UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR

DE

INGENIERÍA Y DISEÑO INDUSTRIAL

ANÁLISIS Y MODELIZADO DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE
ARTICULACIONES HUMANAS MEDIANTE LA CARACTERIZACIÓN
METROLÓGICA Y TRIBOLÓGICA DE SUS SUPERFICIES

TESIS DOCTORAL

Roberto D'Amato
Máster Universitario en Ingeniería de Producción por la
Universidad Politécnica de Madrid

2017

“Alla mia famiglia”

**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA,
QUÍMICA Y DISEÑO INDUSTRIAL**

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE
INGENIERÍA Y DISEÑO INDUSTRIAL**

**ANÁLISIS Y MODELIZADO DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE
ARTICULACIONES HUMANAS MEDIANTE LA CARACTERIZACIÓN
METROLÓGICA Y TRIBOLÓGICA DE SUS SUPERFICIES**

Autor:

Roberto D'Amato

Máster Universitario en Ingeniería de Producción por la
Universidad Politécnica de Madrid

Co-directores:

Dr. Emilio Gómez García

Dr. Roque Calvo Iranzo

2017

LECTURA DE TESIS

Tribunal nombrado por el Sr. Rector Magnífico de la Universidad Politécnica de Madrid, el día ____ de _____ de 2017.

Presidente: Dr. José Manuel Arenas Reina (Universidad Politécnica de Madrid)
Secretario: Dr. Enrique Soriano Heras (Universidad Politécnica de Madrid)
Vocal 1º: Dr. Domenico Guida (Università degli studi di Salerno)
Vocal 2º: Dr. Juan Antonio Juanes Méndez (Universidad de Salamanca)
Vocal 3º: Dra Eva María Rubio Alvir (Universidad Nacional de Educación a Distancia)

Realizado el acto de defensa y lectura de la tesis el día ____ de _____ de 2017 en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería y Diseño Industrial.

Los miembros del tribunal han decidido otorgar la siguiente calificación:

El Presidente,

El Secretario,

Fdo: José Manuel Arenas Reina

Fdo: Enrique Soriano Heras

El Vocal 1º,

El Vocal 2º,

El Vocal 3º,

Fdo: Domenico Guida

Fdo: J. Antonio Juanes Méndez

Fdo: Eva María Rubio Alvir

Acknowledgments

I would like to express my gratitude to all who have supported me in this research work and particularly to:

Professor *Emilio Gómez García*, Head of “Escuela Técnica Superior de Ingeniería y Diseño Industrial –UPM” and my academic supervisor, who bestowed me the opportunity to work in a stimulating research environment and for allowing me the privilege of working in this prestigious department.

Professor *Roque Calvo Iranzo*, my academic supervisor, for their continued support, guidance, encouragement, and their excellent supervision throughout the course of this project, for his enthusiastic support, advice and direction in all the aspects of this investigation.

Professor *Alessandro Ruggiero*, “Università degli studi di Salerno –Italia” who introduced me to theoretical and experimental biomechanics and has guided the steps of my career.

Professor *Fernando Blaya Haro* which gave me the opportunity to complete this thesis.

To my fellow research *Students* and to all *Professor* and all *Scholars* in the “Escuela Técnica Superior de Ingeniería y Diseño Industrial –UPM” for their support in all aspects.

I would like to convey my sincere thanks to my *Family*, my *Mum*, my *Brother* and to *Vincenzo Guastafierro* and Professor *Pedro Armisén Bobo*, without whose support and encouragement this thesis would not have been written and for their encouragement and up-lifting confidence in my ability and who continually inspired me.

Finally, all praises to God almighty for enabling me to complete this work.

Roberto D'Amato

Esta Tesis Doctoral se ha desarrollado en el seno del Grupo de Investigación de Metrología Dimensional de la UPM en el marco de las ayudas del Vicerectorado de Investigación para la realización del doctorado en sus Escuelas, Facultades, Centro de I+D e Institutos Universitarios durante el periodo 2012-2016

INDICE

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN.....	1
1.1.INTRODUCCIÓN	1
1.2.TERMINOLOGÍA ESENCIAL DE LA BIOMECÁNICA HUMANA	8
CAPÍTULO 2: OBJETIVO Y ALCANCE	13
CAPÍTULO 3: ESTRUCTURA DE LA TESIS.....	15
CAPÍTULO 4: ESTADO DEL ARTE	21
4.1. INTRODUCCIÓN	21
4.2. LA TRIBOLOGÍA Y LA METROLOGÍA EN BIOINGENIERÍA	30
CAPÍTULO 5: DESARROLLO METROLÓGICO PARA LA IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO TRIBOLÓGICO	39
5.1. INTRODUCCIÓN	39
5.2. UTILIZACIÓN DE UNA MÁQUINA DE MEDICIÓN DE COORDENADAS PARA MEDIR ÁNGULOS MEDIANTE LA CARACTERIZACIÓN GEOMÉTRICA DE PLANOS PERPENDICULARES. ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE ..	46
5.2.1. METODOLOGÍA DE MEDICIÓN.....	48
5.2.2. MODELADO ESTADÍSTICO DEL COMPORTAMIENTO LINEAL DE UNA CMM.....	51
5.2.3. VERIFICACIÓN DE LA CMM.....	52
5.2.4. MODELO MITUTOYO PARA EL COMPORTAMIENTO DE UNA CMM.....	55
5.2.5. PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL	56
5.2.6. RESULTADOS DEL MODELO DE COMPORTAMIENTO LINEAL	57
5.2.7. RESULTADOS DEL MODELO MITUTOYO	58
5.2.8. CONCLUSIONES	60
5.3. LOS ERRORES EN UNA CMM	61
5.3.1. MODELO DE ERROR DE LONGITUD PARA UNA CMM.....	62
5.3.2. MODELO DEL ERROR DE PLANITUD EN UNA CMM	68

5.3.3.	EL MODELO DE ERROR PARA LA MEDICIÓN DE ÁNGULO EN UNA CMM	71
5.3.4.	MODELO DE ERROR DE UNA CMM DE REDONDEZ O CIRCULARIDAD.....	74
5.3.5.	INTERPRETACIÓN DEL ERROR E INCERTIDUMBRE EN EL MODELO.....	77
5.4.	MAPEO EXPERIMENTAL DEL ERROR DE LA CMM.....	82
5.4.1.	MAPEO DEL ERROR POR EJE.....	82
5.4.2.	ESTIMACIÓN DE LA REPETIBILIDAD DE LA CMM.....	87
5.4.3.	ESTIMACIÓN DEL ERROR DE PALPADO DE LA CMM.....	88
5.4.4.	RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN GLOBAL DEL MODELO DE ERROR E INCERTIDUMBRE.....	88
5.4.5.	RESULTADOS EXPERIMENTALES Y DISCUSIÓN.....	91
5.4.6.	DISCUSIONES.....	98
5.5.	CONCLUSIONES.....	101
CAPÍTULO 6: LA TRIBOLOGÍA TEÓRICA Y EXPERIMENTAL.....		106
6.1.	INTRODUCCIÓN.....	106
6.2.	LA VISCOSIDAD.....	108
6.3.	LA TEORÍA DE LA LUBRICACIÓN.....	110
6.3.1.	LOS DIFERENTES REGÍMENES DE LUBRIFICACIÓN.....	115
6.4.	EJEMPLO TÍPICO DE ENFOQUE TRIBOLÓGICO.....	119
6.4.1.	MATERIALES Y METODOLOGÍA.....	123
6.4.2.	RESULTADOS Y DISCUSIONES.....	127
6.4.3.	DISCUSIONES.....	138
6.5.	CONCLUSIONES.....	140
CAPÍTULO 7: DESARROLLO DEL MODELO FLUIDODINÁMICO DE LA ARTICULACIÓN HUMANA.....		142
7.1.	INTRODUCCIÓN.....	142
7.2.	CARACTERIZACIÓN ANATÓMICA DE LA ARTICULACIÓN DEL TOBILLO.....	144
7.2.1.	COMPONENTES ÓSEOS.....	145
7.2.2.	EL CARTÍLAGO ARTICULAR.....	146

7.2.3.	EL LÍQUIDO SINOVIAL	150
7.2.4.	CINEMÁTICA DE LA ARTICULACIÓN DEL TOBILLO	152
7.2.5.	CICLO DEL PASO.....	154
7.3.	PRIMER MODELO ANALÍTICO APROXIMADO DE LUBRICACIÓN ...	156
7.3.1.	RESULTADOS.....	161
7.3.2.	DISCUSIONES.....	163
7.4.	MODELO ANALÍTICO APROXIMADO DE LUBRICACIÓN CON FLUIDO NON NEWTONIANO	166
7.4.1.	RESULTADOS Y DISCUSIONES.....	171
7.4.2.	DISCUSIONES.....	174
7.5.	CONSIDERACIONES MORFOMÉTRICAS.....	176
7.5.1.	ELECCIÓN DE LA IMAGEN	177
7.5.2.	TRATAMIENTO DE LA IMAGEN	178
7.5.3.	DETECCIÓN DE LOS BORDES	180
7.5.4.	SEGMENTACIÓN	181
7.5.5.	FILTRO DE CANNY	182
7.5.6.	ALGORITMO DE AJUSTE.....	183
7.5.7.	CÁLCULO DE INCERTIDUMBRES	185
7.6.	MODELO ANALITICO APROXIMADO PARA LA LUBRICACIÓN EN CONDICIONES DE COMPRESIÓN PURA, FLUIDO NO NEWTONIANO Y DEFORMACIÓN DEL CARTILAGO.....	192
7.6.1.	TEORÍA.....	192
7.6.2.	CONSIDERACIONES SOBRE EL ESPESOR DE LA PELÍCULA DE FLUIDO LUBRICANTE	193
7.6.3.	RESULTADOS.....	195
7.6.4.	SOLUCIÓN NUMÉRICA Y RESULTADOS	196
7.6.5.	COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS Y DISCUSIONES	199
7.7.	CONCLUSIONES	200
CAPÍTULO 8: ESTUDIO EXPERIMENTAL PARA LA CARACTERIZACIÓN TRIBOLÓGICA DE MATERIALES PROTÉSICOS		202
8.1.	INTRODUCCIÓN	202
8.2.	DESCRIPCIÓN DEL ENSAYO EXPERIMENTAL.....	204

8.3.	CASO 1	205
8.3.1.	TEST TRIBOLÓGICO	206
8.3.2.	EVALUACIÓN DEL COEFICIENTE DE FRICCIÓN Y DESGASTE ..	207
8.3.3.	DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES	212
8.4.	CASO 2	214
8.4.1.	PRUEBAS TRIBOLÓGICAS	217
8.4.2.	RESULTADOS.....	218
8.5.	DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN.....	228
CAPÍTULO 9: CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS		229
9.1.	CONCLUSIONES	229
9.2.	DESARROLLOS FUTUROS.....	236
REFERENCIAS.....		238
EXTENDED ABSTRACT, CONCLUSIONS AND FUTURE DEVELOPMENTS		257

Publicaciones y documentos científicos

1. Alessandro Ruggiero; Roberto D'Amato; Massimiliano Merola; Petr Valasek; Miroslav Mueller. Tribological characterization of vegetal lubricants: Comparative experimental investigation on *Jatropha curcas* L. oil, Rapeseed Methyl Ester oil, Hydrotreated Rapeseed oil. *Tribology International*. 109 - null, pp. 529 - 540. 2017. ISSN 0301-679X

Type of production: Article

Index measuring impact (JCR): 1,936

2. Roque Calvo Iranzo; Roberto D'Amato; Emilio Gomez Garcia; Rosario Domingo. Integration of Error Compensation of Coordinate Measuring Machines into Feature Measurement: Part I-Model Development. *Sensors*. 16 - 10, pp. 1075 - 1085. 05/2016. ISSN 1424-8220

Type of production: Article

Index measuring impact (JCR): 2,033

3. Roque Calvo Iranzo; Roberto D'Amato; Emilio Gomez Garcia; Rosario Domingo. Integration of Error Compensation of Coordinate Measuring Machines into Feature Measurement: Part II-Experimental Implementation. *Sensors*. 6 - 10, pp. 1705 - 1715. 05/2016. ISSN 1424-8220

Type of production: Article

Index measuring impact (JCR): 2,033

4. Alessandro Ruggiero; Roberto D'Amato; Emilio Gomez Garcia; Massimiliano Merola. Experimental comparison on tribological pairs UHMWPE/TiAL6V4 alloy, UHMWPE/AISI316L austenitic stainless and UHMWPE/AL(2)O(3) ceramic, under dry and lubricated conditions. *Tribology International*. 96 - null, pp. 349 - 360. 2016. ISSN 0301-679X

Type of production: Article

Index measuring impact (JCR): 1,936

5. Alessandro Ruggiero; Roberto D'Amato; Massimiliano Merola; Petr Valasek; Miroslav Mueller. On the tribological performance of vegetal lubricants: experimental investigation on *Jatropha Curcas* L. oil. *Procedia Engineering*, 149 - null, pp 431-437. 2016 ISSN 1877-7058

Type of production: Article

Index measuring impact: 0

6. Roque Calvo Iranzo; Roberto D'Amato. A Collaborative Method of Enhancing Internships Evaluation through Stakeholders Alignment. *Procedia Engineering*. 132 - null, pp. 167 - 174. 05/2015. ISSN 1877-7058

Type of production: Article

7. Roque Calvo Iranzo; Roberto D'Amato; Emilio Gomez Garcia; Rosario Domingo. A Comparative Experimental Study of an Alternative CMM Error Model under Least-squares and Minimum Zone Fittings for Industrial Measuring. *Procedia Engineering*. 132 - null, pp. 780 - 787. 05/2015. ISSN 1877-7058

Type of production: Article

8. Alessandro Ruggiero; Roberto D'Amato ; Emilio Gomez Garcia. Experimental analysis of tribological behaviour of UHMWPE against AISI 420C and against TiAl6V4 alloy under dry and lubricated conditions. Tribology International. 92 - null, pp. 154 - 161. 05/2015. ISSN 0301-679X

Type of production: Article

Index measuring impact (JCR): 2,259

9. Roberto D'Amato; Roque Calvo Iranzo; Emilio Gomez Garcia. Sensitivity study of the morphometric fitting on the pressure field inside ankle joints. Case Studies in Mechanical Systems and Signal Processing. 1 - null, pp. 8 - 14. 05/2015. ISSN 2351-98867

Type of production: Article

10. Roberto D'Amato; Jesus Caja Garcia; Piera Maresca; Emilio Gomez Garcia. Use of coordinate measuring machine to measure angles by geometric characterization of perpendicular planes. Estimating uncertainty. Measurement. 47 - 1, pp. 598 - 606. 05/2013. ISSN 0263-2241

Type of production: Article

Index measuring impact (JCR): 1,484

11. Alessandro Ruggiero; Roberto D'Amato; Emilio Gomez Garcia. Approximate closed-form solution of the synovial fluid film force in the human ankle joint with non-Newtonian lubricant. Tribology International. 57 - null, pp. 156 - 161. 01/2013. ISSN 0301-679X

Type of production: Article

Index measuring impact (JCR): 1,936

12. Alessamdro Ruggiero; Emilio Gomez Garcia; Roberto D'Amato. Approximate Analytical Model for the Squeeze-Film Lubrication of the Human Ankle Joint with Synovial Fluid Filtrated by Articular Cartilage. Tribology Letters. 41 - 2, pp. 337 - 343. 05/2011. ISSN 1023-8883

Type of production: Article

Index measuring impact (JCR): 1,582

13. Alessandro Ruggiero; Roberto D'Amato; Emilio Gomez Garcia; Sergej Hloch Title: Approximate closed-form solution of the synovial pressure field in the human ankle joint with non-Newtonian lubricant and deformable cartilage layer Name of the conference: 10th International Conference BIOMODLORE In: Biomodlore 2013 Palanga, LT 20-22 Sept. 2013 Vilnius Vilnius Gediminas Technical University Press Pag.14-16".pp. 14 - 16. ISBN 9786094575488

Your role: Speaker

Date of the event: 20/09/2013

City: Palanga, LT,

14. Farid Amirouche, Roberto D'Amato, Giovanni F. Solitro Title: Meniscus contribution to the hydrodynamic lubrication of the knee joint. EORS 2014, NANTES (FR).

Your role: Speaker

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

ABSTRACT: This chapter offers a first vision of the first scientists who made the first steps towards the development of bioengineering. Introducing those scholars that have developed along time methodologies and criteria for technical characterization of human body. In particular, modelling its functionality and developing tools useful for diagnostics and cure of disorders of different anatomic parts. The pioneers' work have been used during the last two centuries to improve knowledge of human biomechanics and physiology.

1.1. INTRODUCCIÓN

Con el término “Bioingeniería” se define aquel sector que utiliza los métodos y las tecnologías de la ingeniería con el fin de comprender, formalizar y resolver problemas médicos y biológicos, a través de la sinergia constante y rentable de los profesionales de los sectores implicados. La Bioingeniería se aplica en distintos ámbitos como el tecnológico, industrial, científico, clínico y hospitalario. Los principales objetivos a alcanzar por la Bioingeniería son esencialmente dos:

- Mejorar los conocimientos sobre el funcionamiento de los sistemas biológicos;
- El diseño y la implementación de nuevos métodos de diagnóstico, tratamiento y rehabilitación, así como la definición de nuevas metodologías

La bioingeniería incluye varias áreas temáticas tales como:

Figura 1. 1: Distintos ámbitos de la Bioingeniería. Elaboración propia

Una de las definiciones de la biomecánica más notables se debe a Hatze que en 1973 la definió como la ciencia que estudia la estructura y la función de los sistemas biológicos usando los métodos y el conocimiento de la mecánica. Una definición alternativa es: el estudio de los aspectos mecánicos del comportamiento de los seres vivos. La biomecánica sería entonces el estudio de la mecánica aplicada a campos de aplicación específicos. En la concepción más común, pero no exclusiva, se refiere principalmente a la biomecánica del reino animal y sobre todo del ser humano. Se necesitan estudios biomecánicos en muchas áreas de aplicación e investigación. Entre ellos encontramos:

1. Aplicaciones médicas:
 - diagnóstico de los trastornos ortopédicos o fisiológicos;
 - desarrollo de implantes pasivos y activos (por ejemplo, miembros artificiales.);
 - desarrollo de órganos artificiales (por ejemplo, corazón, aparato auditivo.);
 - rehabilitación;
 - auxilios robóticos para la cirugía;
2. Aplicaciones deportivas:
 - la mejora del rendimiento;
 - la prevención de accidentes;
 - mejora de equipos deportivos;
3. Aplicaciones relacionadas con la seguridad y la ergonomía:
 - en la vida diaria (por ejemplo, la seguridad vial.);
 - en el trabajo
4. Aplicaciones en la industria del entretenimiento:
 - en la industria cinematográfica,
 - en gráficos por ordenador y en los simuladores.

Entre los muchos aspectos que afectan a la biomecánica uno que históricamente ha sido muy desarrollado es el relacionado con el estudio del movimiento de los vertebrados

y especialmente del movimiento humano. El estudio de la biomecánica de movimiento, además del estudio del movimiento del cuerpo humano en su conjunto, se refiere principalmente a los órganos siguientes:

- órganos activos, es decir, los músculos que producen energía, es decir, el movimiento;
- órganos pasivos, que transmiten o hacen que el movimiento sea posible, es decir, los huesos, los tendones, los ligamentos y las articulaciones;
- los controles, es decir, el cerebro, el sistema nervioso y los sensores que permiten la generación y el control de movimiento.

En cuanto a los órganos activos, puede ser necesario analizar en manera más o menos detallada:

- el número y su disposición;
- la morfología;
- el principio de funcionamiento;
- las características funcionales (fuerza - velocidad - consumo energético);
- la evolución de las propiedades de acuerdo a la edad, el ejercicio físico o otros factores.

Para los órganos pasivos

- el número, la posición y la conexión;
- la morfología;
- los esfuerzos máximos soportables y la relación entre tensión y deformación;
- otras propiedades, tales como la porosidad, la densidad y los coeficientes de fricción;
- la evolución de las propiedades en el tiempo.

Con respecto a los organismos de control y de comando son de particular interés:

- el sistema nervioso central, es decir, el cerebro y la médula espinal;
- el sistema nervioso periférico;
- los exteroceptores, es decir, los sensores que dan información sobre el ambiente externo (como los 5 sentidos);
- los propioceptores, es decir, los sensores que dan información sobre el estado mecánico interno del sistema locomotor (como el órgano tendinoso de Golgi para la fuerza muscular, o el huso muscular para la longitud de los músculos y sus variaciones de longitud);
- los mecanismos de decisión voluntario y reflejos.

Es prácticamente imposible describir en pocas palabras cómo se ha desarrollado la biomecánica en el tiempo y, por lo tanto, se limitará a una breve descripción para mostrar cómo este asunto ha sido discutido desde la antigüedad, aunque sólo a partir de la mitad del

1800 se convirtió en una ciencia rigurosa y cuantitativa como ahora la entendemos. Sin pretensión de exhaustividad, se mencionarán sólo unos pocos nombres de estudiosos famosos entre los muchos que han contribuido al desarrollo de esta ciencia. Esta lista también nos permite citar algunos de los temas clásicos de la biomecánica. Es habitual suponer que el primer punto de encuentro real entre la mecánica y la anatomía se produjo en la antigua Grecia, a través de: Sócrates, Platón, Aristóteles e Hipócrates (470 a.c. - 322 a.c.). Este último puede considerarse uno de los padres de la medicina. Sus estudios se centraron en la relación entre la columna vertebral y la fuerza de gravedad.

Galeno (129-201), médico imperial en la antigua Roma, se dedicó al deporte para estudiar los gladiadores y sobre todo estudiar y clasificar los músculos y sus traumas. Él escribió el tratado *Motu Musculorum*.

Leonardo da Vinci (1452-1519) más famoso por sus obras artísticas, ha proporcionado ideas interesantes también desde la ingeniería y desde un punto de vista mecánico. Sobre la mecánica escribió: "...es ciencia noble y útil más de otras ciencias y, como resulta que todos los organismos vivos tienen posibilidad de movimiento y actuar de acuerdo con sus leyes". Da Vinci ofrece los primeros estudios sobre el coeficiente de fricción, la aceleración de los cuerpos en caída libre y en campo biomecánico es apreciado por su trabajo en las líneas de fuerza que regulan nuestro movimiento.

Figura 1. 2: a) Retrato de Subterman de Galileo, 1640; b) boceto hecho por Galileo de la alometría¹ de un hueso para animales de diferentes dimensiones [1].

El primer manual de la anatomía humana "*On the structure of the Human Body*", fue escrito por Andreas Vesalius (1514-1564). Un paso crítico en el desarrollo de la biomecánica se produjo justo en el siglo XVII cuando, gracias a los descubrimientos de estudiosos eminentes como Galileo Galilei (1564-1642), que estudió el movimiento, la fuerza de los huesos y escribió el tratado *De Animalium Motibus* [1]; Johannes Kepler, René Descartes y Isaac Newton el fisiólogo y físico Giovanni Borelli (1608-1680) en su libro "*De Motu Animalium*" [2] demostró las condiciones previas necesarias para hacer frente a las actividades motoras, simple o compleja explicando la relación entre el movimiento y el sistema músculo-esquelético del cuerpo.

¹ En biología la alometría se refiere a los cambios de dimensión relativa de las partes corporales, correlacionados con los cambios en el tamaño total. El término alometría fue acuñado por Julian Huxley y Georges Teissier en 1936.

Todo eso definiendo la relación entre la fuerza muscular, la acción y la parada, un sistema de energía que mantiene un cuerpo en equilibrio, el centro de gravedad del cuerpo y la relación entre el sistema muscular, la inhalación y la exhalación. En virtud de sus estudios Borelli se define como el padre de la biomecánica por introducir los primeros problemas de control de movimiento humano, es decir, la capacidad del sistema nervioso para regular y dirigir el movimiento.

Figura 1. 3: Bocetos en tablas del libro de Borelli: *De Motu Animalium* [2]

Después de la muerte de Borelli estudios sobre la biomecánica sufren una fuerte desaceleración que ha durado casi 200 años.

El renovado interés por la biomecánica se lleva a cabo a principios del siglo XIX, gracias a la llegada de nuevas tecnologías y la posibilidad de realizar las primeras observaciones experimentales cuantitativas.

Dos estudiosos de este siglo, contemporáneo entre sí, que dieron un moderno impulso a la biomecánica fueron Marey y Muybridge. Curiosamente ambos, además de compartir el amor por la fotografía científica naciente, comparten las iniciales del nombre y el año de nacimiento y muerte: E.J.M. 1820-1904.

Etiene Marey (1830-1904) gracias las sugerencias de un astrónomo francés, utiliza por primera vez la cinematografía para el análisis de movimiento considerándose, así como el pionero de los modernos sistemas de análisis de movimiento. Marey desarrolló varias herramientas para la detección cinemática y dinámica del movimiento como el Foto Rifle, calzado exploratorio y la herramienta mecánico-neumático para la grabación por pasos

Figura 1. 4: a) El libro de Etienne Marey; b) Herramienta mecánico-neumática para la grabación de los pasos [3]

Lames Eadweard Muybridge (1830-1904) fue un pionero de la fotografía de sujetos en movimiento. Fue uno de los primeros en analizar, por ejemplo, las carreras de caballos, logrando establecer que durante el galope hay un instante en el que todas las piernas están levantadas del suelo (Figura 1. 5).

Figura 1. 5: a) Animal Locomotion [4]; b) la imagen de un caballo en movimiento (Muybridge).

Christian Wilhelm Braune (1831 -1892) y Otto Fischer (1861–1917) realizan los primeros sistemas de análisis de movimiento basado en la combinación del análisis matemático y de datos experimentales a través de un sistema primitivo de “motion capture”.

Uno de los primeros estudios biomecánicos nacidos de estudiosos de diferentes campos de cooperación se debe a Culmann, ingeniero, y Von Meyer, médico. En este estudio, relativo a la estructura de los huesos, Meyer analizó la sección de un fémur y estudió la orientación asumida por la estructura trabecular del hueso esponjoso para ver si su colocación fuera aleatoria o sistemática.

En 1867, de forma ocasional, observó un estudio de Culman que estaba intentando calcular las direcciones principales de los esfuerzos en una estructura arquitectónica particular, cuya forma se parecía vagamente a la del fémur (Figura 1. 6).

La comparación de las figuras hizo plantear la hipótesis de que las trabéculas tienden a organizarse de manera natural paralelamente a las direcciones principales de las

tensiones generadas por las cargas predominantes con el fin de optimizar la resistencia de los huesos.

Figura 1. 6: La grúa de Culmann con las líneas de las principales trayectorias de tensión y el modelo de von Meyers de la estructura trabecular de la extremidad proximal del fémur, explicado por Wolff, 1872 [5].

Siguiendo esta idea, Julius Wolff (1836-1902) formuló en 1892 la ley de la adaptación funcional del hueso que afirma que: la estructura ósea se adapta constantemente, aunque lentamente, a los esfuerzos que debe soportar.

Otro científico muy conocido que no se puede olvidar es Archibald Vivian Hill (1886-1977), que en el 1922 ganó el Premio Nobel por sus estudios sobre la termodinámica de los músculos que llevaron a los primeros modelos que relacionan la fuerza que puede ser generada por los músculos con su velocidad de acortamiento o elongación.

En el siglo XX gracias al consolidando método experimental de Galileo y al empuje de la revolución industrial nace la industria de la bioingeniería con los primeros prototipos de prótesis. Con el creciente envejecimiento y el aumento de la población activa en todo el mundo desarrollado el número de personas que necesitan tratamiento para problemas relacionados con enfermedades o lesiones de las articulaciones aumenta considerablemente. De hecho, estas operaciones son ahora el procedimiento quirúrgico más común realizado en los hospitales con un estimado de medio millón de procedimientos llevados a cabo en la UE cada año. Todo esto ha permitido el desarrollo de tecnologías y metodologías cada vez más eficaces para el estudio, el diseño, el ensayo y la simulación del funcionamiento de articulaciones reales y de prótesis articulares. Un papel fundamental para el desarrollo de sistemas protésicos cada vez más funcionales lo abordan disciplinas interesadas en la ingeniería de las superficies: la Bio-tribología y la Metrología.

La Bio-tribología a través del estudio de los contacto (“Bio” ~ Vivo; “Tribos” ~ Contacto; “Logos” ~ Estudios) ha permitido entender los fenómenos de lubricación, de desgaste y el comportamiento dinámico de las articulaciones tanto reales como con prótesis. El objetivo principal de la Bio-tribología es hacer de apoyo científico a la ortopedia, una rama de la medicina basada en el estudio de trastornos, defectos congénitos o adquiridos

del sistema locomotor y en el desarrollo de metodologías para la prevención y el tratamiento de los mismos. Es evidente que, con el fin de hacer un estudio detallado del comportamiento dinámico y tribológico de las articulaciones, es necesario no sólo modelar el fluido lubricante sino el perfecto conocimiento de las geometrías implicadas. Esto es posible a través de las herramientas y de las metodologías que proporciona la Metrología Dimensional. De hecho, gracias a esta disciplina, es posible caracterizar la geometría de los sistemas lubricados, conocer las características dimensionales que afectan el buen funcionamiento de la articulación sinovial y las propiedades cinemáticas de los mecanismos articulares. Además de todo esto, nos permiten mejorar el diseño tanto estructural que superficial de nuevas prótesis, elegir y ensayar nuevos materiales para el perfecto acoplamiento con los tejidos biológicos y la reducción de partículas de desgaste debido al rozamiento de los distintos componentes de las prótesis causa principal del mal funcionamiento y sustitución de las mismas.

1.2. TERMINOLOGÍA ESENCIAL DE LA BIOMECÁNICA HUMANA

El propósito de esta sección es introducir una primera terminología básica necesaria para la descripción de algunos fenómenos de interés para abordar la modelización biomecánica y tribológica de las articulaciones. Se hará referencia a la biomecánica del cuerpo humano.

El cuerpo humano se puede dividir principalmente en 14 segmentos (Figura 1. 7): la cabeza, el torso, brazos, antebrazos, manos, muslos, piernas y pies. Sin embargo, esta división no es fija. Para el estudio de algunos problemas muy sencillos, algunos segmentos se pueden juntar entre ellos como si fueran un único segmento, mientras que para otros estudios es necesario añadir más segmento de referencia, es decir, subdividir aún más el cuerpo humano.

Figura 1. 7: Segmentos del cuerpo humano. Elaboración propia

Para describir el movimiento del cuerpo humano, la nomenclatura hace con frecuencia referencia a la posición anatómica (Figura 1. 8), que es la obtenida imaginando una persona tumbada boca arriba en una cama, con los brazos extendidos a lo largo del tronco, el palmo de las manos hacia arriba y las piernas estiradas en una posición natural.

En esta posición se definen tres planos de referencia, que se definen como:

- el sagital (mediano)

- frontal (coronal) mediano
- transversal mediano

los tres planos medios se reúnen en el centro de gravedad que se encuentra dentro del cuerpo aproximadamente a la altura del ombligo. Cuando es necesario se identifican los planos paralelos a los que se acaban de definir. Por ejemplo, plano sagital paramedial (más brevemente sagital) y paralelo al plano sagital mediano, con significado obvio de los términos, tiene dos caras llamadas medial y lateral; la primera orientada hacia el plano de simetría del cuerpo (plano sagital mediano) y la segunda hacia el exterior. Para cada segmento del cuerpo se pueden definir planos sagitales, frontal y transversal integral a esto y con orientación tal que, en la posición de referencia anatómica, son paralelos a los planos medianos de todo el cuerpo. Para representar la posición de alguna parte de los segmentos corporales con respecto a ellos, se utilizan los adjetivos distal y proximal. La parte proximal de cada segmento es la más cercana al tronco o al plano transversal (el punto de intersección de la sagital, frontal, transversal), la más distante es la distal; la distancia debe ser medida imaginando de moverse a lo largo del cuerpo por la parte en el objeto hacia la intersección de los tres planos.

Figura 1. 8: Posición anatómica de referencia desde la cual se miden todos los movimientos y definición de los adjetivos distal y proximal. Elaboración propia

Por ejemplo, la extremidad proximal del fémur es la que se articula con la pelvis, la extremidad distal es hacia la rodilla. Del mismo modo, la parte distal del tronco se encuentra cerca del cuello, la parte distal del brazo es la que se encuentra cerca de la mano, mientras que la proximal se encuentra cerca del hombro. Para describir analíticamente los movimientos se fija al menos un sistema de referencia fijo y otro sistema de referencia móvil (triedros dextrógiro) de cada segmento (Figura 1. 9).

Figura 1. 9: Sistemas de referencia principales: sistema global y local de algunos segmentos corporales (ISB Recomendación de la Sociedad Internacional de Biomecánica).[Wu y Cavanagh, 1995][6].

De acuerdo con las recomendaciones de la Sociedad Internacional de Biomecánica (ISB), el eje Y del sistema fijo es el eje vertical y es opuesto a la dirección del vector que define la fuerza de gravedad, el eje X está en la "dirección principal del movimiento", y el eje Z forma, junto con los otros dos ejes, un sistema de referencia de tipo dextrógiro.

De cada segmento se definen, con origen en los correspondientes centros de gravedad, los triedros con el eje Y en la dirección proximal, el eje Z que punta hacia la derecha (en la posición anatómica de referencia) y el eje X que forma, junto con los otros dos ejes, un triedro dextrógiro (en el torso y la cabeza, los ejes Y son verticales).

En la posición anatómica de referencia, todos los planos XY son paralelos entre ellos (plano sagital).

A partir de la posición de referencia anatómica, es llamado movimiento de flexión "natural" lo que se produce en el plano sagital y mueve un segmento del cuerpo alejándolo del plano frontal (Figura 1. 10d). Se llama extensión el movimiento opuesto.

Figura 1. 10: A la izquierda movimientos de circunducción, al centro de abducción (cadera, hombro y muñeca), a la derecha movimientos de flexión y la hiper-extension del tronco. Elaboración propia.

El término hiper-extension indica un movimiento fuera del plano frontal en la dirección opuesta a la de la flexión normal (es decir, una flexión "negativa"). Por ejemplo, el movimiento hacia atrás de la cabeza o del brazo más allá del plano frontal. En sujetos sanos, la hiper-extension no es posible para algunas articulaciones (como las rodillas y los codos). Se llama abducción un movimiento, en el plano frontal, que aleja un segmento desde el plano sagital (Figura 1. 10). Con el termino aducción se indica el movimiento opuesto (aproximación).

CAPÍTULO 2

OBJETIVO Y ALCANCE

ABSTRACT: In this chapter are presented the aim and the scope of this PhD Thesis. The general objective of the research work to formulate the thesis is to develop a dynamic model of analysis of real human joints. The scope of the model seeks the quantification of the force of the fluid film that maintains the functionality of the human joint and his spatial distribution. The model would include the main morphometric and biological parameters that determine the behavior of the joints, such as the properties of the materials, their coefficient of friction and wear, as well as the geometric characterization of the surfaces that form the joint. All this from the dimensional metrology and the tribological properties of the materials.

El objetivo general del trabajo de investigación que permitirá desarrollar y formular la tesis es desarrollar un modelo dinámico de análisis de articulaciones humanas reales. El alcance del modelo busca la cuantificación de la fuerza del film fluido que mantiene la funcionalidad de las articulaciones y su distribución espacial. El modelo incluiría los parámetros morfométricos y biológicos principales que determinan el comportamiento de las articulaciones, como son las propiedades de los materiales, su coeficiente de rozamiento y desgaste, así como la caracterización geométrica de las superficies que forman la articulación. Todo ello a partir de la metrología dimensional y de las propiedades tribológicas de los materiales.

Los objetivos que se pretenden lograr en este periodo de investigación serán:

1. la búsqueda de una solución analítica y/o numérica del problema fluido-dinámico. Todo eso a través del análisis de las propiedades mecánicas de los materiales en juego, que constituyen las articulaciones humanas y la caracterización del fluido

sinovial que actúa como lubricante dentro el contacto tribológico, utilizando los conocimientos y el instrumental más apropiado;

2. Adquirir un conocimiento y una metodología adecuados y completos en la metrología por coordenadas y en la reconstrucción de formas y de geometrías tanto teórica como experimental. Todo eso, a través el estudio sobre la estimación de la incertidumbre asociada a la medición por coordenadas de diferentes formas geométricas de piezas mecánicas en entornos de sub-microfabricación. Se propondrán y desarrollarán modelos teóricos de comportamientos de errores en maquinas medidoras por coordenadas y se propondrán sus avales experimentales a través de la reconstrucción de formas geométricas distintas utilizando distintos algoritmos de *fitting*;
3. Adquirir un conocimiento y una metodología adecuados y completos en el campo de la tribología, tanto teórica como experimental para la correcta formulación e implementación del modelo fluidodinámico bajo estudio y para la caracterización de los materiales que definen un contacto tribológico dinámico;
4. Con el fin de obtener una solución más rigurosa y precisa del modelo fluidodinámico propuesto se efectuará una reconstrucción de las superficies en contacto y de los estratos de cartílago que revisten las superficies óseas empleando valores dimensionales de un caso real. Estos valores serán obtenidos utilizando la metodología y el instrumental desarrollados a lo largo de esta tesis a través del análisis metrológico por coordenadas de una imagen de alta resolución de una articulación del tobillo y la consiguiente caracterización morfométrica 2D de las superficies que constituyen el contacto lubricado;
5. Efectuar un estudio de sensibilidad sobre los factores de influencia que afectan al fenómeno de la lubricación, es decir, al campo de presión, altura del meato y velocidad del fluido lubricante dentro del contacto lubricado. Todo esto teniendo en cuenta los resultados obtenidos con el análisis metrológico antes dicho y la caracterización de fluido sinovial.
6. Además, con el fin de extender el modelo propuesto, también al caso de prótesis articulares será propondrá y desarrollará un estudio experimental para la caracterización tribológica de los materiales que constituyen una prótesis articular.

CAPÍTULO 3

ESTRUCTURA DE LA TESIS

ABSTRACT: The structure of this doctoral dissertation is introduced. It includes a brief summary of each of the eight chapters and their main objectives

En esta memoria de tesis doctoral se ha desarrollado el trabajo de análisis, modelización analítica y resolución numérica, encaminado y enfocado a describir y explicar el funcionamiento dinámico y los parámetros de influencia en el sistema tribológico complejo que constituye la articulación humana del tobillo. Esta memoria de tesis presenta ocho capítulos que a continuación se reumen:

- I. *Capítulo 1:* Se ha presentado una breve descripción de como a lo largo de la vida humana se han desarrollado, por parte de estudiosos reconocidos universalmente, los primeros estudios sobre la bioingeniería y sobre los primeros pasos para el desarrollo de esta disciplina tanto en términos de estudios anatómicos como en términos de nuevas técnicas como la herramienta para la detección cinemática y dinámica del movimiento. Además, con el propósito de introducir una primera terminología básica necesaria para la descripción de algunos fenómenos de tipo general, se ha enfocado la atención sobre a la biomecánica del cuerpo humano.
- II. *Capítulo 2:* Se han presentado el objetivo general logrado con el desarrollo de esta tesis doctoral, así como los alcances tanto con la metodología de estudio utilizada como con el modelo dinámico planteado para la articulación del tobillo y con las caracterizaciones de los distintos materiales que se utilizan para la fabricación de implantes articulares.

- III. *Capítulo 3:* Se presenta una breve descripción de la estructura de esta memoria de tesis.
- IV. *Capítulo 4:* Después de un primer estudio sobre la calificación y caracterización de las distintas articulaciones presentes en el cuerpo humano se ha fijado la atención sobre las articulaciones que permiten el movimiento entre distintos segmentos óseos, es decir, las articulaciones llamadas diartrosis, uniones móviles que se caracterizan por una estructura anatómica particular. Debido al hecho de que el conjunto de las articulaciones, recogido en la familia de las articulaciones sinoviales, es tan vasto y variado se ha presentado una clasificación adicional, interna a la misma categoría, basado en la morfología de las superficies articulares y la movilidad permitida. Además de esto se ha presentado un primer modelo cinemático simplificado de la extremidad inferior del cuerpo humano que prevé 7 grados de libertad y que se ha utilizado a lo largo de las últimas 6 o 7 décadas para esquematizar y estudiar el comportamiento y el funcionamiento de las articulaciones humanas. Se ha presentado un resumen sobre el estado del arte con las distintas teorías, desarrolladas por expertos en temas tribológicos y metrológicos, aplicada a la bioingeniería tanto por explicar y entender la lubricación de las articulaciones humanas como para un correcto estudio morfométrico de los componentes óseos con el fin de encontrar un protocolo adecuado para la medición de los parámetros geométricos que puedan afectar el correcto funcionamiento tanto de articulaciones humanas reales que de prótesis articulares.
- V. *Capítulo 5:* En este capítulo se ha presentado el estudio, la calificación y la interpretación de los métodos, teóricos y experimentales, utilizados en la metrología por coordenadas para el desarrollo de una metodología que permita uno estudio sistemático de los factores, en términos metrológicos, que afectan a modelos teóricos para la descripción del funcionamiento dinámico de las articulaciones humanas reales y de implantes de las mismas. El estudio presentado en este capítulo surge de la necesidad real de basar el diagnóstico médico en la medida sobre imágenes médicas. La problemática asociada incluye los aspectos de exactitud y repetibilidad de las medidas, semejantes a los que se enfrenta la medida por coordenadas de contacto. Los algoritmos de ajuste que se utilizan después de un correcto muestreo de los puntos que definen una característica geométrica son los mismo sea que se utilice una CMM por contacto o una CMM sin contacto, como puede ser una imagen sacada por una cámara o por una CT. Las consideraciones y las herramientas utilizadas para la mejora de la medida en término de errores y de estimación de la incertidumbre asociada siguen las mismas estructura y metodología de estudio tanto por problema metrológico que se desarrollan con la metrología por contacto como para la de sin contacto. A pesar de esto en este capítulo se ha presentado cómo la verificación de una CMM afecta a los resultados de una medición y cómo la incertidumbre de la medición es una poderosa herramienta para reflejar este aspecto. Se ha presentado una aproximación para

determinar, con la CMM, la medición de ángulos, formados por dos planos perpendiculares, y su incertidumbre asociada, utilizando el método de simulación de Monte Carlo siguiendo las directrices que nos proporcionan el Suplemento 1 de la GUM y empleando las pruebas de rendimiento mencionadas en ISO 10360-1, ISO 10360-2 e ISO-10360-5. Con el fin de lograr lo expuesto anteriormente, se han utilizado dos modelos de comportamiento para la CMM, que nos permiten determinar la incertidumbre asociada con la medición, y también estudiar los errores de la CMM asociados con la orientación y la longitud en el volumen de trabajo. Una vez que los resultados obtenidos con los dos modelos de comportamiento de una CMM han sido comparados, se ha determinado qué método proporciona un procedimiento para calcular la incertidumbre que sea simple y confiable. Después de este primer estudio se ha propuesto y desarrollado un modelo de compensación de errores, propio, para máquinas de medición de coordenadas (CMM) y su integración en la medición de características geométricas o dimensional. Se ha evaluado el error debido a la composición vectorial del error de longitud por eje y su integración en el modelo de medición geométrica. La variabilidad no explicada por el modelo se incorpora como una componente de la incertidumbre. Se han analizado los parámetros del modelo que se relacionan con los errores geométricos y con la incertidumbre de la CMM. A continuación, se han desarrollado los modelos de medición de planitud, de ángulos y de redondez. En la última parte de este capítulo se ha presentado una serie de pruebas de implementación donde se incluye el aval experimental del modelo teórico propuesto.

- VI. Capítulo 6:** Se ha presentado un primer enfoque sobre la teoría de la lubricación. Se ha presentado y explicados los dos diferentes tipos de lubricación: lubricación fluidoestática y lubricación fluidodinámica. Se ha fijado la atención sobre este último tipo de lubricación fluidodinámica en cuanto es la base de partida para la implementación del modelo fluidodinámico de la articulación del tobillo. Antes de introducir las ecuaciones que gobiernan los fenómenos tribológicos se han presentados y analizados los parámetros para la caracterización de los fluidos lubricantes. Utilizando las hipótesis de literaturas científica se ha presentado de forma teórica como se aborda y desarrolla uno estudio tribológico a través la escritura de las ecuaciones de Reynolds en su formulación para un caso general. Se ha fijado la atención sobre la importancia de las condiciones de contorno que afectan al problema fluidodinámico, que como hemos dicho a lo largo de esta memoria de tesis empiezan con la caracterización geométrica y morfológica del contacto bajo estudios. A continuación, se han presentado los cuatro tipos de régimen de lubricación que regulan las condiciones de fricción entre dos superficies en movimiento relativo y en contacto que son visible a través la curva de Stribeck en función de la combinación de la viscosidad del lubricante, la velocidad de deslizamiento y la presión normal. Una vez planteado la metodología teórica de

estudios de problemas tribológicos se ha fijado la atención sobre la metodología experimental que se suele utilizar para la caracterización de lubricantes y de materiales que constituyen un contacto tribológico. Por lo tanto, visto el interés sobre las performances de los aceites a base vegetal en este apartado de la tesis se ha presentado una investigación sobre el rendimiento tribológico del aceite de colza y del aceite de semilla de *Jatropha curcas* L. en el contacto lubricado de acero. Las pruebas se han llevado a cabo utilizando un tribómetro de movimiento recíproco de *ball-on-flat* con varias frecuencias de ensayos y con varias cargas normales aplicada para el cierre del contacto mismo. El acero AISI E52100 y el acero X210Cr12 han sido elegidos como materiales para probar las propiedades lubricantes de los aceites. Como muestran distintos estudios la aleación de acero AISI E52100 se utiliza en aplicaciones tribológicas como, por ejemplo, guías lineales y rodamientos debido a su alta dureza y resistencia al desgaste, mientras que el acero X210Cr12 se utiliza para la producción de moldes sometidos a grandes esfuerzos, herramientas de rectificado o herramientas para el conformado en frío. De acuerdo con la norma ASTM D445 - Método de Ensayo Estándar para Viscosidad Cinemática de Líquidos Transparentes y Opacos (y Cálculo de la Viscosidad Dinámica) se han investigado importantes características y propiedades químico físicas de los aceites bajo estudio como: la viscosidad cinemática, la viscosidad dinámica, la densidad, el punto de inflamación y el número total de acidez (*TAN*). El uso de un tribómetro de movimiento alternativo permitió investigar de forma completa el comportamiento de los aceites pasando alternativamente a través de tres diferentes regímenes de lubricación (límite, mixto y elastohidrodinámico), como demuestran las curvas de Stribeck obtenidas.

- VII. Capítulo 7:** Se ha realizado una descripción anatómica de la articulación del tobillo con su forma y sus funciones de movilidad, poniendo mayor atención a la caracterización de los elementos óseos, del cartílago articular y del fluido sinovial. Se han estudiado, también, los posibles movimientos que permite la articulación del tobillo definiendo así un modelo biomecánico de estudio. A continuación, se ha desarrollado un primer modelo analítico aproximado de lubricación. Se ha modelado el líquido sinovial como un fluido Newtoniano y se ha tenido en cuenta el fenómeno de la filtración del fluido lubricante a través de los poros de la superficie del cartílago utilizando la ley de Darcy, evaluando las tres componentes de velocidad del fluido dentro del contacto articular y llegando a escribir la ecuación de Reynolds para el caso propuesto. Los resultados obtenidos se refieren a cuando el tobillo se encuentre cargado por el peso del cuerpo humano, es decir se estudian los efectos debido al fenómeno de *squeeze motion*. A continuación, y teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, en este mismo capítulo se ha introducido el concepto de fluido sinovial no Newtoniano, modelando el mismo como un fluido *Couple Stress*. Es decir, como una mezcla de partículas de distintos tamaños para tener en cuenta los efectos polares generados por las fuerzas viscosas. Se han obtenido

resultados analíticos y numéricos comparándolos entre sí y con los resultados presentes en la literatura. Teniendo en cuenta lo expuesto en el capítulo 5, se han presentado algunas consideraciones metrológicas para la caracterización y reconstrucción geométrica del tobillo en dos dimensiones en el plano sagital. Para ello se han empleado los conceptos del tratamiento de imágenes. A través del uso del algoritmo de Canny, para la detección de bordes (*edge detection*), se han sacado las coordenadas de los puntos que constituyen el borde del contacto interno lubricado, es decir, las coordenadas en el plano sagital de los puntos del perfil del gínglimo formado por la tibia, el maléolo medial, el maléolo fibular y la tróclea del talo. Posteriormente, aplicando los conceptos metrológicos y la metodología de estudio adquirida y mostrada en el capítulo 5, en el caso de medida indirecta, se ha ido reconstruyendo el perfil aproximado a través de una función conocida y lograda por el método de los mínimos cuadrados y de mínima zona, evaluando simultáneamente el error asociado a la toma de coordenadas y el error cuadrático medio. El último apartado de este capítulo presenta un modelo de lubricación dinámico mejorado en cuanto tiene en cuenta la deformación del cartílago articular. Bajo las hipótesis que se han ido adquiriendo en el desarrollo y mejora del modelo y sobre todo gracias a una reconstrucción más rigurosa, en términos geométricos y metrológicos se ha considerado el cartílago articular como un elemento deformable a través de la teoría de la *soft lubrication*, prestando especial atención a todas las posibles configuraciones geométricas del sistema en fase de estudio. Se han sacado resultados analítico y numérico y se han comparado entre sí y con los resultados presentes en la literatura.

- VIII. Capítulo 8:** A partir de la metodología desarrollada en el capítulo 6 de esta memoria de tesis, se ha presentado un estudio comparativo y experimental para la caracterización tribológicas de los materiales que constituyen las prótesis articulares. Debido al interés sobre los distintos fenómenos de desgaste y fricción para los materiales protésicos y a su comportamiento en condiciones de lubricación seca o lubricada, en este capítulo de tesis se han comparado, en un estudio tribológico experimental, utilizando un bio-tribómetro de movimiento alternativo, los valores del coeficiente de fricción y del desgaste, en términos de masa perdida durante el ensayo, del UHMWPE (GUR 1050) que frota contra esferas de acero inoxidable austenítico, AISI 420C y de aleación de titanio TiAl6V4. Los ensayos se llevaron a cabo en condiciones secas y lubricadas. Como lubricante, se ha utilizado un fluido a modelo biológico: hialuronato sódico (Hyalgan®). El coeficiente de fricción y el desgaste se midieron con varias cargas y varias frecuencias para investigar sobre el comportamiento tribológico del conjunto de materiales acoplados. A continuación, en este mismo capítulo se han ensayado experimentalmente con el fin de obtener los coeficientes de fricción de UHMWPE que frota contra una aleación de titanio TiAl6v4, en contra una aleación de acero AISI316L y en contra Al2O3. Los ensayos han sido realizados en condiciones secas

y lubricadas. Como lubricantes, se ha utilizado un fármaco comercial que contiene hialuronato sódico: "Hyalgan®". Las pruebas han sido llevadas a cabo utilizando un perno dotado de moto alternativo en un tribómetro *pin-on-flat* con varias condiciones de carga y durante 120 min. Los pernos en todas las pruebas se han elegido teniendo en cuenta la carga aplicada y la teoría de Hertz para los tres materiales en estudio. Las placas de polietileno en las pruebas tribológicas han sido cortadas, limpiadas y preparadas a partir de dos prótesis de rodilla diferentes. Con el fin de comparar las dos muestras de UHMWPE se han llevado a cabo ensayos de calorimetría de barrido diferencial (DSC).

- IX.** *Capítulo 9:* En este capítulo se sacarán las conclusiones generales de esta memoria de tesis teniendo en cuenta los resultados parciales de cada capítulo. A continuación, se presentan las posibles líneas de investigación futuras que puedan seguir este trabajo de investigación.

CAPÍTULO 4

ESTADO DEL ARTE

ABSTRACT: This chapter provides an exhaustive review of the scientific advances, methodologies and criteria used in the development of tribological models. A first introduction on the classification of human joints is presented focusing attention on the functioning of synovial joints. The models present in the scientific literature are analyzed. The developed methodology for the metrological characterization of the surfaces in contact in both human joints and implants is presented.

4.1. INTRODUCCIÓN

Las articulaciones humanas son estructuras anatómicas constituidas por el conjunto de elementos o tejidos que permiten la unión entre dos o más huesos. Tales estructuras pueden asumir, en algunos distritos articular, también la forma de láminas o membranas conservando la misma función de medios de unión de los huesos. Las superficies de los huesos involucrados toman el nombre de superficies articulares. Para evitar fenómenos degenerativos debido al desgaste, en la mayoría de los casos, el contacto no es directo, estando mediado por el tejido fibroso (cartílago) y/o un líquido con función de lubricante (Fluido Sinovial).

Las articulaciones del cuerpo humano son muy numerosas y estructuralmente muy diferentes unas de otras. Esta diversidad refleja el tipo de función que se requiere para cada articulación. En concreto, el trabajo de una articulación es unir a los diversos segmentos óseos de manera que el esqueleto pueda realizar su función de apoyo, movilidad y protección.

Las articulaciones, desde el punto de vista estructural, se dividen en:

- Articulaciones fibrosas: Los huesos están unidos por tejido fibroso.

➤ **Articulaciones cartilaginosas:** Los huesos están conectados por cartílago.

➤ **Articulaciones sinoviales:** Los huesos están separados por una cavidad y se encuentran conectados por medio de estructuras que se describirán de MANERA más completa a continuación.

La subdivisión más conocida, sin embargo, es la de tipo funcional. Los huesos del esqueleto humano están, de hecho, conectados por medio de articulaciones que permiten movimientos de varios tipos y grados:

- **Articulaciones inmóviles (sinartrosis) :** Constituidas por dos extremos óseos y un tipo de tejido que une a estos elementos y que mantiene la rigidez entre las piezas óseas.
- **Articulaciones semimóviles (anfiartrosis):** Unen dos superficies articulares, recubiertas de cartílago, a través de ligamentos inter óseos; entre las dos superficies está interpuesto un disco de fibrocartílago que sólo permite movimientos limitados. En las vértebras, por ejemplo, las superficies óseas están conectadas por un disco plano de cartílago que actúa como un molde.
- **Articulaciones móviles (diartrosis) :** La diferencia con las precedentes es la presencia de una membrana sinovial y de un espacio o cavidad articular entre los extremos óseos.

Las superficies articulares no tienen especiales restricciones de forma, de modo que pueden ser convexa o cóncava, plana o más similar a una polea. Generalmente, sin embargo, asumen las formas complementarias entre sí: por ejemplo, en el caso de una superficie articular aproximada a una calota esférica llena coincidirá con una superficie similar a una calota esférica hueca.

Nombre funcional	Nombre estructural	Grado de movimiento	Ejemplo
sinartrosis	fibrosas	inmóviles	cráneo
anfiartrosis	cartilaginosas	semis móviles	vértebras
diartrosis	sinoviales	móviles	hombro

Tabla 4.1: Clasificación de las articulaciones humanas

La mayoría de las articulaciones humanas son del tipo diartrosis, uniones móviles que se caracterizan por una estructura anatómica particular. De hecho, están constituidas por varios elementos:

- Las superficies articulares de dos o más huesos y la capa de tejido de cartílago:
Las cabezas articulares están cubiertas por una capa de cartílago hialino también conocido como cartílago de incrustación o cartílago articular: es suave, elásticamente deformable y su función es comparable a un sistema capaz de proteger a los huesos y permitir el movimiento.
- La membrana sinovial y el fluido sinovial (*synovium*) (Figura 4. 1):
El cartílago articular, aunque se considere un tejido vivo está desprovisto de vasos sanguíneos y, por otro lado, resulta insuficiente para reducir significativamente el rozamiento entre los dos extremos óseos. Por esta razón, las cabezas articulares están mojadas por un líquido, denominado *synovium* o fluido sinovial que actúa como un amortiguador. El fluido sinovial, secretado por la membrana sinovial, posee propiedades nutritivas para el cartílago facilitando el deslizamiento entre las dos superficies articulares. La membrana sinovial, que recubre el interior de la cápsula articular, representa la frontera del espacio articular inmerso en el líquido viscoso que produce. La membrana sinovial está innervada y llena de vasos sanguíneos y linfáticos (para facilitar la producción del líquido sinovial y la reabsorción de cualquier derrame intra-articular).

Figura 4. 1 : Representación de la cavidad articular. Elaboración propia

- La cápsula articular (Figura 4. 1):
La articulación está limitada periféricamente por una membrana fibrosa y una sinovial que juntas forman la cápsula articular o cápsula fibrosa, que se inserta entre los segmentos de los huesos en conexión. Los puntos de inserción sobre los huesos se encuentran a una cierta distancia desde el cartílago hialino que cubre las superficies articulares. La cápsula articular está formada por tejido conectivo fibroso que cubre completamente los dos segmentos de hueso externos. En

particular, está constituida por dos capas una de las cuales es fibrosa, externa, de tejido conectivo denso y continuo con el periostio también conocido como cápsula fibrosa. La otra capa, interna a la anterior, denominada capa sinovial es más delgada y más elástica. La capa sinovial cubre las superficies no cartilaginosas y representa la membrana sinovial que se describe en el punto anterior.

➤ Los ligamentos intrínsecos:

Son cordones de conexión que unen firmemente la cabeza ósea al que están conectados y le impide alejarse más allá de un cierto punto. Son muy resistentes, y pueden estar situados dentro o fuera de la cápsula articular, previniendo o limitando los movimientos peligrosos.

➤ Los tendones:

Mientras que los ligamentos conectan dos cabezas óseas, los tendones conectan los músculos con los huesos y sus funciones son estabilizar la articulación y transmitir fuerzas entre los elementos que ponen en conexión.

El conjunto de las articulaciones recogido en la familia de las articulaciones sinoviales es tan vasto y variado como para permitir una clasificación adicional, interna a la misma categoría, basado en la morfología de las superficies articulares y la movilidad permitida. Se pueden identificar cinco sub-categorías:

- articulaciones planas o artrodias,
- articulaciones esferoideas o enartrosis,
- articulaciones elipsoideas o condileas,
- articulaciones en silla,
- *gínglimus*² articulares: angulares o trocloideas (bisagra),
laterales o trocoideas (pivote).

Con el término artrodia se suele indicar las articulaciones que se caracterizan por sus superficies planas, por tanto, es capaz de permitir sólo el movimiento de deslizamiento: son un ejemplo las articulaciones intercarpianas (Figura 4. 2).

Se clasifican como enartrosis las articulaciones que se pueden esquematizar por medio de un modelo de unión esférica debido al hecho que se caracterizan por su forma esférica y capaz de lograr tres grados de libertad, es decir, los movimientos de flexión-extensión, abducción, aducción y rotación. Un ejemplo de articulación esférica es la articulación de la cadera (Figura 4. 2).

² (ginglymus) es una articulación ósea en la que las superficies articulares están moldeadas entre sí de tal manera que permiten el movimiento sólo en un plano. La palabra viene del griego: γιγγλυμος (ghínglymos)

Artrodia	<i>Grados de Libertad</i>	<i>Tipo de movimiento</i>
		2	Traslación plana
Enartrosis	<i>Grados de Libertad</i>	<i>Tipo de movimiento</i>
		3	Flexo-extensión Ab-aducción Rotación
Condilea	<i>Grados de Libertad</i>	<i>Tipo de movimiento</i>
		2	Flexo-extensión Ab-aducción
Silla	<i>Grados de Libertad</i>	<i>Tipo de movimiento</i>
		2	Flexo-extensión Ab-aducción
Pivote	<i>Grados de Libertad</i>	<i>Tipo de movimiento</i>
		1	Flexo-extensión

Figura 4. 2: Esquema funcional de las 5 categorías de las articulaciones humanas. Elaboración propia

Las articulaciones condíleas se mostrarán bastante similar a la familia anteriormente descrita, si no fuera por la forma elipsoidal de las superficies de contacto (Figura 4. 2). Esta característica conduce a la pérdida de un grado de libertad: la rotación. Por ejemplo, pertenece a esta clase de diartrosis la articulación radio-carpiana.

En las diartrosis a forma de silla, una extremidad articular presenta una forma convexa a lo largo de una dirección y cóncava a lo largo de la dirección perpendicular, mientras que la otra superficie es complementaria a la primera, con una forma respectivamente cóncava y convexa a lo largo de las mismas direcciones: el tipo de interacción es por lo tanto similar a la de un juego de cardán, asegurando solamente los movimientos de flexión-extensión y abducción-aducción (Figura 4. 2). Un ejemplo de una articulación a silla es la diartrosis esterno-clavicular.

Por último, se habla de gínglimus si las superficies de contacto tienen forma de polea (tronco del cilindro). En particular, se clasifican como tróclea la diartrosis cuyo eje de rotación (eje del cilindro) es perpendicular a los ejes de los huesos, y trocoide las diartrosis en las que las generatrices del cilindro son paralelas al eje de al menos uno de los huesos. En diartrosis a forma de tróclea, presente por ejemplo en el codo y en la rodilla,

la superficie con la forma de polea asume el nombre de tróclea; la otra superficie de la articulación y es representada por una cavidad atravesada longitudinalmente por una cresta que se ajusta al surco de la tróclea: por este tipo de contacto está permitido sólo el movimiento de flexión-extensión. La articulación radio-cubital proximal es más bien un ejemplo de trocoide, donde está permitida sólo la rotación del anillo osteofibroso (radio) alrededor de la superficie articular complementaria, cilíndrica (cúbito).

Los elementos que constituyen el miembro inferior, que comienza con la articulación coxofemoral, son:

- el muslo (desde la pelvis a la rodilla);
- la pierna (desde la rodilla al tobillo);
- el pie.

Los principales movimientos de las extremidades inferiores se enumeran a continuación.

En la cadera:

- La flexión y la extensión del muslo, es decir, el movimiento en el plano sagital con respecto a la pelvis;
- abducción/aducción, es decir, el alejamiento/acercamiento de la pierna desde el plano sagital;
- rotación externa/interna sobre el eje mecánico del fémur.

En la rodilla:

- flexión, es decir, pierna desde extendida a flexionada (rodilla doblada);
- extensión, lo que conduce a la alineación del muslo con la pierna.

En el tobillo:

- flexión-extensión (planta- dorsal-flexionada);
- eversión y la inversión;
- rotación interna/externa con respecto al eje de la tibia.

Un modelo cinemático simplificado de esta extremidad prevé 7 grados de libertad (Figura 4. 3). En general, la pelvis se considera un segmento rígido con respecto al cual se mide el movimiento de las extremidades inferiores. La articulación de la cadera se puede modelar como una bisagra esférica perfecta y los movimientos que permite se pueden representar como una combinación de tres rotaciones con respecto a tres ejes ortogonales e incidentes en los centros de la articulación esférica. Los movimientos son: flexión / extensión, aducción/abducción y rotación interna/externa (Figura 4. 3).

En correspondencia de la rodilla puede ser asumido en primer análisis la presencia de un solo grado de libertad, es decir, la flexión/extensión de la pierna con respecto al muslo. En realidad, este movimiento no es una rotación pura con respecto a un eje fijo, pero debido a la forma compleja de las epífisis y de los numerosos ligamentos el movimiento es el de rotación-traslación alrededor y a lo largo de un eje móvil. Finalmente, en el tobillo son detectables tres movimientos diferentes: la rotación del pie

con respecto a la pierna, la flexión y extensión (el movimiento más significativo) y la rotación interna y externa.

Para algunas aplicaciones, aunque todos estos movimientos se generan a partir de diferentes articulaciones, el movimiento se puede aproximar globalmente a la de una bisagra esférica. Desde luego, esta simplificación no es permisible para un estudio a fondo del pie. En resumen, los siete grados de libertad de la extremidad inferior son fácilmente modelable, con buena aproximación, por una bisagra esférica que describe la interacción entre el muslo y la pelvis, una bisagra plana aproximada que describe los movimientos relativos entre la pierna y el muslo, y la otra bisagra esférica aproximada que describe los movimientos entre el pie y la pierna (Figura 4. 3).

Figura 4. 3: Esquema cinemático del miembro inferior. Elaboración propia

Hay que tener presente que, además de conocer los materiales que son parte del sistema lubricado y describir sus funciones usando los modelos proporcionados por la literatura para la caracterización de fluidos (ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes). Debido a cuanto descripto hasta hora en este apartado, en muchos estudios, el comportamiento biomecánico de las articulaciones sinoviales humanas ha sido investigado simulándolas como cojinetes cargados, donde el hueso es la superficie del cojinete recubierto con material alveolar o poroso que representa el cartílago y, el líquido sinovial es el fluido lubricante [7], [8].

A pesar de su importancia fundamental en la vida humana, hace sólo dos décadas que se ha establecido la idea de la existencia de procesos de lubricación en las articulaciones sinoviales que mantienen la funcionalidad articular durante siete u ocho décadas.

Casi toda la carga que se aplica en una articulación se descarga en el cartílago articular durante las actividades diarias, como el caminar y el correr. Las uniones articulares están sometidas a cargas dinámicas.

Estudios recientes han demostrado que las cargas dinámicas pueden afectar adversamente a la actividad de los condrocitos (células del cartílago) con lesiones que dependen de la frecuencia y de la intensidad de la carga. Los mecanismos de lubricación

juegan un papel importante en el rendimiento a largo plazo tanto de las articulaciones naturales, así como de las prótesis articulares.

Se han realizado numerosos intentos para reproducir en laboratorio el funcionamiento de las articulaciones humanas con el objetivo de comprender los valores, tan bajos, del coeficiente de rozamiento; se han utilizado diversos tipos de lubricantes y diversas combinaciones de materiales cubiertos por capas elásticas y porosas, pero, a pesar de todos los esfuerzos, hasta la fecha nadie ha logrado producir prótesis que imiten el comportamiento normal de las articulaciones humanas.

La comprensión del mecanismo de lubricación también es importante para el desarrollo de intervenciones para el tratamiento de la degeneración y de la pérdida del cartilago articular. Esta es especialmente oportuna debido a los problemas clínicos asociados con las actuales prótesis articulares después de su irrupción masiva desde 1960.

De hecho, los productos de desgaste de los implantes pueden provocar reacciones adversas en los tejidos que conducen a una pérdida ósea masiva alrededor del implante y, consecuentemente, al aflojamiento de la fijación[9],[10],[11].

Sin embargo, las enfermedades como la osteoartritis, la artritis reumatoide y el trauma a veces requieren que estos rodamientos naturales sean sustituidos por otros artificiales.

Actualmente, más de 1 millón de reemplazos articulares se llevan a cabo cada año en todo el mundo [12]. Los principios tribológicos y metrológicos juegan un papel importante en la comprensión de cómo operan y fallan las articulaciones sinoviales naturales, así como en la comprensión de cómo la forma de las articulaciones artificiales debe ser diseñadas.

Los estudios tribológicos y metrológicos de las articulaciones sinoviales naturales y de las prótesis articulares se han llevado a cabo normalmente en términos de fricción, de desgaste, de mecanismos de lubricación, de morfometría de la geometría de referencia y de evaluación de la pérdida de material por desgaste tanto con métodos gravimétricos como que con métodos metrológicos para la evaluación del volumen desgastado. En este último caso, el desarrollo de la metrología superficial, utilizando una Maquina Medidora por Coordenadas o sistemas ópticos [13], ha demostrado ser una excelente herramienta para la obtención de información sobre el desarrollo del desgaste durante el ensayo de sistemas tribológicos. En particular, el tipo de desgaste y el desarrollo a pequeña escala de la topografía de la superficie puede ser cuantificado usando estas técnicas que han demostrado ser valiosas para obtener un entendimiento más profundo.

Estudios significativos sobre las articulaciones sinoviales reales como de prótesis se han llevado a cabo sobre todo entre los años 1990 y 2016. La Figura 4. 4 y la Figura 4. 5 muestran el número de publicaciones, sobre la base de una búsqueda simple en la *Web of Science* de "*Cartilage and lubrication*" y "*Measurement joint prostheses*".

Muchos investigadores comenzaron a tomar interés por estos temas y propusieron varios modelos para describir el comportamiento y el funcionamiento de las articulaciones humanas.

Figura 4. 4: Número de publicaciones en Web of Science para “Cartilage and Lubrication”

Figura 4. 5: Número de publicaciones en Web of Science para “Measurement joint prostheses”

Importantes investigaciones [14], [15], [16], [17], [18], [19] llevadas a cabo por diversos expertos en el campo han demostrado que los conceptos básicos de los mecanismos de la bio-tribología pueden ser descritos y resumidos como sigue:

- El líquido sinovial parece ser un lubricante mejor que el agua en condiciones de *squeeze film*.
- Debido a la reducción de tamaño de los poros del cartílago articular, los solutos y las moléculas más grandes presentes en el líquido sinovial no son capaces de atravesar el mismo.
- Los mecanismos de lubricación están influenciados por la presencia de grandes moléculas en el líquido sinovial.

- Las superficies del cartílago que recubren el hueso no entran en contacto entre sí debido a la formación de una capa fina de gel formada por la parte proteica del fluido sinovial.
- Las características de funcionamiento de las articulaciones sinoviales dependen del estado de salud y de la edad del sujeto (con el paso del tiempo empieza una disminución en la capacidad lubricante de todo el sistema).

En este apartado queremos describir una introducción general de los diferentes mecanismos de lubricación propuestos por diversos autores en diferentes períodos recordando que los diversos regímenes de lubricación que se producen dentro de un sistema dependen, en sustancia, por las características de funcionamiento tales como la viscosidad (μ), la carga (P) y la velocidad relativa (v) de las superficies y su morfometría.

4.2. LA TRIBOLOGÍA Y LA METROLOGÍA EN BIOINGENIERÍA

En 1932, MacConaill [20] dió el primer paso hacia el desarrollo de una teoría para explicar los principios de la lubricación de las articulaciones sinoviales. Desarrolló un modelo de lubricación hidrodinámica caracterizado por la presencia de una película continua de lubricante que separa las dos superficies en movimiento relativo entre sí.

MacConaill propuso como base de su teoría la similitud entre la anatomía de las superficies articulares y la forma del “meatus” propuestos por Reynolds para la lubricación hidrodinámica como se muestra en la Figura 4. 6.

Se sabe que para el establecimiento de una lubricación hidrodinámica, o de fuerzas de sostenimiento que evitan el contacto entre los órganos en movimiento relativo entre sí es necesario que el meato entre las dos superficies sea convergente en la dirección del movimiento.

Figura 4. 6: Lubricación hidrodinámica (MacConaill 1932). Elaboración propia

El modelo de MacConaill fue desarrollado dos años más tarde por Jones [21] que hizo los primeros experimentos para la evaluación del coeficiente de rozamiento en las articulaciones. Los primeros cálculos proporcionaron un coeficiente de fricción igual a 0,02).

Charnley [22] y McCutchen [23], cerca del 1959, comenzaron a expresar las primeras dudas sobre la teoría de MacConaill. Según Charnley, en las articulaciones sinoviales, no puede existir la lubricación hidrodinámica debido a las altas cargas que existen en las superficies articulares. Sobre la base de pruebas de laboratorio él sugirió la lubricación por capa límite, con la cual las superficies de los sólidos, en movimiento relativo, están separadas por unas pocas capas mono moleculares de lubricante, constituyendo una película extremadamente fina que permanece anclada a cada superficie gracias a complejos fenómenos físico-químicos.

Este mecanismo de lubricación parecía adecuado para representar el comportamiento real de las articulaciones, al menos de acuerdo con los resultados obtenidos a partir de pruebas de laboratorio, pero, lamentablemente, se dio cuenta de que el comportamiento "*in vivo*" es muy diferente de lo que se muestra en laboratorio.

A diferencia de la mayoría de los materiales, el cartílago articular es poroso, elástico y está formado por una fase líquida y una sólida, por lo tanto, es representado a menudo como un material bifásico. La naturaleza bifásica única de los cartílagos articulares juega un papel importante en la función tribológica de las articulaciones sinoviales [24].

Figura 4. 7: Weeping lubrication (McCutchen 1962). Elaboración propia

McCutchen en 1962 [23], [25], propuso una nueva y fascinante teoría, la *Weeping Lubrication* (Figura 4. 7), introduciendo por primera vez la porosidad y la conformación

bifásica de las superficies del cartílago articular. En este mecanismo el líquido sinovial se mueve en dos direcciones:

- Paralela a la carga dinámica representada por el peso del cuerpo humano durante la marcha, verosíblemente como una esponja que exuda líquido intersticial cuando se comprime.
- En la dirección ortogonal a la carga, creando flujos circulares como se muestra en la Figura 4. 7.

Las superficies del cartílago, durante la aplicación de la carga, absorben el fluido sinovial en la zona donde la presión hidrostática es más alta, después la impermeabilidad de la superficie del hueso obliga a que el líquido fluya de nuevo dentro de la cápsula.

Figura 4. 8: Flujo del líquido sinovial segun la *Weeping lubrication*

Este mecanismo explica el bajo valor del coeficiente de rozamiento en las articulaciones humanas, pero no garantiza la formación de una película continua, debido a la circulación del fluido.

McCutchen encontró grandes dificultades para demostrar experimentalmente sus hipótesis. Sus ensayos, sobre una superficie porosa en contacto con una lámina de vidrio, son los únicos que convencieron al mundo académico. Posteriormente, varios estudios trataron de tener en cuenta también la capacidad de deformación del cartílago articular invocando un mecanismo de lubricación elasto hidrodinámica.

Demostraron la insuficiencia del mecanismo de lubricación hidrodinámica en el que no se tuvieron en cuenta las deformaciones [26].

La comunidad científica, sin embargo, todavía no había tenido en cuenta lo que pasa durante largos períodos en posición erecta: el mismo Dowson [8] comenzó a realizar experimentos sobre el movimiento de acercamiento (*squeeze*) entre un cilindro rígido cargado y un plano indeformable. De hecho, en su estudio: *Surface Geometry of the Human Ankle Joint* diseccionó una articulación del tobillo humano para medir las dimensiones requeridas para el análisis de lubricación. En concreto se midieron: los planos paralelos a la dirección principal del movimiento y los radios de curvatura de las superficies tibiales [27].

Realizó un análisis detallado de los errores para asegurar que este resultado era preciso y, además, registró la longitud y la anchura de las regiones de la articulación y los espesores del cartílago. Sobre la base de las medidas de su estudio propuso, para el tobillo humano, una geometría equivalente a la de un rodamiento que tenía un radio reducido de 0,35 m para las superficies curvas.

Fein [28] y Higginson [29] comenzaron a considerar un mecanismo de tipo *squeeze-film* (Figura 4. 9) entre las superficies articulares impermeables donde el líquido sinovial es expulsado bajo la acción de la carga.

Figura 4. 9: *Squeeze-Film lubrication*. Elaboración propia

Este modelo no tuvo en cuenta el flujo de lubricante a través de las superficies de cartílago, pero se consideró adecuado para describir el comportamiento de muchas articulaciones sometidas a cargas no excesivamente altas. En 1967 se comenzó la búsqueda de un mecanismo que pudiera explicar la protección efectiva de las superficies del cartílago durante largos períodos de pie.

La lubricación de tipo *squeeze* no era capaz de explicar estos fenómenos; se propuso el modelo de lubricación *boosted* [30] (Figura 4. 10), que considera la estructura molecular del líquido sinovial, la elasticidad, la porosidad y las características de las superficies del cartílago. La idea es que el lubricante queda atrapado entre las superficies cargadas y que todo el mecanismo se rige por las propiedades del fluido sinovial y el cartílago articular.

El líquido sinovial está constituido, aproximadamente, por un 95% de agua que interactúa con los constituyentes restantes (macromoléculas); en las articulaciones, el cartílago actúa como un filtro que parece ser permeable al agua, pero no a las macromoléculas.

Figura 4. 10: Boosted Lubrication. Elaboración propia

Después de la aplicación de la carga, la parte acuosa del líquido sinovial pasa al cartílago mientras, entre las superficies articulares, se forma una capa de gel sinovial formada por macromoléculas. Como se muestra en la Figura 4. 11, el líquido sinovial fluye a través de la capa de cartílago generando entre las superficies en movimiento relativo una película continua de lubricante.

Figura 4. 11: Flujo del líquido sinovial según la "Boosted Lubrication"

Han sido numerosos los estudios que se han interesado en la evaluación del espesor de la capa de gel sinovial sin que se haya obtenido un mismo resultado [31].

Maroudas [32] estimó que este espesor debe ser de 0,01 mm, lo que fue considerado por otros autores, como Dowson, excesivamente reducido para garantizar la separación de las superficies de cartílago que tienen todavía una cierta rugosidad.

Con el pasar de los años y debido al incremento del interés por este tema, una serie de artículos de revisión útiles se han escrito sobre este asunto [33]–[38] llegando a la conclusión de que es razonable suponer que existe un mecanismo de lubricación de tipo

multimode para que el sistema bio-tribológico de una articulación humana pueda funcionar con una amplia gama de carga y con sus propiedades de movimiento [39].

El éxito de una artroplastia articular humana y su funcionamiento depende no sólo del conocimiento del comportamiento dinámico, sino también de la información disponible sobre la morfología de los huesos y tejido que toman parte en la formación de la articulación y también de los materiales utilizados para la fabricación de los implantes articulares. A lo largo de estos últimos 50 años varios estudios, centrados en la morfología de los huesos que construyen diferentes articulaciones humanas, se encuentran en la literatura científica.

Erkman et al [40], cerca del año 1974, presenta su estudio sobre la geometría de la rodilla para el diseño de las prótesis condilares.

Mariani et al [41], en el año 1977, propusieron una evaluación estadística de los parámetros articulares de la articulación tibio-tarsiana.

Roberts et al [42], en el año 1991, estudiaron la geometría de la cabeza del húmero y el diseño de las prótesis.

McCarthy et al [43], en el año 1997, fijaron sus atención en los componentes personalizados y modulares en el reemplazo total primario de cadera.

Fessy et al [44], en el año 1997, efectuaron un estudio sobre la morfometría de la articulación talo-crural. Aunque los resultados encontrados sobre las morfometría se realizaron con el uso de grandes muestras analizadas por estos autores, la fiabilidad de las mediciones nunca ha sido reportada [44]. La precisión del método adoptado para realizar el análisis morfológico es una cuestión fundamental. El método debe permitir que se midan grandes grupos de sujetos, con una invasión mínima en caso de estudios *in vivo*, y que se obtengan datos confiables para realizar un análisis estadístico valioso. Aunque las radiografías estándar se utilizan rutinariamente para realizar mediciones morfológicas [41], [44] se encontró que la fiabilidad dependía, significativamente, de la habilidad del operador radiográfico [45]. Aunque en los estudios recientes [46],[47] todavía se mide la morfometría de las articulaciones a partir de radiografías directamente utilizando transportadores o goniómetros, las recomendaciones, a partir del año 2000, a este respecto señalan la necesidad de no prescindir de la habilidad del operador radiográfico [48].

Con respecto al problema de la fiabilidad de las mediciones, otros autores [49], demostraron la importante mejora, en términos de precisión y repetibilidad, de las mediciones realizadas mediante procedimientos automáticos.

En el año 2004 se ha propuesto y validado un nuevo método semiautomático [50], [51] basado en radiografías estándar para la medición de un gran número de variables morfométricas en la articulación del tobillo humano. Este método fue evaluado para ser preciso, repetible y poco dependiente de la habilidad del operador.

Con respecto a los materiales que constituyen las prótesis articulares se sabe que, los materiales que se suelen utilizar para las partes que forman el contacto tribológico son:

- 1) UHMWPE: para la copa en THP, para el rodamiento móvil (que se coloca entre el componente inferior que recubre el hueso del astrágalo y el componente superior que recubre el hueso de la tibia) en TAR y la inserción meniscal (que se coloca entre el componente inferior tibial y el componente femoral) en TKR;
- 1) alúmina, acero inoxidable o aleación de titanio para la cabeza en THP los componentes inferiores y superiores en THP, TAR y TKR [36].

Debido a sus excelentes propiedades, el polietileno de ultra alto peso molecular (UHMWPE) se ha utilizado como material de bio-cojinetes para el reemplazo total de las articulaciones por más de 60 años. A partir del año 1962, cuando se introdujo para reemplazar el poli-tetra-fluoro-etileno (PTFE) (más conocido por el nombre comercial teflon, anglicismo incorporado al castellano como Teflón) por su biocompatibilidad, baja fricción y alta resistencia al desgaste, es el material con lo cual se producen las prótesis en intervenciones de artroplastia total de articulaciones humanas [52], implantados principalmente en la articulación de cadera y de rodilla [53], [54]. Actualmente, los implantes quirúrgicos de cadera y de rodilla se someten a degradación después de 10-15 años de uso [55]. A medida que se va prolongando la vida útil de las articulaciones artificiales, los mecanismos de lubricación, de fricción y desgaste en las articulaciones humanas y en implantes protésicos han sido abordados por muchos autores [56]–[61] debido a su importancia en el rendimiento de estos dispositivos. Por lo tanto, el desgaste del polietileno (UHMWPE) ha sido uno de los factores limitantes para el éxito, a largo plazo, de trasplante de rodilla (TKR) [62]. Por estas razones en los últimos años los estudios sobre la fricción y el comportamiento de desgaste del UHMWPE se han vuelto cada vez más importantes y de creciente interés para los tribólogos. Dong et al. [63] demostró que el comportamiento tribológico de UHMWPE, bajo condiciones de deslizamiento lubricadas con agua, podría mejorarse significativamente mediante técnicas de ingeniería superficial. En su investigación, utilizó un tribómetro pin-on-disc para evaluar el comportamiento tribológico del polietileno (UHMWPE) cuando se deslizaba contra una superficie de Ti6Al4V (material del componente femoral en las prótesis de rodilla). El Titanio utilizado en sus investigaciones era de 4 tipos diferentes: tratado con recubrimiento de tipo diamante (*Diamond Like Carbon* DLC) utilizando la tecnología “*Physical Vapor Deposition*” PVD, tratado superficialmente con implantes de iones de nitrógeno, tratado con la técnica de Oxidación térmica y tratados con la técnica de difusión de oxígeno. Lancaster et al. [64] investigaron el efecto del acabado superficial de varios biomateriales sobre el desgaste de UHMWPE usando un tribómetro alternativo pin-on-plate y como lubricante suero bovino. Xiong et al. [65] investigaron las propiedades debidas a la fricción y al desgaste del polietileno (UHMWPE). Ese último fue sometido a pruebas tribológicas, con un tribómetro de tipo pin-on-disc, haciéndolo frotar contra aleaciones de titanio modificadas bajo lubricación, utilizando como lubricante agua destilada.

La resistencia mecánica, la fricción y el desgaste no son las únicas propiedades que se deben considerar para la elección de los materiales de los distintos componentes que forman parte de un implante, sino que también la biocompatibilidad, la resistencia a la corrosión y la mejor combinación de aquellas partes que toman parte de un contacto tribológico como por ejemplo en implante para el remplazo total de cadera *THR*, en implante para el remplazo total de rodilla *TKR* y en implante para el remplazo total del tobillo *TAR*. Otro aspecto muy importante a considerar para mejorar la lubricación de la prótesis es la elección de un fluido lubricante adecuado que sea capaz de simular el comportamiento de las articulaciones in vivo [66].

Varios estudios [67]–[69] revelan que los efectos sobre la fricción y el desgaste de los diversos componentes del líquido sinovial (SF) dependen de la presencia de ácido hialurónico (HA) y albúmina. Por ejemplo, Gispert et al. utilizaron materiales comúnmente utilizados en las prótesis de las articulaciones de la cadera en pruebas tribológicas lubricadas (pin-on-disk). En su estudio se utilizaron cuatro tipos diferentes de lubricantes que se obtuvieron a partir de soluciones de Hanks de sal balanceada (HBSS), albúmina de suero bovino (BSA) y ácido hialurónico (HA) en este orden:

1. HBSS;
2. HBSS + HA;
3. HBSS + BSA;
4. HBSS + BSA + HA.

Llegando a la conclusión de que, en presencia de líquido sinovial, en las articulaciones humanas, el ácido hialurónico aumenta la viscosidad del lubricante mientras que la albúmina favorece la lubricación límite [68]–[70].

CAPÍTULO 5

DESARROLLO METROLÓGICO PARA LA IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO TRIBOLÓGICO

ABSTRACT: In this chapter, the study, qualification and interpretation of the theoretical and experimental methods used in coordinate metrology are presented with the aim at developing a methodology that allows a systemic study of the factors, in metrological terms, which affect theoretical models for the description of the dynamic functioning of real human joints and their implants. The study is important to highlight that for issues of medical diagnosis by measurement on imaging, the theoretical and practical problems that affect a correct measurement, in terms of precision and repeatability of the measurement, are the same which are found in metrology by contact coordinates.

5.1.INTRODUCCIÓN

En la sociedad moderna, en la cual la ciencia moderna y la tecnología son básicos y fundamentales para el bienestar, existen varios sistemas que interactúan afectando la calidad de la vida. Algunos de esos sistemas sociales (política, legal, educación, etc.) son claramente visibles en la vida de cada día. Sin embargo, existen sistemas esenciales para la calidad de vida que no son visibles por sí mismos, cual es el sistema metrológico de un país, cuya importancia se extiende para garantizar el correcto funcionamiento de otros muchos sistemas. Necesitamos el sistema metrológico para proveer una base cuantitativa para tomar decisiones en todos los aspectos de nuestra vida cotidiana: negocios públicos, comercio, industria, ciencia e ingeniería, determinación de la mayoría de las constantes físicas, químicas para el desarrollo de la tecnología y producción en masa. Tomamos las mediciones para incrementar nuestro conocimiento y entendimiento del mundo donde

vivimos y usamos el conocimiento para ayudarnos a tener una vida mejor. La metrología, la cual es la ciencia de la medición, es vital para el comercio y es una base de la ciencia moderna y de la tecnología y consecuentemente, de la civilización moderna. Cuanto más industrializado sea un país, más alta es su capacidad en medición, y por lo tanto el sistema de medición juega un papel más importante. Necesitamos mediciones para la ciencia, citando a William Thomson (Lord Kelvin: 1824-1907): “Si tú puedes medir acerca de lo que estás hablando y lo expresas en números, entonces tu sabes algo acerca de eso. Cuando no puedas expresarlo en números tu conocimiento es meramente flaco y no satisfactorio”. En la ciencia, para entender el fenómeno natural, los experimentos son desarrollados y las observaciones analizadas. Entonces las ideas son puestas en forma de una teoría, y esto es solamente por mediciones científicas que la teoría es notificada, verificada o rechazada. Mejorando la capacidad de medición a los instrumentos de medición, el científico expande sus fronteras científicas. La metrología incluye todos los aspectos teóricos y prácticos de las mediciones, cualesquiera que sean su incertidumbre de medida y su campo de aplicación.

Desde los tiempos remotos se habla de forma incipiente de las mediciones, el antiguo testamento hace alusión a estos términos, en la antigua Roma donde se usaban métodos rudimentarios para las tuberías de acueducto. No es un término nuevo y se toma muy en cuenta para elevar la calidad de los servicios que se prestan a la población, ya que el sistema de gestión de la calidad es el soporte de los objetivos de cada unidad, es la herramienta para hacer cumplir nuestros objetivos de trabajo.

La calidad tiene una acepción inicial de conformidad metrológica con la especificación. La calidad expandida incluye además la satisfacción del cliente externo e interno en el conjunto de actividades necesarias para crear el producto o servicio, y de la organización industrial en sí misma. En materia de salud, esto significa dar una respuesta efectiva a los problemas o situaciones de salud que inciden sobre una población y sus individuos, identificados o no por ellos y estableciendo o aplicando las normas, procedimientos y protocolos diagnóstico terapéuticos necesarios, verificando los instrumentos y medios médicos que se utilizan. Las mediciones son las principales fuentes de información sobre la eficiencia de los procesos tecnológicos. La importancia de la metrología para el bienestar humano no se limita a la actividad técnica o ingenieril, sino que incide también en los progresos de los estudios de fisiología y medicina. Es evidente que las mediciones desempeñan un papel decisivo en la salud y en la protección del medio ambiente coadyuvando a la obtención de las evidencias científicas válidas para la credibilidad de los resultados de la investigación científica. La calidad es la satisfacción de los requisitos objetivos y subjetivos de los productos, y de las necesidades de los clientes, que han sido plasmados en una norma, y comprobados, por lo general, a través de la metrología. Existen normas propias del sector de la salud que se deben conocer e implementar para dar una atención de calidad, segura, como base para alcanzar la estandarización en los procedimientos y conductas médicas como, por ejemplo, la utilización correcta de normas terapéuticas, la utilización adecuada de los equipos de trabajo, la

utilización de los complementarios realizados en los laboratorios para realizar los estudios de los pacientes y para resolver sus problemas de salud. Resulta indispensable reflexionar sobre el tema de calidad, normalización y metrología en las unidades de salud y también en las universidades y la mejora continua en todos los procesos de organización, dirección y formación de sus recursos humanos, y en la aplicación de los avances de la Ciencia y la Técnica para la prevención, diagnóstico y tratamiento de las enfermedades y la promoción de hábitos saludables entre la población así como para la acreditación y certificación nacional e internacional de los servicios de un país. La medida correcta requiere que las organizaciones internacionales que establecen las reglas del mercado y la calidad de vida definan qué se mide y cómo se obtienen. Para ello, existe el Sistema Internacional de Unidades y la Oficina Internacional de Pesas y Medidas, que definen las unidades y realizan experimentos. Hacer que los países puedan recurrir a una trazabilidad metrológica que garantice todas las variables que se utilizan en el mundo.

La percepción inicial de metrología deriva de su etimología: del griego *metros* medida y *logos* tratado. Concepto que debe ser casi tan antiguo como el ser humano. Actualmente podemos decir que metrología es la ciencia de las mediciones y medir es comparar con algo que se toma como base de comparación, por lo tanto, la metrología biomédica, se podría definir como la ciencia dedicada a asegurar la compatibilidad dimensional y la conformidad con las especificaciones de diseño, necesarios para el funcionamiento correcto y veraz de los equipos biomédicos o de los artefactos utilizados en tema de salud del individuo, como por ejemplo las prótesis articulares. En general, medir un objeto significa comparar una o más características con una muestra. Esta muestra también puede ser arbitraria, siempre que tenga sus propias especificaciones. Por esto, el objetivo de una medición es lo de determinar el valor del mensurando, es decir, la magnitud que se quiere medir. La mayoría de las veces, pero, cuando se mide, el resultado de dicha medición representa solo una aproximación o estimación del valor verdadero del mensurando. Repitiendo varias veces la misma medición, los resultados que se obtendrán presentarán un grado de dispersión alrededor del valor verdadero. La expresión de este grado de indeterminación que afecta a todas las operaciones de medición representa la incertidumbre. Por esto cuanto mayor sea el número de mediciones que ha proporcionado el mismo resultado de medida alrededor del valor verdadero mayor será la confiabilidad del resultado. Por tanto, es esencial, a efectos de una correcta y única medición, la detección de las unidades de medida reconocida universalmente y la trazabilidad de la unidad o instrumento respecto a la unidad patrón. Dos condiciones deben complementarse para realizar mediciones significativas:

- a) La medición debe ser precisa. Lo cual significa que el proceso de medición debe dar esencialmente el mismo valor en cualquier lugar. El resultado de esta medición puede decirse preciso cuanto más el mejor valor de medida se acerque al verdadero valor (desconocido). La diferencia entre el mejor valor de medida y el valor verdadero es el error. Entre más pequeña la diferencia, es más alta la precisión.

- b) La medición debe ser exacta, la cual significa que el valor logrado debe ser tan cerca al valor real o al valor correcto como sea posible, por ejemplo, el valor obtenido por un proceso de medición cercano al valor obtenido por otro proceso de medición.

Necesariamente, cuando hablamos de medidas, debemos remitirnos a la palabra calibración. Desafortunadamente, debemos enfrentarnos a una definición incorrecta, pero que gracias al trabajo serio y constante de las entidades de acreditación de laboratorios de calibración de los diferentes países, se está cambiando el paradigma hacia la correcta definición de la palabra la cual es el conjunto de operaciones que establecen, en condiciones especificadas, la relación entre los valores de una magnitud indicados por un instrumento de medida o un sistema de medida, o los valores representados por una medida materializada o por un material de referencia, y los valores correspondientes de esa magnitud realizados por patrones; en otras palabras, calibrar es sólo medir, no implica ningún ajuste, es tan sólo comparar contra un patrón de referencia.

Siendo la calibración un proceso metrológico para garantizar la trazabilidad, se puede denominar como la auditoría del ajuste. En términos más específicos esa representa la auditoría del mantenimiento, con lo cual es de fundamental importancia el hecho de que se deba demostrar una independencia real entre el ente que realiza el ajuste o mantenimiento y quien realiza la calibración, para no convertirse en juez y parte del mismo proceso. Sin embargo, el proceso de verificación es más propio de la calidad. Las verificaciones son los procesos para, como dice la palabra, verificar la exactitud de las medidas.

Los procesos de calibración y verificación de las magnitudes deberán ser reproducibles.

Se considera como método de calibración aquel proceso que se realiza para la realización de una medición en la cual intervienen parámetro bajo ciertas características de estabilidad y con ello la realización de una buena medida por lo cual en el método se puede decir que se puede realizar de forma directa, sustitución o indirecta.

- Método directo: Consiste en medir el valor de una magnitud directamente con un patrón que genera o mide el mismo valor de la magnitud
- Método de sustitución: En este caso se utiliza un patrón de transferencia, cuyo valor no necesita ser conocido previamente, que sirve para transferir el valor entre el patrón y el equipo a calibrar.

Las normas unificadas son documentos que bajo el reconocimiento internacional y con la participación de todos los agentes implicados se han desarrollado para establecer una serie de requisitos comunes para que haya una compatibilidad en todo lo que se fabrica. Deben existir normas estableciendo la trazabilidad metrológica de medidas o magnitudes, garantizando toda medida o magnitud. En este conjunto de normas tienen que estar las que se ocupen de las magnitudes y medidas médicas, teniendo su normalización correspondiente.

Gracias a los progresos en el examen del cuerpo humano, es posible crear nuevos métodos de diagnóstico. Para diagnosticar correctamente las enfermedades, se debe reconocer la estructura interna y externa de los órganos, sus parámetros geométricos, anchura, altura, etc., y este es un lugar en el que la cooperación entre la metrología de coordenadas, la ingeniería y la medicina es la más fuerte. Dispositivos metrológicos podría ser utilizado en este campo, en una variedad de usos. Mediciones de muestras de sangre para el colesterol, mediciones de peso con la balanza en el consultorio del doctor, medición de nivel de pH en las muestras de orina, mediciones de temperatura corporal, mediciones de presión sanguínea son cruciales para un diagnóstico acertado, cuando la salud de un paciente está en peligro. La tomografía computarizada [71] es una de las últimas técnicas de mapeo diagnóstico y terapéutico, y es particularmente importante debido al uso cada vez más común de este método en aplicaciones médicas y técnicas. En aplicaciones técnicas tomografía por ordenador permite controlar no sólo los parámetros geométricos de los productos, sino que también permite penetrar en el interior del objeto de prueba y la evaluación de sus estructuras internas. Los resultados presentados muestran que el desarrollo de técnicas de coordenadas permite realizar mediciones y el examen de los órganos de seres vivos o de aplicaciones para la medicina como implantes articulares en una forma más cómoda. Gracias a los servicios de medición y soluciones de software modernas es posible analizar la precisión de la cartografía de bioelementos a través de distintos trabajos realizados por técnicas de coordenadas diferentes. Esto permitirá la determinación y la designación de la influencia de los parámetros seleccionados (geométrica o cinemática) sobre las características analizadas de utilidad. Se sabe que para temas de diagnóstico médico por medida sobre imagen las problemática, teóricas y prácticas, que afectan a una correcta medición, en termino de precisión y repetibilidad de la medida, son las mismas que se encuentran en la metrología por coordenadas de contacto. Los algoritmos de ajuste que se utilizan después de un correcto muestreo de los puntos que definen una característica geométrica son los mismo sea que se utilice una CMM por contacto o una CMM sin contacto, como puede ser una imagen sacada por una camera o por una CT. Las consideraciones y las herramientas utilizadas para la mejora de la medida en termino de errores y de estimación de la incertidumbre asociada siguen las mismas estructura y metodología de estudio tanto por problema metrológico que se desarrollan con la metrología por contacto como para lo sin contacto. Debido a eso el objetico de este apartado es el estudio, la calificación y la interpretación de los métodos, teóricos y experimentales, utilizados en la metrología por coordenadas para el desarrollo de una metodología que permita uno estudio sistémico de los factores, en términos metrológicos, que afectan tanto a modelos teóricos para la descripción del funcionamiento dinámico de las articulaciones humanas reales y de implantes de las mismas, cuanto a la elección y a la caracterización de los materiales que revisten un papel crucial en la modelización teórica y experimental tanto de articulaciones reales que de implante. De hecho, gracias a las máquinas de medición de coordenadas (CMM) y los brazos de medición de coordenadas (CMA) es posible determinar la estructura externa, las dimensiones y la forma de implante *in vivo* como *in vitro*, es decir, evaluar el desgaste

debido a la fricción, en termino de volumen de material perdido en el funcionamiento dinámico de la misma a lo largo de la vida de utilización de la prótesis. Es posible efectuar una medición precisa del componente protésico que se tiene que implantar en un paciente conociendo la geometría de partida y de referencia de la articulación en juego, gracias, como ya se ha comentado antes en este apartado, a través de otros instrumentos óptico que se basan en la metrología por coordenadas sin contacto como por ejemplo CT o microscopia confocal. De hecho, uno de los problemas ligados con los implantes protésico es el acabado superficial de los componentes que simulan el funcionamiento de una articulación humana y que a través de la microscopia confocal es posible mejorar y ajustar a los particulares requisitos de cada paciente con el fin de mejorar las performances tribológicas de los implantes.

A pesar de esto en los siguientes apartados (Apartado 5.2) de este capítulo discutimos cómo la verificación de una CMM afecta a los resultados de una medición y cómo la incertidumbre de la medición es una poderosa herramienta para reflejar este aspecto. A continuación se presenta una aproximación para determinar, con la CMM, la medición de ángulos, formados por dos planos perpendiculares, y su incertidumbre asociada, utilizando el método de simulación de Monte Carlo siguiendo las directrices que nos proporcionan el Suplemento 1 de la GUM [72] y empleando las pruebas de rendimiento mencionadas en ISO 10360-1 [73], ISO 10360-2 [74] e ISO-10360-5 [75]. Con el fin de lograr lo expuesto anteriormente, se utilizan dos modelos de comportamiento para la CMM, que nos permiten determinar la incertidumbre asociada con la medición, y también estudiar los errores de la CMM asociados con la orientación y la longitud en el volumen de trabajo. Utilizando estos modelos, es posible evaluar el valor del ángulo y su incertidumbre asociada, utilizando el método de Monte Carlo [72], [76], [77]. El primer modelo denominado " modelo estadístico *“linear statistical model behavior of CMM”* [78], corrige las coordenadas brutas obtenidas por la CMM y toma en consideración los errores geométricos y los errores debidos al comportamiento dinámico de la CMM. El segundo, llamado *“MITUTOYO model behavior of CMM”* [79], es un método para la simulación estadística con una fuerte correlación. Dicha correlación se verifica entre las coordenadas de los puntos de medición, y disminuye a medida que los puntos de sondeo se hacen más distantes. Una vez que los resultados obtenidos han sido comparados, se pasa a determinar qué método proporciona un procedimiento para calcular la incertidumbre que sea simple y confiable.

Después de este primer estudio (Apartado 5.2) sobre la verificación de una maquina CMM y el estudio de los errores de la CMM asociados con la orientación y la longitud en el volumen de trabajo y de los errores debidos al comportamiento dinámico de la CMM, según las especificaciones de las normas internacionales y modelos estadísticos de comportamientos para una CMM conocido en literatura [78], se presentará (Apartado 5.3) el desarrollo de un modelo de compensación de errores, propio, para máquinas de medición de coordenadas (CMM) y su integración en la medición de características geométricas o dimensional. Las CMM son instrumentos muy utilizados y

confiables en la industria y en laboratorios para la medición dimensional. Desde el sensor de la sonda (palpador) hasta la pantalla de la máquina, hay una compleja transformación de las coordenadas de los puntos sondados a través de modelo de características geométricas que hace difícil la evaluación de los resultados de precisión y la medición de incertidumbre. Sin embargo, la compensación de errores no está estandarizada, como para otros instrumentos más simples.

Los modelos detallados de compensación de errores de coordenadas se basan generalmente en ver una CMM como un cuerpo rígido y requieren un mapeo detallado del comportamiento de la CMM. En este apartado se propone un nuevo modelo de compensación de errores. Se evalúa el error debido a la composición vectorial del error de longitud por eje y su integración en el modelo de medición geométrica. La variabilidad no explicada por el modelo se incorpora como una componente de la incertidumbre. Se analizarán los parámetros del modelo que se relacionan con los errores geométricos y con la incertidumbre de la CMM. A continuación, se desarrollan los modelos de medición de planitud, de ángulos y de redondez. Los modelos propuestos son útiles para la mejora de la medición con una fácil integración en el procesamiento de las señales de una CMM, en particular en entornos industriales donde se buscan soluciones integradas. En el último apartado se presentará una serie de pruebas de implementación donde se incluye el aval experimental del modelo teórico propuesto.

5.2.UTILIZACIÓN DE UNA MÁQUINA DE MEDICIÓN DE COORDENADAS PARA MEDIR ÁNGULOS MEDIANTE LA CARACTERIZACIÓN GEOMÉTRICA DE PLANOS PERPENDICULARES. ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE

En los últimos diez años han surgido numerosos trabajos científicos relacionados con la medición de ángulos para responder a demandas crecientes en determinados sectores industriales con tolerancias cada vez más estrictas ligadas a la producción de piezas mecánicas [80]–[83].

La investigación en este campo ha abordado el análisis de diferentes instrumentos y metodologías capaces de proporcionar soluciones adecuadas a los problemas de las industrias [80] [81].

La primera clasificación principal distingue entre mediciones directas e indirectas. Debe tenerse en cuenta, sin embargo, que las mediciones indirectas requieren un algoritmo de cálculo que relaciona los valores de entrada, medidos y el valor de salida, calculados. Del mismo modo, tres aspectos que determinan la elección de la metodología de medición pueden ser: las dimensiones y forma del mensurado, el requisito de precisión e incertidumbre y los costes asociados en cada caso.

Las máquinas de medición de coordenadas (CMM) son dispositivos que permiten cumplir con los requisitos anteriores [84] y [85]. Dichos instrumentos permiten obtener datos de manera indirecta rápida y sencilla a partir de piezas de diferentes formas y dimensiones con errores máximos permitidos (MPE) que son razonablemente compatibles con las tolerancias más exigentes en el campo mecánico (por ejemplo, en el caso de mediciones angulares en el intervalo de $\pm 5^\circ$). Su grado de automatización permite reducir tiempos y, por lo tanto, costes asociados con las mediciones realizadas. La flexibilidad de una CMM para hacer frente a la medición de geometrías complejas se basa en la determinación de las coordenadas de los puntos y la reconstrucción de la geometría a través de algoritmos informáticos.

El proceso básico de medición es la coordenada del punto físico en un sistema de referencia de coordenadas por contacto (sensor de palpación) o sin contacto (sensor óptico).

El mensurado bruto de la CMM es directamente las coordenadas de los puntos. En una medición directa ordinaria, la metodología incluye el muestreo del mensurado, estimando el mejor valor esperado (media estadística de la muestra) y la estimación de la incertidumbre asociada a la medición.

Estas máquinas miden de una manera que implica tomar las coordenadas de un conjunto de puntos en la superficie de un artefacto y luego combinarlos para evaluar la característica geométrica deseada. Por lo tanto, una medición CMM requiere algún procesamiento de la combinación de valores medidos para producir una estimación de la medición [86] [87]. Es evidente que las salidas de una medición CMM dependerán de la forma en que se realice este procesamiento (el algoritmo) y de las propiedades de los puntos elegidos para muestrear la superficie del artefacto [88].

Naturalmente, para los mensurandos críticos con tolerancias estrictas, se han desarrollado instrumentos ad hoc y métodos con mayor precisión. La literatura científica contiene numerosas obras que proporcionan evidencia de este [80], [89]–[91]. La incertidumbre de medición de la máquina de medición de coordenadas se ha determinado mediante modelos matemáticos, comparación y métodos de prueba de rendimiento [86]–[88], [92]–[94].

El método de modelado matemático implica la verificación de los errores geométricos de una CMM para construir un modelo teórico y predecir la incertidumbre para cualquier medición realizada de acuerdo con los supuestos del modelo [95].

La guía ISO para la expresión de la incertidumbre (GUM) es una norma adoptada a nivel mundial. Incluye dos metodologías principales.

Para la mayoría de las mediciones directas, un primer enfoque básico, utilizado con frecuencia, es considerar la incertidumbre como la desviación estándar de la media a través de la desviación estándar de la muestra. Sin embargo, muchas mediciones no son directas.

Por supuesto, la medición indirecta de mensurandos dimensionales simples o la tolerancia de forma necesitan una conversión de los valores de entrada a través de un modelo de medición.

Para los modelos de medición complejos, y basado en la incertidumbre de las coordenadas como entrada, el método de Monte Carlo permite la estimación de la incertidumbre a través del cálculo intensivo. Por lo tanto, una posterior verificación del supuesto modelo de incertidumbre de las coordenadas contra un patrón conocido es necesaria para proporcionar la probabilidad al modelo utilizado [96].

En el caso de una CMM como instrumento de medida, la complejidad de la cadena de medición aumenta por el proceso dinámico de adquisición de la señal y por el movimiento del cabezal de medición. De hecho, las coordenadas indicadas se procesan mediante algoritmos de geometría de sustitución para proponer un resultado de medición.

Las CMM no cumplen con el principio de Abbé de la práctica de medición porque la dirección de medición no es la extensión de la escala que ofrece la coordenada [97].

Las CMM ordinarias tienen tres escalas mutuamente ortogonales. Además de las pequeñas desviaciones estáticas debidas a la construcción de la máquina, la dinámica del desplazamiento de los ejes origina una desviación del palpador de las posiciones teóricas. Por lo tanto, es importante tener en cuenta una trazabilidad completa de cualquier desviación a través de la compleja cadena de medición de una CMM. Incluso cuando la expresión formal de la medición requiere su mejor valor y su incertidumbre, imponer un tratamiento riguroso de la medición puede ser inútil y poco productivo en entornos industriales. Por lo tanto, un límite general de error CMM es un enfoque estándar para complementar el mejor valor de medición, véase la Figura 5. 1, por ISO 10360-2 [74].

Figura 5. 1: Esquema de un proceso de verificación de CMM por ISO 10360-2

La aceptación o verificación de una CMM parece estar en los bordes de la cadena metrológica ordinaria de calibración introduciendo estimaciones de errores totales. Sin embargo, las normas internacionales exigen la estimación de la incertidumbre en la expresión de cualquier medida, en particular, para cumplir con ISO/IEC 17025 [98]. Además, el desarrollo de la ISO 15530-3 [99] se refiere a la estimación de la incertidumbre para una CMM.

En el pasado se han realizado numerosos estudios en el campo de la incertidumbre de la máquina de medición de coordenadas.

Wilhelm et al. [100] proporcionó una excelente revisión de las técnicas desarrolladas para modelar y estimar la incertidumbre del sistema de medición de coordenadas.

Schwenke et al. han desarrollado un CMM virtual para ayudar en la evaluación de la incertidumbre de medición CMM [76] and [101]. Asimismo, en la norma ISO 15530-3 2011 [86] y [87] se describe otro método de cálculo de la incertidumbre asociada a una medición, que nos proporciona dos métodos basados en el uso de piezas o patrones calibrados.

5.2.1. METODOLOGÍA DE MEDICIÓN

Se realizó el estudio utilizando un CMM de "Moving Bridge" *TESA Micro-Hite® 3D* (Figura 5. 2) en el Laboratorio de Metrología Dimensional de la Universidad Politécnica de Madrid, con un campo de medida $X \times Y \times Z$ igual a $450 \text{ mm} \times 500 \text{ mm} \times 460 \text{ mm}$ y con una resolución "R" igual a $1 \mu\text{m}$, en un ambiente de temperatura controlada de $20 \pm 1^\circ \text{C}$.

La pieza utilizada para el estudio ha sido un bloque patrón angular de acero con cuatro ángulos con un valor nominal igual a 90° marcado con las letras A, B, C y D (Figura 5. 2).

Figura 5. 2: Moving Bridge "TESA Micro-Hite® 3D CMM y patrón de ángulos

Los valores de los ángulos del patrón, certificados por un laboratorio acreditado, se indican a continuación en la Tabla 5. 1.

Tabla 5. 1: Valores certificados para los distintos ángulos del patrón angular.

Angulo	Mensurando			Incertidumbre expandida con intervalo de cobertura de un 95%
	(° , ' , ")			(")
“A”	89	59	58.7	0,7
“B”	90	0	0.0	0,7
“C”	90	0	0.7	0,7
“D”	90	0	0.6	0,7

Para obtener indirectamente los valores de los ángulos del patrón es necesario caracterizar los planos de medición del bloque angular tomando 75 puntos en cada plano, como se muestra en la representación esquemática de la Figura 5. 3 Estos puntos se caracterizan por las coordenadas x , y , z

Los planos de medición del bloque patrón angular están situados casi paralelos a los ejes X, Y, Z del CMM.

Figura 5. 3: Puntos para el lado del bloque patrón de ángulo.

La estrategia de medición para cada plano ha sido la siguiente: los puntos se han distribuido por igual en tres líneas paralelas entre sí y perpendiculares al eje Z, como se muestra en la Figura 5. 3.

Una vez obtenidas las coordenadas de los puntos, para cada lado, procedemos a la representación matemática de los planos

$$ax + by + cz + 1 = 0 \quad (5.1)$$

Donde los parámetros a , b y c establecen la posición y la orientación del plano en el espacio. Esta representación excluye implícitamente todos los planos que pasan por el origen de los ejes. El vector unitario al plano que define su orientación se calcula como:

$$\mathbf{n} = \frac{a\vec{\mathbf{i}} + b\vec{\mathbf{j}} + c\vec{\mathbf{k}}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (5.2)$$

Para determinar el ángulo entre dos planos, se utiliza la siguiente expresión:

$$\theta = a \tan \frac{|n_1 \times n_2|}{n_1 \times n_2} \quad (5.3)$$

A partir de un conjunto de coordenadas (x_i, y_i, z_i) , los coeficientes a , b y c , se calculan utilizando el método de mínimos cuadrados, lo que nos permite obtener el plano que mejor se ajusta al conjunto de coordenadas a través de la expresión:

$$ax_i + by_i + cz_i + 1 \cong e_i \cong 0 \quad (5.4)$$

Donde e_i es el residuo.

La ecuación (5.4) podría expresarse en forma de matriz como:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cong - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = -\mathbf{u}_1$$

Donde $\mathbf{A}$ representa la matriz de coordenadas, $\mathbf{p}$ el vector de parámetros de ajuste y $\mathbf{u}_1$ el vector unidad.

Resolviendo el sistema anterior de ecuaciones por el método de mínimos cuadrados obtenemos el vector desconocido, $\mathbf{p}$, como:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{u}_1 \quad (5.6)$$

Los residuos medidos como la distancia ortogonal entre las coordenadas y el plano ajustado son:

$$\mathbf{d} = \mathbf{A}^T \mathbf{p} - \mathbf{u}_1 \quad (5.7)$$

5.2.2. MODELADO ESTADÍSTICO DEL COMPORTAMIENTO LINEAL DE UNA CMM

El siguiente modelo muestra los criterios utilizados para corregir las coordenadas brutas obtenidas por la CMM. Dicho modelo toma en consideración los errores geométricos, los errores debidos al comportamiento dinámico de la CMM, los debidos a los efectos de la temperatura (en este caso debido a las condiciones ambientales previamente descritas, consideramos que la contribución debida a la variación de temperatura es casi nula), los errores debidos al efecto del palpador y a la resolución de la propia máquina. En el caso de una CMM, se supone que las coordenadas cartesianas que la CMM proporciona al palpar una superficie de una pieza se han corregido usando los siguientes factores de corrección [24]:

$$\begin{aligned} x_i &= x'_i + g_{xi} + k_{xx} \cdot x'_i + k_{xy} \cdot y' + k_{xz} \cdot z'_i + c_{Rxi} \\ y_i &= y'_i + g_{yi} + k_{xy} \cdot x'_i + k_{yy} \cdot y' + k_{yz} \cdot z'_i + c_{Ryi} \\ z_i &= z'_i + g_{zi} + k_{xz} \cdot x'_i + k_{yz} \cdot y' + k_{zz} \cdot z'_i + c_{Rzi} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Donde (x_i, y_i, z_i) son coordenadas corregidas; $K_{xx}, k_{yy}, k_{zz}, k_{xy}, k_{xz}$ y k_{yz} son los componentes de la matriz de calibración lineal ($\mathbf{K}$) debido al error de perpendicularidad de los ejes de la CMM; g_{xi}, g_{yi} y g_{zi} son las correcciones asociadas con los errores geométricos y con los errores de palpado de la CMM; c_{Rxi}, c_{Ryi} y c_{Rzi} son las correcciones debidas a la resolución ($\mathbf{R}$) de la CMM en cada eje.

Usando la notación matricial, las ecuaciones (5.8) estarían en esta forma:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{g}_i + \mathbf{K} \times \mathbf{r}'_i + \mathbf{c}_{Ri} \quad (5.9)$$

Donde

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}, \mathbf{r}'_i = \begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{bmatrix}, \mathbf{g}_i = \begin{bmatrix} g_{xi} \\ g_{yi} \\ g_{zi} \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{c}_{Ri} = \begin{bmatrix} c_{Rxi} \\ c_{Ryi} \\ c_{Rzi} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

En la práctica trabajamos con correcciones nulas tanto para los componentes (k_{ij}) de la matriz de calibración lineal $\mathbf{K}$ como para los componentes (g_i) del vector $\mathbf{g}_i$ asociados a los errores geométricos. Por lo tanto, las especificaciones de la CMM se fijan en forma de valores máximos permitidos, E_K y E_G , para cada k_{ij} y g_i , respectivamente.

5.2.3. VERIFICACIÓN DE LA CMM

El modelo de comportamiento lineal descrito anteriormente establece que todos los parámetros: k_{xx} , k_{yy} , k_{zz} , k_{xy} , k_{xz} , k_{yz} , g_{xi} , g_{yi} , g_{zi} , c_{Rxi} , c_{Ryi} y c_{Rzi} , corresponden a distribuciones rectangulares de valor medio más probable igual a cero y con los límites superior e inferior así como se indica en la Tabla 5. 2 [78].

Los valores límite de los factores de calibración, los errores geométricos y los errores de corrección, que se muestran en la Tabla 5. 2, se calculan mediante la verificación de la CMM. K_{xy} , k_{xz} y k_{yz} son los factores de calibración asociados al defecto de perpendicularidad entre los ejes X e Y , X y Z e Y y Z , respectivamente.

Tabla 5. 2: Valores inferior y superior de los parámetros del modelo lineal.

Valores inferiores y superiores	Incertidumbre típica
$-E_K \leq k_{xx}, k_{yy}, k_{zz} \leq E_K$	$u(k_{xx}) = u(k_{yy}) = u(k_{zz}) = \frac{1}{\sqrt{3}} E_K$
$-\frac{E_K}{\sqrt{2}} \leq k_{xy}, k_{xz}, k_{yz} \leq \frac{E_K}{\sqrt{2}}$	$u(k_{xy}) = u(k_{xz}) = u(k_{yz}) = \frac{1}{\sqrt{6}} E_K$
$-E_G \leq g_{xi}, g_{yi}, g_{zi} \leq E_G$	$u(g_{xi}) = u(g_{yi}) = u(g_{zi}) = \frac{1}{\sqrt{3}} E_G$
$-R \leq C_{Exi}, C_{Eyi}, C_{Ezi} \leq R$	$u(C_{Exi}) = u(C_{Eyi}) = u(C_{Ezi}) = \frac{1}{\sqrt{3}} R$

Por lo tanto, los límites superiores e inferiores de las distribuciones rectangulares asociadas a los factores antedichos tienen que considerar el efecto en la diagonal, por esta razón E_K se divide por $\sqrt{2}$. R es la resolución del instrumento.

Como se establece en las normas ISO 10360-2 [74] e ISO-10360-5 [75], la verificación de una CMM consiste en verificar que los "errores de medida (E_L)" y el "error de palpado (P_{FTU})" no exceden los valores máximos previamente establecidos [73], [74], [102], que se denominan "error máximo permisible ($E_{L, MPE}$)" y "error máximo de palpado permitido ($P_{FTU, MPE}$)", respectivamente.

Para el $E_{L, MPE}$, usualmente se adopta una ley de tipo lineal expresada por:

$$E_{L, MPE} = A + B \cdot L \quad (L: \text{longitud de medición}) \quad (5.11)$$

Con dos constantes, A y B , la primera expresada en (mm) y la segunda sin dimensiones. Para la $P_{FTU, MPE}$:

$$P_{FTU, MPE} = A \quad (5.12)$$

Si $U_{95}(L)$ es la incertidumbre certificada del bloque patrón de longitud nominal L , la verificación debe hacerse [102] imponiendo la condición (5.13):

$$|E_L| \leq E_{L, MPE}(L) - U_{95}(L) \quad (5.13)$$

Analizando la geometría del mensurando (elemento de pequeño tamaño y baja altura) se ha decidido realizar una verificación de la CMM ad hoc adaptada a las características geométricas del bloque patrón angular, es decir, no se comprobó todo el volumen de la máquina sino sólo el volumen aproximado donde se colocaría el mensurando. De esta manera, las recomendaciones de la norma son simplificadas y adaptadas al caso particular analizado en este apartado.

La prueba dimensional consiste en la siguiente serie de mediciones:

- 5 diferentes direcciones espaciales a lo largo de las cuales el patrón de longitud a medir está alineado. Se seleccionan como:
 1. Paralelo al eje X.
 2. Paralelo al eje Y.
 3. Paralelo al eje Z.
 4. A lo largo de la primera diagonal del plano XY.
 5. A lo largo de la segunda diagonal del plano XY.
- Paralelamente a cada una de las cinco direcciones se miden cinco bloques patrones longitudinales diferentes, repitiendo tres mediciones en cada una de ellas. En total, hay $5 \times 5 \times 3 = 75$ mediciones (Figura 5. 4).

Figura 5. 4: Diferentes direcciones espaciales para la alineación del patrón longitudinal a medir: (a) sistema de coordenadas CMM, (b) paralelo al eje X, (c) paralelo al eje Y, (d) paralelo al eje Z, (e) a lo largo de la primera diagonal del plano XY, (f) a lo largo de la segunda diagonal del plano XY.

Por lo tanto, teniendo en cuenta la filosofía de la norma, la prueba dimensional aplicada permite obtener errores máximos permisibles menores que si hubiéramos evaluado todo el volumen de la CMM.

Para cada una de las mediciones se determina la indicación de error E_{Li} correspondiente como la diferencia entre la medición de la CMM y el valor certificado del bloque de medida, y se verifica si $|E_{Li}|$ valida la condición definida en la ecuación (5.13), y se verifica que la CMM cumple con los requisitos establecidos por la ISO-10360-2 [74]. Para la máquina CMM utilizada para medir, si se establecen los valores de los coeficientes $A = 0,0062 \text{ mm}$ y $B = 6,2 \times 10^{-6}$, los errores de la indicación E_{Li} para dicha máquina verifican la ecuación (5.13).

Para el modelo de comportamiento lineal es necesario estimar sus parámetros (E_K , E_G) sobre la base de las especificaciones de la CMM. Para ello se emplea el cálculo de la incertidumbre de distancia entre dos puntos:

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (5.14)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \\ \cos \beta &= \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \\ \cos \gamma &= \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Reemplazando las coordenadas x , y , z proporcionadas por la ecuación (5.8), y calculando las derivadas parciales de la ecuación (5.14) respecto a las variables k_{ij} , g_i y c_{Ri} , se obtiene la incertidumbre de L como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} u^2(L) &= (L \cos^2 \alpha)^2 u^2(k_{xx}) + (L \cos^2 \beta)^2 u^2(k_{yy}) + (L \cos^2 \gamma)^2 u^2(k_{zz}) + \\ &+ (2L \cos \alpha \cos \beta)^2 u^2(k_{xy}) + (2L \cos \alpha \cos \gamma)^2 u^2(k_{xz}) + \\ &+ (2L \cos \beta \cos \gamma)^2 u^2(k_{yz}) + \cos^2 \alpha \cdot u^2(g_x) + \cos^2 \beta \cdot u^2(g_y) \\ &+ \cos^2 \gamma \cdot u^2(g_z) + \cos^2 \alpha \cdot u^2(c_{Rx}) + \cos^2 \beta \cdot u^2(c_{Ry}) + \cos^2 \gamma \cdot u^2(c_{Rz}) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Teniendo en cuenta la incertidumbre de los parámetros k_{ij} , g_i y c_{Ri} , establecidos en la Tabla 5. 2 obtenemos:

$$\begin{aligned} u^2(L) &= L^2 (\cos^4 a + \cos^4 b + \cos^4 g) \frac{E_K^2}{3} + 4L^2 (\cos^2 a \times \cos^2 b + \cos^2 a \times \cos^2 g + \cos^2 b \times \cos^2 g) \frac{E_K^2}{6} + \\ &+ (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 g) \frac{E_G^2}{3} + (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 g) \frac{R^2}{3} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Operando matemáticamente:

$$u^2(L) = L^2 (\cos^4 \alpha + \cos^4 \beta + \cos^4 \gamma + 2 \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta + 2 \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \gamma + 2 \cos^2 \beta \cdot \cos^2 \gamma) \frac{E_K^2}{3} + \quad (5.18)$$

$$+ \underbrace{(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)}_1 \frac{E_G^2}{3} + \underbrace{(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)}_1 \frac{R^2}{3}$$

$$u^2(L) = L^2 \underbrace{(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)}_1 \frac{E_K^2}{3} + \frac{E_G^2}{3} + \frac{R^2}{3} \quad (5.19)$$

Finalmente se obtiene:

$$U_{95}(L) = 2 \sqrt{L^2 \frac{E_K^2}{3} + \frac{E_G^2}{3} + \frac{R^2}{3}} \quad (5.20)$$

Donde se utilizó un factor de cobertura $k = 2$, que, en las supuestas condiciones, es aproximadamente equivalente a una probabilidad del 95%. Si se pone la incertidumbre anterior menor o igual que el error de palpado máximo permisible, entonces se obtiene para $L = 0$:

$$U_{95}(0) = A \quad \Rightarrow \quad E_G = \sqrt{\frac{3}{4} A^2 - R^2} \quad (5.21)$$

Para $L = L_{max}$, donde L_{max} es la diagonal espacial del volumen para la medición de la CMM:

$$U_{95}(L_{max}) = A + B \cdot L_{max} \quad \Rightarrow \quad E_K = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{AB}{L_{max}} + \frac{3}{4} B^2} \quad (5.22)$$

5.2.4. MODELO MITUTOYO PARA EL COMPORTAMIENTO DE UNA CMM

Este modelo se basa en el conocido trabajo de Philips et al. [79]. Es un método para la simulación estadística con una fuerte correlación. Dicha correlación se verifica entre las coordenadas de los puntos de medición, y disminuye a medida que los puntos de palpado se hacen más distantes. En este modelo se supone que $U(x) = U(y) = U(z)$, pero con correlaciones entre:

- x_1 y x_2 $ro(x_1, x_2) = ro(L)$
- y_1 y y_2 $ro(y_1, y_2) = ro(L)$
- z_1 y z_2 $ro(z_1, z_2) = ro(L)$

En este caso, el modelo dice que se puede establecer un coeficiente de correlación entre los puntos, donde L es la distancia entre los puntos ecuación (5.14), de forma que la incertidumbre para la distancia punto-punto coincide con la especificación de la norma ISO-10360-2 [74]. Si L_{max} es la longitud de la diagonal del CMM, y se supone que para

esta distancia máxima entre los puntos $ro(L=L_{\max})=0$, bajo estas condiciones, la siguiente elección de $ro(L)$.

$$ro(L) = 1 - \frac{(A + B \cdot L)^2}{(A + B \cdot L_{\max})^2} \quad (5.23)$$

Imponiendo que la incertidumbre $U_{95}(L)$ sea igual o menor que el error máximo permisible, $U(x)=U(y)=U(z)$ se puede determinar basándose en la especificación $A+B \cdot L$.

$$U(L) = A + B \cdot L \quad (5.24)$$

De la ecuación (5.14) (distancia entre dos puntos), se calcula la incertidumbre expandida asociada a esta distancia derivando la función con respecto a las coordenadas $x_2, x_1, y_2, y_1, z_2, z_1$ y teniendo en cuenta la correlación descrita anteriormente entre las coordenadas:

$$\begin{aligned} u^2(L) = & 2 \cos^2 \alpha \cdot u^2(x) + 2 \cos^2 \beta \cdot u^2(x) + 2 \cos^2 \gamma \cdot u^2(x) + \\ & -2 \cos^2 \alpha \cdot u^2(x) \cdot ro(L) - 2 \cos^2 \beta \cdot u^2(x) \cdot ro(L) - 2 \cos^2 \gamma \cdot u^2(x) \cdot ro(L) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Simplificando la ecuación anterior:

$$u^2(L) = 2 \cdot u^2(x) \cdot [\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma] - 2 \cdot u^2(x) \cdot ro(L) \cdot [\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma]$$

$$u^2(L) = 2 \cdot u^2(x) - 2 \cdot u^2(x) \cdot ro(L) \quad (5.26)$$

$$U(L) = 2 \cdot u(x) \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - ro(L))}$$

Igualando la ecuación anterior con la ecuación (5.24) y teniendo en cuenta el valor del coeficiente de correlación (ecuación (5.23)), podemos evaluar la incertidumbre estándar asociada con un punto de coordenadas (x_i, y_i, z_i) , tales como:

$$u(x) = u(y) = u(z) = u_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{A + B \cdot L_{\max}}{\sqrt{2}} \quad (5.27)$$

5.2.5. PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Una vez establecidos los dos modelos de comportamiento: lineal y Mitutoyo, tomando en cuenta la metodología de medición establecida en el apartado 5.2.1, se determinan los valores de los ángulos A, B, C y D y sus incertidumbres asociadas, utilizando el método de Monte Carlo [72], y luego se comparan los valores certificados del patrón (Tabla 5. 1).

El uso del método Monte Carlo requiere la siguiente secuencia:

- a) Definir las magnitudes de salida Y_j (ángulos A, B, C y D)

- b) Determinar las magnitudes de entrada en las que dependen las cantidades Y_j (coordenadas (x_i, y_i, z_i) obtenidas al medir los planos de AB, BC, CD y DA del bloque patrón).
- c) Desarrollar un modelo que relacione Y_i y X_i (definido por las ecuaciones de (5.1) a (5.3))
- d) Sobre la base de los conocimientos disponibles, asignar las Funciones de Distribución de Probabilidad (PDF) de Gauss (normal), rectangular (uniforme), etc. a cada X_i . Asignar una Función de Distribución de Probabilidad conjunta (PDF) a aquellos X_i que no son independientes (información obtenida sobre la base de los dos modelos de comportamiento considerados).

Posteriormente las PDFs de los X_i se propagarán usando el modelo para obtener las PDFs para cada uno de los Y_i . Por último, sobre la base de las PDF de cada Y_i , se obtendrán los resultados de las mediciones.

5.2.6. RESULTADOS DEL MODELO DE COMPORTAMIENTO LINEAL

El procedimiento para obtener los resultados es el siguiente:

1. Las coordenadas corregidas de la CMM se determinan empleando el modelo de comportamiento estadístico lineal para un CMM (ecuación (5.8)), teniendo en cuenta los límites de variación de los parámetros k_{ij} , g_i y c_{Ri} previamente calculados. Estos parámetros se simulan utilizando distribuciones rectangulares con los límites establecidos en la Tabla 5. 2. Las coordenadas (x'_i, y'_i, z'_i) son las coordenadas brutas obtenidas por la CMM al medir los planos AB, BC, CD y DA y permanecen constantes en cada una de las repeticiones de la modelo.
2. Las anteriores coordenadas corregidas son ajustadas para cuatro planos por el método de mínimos cuadrados (ecuación (5.5)) y el vector unitario normal es determinado (ecuación (5.3)) para cada plano.
3. Basándose en los resultados del ajuste anterior, se determinan los ángulos entre los planos AB, BC, CD y DA.
4. Los pasos precedentes se replican $M = 1 \cdot 10^6$ times.

Tabla 5. 3: Resultados de la simulación de los ángulos A, B, C y D utilizando el modelo de comportamiento lineal.

Angulo	Estimación (°, ', ")			Incertidumbre estándar u(y) (")	Intervalo de cobertura del 95% más corto					
					Límite inferior (°, ', ")			Límite superior (°, ', ")		
A	89	59	59,0	5,3	89	59	48,6	90	0	9,5
B	89	59	58,2	5,3	89	59	47,8	90	0	8,5
C	89	59	58,7	5,3	89	59	48,4	90	0	9,1
D	90	0	4,0	5,3	89	59	53,6	90	0	14,5

Al comparar las estimaciones de ángulos proporcionadas por la propagación del modelo con los valores certificados del patrón angular (Tabla 5. 1), se verifica que las desviaciones máximas entre cada valor están entre 0,3" y 3,4".

Figura 5. 5: Histograma del ángulo A utilizando el modelo de correlación lineal. [103]

La Figura 5. 5 muestra el histograma correspondiente a la PDF del ángulo A obtenido cuando se realiza la simulación. Se puede observar que la cantidad de salida corresponde a la distribución normal, comportamiento que se verifica igualmente para el resto de los ángulos medidos.

Teniendo en cuenta que el mismo plano se utiliza para la medición de dos ángulos contiguos, es trivial demostrar la existencia de una correlación entre ambos. La Tabla 5. 4 presenta los coeficientes de correlación obtenidos en la simulación:

Tabla 5. 4: Matriz de coeficientes de correlación de los ángulos A, B, C y D.

Angulo	A	B	C	D
A	1	-0,4985	-0,0005	-0,5039
B	-0,4985	1	-0,4955	-0,0002
C	-0,0005	-0,4955	1	-0,5015
D	-0,5039	-0,0002	-0,5015	1

5.2.7. RESULTADOS DEL MODELO MITUTOYO

Considerando que las coordenadas están correlacionadas entre sí (Apartado 5.2.4), podemos obtener la matriz de covarianza como:

$$C_x = \begin{pmatrix} u_{x1}^2 & ro(L_{12}) \cdot u_{x1} \cdot u_{x2} & \cdots & ro(L_{1n}) \cdot u_{x1} \cdot u_{xn} \\ ro(L_{12}) \cdot u_{x2} \cdot u_{x1} & u_{x2}^2 & \cdots & ro(L_{2n}) \cdot u_{x2} \cdot u_{xn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ro(L_{n1}) \cdot u_{xn} \cdot u_{x1} & ro(L_{n2}) \cdot u_{xn} \cdot u_{x2} & \cdots & u_{xn}^2 \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

Esta matriz es idéntica para las coordenadas y_i and z_i . Se supone que las coordenadas anteriores (x'_i, y'_i, z'_i) son las coordenadas brutas obtenidas por la CMM al

medir los planos AB, BC, CD y DA, y corresponden a una distribución normal, multi-variante. Dichas distribuciones tendrán el valor de estas coordenadas como media y la matriz definida por la ecuación (5.28) como la covarianza. El método definido en la sección 6.4.8 del suplemento 1 de la GUM [72] se utiliza para obtenerlas.

El procedimiento utilizado para obtener los resultados es el siguiente:

1. Las coordenadas corregidas para la CMM se determinan usando el modelo Mitutoyo. Para ello se utilizan las coordenadas brutas obtenidas por la CMM al medir los planos AB, BC, CD y DA, teniendo en cuenta que su incertidumbre se basa en una distribución normal multi-variante.
2. A partir de este punto, el procedimiento es el mismo que en el caso del modelo de comportamiento lineal.

La Tabla 5. 5 muestra la estimación, la incertidumbre estándar y el intervalo de incertidumbre con una probabilidad de cobertura del 95% para cada uno de los ángulos.

Tabla 5. 5: Resultados de la simulación de los ángulos A, B, C y D utilizando el modelo Mitutoyo.

Angulo	Estimación (°, ', ")			Incertidumbre estándar $u(y)$ (")	Intervalo de cobertura del 95% más corto					
					Límite inferior (°, ', ")			Límite superior (°, ', ")		
<i>A</i>	89	59	59,0	6,5	89	59	46,4	90	0	11,9
<i>B</i>	89	59	58,2	6,4	89	59	45,6	90	0	10,9
<i>C</i>	89	59	58,7	6,5	89	59	46,1	90	0	11,4
<i>D</i>	90	0	4,0	6,5	89	59	51,4	90	0	16,6

Si comparan una vez más las estimaciones de los ángulos proporcionados por la propagación del modelo con valores certificados del patrón de ángulos (Tabla 5. 1) se obtienen las mismas desviaciones que para el modelo lineal. Esto se debe al hecho de que, por definición de ambos modelos, el valor estimado para cada una de las coordenadas coincide con el valor bruto obtenido por la CMM.

Figura 5. 6: Histograma del ángulo C obtenido utilizando el modelo de Mitutoyo

La Figura 5. 6 muestra el histograma correspondiente al PDF del ángulo C obtenido cuando se realizó la simulación. Observamos que, igual que en el caso del modelo de comportamiento lineal, la cantidad de salida corresponde a la distribución normal, comportamiento que se verifica igualmente para el resto de los ángulos medidos.

Como en el modelo anterior, es trivial establecer la existencia de una correlación entre los ángulos. La presenta los coeficientes de correlación obtenidos en la simulación:

Tabla 5. 6: Coeficientes de correlación de los ángulos A, B, C y D.

Angulo	A	B	C	D
A	1	-0,6247	0,2497	-0,6274
B	-0,6247	1	-0,6227	0,2506
C	0,2497	-0,6227	1	-0,6254
D	-0,6274	0,2506	-0,6254	1

Se puede observar que la existencia de una correlación $r(L)$ entre las coordenadas produce una correlación superior de los ángulos (media del 25%) mayor que la obtenida con el modelo de comportamiento lineal, junto con la aparición de correlación entre los ángulos, que en el caso del modelo de comportamiento lineal fue insignificante.

5.2.8. CONCLUSIONES

En primer ejemplo del uso de metodología proporcionada por la metrología dimensional en el caso de estimación de ángulos a partir de un bloque patrón, la incertidumbre asociada con la medición indirecta de ángulos se ha calculado utilizando una CMM. Para ello, se han evaluado y comparado dos modelos de comportamiento para la CMM: “modelo lineal” y modelo “Mitutoyo”. Todos los parámetros que intervienen en dichos modelos se obtienen mediante la verificación de la CMM de acuerdo con la norma ISO 10360-2 [22].

El modelo Mitutoyo presenta una definición más abstracta que el modelo de comportamiento lineal, ya que requiere el uso de una matriz de correlación para el cálculo de la incertidumbre y no requiere una relación directa con los errores de la máquina, lo que hace su implementación matemática más compleja.

El modelo estadístico lineal tiene en cuenta, entre otras cosas, los errores debidos al comportamiento dinámico de la CMM, los errores geométricos y los errores debidos a la temperatura, el efecto de sondeo y la resolución de la CMM, permitiendo así la corrección de las coordenadas brutas obtenidas por la CMM.

Con el fin de comparar los resultados proporcionados por ambos modelos, se ha utilizado un bloque patrón de ángulo de acero previamente calibrado. Los resultados de las mediciones angulares llevan a los mismos valores para los cuatro ángulos. En cuanto a las incertidumbres, el modelo Mitutoyo conduce a valores de un 20% mayor que los obtenidos por el modelo de comportamiento lineal. Esto se debe al hecho de que el modelo Mitutoyo presenta una fuerte correlación que actúa aumentando la incertidumbre

obtenida y ofreciendo, como resultado, valores más conservadores que el modelo de comportamiento lineal.

5.3. LOS ERRORES EN UNA CMM

La serie ISO 10360 ofrece un marco consolidado para los fabricantes y los propietarios de una CMM para aceptar y verificar la misma. En términos prácticos, permite la expresión de la indicación de la máquina como más o menos el límite total de error estimado, que se convierte en un intervalo de incertidumbre. Los esfuerzos para obtener una expresión más precisa de las mediciones de una CMM deben tratar con una descripción del error más detallada para corregir la indicación de la CMM. La compensación de errores (en el volumen de trabajo) se basa en el muestreo de artefactos calibrados, como se ha visto en apartado anterior. La repetitividad de los resultados de una serie de una medición de la misma posición física (punto) es una demostración directa de la incertidumbre asociada con la capacidad de medición de una CMM. Además de una buena práctica de medición en un entorno estable (temperatura y humedad controladas), los intentos en la literatura en modelar las desviaciones esperadas de una CMM, bajo condiciones de repetibilidad, son principalmente a través de la composición vectorial. Estos intentos incluyen la mecánica de las desviaciones debidas a las acciones combinadas de traslaciones y rotaciones de las coordenadas de los puntos y un modelo cinemático de cuerpo rígido [104]–[106]. Una vez conocidas estas desviaciones, se puede obtener una posición más precisa de las coordenadas del punto, por lo que se espera una determinación más precisa del mensurando. La violación del principio Abbé por las CMM limita la capacidad de mejorar la precisión de las mismas a través del uso de hardware [107]. Alternativamente, la compensación de errores mediante procesamiento de la señal o del post-procesamiento de medición puede ser una manera conveniente de mejorar la lectura precisa de la coordenada puntual tanto en las CMM como en dispositivos de control numérico por computadora (CNC) [108], [109]. Es importante señalar que las iniciativas anteriores y muchas otras, que persiguen la compensación de error de coordenadas de puntos, se basan en la corrección de la posición de las coordenadas y en un modelo de error cinemático [110]–[113]. El método que en este apartado se desarrollará tiene las ventajas de considerar la distancia entre puntos para corregir los errores promedios. Algunas iniciativas anteriores, que consideran las diferencias de coordenadas entre puntos para la evaluación de errores, se encuentran en las clásicas técnicas de inversión [114], en los primeros intentos de tratar el error [114] y, obviamente, en las pruebas de verificación estándar de la serie ISO 10360-2 o el similar ASME B89.4.10360.2 [74], [98], [99], [104]–[116]. En los casos anteriores, la verificación del mensurando es la longitud de los bloques patrones y no las propias coordenadas de puntos.

Como se sabe, la distancia euclídea L_2 es la métrica de la distancia entre dos puntos. Cualquier medición en una CMM se basa inicialmente en la posición relativa en el espacio entre las coordenadas del punto. Esta posición relativa puede ser igualada a

través de la distancia entre los puntos. La posición absoluta de los puntos (valor de las coordenadas asignado convencionalmente en el espacio con respecto a la CMM, en términos metrológicos) tiene una importancia relativa siempre que proporcione la distancia correcta entre los puntos de la muestra en medición. Esta importancia de la posición relativa, también, está presente en el origen de los ejes de las escalas de las CMM que podrían ser arbitrariamente puestas a cero. Así la posición relativa del origen está presente en las escalas de los sistemas de control numérico por ordenador (CNC) sin impacto teórico en la medición final o en los resultados de mecanizado. El modelo para una CMM ordinario de puntos de coordenadas corresponde al espacio euclidiano. El modelo de error propuesto se basa principalmente en la diferencia de coordenadas, que definen un vector con módulo y dirección. Independientemente del origen del sistema de referencia, esta estructura se corresponde con el concepto de espacio afín.

5.3.1. MODELO DE ERROR DE LONGITUD PARA UNA CMM

La verificación del rendimiento de una CMM por la ISO 10360-2 y -5 [75] incluye la estimación de tres magnitudes básicas:

- Un error máximo permisible de longitud $E_{L,MPE}$,
- un error máximo permisible de la sonda $E_{P,MPE}$
- una estimación de repetibilidad R .

$E_{L,MPE}$ y $E_{P,MPE}$ son intervalos probabilísticos evaluados ordinariamente con un nivel de confianza del 95%, mientras que R se evalúa desde su máximo (Tabla 5. 2). El modelo ISO aplica el $E_{L,MPE}$ general sobre el mejor valor de la máquina siempre que todos los sesgos conocidos (errores sistemáticos) sean corregidos previamente, $L_{unbiased}$. En el proceso de verificación de una CMM se comprueba que la desviación de cada longitud indicada por la máquina no sobrepasa $\pm E_{L,MPE}$, respecto a los valores asignados de los bloques patrón propiamente calibrados. A continuación, en el proceso ordinario de medición por una CMM, el $E_{L,MPE}$ puede ser incorporado como contribución a la incertidumbre (otros efectos podrían ser agregados a la ley de propagación de incertidumbre ecuación (5.18)). El mejor valor de la longitud de una medición L_m puede expresarse a partir de la indicación de la máquina y una estimación de la incertidumbre por la ecuación (5.30).

$$L_m = L_{unbiased} \pm E_{L,MPE}(L) \quad (5.30)$$

El nuevo modelo de agregación de errores que se propone en ese apartado considera una relación lineal del error, por cada uno de los tres ejes principales, con la indicación de la CMM, mientras se mide independientemente en cada dirección de los ejes. Los bloques patrones utilizados, también tienen su propia incertidumbre (tipo B) que normalmente crece linealmente con sus longitudes nominales y su grado de precisión. Además, relacionado con la propia construcción de la CMM el error asociado con las escalas de la CMM tiene un efecto de amplificación sobre el error asociado directamente

con la longitud total de la pieza en medición [96], [111], [117], [118]; Véase también un caso de ejemplo en la Figura 5. 7. Por lo tanto, esta relación lineal es, a priori, verosímil, y se verificará experimentalmente en una CMM. Denotado con L_{mx} , el mejor valor para la longitud del mensurando alineado con el eje X significa, con L_x , la indicación de la CMM, y con L_{nx} , la longitud indicada después de la corrección del error medio.

Figura 5. 7: Tendencia lineal de primer orden por eje de una prueba de verificación ISO 10360 (eje X). CMM O-Inspect 322 de Carl Zeiss Industrielle Messtechnik GmbH, Oberkochen, Alemania, campo de medición XxYxZ de 300 mm × 200 mm × 200 mm, incluyendo el cabezal de la sonda VAST XXT (LT1) y el software de medición CALYPSO 2014. Las líneas rojas son los límites de control en nivel de confianza del 95% que establece el error máximo admisible.

El error medio E , en las fórmulas, se define como el valor asignado del bloque patrón de longitud (calibrado) menos el valor medido, a diferencia de la definición estándar del vocabulario internacional de metrología (VIM) que define el error medio E como la diferencia entre el valor de la cantidad medida menos el valor convencional de referencia[119]. Esta notación se adopta sólo por conveniencia de signos y de fórmulas más claras, pero sin efecto en los resultados globales. Por último, $\pm \hat{U}_x(L_x)$ indica un intervalo de predicción (a un nivel de confianza) del error máximo cuando se mide bajo condiciones de repetibilidad por el eje X, donde $\pm \hat{U}_x$ es una estimación global superior para todo el campo de medida. La misma notación para los ejes Y e Z, respectivamente, permite expresar el mejor valor para la longitud del mensurando alineado por cada eje, después de la ecuación (5.31):

$$L_{mx} = L_x + E_x \pm \hat{U}_x(L_x) = L_x + (A_x + B_x \cdot L_x) \pm \hat{U}_x = L_{nx} \pm \hat{U}_x$$

$$L_{my} = L_y + E_y \pm \hat{U}_y(L_y) = L_y + (A_y + B_y \cdot L_y) \pm \hat{U}_y = L_{ny} \pm \hat{U}_y \quad (5.31)$$

$$L_{mz} = L_z + E_z \pm \hat{U}_z(L_z) = L_z + (A_z + B_z \cdot L_z) \pm \hat{U}_z = L_{nz} \pm \hat{U}_z$$

El término $\hat{U}$ en la ecuación (5.31) se asemeja a la notación de la incertidumbre. De hecho, es una estimación de la incertidumbre del muestreo de medición, además de otras contribuciones de incertidumbre como la de temperatura o la debida al operador,

etc. Los límites de predicción al 95% del nivel de confianza alrededor del valor medio del modelo se identifican como la variabilidad del modelo de regresión del error por eje. El conjunto $E_{L,MPE}$ puede considerarse una estimación de la incertidumbre expandida ($k = 2$) de la CMM [104]. La verificación original prevista del error máximo admisible especificado por la norma ISO 10360-2 [74] tiene por objeto comprobar que los errores están contenidos entre los límites de la especificación de rendimiento. Sin embargo, las técnicas de prueba de verificación de la ISO 10360-2 con artefactos calibrados en condiciones de repetibilidad podrían ser utilizadas para asignar valores a los errores en esas condiciones.

Para el modelo propuesto, estas condiciones no son condiciones de funcionamiento nominales permitidas por la ISO 10360-2, sino las condiciones de funcionamiento de referencia [120] que permitirán el uso de los resultados del modelo en condiciones de medición similares para la corrección de la medición de las características. En la tarea de asignar valores a los errores de la CMM para mejorar los resultados de medición, se deben añadir todas las fuentes de incertidumbre de medición a la incertidumbre $\hat{U}$ de la CMM en las condiciones de prueba [104]. En el caso de una prueba de verificación, se busca la conformidad de la máquina en cualquier dirección (Véase apartado 5.2). La dirección de medición es parte del factor no controlado y la incertidumbre de la CMM es una estimación global independientemente de la dirección de medición y en el rango de condiciones operativas de la máquina. Obsérvese que la fijación del $E_{L,MPE}$ a un 95% de confianza para la prueba de verificación estándar ISO 10360-2 se desvía de una regresión de errores a cada longitud en cualquier dirección, incluso cuando, en general, se toma una medición de forma vectorial, justo en la dirección predefinida por la normal a la superficie física. El error general del modelo ISO 10360-2 no discrimina la dirección de medición. Como resultado, los errores muestreados a través de este modelo de verificación son útiles para la conformidad de los límites de rendimiento de la máquina, pero $E_{L,MPE}$ puede sobrestimar el comportamiento de la CMM en direcciones particulares.

En el modelo propuesto, la contribución de la medida en la dirección de la medición se considera por eje, separada e independiente entre sí, pero bajo las mismas condiciones de funcionamiento de referencia. La dirección de medida, normal a la superficie de la muestra, aparece en el modelo de medición de las características e incorpora las componentes escalares por eje del modelo. Los resultados experimentales apoyarán una relación funcional más fuerte de errores por eje. No obstante, el modelo propuesto no considera covarianza o influencia mutua entre errores del eje. Esto se discutirá más adelante para apoyar el enfoque propuesto.

La distancia euclídea entre dos puntos pone en relación las coordenadas de un punto con la longitud de medida L_m de una dimensión, en una dirección arbitraria del volumen de medida de la CMM, por las ecuaciones (5.32) - (5.34), donde los símbolos en **negrita** denotan vectores:

$$\begin{aligned}
L_m^2 &= L_{mx}^2 + L_{my}^2 + L_{mz}^2 = [L_{nx} \pm \hat{U}_x]^2 + [L_{ny} \pm \hat{U}_y]^2 + [L_{nz} \pm \hat{U}_z]^2 = \\
&= L_{nx}^2 + L_{ny}^2 + L_{nz}^2 \pm 2L_{nx}\hat{U}_x \pm 2L_{ny}\hat{U}_y \pm 2L_{nz}\hat{U}_z + O(\hat{U}) \approx \\
&\approx L_n^2 \pm 2L_{nx}\hat{U}_x \pm 2L_{ny}\hat{U}_y \pm 2L_{nz}\hat{U}_z = L_n^2 \pm 2\hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{L}_n
\end{aligned} \tag{5.32}$$

que proporciona una capacidad de medición ordinaria:

$$\hat{U}_x, \hat{U}_y, \hat{U}_z, \hat{U} \ll L_x, L_y, L_z, L \tag{5.33}$$

donde

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{U}} &= (\hat{U}_x, \hat{U}_y, \hat{U}_z); \quad \mathbf{L}_n = (L_{nx}, L_{ny}, L_{nz}); \quad \hat{U} = \sqrt{\hat{U}_x^2 + \hat{U}_y^2 + \hat{U}_z^2}; \\
L_n^2 &= \mathbf{L}_n \cdot \mathbf{L}_n = L_{nx}^2 + L_{ny}^2 + L_{nz}^2 = \\
&= (A_x + (B_x + 1) \cdot L_x)^2 + (A_y + (B_y + 1) \cdot L_y)^2 + (A_z + (B_z + 1) \cdot L_z)^2
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Esto permite identificar la incertidumbre estimada por el error máximo permisible de la ecuación (5.30) con una aproximación del primer orden por las ecuaciones (5.35) – (5.37). Por lo tanto, $E_{L,MPE}$ podría expresarse a través del modelo propuesto como la proyección de la incertidumbre vectorial $\mathbf{U}$ en la dirección de medición. Esta dirección está determinada por las coordenadas corregidas de los puntos, $(A_x + (B_x + 1))L_x$, véase Ecuación (5.39), que es aplicable en lugar de la longitud dada por la indicación de la CMM L_x .

$$L_m^2 = [L_n \pm \hat{U}]^2 \approx L_n^2 \pm 2\mathbf{L}_n \cdot \hat{\mathbf{U}} \tag{5.35}$$

Que proporciona:

$$\hat{U}_x, \hat{U}_y, \hat{U}_z, \hat{U} \ll L_x, L_y, L_z, L, \tag{5.36}$$

el desarrollo en serie de Taylor permite expresar la ecuación (5.35)

$$\begin{aligned}
L_m &\approx \sqrt{L_n^2 \pm 2\hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{L}_n} = L_n \sqrt{1 \pm \frac{2\hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{L}_n}{L_n^2}} \approx L_n \left[1 \pm \frac{1}{2} \left(\frac{2\hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{L}_n}{L_n^2} \right) \right] \\
&= L_n \pm \frac{\hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{L}_n}{L_n}; \quad \text{if } \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{L}_n \ll L_n^2
\end{aligned} \tag{5.37}$$

La corrección de error y la incertidumbre puede expresarse, a partir de la indicación de la CMM, en una dirección arbitraria:

$$\begin{aligned}
L_m &= L + E \pm \hat{U}_m = L_n \pm \hat{U}_m; \\
\hat{U}_m &= \frac{\hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{L}_n}{L_n}; \quad E = L_n - L; \quad \hat{U} = |\hat{\mathbf{U}}| = \sqrt{\hat{U}_x^2 + \hat{U}_y^2 + \hat{U}_z^2}
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Por último, la identificación de términos entre las ecuaciones (5.35) – (5.37) y la primera afirmación de la ecuación (5.38) da la corrección promedia del error E y $\hat{U}_m$ función de la expresión de las contribuciones por cada eje de la CMM (ecuación (5.39)). Es importante notar que la estimación de la incertidumbre del muestreo de la medición L_m es $\hat{U}_m$ y aparece como la proyección vectorial del vector incertidumbre (variabilidad no explicada) por cada eje $\hat{U}$ en la dirección de medición de la distancia (por la dirección normal a la superficie) dada por el vector de longitud corregida L_n .

La expresión de la incertidumbre escalar $\hat{U}$ se asemeja a la ley de propagación de incertidumbre para las contribuciones independientes por cada eje, según la GUM. De hecho, tanto el modelo propuesto en las ecuaciones (5.32) – (5.34) como la derivación de la incertidumbre (en una aproximación del primer orden) utilizan la serie de Taylor para derivar la expresión. El modelo de medición propuesto viene directamente de la distancia euclídea por las coordenadas de los puntos y de su expansión en serie de Taylor. La ley GUM de propagación de la incertidumbre utiliza la distancia euclidiana para definir la extensión de una medida por la expansión de Taylor de su varianza. Esto es dado por la suma de los cuadrados de la distancia del resultado de la medida al resultado medio [121]. Una comparación de la incertidumbre dada por la ley de propagación de incertidumbre y por este modelo se llevará a cabo en el desarrollo del estudio.

$$\hat{U}_m = \frac{\hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{L}_n}{L_n} = \frac{\hat{U}_x(A_x + (B_x + 1) \cdot L_x) + \hat{U}_y(A_y + (B_y + 1) \cdot L_y) + \hat{U}_z(A_z + (B_z + 1) \cdot L_z)}{\sqrt{(A_x + (B_x + 1) \cdot L_x)^2 + (A_y + (B_y + 1) \cdot L_y)^2 + (A_z + (B_z + 1) \cdot L_z)^2}} = \|\hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{n}\|$$

$$\hat{\mathbf{U}} = (\hat{U}_x, \hat{U}_y, \hat{U}_z); \quad U = \sqrt{\hat{U}_x^2 + \hat{U}_y^2 + \hat{U}_z^2} \quad (5.39)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{L}_n / \|\mathbf{L}_n\|; \quad \mathbf{L}_n = (A_x + (B_x + 1) \cdot L_x, A_y + (B_y + 1) \cdot L_y, A_z + (B_z + 1) \cdot L_z)$$

$$E = L_n - L = L_n - \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}; \quad L_m = L_n \pm \hat{U}_m = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} + E \pm \hat{U}_m$$

El modelo de longitud propuesto (ecuaciones (5.38) y (5.39)) expresa el resultado de medición como el cálculo nominal, a partir de la indicación de la CMM, más una corrección con límites de confianza en un intervalo determinado por la proyección del vector de incertidumbre estimada por eje $\hat{U}$ según la dirección de la medición después de la corrección, definida por L_n .

Formalmente, el uso de este modelo desagregado permite considerar el caso límite de $L \rightarrow 0$. La interpretación de $\hat{U}_m$ corresponde a una estimación de la incertidumbre del punto, cuyo valor es la incertidumbre debida a la ley de propagación de incertidumbre para contribuciones independientes, pero proyectada según la dirección de medición después de la corrección, mediante las ecuaciones (5.40)-(5.41). En este caso límite, esta dirección se determina por la dirección del vector $E_{0,MPE}$, y la composición vectorial de las contribuciones por cada dirección del eje es:

$$L \rightarrow 0 \Rightarrow \hat{U}_m \approx \frac{\hat{U}_x A_x + \hat{U}_y A_y + \hat{U}_z A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} = \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{n} = \sqrt{\hat{U}_x^2 + \hat{U}_y^2 + \hat{U}_z^2} \cdot \cos(\hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{n}) \quad (5.40)$$

$$\hat{\mathbf{U}} = (\hat{U}_x, \hat{U}_y, \hat{U}_z); \quad \mathbf{n} = \mathbf{L}_n / \|\mathbf{L}_n\| = \frac{(A_x, A_y, A_z)}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}};$$

Donde:

$$\mathbf{E}_{0,MPE} = (A_x, A_y, A_z); \quad E_{0,MPE} = |\mathbf{E}_{0,MPE}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (5.41)$$

$$L \rightarrow 0 \Rightarrow E = L_n - L; \quad E \rightarrow \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

En el modelo propuesto esta incertidumbre residual del punto es la reproducibilidad irreducible de las coordenadas del punto, independientemente de la longitud bajo medición. Esto podría permitir una posible interpretación como una estimación del error de la posición verdadera del punto. Los errores de las coordenadas en una CMM se encuentran en el error de la indicación con respecto al valor verdadero con el origen en hasta 21 tipos de componentes de error que afectan a la determinación de las coordenadas [112]. Las sucesivas repeticiones de medición en el mismo punto físico, en una medición unilateral, $E_{0,MPE}$ muestran la propagación de la repetibilidad de la CMM. El valor medio podría estar sesgado con respecto al valor verdadero, y podría ser el origen de un sesgo neto (error sistemático) en la determinación de la longitud de un bloque patrón por una CMM, incluso cuando se usa un tamaño de muestra significativo bajo condiciones de repetibilidad. En el caso de una corrección completa de la indicación de coordenadas de la CMM por el fabricante, de cualquier sesgo en cualquier punto y en cualquier dirección, este sesgo no existiría y la repetibilidad se convertiría simplemente en la incertidumbre de la indicación de la CMM de corrección nula, no obstante, el modelo propuesto toma en consideración la dirección de medida. Por lo tanto, se espera una mejor asignación de la fuente original de errores en cada punto con el propósito de una asignación de error, que ciertamente puede depender de la dirección de medición.

Una cuestión teórica importante surge del concepto de error como cantidad. El modelo CMM de la norma ISO 10360-2 considera el error como un valor de cantidad a partir de la diferencia de dos valores: la indicación de la CMM y un valor de referencia (el valor asignado convencional de la longitud del bloque patrón de longitud). Por lo tanto, una vez que todos los sesgos conocidos (errores sistemáticos) en la indicación son compensados por el fabricante, el error máximo permisible es un valor de cantidad que delimita un intervalo de confianza o de incertidumbre. Los errores encontrados en la prueba de verificación son muestras en el rango de las condiciones operativas de la máquina. Esto es, de hecho, la naturaleza de la incertidumbre en las mediciones ordinarias directas, así que después de toda la corrección sistemática del error, el error apreciado en la muestra es aleatorio y está situado alrededor de una media nula. El sesgo o error sistemático es un valor de cantidad según la GUM, y no tiene una función de densidad de probabilidad para considerarlo como una cantidad [122]. La diferencia entre una cantidad y un valor de cantidad también se analiza en [123], por lo que en la verificación de una CMM, según la ISO 10360-2, la estimación global del error, utilizando el error máximo permitido, también se considera como un valor de cantidad. Las diferencias con respecto a la norma se consideran para múltiples direcciones de medida o para las condiciones nominales de funcionamiento, de modo que no existe una dirección espaciotemporal [122] en tal promedio de valores delimitados por $E_{L,MPE}$. Sólo se toman tres repeticiones por cada medición, sin el objetivo de evaluar un error medio. Es sólo un valor de cantidad aprobada para definir un intervalo de confianza, y no una magnitud sujeta a una posible medición propiamente dicha.

La ISO 23165 [124] desarrolla un test para la evaluación de la incertidumbre para una CMM como un instrumento indicador, complementario de los límites de error

estimados según la ISO 10360-2, de acuerdo con ISO 14253-1 [125]. Se centra en la incertidumbre de la prueba de verificación por la ISO 10360-2. Ambas normas ISO establecen el marco para la aceptación de la CMM y la verificación del rendimiento entre los límites especificados.

En el modelo propuesto, el error de la CMM se desagrega en la cantidad del error del error medio por eje y un valor de cantidad a partir de la dispersión alrededor del error medio que contribuirá a la incertidumbre de la medición de formas por la CMM. Eso sigue la evolución de las consideraciones de error en [122], [123]; Por lo tanto, en el modelo propuesto, el error por eje se trata como una cantidad basada en la evidencia experimental del comportamiento de la máquina por eje en condiciones concretas de ensayo. Como consecuencia, es posible considerar la incertidumbre del error por eje y su contribución al escandallo de la incertidumbre bajo las condiciones de operación de referencia. El error se trata como una cantidad: de hecho, se determina por la composición vectorial de cada aportación de error por eje basada en la regresión de una distribución de valores medidos por eje. Después, el error y su incertidumbre se incorporarán al modelo de medición de las características, simultáneamente, a través del cálculo vectorial. El modelo de regresión lineal es el modelo más simple y más deseado para tratar el comportamiento de la máquina, pero este enfoque conceptual también podría ser válido para otras respuestas de la máquina.

Para ser un modelo útil, las condiciones de referencia de medición de las pruebas de asignación de errores deben ser lo suficientemente similares a las utilizadas posteriormente en la medición de la característica en la muestra. Este requisito se aproxima a los impuestos en la estimación, no basada en la sustitución, de la incertidumbre según la ISO 15530-3 [99] de los artefactos calibrados. La incertidumbre del modelo de longitud propuesto se puede identificar con la incertidumbre estándar debida al proceso de medición en un procedimiento de no sustitución en las condiciones operativas de referencia. Además, el modelo básico propuesto de error y la incertidumbre de longitud se pueden incorporar en la medición de otras características, por lo que permite integrar los resultados de bloques calibrados en mensurandos más complejos.

5.3.2. MODELO DEL ERROR DE PLANITUD EN UNA CMM

La tolerancia de forma de la planitud se determina por cuatro puntos no coplanares para cualquier conjunto finito de puntos, independientemente de su tamaño [126]. Por cada par, se determinan dos direcciones no colineales, y la planitud se mide por su dirección normal común y distancia mínima entre ambos planos (Figura 5. 8).

Obviamente, cuando tres de ellos son coplanares, la distancia del cuarto punto al plano se convierte en la medida de la planitud. El algoritmo para el cálculo preciso de la planitud, a partir de un conjunto de coordenadas de puntos, se puede encontrar en [126].

Figura 5. 8: Planitud bajo los criterios de tolerancia de mínima zona. (A) Configuración (2 - 2); (B) configuración (3-1).

A partir de la indicación de la CMM, el cálculo vectorial de la planitud por mínima zona (MZF) a partir de tres vectores $u(p_1, p_2)$, $v(p_3, p_4)$ y $t(p_1, p_3)$ es dado por la ecuación (5.42), donde el producto de la mezcla se puede desarrollar a partir del determinante de la matriz construida por la diferencia de las coordenadas.

$$MZF_{uvt, indication} = \frac{|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{t}|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|} \cdot \det \begin{bmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_4 - x_3 & y_4 - y_3 & z_4 - z_3 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

$$\mathbf{u} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1); \quad \mathbf{v} = (x_4 - x_3, y_4 - y_3, z_4 - z_3);$$

$$\mathbf{t} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

En la ecuación (5.42) las coordenadas son directamente la indicación de la CMM. El error de una longitud es el error del valor absoluto de la diferencia de coordenadas o de la distancia entre puntos, para el eje x, $E_x = E_x(L_x)$ y $L_x = |x_i - x_j|$.

Teniendo en cuenta una resolución adecuada y capacidad de medición, se espera que los errores y la incertidumbre sean mucho más pequeños que la distancia entre puntos. La expresión de la planitud medida por mínima zona (MZFm) puede desarrollarse con la ecuación (5.43). Este modelo de error puede aplicarse para los resultados de planitud tanto de los criterios de mínimos cuadrados como para el método de tolerancia de mínima zona, pero los puntos críticos en los planos envolventes serán cuatro en el caso de mínima zona y, en general, dos en el caso de mínimos cuadrados. Por lo tanto, los resultados cuantitativos también serán diferentes dependiendo de los criterios de planitud adoptado.

Es significativo, en el modelo, que el error de planitud es una consecuencia directa del error absoluto de la diferencia de coordenadas (distancia entre puntos), donde se puede encontrar la fuente primitiva de error y de incertidumbre. La ecuación (5.43) se aplica sólo para una medición. Al igual que la medición de longitud, una medición fiable de planitud debe basarse en los resultados más probables obtenidos de varias muestras.

Teniendo en cuenta que la expresión de la tolerancia de mínima zona puede obtenerse a partir de cuatro puntos, al menos uno en cada plano envolvente, son posibles cuatro combinaciones diferentes de puntos para definir u , v , t (ver Figura 5. 8) en la configuración (2-2), y se pueden derivar hasta seis estimaciones posibles para la

estimación del error y de la incertidumbre en la configuración (3-1) a partir de los cuatro puntos críticos. El mejor valor de la planitud a partir de la indicación, MZF_{uvr} en la ecuación (5.43), será el mismo en un enfoque del primer orden, pero en general, el error y la incertidumbre de cada configuración serán diferentes.

$$\begin{aligned}
 MZF_{m,uvr} &= \left| \frac{\mathbf{u}_m \times \mathbf{v}_m}{\|\mathbf{u}_m \times \mathbf{v}_m\|} \cdot \mathbf{t}_m \right| \approx \left| \frac{(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{t} + \mathbf{E}_t) + [(\mathbf{u} \times \mathbf{E}_v) \cdot (\mathbf{t} + \mathbf{E}_t) + (\mathbf{E}_u \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{t} + \mathbf{E}_t)]}{\|(\mathbf{u} + \mathbf{E}_u) \times (\mathbf{v} + \mathbf{E}_v)\|} \right| \pm \\
 &\pm \left| \frac{[(\mathbf{u} + \mathbf{E}_u) \times \hat{\mathbf{U}}_v] \cdot (\mathbf{t} + \mathbf{E}_t) + (\hat{\mathbf{U}}_u \times (\mathbf{v} + \mathbf{E}_v)) \cdot (\mathbf{t} + \mathbf{E}_t) + ((\mathbf{u} + \mathbf{E}_u) \times (\mathbf{v} + \mathbf{E}_v)) \cdot \hat{\mathbf{U}}_t}{\|(\mathbf{u} + \mathbf{E}_u) \times (\mathbf{v} + \mathbf{E}_v)\|} \right| = \\
 &= MZF_{uvr} + E_{uvr} \pm \hat{U}_{uvr} \\
 \mathbf{u}_m &= \mathbf{u} + \mathbf{E}_u \pm \hat{\mathbf{U}}_u = (x_2 - x_1 + E_{x12} \pm \hat{U}_{x12}, y_2 - y_1 + E_{y12} \pm \hat{U}_{y12}, z_2 - z_1 + E_{z12} \pm \hat{U}_{z12}); \\
 \mathbf{v}_m &= \mathbf{v} + \mathbf{E}_v \pm \hat{\mathbf{U}}_v = (x_4 - x_3 + E_{x34} \pm \hat{U}_{x34}, y_4 - y_3 + E_{y34} \pm \hat{U}_{y34}, z_4 - z_3 + E_{z34} \pm \hat{U}_{z34}); \\
 \mathbf{t}_m &= \mathbf{t} + \mathbf{E}_t \pm \hat{\mathbf{U}}_t = (x_3 - x_1 + E_{x13} \pm \hat{U}_{x13}, y_3 - y_1 + E_{y13} \pm \hat{U}_{y13}, z_3 - z_1 + E_{z13} \pm \hat{U}_{z13});
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

$$\begin{aligned}
 MZF_{uvr} &= \left| \frac{(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{t}}{\|\mathbf{u} + \mathbf{E}_u\| \cdot \|\mathbf{v} + \mathbf{E}_v\|} \right| \approx \left| \frac{(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{t}}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|} \right|; \\
 E_{uvr} &= \frac{(\mathbf{u} \times \mathbf{E}_v) \cdot (\mathbf{t} + \mathbf{E}_t) + (\mathbf{E}_u \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{t} + \mathbf{E}_t) + (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{E}_t}{\|(\mathbf{u} + \mathbf{E}_u) \times (\mathbf{v} + \mathbf{E}_v)\|}; \\
 \hat{U}_{uvr} &= \left| \frac{[(\mathbf{u} + \mathbf{E}_u) \times \hat{\mathbf{U}}_v] \cdot (\mathbf{t} + \mathbf{E}_t) + (\hat{\mathbf{U}}_u \times (\mathbf{v} + \mathbf{E}_v)) \cdot (\mathbf{t} + \mathbf{E}_t) + ((\mathbf{u} + \mathbf{E}_u) \times (\mathbf{v} + \mathbf{E}_v)) \cdot \hat{\mathbf{U}}_t}{\|(\mathbf{u} + \mathbf{E}_u) \times (\mathbf{v} + \mathbf{E}_v)\|} \right|
 \end{aligned}$$

Es de destacar que el cálculo de la incertidumbre según la GUM a partir de la función de medición directamente en el método de los mínimos cuadrados también presenta la cuestión de evaluar los coeficientes de sensibilidad en la solución.

Puesto que, en general, ningún punto pertenece a la solución de los mínimos cuadrados, se usa una aproximación usando puntos cercanos [126].

El modelo propuesto considera el error como una cantidad, por lo que el valor medio del error se puede proponer como su mejor estimación. Además, la estimación de la incertidumbre podría hacerse mediante la incertidumbre media, considerándola como una variable aleatoria.

Una alternativa conservadora para la estimación de la incertidumbre como un valor de cantidad es sólo para dar el valor máximo alcanzado a través de las diferentes configuraciones. Sin embargo, teniendo al menos cuatro configuraciones, la ecuación (5.44) propone como evaluar la incertidumbre de la variabilidad del error como una cantidad.

Este mismo resultado, también, se analizó en la sección anterior, para muestras pequeñas de al menos de un tamaño de cuatro, y sobre la base de la distribución t (de Student) con n-1 grados de libertad.

En la parte experimental, se presentará una comparación de la cuantificación de esas opciones.

$$MZF_m = MZF + \frac{1}{c} \sum_{ii}^c E_i \pm 2 \sqrt{\frac{c-1}{c-3}} \frac{s}{\sqrt{c}} = MZF + E \pm \hat{U}_{k=2}; \quad (5.44)$$

$$\text{where } s = \sqrt{\frac{(E_i - \bar{E})^2}{c-1}}; E = \frac{1}{c} \sum_{ii}^c E_i$$

El hecho de que bajo el criterio de mínima zona se genere más de una solución para la evaluación del error puede considerarse una ventaja en lugar de un inconveniente, ya que permite el tratamiento estadístico del error como una cantidad a partir de una sola muestra (conjunto de puntos) y en una medición.

5.3.3. EL MODELO DE ERROR PARA LA MEDICIÓN DE ÁNGULO EN UNA CMM

La medición angular se basa geométricamente en la orientación de las características (líneas o superficies) que definen el ángulo (véase apartado 5.2).

La definición de ángulo en el espacio afín de puntos con una métrica (espacio euclidiano) es el coseno de dos vectores que definen las direcciones de referencia. Por lo tanto, el radián se considera una unidad suplementaria y la magnitud del ángulo se mide indirectamente a partir de relaciones métricas.

Los patrones de longitud se realizan en bloques patrones donde sus superficies opuestas son superficies de referencia de medida. De la misma manera, los patrones de ángulos son bloques que contienen superficies; Por lo tanto, la realización del ángulo implicará la determinación de la orientación de las superficies del bloque como primer paso. Sin embargo, en el caso de la proyección de dos planos de referencia sobre un plano, sus trazas se convierten en líneas rectas sobre él. Por lo tanto, las características de referencia para la medición de ángulos son dos rectas (Figura 5. 9).

En general, en el caso de los criterios de mínimos cuadrados, ningún punto pertenecerá a la línea de regresión, y la dirección será única a partir de un conjunto de datos. Además, bajo los criterios de tolerancia de mínima zona, tres puntos determinan la recta de la mínima zona, dos de ellos son colineales en la misma dirección de la solución (véase Figura 5. 8).

Como consecuencia, se pueden expresar, en las ecuaciones (5.45) – (5.47) con:

- α_m el ángulo medido.
- α , el ángulo desde la indicación de coordenadas del CMM.
- α_n , el ángulo corregido.

- E_α , el error
- $\hat{U}_\alpha$, la incertidumbre, respectivamente.

Figura 5. 9: Criterios de tolerancia de mínima zona de ángulo, (a) en el plano y (b) diédrico

$$\alpha_m = \alpha + E_\alpha \pm \hat{U}_\alpha = \alpha_n \pm \hat{U}$$

$$\cos \alpha_m = \frac{\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{v}_m}{\|\mathbf{u}_m\| \cdot \|\mathbf{v}_m\|} \approx \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}_n\| \cdot \|\mathbf{v}_n\|} + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}_v + \mathbf{E}_u \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}_n\| \cdot \|\mathbf{v}_n\|} \pm \frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{U}}_v + \hat{\mathbf{U}}_u \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}_n\| \cdot \|\mathbf{v}_n\|} \quad (5.45)$$

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{u} + \mathbf{E}_u \pm \hat{\mathbf{U}}_u = (x_2 - x_1 + E_{x12} \pm \hat{U}_{x12}, y_2 - y_1 + E_{y12} \pm \hat{U}_{y12});$$

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{v} + \mathbf{E}_v \pm \hat{\mathbf{U}}_v = (x_4 - x_3 + E_{x34} \pm \hat{U}_{x34}, y_4 - y_3 + E_{y34} \pm \hat{U}_{y34});$$

que proporciona:

$$U \ll 1 \quad (5.46)$$

y en un enfoque del primer orden

$$\begin{aligned} \cos \alpha_m &= \cos(\alpha_n \pm U_\alpha) = \cos(\alpha_n) \cos(U_\alpha) \mp \sin(\alpha_n) \sin(U_\alpha) = \\ &= [\cos(\alpha_n) \mp \sin(\alpha_n) \tan(U_\alpha)] \cos(U_\alpha) \approx \cos(\alpha_n) \mp \sin(\alpha_n) U_\alpha; \end{aligned}$$

$$\alpha_n = \cos^{-1} \left[\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{E}_v + \mathbf{E}_u \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u} + \mathbf{E}_u\| \cdot \|\mathbf{v} + \mathbf{E}_v\|} \right]; \quad E_\alpha = \alpha_n - \alpha; \quad (5.47)$$

$$\hat{U}_\alpha = \left| \frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{U}}_v + \hat{\mathbf{U}}_u \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u} + \mathbf{E}_u\| \cdot \|\mathbf{v} + \mathbf{E}_v\| \cdot \sin \alpha_n} \right|$$

Obsérvese que, en los criterios de mínima zona cada par de puntos colineales, en la dirección que define las rectas se determina unívocamente por u y v .

En el caso de los criterios de mínimos cuadrados, la incertidumbre asociada de la indicación podría ser abordada por la raíz de los residuos medios al cuadrado.

Se puede estimar de forma más apropiada a partir del modelo de medición y de la ley de propagación de la incertidumbre para cada línea de referencia, véase [126]. Sin embargo, al estimar directamente a partir de la indicación por los criterios de mínimos

cuadrados, no se puede incorporar a la medición ninguna separación directa del error de toda la variabilidad de la CMM.

La medición de un ángulo diedro implica la definición de dos planos de referencia, de vectores normales u , v . Se determinan previamente a partir del producto vectorial de los 2 vectores definidos por los cuatro puntos críticos de la solución de mínima zona de cada plano de la cara del bloque. A partir de las direcciones normales de cada plano se calcula el ángulo por la ecuación (5.48). En ambos casos, ángulo y ángulo diedro, se presume que pueden ser difícil a medir precisamente ángulos muy pequeños, cerca del cero, a partir de las ecuaciones anteriores (5.45) – (5.48).

La incertidumbre $\hat{U}_\alpha$ aumenta a medida que el α_m disminuye. En estos casos la resolución límite para discriminar un ángulo no puede ir más allá de la tolerancia de planitud de las caras que lo define:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_m &= \mathbf{u}_{m1} \times \mathbf{u}_{m2} = \mathbf{u} + \mathbf{E}_u \pm \hat{\mathbf{U}}_u \approx \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{E}_{2u} + \mathbf{E}_{u1} \times \mathbf{u}_2 \pm (\mathbf{u}_1 \times \hat{\mathbf{U}}_{u2} + \hat{\mathbf{U}}_{u1} \times \mathbf{u}_2) \\
\mathbf{u}_{m1} &= (x_2 - x_1 + E_{x12} \pm \hat{U}_{x12}, y_2 - y_1 + E_{y12} \pm \hat{U}_{y12}, z_2 - z_1 + E_{z12} \pm \hat{U}_{z12}) \\
\mathbf{u}_{m2} &= (x_4 - x_3 + E_{x34} \pm \hat{U}_{x34}, y_4 - y_3 + E_{y34} \pm \hat{U}_{y34}, z_4 - z_3 + E_{z34} \pm \hat{U}_{z34}) \\
\mathbf{u}_1 &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1); \quad \mathbf{u}_2 = (x_4 - x_3, y_4 - y_3, z_4 - z_3) \\
\mathbf{u} &= \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2; \quad \mathbf{E}_u = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{E}_{u2} + \mathbf{E}_{u1} \times \mathbf{u}_2; \quad \hat{\mathbf{U}}_u = |\mathbf{u}_1 \times \hat{\mathbf{U}}_{u2} + \hat{\mathbf{U}}_{u1} \times \mathbf{u}_2| \\
\mathbf{v}_m &= \mathbf{v}_{m1} \times \mathbf{v}_{m2} = \mathbf{v} + \mathbf{E}_v \pm \hat{\mathbf{U}}_v \approx \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{E}_{v2} + \mathbf{E}_{v1} \times \mathbf{v}_2 \pm (\mathbf{v}_1 \times \hat{\mathbf{U}}_{v2} + \hat{\mathbf{U}}_{v1} \times \mathbf{v}_2) \\
\mathbf{v}_{m1} &= (x_6 - x_5 + E_{x56} \pm \hat{U}_{x56}, y_6 - y_5 + E_{y56} \pm \hat{U}_{y56}, z_6 - z_5 + E_{z56} \pm \hat{U}_{z56}) \\
\mathbf{v}_{m2} &= (x_8 - x_7 + E_{x78} \pm \hat{U}_{x78}, y_8 - y_7 + E_{y78} \pm \hat{U}_{y78}, z_8 - z_7 + E_{z78} \pm \hat{U}_{z78}) \\
\mathbf{v}_1 &= (x_6 - x_5, y_6 - y_5, z_6 - z_5); \quad \mathbf{v}_2 = (x_8 - x_7, y_8 - y_7, z_8 - z_7) \\
\mathbf{v} &= \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2; \quad \mathbf{E}_v = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{E}_{v2} + \mathbf{E}_{v1} \times \mathbf{v}_2; \quad \hat{\mathbf{U}}_v = |\mathbf{v}_1 \times \hat{\mathbf{U}}_{v2} + \hat{\mathbf{U}}_{v1} \times \mathbf{v}_2| \\
\cos \alpha_m &= \frac{\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{v}_m}{\|\mathbf{u}_m\| \cdot \|\mathbf{v}_m\|} \approx \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}_{nm}\| \cdot \|\mathbf{v}_{nm}\|} + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}_v + \mathbf{E}_u \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}_{nm}\| \cdot \|\mathbf{v}_{nm}\|} \pm \frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{U}}_v + \hat{\mathbf{U}}_u \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}_m\| \cdot \|\mathbf{v}_m\|} = \\
&= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{E}_v + \mathbf{E}_u \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}_{nm}\| \cdot \|\mathbf{v}_{nm}\|} \pm \frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{U}}_v + \hat{\mathbf{U}}_u \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}_m\| \cdot \|\mathbf{v}_m\|} \\
\cos \alpha_m &= \cos(\alpha_{nm} \pm U_\alpha) \approx \cos(\alpha_{nm}) \mp \sin(\alpha_{nm}) U_\alpha; \\
\alpha_n &= \cos^{-1} \left[\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{E}_v + \mathbf{E}_u \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u} + \mathbf{E}_u\| \cdot \|\mathbf{v} + \mathbf{E}_v\|} \right]; \quad E_\alpha = \alpha_n - \alpha; \quad \hat{U}_\alpha = \left| \frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{U}}_v + \hat{\mathbf{U}}_u \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u} + \mathbf{E}_u\| \cdot \|\mathbf{v} + \mathbf{E}_v\| \cdot \sin \alpha_n} \right| \\
\alpha_m &= \alpha + E_\alpha \pm \hat{U}_\alpha = \alpha_n \pm \hat{U}_\alpha
\end{aligned} \tag{5.48}$$

5.3.4. MODELO DE ERROR DE UNA CMM DE REDONDEZ O CIRCULARIDAD

El error máximo permisible de longitud o error de palpado $E_{P,MPE}$ se estima mediante la norma 10360-5 midiendo el defecto de redondez de un artefacto calibrado de redondez conocida. El criterio de redondez ha sido, ordinariamente, el círculo de mínimos cuadrados [127] pero, según la ISO 1101 [128], la método de tolerancia de mínima zona es un criterio preferido para la tolerancia de forma. El error de palpado debe considerarse en medidas de desviación de forma. De la misma manera que se pretende expresar una medida de longitud en términos del mejor valor y un intervalo de incertidumbre, la expresión de redondez debe incluir su incertidumbre.

La redondez de las formas circulares, usualmente, será una pequeña fracción del diámetro. Aplicar los límites de error generales de la verificación de una CMM, según la ISO, directamente al error de redondez parece ser inútil y contraproducente. Por ejemplo, considerando una máquina CMM con un $E_{L,MPE}$ de $\pm 0,006$ mm y una repetibilidad de 0,003 mm. Se mide un círculo de 50 mm de diámetro con una redondez indicada de 0,005 mm (*output* de la máquina o calculada a partir de la mejor indicación de la coordenada). Dando un intervalo de confianza a la redondez de 0,005 mm, que obviamente no se puede basar en el $E_{L,MPE}$, $\pm 0,006$ mm, esto puede llevar a la conclusión de que el valor más probable es 0,005 mm y el intervalo de error estimado es tan grande que difícilmente se pueda confiar en los resultados de la CMM.

Un segundo enfoque para transmitir la medición de redondez es dar la indicación de la CMM después de la corrección de sesgo, agregando la repetibilidad de la máquina como una estimación de la incertidumbre (además de otras posibles contribuciones de temperatura, operador, etc.). Al menos, sería posible ofrecer el valor indicado con cierta confianza basándose en una configuración adecuada de la máquina, en la repetibilidad de la CMM y en las condiciones de repetibilidad de la medición.

De acuerdo con la ISO 1100, la redondez de una característica es la diferencia mínima de los radios de dos círculos concéntricos que confinan la característica entre ellos. La característica es la superficie desde la que se evalúa la tolerancia de forma.

En las máquinas digitales, la característica se muestrea por contacto utilizando una sonda y el palpado puede ser de forma continua o discreta. A partir de este conjunto finito de puntos, el problema de redondez de mínima zona se determina normalmente por cuatro puntos (Figura 5.10) y contiene al menos un punto en los círculos de la solución externa e interna que definen la mínima zona [129].

Indicando $p_1(x_1, y_1)$ y $p_2(x_2, y_2)$, estos dos puntos, mediante su respectiva indicación de las coordenadas por la CMM, la redondez medida por mínima zona MZR_m puede expresarse utilizando la ecuación (5.49), cuyo centro de solución es (a, b).

$$MZR_m = MZR + E \pm \hat{U} = \sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2} - \sqrt{(x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2} + E \pm \hat{U} \quad (5.49)$$

Obsérvese que el modelo de medición también se basa en la distancia o métrica L2 entre los puntos de los círculos en solución y el centro (a, b).

Figura 5.10: Redondez bajo el criterio de tolerancia de mínima zona, (a) configuración (2-2); (B) configuración (3-1).

Por lo tanto, estas distancias, con sus respectivas estimaciones de error en el modelo y su efecto sobre el modelo completo o la propagación de errores, pueden expresarse por la ecuación (5.50).

En este caso, el error E_{x1a} no es la realización de una longitud física medida y alineada a lo largo del eje X. El centro es un punto calculado; por lo tanto, el error E_{x1a} y la correspondiente estimación de incertidumbre U_x se aplican con el mismo formalismo vectorial, pero sin una realización física que fue representada en el modelo de longitud anterior.

$$\begin{aligned}
 MZR + E \pm \hat{U} &= \\
 &= \sqrt{[(x_1 - a) + E_{x1a} \pm \hat{U}_{x1a}]^2 + [(y_1 - b) + E_{y1b} \pm \hat{U}_{y1b}]^2} - \sqrt{[(x_2 - a) + E_{x2a} \pm \hat{U}_{x2a}]^2 + [(y_2 - b) + E_{y2b} \pm \hat{U}_{y2b}]^2} \\
 &= [(x_1 - a + E_{x1a})^2 + (y_1 - b + E_{y1b})^2 \pm 2(x_1 - a + E_{x1a})\hat{U}_{x1a} \pm 2(y_1 - b + E_{y1b})\hat{U}_{y1b} \pm \hat{U}_{x1a}^2 \pm \hat{U}_{y1b}^2]^{1/2} + \\
 &\quad - [(x_2 - a + E_{x2a})^2 + (y_2 - b + E_{y2b})^2 \pm 2(x_2 - a + E_{x2a})\hat{U}_{x2a} \pm 2(y_2 - b + E_{y2b})\hat{U}_{y2b} \pm \hat{U}_{x2a}^2 \pm \hat{U}_{y2b}^2]^{1/2}
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

Considerando la expansión de Taylor, ecuación (5.51), y proporcionando una pequeña incertidumbre $\hat{U}$ con respecto a los radios, la expresión tiene el siguiente resultado ecuaciones (5.52) - (5.54):

$$\varepsilon \ll f \rightarrow \sqrt{(f + \varepsilon)} = \sqrt{f} \left[1 + \frac{\varepsilon}{f} \right]^{1/2} \approx \sqrt{f} \left[1 + \frac{\varepsilon}{2f} \right] = \sqrt{f} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{f}} \tag{5.51}$$

$$\hat{U}^2 \ll \hat{U} \ll \sqrt{(x - a + E_{xa}) + (y - b + E_{yb})}; \Rightarrow \tag{5.52}$$

$$\begin{aligned}
& \left[(x-a+E_{xa})^2 + (y-b+E_{yb})^2 \pm 2\hat{U}_{xa}(x-a+E_{xa}) \pm 2\hat{U}_{yb}(y-b+E_{yb}) \right]^{1/2} = \\
& \sqrt{(x-a+E_{xa})^2 + (y-b+E_{yb})^2} \left[1 \pm \frac{2\hat{U}_{xa}(x-a+E_{xa}) + 2\hat{U}_{yb}(y-b+E_{yb})}{\left[(x-a+E_{xa})^2 + (y-b+E_{yb})^2 \right]} \right]^{1/2} \approx \\
& \approx \sqrt{(x-a+E_{xa})^2 + (y-b+E_{yb})^2} \left[1 \pm \frac{2\hat{U}_{xa}(x-a+E_{xa}) + 2\hat{U}_{yb}(y-b+E_{yb})}{2\left[(x-a+E_{xa})^2 + (y-b+E_{yb})^2 \right]} \right] = \quad (5.53) \\
& = \sqrt{(x-a+E_{xa})^2 + (y-b+E_{yb})^2} \pm \frac{\hat{U}_{xa}(x-a+E_{xa}) + \hat{U}_{yb}(y-b+E_{yb})}{\sqrt{(x-a+E_{xa})^2 + (y-b+E_{yb})^2}} = \\
& = \sqrt{(x-a+E_{xa})^2 + (y-b+E_{yb})^2} \pm \hat{\mathbf{U}}_{pc} \cdot \mathbf{r}_{pc}
\end{aligned}$$

Para un círculo de centro $c=(a,b)$ y un punto del círculo $p=(x,y)$, donde:

$$\hat{\mathbf{U}}_{pc} = (\hat{U}_{xa}, \hat{U}_{yb}); \mathbf{r}_{pc} = \frac{(x-a+E_{xa}, y-b+E_{yb})}{\sqrt{(x-a+E_{xa})^2 + (y-b+E_{yb})^2}} \quad (5.54)$$

Además, cuando el error E es mucho menor que los radios, se obtiene las ecuaciones (5.55) – (5.56):

$$\begin{aligned}
& E^2 \ll E \ll \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \\
& \sqrt{(x-a+E_{xa})^2 + (y-b+E_{yb})^2} \approx \sqrt{(x-a)^2 + 2E_{xa}(x-a) + (y-b)^2 + 2E_{yb}(y-b)} \approx \\
& \approx \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \frac{2E_{xa}(x-a) + 2E_{yb}(y-b)}{2\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \mathbf{E}_{pc} \cdot \mathbf{R}_{pc} \quad (5.55)
\end{aligned}$$

Para un círculo de centro $c=(a,b)$ y un punto del círculo $p=(x,y)$, donde:

$$\mathbf{E}_{pc} = (E_{xa}, E_{yb}); \mathbf{R}_{pc} = \frac{(x-a, y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \quad (5.56)$$

Obsérvese que el cálculo de la redondez se basa en dos puntos críticos, denotados con 1,2, en los círculos interno y externo respectivamente (Figura 5.10). Finalmente, considerando las ecuaciones (5.53) – (5.56) con la ecuación (5.50), se puede expresar el MZR por la ecuación (5.57):

$$\begin{aligned}
& MZR_{m12} = MZR_{12} + E_{12} \pm \hat{U}_{12} = \\
& = \left[\sqrt{(x_1-a)^2 + (y_1-b)^2} - \sqrt{(x_2-a)^2 + (y_2-b)^2} \right] + (\mathbf{E}_{1c} \cdot \mathbf{R}_{1c} - \mathbf{E}_{2c} \cdot \mathbf{R}_{2c}) \pm (\hat{\mathbf{U}}_{1c} \cdot \mathbf{r}_{1c} - \hat{\mathbf{U}}_{2c} \cdot \mathbf{r}_{2c}) \quad (5.57)
\end{aligned}$$

En un enfoque del primer orden:

$$\begin{aligned} E_{12} &= \mathbf{E}_{1c} \cdot \mathbf{R}_{1c} - \mathbf{E}_{2c} \cdot \mathbf{R}_{2c} \quad \text{por las ecuaciones (5.55)-(5.56)} \\ \hat{U}_{12} &= \left| \hat{\mathbf{U}}_{1c} \cdot \mathbf{r}_{1c} - \hat{\mathbf{U}}_{2c} \cdot \mathbf{r}_{2c} \right| \quad \text{por las ecuaciones (5.53)-(5.54)} \end{aligned} \quad (5.58)$$

El modelo de redondez propuesto expresa el resultado de la medición por el cálculo nominal a partir de la indicación de la CMM, corregida por la diferencia de la corrección de la longitud de los radios. Esta corrección es la proyección vectorial de la corrección de longitud $\mathbf{E}$ en la dirección de los radios $\mathbf{R}$ indicados. Finalmente, el intervalo de confianza estimado para el error es también la diferencia de la proyección vectorial del intervalo de longitud de los radios de confianza $\hat{\mathbf{U}}$ proyectado en la dirección de los radios corregidos $\mathbf{r}$.

Al igual que el modelo de planitud, se pueden utilizar dos criterios para los resultados de redondez: el criterio de mínimos cuadrados y el criterio de tolerancia de mínima zona, pero los puntos críticos en los círculos de envolvente también serán, en general, diferentes: cuatro en el criterio de tolerancia de mínima zona, y dos en el caso de los mínimos cuadrados, con diferentes resultados esperados. A partir del hecho de que la expresión de la tolerancia de mínima zona puede obtenerse a partir de cuatro puntos, dos en el círculo envolvente exterior y dos en el interior, existen cuatro estimaciones posibles diferentes para la estimación del error y de la incertidumbre del conjunto de datos original. Como consecuencia directa de un conjunto de datos, la mejor estimación de la redondez por la ecuación (5.59) puede ser propuesta.

El MZR nominal es el mismo valor para las cuatro muestras, pero no para el error y la incertidumbre. Bajo las mismas consideraciones anteriores del modelo de planitud, se propone el error medio de las diferentes configuraciones ($c=4$) como la mejor estimación para el error, y se deriva de su variabilidad la mejor estimación de la incertidumbre.

$$MZR_m = MZR + \frac{1}{c} \sum_{ii} E_i \pm 2 \sqrt{\frac{c-1}{c-3}} \frac{s}{\sqrt{c}} = MZR + E \pm \hat{U}_{k=2}; \quad (5.59)$$

$$\text{Donde } s = \sqrt{\frac{(E_i - \bar{E})^2}{c-1}}$$

5.3.5. INTERPRETACIÓN DEL ERROR E INCERTIDUMBRE EN EL MODELO

El modelo de error por i-eje $E_i = A_i + B_i L$ admite una interpretación física de sus contribuyentes. Como se ha mencionado en el apartado 5.3, la ordenada en el origen A , en el modelo ISO de verificación de una CMM, $\pm E_{L,MPE} = \pm(A + B \cdot L)$, es el límite de predicción o error esperado máximo con ($L \rightarrow 0$). Por lo tanto, en el límite debe estar el error de la coordenada de un punto en una hipotética medición bilateral. En consecuencia, ese error, debe ser del mismo orden de magnitud de la repetibilidad (medido con un palpado de un lado o unilateral en este caso). Esto se demostrará en la parte experimental.

En el enfoque de la ISO 10360-2 de verificación de máquina se aplica una corrección media nula a la indicación de las coordenadas de la CMM, después del error sistemático o de la corrección de sesgo por parte del fabricante de la máquina. Esto debe significar que después de la corrección de cualquier sesgo conocido la determinación de las coordenadas en cualquier dirección de sondeo tiene error nulo. Como resultado, en una aproximación de primer orden la indicación es exacta. Este enfoque es válido considerando la corrección nula de un gran promedio de diferentes muestras de medición en todas las direcciones posibles. Desafortunadamente, un mensurando real requiere medir sólo a lo largo de una dirección particular, es decir, según la normal a la superficie. En el modelo propuesto por eje A_i no es el límite de predicción, sino la ordenada en el origen del modelo lineal, o el error medio con $L = 0$ midiendo en la dirección i . Por lo tanto, además del error medio por eje, deben considerarse los límites de predicción de la variabilidad del error que es una contribución a la incertidumbre dada por $\hat{U}_i$. La interpretación de A_i incluye los efectos del error de paralelismo de los bloques de calibración y el error de forma de la sonda.

La realización de longitud del bloque de calibración es la distancia desde cualquier punto de una cara a la cara opuesta. El error de paralelismo de las caras tiene límites que son especificados por la ISO 3650, pero el plano de regresión de referencia puede ser sesgado cuando se utiliza una pequeña muestra de puntos, cuando no están distribuidos uniformemente alrededor del valor asignado del bloque patrón. Otra contribución a A_i es el error de forma de la sonda. La corrección de la sonda considera el desplazamiento del centro, y en una medición bilateral ese error se anula prácticamente en una técnica de inversión muy básica. Sin embargo, la imperfección de la superficie de contacto de la sonda en cada dirección con respecto a la esfera media perfecta de la punta está limitada, pero no corregida, por el error de forma de la sonda. Como consecuencia, representa un sesgo directo dependiendo de la dirección de medición.

Obsérvese que la alineación cuidadosa del bloque con el eje físico debe ser corregida por la normal a la superficie de referencia, de manera que la medición se realice de acuerdo con la realización de la longitud que representa el bloque patrón, siguiendo técnicas similares de la ISO 10360-2. Además, el valor medio de medición de una cara con respecto a la otra se promedia en un método inverso que no sólo compensa el ligero error de paralelismo [130] de las caras del bloque de calibración, sino que también anula su incertidumbre [131].

La pendiente del modelo por el i -eje B_i admite la interpretación de un error de ángulo global debido a la desalineación de la escala y al desplazamiento del carro de la misma máquina CMM. El error volumétrico (hasta 21 tipos de contribuyentes) puede clasificarse en términos lineales, términos angulares y términos de escuadra o de perpendicularidad entre ejes [132]. Los términos angulares tienen su origen principal en el error de Abbé, debido a la distancia de la sonda a la escala en su desplazamiento, que puede ser abordado por un modelo lineal [132]. Los errores de cuadratura entre ejes también se propagan linealmente con la longitud de medición [97]. La pendiente del error

frente a la longitud medida por i-eje es B_i . El error angular crece linealmente con la longitud de medición. Una expresión general del error angular se da en [132]. Esto se puede adaptar a nuestra formulación mediante la ecuación (5.60), donde θ denota el error angular del paso por cada eje, y $\mathbf{D}$ es la matriz de las distancias de Abbé del cabezal de medición a la escala del eje:

$$\mathbf{B} = \mathbf{D} \cdot \theta; \quad \begin{bmatrix} B_x \cdot L_x \\ B_y \cdot L_y \\ B_z \cdot L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -D_y & D_z \\ D_x & 0 & -D_z \\ -D_x & D_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

Después de considerar la variabilidad media explicada del modelo lineal, la variabilidad no explicada en el modelo de regresión puede ser incorporada en la incertidumbre a través de su varianza. Este es el enfoque utilizado cuando la estimación general EL_{MPE} se toma como una primera estimación de la incertidumbre de la máquina [104], en condiciones de repetibilidad.

En el caso del modelo propuesto, la incertidumbre no explicada es sensiblemente menor porque el error medio se incorpora al modelo de evaluación de la medición [122].

Para una estimación adecuada de la incertidumbre, en otras condiciones válidas del rango operacional de la CMM, todos los demás factores que introducen variabilidad deben variar en la experimentación [104], [133]. Teniendo en cuenta la variabilidad del error de una variable aleatoria, y debido a la interdependencia real del hardware de la CMM y su efecto potencial en el error de las coordenadas, se puede esperar covarianza en el error entre ejes. En consecuencia, cuatro de las siete posiciones del ensayo que utilizan la prueba de verificación ISO 10360-2 son direcciones diagonales en el cubo del volumen de medición. Para el modelo propuesto, que sólo evalúa las varianzas por eje, la cuestión es si la variabilidad del error es infravalorada o no. En la parte experimental se abordará este tema con resultados positivos que apoyan el modelo propuesto.

Considerando la incertidumbre por eje estimada por el modelo propuesto, la incertidumbre por la ley de propagación de la incertidumbre también puede estimarse bajo la hipótesis inicial de variables independientes por las ecuaciones (5.61) – (5.63).

Es notable que el modelo de incertidumbre resultante del modelo de error de longitud U no dependa de la longitud misma, sino de la dirección de medición (ecuación (5.64)). Esto significa que la incertidumbre no crece con la longitud por eje en un enfoque de primer orden. Esto está bien de acuerdo con el comportamiento homoscedástico del error que se ha encontrado en los resultados experimentales de la CMM, donde la variabilidad del error por eje es aproximadamente constante. Hay que tener en cuenta que la independencia de $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ podría ser igual cuando sólo un eje varía a la vez. La independencia de x_1 y x_2 , por ejemplo, se apoya en las siguientes buenas prácticas de medición bilateral, y sigue las recomendaciones de la ISO 10360-2.

$$u^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \quad (5.61)$$

Para variables independientes, covarianzas nulas se puede expresar la incertidumbre expandida directamente:

$$U^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} U(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 U^2(x_i) \quad (5.62)$$

Con la expresión vectorial de una longitud, el ángulo de elevación y del ángulo azimutal

$$\vec{L} = L \cos \varphi \cos \theta \cdot \vec{i} + L \cos \varphi \sin \theta \cdot \vec{j} + L \sin \varphi \cdot \vec{k};$$

$$\begin{aligned} L^2 &= L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = (L \cos \varphi \cos \theta)^2 + (L \cos \varphi \sin \theta)^2 + (L \sin \varphi)^2 = \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2; \end{aligned} \quad (5.63)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial L}{\partial x_1} \right)^2 &= \left(-\frac{\partial L}{\partial x_2} \right)^2 = (\cos \varphi \cos \theta)^2 = \left(\frac{(x_1 - x_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} \right)^2; \\ \left(\frac{\partial L}{\partial y_1} \right)^2 &= \left(-\frac{\partial L}{\partial y_2} \right)^2 = (\cos \varphi \sin \theta)^2 = \left(\frac{(y_1 - y_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} \right)^2; \end{aligned} \quad (5.64)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial z_1} \right)^2 = \left(-\frac{\partial L}{\partial z_2} \right)^2 = \sin^2 \varphi = \left(\frac{(z_1 - z_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} \right)^2;$$

$$U^2 = 2(\cos \varphi \cos \theta)^2 \cdot U(x)^2 + 2(\cos \varphi \sin \theta)^2 \cdot U(y)^2 + 2\sin^2 \varphi \cdot U(z)^2$$

La incertidumbre de la ubicación de un punto se puede expresar según la GUM de forma vectorial por la matriz de covarianza [134]. Bajo la hipótesis de que los ejes de la CMM muestran las principales variaciones independientes, así como las direcciones de los ejes de la CMM son los valores propios de la matriz de covarianza, la incertidumbre de un punto puede ser compuesta por la ecuación (5.65). La incertidumbre medida a través de los tres i-ejes principales, $U(i)$ se tiene en cuenta en la ecuación (5.65). Obsérvese que la hipótesis de que los ejes de la CMM son básicamente vectores propios de la matriz de covarianza es equivalente a inferir que la covarianza entre ejes es despreciable en un enfoque de primer orden, como discutido anteriormente, de modo que la agregación de la variabilidad por eje explica la mayor parte de la variabilidad total. Una vez más, esto se verificará experimentalmente. Esto no impide que, al medir una característica (plano, círculo, etc.), haya una notable contribución de covarianza de incertidumbre procedente del modelo de medición geométrica de la entidad, utilizada como geometría de sustitución (véase, por ejemplo, [126], [129]).

$$\begin{aligned}
U^2 &= 2(\cos \varphi \cos \theta)^2 \cdot U(x)^2 + 2(\cos \varphi \sin \theta)^2 \cdot U(y)^2 + 2\sin^2 \varphi \cdot U(z)^2 = \\
&= \left\| \left(\sqrt{2} U(x), \sqrt{2} U(y), \sqrt{2} U(z) \right) \cdot (\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi) \right\|^2 = \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}\|^2
\end{aligned} \quad (5.65)$$

La primera expresión se puede comparar con la incertidumbre derivada de la medida de la distancia entre dos puntos por nuestro modelo propuesto (ecuación (5.66)):

$$\begin{aligned}
\hat{U} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} &= \frac{\hat{U}_x(A_x + (B_x + 1) \cdot L_x) + \hat{U}_y(A_y + (B_y + 1) \cdot L_y) + \hat{U}_z(A_z + (B_z + 1) \cdot L_z)}{\sqrt{(A_x + (B_x - 1) \cdot L_x)^2 + (A_y + (B_y - 1) \cdot L_y)^2 + (A_z + (B_z - 1) \cdot L_z)^2}} \\
\mathbf{n} &= (\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi) = \\
&= \frac{(A_x + (B_x + 1) \cdot L_x, A_y + (B_y + 1) \cdot L_y, A_z + (B_z + 1) \cdot L_z)}{\sqrt{(A_x + (B_x - 1) \cdot L_x)^2 + (A_y + (B_y - 1) \cdot L_y)^2 + (A_z + (B_z - 1) \cdot L_z)^2}}
\end{aligned} \quad (5.66)$$

En ambos casos, la incertidumbre es la contribución de la incertidumbre U proyectada en la dirección de medición $\mathbf{n}$. La incertidumbre estándar expandida $\hat{U}_i$ de la longitud por la dirección i puede expresarse directamente a partir de la incertidumbre expandida del punto $U(i)$ en la dirección i por la ecuación (5.67), también evidente por los coeficientes de sensibilidad de la ecuación (5.64):

$$\text{Si } L_i = i_2 - i_1 \text{ con } i_2 > i_1; \quad \hat{U}_i^2 = (1)^2 U^2(i) + (-1)^2 U^2(i) = 2U^2(i); \quad i = \{x, y, z\} \quad (5.67)$$

$$\text{Así que: } \hat{U}_x = \sqrt{2}U(x); \quad \hat{U}_y = \sqrt{2}U(y); \quad \hat{U}_z = \sqrt{2}U(z)$$

Por lo tanto, la formulación de la incertidumbre del modelo propuesto por eje para la longitud es la misma que la obtenida a partir de la evaluación según la GUM de los dos puntos que definen la longitud, siempre que la incertidumbre por las tres direcciones principales sean las tres contribuciones independientes principales (Valores propios de la matriz de covarianza) en cada punto. Por esta razón se puede suponer que la variabilidad inexplicada del error en el modelo de regresión del apartado 5.3 es la incertidumbre.

En la parte experimental, los resultados experimentales de la implementación del modelo demostrarán la utilidad y el grado de cumplimiento de este enfoque para mejorar la expresión de las diferentes características de medición por una CMM.

5.4. MAPEO EXPERIMENTAL DEL ERROR DE LA CMM

5.4.1. MAPEO DEL ERROR POR EJE

Para la evaluación experimental de errores se ha utilizado la misma máquina CMM descrita en el apartado 5. 2.1 de este capítulo. Según la norma ISO 10360-2, se emplean artefactos calibrados para mediciones de longitudes bidireccionales, en particular un juego de bloques calibrados de grado 0 hasta el bloque de 100 mm de longitud nominal y de grado 2 a partir del bloque de 125 mm de longitud nominal. La incertidumbre de esas mediciones está por debajo de la resolución de la CMM, de modo que las desviaciones de la longitud calibrada se asignarán al error de medición.

La medición se desarrolla bajo condiciones de temperatura controlada y estable a 20 ± 1 ° C y las pruebas han sido realizadas por el mismo operador.

La CMM se ha configurado de acuerdo con las instrucciones del fabricante, con el enfoque estándar de realizar la medición después de compensar cualquier sesgo conocido.

La prueba incluye cinco bloques patrones diferentes de 50 mm hasta 300 mm de longitud nominales que cubren al menos el 66% del campo de medición de la CMM por cada eje. Los bloques se han colocado en la mitad del volumen de la CMM (Figura 5. 11).

Figura 5. 11: Verificación de la CMM mediante la medición de un conjunto de bloques patrón calibrados.

Se palpa un conjunto de cinco puntos en cada lado de cada bloque, en una medición bidireccional, para los tres ejes X, Y e Z, con cinco repeticiones. Se toman un total de 50 mediciones por bloque medido agrupadas en cinco series de mediciones bilaterales. Este agrupamiento sigue el proceso de calibración del bloque patrón, donde el valor asignado del bloque se obtiene a partir de cinco puntos medidos en una cara, con referencia a la cara opuesta.

En el caso del eje Z, donde los bloques están colocados de pie sobre la mesa de granito de la CMM, la segunda cara de referencia, en la técnica de medición bilateral, es la propia mesa de granito. La prueba de verificación ISO, normalmente, sólo requiere tres repeticiones para la verificación de la repetibilidad.

Se ha utilizado, para las mediciones, una sonda Renishaw de longitud mínima compatible con la medición del conjunto de bloques y con un diámetro de la punta máximo siguiendo las buenas prácticas y las recomendaciones del fabricante de la CMM.

Los resultados agregados de la verificación de los bloques calibrados alineados con cada eje de la máquina se muestran en la Figura 5. 12. El modelo de regresión lineal global produce un error medio E de $2,95 \mu\text{m}$. Incluso cuando la verificación sólo incluye los tres ejes principales, el resultado de error general $EM_{PE,L}$ de $6,7\mu\text{m}$ (límites de predicción a 95% de confianza) está en estrecha concordancia con la verificación de la máquina en el momento de la adquisición ($\pm 6,7\mu\text{m}$ sobre 300mm) y a la verificación de la máquina desarrollada en el apartado 5.2.3 [103], ambos siguiendo la aplicación directa de la prueba de verificación estándar ISO 10360-2. Esta prueba ISO evalúa un modelo global de error máximo admisible en las condiciones nominales de funcionamiento de la máquina y sin distinción de error por cada eje.

Figura 5. 12: Modelo de error acumulado de la CMM.

En el modelo de regresión, la longitud de los bloques de medida es la variable conocida y el error es la variable aleatoria. El gráfico residual muestra un spread creciente con la longitud de medición, por lo que se viola la suposición básica del modelo de regresión de la varianza uniforme a través de la variable conocida (homocedasticidad). La prueba de verificación ISO asume que la dispersión del error aleatorio puede crecer por la longitud de medición (heterocedástica) cuando se propone el $EM_{PE,L} = A + BL$ como uno de los posibles modelos de error para la máquina. Incluso cuando no viene indicado en la norma ISO 10360-2, esta debilidad de utilizar la técnica de regresión podría ser superada ponderando la medida con la inversa de su varianza [135]. De hecho, este

comportamiento de la incertidumbre de crecer con el crecer de la longitud medida es también el modelo básico de incertidumbre de un conjunto de bloques patrones calibrados. La propagación, creciente con la longitud, puede ser el signo de un comportamiento agregado que la prueba de verificación ISO no separa, agrupando los resultados de los tres ejes.

La prueba de verificación de una CMM, bajo el modelo propuesto, sólo verifica los tres ejes independientemente. Por esta razón, la variabilidad o propagación de las mediciones no tiene el claro aspecto heteroscedástico que en el ensayo masivo muestra: los residuos no muestran una tendencia funcional a crecer con longitud, véanse las Figura 5. 13, Figura 5. 14, Figura 5. 15.

La regresión por eje refleja el hecho que el error medio es aproximadamente función lineal de la longitud de medición. Esta creciente y subyacente propagación con la longitud es similar porque en una CMM una fuente principal de error es el error angular de la máquina [96]. Estos errores se capturan considerando independientemente cada error de eje.

Obsérvese que, los bloques de medida son de grado 0 hasta el bloque de longitud nominal de 150 mm y de grado 2 a partir del bloque de longitud nominal de más de 150 mm. Sin embargo, la variabilidad de longitud asociada a la diferencia de grado de los bloques patrones está por debajo de la resolución de la CMM, por lo que no se aprecia una evidencia de la influencia de la calidad de los bloques en los resultados experimentales.

Modelo lineal: $E(Lx) = Ax + Bx \times Lx$ (μm) con Lx (mm) Coeficientes (Con nivel de confianza del 95%): $Bx = -1.815 \times 10^{-2}$ (-2.316×10^{-2} , -1.314×10^{-2}) $Ax = 5.138$ (4.153, 6.122) Predicción límites promedio sobre rango (línea discontinua) $\hat{U}_x = \pm 2.32 \mu m$	Bondad de ajuste: SSE: 2.697×10^{-5} R-cuadrado: 0.7095 Ajuste R-cuadrado: 0.6969 RMSE: 0.001083
---	---

Figura 5. 13: Modelo de error para el eje X de la CMM.

En la Figura 5. 13, sólo se representan los resultados para el eje X. La suma de errores de los cuadrados SSE es menor que para el modelo masivo.

Los límites de predicción para el error son $\pm 2,32 \mu\text{m}$ con una probabilidad del 95%. El coeficiente R-cuadrado indica que hasta el 70% de la variabilidad se explica por la línea de regresión. Esto significa que una nueva medida, por el eje X, estará dentro de ese intervalo alrededor del valor del modelo con un nivel de confianza del 95%. Se obtiene una desviación o una repetibilidad máxima de $4,5\mu\text{m}$ para el bloque de 300 mm.

Con el mismo significado de la Figura 5. 13, en la Figura 5. 14 se representan los resultados correspondientes al eje Y. En este caso, el modelo lineal explica aproximadamente el 75% de variabilidad y los límites de predicción son $\pm 2,93\mu\text{m}$. La repetibilidad máxima en el eje Y es de $3,95\mu\text{m}$.

Los resultados de la verificación por el eje Z se representan en la Figura 5. 15.

El modelo muestra una relación bastante constante del error promedio sobre el rango Z, en comparación con los ejes X e Y. Como consecuencia, R-cuadrado es bajo y muestra una variabilidad alrededor de del 50% como muestra la línea de regresión. El SSE muestra una bondad similar del modelo y los límites de predicción son $\pm 1,53\mu\text{m}$. Se obtiene una repetibilidad máxima de $2,23\mu\text{m}$.

Además, debemos tener en cuenta que los valores de R-cuadrado ajustado son cercanos a los de R-cuadrado en la regresión por eje, por lo que los puntos muestreados tienen una contribución efectiva a R-cuadrado. Por el contrario, en el modelo masivo el R-cuadrado ajustado es incluso negativo, por lo que la agregación de todos los puntos en un modelo de regresión en masa no contribuye al modelo de regresión propuesto.

Modelo lineal:

$$E(Ly) = Ay + By \times Ly (\mu\text{m}) \text{ con } Ly (\text{mm})$$

Coeficientes (Con nivel de confianza del 95%):

$$By = 2.563 \times 10^{-2} \quad (1.933 \times 10^{-2}, 3.193 \times 10^{-2})$$

$$Ay = 2.015 \quad (0.7768, 3.252)$$

Predicción límites promedio sobre rango (línea discontinua) $\hat{U}_y = \pm 2.93 \mu\text{m}$

Bondad de ajuste:

$$\text{SSE: } 4.264 \times 10^{-5}$$

$$\text{R-cuadrado: } 0.755$$

$$\text{Ajuste R-cuadrado: } 0.7443$$

$$\text{RMSE: } 0.001362$$

Figura 5. 14: Modelo de error por el eje Y de la CMM.

Modelo lineal:

$$E(L_z) = A_z + B_z \times L_z \text{ (}\mu\text{m)} \text{ with } L_z \text{ (mm)}$$

Coefficientes (Con nivel de confianza del 95%):

$$B_z = -7.192 \times 10^{-3} \text{ } (-1.049 \times 10^{-2}, -3.897 \times 10^{-3})$$

$$A_z = 1.527 \text{ (}0.8742, 2.181\text{)}$$

Predicción límites promedio sobre rango (línea discontinua) $\hat{U}_Z = \pm 1.53 \mu\text{m}$

Bondad de ajuste:

$$\text{SSE: } 1.107 \times 10^{-5}$$

$$\text{R-cuadrado: } 0.4822$$

$$\text{Ajuste R-cuadrado: } 0.4587$$

$$\text{RMSE: } 0.0007094$$

Figura 5. 15: Modelo de error por el eje Z de la CMM.

Hay dos puntos metodológicos sobre el modelo anterior. En primer lugar, la medición bilateral siguiendo las recomendaciones de ISO 10360 sobre las caras de un bloque patrón de medida se compensa adecuadamente contra una ligera desalineación del mismo bloque con el eje de medición y los cinco puntos de cada cara determinan un plano de referencia de mínimos cuadrados a los puntos de la cara opuesta, siguiendo la recomendación de ISO 10360-2 Apéndice C. Este criterio de mínimos cuadrados que promedia el plano de la cara del bloque está de acuerdo con la norma ISO de referencia y su comportamiento ha sido probado experimentalmente en comparación con el criterio de tolerancia de mínima zona [136], con buenos resultados consistentes.

Un segundo punto de interés es el significado de la predicción global de los límites del error para una nueva observación o medida única. Esa incluirá la estimación de la variabilidad por el error cuadrático medio para $n-2$ grados de libertad, pero también el error causado por la varianza de la pendiente de la línea de regresión, amplificado por la distancia del valor al baricentro del conjunto de datos y la variación del baricentro [137].

La formulación de los límites de predicción P para el modelo de regresión ($E=A+Bx$), con un conjunto de datos de tamaño n , es dada por la ecuación (5.68), siendo t el valor crítico al 95% de confianza de la función de probabilidad t de Student con $n-2$ grados de libertad.

$$P = y \pm t \sqrt{\frac{SSE}{n-2} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{L - \bar{L}}{S_{xx}} \right)}; \quad (5.68)$$

$$\text{where } SSE = \sum (E_i - A - B \cdot L_i)^2; S_{xx} = \sum (L - \bar{L})^2; \bar{L} = \frac{\sum L_i}{n};$$

5.4.2. ESTIMACIÓN DE LA REPETIBILIDAD DE LA CMM

Los resultados de repetibilidad expresados como la desviación estándar de los resultados deben incorporarse a las contribuciones de la incertidumbre [138]. Sin embargo, la ISO 10360-2 define R_0 como el rango (diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo). En el caso de un conjunto de medidas de artefactos no calibrados, el valor medio no es una estimación del valor real debido a la presencia del error. Cuando se miden artefactos calibrados, la diferencia entre el valor medio de las mediciones y el valor asignado al bloque patrón calibrado puede considerarse como una corrección de sesgo. En consecuencia, la desviación estándar de las mediciones bajo condiciones de repetibilidad es una contribución a la incertidumbre. Las condiciones de repetibilidad incluyen el mismo hardware experimental (CMM y bloques patrones), el mismo operador que toma las medidas, utilizados bajo el mismo procedimiento operativo de medición, en el mismo lugar y con repeticiones en un período de tiempo corto.

Figura 5. 16: Repetibilidad de la CMM, R_0 , por eje.

Bajo las condiciones nominales de funcionamiento de la CMM, la norma ISO 10360-2 especifica tres repeticiones, sólo para fines de verificación. Sobre la base de un número tan reducido de muestras, tres, una estimación directa de la desviación estándar de la media podría incluir una gran desviación [121], [139]. En nuestra prueba, para determinar 5 valores de error se ha efectuado hasta 50 mediciones para cada longitud utilizada en el ensayo, que se presume ser más representativo para el comportamiento de

la CMM. En la prueba de verificación de las Figura 5. 13, Figura 5. 14, Figura 5. 15 la repetibilidad máxima fue de $4,5\mu\text{m}$ y la media por ejes para las diferentes longitudes ha sido de $2,7\mu\text{m}$, Figura 5. 16.

5.4.3. ESTIMACIÓN DEL ERROR DE PALPADO DE LA CMM

Si bien la estimación del error de longitud es una aplicación a la medición de la distancia o del diámetro, en general el error de palpado debe incluirse en las estimaciones de la tolerancia de forma. La verificación del error máximo permisible de la sonda $E_{P,MPE}$ se logra midiendo el error de redondez de un artefactos calibrados. De acuerdo con la norma ISO 10360-5 [140], la evaluación debe realizarse con un intervalo del radio (máximo menos mínimo) después de determinar la esfera mínima de mínimos cuadrados del conjunto de datos a partir de la medición de una esfera de referencia. Obsérvese que la tolerancia de forma puede evaluarse mediante los criterios de mínimos cuadrados o de tolerancia de mínima zona, y el último criterio es preferido por la ISO 1101. Sin embargo, en general el criterio de mínimos cuadrados es más robusto en presencia de valores atípicos y su algoritmo es más conocido y más fácil.

De acuerdo con la ISO 10360-5, el error de palpado debe ser verificado positivamente antes de continuar con las verificaciones de longitud según la ISO 10360-2, y se comprueba en cada configuración inicial de la CMM en su propia esfera de referencia de aproximadamente 30 mm de diámetro. Por lo tanto, el desplazamiento del centro del palpador y el error de forma siempre se evalúan antes de iniciar las operaciones de medición. Para las mediciones anteriores, se ha utilizado la misma sonda de un diámetro nominal de 4 mm y ha sido apreciado una media general del error de esfericidad indicada de 0,004mm por la CMM.

Una verificación independiente del error de la sonda se obtendrá más adelante a través de un hemisferio de vidrio certificado con una redondez de decenas de nanómetros. La ISO 10360-5 menciona el error de esfericidad por el criterio de mínimos cuadrados, la redondez del bloque patrón está certificada y no su esfericidad, por lo tanto, los ensayos de medición serán a lo largo de planos paralelos al plano XY definido por la mesa de la CMM de tal forma se obtendrán círculos de distintos diámetros para la evaluación de redondez del hemisferio de vidrio.

5.4.4. RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN GLOBAL DEL MODELO DE ERROR E INCERTIDUMBRE

En la primera parte del desarrollo del modelo, se formuló la relación entre el error de Abbé y la pendiente B del modelo de error por cada eje. Este modelo de propagación lineal de errores es válido para cualquier dimensión de longitud, por lo que la matriz **L** es singular (ecuación (5.69)). La pseudo-inversa permite obtener una solución particular del sistema lineal. Podemos estimar los errores B por el error por cada eje a través de los modelos de las Figura 5. 13, Figura 5. 14 y Figura 5. 15 para una longitud de referencia

de 150 mm = $L_x = L_y = L_z$ y medidos por el centro del volumen de trabajo por cada eje.

En la máquina utilizada para este desarrollo, las distancias de Abbé del centro del volumen de trabajo son $D_x=225\text{mm}$, $D_y=250\text{mm}$ y $D_z=50\text{mm}$, aproximadamente. Con esos valores de partida, la matriz da como resultado la ecuación (5.69), donde los símbolos en negrita indican una matriz o vector.

Estos valores de errores angulares globales en el plano XY son totalmente coherentes con los hallados en la verificación a través de errores de escuadra o perpendicularidad de un artefacto calibrado en la misma máquina [74]:

$$\begin{bmatrix} B_x \cdot L_x \\ B_y \cdot L_y \\ B_z \cdot L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -D_y & D_z \\ D_x & 0 & -D_z \\ -D_x & D_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\theta};$$

$$\begin{bmatrix} -2.7225 \\ 3.8445 \\ -1.0788 \end{bmatrix} [\mu\text{m}] = \begin{bmatrix} 0 & -250 & 50 \\ 225 & 0 & -50 \\ -225 & 250 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^3 [\mu\text{m}] \cdot \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1580 \\ 0.0985 \\ -0.0548 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} [\text{rad}] = \begin{bmatrix} 3.25 \\ 2.03 \\ -1.13 \end{bmatrix} ["]$$
(5.69)

Después de considerar la variabilidad promedia explicada del modelo lineal, la variabilidad no explicada en el modelo de regresión puede ser incorporada en las contribuciones de la incertidumbre. Este enfoque se utiliza cuando la estimación general del $E_{L,MPE}$ se toma como una primera estimación de la incertidumbre de la máquina [138] en esas condiciones de prueba.

En el caso del modelo propuesto la incertidumbre no explicada es sensiblemente inferior. Para una estimación adecuada de la incertidumbre en otras condiciones operativas válidas de la gama operacional de la CMM, todos los demás factores, que introducen variabilidad, deben variar en la experimentación [133], [141]. Teniendo en cuenta la variabilidad del error de una variable aleatoria, y debido a la interdependencia real del hardware de la CMM en el error de las coordenadas, podemos esperar covarianza en el error entre los ejes, por lo que cuatro de las siete posiciones de prueba en el modelo acumulado ISO son las diagonales del cubo del volumen de medición. Debido a que el modelo propuesto sólo evalúa las varianzas por eje, la cuestión es si la variabilidad del error es infravalorada o no.

De apoyo a la consistencia del modelo se puede señalar que:

- Como ya se ha mencionado, el error máximo permisible por el modelo ISO (siete direcciones de ensayo) y el modelo propuesto son muy similares, aproximadamente $\pm 6,7\mu\text{m}$.
- El resultado de la regresión. La mayor parte de la variabilidad total se explica por eje y se captura por el modelo propuesto. Obsérvese que el SSE en el modelo de

agregación es de 8×10^{-4} , mientras que la suma del SSE de los tres ejes diferentes es de 8×10^{-5} , por lo que una gran parte de la variabilidad no explicada presente en el modelo de agregación o en el modelo ISO se explica a través del modelo propuesto por eje, reduciendo de un orden de magnitud la suma del error cuadrático, con poca covarianza residual.

Como ya se ha mencionado anteriormente, la verificación de la CMM, siguiendo las pruebas de verificación ISO 10360, produce una cuantificación del error global muy similar al modelo de error presentado, simplemente evaluando los tres ejes principales. En este sentido, el modelo propuesto por eje parece capturar la variabilidad del error de la CMM. A continuación, se realizará un ensayo adicional en el plano XY para medir directamente los errores y comparar el resultado experimental con los valores pronosticados por el modelo propuesto. La medición de un bloque patrón calibrado de longitud nominal de 175 mm se ha comprobado. El bloque se ha orientado a lo largo de la dirección puesta a 45° con respecto al eje Z de la máquina y con la proyección en el plano XY de 30° con respecto al eje X. La estimación directa de la incertidumbre estándar u está dada por la ecuación (5.70), donde la estimación de la varianza se basa, para muestras pequeñas, en la distribución t de student con $n-1$ grados de libertad.

Serie de medidas. Indicación de la CMM [mm]

$$x_i = (174.99681, 175.00248, 175.00183, 174.99931, 175.00067); n = 5$$

$$\bar{x} = 175.00022 \text{ mm}; s = \sqrt{\frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 2.256 \text{ } \mu\text{m}; u = \sqrt{\frac{n-1}{n-3}} \frac{s}{\sqrt{n}} = 1.43 \text{ } \mu\text{m} \quad (5.70)$$

Considerando la incertidumbre por eje estimada por el modelo propuesto, se puede estimar la incertidumbre estándar por la ley de propagación de incertidumbre, bajo la hipótesis inicial de variables independientes por las ecuaciones (5.71)-(5.73).

Es de destacar que el modelo de incertidumbre resultante del modelo de error de longitud no depende de la longitud misma en un enfoque de primer orden. Esto significa que la incertidumbre no crece con la longitud por eje. Esto tiene una correspondencia con el comportamiento homocedástico del error en las Figura 5. 13, Figura 5. 14 y Figura 5. 15, donde la variabilidad del error es aproximadamente constante.

Hay que tener en cuenta que la independencia de $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ podría ser igual cuando sólo un eje varía a la vez. La independencia de x_1 y x_2 , por ejemplo, también se apoya siguiendo buenas prácticas de medición bilateral, de acuerdo con las recomendaciones de la norma ISO 10360-2.

$$L = 175 \text{ mm}; \varphi = 45^\circ; \theta = 30^\circ \rightarrow \cos \varphi = \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}; \sin \theta = \frac{1}{2}; \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (5.71)$$

Para los modelos de error de los ejes X,Y (Figura 5. 13 y Figura 5. 14) la incertidumbre expandida (con un coeficiente de cobertura $k=2$) [μm]

$$\hat{U}_x = 2.32; \hat{U}_y = 2.93; \hat{U}_z = 1.53 \quad (5.72)$$

así que la incertidumbre estándar es:

$$\begin{aligned} u_x &= 1.16; \quad u_y = 1.47; \quad u_z = 0.77 \\ u^2 &= 2(\cos \varphi \cos \theta)^2 \cdot u_x^2 + 2(\cos \varphi \sin \theta)^2 \cdot u_y^2 + 2\sin^2 \varphi \cdot u_z^2 \\ &= 1.01 + 5.37 + 5.85 = 2.13 \mu\text{m}^2; \\ u &= 1.46 \mu\text{m} \end{aligned} \quad (5.73)$$

Se puede comparar la incertidumbre obtenida por la estimación directa de la muestra de mediciones (ecuación (5.70)) y la obtenida por el modelo propuesto de variable independiente y la incertidumbre estándar por eje (ecuaciones (5.71) – (5.73)).

Los resultados son del mismo valor, $u=1,4\mu\text{m}$. El modelo propuesto captura la mayor parte de la variabilidad del error (incertidumbre), por lo que la covarianza puede ser ignorada en una aproximación de primer orden. Otras y futuras pruebas experimentales deberían corroborar estos resultados siguiendo la metodología propuesta.

El modelo de error por eje basado en la medición de longitud captura la tendencia de los errores. La variabilidad no explicada o aleatoria restante se convierte en incertidumbre y es uniforme por cada eje en una aproximación de primer orden para cualquier longitud.

5.4.5. RESULTADOS EXPERIMENTALES Y DISCUSIÓN

5.4.5.1. BLOQUES PATRONES RECTANGULARES

El caso 1 es un bloque patrón calibrado de longitud nominal de 175 mm medido con ángulo acimutal con respecto al eje Z, y con respecto al eje X.

Una correcta orientación del eje del bloque se corrige por la normal a las caras a través del proceso de medición.

Se mide 50 veces, a partir de cinco repeticiones en una técnica bilateral con 10 puntos muestreados, cinco en cada cara del bloque. Los resultados se comparan con los expresados por el modelo ordinario de EL_{MPE} . Además, el caso 2 es un bloque patrón calibrado de longitud nominal de 300mm puesto sobre la mesa de granito con su eje orientado con respecto al eje X de la máquina. Se mide cinco veces en cinco puntos en las dos caras del bloque, por lo que de obtendrá un total de 50 mediciones. Los resultados para ambos casos se enumeran en la Tabla 5. 7.

En el caso 1, no hay diferencia notable entre los modelos en el mejor valor de medición después de la corrección. El modelo propuesto y el modelo ISO pasan por el baricentro del conjunto de datos y el bloque de 175 mm está en el centro del rango de verificación ($50 \div 300$ mm). Sin embargo, la estimación de la incertidumbre es menor por el modelo propuesto con respecto al EL_{MPE} . En el caso 2, se utiliza un bloque de 300 mm por el extremo de la gama de verificación. El modelo propuesto presenta un mejor

resultado del valor medido, más exacto y preciso que si se aplicara el modelo ISO estándar.

Tabla 5. 7: Ensayos de longitud de artefactos calibrados.

CASO 1	Bloque patrón nominal de 175 mm con certificado de calibración de longitud 175.00120 ± 0.00022 mm (Factor de cobertura $k = 2$).
	Indicación media $L = 175.00022$ mm (sin corrección de sesgo de la CMM).
	Posición: $\varphi = 45^\circ$; $\theta = 30^\circ$
Modelo ISO	
$L_m = L + \text{bias} \pm E_{L,MPE} = L_{nm} \pm E_{L,MPE}$ Bias = $2.95 \mu\text{m}$ (por la Figura 5. 12) $E_{L,MPE} = 6.74 \mu\text{m}$ (por la Figura 5. 12) $L_{nm} = L + \text{bias} = 175.00022 + 0.00295 = 175.00317$ mm $L_m = 175.003 \pm 0.0067$ mm	
Modelo Propuesto	
$L_m = L + E \pm \hat{U} = L_{nm} \pm \hat{U}$ $L_{nm} = 175.00442$ mm $E = L_{nm} - L = 4.20 \mu\text{m}$ $\hat{U} = 3.71 \mu\text{m}$ $L_m = 175.004 \pm 0.0037$ mm	
CASO 2	Bloque patrón nominal de 300 mm con certificado de calibración de longitud 299.99939 ± 0.00026 mm (Factor de cobertura $k = 2$).
	Mean indication $L = 299.99402$ mm (sin corrección de sesgo de la CMM)
	Position: $\varphi = 0^\circ$; $\theta = 30^\circ$
Modelo ISO	
$L_m = L + \text{bias} \pm E_{L,MPE} = L_{nm} \pm E_{L,MPE}$ Bias = $2.95 \mu\text{m}$ (por la Figura 5. 12) $E_{L,MPE} = 6.74 \mu\text{m}$ (por la Figura 5. 12) $L_{nm} = L + \text{bias} = 299.99402 + 0.00295 = 299.99697$ mm $L_m = 299.997 \pm 0.0067$ mm	
Modelo Propuesto	
$L_m = L + E \pm \hat{U} = L_{nm} \pm \hat{U}$ $L_{nm} = 300.00019$ mm $E = L_{nm} - L = 0.00617$ mm $\hat{U} = 0.00370$ mm $L_m = 300.000 \pm 0.0037$ mm	

5.4.5.2. PLANITUD DE LA MESA DE GRANITO DE LA CMM

Se ha tomado una muestra de 30 puntos de la mesa de granito de la CMM por el centro del volumen de medición, Tabla A1. El cálculo de la planitud por un algoritmo preciso [126] se traduce en la dirección normal de la superficie por el eje Z de la CMM e identifica los puntos críticos de la superficie de la muestra, Tabla 5. 8.

Tabla 5. 8: Medida de planitud del granito. CASO 3. Puntos críticos (2,4-3,20), datos de la Tabla A1, y valores en (mm).

	u	v	t	MZF _{uvt}	E _{uvt}	$\hat{U}_{uvt}$
C1	(-0.183,23.678,0)	(-153.594,101.860,0)	(13.753,13.039,0.002)	0.0019995	0.0002295	0.00130
C2	(-0.183,23.678,0)	(-153.594,101.860,0)	(-139.841,114.899,0.002)	0.0019995	-0.0012973	0.00283
C3	(-0.183,23.678,0)	(-153.594,101.860,0)	(13.936,-10.639,0.002)	0.0019995	0.0017561	0.00023
C4	(-0.183,23.678,0)	(-153.594,101.860,0)	(-139.658,91.221,0.002)	0.0019995	0.0002294	0.00130
	Promedio			0.002	0.00023	

A partir del cálculo de las cuatro configuraciones se obtiene un valor de planitud de 0,002 mm después de la corrección de la indicación con el error medio. Una estimación

conservadora de la incertidumbre puede ser el valor máximo de las cuatro configuraciones, es decir, 0,00283 mm. En el modelo propuesto se estima la incertidumbre de la variabilidad del error (ecuación (5.78)). Además, la incertidumbre de la planitud a partir de la proyección de la incertidumbre vectorial del punto en la dirección de la superficie [140] también se puede estimar directamente. Obsérvese el resultado para la muestra entre el método propuesto (ecuación (5.78)) y la alternativa ISO (ecuación (5.79)):

$$U_{k=2} = 2\sqrt{\frac{c-1}{c-3}} \frac{s}{\sqrt{c}}; \quad s = \sqrt{\frac{(E_i - \bar{E})^2}{c-1}} \rightarrow U_{k=2} = 0.00216 \text{ mm} \quad (1.78)$$

$$U_{k=2} = \sqrt{2} \cdot \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{n} = \sqrt{2} \cdot (0.00232, 0.00293, 0.00153) \cdot (0, 0, 1) = 0.00216 \text{ mm}; \quad (5.79)$$

A partir de los cálculos anteriores se puede ofrecer una medida de la planitud de $0,002 \pm 0,00216$ mm. Hay que tener en cuenta que la mesa de granito de la máquina es plana alrededor de 0,002 según la indicación de la máquina, pero aplicando el modelo propuesto puede proporcionarse una estimación de la incertidumbre. La incertidumbre y la planitud están de hecho al mismo nivel de repetibilidad media de la máquina, estimada anteriormente y de aproximadamente 0,003 mm. Por lo tanto, podemos inferir que el granito es plano al nivel de la repetibilidad de la CMM.

5.4.5.3. BLOQUES PATRONES DE ÁNGULOS

Los bloques angulares son la realización de un ángulo definido por dos caras de cada bloque. Independientemente de la consideración teórica sobre la unidad de medida (radianes o a-dimensional) [142], los bloques de ángulos pueden evaluarse a partir del modelo propuesto de cálculo vectorial directo que incorpora los errores y la incertidumbre de la distancia entre los puntos críticos que definen cada cara del bloque angular. Por lo tanto, se utilizan el modelo de ángulo diedro y los criterios de mínima zona. Se ha medido un bloque de ángulo calibrado con el valor asignado en el intervalo $45^\circ \pm 2''$ y con su eje alineado con el eje Y de la CMM, Figura 5. 17, y con la indicación de coordenadas de la CMM presentados en la Tabla A2. La incertidumbre del bloque está más allá de la resolución de la CMM. Obsérvese que la resolución de la CMM de 0.001 mm es equivalente para una cara del bloque de 50 mm de largo a la resolución de $2 \cdot 10^{-5}$ rad o $4''$. Además, la uniformidad de las caras se ha verificado a través de la CMM y la indicación no es inferior a 0,004 mm, equivalente a $16''$ en cada cara. Esto da un orden de magnitud del ángulo menor con respecto a lo que podría ser discriminado por la CMM.

Al igual que en los bloques de medida rectangulares, el error de palpado no se considera en las contribuciones de los errores, ya que el punto de contacto de la sonda es casi el mismo cuando se mide cada cara. La comparación entre la indicación por el método de mínimos cuadrados y el método de mínima zona muestra un resultado más cercano al valor de asignación por el método de mínimos cuadrados antes de cualquier corrección. Después de la corrección, el modelo propuesto presenta un mejor resultado,

pero lo que es más importante, proporciona una estimación de la incertidumbre. El resultado final es muy cercano al valor asignado de la norma. El intervalo de incertidumbre angular en el orden del minuto es consecuencia de la resolución de la máquina y la planitud medida de los bloques patrones.

Figura 5. 17: Medición del bloque patrón angular

Tabla 5. 9: Resultados de la medición del bloque patrón de ángulo. CASO 4. Bloque patrón angular de $45^\circ \pm 2''$. Datos de la tabla A2.

Datos #	Puntos Críticos RF	Puntos Críticos LF	Angulo indicado LS α	Angulo indicado MZ α	Error E α	Angulo α_{nm}	Incetidumbre $\pm U\alpha$
1	(7,3–8,10)	(8,5–6,1)	44°59'37''	45°3'38''	–3'48''	44°59'40''	$\pm 3'40''$
2	(3,10–2,7)	(8,1–10,7)	45°0'7''	45°3'44''	–3'43''	45°0'1''	$\pm 3'14''$
3	(8,1–5,10)	(10,3–9,6)	45°0'24''	45°0'53''	–0'48''	45°0'6''	$\pm 0'16''$
Resultados			45°0'9''	45°2'45''	–2'30''	44°59'55''	$\pm 3'40''$

Hay que tener en cuenta que el intervalo de regresión del error se ha establecido previamente entre los valores de 50mm hasta 300mm, por lo que se utiliza la compensación de error de la CMM en el límite inferior. También es notable el buen comportamiento del modelo MZ incluso cuando los bloques angulares se calibran ordinariamente por el método de los mínimos cuadrados. Aunque el criterio de tolerancia de mínima zona evalúa mejor la planitud de las superficies con la sustitución geométrica de la superficie física, los bloques de medida se calibran utilizando el método de los mínimos cuadrados, por lo que se espera un acuerdo mayor parecido entre la indicación y el valor asignado del patrón mediante el método de los mínimos cuadrados [136]. Este es el comportamiento en el caso 4, cuando se calcula directamente a partir de la indicación. Sin embargo, el criterio de mínima zona es más efectivo cuando se aplica la corrección del error, con la ventaja de proporcionar una estimación de la incertidumbre. Debido a una muestra con un tamaño de 3 unidades, la estimación basada en la distribución t-student no es factible. Una estimación conservadora de la incertidumbre

puede ser el máximo alcanzado a través de las tres muestras. Otra alternativa para muestras muy pequeñas es estimar la incertidumbre del modelo de Craig [139]. Su resultado (5.80) no es muy diferente de la estimación realizada directamente a través del modelo:

$$\begin{aligned} \text{Modelo: } u^2 &= \frac{m-1}{2} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \right)^2 s^2; s = \sqrt{\frac{(E_i - \bar{E})^2}{m-1}} = 1.71' \\ \text{Por } m=3 \quad u^2 &= \left(\frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \right)^2 s^2 = \left(\frac{1}{0.8862} \right)^2 s^2 \rightarrow \\ &\rightarrow u = 1.93' \rightarrow U_{k=2} = 2 \cdot 1.93' = 3.86' = 3' 52'' \end{aligned} \quad (5.80)$$

5.4.5.4. SEMIESFERA DE VIDRIO

Una semiesfera de vidrio de marca Taylor Hobson, con un error de redondez de decenas de nanómetros, se ha medido en dos planos, Figura 5. 18. Su error de redondez está por debajo de la resolución de la CMM, por lo que la diferencia que viene de la indicación perfectamente redonda debe ser asignado al error general de la CMM, a la incertidumbre o al uso de un algoritmo de redondez aproximado. Los dos conjuntos de datos se incluyen en las Tablas A3 y A4. El cálculo preciso de la redondez a partir de la indicación se realiza mediante el método de los mínimos cuadrados basado en el conocido algoritmo de Levenberg-Marquardt y por el preciso método de Mínima Zona [129].

Figura 5. 18: Medición de un hemisferio de vidrio en dos planos

Los resultados para la evaluación de la redondez muestran el error por la CMM y la sonda (aproximadamente de 0,004 mm). Utilizando el modelo ISO, los resultados en termino de redondez no se pueden ajustar a la indicación del hemisferio. Los límites del $E_{L,MPE} = 6.7 \mu\text{m}$ no pueden aplicarse. La máxima repetibilidad de la CMM de 0,0045 mm o incluso el promedio de 0,003 mm difícilmente puede limitar una redondez nominal del orden de 0,005 mm.

El uso del modelo propuesto permite corregir la redondez calculada a partir de la indicación. La incertidumbre máxima calculada por el método se puede adoptar como una

medida conservadora de la incertidumbre del error. En dos casos, el Caso 5 Tabla 5. 10 y Tabla 5. 11, y Caso 6, Tabla 5. 12 y Tabla 5. 13, respectivamente, la incertidumbre del error y la máxima incertidumbre estimada a través del modelo son del mismo orden de magnitud, $1,96\mu\text{m}$ y $1,47\mu\text{m}$. El caso 5 representa un círculo completo con más puntos muestreados, pero el caso 6 sólo mide la mitad de un círculo en el hemisferio.

Tabla 5. 10: Resultados de la medición de redondez del Caso 5. Redondez a partir del conjunto de datos Tabla A3. Valores en (mm).

	MZR	R	a	b
Minima Zona	0.00522	26.03354	232.02654	253.39571
Minimos Cuadrados	0.00531	26.03335	232.02664	253.39580

Tabla 5. 11: Medida de redondez Caso 5. Resultados de error e incertidumbre para el criterio de mínima zona. Valores en (mm).

Puntos Críticos			Error e Incertidumbre				
Puntos	x (mm)	y (mm)	Puntos Críticos	8,15	21,29	8,29	21,15
8	222.871	277.769	E (mm)	-0.000046	-0.001841	-0.000147	0.000844
21	256.453	244.383	U [mm] (k = 2)	0.000130	0.001960	0.000200	0.000736
29	226.953	227.864	Valor medio E [mm]	-0.00030			
15	251.574	270.586	Valor máximo U [mm]	0.00196			
			Incertidumbre de E (n = 4; k = 2)	0.0015			
			$s = \sqrt{\frac{(E_i - \bar{E})^2}{n - 1}}; u = \sqrt{\frac{n - 1}{n - 3}} \frac{s}{\sqrt{n}}; U = k \cdot u$				
			MZR _m = MZR + E ± Ũ = 0.00522 – 0.00030 ± 0.00196 = 0.005 ± 0.00196 mm				

Tabla 5. 12. Resultados de la medición de redondez Caso 6. Redondez del conjunto de datos de la Tabla A4. Valores en (mm).

	MZR	R	a	b
Minima Zona	0.00568	25.36138	253.39556	-556.72247
Minimos Cuadrados	0.00712	25.35867	253.39569	-556.71841

Tabla 5. 13: Medición de la redondez Caso 6. Resultados de error e incertidumbre para el criterio de mínima zona. Valores en (mm).

Puntos Críticos			Error e Incertidumbre				
Puntos	x (mm)	y (mm)	Puntos Críticos	2,8	2,24	15,8	15,24
2	228.701	-430.499	E (mm)	0.000246	-0.000036	-0.000233	-0.000515
15	261.699	-414.988	U [mm] (k = 2)	0.000016	0.000003	0.000011	0.000030
24	279.314	-431.132	Valor medio E [mm]	-0.00013			
8	235.451	-420.992	Valor máximo U [mm]	0.00003			
			Incertidumbre de E (n = 4; k = 2)	0.00002			
			$s = \sqrt{\frac{(E_i - \bar{E})^2}{n - 1}}; u = \sqrt{\frac{n - 1}{n - 3}} \frac{s}{\sqrt{n}}; U = k \cdot u$				
			MZR _m = MZR + E ± Ũ = 0.00568 – 0.00013 ± 0.00003 = 0.006 ± 0.00003 mm				

Finalmente, la incertidumbre del círculo completo del Caso 5 se estima mediante el método de Monte Carlo basado en 100.000 repeticiones, como se explicó en el apartado 5.2.5 de este capítulo. Considerando la incertidumbre expandida de nuestro modelo Ũ (k

$= 2) = (0.00232, 0.00293, 0.00153)$ mm, la incertidumbre estándar puede obtenerse a través de $u=(u_x, u_y, u_z) = (0.00116, 0.001465, 0.000765)$ mm. Utilizando las distribuciones gaussianas $N(0, u_x)$ y $N(0, u_y)$, se obtienen los resultados de la Figura 5. 19.

Obsérvese que $U(k=2) = 0.00204$ mm está muy cerca del valor máximo obtenido para la estimación directa del modelo $U(k=2) = 0.00196$ mm. El orden de magnitud de la estimación a partir de la variabilidad del error, sólo de las cuatro configuraciones de la solución, es $U(k=2) = 0,00147$. Debe tenerse en cuenta que la redondez media a evaluada con el método de Monte Carlo se calcula directamente a partir de la indicación y da un resultado de 0,007 mm, superior a los 0,005 mm del conjunto de datos del Caso 5, y como se ha observado en [129].

La redondez media se asocia con la tolerancia de forma como distribución del valor positivo y la medida indirecta de la redondez obtenida a través de un proceso de minimización. Sin embargo, la simulación de Monte Carlo de la redondez no considera ninguna corrección de error en la indicación.

Debido a que el hemisferio está libre de error de redondez en la resolución del CMM, los resultados de redondez están asociados principalmente a la repetibilidad de la CMM de aproximadamente $2,7\mu\text{m}$ y un error de punta del palpador de forma de aproximadamente $4\mu\text{m}$. Como consecuencia, el resultado de una sola muestra, basada en el modelo propuesto (Caso 5) que incluye la corrección de errores, es de $5\pm 1,5\mu\text{m}$. Se puede comparar con el resultado de la simulación de Monte Carlo sin ninguna corrección en la indicación de $7\pm 2\mu\text{m}$.

Es de destacar que los valores de verificación de referencia de la CMM, el error máximo permisible $E_{L,MPE} = 6.7\mu\text{m}$ o la repetibilidad máxima de $R_0 = 4.5\mu\text{m}$, pueden servir poco para una expresión útil de la medición de redondez.

Figura 5. 19: Estimación de la incertidumbre según el método Monte Carlo del caso 5

5.4.6. DISCUSIONES

Se ha desarrollado un modelo lineal de error por eje y su agregación en un modelo de medición de características. El modelo propuesto extrae información útil de las pruebas de una CMM mediante técnicas ordinarias de medición de bloque de calibración. Las coordenadas del punto de prueba son el mensurando original de la CMM que se transforman a través del procesamiento de las señales y el modelo de medición en la medición de características. El modelo propuesto por eje considera la evaluación del error medio, y una contribución de la incertidumbre de medición con origen en la variabilidad no explicada del error. Ambos se integran en el modelo de medición de las características. Este modelo proporciona la ventaja conceptual de incorporar la contribución a la incertidumbre de la variabilidad del error. Obviamente, deben agregarse con el resto de las contribuciones a la incertidumbre, tales como la incertidumbre de calibración del bloque patrón, y otras contribuciones relevantes de la pieza de trabajo bajo medición, pero en particular, el coeficiente de expansión térmica (CTE) que afecta notablemente al hardware. Como ya se ha visto, una manera para abordar la estimación de la incertidumbre de una CMM se basa en un modelo de incertidumbre puntual y en una simulación de Monte Carlo para la propagación de la incertidumbre a través del modelo de medición. Esto requiere esfuerzos de cálculo intensos y la verificación posterior del modelo de incertidumbre puntual propuesto basado en el comportamiento real de la CMM observado.

Otra forma de incorporar la incertidumbre en la medición de las características de una CMM puede llevarse a cabo mediante la ISO 15530, que establece condiciones muy estrictas para evaluar la incertidumbre basada en artefactos calibrados en metodologías de sustitución y de no-sustitución.

En el modelo propuesto, la estimación de la incertidumbre viene directamente de la variabilidad observada de la medición siguiendo las técnicas del proceso de verificación con artefactos calibrados para condiciones de ensayos de referencia establecidas. La estimación de la incertidumbre proviene de la verificación de un artefacto calibrado para dar un valor del error para la corrección al instrumento indicador (CMM). Se aproxima al proceso ordinario de verificación de un instrumento más simple, como un micrómetro, por ejemplo [120]. También se ha desarrollado la expresión del modelo de medida fundamental para la longitud, pero también para la planitud, para el ángulo y la redondez. El uso potencial de esta metodología para otros modelos de medición CMM es aconsejable para trabajos futuros, en particular para la tolerancia de forma.

La metodología simple y explícita del desarrollo de la serie de Taylor entorno a un valor es un enfoque bien conocido en el modelado y también se utiliza en la expresión aproximada de la ley de propagación de la incertidumbre por la GUM. A continuación, se va a desarrollar su aplicación directa a un modelo de medición con CMM 3D de errores lineales y su integración en la medición de características.

La metodología de modelado con otras funciones no lineales de error posiblemente podría ser investigado más a fondo. El modelo establece un valor medio de error a partir de la regresión de la respuesta de la máquina y la variabilidad residual como incertidumbre. Este enfoque local es a priori válido siempre y cuando el error y su variabilidad sean mucho menores que la magnitud bajo medición. Por lo tanto, un desarrollo local de la serie Taylor podría ser posible. En particular, se puede aplicar en la medición sin contacto donde los sensores traducen las coordenadas en imágenes 2D, que es ampliamente utilizado hoy en los dominios de la ingeniería y de la bioingeniería.

El modelo propuesto de compensación de errores utiliza técnicas estándar de verificación de errores basadas en una aproximación de primer orden de errores de longitud, válida en la zona de prueba del volumen de medición y bajo condiciones de medición de referencia similares. Se presenta como una alternativa inicial asequible al mapeo detallado del error de coordenadas. Incluso cuando la capacidad de mejora de las prestaciones podría ser menor en comparación con la compensación del error de coordenadas a partir del mapeo detallado basado en los modelos de cuerpo rígido, el esfuerzo es menor también, porque utiliza los datos obtenidos de las técnicas asequibles y similares bien establecidas y aplicadas en las pruebas ordinarias, periódica, de verificación según la norma ISO 10360-2.

Este modelo puede contribuir a la inclusión de la compensación de errores y a una estimación directa de la incertidumbre de las CMM en el entorno industrial. Existe la posibilidad de post-procesar las indicaciones brutas de coordenadas de la CMM, fuera del procesamiento operado por el software cerrado de la CMM. Sin embargo, para mejorar la operatividad de una CMM, el modelo propuesto debe incorporarse al software de la máquina. Se puede lograr fácilmente fijando los parámetros de error por eje después de las pruebas periódicas. La máquina ofrecería una indicación mejorada después de la corrección del error medio y su estimación de la incertidumbre como parte del resultado de la medición.

La extracción experimental del modelo de error por eje se ha demostrado factible y útil. La base teórica de los modelos vectoriales de propagación de errores desarrollados está respaldada por el comportamiento experimental de la CMM.

El estudio desarrollado sugiere la recomendación de llevar a cabo la verificación de la CMM siguiendo las técnicas estándar ISO, pero con más repeticiones con respecto al estándar que recomienda tres repeticiones. Para el aval experimental del modelo propuesto se han utilizado hasta cinco repeticiones, y es recomendable no menos de cuatro. Esto puede permitir la extracción de errores por eje con un número razonable de datos para la regresión de los errores. Además, permitiría una estimación directa de la incertidumbre de la variabilidad del error.

El comportamiento homocedástico de la variabilidad no explicada del error, alrededor de la tendencia lineal, es una ventaja principal frente al modelo CMM ISO convencional de error máximo permisible. El modelo por eje ha demostrado la capacidad de capturar la mayor parte de la variabilidad del error o de la medición. Como consecuencia, la variabilidad no explicada de la medida o el error se convierte en una

contribución a la estimación de la incertidumbre global. Es un cálculo directo a partir del modelo de error de la máquina por eje y a través de una composición vectorial adecuada en cada modelo de medición de características.

Los modelos de medición de características basados en coordenadas bajo criterios de mínima zona presentan sobre determinación en términos de error e incertidumbre en algunos casos. Por ejemplo, la planitud o la redondez bajo criterios de mínima zona se determinan por cuatro puntos. Estos modelos ofrecen una solución única, pero permiten múltiples estimaciones del error e incertidumbre basadas en el mismo conjunto de datos. Esto es una ventaja más que un inconveniente hacia una economía en el muestreo de la CMM. En el caso de la medición de longitud simple o de un ángulo en un plano, el mejor valor de la solución, el error y la estimación de la incertidumbre, son únicos a través del modelo propuesto.

Los algoritmos de mínimos cuadrados son dominantes en metrología por su robustez frente a valores atípicos y a algoritmos generalizados, pero no determinan los puntos críticos de la tolerancia de forma. Por lo tanto, difícilmente se podría beneficiar del análisis de los errores basados en la propagación directa del error y en la incertidumbre asociada con la coordenada de esos puntos críticos. El modelo de error propuesto y los modelos de características derivados podrían aplicarse aproximadamente bajo algoritmos de ajuste de mínimos cuadrados considerando los puntos más próximos a la característica bajo definición.

La estimación de la incertidumbre, presentada en el desarrollo de los modelos, ha demostrado ser útil en los ensayos experimentales en comparación con las estimaciones alternativas, en particular frente al método ordinario de Monte Carlo que requiere fijar la distribución de la incertidumbre de los puntos y un cálculo intenso para dar sólo la incertidumbre de una medida. El modelo propuesto de error por eje es capaz de obtener la ordenada en el origen A_i o el error para cada eje i . Esto puede ser adoptado como una estimación del error de punto de carácter vectorial, útil como input al método de Monte Carlo. El modelo propuesto de compensación de errores hace uso de las técnicas básicas del modelo estándar de error máximo permisible basado en una aproximación de primer orden de los errores de longitud en la zona de interés dentro el volumen de medición. Se presenta como una alternativa asequible a un mapeo detallado de errores de coordenadas. En cuanto a los grandes campos de medida o simplemente al comportamiento de la CMM cuasi lineal, un primer intento podría ser el uso de modelos de regresión por rangos, con el fin de cubrir adecuadamente el volumen de medición. Los extensos ensayos experimentales y la comparación de resultados deben reforzar la utilidad del modelo propuesto y su posible uso en laboratorios o en entornos industriales.

5.5. CONCLUSIONES

En este capítulo se ha presentado una aproximación para la medición de ángulos, formados por dos planos perpendiculares, y su incertidumbre asociada, utilizando el método de simulación de Monte Carlo siguiendo las directrices que nos proporcionan el Suplemento 1 de la GUM y empleando las pruebas de rendimiento mencionadas en ISO 10360-1, ISO 10360-2 e ISO-10360-5. Con el fin de lograr lo expuesto anteriormente, se han utilizado dos modelos de comportamiento para la CMM, que nos permiten determinar la incertidumbre asociada con la medición, y también estudiar los errores de la CMM asociados con la orientación y la longitud en el volumen de trabajo. Utilizando estos modelos, ha sido posible evaluar el valor del ángulo y su incertidumbre asociada, utilizando el método de Monte Carlo. El primer modelo denominado “modelo de comportamiento estadístico lineal”, corrige las coordenadas brutas obtenidas por la CMM y toma en consideración los errores geométricos y los debidos al comportamiento dinámico de la CMM. El segundo, llamado "*MITUTOYO model behavior of CMM*", es un método para la simulación estadística con una fuerte correlación. Dicha correlación se verifica entre las coordenadas de los puntos de medición, y disminuye a medida que los puntos de sondeo se hacen más distantes. Una vez que los resultados obtenidos han sido comparados, se ha determinado qué método proporciona un procedimiento para calcular la incertidumbre que sea simple y confiable. Los resultados de las mediciones angulares llevan a los mismos valores para los cuatro ángulos. En cuanto a las incertidumbres, el modelo Mitutoyo conduce a valores de un 20% mayor que los obtenidos por el modelo de comportamiento lineal. Esto se debe al hecho de que el modelo Mitutoyo presenta una fuerte correlación que actúa aumentando la incertidumbre obtenida y ofreciendo, como resultado, valores más conservadores que el modelo de comportamiento lineal. Después de este primer estudio sobre la verificación de una máquina CMM y el estudio de los errores de la CMM asociados con la orientación y la longitud en el volumen de trabajo y de los errores debidos al comportamiento dinámico de la CMM, según las especificaciones de las normas internacionales y modelos estadísticos de comportamientos para una CMM conocido en literatura, se ha desarrollado un modelo de compensación de errores, propio, para máquinas CMM y su integración en la medición de características geométricas o dimensional. Las CMM son instrumentos muy utilizados y confiables en la industria y en laboratorios para la medición dimensional. Desde el sensor de la sonda (palpador) hasta la pantalla de la máquina, hay una compleja transformación de las coordenadas de los puntos sondados a través de modelo de características geométricas que hace difícil la evaluación de los resultados de precisión y la estimación de la incertidumbre. Sin embargo, la compensación de errores no está estandarizada, como para otros instrumentos más simples. Los modelos detallados de compensación de errores de coordenadas se basan generalmente en ver una CMM como un cuerpo rígido y requieren un mapeo detallado del comportamiento de la CMM. En este capítulo se ha propuesto un nuevo modelo de compensación de errores. Se ha evaluado el error debido a la composición vectorial del error de longitud por eje y su integración

en el modelo de medición geométrica. La variabilidad no explicada por el modelo se incorpora como una componente de la incertidumbre. Se han analizado los parámetros del modelo que se relacionan con los errores geométricos y con la incertidumbre de la CMM. A continuación, se han desarrollado los modelos de medición de planitud, de ángulos y de redondez. Los modelos propuestos son útiles para la mejora de la medición con una fácil integración en el procesamiento de las señales de una CMM, en particular en entornos industriales donde se buscan soluciones integradas. En el último parte de este capítulo se ha presentado una serie de pruebas de implementación donde se incluye el aval experimental del modelo teórico propuesto para la longitud, pero también para la planitud, para el ángulo y la redondez. El uso potencial de esta metodología para otros modelos de medición CMM es aconsejable para trabajos futuros, en particular para la tolerancia de forma. El modelo se puede aplicar en la medición sin contacto donde los sensores traducen las coordenadas en imágenes 2D, que es ampliamente utilizado hoy en los dominios de la ingeniería y de la bioingeniería. De hecho, se sabe que para temas de diagnóstico médico por medida sobre imagen las problemática, teóricas y prácticas, que afectan a una correcta medición, en termino de precisión y repetibilidad de la medida, son las mismas que se encuentran en la metrología por coordenadas de contacto. Los algoritmos de ajuste que se utilizan después de un correcto muestreo de los puntos que definen una característica geométrica son los mismo sea que se utilice una CMM por contacto o una CMM sin contacto, como puede ser una imagen sacada por una camera o por una CT. Las consideraciones y las herramientas utilizadas para la mejora de la medida en termino de errores y de estimación de la incertidumbre asociada siguen las mismas estructura y metodología de estudio tanto por problema metrológico que se desarrollan con la metrología por contacto como para lo sin contacto. El modelo propuesto de compensación de errores utiliza técnicas estándar de verificación de errores basadas en una aproximación de primer orden de errores de longitud. Se presenta como una alternativa inicial asequible al mapeo detallado del error de coordenadas. La extracción experimental del modelo de error por eje se ha demostrado factible y útil. La base teórica de los modelos vectoriales de propagación de errores desarrollados está respaldada por el comportamiento experimental de la CMM. Por estas razones todas las metodología desarrollada e implementada en este capítulo, con los estudios experimentales planteados, ha permitido adquirir los conocimientos necesarios, en términos metrológicos, para la correcta implementación del modelo fluidodinámico y su fusión con el problema morfométrico para el estudio y modelización tribológica del comportamiento dinámico del tobillo humano. De hecho, como se irá viendo a lo largo de esta memoria de tesis, la metrología por coordenadas es una herramienta precisa y útil para la correcta caracterización de las superficies que toman parte a un contacto lubricado in cuanto afecta a las condiciones de contorno útiles para la resolución de las ecuaciones diferenciales que definen y describen la lubricación de las articulaciones humanas.

5.6. APPENDIX A

Tabla A1. Granite flatness.

Point #	x [mm]	y [mm]	z [mm]
1	150.569	161.800	-485.069
2	151.136	138.495	-485.068
3	137.383	125.456	-485.070
4	151.319	114.817	-485.068
5	138.866	103.311	-485.069
6	150.303	95.111	-485.068
7	137.885	84.617	-485.069
8	151.491	72.219	-485.068
9	141.419	64.847	-485.069
10	206.130	218.320	-485.070
11	186.961	202.538	-485.070
12	207.748	190.807	-485.069
13	189.576	130.952	-485.070
14	192.284	94.076	-485.070
15	247.065	194.149	-485.068
16	251.169	173.446	-485.069
17	264.555	118.727	-485.069
18	250.302	84.049	-485.068
19	266.562	75.570	-485.068
20	265.033	59.649	-485.070
21	249.690	44.504	-485.070
22	263.665	40.053	-485.068
23	249.230	25.474	-485.069
24	289.791	74.976	-485.070
25	305.326	29.075	-485.069
26	291.529	112.159	-485.068
27	305.250	103.548	-485.068
28	291.550	62.152	-485.070
29	310.033	35.141	-485.068
30	290.977	23.596	-485.070

Tabla A2. Angle block datasets.

LEFT FACE (LF)				RIGHT FACE (RF)			
Dataset#							
1	Point #	x [mm]	y [mm]	z [mm]	x [mm]	y [mm]	z [mm]
	1	223.391	131.940	-479.883	254.591	91.711	-479.617
	2	219.711	122.976	-479.884	250.055	102.574	-479.616
	3	215.284	112.192	-479.884	246.235	111.721	-479.616
	4	210.959	101.660	-479.884	241.530	122.981	-479.616
	5	207.223	92.559	-479.885	237.607	132.371	-479.616
	6	207.222	92.569	-484.329	237.602	132.374	-484.561
	7	211.098	101.999	-484.329	242.478	120.712	-484.562
	8	216.158	114.316	-484.328	246.361	111.405	-484.561
	9	219.984	123.640	-484.328	249.718	103.376	-484.562
	10	223.168	131.386	-484.328	253.548	94.212	-484.562

Tabla A2. *Cont.*

		LEFT FACE (LF)			RIGHT FACE (RF)			
Dataset#								
	Point #	x [mm]	y [mm]	z [mm]	x [mm]	y [mm]	z [mm]	
2	1	223.169	131.388	-480.184	254.292	92.425	-480.554	
	2	217.718	118.119	-480.185	250.579	101.327	-480.554	
	3	215.051	111.622	-480.185	246.421	111.260	-480.553	
	4	210.872	101.451	-480.185	242.201	121.368	-480.554	
	5	207.353	92.879	-480.185	238.628	129.927	-480.554	
	6	207.352	92.881	-484.349	238.623	129.933	-484.407	
	7	211.612	103.250	-484.349	242.358	121.002	-484.408	
	8	214.910	111.289	-484.349	245.694	113.009	-484.408	
	9	218.950	121.122	-484.348	249.929	102.875	-484.408	
	10	223.357	131.840	-484.348	254.222	92.588	-484.408	
3	1	223.500	132.196	-480.200	254.303	92.395	-480.549	
	2	218.929	121.062	-480.200	250.952	100.421	-480.548	
	3	215.763	113.362	-480.200	245.875	112.576	-480.548	
	4	210.111	99.592	-480.201	241.529	122.983	-480.548	
	5	207.042	92.123	-480.201	238.649	129.877	-480.548	
	6	207.035	92.111	-485.026	238.649	129.872	-484.622	
	7	210.512	100.568	-485.026	242.328	121.055	-484.622	
	8	215.147	111.856	-485.025	246.452	111.184	-484.623	
	9	219.143	121.583	-485.025	251.199	99.834	-484.622	
	10	223.352	131.843	-485.025	254.316	92.407	-484.623	

Tabla A3. Hemisphere datasets. (a) Plane Z constant.

Point #	x [mm]	y [mm]
1	205.976	254.255
2	206.318	258.106
3	207.360	262.263
4	209.214	266.456
5	211.945	270.467
6	214.987	273.581
7	217.545	275.526
8	222.852	278.254
9	227.663	279.547
10	231.866	279.914
11	237.052	279.422
12	239.983	278.663
13	244.596	276.667
14	248.560	273.976
15	251.555	271.071
16	255.067	265.963
17	256.590	262.452
18	257.689	258.139
19	258.013	252.699
20	257.509	248.634
21	256.434	244.868
22	254.394	240.594
23	251.271	236.368
24	247.770	233.160
25	243.252	230.401
26	238.871	228.770
27	236.053	228.164
28	230.943	227.869
29	226.934	228.349
30	221.842	229.914

Table A4. Hemisphere datasets. (b) Plane X constant.

Point #	y [mm]	z [mm]
1	228.089	-432.084
2	228.701	-430.499
3	229.423	-428.951
4	230.208	-427.495
5	231.142	-425.993
6	232.255	-424.450
7	233.343	-423.134
8	235.451	-420.992
9	237.200	-419.522
10	239.410	-417.991
11	242.458	-416.348
12	246.687	-414.810
13	253.367	-413.853
14	258.186	-414.191
15	261.699	-414.988
16	265.688	-416.526
17	268.427	-418.036
18	271.400	-420.195
19	273.053	-421.691
20	274.557	-423.293
21	276.085	-425.224
22	277.075	-426.699
23	278.343	-428.955
24	279.314	-431.132

CAPÍTULO 6

LA TRIBOLOGÍA

TEÓRICA Y EXPERIMENTAL

Abstract: In this chapter a first approach on the lubrication theory has been presented. The fluid dynamic lubrication is the starting point for the implementation of the fluid dynamic model of the human ankle joint. Before to introduce the equations that govern the tribological problem, the parameters for the characterization of lubricating fluids have been presented and analyzed. By using the hypotheses of scientific literatures, in a theoretical way, the Reynolds equations for a theoretical case have been writing. The importance of the boundary conditions and of the geometric and morphometric characterization of the contact under study, that affect the fluid dynamics problem, have been presented. The four types of lubrication regime which regulate the friction conditions between two surfaces in relative motion by introducing the Stribeck curve have been presented and characterized. Once the theoretical methodology of tribological problems has been raised, attention has been paid to the experimental methodology that is usually used for the characterization of lubricants and materials that constitute a tribological contact.

6.1. INTRODUCCIÓN

Para reducir la fricción y el desgaste que se produce en un contacto entre dos cuerpos en movimiento relativo entre ellos es necesario lubricar las superficies de contacto. De hecho, si entre los elementos de un par cinemático en contacto de deslizamiento se introduce un fluido, de tal manera que el contacto directo entre dos superficies secas sea sustituido con un contacto sólido-líquido-sólido mediado, se puede obtener una fuerte reducción del valor del coeficiente de fricción.

El fluido contenido en la cavidad creada por las dos superficies en contacto (también llamado meato) es comúnmente un líquido, a veces un gas; se le da el nombre de lubricante. El lubricante debe ser capaz de reaccionar a las fuerzas normales que las dos superficies en contacto se transmiten en el acoplamiento y, al mismo tiempo, de dar origen a acciones tangenciales relativamente pequeñas. El mejor resultado se obtiene si

entre dichas superficies se consigue interponer una capa de lubricante que evita el contacto directo entre ellas: para que esto ocurra es suficiente que el espesor de la capa sea generalmente del orden de centésimas de milímetro y en cualquier caso mayor que la suma de las asperezas presentes en las dos alturas de las superficies. Una lubricación de este tipo toma el nombre de lubricación a fluido perfecta y, en principio, se puede realizar mediante el empleo de un fluido lubricante cualquiera, líquido o gas que sea. Para generar una capa de lubricante, suficiente para evitar el contacto directo de las superficies, y por lo tanto capaz de reaccionar a las fuerzas normales que los dos cuerpos se transmiten a través de él, es necesario que dentro del meato hay una presión más alta que la de su exterior; para que tal presión se realice se pueden seguir dos caminos. El primero es enviar lubricante a presión entre las dos superficies S_1 y S_2 en contacto (Figura 6. 1a); si la presión es suficientemente alta, las dos superficies se alejan la una de la otra y el fluido fluye hacia fuera a lo largo de los bordes que delimitan las superficies mismas. La capa de lubricante, que se mantiene siempre que continua el envío de lubricante en presión, es sometida a una presión variable entre el valor de la presión de entrada y el valor de la presión externa. La resultante de la presión equilibra la fuerza W que tiende a llevar las dos superficies en contacto. Este tipo de lubricación toma el nombre de la lubricación fluidoestática.

Figura 6. 1: Tipo de lubricación

El segundo es utilizar el mismo movimiento relativo entre las superficies en contacto para forzar el lubricante que se interpone como una cuña entre las mismas superficies. La cuña fluida se somete a una presión que es máxima en correspondencia de la zona central de contacto y decreciente hacia los bordes que delimitan el área de contacto; a lo largo de los bordes, la presión alcanza el valor de la presión externa. Este segundo tipo de lubricación lleva el nombre de lubricación fluidodinámica (Figura 6. 1 b). Aunque se podría, como se ha dicho, usar diferentes fluidos, el fluido utilizado en general es un aceite mineral de viscosidad adecuada y la lubricación se denomina lubricación hidrostática en el primer caso y en el segundo lubricación hidrodinámica.

Un fluido, a diferencia de un sólido, se caracteriza por su incapacidad de tomar una forma propia. Esto es debido al hecho de que un fluido no puede soportar esfuerzos tangenciales o cortantes. Esto siempre es cierto para un fluido ideal, mientras que, para

un fluido real, esto se manifiesta sólo cuando está en reposo. Cuando un fluido real está en movimiento, las capas adyacentes de la corriente fluida, se intercambian fuerzas tangenciales o de corte. Por lo tanto, los fluidos reales se denominan fluidos imperfectos o viscosos.

6.2. LA VISCOSIDAD

La viscosidad es una magnitud física que mide la resistencia (fricción interna) que un fluido opone a las fuerzas que tiende a hacerlo deslizar. En otras palabras, es la propiedad por la cual un líquido se opone a un cambio de forma. Es una característica ventajosa de un lado, ya que hace posible la separación entre las superficies de un acoplamiento en presencia de una carga, de otro es perjudicial ya que es fuente disipación de potencia en calor. Se considere una capa de fluido entre dos superficies planas S_1 y S_2 , horizontales, paralelas entre sí, de dimensiones definidas (Figura 6. 2). La superficie S_2 es estacionaria, mientras que S_1 se mueve con movimiento uniforme de velocidad U . Se suponga que después de un cierto tiempo el fluido alcanza las condiciones de régimen laminar (bajo número de Reynolds) y que se pueda suponer que el movimiento tiene lugar por deslizamiento de superficies planas. La capa de fluido directamente en contacto con la superficie S_2 está desprovista de movimiento, mientras que la que está en contacto con S_1 se mueve a la velocidad U . La velocidad de las capas intermedias varía (linealmente en primera aproximación) entre el valor cero y el valor U .

Figura 6. 2: Esquema de lubricación

Newton afirmó que la fuerza F necesaria para mantener a la velocidad U la superficie S_1 era proporcional al área de la superficie S_1 , al gradiente de velocidad (en una dirección normal a la de flujo) y a un coeficiente característico, a la misma temperatura y presión, para cada fluido considerado:

$$F = \mu \cdot A \cdot \frac{dU}{dy}; \quad \tau = \frac{F}{A} = \mu \cdot \frac{dU}{dy} \quad (6.1)$$

La relación (1) toma el nombre de ley de Newton y la constante de proporcionalidad μ entre la tensión de desplazamiento τ y el gradiente de velocidad lleva el nombre de viscosidad del fluido (dinámica).

Es importante recordar que el movimiento del fluido está en régimen laminar cuando el número de Reynolds “Re” de la corriente de fluido es relativamente bajo. En el

caso representado en la Figura 6. 2, si δ es la masa volumétrica, el número de Reynolds está dada por:

$$Re = \frac{U \cdot h \cdot \delta}{\mu} \quad (6.2)$$

En el caso de la lubricación hidrodinámica el movimiento del lubricante está generalmente en régimen laminar: el número de Reynolds resulta ser de hecho bajo tanto para los pequeños valores del espesor del lubricante como para los relativamente altos valores de viscosidad de los lubricantes utilizados en este tipo de lubricación.

Para muchos fluidos (gases y líquidos a bajo peso molecular, aceites minerales), la viscosidad es una función sólo de la naturaleza del fluido y de su estado físico (es decir, temperatura y presión), mientras que es independiente del gradiente de velocidad. Estos fluidos se denominan newtonianos. Para ellos, la viscosidad es una variable de estado y de la (6.1) es una ley física. Los fluidos cuya viscosidad depende también del gradiente de velocidad se llaman no newtonianos: las grasas lubricantes y los aceites multigrados son un ejemplo de este tipo de fluidos.

Figura 6. 3: Comportamiento reológico y sollecitaciones cortantes de sustancias newtonianas y no newtonianas

La constante de proporcionalidad μ entre la tensión de desplazamiento τ , y el gradiente de velocidad se llama viscosidad dinámica del fluido. Es una cantidad sin dimensiones. Sus dimensiones se deducen a partir de la (6.1) y se expresan según la (6.3):

$$[\mu] = \frac{[MLT^{-2}L^{-2}]}{[LT^{-1}L^{-1}]} = [MT^{-1}L^{-1}]; \quad (6.3)$$

Su unidad de medida en el SI es el $Pa \cdot s$.

La relación ν entre la viscosidad dinámica μ y la densidad δ de un fluido toma el nombre de viscosidad cinemática:

$$\nu = \frac{\mu}{\delta}; \quad [\nu] = \frac{[MT^{-1}L^{-1}]}{[ML^{-3}]} = [L^2T^{-1}] \quad (6.4)$$

Su unidad de medida en el SI es el $m^2 \cdot s^{-1}$.

6.3. LA TEORÍA DE LA LUBRICACIÓN

Antes de presentar la teoría de la lubricación, se debe describir el sistema físico de referencia en torno al cual se desarrollará el tratamiento en cuestión. En particular, deben ser examinadas la geometría del sistema considerado y las hipótesis físicas de trabajo a la base de la teoría de la lubricación; Por último, se hará hincapié también en los outputs del modelo (es decir, las cantidades que un modelo de este tipo permite de evaluar). La geometría del problema se describe esquemáticamente en la Figura 6. 4 en la que se representa una parte suficientemente pequeña de la porción del meato. El sistema de referencia elegido local está colocado dentro de este último.

Figura 6. 4: Geometría del problema

En la figura han sido representados los dos elementos del par cinemático mientras que el meato, que los divide es llenado por una película lubricante. La geometría de las paredes del meato S_1 y S_2 (identificados a nivel local por las funciones $y_1(x,z)$ e $y_2(x,z)$) que representan la frontera sólida indeformable del volumen de control, se supone nota mientras que con δS_e , δS_u se indican las zonas de frontera en las que el fluido entra y sale del meato (en este caso $\delta S \supseteq \delta S_e \cup \delta S_u$ es toda la frontera del meato mismo, a excepción de S_1 y S_2). También se supone que el espesor del meato en la dirección y (por lo general del orden de décimas o incluso centésimas de mm) es pequeño en términos relativos en comparación con su tamaño en las direcciones x y z ; Por consiguiente, la influencia en el movimiento del fluido de las curvaturas de las superficies que delimitan el meato mismo es insignificante. Tal hipótesis geométrica es vital para que algunos de los supuestos físicos a continuación sean admisibles. Las superficies que delimitan el meato están en movimiento con respecto al sistema de referencia fijo. Incluso estas velocidades (respectivamente $v_1 = [u_1(x, y) \ v_1(x, y) \ w_1(x, y)]^T$ para la superficie S_1 y

$v_2 = [u_2(x, y) \ v_2(x, y) \ w_2(x, y)]^T$ para los puntos de la superficie S_2 del meato) se supone conocidas. Con F_1 y F_2 se han indicado las resultantes de las fuerzas externas necesarias para mantener en movimiento las paredes S_1 y S_2 del meato.

Para abordar el estudio que hemos propuesto es necesario introducir ciertas hipótesis físicas que permiten una simplificación decisiva del problema desde un punto de vista matemático pero que, al mismo tiempo, permiten que el modelo permanezca lo más cerca posible a la realidad física.

Estas hipótesis se pueden resumir de la siguiente manera:

- se supone que el fluido lubricante es homogéneo e incompresible o que la densidad es constante (hipótesis legítima en el caso de lubricantes líquidos)
- se supone que el fluido lubricante puede ser modelado como un fluido newtoniano caracterizado por una viscosidad constante (la suposición de la viscosidad es mucho mejor justificada cuanto más uniforme es la temperatura del lubricante, adecuado para lubricación fisiológica, con variaciones de temperatura pequeñas en el cuerpo humano.); debajo de estas dos primeras hipótesis los esfuerzos dentro del fluido puede ser expresado como sigue:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (6.5)$$

donde σ_{ij} es el tensor de los esfuerzos ($\sigma_{11}=\sigma_x$, $\sigma_{22}=\sigma_y$, $\sigma_{33}=\sigma_z$, $\sigma_{12}=\tau_{xy}$, $\sigma_{13}=\tau_{xz}$, $\sigma_{23}=\tau_{yz}$), p es la presión dentro del fluido, δ_{ij} delta de Kronecker, v_i la componente genérica del vector velocidad espacial; además, la ecuación de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad tienen la siguiente forma simplificada:

$$\rho \underline{a} = -\rho \underline{f} - \nabla p + \mu \Delta \underline{v} \quad (6.6)$$

$$\text{div } \underline{v} = 0 \quad (6.7)$$

donde $\underline{a}$ representa el vector aceleración y $\underline{f}$ las fuerzas volumétrica (eventuales)

- las fuerzas de inercia $\rho \underline{a}$ que actúan sobre el fluido, son insignificantes en comparación con las acciones de tipo viscoso; esta suposición se justifica tanto por la finura del espesor del meato tanto por el alto valor de la viscosidad cinemática (la relación entre la viscosidad y densidad) de los lubricantes comunes; También hay que destacar que la aceleración tiene la siguiente expresión;

$$\underline{a} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} \quad (6.8)$$

- donde $[(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v}]_i = \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ en consecuencia, asumir que las acciones de inercia $\rho \underline{a}$ son cantidades despreciables significa imponer tanto que el movimiento sea

laminar (ya que no se considera el término de convección/turbulencia) como que sea estacionario (ya que no tiene en cuenta la contribución de $\frac{\partial v}{\partial t}$)

- las fuerzas de masa $\rho \underline{f}$ agentes en el fluido son despreciables con respecto a las acciones de tipo viscoso.

A la luz de las hipótesis físicas que se acaban de describir el modelo de fluido dinámico de los lubricantes (ecuaciones (6.6) - (6.7)) se reduce a la siguiente forma:

$$-\nabla p + \mu \Delta \underline{v} = 0 \quad (6.9)$$

$$\text{div } \underline{v} = 0 \quad (6.10)$$

asociadas con las condiciones de contorno

$$\underline{v} = \underline{v}_1 \text{ en } S_1 \quad (6.11)$$

$$\underline{v} = \underline{v}_2 \text{ en } S_2 \quad (6.12)$$

$$p = p_a \text{ en } \partial S \quad (6.13)$$

donde ∂S representa la frontera del meato y p_a es la presión atmosférica del entorno.

Reportando las ecuaciones anteriores (6.9)-(6.13) en forma extensa, tendremos:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (6.14)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (6.15)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (6.17)$$

$$u = u_1; v = v_1; w = w_1 \text{ su } S_1 \quad (6.18)$$

$$u = u_2; v = v_2; w = w_2 \text{ su } S_2 \quad (6.19)$$

$$p = p_a \text{ su } \partial S \quad (6.20)$$

Donde $\underline{v} = [u \ v \ w]^T$.

La descripción del modelo, en su forma más general es ahora completa. Esta formulación permitirá obtener, en la siguiente discusión, las siguientes cantidades físicas asociadas a los diferentes pares cinemáticos considerados:

- la distribución de la velocidad del fluido en el interior del meato

- la distribución de tensiones en el interior del meato
- las fuerzas externas necesarias para mantener en movimiento las paredes S_1 y S_2 del meato (y en consecuencia las entidades F_1 y F_2)
- el flujo volumétrico de lubricante necesario para la lubricación apropiada.

La formulación de la teoría de la lubricación descrito anteriormente (ecuaciones (6.9) - (6.20)) todavía puede ser simplificada por medio de algunos supuestos adicionales en el movimiento del fluido en el interior del meato. Estas suposiciones, siendo la naturaleza esencialmente heurística, se verifican sustancialmente en todas las aplicaciones principales de interés práctico. Los supuestos se pueden resumir de la siguiente manera:

- se supone que la componente v de velocidad, según el eje x , y todas sus derivadas espaciales son despreciables en todo el meato con la excepción de las zonas cerca de los bordes S_1 y S_2 (es decir $v \approx 0$, $\frac{\partial v}{\partial x_i} \approx 0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \approx 0$ con $i, j = 1, 2, 3$); desde un punto de vista físico, esto es equivalente a despreciar el movimiento del fluido en la dirección vertical;
- se supone que la derivada espacial de los componentes u y w de la velocidad a lo largo de la dirección x y z ($\frac{\partial u}{\partial x}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $\frac{\partial w}{\partial x}$; $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial u}{\partial z}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$; $\frac{\partial w}{\partial z}$; $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$) son despreciables en comparación con las derivadas similares en la dirección y ($\frac{\partial u}{\partial y}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; $\frac{\partial w}{\partial y}$; $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$) y con respecto a la presión p (sigue que $\Delta u \approx \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ y $\Delta w \approx \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$); esta segunda hipótesis es equivalente, en términos físicos, a considerar despreciables los esfuerzos tangenciales generados por variaciones de velocidad en la dirección x y z en comparación con los generados por las variaciones de velocidad en la dirección y con respecto a la presión.

A la luz de todos estos las ecuaciones de movimiento (6.14) - (6.16) se pueden escribir como:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (6.23)$$

Donde la (6.23) muestra como p no dependa de y , es decir, $p = p(x, z)$.

Integrando las (6.21) y (6.23) se obtiene:

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + c_1(x, z)y + c_2(x, z) = 0 \quad (6.24)$$

$$w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 + c_3(x, z)y + c_4(x, z) = 0 \quad (6.25)$$

donde las funciones $c_i (i=1, \dots, 4)$ pueden ser determinadas por las condiciones de contorno (6.18) y (6.19). Al imponer las condiciones anteriores, obteniendo le c_i y sustituyendo en (6.24) - (6.25) se obtiene:

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y - y_1)(y - y_2) + \frac{u_2 - u_1}{y_2 - y_1} (y - y_1) + u_1 \quad (6.26)$$

$$w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y - y_1)(y - y_2) + \frac{w_2 - w_1}{y_2 - y_1} (y - y_1) + w_1 \quad (6.27)$$

Estas ecuaciones enlazan las velocidades u y w a la presión p . Para determinar las tres incógnitas fundamentales del problema (u , w y p) es necesario tener en cuenta la ecuación de continuidad (6.7). Mediante la integración de esta ecuación con respecto a y (entre y_1 e y_2) se obtiene:

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial w}{\partial z} dy = - \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial v}{\partial y} dy = -(v_2 - v_1) \quad (6.28)$$

Por otro lado, recordando la fórmula de integración de Leibniz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha(x,z)}^{\beta(x,z)} f(x, y, z) dy = \\ = \int_{\alpha(x,z)}^{\beta(x,z)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) dy + f(x, \beta(x, z), z) \frac{\partial \beta(x, z)}{\partial x} - f(x, \alpha(x, z), z) \frac{\partial \alpha(x, z)}{\partial x} \end{aligned} \quad (6.29)$$

donde en este caso, f , α y β son funciones genéricas, se obtiene:

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_1}^{y_2} u dy - u_2 \frac{\partial y_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} \quad (6.30)$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial w}{\partial z} dy = \frac{\partial}{\partial z} \int_{y_1}^{y_2} w dy - w_2 \frac{\partial y_2}{\partial z} + w_1 \frac{\partial y_1}{\partial z} \quad (6.31)$$

Sustituyendo (6.30) - (6.31) en la ecuación (6.28), recordando las expresiones de velocidad (6.26) - (6.27) y poniendo $h(x, z) = y_2(x, z) - y_1(x, z)$ (donde con $h(x, z)$ se indica el espesor del meato, asumido conocido) se llega a las siguientes ecuaciones a las derivadas parciales con una única incógnita $p(x, z)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12\mu(v_2 - v_1) + 6\mu h \left[\frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial z} \right] + \\ - 6\mu h \left[(u_2 - u_1) \frac{\partial(y_2 - y_1)}{\partial x} + (w_2 - w_1) \frac{\partial(y_2 - y_1)}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (6.32)$$

La ecuación (6.32) es comúnmente llamado ecuación de Reynolds generalizada y constituye, junto con la condición de contorno (6.20), el punto de partida para el estudio de la mayoría de los problemas de lubricación. El miembro izquierdo esencialmente es la

acción de la presión sobre el movimiento del fluido; el primer término del miembro derecho es llamado termino de aplastamiento (así llamado porque se asocia con el aplastamiento del meato), mientras que los otros dos términos de dicho miembro son términos puramente hidrodinámicos (es decir, debido al efecto de arrastre que las paredes del meato tienen en el propio fluido).

La ecuación (6.32), junto con (6.20), por lo tanto, hace que sea posible encontrar, siendo conocidos v_1 , v_2 , y_1 e y_2 , la distribución de la presión p en el meato; en este punto los componentes u y w de la velocidad se pueden calcular por las relaciones (6.26) - (6.27).

Con respecto a las acciones F_1 y F_2 necesarias para mantener en movimiento las paredes del meato (neto de la acción de la presión ambiental p_a) se obtiene:

$$F_1 = \int_{S_1} (\sigma \underline{n}_1 + p_a \underline{n}_1) dS_1 \quad (6.33)$$

$$F_2 = \int_{S_2} (\sigma \underline{n}_2 + p_a \underline{n}_2) dS_2 \quad (6.34)$$

donde $\underline{n}_1$ y $\underline{n}_2$ son los vectores normales unitarios saliente de las superficies S_1 y S_2 (hacia el exterior del meato), mientras que, a la luz de los supuestos precedentemente, el tensor de las tensiones (véase la ecuación (6.5)) ahora tiene la forma:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \dots & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \dots & \dots & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & \mu \frac{\partial u}{\partial y} & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \dots & -p & \mu \frac{\partial w}{\partial y} \\ \dots & \dots & -p \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

Finalmente, en cuanto al flujo volumétrico de lubricante Q puede ser determinado por la integración:

$$Q = \int_{\partial S_u} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS = - \int_{\partial S_e} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS \quad (6.36)$$

donde $\underline{n}$ es el vector unitario normal a la frontera del meatos ∂S saliente (siempre dirigida hacia el exterior del meato).

6.3.1. LOS DIFERENTES REGÍMENES DE LUBRIFICACIÓN

Hay cuatro tipos de lubricación que regulan las condiciones de fricción entre dos superficies en movimiento relativo y en contacto. La curva de Stribeck (véase la Figura 6. 5) ilustra la aparición de estos diferentes tipos de lubricante en función de la combinación de lubricante μ la viscosidad, la velocidad de deslizamiento v y la presión normal p .

En condiciones secas el lubricante está ausente y solamente las capas de óxido presentes en cada superficie en contacto pueden actuar como una capa de separación. En

este caso, la fricción es alta, y una situación de este tipo está presente sólo en algunas operaciones.

La lubricación límite se rige por películas finas (típicamente orgánicas) adsorbida físicamente o químicamente y adherentes a la superficie del metal. Estas películas constituyen una barrera en contacto metal-metal en condición de contacto extenso, en la que las propiedades del fluido lubricante no tienen ningún efecto. Como en el caso de condiciones secas, la fricción es alta.

Una lubricación a película se produce cuando está presente una espesa capa de lubricante sólido o de recubrimiento seco entre las superficies en contacto. En este caso, las condiciones de fricción se rigen por la resistencia al cizallamiento de la película lubricante.

Figura 6. 5: Curva di Stribeck

La lubricación hidrodinámica es cuando una espesa capa de lubricante líquido está presente entre las superficies en contacto. En este caso, las condiciones de fricción se rigen por la viscosidad del lubricante y la velocidad relativa entre las superficies mismas. La viscosidad de la mayoría de los lubricantes disminuye rápidamente al aumentar de la temperatura. Por consiguiente, como se ve en la curva de Stribeck, la fricción es relativamente baja.

La lubricación mixta es la situación más común debido, en la mayoría de los casos, a las altas presiones y las bajas velocidades de deslizamiento. En este caso, los picos están en condición de lubricación y los valles de la superficie del metal se llenan de lubricante líquido. Muchos lubricantes contienen líquidos orgánicos que absorben o reaccionan químicamente con la superficie metálica, con el fin de ayudar a proporcionar una barrera que evita el contacto de metal con metal. Si hay suficiente lubricante, el lubricante en los valles de la superficie del metal puede actuar como un cojinete hidrostático. En este caso, tanto los picos en contacto con la superficie de metal que los valles hidrostáticos sostienen la presión normal. La fricción que se obtiene es moderada.

Si se compara con los costes de las materias prima, equipos y mano de obra, el coste de los lubricantes es muy bajo; debido a esto, se podría pensar que el impulso económico para el estudio y la comparación de los lubricantes es igualmente modesto. Sin embargo, la composición del lubricante es uno de los principales factores que influyen en la duración de muchos sistemas dinámicos.

No es de importancia secundaria la comparación de los lubricantes actualmente en uso con lubricantes alternativos, eco compatibles, y donde se elimina la presencia de fosfatos.

Dicho esto, hay varias pruebas hecha en bancos de simulación, diseñado para evaluar el coeficiente de fricción y la lubricación en los sistemas tribológicos.

Para determinar el coeficiente de fricción o la curva de Stribeck, además de los efectos lubricantes, deben considerarse los efectos de intercambio de calor entre los distintos materiales. Por lo tanto, las pruebas de lubricación utilizados para determinar los factores de fricción, deben incluir tanto la lubricación como el efecto del intercambio térmico.

El tribómetro es instrumento de medida que permite medir el coeficiente de fricción (estático o dinámico) y el desgaste de los materiales que se deslizan uno sobre otro, incluso en presencia de un medio fluido (aceite lubricante, grasa, agua, etc.), cambiando la carga aplicada, la velocidad de deslizamiento mutuo y la temperatura durante la prueba. La alta flexibilidad del instrumento permite establecer una amplia gama de presiones de contacto (de 0,1 MPa hasta 10 GPa), la velocidad (0÷500 rpm) y la temperatura (-10 ° C ÷ 170 ° C). Es posible variar la geometría de contacto y el desplazamiento de acuerdo con diferentes configuraciones, con el fin de simular mejor las condiciones de trabajo reales de los componentes probados. Existen diferentes tipos de tribómetros como:

- *Ball on disc* (bola estática en disco giratorio)
- *Pin on disc* (cilindro estático en disco giratorio)
- *Block on ring* (bloque estático en rotación sobre anillo)
- *Ball on flat “fretting”* (movimiento alternativo lineal de una esfera sobre una superficie)

El instrumento permite realizar pruebas de desgaste acelerado, a fin de proporcionar una estimación cuantitativa del tiempo de mantenimiento de las prestaciones mecánicas y tribológicas de los materiales ensayados, tales como garantía de calidad del producto.

El tribómetro reproduce, en un ambiente controlado, el funcionamiento real de los particulares probados, permitiendo así, una comprobación de las propiedades de fricción y del desgaste de los materiales; el uso de tal instrumento es importante en cualquier situación problemática de contacto entre las partes móviles.

Aquí algunos ejemplos:

- verificación de las propiedades lubricantes de aceites, incluso en condiciones de temperatura variable (alta y baja) y de carga (determinación de la curva de Stribeck);

- verificación cuantitativa de la eficacia de los recubrimientos resistentes al desgaste o bajo coeficiente de fricción (con la posibilidad, también, de la evaluación de la adhesión al sustrato);
- certificación de la medición (de acuerdo con ASTM o ISO) de las propiedades tribológicas (desgaste y coeficiente de fricción.) de los materiales o fluidos lubricantes que requiere el uso de tribómetros calibrados adecuadamente;
- determinación del coeficiente de fricción estático con polímeros auto lubricantes en contacto con superficies de metal.

A continuación, con el fin de mostrar la metodología de caracterización de los fenómenos de lubricación, se desarrolla un estudio experimental como un ejemplo típico de enfoque tribológico. Se utilizarán todos los conceptos vistos hasta ahora en este capítulo. A través de una caracterización experimental de tres diferentes aceites a base vegetales se han estudiado sus composiciones químico-física, sus propiedades reológicas, como se ha descrito en la sección 6.2, con una de pruebas tribológicas. La prueba consiste en la utilización de un tribómetro con ball-on-flat con movimiento alternativo.

La prueba, realizada de acuerdo con las normas internacionales, devolverá el valor del coeficiente de fricción, el desgaste de las superficies de contacto y los regímenes de lubricación a través de las curvas de Stribeck para cada aceite ensayado. Con el objetivo de comprender los mecanismos de desgaste también se analizaron, con un microscopio confocal, las superficies desgastadas.

6.4. EJEMPLO TÍPICO DE ENFOQUE TRIBOLÓGICO

Las crecientes preocupaciones ambientales proporcionan motivación para aumentar la demanda y el uso de fluidos ecológicos [143] en diversos sectores industriales como la agricultura, la navegación y la industria ferroviaria [144]. En los últimos años, la investigación para la producción de nuevos productos y para el desarrollo de la química verde sostenible hace que los aceites vegetales sean atractivos para fines de lubricación.

Numerosos fluidos utilizados como lubricantes son a base de aceite mineral y se obtienen principalmente de derivados de petróleo y, posteriormente, se utilizan como fluidos de transmisión automotriz, fluidos de corte limpios, fluidos hidráulicos, aceites para engranajes industriales, aceites para laminación en frío y lubricantes de engranajes para automóviles [145]. Desafortunadamente, debido a su baja biodegradabilidad y alta toxicidad, estos aceites no son una alternativa viable. Además, debido a la escasa disponibilidad de petróleo, a la participación de petróleo crudo en muchas situaciones políticas y a su alto coste, las fuentes de energía alternativa están teniendo un rol cada vez más importante en la industria. Gracias a varias ventajas, como la baja contaminación ambiental, fáciles combinaciones de aditivos [146], biodegradabilidad [147], [148], bajos costes de producción [149], baja toxicidad, altos puntos de inflamación, baja volatilidad e índices de alta viscosidad [144], los aceites vegetales representan una buena alternativa a los aceites a base de petróleo.

Debido a razones ambientales y económicas, los aceites vegetales, residuos reciclados o aceites usados, después de su modificación química apropiada [150], se utilizan para fines industriales, específicamente como lubricantes. Por estas razones y por su excelente lubricidad, los lubricantes a base de aceite vegetal y sus derivados están siendo investigados como una base para lubricantes y fluidos funcionales [151]. La mayor parte de las materias primas para la preparación de aceites vegetales proceden de plantas oleaginosas: girasol, soja, colza, algodón y, en la zona tropical, de palmeras, cocoteros, *Jatropha curcas* L. [150], [152]. Por ejemplo, en las empresas estadounidenses el aceite vegetal más producido a gran escala es el aceite de soja [150]. En Europa, el aceite vegetal más barato y más popular, en aplicaciones industriales y no alimentarias, es el aceite de colza [152], [153]. El uso de aceites vegetales como lubricantes en régimen de lubricación de tipo límites y de tipo hidrodinámica se corrobora por su estructura química hecha con largas cadenas de ácidos grasos [154].

Los aceites vegetales tienen mayores propiedades anticorrosivas para las superficies metálicas y los índices de viscosidad resultan más altos. Sin embargo, los aceites vegetales tienden a mostrar baja estabilidad oxidativa y puntos de fusión más altos. Para resolver este tipo de desventajas los aceites vegetales son sometidos a modificaciones químicas con enfoques independientes [155]–[157]. Todos los aceites crudos de plantas, desde un punto de vista químico, tienen una estructura de triacilglicerol y están compuestos químicamente de triglicéridos de ácidos grasos saturados e insaturados. La presencia de enlaces insaturados $C = C$ es normalmente la causa de una pobre estabilidad oxidativa. Uno de los métodos más importantes y más baratos para

mejorar el índice de viscosidad y la estabilidad termo-oxidativa es la transesterificación [158]. La preparación de ésteres de alcoholes inferiores y ácidos grasos de aceites vegetales a través del proceso de transesterificación implica la reacción entre el aceite y alcohol etílico o alcohol metílico usando catalizadores homogéneos. El catalizador puede ser KOH, NaOH o H₂SO₄ [159], [160] y la reacción producida presenta la producción de glicerol (Figura 6. 6).

Figura 6. 6: Reacción de transesterificación

Después de la esterificación del aceite vegetal se necesitan otros procesos:

- separación de productos de esterificación;
- destilación con metanol
- purificación del éster.

El producto obtenido, denominado *FAME* (Fatty Acid Methyl Ester) que significa éster metílico de los ácidos grasos superiores que se encuentran en el aceite vegetal crudo. Después de este proceso, el producto de reacción, también se utiliza como aditivos para los aceites combustibles o en forma pura como "biodiesel".

Otra modificación química para mejorar la lubricidad y la estabilidad de un aceite vegetal crudo es el proceso de hidrotratado o la hidrogenación.

Desde el punto de vista químico, el aceite vegetal hidrotratado (HVO) es una mezcla de hidrocarburos parafínicos y la estructura química es C_nH_{2n+2} [161]. El proceso utiliza el hidrógeno para eliminar el oxígeno y también para eliminar posibles insaturaciones, convertidas en agua, de triglicéridos y parafinas. El proceso para producir HVO, con respecto a la transesterificación (FAME), no necesita productos químicos adicionales (metanol) y no produce glicerol como un producto secundario de la reacción [162]. El mecanismo de la reacción para producir HVO consiste en una serie de pasos consecutivos (Figura 6. 7), tales como la hidredesoxigenación, la descarboxilación y la descarbonilación [163].

El proceso implica la formación de propano como un subproducto que puede ser utilizado para la producción de energía o en la síntesis química.

Debido a sus buenas propiedades lubricantes y protectoras (anti-corrosivas) [164], [165] el aceite de colza crudo y el aceite de *Jatropha curcas* L. son dos de las fuentes más comunes para lubricante ecológico. Es importante observar que, en su uso como

lubricante, el aceite de colza y el aceite de Jatropha tienen un bajo nivel de toxicidad y un alto grado de biodegradabilidad junto con las propiedades mencionadas anteriormente.

Los resultados del estudio de [166] indican que, en contactos lubricados con alta carga de cierre, es decir, bajo régimen de lubricación de tipo elastohidrodinámico, el aceite de colza proporcionaría el menor esfuerzo cortante sobre las superficies de deslizamiento, aproximadamente de un 70% del valor de un aceite nafténico. Esto reduce las pérdidas por fricción y aumenta la eficiencia.

Figura 6. 7: Un ejemplo de hidrotratamiento para obtener HVO.

El aceite de colza tiene el beneficio de producir una película de aceite de protección relativamente gruesa y dar una fricción relativamente baja [166].

Recientemente, se han realizado muchos estudios sobre las propiedades de desgaste debida al uso de aceite vegetal en diferentes técnicas de ensayo con tribómetro. Sulek et al. [167] investigaron las propiedades tribológicas del aceite de éster metílico de colza por un tribómetro HFRR. Haseeb et al. en sus pruebas de desgaste con un tribómetro de cuatro bolas para investigar sobre las propiedades tribológicas del aceite de éster metílico de palma encontraron que la fricción y el desgaste aumentaban con el aumento de la temperatura [168].

En varios estudios el resultado sobre el rendimiento tribológico muestra que los aceites a base vegetal superan a los aceites a base mineral en término de prestaciones anti desgaste y fricción [169], [170] y en término de resistencia a la fatiga [171], [172]. Con respecto a los aceites minerales, los aceites vegetales tienen un menor coeficiente de fricción y una mejor resistencia a las picaduras (resistencia corrosiva), pero también una menor estabilidad térmica y oxidativa [149], [173], [174].

Shahabuddin et al. [175] han estudiado las características tribológicas del aceite de *Jatropha* (JO) como aditivo para bio-lubricantes mediante el uso de una máquina de ensayo de fricción y desgaste Cygnus y un tribómetro a cuatro-bolas. Sus resultados muestran que la adición de aceite de *Jatropha* en el lubricante base actuó como un muy buen aditivo que redujo la fricción y el diámetro de ranura debido al desgaste.

Por lo tanto, visto el interés sobre las prestaciones de los aceites a base vegetal en este apartado de la tesis se presenta una investigación sobre el rendimiento tribológico del aceite de colza y del aceite de semilla de *Jatropha curcas* L. en el contacto lubricado de acero. Las pruebas se llevaron a cabo utilizando un tribómetro de moto recíproco de *ball-on-flat* con varias frecuencias de ensayos y con varias cargas normales aplicada para el cierre del contacto mismo. El acero AISI E52100 y el acero X210Cr12 han sido elegidos como materiales para probar las propiedades lubricantes de los aceites.

Como muestra el estudio de Koga et al. [176] la aleación de acero AISI E52100 se utiliza en aplicaciones tribológicas como, por ejemplo, guías lineales y rodamientos debido a su alta dureza y resistencia al desgaste, mientras que el acero X210Cr12 se utiliza para la producción de moldes sometidos a grandes esfuerzos, herramientas de rectificado [177] o herramientas para el conformado en frío.

De hecho, debido al interés en ese tema, en ese apartado de tesis se ensayan tres diferentes aceites vegetales:

1. aceites de Metil Ester de Colza (RME),
2. aceite Vegetal Hidrotratado de Colza (HVO)
3. aceite crudo de *Jatropha curcas* L. (JCL).

De acuerdo con la norma ASTM D445 - Método de Ensayo Estándar para Viscosidad Cinemática de Líquidos Transparentes y Opacos (y Cálculo de la Viscosidad Dinámica) se han investigado importantes características y propiedades químico físicas de los aceites bajo estudio como:

- la viscosidad cinemática,
- la viscosidad dinámica,
- la densidad,
- el punto de inflamación
- el número total de acidez (*TAN*).

Para la prueba tribológica, los resultados se interpretarán sobre la base de la evolución del coeficiente de fricción.

6.4.1. MATERIALES Y METODOLOGÍA

6.4.1.1. ACEITES Y SUS ÁREAS DE CULTIVO

Esta investigación se desarrolló en los laboratorios del Departamento de Ingeniería Mecánica, Química y Diseño Industrial de la Universidad Politécnica de Madrid y en el Laboratorio de Mecánica Aplicada del Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad de Salerno, sobre aceites suministrados por la Universidad Checa de Ciencias de la Vida de Praga.

El aceite de colza crudo se obtiene de las semillas de colza (*Brassica napus*) perteneciente a la familia Brassicaceae. Se prefiere el cultivo de colza en ambientes montañosos y los principales productores mundiales de aceite de colza son: Canadá, China, Estados Unidos, Francia, India, Pakistán y Alemania. *Jatropha curcas* L. es un arbusto perenne y venenoso de la familia de las Euphorbiaceae. Sus áreas de crecimiento son las regiones subtropicales y tropicales en África, Sur y centro América y Asia del Sur.

En nuestro caso las semillas de plantas de *Jatropha curcas* L. procedían de Indonesia y fueron prensadas por la máquina Labor Tech MP Test 5.050 aplicando una presión de 5 kN a una velocidad de deformación de 10 mm min⁻¹.

El aceite crudo de JCL era de color amarillo tendiente al verde oscuro. El perfil de ácidos grasos del aceite de JCL, con enlaces dobles en la cadena molecular, es el siguiente: Palmítico (C16: 0), Steárico (C18: 0), Araquídico (C20: 0), Oleico (C18: 1) y Linoleico (C18: 2) [178].

El perfil de ácidos grasos del aceite de RME es: Palmítico (C16: 0), Esteárico (C18: 0), Oleico (C18: 1), Linoleico (C18: 2), Linolénico (C18: 3) y Eicosenoico (C20: [179].

El aceite vegetal hidrotratado (HVO) químicamente es una mezcla de hidrocarburos parafínicos. Está libre de azufre y compuestos aromáticos donde los enlaces dobles y el oxígeno se convierten en hidrocarburos debido a la saturación de los enlaces dobles y a la eliminación del oxígeno (descarboxilación, descarbonilación, deshidratación). Como se menciona en [180] a una baja temperatura de reacción de hidrotratamiento, el producto líquido orgánico producido contenía también ácidos grasos libres y triglicéridos (es decir, a 260°C, ácido palmítico (C16: 0) en un 0,1 wt%, ácido esteárico (C18:0) en un 0,6 wt% en peso. A 340 ° C, ácido palmítico (C16: 0) y ácido esteárico (C18: 0) <0,05 wt%).

6.4.1.2. PROPIEDADES FÍSICOQUÍMICAS DE LOS ACEITES

Con el fin de conocer la densidad de los tres aceites, se utilizó un picnómetro de 10 ml en una sala a temperatura controlada (15 °C). Para la viscosidad, la temperatura era de 40 °C bajo las recomendaciones de la norma ASTM D445-65 y se empleó un viscosímetro Afora Cannon-Fenske (Serie 300) [148]. Una propiedad importante para un fluido, por lo que se utiliza como fluido lubricante en aplicaciones industriales y también como aditivo para combustible diésel, es la viscosidad cinemática. De hecho, este

parámetro afecta al mecanismo de lubricación y, por tanto, a la tasa de desgaste de las superficies de deslizamiento.

Para la determinación del punto de inflamación, para los tres aceites, se ha utilizado un semi-automático *Pensky-Martens Flash Point Tester*, de acuerdo con la norma ASTM D93 IP 34 DIN 51758. El punto de inflamación se define como la temperatura mínima, a una presión de 1 atm, a la cual una sustancia combustible en contacto con el aire emite suficientes vapores para que la inflamación pueda producirse proporcionando un disparo externo de energía. La muestra se calienta lentamente ($5\text{ }^{\circ}\text{C min}^{-1}$) y a velocidad constante con agitación continua. A intervalos regulares se va introduciendo una pequeña llama en el contenedor del instrumento donde se encuentra el aceite bajo ensayo interrumpiendo simultáneamente la agitación. Los resultados obtenidos, de acuerdo con la norma ASTM D445, se corrigieron usando la fórmula (6.37). Los resultados se corrigieron a una presión de 760 mmHg debido a que el ensayo se realizó a una presión atmosférica de 703 mmHg.

$$T = T_{obs} + 0.333 \cdot [760 - p_{obs}] \quad (6.37)$$

El número total de acidez (TAN) en las muestras de aceite se examinó de acuerdo con la norma ASTM D664. Las titulaciones se llevaron a cabo utilizando un titulador potenciométrico equipado con un agitador integrado y con indicador de pH estándar y electrodos de referencia. Como disolvente se ha seleccionado una mezcla de: 2,5 ml de agua, 247,5 ml de alcohol isopropílico y 250 ml de cloroformo. El titulante ha sido [KOH] = 0,1 mol/L en alcohol isopropílico y la muestra ha sido de 2 mg para FAME y 2 mg para HVO. Cada muestra se tituló tres veces.

En cuanto a la muestra de aceite crudo de *Jatropha curcas* L., en la prueba de titulación para la evaluación del TAN, se ha observado que la solución se comportó como una solución tampón. Este comportamiento se debe a la presencia de proteínas en el aceite crudo [181]. Una molécula anfiprótica (o ion), como la del agua, de los aminoácidos o de las proteínas, puede donar o aceptar un protón, actuando, así como un ácido o una base. Este comportamiento se llama especies anfipróticas. Los aminoácidos $R-CH(NH_2)-COOH$ pueden donar el protón ácido y/o aceptar un protón por grupo amina.

Además, ya que pueden actuar como un ácido o una base, son anfóteros [182]. Por esta razón, la muestra de aceite crudo de *Jatropha* se sometió a un proceso de extracción de proteínas antes de la titulación. Este método, llamado extracción líquido-líquido [183], es útil para separar los distintos componentes de una mezcla.

El método basado en la diferencia de solubilidad de los componentes de una mezcla entre dos líquidos inmiscibles o parcialmente miscibles consiste en transferir uno o más soluto(s) contenido(s) en una solución a otro líquido (disolvente). Como disolventes se eligió una mezcla de 100 ml de cloroformo y 4 g de aceite de semillas de *Jatropha curcas* L. crudo y 40 ml de agua en un embudo de separación.

El proceso de separación (Figura 6. 8) se repitió tres veces. Una vez obtenida la separación de las proteínas, la mezcla de cloroformo-aceite se utilizó como base para el disolvente en el proceso de titulación para calcular el TAN. Los resultados de las propiedades fisicoquímicas se presentan en la Tabla 6. 1.

Figura 6. 8: Embudo de separación utilizado en la extracción líquido-líquido.

Tabla 6. 1: Propiedades fisicoquímicas de tres aceites.

Propriedades	RME	HVO	Aceite de Jatropha curcas L.
Density at 15 °C (kg/m ³)	884.5	780.7	916.9
Kinematic viscosity at 40 °C (cSt)	2.829	4.679	36.605
Flash point at 760 mmHg (°C)	234±0.5	245±0.5	263±0.5
TAN (mg KOH/g)	0.22	0.08	21.4

Para evaluar el comportamiento de la viscosidad dinámica se ha utilizado un viscosímetro verificado de tipo de rotacional: Dial Brookfield (Viscometer RV). El viscosímetro Dial Brookfield (precisión $\pm 1\%$ y repetibilidad $\pm 0,2\%$) está equipado con un sistema de protección (para el correcto posicionamiento de los usillos) y una serie de husillos bajo la recomendación de Brookfield Society Engineering.

En general, la ley de Newton de la viscosidad se expresa por:

$$\tau = \mu \cdot \gamma^n \quad (6.40)$$

Donde τ , μ y γ representan: el esfuerzo cortante, la viscosidad dinámica y el gradiente de velocidad, respectivamente. El exponente n puede asumir valores: $0 \leq n < 1$, $n = 1$ y $n > 1$ para fluidos Pseudoplásticos, Newtonianos y Dilatantes, respectivamente.

6.4.1.3. PRUEBAS TRIBOLÓGICAS

Con el fin de obtener una amplia investigación sobre el rendimiento tribológicos de los aceites en una amplia gama de velocidades relativas, las pruebas de fricción se llevaron a cabo utilizando un tribómetro dotado de movimiento alternativo Ball-on-Flat Reciprocatory Friction Monitor TR-BIO 282 (Ducom Instrumentos, Bangalore, India), siguiendo un procedimiento de ensayo consolidado [54], [184]–[187] y repitiendo cada prueba tres veces.

Figura 6. 9: Representación esquemática del aparato alternativo

En la Figura 6. 9 se representa el aparato esquemático. Una esfera de acero AISI E52100, de 10 mm de diámetro, se mantuvo en contacto con una muestra plana de acero X210Cr12. En la interfaz de estos dos elementos se depositó el lubricante. El movimiento recíproco de la esfera está garantizado por un motor de tipo paso a paso y un balancín. Una celda de carga en la parte inferior de la muestra plana registraba la fuerza de fricción. Se aplicaron diferentes condiciones de velocidad y de carga al aparato para caracterizar el comportamiento tribológico de los aceites en diferentes situaciones. La carga se seleccionó con valores de 10 y 19 N, mientras que la frecuencia de oscilación fue igual a 10 y 20 Hz para cada condición de carga. Las pruebas duraron 30 min, lo suficiente para obtener un valor estacionario del coeficiente de fricción. La carrera de la esfera sobre la placa plana tenía una longitud de 8 mm, la distancia total recorrida por la bola fue igual a 288 m y 648 m con la frecuencia de 10 Hz y de 20 Hz, respectivamente.

La presión aplicada se evaluó utilizando la teoría del contacto de Hertz:

$$a = 0.908 \sqrt[3]{\frac{N}{D \cdot E^*}} \quad (6.41)$$

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (6.42)$$

$$D = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_2} \right) \quad (6.43)$$

En la ecuación (6.41) r es el radio del área de contacto y N es la carga normal aplicada. En la ecuación (6.42) E representa el módulo de Young y ν el coeficiente de Poisson de los respectivos materiales. En la ecuación (6.43) R y R' representan los radios de curvatura de los materiales.

En función de la carga normal aplicada, por la esfera de 10 mm de diámetro, la presión de contacto era igual a 660 y 818 MPa. Cada ensayo se llevó a cabo a temperatura ambiente $T = 20^\circ\text{C}$, y con control de humedad (H) relativa del laboratorio de ensayo a $H = 55 \pm 5\%$. Antes de cada prueba, las muestras de aleación de acero y cromo fueron limpiados por ultrasonido en alcohol limpio y secados a fondo.

Para estimar el desgaste de las superficies deslizantes después de los tribo-tests, se llevó a cabo una investigación óptica mediante una adquisición superficial topográfica llevada a cabo con un perfilómetro óptico sin contacto 3D, PLu Neox (Sensofar, Terrassa, España), que funciona como un microscopio confocal [188], [189] o como un interferómetro de luz blanca [190]. Las superficies desgastadas, previamente limpiadas y lavadas con etanol y secadas, se escanearon usando una lente confocal con un aumento de 20x. Este análisis permitió evaluar el volumen de desgaste y la rugosidad superficial de las esferas desgastadas. Para evaluar el volumen de desgaste las superficies de las esferas se convirtieron en superficies planas (utilizando el software del equipo óptico), lo que permitió convertir la tapa de la esfera en un cráter de desgaste. Los parámetros de rugosidad elegidos fueron R_a y R_q que describen la morfología de la superficie desgastada [61], [191].

6.4.2. RESULTADOS Y DISCUSIONES

6.4.2.1. PROPIEDADES FISICOQUÍMICAS

Los resultados de la viscosidad cinemática y del TAN Tabla 6. 1 muestran una diferencia sustancial entre los dos aceites de colza (HVO, RME) con respecto al aceite crudo JCL. De hecho, el valor de la viscosidad cinemática y del TAN del aceite crudo JCL parece ser hasta casi 10 veces y 100 veces, respectivamente, mayor que los otros dos aceites (HVO y RME, respectivamente). Los resultados son consistentes con los encontrados en la literatura científica. De hecho, Emil et al. [192], en su estudio sobre la evaluación comparativa de las propiedades fisicoquímicas del aceite crudo de semilla de JCL proveniente de diferentes áreas de cultivo, encontraron los mismos resultados para la viscosidad cinemática en términos de orden de magnitud. Los mismos resultados para la viscosidad cinemática y para el TAN fueron encontrados por Shambhu et al. [193]. Los

resultados indican que la transesterificación y la hidrogenación reducen la viscosidad cinemática en gran medida [193]. Los altos valores del TAN del aceite crudo de JCL son causados por la presencia de los ácidos grasos libres [194].

A partir de la Tabla 6. 1 , se puede observar que el valor de la viscosidad cinemática para el aceite de JCL presenta un orden de magnitud superior a lo de los otros aceites; Para el aceite de colza crudo, la viscosidad se reduce por la conversión de los aceites de triglicéridos en ésteres. De hecho, el HVO presenta un valor de viscosidad más alto que lo del RME.

A partir de la misma Tabla 6. 1, los resultados del punto de inflamación de los tres aceites confirman un alto valor para el aceite vegetal con respecto al aceite a base de petróleo. Por lo tanto, esto reduce considerablemente los riesgos de incendio en caso de una fuga de lubricante.

Con respecto al TAN, la Tabla 6. 1 muestra los valores más bajos de esta propiedad para HVO (0,08 mg KOH/g) y para RME (0,22 mg KOH/g). Estos resultados son favorables para los contactos tribológicos lubricados de acero, como los utilizados en las tribo-pruebas, porque un alto TAN puede causar corrosión y escasas propiedades de flujo bajo condiciones de frío. Además, dado que los TAN para el HVO y RME respetan los valores máximos asignados por la norma EN 14104 (0,5 mg KOH/g), estos aceites pueden utilizarse como aditivos en los combustibles diésel.

Figura 6. 10: Evolución del esfuerzo cortante con respecto al gradiente de velocidad.

La Figura 6. 10 muestra el comportamiento reológico de los tres aceites. Para el aceite de semilla de JCL. (línea roja) el exponente n de la ley de Newton para la viscosidad (6.40) es de 0,962 y denota un comportamiento pseudoplástico [195].

De la misma figura es posible ver que para el RME (línea azul) y el HVO (línea púrpura) hay dos secciones de las respectivas curvas:

- 1) entre los valores de la velocidad de corte de 0-0,35 s⁻¹
- 2) después del valor de 0,35 s⁻¹ hasta alrededor de 1,7 s⁻¹.

En ambos casos, el comportamiento es lineal, pero para los valores de velocidad de corte superior a $0,35 \text{ s}^{-1}$ hay un aumento lineal de los esfuerzos de corte [196].

6.4.2.2. RESULTADOS TRIBOLÓGICOS

La Figura 6. 11 presenta la evolución típica del coeficiente de fricción (CoF) para los tres aceites obtenidos con carga de 10 N y con frecuencia de ensayo de 10 Hz . Este gráfico muestra la evolución del coeficiente de fricción durante la prueba de 30 min , subrayando una condición de estado casi constante alcanzada después de la primera fase.

Figura 6. 11: Evolución del CoF durante el tribo-test bajo condiciones lubricadas, con una carga normal de 10 N y frecuencia de ensayo de 10 Hz .

Para estimar un coeficiente de fricción medio y evitar la influencia de la fase transitoria, sólo se consideran los últimos 25 min del ensayo.

Se ha evaluado, también, la varianza de la CoF durante este período y el resultado fue por lo menos de cuatro órdenes de magnitud inferior a la media, lo que indica la estabilidad de CoF alcanzado.

Un primer análisis de esta figura revela las diferencias de los tres aceites en las mismas condiciones, mostrando que el JCL tiene el CoF más bajo.

La Figura 6. 12 muestra los histogramas de los valores medios de CoF - y la desviación estándar relativa - obtenidos bajo las dos cargas, (a) 10 N y (b) 19 N y comparan los resultados en términos de frecuencias de oscilación (10 Hz y 20 Hz).

Figura 6. 12: Valores de los CoFs vs Frecuencia de ensayo para los tres aceites con cargas aplicada de :(a) 10 N y (b) 19 N.

Las barras muestran una como se reducen los CoFs, para los tres aceites bajo estudio, cuando la frecuencia de ensayo, es decir, velocidad de deslizamiento - sube de 10 Hz a 20 Hz. Al comparar los resultados en términos de carga aplicada no se encontró correlación, es decir: una carga más alta no siempre significa un CoF más alto.

Con respecto al comportamiento tribológico de los tres aceites, se puede afirmar que los valores más bajos alcanzados por el CoF son los relativo al aceite crudo de JCL. Por lo tanto, este aceite realiza una lubricación mejor que los otros dos, alcanzando una reducción del CoF de incluso un 22% en caso de 10 N y 10 Hz con respecto al HVO. De hecho, este último siempre presentó el valor del CoF más alto. El CoF del aceite RME se coloca entre los otros dos.

Los aceites bajo estudio contienen ácidos grasos que ayudan a que el lubricante se adhiera a la esfera cuando ocurre un contacto directo y ayuda al mismo lubricante a evitar que los metales froten entre ellos mientras que se mantenga una película lubricante entre las dos superficies [197].

Sharma, et al. [198] declararon que las cadenas de ácidos grasos en el aceite vegetal permitían la formación de una película mono-capa, entre dos superficies deslizantes entre ellas, que impide el contacto directo del metal con el metal. El valor medio del CoF para el aceite de JCL ha sido de 0,13 y 0,11 para valores de frecuencia de 10 Hz y de 20 Hz respectivamente. Se ha encontrado muy poca diferencia a medida que la carga variaba.

Para avalar los resultados alcanzado en ese apartado se ha intentado buscar en la literatura científica ensayos similares hechos por otros investigadores, pero no se han conseguido resultados debido al hecho de que no hay investigaciones que estudien la fricción de este aceite crudo en un aparato tribológico dotado de movimiento alternativo, por lo que el estudio abordado representa una novedad. Esto quiere decir que es difícil comparar los resultados alcanzados en este apartado de tesis con los obtenidos por otros científicos. De hecho, todas las investigaciones encontradas en la literatura científica utilizan equipos de ensayos tribológicos que trabajan con una velocidad de deslizamiento constante.

Para ser exhaustivos, Shahabuddin et al. [175] obtuvieron valores del CoF similares utilizando una máquina de prueba tribológica de tipo *pin-on-disk* para el análisis de aceite crudo de JCL mezclado a diferentes porcentajes con SAE 40.

Los valores del CoF hallados en su investigación, varió entre 0,10 y 0,22 en función del volumen de la mezcla de aceite. De hecho, la mayoría de los valores del CoF de las diferentes muestras de aceite ensayadas se reunían alrededor de 0,15 y el régimen de lubricación que ocurrió durante todas las pruebas fue de tipo límite.

Shashidhara y Jayaram [199] utilizando un tribómetro pin-on-disk para comparar el rendimiento de aceites vegetales de Pongamia y Jatropha encontraron valores del CoF para el aceite crudo de Jatropha que variaban entre 0,05 y 0,07 en función de la carga normal aplicada, que fue de 70 N, 100 N y 150 N determinando, también, un régimen de lubricación de tipo límite.

En los siguientes apartados de este capítulo de tesis se demostrará que los ensayos (realizados en un aparato tribológico dotado de movimiento alternativo) caracterizan el comportamiento de los aceites en todos los regímenes de lubricación (límite, mixto y elastohidrodinámico).

En cuanto al aceite RME, el valor del CoF oscila en el rango de 0,12 y 0,14, ni en este caso se encontró una variación sensible ni una tendencia a medida que aumentó la carga.

Arnsek y Vizintin [200] probaron un aceite de semilla de colza en un dispositivo de prueba de alta frecuencia SRV que proporciona movimiento alternativo de una esfera sobre plano. En su trabajo encontraron una fuerte correlación entre la presión de contacto y el CoF sólo al pasar de 1 GPa a 2 GPa, encontrando valores del CoF varió alrededor de 0,12-0,13. Para las pruebas lubricadas por el HVO los valores del CoF han resultados ser más altos, con respecto a los aceite de JCL y de RME, en todas las condiciones de carga y frecuencia. Estos valores oscilan entre 0,14 y 0,17.

Hartikka et al. [201] hallaron un valor del CoF para un aceite vegetal hidrotratado mayor de 0,175, en una prueba SL-BOCLE. La topografía 3D efectuada con un equipo óptico sobre las esferas bajo ensayo proporcionó información sobre el desgaste de las esferas. Sin embargo, no se encontró información notable sobre el desgaste en la superficie, más dura, de las placas planas de X210Cr12.

En la Figura 6. 13, Figura 6. 14 y Figura 6. 15 se pueden ver las superficies desgastadas y los diámetros de la huella después de los ensayos tribológicos usando HVO, JCL y RME como lubricantes, respectivamente.

Cada figura muestra las topografías 3D en varias condiciones:

- a) Carga 10 N y frecuencia 10 Hz;
- b) Carga 10 N y frecuencia 20 Hz;
- c) Carga 19 N y frecuencia 10 Hz;
- d) Carga 10 N y frecuencia 10 Hz.

Figura 6.13: Superficie desgastadas y diámetros de la huella de las esferas de AISI E52100 después del ensayo tribológico con lubricante HVO: a) Carga 10 N y frecuencia 10 Hz; B) Carga 10 N y frecuencia 20 Hz; C) Carga 19 N y frecuencia 10 Hz; D) Carga 10 N y frecuencia 20 Hz.

Figura 6.14: Superficie desgastadas y diámetros de la huella de las esferas de AISI E52100 después del ensayo tribológico con lubricante JCL: a) Carga 10 N y frecuencia 10 Hz; B) Carga 10 N y frecuencia 20 Hz; C) Carga 19 N y frecuencia 10 Hz; D) Carga 10 N y frecuencia 20 Hz.

Figura 6. 15: Superficie desgastadas y diámetros de la huella de las esferas de AISI E52100 después del ensayo tribológico con lubricante JRME: a) Carga 10 N y frecuencia 10 Hz; B) Carga 10 N y frecuencia 20 Hz; C) Carga 19 N y frecuencia 10 Hz; D) Carga 10 N y frecuencia 20 Hz

En la Figura 6. 15 se muestra el volumen de desgaste obtenido por la topografía. Como evidenciado por los histogramas, el menor volumen de desgaste registrado entre los aceites está relacionado con el HVO que, por el contrario, exhibió un valor del CoF más alto.

Figura 6. 16: Volumen de desgaste de las esferas: (a) 10 N y (b) 19 N.

Con respecto a la influencia de la frecuencia de oscilación, el volumen de desgaste obviamente aumenta a medida que la frecuencia aumenta debido a la duplicación de los ciclos de deslizamiento totales. Otro resultado encontrado ha sido que el aceite RME tiene el peor comportamiento, en termino de volumen de desgaste, con una carga normal aplicada en el ensayo de 10 N. En el caso de una carga normal aplicada en el ensayo de

19 N el aceite JCL ha alcanzado el valor más alto de volumen de desgaste con respecto a las pruebas hecha con los demás aceites.

En la Tabla 6. 2 se indica el volumen de desgaste y el diámetro promedio de la huella: d_m . Se realizaron cuatro mediciones diferentes para cada huella de las esferas después de cada ensayo para evaluar el d_m a lo largo de cuatro direcciones.

Tabla 6. 2: Volumen de desgaste y diámetro de la huella de las esferas desgastadas de AISI E52100 después del tribotest.

		10 N			19 N		
Aceite	Frecuencia	d_m (mm)	std	V (mm ³)	d_m (mm)	std	V (mm ³)
HVO	10 Hz	0,460	0,0066	0,00043	0,558	0,0068	0,00091
	20 Hz	0,474	0,0056	0,00049	0,557	0,0063	0,00092
JCL	10 Hz	0,576	0,0053	0,00098	0,739	0,0127	0,00283
	20 Hz	0,607	0,0109	0,00126	1,010	0,0086	0,01054
RME	10 Hz	0,611	0,0026	0,00138	0,685	0,0057	0,00223
	20 Hz	0,651	0,0093	0,00176	0,946	0,0068	0,00782

En la Figura 6. 17 se resumen los valores de rugosidad, R_a y R_q , evaluados sobre las superficies desgastadas de las esferas a lo largo de una dirección ortogonal al deslizamiento. En estos histogramas se destaca otro hallazgo: mientras que las esferas lubricadas con HVO tenían el menor desgaste también tenían la mayor rugosidad superficial.

Figura 6. 17: Rugosidad superficial de las esferas desgastadas después de las pruebas tribológicas. a) y b) muestran los valores de R_a para 10 N y 19 N respectivamente. c) y d) muestran los valores de R_q para 10 N y 19 N.

La figura muestra la diferencia entre los lubricantes en termino de rugosidad de las superficies desgastadas mostrando cambios debidos a que el valor de volumen de desgaste de las esferas lubricadas con HVO es menor en comparación con las esferas lubricadas con JCL y RME. Esto se puede explicar de acuerdo con la teoría adhesiva [202]. De hecho, si la adhesión se produce en una interfaz entre dos superficies sólidas, en contacto en estado sólido, las asperezas más duras de las dos superficies en contacto se adhieren mutuamente y el corte plástico de estas uniones eliminará o cortará las asperezas más suaves dejando las partículas de desgaste en la superficie más dura.

Los ácidos grasos libres en los aceites vegetales permiten la formación de una película mono-capa en la superficie que evita el contacto directo de metal con metal y preserva la superficie de este tipo de daño. La superficie más lisa de las esferas desgastadas, en el caso de JCL y RME causa una reducción en el COF manteniendo una cantidad mayor de aceite lubricante en la interfaz de los componentes deslizantes con menores variaciones en la altura de la aspereza, reduciendo así el contacto metal-metal [203], [204]. Los fenómenos de desgaste más comunes que se han visto con el análisis de las topografías de las superficies eran de tipo abrasivos y adhesivos debido a la existencia de ranuras rectas a lo largo de la dirección de deslizamiento. Estas ranuras se producen porque las asperezas en la superficie dura (plana) tocó las asperezas de la superficie más suave (esfera) y tienen una estrecha relación con el espesor de la película de lubricante [197].

El alto valor de rugosidad y el bajo valor del volumen de desgaste para las muestras lubricadas con aceite HVO podría encontrar su explicación debido a la prevalencia del fenómeno de desgaste de tipo adhesivo. Es decir, que el aceite HVO no consiguió formar y mantener la capa de lubricante para separar las superficies en condición de baja velocidad de ensayo, lo que también condujo a un valor del CoF más alto, permitiendo el contacto directo de los metales. Cuando se forma una unión entre dos superficies deslizantes, el cizallamiento puede producirse de varias maneras diferentes de acuerdo con las resistencias de los dos sustratos y la unión. Si la unión es más débil con respecto a los dos sustratos, el cizallamiento ocurrirá en la interfaz real del contacto solido donde se forma la unión, en la que el desgaste será muy pequeño, aunque la fricción puede ser de un valor alto [205]. La razón principal de la falta de separación de las superficies a baja velocidad es atribuible al bajo valor de viscosidad del lubricante. Por otra parte, para evaluar la influencia de la viscosidad del lubricante sobre la fricción se debe conocer la variación de la viscosidad al variar la presión, ya que la presión máxima en un contacto elastohidrodinámico (EHD) duro puede alcanzar los valores de 3-4 GPa con un espesor, mínimo, de la película de lubricante en el rango de 0,1-1 mm. Las deformaciones elásticas en tal contacto son de varios órdenes de magnitud más grandes que el espesor mínimo de la película y la viscosidad del lubricante puede elevarse de 10 órdenes de magnitud dentro del meato [166]. Bajo diferentes condiciones de lubricación de tipo límites, el proceso de desgaste puede estar influenciado por muchos otros factores más allá de la adhesión, tales como reacciones químicas, oxidación, corrosión, fatiga y desgaste [206]. De hecho, obtener un mayor valor del coeficiente de fricción (como para el HVO) puede conducir a

una mayor temperatura de la interfaz, que promoverá la formación de una capa de óxido [207]. La capa de óxido ofrecería una cierta cantidad de protección contra el desgaste [208].

La Figura 6. 18 muestra las curvas de Stribeck para los tres aceites con su respectiva desviación estándar, mínimo, máximo y los valores medios del coeficiente de fricción frente al parámetro de Stribeck en el caso de las pruebas realizadas con carga normal de 10 N y con frecuencia de ensayo de 10 Hz. Los gráficos se obtuvieron considerando el parámetro de Stribeck, que fue evaluado como:

$$\eta \cdot \frac{U}{W} \quad (6.44)$$

Donde η representa el valor de la viscosidad absoluta del lubricante, U representa el valor de la velocidad de deslizamiento de la prueba y W representa el valor de la carga normal aplicada.

Las curvas de Stribeck mencionadas anteriormente muestran cómo el valor del CoF varía durante la aceleración de las esferas, es decir, la primera mitad de la carrera, considerando los ciclos después de la fase transitoria. En la misma figura es posible identificar tres áreas (destacadas por I, II y III), que representan los tres diferentes regímenes de lubricación:

- I. para régimen de lubricación de tipo Extrema Presión (EP);
- II. para régimen de lubricación de tipo Lubricación Mixta;
- III. para régimen de lubricación de tipo Elastohidrodinámico (EHD) [209].

Esta clasificación se debe al tipo de contacto, que es un contacto no conforme. Con el fin de estimar una comparación de las variaciones globales de los CoFs - durante todos los regímenes de lubricación - sus valores medios se evaluaron a lo largo de toda la carrera de la esfera. De hecho, la distribución del mecanismo de lubricación a lo largo de la carrera es la misma para los tres aceites y para cada frecuencia considerada.

Figura 6. 18: Curvas de Stribeck para los aceites HVO, JCL y RME, respectivamente.

6.4.3. DISCUCIONES

En este apartado se ha llevado a cabo una investigación sobre las prestaciones tribológicas de aceite crudo de semillas de *Jatropha curcas* L., aceite de éster de colza y aceite de colza hidrogenado en ensayos tribológicos lubricados para una aleación de acero AISI E52100 que desliza contra una aleación de acero y cromo X210Cr12. Se han investigado las propiedades fisicoquímicas de los tres aceites como: la densidad, la viscosidad cinemática, la viscosidad dinámica, el punto de inflamación y el número total de acidez. De hecho, la composición química combinada con las propiedades reológicas afectan el rendimiento de estos lubricantes en los distintos regímenes de lubricación.

Las pruebas tribológicas se llevaron a cabo utilizando un tribómetro dotado de movimiento alternativo de tipo *pin-on-flat* con dos frecuencias de oscilación (10 y 20 Hz). La carga normal aplicada al contacto se ajustó a 10 N y 19 N, la carrera de las esferas ha sido de 8 mm y el tiempo de cada prueba ha sido de 30 min.

Los aceites ensayados exhibieron propiedades fisicoquímicas que permiten un empleo favorable como materia prima para lubricantes en muchas aplicaciones industriales.

Desde un punto de vista tribológico se pueden abordar las siguientes conclusiones:

- El uso de un tribómetro de movimiento alternativo permitió investigar de forma completa el comportamiento de los aceites pasando alternativamente a través de tres diferentes regímenes de lubricación (límite, mixto y elastohidrodinámico), como demuestran las curvas de Stribeck obtenidas;
- Los valores medios del coeficiente de fricción en todas las pruebas se mantienen en el intervalo de 0,11-0,17, que es un rango relativamente bajo si se compara con aceites a base de petróleo crudo; Esto confirma que los ácidos grasos contenidos en los aceites ayudan al lubricante a adherirse a la esfera;
- El aceite de JCL tiene el valor de CoF más bajo entre los tres aceites examinados, seguido por el RME y el HVO. Esto es debido a la gran cantidad de ácido esteárico. De hecho, se sabe que este tipo de ácido tiene la influencia más significativa en la reducción de la fricción [210]. Por otro lado, como se comprueba en [178] la cantidad de ácido esteárico en el aceite de JCL es del 17 wt%, mientras que para el RME esta cantidad es de 0,9 wt%. El hecho de que a un bajo valor del coeficiente de fricción no significa necesariamente que corresponda un bajo valor del volumen de desgaste. Hecho que se hizo hincapié hace más de sesenta años [211]. Una prueba de eso aparece en el resultado del coeficiente de fricción y en el volumen de pérdida debido al desgaste para el aceite HVO que produjo el menor volumen de desgaste con un valor del CoF más alto con respecto a los demás aceites ensayados. Todo eso, se puede explicar a través de la presencia de una baja cantidad de ácido palmítico y ácido esteárico en la composición química del aceite HVO. De hecho, el comportamiento anti desgaste

de los ácidos grasos es el resultado de interacciones complejas entre moléculas del ácido y tipos particulares de hidrocarburos [212];

- Los análisis topográficos llevados a cabo sobre las esferas utilizadas para los ensayos dan una visión más profunda del rendimiento tribológico de los aceites. De hecho, ha sido posible medir un valor del volumen de desgaste sensiblemente menor para la esfera lubricada por el HVO. Al mismo tiempo se ha visto que estas esferas presentaban valores de rugosidad más altos. Esto sugiere una prevalencia de fenómeno de desgaste de tipo adhesivo, ya que el lubricante no consiguió separar las superficies en condición de ensayo de baja velocidad.

6.5. CONCLUSIONES

En este apartado de la memoria de tesis se ha presentado un primer enfoque sobre la teoría de la lubricación. De hecho, se sabe que para reducir la fricción y el desgaste que se produce en un contacto entre dos cuerpos en movimiento relativo entre ellos es necesario lubricar las superficies de contacto. Si entre los elementos de un par cinemático en contacto de deslizamiento se introduce un fluido, de tal manera que el contacto directo entre dos superficies secas sea sustituido con un contacto sólido-líquido-sólido mediado, se puede obtener una fuerte reducción del valor del coeficiente de fricción. El lubricante debe ser capaz de reaccionar a las fuerzas normales que las dos superficies en contacto se transmiten en el acoplamiento y, al mismo tiempo, de dar origen a acciones tangenciales relativamente pequeñas. Se ha presentado y explicados los dos diferentes tipos de lubricación: lubricación fluidoestática y lubricación fluidodinámica. Se ha fijado la atención sobre este último tipo de lubricación fluidodinámica en cuanto es la base de partida para la implementación del modelo fluidodinámico de la articulación del tobillo. Antes de introducir las ecuaciones que gobiernan los fenómenos tribológicos se han presentados y analizados los parámetros para la caracterización de los fluidos lubricantes. Utilizando las hipótesis de literaturas científica se ha presentado de forma teórica como se aborda y desarrolla uno estudio tribológico a través la escritura de las ecuaciones de Reynolds para un caso teórico. Se ha fijado la atención sobre la importancia de las condiciones de contorno que afectan al problema fluidodinámico, que como hemos dicho a lo largo de esta memoria de tesis empiezan con la caracterización geométrica y morfométrica del contacto bajo estudios. A continuación, se han presentado los cuatro tipos de régimen de lubricación que regulan las condiciones de fricción entre dos superficies en movimiento relativo y en contacto que son visible a través la curva de Stribeck en función de la combinación de la viscosidad del lubricante μ , la velocidad de deslizamiento v y la presión normal p . Una vez planteado la metodología teórica de estudios de problemas tribológicos se ha fijado la atención sobre la metodología experimental que se suele utilizar para la caracterización de lubricantes y de materiales que constituyen un contacto tribológico. Por lo tanto, visto el interés sobre las performances de los aceites a base vegetal en este capítulo de tesis se ha presentado una investigación sobre el rendimiento tribológico del aceite de colza y del aceite de semilla de *Jatropha curcas* L. en el contacto lubricado de acero. Las pruebas se han llevado a cabo utilizando un tribómetro de moto recíproco de ball-on-flat con varias frecuencias de ensayos y con varias cargas normales aplicada para el cierre del contacto mismo. El acero AISI E52100 y el acero X210Cr12 han sido elegidos como materiales para probar las propiedades lubricantes de los aceites. Como muestran distintos estudios la aleación de acero AISI E52100 se utiliza en aplicaciones tribológicas como, por ejemplo, guías lineales y rodamientos debido a su alta dureza y resistencia al desgaste, mientras que el acero X210Cr12 se utiliza para la producción de moldes sometidos a grandes esfuerzos, herramientas de rectificado o herramientas para el conformado en frío. De acuerdo con la norma ASTM D445 - Método de Ensayo Estándar para Viscosidad Cinemática de

Líquidos Transparentes y Opacos (y Cálculo de la Viscosidad Dinámica) se han investigado importantes características y propiedades químico físicas de los aceites bajo estudio como: la viscosidad cinemática, la viscosidad dinámica, la densidad, el punto de inflamación y el número total de acidez (TAN). El uso de un tribómetro de movimiento alternativo permitió investigar de forma completa el comportamiento de los aceites pasando alternativamente a través de tres diferentes regímenes de lubricación (límite, mixto y elastohidrodinámico), como demuestran las curvas de Stribeck obtenidas.

Como para el capítulo 5, con referencia a la metrología dimensional, la metodología desarrollada a lo largo de este capítulo ha proporcionado el conocimiento necesario para una correcta caracterización de los materiales que hoy en día se utilizan para la producción de artefactos protésicos. Además, ha sido posible estudiar y desarrollar un método para la determinación de los parámetros tribológicos de los materiales en relación a la capacidad para desarrollar modelos dinámicos de articulaciones humanas con capacidad cuantitativa de predicción del campo de presiones resultante. Debido a eso, a continuación, en el capítulo 7 se utilizarán todos los modelos teóricos y las metodologías experimentales hasta aquí explicados, tanto en campo metrológicos como en campo tribológico. Para una correcta implementación del modelo fluidodinámico de la articulación humana del tobillo se utilizarán las informaciones proporcionada después de un estudio bibliográfico para una modelización rigurosa de los materiales, y de sus comportamientos bajo condición dinámicas, que constituyen el contacto lubricado humano. Se plantearán las ecuaciones diferenciales que regulan y definen el problema tribológico dinámico enfocando la atención a las condiciones de contorno reales que resuelvan el problema diferencial. A razón de esto, se aplicarán los resultados obtenidos en el capítulo 5 para la caracterización de la geometría de la superficie óseas y los obtenidos en este capítulo para la resolución del modelo planteado.

CAPÍTULO 7

DESARROLLO DEL MODELO FLUIDODINÁMICO DE LA ARTICULACIÓN HUMANA

Abstract: In this chapter, the analysis, analytical modeling and numerical resolution has been developed, directed and focused on describing and explaining the dynamic functioning and influence parameters in the complex tribological system that constitutes the human ankle joint. Beginning with the analysis and description of the human synovial joint of the ankle made an anatomical description with its forms and its mobility functions. Subsequently approximative analytical models of lubrication has been considered and developed taking into account the theory of lubrication explained and seen in Chapter 6. All of this taking in account the porosity of cartilage layers, the flow in the cartilage matrix of the sinovial fluid, the no-newtonian behavior of the sinovial fluid, the deformability of the cartilage and the influence of the geometrical parameters on the dynamical models.

7.1. INTRODUCCIÓN

En este apartado se estudiará en detalle la articulación del tobillo humano, ya que representa uno de los sistemas tribológicos más complejos en términos cinemáticos y de grandes cargas aplicadas en pequeñas superficies en contacto. El capítulo se desarrollará bajo el siguiente esquema de trabajo:

- I. Se realizará una descripción anatómica de las articulaciones del tobillo con sus formas y sus funciones de movilidad. Se pondrá mayor atención a la caracterización de los elementos óseos, del cartílago articular y del fluido sinovial.

Por último, se estudiarán los posibles movimientos que permite la articulación del tobillo definiendo así un modelo biomecánico de estudio.

- II. Se desarrollará un primer modelo analítico aproximado de lubricación. Se modelará el líquido sinovial como un fluido Newtoniano y se tendrá en cuenta el fenómeno de la filtración del fluido lubricante a través de los poros de la superficie del cartílago utilizando la ley de Darcy, evaluando las tres componentes de velocidad del fluido dentro del contacto articular y llegando a escribir la ecuación de Reynolds para el caso propuesto, así como presentado en capítulo anterior. Los resultados obtenidos se refieren a cuando el tobillo se encuentre cargado por el peso del cuerpo humano, es decir se estudian los efectos debido al fenómeno de *Squeeze motion*.
- III. Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, en este apartado se introducirá el concepto de fluido sinovial no Newtoniano, modelando el mismo como un fluido *Couple Stress*. Es decir, como una mezcla de partículas de distintos tamaños para tener en cuenta los efectos polares generados por las fuerzas viscosas. Se obtendrán resultados analíticos y numéricos y se compararán entre sí y con los resultados presentes en la literatura.
- IV. Se presentarán algunas consideraciones metrológicas para la caracterización y reconstrucción geométrica del tobillo en dos dimensiones en el plano sagital. Para ello se emplearán los conceptos del tratamiento de imágenes. A través del uso del algoritmo de Canny, para la detección de bordes (*Edge detection*), se sacarán las coordenadas de los puntos que constituyen el borde del contacto interno lubricado, es decir, las coordenadas en el plano sagital de los puntos del perfil del gínglimo formado por la tibia, el maléolo medial, el maléolo fibular y la tróclea del talo. Posteriormente, aplicando los conceptos metrológicos y la metodología de estudio adquirida y mostrada en el capítulo 5, en el caso de medida indirecta, se irá reconstruyendo el perfil aproximado a través de una función conocida y lograda por el método de los mínimos cuadrados y de mínima zona, evaluando simultáneamente el error asociado a la toma de coordenadas y el error cuadrático medio.
- V. Bajo las hipótesis que se han ido adquiriendo en el desarrollo y mejora del modelo y sobre todo gracias a una reconstrucción más rigurosa, en términos geométricos y metrológicos se considerará el cartílago articular como un elemento deformable a través de la teoría de la “*Soft Lubrication*”, prestando especial atención a todas las posibles configuraciones geométricas del sistema en fase de estudio. Se sacarán resultados analítico y numérico y se compararán entre sí y con los resultados presentes en la literatura.
- VI. Se extraerán las conclusiones y los posibles desarrollos futuros, ampliando todo lo visto para la articulación del tobillo a otras articulaciones y/o desarrollando un modelo de comportamiento dinámico en tres dimensiones.

7.2. CARACTERIZACIÓN ANATÓMICA DE LA ARTICULACIÓN DEL TOBILLO

Entre las articulaciones del pie, el tobillo tiene un papel vital con respecto a la movilidad del propio pie. Además de unirlo con la pierna, permite los movimientos como la flexión de la parte superior o de la planta, la inversión y la reversión, fundamentales para dar un paso, correr y/o subir y bajar las escaleras.

El tobillo tiene, también, la tarea de limitar su alcance máximo para evitar fracturas o esguinces. Tal articulación también es crucial, ya que permite descargar a tierra todo el peso del cuerpo.

La articulación del tobillo (**Figura 7.1**) se compone de una capsula con forma de tenedor, hecha por las porciones distales de la tibia y del peroné y se inserta, entre ellos, la tróclea.

La zona de unión de las tres conformaciones óseas principales está formada normalmente de una fina capa de cartílago con un promedio frecuente de 1,6 mm [213], y hace que los huesos durante un movimiento, se desplacen entre ellos casi sin resistencia y rozamiento. El perfil del cartílago en el tobillo también permite al conjunto tibia-fíbula de adaptarse a la anchura variable de la superficie articular del astrágalo a través de un desplazamiento hacia arriba y a movimientos de rotación medial del peroné durante el movimiento de flexión dorsal (anchura máxima) y durante el movimiento inverso de la flexión plantar (anchura mínima). Además de la cápsula articular existen estructuras ligamentosas robustas que permiten el movimiento y mantienen unidos la estructura del hueso. En particular son los siguientes ligamentos:

- Talo-fibular, frontal y posterior;
- Calcáneo-fibular;
- Deltoideo;
- Tibio-peroneal, frontal y posterior;
- Talo-calcaneal y cervical.

A estas estructuras complejas se añaden músculos, tendones y retináculos. Los principales tendones que forman el tobillo son:

- Tibial anterior;
- Extensor largo de los dedos;
- Extensor largo del dedo gordo;
- Tibial posterior;
- Flexor largo de los dedos;
- Flexor largo del dedo gordo;
- Peroneo lateral corto;
- Peroneo lateral largo;
- Tendón de Aquiles.

7.2.1. COMPONENTES ÓSEOS

El tobillo está compuesto a su vez por las articulaciones tibioperonea distal, la articulación tibiotarsiana y subtalar (Figura 7.1- Figura 7. 2). Estas uniones están formadas por estructuras óseas llamadas: Tibia, Peroné y Tarso.

La Tibia, más interna, es un hueso muy robusto de forma triangular en su extremo distal, paralelo al peroné y en línea con el fémur. Durante el paso, en la fase de apoyo, las fuerzas sostenidas por el tobillo son aproximadamente de 5-7 veces el peso corporal[214]. La parte distal de la tibia consiste en 5 zonas: inferior, anterior, posterior, lateral y medial (o maléolo medial). La superficie inferior se articula con la superficie troclear del astrágalo, el borde de la superficie lateral parece ser más ancho que el medial y, el borde de la superficie frontal es más largo que la parte trasera.

El Peroné se presenta aproximadamente de 4 -5 veces más fino que la tibia y se forma a partir de un cuerpo y dos extremos. El cuerpo es rectilíneo y tiene forma prismática triangular. De las tres caras, la lateral es suave excepto en el centro del hueso donde hay una depresión destinada a acoger los músculos peroneos laterales. La superficie medial está cubierta por un relieve, la cresta ínter ósea. La cara posterior está arrugada por diversas inserciones musculares. El extremo superior tiene una faz articular plana, hacia arriba y hacia dentro, en unión con la carilla articular de la tibia.

Lateralmente se levanta una protuberancia piramidal del peroné, donde toma la inserción el músculo bíceps femoral. El extremo inferior se abulta en el maléolo lateral.

La superficie medial del maléolo se divide en alto con la homóloga faceta tibial y por debajo con la superficie articular del astrágalo [215]. Anteriormente e inferiormente, la fibula es el lugar que recoge, respectivamente, la inserción del ligamento frontal talo-fibular y del ligamento calcáneo-fibular. En la parte posterior hay una ranura sagital para el paso de los tendones de los músculos peroneales.

Figura 7.1: Articulación del tobillo, vista posterior

Figura 7.2: Articulación del tobillo, vista lateral

El Astrágalo es el hueso situado entre los dos maléolos, lateral y medial, y el tarso. Está anclado por ligamentos fuertes, pero no tiene ninguna inserción tendinosa. En el astrágalo se distinguen una cabeza y un cuerpo separado por el cuello. La cabeza tiene una cara articular para el escafoides, mientras que el cuerpo, en la parte superior, se

caracteriza por la tróclea que se articula con la tibia y, en la parte inferior, por tres caras articulares calcañal: anterior, medial y posterior (**Figura 7. 3**). El astrágalo es un hueso especial desde tres puntos de vista. En primer lugar, como se mencionó anteriormente, no implica ninguna inserción muscular: todos los músculos de la pierna, pasan como un puente a su alrededor, por lo que ha sido llamado hueso "enjaulado", y está totalmente cubierto por las superficies articulares y ligamentosas por las que ha sido también llamado como hueso "religado". Por último, el astrágalo, situado en la parte superior trasera del tarso, es un hueso repartidor del peso corporal y de la tensión en todo el pie. A través de su superficie articular superior, la tróclea, recibe el peso del cuerpo y los esfuerzos transmitidos a través de la pinza bi-maleolar y devuelve las compresiones en tres direcciones:

- Hacia la parte posterior del talón, es decir, la gran tuberosidad del calcáneo, a través de la articulación astrágalo-calcañal posterior;
- Hacia la parte delantera y hacia adentro, en la dirección del arco plantar interior, a través de la articulación astrágalo-escafoidea;
- Hacia adelante y hacia el exterior, en la dirección del arco externo del pie, a través de la parte delantera de la articulación talo calcañar.

Figura 7. 3: Astrágalo

El Calcáneo es el hueso más grande del tarso. En la parte trasera tiene una tuberosidad mayor en la que se inserta el tendón de Aquiles, en cambio, en la parte delantera presenta la cara articular para el cuboides y superiormente las tres facetas articulares del astrágalo (anterior, medial y posterior). El eje del calcáneo parece estar inclinado con respecto al plano horizontal desde un mínimo de 10° hasta un máximo de 30° , como se muestra en la.

7.2.2.EL CARTÍLAGO ARTICULAR

El cartílago articular recubre las superficies articulares de los huesos y se compone de aproximadamente 80% de agua. A nivel del sistema músculo-esquelético, hay dos tipos de cartílago: cartílago hialino y el cartílago fibroso. Los dos tipos de cartílago difieren principalmente en la cantidad de matriz, significativamente más alta en el cartílago hialino que en el fibroso. El cartílago articular realiza la función de facilitar el movimiento entre los extremos óseos articulares, de absorber y redistribuir las cargas dinámicas aplicadas a la articulación. El tejido de cartílago se caracteriza por un componente celular, los condrocitos, y la matriz del cartílago, un tejido particularmente

rico en agua y poco vascularizada presente en muchos tejidos humanos. El cartílago articular no tiene capacidad auto regenerativa a excepción de pequeñas lesiones a edad temprana.

Durante el curso de la vida, sus características fisiológicas y propiedades mecánicas están sujetas a deterioro irreversible. El proceso de degeneración del cartílago puede ser descrito como la alteración de dos actividades metabólicas opuestas que, en condiciones fisiológicas, se encuentran en equilibrio entre sí: por un lado, una función catabólica, que tiende a dañar el tejido del cartílago y, por otro, una función anabólica, que mantiene y protege el cartílago. Por lo tanto, cualquier tipo de intervención que pueda restringir, prevenir o revertir el proceso de degeneración del cartílago es de importancia fundamental.

Excepto en aquellas articulaciones donde queda expuesto al fluido sinovial, el cartílago está siempre cubierto por una carcasa de tejido fibroso compacto llamado pericondrio.

En el sistema músculo-esquelético el cartílago hialino representa el cartílago de crecimiento, los cartílagos costales y el cartílago articular, mientras que el fibro-cartílago está presente en los discos intervertebrales, en la sincondrosis, en el labio glenoideo, en los meniscos, en el ligamento redondo del fémur y en la zona de unión osteo-tendinosa.

En general, el cartílago articular es un tejido hialino, brillante y suave para permitir el deslizamiento entre las dos superficies. También denominado "lámina brillante". Tiene un espesor comprendido entre 0,2 y 6 mm y es más espeso a medida que se aleja del centro del contacto sinovial (**Figura 7. 4**) [216].

Figura 7. 4: Estructura en capas del cartílago articular y su espesor en el contacto sinovial.
(Pearle et al., 2005) [216].

Facilita una mutua y más suave coincidencia de la articulación y reduce el desgaste de las mismas en caso de solicitaciones fisiológicas y microtraumas. Se trata de una variedad de cartílago hialino que cubre la parte articular de la cabeza que entra en contacto con otros elementos de la articulación.

Inicialmente, el cartílago articular, es una parte del cartílago epifisario que queda de tras la fase de osificación y, con el pasar del tiempo, se remodela y asume una

estructura característica bien reconocible en un preparado histológico. Esta estructura se forma mediante solicitaciones mecánicas a las que está sometida la articulación con el fin de repartir mejor las cargas aplicadas.

**Figura 7. 5: a) Cartílago hialino sano (www.sportmedicina.com);
b) estructura del cartílago articular (Pitersne 2006)**

Se reconocen tres bandas en las que las fibras están dispuestas de una manera diferente **Figura 7. 5**:

- La interfaz con la superficie libre, las fibras están dispuestas paralelamente a esta y son tan densas que la entrada a las células está impedida;
- En una segunda franja, las fibras asumen un perfil arqueado, dicha disposición confiere al cartílago articular buena elasticidad y deformabilidad;
- En la última franja, que se interconecta con el hueso, las fibras están dispuestas perpendicularmente a la superficie libre. En esta franja, las células se colocan en pilas entre las fibras, reflejando la tendencia de estas últimas. Las fibras descienden hasta el hueso frontal, penetrando y soldándose en ella.

La parte profunda de la matriz del cartílago (**Figura 7. 5**), la que está en contacto con el hueso está mineralizada, por lo tanto, es impermeable y forma una barrera insuperable para los metabolitos entre el cartílago y el hueso subcondral. Se deduce que el cartílago articular depende para su tropismo, no por el hueso subcondral, si no en pequeña parte por los vasos del periostio, y en especial por el líquido sinovial que llena la cavidad de la articulación, donde el cartílago recupera sus metabolitos y donde descarga los catabolitos. De ello se deduce que un cambio metabólico en el líquido sinovial causa un enorme daño a la articulación. Entre las causas que pueden dañar el cartílago articular se identifican las de tipo mecánico y la de tipo biológico, que se clasifican como sigue:

- *causas mecánicas agudas*: son consecuencias de un trauma que puede dañar directamente el cartílago y/o el hueso subcondral. El daño del cartílago se repara directamente por la actividad de los condrocitos. El daño en el hueso subcondral se repara a través de dos fases, el componente inflamatorio principal, seguida de una segunda fase, la osteogénesis;

- *causas mecánicas crónicas*: suelen estar relacionadas con alteraciones del eje de la carga, que debe ser corregido a fin de eliminar el fenómeno del "esfuerzo cortante", que tienen un efecto catabólico conocido en el cartílago articular. La presencia de cuerpos libres o fragmentos de hueso son algunas de las causas de la degeneración del cartílago articular y su tratamiento es necesariamente quirúrgico;
- *causas biológicas*: la respuesta inflamatoria de las estructuras articulares es a menudo una consecuencia de un trauma agudo o crónico, eventos como esguinces, necrosis ósea-vascular del hueso subcondral, los resultados de la cirugía abierta o de la artroscopia. Estos procesos inflamatorios del hueso subcondral y de las estructuras interarticulares (membrana sinovial, en particular) producen un fuerte efecto catabólico en el cartílago. Varios factores endógenos son responsables de una disminución de la síntesis de los componentes de la matriz extracelular por parte de los condrocitos y de un aumento en la actividad de enzimas capaces de degradar la matriz.

Incluso el cartílago articular sufre los efectos, positivos para las cargas fisiológicas, perjudiciales para cargas incongruentes de las sollicitaciones funcionales: el tropismo del tejido, de hecho, se mantiene vivo y estimulado por el movimiento de intensidad normal y duración, mientras que, viene alterado por sollicitaciones excesivas que ponen en marcha procesos de tipo degenerativo. Este tejido tiene, entre sus muchas prerrogativas, la de distribuir uniformemente las cargas en las superficies articulares, evitando el estrés excesivo en el hueso, la de reducir los efectos de rozamiento y el desgaste subsiguiente durante el movimiento. La organización de sus constituyentes (células, fibras de colágeno) lo hace adecuado para soportar esfuerzos de compresión mientras que es más susceptible a los esfuerzos de corte.

Figura 7. 6: (A) cartilago sano. (B) Cartilago OA (Pearle et al., 2005)[216]

Especialmente a nivel de los miembros inferiores, las tensiones funcionales pueden dar lugar a la aparición de alguna lesión que, a través de las etapas de ablandamiento y de erosión, puede alcanzar hasta la exposición del hueso, creando así un marco anatómo-patológico similar a la osteoartritis (OA) (Figura 7. 6).

Se quiere recordar que entre las pruebas que con mayor frecuencia se realizan en el cartílago, existe la prueba de indentación [217] (se suele hacer en las articulaciones de pequeño tamaño) para la determinación de sus principales propiedades.

Figura 7. 7: Prueba de indentación [217]

Esta prueba (Figura 7. 7) implica el uso de un aparato constituido por un tipo de muestra rígido y poroso, el "indenter" (con un diámetro variable y dependiente por el radio de curvatura de la articulación en cuestión), cargado por una fuerza constante y que actúa perpendicularmente a la superficie del cartílago que recubre el hueso subcondral. Permite evaluar sustancialmente tres características del cartílago: el módulo elástico, el módulo de Poisson y la permeabilidad.

7.2.3. EL LÍQUIDO SINOVIAL

El fluido sinovial (SF) se puede definir como un producto dializado del plasma sanguíneo que contiene en el interior ácido hialurónico. El líquido sinovial es, junto con el cartílago articular, el componente principal de las articulaciones sinoviales.

La función más importante de la SF es proveer o facilitar la lubricación y la nutrición de los tejidos de las articulaciones siendo caracterizado por excelentes propiedades lubricantes. Los principales constituyentes de la SF son: células, electrolitos, proteínas y ácido hialurónico.

Con el fin de determinar el origen y la composición del líquido sinovial, algunos estudios iniciales han demostrado que los electrolitos se distribuyen entre la sangre y el SF actuando, en alguna medida, de alimento para las articulaciones. Sólo algunas proteínas provienen directamente del plasma y las concentraciones de cada proteína depende del peso molecular y de la permeabilidad de los capilares sinovial: el material micro-molecular, tales como son los electrolitos, el ácido úrico, la glucosa y las enzimas están presentes en la membrana sinovial casi en igual concentración que en el plasma, mientras que las inmunoglobulinas, se encuentran en menor concentración, hecho debido a la función fisiológica de la membrana sinovial de actuar como filtro.

El SF en condiciones normales es de color amarillo pálido y límpido y en caso de derrames articulares, de tipo inflamatorios, el líquido, después de un aumento del número de las células y de la presencia de fibrina, se vuelve turbia y el contenido proteico de la membrana sinovial aumenta en dependencia de un considerable incremento de la permeabilidad de la membrana sinovial.

El ácido hialurónico no parece ser confinado en el líquido sinovial, pero también está presente en el tejido conectivo y de la membrana sinovial.

Las funciones principales de este compuesto químico, incluyen;

- Ajuste de los daños causados por la oxidación;
- La formación de grandes agregados macromoleculares;
- Lubricación de las articulaciones.

La viscosidad absoluta de la SF varía de 0,01 a aproximadamente 1 *Pa s*. La disminución de la viscosidad, observada en pacientes reumáticos, puede ser debido a una modificación en la estructura de las cadenas de polisacáridos.

Figura 7. 8: Representación del ácido Hialurónico (www.schering-plough.it)

Muy a menudo los pacientes que sufren de osteoartritis son tratados con la administración de ácido hialurónico para mejorar el rendimiento de las articulaciones.

El ácido hialurónico presente en el líquido sinovial es uno de los componentes fundamentales del tejido conectivo de los humanos y otros mamíferos.

Es químicamente definible como una cadena de polisacárido no ramificada producida por la agregación de miles de unidades de disacáridos formados a su vez por los residuos del ácido glucurónico (un derivado de la glucosa) y de la N-acetil glucosamina.

In vivo todos los grupos carboxílicos del ácido glucurónico y N-acetil glucosamina son completamente ionizados, dando a la molécula de ácido hialurónico alta polaridad y, en consecuencia, una alta solubilidad en agua.

Gracias a esta propiedad el ácido hialurónico es capaz de reaccionar con muchas moléculas de agua alcanzando un alto grado de hidratación. Las macromoléculas que se forman dan lugar a soluciones transparentes de alta viscosidad.

En una matriz amorfa de tejido conectivo, el ácido hialurónico es responsable de mantener el grado de hidratación, la plasticidad y la viscosidad. También es capaz de actuar como una sustancia de cimentación, y como una molécula de anticollisión, así como un lubricante eficaz previniendo daños a células del tejido. La extrema longitud

de la molécula, junto con su alto grado de hidratación permite que varios polímeros de ácido hialurónico se organicen para formar una estructura de tipo reticular que determina todas las propiedades del líquido sinovial.

7.2.4. CINEMÁTICA DE LA ARTICULACIÓN DEL TOBILLO

En el campo de la biomecánica del sistema músculo-esquelético, entendido como el análisis del paso o el análisis de los resultados relacionados con movimientos específicos realizados principalmente cuando se trabaja o cuando se practica deporte, la información que principalmente se requiere es la historia de las fuerzas que generan un movimiento muscular particular del sistema mismo. Es fácil de entender, desde el principio, que la tarea de la biomecánica no es fácil. De hecho, con el fin de evaluar la cinemática y la dinámica, utilizando técnicas típicas de la mecánica del cuerpo rígido, es necesario modelizar el cuerpo humano como un conjunto de segmentos (tales como el pie, la pierna, el muslo y así sucesivamente) conectados entre sí a través de uniones mecánicas que representan las articulaciones (tales como el tobillo, la rodilla o la cadera).

El análisis del movimiento, desde el punto de vista cuantitativo, consiste en la determinación y comparación de la posición y la orientación de los segmentos óseos que intervienen en el movimiento. El movimiento relativo entre estos segmentos puede ser descrito en términos de cantidades cinemáticas tales como los ángulos articulares, las velocidades lineales y angulares y las aceleraciones. Las fuerzas externas y los pares que actúan sobre las articulaciones se pueden determinar mediante la combinación de informaciones relativas a la masa y a las propiedades inerciales del segmento en cuestión.

Figura 7. 9: Sistema de los planes de los pies donde se producen los movimientos del tobillo

Figura 7. 10: Sistemas de coordenadas definidos por Grood and Suntay (1983)

Las articulaciones del tobillo y del pie permiten, por lo tanto, un movimiento de rotación alrededor de tres ejes y un movimiento horizontal en dirección de cada eje para los tres ejes en cuestión (Figura 7. 10) [218]–[220]:

- Un eje transversal que pasa entre los maléolos, corresponde al eje de rotación de la articulación del tobillo, en el que se realizan movimientos de flexión y de extensión (flexión dorsal y flexión plantar, respectivamente);
- El eje longitudinal de la pierna alrededor de la cual se realizan los movimientos de abducción y aducción;
- El eje longitudinal del pie alrededor del cual se realizan movimientos de rotación interna-externa.

Las características cinemáticas del pie son, por tanto, bastante complejas dada la naturaleza de este extremo y la diversidad de funciones que se encarga de realizar. Desde el punto de vista de reproducción robótica este acoplamiento viene a menudo simplificado y se analiza solamente por su función locomotora.

Los principales movimientos son sustancialmente:

- *Movimientos de flexión y extensión:* la posición de referencia para la flexión-extensión del pie se realiza cuando el plano plantar es perpendicular al eje longitudinal de la pierna. A partir de esta posición, la flexión del pie (que como se ha mencionado se puede atribuir a la del tobillo), es el movimiento que lleva el dorso del pie a la cara frontal de la pierna, mientras que la extensión aleja el dorso del pie de la cara frontal de la pierna y la lleva a ponerse sobre la prolongación de la misma. El ángulo de flexión-extensión del pie es el ángulo que la planta del pie forma con el eje vertical de la pierna. En flexión, este ángulo tiene valor máximo típico que va desde 20° a 30°, mientras que la amplitud del movimiento de extensión varía desde 30 a 50 grados;
- *Movimientos de abducción-aducción:* la posición de referencia es cuando el pie está en el plano horizontal, en estas condiciones posee un movimiento de abducción cuando la punta del pie se lleva en el interior, hacia el plano de simetría del cuerpo, mientras que tiene un movimiento de aducción cuando la punta del pie se vuelve hacia fuera y lejos del plano de simetría. La amplitud de los movimientos de abducción-aducción realizados sólo por el pie varían de 35° a 45°. Hay que señalar que el movimiento del pie en el plano horizontal se puede incrementar gracias a la suma de la rotación interna-externa de la rodilla y la de la cadera que pueden conducir a una abducción de 90°;
- *Movimientos de rotación interna-externa:* la posición de referencia es definida para el movimiento de flexión-extensión. La rotación interna es el movimiento que orienta la planta del pie hacia el interior, este movimiento se conoce como supinación. La amplitud de este movimiento es de aproximadamente 50°. La rotación externa es el movimiento que orienta la planta del pie hacia el exterior, que se conoce como movimiento de pronación. La amplitud de este movimiento es aproximadamente la mitad de la de supinación y varía de 20° a 25°.

Estudios posteriores, que utilizaban las técnicas más avanzadas para determinar los pequeños movimientos en tres dimensiones, mostraron que el eje de la articulación del tobillo cambia continuamente durante el movimiento [219]. Analizando este eje en

muchos pacientes con una amplia gama de movimientos que van desde 30° en flexión dorsal a 30° en planta-flexión con un incremento de 10° se observó que la proyección del eje en el plano frontal y en la posición neutra, resultó ser distal en los vértices del maléolo, y en el plano transversal, que pasa por el centro de los maléolos, tal como describe [218].

En la flexión dorsal y flexión plantar resultó, sin embargo, estar inclinado, en la zona medial y lateralmente. Se observó que el cambio de inclinación en algunos pacientes era gradual, mientras que en otros, parecía que había dos ejes distintos para los dos flexión (Figura 7. 11) tal como afirman [221], [222].

Figura 7. 11: Representación del eje de rotación del Tobillo (Barnett et al. 1958) [9]

Las articulaciones del pie están formadas de tal manera que un movimiento en uno de los planos, se acompaña necesariamente a un movimiento en los otros dos planos. Por lo tanto, el movimiento de aducción se acompaña a uno de reversión y a una ligera extensión. Estos tres componentes caracterizan el movimiento de “supinación”.

7.2.5.CICLO DEL PASO

La marcha se debe a una sucesión cíclica de movimientos rítmicos alternados que nos permite avanzar con el cuerpo.

Figura 7. 12: Ciclo del paso

Se define ciclo del paso (Figura 7. 12) el período comprendido entre dos apoyos consecutivos del mismo pie en el suelo.

A su vez, este ciclo se divide en 2 fases:

1. La fase de apoyo: durante la cual el pie está en contacto con el suelo. Esta fase ocupa alrededor del 60% del ciclo de la marcha y disminuye más gradualmente que aumenta la velocidad de la marcha (en una carrera se reduce en hasta aproximadamente 37%)
2. Fase de suspensión o de oscilación durante la cual el miembro se levanta y se lleva hacia adelante para preparar el apoyo próximo. Esta fase también se llama la fase de transferencia.

La fase de apoyo se puede dividir a su vez en cuatro fases diferentes:

1. Contacto del talón: es una fase muy corta en la que el talón del pie derecho, proyectado hacia delante, está en contacto con el suelo;
2. Pleno apoyo: es la fase más larga, que comienza con el desprendimiento del pie contra lateral y termina cuando el pie es completamente apoyado en el suelo (talón, metatarso y dedos de los pies sobre el suelo);
3. Desprendimiento del talón: Esta fase termina cuando la pierna contra lateral toca el suelo y al mismo tiempo estamos asistiendo a la separación desde el suelo del talón del pie de soporte;
4. Desprendimiento de los dedos: es una fase que termina con la separación de los dedos desde el suelo, después de lo cual el peso del cuerpo se transfiere hacia adelante.

La fase de suspensión, sin embargo, se puede dividir en tres fases diferentes:

1. Etapa inicial: el miembro inferior de interés avanza a través del trabajo de los músculos flexores de la cadera, después de la separación de los dedos de los pies;
2. Etapa intermedia: el miembro examinado se mueve desde una posición posterior a la del cuerpo a una posición frontal. Al mismo tiempo el tobillo se flexiona por la labor del tibial anterior;
3. Fase final: en esta fase se continúa y se termina el movimiento anterior, la rodilla y el tobillo alcanzan su extensión máxima al mismo tiempo preparando el miembro al contacto con el suelo (apoyo del talón y reinicio del ciclo del paso).

En este capítulo, desarrollando el modelo dinámico, se mostrará la tendencia en el tiempo de la carga aplicada en la articulación durante un ciclo entero del paso.

7.3. PRIMER MODELO ANALÍTICO APROXIMADO DE LUBRICACIÓN

El objetivo de este apartado es proponer un primer modelo de lubricación analítico aproximado de la articulación del tobillo humano para una evaluación rápida del campo de presión sinovial que tendrá que soportar la carga de compresión (*squeeze-motion*).

El modelo parte de la teoría de la “*Boosted Lubrication*” para la lubricación de las articulaciones humanas [223], [224] y tiene en cuenta el transporte de fluidos a través del cartílago articular utilizando la ecuación de Darcy para representar el flujo de fluido sinovial a través de una matriz de cartílago porosa. La articulación del tobillo humano se supone que es cilíndrica, así como explicado anteriormente, y permite el movimiento solamente en el plano sagital.

El modelo propuesto se basa en la ecuación de Reynolds (Capítulo 6) modificada; su integración permite obtener una evaluación rápida del campo de presión sinovial que muestra un buen acuerdo con los resultados obtenidos numéricamente [225].

Su integración analítica permite la descripción de forma cerrada de la fuerza de la película de fluido sinovial y el cálculo de su espesor, es decir, el desgaste entre las dos superficies articulares.

Con el fin de obtener una solución analítica aproximada para el campo de presión se desprecian los efectos de las deformaciones del cartílago, condición que se produce para un sistema dinámico al que se aplica una carga ligera.

Hay que tener presente que, además de conocer los materiales que son parte del sistema lubricado y describir sus funciones usando los modelos proporcionados por la literatura para la caracterización de fluidos así como planteado en el Capítulo 6 (ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes), es necesario conocer como varía el perfil de las superficies lubricadas en la configuración no deformada del sistema, es decir, antes de la aplicación de la carga externa representada por el peso del cuerpo humano durante la marcha.

En muchos estudios, el comportamiento biomecánico de las articulaciones sinoviales humanas ha sido investigado simulándolas como cojinetes cargados, donde el hueso es la superficie del cojinete recubierto con material alveolar o poroso que representa el cartílago y, el líquido sinovial es el fluido lubricante [7], [8], [56], [57]. La articulación del tobillo (Figura 7. 13) puede ser considerada de geometría, cilíndrica, donde se permite el movimiento sólo en el plano sagital [7], [8], [56], [57]. El modelo de acoplamiento se simula por un cilindro rígido (hueso subcondral) en contacto externo con una cavidad cilíndrica. Entre las superficies rígidas en contacto, a modo de recubrimiento de ambas, existe una capa fina (cartílago articular) de espesor uniforme.

La superficie articular inferior se supone estacionaria mientras que la superficie articular superior se considera animada con una velocidad $\dot{e}(t)$.

Figura 7.13: Geometría del tobillo

En caso de considerar un movimiento del tipo *squeeze motion*, $\dot{e}(t)$ representa la velocidad de acercamiento entre el eje del cilindro rígido y el eje de la cavidad cilíndrica donde descansa. Los dos ejes son paralelos entre ellos y en el plan sagital todo se puede representar como una circunferencia en contacto interno con otra circunferencia con dos radios y dos centros distintos y con una excentricidad $e(t)$ (segmento OO' en la Figura 7.14).

Se ha estudiado y demostrado que el eje de rotación de cada punto perteneciente a cada una de las dos superficies que constituye el perfil real del tobillo pase siempre por el centro de estas dos circunferencias [221].

La Figura 7.14 muestra el modelo y las coordenadas x, y utilizadas.

Figura 7.14: Geometría de referencia

Con los símbolos definidos en la Figura 7.14 se obtuvo inicialmente, a través del cálculo de las componentes de velocidad mediante la introducción de la hipótesis conocida de Reynolds, la ecuación que gobierna el movimiento de la lubricación en un contacto lubricado en condiciones:

- de puro “*Squeeze Motion*”

- gran radio de curvatura de las superficies con respecto a la altura h del meato
- presión del fluido constante
- flujo laminar.

Con las siguientes condiciones de contorno y con la hipótesis de que el líquido se adhiere a las paredes y bajo las condiciones vistas en el Capítulo 6:

Figura 7. 15: Esquema del contacto lubricado convergente

$$\begin{array}{llll}
 y=0 & u=U_l=0 & v=V_l=0 & w=W_l=0 \\
 y=h & u=U_u=0 & v=V_u=V & w=W_u=0
 \end{array} \quad (7.1)$$

Utilizando la ecuación de continuidad, tendremos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h w dy + V_u = 0 \quad (7.2)$$

Remplazando las siguientes componentes de velocidad del fluido en las direcciones x y z

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) + U(t) \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{h} \right) \\
 w &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right)
 \end{aligned} \quad (7.3)$$

se obtiene la ecuación:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12W_{ul} \quad (7.4)$$

en la que el componente de velocidad efectiva W_{ul} se compone de dos términos:

- W_p que es la velocidad a lo largo del eje y de la superficie del astrágalo
- W_0 es la velocidad del flujo de fluido sinovial debido a la permeabilidad de la matriz del cartílago.

$$W_{ul} = (W_p - W_0) \quad (7.5)$$

El componente W_0 se puede calcular usando la ecuación de Darcy:

$$W_0 = \frac{\Phi H}{\mu} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) \quad (7.6)$$

en la que $\Phi = k\mu$ [m^2] es el factor de permeabilidad de la matriz porosa del cartílago y $H = 2\hat{h}$.

$$W_p = \frac{dh}{dt} \quad (7.7)$$

Sustituyendo la ecuación. (7.6) en la ecuación. (7.4), la ecuación de Reynolds modificada se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(h^3 + 12\Phi H) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(h^3 + 12\Phi H) \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 12\mu \frac{dh}{dt} \quad (7.8)$$

con

$$h = \tilde{h}(x, t) - 2\hat{h} \quad (7.9)$$

en la que $\tilde{h}(x, t)$ es el espesor de la película de fluido que incluye las capas de cartílago. Asumiendo la presión mono-dimensional en la dirección x , la ecuación. (7.8) se convierte en:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(h^3 + 12\Phi H) \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 12\mu \frac{dh}{dt} \quad (7.10)$$

Mediante el uso de coordenadas polares se puede describir la ecuación (7.10):

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[(h^3 + 12\Phi H) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] = 12\mu \frac{dh}{dt} \quad (7.11)$$

con

$$h(\theta, t) = c + e \cdot \cos(\theta) \quad (7.12)$$

donde c y e son el aclaramiento y la excentricidad del bio-cojinete, respectivamente.

El campo de presión se obtiene mediante la integración (7.11):

$$p = 12R^2 \mu \dot{e} \int \frac{\sin \theta}{h^3 + 12\Phi H} \partial \theta + 12R^2 \mu \dot{e} c_1 \int \frac{1}{h^3 + 12\Phi H} \partial \theta + c_2 \quad (7.13)$$

con c_1 y c_2 determinados por la imposición de los valores de presión en $\pm \frac{a}{R} = \pm \beta$.

Con el fin de obtener una solución aproximada, la ecuación (7.13) ha sido reemplazada con:

$$p = 12R^2 \mu \dot{e} \int \frac{\sin \theta}{[h(\theta) + 12\Phi H - 6\Phi e]^3} d\theta + 12R^2 \mu \dot{e} c_1 \int \frac{1}{[h(\theta) + 12\Phi H - 6\Phi e]^3} d\theta + c_2 \quad (7.14)$$

en el que el término

$$h(\theta)^3 + 12\Phi H \quad (7.15)$$

ha sido sustituido con la función que bien se ajusta a la (7.15)

$$[h(\theta) + 12\Phi H - 6\Phi e]^3 \quad (7.16)$$

y obtenida a partir de la expresión similar utilizada en [226] (Figura 7. 16). El campo de presión sinovial puede ser escrito por la (7.14) en la forma cerrada como:

$$p = \frac{12R^2\mu\dot{e}}{2e} \left[\frac{1}{c - 6(-2 + e)\Phi + e \cos \beta^2} + \frac{1}{c - 6(-2 + e)\Phi + e \cos \theta^2} \right] \quad (7.17)$$

Figura 7. 16: Evaluación de la ecuación (7.15)

Figura 7. 17: Evaluación de la ecuación (7.16)

La forma analítica de la presión hidrodinámica (7.17) permite calcular la fuerza de la película de fluido:

$$f_r = L \int_{-\beta}^{\beta} p(\theta) \cos(\theta) R d\theta \quad (7.18)$$

Al resolver analíticamente (7.18) se obtiene:

$$f_r = 12R^3\mu\dot{e}L \left\{ \frac{2(c+12\Phi) \arctan h \left[\frac{(c-e+12\Phi) \tan(\beta/2)}{\sqrt{-c^2+e^2-24c\Phi-144\Phi^2}} \right]}{e(-c^2+e^2-24c\Phi-144\Phi^2)} - \frac{\frac{\beta}{e} + \frac{(c+12\Phi-e \cos \beta) \sin \beta}{(c^2-e^2+24c\Phi+144\Phi^2)}}{c+12\Phi-e \cos \beta^2} \right\} \quad (7.19)$$

Al igualar la fuerza de película de fluido (7.19) a la carga externa $W(t)$, que representa el ciclo de carga durante la marcha [24], véase la Figura 7. 18,

Figura 7. 18: Variación de $W(t)$ en el tobillo durante la marcha

y no considerando las otras fuerzas que actúan sobre la articulación, es posible escribir las ecuaciones de equilibrio de la superficie del astrágalo en el plano x - y como sigue:

$$f_r(e, \dot{e}) = W(t) \quad (7.20)$$

La ecuación (7.20) representa una ecuación diferencial no lineal. La solución nos proporciona la evolución temporal de las funciones $e(t)$ y $\dot{e}(t)$:

7.3.1.RESULTADOS

La integración numérica de la ecuación. (7.20) se ha realizado mediante el uso de un método “predictor-corrector” de Adhams con $e|_{t=0} = \bar{h}$ y donde $\bar{h}$ es el espesor de la película de líquido en ausencia de la carga.

Figura 7. 19: Variación de $\dot{e}(t)$ en el tobillo durante la marcha

Con el fin de comparar los resultados con los obtenidos por Hlavacek, M. [24] se han adoptado los mismos valores numéricos típicos para los cálculos.

El cálculo de la función $e(t)$ nos proporciona la evolución de la velocidad (Figura 7. 19) y del espesor de la película de fluido $h(0,t)$ (Figura 7. 20 y Figura 7. 21) durante la carga impuesta.

Figura 7. 20: Evolución de $h(t)$ por distintos valores de R

Figura 7. 21: Resultados obtenido por Hlavacek [24]

En la Figura 7. 22 se muestra el campo de presión sinovial típico al variar de la coordenada angular θ y el tiempo durante los primeros 0.05s de la marcha cuando se utilizan los resultados obtenidos a partir de la solución de (7.20).

Tabla 7. 1: Valores de los parametros utilizados.

Parámetros	Valor numérico	Unidad
A	14×10^{-3}	[m]
L	28×10^{-3}	[m]
$\hat{h}$		[m]
c	7.25×10^{-7}	[m]
R	3.5×10^{-1}	[m]
R_L	22×10^{-3}	[m]
ϕ	2×10^{-14}	[m/s]
β	4×10^{-2}	rad
μ	10×10^{-2}	[Pa s]

Figura 7.22: Campo de presión por distintos valores de θ y de tiempo t

En la Figura 7.23 se muestra el campo de presión sinovial frente la coordenada θ en correspondencia del instante en el que se aplica la carga.

Los valores obtenidos se han comparado con los reportados en: "Hlavacek, M. [24], [225] y muestran un buen acuerdo de los resultados.

Figura 7.23: Variación del campo de presión al comienzo de la marcha

7.3.2.DISCUSIONES

Este capítulo se centra en el desarrollo para obtener un modelo analítico aproximado de lubricación “*squeeze-film*” de la articulación del tobillo humano, para una evaluación rápida del campo de presión sinovial y de la realización de la articulación humana durante la marcha, debido al movimiento de compresión de la articulación, con un desplazamiento (*sliding*) igual a cero.

Una investigación numérica de los datos radiográficos reales confirma la geometría simplificada adoptada en este trabajo, se propone un modelo simple de la articulación del tobillo humano, con el fin de generar una expresión analítica aproximada del campo de presión sinovial y de la fuerza de la película del fluido.

Los resultados indican que para el movimiento de acercamiento de las superficies articulares humanas un salto en la presión del fluido en la superficie articular se produce en el momento de una aplicación de la carga (Figura 7. 23), los valores aumentan aproximadamente hasta $1,5 \text{ MPa}$ a $h(0, t = 0 +)$.

Este salto hace que el agua presente en el líquido sinovial pase en el cartílago, y la película de fluido sinovial se forme. La filtración del líquido sinovial está controlada principalmente por ϕ coeficiente de permeabilidad, que describe la manera con la que el agua y otras sustancias de bajo peso molecular se filtran en los poros de las superficies del cartílago del astrágalo.

Como las macromoléculas del complejo de ácido-proteico hialurónico son demasiado grandes para penetrar en los poros, su concentración aumenta en la película sinovial y se forma un gel en la superficie que evita el contacto seco. El gel sirve como un lubricante límite, si un movimiento de deslizamiento sigue antes de un SF fresco entra en el contacto.

Los resultados en la Figura 7. 20 muestran la evolución de la $h(0, t)$ para $R = 0,35$ y $R \rightarrow \infty$ (superficies paralelas) antes de la fase de formación de gel, y confirma la investigación hecha por Hlavacek en utilizando un modelo numérico más complicado [24], [225], [227] .

Estos resultados no excluyen la posibilidad de que una película de fluido continuo se pueda mantener en el tobillo humano durante la marcha, donde se produce deslizamiento y SF fresco entra en contacto desde el exterior.

En presencia de cartílago articular normal, el mantenimiento de una película de fluido lubricante está garantizada por la naturaleza cíclica de la carga en la marcha, en comparación con la carga constante de pie, donde la película de fluido se transforma en una película de gel protectora permanente. Por el contrario, en el caso patológico, la capa de gel protectora sinovial se agota rápidamente, después de varios pasos y las superficies puede venir brevemente en contacto en cada ciclo

Los resultados del modelo de lubricación simplificado nos proporcionan que:

- debido a las hipótesis adoptadas, el modelo propuesto proporciona mejores resultados en los casos en los que es posible despreciar los efectos de las deformaciones del cartílago y de la formación de gel de lubricante sinovial (es decir, las articulaciones poco cargadas).
- las soluciones de forma cerrada para el campo de presión sinovial y de la fuerza de la película de fluido son útiles en todos los análisis dinámicos de las articulaciones del tobillo en el que el objetivo es obtener un mejor compromiso entre la precisión y el coste de cálculo para una evaluación rápida de las fuerzas que actúan en la articulación sinovial durante un movimiento de compresión pura. Se ofrece una mejor legibilidad de los principales parámetros geométricos y reológicas que caracterizan la articulación sinovial.

Es importante señalar por último que este apartado representa un análisis preliminar y en el modelo matemático se han adoptado muchas simplificaciones con el fin de obtener una solución analítica. Estas simplificaciones son:

- lubricación hidrodinámica,
- movimiento de “*Squeeze*”,
- modelo de permeabilidad de Darcy,
- matriz del cartílago y hueso subcondral rígidos,
- Fluido Sinovial newtoniano.

En la literatura estos supuestos se aceptan en algunos casos, pero se espera obtener en el futuro algún tipo de verificación experimental con el fin de apoyar la predicción teórica aproximada obtenida y/o mejorar el modelo propuesto, quitando primero la hipótesis de superficies del cartílago rígidas, es decir, investigar en la posibilidad de proponer un modelo micro-elastohidrodinámico analítico o casi-analítico, para tener en cuenta la deformación de estas superficies y sus efectos sobre el comportamiento dinámico de la articulación

7.4. MODELO ANALÍTICO APROXIMADO DE LUBRICACIÓN CON FLUIDO NON NEWTONIANO

Como se ha visto en los precedente capítulos de esta memoria de tesis, las articulaciones sinoviales humanas [228], como las caderas, las rodillas y los tobillos pueden ser vistos como cojinetes desde el punto de vista ingenieril. Los materiales que constituyen el cojinete son el cartílago articular apoyado al hueso subcondral y lubricado por el líquido sinovial. La carga experimentada en una articulación del tobillo sana durante la marcha normalmente puede alcanzar hasta 5-7 veces el peso corporal. Sin embargo, una enfermedad o un trauma pueden afectar gravemente la función normal de las articulaciones sinoviales con pérdida de espesor de cartílago articular, causando dolor y movimientos restringidos, y necesitando un reemplazo con articulaciones artificiales. Aunque el conocimiento actual de las enfermedades de las articulaciones como la osteoartritis (OA) es aún incompleto, se reconoce la importancia de los factores mecánicos. La OA es a menudo asociada a la pérdida de cartílago articular y por lo tanto la lubricación juega un papel importante. La comprensión del mecanismo de lubricación también es importante para el desarrollo de técnicas de intervenciones para el tratamiento de la degeneración y la pérdida del cartílago. Esto es especialmente oportuna debido a los problemas clínicos asociados con las prótesis actuales articulares después de su irrupción masiva [229].

En este capítulo la articulación del tobillo humano es modelizado como un cojinete con carga dinámica [7] que emplea el cartílago articular como recubrimiento de las superficies del cojinete y el líquido sinovial como lubricante. Una vez que se genera una película de fluido, la acción de compresión de la película es capaz de proporcionar una protección considerable a la superficie del cartílago.

El cartílago articular se compone principalmente de colágeno, proteínas-polisacáridos y agua.

Durante el movimiento de la articulación o cuando el cartílago se comprima, el contenido de fluido del cartílago fluye a través de la capa más externa de cartílago. El fluido en movimiento reduce el rozamiento y nutre a los vasos sanguíneos y el cartílago.

El líquido sinovial humano normal es ligeramente amarillo y viscoso. Es un dializado acuoso del plasma sanguíneo que contiene electrolitos, células, proteínas y muco-polisacárido. El contenido de la celda promedio es de 64 células por ml. y su función principal es eliminar los residuos. El contenido de proteína es de 20 g. por litro en comparación con 74 g por litro en el plasma. El líquido sinovial contiene ácido hialurónico en una concentración de proteína (mucina). La mucina imparte una viscosidad no newtoniana al fluido, el coeficiente de viscosidad baja cada vez con el aumento de la velocidad de acercamiento de las superficies. En caso de osteoartrosis la viscosidad del fluido lubricante se reduce en particular a velocidades de cizallamiento bajas, mientras que en la artritis reumatoide la viscosidad se reduce aún más.

La función principal del líquido sinovial es lubricar y nutrir el tejido de las articulaciones, y tener un buen soporte de la carga externa y buenas características de absorción de choque.

La Figura 7. 24, muestra el modelo utilizado para la descripción de la presión de la película de fluido. El movimiento se produce en el plano x - y . Las superficies articulares se mueven a lo largo del eje y .

Figura 7. 24: Geometría del Tobillo y su campo de presión. (Elaboración propia)

En este apartado se considerarán sólo los casos simétricos permitiendo que los resultados analíticos obtenidos se puedan generalizar a las otras configuraciones no simétricas.

Para el cartílago se adopta el modelo lineal [8], [230], [231] es decir, matriz del cartílago porosa elástico lineal (pequeña deformación) homogénea e isotrópica con el fluido intersticial ideal que fluye a través de la matriz porosa por el gradiente de presión de fluido.

Con el fin de obtener una solución analítica aproximada para el campo de presión, en este apartado los efectos de las deformaciones del cartílago no se han considerado.

La cavidad de la articulación se llena de fluido sinovial que tiene un comportamiento no newtoniano. Fluidos con características de “*couple stress*” se encuentran en líquidos formados por moléculas muy grandes. Las moléculas de ácido hialurónico de polisacáridos de cadena larga presentes en el líquido sinovial proporcionan la motivación para asumir el líquido sinovial como un fluido “*couple stress*” (Stokes) [232]–[235]. Estos fluidos están caracterizados por dos constantes μ y η , mientras que sólo un parámetro μ aparece en el modelo de fluido viscoso cuando las fuerzas del cuerpo y los momentos son ausentes, la ecuación de movimiento para el fluido incompresible “*couple stress*” es (Stokes) [236]:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (7.21)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} - \eta \nabla^4 \mathbf{V} \quad (7.22)$$

μ tiene las dimensiones de una viscosidad, mientras que η tiene las dimensiones de un momento. La relación η/μ tiene las dimensiones de una longitud al cuadrado.

Con los supuestos habituales de lubricación hidrodinámica aplicables a las películas fina de lubricante, las ecuaciones (7.21) y (7.22) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \eta \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \quad (7.23)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (7.24)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \eta \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \quad (7.25)$$

y la ecuación de continuidad es:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (7.26)$$

Las condiciones de contorno son:

$$u(x, h, z,) = u(x, 0, z,) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (7.27)$$

$$w(x, h, z,) = w(x, 0, z,) = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (7.28)$$

El flujo de un fluido viscoso en una matriz porosa [237] se rige por la ley de Darcy modificada, que representa los efectos polares:

$$v(x, h, z,) = \frac{\Phi H}{\mu(1 - \alpha)} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (7.29)$$

$$v(x, 0, z,) = \frac{dh}{dt} \quad (7.30)$$

Φ es la permeabilidad de la matriz porosa, el parámetro adimensional α representa la relación de tamaño de la microestructura de las moléculas del fluido sinovial sobre el tamaño de los poros, y es:

$$\alpha = \left(\frac{\eta}{\mu} \right) * \frac{1}{\Phi} = \frac{l^2}{\Phi} \quad (6.31)$$

Cuando el tamaño de la microestructura es muy pequeño comparado con el tamaño de los poros, es decir, $\alpha \ll 1$, los aditivos filtran en la matriz porosa, al límite, cuando $\alpha \rightarrow 0+$ el sistema tiende al caso de flujo newtoniano en la matriz porosa. Mediante la aplicación de las condiciones de contorno relacionadas:

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left\{ y^2 - hy + 2l^2 \left[1 - \frac{\cosh(2y-h)}{\cosh\left(\frac{2h}{l}\right)} \right] \right\} \quad (7.32)$$

$$w(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \left\{ y^2 - hy + 2l^2 \left[1 - \frac{\cosh(2y-h)}{\cosh\left(\frac{2h}{l}\right)} \right] \right\} \quad (7.33)$$

donde

$$l = \left(\frac{\eta}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.34)$$

e integrando la (7.26) con las condiciones (7.29) y (7.30), se obtiene la ecuación de Reynolds modificada:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[f(h,l) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[f(h,l) \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 12\mu \frac{dh}{dt} + \frac{12\Phi H}{(1-\alpha)} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) \quad (7.35)$$

Suponiendo que la presión sea mono-dimensional en la dirección x , la ecuación (7.35) se convierte en:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[f(h,l) \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 12\mu \frac{dh}{dt} + \frac{12\Phi H}{(1-\alpha)} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) \quad (7.36)$$

donde

$$f(h,l) = h^3 - 12l^2 h + 24l^3 \tanh\left(\frac{h}{2l}\right) \quad (7.37)$$

Es conveniente analizar el problema mediante el uso de variables no dimensionales utilizando los parámetros de la siguiente manera:

$$\theta = \frac{x}{R}; \quad L^* = \frac{L}{c}; \quad l^* = \frac{l}{c}; \quad \varepsilon = \frac{e}{c}; \quad h^* = \frac{h}{c} = 1 + \varepsilon \cos(\theta); \quad H^* = \frac{H}{c}; \quad (7.38)$$

$$\phi^* = \frac{\phi}{c^2}; \quad p^* = \frac{pc^2}{\mu R^2 \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)};$$

La ecuación (7.26) sera:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\partial p^*}{\partial \theta} \left[f^*(h^*, l^*) + \frac{12\Phi^* H^*}{(1-\alpha)} \right] \right\} = 12 \cos(\theta) \quad (7.39)$$

donde

$$f^*(h^*, l^*) = h^{*3} - 12l^{*2} h^* + 24l^{*3} \tanh\left(\frac{h^*}{2l^*}\right) \quad (7.40)$$

con la imposición de los valores de presión en los bordes del cojinete $\pm \frac{a}{R} = \pm \beta$ e integrando la ecuación (7.39) obtendremos:

$$p^*(\theta) = \frac{12[\cos(\beta) - \cos(\theta)]}{h^{*3} - 12l^{*2}h^* + 24l^{*3} \tanh\left(\frac{h^*}{2l^*}\right) + \frac{12\Phi^*H^*}{(1-\alpha)}} \quad (7.41)$$

La forma analítica de la presión hidrodinámica permite calcular la fuerza de la película sinovial [25]:

$$f_r^* = L^* R \int_{-\beta}^{\beta} p^*(\theta) \cos(\theta) d\theta \quad (7.42)$$

en la que el $p^*(\theta) \cos(\theta)$ término ha sido sustituido por la función que bien se aproxima a la de salida:

$$\frac{\left[\left[\frac{12\Phi^*H^*}{(1-\alpha)} - 12l^{*2}(1+\varepsilon) + (1+\varepsilon)^3 + 24l^{*3} \tanh\left(\frac{1+\varepsilon}{2l^*}\right) \right]^* \right.}{\left[\frac{12\Phi^*H^*}{(1-\alpha)} - 12l^{*2}(1+\varepsilon) + (1+\varepsilon)^3 + 24l^{*3} \tanh\left(\frac{1+\varepsilon}{2l^*}\right) \right]^2} \left. \left[(12\cos(\beta) - 12) + \theta^2 \left(1 - \frac{\cos(\beta)}{2} \right) \right] + \left[\frac{3}{2} \varepsilon^* (\cos(\beta) - 1) \right]^* \left[(1+\varepsilon)^2 - 4l^{*2} \tanh\left(\frac{1+\varepsilon}{2l^*}\right)^2 \right] \right] \right\} \quad (7.43)$$

La sustitución antedicha nos da la oportunidad de resolver analíticamente la (7.40). La expresión en forma cerrada de f_r contiene tanto los parámetros geométricos como parámetros biológicos relacionados con la presencia de fluido sinovial y del cartílago articular, y permite un cálculo rápido de la fuerza de la película sinovial. Además, con el fin de comparar los resultados obtenidos con la introducción de la función de aproximación (7.43) en (7.42) con los obtenidos mediante el uso de la expresión "exacta", las ecuaciones en juego han sido resueltas numéricamente. Sustituyendo las ecuaciones (7.38) en (7.42), se puede escribir:

$$f^*(\theta) = (1 + \varepsilon \cos(\theta))^3 - 12l^{*2}(1 + \varepsilon \cos(\theta)) + 24l^{*3} \tanh\left(\frac{1 + \varepsilon \cos(\theta)}{2l^*}\right) \quad (7.44)$$

Así derivando la (7.44) obtendremos:

$$\frac{df^*(\theta)}{d\theta} = -3(1 + \varepsilon \cos(\theta))^2 (\varepsilon \sin \theta) + 12l^{*2} \varepsilon \sin(\theta) - 24l^{*3} \frac{\left(\frac{\varepsilon \sin(\theta)}{2l^*}\right)}{\cosh\left(\frac{1 + \varepsilon \cos(\theta)}{2l^*}\right)} \quad (7.45)$$

La ecuación (7.36) se puede escribir como:

$$\frac{d}{d\theta} \frac{dp^*}{d\theta} \left[f^*(\theta) + \frac{12\Phi^*H^*}{(1-\alpha)} \right] + \frac{dp^*}{d\theta} \frac{df^*(\theta)}{d\theta} = 12 \cos(\theta) \quad (7.46)$$

Si ponemos

$$\frac{dp^*}{d\theta} = T(\theta) \quad (7.47)$$

donde $T(\theta)$ es una función desconocida de θ la (7.46) se convierte en

$$\frac{dT(\theta)}{d\theta} \left[f^*(\theta) + \frac{12\Phi^* H^*}{(1-\alpha)} \right] + T(\theta) \frac{df^*(\theta)}{d\theta} = 12 \cos(\theta) \quad (7.48)$$

donde $f^*(\theta)$ y $\frac{df^*(\theta)}{d\theta}$ han sido definidos de acuerdo con (7.44) y (7.45). El problema numérico se convierte en:

$$\frac{dp^*}{d\theta} = T(\theta) \quad (7.49)$$

$$\frac{dT(\theta)}{d\theta} = \frac{-T(\theta) \left[-3(1 - \varepsilon \cos(\theta))^2 (\varepsilon \sin(\theta)) + 12l^{*2} \varepsilon \sin(\theta) - \frac{24l^{*3} \varepsilon \sin(\theta)}{2l^* \cosh\left(\frac{1 - \varepsilon \cos(\theta)}{2l^*}\right)} \right] + 12 \cos(\theta)}{(1 + \varepsilon \cos(\theta))^3 - 12l^{*2} (1 + \varepsilon \cos(\theta)) + 24l^{*3} \tanh\left(\frac{1 + \varepsilon \cos(\theta)}{2l^*}\right) + \frac{12\Phi^* H^*}{(1-\alpha)}} \quad (7.50)$$

7.4.1. RESULTADOS Y DISCUSIONES

Mediante el uso de un conjunto de valores biomecánicos típicos que se encuentran en la literatura para la articulación del tobillo humano, y con las consideraciones metrológicas presentadas en el apartado 4 de este trabajo, ha sido posible dibujar:

- El valor máximo no dimensional de la distribución de presión p^* ($\theta=0$) con respecto a la excentricidad ε y al parámetro no dimensional de “couple-stress” (Figura 7. 25);

Figura 7. 25: Variación del campo de presión por diferente valores de ε y de l^* por $\theta=0$

- La variación de presión sinovial no dimensional p^* con respecto a la coordenada angular θ (Figura 7. 26), por diferentes valores de ε y $l^*=0,2$;

Figura 7.26: Variación del campo de presión con respecto a θ por diferentes valores de ϵ y por $l^*=0.2$

- La variación de presión sinovial no dimensional p^* con respecto a la coordenada angular θ (Figura 7.27), por diferentes valores de l^* y $\epsilon=0.4$;

Figura 7.27: Variación del campo de presión por diferentes valores de l^* y por $\epsilon=0.4$

- La fuerza F_r^* de la película sinovial no dimensional aproximada con respecto a la excentricidad ϵ por varios valores del parámetro l^* (Figura 7.28)

Figura 7. 28: Variación de f_r con respecto a ε por diferentes valores de l^*

Los valores calculados por el campo de presión y por la fuerza de la película de fluido aproximada se han comparado con los de [7], [57] obtenidos con modelos más complicados y que muestran una buena concordancia.

Por otra parte, los resultados del cálculo numérico de la (7.49) y (7.50) se presentan en la Figura 7. 29 y Figura 7. 30.

Figura 7. 29

Como se puede observar, los valores de la fuerza de la película de fluido evaluados con el método numéricos son muy cercanos a los obtenidos mediante el uso de la función aproximada (7.43).

Figura 7.30

Se observa que la presión de la película en compresión aumenta significativamente con el aumento de ϵ y de l^* mientras que el efecto de *couple-stress* es aumentar la capacidad de carga en comparación con el caso newtoniano. Estos resultados están de acuerdo con las observaciones obtenidas en cojinetes mecánicos [238].

7.4.2. DISCUSIONES

Con referencia a la articulación del tobillo humano en este capítulo se introduce un modelo analítico para el campo de presión y para la descripción de la fuerza estacionaria de la película de fluido lubricante.

El modelo, en base a la teoría del micro-continuo de Stokes tiene en cuenta el carácter no newtoniano del líquido sinovial y de los efectos del fluido *couple-stress* en el movimiento de *squeeze* de la articulación del tobillo. Además, con el fin de considerar la filtración en el cartílago articular del fluido lubricante ha sido adoptada una ecuación de Darcy modificada. De esta manera su integración nos proporciona la función de distribución de la presión y, mediante el uso de una función aproximada nos permite evaluar la fuerza de la película sinovial en forma explícita.

El modelo propuesto, a pesar de su simplicidad, proporciona una herramienta útil para la evaluación de las características de funcionamiento de la articulación, para determinar el comportamiento de la articulación mediante la variación de los parámetros implicados.

Los resultados del modelo de lubricación simplificado dicen que:

- Debido a las hipótesis adoptadas, el modelo propuesto nos da buenos resultados en los casos en los que es posible despreciar los efectos de las deformaciones del cartílago y la formación de gel lubricante sinovial (es decir, las articulaciones con bajas cargas).
- La solución en forma cerrada para el campo de presión sinovial y para la fuerza de la película de fluido son útiles en todos los análisis dinámicos de las

articulaciones del tobillo con el objetivo de obtener un mejor compromiso entre la precisión y el coste de cálculo para una evaluación rápida de las fuerzas que actúan en la articulación sinovial durante un movimiento de compresión pura. Se ofrece una mejor legibilidad de los principales parámetros geométricos y reológicos que caracterizan la articulación sinovial.

Por último, es necesario señalar que en este trabajo se han adoptado muchas simplificaciones en el modelo matemático con el fin de encontrar una solución en forma cerrada del problema, como la lubricación en condición de compresión pura, permeabilidad constante (modelo de Darcy modificado), matriz del cartílago y el hueso subcondral rígidos.

7.5. CONSIDERACIONES MORFOMÉTRICAS

Con el fin de obtener un modelo de comportamiento biomecánico del contacto lubricado de la articulación del tobillo, en este capítulo se realizarán consideraciones metrológicas para la caracterización y reconstrucción geométrica 2D en el plano sagital de las superficies articulares.

A partir de la imagen de la sección anatómica sagital del tobillo de un cadáver obtenida con una técnica de alta resolución llamada “*Color Cryosection*” [239] y empleando las técnicas de tratamiento de imágenes y de detección de los bordes se detectarán las coordenadas de los píxeles que definen el borde de las superficies superior e inferior de la articulación. Posteriormente se presentará y desarrollará un algoritmo para el cálculo de las circunferencias que mejor se ajustan a los píxeles que definen el borde de cada superficie.

De ambas las superficies se obtendrán las coordenadas de su centro y su radio. Se evaluará también el error cometido por el algoritmo utilizado de ajuste y la incertidumbre asociada a la toma de coordenadas relacionada a la resolución de la imagen y al método de detección de los bordes. Los resultados obtenidos se compararán con los presentados por [214], [240] y se emplearán por el desarrollo de los modelos hidrodinámico propuestos a lo largo de este trabajo.

Figura 7. 31: Superficie Talar y Tibial y parámetros a medir. (Elaboración propia)

Tabla 7. 2: Parámetros morfométricos bajo evaluación.

	Medidas	Figura
R_m	Radio de curvatura de la superficie Tibial	Figura 7. 31
R_t	Radio de curvatura de la superficie Talar	Figura 7. 31
c	Juego radial del bio-cojinete	Figura 7. 14
e	Excentricidad del bio-cojinete del tobillo en la configuración descargada	Figura 7. 14

La Figura 7. 32 muestra un diagrama de flujo de las actividades desarrolladas a partir de la imagen de entrada hasta los parámetros que definen las dos circunferencias de salidas.

Figura 7. 32: Esquema de trabajo

7.5.1.ELECCIÓN DE LA IMAGEN

Un gran número de métodos de adquisición de formas han evolucionado a lo largo del siglo pasado. Estos métodos siguen dos direcciones principales: detección por contacto y sin contacto.

Figura 7. 33: Posibles métodos para la adquisición de forma. (Elaboración propia)

Los métodos sin contacto funcionan generalmente mediante la proyección de ondas de energía en un objeto y la grabación de los valores de energía transmitida o reflejada.

Métodos transmisivos para la captura de formas que se utilizan en aplicaciones médicas son la tomografía axial computarizada (TAC) y la resonancia magnética (RM) con el resultado de una descripción de la densidad volumétrica dentro y alrededor de un objeto. Este volumen es adecuado para la visualización directa o para la reconstrucción de superficies. Aunque las imágenes originales de un TAC y un RM son capaces de proporcionar toda la información, con una buena diferenciación de color en escala de grises (Scala Hounsfield), estas son de baja resolución y de color gris y la calidad de la misma no es adecuada para la identificación de secciones anatómicas que contienen estructuras finas, tales como los músculos finos, troncos nerviosos, los ganglios linfáticos o el cartílago articular. A diferencia de las imágenes TAC y de RM, las imágenes anatómicas con la técnica de *Cryosection*® pueden visualizar e identificar informaciones anatómicas mucho más realistas. Tales imágenes seccionales muestran el verdadero color del cuerpo humano en alta resolución sin pérdida, que está más allá de la proyección de imagen médica, como la TAC y la RM [239], [241]–[244]. Esta técnica ha sido desarrollada por primera vez con el proyecto *Visible Human (VHP)* y publicada en Internet en el 1994 y 1995 (Spitzer et al 1996; Spitzer & Whitlock, 1998; Ackerman, 1999). Consiste en la reconstrucción 3D a través el utilizzo combinado de datos TAC y de RM con la de imágenes fotográficas de un cuerpo masculino y un cuerpo femenino humanos, crío-seccionados en el plano vertical al eje del cuerpo.

El procedimiento para el crío-seccionamiento y la digitalización se realizó a través del embalsamamiento y el posterior fresado del cadáver previamente criogenado.

Los cadáveres embalsamados se colocaron en una caja con una gelatina para estabilizarlos durante el corte. Se incluyeron cuatro tubos de colores a lo largo de las cuatro esquinas de la caja con el fin de tener puntos de referencia para la coincidencia con los datos de la TAC y de la RM y la posterior reconstrucción (Figura 7. 34).

El fresado se realizó con una máquina CNC de precisión, a una temperatura de -25°C al fin de evitar que las pequeñas estructuras (tales como dientes, el cartílago articular) pudieran caerse de la superficie de fresado.

Figura 7. 34: Esquema de los planos de corte [28], [30]–[33]

Las imágenes anatómicas axiales se obtuvieron a intervalos de 0,25 mm para la cabeza y de 0.5 mm para las otras regiones. En total, hubo 3.640 cortes seriados, con cada archivo tiff ocupa 36 Mb tamaño de píxel aproximada era 328 μm) [28], [30]–[33].

Para el nuestro estudio se ha elegido la imagen en el plano sagital medio de la pierna n.1125.jpg de dimensión RGB 608x618 píxeles, en escala 1:1, y con tamaño de cada píxel de 0.328 mm como se muestra en **Figura 7. 35**.

Figura 7. 35: Imagen de referencia n.1125.jpg del Visible Human Project(VHP)

7.5.2. TRATAMIENTO DE LA IMAGEN

La interpretación de las imágenes obtenidas por una escena de la vida real permite sacar muchas informaciones útiles para navegar en un ambiente, el manejo y el

reconocimiento de lo que se está observando. Pero ¿qué significa "interpretar"? La psicología define la interpretación como el proceso de "representación" de la realidad, que tiene como objetivo extraer las "características sobresalientes" (*Features*) por "reconocer". Sin embargo, si en el caso del hombre, el problema del reconocimiento implica asociaciones entre objetos de la escena y los clasificados en las categorías mentales adecuadas formadas durante la experiencia, la visión artificial por el contrario necesita de adecuadas fases para la "representación", "descripción" y "el reconocimiento en sí mismo". El resultado de todo esto es la elaboración o tratamiento que nos permite reconocer determinadas características de las imágenes para diferentes finalidades, como: control, clasificación, selección etc., utilizadas en diferentes sectores desde la industria hasta los servicios. "No se puede entender lo que se ve y cómo se logra sin la comprensión del proceso subyacente de procesamiento de la información" [245]. En efecto, desde el punto de vista de la teoría de la información, la visión implica una reducción considerable de los datos disponibles, por lo tanto, antes de llegar al reconocimiento efectivo de la superficie circular, a continuación se describen, esquematizan y explican brevemente los pasos que caracterizan los momentos fundamentales de "representación" y "descripción" y la estrategia implementada con el fin de identificar los píxeles que componen los bordes de las dos superficies articulares.

Observando una escena o una imagen somos capaces de distinguir un objeto de otro, o un conjunto genérico de elementos conectados, evaluando la discontinuidad de la superficie, o mejor dicho las variaciones de intensidad de iluminación que determina la luz incidente sobre la superficie de ellos.

Las técnicas de detección de bordes (*edge detection*) tienen el objetivo de eliminar de las imágenes las zonas constantes de nivel de intensidad de iluminación, dejando solo las variaciones de intensidad, con la hipótesis, a menudo verificada, de que estas últimas guarden toda la información útil [246]. Trabajando en el plano de la imagen, esta viene vista como una matriz y cada uno de sus elementos representan los píxeles con asociado un valor de intensidad luminosa $I(i,j)$. Se entiende por intensidad luminosa $I(i,j)$ la potencia óptica por unidad de superficie (en el plano de la imagen), medida en $[W/m^2]$.

Los bordes están definidos como la discontinuidad local de la intensidad lumínica, o sea aquellas zonas de la imagen donde se verifican variaciones bruscas de la intensidad por esta razón se crean modelos de bordes basados en la variabilidad de la intensidad y se intenta realizar algoritmos que puedan dar un significado a cuanto se haya encontrado.

La detección de los bordes tiene el objetivo de determinar no solo la discontinuidad de la intensidad, sino de llegar a obtener una descripción, en términos de ecuaciones, de los segmentos de curva que constituyen el borde de la imagen del objeto

El procedimiento se realiza en dos fases principales:

- Se convierte las imágenes a niveles de grises y se produce un conjunto de puntos candidatos a pertenecer al borde.

- La segmentación consiste en coger un conjunto de puntos candidatos y dividirlos en arcos de curva por cada superficie, algunos de los candidatos serán eliminados antes de esta fase porque son considerados como productos del ruido.
- La parametrización consiste en la estimación de los parámetros de las ecuaciones de las curvas dadas por la segmentación.

Adicionalmente se ha utilizado la técnica de umbrales (*thresholding*) [246] para mejorar la detección utilizando el método “*global threshold*” calculado a partir del procedimiento propuesto por González and Woods [247]. A partir del histograma de la imagen de salida, se puede determinar el coeficiente de *threshold* calculando el valor medio (T) entre los valores de intensidad máximo y mínimo de la imagen.

Se segmenta la imagen usando el valor T , así se producen dos grupos de píxeles, el grupo (1) de píxeles con valor de intensidad de grises $\geq T$ y el otro (2) que incluye píxeles con valor $< T$. Se calcula en cada grupo el valor medio de intensidad de grises, respectivamente μ_1 y μ_2 para los grupos (1) y (2), y se evalúa un nuevo valor del coeficiente de *threshold* $T = 1/2(\mu_1 + \mu_2)$. Estos pasos se repiten hasta que el valor de T en las sucesivas interacciones sea mucho más pequeño que un valor predefinido T_0 que en este caso se ha supuesto igual a 0.5.

7.5.3. DETECCIÓN DE LOS BORDES

En la Figura 7. 36 se muestra un modelo de contorno ideal, en la que la transición de color es instantánea.

Figura 7. 36: Ejemplos de variación de colores en las imágenes. (Elaboración propia)

En la práctica, una discontinuidad de ese tipo no existe debido a problemas relacionados con la óptica de la cámara, el muestreo y la cuantificación de los puntos y con otras imperfecciones del sistema de adquisición, que producen bordes discretos y afectados por el ruido.

Por lo tanto, la discontinuidad no se corresponde a un cambio brusco de orientación de la superficie, sino, se representa según una zona de transición.

Un posible enfoque para limitar la influencia del ruido, consiste en filtrar la imagen en altas frecuencias espaciales con un filtro de esta manera el ruido se atenúa, pero la señal obtenida suaviza la transición en correspondencia con la discontinuidad, perdiendo entonces la imagen contraste entre zonas claras y oscuras. Para ello se elige un filtro gaussiano cuya desviación estándar puede ser modificado para preferir el reconocimiento de los bordes pequeños o más grandes y gradual

7.5.4.SEGMENTACIÓN

La segmentación [248] es uno de los pasos más importantes en el análisis de una imagen, su principal fin es dividirla en partes que tienen una fuerte correlación con objetos o áreas del mundo real contenidos en esta.

Numerosas técnicas se han desarrollado a lo largo de los años por la separación de las regiones en la imagen que tienen similares características, o atributos, de los cuales usted puede enumerar las principales:

- La segmentación por luminosidad en las imágenes en escala de grises, es decir, dividir la imagen en diferentes partes, teniendo cada uno un grado diferente de luminosidad (*global knowledge*)
- Segmentación por el color, en donde cada región se indica por la presencia de elementos dentro de una cierta escala cromática (*region-based segmentations*)
- Segmentación mediante el reconocimiento de los contornos de un elemento (*edge-based segmentations*)

La combinación de estas tres técnicas permite crear algoritmos de alto potencial utilizando sus resultados a un nivel más alto de abstracción.

El segundo y el tercer grupo solucionan un problema dual: cada región puede ser representada por su borde cerrado y cada borde cerrado describe una región. Dada la diferente naturaleza de los algoritmos de segmentación basada en las regiones y en los bordes, los resultados y la información extraída son distintos.

Los resultados de la segmentación de estos dos enfoques pueden ser combinados en una única estructura descriptiva.

Una de las técnicas de extracción de bordes de una imagen completa, utiliza el operador de Canny (o filtro de Canny) obteniendo las respectivas regiones por eso delimitadas, con la consiguiente selección del perfil.

Cuando se analiza una imagen se debe siempre tener en cuenta que ésta, a menudo, representa una proyección bidimensional de una escena tridimensional con la consiguiente discretización en el espacio y en los valores.

Lo que generalmente se entiende con borde es el límite de paso desde una zona con unas características hasta otra con características notablemente diferentes, además se entiende que este paso debe tener lugar de forma bastante repentina, ósea en un espacio restringido.

En este sentido lo que se quiere identificar y localizar son las discontinuidades que representan la separación entre regiones homogéneas, donde el término

“homogéneo” puede significar “del mismo color”, “del mismo material,” “con la misma trama”, etc....

Los problemas más comunes causados por ese tipo de segmentación (*edge detection*), debidos a la presencia de ruido o de insuficiente información sobre la imagen, son la extracción de bordes incorrecta causando una influencia negativa en los resultados finales.

7.5.5. FILTRO DE CANNY

En 1986, el estadounidense John F. Canny, ideó un algoritmo de reconocimiento de los contornos que se define ahora como el estándar en este campo, por esta razón, se ofrece un análisis detallado con preferencia a otros algoritmos que en la mayoría de los casos no ofrecen los mejores resultados. El operador de Canny [249] se divide en cuatro fases:

1. Reducción de ruido
2. Búsqueda del gradiente de la luminosidad de la imagen
3. Supresión del no-máximo
4. Detección del borde por thresholding con histéresis.

John Canny ha desarrollado una formulación matemática a partir de los siguientes tres criterios[245], [248], [249]:

- Buena detección: Tiene que haber una baja probabilidad de error en reconocer un punto verdadero del borde y una baja probabilidad de reconocer puntos que no pertenezcan a los bordes (falsos bordes). En ausencia de más información el ruido está considerado blanco y gaussiano.
- Buena localización: Los puntos marcados como bordes por el operador deben estar lo más cerca posible al centro del verdadero borde.
- Respuesta única a cada borde: Esta propiedad está implícitamente incluida en el primer criterio e indica que cuando hay dos respuestas al mismo borde, uno de estos es falso.

Los bordes de imágenes de intensidad pueden ser modelados de acuerdo con sus perfiles de intensidad y con pocos modelos se pueden considerar todos los bordes de interés. Tales modelos están propuestos como señales monodimensional, aunque obviamente, se consideran secciones de imágenes bidimensionales a lo largo de una línea de orientación arbitraria (no necesariamente una fila o una columna). Los bordes se pueden dividir en tres tipos:

1. Bordes en Escalón (Figura 7. 36a), son probablemente el tipo más común, representan los bordes de regiones con distinto nivel de gris. Dos bordes de escalón representan también los bordes empinados (*ridge edges*) (Figura 7. 36) ;
2. Bordes en Rampa, si la transición tiene lugar a lo largo de una serie de píxeles y no en uno solo (Figura 7. 36b);

3. Los bordes “de punta” (*roof edges*) (Figura 7. 37) son relativamente raros, pero pueden aparecer a lo largo de intersecciones de superficies y corresponden a variaciones rápidas de su derivada primera [246].

Figura 7. 37: Roof edges con ruido aditivo

Un buen extractor de bordes de escalón consigue encontrar todos los bordes necesarios para muchas aplicaciones, por esto se considera como modelo predefinido de borde por la realización del filtro [250].

La fase 2 anteriormente descrita restituye para cada píxel, la dirección, redondeada, de la máxima variación de intensidad en el punto de borde con el valor de este último.

En la fase 3 se pondrán los valores de intensidad de los píxeles que no se consideran parte del contorno, es decir, el píxel cuyo valor de intensidad no es mayor que la de los píxeles adyacentes a lo largo de la dirección dada por el valor en ese punto.

La fase 4 nos proporciona la posición del borde en la imagen en que tal borde está situado, al largo de la perpendicular al mismo y estos puntos de borde se guardan en una imagen binaria ($EDGE = 1$ e $NOEDGE = 0$), donde la posición de cada elemento representa las coordenadas en el plan de la imagen de los píxeles que hacen parte del borde de las superficies articular, así como se muestra en la Figura.

La Figura 7. 38a representa la imagen de salida, la Figura 7. 38b muestra la imagen en escala de grises y con ruido gaussiano, la Figura 7. 38c muestra el borde detectado por el filtro de Canny de la superficie superior.

Figura 7. 38: a) imagen de salida, b) imagen en escala de grises y con ruido gaussiano, c) borde detectado por el filtro de Canny de la superficie superior.

7.5.6. ALGORITMO DE AJUSTE

Una vez obtenidos los píxeles que forman el contorno de las dos superficies articulares que forman el contacto lubricado motivo de estudio, se calculará las circunferencias que mejor se ajustan a los píxeles que definen el borde.

7.5.6.1 SUSTITUCIÓN DE LA GEOMETRÍA DE LAS SUPERFICIES ÓSEAS DE UNA IMAGEN DIGITAL POR CÍRCULOS

El contorno de las superficies óseas de la imagen puede ajustarse a un círculo bajo diferentes criterios de optimización. La entrada será el conjunto de datos de puntos recuperados de la segmentación de la imagen y la extracción de contornos. Incluso para imágenes analógicas de rayos X, la digitalización transforma el análisis de señales en un problema de procesamiento digital de imágenes para el procesamiento ulterior. En el caso en estudio, el contorno del hueso del tobillo se obtiene mediante el filtro mediano y el filtro de Canny aplicados a una imagen de alta resolución.

Se adopta una aproximación de primer orden al círculo de las superficies óseas en el plano de proyección (Hipótesis de cojinete corto) [56]. Sin embargo, la conversión final del conjunto de datos de las coordenadas de los puntos en una curva analítica es un proceso de ajuste de curva de un conjunto de datos de puntos a un círculo de centro (a, b) y de radio R :

$$F(x, y; a, b, R) = 0 : (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0 \quad (7.50)$$

El mejor ajuste ordinario tiene como objetivo minimizar, bajo una métrica concreta, la diferencia punto a punto del conjunto de datos con la geometría de sustitución (círculo de solución). Como se ha visto y planteado en el capítulo 5 se utilizarán dos criterios de optimización diferentes para el ajuste:

- por mínimos cuadrados;
- por mínima zona.

El ajuste geométrico u ortogonal, métrica L_2 , determinado por la minimización de la suma cuadrada de los residuos d^2 - diferencia del radio de cada punto o pixel (x_i, y_i) que define el contorno del hueso, R_i , con el círculo de ajuste de solución de radio R y centro de coordenadas (a, b) - se expresa mediante:

$$\min \left[\sum_{i=1}^n \left(\sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2} - R \right)^2 \right] = \min \left[\sum_{i=1}^n d^2 \right] \quad (7.51)$$

El ajuste geométrico tiene una interpretación directa como la minimización de la desviación del punto medido con respecto a la geometría ideal de sustitución.

Corresponde al concepto de minimización del ruido de los puntos medidos con respecto a la geometría de sustitución. También llamado regresión de distancia ortogonal, funciona correctamente en términos estadísticos. Una discusión extensa de los ajustes de círculo se desarrolla en Calvo et al. [251] y se ha aplicado también en el Capítulo 5. Un inconveniente es que la solución para el ajuste geométrico del círculo no siempre existe ni es única. Entre los algoritmos más precisos para el cálculo de círculos de mínimos cuadrados, se encuentra el algoritmo de Levenberg-Marquardt [252]. Introduce una corrección del método de Gauss-Newton de mínimos cuadrados clásico no lineal. Es confiable, aunque iterativo y requiere inicialización. Un ejemplo de

aplicación en medidas indirecta, en termino de metrología por coordenadas, se ha visto, estudiado y aplicado en el Capítulo 5 de esta memoria de Tesis.

Una segunda metodología de ajuste es el algoritmo de mínima zona. Este criterio se recomienda en metrología por la norma ISO 1101 con el fin de evaluar la desviación de la forma de las superficies, la redondez en este caso. Un caso práctico de aplicación de este método de reconstrucción de formas se ha visto en el Capítulo 5 de esta memoria de Tesis. La redondez o circularidad de una característica se define como la diferencia mínima de los radios entre dos círculos concéntricos que limitan la característica entre ellos, como una métrica L_∞ . Los criterios de tolerancia de mínima zona para un ajuste circular desde n puntos pueden expresarse por:

Base de datos de n puntos con $k = 1, \dots, n$

$$R_k(a, b) = \sqrt{(x_k - a)^2 + (y_k - b)^2}$$

solución del centro por el criterio de mínima zona (a^*, b^*) (7.52)

$$R^* = \frac{1}{2} [R_{\max} - R_{\min}]$$

Donde $R_{\min} \leq R_k \leq R_{\max} \forall k$ y $(R_{\max} - R_{\min})$ es el mínimo.

Una de las principales razones para adoptar los Criterios de Mínima Zona (MZC) es porque produce una zona de tolerancia menor que los criterios de mínimos cuadrados por su formulación. Los Criterios de Mínima Zona de un conjunto finito de puntos de datos es un complejo problema combinatorio. Está determinado por 4 puntos del conjunto de datos [129] y la dificultad del problema matemático ha establecido un primer obstáculo para un uso más amplio de los criterios. Este aspecto se ha discutido en el Capítulo 5.

La Figura 7. 39 muestra los pixeles del borde detectados con el filtro de Canny y ajustados a una circunferencia mediante el método anteriormente descrito.

Figura 7. 39: Resultados obtenidos por: a)Criterio de mínimos cuadrado, b) criterio de mínima zona

7.5.7. CÁLCULO DE INCERTIDUMBRES

El presente capítulo tiene como fin presentar un modelo para el cálculo de la incertidumbre de los parámetros de detección de las geometrías debido al método

utilizado, es decir, evaluar la incertidumbre asociada a la medida de los radios de las circunferencias articulares detectadas, la posición de sus centros y el valor del error medio cuadrático de ajuste calculado.

Se seguirán las recomendaciones del documento EA-4/02 [253], de la “Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement [254], del Suplemento 1 a la “Guide to the expression of uncertainty in measurement” - Propagation of distributions using a Monte Carlo method [255] y el Suplemento 2 a la “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Extension to any number of output quantities [256].

La GUM establece en su apartado G.1.5 que:

“Si la relación funcional entre Y e sus magnitudes de entrada no es lineal, y el desarrollo en serie de Taylor de primer orden no es una aproximación aceptable, la distribución de probabilidad de Y no puede obtenerse mediante convolución de las distribuciones de las magnitudes de entrada. En tales casos, es necesario utilizar otros métodos, analíticos o numéricos”.

Según [253], [254], y según a cuanto visto en el capítulo 5 los pasos que se han de seguir para emplear el método de Monte Carlo son los siguientes:

- Formulación:
 - Definir las magnitudes de salida Y_i , es decir, la magnitud a medir (el mensurando).
 - Determinar las magnitudes de entrada $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ de las que dependen las magnitudes Y_i .
 - Desarrollar un modelo que relacione Y_i y X .
 - A partir de los conocimientos disponibles, asignar las funciones de distribución de probabilidad (FDP) gaussiana (normal), rectangular (uniforme), etc. a cada X_i . Asignar una FDP conjunta a aquellas X_i que no son independientes.
- Propagación: propagar las FDP de las X_i mediante el modelo para obtener las FDP de cada una de las Y_i .
- Resumen: utilizar la FDP de cada Y_i para obtener:
 - La esperanza matemática de Y_i , considerada como una estimación de la magnitud y_i .
 - La desviación típica de Y_i , considerada como la incertidumbre típica $u(y_i)$ asociada a y_i .
 - Un intervalo de cobertura que contenga Y_i con una probabilidad específica (la probabilidad de cobertura).
 - Obtención de la matriz de covarianzas de las magnitudes de salida Y_i .

7.5.7.1 FORMULACIÓN: DESARROLLO DEL MODELO QUE RELACIONE LAS MAGNITUDES DE SALIDA CON LAS MAGNITUDES DE ENTRADA

Los modelos de ajuste de las superficies circulares han sido definidos en el apartado 7.6

7.5.7.2 FORMULACIÓN: DEFINIR LAS MAGNITUDES DE SALIDA

Las magnitudes de salida están representadas por las coordenadas de los dos centros de las dos superficies articulares y sus radios.

7.5.7.3 FORMULACIÓN: DEFINIR LAS MAGNITUDES DE ENTRADA

El modelo de detección de borde y ajuste presenta dos magnitudes de entrada:

1. Las coordenadas de los píxeles que definen el borde $(u, v)^T$ de la superficie articular Tibial, obtenidas como definido en el apartado anterior;
2. Las coordenadas de los píxeles que definen el borde $(u_1, v_1)^T$ de la superficie articular calcanear, obtenidas como definido en el apartado anterior;

7.5.7.4 FORMULACIÓN: ASIGNACIÓN DE LAS FDP A LAS MAGNITUDES DE ENTRADA

Para las dos magnitudes de entrada anteriormente definidas, se establecerán sus FDP:

- Para las coordenadas de los píxeles que definen el borde de las superficies articulares observados en la imagen $(u, v)^T$ y $(u_1, v_1)^T$, teniendo en cuenta el trabajo de Rosario Anchini et al. [257], se asume que la distribución de las coordenadas puede responder a una distribución triangular, que respecto al valor más probable de la coordenada del píxel, puede variar ± 1 píxel. Estos valores de la distribución han de tomar valores enteros.

$$T(u_{b_j}' - 1, u_{b_j}' + 1) \quad T(v_{b_j}' - 1, v_{b_j}' + 1)$$

- Se considera que las coordenadas $(u_{b_j}', v_{b_j}')^T$ no presentan correlación.
- El siguiente paso es volver a escala los valores geométricos obtenidos en la imagen a sus dimensiones reales. De hecho, conocer la resolución de la imagen y el tamaño del píxel será posible expresar las mediciones y sus incertidumbres en mm. En este punto, también debemos considerar incertidumbre por resolución de la imagen (tamaño de píxel equivalente a resolución de escala, sin entrar en consideraciones subpíxel), y luego el tamaño del píxel, tal como se muestra en la Figura 7. 40. Se supone que la posición del borde de las dos superficies articulares en cada píxel

responde a una distribución rectangular, que en comparación con el valor más probable de la coordenada de píxeles puede variar $\pm 1/2$.

$$R(u_{t,c}^i - 1/2, u_{t,c}^i + 1/2) \quad R(v_{t,c}^i - 1/2, v_{t,c}^i + 1/2)$$

Figura 7. 40: Error debido a la resolución de la imagen

7.5.7.5 PROPAGACIÓN

Para realizar la propagación del modelo, se replicará dicho modelo un número de veces M igual a $1 \cdot 10^6$ (valor recomendado en el suplemento 1 a la GUM). Se realiza un cálculo previo, y se comprueba que cada iteración del modelo tarda pocos segundos (Intel Core 2 duo E8400 @ 3 GHz, 4 GB RAM),

7.5.7.6 RESULTADOS Y DISCUSIONES

El procedimiento para obtener los resultados ha sido el siguiente:

1. Determinar las cantidades de entrada. En este caso han sido las coordenadas de los píxeles que definen el borde de la superficie del hueso.
2. Las coordenadas anteriores se ajustan para ambas superficies circulares según los métodos de mínimos cuadrados y de mínima zona.
3. Con base en los resultados del ajuste anterior, se determinan todos los parámetros geométricos.

Tabla 7. 3: Resultados geometrico según los algoritmo de LM y MZC

	Algoritmo de Minimos cuadrados (mm)	Algoritmo de Minima Zona (mm)
<i>Rm</i>	23.651	24.342
<i>Rt</i>	21.536	21.087
<i>c</i>	2.115	3.255
<i>e</i>	1.234	0.463
<i>RMSE de la superficie tibial</i>	1.25	1.68
<i>MZT de la superficie tibial</i>	6.26	5.93
<i>RMSE de la superficie talar</i>	0.47	0.55
<i>MZT de la superficie talar</i>	2.19	2.06

La Tabla 7. 3 muestra la estimación para cada uno de los parámetros geométricos: *Rm*, *Rt*, *c* y *e* (Tabla 7. 2 y Figura 7. 31). Las cifras de mérito del ajuste circular son tanto el error cuadrático medio (RMSE) como la tolerancia mínima de zona (MZT) en un

intercambio (*trade-off*) entre ambos para ambos los algoritmos de ajuste. La Figura 7. 41 y Figura 7. 42 muestran los resultados de la simulación con el método Montecarlo para las superficies tibial y talar utilizando los dos algoritmos de ajuste Mínimos cuadrados (Figura 7. 41) y Mínima Zona (Figura 7. 42). La Tabla 7. 4 muestra los resultados numéricos de la simulación.

Figura 7. 41: Resultados de la simulación Montecarlo utilizando el Algoritmo de Mínimos Cuadrados para las superficies tibial (izquierda) y talar (derecha)

Figura 7. 42: Resultados de la simulación Montecarlo utilizando el Algoritmo de Mínima Zona para las superficies tibial (izquierda) y talar (derecha)

Tabla 7. 4: Resultados de la simulación por el método Montecarlo

	LM [mm]	MZC [mm]	Incertidumbre estándar LM u(y) [mm]	Incertidumbre estándar MZC u(y) [mm]	Intervalo de cobertura al 95% LM		Intervalo de cobertura al 95% MZC	
					Límite inferior [mm]	Límite superior [mm]	Límite inferior [mm]	Límite superior [mm]
<i>R</i>	23.651	24.917	0.6481	0.6670	22.388	24.917	23.042	25.645
<i>r</i>	21.536	21.087	0.5041	0.4936	20.592	22.546	20.115	22.075

Los resultados obtenidos para el radio de la superficie talar se han comparados con los presentados por Michael [214] y Hayes [240] (Tabla 7. 5). Hayes presentó un estudio con 21 tobillos normales y se encontró que el radio del talar era mayor en varones que en hembras ($p < 0,05$)

Tabla 7. 5: Comparación de los resultados obtenidos de la superficie talar con los resultados presentes en literatura científica.

	Talar radius	Estimate [mm]	Standard uncertainty $u(y)$ [mm]
Hayes A. at al.	r	20.7	2.6
Michael JM at al.	r	21.79	3.22
En este estudio	r	21.536(LM)	0.5041(LM)
		21.087 (MZC)	0.4936(MZC)

Una vez obtenidos los resultados para los parámetros geométrico que definen el problema lubricado ha sido posible efectuar un estudio de sensibilidad del modelo tribológico antes desarrollado a dichos parámetros.

Los resultados muestran que las condiciones iniciales del problema tribológico cambian sensiblemente según el algoritmo utilizado (LM o MZC). La Figura 7. 43 muestra la altura del meato usando los dos criterios: LM y MZC.

Figura 7. 43: altura del meato usando los dos criterios: LM y MZC

La Figura 7. 31 muestra el ajuste de los arcos de las superficies tibial y talar en el contacto lubricado y sus centros de acuerdo con: (a) el algoritmo de mínimos cuadrados y (b) algoritmo de mínima zona utilizando la misma imagen médica para ambos algoritmos.

Esta diferencia entre los valores de los parámetros geométricos, que afectan las condiciones de contorno del problema fluidodinámico, evaluados con dos criterios diferentes produce un cambio en las condiciones dinámicas. De hecho, la Figura 7. 44 muestra cómo cambia la presión dentro del contacto para dos valores distintos de l . Las curvas de presión en rojo son relativas al algoritmo LM y en negro al criterio MZC.

Figura 7. 44: Evaluación de campo de presión en el contacto lubricado por diferentes valores del parámetro *couple stress* ($l=0.2$ figura de izquierda y $l=0.4$ figura de derecha) teniendo en cuenta los resultados de la reconstrucción de la geometría superficial por dos diferentes algoritmos LM y MZC

La metodología utilizada en el procesamiento de imágenes médicas con su segmentación y en la elección de dos algoritmos de ajuste para la determinación de las posiciones de los elementos óseos y su geometría muestra un nivel de precisión apreciable según la Tabla 7. 3. La posibilidad de ajustar la geometría ósea bajo diferentes criterios de ajuste motiva un estudio de sensibilidad sobre el campo de presión. Los resultados muestran que las condiciones límite representan una fuente principal de influencia en la solución debido a un cambio significativo en la altura del meato (Figura 7. 43). Induce una respuesta dinámica diferente de la articulación del tobillo (Figura 7. 44). En el caso en estudio, una altura del meato mayor h^* (criterio MZ) corresponde a un nivel de presión más bajo a través del contacto. Por el contrario, los criterios de LS actúan en la dirección opuesta generando así un campo de mayor presión en la articulación sinovial. La influencia significativa de las condiciones de contorno, en la cuantificación del campo de presión de la articulación del tobillo, advierte que hay que tener cuidado no sólo al comparar directamente los resultados cuantitativos de la presión sin considerar el modelo dinámico sino también al procesamiento completo de la geometría que establece las condiciones de contorno.

7.6. MODELO ANALITICO APROXIMADO PARA LA LUBRICACIÓN EN CONDICIONES DE COMPRESIÓN PURA, FLUIDO NO NEWTONIANO Y DEFORMACIÓN DEL CARTILAGO

El mecanismo de lubricación que se propone en esta sección es de tipo elastohidrodinámico donde la deformación del cartílago se modela a través de la ley lineal de Winkler y el fluido lubricante se comporta como un fluido *couple-stress* es decir, no Newtoniano, debido al tamaño de las partículas que constituyen el líquido sinovial, así como se ha desarrollado e ilustrado en el Capítulo 6 donde se ha tenido en cuenta también del fenómeno de la filtración del fluido lubricante dentro los poros de la matriz del cartílago articular.

7.6.1. TEORÍA

De acuerdo con las hipótesis presentes en la literatura y con las consideraciones hechas en el capítulo 4 de este trabajo, la articulación del tobillo humano puede ser considerada como cilíndrica, donde el movimiento está permitido sólo en el plano sagital.

El modelo de acoplamiento se compone por dos cilindros circulares rígidos infinitos, hueso subcondral en el contacto interno (un cilindro encerrado en una cavidad cilíndrica), cubierto por una capa fina (cartílago articular) de espesor uniforme.

La superficie articular inferior (astrágalo) se supone inmóvil mientras que la superficie superior (tibial) se supone que tiene permitido un movimiento de pura compresión (*squeeze motion*) $\dot{e}(t)$ en el centro del contacto.

El movimiento se produce en el plano x - y . Las superficies articulares se mueven a lo largo del eje y . La superficie de contacto con su centro en $x=0$ está limitada con bordes en $x=\pm a$ en la que se supone que la presión sinovial va ser igual a cero.

Como se ha visto a lo largo de los dos capítulos anteriores la lubricación de la articulación puede ser modelizada a través de la teoría de Reynolds, utilizado la ecuación:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left(h^3 + 12\Phi H \right) \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] = 12\mu \frac{dh}{dt} \quad (7.52)$$

y utilizando las ecuaciones (7.38), para obtener un problema adimensional, la ecuación (7.52) se puede escribir:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\partial p^*}{\partial \theta} \left[f^*(h^*, l^*) + \frac{12\Phi^* H^*}{(1-\alpha)} \right] \right\} = 12 \cos(\theta) \quad (7.53)$$

Antes de resolver esta ecuación, con sus condiciones de contorno, para tener en cuenta la deformación de la matriz del cartílago, hacen falta algunas consideraciones acerca de la posible conformación de la altura del meato.

7.6.2. CONSIDERACIONES SOBRE EL ESPESOR DE LA PELÍCULA DE FLUIDO LUBRICANTE

El espesor de la película de fluido lubricante (fluido sinovial) puede ser evaluada como la suma de un componente relacionado con la geometría del sistema y otro relacionado con la deformación elástica de la capa fina del cartílago que recubre las superficies en contacto, es decir:

$$h = h_g + h_e \quad (7.54)$$

Es posible que debido a la geometría del sistema podamos encontrar dos configuraciones distintas como se muestra en la Figura 7. 45 y Figura 7. 46 es decir, en el que el revestimiento poroso y linealmente elástico cubre la superficie tibial del sistema de destino Figura 7. 45 o al contrario en la superficie del astrágalo Figura 7. 46

Figura 7. 45: Geometría de un contacto esfera plano (Elaboración propia)

Figura 7. 46: Geometría de un contacto esfera plano (Elaboración propia)

Como puede verse en el dibujo, en ambos casos el término relacionado con la capacidad de deformación de las superficies se añade al término geométrico h_g que representa la altura del meato con el supuesto de que las superficies de los elementos que intervienen en el acoplamiento sean rígidas.

La altura del meato se puede expresar como:

$$h_g = c - e \cos \theta \quad (7.55)$$

donde c representa el juego radial, es decir, la diferencia entre el radio del cojinete y la del pin y e representa la excentricidad del sistema cojinete, es decir, la distancia entre los dos centros del cojinete.

El término que tiene en cuenta la influencia de la deformación elástica de la matriz porosa de espesor h_e depende de las características físicas del material, en este caso el cartílago.

En la hipótesis de que el espesor del meato h es menor del diámetro del cojinete y en el caso de estado plano de tensión se puede adoptar para la evaluación de h_e el modelo introducido por Winkler (1867) y también justificado por Higginson [26], [258] y Dowson [259]:

$$h_e = K p_e \quad (7.56)$$

donde:

$$K = \frac{H(1-\nu^2)}{E} \quad (7.57)$$

y el término p_e que aparece en la fórmula (7.56) representa la presión hidrostática debida al fluido sinovial lubricante.

Como ya se ha planteado a lo largo de este trabajo, para obtener una solución analítica aproximada y cerrada del problema dinámico, se evaluará este término en los primeros diez segundos utilizando la expresión (7.17) bajo la hipótesis de que en el primer paso todavía no tenemos deformación del cartílago articular.

En última instancia sustituyendo (7.57) y (7.55) en (7.54) tendremos:

$$h = 1 + \varepsilon \cos \theta + \frac{H(1-\nu^2)}{E} p_e \quad (7.58)$$

pasando a parámetros adimensionales se obtendrá:

$$h = 1 + \varepsilon \cos \theta + C_0 \bar{P} \quad (7.59)$$

C_0 es un nuevo parámetro que controla el comportamiento dinámico de la articulación y se conoce con el nombre de “Coeficiente Elástico” siendo definido como:

$$C_0 = \frac{\mu R^2 \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right) H(1-\nu^2)}{E c^3} \quad (7.60)$$

Para el cálculo de la (7.60) se han considerado los siguientes valores:

$E = 16\text{Mpa}$ para el Módulo Elástico,

$\nu = 0,4$ para el Coeficiente de Poisson y la viscosidad se ajustó a

$\mu = 0,01\text{ Pa s}$ para la Viscosidad

7.6.3.RESULTADOS

Mediante el uso de valores biomecánicos típicos para la articulación del tobillo humano que se encuentran en la literatura y con las consideraciones hechas en el capítulo 4 para las dimensiones del sistema tribológico, ha sido posible representar:

- la variación de presión sinovial adimensional p^* con respecto a la coordenada angular θ (Figura 7. 47) para diferentes valores de l^* y de C_0 para $\varepsilon = 0,4$;

Figura 7. 47 : Variación de p^* respecto a θ por distintos valores de l^* y C_0

- La forma analítica de la presión hidrodinámica nos permite calcular la fuerza de la película sinovial como:

$$f_r^* = L * R \int_{-\beta}^{\beta} p^*(\theta) \cos(\theta) d\theta \quad (7.61)$$

Lo que nos permite representar la fuerza aproximada de la película de fluido respecto a la excentricidad ε para diferentes valores de los parámetros l^* y C_0 como se muestra en la Figura 7. 48.

Figura 7. 48: Variación de f_r respecto a θ y por distintos valores de l^* y C_0

Se observa que la presión de la película fluida en compresión aumenta significativamente mediante el aumento de ε y de l^* mientras que el efecto “*couple-stress*” hace aumentar la capacidad de carga del contacto en comparación con el caso newtoniano.

Estos resultados están de acuerdo con las observaciones obtenidas en cojinetes mecánicos [259].

7.6.4. SOLUCIÓN NUMÉRICA Y RESULTADOS

La resolución de este problema requiere una solución numérica debido al hecho de que la ecuación (7.2) es una ecuación diferencial no homogénea, no lineal y con términos no constantes. La solución del problema de la lubricación del tobillo humano no es nada más que la solución del sistema:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\partial p^*}{\partial \theta} \left[f^*(h^*, l^*) + \frac{12\Phi^* H^*}{(1-\alpha)} \right] \right\} = 12 \cos(\theta) \quad (7.61)$$

$$f^*(h^*, l^*) = h^{*3} - 12l^{*2}h^* + 24l^{*3} \tanh\left(\frac{h^*}{2l^*}\right) \quad (7.62)$$

$$h = 1 + \varepsilon \cos \theta + C_0 p^* \quad (7.63)$$

La discretización de las ecuaciones se efectúa por el método de diferencias finitas, y el sistema de ecuaciones algebraicas obtenido se resuelve numéricamente en un proceso iterativo. Los dominios de la presión y del espesor de la película de fluido se discretizan en $N+1$ puntos en la dirección angular θ obteniendo dos ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$\frac{\partial p^*}{\partial \theta} \left[f^* + \frac{12\Phi^* H^*}{(1-\alpha)} \right] = 12 \sin(\theta) \quad (7.64)$$

$$\frac{\partial h^*}{\partial \theta} = -\varepsilon \sin \theta + C_0 \frac{\partial p^*}{\partial \theta} \quad (7.65)$$

El método numérico utilizado para resolver el problema, que se reduce a un sistema de dos ecuaciones con dos variables dependientes p^* y h^* , funciones de la única variable independiente θ , es de tipo explícito y de tipo “*one step*” (Runge Kutta de 4º orden).

Con la condición de contorno:

$$p^*(0) = 0 \quad (7.66)$$

ha sido posible representar:

- la variación de presión sinovial adimensional $p^*(\theta)$ respecto a la coordenada angular θ , Figura 7. 49 para diferentes valores de l^* y del parámetro C_0 y $\varepsilon = 0,4$

Figura 7. 49: Variación de p^* respecto a θ por distintos valores de l^* y C_0

- la componente adimensional radial de la velocidad de filtración $v(\theta)$ respecto a la coordenada angular para varios valores de l^* y del parámetro C_0 Figura 7. 50.

Figura 7. 50: variación de la velocidad de filtración en el cartílago articular

- el espesor de la película sinovial adimensional $h^*(\theta)$ respecto a la coordenada angular θ para varios valores de l^* y del parámetro C_0 Figura 7. 51;

Figura 7. 51: Variación de la altura de meato

- el espesor de la película sinovial adimensional $h^*(\theta)$ respecto a la coordenada angular θ para varios valores del parámetro C_0 y $l^* = 0,2$ Figura 7. 52;

Figura 7. 52: Variación de la altura del meato

Se observa que la presión de la película en compresión aumenta significativamente con el aumento de l^* mientras que el efecto “*couple-stress*” del fluido es disminuir el espesor de la película de fluido en comparación con el caso newtoniano $l^* = 0$

7.6.5. COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS Y DISCUSIONES

En este apartado se ha investigado sobre la influencia de los efectos no newtoniano del fluido lubricante y de la deformación elástica de las superficies de un contacto poroso y elástico lubricado por un fluido *couple stress*. El flujo en la matriz porosa del cartílago articular es descrito por la Ley modificada de Darcy para un fluido no newtoniano.

La deformación del contacto se calcula utilizando el modelo de Winkler mediante una capa fina elástica considerando diferentes valores del parámetro *couple-stress* l (propiedad característica del comportamiento no newtoniano del lubricante) y del coeficiente de deformación C_0 .

Todas las ecuaciones que gobiernan el sistema se han resuelto de forma analítica y numérica y la comparación de los resultados muestra una diferencia mínima del valor de los picos de presión como muestra la Figura 7. 47 y la Figura 7. 49 para las curvas con $C_0=0$. Esto es debido a la aproximación usada en el modelo analítico para el cálculo de la contribución elástica. La capacidad de carga y la componente radial de la velocidad del flujo están significativamente afectadas por el comportamiento no newtoniano del fluido como muestran la Figura 7. 48 y la Figura 7. 50.

La Figura 7. 50 muestra que el aumento del parámetro l reduce la velocidad radial ya que el comportamiento no newtoniano del fluido proporciona más resistencia al flujo filtrante.

Los efectos del parámetro l sobre el espesor de la película y la comparación con el caso indeformable se muestran en la Figura 7. 51. El incremento del parámetro l produce un aumento significativo del espesor de la película sinovial en todos los valores de θ ya que los efectos no-newtonianos del líquido se oponen a la acción de compresión y por lo tanto aumentan la posición de la superficie superior. Este último resultado es muy favorable para la vida de la articulación.

La Figura 7. 52 muestra que la deformación es máxima en el eje de simetría de la geometría, y disminuye hasta el valor cero en el extremo del contacto. Este es un efecto directo en la secuencia de distribución de la presión en la película de fluido y por lo tanto de la aplicación del modelo elástico por una capa fina de recubrimiento.

7.7. CONCLUSIONES

Se ha desarrollado el trabajo de análisis, modelización analítica y resolución numérica, encaminado y enfocado a describir y explicar el funcionamiento dinámico y los parámetros de influencia en el sistema tribológico complejo que constituye la articulación humana del tobillo.

Empezando con el análisis y la descripción de la articulación sinovial humana del tobillo efectuado una descripción anatómica con sus formas y sus funciones de movilidad. Subsecuentemente se ha planteado y desarrollado un primer modelo analítico aproximado de lubricación teniendo en cuenta la teoría de lubricación explicada y vista en el Capítulo 6. Se ha modelado el “Líquido Sinovial” como un fluido Newtoniano y se ha tenido en cuenta el fenómeno de la filtración del fluido lubricante a través de los poros de la superficie del cartílago utilizando la ley de Darcy, evaluando las tres componentes de velocidad del fluido dentro del contacto articular y llegando a escribir la ecuación de “Reynolds” para el caso propuesto en condición de *Squeeze motion*. Después, Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, sobre las características reológicas del fluido sinovial se ha introducido el concepto de fluido sinovial no Newtoniano, modelando el mismo como un fluido *Couple Stress*. Es decir, como una mezcla de partículas de distintos tamaños para tener en cuenta los efectos polares generados por las fuerzas viscosas. Con el fin de avalar el desarrollo matemático analítico se han presentado uno estudio de comparación entre los dos métodos resolutivo. el paso sucesivo ha sido lo de mejorar la evaluación de los parámetros geométricos que definen el sistema tribológico bajo estudio. Es decir, se han presentado algunas consideraciones metrológicas relevantes para la caracterización y reconstrucción geométrica del tobillo en dos dimensiones en el plano sagital. Para ello se han empleado los conceptos del tratamiento de imágenes. A través del uso del algoritmo de Canny, para la *Edge detection*, se han sacado las coordenadas de los puntos que constituyen el borde del contacto interno lubricado, es decir, las coordenadas en el plano sagital de los puntos del perfil del gínglimo formado por la tibia, el maléolo medial, el maléolo fibular y la tróclea del talo. Posteriormente, aplicando los conceptos metrológicos y la metodología de estudio adquirida y mostrada en el capítulo 5, en el caso de medida indirecta, se ha ido reconstruyendo el perfil aproximado a través de una función conocida y lograda por el método de los mínimos cuadrados y de mínima zona, evaluando simultáneamente el error asociado a la toma de coordenadas y el error cuadrático medio. Los resultados obtenidos con la detección de los bordes se han utilizado para efectuar un estudio de tipo estadístico, utilizando el método consolidado en el acervo científico de Montecarlo con el fin de estimar el valor de la incertidumbre asociada al método propuesto. Subsecuentemente, ha sido posible efectuar un estudio de sensibilidad que ha demostrado como, también utilizando la misma imagen de partida de la articulación humana del tobillo de alta resolución, el uso de dos algoritmos diferentes como lo de mínimos cuadrados y lo de mínima zona han restituido resultados diferentes entre ellos (pero muy similar a lo presente en la literatura científica) que afectan de forma distinta

las condiciones de contorno utilizada para la implementación del modelo dinámico tribológico. Todo esto para remarcar la necesidad de una estandarización en los protocolos utilizados para las medidas médicas. Donde, muchas veces, los resultados y los errores asociados están afectados no solo por el algoritmo de reconstrucción, sino que también del grado de conocimiento y de experiencia del operador que efectúa las medidas y saca los resultados.

Bajo las hipótesis que se han ido adquiriendo en el desarrollo y mejora del modelo y sobre todo gracias a una reconstrucción más rigurosa, en términos geométricos y metrológicos se ha considerado, en último análisis, el cartílago articular como un elemento deformable a través de la teoría de la *Soft Lubrication*, prestando especial atención a todas las posibles configuraciones geométricas del sistema en fase de estudio.

Se han sacado los resultados analítico y numérico y se han comparado entre sí. Esta comparación ha demostrado un buen nivel de confianza en término de aproximación analítica utilizada restituyendo valores similares entre el método de solución analítica y el numérico para el campo de presión, la velocidad de filtración del fluido en el cartílago y de fuerza de la articulación.

El modelo propuesto y mejorado a lo largo de este trabajo puede ser perfectamente adoptado para el caso de articulación con prótesis. No obstante, se tiene que presentar un estudio previo para la caracterización de los materiales que componen los distintos componentes de una prótesis. Con este fin, en el siguiente capítulo se plantean metodologías experimentales convenientes para el análisis tribológico, adicionales a las expuestas en el Capítulo 6 cuando se ha presentado un caso experimental de estudio para la caracterización experimental tribológica.

CAPÍTULO 8

ESTUDIO EXPERIMENTAL PARA LA CARACTERIZACIÓN TRIBOLÓGICA DE MATERIALES PROTÉSICOS

Abstract: In this chapter friction and wear behavior of ultra-high molecular weight polyethylene (UHMWPE) sliding against AISI420C austenitic stainless steel, against TiAl6V4 and against Al₂O₃ ceramic alloy under dry and lubricated conditions were investigated with a reciprocating pin-on-flat tribometer for comparative purposes. The tests were conducted by varying frequency of the pin alternative motion and the applied normal load. For the tests in lubricated conditions a fluid containing a large amount of sodium hyaluronate has been chosen. By using an electronic precision balance, the wear mass loss of the UHMWPE samples was evaluated accordingly. The worn surfaces of the UHMWPE were examined with a 3D confocal microscopy. The results were interpreted on the basis of the evolution of the friction coefficient and worn surfaces in order to understand the acting wear mechanisms.

8.1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años se han desarrollado muchos estudios en el campo de la lubricación y de la evaluación del desgaste de las articulaciones humanas naturales y artificiales [56], [57], [260]–[264] con el fin de obtener informaciones tribológicas útiles para los reemplazos articulares.

Se sabe que los reemplazos totales de articulación de rodilla (TKRs) son muy complejos en su diseño; de hecho, las mismas se diseñan para resistir al esfuerzo mecánico y al efecto de fatiga debido a la carga normal, aplicada en un gran número de ciclos, durante la marcha y durante las otras actividades de la vida común.

Los cojinetes tibiales de polietileno de ultra alto peso molecular (UHMWPE) que se articulan contra componentes condílicos metálicos o femorales siguen siendo los

materiales de elección para el remplazo total de la rodilla (TKR) [265]–[268]. Debido a la funcionalidad de la articulación de la rodilla, el componente femoral debe frotar contra la superficie del inserto tibial creando así fricción y desgaste.

El desgaste del polietileno (UHMWPE) y los desechos de desgaste resultantes pueden estar incrustados en la superficie de la prótesis y podrían permanecer en el tejido muscular que rodea al implante. Estas partículas de desgaste de polietileno inducen una respuesta tisular que resulta en osteólisis y aflojamiento aséptico [269]–[271].

Por lo tanto, el desgaste del polietileno (UHMWPE) ha sido uno de los factores limitantes para el éxito, a largo plazo, de trasplante de rodilla (TKR) [62]. Por estas razones en los últimos años los estudios sobre la fricción y el comportamiento de desgaste del UHMWPE se han vuelto cada vez más importantes y de creciente interés para los tribólogos.

Debido al interés sobre los distintos fenómenos de desgaste y fricción para los materiales protésicos y a su comportamiento en condiciones de lubricación seca o lubricada, como se ha visto en el capítulo 4 de este trabajo, en este capítulo se han comparado, en un estudio tribológico experimental, utilizando un bio-tribómetro de movimiento alternativo [38]–[40], los valores del coeficiente de fricción y del desgaste, en términos de masa perdida durante el ensayo de distintos materiales protésicos que frotan contra una superficie de UHMWPE (GUR 1050).

En el siguiente capítulo se presentarán dos estudios distintos donde se utilizarán, en el ensayo tribológico con un tribómetro DUCOM de moto alternativo *pin-on-disc*, como plato del tribómetro el UHMWPE que frota contra:

- esferas de acero inoxidable austenítico, AISI 420C y de aleación de titanio TiAl6V4, en el primer estudio (Caso 1).
- esferas de acero inoxidable austenítico AISI316L, aleación de titanio TiAl6V4 y Alumina (Al₂O₃), en el segundo estudio (Caso 2).

Los ensayos se llevaron a cabo en condiciones secas y lubricadas. En el caso de condiciones lubricadas se ha utilizado un fluido biológico modelo: hialuronato sódico (Hyalgan®).

Con el fin de medir el coeficiente de fricción y el desgaste se han simulado varias condiciones de carga y de frecuencias para investigar el comportamiento tribológico de los acoplamientos mencionados anteriormente.

La superficie desgastada de las muestras de UHMWPE ha sido analizada por un instrumento de metrología de superficie óptica 3D Leica DCM 3D, que a través de reconstrucción de imágenes tridimensionales de las pistas de desgaste dejada por el ensayo con el tribómetro en las superficies de UHMWPE.

Todos los resultados alcanzados en este capítulo son fundamentales para una correcta implementación de un modelo de lubricación, como lo visto en el capítulo 7, aplicado al caso de implantes articulares.

8.2. DESCRIPCIÓN DEL ENSAYO EXPERIMENTAL

Las propiedades de fricción y de desgaste del UHMWPE se midieron mediante el uso de un tribómetro *ball-on-flat* de movimiento recíproco DUCOM TR_Bio 282. El esquema del tribómetro se muestra en la Figura 8. 1. La máquina puede aplicar cargas de contacto de 1N a 20N. Puede funcionar con una amplia gama de frecuencias de 0,1 Hz a 35 Hz.

Figura 8. 1: Vista esquemática y real del tribómetro pin-on-flat de moto recíproco DUCOM TR_Bio 282

Además, la superficie desgastada de las muestras de UHMWPE se han analizado mediante un perfilómetro óptico PLu neox SENSOFAR® 3D, que ha proporcionado imágenes tridimensionales de las pistas de desgaste dejadas, durante los ensayos, por los materiales acoplados: acero inoxidable austenítico AISI 420C y aleación TiAl6V4. El instrumento óptico combina técnicas confocales, interferometría y técnicas de variación de foco en la misma cabeza del sensor. Los perfiladores confocales miden la altura superficial de superficies lisas y muy rugosas. Los interferómetros de desfase miden la altura superficial de superficies muy lisas y continuas con resolución sub-nanométrica. La variación de enfoque es una tecnología óptica que se ha desarrollado para medir la forma de grandes superficies rugosas. Se realizó un primer análisis topográfico con el perfilómetro. Una vez que la muestra llegue a ser enfocada, es importante asegurarse de que el rango, para el desplazamiento de exploración a lo largo del eje Z del instrumento, sea apropiado. Si el rango fuera demasiado grande, la adquisición tardaría mucho tiempo. Si el rango fuera demasiado pequeño, algunas zonas de la medición no tendrían información según la técnica confocal ni según la técnica interferencial, y la medición mostraría puntos "no medidos". Se hicieron diferentes intentos y resultó que la mejor elección para el desplazamiento de exploración a lo largo del eje Z fuera dentro de un intervalo de 60 μm . Se utilizó una ampliación de 20x, por lo que la opción de topografía extendida, en el software relacionado, permitió explorar toda el área interesada por la prueba experimental tribológica, desplazando la mesa del microscopio, es decir, la muestra, de forma automática en el plano x-y. Una vez adquirida la imagen, el software dedicado para el tratamiento de la misma, puede proporcionar información tal como la distancia entre picos y valles del perfil superficial, la rugosidad superficial media y muchos otros valores topográficos relacionados con un área de interés seleccionada.

8.3. CASO 1

La Tabla 8. 1 muestra las principales propiedades mecánicas de los materiales bajo estudio:

- polietileno de alto peso molecular UHMWPE (GUR 1050) contra acero inoxidable austenítico AISI 420C;
- polietileno de alto peso molecular UHMWPE (GUR 1050) contra aleación de titanio TiAl6V4.

Tabla 8. 1: propiedades de los materiales bajo ensayos.(* escala D)

Material	Módulo de Young	Coefficiente de Poisson	Dureza [HCR]
AISI420C	200	0.28	>52
TiAl6V4	114	0.34	28–42
UHMWPE	0.725	0.46	48*

El perno de acero austenítico inoxidable AISI 420C y el perno de aleación de titanio TiAl6V4 tenían forma de esferas con un diámetro, cada uno, de 6 mm. La Figura 8. 2 muestra las esferas de acero y de titanio y el esquema de montaje en el soporte de la cabeza del tribómetro.

El polietileno se ha cortado y pulido a partir de un inserto tibial en forma cuadrada de $5 \times 5 \times 5 \text{ mm}^3$. Para medir el desgaste, en la prueba en seco, se realizaron mediciones de peso de las muestras de UHMWPE antes y después (muestra desgastada) de cada ensayo con el fin de determinar la cantidad de pérdida de material. Mediante el uso de una báscula de precisión electrónica se evaluó la pérdida de masa de desgaste de las muestras UHMWPE. La resolución de la báscula era de 0,01 mg.

Figura 8. 2: El perno de acero austenítico inoxidable AISI420C y el perno de aleación de titanio TiAl6V4.

Para el ensayo con un lubricante, es decir, en condiciones lubricadas, se eligió un fluido farmacéutico comercial de nombre Hyalgan® que contiene una gran cantidad de hialuronato de sodio. Este fármaco se utiliza, a menudo, para ayudar pacientes que sufren patologías que conllevan el desgaste de cartílago en determinadas condiciones. De hecho, es útil para la regeneración del cartílago y es muy similar en consistencia y en propiedades al líquido sinovial que actúa materialmente en las rodillas reales. El principio activo del Hyalgan® es una fracción de ácido hialurónico con un alto grado de pureza y definición molecular, que tiene propiedades bioquímicas, fisicoquímicas y farmacológicas particulares. Normalmente, la inyección intraarticular de Hyalgan® en

las articulaciones artríticas induce una normalización de la visco-elasticidad del líquido sinovial y una activación de los procesos de reparación tisular a nivel del cartílago articular. En algunos modelos experimentales también se ha destacado una actividad antiinflamatoria y analgésica del ácido hialurónico [272]. Estas propiedades se convierten en una mejora de la función articular y en el control de los síntomas objetivos y subjetivos relacionados con la enfermedad de la artritis.

8.3.1. TEST TRIBOLÓGICO

Las pruebas de fricción con el tribómetro pin-on-flat de movimiento recíproco se han realizado bajo temperatura y humedad controladas. La humedad relativa estaba controlada por un aparato específico que se monta junto al tribómetro (Figura 8. 1) y ha sido aproximadamente de $55 \pm 5\%$. Se realizaron varias pruebas a largo plazo para estudiar las características tribológicas de las esferas metálicas que frotaban contra las placas de UHMWPE. Se han realizado un total de 26 pruebas: 18 para el acero y 8 para el titanio bajo condiciones secas y lubricadas. Las cargas normales que se emplearon variaron entre 10 N, 15 N y 20 N en un rango de frecuencias de 5-10-20 Hz para simular tres valores medios de presión en la interfaz del contacto. La presión media de contacto varía aproximadamente entre 16 MPa y 31 MPa según el peso de la persona y el tipo de prótesis [273], [274]. Con el objetivo de tener una evaluación de las cargas normales a emplear en la prueba, se utilizó la teoría de contacto de Hertz:

$$a = 0.908 \sqrt[3]{\frac{N}{D \cdot E^*}} \quad (8.1)$$

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (8.2)$$

$$D = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_2} \right) \quad (8.3)$$

Donde a es el radio del área de contacto y N es la carga normal aplicada en el contacto. E es el Módulo de Young y ν es el coeficiente de Poisson de los respectivos materiales. R y R' representan, respectivamente, el radio del área de contacto en el eje X y en el eje Y. La presión media de contacto se calcula de la siguiente manera:

$$p_m = \frac{N}{\pi \cdot a^2} \quad (8.4)$$

Los resultados para cada tipo de carga se muestran en la Tabla 8. 2.

Tabla 8. 2: Valores de presión media de contacto para todas las cargas aplicadas y para AISI 420C y TiAl6V4

	10 N		15 N		20 N	
Materiales	$a[m]$	$p[MPa]$	$a[m]$	$p[MPa]$	$a[m]$	$p[MPa]$
AISI420C	$3.7 \cdot 10^{-4}$	23.8	$4.2 \cdot 10^{-4}$	27.2	$4.6 \cdot 10^{-4}$	29.9
TiAl6V4	—	—	$4.2 \cdot 10^{-4}$	27.1	$4.6 \cdot 10^{-4}$	29.9

Todas las pruebas se realizaron durante los mismos ciclos (30.000) en condiciones tanto secas como lubricadas. La longitud de la carrera de los pernos esféricos ha sido de 5 [mm] tanto para el AISI 420C como para el TiAl6V4 (Figura 8. 3).

Figura 8. 3: Placa de polietileno cortada a partir de un inserto tibial en forma de cuadrado $5 \times 5 \times 5 \text{ mm}^3$.

8.3.2. EVALUACIÓN DEL COEFICIENTE DE FRICCIÓN Y DESGASTE

8.3.2.1. AISI420C–UHMWPE

Las Figura 8. 4, Figura 8. 5 y Figura 8. 6 muestran la evolución de los coeficientes de fricción durante la prueba. Hay tres pares de figuras para tres valores de carga diferentes: 10 N (Figura 8. 4), 15 N (Figura 8. 5) y 20 N (Figura 8. 6). En cada figura se puede observar el comportamiento del coeficiente de fricción en seco (Figura 8. 4a) y en condición lubricada (Figura 8. 4b). La línea negra representa la prueba con frecuencia de ensayo de 5 Hz, la línea roja representa la prueba con frecuencia de ensayo de 10 Hz y la línea azul representa la prueba con frecuencia de ensayo de 20 Hz.

Figura 8. 4: Evolución del coeficiente de fricción para una carga normal aplicada de 10 N: (a) en condiciones secas y (b) bajo condiciones lubricadas en contacto AISI420C-UHMWPE.

Figura 8. 5: Evolución del coeficiente de fricción para una carga normal aplicada de 15 N: (a) en condiciones secas y (b) bajo condiciones lubricadas en el contacto AISI420C-UHMWPE.

Figura 8. 6: Evolución del coeficiente de fricción para para una carga normal aplicada de 20 N: (a) en condiciones secas y (b) bajo condiciones lubricadas en el contacto AISI420C-UHMWPE.

Es de destacar que los coeficientes de fricción de todos los acoplamientos, en condiciones secas, eran bajos en la etapa inicial (transitorio inicial), pero aumentaron rápidamente y se estabilizaron mano a mano que se recurría toda la distancia de deslizamiento programada (Figura 8. 4a, Figura 8. 5a, Figura 8. 6a). Sin embargo, el coeficiente de fricción, en condiciones lubricadas, ha sido menor que el coeficiente de fricción en condición seca para todas las cargas, pero su comportamiento es diferente. De hecho, el COF aumenta rápidamente y luego sufre una ligera disminución después de la cual se estabiliza (Figura 8. 4b, Figura 8. 5b, Figura 8. 6b).

En sólo dos casos el comportamiento es diferente: 15 N a 5 Hz y 10 Hz (Figura 8. 5b).

La Figura 8. 7a muestra los coeficientes de fricción dinámicos que se midieron en los ensayos realizados en condiciones secas para los acoplamientos tribológicos AISI420C-UHMWPE con tres condiciones de carga diferentes.

Figura 8. 7: Valores medios del coeficiente de fricción para AISI420C-UHMWPE bajo condiciones secas (a) y bajo condiciones lubricadas (b).

No se identificó correlación entre la carga y los coeficientes de fricción. Un aumento en el coeficiente de fricción se ha podido apreciar debido a la frecuencia. Sólo en un caso, para una carga normal de 15 N y 10 Hz de frecuencia, se ha obtenido un menor coeficiente de fricción. Esto puede deberse al hecho de que el “*pin*” metálico que frota contra el UHMWPE funciona bajo condiciones de auto-lubricación.

La Figura 8. 7b muestra los coeficientes dinámicos de fricción que se midieron en los ensayos realizados bajo condiciones lubricadas para los pares tribológicos AISI420C-UHMWPE con tres condiciones de carga diferentes. Evidentemente, la introducción de ácido hialurónico tiende a disminuir los valores del coeficiente de fricción. La misma figura, también muestra que el coeficiente de fricción aumenta a partir de las frecuencias de movimiento de la esfera de 5 a 10 Hz, pero a 20 Hz disminuye. Esto se debe probablemente a la naturaleza del lubricante que es muy viscoso, pero a alta velocidad podría favorecer distintos fenómenos de lubricación (mixtos / hidrodinámicos).

Figura 8. 8: Pérdida de masa debido al desgaste de las muestras UHMWPE contra AISI420C.

La Figura 8. 8 muestra que las tasas de desgaste para el contacto AISI420C-UHMWPE aumentan con la carga aplicada y con la frecuencia crecientes con una pequeña excepción en el caso de la prueba con carga normal aplicada de 15 N y con una frecuencia de ensayo de 10 Hz. Los valores de pérdida de material debido al desgaste se incrementan unas pocas décimas de microgramos para diferentes valores de frecuencia que posiblemente genera una combinación de cargas aplicadas y velocidades que introducen mecanismos de lubricación transitoria o límite que merecen una investigación

exhaustiva futura. La Figura 8. 9 muestra la superficie UHMWPE después de las pruebas en el caso de 20 N y frecuencias de 5, 10 y 15 Hz en condiciones secas.

Figura 8. 9: Perfilómetro PLo neox Sensofar y el análisis cualitativo de la superficie UHMWPE después de la prueba en el caso de una carga normal aplicada de 20N y frecuencias de 5, 10 y 20 Hz en condiciones secas.

Se obtuvo un análisis cualitativo de las superficies desgastada considerando la forma en que las diferentes superficies reaccionaron a la prueba, la forma en que su comportamiento cambió en relación con la frecuencia y si había huecos en la superficie desgastada.

8.3.2.2. TiAl6V4–UHMWPE

Las Figura 8. 10 y Figura 8. 11 muestran la evolución de los coeficientes de fricción durante la prueba tribológica del acoplamiento TiAl6V4–UHMWPE.

Figura 8. 10: Evolución del coeficiente de fricción para una carga normal aplicada de 15 N: (a) en condiciones secas y (b) bajo condiciones lubricadas en el contacto TiAl6V4–UHMWPE

Figura 8. 11: Evolución del coeficiente de fricción para una carga normal aplicada 20 N: (a) en condiciones secas y (b) bajo condiciones lubricadas en el contacto TiAl6V4-UHMWPE.

Hay dos pares de figuras para dos valores de carga diferentes: 15 N y 20 N. En cada figura se puede observar el comportamiento del coeficiente de fricción bajo condiciones de lubricación seca y lubricada.

La línea roja representa el coeficiente de fricción a la frecuencia de 10 HZ y la línea azul a la frecuencia de 20 Hz.

La Figura 8. 12 muestra la evolución de los coeficientes dinámicos de fricción, medidos en las pruebas realizadas en condiciones secas y lubricadas, para los pares tribológicos TiAl6V4-UHMWPE con dos condiciones de carga diferentes.

Figura 8. 12: Valores medios del coeficiente de fricción para el acoplamiento TiAl6V4-UHMWPE: (a) en condiciones secas y (b) en condiciones lubricadas

Figura 8. 13: Pérdida de masa debido al desgaste de las muestras UHMWPE contra AISI420C.

Evidentemente, la introducción de ácido hialurónico tiende a disminuir los valores del coeficiente de fricción. Ambos gráficos muestran que un aumento de la frecuencia produce una disminución del coeficiente de fricción para cada condición de carga. Sólo en el caso de 20 N un aumento en la frecuencia produce un aumento en el coeficiente de fricción en condiciones secas. Este resultado es congruente con la Figura 8. 13. De hecho, un valor más alto del coeficiente de fricción da como resultado un aumento del volumen de desgaste.

La Figura 8. 13 muestra los resultados de las tasas de desgaste para el contacto TiAl6V4-UHMWPE. Se puede ver que no siempre un aumento de velocidad conduce a un aumento del desgaste. Esto es debido a la deformación del UHMWPE que hace que la esfera se deslice (TiAl6V4) sobre la placa comprimiéndola, resultando así en un menor valor de la masa de desgaste.

La Figura 8. 14 muestra la superficie UHMWPE después de las pruebas en el caso de 20 N y con frecuencias de 10 y 15 Hz en condiciones secas.

Figura 8. 14: Análisis cualitativo de la superficie UHMWPE después de la prueba en el caso de una carga normal aplicada de 20N y con frecuencias de ensayo de 10 y 20 Hz en condiciones secas.

8.3.3.DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este apartado de la tesis se ha realizado una investigación experimental tribológica comparativa para obtener el comportamiento de los coeficientes de fricción y de la tasa de desgaste de una muestra plana de UHMWPE en contacto con esferas de acero AISI420C y con esferas de aleación TiAl6V4. Los ensayos se llevaron a cabo en condiciones secas y lubricadas. Como lubricantes, se ha utilizado un líquido farmacológico comercial con principio activo de hialuronato sódico (Hyalgan®). Las pruebas se realizaron utilizando un tribómetro de moto alternativo con varias condiciones de carga normal aplicada y con varias frecuencias.

Los resultados muestran que el acero inoxidable austenítico AISI420C frente al UHMWPE restituye mejores valores en termino de tasa de desgaste y en termino de coeficiente de fricción en comparación con la tasa de desgaste y con el coeficiente de fricción en el contacto TiAl6V4 / UHMWPE. En ambos casos, la fricción se reduce enormemente por la presencia de UHMWPE y se cree que es debido a la formación de una película lubricante de UHMWPE en la zona de contacto: como la matriz desgastada, el UHMWPE se transfiere a la contracara, se produce el fenómeno de auto-lubricación

del contacto [275]. Como resultado, todas las pruebas demostraron que el valor del coeficiente de fricción y de la tasa de desgaste resultan ser mucho menor en deslizamiento con lubricante que en condiciones de deslizamiento en seco. Se cree que esto se debe a los diferentes mecanismos de lubricación que actúan en el tribo-sistema durante el deslizamiento de la esfera sobre el plano.

En los ensayos realizados en seco, el coeficiente de fricción aumenta rápidamente con independencia de los materiales y de las condiciones de carga. La tasa con la cual aumento el COF no es reproducible, así como el valor final del coeficiente de fricción, que normalmente permanece en el intervalo de 0,11-0,14 después de un tiempo de deslizamiento mayor de 15 minutos (Figura 8. 4, Figura 8. 5, Figura 8. 6, Figura 8. 10 y Figura 8. 11a). El valor final del coeficiente de fricción para los ensayos realizados con condiciones lubricadas se mantiene en el intervalo 0,03-0,08 después de un tiempo de deslizamiento mayor de 15 min independientemente del acoplamiento y de las condiciones de carga (Figura 8. 4, Figura 8. 5, Figura 8. 6, Figura 8. 10 y Figura 8. 11b). A excepción del acoplamiento AISI420C-UHMWPE en caso de carga normal aplicada de 15 N y frecuencia de 10 HZ (Figura 8. 5b), el coeficiente de fricción aumenta continuamente y el valor final, después de 15 min, permanece en el rango de 0,09-0,11. En la misma figura, se observa que el comportamiento del coeficiente de fricción aumenta continuamente, también ocurre para valor de frecuencia de 5 Hz. En este caso el valor final permanece en el rango observado en las pruebas bajo condiciones lubricadas. La variación de la pérdida de masa debida al desgaste está estrictamente relacionada con la variación del coeficiente de fricción, como cabría esperar. Las Figura 8. 4, Figura 8. 5, Figura 8. 6, Figura 8. 9 y Figura 8. 10 muestran los valores medios y las desviaciones estándar del coeficiente de fricción teniendo en cuenta el transitorio inicial. Por esta razón, las desviaciones estándar evaluadas con respecto a los valores medios de los coeficientes de fricción resultan estar en el intervalo aproximadamente de 4% a 7% para ambos acoplamientos en condiciones lubricadas. Tales desviaciones estándar son sin duda mayores que las relacionadas con el tramo en el que se estabiliza el coeficiente de fricción. Lo mismo ocurre en condiciones secas donde las desviaciones estándar evaluadas con respecto a los valores medios de los coeficientes de fricción permanecen en el rango de 5% a 12% en general. Sólo en tres casos las desviaciones estándar resultan fuera de los rangos antes mencionados: AISI420C-UHMWPE 10N, 5 HZ bajo condiciones lubricadas; TiAl6V4-UHMWPE 20 N 20 Hz en condiciones lubricadas; AISI420C-UHMWPE 10 N, 15 HZ en condiciones secas. Tal vez esto ocurre debido a la mayor duración de los fenómenos transitorios (alrededor de los primeros 5000 ciclos).

El análisis topográfico cualitativo realizado por el perfilómetro en las muestras desgastadas de UHMWPE confirma que la adhesión en la zona de contacto y la deformación del polímero son dos fenómenos que se producen en la fricción entre un UHMWPE y metales [275]. De acuerdo con ambos niveles de carga, con las propiedades mecánicas y químicas y con las condiciones de lubricación, puede ocurrir el primer o el segundo fenómeno mencionado anteriormente.

8.4. CASO 2

In este apartado se han medido las propiedades de fricción y desgaste de los siguientes tres materiales en acoplamiento:

- UHMWPE (GUR 1050) contra acero inoxidable austenítico AISI316L;
- UHMWPE (GUR 1050) contra aleación de titanio TiAl6V4;
- UHMWPE (GUR 1050) contra Alumina (Al₂O₃-99.5%).

La Tabla 8. 3 muestra las principales propiedades mecánicas de los materiales, bajo estudio

Tabla 8. 3: Las propiedades, los diámetros de las esferas y la carga normal para cada tipo de materiales

Materiales del perno	Módulo de Young [GPa]	Coefficiente de Poisson	Dureza * [HCR] [Kg/mm ²]	Diámetro [mm]	Carga normal Calculada [N]	Carga normal Aplicada [N]
TiAl6V4	114	0.34	28–42	3	1.006	1
				6	4.019	4
AISI316L	193	0.27	25–39	3	1.021	1
				6	4.055	4
				10	11.231	11
Al ₂ O ₃	370	0.22	1440*	3	1.011	1
				6	4.037	4
				10	11.181	11

El polietileno se ha cortado y pulido a partir de dos insertos tibiales diferentes en forma cuadrada de $10 \times 10 \times 5 \text{ mm}^3$. Con el fin de asegurarse de que se estaban ensayando características dos muestras de UHMWPE con las mismas características se han llevado a cabo estudios calorimétricos en las dos inserciones tibiales de dos prótesis diferentes.

Las mediciones de calorimetría diferencial de barrido (DSC) se llevaron a cabo utilizando una DSC-823e METTLER-Toledo del Laboratorio de Tecnología de Polímeros de la ETSIDI-Universidad Técnica de Madrid.

Las muestras para el análisis DSC se han cortado en trozos de 12,200 mg para la muestra A y 11,900 mg para la muestra B.

Todos los análisis dinámicos se registraron entre 25 y 180°C (calentamiento), 180°C y 25°C (enfriamiento) para eliminar las historias térmicas y entre 25 y 180 ° C (calefacción) para el análisis (Figura 8. 15) [276], [277].

El punto de fusión T_m se midió como la temperatura máxima de la endotérmica en un escaneo dinámico. El grado de cristalinidad X_c (%) del UHMWPE también se calculó como el área bajo la endotérmica ΔH dividida por la entalpía de fusión de un UHMWPE en fase cristalina al 100% ($\Delta H_{100\%}$), que se consideró igual a 293,6 J/g [278]:

$$Xc (\%) = \frac{\Delta H}{\Delta H_{100}} \cdot 100 \quad (8.5)$$

Figura 8. 15: Calorimetría diferencial de barrido DSC-823e METTLER-Toledo: a) Muestra A de UHMWPE, b) Muestra B de UHMWPE

El punto de fusión y la cristalinidad de ambas muestras se presentan en las Tabla 8. 3 y Tabla 8. 4. A partir de la Tabla 8. 4 se puede observar que los valores de la

temperatura de fusión obtenida en la prueba DSC resultan iguales a los valores relacionados con el UHMWPE en literatura [279].

Tabla 8. 4: Las propiedades, el punto de fusión y la cristalinidad de ambas muestras de UHMWPE.

UHMWPE Muestra	Módulo de Young [GPa]	Coefficiente de Poisson	Dureza Escala D	Punto de fusión [°C]	Cristalinidad (%)
A	0.69	0.46	48	137.32	39.96
B	0.69	0.46	48	134.83	41.72

El perno de acero austenítico inoxidable AISI316L y el perno de alúmina Al₂O₃ tenían forma de esfera con un diámetro de 3 mm, 6 mm y 10 mm, mientras que para el perno de aleación de titanio TiAl6V4 los diámetros de la esfera era de 3 mm y de 6 mm. La Figura 8. 16 muestra: (a) los cortes de polietileno de un inserto tibial en forma cuadrada y un ejemplo de las esferas de acero y de su esquema de montaje en su soporte, (b) TR_Bio 282 tribómetro DUCOM alternativo pin-on-flat (c) y (d) el montaje del pin y de la placa de polietileno en el tribómetro.

Figura 8. 16: (a) cortes de polietileno a partir de un inserto tibial y un ejemplo de las esferas de acero y de su esquema de montaje en su soporte, (b) tribómetro DUCOM alternativo de tipo TR_Bio 282 pin-on-flat, (c) y (d) el conjunto del perno y de la placa de polietileno en el tribómetro.

Así como explicado para el caso 1 anteriormente en este capítulo, se eligió un fluido farmacéutico, similar en consistencia y en las propiedades al fluido sinovial normal, denominado Hyalgan® para el ensayo en condiciones lubricadas. Éste contiene

una gran cantidad de hialuronato de sodio y se utiliza como inyección intraarticular en articulaciones artríticas induce una normalización de la viscoelasticidad del líquido sinovial y una activación de los procesos de reparación tisular a nivel del cartílago articular [54], [272].

8.4.1. PRUEBAS TRIBOLÓGICAS

En este estudio, la frecuencia seleccionada ha sido de 10 Hz para evitar vibraciones de la placa y movimientos verticales indeseables, el tiempo elegido ha sido de 120 minutos y la carrera utilizada de 2 mm. En cuanto a la elección de la carga a aplicar al tribómetro, se debe tener en cuenta que los materiales seleccionados para la prueba provienen de prótesis de rodilla. Cerniglia et al. [280] en su estudio calcularon que la fuerza de contacto entre la tibia y el fémur, durante el acto de caminar, es igual a tres veces el peso del cuerpo humano. Considerando el peso corporal humano $P = 70 \text{ kg}$, la carga normal calculada será de aproximadamente 2000 N . En otro estudio experimental, Zach et al. [281] calcularon, a través de un análisis FEM y el uso de Película sensible a la presión, el área de contacto entre dos elementos óseos dados para varias fuerzas de carga. En nuestro caso, una carga de 2000 N corresponde a un valor en el área de contacto igual a $75,8 \text{ mm}^2$ [281]. La presión de contacto a utilizar para calcular las cargas normales para diferentes diámetros de los pines que se utilizarán en la prueba tribológica será:

$$P = \frac{2000 \text{ N}}{75,8 [\text{mm}^2]} = 27 \text{ MPa} \quad (8.6)$$

Por lo tanto, utilizando la teoría de contacto de Hertz [54] (ecuaciones (8.1)-(8.4)) es posible calcular la carga normal aplicada para cada tipo de materiales y para cada tipo de diámetros de esfera. Usando la teoría de Hertz en general, el error para curvaturas pequeñas (contacto conforme) es notable debido a la suposición de Hertz de que el área de contacto es pequeña con respecto a las dimensiones del componente. El error de contacto no conforme (nuestro caso) se debe al comportamiento no lineal del UHMWPE.

De acuerdo con lo que se ha dicho hasta ahora, donde se produce el contacto, parece deberse a una combinación casual de los dos efectos: conformidad y comportamiento del material no lineal. Por lo tanto, la teoría de Hertz generalmente no es aplicable para el estudio de tensiones de polietileno.

En nuestro caso, el propósito principal del uso de la teoría de Hertz es la estimación (no el cálculo de un valor exacto) de un valor típico de la carga normal que se va a aplicar al tribo-sistema investigado, teniendo en cuenta que en la práctica protésica típica la presión de contacto es en gran medida variable: es decir, en una artroplastia total de rodilla (*TKR o TKA*) – una análisis FEM mostró que la presión de contacto varía entre valores de pocos mega pascles a más de 30 MPa [282] y el cálculo de la tensión de contacto durante la prueba, en caso de contactos Hertzianos esfera-plano, podría ser preciso en muchos casos [283].

Debido al hecho de que el tribómetro proporciona un sistema de implementación de la carga normal aplicada con un peso mínimo de 0,5 kg, los valores calculados para las cargas normales aplicadas en los ensayos se han aproximado como se muestra en la Tabla 8. 5.

En cuanto a la evaluación de la pérdida de masa por desgaste, no ha sido posible evaluarla con métodos gravimétricos porque la báscula de precisión disponible tiene una precisión de 0,1 mg mientras que los resultados son de aproximadamente $10^{-5}g$ para los ensayos en condiciones secas. Por lo tanto, con el propósito de comparar las tasas de desgaste de los tres pares tribológicos estudiados, las superficies desgastadas de muestras de UHMWPE, después de las pruebas, han sido analizadas por el Sistema de Metrología de Superficie Óptica 3D Leica DCM 3D (Figura 8. 9 y Figura 8. 21) pero sólo para las esferas de 6 mm de diámetro. Conociendo la densidad del UHMWPE ($0,93\text{ g/cm}^3$) [279], ha sido posible estimar la pérdida de masa de desgaste midiendo el volumen de ranura que dejó el perno en las muestras durante las pruebas.

Para los ensayos efectuados en condiciones lubricadas no fue posible evaluar la pérdida de masa de desgaste, ya que, como se detallará más adelante en la sección de resultados, la mayoría de las pruebas han conducido a la rotura de la película de fluido lubricante en ambas muestras de UHMWPE: A y B.

8.4.2.RESULTADOS

8.4.2.1. PRUEBA TRIBOLÓGICA EN CONDICIONES SECAS

Las Figura 8. 17, Figura 8. 18 y Figura 8. 19 muestran la evolución de los coeficientes de fricción durante el ensayo en condiciones secas en el TiAl6V4-UHMWPE, AISI316L-UHMWPE y Al2O3-UHMWPE respectivamente. Hay dos pares de gráficos para cada figura y cada acoplamiento. Los gráficos a la izquierda son para los ensayos de la muestra "A" de UHMWPE para dos ensayos en las mismas condiciones de trabajo (Figura 8. 17a, Figura 8. 18a y Figura 8. 19a) y los gráficos a la derecha son para los ensayos de la muestra "B" de UHMWPE para dos ensayos en las mismas condiciones de trabajo (Figura 8. 17b, Figura 8. 18b y Figura 8. 19b). Bajo cada gráfica se muestra un resumen de los resultados de los valores medios del coeficiente de fricción y su desviación estándar en continuo (μ , STD) y después del transitorio inicial (primeros 20 minutos) (μ_r , STD_r). Se puede observar que los valores de los coeficientes de fricción de todos los acoplamientos tribológicos son bajos en la etapa inicial, pero aumentan rápidamente y se estabilizan con el tiempo de deslizamiento (Figura 8. 17, Figura 8. 18 y Figura 8. 19). No se puede identificar correlación inmediata entre los diámetros (cargas) de las esferas y los coeficientes de fricción. Se debe tener en cuenta de que las fluctuaciones observadas en el ensayo en seco se acentúan durante los primeros 20 min del ensayo. La cuestión citada anteriormente implica, por tanto, unos cambios morfológicos en el contacto entre los materiales correspondientes. En consecuencia, la energía de las fuerzas de fricción y su trabajo resultan cruciales en condiciones secas. Por consiguiente, todas las esferas y las placas de UHMWPE serán desgastados por las

fuerzas de fricción provocando así un sobrecalentamiento. Este proceso, junto con el exceso de tensión local, genera simultáneamente modificaciones geométricas y químicas en las tres esferas y en las placas de UHMWPE durante el deslizamiento.

Figura 8. 17: Evolución del coeficiente de fricción bajo condiciones secas en: (a) contacto TiAl6V4-UHMWPE muestra "A", (b) contacto TiAl6V4-UHMWPE muestra "B".

Figura 8. 18: Evolución del coeficiente de fricción en condiciones secas en: (a) contacto AISI316L-UHMWPE muestra "A", (b) contacto AISI316L-UHMWPE muestra "B".

Figura 8. 19: Evolución del coeficiente de fricción en condiciones secas en: (a) contacto Al₂O₃-UHMWPE muestra "A", (b) contacto Al₂O₃-UHMWPE muestra "B".

Figura 8. 20: Valores medios del coeficiente de fricción para cada tipo de materiales ensayados en condiciones secas en el contacto: (a) UHMWPE muestra "A", (b) UHMWPE muestra "B".

Las Figura 8. 20a y Figura 8. 20b muestran los histogramas de los coeficientes de fricción en todos los acoplamientos tribológicos ensayados para la muestra "A" de UHMWPE y para la muestra "B" UHMWPE respectivamente. Es posible observar que, en cada prueba, el valor máximo del coeficiente de fricción corresponde al par Al₂O₃-UHMWPE. Este efecto es probablemente debido a su alta dureza y sus propiedades de resistencia al desgaste [284], [285].

La Figura 8. 21 muestra el análisis cualitativo de las superficies de UHMWPE muestras "A" después de las pruebas en condiciones secas para la esfera de diámetro de 6 mm en el caso: (a) TiAl6V4; (b) AISI316L; (c) Al₂O₃.

Después de una caracterización metrológica de las superficies desgastadas durante las pruebas tribológicas, ha sido posible calcular el volumen de la ranura que dejó la esfera en las muestras de UHMWPE.

Figura 8. 21: Sistema de Metrología de Superficie Óptica 3D Leica DCM 3D y análisis cualitativo de las superficies de UHMWPE muestras "A" después de las pruebas en condiciones secas para la esfera de diámetro de 6 mm en el caso: (a) TiAl6V4; (b) AISI316L; (c) Al₂O₃.

Los diversos procesos de deformación, asociados con diferentes características micro estructurales, y la diferente dureza del material del perno constituyen parcialmente los motivos para los diversos valores de la pérdida de masa debida al desgaste y para las diversas formas de superficies gastadas. Se pueden encontrar evidencias de desgaste por abrasión en las superficies desgastadas de los materiales ensayados.

La Tabla 8. 6 muestra los resultados para la pérdida de masa por desgaste para cada tipo de pareja tribológica. La profundidad de penetración se basa en la dureza relativa de la superficie de la probeta plana con respecto a la dureza del perno abrasivo.

Tabla 8. 6: Pérdida de masa por desgaste en el ensayo en condiciones secas para esferas de diámetro de 6 mm en muestras “A” de UHMWPE.

Materiales	Volumen de ranura [mm³]	Pérdida de masa por desgaste [g]
TiAl6V4–UHMWPE	$0.79 \cdot 10^{-2}$	$0.74 \cdot 10^{-5}$
AISI316–UHMWPE	$0.61 \cdot 10^{-2}$	$0.57 \cdot 10^{-5}$
Al₂O₃–UHMWPE	$1.02 \cdot 10^{-2}$	$0.95 \cdot 10^{-5}$

A partir del análisis de los resultados, se puede deducir fácilmente la congruencia entre el valor de la pérdida de masa por desgaste y el coeficiente de fricción. De hecho, para el diámetro de 6 mm del perno, un valor máximo del coeficiente de fricción (Figura 8. 20a) corresponde a un valor máximo de la pérdida de masa de desgaste (Tabla 8. 6) Al₂O₃ seguido por el TiAl6V4 y finalmente por el AISI316.

A través de la observación de las muestras de superficies desgastadas UHMWPE en todos los acoplamientos, se pueden encontrar evidencias de fenómenos de formaciones plásticas que producen ranuras alineadas con la dirección de deslizamiento. Estos fenómenos se deben a mecanismos de desgaste adhesivo.

8.4.2.2. PRUEBA TRIBOLÓGICA EN CONDICIONES LUBRICADAS

Las Figura 8. 22, Figura 8. 23 y Figura 8. 24 muestran la evolución de los coeficientes de fricción durante el ensayo en condiciones lubricadas en los contactos:

- TiAl6V4-UHMWPE
- AISI316L-UHMWPE
- Al₂O₃-UHMWPE.

La introducción del fluido lubricante tiende a disminuir los valores del coeficiente de fricción.

En contraste con las pruebas en seco, las gráficas muestran que la fase transitoria inicial expira después de 10 min, después de lo cual el coeficiente de fricción permanece estable, durante un tiempo que varía dependiendo de las condiciones de cada prueba.

Figura 8. 22: Evolución del coeficiente de fricción bajo condiciones lubricadas en: (a) contacto TiAl6V4-UHMWPE muestra "A", (b) contacto TiAl6V4-UHMWPE muestra "B".

Figura 8. 23: Evolución del coeficiente de fricción bajo condiciones lubricadas en: (a) contacto AISI316L-UHMWPE muestra "A", (b) contacto AISI316L-UHMWPE muestra "B".

Sólo en dos pruebas, los coeficientes de fricción permanecen estables después de la fase transitoria inicial, para todos los diámetros de las esferas: TiAl6V4-UHMWPE muestra "B" (Figura 8. 22b) y Al₂O₃-UHMWPE muestra "B". En los contactos TiAl6V4-UHMWPE muestra "A" (Figura 8. 22a), AISI316L-UHMWPE (Figura 8. 23^a y Figura 8. 23b) y en Al₂O₃-UHMWPE muestra "A" (Figura 8. 24a) la rotura del meato lubricante se produce causando un aumento del valor del coeficiente de fricción para los diámetros de los pernos: 3 mm, 6 mm y 10 mm respectivamente.

En particular, tal fenómeno se produce debido a la viscosidad del lubricante que, junto a una combinación de cargas aplicadas y velocidades establecidas, podría causar distintos y varios mecanismos de lubricación tal como la lubricación límite o transitoria.

Figura 8. 24: Evolución del coeficiente de fricción bajo condiciones lubricadas en: (a) contacto Al₂O₃-UHMWPE muestra "A", (b) contacto Al₂O₃-UHMWPE muestra "B".

Los valores medios del coeficiente de fricción y su desviación estándar bajo funcionamiento constante, mostrados en los histogramas de la Figura 8. 25, han sido calculados entre 10 min y 110 min en contacto TiAl6V4-UHMWPE muestra "A" con un diámetro del perno de 3 mm (Figura 8. 22a).

Figura 8. 25: Valores medios del coeficiente de fricción para cada clase de materiales bajo condiciones lubricadas en contacto con: (a) UHMWPE muestra "A", (b) UHMWPE muestra "B".

En el contacto AISI316L-UHMWPE muestra "A" con un diámetro del perno de 6 mm (Figura 8. 23a) el coeficiente de fricción y su desviación estándar bajo condiciones de funcionamiento estable han sido calculados entre 10 min y 105 min, mientras que en el contacto AISI316L-UHMWPE muestra "B" con un diámetro del perno de 6 mm, se evaluaron entre 10 y 90 min (Figura 8. 23b).

El coeficiente de fricción y su desviación estándar bajo condiciones de funcionamiento estable en el contacto Al₂O₃-UHMWPE muestra “A” con un diámetro del perno de 10 mm se estimaron entre 10 min y 40 min (Figura 8. 24a), mientras que en el contacto Al₂O₃-UHMWPE muestra "A" con un diámetro del perno de 6 mm (Figura 8. 24b) se calcularon entre 10 min y 110 min.

La Figura 8. 26 muestra la evolución de las fuerzas de fricción en los acoplamientos tribológicos bajo estudio con respecto a los ciclos de ensayo (alrededor de 1000 ciclos) y a los desplazamientos para 4 intervalos de tiempo de la prueba: inicial, intermedio $\times 2$ y final.

Estas imágenes proporcionan información sobre el ciclo de la fuerza y sobre la transición entre las fases estática y cinética.

Durante la inversión del movimiento armónico la esfera es temporáneamente parada, lo que conduce a picos de fuerza correspondientes a la fase de fricción estática. La fuerza disminuye rápidamente y se hace casi constante durante el periodo de deslizamiento, dando lugar a la fricción cinética. Las Figura 8. 26(a, c y e) están relacionadas con los ensayos en condiciones secas para los pares TiAl6V4-UHMWPE, AISI316L-UHMWPE y Al₂O₃-UHMWPE respectivamente, mientras que las Figura 8. 26 (b, d y f) se relacionan con los ensayos en condiciones lubricadas para los pares TiAl6V4-UHMWPE, AISI316L-UHMWPE y Al₂O₃-UHMWPE respectivamente.

Aparte las diferencias, anteriormente mencionadas, en la intensidad de la fuerza para los casos secos y lubricados, la distinción principal entre estas dos condiciones es la forma de los ciclos. En los casos de condiciones secas, la evolución de las fuerzas de fricción durante el deslizamiento es más regular y más suave. En las pruebas lubricadas, las fuerzas de fricción se encuentran con altas oscilaciones y los picos de fricción estáticos son más nítidos. Esta condición es una indicación de un régimen de lubricación de tipo límites inestables, que requiere estudios adicionales para obtener una comprensión más profunda de los fenómenos de lubricación bajo movimiento alternativo.

Figura 8. 26: Diagramas de las fuerzas de fricción frente al tiempo (puntos) vs. desplazamiento en el contacto: (a) TiAl6V4-UHMWPE con un diámetro del perno de 3 mm, carga aplicada 1 N en condiciones secas y lubricadas (b); (c) AISI316L-UHMWPE con un diámetro del perno de 6 mm, carga aplicada 4 N en condiciones secas y lubricadas (d); (e) Al₂O₃-UHMWPE con un diámetro del perno de 10 mm, carga aplicada 11 N en condiciones secas y lubricadas (f).

8.5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

En este apartado se ha realizado un estudio tribológico experimental para obtener los coeficientes de fricción de UHMWPE que frota contra una aleación de titanio TiAl6v4, en contra una aleación de acero AISI316L y en contra Al2O3. Los ensayos han sido realizados en condiciones secas y lubricadas. Como lubricantes, se ha utilizado un fármaco comercial que contiene hialuronato sódico: "Hyalgan®". Las pruebas han sido llevadas a cabo utilizando un perno dotado de moto alternativo en un tribómetro pin-on-flat con varias condiciones de carga y durante 120 min. Los pernos en todas las pruebas se han elegido teniendo en cuenta la carga aplicada y la teoría de Hertz para los tres materiales en estudio. Las placas de polietileno en las pruebas tribológicas han sido cortadas, limpiadas y preparadas a partir de dos prótesis de rodilla diferentes. Con el fin de comparar las dos muestras de UHMWPE se han llevado a cabo ensayos de calorimetría de barrido diferencial (DSC).

Los resultados tribológicos del comportamiento de las muestras indican que el acero inoxidable muestran que el acero inoxidable austenítico AISI316L y la aleación de titanio TiAl6V4 han marcado, en condiciones secas, mejores valores con respecto al coeficiente de fricción y a la fuerza de fricción.

Los hallazgos están alineados con los implicados en el análisis de las superficies desgastadas al microscopio y con la posterior evaluación de la pérdida de masa de desgaste (Tabla 8. 6) en caso de ensayos en seco y con un diámetro de la esfera de ensayo de 6 mm. Cuando el coeficiente de fricción se monitoriza a lo largo de un tiempo mayor en condiciones secas, ese aumenta rápidamente independientemente del acoplamiento y de las condiciones de carga. La velocidad de incremento no es reproducible, así como el valor final del coeficiente de fricción, que normalmente permanece en el intervalo de 0,11-0,18 después de un tiempo de deslizamiento mayor de 20 min (Figura 8. 17a, Figura 8. 18a y Figura 8. 19a). La presencia de UHMWPE disminuye notablemente los fenómenos de fricción. De hecho, el UHMWPE se transfiere a la contracara moldeando así una película lubricante de UHMWPE en la superficie de contacto debido a fenómenos de auto lubricación [275]. Debido a los fenómenos de lubricación hidrodinámica, en todas las pruebas en condiciones lubricadas el coeficiente de fricción muestra valores mucho más bajos que en condiciones de deslizamiento en seco. El valor final de los coeficientes de fricción para los ensayos realizados en condiciones lubricadas se mantiene en el intervalo 0,018-0,060 después de un tiempo de deslizamiento superior a 10 min independientemente del acoplamiento y de las condiciones de carga (Figura 8. 22b, Figura 8. 23b y Figura 8. 24b). Las grandes fluctuaciones examinando de cerca la evolución del coeficiente de fricción, se han producido probablemente, debido a la formación de la fractura localizada de la placa de UHMWPE.

CAPÍTULO 9

CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

9.1. CONCLUSIONES

En esta memoria de tesis doctoral se ha desarrollado el trabajo de análisis, modelización analítica y resolución numérica, encaminado y enfocado a describir y explicar el funcionamiento dinámico y los parámetros de influencia en el sistema tribológico complejo que constituye la articulación humana del tobillo. Los mecanismos de lubricación juegan un papel importante en el rendimiento a largo plazo tanto de las articulaciones naturales, así como de las prótesis articulares. De hecho, la comprensión del mecanismo de lubricación y su acoplamiento con una adecuada elección de los parámetros morfológicos son de importancia fundamental para el desarrollo de intervenciones para el tratamiento de la degeneración y de la pérdida del cartílago articular. Esta es especialmente oportuna debido a los problemas clínicos asociados con las actuales prótesis articulares después de su irrupción masiva desde 1960.

El presente trabajo se puede dividir en tres macro partes. Una primera parte descriptiva del problema a desarrollar. Una segunda parte donde se ha presentado, planteado e implementado una metodología de estudio, tanto teórica como experimental, para el correcto desarrollo de un modelo analítico aproximado dinámico del funcionamiento de la articulación del tobillo. En esta parte, de hecho, ha sido posible investigar sobre concepto de metrología y tribología de forma general planteando problemas reales en el mundo industrial. La tercera parte, que representa el corazón de esta memoria de tesis, ha permitido desarrollar y encontrar una solución al problema tribológico planteado con particular atención a la geometría del contacto lubricado del tobillo humano, a los tejidos que toman parte al correcto funcionamiento de la articulación, a las características del líquido sinovial que lubrica el contacto dinámico bajo estudio y, por último, a la deformación del cartílago. En esta tercera parte, con el objetivo de aplicar el modelo fluidodinámico a implantes articulares protésicos, se ha

presentado también un estudio experimental para la caracterización tribológica de distintos materiales que constituyen las prótesis articulares humanas.

Partiendo de una breve descripción de como a lo largo de la vida humana se han desarrollado, por parte de estudiosos reconocidos universalmente, temas que afectan al funcionamiento, diagnosis y metodología de análisis a problemas que se repercuten sobre el correcto funcionamiento del cuerpo humano, se han presentado los primeros estudios sobre la bioingeniería y sobre los primeros pasos para el desarrollo de esta disciplina tanto en términos de estudios anatómicos como en términos de nuevas técnicas como la herramienta para la detección cinemática y dinámica del movimiento.

En estos años de investigación, con el fin de caracterizar todos los parámetros que afectan la implementación del problema fluido dinámico bajo estudio, ha sido necesario un estudio sobre la calificación y caracterización de las distintas articulaciones presentes en el cuerpo humano fijando la atención sobre las articulaciones que permiten el movimiento entre distintos segmentos óseos y presentando un primer modelo cinemático simplificado de la extremidad inferior del cuerpo humano que prevé 7 grados de libertad que se ha utilizado a lo largo de las ultimas 6 o 7 décadas para esquematizar y estudiar el comportamiento y el funcionamiento de las articulaciones humanas.

Un primer resultado ha sido el análisis y el conocimiento de las distintas teorías, desarrolladas por expertos en temas tribológicos y metrológicos, aplicada a la bioingeniería tanto por explicar y entender la lubricación de las articulaciones humanas como para un correcto estudio morfométrico de los componentes óseos. Todo eso con el fin de encontrar un protocolo adecuado para la medición de los parámetros geométricos que puedan afectar el correcto funcionamiento tanto de articulaciones humanas reales que de prótesis articulares.

Con el fin de lograr un procedimiento riguroso y normalizado para la implementación, solución y análisis de los resultados, en esta memoria de tesis se ha presentado el estudio, la calificación y la interpretación de los métodos, teóricos y experimentales, utilizados en la metrología por coordenadas para el desarrollo de una metodología que permita uno estudio sistémico de los factores, en términos metrológicos, que afectan a modelos teóricos para la descripción del funcionamiento dinámico de las articulaciones humanas reales y de implantes de las mismas. De hecho, gracias a las máquinas de medición de coordenadas (CMM) y los brazos de medición de coordenadas (CMA) es posible determinar la estructura externa, las dimensiones y la forma de implante en *vivo* como en *vitro*, es decir, evaluar el desgaste debido a la fricción, en termino de volumen de material perdido en el funcionamiento dinámico de la misma a lo largo de la vida de utilización de la prótesis. Es posible efectuar una medición precisa del componente protésico que se tiene que implantar en un paciente conociendo la geometría de partida y de referencia de la articulación en juego a través de otros instrumentos óptico que se basan en la metrología por coordenadas sin contacto como por ejemplo CT o microscopia confocal. De hecho, uno de los problemas ligados con los implantes protésico es el acabado superficial de los componentes que simulan el

funcionamiento de una articulación humana y que a través de la microscopia confocal es posible mejorar y ajustar a los particulares requisitos de cada paciente con el fin de mejorar las prestaciones tribológicas de los implantes.

El estudio presentado en esta tesis ha sido necesario en cuanto se sabe que para temas de diagnóstico médico por medida sobre imagen las problemática, teóricas y prácticas, que afectan a una correcta medición, en termino de precisión y repetibilidad de la medida, son las mismas que se encuentran en la metrología por coordenadas de contacto. Los algoritmos de ajuste que se utilizan después de un correcto muestreo de los puntos que definen una característica geométrica son los mismo sea que se utilice una CMM por contacto o una CMM sin contacto, como puede ser una imagen sacada por una camera o por una CT. Las consideraciones y las herramientas utilizadas para la mejora de la medida en termino de errores y de estimación de la incertidumbre asociada siguen las mismas estructura y metodología de estudio tanto por problema metroológico que se desarrollan con la metrología por contacto como para lo sin contacto.

Todas las metodología desarrollada e implementada, con los estudios experimentales planteados, ha permitido adquirir los conocimientos necesarios, en términos metroológicos, para la correcta implementación del modelo fluidodinámico y su fusión con el problema morfométrico para el estudio y modelización tribológica del comportamiento dinámico del tobillo humano. De hecho, como se ha visto a lo largo de esta memoria de tesis, la metrología por coordenadas es una herramienta precisa y útil para la correcta caracterización de las superficies que toman parte a un contacto lubricado in cuanto afecta a las condiciones de contorno útiles para la resolución de las ecuaciones diferenciales que definen y describen la lubricación de las articulaciones humanas.

El estudio presentado ha llevado a cabo el desarrollo de un primer enfoque sobre la teoría de la lubricación presentando y explicando los diferentes tipos de lubricación que se puedan encontrar en problemas o temáticas tribológicas, base de partida para la implementación del modelo fluidodinámico de la articulación del tobillo. El resultado ha sido la escritura, en termino generales, de las ecuaciones que gobiernan los fenómenos tribológicos presentando y analizando los parámetros para la caracterización de los fluidos lubricantes.

Utilizando las hipótesis de literaturas científica se ha presentado de forma teórica como se aborda y desarrolla uno estudio tribológico a través la escritura de las ecuaciones de Reynolds para un caso teórico. Se ha fijado la atención sobre la importancia de las condiciones de contorno que afectan al problema fluidodinámico, que como se ha visto, empiezan con la caracterización geométrica y morfométrica del contacto bajo estudios. Ha sido posible también desarrollar y presentar una metodología experimental que se suele utilizar para la caracterización de lubricantes y de materiales que constituyen un contacto tribológico. Todo eso a través de un estudio de las prestaciones tribológicas de aceites a base vegetal.

Otro importante resultado ha sido, en tema de metodología desarrollada y adquirida, el estudio, de acuerdo con la norma ASTM D445 - Método de Ensayo

Estándar para Viscosidad Cinemática de Líquidos Transparentes y Opacos (y Cálculo de la Viscosidad Dinámica) sobre importantes características y propiedades químico físicas de los aceites bajo estudio como: la viscosidad cinemática, la viscosidad dinámica, la densidad, el punto de inflamación y el número total de acidez (*TAN*). Todo esto gracias a herramientas reológicas y/o químicas que sin estos años de investigación no se habían abordado. Además, ha sido posible estudiar y desarrollar un método para la determinación de los parámetros tribológicos de los materiales en relación a la capacidad para desarrollar modelos dinámicos de articulaciones humanas con capacidad cuantitativa de predicción del campo de presiones resultante.

Utilizando todos los modelos teóricos y las metodologías experimentales hasta aquí explicados, tanto en campo metroológico como en campo tribológico se han planteado las ecuaciones diferenciales que regulan y definen el problema tribológico dinámico enfocando la atención sobre las condiciones de contorno reales que resuelvan el problema diferencial. Todo esto ha sido posible gracias a un estudio para una modelización rigurosa de los materiales, y de sus comportamientos bajo condición dinámicas, que constituyen el contacto lubricado humano.

A través de una descripción anatómica de las articulaciones del tobillo con sus formas y sus funciones de movilidad, poniendo mayor atención a la caracterización de los elementos óseos, del cartílago articular y del fluido sinovial, se han estudiado los posibles movimientos que permite la articulación del tobillo definiendo así un modelo biomecánico de estudio. A razón de esto, se han aplicado los resultados obtenidos con el desarrollo de esta tesis para la caracterización de la geometría de la superficie óseas y para la resolución del modelo planteado.

El desarrollo de un primer modelo analítico aproximado de lubricación ha permitido la modelación del líquido sinovial como un fluido Newtoniano teniendo en cuenta el fenómeno de la filtración del fluido lubricante a través de los poros de la superficie del cartílago utilizando la ley de Darcy, evaluando las tres componentes de velocidad del fluido dentro del contacto articular y llegando a escribir la ecuación de Reynolds para el caso propuesto.

El modelo simple de la articulación del tobillo humano presentado ha permitido generar una expresión analítica aproximada del campo de presión sinovial y de la fuerza de la película del fluido. Los resultados indican que para el movimiento de acercamiento de las superficies articulares humanas un salto en la presión del fluido en la superficie articular se produce en el momento de aplicación de la carga. Este salto hace que el agua presente en el líquido sinovial pase en el cartílago, y la película de fluido sinovial se forme. La filtración del líquido sinovial está controlada principalmente por el coeficiente de permeabilidad, que describe la manera con la que el agua y otras sustancias de bajo peso molecular se filtran en los poros de las superficies del cartílago del astrágalo. Como las macromoléculas del complejo de ácido-proteico hialurónico son demasiado grandes para penetrar en los poros, su concentración aumenta en la película sinovial y se forma un gel en la superficie que evita el contacto en condiciones secas, es decir, antes de la aplicación de la carga dinámica. El gel sirve como un lubricante límite, si un movimiento

de deslizamiento sigue antes de que fluido sinovial fresco entre en el contacto. En presencia de cartílago articular sano y normal, el mantenimiento de la película de fluido lubricante está garantizada por la naturaleza cíclica de la carga en la marcha, en comparación con la carga constante del pie, donde la película de fluido se transforma en una película de gel protectora permanente. Por el contrario, en el caso patológico, la capa de gel protectora sinovial se agota rápidamente, después de varios pasos y las superficies puede venir brevemente en contacto en cada ciclo produciendo mal funcionamiento de la articulación y dolor.

El estudio ulterior de todos los materiales que constituyen la articulación del tobillo (superficies óseas, cartílago, fluido sinovial) ha proporcionado el conocimiento necesario para una más rigurosa modelización del fluido sinovial como un fluido a comportamiento no Newtoniano, modelando el mismo como un fluido *Couple Stress*. Es decir, como una mezcla de partículas de distintos tamaños para tener en cuenta los efectos polares generados por las fuerzas viscosas.

Se han obtenido resultados analíticos y numéricos comparándolos entre sí y con los resultados presentes en la literatura. Los resultados del modelo de lubricación simplificado nos proporcionan que: debido a las hipótesis adoptadas, el modelo propuesto proporciona mejores resultados en los casos en los que es posible despreciar los efectos de las deformaciones del cartílago y de la formación de gel de lubricante sinovial (es decir, las articulaciones poco cargadas). Las soluciones de forma cerrada para el campo de presión sinovial y de la fuerza de la película de fluido son útiles en todos los análisis dinámicos de las articulaciones del tobillo en el que el objetivo es obtener un mejor compromiso entre la precisión y el coste de cálculo para una evaluación rápida de las fuerzas que actúan en la articulación sinovial durante un movimiento de compresión pura. Se ofrece una mejor legibilidad de los principales parámetros geométricos y reológicas que caracterizan la articulación sinovial.

Aplicando los resultados del estudio metodológico sobre problema metrológicos ha sido posible lograr la caracterización y la reconstrucción geométrica del tobillo en dos dimensiones en el plano sagital, empleando los conceptos del tratamiento de imágenes. A través del uso del algoritmo de Canny, para la detección de bordes (*Edge detection*), se han sacado las coordenadas de los puntos que constituyen el borde del contacto interno lubricado, es decir, las coordenadas en el plano sagital de los puntos del perfil del gínglimo formado por la tibia, el maléolo medial, el maléolo fibular y la tróclea del talo. Posteriormente, aplicando los conceptos metrológicos y la metodología de estudio adquirida en el caso de medida indirecta, se ha ido reconstruyendo el perfil aproximado a través de una función conocida y lograda por el método de los mínimos cuadrados y de mínima zona, evaluando simultáneamente el error asociado a la toma de coordenadas y el error cuadrático medio. La metodología utilizada en el procesamiento de imágenes médicas con su segmentación y en la elección de dos algoritmos de ajuste para la determinación de las posiciones de los elementos óseos y su geometría muestra un nivel de precisión apreciable. La posibilidad de ajustar la geometría ósea bajo diferentes criterios de ajuste motiva un estudio de sensibilidad sobre el campo de presión.

Los resultados muestran que las condiciones límite representan una fuente principal de influencia en la solución debido a un cambio significativo en la altura del meato. Induce una respuesta dinámica diferente de la articulación del tobillo. En el caso en estudio, una altura del meato mayor h^* (criterio MZ) corresponde a un nivel de presión más bajo a través del contacto. Por el contrario, los criterios de LS actúan en la dirección opuesta generando así un campo de mayor presión en la articulación sinovial.

La influencia significativa de las condiciones de contorno, en la cuantificación del campo de presión de la articulación del tobillo, advierte que hay que tener cuidado no sólo al comparar directamente los resultados cuantitativos de la presión sin considerar el modelo dinámico sino también al procesamiento completo de la geometría que establece las condiciones de contorno.

Otro resultado logrado ha sido lo de implementar un modelo de lubricación dinámico que tenga en cuenta la deformación del cartílago articular. Bajo las hipótesis que se han ido adquiriendo en el desarrollo y mejora del modelo y sobre todo gracias a una reconstrucción más rigurosa, en términos geométricos y metrológicos se ha considerado el cartílago articular como un elemento deformable a través de la teoría de la “*Soft Lubrication*”, prestando especial atención a todas las posibles configuraciones geométricas del sistema en fase de estudio. Se han sacado resultados analítico y numérico y se han comparado entre sí y con los resultados presentes en la literatura. Esta comparación ha demostrado un buen nivel de confianza en término de aproximación analítica utilizada restituyendo valores similares entre el método de solución analítica y el numérico para el campo de presión, la velocidad de filtración del fluido en el cartílago y de fuerza de la articulación.

Una vez definido e implementado el modelo fluidodinámico, y una vez resuelto el problema diferencial acoplado, se ha presentado un estudio comparativo y experimental para la caracterización tribológicas de los materiales que constituyen las prótesis articulares. Debido al interés sobre los distintos fenómenos de desgaste y fricción para los materiales protésicos y a su comportamiento en condiciones de lubricación seca o lubricada, en esta tesis se han comparado, en un estudio tribológico experimental, utilizando un bio-tribómetro de moto alternativo, los valores del coeficiente de fricción y del desgaste, en términos de masa perdida durante el ensayo, del UHMWPE (GUR 1050) que frota contra esferas de acero inoxidable austenítico, AISI 420C, de aleación de titanio TiAl6V4 y de alumina. Como resultado, todas las pruebas demostraron que el valor del coeficiente de fricción y de la tasa de desgaste resultan ser mucho menor en deslizamiento con lubricante que en condiciones de deslizamiento en seco. Se cree que esto se debe a los diferentes mecanismos de lubricación que actúan en el tribo-sistema durante el deslizamiento de la esfera sobre el plano. Los resultados de las prestaciones tribológicas muestran que el acero inoxidable austenítico AISI316L y la aleación de titanio TiAl6V4 han marcado, en condiciones secas, mejores valores con respecto al coeficiente de fricción y a la fuerza de fricción.

Los hallazgos están alineados con los implicados en el análisis de las superficies desgastadas al microscopio y con la posterior evaluación de la pérdida de masa de

desgaste en caso de ensayos en seco. Como se ha visto, la presencia de UHMWPE disminuye notablemente los fenómenos de fricción debido a fenómenos de auto lubricación. Debido a los fenómenos de lubricación hidrodinámica, en todas las pruebas en condiciones lubricadas el coeficiente de fricción muestra valores mucho más bajos que en condiciones de deslizamiento en seco. Las grandes fluctuaciones, examinando de cerca la evolución del coeficiente de fricción, se han producido probablemente, debido a la formación de la fractura localizada de la placa de UHMWPE.

9.2. DESARROLLOS FUTUROS

Los resultados y las conclusiones logrados con el estudio planteado y presentado en esta memoria de tesis sobre la implementación de un modelo fluidodinámico dinámico apto a la descripción de los mecanismos de lubricación de una articulación humana del tobillo permite sus usos como elementos de partida de nuevas y novedosas líneas de investigación. Las posibilidades de un desarrollo futuro se pueden expresar a partir de las siguientes consideraciones:

- El modelo propuesto representa un análisis preliminar y se espera obtener en el futuro algún tipo de verificación experimental con el fin de apoyar la predicción teórica aproximada obtenida y/o mejorar el modelo propuesto, quitando primero la hipótesis de superficies óseas rígidas. Es decir, investigar en la posibilidad de proponer un modelo micro-elastohidrodinámico analítico o casi-analítico, para tener en cuenta la deformación de estas superficies y sus efectos sobre el comportamiento dinámico de la articulación
- Implementación del modelo presentado a otras configuraciones reales. Es decir, plantear y resolver el problema fluido dinámico diferencial a otras articulaciones humanas reales o protésicas como, por ejemplo, articulación de la cadera o de la rodilla;
- La posibilidad de aplicar el modelo analítico aproximado en el caso 3D teniendo en cuenta todas las componentes de velocidad del fluido sinovial dentro del cartílago articular, las componentes de velocidad de acercamiento de las superficies óseas en condiciones dinámicas y la reconstrucción 3D del contacto. Todo eso utilizando la metodología que nos proporciona la ingeniería inversa tanto en caso de articulaciones reales que en caso de implantes articulares.
- La posibilidad de estudiar el funcionamiento de las articulaciones humanas a través de un estudio con el método de los elementos finitos para los componentes articulares deformables, acoplado al método *multibody* para los componentes articulares rígidos.
- La metodología de estudio, en campo metrológico, desarrollada y adoptada para la implementación del modelo tribológico propuesto se puede aplicar a problema industriales. Como para el caso del modelo de compensación de errores de un CMM presentado en esta memoria de tesis. De hecho, este modelo puede contribuir a la inclusión de la compensación de errores y a una estimación directa de la incertidumbre de las CMM en el entorno industrial dato que existe la posibilidad de post-procesar las indicaciones brutas de coordenadas de la CMM, fuera del procesamiento operado por el software cerrado de la CMM, incorporando el modelo propuesto al software de la máquina. Se puede lograr fácilmente fijando los parámetros de error por eje después de las pruebas periódicas. La máquina ofrecería una indicación mejorada después de la

corrección del error medio y su estimación de la incertidumbre como parte del resultado de la medición.

- Los conocimientos adquiridos con el estudio experimental en campo tribológico han proporcionado una metodología de ensayo y caracterización de los materiales bajo estudio que podría ser aplicada para la caracterización más rigurosa del líquido sinovial dentro de las articulaciones humanas reales. También representa una base de partida para la caracterización de nuevos fluidos lubricantes que puedan sustituir el líquido sinovial en caso de implantes protésicos. Un paso hacia este tipo de desarrollo ya se ha presentado a lo largo de esta memoria de tesis donde se ha efectuado la caracterización tribológica de un fluido farmacéutico que pueda ser utilizado para este fin.
- El estudio tribológico experimental de los materiales que forman parte de un implante articular podría ser avalado con la implementación de un modelo dinámico que simule las condiciones de ensayos utilizada para esta tesis. El fin de este estudio sería la búsqueda de los parámetros, tanto dinámicos como físico químico que afecten el campo de presión dentro del contacto lubricado.

REFERENCIAS

- [1] A. Ascenzi, "Biomechanics and Galileo Galilei," *J. Biomech.*, vol. 26, no. 2, pp. 95–100, Feb. 1993.
- [2] G. A. Borelli, *De motu animalium*. Angeli Bernabo 1680-81, 1680.
- [3] E. J. Marey, *La machine animale, locomotion terrestre et aérienne*. Paris, G. Baillie, 1873.
- [4] E. Muybridge, "Animal locomotion," THE UNIVERSITY OF PENNSYLVANIA.
- [5] F. Sociedad Espanola de Cirugia Ortopedica y Traumatologia (SECOT), *Revista espanola de cirugia ortopedica y traumatologia. English edition*. Elsevier Espana, 2007.
- [6] G. Wu and P. R. Cavanagh, "ISB recommendations for standardization in the reporting of kinematic data," *J. Biomech.*, vol. 28, no. 10, pp. 1257–1261, Oct. 1995.
- [7] E. Walicki and A. Walicka, "Mathematical modelling of some biological bearings," *Smart Mater. Struct.*, vol. 9, no. 3, pp. 280–283, Jun. 2000.
- [8] J. B. Medley, D. Dowson, and V. Wright, "Surface geometry of the human ankle joint.," *Eng. Med.*, vol. 12, no. 1, pp. 35–41, Jan. 1983.
- [9] S. S. BROWN and I. C. CLARKE, "A Review of Lubrication Conditions for Wear Simulation in Artificial Hip Replacements," *Tribol. Trans.*, vol. 49, no. 1, pp. 72–78, Apr. 2006.
- [10] M. A. McGee, D. W. Howie, K. Costi, D. R. Haynes, C. I. Wildenauer, M. J. Pearcy, and J. D. McLean, "Implant retrieval studies of the wear and loosening of prosthetic joints: a review," *Wear*, vol. 241, no. 2, pp. 158–165, 2000.
- [11] Y. Yan, A. Neville, and D. Dowson, "Tribo-corrosion properties of cobalt-based medical implant alloys in simulated biological environments," *Wear*, vol. 263, no. 7, pp. 1105–1111, 2007.
- [12] "Special issue on biotribology, in: D. Dowson, Z.M. Jin (eds.), Proceedings of the IMechE, vol. 220, no. J8, 2006, pp. 649–801, Part J: J. Engineering Tribology."
- [13] P. Bills, L. Brown, X. Jiang, L. Blunt, S. V. O. and P. H. G, S. H. B, D. D, M. P. J. J. and W. V Dowson D, and H. C. S. F. J. D. D. and B. K. Derbyshire B, "A metrology solution for the orthopaedic industry," *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 13, no. 1, pp. 316–319, Jan. 2005.
- [14] E. L. Radin and I. L. Paul, "Does cartilage compliance reduce skeletal impact loads?. the relative force-attenuating properties of articular cartilage, synovial fluid, periarticular soft tissues and bone," *Arthritis Rheum.*, vol. 13, no. 2, pp. 139–144, Mar. 1970.
- [15] M. R. Widmer, M. Heuberger, J. Vörös, and N. D. Spencer, "Influence of polymer surface chemistry on frictional properties under protein-lubrication conditions: implications for hip-implant design," *Tribol. Lett.*, vol. 10, no. 1/2, pp. 111–116, 2001.
- [16] J. CHARNLEY, "The lubrication of animal joints in relation to surgical

- reconstruction by arthroplasty.," *Ann. Rheum. Dis.*, vol. 19, no. 1, pp. 10–9, Mar. 1960.
- [17] E. Radin, I. Paul, and R. Rose, "ROLE OF MECHANICAL FACTORS IN PATHOGENESIS OF PRIMARY OSTEOARTHRITIS," *Lancet*, vol. 299, no. 7749, pp. 519–522, 1972.
 - [18] H. Madry, P. Orth, and M. Cucchiaroni, "Role of the Subchondral Bone in Articular Cartilage Degeneration and Repair," *J. Am. Acad. Orthop. Surg.*, vol. 24, no. 4, pp. e45–e46, Apr. 2016.
 - [19] I. M. Schwarz and B. A. Hills, "Surface-active phospholipid as the lubricating component of lubricin.," *Br. J. Rheumatol.*, vol. 37, no. 1, pp. 21–6, Jan. 1998.
 - [20] M. A. Macconail, "The Function of Intra-Articular Fibrocartilages, with Special Reference to the Knee and Inferior Radio-Ulnar Joints.," *J. Anat.*, vol. 66, no. Pt 2, pp. 210–27, Jan. 1932.
 - [21] E. Shirley Jones, "JOINT LUBRICATION," *Lancet*, vol. 227, no. 5879, pp. 1043–1045, 1936.
 - [22] J. Charnley, "The lubrication of animal joints," *Proc. Symp. Biomech.*, pp. 12–22, 1959.
 - [23] C. W. McCutchen, "The frictional properties of animal joints," *Wear*, vol. 5, no. 1, pp. 1–17, 1962.
 - [24] M. Hlaváček, "Squeeze-Film Lubrication of the Human Ankle Joint Subjected to the Cyclic Loading Encountered in Walking," *J. Tribol.*, vol. 127, no. 1, p. 141, 2005.
 - [25] C. W. McCUTCHEN, "Mechanism of Animal Joints: Sponge-hydrostatic and Weeping Bearings," *Nature*, vol. 184, no. 4695, pp. 1284–1285, Oct. 1959.
 - [26] G. R. Higginson, "Elastohydrodynamic lubrication in human joints," *Arch. Eng. Med. 1971-1988 (vols 1-17)*, vol. 7, no. 1, pp. 35–41, Jan. 1978.
 - [27] J. B. Medley, D. Dowson, and V. Wright, "Surface geometry of the human ankle joint.," *Eng. Med.*, vol. 12, no. 1, pp. 35–41, Jan. 1983.
 - [28] R. S. Fein, "Are synovial joints squeeze-film lubricated?," *Arch. Proc. Inst. Mech. Eng. Conf. Proc. 1964-1970 (vols 178-184), Var. titles Label. Vol. A to S*, vol. 181, no. 310, pp. 125–128, Jun. 1966.
 - [29] G. R. Higginson and T. Unsworth, "The lubrication of natural joints," *Tribology of Natural and Artificial Joints. J. H. Dumbleton, Ed. Elsevier Scientific Publishing Co., Amsterdam and New York*, 1981.
 - [30] C. McCutchen, "Lubrication of joints," . *The Joints and Synovial Fluid, Vol. I, Academic Press*, 1978.
 - [31] G. A. Ateshian, "The role of interstitial fluid pressurization in articular cartilage lubrication," *Journal of Biomechanics*, vol. 42, no. 9. pp. 1163–1176, 2009.
 - [32] A. Maroudas, "Hyaluronic acid films, Lubrication and wear in living and artificial human joints," *Proc. Inst. Mech. Engrs. (3rd Ed.)*, vol. 181, no. 3J, pp. 122–124, 1967.
 - [33] A. Unsworth, "Tribology of human and artificial joints.," *Proc. Inst. Mech. Eng. H.*, vol. 205, no. 3, pp. 163–72, 1991.

- [34] B. A. Hills, "Boundary lubrication in vivo.," *Proc. Inst. Mech. Eng. H.*, vol. 214, no. 1, pp. 83–94, 2000.
- [35] J. Katta, Z. Jin, E. Ingham, and J. Fisher, "Biotribology of articular cartilage--a review of the recent advances.," *Med. Eng. Phys.*, vol. 30, no. 10, pp. 1349–63, Dec. 2008.
- [36] G. A. Ateshian, "The role of interstitial fluid pressurization in articular cartilage lubrication.," *J. Biomech.*, vol. 42, no. 9, pp. 1163–76, Jun. 2009.
- [37] G. D. Jay and K. A. Waller, "The biology of lubricin: near frictionless joint motion.," *Matrix Biol.*, vol. 39, pp. 17–24, Oct. 2014.
- [38] M. Daniel, "Boundary cartilage lubrication: review of current concepts," *Wiener Medizinische Wochenschrift*, vol. 164, no. 5–6, pp. 88–94, Mar. 2014.
- [39] T. Murakami, H. Higaki, Y. Sawae, N. Ohtsuki, S. Moriyama, and Y. Nakanishi, "Adaptive multimode lubrication in natural synovial joints and artificial joints.," *Proc. Inst. Mech. Eng. H.*, vol. 212, no. 1, pp. 23–35, 1998.
- [40] M. J. Erkman and P. S. Walker, "A study of knee geometry applied to the design of condylar prostheses.," *Biomed. Eng. (NY).*, vol. 9, no. 1, pp. 14–7, Jan. 1974.
- [41] G. Mariani and V. Patella, "Statistical evaluation of articular parameters of the tibio-tarsal joint.," *Chir. Organi Mov.*, vol. 63, no. 4, pp. 333–40, 1977.
- [42] S. N. Roberts, A. P. Foley, H. M. Swallow, W. A. Wallace, and D. P. Coughlan, "The geometry of the humeral head and the design of prostheses.," *J. Bone Joint Surg. Br.*, vol. 73, no. 4, pp. 647–50, Jul. 1991.
- [43] J. C. McCarthy, J. V. Bono, and P. J. O'Donnell, "Custom and modular components in primary total hip replacement.," *Clin. Orthop. Relat. Res.*, no. 344, pp. 162–71, Nov. 1997.
- [44] M. H. Fessy, J. P. Carret, and J. Béjui, "Morphometry of the talocrural joint.," *Surg. Radiol. Anat.*, vol. 19, no. 5, pp. 299–302, Sep. 1997.
- [45] M. E. Brage, C. R. Bennett, J. B. Whitehurst, P. J. Getty, and A. Toledano, "Observer reliability in ankle radiographic measurements.," *Foot ankle Int.*, vol. 18, no. 6, pp. 324–9, Jun. 1997.
- [46] T. Nakai, Y. Takakura, Y. Tanaka, K. Sugimoto, S. Tamai, and N. Kurumatani, "Morphologic changes of the ankle in children as assessed by radiography and arthrography," *J. Orthop. Sci.*, vol. 5, no. 2, pp. 134–138, 2000.
- [47] Y. Tanaka, Y. Takakura, K. Sugimoto, T. Kumai, T. Sakamoto, and K. Kadono, "Precise anatomic configuration changes in the first ray of the hallux valgus foot.," *Foot ankle Int.*, vol. 21, no. 8, pp. 651–6, Aug. 2000.
- [48] M. J. Coughlin, C. L. Saltzman, and J. A. Nunley, "Angular measurements in the evaluation of hallux valgus deformities: a report of the ad hoc committee of the American Orthopaedic Foot & Ankle Society on angular measurements.," *Foot ankle Int.*, vol. 23, no. 1, pp. 68–74, Jan. 2002.
- [49] U. Prakash, C. A. Wigderowitz, D. W. McGurty, and D. I. Rowley, "Computerised measurement of tibiofemoral alignment," *Bone Joint J.*, vol. 83–B, no. 6, 2001.
- [50] R. Stagni, A. Leardini, F. Catani, and A. Cappello, "A new semi-automated

- measurement technique based on X-ray pictures for ankle morphometry,” *J. Biomech.*, vol. 37, pp. 1113–1118, 2004.
- [51] R. Stagni, A. Leardini, A. Ensini, and A. Cappello, “Ankle morphometry evaluated using a new semi-automated technique based on X-ray pictures,” *Clin. Biomech.*, vol. 20, no. 3, pp. 307–311, 2005.
- [52] J. Berzen, “Standardization of UHMW-PE,” in *Ultra-High Molecular Weight Polyethylene As Biomaterial in Orthopedic Surgery*, Peter Eyerer, Ed. Toronto: Hogrefe & Huber Publishers, 1991, p. 272.
- [53] S. Affatato, A. Ruggiero, and M. Merola, “Advanced biomaterials in hip joint arthroplasty. A review on polymer and ceramics composites as alternative bearings,” *Compos. Part B*, vol. 83, pp. 276–283, 2015.
- [54] A. Ruggiero, R. D’Amato, and E. Gómez, “Experimental analysis of tribological behavior of UHMWPE against AISI420C and against TiAl6V4 alloy under dry and lubricated conditions,” *Tribol. Int.*, vol. 92, pp. 154–161, 2015.
- [55] H. Liang, B. Shi, A. Fairchild, and T. Cale, “Applications of plasma coatings in artificial joints: an overview,” *Vacuum*, vol. 73, pp. 317–326, 2004.
- [56] A. Ruggiero, E. Gómez, and R. D’Amato, “Approximate closed-form solution of the synovial fluid film force in the human ankle joint with non-Newtonian lubricant,” *Tribology International*, vol. 57, pp. 156–161, 2013.
- [57] A. Ruggiero, E. Gómez, and R. D’Amato, “Approximate analytical model for the squeeze-film lubrication of the human ankle joint with synovial fluid filtrated by articular cartilage,” *Tribol. Lett.*, vol. 41, no. 2, pp. 337–343, Feb. 2011.
- [58] R. D’Amato, R. Calvo, and E. Gómez, “Sensitivity study of the morphometric fitting on the pressure field inside ankle joints,” *Case Stud. Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 1, pp. 8–14, 2015.
- [59] M. Fellah, M. Labaiz, O. Assala, L. Dekhil, N. Zerniz, and A. Iost, “Tribological behavior of biomaterial for total hip prosthesis,” *Matériaux Tech.*, vol. 102, no. 6–7, p. 601, Dec. 2014.
- [60] M. Fellah, M. Labaiz, O. Assala, L. Dekhil, A. Taleb, H. Rezag, A. Iost, and A. Iost, “Tribological behavior of Ti-6Al-4V and Ti-6Al-7Nb Alloys for Total Hip Prosthesis,” *Adv. Tribol.*, vol. 2014, pp. 1–13, 2014.
- [61] S. A. Jaber, A. Ruggiero, S. Battaglia, and S. Affatato, “On the roughness measurement on knee prostheses,” *Int. J. Artif. Organs*, vol. 38, no. 1, pp. 39–44, Jan. 2015.
- [62] J. H. Lonner, J. M. Siliski, and R. D. Scott, “Prodromes of Failure in Total Knee Arthroplasty,” *J. Arthroplasty*, vol. 14, no. 4, 1999.
- [63] H. Dong, W. Shi, and T. Bell, “Potential of improving tribological performance of UHMWPE by engineering the Ti6Al4V counterfaces,” *Wear*, vol. 225229, pp. 146–153, 1999.
- [64] J. G. Lancaster, D. Dowson, G. H. Isaac, and J. Fisher, “The wear of ultra-high molecular weight polyethylene sliding on metallic and ceramic counterfaces representative of current femoral surfaces in joint replacement,” *Proc. Inst. Mech. Eng. Part H J. Eng. Med.*, vol. 211, no. 1, pp. 17–24, Jan. 1997.
- [65] D. Xiong, Z. Gao, and Z. Jin, “Friction and wear properties of UHMWPE against

- ion implanted titanium alloy,” 2006.
- [66] A. Wang, A. Essner, and G. Schmidig, “The effects of lubricant composition on in vitro wear testing of polymeric acetabular components,” *J. Biomed. Mater. Res.*, vol. 68B, no. 1, pp. 45–52, Jan. 2004.
 - [67] V. Saikko, “Effect of Lubricant Protein Concentration on the Wear of Ultra-High Molecular Weight Polyethylene Sliding Against a CoCr Counterface,” *J. Tribol.*, vol. 125, no. 3, p. 638, 2003.
 - [68] V. Saikko, O. Calonijs, and J. Kernen, “Effect of counterface roughness on the wear of conventional and crosslinked ultrahigh molecular weight polyethylene studied with a multi-directional motion pin-on-disk device,” *J. Biomed. Mater. Res.*, vol. 57, no. 4, pp. 506–512, Dec. 2001.
 - [69] T. Kitano, G. A. Ateshian, V. C. Mow, Y. Kadoya, and Y. Yamano, “Constituents and pH changes in protein rich hyaluronan solution affect the biotribological properties of artificial articular joints,” *J. Biomech.*, vol. 34, pp. 1031–1037, 2001.
 - [70] M. P. Gispert, A. P. Serro, R. Colaço, and B. Saramago, “Friction and wear mechanisms in hip prosthesis: Comparison of joint materials behaviour in several lubricants,” *Wear*, vol. 260, no. 1, pp. 149–158, 2006.
 - [71] E. Seeram, *Computed tomography: physical principles, clinical applications, and quality control*. Elsevier Health Sciences, 2015.
 - [72] I. O. for S. Bureau International des Poids et Mesures(BIPM), International Electrotechnical Commission (IEC), International Federation of Clinical Chemistry (IFCC), International Laboratory Accreditation Cooperation (ILAC) and I. U. of P. and A. P. (IUPAP) and I. O. of L. M. (OIML) (ISO), International Union of Pure and Applied Chemistry (IUPAC), “Evaluation of measurement data — Supplement 1 to the ‘Guide to the expression of uncertainty in measurement’ — Propagation of distributions using a Monte Carlo method.” Sèvres, France: BIPM, 2008.
 - [73] International Organization for Standardization (ISO), “ISO 10360-1:2000 - Geometrical Product Specifications (GPS) -- Acceptance and reverification tests for coordinate measuring machines (CMM) -- Part 1: Vocabulary.” Geneva, Switzerland, 2000.
 - [74] International Organization for Standardization (ISO), “ISO 10360-2:2009 - Geometrical product specifications (GPS) -- Acceptance and reverification tests for coordinate measuring machines (CMM) -- Part 2: CMMs used for measuring linear dimensions.” Geneva, Switzerland, 2009.
 - [75] International Organization for Standardization, “ISO 10360-5:2010 - Geometrical product specifications (GPS) -- Acceptance and reverification tests for coordinate measuring machines (CMM) -- Part 5: CMMs using single and multiple stylus contacting probing systems.” International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2010.
 - [76] H. Schwenke, B. R. L. Siebert, F. Wäldele, and H. Kunzmann, “Assessment of Uncertainties in Dimensional Metrology by Monte Carlo Simulation: Proposal of a Modular and Visual Software,” *CIRP Ann. - Manuf. Technol.*, vol. 49, no. 1, pp. 395–398, Jan. 2000.
 - [77] A. Balsamo, M. Di Ciommo, R. Mugno, B. I. Rebaglia, E. Ricci, and R. Grella,

- “Evaluation of CMM Uncertainty Through Monte Carlo Simulations,” *CIRP Ann. - Manuf. Technol.*, vol. 48, no. 1, pp. 425–428, Jan. 1999.
- [78] F. J. R. J. De Vicente, “Simplified statistical method for uncertainty estimation in coordinate metrology,” in *Proc. of METROLOGIE’99*, 1999, p. 10.
- [79] Y. S. S.D. Phillips, B.R. Borchardt, D.S. Sawyer, W.T. Estler, D.E. Ward, K. Eberhardt, M. Levenson, M.A. McClain, B. Melvin, T. Hopp, “The calculation of CMM measurement uncertainty via the method of simulation by constraints - Google Académico,” in *Proceedings of American Society for Precision Engineering*, 1997, pp. 5–10.
- [80] T. Yandayan, B. Ozgur, N. Karaboce, and O. Yaman, “High precision small angle generator for realization of the SI unit of plane angle and calibration of high precision autocollimators,” *Meas. Sci. Technol.*, vol. 23, no. 9, p. 94006, Sep. 2012.
- [81] J. R. Pekelsky and L. E. Munro, “Bootstrap calibration of an autocollimator, index table and sine bar ensemble for angle metrology,” in *Recent Developments in Traceable Dimensional Measurements III. Edited by Decker, Jennifer E.; Peng, Gwo-Sheng. Proceedings of the SPIE, Volume 5879, pp. 123-139 (2005).*, 2005, vol. 5879, p. 58790D.
- [82] T. Yandayan, S. A. Akgöz, and H. Haitjema, “A novel technique for calibration of polygon angles with non-integer subdivision of indexing table,” *Precis. Eng.*, vol. 26, no. 4, pp. 412–424, 2002.
- [83] B. Acko, “Calibration of electronic levels using a special sine bar,” *Precis. Eng.*, vol. 29, no. 1, pp. 48–55, 2005.
- [84] E. Trapet, E. Savio, and L. De Chiffre, “New advances in traceability of CMMs for almost the entire range of industrial dimensional metrology needs,” *CIRP Ann. - Manuf. Technol.*, vol. 53, no. 1, pp. 433–438, 2004.
- [85] R. L. F. Aggogeri, E.M. Barini, E. Gentili, “Measurement variability with CMM’s in industry; a case study,” in *Proc. Lambdamap 8th International Conference*, 2007, pp. 44–53.
- [86] International Organization for Standardization (ISO), “ISO 15530-3:2011 - Geometrical product specifications (GPS) -- Coordinate measuring machines (CMM): Technique for determining the uncertainty of measurement -- Part 3: Use of calibrated workpieces or measurement standards.” Geneva, Switzerland, 2011.
- [87] International Organization for Standardization (ISO), “ISO/TS 15530-4:2008 - Geometrical Product Specifications (GPS) -- Coordinate measuring machines (CMM): Technique for determining the uncertainty of measurement -- Part 4: Evaluating task-specific measurement uncertainty using simulation.” Geneva, Switzerland, 2008.
- [88] K. Takamasu, “International Standard Development of Virtual CMM (Coordinate Measuring Machine),” Tokyo, JAPAN, 2002.
- [89] J. D. Claverley and R. K. Leach, “Development of a three-dimensional vibrating tactile probe for miniature CMMs,” *Precis. Eng.*, vol. 37, no. 2, pp. 491–499, 2013.
- [90] H. Chouaib and Q. Zhao, “Nanoscale optical critical dimension measurement of

- a contact hole using deep ultraviolet spectroscopic ellipsometry,” *J. Vac. Sci. Technol. B, Nanotechnol. Microelectron. Mater. Process. Meas. Phenom.*, vol. 31, no. 1, p. 11803, Jan. 2013.
- [91] H. Sawano, T. Gokan, H. Yoshioka, and H. Shinno, “A newly developed STM-based coordinate measuring machine,” *Precis. Eng.*, vol. 36, no. 4, pp. 538–545, 2012.
- [92] U. W. F. Haertig, E. Trapet, F. Waeldele, “Traceability of coordinate measurements according to the virtual CMM concept,” in *Fifth IMEKO TC-14*, 1995, pp. 245–254.
- [93] S. Osawa, K. Busch, M. Franke, and H. Schwenke, “Multiple orientation technique for the calibration of cylindrical workpieces on CMMs,” *Precis. Eng.*, vol. 29, no. 1, pp. 56–64, 2005.
- [94] E. Savio, “Uncertainty in testing the metrological performances of coordinate measuring machines,” *CIRP Ann. - Manuf. Technol.*, vol. 55, no. 1, pp. 535–538, Jan. 2006.
- [95] W. Jakubiec, W. Płowucha, and M. Starczak, “Analytical estimation of coordinate measurement uncertainty,” *Measurement*, vol. 45, no. 10, pp. 2299–2308, 2012.
- [96] S. D. Phillips, “Performance Evaluation,” in *Coordinate Measuring Machines and Systems*, Second., Robert J. Hocken and & Paulo H. Pereira, Eds. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2012, pp. 183–272.
- [97] J. B. Bryan, “The Abbé principle revisited: An updated interpretation,” *Precis. Eng.*, vol. 1, no. 3, pp. 129–132, Jul. 1979.
- [98] International Organization for Standardization (ISO), “ISO/IEC 17025:2005 - General requirements for the competence of testing and calibration laboratories.” Geneva, Switzerland, 2005.
- [99] International Organization for Standardization (ISO), “ISO/TS 15530-3:2004 - Geometrical Product Specifications (GPS) -- Coordinate measuring machines (CMM): Technique for determining the uncertainty of measurement -- Part 3: Use of calibrated workpieces or standards.” Geneva, Switzerland, 2004.
- [100] R. G. Wilhelm, R. Hocken, and H. Schwenke, “Task Specific Uncertainty in Coordinate Measurement,” *CIRP Ann. - Manuf. Technol.*, vol. 50, no. 2, pp. 553–563, 2001.
- [101] F. Schwenke, H., Trapet, E., Waeldele, “Pushing the limits of accuracy of coordinate measurements,” in *Proceedings of the Fourth International Conference on Ultraprecision in Manufacturing Engineering*, 1997, pp. 331–335.
- [102] ENAC, “Calibración de medidoras por coordenadas criterios de trazabilidad NT-15 Revisión 3.” 2012.
- [103] R. D’Amato, J. Caja, P. Maresca, and E. Gómez, “Use of coordinate measuring machine to measure angles by geometric characterization of perpendicular planes. Estimating uncertainty,” *Measurement*, vol. 47, pp. 598–606, 2014.
- [104] G. Zhang, “Error Compensation of Coordinate Measuring Machines,” in *Coordinate Measuring Machines and Systems*, 2nd ed., U. CRC Press: Boca Raton, FL, Ed. 2016.
- [105] J. Chen and Y. Chen, “Estimation of coordinate measuring machine error

- parameters,” in *Proceedings. 1987 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 4, pp. 196–201.
- [106] J. Santolaria, D. Guillomía, C. Cajal, J. A. Albaje, and J. J. Aguilar, “Modelling and Calibration Technique of Laser Triangulation Sensors for Integration in Robot Arms and Articulated Arm Coordinate Measuring Machines,” *Sensors*, vol. 9, no. 9, pp. 7374–7396, Sep. 2009.
 - [107] K. Y. Fan, K.C.; Huang, Z.H.; Li, “Real-time compensation of Abbé Errors on machine tools,” in *The 17th International Conference On mechatronics Technology. 15–18 October, 2013*.
 - [108] P. J. Swornowski, “A new concept of continuous measurement and error correction in Coordinate Measuring Technique using a PC,” *Measurement*, vol. 50, pp. 99–105, 2014.
 - [109] P. J. Swornowski, “Mapping and correction of the CMM workspace error with the use of an electronic gyroscope and neural networks-practical application,” *Scanning*, vol. 35, no. 4, pp. 222–231, Jul. 2013.
 - [110] K. Busch, H. Kunzmann, and F. Wäldele, “Calibration of coordinate measuring machines,” *Precis. Eng.*, vol. 7, no. 3, pp. 139–144, 1985.
 - [111] J. W. M. C. Teeuwsen, J. A. Soons, P. H. J. Schellekens, and A. C. H. van der Wolf, “A General Method for Error Description of CMMs Using Polynomial Fitting Procedures,” *CIRP Ann. - Manuf. Technol.*, vol. 38, no. 1, pp. 505–510, Jan. 1989.
 - [112] P. S. Huang and J. Ni, “On-line error compensation of coordinate measuring machines,” *Int. J. Mach. Tools Manuf.*, vol. 35, no. 5, pp. 725–738, 1995.
 - [113] C. K. Lim and M. Burdekin, “Rapid volumetric calibration of coordinate measuring machines using a hole bar artefact,” *Proc. Inst. Mech. Eng. Part B J. Eng. Manuf.*, vol. 216, no. 8, pp. 1083–1093, Aug. 2002.
 - [114] C. J. Evans, R. J. Hocken, and W. T. Estler, “Self-Calibration: Reversal, Redundancy, Error Separation, and ‘Absolute Testing,’” *CIRP Ann. - Manuf. Technol.*, vol. 45, no. 2, pp. 617–634, 1996.
 - [115] D. Krulewich, D.; Hale, L.; Yordy, “Rapid Mapping of Volumetric Errors (No. UCRL-JC-121688; CONF-951056--3),” *Lawrence Livermore Natl. Lab Livermore, CA, USA*, 1995.
 - [116] B89.4.10360.2-2008, “Acceptance Test and Reverification Test for Coordinate Measuring Machines (CMMs) Part 2: CMMs Used for Measuring Linear Dimensions.” The American Society of Mechanical Engineers (ASME), New York, NY, USA, 2008.
 - [117] M. Abbe, K. Takamasu, and S. Ozono, “Reliability on calibration of CMM,” *Measurement*, vol. 33, no. 4, pp. 359–368, 2003.
 - [118] A. C. Okafor and Y. M. Ertekin, “Derivation of machine tool error models and error compensation procedure for three axes vertical machining center using rigid body kinematics,” *Int. J. Mach. Tools Manuf.*, vol. 40, no. 8, pp. 1199–1213, 2000.
 - [119] “International vocabulary of basic and general terms in metrology (VIM),” 2004.
 - [120] J. G. Salsbury and E. P. Morse, “Measurement uncertainty in the performance

- verification of indicating measuring instruments,” *Precis. Eng.*, vol. 36, no. 2, pp. 218–228, 2012.
- [121] International Organization for Standardization (ISO), “ISO/IEC Guide 98-1:2009 - Uncertainty of measurement -- Part 1: Introduction to the expression of uncertainty in measurement.” Geneva, Switzerland, 2009.
- [122] W. Bich, “From errors to probability density functions. evolution of the concept of measurement uncertainty,” *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 61, no. 8, pp. 2153–2159, Aug. 2012.
- [123] C. Ehrlich and R. Dybkaer, “Uncertainty of Error: The Error Dilemma,” *NCSLI Meas.*, vol. 6, no. 3, pp. 72–77, 2011.
- [124] International Organization for Standardization (ISO), “ISO/TS 23165:2006 - Geometrical product specifications (GPS) -- Guidelines for the evaluation of coordinate measuring machine (CMM) test uncertainty.” Geneva, Switzerland, 2006.
- [125] International Organization for Standardization, “ISO 14253-1:1998 - Geometrical Product Specifications (GPS) -- Inspection by measurement of workpieces and measuring equipment -- Part 1: Decision rules for proving conformance or non-conformance with specifications.” Geneva, Switzerland, 1998.
- [126] R. Calvo, E. Gómez, and R. Domingo, “Vectorial method of minimum zone tolerance for flatness, straightness, and their uncertainty estimation,” *Int. J. Precis. Eng. Manuf.*, vol. 15, no. 1, pp. 31–44, Jan. 2014.
- [127] J. Anthony, G T, Bittner, B, Butler, B P, Cox, M G, Drieschner, R, Elligsen, R, Forbes, A B, Gross, H, Hannaby, S A, Harris, P M, Kok, “Chebyshev reference software for the evaluation of coordinate measuring machine data. : Publications : National Physical Laboratory,” Luxembourg, 1993.
- [128] International Organization for Standardization, “ISO 1101:2012 - Geometrical product specifications (GPS) -- Geometrical tolerancing -- Tolerances of form, orientation, location and run-out.” Geneva, Switzerland, 2012.
- [129] R. Calvo and E. Gómez, “Accurate evaluation of functional roundness from point coordinates,” *Measurement*, vol. 73, pp. 211–225, 2015.
- [130] B. Acko, “EXPERIMENTAL ANALYSIS OF UNCERTAINTY OF SQUARENESS CALIBRATION ON A CO-ORDINATE MEASURING MACHINE,” in *Proceedings, XVII IMEKO World Congress, June 22 – 27, 2003*.
- [131] H. Schwenke, W. Knapp, H. Haitjema, A. Weckenmann, R. Schmitt, and F. Delbressine, “Geometric error measurement and compensation of machines—An update,” *CIRP Ann. - Manuf. Technol.*, vol. 57, no. 2, pp. 660–675, 2008.
- [132] K.-C. Fan, H.-M. Yen, and K.-Y. Li, “A New Concept of Volumetric Error Analysis of Machine Tools Based on Abbé Principle,” in *The 3rd International Conference on Design Engineering and Science, ICDES, August 31 – September 3, 2014*.
- [133] A. Weckenmann, M. Knauer, and H. Kunzmann, “The Influence of Measurement Strategy on the Uncertainty of CMM-Measurements,” *CIRP Ann. - Manuf. Technol.*, vol. 47, no. 1, pp. 451–454, 1998.
- [134] J. Bachmann, J. marc Linares, J. M. Sprauel, and P. Bourdet, “Aide in decision-

- making: Contribution to uncertainties in three-dimensional measurement,” *Precis. Eng.*, vol. 28, no. 1, pp. 78–88, 2004.
- [135] N. Chernov, *Circular and linear regression: fitting circles and lines by least squares*. Taylor & Francis, 2011.
- [136] R. Calvo, R. D’Amato, E. Gómez, and R. Domingo, “A Comparative Experimental Study of an Alternative CMM Error Model under Least-squares and Minimum Zone Fittings for Industrial Measuring,” *Procedia Eng.*, vol. 132, pp. 780–787, 2015.
- [137] W. J. DeCoursey, *Statistics and Probability for Engineering Applications*. ; Newnes: Burlington, MA, USA: Elsevier Science (USA, 2003.
- [138] G. Zhang, “Error Compensation of Coordinate Measuring Machines,” in *Coordinate Measuring Machines and Systems*, Second., Robert J. Hocken and & Paulo H. Pereira, Eds. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2012.
- [139] H. Huang, “Comparison of Uncertainty Calculation Models – Cal Lab Magazine,” *Cal Lab Int. J. Metrol.*, vol. 19, pp. 24–29, 2012.
- [140] International Organization for Standardization (ISO), “ISO 10360-5:2010 - Geometrical product specifications (GPS) -- Acceptance and reverification tests for coordinate measuring machines (CMM) -- Part 5: CMMs using single and multiple stylus contacting probing systems.” Geneva, Switzerland, 2010.
- [141] C. Y. Fang, C. K. Sung, and K.-W. Lui, “Measurement uncertainty analysis of CMM with ISO GUM.”
- [142] P. J. Mohr and W. D. Phillips, “Dimensionless units in the SI,” *Metrologia*, vol. 52, no. 1, pp. 40–47, Feb. 2015.
- [143] J. O. Metzger and A. Hüttermann, “Sustainable global energy supply based on lignocellulosic biomass from afforestation of degraded areas,” *Naturwissenschaften*, vol. 96, no. 2, pp. 279–288, Feb. 2009.
- [144] J. C. O. Santos, I. M. G. Santos, M. M. Conceição, S. L. Porto, M. F. S. Trindade, A. G. Souza, S. Prasad, V. J. Fernandes Jr., and A. S. Araújo, “Thermoanalytical, kinetic and rheological parameters of commercial edible vegetable oils,” *J. Therm. Anal. Calorim.*, vol. 75, no. 2, pp. 419–428, 2004.
- [145] P. Nagendramma and S. Kaul, “Development of ecofriendly/biodegradable lubricants: An overview,” *Renew. Sustain. Energy Rev.*, vol. 16, pp. 764–774, 2011.
- [146] C. L. Puscas, G. Bandur, D. Modra, and R. Nutiu, “CONSIDERATIONS ABOUT USING VEGETABLE OILS IN LUBRICANTS,” *Proc. WTC2005 World Tribol. Congr. III, Sept. 12-16*, pp. 1–2, 2005.
- [147] N. S. Battersby, “The biodegradability and microbial toxicity testing of lubricants ± some recommendations,” *Chemosphere*, vol. 41, pp. 1011–1027, 2000.
- [148] A. Ruggiero, R. D’Amato, M. Merola, P. Valášek, and M. Müller, “On the Tribological Performance of Vegetal Lubricants: Experimental Investigation on *Jatropha Curcas* L. oil,” *Procedia Eng.*, vol. 149, pp. 431–437, 2016.
- [149] B. Kržan and J. Vižintin, “Tribological properties of an environmentally adopted universal tractor transmission oil based on vegetable oil,” *Tribol. Int.*, vol. 36, pp. 827–833, 2003.

- [150] A. K. Agarwal, "Biofuels (alcohols and biodiesel) applications as fuels for internal combustion engines," *Prog. Energy Combust. Sci.*, vol. 33, no. 3, pp. 233–271, 2007.
- [151] A. Kumar and S. Sharma, "An evaluation of multipurpose oil seed crop for industrial uses (*Jatropha curcas* L.): A review," *Ind. Crops Prod.*, vol. 28, no. 1, pp. 1–10, 2008.
- [152] K. Sunde, A. Brekke, and B. Solberg, "Environmental Impacts and Costs of Hydrotreated Vegetable Oils, Transesterified Lipids and Woody BTL—A Review," *Energies*, vol. 4, no. 12, pp. 845–877, May 2011.
- [153] D. Y. C. Leung, X. Wu, and M. K. H. Leung, "A review on biodiesel production using catalyzed transesterification," *Appl. Energy*, vol. 87, no. 4, pp. 1083–1095, 2010.
- [154] A. Adhvaryu, S. . Erhan, and J. . Perez, "Tribological studies of thermally and chemically modified vegetable oils for use as environmentally friendly lubricants," *Wear*, vol. 257, no. 3, pp. 359–367, 2004.
- [155] M. A. R. Meier, J. O. Metzger, and U. S. Schubert, "Plant oil renewable resources as green alternatives in polymer science," *Chem. Soc. Rev.*, vol. 36, no. 11, p. 1788, 2007.
- [156] R. Becker and A. Knorr, "An evaluation of antioxidants for vegetable oils at elevated temperatures," *Lubr. Sci.*, vol. 8, no. 2, pp. 95–117, Jan. 1996.
- [157] A. Adhvaryu and S. . Erhan, "Epoxidized soybean oil as a potential source of high-temperature lubricants," *Ind. Crops Prod.*, vol. 15, no. 3, pp. 247–254, 2002.
- [158] B. K. Sharma, A. Adhvaryu, Z. Liu, and S. Z. Erhan, "Chemical modification of vegetable oils for lubricant applications," *J. Am. Oil Chem. Soc.*, vol. 83, no. 2, pp. 129–136, Feb. 2006.
- [159] N. N. A. N. Yusuf, S. K. Kamarudin, and Z. Yaakub, "Overview on the current trends in biodiesel production," *Energy Convers. Manag.*, vol. 52, no. 7, pp. 2741–2751, 2011.
- [160] J. Zhang and L. Jiang, "Acid-catalyzed esterification of *Zanthoxylum bungeanum* seed oil with high free fatty acids for biodiesel production," 2008.
- [161] T. N. Kalneses, T. Marker, D. R. Shonnard, and K. P. Koers, "Green diesel production by hydrotreating renewable feedstocks," *Biofuel Technol.*, vol. 4, no. 4, pp. 7–11, 2008.
- [162] R. Arvidsson, S. Persson, M. Fröling, and M. Svanström, "Life cycle assessment of hydrotreated vegetable oil from rape, oil palm and *Jatropha*," *J. Clean. Prod.*, vol. 19, no. 2, pp. 129–137, 2011.
- [163] B. Donnis, R. G. Egeberg, P. Blom, and K. G. Knudsen, "Hydroprocessing of Bio-Oils and Oxygenates to Hydrocarbons. Understanding the Reaction Routes," *Top. Catal.*, vol. 52, no. 3, pp. 229–240, Apr. 2009.
- [164] I. I. Ștefănescu, C. Calomir, and G. Chiriță, "ON THE FUTURE OF BIODEGRADABLE VEGETABLE LUBRICANTS USED FOR INDUSTRIAL TRYBOSYSTEMS," *Ann. Univ. "DUNĂREA JOS" GALAȚI, Tribol.*, vol. 8, pp. 94–98, 2002.
- [165] H. M. Mobarak, E. Niza Mohamad, H. H. Masjuki, M. A. Kalam, K. A. H. Al

- Mahmud, M. Habibullah, and A. M. Ashraful, "The prospects of biolubricants as alternatives in automotive applications," *Renew. Sustain. Energy Rev.*, vol. 33, pp. 34–43, 2014.
- [166] E. Höglund, "Influence of lubricant properties on elastohydrodynamic lubrication," *Wear*, vol. 232, no. 2, pp. 176–184, 1999.
- [167] M. W. Sulek, A. Kulczycki, and A. Malysa, "Assessment of lubricity of compositions of fuel oil with biocomponents derived from rape-seed," *Wear*, vol. 268, no. 1, pp. 104–108, 2010.
- [168] A. S. M. A. Haseeb, S. Y. Sia, M. A. Fazal, and H. H. Masjuki, "Effect of temperature on tribological properties of palm biodiesel," *Energy*, vol. 35, no. 3, pp. 1460–1464, 2010.
- [169] S. Asadauskas, J. M. Perez, and J. L. Duda, "Lubrication properties of castor oil potential basestock for biodegradable lubricants," *Lubr. Eng.*, vol. 53, no. 12, pp. 35–41, 1997.
- [170] S. ASADAUSKAS, J. M. PEREZ, and J. L. DUDA, "Oxidative stability and antiwear properties of high oleic vegetable oils," *Lubr. Eng.*, vol. 52, no. 12, pp. 877–882, 1996.
- [171] M. Kozma, "Investigation into the scuffing load capacity of environmentally-friendly lubricating oils," *J. Synth. Lubr.*, vol. 14, no. 3, pp. 249–258, Oct. 1997.
- [172] S. ODI-OWEI, "Tribological properties of some vegetable oils and fats," *Lubr. Eng.*, vol. 45, no. 11, pp. 685–690, 1989.
- [173] A. Arnšek and J. Vižintin, "Lubricating properties of rapeseed-based oils," *J. Synth. Lubr.*, vol. 16, no. 4, pp. 281–296, Jan. 2000.
- [174] A. ARNSEK and J. VIZINTIN, "Scuffing load capacity of rapeseed-based oils," *Lubr. Eng.*, vol. 55, no. 8, pp. 11–18, 1999.
- [175] M. Shahabuddin, H. H. Masjuki, M. A. Kalam, M. M. K. Bhuiya, and H. Mehat, "Comparative tribological investigation of bio-lubricant formulated from a non-edible oil source (Jatropha oil)," *Ind. Crops Prod.*, vol. 47, pp. 323–330, 2013.
- [176] M. Koga, E. C. Santos, T. Honda, K. Kida, and T. Shibukawa, "Investigation of wear in induction-heated AISI E 52100 steel bars under reciprocating motion," *Int. J. Mater. Prod. Technol.*, vol. 44, no. 3/4, p. 240, 2012.
- [177] T. Bakša, T. Kroupa, P. Hanzl, and M. Zetek, "Durability of Cutting Tools during Machining of Very Hard and Solid Materials," *Procedia Eng.*, vol. 100, pp. 1414–1423, 2015.
- [178] A. Kumar Tiwari, A. Kumar, and H. Raheman, "Biodiesel production from jatropha oil (*Jatropha curcas*) with high free fatty acids: An optimized process," *Biomass and Bioenergy*, vol. 31, no. 8, pp. 569–575, 2007.
- [179] J. W. Goodrum and D. P. Geller, "Influence of fatty acid methyl esters from hydroxylated vegetable oils on diesel fuel lubricity," *Bioresour. Technol.*, vol. 96, no. 7, pp. 851–855, 2005.
- [180] P. Šimáček, D. Kubička, G. Šebor, and M. Pospíšil, "Hydroprocessed rapeseed oil as a source of hydrocarbon-based biodiesel," *Fuel*, vol. 88, no. 3, pp. 456–460, 2009.

- [181] E. T. Akintayo, "Characteristics and composition of *Parkia biglobbosa* and *Jatropha curcas* oils and cakes," *Bioresour. Technol.*, vol. 92, no. 3, pp. 307–310, 2004.
- [182] R. H. Petrucci, W. S. Harwood, and F. G. Herring, *General chemistry : principles and modern applications*. Prentice Hall, 2002.
- [183] C. Tzia and G. Liadakis, *Extraction optimization in food engineering*. Marcel Dekker, Inc, 2003.
- [184] A. Ruggiero, R. D'Amato, E. Gómez, and M. Merola, "Experimental comparison on tribological pairs UHMWPE/TIAL6V4 alloy, UHMWPE/AISI316L austenitic stainless and UHMWPE/AL2O3 ceramic, under dry and lubricated conditions," *Tribol. Int.*, vol. 96, pp. 349–360, 2016.
- [185] A. Ruggiero, P. Valášek, and M. Merola, "Friction and wear behaviors of Al/Epoxy during reciprocating sliding tests," *Manuf. Technol.*, vol. 15, no. 4, pp. 684–9, 2015.
- [186] A. Ruggiero, M. Merola, P. Carlone, and V.-M. Archodoulaki, "Tribo-mechanical characterization of reinforced epoxy resin under dry and lubricated contact conditions," *Compos. Part B*, vol. 79, pp. 595–603, 2015.
- [187] A. Ruggiero, M. Mindas, and L. Knapčíková, "Tribodiagnostic investigation on oil filtration: results from a novel apparatus," *Ind. Lubr. Tribol.*, vol. 68, no. 6, pp. 689–695, Sep. 2016.
- [188] W. Kapłonek, K. Nadolny, and G. M. Królczyk, "The Use of Focus-Variation Microscopy for the Assessment of Active Surfaces of a New Generation of Coated Abrasive Tools," *Meas. Sci. Rev.*, vol. 16, no. 2, pp. 42–53, Jan. 2016.
- [189] M. Merola, A. Ruggiero, J. S. De Mattia, and S. Affatato, "On the tribological behavior of retrieved hip femoral heads affected by metallic debris. A comparative investigation by stylus and optical profilometer for a new roughness measurement protocol," *Measurement*, vol. 90, pp. 365–371, 2016.
- [190] L. Blunt and X. Q. Jiang, "Three dimensional measurement of the surface topography of ceramic and metallic orthopaedic joint prostheses," *J. Mater. Sci. Mater. Med.*, vol. 11, no. 4, pp. 235–246, 2000.
- [191] P. Hreha, A. Radvanska, L. Knapcikova, G. M. Królczyk, S. Legutko, J. B. Królczyk, S. Hloch, and P. Monka, "Roughness Parameters Calculation By Means Of On-Line Vibration Monitoring Emerging From AWJ Interaction With Material," *Metrol. Meas. Syst.*, vol. 22, no. 2, pp. 315–326, Jan. 2015.
- [192] A. Emil, Z. Yaakob, M. N. Satheesh Kumar, J. M. Jahim, and J. Salimon, "Comparative Evaluation of Physicochemical Properties of *Jatropha* Seed Oil from Malaysia, Indonesia and Thailand," *J. Am. Oil Chem. Soc.*, vol. 87, no. 6, pp. 689–695, Jun. 2010.
- [193] V. B. Shambhu, T. K. Bhattacharya, L. K. Nayak, and S. Das, "Studies on Characterization of Raw *Jatropha* Oil and its Biodiesels with Relevance of Diesel," *Int. J. Emerg. Technol. Adv. Eng.*, vol. 9001, no. 4, 2250.
- [194] H. Wang, H. Tang, J. Wilson, S. O. Salley, and K. Y. S. Ng, "Total Acid Number Determination of Biodiesel and Biodiesel Blends," *J. Am. Oil Chem. Soc.*, vol. 85, no. 11, pp. 1083–1086, Nov. 2008.

- [195] C. Georgescu, L. Solea, and L. Deleanu, "Rheological aspects of corn oil and rapeseed oil," *JOURNAL Balk. Tribol. Assoc.*, vol. 21, no. 4, pp. 912–921, 2015.
- [196] R. A. Candeia, M. C. D. Silva, J. R. Carvalho Filho, M. G. A. Brasilino, T. C. Bicudo, I. M. G. Santos, and A. G. Souza, "Influence of soybean biodiesel content on basic properties of biodiesel–diesel blends," *Fuel*, vol. 88, no. 4, pp. 738–743, 2009.
- [197] N. Noorawzi and S. Samion, "Tribological Effects of Vegetable Oil as Alternative Lubricant: A Pin-on-Disk Tribometer and Wear Study," *Tribol. Trans.*, vol. 59, no. 5, pp. 831–837, Sep. 2016.
- [198] B. K. Sharma, K. M. Doll, and S. Z. Erhan, "Ester hydroxy derivatives of methyl oleate: Tribological, oxidation and low temperature properties," *Bioresour. Technol.*, vol. 99, no. 15, pp. 7333–7340, 2008.
- [199] Y. M. Shashidhara and S. R. Jayaram, "Tribological Studies on AISI 1040 with Raw and Modified Versions of Pongam and Jatropha Vegetable Oils as Lubricants," *Adv. Tribol.*, vol. 2012, pp. 1–6, 2012.
- [200] A. ARNSEK and J. VIZINTIN, "Pitting resistance of rapeseed-based oils," *Lubr. Eng.*, vol. 57, no. 3, pp. 17–21, 2001.
- [201] T. Hartikka, M. Kuronen, and U. Kiiski, "Technical Performance of HVO (Hydrotreated Vegetable Oil) in Diesel Engines," in *SAE 2012 International Powertrains, Fuels & Lubricants Meeting*, 2012.
- [202] D. H. Buckley, *Surface effects in adhesion, friction, wear, and lubrication*. Elsevier Scientific Pub. Co., 1981.
- [203] M. Kalin, S. Jahanmir, and L. K. Ives, "Effect of counterface roughness on abrasive wear of hydroxyapatite," *Wear*, vol. 252, no. 9, pp. 679–685, 2002.
- [204] U. Dulias, L. Fang, and K.-H. Zum Gahr, "Effect of surface roughness of self-mated alumina on friction and wear in isooctane-lubricated reciprocating sliding contact," *Wear*, vol. 252, no. 3, pp. 351–358, 2002.
- [205] J. Zhang and Y. Meng, "Boundary lubrication by adsorption film," *Friction*, vol. 3, no. 2, pp. 115–147, Jun. 2015.
- [206] A. Beerbower, "Boundary lubrication-scientific and technical forecast report; 1972.," 1972.
- [207] F. Nurul and S. Syahrullail, "Improvement of the Lubrication Performance of RBD Palm Stearin as an Alternative Lubricant under Different Sliding Speeds," *Strojniški Vestn. -Journal Mech. Eng.*, vol. 631, pp. 15–24, 2017.
- [208] I. Gunes, T. Uygunoglu, and M. Erdogan, "Effect of Sintering Duration on Some Properties of Pure Magnesium," *Powder Metall. Met. Ceram.*, vol. 54, no. 3–4, pp. 156–165, Jul. 2015.
- [209] J. Fréne and T. Ciccone, "Friction in Lubricated Contacts," in *Lemaitre Handb. mater. behav. model*, USA: Academic Press, 2001, p. 1200.
- [210] M. T. Siniawski, N. Saniei, B. Adhikari, and L. A. Doezeza, "Influence of fatty acid composition on the tribological performance of two vegetable-based lubricants," *J. Synth. Lubr.*, vol. 24, no. 2, pp. 101–110, Apr. 2007.
- [211] R. Larsen and G. Perry, "Investigation of friction and wear under quasi-

- hydrodynamic conditions,” *Trans. ASME*, vol. 67, pp. 45–50, 1945.
- [212] C. Kajdas and M. Majzner, “Boundary lubrication of low-sulphur diesel fuel in the presence of fatty acids,” *Lubr. Sci.*, vol. 14, no. 1, pp. 83–108, Nov. 2001.
- [213] D. E. Shepherd and B. B. Seedhom, “Thickness of human articular cartilage in joints of the lower limb,” *Ann. Rheum. Dis.*, vol. 58, no. 1, pp. 27–34, Jan. 1999.
- [214] J. M. Michael, A. Golshani, S. Gargac, and T. Goswami, “Biomechanics of the ankle joint and clinical outcomes of total ankle replacement,” *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.*, vol. 1, no. 4, pp. 276–294, 2008.
- [215] A. N. Natali, antonella Forestiero, and S. Trentin, “CARATTERIZZAZIONE BIOMECCANICA DEI TENDINI E DEI LEGAMENTI DEL PIEDE,” UNIVERSITA’ DEGLI STUDI DI PADOVA, 20010.
- [216] A. D. Pearle, R. F. Warren, and S. A. Rodeo, “Basic Science of Articular Cartilage and Osteoarthritis,” *Clin. Sports Med.*, vol. 24, no. 1, pp. 1–12, Jan. 2005.
- [217] K. Singha and M. Singha, “Biomechanism Profile of Intervertebral Discs (IVD): Strategies to Successful Tissue Engineering for Spinal Healing by Reinforced Composite Structure,” *J. Tissue Sci. Eng.*, vol. 3, no. 2, pp. 1–14, 2012.
- [218] V. T. Inman, *The joints of the ankle*. Williams & Wilkins, 1976.
- [219] A. Lundberg, I. Goldie, B. Kalin, and G. Selvik, “Kinematics of the ankle/foot complex: plantarflexion and dorsiflexion,” *Foot Ankle*, vol. 9, no. 4, pp. 194–200, Feb. 1989.
- [220] E. S. Grood and W. J. Suntay, “A joint coordinate system for the clinical description of three-dimensional motions: application to the knee,” *J. Biomech. Eng.*, vol. 105, no. 2, pp. 136–44, May 1983.
- [221] C. H. BARNETT and J. R. NAPIER, “The axis of rotation at the ankle joint in man; its influence upon the form of the talus and the mobility of the fibula,” *J. Anat.*, vol. 86, no. 1, pp. 1–9, Jan. 1952.
- [222] J. H. HICKS, “The mechanics of the foot. II. The plantar aponeurosis and the arch,” *J. Anat.*, vol. 88, no. 1, pp. 25–30, Jan. 1954.
- [223] P. S. Walker, D. Dowson, M. D. Longfield, and A. V Wright, “‘BOOSTED LUBRICATIO’; IN SYNOVIAL JOINTS BY FLUID ENTRAPMENT AND ENRICHMENT,” *Ann. rheum. Dis*, vol. 27, 1968.
- [224] V. Wright, *Lubrication and Wear in Joints: Proceedings of a Symposium Organized by the Biological Engineering Society and Held at the General Infirmary, Leeds, on Apr. 17, 1969*. Lippincott, 1969.
- [225] M. Hlaváček, “Squeeze-film lubrication of the human ankle joint with synovial fluid filtrated by articular cartilage with the superficial zone worn out,” *J. Biomech.*, vol. 33, no. 11, pp. 1415–1422, 2000.
- [226] V. D’Agostino, A. Ruggiero, and A. Senatore, “Approximate model for unsteady finite porous journal bearings fluid film force calculation,” *Proc. Inst. Mech. Eng. Part J J. Eng. Tribol.*, vol. 220, no. 3, pp. 227–234, Jan. 2006.
- [227] M. Hlaváček and J. Novák, “The role of synovial fluid filtration by cartilage in lubrication of synovial joints--III. Squeeze-film lubrication: axial symmetry under low loading conditions,” *J. Biomech.*, vol. 28, no. 10, pp. 1193–8, Oct. 1995.

- [228] D. R. Peterson and J. D. Bronzino, *Biomechanics : principles and practices*. CRC Press , 214AD.
- [229] Z. Jin and D. Dowson, “Development of Early Concepts of Lubrication in Natural Synovial Joints,” *Tribol. Online*, vol. 6, no. 3, pp. 168–173, 2011.
- [230] J. M. Lane and C. Weiss, “Review of articular cartilage collagen research,” *Arthritis Rheum.*, vol. 18, no. 6, pp. 553–562, Nov. 1975.
- [231] M. J. Matthewson, “Axi-symmetric contact on thin compliant coatings,” *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 29, no. 2, pp. 89–113, 1981.
- [232] E. Walicki and A. Walicka, “Inertia and couple-stress effects on squeeze-film characteristics with reference to biological bearings,” *Tribotest*, vol. 8, no. 3, pp. 195–203, Mar. 2002.
- [233] J. R. Lin, “Couple-stress effects on the squeeze film characteristics of hemispherical bearings with reference to synovial joints,” *Appl. Mech. Eng.*, vol. 1, no. 2, pp. 317–332, 1996.
- [234] N. M. Bujurke, S. G. Bhavi, and N. B. Naduvanamani, “The effect of couple stresses in squeeze film poro-elastic bearings with special reference to synovial joints,” *IMA J. Math. Appl. Med. Biol.*, vol. 7, no. 4, pp. 231–43, 1990.
- [235] J.-R. Lin, W.-H. Liao, and C.-R. Hung, “THE EFFECTS OF COUPLE STRESSES IN THE SQUEEZE FILM CHARACTERISTICS BETWEEN A CYLINDER AND A PLANE SURFACE,” *J. Mar. Sci. Technol.*, vol. 12, no. 2, pp. 119–123, 2004.
- [236] V. K. Stokes, “Couple Stresses in Fluids,” *Phys. Fluids*, vol. 9, no. 9, p. 1709, 1966.
- [237] N. B. Naduvanamani, P. S. Hiremath, and G. Gurubasavaraj, “Static and dynamic behaviour of squeeze-film lubrication of narrow porous journal bearings with coupled stress fluid,” *Proc. Inst. Mech. Eng. Part J J. Eng. Tribol.*, vol. 215, no. 1, pp. 45–62, Jan. 2001.
- [238] A. Ruggiero and A. Senatore, “Approximate closed-form solution for the dynamical analysis of short bearings with couple stress fluid,” *Lubr. Sci.*, vol. 19, no. 4, pp. 247–267, Oct. 2007.
- [239] V. Spitzer, M. J. Ackerman, A. L. Scherzinger, and D. Whitlock, “The Visible Human Male: A Technical Report,” *J. Am. Med. Informatics Assoc.*, vol. 3, no. 2, pp. 118–130, Mar. 1996.
- [240] A. Hayes, Y. Tochigi, and C. L. Saltzman, “Ankle morphometry on 3D-CT images,” *Iowa Orthop. J.*, vol. 26, pp. 1–4, 2006.
- [241] M. J. Ackerman, “The Visible Human Project: a resource for anatomical visualization,” *Stud. Health Technol. Inform.*, vol. 52 Pt 2, pp. 1030–2, 1998.
- [242] V. M. Spitzer and A. L. Scherzinger, “Virtual anatomy: An anatomist’s playground,” *Clin. Anat.*, vol. 19, no. 3, pp. 192–203, Apr. 2006.
- [243] S.-X. Zhang, P.-A. Heng, Z.-J. Liu, L.-W. Tan, M.-G. Qiu, Q.-Y. Li, R.-X. Liao, K. Li, G.-Y. Cui, Y.-L. Guo, X.-P. Yang, G.-J. Liu, J.-L. Shan, J.-J. Liu, W.-G. Zhang, X.-H. Chen, J.-H. Chen, J. Wang, W. Chen, M. Lu, J. You, X.-L. Pang, H. Xiao, Y.-M. Xie, and J. C.-Y. Cheng, “The Chinese Visible Human (CVH) datasets incorporate technical and imaging advances on earlier digital humans,”

- J. Anat.*, vol. 204, no. 3, pp. 165–173, Mar. 2004.
- [244] S.-X. Zhang, P.-A. Heng, and Z.-J. Liu, “Chinese visible human project,” *Clin. Anat.*, vol. 19, no. 3, pp. 204–215, Apr. 2006.
- [245] D. Marr, “Vision: A computational investigation into the human representation and processing of visual information, henry holt and co,” *Inc., New York, NY*, vol. 2, pp. 2–4, 1982.
- [246] M. Sonka, V. Hlavac, and R. Boyle, *Image processing, analysis, and machine vision*. Cengage Learning, 2014.
- [247] R. C. Gonzalez, R. E. Woods, L. McDowell, T. Galligan, and P. P. Hall, *Digital Image Processing Library of Congress Cataloging-in-Publication Data on File*. Pearson Education, Inc, 2008.
- [248] B. Green, “Canny edge detection tutorial,” *Retrieved: March*, vol. 6, p. 2005, 2002.
- [249] J. Canny, “A Computational Approach to Edge Detection,” *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. PAMI-8, no. 6, pp. 679–698, Nov. 1986.
- [250] L. Ding and A. Goshtasby, “On the Canny edge detector,” *Pattern Recognit.*, vol. 34, no. 3, pp. 721–725, Mar. 2001.
- [251] R. Calvo, E. Gómez, and R. Domingo, “Circle fitting from the polarity transformation regression,” *Precis. Eng.*, vol. 37, pp. 908–917, 2013.
- [252] D. W. Marquardt, “An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters,” *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, vol. 11, no. 2, pp. 431–441, Jun. 1963.
- [253] EA Laboratory Committee, “Evaluation of the Uncertainty of Measurement In Calibration,” 2013.
- [254] BIPM, “JCGM 100:2008 - Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM).” 2008.
- [255] Joint Committee for Guides in Metrology., “JCGM 101:2008 - Supplement 1 to the ‘Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement’ - Propagation of Distributions Using a Monte Carlo Method. Technical Report,” *BIPM*, 2008. .
- [256] Joint Committee for Guides in Metrology., “JCGM 102: Evaluation of Measurement Data - Supplement 2 to the ‘Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement’ - Extension to Any Number of Output Quantities.” *BIPM*, 2011.
- [257] R. Anchini, C. Liguori, and A. Paolillo, “Evaluation of the Uncertainty of Edge-Detector Algorithms,” *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 56, no. 3, pp. 681–688, Jun. 2007.
- [258] G. R. Higginson, “Paper 1: The Theoretical Effects of Elastic Deformation of the Bearing Liner on Journal Bearing Performance,” *Proc. Inst. Mech. Eng. Conf. Proc.*, vol. 180, no. 2, pp. 31–38, Jun. 1965.
- [259] D. Dowson and Z. Jin, “Paper XI (i) The influence of elastic deformation upon film thickness in lubricated bearings with low elastic modulus coatings,” in *Tribology Series*, Elsevier, 1990, pp. 263–269.
- [260] A. Ruggiero and S. Hloch, “Biotribology researches in natural lubrication of human synovial joints,” *5th Int. Sci. Expert Conf. TEAM, Vol. V (1)1, ISSN 1847*

- 9065, 2013.
- [261] A. Ruggiero, R. D'Amato, E. Gómez, and S. Hloch, "Approximate Closed-Form Solution of the Synovial Pressure Field in the Human Ankle Joint with non-Newtonian Lubricant and Deformable Cartilage Layer Faculty of Manufacturing Technologies TUKE with a seat in Prešov, Slovak Republic," in *Proceedings of the 10th international conference BIOMODLORE 20–22 September, Vol. 14: p. 16.*, 20013.
 - [262] S. Affatato, L. Grillini, S. Falcioni, and A. Ruggiero, "On the Roughness Measurement of the Knee Femoral Components," in *Proceedings of the 10th international conference BIOMODLORE 2013, Vol. 16: p.18.*, 2013.
 - [263] A. Ruggiero and R. D'Amato, "APPROXIMATE CLOSED-FORM SOLUTION FOR THE DYNAMICAL ANALYSIS OF HUMAN ANKLE JOINT WITH COUPLE STRESS FLUID," in *International Tribology Conference, Hiroshima ISBN 9781612847047*, 2011, p. 1,2.
 - [264] A. Ruggiero and R. D. Amato, "SQUEEZE-FILM LUBRICATION OF THE HUMAN ANKLE JOINT : A SIMPLIFIED ANALYTICAL MODEL DURING WALKING," *Ann. Fac. Eng. Hunedoara*, vol. 8, no. year, pp. 73–80, 2010.
 - [265] D. A. Baker, R. S. Hastings, and L. Pruitt, "Study of fatigue resistance of chemical and radiation crosslinked medical grade ultrahigh molecular weight polyethylene.," *J. Biomed. Mater. Res.*, vol. 46, no. 4, pp. 573–81, Sep. 1999.
 - [266] J. H. Currier, J. L. Duda, D. K. Sperling, J. P. Collier, B. H. Currier, and F. E. Kennedy, "In vitro simulation of contact fatigue damage found in ultra-high molecular weight polyethylene components of knee prostheses," *Proc. Inst. Mech. Eng. Part H J. Eng. Med.*, vol. 212, no. 4, pp. 293–302, Apr. 1998.
 - [267] K. Wang, "The use of titanium for medical applications in the USA," *Mater. Sci. Eng. A*, vol. 213, no. 1–2, pp. 134–137, Aug. 1996.
 - [268] J. Fisher, "Wear of ultra high molecular weight polyethylene in total artificial joints," *Curr. Orthop.*, vol. 8, no. 3, pp. 164–169, Jul. 1994.
 - [269] F. Weimin, W. Qing, T. Songnian, and et al., "Investigation of aseptic loosening of prosthesis," *Chin. J. Orthop.*, vol. 18, no. 9, pp. 518–521, 1998.
 - [270] W. H. Harris, "The problem is osteolysis.," *Clin. Orthop. Relat. Res.*, no. 311, pp. 46–53, Feb. 1995.
 - [271] A. P. D. Elfick, S. M. Green, S. Krikler, and A. Unsworth, "The nature and dissemination of UHMWPE wear debris retrieved from periprosthetic tissue of THR," *J. Biomed. Mater. Res.*, vol. 65A, no. 1, pp. 95–108, Apr. 2003.
 - [272] J. M. Axe, L. Snyder-Mackler, and M. J. Axe, "The Role of Viscosupplementation," *Sports Med. Arthrosc.*, vol. 21, no. 1, pp. 18–22, Mar. 2013.
 - [273] A. Sharma, R. D. Komistek, C. S. Ranawat, D. A. Dennis, and M. R. Mahfouz, "In Vivo Contact Pressures in Total Knee Arthroplasties."
 - [274] "ASTM F732 - 00(2011) Standard Test Method for Wear Testing of Polymeric Materials Used in Total Joint Prostheses." 2011.
 - [275] C. Liu, L. Ren, R. D. Arnell, and J. Tong, "Abrasive wear behavior of particle reinforced ultrahigh molecular weight polyethylene composites," *Wear*, vol.

- 225229, pp. 199–204, 1999.
- [276] “ISO 11357-1:1997 - Plastics -- Differential scanning calorimetry (DSC) -- Part 1: General principles.” International Organization for Standardization., Genève, Switzerland, 1997.
- [277] “ISO 11357-3 Plastics — Differential scanning calorimetry (DSC) — Part 3: Determination of temperature and enthalpy of melting and crystallization.” International Organization for Standardization, Genève, Switzerland, 1999.
- [278] F. J. Buchanan, J. R. White, B. Sim, and S. Downes, “The influence of gamma irradiation and aging on degradation mechanisms of ultra-high molecular weight polyethylene,” *J. Mater. Sci. Mater. Med.*, vol. 12, no. 1, pp. 29–37, 2001.
- [279] S. Su, R. Joffe, J. Tipper, and N. Emami, “Ultra high molecular weight polyethylene/graphene oxide nanocomposites: Thermal, mechanical and wettability characterisation,” *Compos. Part B*, vol. 78, pp. 185–191, 2015.
- [280] D. Cerniglia, T. Ingrassia, L. D’Acquisto, M. Saporito, and D. Tumino, “Contact between the components of a knee prosthesis: numerical and experimental study,” *Fract. Struct. Integr.*, vol. 0, no. 22, p. pages 56-68, 2012.
- [281] L. Zach, L. Horak, P. Ruzicka, and S. Konvickova, “Knee Joint Edoprosthesis - Verification of Contact Pressures by Pressure Sensitive Films,” *Proc. world Congr. Eng.*, vol. 2, pp. 1–4, 2008.
- [282] T. Villa, F. Migliavacca, D. Gastaldi, M. Colombo, and R. Pietrabissa, “Contact stresses and fatigue life in a knee prosthesis: comparison between in vitro measurements and computational simulations,” *J. Biomech.*, vol. 37, pp. 45–53, 2004.
- [283] M. R. Gevaert, M. LaBerge, J. M. Gordon, and J. D. DesJardins, “The Quantification of Physiologically Relevant Cross-Shear Wear Phenomena on Orthopaedic Bearing Materials Using the MAX-Shear Wear Testing System,” *J. Tribol.*, vol. 127, no. 4, p. 740, 2005.
- [284] S. M. Hsu and M. C. Shen, “WEAR Ceramic wear maps,” *Wear*, vol. 200, pp. 154–175, 1996.
- [285] H. A. McKellop, “Bearing surfaces in total hip replacements: state of the art and future developments.,” *Instr. Course Lect.*, vol. 50, pp. 165–79, 2001.

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
DE
INGENIERÍA Y DISEÑO INDUSTRIAL**

ANALYSIS AND MODELING OF THE DYNAMIC BEHAVIOR OF
HUMAN JOINTS THROUGH THE METROLOGICAL AND
TRIBOLOGICAL CHARACTERIZATION OF THEIR SURFACES

**EXTENDED ABSTRACT, CONCLUSIONS AND FUTURE
DEVELOPMENTS**

Roberto D'Amato

Máster Universitario en Ingeniería de Producción por la
Universidad Politécnica de Madrid

2017

EXTENDED ABSTRACT AND CONCLUSIONS³

In this PhD thesis the work of analysis, analytical modelling and numerical resolution, has been developed. This study is directed and focused to describe and explain the dynamic functioning and parameters of influence in the complex tribological system that constitutes the human joint of the ankle. Recent studies have shown that dynamic loads can adversely affect the activity of chondrocytes (cartilage cells) with lesions that depend on the frequency and intensity of the load. Lubrication mechanisms play an important role in the long-term performance of both natural joints as well as joint prostheses. In fact, the understanding of the mechanism of lubrication and its coupling with an appropriate choice of morphological parameters are of fundamental importance for the development of interventions for the treatment of degeneration and loss of articular cartilage. This is to be recommended in the light of the clinical problems associated with current joint prosthesis after their massive outbreak since 1960. The present work can be divided into three macro parts. A first descriptive part of the problem to be developed. A second part where a theoretical and experimental study methodology has been presented and implemented for the correct development of a dynamic approximate analytical model of ankle joint function. In this part, in fact, it has been possible to investigate the concept of metrology and tribology in general, thus posing real problems in the industrial world. The third part, which represents the core of this thesis, has allowed to develop and find a solution to the tribological problem posed with particular attention to the geometry of the lubricated contact of the human ankle, to the tissues that take part in the correct functioning of the joint, to the characteristics of the synovial fluid that lubricates the dynamic contact under study and, finally, to the deformation of the cartilage. In such a section, an experimental study has also been presented for the tribological characterization of different materials that constitute human articular prostheses with the aim at applying the fluidodynamic model to prosthetic joint implants. This thesis contains eight chapters that will be summarized below with the aim of highlighting the conclusions and the scientific results achieved regarding both the general scope of this thesis and the partial achievements of each chapter.

Part 1

1. Chapter 1: A brief description has been given of how, throughout the human life, universally recognized scholars have developed topics that affect the functioning, diagnosis and methodology of analysis to problems that affect the correct functioning of the human body. The first studies on bioengineering and the first steps for the development of this discipline have been presented both in terms of anatomical studies and in terms of new techniques such as the tool for kinematic detection and movement dynamics (Figure 1).

³ For a better understanding of the used methodology and of the obtained results, as well as bibliographic references, refer to the scientific publications listed at the beginning of this extended summary.

Figure 1: a) Etienne Marey Book; b) Mechanical-pneumatic tool for recording steps

In addition, attention has been focused on the biomechanics of the human body (Figure 2) in order to introduce a first basic terminology necessary for the description of some general phenomena.

Figure 2: Main reference systems: global and local system of some body segments (ISB Recommendation of the International Society of Biomechanics)

2. Chapter 2: The general scope achieved with the development of this PhD thesis has been presented, as well as the objectives achieved both with the study methodology used and with the proposed dynamic model for the ankle joint and with the characterizations of the different materials that are used for the manufacture of joint implants. The objectives achieved can be summarized as follows:

- The search for an analytical and/or numerical solution of the fluid-dynamic problem. It is made possible through the analysis of the mechanical properties of the materials at stake, which constitute the human joints and the characterization of the synovial fluid that acts as a lubricant within the tribological contact, by using the most appropriate knowledge and instruments;

- Acquire an adequate and proper knowledge and methodology in metrology by coordinates and in the reconstruction of forms and geometries both theoretical and experimental. Such achievement have been made possible through the study on the estimation of the uncertainty associated to the measurement by coordinates of different geometric forms of mechanical parts in environments of sub-microfabrication. Theoretical models of error behavior in coordinate measuring machines and propose their experimental guarantees through the reconstruction of different geometric forms using different fitting algorithms will be proposed and developed;
- Acquire an adequate and proper knowledge and methodology in the field of tribology, both theoretical and experimental for the correct formulation and implementation of the fluid dynamics model under study and for the characterization of the materials that define a dynamic tribological contact;
- In order to obtain a more rigorous and accurate solution of the proposed fluid dynamics model, a reconstruction of the surfaces in contact and the cartilage layers that cover the bone surfaces using dimensional values of a real case will be carried out. These values will be obtained using the methodology and instruments developed throughout this thesis through the metrological analysis by coordinates of a high resolution image of an ankle joint and the subsequent 2D morphometric characterization of the surfaces that constitute the lubricated contact;
- Carry out a sensitivity study on the influence factors that affect the lubrication phenomenon, such as the field of pressure, meatus height and lubricating fluid velocity within the lubricated contact. Subsequently, the results obtained with the aforementioned metrological analysis and the synovial fluid characterization have been taken into account.
- In addition, an experimental study for the tribological characterization of materials that constitute a joint prosthesis will be proposed and developed in order to extend the proposed model also to the case of articular prosthesis

3. Chapter 3: A brief description of the structure of this thesis report is presented.
4. Chapter 4: After a first study on the qualification and characterization of the different joints presented in the human body, attention has been paid to the joints that allow movement between different bone segments, such as joints called DIARTROSIS, mobile joints that are characterized by a particular anatomical structure (**Table 1**) Due to the fact that the set of joints, collected in the synovial joint family (Figure 3), is so vast and varied, an additional classification has been presented in the same category, based on the morphology of the articular surfaces and allowed mobility (Figure 4).

Table 1: Classification of human joints

Functional name	Structural name	Degree of movement	Example
Sinartrosis	Fibrous	Motionless	Skull
Anfiartrosis	Cartilaginous	Semi mobile	Vertebrae
Diartrosis	Synovial	Mobile	Shoulder

Figure 3: Representation of the joint cavity

Arthrodia	Degrees of Freedom	Type of movement
	2	Flat translation

Enarthrosis	Degrees of Freedom	Type of movement
	3	Flexo-extensión Ab-adducción Rotación

Condyloid	Degrees of Freedom	Type of movement
	2	Flexo-extensión Ab-adducción

Hinge	Degrees of Freedom	Type of movement
	2	Flexo extension Ab-adduction

Pivote	Degrees of Freedom	Type of movement
	1	Flexo-extension

Figure 4: Functional scheme of the 5 categories of human joints

In addition to this, a first simplified kinematic model of the lower limb of the human body that provides 7 degrees of freedom has been presented and has been used over the last 6 or 7 decades to sketch and study the behaviour and functioning of human joints.

Figure 5: Kinematic diagram of lower limb

In this chapter, a study on the state of the art presented the different theories, developed by experts in tribological and metrological subjects, has been applied to the bioengineering both for explaining and understanding the lubrication of the human joints and for a correct morphometric study of the bone components in order to find a suitable protocol for the measurement of geometric parameters that may affect the correct functioning of both real human joints and joint prostheses.

Part 2:

5. Chapter 5 [2,3,7,10]: In this chapter, the study, qualification and interpretation of the theoretical and experimental methods used in coordinate metrology are presented with the aim at developing a methodology that allows a systemic study of the factors, in metrological terms, which affect theoretical models for the description of the dynamic functioning of real human joints and their implants. In fact, thanks to the coordinate measuring machines (CMM) and the coordinate measuring arms (CMA), it is possible to determine the external structure, the dimensions and the shape of the implant in vivo and in vitro. It is possible to evaluate the wear due to the friction, in terms of volume of material lost in the dynamic operation of the implants throughout the life of use of the prosthesis. It is possible to carry out an accurate measurement of the prosthetic component to be implanted in a patient by knowing the starting and reference geometry of the joint through other optical instruments which are based on metrology by non-contact coordinates such as CT or confocal microscopy. In fact, one of the problems associated with prosthetic implants is the surface finish of components that simulate the functioning of a human joint. Through confocal microscopy it is possible to improve and adjust implants to the particular requirements of each patient in order to develop the tribological performances of the

inserts. The study is important to highlight that for issues of medical diagnosis by measurement on imaging, the theoretical and practical problems that affect a correct measurement, in terms of precision and repeatability of the measurement, are the same which are found in metrology by contact coordinates. The fitting algorithms that are used, after a correct sampling of the points that define a geometric characteristic, are the same whether a contact CMM or a non-contact CMM is used, such as an image taken by a camera or a CT. The considerations and tools used for the improvement of the measurement, in terms of errors and estimation of the associated uncertainty, follow the same structure and study methodology as much as metrological problem that are developed for the contact metrology as for the contactless.

As a result, it has been presented how the verification of a CMM affects the results of a measurement and how the measurement uncertainty is a powerful tool to reflect this aspect. It has also been suggested an approximation to determine, with the CMM, the measurement of angles, formed by two perpendicular planes Figure 6, and their associated uncertainty, using the Monte Carlo simulation method following the guidelines provided by Supplement 1 of the GUM and employing the performance tests mentioned in ISO 10360-1, ISO 10360-2 and ISO-10360-5.

Figure 6: Angles of angle gauge block; Pattern of dots for the side of angle gauge block.

In order to achieve the above, two behavioural models for the CMM have been used, which allow us to determine the uncertainty associated with the measurement, and also to study the CMM errors associated with orientation and length in the volume of work. Using these models, it has been possible to evaluate the value of the angle and its associated uncertainty using the Monte Carlo method. The first model called "statistical model" linear statistical behaviour of CMM" corrects the gross coordinates obtained by the CMM and takes into account the geometric errors and the errors due to the dynamic behaviour of the CMM. The further, called "MITUTOYO model behaviour of CMM", is a method for statistical simulation with a strong correlation. This correlation is verified between the coordinates of the measurement points, and decreases as the probing points become more distant (Table 4 and Table 5). Once the obtained results are compared, it has been determined an ensuing thus simple and reliable method providing with a procedure for calculating uncertainty. The results of the angular measurements lead to the same values for the

four angles (Table 2 and Table 3). As for the uncertainties, the Mitutoyo model leads to values of 20% greater than those obtained by the linear behaviour model (Figure 7: Histogram of angle A using the linear correlation model. and Figure 8). This is due to the fact that the Mitutoyo model presents a strong correlation that acts by increasing the uncertainty obtained, thus offering, as a result, more conservative values than the linear behaviour model.

Table 2: Simulation results of angles A, B, C and D using the linear behavior model.

Angle	Estimate (°, ', ")			Standard uncertainty u(y) (")	Shortest 95% coverage interval					
					Lower bound (°, ', ")			Upper bound (°, ', ")		
A	89	59	59,0	5,3	89	59	48,6	90	0	9,5
B	89	59	58,2	5,3	89	59	47,8	90	0	8,5
C	89	59	58,7	5,3	89	59	48,4	90	0	9,1
D	90	0	4,0	5,3	89	59	53,6	90	0	14,5

Table 3:: Simulation results of angles A, B, C and D using the Mitutoyo model.

Angle	Estimate (°, ', ")			Standard uncertainty u(y) (")	Shortest 95% coverage interval					
					Lower bound (°, ', ")			Upper bound (°, ', ")		
A	89	59	59,0	6,5	89	59	46,4	90	0	11,9
B	89	59	58,2	6,4	89	59	45,6	90	0	10,9
C	89	59	58,7	6,5	89	59	46,1	90	0	11,4
D	90	0	4,0	6,5	89	59	51,4	90	0	16,6

Figure 7: Histogram of angle A using the linear correlation model.

Figure 8: Histogram of angle C obtained using the Mitutoyo model.

Table 4: Correlation coefficient matrix of angles A, B, C and D.

Angle	A	B	C	D
A	1	-0,4985	-0,0005	-0,5039
B	-0,4985	1	-0,4955	-0,0002
C	-0,0005	-0,4955	1	-0,5015
D	-0,5039	-0,0002	-0,5015	1

Table 5: Correlation coefficient matrix of angles A, B, C and D.

Angle	A	B	C	D
A	1	-0,6247	0,2497	-0,6274
B	-0,6247	1	-0,6227	0,2506
C	0,2497	-0,6227	1	-0,6254
D	-0,6274	0,2506	-0,6254	1

As for the uncertainties, the Mitutoyo model leads to values of 20% greater than those obtained by the linear behavior model. This is due to the fact that the Mitutoyo model presents a strong correlation that acts by increasing the uncertainty obtained and offering, as a result, more conservative values than the linear behavior model. After this first study on the verification of a CMM machine and the study of the CMM errors associated with the orientation and length in the workload and of the errors due to the dynamic behaviour of the CMM, according to the specifications of the International standards and statistical behaviour models for a CMM known in the literature, an error compensation model has been developed. Moreover, their integration into the measurement of geometric or dimensional characteristics have been suggested. CMMs are widely used and reliable instruments in the industry and in laboratories for dimensional measurement. From the probe sensor (probe) to the machine screen, there is a complex transformation of the coordinates of the probed points through geometric model features which makes it difficult to evaluate the precision results and estimation of uncertainty. However, error compensation is not standardized like it would happen for other simpler instruments. Detailed models of coordinate error compensation are generally based on considering a CMM as a rigid body and require detailed mapping of CMM behaviour. In this chapter, a new model of compensation of errors has been proposed. The error due to the vector composition of the length error per axis and its integration in the geometric measurement model has been evaluated. The variability not explained by the model is incorporated as a component of the uncertainty. The parameters of the model that are related to the geometric errors and to the uncertainty of the CMM are analyzed. Furthermore, the flatness, angle and roundness measurement models have been developed. The proposed models are useful for the improvement of the measurement with an easy integration in the signal processing of a CMM, particularly in industrial environments where integrated solutions are sought after. In the last part of this chapter, a series of tests have been proposed where the experimental implementation of the suggested theoretical model endorsement is included. In the proposed model, the uncertainty estimation comes directly from the observed variability of the measurement following the verification process techniques with artifacts calibrated for established reference test conditions. The uncertainty estimation comes from the

verification of an artifact calibrated to give an error value for correction to the indicator instrument (CMM). It approaches the ordinary process of verification of a simpler instrument, such as a micrometer. The expression of the fundamental measurement model for length has also been developed, but also for flatness, for angle and roundness. The potential use of this methodology for other CMM measurement models is advisable for future work, in particular for shape tolerance. By way of example, the results of the application of the proposed model for the case of a glass hemisphere are shown in this summary.

A glass hemisphere by Taylor Hobson with roundness error of tens of nanometer is measured in two planes (Figure 9). Its roundness error is below the resolution of the CMM, so the difference from a perfectly round indication should be assigned to overall CMM's error, uncertainty or the use of an approximate roundness algorithm. The accurate calculation of roundness from indication is accomplished by least-squares method based on the well-known algorithm Levenberg-Marquardt and by the accurate minimum zone method.

Figure 9. Measuring a glass hemisphere in two planes.

The results of roundness show the error by the CMM and the probe (about 0.004 mm). Using the ISO model the roundness results from an indication cannot be adjusted. The bounds $E_{L,MPE} = 6.7 \mu\text{m}$ cannot be applied. The maximum repeatability of the CMM 0.0045 mm or even the average of 0.003 mm can hardly bound a nominal roundness in the order of 0.005 mm.

The use of the proposed model allows correcting the calculated roundness from indication. The maximum uncertainty calculated by the method can be adopted as a conservative measure of the uncertainty of the error.

In the two cases applications Table 6-7, the uncertainty of the error and the maximum uncertainty estimated through the model are of the same order of magnitude, 1.96 and $1.47 \mu\text{m}$ respectively.

Case 5 represents a full circle with more sampled points, but Case 6 only measures a half of a circle on the hemisphere.

Table 6: Roundness measurement results Case 5

CASE 5. Roundness from dataset Appendix Table 5 a)

Values in [mm]

	MZR	R	a	b			
Minimum Zone	0.00522	26.03354	232.02654	253.39571			
Least squares	0.00531	26.03335	232.02664	253.39580			
Minimum Zone Tolerance solution							
Critical points			Error and uncertainty				
Point #	x [mm]	y [mm]	Critical points	8,15	21,29	8,29	21,15
8	222.871	277.769	E [mm]	-0.000046	-0.001841	-0.000147	0.000844
21	256.453	244.383	U [mm] (k=2)	0.000130	0.001960	0.000200	0.000736
29	226.953	227.864					
15	251.574	270.586					
			Mean value	E [mm]	-0.00030		
			Max value	U [mm]	0.00196		
			Uncertainty of E (n=4; k=2)	0.0015			
$s = \sqrt{\frac{(E_i - \bar{E})^2}{n-1}}$; $u = \sqrt{\frac{n-1}{n-3}} \frac{s}{\sqrt{n}}$; $U = k \cdot u$							
MZR _m = MZR + E± Ũ = 0.00522 - 0.00030 ± 0.00196 = 0.005 ± 0.00196 mm							

Table 7: Roundness measurement results Case 6

CASE 6. Roundness from dataset Appendix Table 5 b)

Values in [mm]

	MZR	R	a	b			
Minimum Zone	0.00568	25.36138	253.39556	-556.72247			
Least squares	0.00712	25.35867	253.39569	-556.71841			
Minimum Zone Tolerance solution							
Critical points			Error and uncertainty				
Point #	x [mm]	y [mm]	Critical points	2,8	2,24	15,8	15,24
2	228.701	-430.499	E [mm]	0.000246	-0.000036	-0.000233	-0.000515
15	261.699	-414.988	U [mm] (k=2)	0.000016	0.000003	0.000011	0.000030
24	279.314	-431.132					
8	235.451	-420.992					
			Mean value	E [mm]	-0.00013		
			Max value	U [mm]	0.00003		
			Uncertainty of E (n=4; k=2)	0.00002			
$s = \sqrt{\frac{(E_i - \bar{E})^2}{n-1}}; u = \sqrt{\frac{n-1}{n-3}} \frac{s}{\sqrt{n}}; U = k \cdot u$							
MZR _m = MZR+E±Ũ = 0.00568 - 0.00013 ± 0.00003 = 0.006 ± 0.00003 mm

Figure 10. Uncertainty estimation by Monte Carlo method of Case 5.

Finally, the uncertainty of the full circle of Case 5 is estimated by the Monte Carlo method based on 100.000 shots. Considering the expanded uncertainty from our model $\hat{U}(k=2)=(0.00232,0.00293,0.00153)$ mm, the standard uncertainty can be obtained through $u=(u_x,u_y,u_z) = (0.00116,0.001465,0.000765)$ mm. Using the Gaussian distributions $N(0,u_x)$ and $N(0,u_y)$, the results of Figure 10 are obtained. Note that $U(k=2) = 0.00204$ mm is very close to the maximum value obtained for direct estimation of the model $U(k=2) = 0.00196$ mm. The order of magnitude of the estimation from the variability of the error, just from the 4 configurations of the solution, is $U(k=2) = 0.00147$. It must be noted that the Monte Carlo mean roundness is calculated directly from indication and gives a result of 0.007 mm, higher than the 0.005 mm of the dataset of Case 5. This was observed before in. It is associated with the tolerance of form as distribution of positive value and the indirect measurement of roundness obtained through a process of minimization. Nevertheless, the Monte Carlo simulation of the roundness does not consider any error correction in the indication. Because the hemisphere is free of roundness error under the resolution of the CMM, the roundness results to the CMM repeatability of about 2.7 μm and a probe tip error of form of about 4 μm can be mainly associated. As a consequence, the result from just one sample based on the proposed model (Case 5) that includes error correction is $5 \pm 1.5 \mu\text{m}$. It can be compared with the result from the Monte Carlo simulation without any correction in the indication of $7 \pm 2 \mu\text{m}$. Noteworthy, the reference verification values of the CMM, maximum permissible error $EL_{MPE}=6.7 \mu\text{m}$ or the maximum repeatability of $R_0=4.5 \mu\text{m}$, can serve little to a useful expression of the roundness measurement.

The simple and explicit methodology of the development of the Taylor series around a value is a well-known approach in modeling and is also used in the approximate expression of the uncertainty propagation law by the GUM. Next, it has developed its direct application to a measurement model with 3D CMM of linear errors and its integration in the measurement of characteristics. The model establishes an average error value from the regression of the machine response and the residual variability as uncertainty value. This local approach is a priori valid as long as the error and its variability are much smaller than the magnitude under measurement. Therefore, a local development of the Taylor series might be possible. In particular, it can be applied in non-contact measurement where sensors translate coordinates into 2D images, which is widely used today in the fields of engineering and bioengineering. The proposed error compensation model uses standard error-checking techniques based on a first order approximation of length errors valid in the test area of the measurement volume and under similar reference measurement conditions. It is presented as an initial alternative available to the detailed mapping of the coordinate error. Even when the performance enhancement capability could be lower compared to the compensation of the the coordinate error from the detailed mapping based on the rigid body models. The effort is also lower because it uses the data obtained from

the available techniques and similar well established and applied in the regular, regular, verification tests according to ISO 10360-2. This model can contribute to the inclusion of error compensation and a direct estimation of the uncertainty of CMMs in the industrial environment. There is the possibility to post-process the raw coordinate indications of the CMM, outside the processing operated by the closed CMM software. However, to improve the operability of a CMM, the proposed model must be incorporated into the machine software. It can be easily achieved by setting the error parameters per axis after the periodic tests. The machine would provide an improved indication after the average error correction and its uncertainty estimation as part of the measurement result. The experimental extraction of the axis error model has been shown to be feasible and useful. The theoretical basis of vector error propagation models developed is supported by the experimental behavior of CMM. The study developed suggests the recommendation to carry out the verification of the CMM following standard ISO techniques, but with more repetitions with respect to the standard that recommends three repetitions. The models of measurement of characteristics based on coordinates under criteria of minimum zone present over determination in terms of error and uncertainty in some cases. For example, flatness or roundness under minimum zone criteria are determined by four points. These models offer a unique solution, but allow for multiple estimates of error and uncertainty based on the same data set. This is an advantage rather than an inconvenience to an economy in CMM sampling. In the case of simple length measurement or of an angle in a plane, the best solution value, error and uncertainty estimation are unique through the proposed model. The least squares algorithms are dominant in metrology due to their robustness against atypical values and to generalized algorithms, but they do not determine the critical points of the shape tolerance. Therefore, it could hardly benefit from the analysis of errors based on the direct propagation of the error and on the uncertainty associated with the coordinate of those critical points. The proposed error model and the derived characteristic models could be applied approximately under least squares adjustment algorithms considering the points closest to the feature under definition. All the methodology developed and implemented in this chapter, with the experimental studies proposed, has allowed to acquire the necessary knowledge, in metrological terms, for the correct implementation of the fluidodynamic model and its fusion with the morphometric problem for the study and tribological modeling of dynamic behavior of the human ankle joint. In fact, as has been seen throughout this thesis memory, coordinate metrology is an accurate and useful tool for the correct characterization of the surfaces that take part in a lubricated contact insofar as it affects the boundary conditions useful for the resolution of the differential equations that define and describe the lubrication of human joints.

6. Chapter 6 [1,5]: A first approach has been presented on the theory of lubrication. In fact, it is known that to reduce the friction and wear that occurs in a contact between two bodies in relative movement between them it is necessary to lubricate the contact surfaces. If a fluid is introduced between the elements of a kinematic pair in sliding contact so that direct contact between two dry surfaces is replaced with a solid-liquid-solid contact mediated, a strong reduction of the value of coefficient of friction is can be obtained. The lubricant must be able to react to the normal forces that the two contacting surfaces are transmitted in the coupling and, at the same time, give rise to relatively small tangential actions. The two different types of lubrication have been presented and explained: static lubrication and fluid-dynamic lubrication. Attention has been paid to this type of fluidodynamic lubrication as it is the starting point for the implementation of the fluidodynamic model of the ankle joint. Before introducing the equations that govern tribological phenomena, parameters for the characterization of lubricating fluids have been presented and analyzed. By using the hypotheses of scientific literatures, a tribological study is approached and developed through the writing of the Reynolds equations for a theoretical case thus being theoretically presented. Attention has been paid to the importance of the boundary conditions that affect the fluid dynamics problem, beginning with the geometric and morphometric characterization of the contact under study. Moreover, the four types of lubrication regimes regulating the friction conditions between two surfaces in relative motion and in contact are visible through the Stribeck curve as a function of the combination of the viscosity of the lubricant μ , the sliding velocity v and the normal pressure p . Once the theoretical methodology of studies of tribological problems is raised, attention has been paid to the experimental methodology that is usually used for the characterization of lubricants and materials that constitute a tribological contact. Therefore, considering the interest in the performances of vegetable oils in this section, an investigation has been presented on the tribological performance of rapeseed oil and *Jatropha curcas* L. seed oil in the lubricated steel contact. The tests were carried out using a reciprocal ball-on-flat tribometer with several test frequencies and with several normal loads applied for closing the contact itself. AISI E52100 steel and X210Cr12 steel have been chosen as materials for testing the lubricating properties of oils. As shown by different studies, the AISI E52100 steel alloy is used in tribological applications such as linear guides and bearings due to their high hardness and wear resistance, while X210Cr12 steel is used for the production of heavily stressed molds, grinding tools or tools for cold forming. According to ASTM D445 - Standard Test Method for Kinematic Viscosity of Transparent and Opaque Liquids (and Dynamic Viscosity Calculation), important characteristics and physical chemical properties of the oils under study have been investigated as: kinematic viscosity, viscosity Dynamics, density, flash point and total number of acidity (TAN). The results obtained from the performed physicochemical tests were collected and reported in Table 8:

Table 8: Physicochemical properties of three oils.

Properties	RME	HVO	Jatropha Curcas L. oil
Density at 15°C (kg/m ³)	884.5	780.7	916.9
Kinematic viscosity at 40°C (cSt)	2.829	4.679	36.605
Flash point at 760 mmHg (°C)	234±0.5	245±0.5	263±0.5
TAN (mg KOH/g)	0.22	0.08	21.4

For exemplificative purpose, in Figure 11, it is reported the typical evolution of the coefficient of friction (CoF) for the three oils obtained with 10 N and 10 Hz. This graph shows the evolution of the friction coefficient during the 30 min test, underlining an almost steady state condition reached after the first phase.

Figure 11: Evolution of the CoF during the tribo-test under lubricated conditions, with a normal load of 10N for 10 Hz.

Figure 13: Stribeck curves for HVO, JCL and RME respectively.

The oil exhibited physicochemical properties that allow its use as a lubricant feedstock in many industrial applications. From a tribological point of view, the following conclusions can be addressed:

- the use of a reciprocating friction tribometer allowed to investigate the complete tribo-behaviour of the oils passing alternatively through the different lubrication regimes (boundary, mixed and elastohydrodynamic), as highlighted by the Stribeck curves obtained;
- the mean values of the friction coefficient in all tests stays in the range of 0.11-0.17, which is a relatively low range if compared with raw petroleum based oil; this confirms that the fatty acids contained in the oils help the lubricant to stick on the sphere;
- JCL has the lowest CoF among the three oils examined, followed by RME and HVO.
- It is due to the high amount of stearic acid, which is known to have the most significant influence on friction reduction. In fact, as reported in the amount of stearic acid in JCL oil is of 17 wt.%, while for the RME this quantity is of 0.9 wt.%. The fact that low friction does not necessarily mean low wear was emphasised over sixty years ago. This fact appears in the result of the friction coefficient and wear loss volume for the HVO that produced the lowest wear volume with the highest CoF. It can be explained through the presence of low quantity of Palmitic acid and stearic acid. In fact, the anti-wear behaviour of fatty acids is the result of complex interactions between molecules of the acid and particular types of hydrocarbons; topography analysis gained deeper insight on the tribo-performance of the oils, discovering a sensible lower wear of the sphere lubricated by HVO, at the same time these sphere presented the highest roughness values. This suggests a prevalence of adhesive wear, as the lubricant failed to separate the surfaces at low speed.

As for Chapter 5, the methodology developed throughout this chapter has provided the necessary knowledge for a correct characterization of the materials that are used today for the production of prosthetic devices.

Part 3:

7. Chapter 7[9,11-14]: An anatomical description of the human ankle joints with its forms and its mobility functions has been made, paying more attention to the characterization of bone elements, articular cartilage and synovial fluid. The possible movements that allow the ankle joint to define a biomechanical study model have also been studied. Next, an approximate first analytical model of lubrication has been developed. The synovial fluid has been modeled as a Newtonian fluid and the phenomenon of filtration of the lubricating fluid through the pores of the

cartilage surface using Darcy's law has been taken into account by evaluating the three components of fluid velocity within the articular contact and by writing the Reynolds equation for the proposed case (1)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(h^3 + 12\Phi H) \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 12\mu \frac{dh}{dt} \quad (1)$$

The results refer to the ankle being loaded by the weight of the human body, that is to say the effects due to the Squeeze motion phenomenon are studied. The simple human ankle joint model presented has allowed us to generate an approximate analytical expression of the synovial pressure field and the fluid film force (2).

$$p = \frac{12R^2\mu\dot{e} \left[\frac{1}{c - 6(-2 + e)\Phi + e \cos \beta^2} + \frac{1}{c - 6(-2 + e)\Phi + e \cos \theta^2} \right]}{2e} \quad (2)$$

The analytical form of the hydrodynamic pressure (2) allows to calculate the force of the fluid film:

$$f_r = 12R^3\mu\dot{e}L \left\{ \frac{2(c + 12\Phi) \arctan h \left[\frac{(c - e + 12\Phi) \tan(\beta/2)}{\sqrt{-c^2 + e^2 - 24c\Phi - 144\Phi^2}} \right]}{e(-c^2 + e^2 - 24c\Phi - 144\Phi^2)} - \frac{\frac{\beta}{e} + \frac{(c + 12\Phi - e \cos \beta) \sin \beta}{(c^2 - e^2 + 24c\Phi + 144\Phi^2)}}{c + 12\Phi - e \cos \beta^2} \right\} \quad (3)$$

By equalizing the fluid film force (3) with the external load $W(t)$, which represents the charge cycle during gait

Figure 12: Variation of $W(t)$ in the ankle during gait

The results indicate that when the human articular surfaces come closer to each other, a jump in the pressure of the fluid in the articular surface occurs at the moment of an application of the load with the values of the internal pressure to the contact that

increase to approximately 1.5 Mpa for a value of the meatus height h ($0, t = 0 +$) Figure 13.

Figure 14: Pressure field for different values of θ and time t

This jump results in the water present in the synovial fluid passing into the cartilage, and the synovial fluid film is formed. The filtration of synovial fluid is mainly controlled by ϕ permeability coefficient, which describes the way in which water and other low molecular weight substances seep into the pores of the surfaces of the talus cartilage. As the macromolecules of the hyaluronic acid-protein complex are too large to penetrate the pores, their concentration increases in the synovial film and a gel is formed on the surface thus preventing dry contact. The gel serves as a limiting lubricant if a sliding movement continues before fresh synovial fluid enters into contact. In the presence of normal and healthy articular cartilage, the maintenance of a film of lubricating fluid is guaranteed by the cyclic nature of the load in the gait, as compared to the constant foot load, where the fluid film is transformed into a film of permanent protective gel. In contrast, in the pathological case, the protective synovial gel layer is rapidly depleted, after several steps, and the surfaces may briefly come in contact at each cycle causing malfunction of the joint and pain. As a result, the concept of non-Newtonian synovial fluid has been introduced, by modelling it as a Couple Stress fluid. It means that the synovial fluid is modelling as a mixture of particles of different sizes to take into account the polar effects generated by viscous forces. Due to this, it was possible to rewrite the modify Reynolds equation for the proposed case (4). The flow of a viscous fluid (SF) in a porous matrix is governed by the modified Darcy's law, which represents the polar effects (6).

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\partial p^*}{\partial \theta} \left[f^*(h^*, l^*) + \frac{12\Phi^* H^*}{(1-\alpha)} \right] \right\} = 12 \cos(\theta) \quad (4)$$

where

$$f^*(h^*, l^*) = h^{*3} - 12l^{*2}h^* + 24l^{*3} \tanh\left(\frac{h^*}{2l^*}\right) \quad (5)$$

$$v(x, h, z,) = \frac{\Phi H}{\mu(1 - \alpha)} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (6)$$

Φ is the permeability of the porous matrix, the dimensionless parameter α represents the size ratio of the microstructure of synovial fluid molecules to the size of the pores, and is:

$$\alpha = \left(\frac{\eta}{\mu} \right) * \frac{1}{\Phi} = \frac{l^2}{\Phi} \quad (7)$$

When the size of the microstructure is very small if compared to the pore size, such as in the case of $\alpha \ll 1$, the additives filter in the porous matrix. When $\alpha \rightarrow 0 +$, the system tends to the Newtonian flow case in the porous matrix.

Analytical and numerical results have been obtained by comparing them with each other and with the results present in the literature. The results (Figure 15, Figure 16 and Figure 17) of the simplified lubrication model provide us with: Given the assumptions adopted, the proposed model provides better results in cases where it is possible to neglect the effects of cartilage deformations and synovial lubricant gel formation (slightly loaded joints). The closed-form solutions for the synovial pressure field and the fluid film force are useful in all dynamic analysis of the ankle joints in which the aim is to obtain a better compromise between accuracy and cost of calculation for a rapid assessment of the forces acting on the synovial joint during a pure compression movement. It offers a better understanding of the main geometric and rheological parameters that characterize the synovial joint.

Figure 15:: Variation of the pressure field with respect to θ by different values of ϵ and by $l^* = 0.2$

Figure 16: Variation of the pressure field for different values of l^* by $\varepsilon = 0.4$

Figure 17: Variation of fr with respect to ε by different values of l^*

Some metrological considerations have been presented for the geometric characterization and reconstruction of the ankle in two dimensions in the sagittal plane by taking into account what has been discussed in Chapter 5.

Figure 18: Talar and Tibial surfaces and measured parameters.

To this end, the concepts of image processing have been used. Through the use of Canny's algorithm for edge detection, the coordinates of the points constituting the

edge of the lubricated internal contact have been detected in the high resolution image (**Figure 19**), like the coordinates in the sagittal plane of the points of the profile of the joint formed by the tibia, the medial malleolus, the malleolus fibula and the trochlea of the thallus.

Figure 19: Visible Human Project Reference Image n.1125.jpg (VHP)

Subsequently, the approximate profile has been reconstructed through a known function and achieved by the method of least squares and Minimum zone algorithms by applying the metrological concepts and the study methodology acquired and shown in Chapter 5, in the case of indirect measurement.

The error associated with the taking of coordinates and the mean square error have been evaluated simultaneously. The used methodology in the medical image processing with its segmentation and in the choice of two adjustment algorithms for the determination of the positions of the bone elements and their geometry shows a remarkable level of precision.

Figure 20: Obtained Results by: a) least squares, b) minimum zone

The possibility of adjusting the bone geometry under different adjustment criteria motivates a sensitivity study on the pressure field. The results show (Figure 20 and Table 9) that boundary conditions represent a major source of influence on the solution due to a significant change in the meatus height.

Table 9: Geometric results according to LM and MZC algorithm

	Algoritmo de Minimos cuadrados (mm)	Algoritmo de Minima Zona (mm)
<i>Rm</i>	23.651	24.342
<i>Rt</i>	21.536	21.087
<i>c</i>	2.115	3.255
<i>e</i>	1.234	0.463
<i>RMSE tibial surface</i>	1.25	1.68
<i>MZT tibial surface</i>	6.26	5.93
<i>RMSE talar surface</i>	0.47	0.55
<i>MZT talar surface</i>	2.19	2.06

Once the numerical results are obtained, it was possible to estimate the uncertainty by using the Montecarlo simulation method. Figure 221 and Figure 22 show the Monte Carlo simulation results for the tibial and talar surfaces by employing the two least squares adjustment algorithms and Minimum Zone . Table 10 shows the numerical results of the simulation.

Figure 21: Results of the Montecarlo simulation using the Least Squares Algorithm for the tibial (left) and talar (right) surfaces

Figure 22: Results of the Montecarlo simulation using the Minimal Zone Algorithm for the tibial (left) and talar (right) surfaces

Table 10: Results of Monte Carlo simulation

	LM [mm]	MZC [mm]	Standard uncertainty LM u(y) [mm]	Standard uncertainty MZC u(y) [mm]	Coverage range at 95% LM		Coverage range at 95% MZC	
					Lower limit [mm]	Upper limit [mm]	Lower limit [mm]	Lower limit [mm]
<i>R</i>	23.651	24.917	0.6481	0.6670	22.388	24.917	23.042	25.645
<i>r</i>	21.536	21.087	0.5041	0.4936	20.592	22.546	20.115	22.075

The results obtained for the radius of the talar surface have been compared with those presented by Michael and Hayes (Table 11). Hayes presented a study with 21 normal ankles and found that the talar radius was higher in males than in females ($p < 0.05$)

Table 11: Comparison of the results obtained for the talar surface with the results found in scientific literature

	Talar radius	Estimate [mm]	Standard uncertainty u(y) [mm]
Hayes A. at al.	r	20.7	2.6
Michael JM at al.	r	21.79	3.22
In this study	r	21.536(LM)	0.5041(LM)
		21.087 (MZC)	0.4936(MZC)

They induce a dynamic response different from the ankle joint (Figure 23 and Figure 24). In the case under study, a height of the greater meatus h^* (criterion MZ) corresponds to a lower pressure level through the contact. On the contrary, the LS criteria act in the opposite direction, thus generating a field of greater pressure at the synovial joint. The significant influence of the boundary conditions in the quantification of the ankle joint pressure field prompts to consider that care must be taken not only to directly compare the quantitative pressure results without considering the dynamic model but also to the complete process of the geometry that establishes the boundary conditions.

Figure 23: Height of h using the two criteria: LM and MZC

Figure 24: Evaluation of pressure field in the lubricated contact by different values of the parameter couple stress ($l = 0.2$ figure of left and $l = 0.4$ figure of right) taking into account the results of the reconstruction of the superficial geometry by two different algorithms LM and MZC

The last result presented in this chapter has been to implement a dynamic lubrication model that takes into account the deformation of the articular cartilage by considering two configuration of the contact under study (Figure 25 and Figure 26). Under the hypotheses that have been acquired in the development and improvement of the model and especially thanks to a more rigorous reconstruction, in geometrical and metrological terms articular cartilage has been considered as a deformable element through the theory of "Soft Lubrication ". The height of the meatus can be expressed as:

$$h_g = c - e \cos \theta \quad (8)$$

Where c represents the radial clearance, the difference between the radius of the bearing and that of the pin, and e represents the eccentricity of the bearing system, the distance between the two centers of the bearing. The term that takes into account the influence of the elastic deformation of the porous matrix of thickness h depends on the physical characteristics of the material, in this case the cartilage. In the hypothesis that the thickness of the meatus h is smaller than the diameter of the bearing and in the case of flat state of tension can be adopted for the evaluation of h_e model introduced by Winkler (1867) and also justified by Higginson and Dowson:

$$h_e = K p_e \quad (9)$$

where:

$$K = \frac{H(1 - \nu^2)}{E} \quad (10)$$

and the term p_e that appears in formula (9) represents the hydrostatic pressure due to synovial fluid lubricant.

Figure 275: Deformed geometry of the tribological contact (Case 1)

Figure 26: Deformed geometry of the tribological contact (Case 2)

By paying special attention to all possible geometric configurations of the system under study, analytical and numerical results have been obtained and have been compared with each other and with the results present in the literature. This comparison has shown a good level of confidence in terms of used analytical approach by restoring similar values between the analytical solution method and the numerical method for the pressure field, the fluid filtration velocity in the cartilage and the joint force.

Figure 27: Variation of p^* with respect to different values of l^* and C_0 (Analytical solution)

Figure 28: Variation of f_r with respect to θ and by different values of l^* and C_0 (Analytical solution)

Figure 29: Variation of p^* with respect to different values of l^* and C_0 (Numerical solution)

Figure 30: Variation of h with respect to different values of l^* and C_0 (Numerical solution)

8. Chapter 8 [1,8]: Taking into account the methodology developed in Chapter 6 of this thesis, two comparative and experimental studies have been presented for the tribological characterization of the materials that constitute the articular prostheses. Due to the interest in the different phenomena of wear and friction for prosthetic materials and their behavior under dry or lubricated conditions. In this thesis chapter, the values of the friction coefficient and wear, in terms of mass lost during the test, were compared in two experimental tribological studies by using an alternative bio-tribometer, of UHMWPE (GUR 1050) rubbing against spheres of austenitic stainless steel, AISI 420C, of austenitic stainless steel, AISI 316L, titanium alloy TiAl6V4 and alumina Al_2O_3 . The tests were carried out in dry and lubricated conditions. As a lubricant, a biological model fluid has been used: sodium hyaluronate (Hyalgan®). The friction coefficient and wear were measured with several loads and several frequencies to investigate the tribological behavior of the coupled material set.

Figure 31: Schematic and real view of the TR_Bio 282 pin-on-flat reciprocatory DUCOM tribometer.

The results, of the first study, show that the AISI420C austenitic stainless steel against UHMWPE gives, in dry conditions, better values in the wear rate and in the friction coefficient if compared to both wear rate and friction coefficient in the TiAl6V4/UHMWPE contact. In both cases, friction becomes greatly reduced by the presence of UHMWPE and this is believed to be due to the formation of a lubricating film of UHMWPE in the contact zone: like the matrix worn, the UHMWPE transfers to the counter face thus leading to the formation of self-lubrication of the contact.

As a result, all tests demonstrated a much lower friction coefficient and a lower wear rate in lubricated sliding than in dry-sliding condition. It is believed that this is due to the different lubrication mechanisms acting in the tribo-system during the sliding of the pin. These phenomena require an accurate investigation of the lubrication mechanisms acting in the tribo-systems. In the tests carried out under dry condition, the friction coefficient increases quickly irrespective of the materials and of the loading conditions of the pairs. The increasing rate is not reproducible as well as the final value of the friction coefficient, which normally stays in the range 0.11–0.14 after a sliding time larger than 15 min (Figure 32, Figure 33, Figure 34, Figure 35 and Figure 36 on the left).

Figure 32: The evolution of the friction coefficient for 10 N: (a) under dry conditions and (b) under lubricated conditions in AISI420C–UHMWPE contact.

Figure 33: The evolution of the friction coefficient for 15 N: (a) under dry conditions and (b) under lubricated conditions in AISI420C–UHMWPE contact.

Figure 34: The Evolution of the friction coefficient for 20 N: (a) under dry conditions and (b) under lubricated conditions in AISI420C–UHMWPE contact.

The final value of the friction coefficient for the tests carried out with lubricated conditions stays in the range 0.03–0.08 after a sliding time larger than 15 min regardless of the pair and of the loading conditions (Figure 35, Figure 36, Figure 37, Figure 35 and Figure 36 on the right). Except for the pair of AISI420C–UHMWPE in the case of load 15 N and frequency of 10 HZ (Figure 33 on the right), the friction

coefficient increases continuously and the final value, after 15 min, stays in the range 0.09–0.11.

Figure 35: The evolution of the friction coefficient for 15 N: (a) under dry conditions and (b) under lubricated conditions in TiAl6V4–UHMWPE contact

Figure 36: The evolution of the friction coefficient for 20 N: (a) under dry conditions and (b) under lubricated conditions in TiAl6V4–UHMWPE contact.

In the same figure, we can observe that the behaviour of the friction coefficient continuously increases, it also occurs for frequency of 5 Hz and in this case the final value stays in the range observed in the tests under lubricated conditions. The variation of wear mass loss is strictly connected with the variation of the friction coefficient, as one would expect. The Figure 38, Figure 39, Figure 40, Figure 35 and Figure 36 on the right show the mean values and the standard deviations for the friction coefficient taking into account the initial transitory. For this reason, the evaluated standard deviations with respect to the mean values of the friction coefficients result to be in the range approximately from 4% to 7% for both pairs under lubricated conditions. Such standard deviations are undoubtedly greater than those related to the stretch where the friction coefficient is stabilized. The same happens for both pairs under dry conditions where the evaluated standard deviations with respect to the mean values of the friction coefficients stay in the range from 5%

to 12% generally. Only in three cases the standard deviations result to be outside the above-mentioned ranges: AISI420C–UHMWPE 10N, 5 Hz under lubricated conditions; TiAl6V4–UHMWPE 20 N 20 Hz under lubricated conditions; AISI420C–UHMWPE 10 N, 15 Hz under dry conditions. Perhaps this occurs due to the longer duration of transient phenomena (about the first 5000 cycles).

The qualitative topographic analysis made by the profilometer on the UHMWPE worn specimens confirms that the adhesion in the contact zone and the deformation of the polymer are two phenomena occurring in the friction between a UHMWPE and metals. According to both load levels, to the mechanical and chemical properties and to the lubricating conditions, either the first or the second above-mentioned phenomena might occur.

The purposes of the second study are to clarify the tribological properties, under dry and lubricated condition, of UHMWPE sliding faces against AISI316L austenitic stainless steel, against TiAl6V4 alloy and against Alumina (Al_2O_3) by using a pin-on-flat reciprocatory DUCOM tribometer.

In the case of lubricated conditions, a biological model fluid has been used: sodium hyaluronate (Hyalgan®). In order to measure the friction coefficient and the wear several load conditions and several frequencies conditions have been simulated to investigate on the tribological behavior of the above mentioned couplings.

The worn surface of the UHMWPE specimens was analyzed by a 3D Optical Surface Metrology System Leica DCM 3D, which provided three-dimensional scans of the tribometer tracks on UHMWPE surfaces. Polyethylene has been cut and polished from two different tibial inserts in square-shaped $10 \times 10 \times 5 \text{ mm}^3$. Calorimetric studies on both tibial inserts of two different prostheses have been conducted to make sure we were in the presence of UHMWPE of some characteristics. The differential scanning calorimetry (DSC) measurements were carried out using a DSC-823e METTLER-Toledo. Both samples for the DSC analysis have been cut into pieces of 12,200 mg for the specimen A and 11,900 mg for the sample B. All the dynamic scans were registered between 25 and 180 °C (heating), 180 and 25 °C (cooling) to eliminate thermal histories and between 25 and 180 °C (heating) for the analysis (Figure 37).

The results of the tribological performances show that the AISI316L austenitic stainless steel and TiAl6V4 alloy have marked in dry conditions better values in the friction coefficient and in the friction force. Findings are aligned with those involved in the analysis of the worn surfaces at the microscope and with the subsequent evaluation of the wear mass loss (Table 12) for the tests under dry condition and with a pins' diameter of 6 mm.

Figure 37: Differential scanning calorimetry DSC-823e METTLER-Toledo.

Table 12: The wear mass loss in the test under dry conditions for pins' diameter of 6 mm in UHMWPE samples A.

Tribological pair	Groove volume [mm ³]	Wear mass loss [g]
TiAl6V4-UHMWPE	$0.79 \cdot 10^{-2}$	$0.74 \cdot 10^{-5}$
AISI316-UHMWPE	$0.61 \cdot 10^{-2}$	$0.57 \cdot 10^{-5}$
Al2O3-UHMWPE	$1.02 \cdot 10^{-2}$	$0.95 \cdot 10^{-5}$

When the friction coefficient is monitorized along larger time under dry conditions it increases quickly independently of the pair and of the loading conditions. The increasing rate is not reproducible as well as the final value of the friction coefficient, which normally stays in the range 0.11–0.18 after a sliding time larger than 20 min (Figs. 38a–40a,).

Figure 38: The evolution of the friction coefficient under dry conditions in: (a) TiAl6V4–UHMWPE sample “A” contact, (b) TiAl6V4–UHMWPE sample “B” contact.

Figure 39: The evolution of the friction coefficient under dry conditions in: (a) AISI316L–UHMWPE sample “A” contact, (b) AISI316L–UHMWPE sample “B” contact.

The presence of UHMWPE notably decreases the friction phenomena. In fact, the UHMWPE transfers to the counter face thus molding a lubricating film of UHMWPE in the contact surface due to self-lubrication phenomena.

Due to the hydrodynamic lubrication phenomena, in all tests under lubricated conditions the friction coefficient showed much lower values than in dry-sliding conditions. These phenomena require accurate and further tribological investigation. The final value of the friction coefficients for the tests carried out under lubricated conditions stays in the range 0.018–0.06 after a sliding time larger than 10 min independently of the pair and of the loading conditions (Figures 41b–43b).

Large fluctuations occurred by examining closely the evolution in the friction coefficient, probably as a result of formation and localized fracture of the UHMWPE flat.

Figure 40: The evolution of the friction coefficient under dry conditions in: (a) Al₂O₃-UHMWPE sample "A" contact, (b) Al₂O₃-UHMWPE sample "B" contact

Figure 41: The evolution of the friction coefficient under lubricated conditions in: (a) TiAl₆V₄-UHMWPE sample "A" contact, (b) TiAl₆V₄-UHMWPE sample "B" contact.

Figure 42: The evolution of the friction coefficient under lubricated conditions in: (a) AISI316L–UHMWPE sample “A” contact, (b) AISI316L–UHMWPE sample “B” contact.

Figure 43: The evolution of the friction coefficient under lubricated conditions in: (a) Al₂O₃–UHMWPE sample “A” contact, (b) Al₂O₃–UHMWPE sample “B” contact.

Figure 44 shows the evolution of the friction forces in the rubbing pairs under study with respect to the test cycles (about 1000) and the displacements for 4 time intervals of the test: initial, intermediate $\times 2$ and final. These images provide information on the gait of the force and on the transition between the static and the kinetic phases. During the inversion of the harmonic motion the ball is temporary still, which leads to force peaks corresponding to the static friction phase. The force rapidly decreases and becomes almost constant during the sliding period, leading to the kinetic friction. Figure 44 a, c and e) are related to the tests under dry conditions for TiAl6V4–UHMWPE, AISI316L–UHMWPE and Al₂O₃–UHMWPE pairs respectively, while v(b, d and f) is related to the tests under lubricated conditions for TiAl6V4–UHMWPE, AISI316L–UHMWPE and Al₂O₃–UHMWPE pairs accordingly.

Figure 44: Plot of friction force vs. time (points) vs. displacement in the contact: (a) TiAl6V4–UHMWPE with a pin diameter of 3 mm, applied load 1 N in dry and lubricated (b) conditions; (c) AISI316L–UHMWPE with a pin diameter of 6 mm, applied load 4 N in dry and lubricated (d) conditions; (e) Al2O3–UHMWPE with a pin diameter of 10 mm, applied load 11 N in dry and lubricated (f) conditions.

CHAPTER 9: CONCLUSIONS AND FUTURE DEVELOPMENTS

In this PhD thesis the work of analysis, analytical modelling and numerical resolution, has been developed. This study is directed and focused to describe and explain the dynamic functioning and parameters of influence in the complex tribological system that constitutes the human joint of the ankle. Lubrication mechanisms play an important role in the long-term performance of both natural joints and joint prostheses. In fact, the understanding of the mechanism of lubrication and its coupling with an appropriate choice of morphological parameters are of fundamental importance for the development of interventions, for the treatment of degeneration and for the loss of the articular cartilage. A first result has been the analysis and knowledge of the different theories, developed by experts in tribological and metrological subjects, applied to bioengineering both for explaining and understanding the lubrication of human joints and for a correct morphometric study of bone components. All this in order to find a suitable protocol for the measurement of the geometric parameters that can affect the correct functioning of both real human joints and joint prostheses. Further result has been the development and implementation of a methodology through theoretical and experimental studies that have allowed to acquire the necessary knowledge, in metrological terms, for the correct carrying out of the fluidodynamic model and its fusion with the morphometric problem for the study and tribological modelling of the dynamic behaviour of the human ankle. In fact, as already seen throughout this thesis, coordinate metrology is an accurate and useful tool for the correct characterization of surfaces that take part in a lubricated contact insofar as it affects the boundary conditions useful for resolution of the differential equations that define and describe the lubrication of human joints. By using all the presented theoretical models and experimental methodologies, both in the metrological and the tribological field, the differential equations that regulate and define the dynamic tribological problem have been considered, focusing attention on the real boundary conditions that solve the differential problem. All this has been possible through a study of a rigorous modelling of the materials, and their dynamic behaviors, which constitute human lubricated contact. The mentioned simple human ankle joint model has allowed to generate an approximate analytical expression of the synovial pressure field and the fluid film force. The filtration of synovial fluid is mainly controlled by the permeability coefficient, which describes the way water and other low molecular weight substances seep into the pores of the surfaces of the talus cartilage. The closed form solutions for the synovial pressure field and the fluid film force are useful in all dynamic analysis of the ankle joints in which the aim is to obtain a better compromise between accuracy and cost of calculation for a rapid assessment of the forces acting on the synovial joint during a pure squeeze motion. It offers a better readability of the main geometric and rheological parameters that characterize the synovial joint. Applying the results of the methodological study on metrological problem it has been

possible to achieve the characterization and geometric reconstruction of the ankle in two dimensions in the sagittal plane, using the concepts of the treatment of images. The used methodology in the medical image processing with its segmentation and in the choice of two adjustment algorithms for the determination of the positions of the bone elements and their geometry shows an appreciable level of precision. The possibility of adjusting the bone geometry under different adjustment criteria encourages a sensitivity study on the pressure field. The significant influence of the boundary conditions in the quantification of the ankle joint pressure field prompts to consider that care must be taken not only to directly compare the quantitative pressure results without considering the dynamic model, but also to the complete process of the geometry that establishes the boundary conditions. These result confirms the relevance of the association of tribological and metrological techniques in the modelization of human joints. Further result has been the implementation of a dynamic lubrication model that takes into account the deformation of the articular cartilage. Analytical and numerical results have been obtained and have been compared with each other and with the results presented in the scientific literature. This comparison has shown a good level of confidence in terms of analytical approach used by restoring similar values between the analytical solution method and the numerical method for the pressure field, the fluid filtration velocity in the cartilage and the joint force. Once the fluid dynamics model is defined and implemented, and once the coupled differential problem is solved, a comparative and experimental study can accordingly be presented for the tribological characterization of the materials that constitute the articular prostheses. The findings are in line with those involved in the analysis of the microscopically worn surfaces and the subsequent evaluation of the loss of wear mass in the case of dry tests. As seen, the presence of UHMWPE significantly reduces friction due to self-lubricating phenomena. Moreover, due to the hydrodynamic lubrication phenomena, in all tests under lubricated conditions the coefficient of friction shows much lower values than under dry sliding conditions. Large fluctuations, by examining closely the evolution of the coefficient of friction, have probably occurred due to the formation of the localized fracture of the UHMWPE plate.

The possibilities of future development and research can be expressed from the following considerations:

- The proposed model represents a preliminary analysis with a view to obtaining in the future some type of experimental verification in order to support the approximate theoretical prediction obtained and/or improve the proposed model, first by removing the hypothesis of rigid bony surfaces. That is, to investigate the possibility of proposing an analytical or quasi-analytical micro-elastohydrodynamic model where the deformation of these surfaces and their effects on the dynamic behaviour of the joint would be therefore taken into account.

- Implementation of the suggested model with regard to other real configurations. That is, to implement and solve the differential dynamic fluid problem to other real or prosthetic human joints, such as hip or knee joint;
- The possibility of applying the approximate analytical model in the 3D case taking into account all the components of synovial fluid velocity within the articular cartilage, the velocity components of approaching the bone surfaces under dynamic conditions and the 3D reconstruction of the contact. The 3D model can be carried out by using the methodology provided by reverse engineering both in case of real joints and in case of joint implants.
- The possibility of studying the functioning of human joints through a study with the finite element method for deformable articular components, coupled with the multibody method for rigid articular components.
- The study methodology, in metrological field, developed and adopted for the implementation of the proposed tribological model, can be applied to industrial problem, as for the case of the error compensation model of a CMM presented in this thesis report. In fact, this model can contribute to the inclusion of error compensation and to a direct estimation of the uncertainty of the CMM in the industrial environment data. Such inclusion suggests that there is the possibility of post-processing the gross CMM coordinate indications outside the processing operated by the closed software of the CMM, by incorporating the proposed model to the software of the machine. That can be easily achieved by setting the error parameters per axis after the periodic tests. The machine would provide with an improved indication after the average error correction and its uncertainty estimation as a part of the measurement result.
- The resulting knowledge has provided with a methodology of testing and characterization of the materials under study that could be applied to the more rigorous characterization of the synovial fluid within the real human joints. It also represents a starting point for the characterization of new lubricating fluids that can replace synovial fluid in the case of prosthetic implants. A step towards this type of development has already been presented throughout this dissertation where the tribological characterization of a pharmaceutical fluid, that can be used for this purpose, has been carried out.
- The experimental tribological study of the materials, that are part of a joint implant, could be supported by the implementation of a dynamic model that simulates the test conditions used for this thesis. The purpose of this study is the search for parameters as well as for dynamic and chemical physicist features, affecting the field of pressure inside the lubricated contact.