinámica

El prototipo de herramienta evaluado, al estar implementada mediante dos sistemas de programación, como son el empleado en el CAD como en el CAS, genera

unas ciertas dificultades operativas, dado que es necesario ejecutar cada programa en el orden correspondiente. A la hora de modificar algún parámetro constructivo o estructural, también surgen el inconveniente de tener que volver atrás, modificarlo en la entrada CAS y volver a procesar la resolución, particularización y visualización. Por otra parte, este procedimiento no difiere del empleado en los programas informáticos, pero no deja de por ello de reducir su operatividad.

Asimismo, la visualización de la particularización de superficies de empujes complejas, como el caso de la Sainte-Chapelle, donde se emplea la técnica del encañamiento, requiere trabajar con la totalidad de las soluciones al mismo tiempo. Esto supone que la modificación dinámica de parámetro afecta a la totalidad de elementos, por lo que los requisitos de procesado numérico y gráfico de los equipos informáticos se disparan. En los equipos donde se ha realizado el análisis se ha notado una reducción muy notable de rendimiento por esta circunstancia. Una de las ventajas más notables que permite este tipo de herramientas es la modificación en tiempo real de los parámetros que particularizan la solución, pero esto se topa con la dificultad del procesado numéricos y la mayor lentitud de los sistemas gráficos.

Sin embargo, es altamente probable que el empleo de geometría modelada mediante NURBS reduzca el procesado, como así ha sucedido en otro tipo de análisis numérico de modelos geométricos (Hughes et al. 2005), de lo que resulta el gran desarrollo que experimenta el IGA. Cierto es que estos temas son fácilmente solvables en una modificación del diseño de la herramienta, lo que no reduce la validez del procedimiento empleado.

Salida de resultados, visualización y precisión

En el primer ejemplo, dada la sencillez geométrica y constructiva de la estructura, la visualización de los resultados en el modelo resulta evidente y directa. Cabe comentar que a la hora de representar dibujos tridimensionales en imágenes planas, como las incorporadas en este texto, genera ambigüedades que la visualización tridimensional del objeto despeja (fig 10.27). Esta circunstancia debe ser tenida en cuenta a la hora de exportar los resultados, por ejemplo, para un informe, donde por el momento, la incorporación de modelos tridimensionales en documentos electrónicos portátiles (como el formato pdf), por ahora genera dificultades de visualización y aumenta muy notablemente su tamaño.

fig 10.27 Representación del resultado del análisis del Puente sobre el Arroyo Meaques sobre el modelo espacial tridimensional (izq) y un alzado del mismo modelo (dch) (Dibujos del autor)

fig 10.28 Superficies de empujes de los tres casos analizados, sin la referencia de la estructura (Dibujos del autor)

Asimismo, la visualización de las superficies de empujes fuera del contexto del propio modelo puede producir dificultades en su interpretación (fig 10.28), dado que la referencia espacial se pierde. Sin embargo, en los casos donde el modelo geométrico es muy profuso en elementos, como el de la Sainte-Chapelle, los elementos constructivos tampoco favorecen la lectura.

Los resultados cualitativos obtenidos de los análisis, que quizá se visualicen de manera más sencilla sin estructura (fig 10.28), están acordes con los esperables. Tanto en el caso del Puente sobre el Arroyo Meaques como en los arcos torales de la ermita de Hontoba, el aumento de cargas debido al peso propio (posición de los estribos en el primer caso y la asimetría de los restos del cimborrio en el segundo) "doblan" la superficies de empujes, lo cual se puede apreciar más claramente en los alzados.

Asimismo, las superficies de empuje resultantes están en consonancia con la geometría y las cargas definidas en todos los elementos salvo las bóvedas inferiores. En este caso, se ha definido como límites válidos el volumen situado entre la cara inferior de la bóveda y el plano inferior de la capilla superior, sin tener en cuenta el espesor de la plementería, que no ha sido modelado. Como se puede observar se trata de un error de definición geométrica y constructiva, más que de un fallo en el procedimiento, lo cual indica que tanto el método propuesto como el prototipo de herramienta resultan correctos.

PARTE 4

COMPROBACIÓN EXPERIMENTAL MEDIANTE ENSAYOS FOTOELÁSTICOS

CAPÍTULO 11. INTRODUCCIÓN A LA FOTOELASTICIDAD

11.1 Breve introducción a la fotoelasticidad

11.2 Fotoelasticidad aplicada a estructuras de fábrica

11.1 BREVE INTRODUCCIÓN A LA FOTOELASTICIDAD

La fotoelasticidad es un procedimiento clásico experimental que, aprovechando las propiedades de birrefringencia de ciertos materiales descubierta en 1815 por Sir David Brewster, sirve para medir deformaciones y tensiones de objetos sometidos a esfuerzos mecánicos. Fue desarrollada a principios del siglo XX como método de análisis de elementos planos de forma irregular, requiere, como cualquier procedimiento experimental, de una cierta metodología práctica (extremadamente sencilla, ya que apenas son necesarios algunos aparatos ópticos de coste moderado y un modelo en material fotosensible de la pieza a estudiar) pero ofrece datos de gran interés: permite establecer fácilmente patrones de esfuerzo, áreas de concentración de tensiones, entender el comportamiento general del elemento estudiado, servir como método didáctico muy directo y sobre todo, permite la relaciones cualitativas y/o cuantitativas entre estados tensionales del modelo estudiado (Magdalena, García y Mencías 2016).

El progresivo avance de los métodos numéricos apoyados en medios computacionales, a partir de los años 60 del siglo pasado, no permitió su uso generalizado, aunque en la actualidad, ha sobrevivido en ciertos campos muy específicos, ya sea como método de enseñanza ya con su transformación digital (Briñez, Restrepo y López 2015).

Principios ópticos de la fotoelasticidad

El principio en el que se basan la fotoelasticidad parte del fenómeno de la doble refringencia o birrefringencia, que es una propiedad de ciertos materiales no cristalinos que poseen índices de refracción diferentes, dependiendo de la orientación del vector campo eléctrico.

El Índice de Refracción n_0 es un parámetro que mide la relación entre la velocidad de propagación de la luz en el vacío, que aproximadamente se puede considerar como 300.000 km/s y la velocidad en el medio material que se considera. Generalmente los materiales son isótropos y este valor es el mismo para todas las direcciones del espacio. Sin embargo, algunos materiales poseen diferentes índices de refracción, denominados n_1, n_2, n_3 , que corresponden con dos direcciones principales de polarización, perpendiculares entre sí.

Pero la cualidad más interesante que se aplica en fotoelasticidad es aquella por la que ciertos plásticos y resinas sintéticas, son materiales isótropos en condiciones normales pero cuando están sometidos a tensiones se transforman en anisótropos, lo que se denominada birrefringencia de tensión (Budynas 1999).

Comportamiento electromagnético de la luz y la luz polarizada

La luz, como cualquier otra radiación electromagnética, de acuerdo con la teoría Electromagnética de Maxwell se compone de un campo eléctrico asociado a un campo magnético (fig 10.1).

fig 11.1 campo vectorial asociado a una onda electromagnética (Dibujo del autor)

El vector campo eléctrico se define, como se muestra a continuación, siendo perpendicular a la dirección de propagación:

$$\vec{E} = A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} - \omega t\right) \quad (11.1)$$

siendo A , la amplitud de la onda, λ la longitud de onda, 2π la pulsación de onda y t la variable tiempo, de la que depende de vector campo eléctrico. El vector E cambia de dirección en un determinado instante t .

De las dos componentes en las direcciones principales perpendiculares al eje de propagación, un filtro polarizador lineal puede cancelar una de las dos resultantes, absorbiendo casi la totalidad de la onda de luz perpendicular al eje de polarización, (fig 11.2a) quedando E siempre contenida en el mismo plano y siendo

fig 11.2 efecto de un polarizador lineal (sup) y circular (inf) (Dibujo del autor)

perpendicular al eje de propagación. Por otra parte, un polarizador circular, genera una onda magnética resultante cuyo vector E describe una hélice cilíndrica (fig 11.2b).

Birrefrigencia y estado tensional

Las tensiones principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ en un punto, están determinadas por las leyes de Maxwell, en función de los Índices de Refracción isótropo n_0 y para cada eje n_1, n_2, n_3 :

$$\begin{aligned} n_1 - n_0 &= p\bar{\sigma}_1 + q(\sigma_2 + \sigma_3) \\ n_2 - n_0 &= p\bar{\sigma}_2 + q(\sigma_1 + \sigma_3) \\ n_3 - n_0 &= p\bar{\sigma}_3 + q(\sigma_2 + \sigma_1) \end{aligned} \quad (11.2)$$

En elementos planos de espesor constante, se puede prescindir del parámetro en la dirección perpendicular, restringiéndose a únicamente dos valores n_1 y n_2 , que están relacionados con la deformación unitaria principal. Como las deformaciones unitarias se encuentran asimismo relacionadas con las tensiones, se puede mantener una correspondencia entre tensiones y refracción (Budynas 1999).

Ambos parámetros se encuentran correlacionados según la ley de Brewster que constituye la relación básica de la fotoelasticidad:

$$n_1 - n_2 = C(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (11.3)$$

siendo C, la constante fotoelástica del material que se determina experimentalmente.

Cuando una onda de luz polarizada atraviesa un material birrefringente de espesor t , la onda se retarda un intervalo en cada dirección Δ_1 y Δ_2 (fig 11.3):

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (n_1 - 1)t \\ \Delta_2 &= (n_2 - 1)t \end{aligned} \quad (11.4)$$

A partir de ahí se puede deducir la siguiente relación, que permite evaluar la diferencia de las tensiones principales, en función de un número entero de la longitud de onda de la luz:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N\lambda}{Ct} \quad N \in \mathbb{N} \quad (11.5)$$

fig 11.4 Retardo de la longitud de onda al atravesar un material birrefringente en cada una de las direcciones (Dibujado del auytor a partir de Budynas 1999)

Al colocarse un segundo filtro polarizador tras la onda de luz retardada (denominado analizador), aparecen una serie de bandas de diversos colores que varían en función de la tensión a la que está sometida el material. Su aparición se puede interpretar directamente, ya que representa la existencia de una longitud de onda concreta. En el caso en que $N = 0$, la franja será negra, ya que en esa situación la onda se extingue al ser independiente de la longitud de onda. Este es el funcionamiento en el que se basan de los polariscopios (fig 11.5).

Isocromas e isoclinas

A partir de la ecuación (11.5), se puede deducir el número entero N de la longitud de onda de la luz empleada (incluyendo $N = 0$ que será la ausencia de luz) que producirá el conjunto de bandas de colores, que en el caso de que la luz proyectada sea blanca entre dos filtros polarizadores con orientaciones ortogonales, abarcará todo el espectro visible. Al conjunto de bandas con la misma diferencia de tensiones principales se le denomina bandas isocromas y se manifiestan con el mismo color, es decir con la misma longitud de onda, proporcional a N . Se puede

fig 11.5 Esquema de funcionamiento de unpolariscopio, compuesto de dos polarizadores lineales o circulares entre el material fotoelástico ensayado (Dibujo del autor)

fig 11.6 secuencia de colores resultantes para un polariscopio circular ensayando vidrio borsilicato (Pyrex), con el valor de retardo d y las tensiones principales para un coeficiente fotoelástico $C = 2.93$ (Jirathanathaworn 2009)

Colors	Retardation (δ), in nm		Fringe order (N)	$ \sigma_1 - \sigma_2 $	
	no tint plate	with tint plate		MPa	psi
Black	0	565	0	61	8809
Gray	150	450	0.28	48	7016
White-yellow	250	300	0.45	32	4677
Yellow 300	300	250	0.60	27	3898
Orange (dark)	450	100	0.79	11	1559
Red	500	50	0.90	5	780
Violet	565	0	1	0	0
Blue	600	50	1.05	5	780
Blue-green	650	100	1.14	11	1559
Green-yellow	750	220	1.32	24	3430
Yellow 850	850	300	1.50	32	4677
Orange	950	400	1.67	43	6236
Red	1050	480	1.84	52	7484
Violet	1130	565	2	61	8809
Green	1300	735	2.33	79	11459
Green-yellow	1400	835	2.50	90	13019
Pink	1500	935	2.67	101	14578
Violet	1695	1130	3	121	17618
Green	1750	1185	3.10	127	18475

establecer, por tanto, para cada material fotoelástico la relación entre cada color y la diferencia de tensiones principales, para un espesor dado (fig 11.6).

Por otra parte existen otro conjunto de bandas que aparecen en los ensayos fotoelásticos, de color negro, que representan el lugar geométrico de los puntos que tiene la misma dirección de las tensiones principales, denominadas isoclinas. Esto es debido a que cuando son coincidentes los ejes de polarización del filtro polarizador y del analizador con los de las tensiones principales.

Este fenómeno ocurre en los polariscopios planos, ya que se construyen mediante dos filtros polarizados ortogonales entre sí, donde se superponen isocromas e isoclinas (fig 11.7).

fig 11.7 muestra de las líneas isoclinas (a) y isocromas (b) para una muestra circular (Jirathanathaworn 2009)

Para poder visualizar las bandas isocromas completamente, es necesario decalar $\pi/2$ los ejes de la luz polarizada. Para ello se introduce a ambos lados del modelo estudiado una lámina polarizadora de cuarto de onda, que polariza circularmente el haz de luz antes de incidir en el modelo estudiado, para luego volver a polarizar en el sentido contrario, devolviendo al estado inicial de luz polarizada linealmente.

Sin embargo, el empleo de la fotoelasticidad quedó relegado a un segundo plano entre los métodos de análisis estructural más extendidos, aunque en algunos casos se ha incluido entre los métodos experimentales de determinación de tensiones junto al método de análisis dimensional y a técnicas basadas en energía, en fechas tan cercanas como finales del s. XX (Budynas, 1999) .

fig 11.7 Estudio de un bastidor lateral de un vagón, descripción geométrica (arriba), distribución de isocromas (centro) y tensiones normales (Ziro Tuzi en Fernández Casado 1932)

La fotoelasticidad para la evaluación de tensiones: análisis cuantitativo

En un primer momento, la birrefringencia se mostró útil para conocer el estado tensional de un modelo, especialmente cuando la geometría o las cargas, no permiten una simplificación fácilmente asimilable a modelos cuyo cálculo sea asequible, tal y como se acaba de mencionar. Indudablemente esta finalidad se ha encontrado completamente superada por las técnicas de cálculo automático, una vez perfectamente caracterizado el material y asimilado a un modelo geométrico.

Para poder evaluar cuantitativamente las tensiones a las que está sometida el modelo ensayado por medio de ensayos fotoelásticos, se requiere por un lado de la perfecta calibración del material, en cuanto la identificación de cada banda de color con el tensiones principales y por otro una minuciosa lectura de las bandas.

Esta última, se ha realizado tradicionalmente mediante técnicas ópticas, lo que provoca un cierto error de lectura además de resultar un procedimiento bastante pesado. Sin embargo, en las últimas décadas se han desarrollado algunos procedimientos digitales intentan salvar esta dificultad, aunque añaden la del coste, ya que una de las ventajas que tienen los modelos fotoelásticos tradicionales y los polariscopios ópticos es su relativamente bajo coste (fig 11.8).

La fotoelasticidad como “visualización” de las fuerzas: análisis cualitativo

Otra de las aplicaciones más relevante de la fotoelasticidad es el enfoque cualitativo que esta técnica permite ya que resultan de probada utilidad en la visualización de tensiones en modelos, permitiendo visualizar el carácter anisótropo de la respuesta del material por medio la formación de corrientes de tensión (Mencías, García y Magdalena, 2015).

La respuesta del material permite la localización, por un lado a nivel global de las zonas de paso de esfuerzos, localizando aquellas áreas donde se acumulan las bandas isocromas y que permiten la formación de las mencionadas corrientes de tensión y por otro, a nivel local, del punto de contacto de las piezas, ya que se suele

fig 11.8 Esquema de funcionamiento de un polariscopio con lectura digital de vidrio (dch) imagen obtenida (centro) e interpretación de los resultados mediante software específico (izq) (Ramesh y Ramakrishnan 2016)

fig 11.9 Localización del punto de paso de tensiones mediante ensayos fotoelásticos con luz monocroma izq y (Imagen J. García)

traducir con una concentración de tensiones localizada. Esto es debido a las irregularidades del material fotoelástico y de la aplicación de las cargas, que coincide con lo que ocurre a nivel general en estructuras de fábrica.

La coloración del material ensayado en las zonas de concentración de tensión se puede visualizar en aquellos ensayos que se realizan con luz blanca. En cambio, en aquellos otros que se realizan con luz monocroma, se producen las isoclinas entre las bandas coloreadas, por lo que no sirven para medir tensiones pero sí para localizar las concentraciones de las mismas, en aquellas zonas donde se aproximan (fig 11.9). Esta última aplicación es la más interesante a nivel cualitativo.

Ensayos fotoelásticos de estructuras de fábrica como medio continuo

Como geometría que se salen de las formas tradiciones de estructuras modernas, las fábricas históricas, como el caso de las secciones transversales de catedrales góticas son un ejemplo de análisis no convencionales. El referente más conocido en la experimentación de modelos fotoelásticos de estos tipos es Robert Mark, quien se ha centrado en investigar el estado tensional de diversas construcciones medievales de fábrica, empleando entre otras técnicas la fotoelasticidad.

Con un enfoque cuantitativo, uno de los ensayos más publicados, consiste en la aplicación de cargas a pequeños modelos planos continuos de resina epoxi calentados en un horno, que, al dejarles enfriar de manera lenta, las deformaciones y las tensiones se transformaban en permanente (fig 11.10). En otros casos, se ha aplicando luz monocroma en un polariscopio circular, como se ha descrito en el apartado anterior, las bandas obtenidas se relacionan con mapas de contorno (fig

fig 11.10 Análisis fotoelástico de la sección transversal de la catedral de Mallorca (Mark 1982 en Roca 2001)

fig 11.11 Resultados del ensayo fotoelástico (izq) y distribución de fuerzas de la sección analizada (dch) (Mark 1969)

11.11a) que indican la estimación de la distribución de esfuerzos (fig 11.11b) (Mark 1968).

Ensayos fotoelásticos de estructuras de fábrica como medio discontinuo

La aplicación de la fotoelasticidad a medios discontinuos tiene sus precedentes en los trabajos sobre medios granulares (Drescher y de Jong 1972), en los que se ensayaban una serie de discos planos de diversos tamaños permitiendo determinar la posición de paso de los esfuerzos (fig 11.12).

Como el punto de contacto entre las piezas de estructuras de fábrica puede estimarse como “ordenadamente aleatorio” en el sentido de que se encuentra aleatoriamente distribuido dentro de un esquema regular (Bigoni y Noselli 2010a), no se puede determinar previamente el punto de paso de las fuerzas. Las pequeñas imperfecciones e irregularidades, tanto de la geometría de la estructura como de

fig 11.12 Resultado del ensayo fotoelático de discos planos (izq) y patrón de esfuerzos obtenidos a partir del ensayo (Drescher y de Jong 1972)

fig 11.12 Respuesta fotoelástica de un material continuo (izq) y uno discontinuo (dch) ante una carga axial (Mencías, García y Magdalena, 2015).

la aplicación de las cargas produce resultados completamente irregulares, especialmente a nivel local.

Esta es una de las particularidades que se encuentran a la hora de abordar este material. En ensayos ante esfuerzos axiales, la respuesta desde el punto de vista local es muy diferente, tanto el patrón de esfuerzos como respuesta de cada pieza. Los círculos tangentes extendidos entre la literatura científica para explicar la distribución de tensiones a compresión se obtiene teniendo en cuenta el material como continuo (fig 11.12a) mientras ese mismo ensayo en un medio discontinuo produce una distribución muy diferente (fig 11.12b) condicionada fundamentalmente por la aleatoriedad de los puntos de paso.

Cabe destacar que el rozamiento entre bloques en una fábrica es fundamental para (como se ha mencionado en el Capítulo 3.4). Sin embargo, en modelos de junta seca que carecen de mortero, por lo que el deslizamiento debe impedirse por rozamiento entre piezas y no existe material de reparto. Por otra parte, la consideración del mortero en este tipo de ensayos puede ser muy difícil. Bigoni y Nosselli (2010a) intercalan una hoja de papel entre las piezas y el resultado obtenido indica que el efecto mortero consigue reducir la intensidad de las tensiones pero la localización de las tensiones resulta aún más pronunciado.

En otros casos se puede emular el rozamiento intercalando materiales muy rugosos entre las piezas, como el caso de papel de lija, especialmente en el caso de que las cargas aplicadas sean elevadas.

CAPÍTULO 12. ENSAYOS DE MODELOS FOTOELÁSTICOS

12.1 Descripción de los métodos empleados

12.2 Ensayos realizados

12.1 DESCRIPCIÓN DE LOS MÉTODOS EMPLEADOS

Consideraciones preliminares

Enfoque cualitativo - cuantitativo

La primera consideración que debe hacerse a la hora de plantear este tipo de ensayos, especialmente en el marco de la investigación doctoral que se presenta, es el tipo de enfoque que debe hacerse, esto es si el ensayo debe ser cualitativo o cuantitativo. Si el propósito de los ensayos es “visualizar” el recorrido de los esfuerzos por el interior del material, parece que el enfoque cualitativo parece el más indicado, por lo que es necesario para ello emplear un polariscopio circular con luz monocroma.

El método de las líneas de empujes, se pueden asimilar a la curva o la superficie que recorren las cargas en el interior de una estructura. Ciertamente es que este, es una abstracción mental, que no se corresponde con la realidad, pero las corrientes de tensión también lo son, por lo que, como abstracciones de los mismos fenómenos (recorrido de esfuerzos de compresión por el interior de un material) pueden ser comparables.

Por otra parte, con la mera visualización del recorrido no se puede afirmar que las cargas estén recorriendo la totalidad del modelo hasta los apoyos y que no se esté derivando cierta parte de la carga por rozamiento en la dirección perpendicular. Por ello se estima necesario una cuantificación de las acciones aplicadas y las reacciones obtenidas, por lo que la monitorización de dichos valores se antoja necesaria. Esta cuantificación no es tanto una prueba de carga en el sentido habitual en la terminología estructural sino un mecanismo de comprobación, por lo que la cuantificación de la carga se estima en sentido relativo.

Algunos materiales fotoelásticos, como el Polimetilmetacrilato de Anilo (PMMA) o algunos vidrios, requieren esfuerzos elevados para poder visualizar el efecto fotoelástico. Por el contrario, otros materiales como el Policarbonato o las resinas epoxi, el valor necesario para manifestarse la birrefringencia es mucho menor. También cabe mencionar que el espesor del material influye en el valor absoluto de la carga necesaria para poderse visualizar las tensiones.

Por ello se estima que el enfoque más adecuado a los objetivos planteados es el cualitativo, con monitorización de las cargas aplicadas y las reacciones en los apoyos

Modelo continuo y discontinuo

Como se ha mencionado la elección del tipo de modelo está en relación a la escala investigada: modelos continuos a escala global y modelos discontinuos para escala local. Sin embargo afirmar esto parece un poco arriesgado, por lo que en el ámbito de este trabajo, que está enmarcado en la verificación global de equilibrio

de las estructuras de fábrica, no se puede pasar por alto los efectos locales de localización del punto de paso de los esfuerzos.

Por ello el enfoque como medio continuo puede parecer el adecuado pero se ha duplicado los ensayos para compararlos con medios discontinuos y evaluar su efecto. Hay que tener en cuenta, que en estructuras sometidas a esfuerzos de compresión excéntricos, en materiales continuos pueden aparecer flexiones, que se alejan de forma radical al comportamiento real del material estudiado, por lo que este aspecto ha de tenerse en cuenta.

Finalidad y objetivos

Como se ha adelantado en los Capítulos 1.6 y 4, la realización de esta fase experimental dentro del trabajo de investigación tiene por objetivos la visualización de la trayectoria de los esfuerzos y los puntos de paso de las fuerzas en el interior de los modelos de estructura de fábrica ensayados, para comparar con los obtenidos mediante la aplicación del método analítico propuesto.

Se trata por tanto de realizar un enfoque cualitativo mediante la lectura de las corrientes de tensión pero con monitorización tanto de las cargas y como las reacciones, para poder comprobar la fracción de carga que desciende por el modelo. Asimismo se propone comparar los resultados del modelo discontinuo con el modelo continuo, dado que como se ha mencionada en el Capítulo 6, el procedimiento metodológico expuesto, parte de ciertas condiciones para aplicar el Análisis Límite que deben ser mantenidas en los ensayos.

Lo primero que se asume es que el deslizamiento está impedido, por lo que los modelos ya sean de bloques como continuos deben estar confinados de manera que las piezas que lo constituyen no puedan deslizarse entre sí. Por otro lado la resistencia a compresión se estima infinita, supuesto que mediante aplicación de cargas bajas de compresión se puede dar por satisfecha.

La última condición, que la resistencia a tracción sea nula, resulta ser más difícil de satisfacer, dado que los materiales fotoelástico poseen una capacidad resistente no despreciable, por lo que pueden trabajar a flexión en condiciones normales. Esta condición se puede satisfacer sólo en el caso de los modelos discontinuos, ya que, si se modela fábricas en seco, la junta no es capaz de transmitir tracciones y por tanto, la fábrica tampoco.

Por otra parte, no considerar la aportación de la resistencia a tracción del material de la junta está del lado de la seguridad. Un modelo de estas características es adecuado para un análisis simplificado de las construcciones históricas de fábrica, en las que no se dispone de un historial de los daños sufridos a lo largo del tiempo por dicho material y, en algunos casos, ni siquiera se tiene la seguridad de que éste exista en la actualidad (Mencías, García y Magdalena 2015)

Descripción del procedimiento de ensayo

Caracterización del material fotoelástico

Para la realización de los modelos ensayados, se ha empleado una resina epoxídica bicomponente, dado que se trata de un material habitualmente empleado en fotoelasticidad. Se fabrica mediante la combinación de una variedad comercial de la Epiclorhidrina como base y un monómero tipo Bisfenol A como agente endurecedor. La mezcla de dicho componentes, en relación 3 a 1 en peso, da lugar a una material que semisólido, fácilmente moldeable que polimeriza a temperatura ambiente, lo que da lugar a un sólido semitransparente de color amarillento.

El material resultante se le pueden estimar las siguientes propiedades mecánicas, (tabla 11.1):

tabla 11.1 Propiedades mecánicas de la resina epoxi que sirve para la realización de los modelos ensayados

Peso específico [kN/m ³]	12.0
Resistencia a compresión [N/mm ²]	56.9
Resistencia a tracción [N/mm ²]	45.1
Resistencia a flexión [N/mm ²]	55.9
Coefficiente de contracción lineal	0.1%

Fabricación de los bloques de material fotoelástico

A partir de la formación del material fotoelástico, se realizan una serie de placas planas de 10 mm de espesor mediante colada en molde de vidrio. A partir de ellas, se cortan los bloques y piezas que componen los diferentes modelos, mediante cortadora la láser estándar LC Universal XLS-10-MWH.

Para poder cortar con precisión la placa, especialmente la de 10 mm de espesor, se le aplica el láser a alta potencia (150 W) con una velocidad media-baja del brazo (0,01 m/s), para evitar el quemado de la resina. Aún así la placa más gruesa ha sufrido un quemado en los bordes que ha sido necesario limpiar manualmente mediante la aplicación de alcohol etílico.

Descripción del polariscopio

El polariscopio con el que se han realizado los ensayos, se ha construido expresamente para los ensayos de modelos de fábrica con bloques. Para ello se ha situado el modelo ensayado en el interior de una caja de confinamiento de PMMA (Poli-metil metacrilato de anilo). La caja se ha diseñado como un conjunto de placas y cercos que permita ensayar modelos planos de hasta 200 x 300 mm en posiciones vertical y horizontal, unidas mediante varillas roscadas y atornilladas entre sí.

Se disponen diversas placas sucesivamente (fig 12.1), de las que las principales limitan la tendencia al desplazamiento anterior y posteriormente fuera de su plano de los modelos. Los cercos laterales pueden, cuando es necesario, contener los

empujes, aunque ésta no es la intención principal de los ensayos realizados. Entre el confinador interior y exterior se han añadido dos filtros polarizadores de polivinilo alcohol-iodino sin distorsión de color y de alta eficiencia de polarización cuya transmisión cruzada puede estimarse de 0.002 a 570 nm.

El modelo de resina de 10 mm, a su vez, se ha situado entre dos placas de 200 x 300 mm de 10 mm, cuyo ancho total, 30 mm ha permitido situar los sensores, tal y como se describe a continuación. Esta circunstancia puede provocar que cuando la carga aplicada es muy pequeña, una fracción de la misma se pueda transmitir por rozamiento entre el modelo y los confinadores, como en el caso de que actúe exclusivamente el peso propio. Sin embargo se ha comprobado que al aplicar cargas de uno o dos órdenes de magnitud mayores al de peso propio, esta circunstancia no es relevante. Estrategias similares se han empleado en otros ensayos recientes (Bigoni y Nosellini 2015).

Medición de cargas y reacciones

Para la monitorización de las cargas se ha confeccionado un dispositivo mediante un conjunto de sensores de fuerzas resistivos controlado mediante el sistema de hardware libre Arduino. El empleo de este tipo de aplicación electrónica supone un procedimiento sencillo, fácilmente configurable y extraordinariamente asequible (CITA).

Cierto es que si se deseara obtener medidas absolutas muy precisas, este sistema no sería válido, pero querer obtener medidas relativas, la falta de precisión no representa un obstáculo. La precisión en la respuesta se mejora al colocar los sensores en una configuración de voltaje dividido, siguiendo uno de los esquemas que el fabricante presenta y que se detalla a continuación.

fig 12.1 Esquema de funcionamiento y composición del polariscopio (Magdalena, García y Mencías 2016)

fig 12.2 Descripción de los sensores FSR 402 empleados (Fuente: Interlink Electronics, Inc.)

Sensores de fuerza

Los sensores de fuerza empleados son del tipo resistivo FSR (Force Sensing Resistor) modelo FSR 402 fabricados por Interlink Electronics (fig 12.2). Se caracterizan por ser un dispositivo de una lámina delgada polimérica (polymer thick film, PTF) que posee una reducción de resistencia eléctrica al incrementarse la fuerza aplicada en la zona activa. Posee un diámetro activo de 0.5" (12.7 mm), con un actuador de 0.4" (10.0 mm) de acero inoxidable con un borde de goma de poliuretano de dureza 60 que sirve para accionar el sensor.

No se trata de células de carga ni galgas extensiométricas, por lo que el fabricante no recomienda su uso para medidas muy precisas, tal y como se ha comentado anteriormente. Sin embargo el sensor FSR sigue una ley característica inversa tensión - fuerza, lo que permite cuantificar las medidas de manera muy sencilla

Se han colocado un sensor FSR en los apoyos laterales, para monitorizar las reacciones mientras se ha dispuesto otro u otros bajo el elemento de aplicación (fig 12.3).

Configuración electrónica

Los sensores FSR se conectan a un resistor en una configuración de voltaje dividido, de manera que la tensión de salida se describe según la ecuación:

$$V_{OUT} = V_{CC} \frac{R}{R + FSR} \quad (12.1)$$

En esta configuración, el voltaje de salida (V_{OUT}) incrementa el voltaje de entrada V_{CC} en función de la relación entre resistencia del FSR y la resistencia interpuesta R . El fabricante proporciona algunas curvas de voltaje en función de diferentes resistencias insertadas a modo de orientación.

Los sensores se conectan mediante un circuito de divisor de potencia, a través de amplificador operacional en modo de seguidor de corriente. Se ha empleado el Amp-Op LF353 de Texas Instruments. Se trata de amplificador electrónico de alta

fig 12.3 Sensores FSR colocados en la parte superior del confinador (Fotografía del autor)

ganancia que requiere de una alimentación de muy baja potencia, lo que permite ser alimentado directamente con la salida del procesador, al que se le interpone una resistencia de 100 kΩ, según el esquema de la figura 12.4.

Las conexiones se realizan empleando una protoboard (fig 12.5) de manera que se puede conectar fácilmente cada uno de los sensores y que a su vez se conecta a la entrada analógica del controlador del Arduino. Asimismo los sensores se alimentan mediante la salida de 5V de Arduino.

Calibración de los sensores

Aunque el fabricante proporciona una curva característica resistencia-fuerza se ha estimado necesario calibrar los sensores previamente, para obtener dicha curva directamente con la configuración electrónica dispuesta.

Para ello, siguiendo lo recomendado por el fabricante de los sensores se realiza el ajuste de curva mediante la obtención de una serie de valores para unas cargas conocidas. Esta calibración se ha realizado por medio del empleo de un conjunto de pesas calibradas aplicadas sobre un mecanismo que aplica la carga directamente sobre el sensor (fig 12.5) y cuyos valores de lectura analógica del voltaje obtenidos se muestran a continuación:

Prueba nº	1	2	3	4	5	6	7
Masa [g]	0	50	100	200	500	1000	2000
Peso [N]	0	0,490	0,981	1,961	4,903	9,807	19,613
Valor medio de lectura analógica	0	150	326	487	598,5	664,5	753
Voltaje [mA]	0,0	733,1	1593,4	2380,3	2925,2	3247,8	3680,4
Resistitividad FSR [kΩ]	N/A	58,20	21,380	11,006	7,093	5,395	3,586

fig 12.4 Esquema electrónico con e amplificador operacional en modo de divisor de potencia (Fuente: Interlink Electronics, Inc.)

tabla 12.2 Valores de resistencia analógica para la calibración de los sensores FSR

fig 12.5 Imagen de la calibración de los sensores mediante el empleo de un juego de pesas normalizadas (Fotografía del autor)

fig 12.6 Curva de calibración de los sensores (Gráfico del autor)

El ajuste de la curva (fig 12.6) se realiza mediante el complemento Solver Excel 2010 mediante regresión no lineal, para obtener una curva logarítmica (dado que el fabricante afirma que existe una relación logarítmica, por otra parte conocida, entre resistividad y presión) a partir de los datos conocidos, con la premisa de que el rango de lecturas que ofrece el pin analógico es de 0 a 1024.

La ecuación obtenida mediante el ajuste de la figura anterior es la siguiente. Por otra parte no se ha estimado necesario hacer corrección alguna para compensar temperatura:

$$L_A = 157.27 \ln(P) + 318.51 \quad (12.2)$$

donde P es el peso en Newtons y L_A , lectura analógica del puerto de Arduino. Al despejar el peso, a partir de la ecuación anterior, se obtiene la ecuación (12.3) para determinar los valores del ensayo

$$(12.3)$$

Imagen y datos obtenidos

Las imágenes obtenidas se han realizado mediante cámara digital marca Nikon, modelo D150 con la única iluminación de la fuente monocroma emitida sobre el polariscopio, con velocidad de obturación 1/15 s y apertura de diafragma f6.

Los datos de los sensores, como se comenta en el apartado anterior, corresponden a la lectura de la salida analógica de valores de voltaje. Estos son almacenados en una tabla que son transformados, por la ecuación 12.2, en valores de fuerza.

Descripción de los modelos

Los modelos ensayados representan un tipo de estructuras de fábrica tradicionales como es el arco de medio punto, realizado mediante fábrica de sillares aparejados en seco. Están realizados con las piezas de las planchas anteriormente descritas a partir de los cortes realizados siguiendo los dibujos que se muestran a continuación. Estos modelos coinciden geoméricamente con los expuestos como arco de medio punto en el Capítulo 9.1.

Modelo 1: arco enjutado con dovelas discretas

El modelo ensayado representa un arco de medio punto (fig 12.8), compuesto por 17 dovelas con forma de trapecio circular, apoyadas sobre dos lechos simétricos en forma trapezoidal. Sobre la clave se sitúan un muro de sillares aparejado en seco y compuesto por 49 piezas ortoédricas distribuidas en 5 hiladas. De ellas 43 son de proporción 2x1 y 6 de 3x1, mediante en un aparejo a sogá convencional,

En los laterales del arco se disponen, simétricamente 15 piezas de dimensiones variables, que se ajustan de manera que la totalidad del modelo forma un conjunto de 180 mm de ancho por 130 de altura.

fig 12.8 esquema del modelo de ensayo 1, que corresponde a un arco enjutado con dovelas discretas (Dibujo del autor)

Modelo 2: arco enjutado con dovela continua

El segundo modelo corresponde al mismo tipo de estructura, de sillares aparejados en seco, con el mismo muro enjutado descrito anteriormente en las que las dovelas individuales se han sustituido por un único arco continuo. Este, se encuentra formado por un trapecio circular (fig 12.9) de radio interior 133 mm y el mismo ancho que las dovelas.

fig 12.9 esquema del modelo de ensayo 2 que corresponde a un arco enjutado con dovelas continuas (Dibujo del autor)

Procedimiento de ensayo

Dado que la finalidad no es tanto obtener un comportamiento ante la evolución de las cargas si no la respuesta a una carga concreta. Para ello se ha aplicado la carga necesaria hasta que se ha manifestado visualmente el comportamiento a compresión del modelo.

Esta fuerza se ha aplicado por medio de una plancha de PMMA, según los casos, de 5 mm de espesor sobre el que se sitúan el sensor superior, sobre la que apoya una pieza rectangular horizontal de PMMA. Sobre ella se aplica la fuerza median-

fig 12.9 vista general del polariscopio, sensores FSR, circuito y conexión al ordenador en el laboratorio situado en la Escuela Técnica Superior de Edificación de la Universidad Politécnica de Madrid (Fotografía del autor)

te dos sargentos manuales situados lateralmente y anclados a la base del confinador (fig 12.9).

Para mejorar la lectura de los sensores en los apoyos y evitar lecturas erróneas producidas por empujes del confinador, se han dispuesto verticalmente un bloque del mismo material que el modelo bajo los apoyos.

12.2 ENSAYOS Y RESULTADOS

A continuación se muestran los resultados de los ensayos realizados siguiendo el procedimiento descrito en el apartado anterior. Por un lado se muestra la imagen del comportamiento fotoelástico del modelo obtenido

Para los dos modelos (modelo 1, M1 y modelo 2, M2), se han realizado distintos ensayos con puntos de aplicación de carga diferentes, que se denominan bajo las siglas E1, E2, ...

Modelo 1: Arco enjutado con dovelas discontinuas

Ensayo 1. Carga centrada: M1E1

Este primer ensayo sobre el modelo de dovelas discontinuas, se realiza mediante una carga puntal en el centro del muro coincidiendo con la clave (fig 12.10a). La respuesta del modelo ante la luz polarizada (fig 12.10b) indica la distribución de la carga por la enjuta hasta aplicarse en las cinco dovelas superiores. Estas se encuentran fuertemente solicitadas en su parte exterior mientras que las dovelas de los apoyos posee una mayor sollicitación en el interior, como podría preverse en un primer momento.

fig 12.10 Esquema del ensayo M1E1 con la aplicación de la carga y las reacciones (izq) e imagen del comportamiento fotoelástico (dch) (Dibujo y fotografía del autor)

Los esfuerzos registrados por los sensores se muestran a continuación:

tabla 12.3 Valores obtenidos de los sensores transformados a fuerza del ensayo M1E1

Posición sensor	Carga	Valor	Carga	Valor relativo
	absoluta [N]	relativo [%]	sin perd. [N]	sin perd. [%]
Superior	57.97	100.0	56.42	100.0
Inferior Derecho	24.92	43.02	24.92	44.21
Inferior Izquierdo	31.48	54.30	31.48	55.79

Ensayo 2. Carga excéntrica: M1E2

El siguiente ensayo se realiza con la aplicación de la carga en el penúltimo bloque del extremo derecho (fig 12.11a). La carga, en este caso, ha producido la deformación del muro, como puede apreciarse en la imagen 12.11b. La respuesta del muro ha producido la transmisión de los esfuerzos a las dovelas situadas en el semiancho derecho, reduciéndose en gran medida las solicitaciones en el semiarco izquierdo.

fig 12.11 Esquema del ensayo M1E2 con la aplicación de la carga y las reacciones (izq) e imagen del comportamiento fotoelástico (dch) (Dibujo y fotografía del autor)

Esta circunstancia se ve reflejado en los datos obtenidos por lo sensores, tal y como refleja la tabla a continuación:

Posición sensor	Carga absoluta [N]	Valor relativo [%]	Carga sin perd. [N]	Valor relativo sin perd. [%]
Superior	39.73	100.0	34.59	100.0
Inferior Derecho	31.57	79.47	31.57	91.26
Inferior Izquierdo	3.02	7.61	3.02	8.74

tabla 12.4 Valores obtenidos de los sensores transformados a fuerza del ensayo M1E2

Modelo 2: Arco enjutado con dovelas continuas

Ensayo 3 Carga centrada: M2E3

El siguiente modelo ensayado se le aplica como en el caso M1E1, una carga puntual situada sobre la clave del arco (fig 12.12a) y se miden las reacciones que el arco formado por una pieza continua, transmite a los apoyos. Se muestra mucho más claramente tanto la transmisión de los esfuerzos por el interior del arco como la aplicación de la carga en la imagen mostrada por polariscopio (fig 12.12b). Esta se realiza fundamentalmente por medio del bloque situado sobre la clave, aunque en menor medida por los dos bloques laterales.

En las mediciones de reacciones se observa una asimetría en la posición de el descenso de cargas, que no se corresponde con la imagen del arco, que se muestra

fig 12.12 Esquema del ensayo M1E3 con la aplicación de la carga y las reacciones (izq) e imagen del comportamiento fotoelástica (dch) (Dibujo y fotografía del autor)

con un patrón muy similar a ambos lados del eje axial. Sin embargo, el punto de paso en los apoyos manifiesta una concentración de bandas sensiblemente diferente. Los datos obtenidos se muestran en la siguiente tabla:

tabla 12.5 Valores obtenidos de los sensores transformados a fuerza del ensayo M2E3

	Carga	Valor	Carga	Valor relativo
Posición sensor	absoluta [N]	relativo [%]	sin perd. [N]	sin perd. [%]
Superior	82.90	100.00	78.73	100.00
Inferior Derecho	41.05	49.52	41.05	52.14
Inferior Izquierdo	37.68	45.45	37.68	47.86

Ensayo 4 Carga excéntrica: M2E4

fig 12.13 Esquema del ensayo M1E4 con la aplicación de la carga y las reacciones (izq) e imagen del comportamiento fotoelástico (dch) (Dibujo y fotografía del autor)

El ensayo que se describe a continuación, se aplica al igual que en el modelo anterior (M1E2) una carga excéntrica en el borde derecho, sobre el penúltimo bloque. (fug 12.13a). Dicha carga produce una bajada del esfuerzo por el interior de la enjuta que provoca, debido a irregularidades en el contacto, la entrada de la carga en el arco en varios puntos, aunque manifestándose la concentración de tensiones especialmente bajo una dovela en la imagen fotoelástica (fig 12.13b).

Los valores de los sensores transformados a fuerzas se muestran a continuación:

Posición sensor	Carga absoluta [N]	Valor relativo [%]	Carga sin perd. [N]	Valor relativo sin perd. [%]
Superior	24.94	100.0	19.99	100.0
Inferior Derecho	18.97	32.59	18.97	94.84
Inferior Izquierdo	1.03	1.77	1.03	5.16

tabla 12.6 Valores obtenidos de los sensores transformados a fuerza del ensayo M2E4

Ensayo 5 Dos cargas centradas: M2E5

Dado que el modelo continuo no presente una deformación excesiva ante los esfuerzos (que se explica en el apartado siguiente) se ha dispuesto otro ensayo con la aplicación de dos cargas simétricas situadas aproximadamente a el medio de cada semiancho que coincide con los penúltimos bloques (fig 12.14a).

fig 12.14 Esquema del ensayo M1E5 con la aplicación de la carga y las reacciones (izq) e imagen del comportamiento fotoelástico (dch) (Dibujo y fotografía del autor)

La distribución de esfuerzos en la enjuta responde al mismo dibujo que en ensayo M2E4, aunque los contactos vuelven a manifestar la irregularidad y asimetría de la fábrica, apareciendo patrones de esfuerzos diferentes, debido por un lado a la asimetría de las cargas pero también a las imperfecciones entre los puntos de aplicación (fig 12.14b). Los valores de las cargas aplicadas en la parte superior y las reacciones recogidas por los sensores en los apoyos se muestran a continuación:

Posición sensor	Carga absoluta [N]	Valor relativo [%]	Carga sin perd. [N]	Valor relativo sin perd. [%]
Superior Derecho	59.84	53.10	50.46	53.10
Superior Izquierdo	52.85	46.90	44.56	46.90
Inferior Derecho	48.46	43.00	48.46	51.00
Inferior Izquierdo	43.55	41.31	43.55	49.00

tabla 12.7 Valores obtenidos de los sensores transformados a fuerza del ensayo M2E5

Ensayo 6 Dos cargas no centrada: M2E6

El último ensayo que se presenta consiste en la aplicación de dos cargas simultáneas sobre el bloque de la enjuta que se sitúa sobre la clave y sobre le penúltimo bloque desde el borde izquierdo (fig 12.8a).

El descenso de cargas vuelve a producir patrones de esfuerzos similares a los anteriores y se vuelve a producir un contacto con el arco de manera no homogénea, debido a las irregularidades propias del material. Los esfuerzos se concentran bajo los puntos de contacto de los bloques donde se sitúan verticalmente las cargas y el arco vuelve a manifestar un comportamiento asimétrico.

tabla 12.8 Valores obtenidos de los sensores transformados a fuerza del ensayo M2E6 (Dibujo y fotografía del autor)

Los valores de los sensores transformados a cargas que se muestran a continuación, recogen esta circunstancia, aunque menos marcado de lo que se esperaría:

Posición sensor	Carga absoluta [N]	Valor relativo [%]	Carga sin perd. [N]	Valor relativo sin perd. [%]
Superior Derecho	56,70	53.90	32.68	53.90
Superior Izquierdo	48,50	46.10	38.20	46.10
Inferior Derecho	30,46	28.96	30,46	42.97
Inferior Izquierdo	40,42	38.43	40,42	57.03

Consideraciones sobre otros modelos ensayados

Los ensayos se han realizado asimismo con otros modelos de arco sin enjutar con dovelas discontinuas. Dichos modelos, al tratase de piezas en seco realizados por medio de corte por láser producen una pequeña merma del material, lo que provoca que las piezas no encajen completamente al formar el modelo. Dicha merma provoca una mínima holgura que al aplicar las fuerzas necesarias para visualizarse el comportamiento fotoelástico provoque una deslizamiento de las piezas.

Sin embargo, a pesar de obtener imágenes en estas pruebas, muy plásticas e interesantes para estudiar los mecanismos de formación de rótulas y giros de arcos sometidos a cargas axiales en fábricas a hueso, han sido excluidos del estudio por no poderse relacionar con la metodología analítica. Se incluye alguna imagen con carácter informativo dado, que como se puede observar, se producen el colapso local en la clave cuando la carga es elevada y no es posible impedir el deslizamiento (fig 12.15 izq) o la formación de un número de rótulas que impiden mantener la forma original del arco (fig 12.15 dch)

fig 12.15 Esfuerzos y mecanismos de fallo de otros ensayos realizados (Fotografías del autor)

CAPÍTULO 13. COMPARACIÓN Y EVALUACIÓN DE LOS RESULTADOS

13.1 Comparación de métodos

13.2 Discusión de los resultados

13.1 COMPARACIÓN DE MÉTODOS

Métodos de análisis

Geometría analítica

Para cada uno de los ensayos anteriores se ha determinado las líneas de empuje por medio del procedimiento de geometría analítica del prototipo informático realizado. Para ello se ha partido de la densidad del material epoxídico con el que se ha fabricado el material y el espesor.

Se presenta en resultado de dos análisis. El primero (línea continua) corresponde con la aplicación de las cargas puntuales que se obtiene de los sensores, tal y como se ha presentado en el apartado anterior. En segundo lugar (línea discontinua), dado que el esfuerzo aplicado que permite visualizar el comportamiento fotoelástico es elevado, la carga puntual se ha reducido de manera que se obtenga una curva por los puntos de pasos previamente establecidos.

La particularización se ha realizado de manera que, en caso de carga simétrica la pendiente de la curva a su paso por el eje de simetría sea nula y los puntos de paso por dos de los puntos que coinciden con los obtenidos del método fotoelástico y en caso de cargas asimétricas, que la pendiente en los apoyos coincide con la proporción de reacciones de los ensayos. Las reacciones, el valor del empuje y los puntos de paso se expresan en cada apartado, para cada análisis.

Punto de paso esfuerzos

Por otro lado, a la vista de la concentración de tensiones presentes en las imágenes obtenidas en el polariscopio, se ha procedido a determinar los puntos de paso de las acciones.

Para facilitar la localización de dichos puntos y evaluar los patrones, las fotografías mostradas en el capítulo anterior, han sido manipuladas por medios del empleo de filtros de ajuste de contraste y realzamiento de los bordes, para facilitar la lectura tal y como se presenta en la ciertas publicaciones (Bigoni y Nosellini 2010). A partir de dichos puntos se ha trazado la poligonal que podría ser equivalente a los puntos de paso de las acciones (línea continua) así como la interpolación mediante Splines cúbicos de los puntos (línea discontinua)

Modelo 1: Arco enjutado con dovelas discontinuas

Ensayo 1. Carga centrada: M1E1

La curva de empujes obtenido para el análisis geométrico analítico (fig 13.1a) presenta los siguientes resultados, mientras el recorrido de las cargas del ensayo estimado se muestra en la fig 13.1b:

fig 13.1 Curvas de empujes (izq) y recorridos de las cargas (dch) del ensayo M1E1 (Dibujo y fotografía del autor)

	Análisis 1 [N]	Análisis 2 [N]
Q	56.40	0.49
V _{dch}	26.12	1.23
V _{izq}	26.12	1.23
H	36.21	0.48

tabla 13.1 Resultado de los análisis mediante geometría analítica del ensayo M1E1

Ensayo 2. Carga excéntrica: M1E2

Las curvas de empujes obtenidas, en el caso de una carga excéntrica en el análisis geométrico analítico (fig 13.2a) presenta los resultados que se muestran a continuación. Por otra parte el trazado estimado de las cargas, se muestra en la fig 13.2b:

	Análisis 1 [N]	Análisis 2 [N]
Q	34.59	0.92
V _{dch}	4.23	1.18
V _{izq}	32.34	1.72
H	4.45	0.82

tabla 13.2 Resultado de los análisis mediante geometría analítica del ensayo M1E2

fig 13.2 Curvas de empujes (izq) y recorridos de las cargas (dch) del ensayo M1E2 (Dibujo y fotografía del autor)

Modelo 2: Arco enjutado con dovelas continuas

Ensayo 3 Carga centrada: M2E3

En el modelo de arco continuo con carga centrada, las curvas de empujes obtenidas, en el análisis geométrico analítico (fig 13.3a) presenta los resultados que se muestran a continuación. Por otra parte el trazado estimado de las cargas, se muestra en la fig 13.3b:

tabla 13.3 Resultado de los análisis mediante geometría analítica del ensayo M2E3

	Análisis 1 [N]	Análisis 2 [N]
Q	78.73	0.12
V _{dch}	40.36	0.55
V _{izq}	40.36	1.11
H	50.57	1.11

Ensayo 4 Carga excéntrica: M2E4

Las curvas para la carga excéntrica obtenidas mediante geometría analítica (fig 13.4a) con los valores de resultados que se muestran en la siguiente tabla. La poligonal y la curva interpoladora de los puntos de paso para el trazado de las cargas se observa en la fig 13.4b.

fig 13.4 Curvas de empujes (izq) y recorridos de las cargas (dch) del ensayo M1E2 (Dibujo y fotografía del autor)

	Análisis 1 [N]	Análisis 2 [N]
Q	19.99	3.46
V _{dch}	4.38	1.56
V _{izq}	17.62	3.88
H	5.07	0.17

tabla 13.4 Resultado de los análisis mediante geometría analítica del ensayo M1E2

Ensayo 5 Dos cargas centradas: M2E5

Las curvas en el análisis geométrico analítico para dos cargas colocadas simétricamente (fig 13.5a) se obtiene con los datos que se muestran a continuación. Mientras tanto, el trazado estimado de las cargas de la imagen obtenida del ensayo se muestra en la fig 13.gb.:

	Análisis 1 [N]	Análisis 2 [N]
Q	50.46	1.69
V _{dch}	51.45	2.68
V _{izq}	51.45	2.68
H	11.78	0.17

tabla 13.5 Resultado de los análisis mediante geometría analítica del ensayo M2E5

Ensayo 6 Dos cargas no centradas: M2E6

Para el último caso que se ha comparado, aplicando dos cargas no centradas, los resultados de los análisis se muestran a continuación, para las curvas obtenidas (fig 13.6a). Asimismo, se ha trazado el posible recorrido de las cargas que se puede observar en la fig 13.6b..

	Análisis 1 [N]	Análisis 2 [N]
Q _{dch}	32.68	0.47
Q _{izq}	38.20	0.53
V _{dch}	54.29	1.75
V _{izq}	16.95	2.58
H	39.45	0.83

fig 13.5 Curvas de empujes (izq) y recorridos de las cargas (dch) del ensayo M2E5 (Dibujo y fotografía del autor)

tabla 13.6 Resultado de los análisis mediante geometría analítica del ensayo M2E6

fig 13.7 Curvas de empujes (izq) y recorridos de las cargas (dch) del ensayo M2E6 (Dibujo y fotografía del autor)

13.2 DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

A la luz de los resultados, tanto de los análisis realizados como los obtenidos de los modelos fotoelásticos se pueden realizar una serie de consideraciones, tanto cuantitativamente de los valores obtenidos como cualitativamente de las curvas y recorridos de acciones.

Consideraciones sobre los resultados de los ensayos fotoelásticos

Como se puede observar en los valores de las fuerzas obtenidas por los sensores, hay una discrepancia notable entre las acciones y las reacciones. Esto es debido a varios motivos. El primero de ellos es debido al diseño del propio polariscopio, ya que el modelo fotoelástico queda confinado entre dos planchas transparentes, para asegurar que se producen cargas fuera del plano. Por ello el confinador comprime lateralmente la pieza que sirve para aplicar la carga a la parte superior de la enjuta, así como los propios bloques. Ello provoca que se pueda transmitir parte de la carga por rozamiento lateral con las paredes del confinador.

El segundo se debe a la propia metodología de los ensayos, ya que la medición se realiza en la base de los modelos, como se muestra en los esquemas. Sin embargo, existe la posibilidad (como se muestra en las curvas de empujes posibles) que parte de la carga se transmita lateralmente a los bordes del confinador. Esta circunstancia significa que los laterales, que impiden el deslizamiento, ejercen la labor de estribos.

Consideraciones sobre el modelo y el material

El material fotoelástico con el que se han realizado los ensayos, se encuentra muy extendido entre los empleados para este tipo de pruebas. La diferencia del comportamiento entre la resina epoxídica y las piezas (de ladrillo o piedra) que representa, muestra una serie de diferencias de comportamiento que conviene resaltar.

En primer lugar el material del ensayo posee una capacidad de resistencia a tracción nada despreciable, por lo que las propias piezas (que no la fábrica en conjunto) son capaces de trabajar a flexión. Esta circunstancia se pone de manifiesto especialmente en los ensayos de modelos continuos (M2) por lo que las conclusiones obtenidos de los mismos, debe tener en cuenta esta circunstancia.

Sin embargo cabe recordar lo manifestado en el Capítulo 2.4, en relación a la capacidad resistente a tracción de los materiales de fábrica, que, aunque valores bajos no es nula. Esto permite un cierto trabajo a flexión en tensiones muy bajas, es decir con cargas puntuales muy pequeñas o alejadas de los límites elásticos. Las tensiones de trabajo en el punto de aplicación de la carga se pueden estimar que oscila entre 0.115 N/mm^2 y 0.415 N/mm^2 , muy lejos de la tensión máxima de 56.9 N/mm^2 del material.

Por otra parte, se puede deducir de las imágenes obtenidas, que la capacidad a flexión de las dovelas provoca que se formen mecanismos de bielas y tirantes en

las mismas, lo que provoca una divergencia en el recorrido de las cargas. Por ello, la comparación con un método de recorrido único, como el caso de las líneas de empujes, da como resultado valores numéricos diferentes, dado que una parte de las carga ha podido escoger una trayectoria diferente a la que se manifiesta con más intensidad.

Los métodos de bloques rígidos mediante programación lineal pueden tratar de manera estadística los resultados para obtener recorridos más o menos probables de las cargas (Magdalena 2013, Magdalena et al. 2016). Sin embargo, el objetivo no es obtener ni todos los recorridos ni los más probables, si no uno posible y compatible, dado que el análisis límite se fundamenta en esta premisa.

Consideración sobre la metodología de trazado de cargas

La metodología para el trazado del recorrido de las cargas, se ha realizado visualmente, por medio el dibujo. Como se observa en las imágenes, en muchas ocasiones la concentración de tensiones es tan elevado que la lectura es inmediata (en espacial en las juntas entre piezas) mientras en otros es necesario interpretar la distribución de líneas isoclinas.

En el caso de piezas sometidas a flexión o flexocompresión, como puede ser en el modelo 2, la distinción de la concentración de tensiones sea a compresión o a tracción no es posible directamente. Sin embargo la localización de la fibra neutra es inmediata y la posterior interpretación se hace directamente.

Por ello, para comparar con la línea de empujes, que al tratarse de la posición de una resultante, se realice con la línea de la fibra neutra, parece interesante.

Consideraciones sobre los análisis mediante geometría analítica

La obtención de la curva general de empujes compatible con las cargas exteriores tiene una única solución, pero al ser parametrizada, las soluciones particulares son múltiples. La posibilidad de parametrizarla en función de las cargas exteriores (en este caso una o dos cargas puntuales) y de la distribución y reparto entre los apoyos, permite aumentar el abanico de posibilidades.

Para obtener las curvas mostradas en las comparaciones anteriores, en algunos casos ha sido posible encajarlas por los puntos de paso prefijados, mientras en otros casos ha primado la premisa de encajar las curvas en el interior de la fábrica. Esto ha provocado variar el reparto de las cargas respecto a las obtenidas en las ensayos empíricos, que se refleja en las reacciones anteriormente expuestas.

Consideraciones sobre la comparación

El trazado de la posición de la trayectoria de las cargas con las curvas de empujes de obtenido en el modelo 1 para cargas similares se muestra muy dispares, en

posición y valor. Esta circunstancia se puede deber a las diferencias entre el comportamiento del material y del trazado de las cargas, por lo que si no se prefija previamente la posición de los puntos de paso, no es posible compararlo.

La comparación sí resulta interesante, y se puede extraer de las figuras de los ensayos M1E1 y M1E2, para verificar la importancia de las imperfecciones y las irregularidades a las que este tipo de estructura presenta tanta sensibilidad. Esta consideración refuerza la premisa de que no existe “la línea de empujes” sino una posible “línea de empujes”.

De la comparación de los modelos continuos M2E3 y M2E4, se deduce la similitud de las curvas que se presentan. Cabe recordar que el método de análisis para obtener las curvas de empuje parte de la suposición de que el material es continuo (en el sentido de no discriminar las juntas y lechos de las piezas) así como que la familia de planos es vertical, lo que también presupone que el material es continuo.

Esta circunstancia no se apreciaba importante en la comparación entre los tipos de análisis mostrados en el Capítulo 9.2, pero a la luz de lo expuesto anteriormente, parece cobrar mayor importancia en las estructuras, como la modelizada, donde el peso propio y por tanto la geometría, no es la carga fundamental.

PARTE 5

CONCLUSIONES

CAPÍTULO 14. CONCLUSIONES

14.1 CONCLUSIONES

14.2 FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

14.1 CONCLUSIONES

A continuación se presentan las conclusiones que se han podido extraer durante la realización de la investigación planteada en la presente tesis doctoral, habiéndose demostrado la hipótesis planteada al inicio, que se expresa en el Capítulo 1.5 y alcanzado los objetivos planteados que se han descrito en el Capítulo 1.6.

Estas conclusiones que se presentan se circunscriben, en primer lugar a cada una de las partes en las que se ha dividido tanto la realización como la exposición de los trabajos en el presente texto, que corresponden con las fases teórica, práctica y experimental del trabajo, para finalizar exponiendo la conclusión general a partir de la demostración de la hipótesis planteada.

Investigación teórica

En primer lugar, el estudio de las técnicas de levantamiento geométrico y constructivo, permite identificar los parámetros mínimos que intervienen en la modelización y en el posterior análisis estructural del equilibrio del método propuestos. En relación a la geometría, se pueden concluir que los parámetros relevantes son los siguientes:

- Puntos en el espacio estimados como significativos, que corresponden con vértices, aristas, ... de elementos constructivos del objeto del levantamiento.
- Puntos masivos tomados indiscriminadamente que requieren una labor de refinado y evaluación de los elementos constructivos a los que pertenece, previos a la modelización.
- Mallas o superficies realizadas por fotogrametría convergente e interpretadas automáticamente por medios computacionales.

En relación la caracterización constructiva y de daños se concluye que son los siguientes parámetros:

- Estratos arqueológicos que permiten la distinción tanto constructiva como material, con la identificación del tipo y su peso específico.
- Daños y lesiones mecánicas que producen discontinuidades en la fábrica y que indican la imposibilidad del paso de los esfuerzos.

Una vez revisado, tanto en la literatura científica como en softwares de análisis estructural a nivel comercial existentes, se han identificado las técnicas que se emplean para la modelización geométrica y la visualización de los mismos por medio de sistemas CAD. En este aspecto la identificación de los modelos geométricos CAD en 2 y 3 dimensiones son los siguientes:

- Modelo de puntos
- Modelo alámbrico
- Modelo de curvas y superficies idealizadas
- Modelo de curvas y superficies interpoladas
- Modelo de curvas y superficies aproximadas

En dichos modelos, la información necesaria para la definición geométrica analítica es la siguiente:

Modelado de Puntos	
Nube de puntos	Puntos de la nube
Mapa de profundidad	Puntos de la nube
Modelo alámbrico	Vértices
Modelo de curvas y superficies	
Primitivas	Puntos de interpolación
Interpoladas	Puntos para interpolar
Aproximadas	Polígono de control, grado, vector nodos y pesos

A partir de la información recogida, se ha propuesto un método geométrico analítico que partiendo de la información de los modelos y empleando la condición geométrica del Análisis Limite (aplicación del Teorema del Límite Inferior), permite evaluar la estabilidad de estructuras de fábrica. Esto representa la aportación fundamental planteada en los objetivos, dado que supone el germen del prototipo de herramienta desarrollado y que permite la comprobación de su validez.

Para el método geométrico analítico propuesto se ha diseñado un algoritmo computacional que recoge en tres etapas la secuencia de operaciones a realizar para resolver el equilibrio de una estructura de fábrica histórica. Estas son las siguientes:

- Obtención de datos geométricos
- Construcción de funciones
- Resolución de equilibrio y obtención de resultados
- Verificación del equilibrio y visualización

Investigación práctica

Respecto a la fase práctica del trabajo se ha desarrollado un prototipo de herramienta informática basada en el método geométrico analítico, que mediante el modelo geométrico realizado en un software CAD comercial y un sistema CAS, realiza la verificación del equilibrio de estructuras de fábrica históricas. Para ello se ha programado en lenguaje Python y con el uso de las librerías Scipy y Numpy una serie de módulos y script que implementan el algoritmo diseñado a nivel teórico.

El prototipo de herramienta ha demostrado su validez y capacidad de resolución del equilibrio general, particularizando la solución en función de diversos parámetros: puntos de paso, valores de empujes, pendiente en un punto, valores de reacciones, reparto de acciones entre apoyos,...

En modelos geométricos canónicos, tanto planos como espaciales, la resolución es inmediata, sencilla y muy intuitiva. La posibilidad de particularizar la curva o superficie de empujes respecto a diversos parámetros, permite un recorrido inmediato entre todas las posibilidades de equilibrio, lo cual muestra de manera intuitiva la relación geometría y equilibrio. Asimismo se permite visualizar el abanico de posibles mecanismos de transmisión de esfuerzos de manera rápida y sencilla.

A partir del estudio comparativo de ejemplos tomados de la literatura, realizado entre varios métodos de análisis de líneas de empujes, se puede concluir que el prototipo de herramienta informática es asimismo válido y presenta una precisión acorde al modelo empleado. Además se concluye del mismo que la modelización mediante técnicas de aproximación representa el modelo más adecuado para reducir la información manejada respecto al grado de precisión. Sin embargo en modelos que manejan mucha menos información (modelos de puntos e interpolados) no se muestra variación relevante en la precisión entre ellos y que además, dada la existencia de los coeficientes de seguridad que la validan, pueden afirmarse que no son significativos.

De las aplicaciones en casos reales estudiadas, se demuestra la capacidad de esta herramienta de proporcionar resultados visuales, directamente sobre la representación de la construcción en el modelo geométrico de geometrías más o menos complejas y de estructuras planas y espaciales, a la vez que datos numéricos fiables y precisos. De hecho se emplea la misma precisión que la existente en el modelo, lo cual, empleando las técnicas de levantamiento disponibles, supone precisiones muy elevadas.

La conclusión más importante que se extrae del empleo del prototipo desarrollado es que permite de manera muy rápida e inmediata estudiar muchas situaciones, tanto geométricas como de cargas. La consecuencia más evidente de esto es permitir, en procesos de estudio de edificios históricos de fábrica, la toma de decisiones con anterioridad a estudios en más profundidad o a la intervención, en relación a la implicación en el equilibrio global o local de elementos estructurales.

Investigación experimental

En primer lugar, cabe destacar la aportación realizada en la metodología desarrollada para el estudio de estructuras de fábricas en medios discontinuos, empleando la fotoelasticidad, tanto desde el punto de vista cualitativo como cuantitativo. Es reseñable la implementación y validación del empleo de sensores FSR de muy bajo coste con el hardware libre Arduino, cuando se pretenden realizar lecturas relativas en lugar de obtener valores absolutos.

A partir de la comparación de los ensayos fotoelásticos con los análisis empleando el método de geometría analítica, se deduce que la localización del recorrido

de las cargas en arcos continuos se asemejan en mucha mayor medida que en caso de las dovelas discontinuas. Esto vuelve a reflejar la enorme sensibilidad de las fábricas a la imperfecciones y defectos locales a la hora de localizar la “verdadera” línea de empujes.

Conclusiones generales: geometría analítica como herramienta de análisis estructural de fábricas históricas

Por último, como conclusión general y más importante, que se deriva del objetivo e hipótesis planteada se puede expresar que la hipótesis planteada se encuentra probada: **se puede analizar la estabilidad de fábricas históricas aplicando el Análisis Límite a partir del levantamiento geométrico y constructivo, utilizando la geometría analítica computacional.**

Esto permite disponer de un método y un algoritmo para el desarrollo de herramientas informáticas que sirvan para dotar de un método fiable y con credibilidad pero sobre todo intuitivo y visual para que todo aquel que intervenga en Patrimonio pueda emplear. Dado que una de las grandes dificultades que presenta la conservación y mantenimiento de la edificación histórica es el presupuesto, o mejor dicho, la falta del mismo, el empleo de esta herramienta permite abaratar en tiempo y costes la toma de decisiones preliminares y solo cuando se estime conveniente, invertir en otros estudios y evaluaciones de mayor profundidad.

Porque, si a aquellas personas que deben intervenir y velar por la conservación del Patrimonio, disponen de herramientas sencillas, se podrá facilitar su labor, que no deja de redundar en la mejora del propio Patrimonio.

14.2 FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

A partir de lo expuesto anteriormente como conclusiones y aportaciones de la presente tesis doctoral, se abren una serie de caminos y líneas de investigación como consecuencia de los aspectos no abarcados, pero que se estiman importantes.

En mi opinión como autor de la tesis y una vez profundizado en el tema, la herramienta propuesta tanto como metodología como el prototipo, presenta muy buenas perspectivas para su desarrollo, no sólo académico sino también a nivel profesional. Una de las razones es que el campo de actuación en el que se centra dispone de herramientas de análisis de enorme potencia pero también muy complejas, que requiere de conocimientos muy específicos para su empleo. Otra razón es que permite, como se ha expresado anteriormente, reducir los tiempos y también el coste para la toma de decisiones preliminares en relación a la intervención y la conservación de construcciones históricas.

Los trabajos futuros que se estiman desarrollables a partir de la presente tesis, se pueden resumir a continuación.

Optimización, testeo y ajuste del algoritmo de programación

Dado que la optimización, desde el punto de vista computacional, del algoritmo de programación, se escapaba a los objetivos marcados en la tesis, cabe mencionar que queda pendiente abordar esta tarea. Para ellos sería necesario enfocarlo desde un equipo pluridisciplinar, que incorpore no sólo el enfoque arquitectónico y de la ingeniería, que se presenta en el trabajo sino también el informático, tanto en el modelado como en la programación.

Estos dos ámbitos han sido pasado por alto, dado el enfoque constructivo y estructural que presenta la tesis, por lo que es necesario volver a tener en cuenta de manera que la herramienta pueda ser transferida al ámbito profesional.

Apertura del campo de aplicación

La metodología propuesta está abierta a ampliar el ámbito de aplicación e incorporar escenarios más dispares que los que atañen a los preceptos del Análisis Limite. Estos pueden ser la incorporación de estructuras con deslizamientos no impedidos, especialmente una vez realizados los ensayos fotoelásticos, que, aunque representan a una estructura de fábrica en seco y no tienen en cuenta el efecto del mortero, permiten ver los efectos del deslizamiento en estas situaciones.

Asimismo sería interesante ampliar el espectro de aplicabilidad para incorporar tanto las situaciones de tensiones de compresión limitadas como pequeñas incorporaciones de tensiones de tracciones, lo que tendría como consecuencia la posibilidad de que se produzcan pequeñas flexiones, aspecto ahora no contemplado.

Modelización y origen de las cargas

Otro tema a desarrollar que el presente trabajo ha permitido intuir y que ha quedado pendiente, es completar el tipo y origen de las cargas a la hora de modelizar y evaluar este tipo de estructuras. Un ejemplo muy evidente de las mismas, es el efecto reparto que la enjuta realiza a lo largo de la vertical, hasta llegar al trasdós del arco, efecto conocido en los rellenos, pero no evaluado para otro tipo de estructuras. Como se ha podido comprobar en los ensayos fotoelásticos, el ángulo que forma la carga puntual en la cabeza del muro desciende verticalmente formando un cono con un determinado ángulo.

Asimismo, la incorporación en el método analítico de tipos de cargas de origen diferente, permite la ampliación de las posibilidades de uso así como sus aplicaciones. Este es el caso de las cargas sísmicas, donde la implementación del algoritmo ha quedado pendiente y a las que las estructuras de fábrica histórica son tan sensibles. Asimismo la incorporación al método los efectos reológicos, cuya importancia en estructuras antiguas se ve aumentada dada los periodos de tiempo de observación tan elevado,

Aplicabilidad

Uno de los estudios futuros que se plantean realizar, a la vista de los resultados del trabajo y aplicando el prototipo de herramienta desarrollado, es el estudio de los rellenos en relación a su naturaleza y la geometría de la estructura de la bóveda, así como su posición y efecto de su existencia. En continuación con los trabajos mencionados de Ramos (2015) sobre la influencia en la estabilidad de los rellenos en las bóvedas, el empleo de la herramienta desarrollada permitiría conocer, para diferentes tipos de estructura en forma, geometría y existencia de lesiones así como configuraciones y tipos de rellenos, la relación de beneficio - perjuicio que reportan, tanto a nivel global como parcial.

A la vista de todo lo anteriormente expuesto, el campo de investigación en la relación a la geometría analítica en estructuras históricas presenta unas buenas perspectivas de desarrollo y la actualización de métodos clásico con el empleo de herramientas tecnológicas geométricas cobra especial relevancia.

REFERENCIAS

- Acland, J. H. 1972. *Medieval Structure: The Gothic Vault*. Toronto: University of Toronto Press.
- Alberti, L. B. 1582. *Los diez libros de Arquitectura de León Baptista Alberti*. Madrid: Casa de Alfonso Gómez.
- Allen, E. y Zalewski, W. 2010. *Form and forces: designing efficient, expressive structures*. Hoboken: John Wiley and Sons.
- Almagro, A. 2004. *Levantamiento arquitectónico*. Granada: Universidad de Granada.
- Alonso, A., J. Gomis, J. Moreno, y V. Llopis. 2011. "Arquitectura religiosa: análisis constructivo y estructural." En *Actas del Séptimo Congreso Nacional de Historia de la Construcción*, Santiago 26-29 octubre 2011, eds. S. Huerta, I. Gil Crespo, S. García, M. Taín. Madrid: Instituto Juan de Herrera.
- Álvarez, I., A. Lopetegi, A. Mesanza, Á. Rodríguez, J. M. Valle, y I. Vicente. 2003. "Diferentes propuestas para la representación geométrica de edificios históricos." *Arqueología de la Arquitectura* (2): 9-12.
- Álvarez, J. I., A. Martín, y P. J. García Casado. 1995. "Historia De Los Morteros." *Boletín del Instituto andaluz del Patrimonio Histórico* 13: 52-59.
- Andreu, A., L. Gil, y P. Roca. 2006. "Limit Analysis of Masonry Constructions by 3D Funicular Modeling." *Structural Analysis of Historical Constructions*. Nueva Deli: MacMillan, 1135-1142.
- Angulo, R. 2012. "Construcción de la base gráfica para un sistema de información y gestión del patrimonio arquitectónico: Casa de Hylas." *Arqueología de la Arquitectura* (9): 11-25.
- Aroca, R. 2002. *Funiculares*. Cuadernos del Instituto Juan de Herera. Madrid: Instituto Juan de Herrera.
- Autodesk, Inc. 2013. *123D Catch App*. Mill Valley: Autodesk, Inc.
- Azagra, D. y A. Bernabeu. 2012. "La Estructura de las formas libres." *Informes de la Construcción* 64 (526): 133-142.
- Azevedo, J., G. Sincraian, y J. V. Lemos. 2000. "Seismic Behavior of Blocky Masonry Structures." *Earthquake Spectra* 16 (2): 337-365.
- Baker, I. O. 1909. *A Treatise on Masonry Construction*. Nueva York: John Wiley & Sons.
- Barlow, W. H. 1846. "On the existence (practically) of the line of equal horizontal thrust in arches, and the mode of determining it by geometrical construction". *Minutes and Proceedings of the Institution of Civil Engineers*. 5: 162-182

Bell, E. T. 1949 (2015). *Historia de las Matemáticas*. Madrid: Fondo de Cultura Económica de España.

Benévolo, L. 2005. *Historia de la Arquitectura Moderna*. Traducción de M. Galfetti y A. Pujol Puigvehí. Barcelona: Gustavo Gili.

Benítez P. y M. Valiente. 2015. "The Tangent Solution to the Late Gothic Helical Staircase: A Justified Oblivion." *Nexus Network Journal* 17 (2): 379-398

Benito, M. A. 2011. *La Catedral de Ávila: Evolución constructiva y análisis estructural*. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Madrid.

Bigoni, D. y G. I. Noselli. 2010. "Localized Stress Percolation through Dry Masonry Walls. Part I – Experiments & Part II - Modelling." *European Journal of Mechanics-A/Solids* 29 (3): 291-307.

Billo, E. J. 2007. *Excel for Scientists and Engineers: Numerical Methods*. Nueva York: John Wiley & Sons.

Block, P. 2009. *Thrust Network Analysis: Exploring Three-Dimensional Equilibrium*. Tesis doctoral, Massachusetts Institute of Technology.

Block, P., T. Ciblac, y J. Ochsendorf. 2006. "Real-Time Limit Analysis of Vaulted Masonry Buildings." *Computers & Structures* 84 (29): 1841-1852.

Brencich, A., L. Gambarotta, y S. Lagomarsino. 1998. "A Macroelement Approach to the Three-Dimensional Seismic Analysis of Masonry Buildings." En *11th European Conference on Earthquake Engineering*, Rotterdam: Balkema.

Briñez, J. C., A. Restrepo, y F. López. 2015. "Estudios de fotoelasticidad: desarrollos y aplicaciones." *Revista Politécnica* 2015 9 (16): 27-36.

Budynas, R. G. 1999. *Advanced Strength and Applied Stress Analysis*. Singapur: McGraw-Hill.

Burgos Román, J. 2008. *Fundamentos Matemáticos en la Arquitectura*. Madrid: García-Maroto Editores

Cassinello, P. 2005. "Influencia de los terremotos históricos en la construcción de las catedrales góticas españolas." *Annali di architettura: rivista del centro internazionale di studi di architettura* "Andrea Palladio" (17): 9-20.

Cazzani, A., M. Malagu, y E. Turco. 2016. "Isogeometric Analysis: A Powerful Numerical Tool for the Elastic Analysis of Historical Masonry Arches." *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 28 (1-2): 139.

- Chiozzi, A., M. Malagu, A. Tralli, A. Cazzani. 2016. "ArchNURBS: NURBS-Based Tool for the Structural Safety Assessment of Masonry Arches in MATLAB." *Journal of computing in civil engineering* 30 (2).
- Chiozzi, A., G. Milani, A. Tralli. 2016. "A Genetic Algorithm NURBS-based new approach for fast kinematic limit analysis of masonry vaults." *Computers and Structures* 182 (2017) 187–204.
- Cohen, M. 2014. *The Sainte-Chapelle and the Construction of Sacral Monarchy: Royal Architecture in Thirteenth-Century*. Nueva York: Cambridge University Press.
- Conde B., L. Díaz-Vilariño, S. Lagüela, P. Arias. 2016. "Structural analysis of Monforte de Lemos masonry arch bridge considering the influence of the geometry of the arches and fill material on the collapse load estimation." *Construction and Building Materials* 120 (2016): 630–642.
- Comité Europeo de Normalización. 1993. *UNE-ENV 1996-1-1: Eurocódigo 6: Proyecto De Estructuras De Ladrillo*. Ed. Comité Europeo de Normalización. Madrid: AENOR.
- Cordero, J. M. y J. Cortés. 2002. *Curvas y Superficies para Modelado Geométrico*. Madrid: RA-MA.
- Coulomb, C. A. 1773. "Essai Sur une application des réglés de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture." *Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'Académie Royale Des sciences par divers savants et lus dans ses assemblées* 7: 343–382.
- Couplet, P. 1729. "De la pousée des voûtes." *Memories de l'Académie Royale des sciencies de Paris*: 79–141.
- Cremona, L. 1879. *Le figure reciproche nella statica grafica*. Milán: Tipografia Giuseppe Bernardoni.
- Culmann, K. 1866. *Die graphische Statik*. Zürich: Meyer und Zeller.
- D'Ayala, D. F. y E. Tomasoni. 2011. "Three-Dimensional Analysis of Masonry Vaults using Limit State Analysis with Finite Friction." *International Journal of Architectural Heritage* 5 (2): 140–171.
- Delbecq, J. M. 1982. *Analyse de la stabilite des ponts en maconnerie par la theorie du calcul a la rupture*. París: SETRA Ministere.
- Dirección General de Turismo. 2009. *Puentes Históricos de la Comunidad de Madrid – Historic Bridge in Madrid Region*. Madrid: Consejería de Cultura, Deporte y Turismo.
- Drescher, A. y G. J. De Jong. 1972. "Photoelastic Verification of a Mechanical Model for the Flow of a Granular Material." *Journal of the Mechanics y Physics of Solids* 20 (5): 337–340.

España. Ministerio de la Vivienda. 2006. *Código Técnico de Edificación (CTE)*. Madrid: Boletín Oficial del Estado.

Fernández, M. 2013. "Las Bóvedas Conopiales del monasterio de Santa María de El Paular." En *Actas del Octavo Congreso Nacional de Historia de la Construcción. Madrid, 9 - 12 octubre 2013* Madrid: Instituto Juan de Herrera

Finance, L. y J. M. Leniaud. 2014. *Catalogue de L'Exposition: Viollet-Le-Duc, Les cisions d'un architecte*, edited by Cité de l'architecture & du patrimoine. Paris: Éditions Norma.

Finance, L. y G. Toscano. 1999. *La Sainte-Chapelle. Palais de la Cité*. Ed. Inventaire général des monuments et des richesses artistiques de la France. París: Caisse nationale des monuments historiques et des sites.

Foce, F. 2007. "Milankovitch's Theorie Der Druckkurven: Good Mechanics for Masonry Architecture." *Nexus Network Journal* 9 (2): 185-209.

Foley, J.D., A. van Dam, S. K. Feiner y J. F. Hughes. 1997. *Computer Graphics: Principles and Practice* Pearson Education.

Francovich, R. y R. Parenti. 1988. *Archeologia e Restauro Dei Monumenti*. Florencia: All'Insegna del Giglio.

García, A. 1997. "La devoción mariana a Nuestra Señora de Los Llanos de Hontoba (Guadalajara): En *Religiosidad popular en España: actas del Simposium: 1/4 de Septiembre de 1997*. El Escorial: Real Centro Universitario Escorial-María Cristina.

— — —. 1997. "Un documento sobre la construcción de la ermita de Nuestra Señora de Los Llanos de Hontoba (Guadalajara)." *Wad-Al-Hayara: Revista De Estudios De Guadalajara* (24): 297-305.

— — —. 1990. "Notas sobre la Historia de Hontoba (Siglos XVI al XIX)." *Wad-Al-Hayara: Revista De Estudios De Guadalajara* (17): 163-186.

García, S. y M. E. Escudero. 2011. "La «pequeña historia de la construcción» o las repetidas intervenciones en edificios históricos: el caso de San Pedro de Ávila." En *Actas del Séptimo Congreso Nacional de Historia de la Construcción*. Santiago de Compostela, 26 - 29 octubre 2011. Madrid: Instituto Juan de Herrera 2011

Gaztelu, L. 1896 *Práctica usual de los cálculos de estabilidad de los puentes*. Madrid: Establecimiento tipográfico de Fortanet

Gerstner, F. J. 1831. *Handbuch der Mechanik*. Praga: Spurny

Gilbert, M. 2007. "Limit Analysis Applied to Masonry Arch Bridges: State-of-the-Art and Recent Developments." En *5th International Arch Bridges Conference* 12-14 September 2007. Guimaraes: Universidade do Minho.

- González Urbaneja, P. M. 2003. *Los orígenes de la Geometría Analítica*. Vol. 6. La Orotava: Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia Canaria.
- — —. 2007. "Raíces históricas y trascendencia de la Geometría Analítica." *Sigma: Revista De Matemáticas* (30): 205-236.
- Grau Enguix, J. 2006. *El Muro*. Madrid: Visión Libros.
- Gregory, D. 1697. "Catenaria." *Philosophical Transactions of the Royal Society* (19): 637-652.
- Heinrich, B. 1977. "Am Anfang War Der Balken. Technik Lernen Mit Übergreifenden Bezügen." *Kultur & Technik* (1): 38-45.
- Heyman, J. 2001. *La ciencia de las estructuras*. Madrid: Instituto Juan de Herrera.
- — —. 2004. *Análisis de estructuras: Un estudio histórico*. Ed. Ricardo Aroca Hernández-Ros. Madrid: Instituto Juan de Herrera.
- — —. 1999. *El esqueleto de piedra: Mecánica de la arquitectura de fábrica*. Madrid: Instituto Juan de Herrera / CEHOPU.
- — —. 1995. *Estructuras de Fábrica :Colección de ensayos*. Madrid: Instituto Juan de Herrera.
- — —. 1982. *The Masonry Arch*. Chichester: Ellis Horwood.
- — —. 1966. "The stone skeleton". *International Journal of Solids and Structures*. 2: 249-79.
- Hoffmann, C. M. 1989. *Geometric and solid modeling*. San Mateo: Morgan Kaufmann.
- Hohenwarter, M. y Z. Lavicza. 2010. "GeoGebra, its Community and Future." En *15th Asian Technology Conference in Mathematics*, 17.12.2010 - 21.12.2010. Kuala Lumpur: Mathematics and Technology
- Hohenwarter, J., M. Hohenwarter, y Z. Lavicza. 2009. "Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: The Case of GeoGebra." *Journal of Computers in Mathematics y Science Teaching* 28 (2): 135-146.
- Holmes, L. L., C. T. Little, y E. V. Sayre. 1986. "Elemental Characterization of Medieval Limestone Sculpture from Parisian y Burgundian Sources." *Journal of Field Archaeology* 13 (4): 419-438.
- Hooke, R. 1676. *A Description of helioscopes and some other instruments*. Londres: Royal Society.
- Huerta, S. 1990. *Diseño estructural de arcos, bóvedas y cúpulas en España, ca. 1500 - ca. 1800*. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Madrid

— — —. 1996. “La teoría del arco de fábrica: desarrollo histórico.” *Obras Públicas* (38): 18-29.

— — —. 2002. “The medieval ‘scientia’ of structures: the rules of Rodrigo Gil de Hontañón”. En *Towards a History of Construction*. Ed. Antonio Becchi, Massimo Corradi y Federico Foce, 567–585. Basel: Birkhäuser.

— — —. 2003. “Análisis a rotura de estribos de fábrica.” *Revista de Obras Públicas* 150 (3439): 27-42.

— — —. 2004. “Arcos, bóvedas y cúpulas.” *Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica*. Madrid: Instituto Juan de Herrera.

— — —. 2005. “Mecánica de las bóvedas de fábrica: El enfoque del equilibrio.” *Informes de la Construcción* 56 (496): 73-89.

— — —. 2011. “Historia de la construcción: La fundación de una disciplina.” En *A História da Construção em Portugal*. Almedina: Alinhamentos e Fundações.

Huerta, S. y P. Fuentes. 2014. *Informe sobre la estabilidad de las bóvedas, fachada y sistema de contrarresto de la iglesia de Sant Miquel, Palma De Mallorca*. Informe Técnico. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid.

Hughes, T.J.R., J.A. Cottrell y Y. Bazilevs. 2015. “Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement.” *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering* 194 (2005) 4135–4195

ICOMOS/ISCARSAH Committee. 2003. “ICOMOS Charter - Principles for the Analysis, Conservation and Structural Restoration of Architectural Heritage.” En *Proceedings of the ICOMOS 14th General Assembly and Scientific Symposium*, Victoria Falls, Zimbabwe.

— — —. 2005. *Recommendations for the Analysis, Conservation y Structural Restoration of Architectural Heritage*. Barcelona: International Scientific Committee on the Analysis and Restoration of Structures of Architectural Heritage

International GeoGebra Institute. 2012. *Geogebra*. v 4.2. Linz: GeoGebra Institute.

Itasca Consulting Group, Inc. 2013. *3DEC - Three-Dimensional Distinct Element Code*, v 5.0. Minneapolis.: Itasca.

— — —. 2011. *UDEC - The Universal Distinct Element Code*, v 5.0. Minneapolis: Itasca,

Jaurreta, A. 2015. *Restauración de la ermita de Santa María de Los Llanos de Hontoba*. Trabajo Fin de Grado. Escuela Técnica Superior de Ingeniería Civil. Universidad Politécnica de Madrid.

- Jirathanathaworn, T. 2009. *Development of Photoelastic Methods Towards Study of Mechanical Aging of 2-Dimensional Granular Assemblies*. Tesis Doctoral. Universidad de Michigan
- Jones, E., T. Oliphant, y P. Peterson. 2014. *SciPy: Open Source Scientific Tools for Python*. <http://www.scipy.org/> [Online; acceso 30-05-2017].
- Jorquera, J. J. 2007. *Estudio del comportamiento resistente de los puentes de arco espaciales*. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Madrid.
- Jorquera, J. J. y J. Manterola. 2012. "An iterative form-finding method for antifunicular shapes in spatial arch bridges." *Computers & Structures*. 108 - 109 (12): 42-60.
- Kavanaugh, C., I. M. Morris, R. Napolitano y J. J. Jorquera-Lucerga. 2017. "Validating the use of graphical thrust line analysis for pier buttresses: The case study of Amiens Cathedral." *International Journal of Architectural Heritage*. DOI: 10.1080/15583058.2017.1317883
- Kilian, A. 2006. *Hanging Modeler: CAdenary*. v.2. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology.
- Kilian, A. y J. Ochsendorf. 2005. "Particle-Spring Systems for Structural Form Finding." *Journal of International Association for Shell and Spatial Structures* 148 (77): 30.
- Kooharian, A. 1952. "Limit Analysis of Voussoir (Segmental) and Concrete Arches." *Journal Proceedings*. 49 (12): 317-328.
- Kurrer, K. E. 2012. *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*. Nueva York: John Wiley & Sons.
- La Hire, P. 1712. "Sur la construction des voûtes dans les édifices." *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*: 70-78.
- — —. 1695. *Traité de mécanique*. París: Imprimerie Royal.
- Lachauer, L. y P. Block. 2014. "Interactive Equilibrium Modelling". *International Journal of Sapce Structures* 29 (1) 25-37
- Larson, R. E., R. P. Hostetler, y B. H. Edwards. 1999. *Cálculo y Geometría Analítica*. Madrid: McGraw-Hill / Interamericana de España.
- Latorre, P. 2012. "El Monumento como un Todo. El Plan Director de Restauración." *Informes de la Construcción* 64 (Extra): 45-56.
- Latorre, P. y L. Cámara. 2010. "El levantamiento para la restauración: No hay método sin herramientas." *Loggia Arquitectura & Restauración* (22-23): 16-37.
- Limit State Ltd. 2016. *RING: Rapid Masonry Arch Analysis Software*. v. 3.2.b. Sheffield: Limit State.

Llopis, V. 2014. *La catedral de Valencia: construcción y estructura. Análisis del cimborrio*. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Valencia.

López González, L. 2015. *Aplicación de Herramientas GIS para la Cartografía y Correlación de Datos de Ensayos no Destructivos en el Diagnóstico de Edificios Históricos*. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Madrid

López, D., M. Domènech-Rodríguez, J. Brazo, y P. Block. 2014. "Thin-Tile Vault for the Seventh World Urban Forum in Medellin." En *Proceedings of the IASS-SLTE 2014 Symposium*. Brasilia 15-19 de Septiembre de 2014. Brasilia: International Association for Shell and Spatial Structures

López-Arce, P. 2012. "Caracterización de Ladrillos Históricos." En *La conservación de los geomateriales utilizados en el patrimonio*. Madrid: Programa Geomateriales.

Lourenço, P. B. 1996. *Computational Strategies for Masonry Structures*. Tesis doctoral. TU Delf

— — —. 2002. "Computations on Historic Masonry Structures." *Progress in Structural Engineering and Materials* 4 (3): 301-319.

Lovadina, C., A. Reali, y G. Sangalli. 2014. "What is Isogeometric Analysis?" Conferencia para la presentación en el programa *Terrific, European Community's Seventh Framework Programme*. Milán, 30 de Junio de 2014.

Marmo, F. y L. Rosati. 2017. "Reformulation and extension of the thrust network analysis". *Computers and Structures* 182 (2017): 104-118.

Magdalena, F. 2013. *El problema del rozamiento en el análisis de estructuras de fábrica mediante modelos de sólidos rígidos*. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Madrid.

Magdalena, F., J. García, y D. Mencías. 2016. "Estructuras de fábrica: enfoques «antiguos» y «modernos» para fenómenos muy locales." *Informes de la Construcción* 68 (542) e150.

Makris, N. y H. Alexakis. 2013. "The effect of stereotomy on the shape of the thrust-line and the minimum thickness of semicircular masonry arches." *Archive of Applied Mechanics* 83 (2013): 1511-1533

Mark, R. 1982. *Experiments in Gothic Structure*. Vol. 11. Cambridge: MIT Press.

Mark, R., J. F. Abel, y K. O'Neill. 1973. "Photoelastic y Finite-Element Analysis of a Quadripartite Vault." *Experimental Mechanics* 13 (8): 322-329.

Mark, R., A. S. Çakmak, y M. Erdik. 1993. "Modelling y Monitoring the Structure of Hagia Sophia in Istanbul Structural." En *Preservation of the architectural Heritage*, Zürich, Switzerland, 179-186.

- Mark, R. y R. A. Prentke. 1968. "Model Analysis of Gothic Structure." *Journal of the Society of Architectural Historians* 27 (1): 44-48.
- Martín Talaverano, R. 2014. "Documentación gráfica de edificios históricos: Principios, aplicaciones y perspectivas." *Arqueología De La Arquitectura* (11): 011.
- Martínez, J. L. 2003. *Determinación teórica y experimental de diagramas de interacción de esfuerzos en estructuras de fábrica y aplicación al análisis de construcciones históricas*. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Madrid.
- Martínez, J. L., J. A. Martín, y J. León. 2001. "Comportamiento mecánico de la obra de fábrica". Madrid: *ETS Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Departamento de Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras*. Universidad Politécnica de Madrid.
- Martínez-Monedero, M. 2015. "Estudio constructivo de las ruinas de San Miguel de Sacramenia, como base para su restauración." *Informes de la Construcción* 67 (539) e099.
- Mas-Guindal, A. J. 1996. "Las grietas en las estructuras de fábrica. Un procedimiento para evaluar la forma de trabajo de estas." *Informes de la Construcción* 48 (446): 39-49.
- — —. 2011. *Mecánica de las estructuras antiguas ó Cuando las estructuras no se calculan*. Madrid: Munilla-Lería.
- McKenzie, H. W. y R. J. Hand. 1999. *Basic Optical Stress Measurement in Glass*. Sheffield : Society of Glass Technology Sheffield.
- McNeel, R. 2007. *RHINOCEROS: NURBS Modeling for Windows*. Versión 5.
- Medina del Río, J. M. 2013. *La luz natural como generadora del espacio arquitectónico de la catedral gótica*. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Madrid.
- Mehrtens, G. C. 1903. *Vorlesungen Über Statik Der Baukonstruktionen Und Festigkeitslehre*. Leipzig: Verlag von Wilhelm Engelmann.
- Mencías, D. 2013. "La geometría analítica dinámica como herramienta de enseñanza de arcos y bóvedas." En *III Jornadas Internacionales de Enseñanza de la Ingeniería Estructural* Valencia, 12 y 13 de Junio. Valencia: Asociación Científico Técnica del Hormigón Estructural.
- — —. 2014. "Verificación de la estabilidad de estructuras de fábrica mediante Geometría Dinámica." *Sociedad de la información* (47): 1-7.
- Mencías, D. y A. Calle. 2014. "Thrust Line Analysis of Historic Bridges in Madrid Region." En *IABSE Madrid Symposium: Engineering for Progress, Nature and People*. Madrid: International Association for Bridge and Structural Engineering
- Mencías, D., P. Cassinello, I. Payá-Zaforteza. 2014 "Metodología para el uso de la geometría analítica en el análisis de fábricas aplicado al puente de Arroyo Meaques de Madrid". En

Miradas a la investigación arquitectónica: construcción, gestión, tecnología. I Congreso Internacional sobre Investigación en Construcción y Tecnología Arquitectónicas. Madrid

— — —. 2015. “El levantamiento gráfico como herramienta de diagnóstico estructural preliminar de edificios históricos de fábrica.” En *5º Congreso de Patología y rehabilitación de edificios*. Oporto, 26 - 28 de Marzo de 2015. Oporto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Mencías, D., J. García, y F. Magdalena. 2016. “Qualitative y Quantitative Approaches to Highly Local Behaviors of Historical Masonry Structures.” En *Structural Analysis of Historical Constructions: Anamnesis, diagnosis, therapy, controls* Lovaina: CRC Press.

Mencías, D., J. García, y F. Magdalena. 2015. “Applying Photoelasticity to Masonry Structures Analysis.” En *3rd International Conference on Mechanical Models in Structural Engineering, CMMoST 2015*. Sevilla, 24 - 26 de Junio de 2015. Sevilla: Universidad de Sevilla.

Menduiña, J. y R. Fort. 2005. *Las piedras utilizadas en la construcción de los bienes de interés cultural de la Comunidad de Madrid anteriores al siglo XIX*. Madrid: Instituto Geológico Minero de España.

Méry, E. 1840. Mémoire sur l'équilibre des voûtes en berceau. *Annales des Ponts et Chaussées*. 50–70.

Milani, G. 2015. “Upper bound sequential linear programming mesh adaptation scheme for collapse analysis of masonry vaults.” *Advances in Engineering Software* 79 (2015): 91–110.

Milani, G., P. B. Lourenço, y A. Tralli. 2005. “Homogenization Approach for the Limit Analysis of Out-of-Plane Loaded Masonry Walls.” *Journal of Structural Engineering ASCE* (132): 1650-1663.

— — —. 2006a. “Homogenised Limit Analysis of Masonry Walls, Part I: Failure Surfaces.” *Computers & Structures* 84 (3): 166-180.

— — —. 2006b. “Homogenised Limit Analysis of Masonry Walls, Part II: Structural Examples.” *Computers & Structures* 84 (3): 181-195.

Milankovitch, M. 1907. “Theorie Der Druckkurven.” *Zeitschrift Für Mathematik Und Physik* (55): 1-27.

— — —. 1910. “Zu Der Statik Massiven Widerlager.” *Zeitschrift Für Mathematik Und Physik* (58): 120-128.

Monjó, J. y L. Maldonado. 2000. *Redacción de proyectos de intervención arquitectónica* Madrid: Colegio Oficial de Arquitectos de Madrid

— — —. 2001. *Patología y técnicas de intervención en estructuras arquitectónicas*. Madrid: Munilla-Lería.

- Moseley, H. "On the Equilibrium of the Arch." *Cambridge Philosophical Transactions* (5): 293-313.
- Navier C. L. H. 1826. *Résumé des leçons données à l'École des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*. Paris: Carilian-Goeury
- O'Dwyer, D. 1999. "Funicular Analysis of Masonry Vaults." *Computers & Structures* 73 (1): 187-197.
- Obvis Ltd. 2010. *Archie-M software. Analytical assessment of arch bridges and viaducts*. Exeter: Obvis
- Oliphant. T. E. 2007. "Python for Scientific Computing" *Computing in Science & Engineering*, 9: 10-20.
- Orduña, A. y P. B. Lourenço. 2003. "Cap Model for Limit Analysis y Strengthening of Masonry Structures." *Journal of Structural Engineering* 129 (10): 1367-1375.
- — —. 2005a. "Three-Dimensional Limit Analysis of Rigid Blocks Assemblages. Part I: Torsion Failure on Frictional Interfaces y Limit Analysis Formulation." *International Journal of Solids y Structures* 42 (18): 5140-5160.
- — —. 2005b. "Three-Dimensional Limit Analysis of Rigid Blocks Assemblages. Part II: Load-Path Following Solution Procedure y Validation." *International Journal of Solids y Structures* 42 (18): 5161-5180.
- Pagnoni, T. 1994. "Seismic Analysis of Masonry and Block Structures with the Discrete Element Method." En *Proceedings of 10th European conference on earthquake engineering* (3): 1674-1694.
- Palacios, J. C. 2009. *La cantería medieval: la construcción de la bóveda gótica española*. Madrid: Munilla-Lería
- Palladio, A. 1570. *Los Cuatro Libros De La Arquitectura De Andrea Palladio* [I quattro libri dell'Architettura Di Andrea Palladio]. Traducción de Joseph Francisco Ortiz y Sanz. 1790. Madrid: Imprenta Real.
- Parenti, R. 1995. "Historia, importancia y aplicaciones del método de lectura de paramentos." *Informes de la construcción* 46 (435): 19-29.
- Pérez, F. y B. E. Granger. 2007. "IPython: A System for Interactive Scientific Computing." *Computing in Science & Engineering* 9 (3). 21-29.
- Pérez-Gálvez, F., C. Rodríguez-Liñan, y P. Rubio. 2009. "Determinación de las características mecánicas de los muros de fábrica de ladrillo en la arquitectura doméstica sevillana de los siglos XVIII y XIX." *Informes de la construcción* 61 (514): 19-28.

Pérez-Sánchez, J. C. y B. Piedecausa-García. 2016. "Termografía infrarroja aplicada en cúpulas históricas: identificación y análisis de sistemas constructivos." *Informes de la construcción* 68 (541): e129.

Piegl, L. y W. Tiller. 2012. *The NURBS Book*. Berlín: Springer-Verlag.

Pieper, K. 1983. *Sicherung Historischer Bauten*. Berlín: Wilhelm Ernst und Sohn.

Planat, P. 1887. *Pratique de la mécanique appliquée a la resistance des matériaux*. París: La Construction Moderne.

Poleni, G. 1748. *Memorie istoriche della gran cupola del tempio vaticano*. Padua: Nella Stamperia del Seminario.

Poncelet, Jean-Victor. 1835. "Solution graphique des principales questions sur la stabilité des voûtes." *Mémorial de l'Officier du Génie*. 12: 151–213.

Pottmann, H., M. Eigensatz, A. Vaxman, y J. Wallner. 2015. "Architectural Geometry." *Computers & Graphics* 47: 145–164.

Prager, W. 1959. *An Introduction to Plasticity*. London: Addison-Wesley Publishing Company.

Ramos, A. 2015. *Caracterización estructural de los rellenos en bóvedas históricas de fábrica*. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Madrid.

Recuenco, M. J. 2012. *Verificación mecánica de reglas estructurales en bóvedas de planta poligonal centralizada del gótico tardío en España*. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Madrid.

Rippmann, M. 2016. *Funicular Shell Design*. Tesis doctoral. ETH Zurich.

Rippmann, M., L. Lachauer, y P. Block. 2012. "Interactive Vault Design." *International Journal of Space Structures* 27 (4): 219–230.

Riveiro, B., J. C. Caamaño, P. Arias, y E. Sanz. 2011. "Photogrammetric 3D Modelling y Mechanical Analysis of Masonry Arches: An Approach Based on a Discontinuous Model of Voussoirs." *Automation in Construction* 20 (4): 380–388.

Riveiro, B., P. Morer, P. Arias, y I. De Arteaga. 2011. "Terrestrial Laser Scanning y Limit Analysis of Masonry Arch Bridges." *Construction and Building Materials* 25 (4): 1726–1735.

Roca, P. 2011. "Restoration of Historic Buildings: Conservation Principles y Structural Assessment." *International Journal of Materials y Structural Integrity* 5 (2-3): 151–167.

Roca, P., M. Cervera, y G. Gariup. 2010. "Structural Analysis of Masonry Historical Constructions. Classical y Advanced Approaches." *Archives of Computational Methods in Engineering* 17 (3): 299–325.

- Roca, P., M. Massanas, M. Cervera, y G. Arun. 2004. "Structural Analysis of Küçük Ayasofya Mosque in İstanbul." En *Structural Analysis of Historical Constructions v. IV*. Amsterdam: Balkema, 679-686.
- Ruten, D. y R. McNeel. 2010. *Grasshopper: Generative Modeling with Rhino*. v. 4.2. Seattle: Robert McNeel & Associates.
- San Nicolás, Fray Lorenzo de. S. a. [1639]. 1989. *Arte y uso de arquitectura*. [Madrid?]: S. i. (Reimpr. Valencia: Albatros Ediciones, 1989.)
- Schröder, P., D. Zorin, T. DeRose, D. R. Forsey, L. Kobbelt, M. Lounsbery, y J. Peters. 1998. "Subdivision for Modeling y Animation." En *ACM SIGGRAPH Course Notes*. Nueva York: Association for Computing Machinery
- Schueremans, L. y B. Van Genechten. 2009. "The use of 3D-Laser Scanning in Assessing the Safety of Masonry Vaults - A Case Study on the Church of Saint-Jacobs." *Optics y Lasers in Engineering* 47 (3): 329-335.
- Serlio, S. 1552. *Tercero y Cuarto Libro de Arquitectura de Sebastia Serlio Boloñes*. Toledo: Casa de Iván de Ayala.
- Torres Balbás, L. 1920. "De cómo evoluciona una teoría de la historia de la construcción." *Arquitectura* (28): 205-215.
- Torroja, E. 1955. *Razón y ser de los tipos estructurales*. 2000. Madrid: Instituto Eduardo Torroja de Ciencias de la Construcción - CSIC.
- Torroja, E. y L. Villena. 1945 "Estudio teórico y fotoelástico de emparrillados." *Revista Obras Públicas*. 92, tomo I (2748): 156-171
- Ungewitter, G. G. 1890. *Lehrbuch Der Gotischen Konstruktionen. III Auflage Neu Bearbeitet Von K. Mohrmann*. Leipzig: T.O. Weigel Nachfolger.
- Van der Walt, S., S. C. Colbert S. C. y G. Varoquaux. 2011. "The NumPy Array: A Structure for Efficient Numerical Computation". *Computing in Science & Engineering*, 13, 22-30
- Van Mele, T.J. y P. Block. 2014. "Algebraic graph statics." *Computer-Aided Design*, 53 (2014): 104-116
- Van Mele, T., J. McInerney, M. DeJong, y P. Block. 2012. "Physical and Computational Discrete Modeling of Masonry Vault Collapse." En *Proceedings of the 8th International Conference on Structural Analysis of Historical Constructions*, Berlín: Ernst und Sohn.
- Vault Zafra. 2013. *Calculador de Bóvedas. App* v. 1.3. Zafra: Vault Zafra SL
- — —. 2012. *Carybo*. v 1.0 Zafra: Vault Zafra SL

Vega, S. y J. F. Alamillo. 2016. "Estudio de daños, capacidad resistente y estado de conservación de las dos cúpulas de la Real Fábrica de Cristales de la Granja (Segovia)". Conferencia presentada en el *Master Universitario de Construcción y Tecnología de Edificios Históricos MUCTEH*, Madrid, Curso 2015 - 2016.

Vendrell, E. 2008. *Modelado Ggeométrico. Apuntes de curso*. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia.

Villena, L. 1943. *Fotoelasticidad*. Madrid: Instituto Técnico de la Construcción y Edificación del Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

Viollet-le-Duc, E. E. 1996. *La construcción medieval*. Madrid: Reverte.

— — —. 1854. *Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XIe au XVIe siècle*. París: Ve A. Morel et cie

Walt, S., S. C. Colbert, y G. Varoquaux. 2011. "The NumPy Array: A Structure for Efficient Numerical Computation." *Computing in Science & Engineering* 13 (2): 22-30.

Wolf, W. 1921. *Graphical Analysis*. Nueva York: McGraw-Hill Book Company

Wittmann, W. 1879. "Zur Theorie Der Gewölbe." *Zeitschrift Für Bauwesen* (29): 61-74.

Zhang Y., L. Macorini, B. A. Izzuddin. 2016. "Mesoscale partitioned analysis of brick-masonry arches". *Engineering Structures* 124 (2016) 142–166

ANEXOS

A.1 Notación

A.2 Funciones y variables empleadas en la programación

A.3 Ejemplos de ecuaciones geométricas

A.4 Ejemplos de ecuaciones de curva de empujes

A.5 Evaluación de la precisión en interpolación de curvas idealizadas

A.1 NOTACIÓN

A continuación se presenta la notación empleada a lo largo del presente texto, sin ánimo de ser exhaustivo. No se incluye aquella que se describe en el Capítulo 7.1 en relación a la obtención matemática de la ecuación de la línea de empujes.

MAYÚSCULAS LATINAS

A	Arista
$A(x)$	Función área
B_k	Polinomio k -nésimo de Bernstein
C	Representación analítica de curva genérica
E	Módulo de elasticidad longitudinal
F	Acción exterior discreta; Función antiderivada
$G(x), G(t)$	Ecuación de la curva representada en el modelo geométrico
H	Reacción horizontal; Empuje horizontal
I	Punto de paso de la curva de empujes
$J_{m,i} J_{n,j}$	Base m,n -nésima del polinomio i,j -nésimo de funciones en superficies B-splines
L	Luz; Longitud
M	Momento flector
$N(x)$	Función sollicitaciones normales
$N_{i,k}$	Base i -nésima del polinomio k -nésimo de funciones en curvas B-splines
N	Acción exterior vertical
O	Origen de coordenadas
$P(x)$	Polinomio interpolador
P	Punto de control; Punto; Componente vertical del empuje
Q	Componente horizontal del empuje; carga distribuida
R	Reacción en la base; Radio
S	Representación analítica de superficie genérica
V	Reacción vertical; Vértice; Carga vertical
X	Vector de nodos de curva NURBS

MINÚSCULAS LATINAS

a	Coeficientes de interpolación
a,b	Intervalo de la función
d	Ancho del estribo
e	Ecuación de la curva o superficie de empujes; error; espesor

$f(x), g(x)$	Función genérica
f_k	Resistencia característica a compresión simple de la fábrica
m	Pendiente de la curva de empuje
n	Número de puntos del levantamiento / modelo
q	Carga lineal
t	Parámetro de curva paramétrica, espesor
u, v	Parámetros de superficie paramétrica
x	Nodo de interpolación
x, y, z	Coordenadas cartesianas
w	Función peso propio; peso del punto en curvas NURBS

MAYÚSCULAS GRIEGAS

Γ	Curva de la envolvente; Curva genérica
Σ	Superficie de la envolvente; Superficie genérica

MINÚSCULAS GRIEGAS

α	Ángulo de la superficie de fractura de estribos respecto a la horizontal
β	Ancho
γ	Peso específico aparente; coeficiente de seguridad geométrico
λ	Parámetro en curvas paramétricas
θ	Coordenadas polares
ϕ	Ángulo de la curva de empujes respecto a la horizontal
τ	Tensión tangencial

SUBÍNDICES

X	Relativo al eje global X
Y	Relativo al eje global Y
Z	Relativo al eje global Z

A.2 FUNCIONES Y VARIABLES EMPLEADAS EN LA PROGRAMACIÓN

A continuación se describen las funciones y las variables empleadas en cada una de las funciones del prototipo cuyo funcionamiento y algoritmo se describe en el Capítulo 8.

Obtención de funciones geométricas

Funciones de lectura y escritura de datos

```
def crea_fichero(Nombre_fichero):

def graba_csv_fichero(Nombre_fichero, Lista_valores):
```

Lectura de modelo de puntos

```
def Ptos_export (Lista_puntos):
```

Lectura de modelo de formas primitivas

```
def Extremos (geom):

def Sop_Cheb (geom):
```

Lectura de modelo de formas aproximadas

```
Script Curvas_NURBS(geom, Borde, Path)

def NURBS_PtosControl(geom):

def NURBS_Pesos(geom):

def NURBS_Nodos(geom):
```

Obtención de funciones geométricas

Funciones de lectura y escritura de datos

```
def lee_txt_fichero(Nombre_fichero,):

def file_array(Nombre_fichero):

def crea_fichero(Nombre_fichero):

def graba_txt_tmp(Nombre_fichero, Texto, Caracter=None):

def graba_txt_fichero(Nombre_fichero, Texto, Caracter=None):
```

Reconstrucción de geometría

```
def crea_array_interpol(Borde):

def interpolation_Lagrange(Nodos_X, Nodos_Y, TipoFuncRhino):
```

```
def crea_array_Bezier(Borde):  
  
def DeCasteljau(grado,BX,BY):
```

Obtención de funciones área

```
def orden_dom(Dom_min_sup, Dom_max_sup, Dom_min_inf, Dom_max_inf, funciones_sup, funciones_inf, ancho = 1, PE = 1):  
  
def crea_array_area(array_funciones):  
  
def crea_array_area_NURBS(array_sup,array_inf):
```

Obtención de funciones de carga

```
def carga_ext(Func_carg, Carg):  
  
def carga_ext_param(Func_carg, Carg):  
  
def carga_total_param(Func_pp, Func_sc):  
  
def carga_total(Func_pp, Func_sc):
```

Resolución del equilibrio

```
def resta_polin(Polyn_1, Polyn_2, ancho = 1, PE = 1, Dom_inic = None):  
  
def concat_func(Lista_Funciones):  
  
def concat_func_param(Lista_Funciones):  
  
def empujes(Func_carga):  
  
def curvas_lim(Envolv, eq_empujes,dominio)
```

Representación de la solución

```
Script lectura_funciones(Path)  
  
Script funcion_e(x)(Envolv,Funciones,Dominio,Pto_paso,Pto_fin,H,P_0,m)  
  
Script funcion_e(t)(Envolv, Funciones,Func_X,Pto_paso,Pto_fin,H,P_0,m)  
  
Script coef_segur(Envolve,Curva)
```

A.3 EJEMPLOS DE ECUACIONES GEOMÉTRICAS

A continuación se muestran las ecuaciones geométricas que corresponden a los ejemplos mostrados en el estudio comparativo del Capítulo 9.2, en los análisis:

- 3. Geometría Dinámica con curvas primitivas
- 4. Geometría Dinámica con curvas interpoladas
- 5. Geometría Analítica con modelo de puntos
- 6. Geometría Analítica con modelo de curvas primitivas
- 7. Geometría Analítica con modelo de curvas aproximadas

A3.1 Geometría Dinámica con curvas primitivas

$$\Gamma_{\text{sup}} = ([\sqrt{-x^2+10.3^2}], [-8.93, 8.93])$$

$$\Gamma_{\text{inf}} = ([-0.575x-0.013, \sqrt{-x^2+9^2}], [0.575x+0.013], [-8.93, -7.8, 7.8, 8.93])$$

A3.2 Geometría Dinámica con curvas interpoladas

$$\Gamma_{\text{sup}} = ([((-3377472493397097)) / 5000000000000000000 * x^4 + (1652387879922959 / 2500000000000000000 * x^3) - (62702 / 866059 * x^2) + (33193 / 1465218 * x) + 1031 / 100], [0, 8.93])$$

$$\Gamma_{\text{inf}} = ([((-2421653797486079)) / 2500000000000000000 * x^4 + (7.921110779458923E15 / 1000000000000000000 * x^3) - (58446 / 737143 * x^2) + (12807 / 711703 * x) + 901 / 100], [(65 / 113 * x) + 3 / 226], [0.7.8.8.93])$$

A3.3 Geometría Analítica con modelo de puntos

$$\Gamma_{\text{sup}} = \text{array}([(-0.0893854748603351 * x + 10.31', 0.0, 1.79), (b' - 0.264367816091954 * x + 10.6232183908046', 1.79, 3.53), (b' - 0.469135802469135 * x + 11.346049382716', 3.53, 5.15), (b' - 0.700680272108843 * x + 12.5385034013605', 5.15, 6.62), (b' - 1.0 * x + 14.52', 6.62, 7.9), (b' - 1.42718446601942 * x + 17.8947572815534', 7.9, 8.93)], \text{dtype}=[('funcion', 'S1000'), ('Dom_min', '<f8'), ('Dom_max', '<f8')])$$

$$\Gamma_{\text{inf}} = \text{array}([(b' - 0.0897435897435894 * x + 9.01', -0.0, 1.56), (b' - 0.269736842105262 * x + 9.29078947368421', 1.56, 3.08), (b' - 0.464788732394367 * x + 9.89154929577465', 3.08, 4.5), (b' - 0.697674418604651 * x + 10.9395348837209', 4.5, 5.79), (b' - 1.0 * x + 12.69', 5.79, 6.9), (b' - 1.43333333333333 * x + 15.68', 6.9, 7.8), (b' - 0.575221238938053 * x + 0.0132743362831818', 7.8, 8.93)], \text{dtype}=[('funcion', 'S1000'), ('Dom_min', '<f8'), ('Dom_max', '<f8')])$$

A3.4 Geometría Analítica con modelo de curvas primitivas

$$\Gamma_{\text{sup}} = [(-0.000675494498678535 * x^4 + 0.0066095515196769 * x^3 - 0.0723992245332621 * x^2 + 0.0226539668498571 * x + 10.31, -0.0, 8.93)]$$

$$\Gamma_{\text{inf}} = [(-0.000968661518998257 * x^4 + 0.00792111077951452 * x^3 - 0.079287193936167 * x^2 + 0.0179948658349636 * x + 9.01, -0.0, 7.8), (0.575221238938053 * x + 0.0132743362831818, 7.8, 8.93)]$$

A3.5 Geometría Analítica con modelo de curvas aproximadas

$$\Gamma_{\text{sup}} = [[7.794*t**2 + 10.4*t*(-t + 1), 4.5*t**2 + 18*t*(-t + 1) + 9*(-t + 1)**2], [8.92*t**2 + 16.714*t*(-t + 1) + 7.794*(-t + 1)**2, 5.15*t**2 + 9.65*t*(-t + 1) + 4.5*(-t + 1)**2]]$$

$$\Gamma_{\text{inf}} = [[7.79*t**2 + 9.418*t*(-t + 1), 6.738*t**2 + 20.6*t*(-t + 1) + 10.3*(-t + 1)**2], [8.92*t**2 + 16.862*t*(-t + 1) + 7.79*(-t + 1)**2, 5.15*t**2 + 11.996*t*(-t + 1) + 6.738*(-t + 1)**2]]$$

A.4 EJEMPLOS DE ECUACIONES DE CURVA DE EMPUJES

A continuación se muestran las ecuaciones de las curvas de empujes que corresponden a los ejemplos mostrados en el estudio comparativo del Capítulo 9.2, en los análisis:

- 3. Geometría Dinámica con curvas primitivas
- 4. Geometría Dinámica con curvas interpoladas
- 5. Geometría Analítica con modelo de puntos
- 6. Geometría Analítica con modelo de curvas primitivas
- 7. Geometría Analítica con modelo de curvas aproximadas

A4.1 Geometría Dinámica con curvas primitivas

$$e = \left(\left[\left(\frac{1}{662421145050} * ((178764327000 * \sqrt{(-x^2)} + 81)) - (23413712903 * \sqrt{((-100) * x^2) + 10609}) + ((268146490500 * x) * \operatorname{asin}((1/9 * x))) - ((351205693545 * x) * \operatorname{asin}((10/103 * x))) + ((1103483500 * x^2) * \sqrt{(-x^2)} + 81)) - ((110348350 * x^2) * \sqrt{((-100) * x^2) + 10609}) - (24828378750 * x^2) + ((6620901000 * c_1) * x) - ((6620901000 * c_2) * x) - (331045050 * c_3) + 6779029120650 \right), (((-1) / 3.904561305E22 * ((-3.7414402654867186E19) * x^3) + ((6504350000000000000 * x^2) * \sqrt{((-100) * x^2) + 10609}) + (1.4608885221238946E21 * x^2)) - (6.6377542185E21 * x) + (1.380092983E21 * \sqrt{((-100) * x^2) + 10609})) - 5.242341524832E23 \right) - ((20 / H * c_2) * x) - ((10609 / 20010 * x) * \operatorname{asin}((10/103 * x))) - (1 / H * c_4) \right], [0.7.8.8.93] \right)$$

A4.2 Geometría Dinámica con curvas interpoladas

$$e = \left(\left[\left(\frac{1}{13465928850} * ((5046219000 * \sqrt{(-x^2)} + 81)) - (660930091 * \sqrt{((-100) * x^2) + 10609}) + ((7569328500 * x) * \operatorname{asin}((1/9 * x))) - ((9913951365 * x) * \operatorname{asin}((10/103 * x))) + ((31149500 * x^2) * \sqrt{(-x^2)} + 81)) - ((3114950 * x^2) * \sqrt{((-100) * x^2) + 10609}) - (700863750 * x^2) + ((186897000 * c_1) * x) - ((186897000 * c_2) * x) + 149630769448 \right), [0.7.8.8.93] \right)$$

A4.3 Geometría Analítica con modelo de puntos

$$e = \left(\left[\left(\frac{I0 - (0.00167120278851958 * x^3 + 93.2 * x^2)}{H}, \frac{I0 - (0.841639713809658 * x^3 + 89.2689473684211 * x^2 + 6.13244210526315 * x - 3.18886989473683)}{H}, \frac{I0 - (0.0250554547287708 * x^3 + 93.6540048396855 * x^2 - 1.71681076830026 * x + 1.49451765315609)}{H}, \frac{I0 - (0.935297609411266 * x^3 + 85.2433673304193 * x^2 + 24.1879527602393 * x - 25.1010395694774)}{H}, \frac{I0 - (0.0202863270155745 * x^3 + 95.3630012171789 * x^2 - 11.5343548600196 * x + 16.9322090636911)}{H}, \frac{I0 - (1.06651354196574 * x^3 + 80.6912029859314 * x^2 + 54.4887371805928 * x - 82.1024289972256)}{H}, \frac{I0 - (0.0140273163528957 * x^3 + 97.3855592469544 * x^2 - 31.4871975636761 * x + 65.4895923137706)}{H}, \frac{I0 - (1.3968253968254 * x^3 + 72.879047619047 * x^2 + 110.40550476191 * x - 208.363323174614)}{H}, \frac{I0 - (100.62 * x^2 - 73.2396000000021 * x + 196.880208000011)}{H}, \frac{I0 - (5.02222222222221 * x^3 + 58.76 * x^2 + 215.5944 * x - 467.437991999999)}{H}, \frac{I0 - (-7.35103244837758 * x^3 + 278.094159292035 * x^2 - 1495.21204247788 * x + 3980.65875844251)}{H} \right]$$

$I0 - (-9.3445599564682 * x^{**3} + 325.340761233783 * x^{**2} - 1868.46019781768 * x + 4963.54556750398) / H, [0.0, 1.5600000000000001, 1.79, 3.0800000000000001, 3.5299999999999998, 4.5, 5.1500000000000004, 5.79, 6.6200000000000001, 6.9000000000000004, 7.7999999999999998, 7.9000000000000004, 8.929999999999997])$

A4.4 Geometría Analítica con modelo de curvas primitivas

$e = ([I0 - (0.000273622552298405 * x^{**6} - 0.0018361829637727 * x^{**5} + 0.0160719286067781 * x^{**4} + 0.0217424714028359 * x^{**3} + 93.2 * x^{**2}) / H, I0 - (0.000630461532099966 * x^{**6} + 0.00925337212754763 * x^{**5} - 0.168931523910945 * x^{**4} - 2.57864726974491 * x^{**3} + 219.154159292035 * x^{**2} - 1187.71206346535 * x + 3403.33909434468) / H], [-0.0, 7.7999999999999998, 8.929999999999997])$

A4.5 Geometría Analítica con modelo de curvas aproximadas

$e = [((7.79 * t^{**2} + 9.42 * t * (-t + 1), I0 - (18.5939489866667 * t^{**6} - 123.837876661333 * t^{**5} + 490.751892 * t^{**4} - 3011.14590933333 * t^{**3} + 8436.8346 * t^{**2}) / H + 0.0 * t)), (- (8.92 * t^{**2} + 16.86 * t * (-t + 1) + 7.79 * (-t + 1) * t), I0 - (0.0681004799999994 * t^{**5} + 3.86509644 * t^{**4} - 50.3402896 * t^{**3} - 7.04481503999838 * t^{**2} + 1495.68 * t) / H - 0.536112664934 * t))]$

A.5 EVALUACIÓN DE LA PRECISIÓN EN INTERPOLACIONES DE CURVAS IDEALIZADAS

El presente estudio tiene por objeto evaluar la precisión de distintos tipos de interpolaciones numéricas respecto al área que representa la curva geométrica idealizada que respresenta. Para ello se interpolar semicircunferencias de los siguientes diámetros: 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0, 5.5, 6.0, 6.5, 7.0, 7.5, 8.0 unidades. Para ello se evalúan las siguientes tipos de interpolación, cuyas ecuaciones se han obtenido mediante programación en Python con las librerías Scipy y Numpy, que se describen en el Capítulo 8:

- Interpolación de Lagrange
- Interpolación mediante splines lineales
- Interpolación mediante splines cúbicos

para los siguientes número de nodos: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 con los siguientes tipo de soportes:

- Soportes de Chebyshev de 16 bits
- Soportes de Chebyshev redondeados a 2 decimales
- Soportes equidistantes de 16 bits

El área de la figura canónica se ha obtenido mediante la hoja de cálculo Excel con una precisión de 8 bits, lo que representa una precisión de coma flotante de 15 dígitos representativos según expresa la documentación del programa. A continuación se expresa, en tanto por uno, el error relativo para cada tipo de interpolación y cada tipo de soporte.

Interpolación de Lagrange

Soportes de Chebyshev de 16 bits

		Diámetro de la semicircunferencia														
		1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0
nº de nodos	2	0,15117	0,15117	0,15117	0,15117	0,15117	0,15117	0,15117	0,15117	0,15117	0,15117	0,15117	0,15117	0,15117	0,15117	0,15117
	3	0,08124	0,08124	0,08124	0,08124	0,08124	0,08124	0,08124	0,08124	0,08124	0,08124	0,08124	0,08124	0,08124	0,08124	0,08124
	4	0,03518	0,03518	0,03518	0,03518	0,03518	0,03518	0,03518	0,03518	0,03518	0,03518	0,03518	0,03518	0,03518	0,03518	0,03518
	5	0,02243	0,02243	0,02243	0,02243	0,02243	0,02243	0,02243	0,02243	0,02243	0,02243	0,02243	0,02243	0,02243	0,02243	0,02243
	6	0,01308	0,01308	0,01308	0,01308	0,01308	0,01308	0,01308	0,01308	0,01308	0,01308	0,01308	0,01308	0,01308	0,01308	0,01308
	7	0,00923	0,00923	0,00923	0,00923	0,00923	0,00923	0,00923	0,00923	0,00923	0,00923	0,00923	0,00923	0,00923	0,00923	0,00923
	8	0,00621	0,00621	0,00621	0,00621	0,00621	0,00621	0,00621	0,00621	0,00621	0,00621	0,00621	0,00621	0,00621	0,00621	0,00621
	9	0,00468	0,00468	0,00468	0,00468	0,00468	0,00468	0,00468	0,00468	0,00468	0,00468	0,00468	0,00468	0,00468	0,00468	0,00468
	10	0,00341	0,00341	0,00341	0,00341	0,00341	0,00341	0,00341	0,00341	0,00341	0,00341	0,00341	0,00341	0,00341	0,00341	0,00341

Soportes de Chebyshev redondeados a 2 decimales

		Diámetro de la semicircunferencia														
		1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0
nº de nodos	2	0.15117	0.15117	0.15117	0.15117	0.15117	0.15117	0.15117	0.15117	0.15117	0.15117	0.15117	0.15117	0.15117	0.15117	0.15117
	3	0.08728	0.0818	0.08728	0.08401	0.08067	0.07927	0.0782	0.08105	0.08003	0.08219	0.08124	0.08298	0.08211	0.08136	0.08027
	4	0.04744	0.03271	0.0329	0.03858	0.03772	0.03282	0.0329	0.03605	0.03579	0.03557	0.03522	0.03508	0.03496	0.03672	0.03464
	5	0.0348	0.02706	0.01617	0.02521	0.02242	0.02085	0.02553	0.02398	0.02245	0.02368	0.02242	0.02158	0.0242	0.02336	0.02244
	6	0.01486	0.00475	0.01692	0.01042	0.01351	0.0117	0.01386	0.01241	0.01488	0.0136	0.01278	0.01255	0.01308	0.01286	0.0133
	7	-0.002	0.00795	0.00807	0.00944	0.00916	0.00617	0.0114	0.00882	0.00874	0.00687	0.01029	0.00902	0.01045	0.00897	0.0089
	8	0.01218	0.0104	0.00366	0.00962	0.00655	0.00658	0.00676	0.00622	0.00376	0.00706	0.00518	0.00747	0.00619	0.00668	0.00694
	9	0.00106	0.00344	0.00456	0.00929	0.00368	0.00436	0.00533	0.00743	0.00408	0.00481	0.00643	0.00266	0.00452	0.00583	0.00495
	10	0.00552	0.00354	0.00311	0.00252	0.00656	0.00335	0.00399	0.00353	0.00428	0.00387	0.00337	0.00241	0.00415	0.00343	0.00296

Soportes equidistantes de 16 bits

		Diámetro de la semicircunferencia														
		1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0
nº de nodos	2	0.15117	0.15117	0.15117	0.15117	0.15117	0.15117	0.15117	0.15117	0.15117	0.15117	0.15117	0.15117	0.15117	0.15117	0.15117
	3	0.09968	0.09968	0.09968	0.09968	0.09968	0.09968	0.09968	0.09968	0.09968	0.09968	0.09968	0.09968	0.09968	0.09968	0.09968
	4	0.04612	0.04612	0.04612	0.04612	0.04612	0.04612	0.04612	0.04612	0.04612	0.04612	0.04612	0.04612	0.04612	0.04612	0.04612
	5	0.03632	0.03632	0.03632	0.03632	0.03632	0.03632	0.03632	0.03632	0.03632	0.03632	0.03632	0.03632	0.03632	0.03632	0.03632
	6	0.02248	0.02248	0.02248	0.02248	0.02248	0.02248	0.02248	0.02248	0.02248	0.02248	0.02248	0.02248	0.02248	0.02248	0.02248
	7	0.01898	0.01898	0.01898	0.01898	0.01898	0.01898	0.01898	0.01898	0.01898	0.01898	0.01898	0.01898	0.01898	0.01898	0.01898
	8	0.01342	0.01342	0.01342	0.01342	0.01342	0.01342	0.01342	0.01342	0.01342	0.01342	0.01342	0.01342	0.01342	0.01342	0.01342
	9	0.01177	0.01177	0.01177	0.01177	0.01177	0.01177	0.01177	0.01177	0.01177	0.01177	0.01177	0.01177	0.01177	0.01177	0.01177
	10	0.00898	0.00898	0.00898	0.00898	0.00898	0.00898	0.00898	0.00898	0.00898	0.00898	0.00898	0.00898	0.00898	0.00898	0.00898

*Interpolación mediante splines lineales**Soportes de Chebyshev de 16 bits*

		Diámetro de la semicircunferencia														
		1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0
nº de nodos	2	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423
	3	0.09453	0.09453	0.09453	0.09453	0.09453	0.09453	0.09453	0.09453	0.09453	0.09453	0.09453	0.09453	0.09453	0.09453	0.09453
	4	0.04568	0.04568	0.04568	0.04568	0.04568	0.04568	0.04568	0.04568	0.04568	0.04568	0.04568	0.04568	0.04568	0.04568	0.04568
	5	0.02635	0.02635	0.02635	0.02635	0.02635	0.02635	0.02635	0.02635	0.02635	0.02635	0.02635	0.02635	0.02635	0.02635	0.02635
	6	0.01644	0.01644	0.01644	0.01644	0.01644	0.01644	0.01644	0.01644	0.01644	0.01644	0.01644	0.01644	0.01644	0.01644	0.01644
	7	0.01096	0.01096	0.01096	0.01096	0.01096	0.01096	0.01096	0.01096	0.01096	0.01096	0.01096	0.01096	0.01096	0.01096	0.01096
	8	0.00766	0.00766	0.00766	0.00766	0.00766	0.00766	0.00766	0.00766	0.00766	0.00766	0.00766	0.00766	0.00766	0.00766	0.00766
	9	0.00557	0.00557	0.00557	0.00557	0.00557	0.00557	0.00557	0.00557	0.00557	0.00557	0.00557	0.00557	0.00557	0.00557	0.00557
	10	0.00417	0.00417	0.00417	0.00417	0.00417	0.00417	0.00417	0.00417	0.00417	0.00417	0.00417	0.00417	0.00417	0.00417	0.00417

Soportes de Chebyshev redondeados a 2 decimales

		Diámetro de la semicircunferencia														
		1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0
nº de nodos	2	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423
	3	0.10086	0.09452	0.10086	0.09708	0.09435	0.09256	0.09121	0.09441	0.09315	0.09559	0.09444	0.0964	0.09536	0.09446	0.0936
	4	0.05867	0.04361	0.04307	0.04964	0.04829	0.0433	0.04307	0.04673	0.04621	0.04577	0.04595	0.04561	0.04531	0.04735	0.04523
	5	0.03955	0.03076	0.01981	0.02929	0.02645	0.02452	0.02974	0.0279	0.02636	0.02773	0.02645	0.02542	0.02833	0.02732	0.02639
	6	0.01874	0.00774	0.02023	0.01327	0.0172	0.01487	0.0176	0.01574	0.0184	0.01682	0.01591	0.01595	0.01633	0.01633	0.01664
	7	-0.0011	0.01051	0.01021	0.01091	0.01054	0.00748	0.01326	0.01059	0.01042	0.00849	0.01224	0.01092	0.0121	0.01058	0.01047
	8	0.01428	0.01152	0.00444	0.01097	0.00779	0.0075	0.0085	0.00773	0.005	0.00855	0.00657	0.00908	0.00768	0.00807	0.00851
	9	0.00012	0.00407	0.00558	0.01032	0.00436	0.00528	0.00624	0.00849	0.00492	0.00565	0.00739	0.00346	0.00531	0.00673	0.00594
	10	0.00679	0.00459	0.00413	0.0027	0.00745	0.00407	0.00466	0.00409	0.00516	0.00466	0.00417	0.00309	0.00504	0.00413	0.00367

Soportes equidistantes de 16 bits

		Diámetro de la semicircunferencia														
		1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0
nº de nodos	2	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423	0.20423
	3	0.11969	0.11969	0.11969	0.11969	0.11969	0.11969	0.11969	0.11969	0.11969	0.11969	0.11969	0.11969	0.11969	0.11969	0.11969
	4	0.07434	0.07434	0.07434	0.07434	0.07434	0.07434	0.07434	0.07434	0.07434	0.07434	0.07434	0.07434	0.07434	0.07434	0.07434
	5	0.05308	0.05308	0.05308	0.05308	0.05308	0.05308	0.05308	0.05308	0.05308	0.05308	0.05308	0.05308	0.05308	0.05308	0.05308
	6	0.04004	0.04004	0.04004	0.04004	0.04004	0.04004	0.04004	0.04004	0.04004	0.04004	0.04004	0.04004	0.04004	0.04004	0.04004
	7	0.03165	0.03165	0.03165	0.03165	0.03165	0.03165	0.03165	0.03165	0.03165	0.03165	0.03165	0.03165	0.03165	0.03165	0.03165
	8	0.02581	0.02581	0.02581	0.02581	0.02581	0.02581	0.02581	0.02581	0.02581	0.02581	0.02581	0.02581	0.02581	0.02581	0.02581
	9	0.02157	0.02157	0.02157	0.02157	0.02157	0.02157	0.02157	0.02157	0.02157	0.02157	0.02157	0.02157	0.02157	0.02157	0.02157
	10	0.01838	0.01838	0.01838	0.01838	0.01838	0.01838	0.01838	0.01838	0.01838	0.01838	0.01838	0.01838	0.01838	0.01838	0.01838

Interpolación mediante splines cúbicos

Soportes de Chebyshev de 16 bits

		Diámetro de la semicircunferencia														
		1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0
nº de nodos	2	0,36338	0,36338	0,36338	0,36338	0,36338	0,36338	0,36338	0,36338	0,36338	0,36338	0,36338	0,36338	0,36338	0,36338	0,36338
	3	0,18676	0,18676	0,18676	0,18676	0,18676	0,18676	0,18676	0,18676	0,18676	0,18676	0,18676	0,18676	0,18676	0,18676	0,18676
	4	0,11077	0,11077	0,11077	0,11077	0,11077	0,11077	0,11077	0,11077	0,11077	0,11077	0,11077	0,11077	0,11077	0,11077	0,11077
	5	0,07238	0,07238	0,07238	0,07238	0,07238	0,07238	0,07238	0,07238	0,07238	0,07238	0,07238	0,07238	0,07238	0,07238	0,07238
	6	0,05064	0,05064	0,05064	0,05064	0,05064	0,05064	0,05064	0,05064	0,05064	0,05064	0,05064	0,05064	0,05064	0,05064	0,05064
	7	0,03725	0,03725	0,03725	0,03725	0,03725	0,03725	0,03725	0,03725	0,03725	0,03725	0,03725	0,03725	0,03725	0,03725	0,03725
	8	0,02848	0,02848	0,02848	0,02848	0,02848	0,02848	0,02848	0,02848	0,02848	0,02848	0,02848	0,02848	0,02848	0,02848	0,02848
	9	0,02244	0,02244	0,02244	0,02244	0,02244	0,02244	0,02244	0,02244	0,02244	0,02244	0,02244	0,02244	0,02244	0,02244	0,02244
	10	0,01811	0,01811	0,01811	0,01811	0,01811	0,01811	0,01811	0,01811	0,01811	0,01811	0,01811	0,01811	0,01811	0,01811	0,01811

Soportes de Chebyshev redondeados a 2 decimales

		Diámetro de la semicircunferencia														
		1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0
nº de nodos	2	0.36338	0.36338	0.36338	0.36338	0.36338	0.36338	0.36338	0.36338	0.36338	0.36338	0.36338	0.36338	0.36338	0.36338	0.36338
	3	0.19175	0.18784	0.19175	0.1894	0.18589	0.18504	0.18441	0.18654	0.18588	0.18748	0.18686	0.18814	0.18756	0.18706	0.18588
	4	0.12146	0.10873	0.10873	0.11383	0.11298	0.10873	0.10873	0.11156	0.11128	0.11105	0.11085	0.11069	0.11055	0.11213	0.11032
	5	0.08352	0.07738	0.06652	0.07496	0.0722	0.07119	0.07504	0.07394	0.0724	0.07345	0.0722	0.07166	0.07382	0.07324	0.07233
	6	0.05195	0.04241	0.05436	0.04815	0.05115	0.04924	0.05136	0.04984	0.05243	0.0511	0.05045	0.05012	0.05066	0.05037	0.05082
	7	0.03438	0.03285	0.02616	0.03173	0.02891	0.02904	0.02888	0.02849	0.0261	0.02917	0.02749	0.02963	0.02847	0.02896	0.02921
	8	0.02674	0.03596	0.03609	0.03751	0.03729	0.03442	0.03932	0.03687	0.03681	0.03502	0.03824	0.03692	0.03845	0.03704	0.03699
	9	0.01986	0.02125	0.02196	0.02704	0.02164	0.02201	0.02323	0.02507	0.02178	0.02269	0.02411	0.02053	0.02238	0.02354	0.02267
	10	0.01961	0.01808	0.01776	0.01751	0.02119	0.0181	0.0187	0.0183	0.01887	0.01853	0.01804	0.0171	0.0187	0.01815	0.01769

Soportes equidistantes de 16 bits

		Diámetro de la semicircunferencia														
		1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0
nº de nodos	2	0.36338	0.36338	0.36338	0.36338	0.36338	0.36338	0.36338	0.36338	0.36338	0.36338	0.36338	0.36338	0.36338	0.36338	0.36338
	3	0.19972	0.19972	0.19972	0.19972	0.19972	0.19972	0.19972	0.19972	0.19972	0.19972	0.19972	0.19972	0.19972	0.19972	0.19972
	4	0.13036	0.13036	0.13036	0.13036	0.13036	0.13036	0.13036	0.13036	0.13036	0.13036	0.13036	0.13036	0.13036	0.13036	0.13036
	5	0.09356	0.09356	0.09356	0.09356	0.09356	0.09356	0.09356	0.09356	0.09356	0.09356	0.09356	0.09356	0.09356	0.09356	0.09356
	6	0.07131	0.07131	0.07131	0.07131	0.07131	0.07131	0.07131	0.07131	0.07131	0.07131	0.07131	0.07131	0.07131	0.07131	0.07131
	7	0.05667	0.05667	0.05667	0.05667	0.05667	0.05667	0.05667	0.05667	0.05667	0.05667	0.05667	0.05667	0.05667	0.05667	0.05667
	8	0.04644	0.04644	0.04644	0.04644	0.04644	0.04644	0.04644	0.04644	0.04644	0.04644	0.04644	0.04644	0.04644	0.04644	0.04644
	9	0.03895	0.03895	0.03895	0.03895	0.03895	0.03895	0.03895	0.03895	0.03895	0.03895	0.03895	0.03895	0.03895	0.03895	0.03895
	10	0.03328	0.03328	0.03328	0.03328	0.03328	0.03328	0.03328	0.03328	0.03328	0.03328	0.03328	0.03328	0.03328	0.03328	0.03328