



Universidad Politécnica de Madrid

**Escuela Técnica Superior de Ingeniería de
Sistemas Informáticos**

**Máster en Ciencias y Tecnologías de la
Computación**

Proyecto de Fin de Máster

Título: Estructura de los ciclos en los Minimal
Strong Digraphs

Autor: Miguel Arcos Argudo

Tutores: Jesús García López de Lacalle

Luis Miguel Pozo Coronado

Fecha: Abril de 2017

Índice

Resumen.....	i
Abstract.....	ii
1. Estado del Arte del tema de Investigación.....	1
1.1 Definiciones.....	1
1.2 Propiedades de los MSD.....	7
2. Resultados obtenidos con algoritmos implementados.....	28
2.1 Cálculo de MSD no etiquetados.....	28
2.2 Cálculo de las clases isospectrales de los MSD.....	28
2.3 Análisis comparativo entre MSD y árboles dirigidos.....	28
3. Metodología de la investigación.....	30
4. Desarrollo de la investigación.....	33
4.1 Cálculo de las componentes fuertemente conexas asociadas a los vértices de un ciclo.....	33
4.2 Propiedades demostradas.....	37
4.3 Clases de vértices en las CFC.....	42
5. Conclusiones	56
6. Referencias bibliográficas.....	57

Resumen

El estudio de grafos dentro de las Ciencias de la Computación ha permitido resolver problemas de distinta naturaleza. Los algoritmos que se han generado inspirados en este campo han permitido optimizar procesos en varias industrias y reducir costes de manera muy significativa. Un tipo de grafo, cuyo estudio aún tiene mucho por descubrir, ha sido denominado Minimal Strong Digraph (MSD). Su estructura permite interconectar todos sus vértices mediante caminos dirigidos utilizando una cantidad mínima de aristas. Las propiedades de los MSD permiten establecer una interesante comparativa con los árboles, debido a la similitud que se puede encontrar entre estos dos tipos de grafos. Los grafos llamados "ciclos" pertenecen a la familia de los MSD, y constituyen uno de los componentes más importantes, pues se ha demostrado que toda arista en un MSD debe pertenecer al menos a un ciclo. La investigación ejecutada en este trabajo consiste en el análisis de las configuraciones de los ciclos contenidos en un MSD para lo que se ha utilizado algoritmos de simulación, y en base a los resultados obtenidos con la ejecución de los algoritmos se han descubierto y demostrado matemáticamente nuevas propiedades de los MSD. Se demuestra que la cantidad de componentes fuertemente conexas (CFC) asociadas a los vértices de un ciclo, así como la cantidad de vértices contenidos en una misma CFC, dependen de la longitud del ciclo. Además se demuestra de manera general varias configuraciones de las CFC asociadas a los vértices de un ciclo en las que debe existir al menos un vértice lineal por cada CFC.

Abstract

The study of graphs in Computer Science has allowed solving problems of different nature. The algorithms that have been generated inspired in graphs have allowed to optimize processes in several industries and to reduce costs significantly. A type of graph, whose study has much to discover, has been named Minimal Strong Digraph (MSD). Its structure allows interconnecting all its vertexes through directed paths using a minimum amount of edges. The MSD's properties allow establishing an interesting comparison with the trees, due to the similarity that can be found between these two types of graphs. Graphs named "cycles" belong to MSD's family, and, are one of the most important components, as it has been shown that every edge in an MSD must belong to at least one cycle. The research carried out in this work consists of the analysis of the configurations of the cycles contained in an MSD for which simulation algorithms have been used, and based on the results obtained with the execution of the algorithms have been demonstrated new MSD's properties. It is concluded that the number of strongly connected components (CFC) associated with the vertexes of a cycle, as well as the number of vertexes contained in the same CFC, depend on the length of the cycle. In addition, it is generally demonstrated several CFC configurations associated to the vertexes of a cycle in which there must exist at least one linear vertex by CFC.

1. Estado del Arte del tema de Investigación

1.1 Definiciones

La comprensión de las siguientes definiciones es importante para el abordaje de este trabajo.

Se denomina grafo a un conjunto finito de n vértices. Cada vértice debe tener un identificador único. Los vértices pueden estar relacionados entre sí por medio de aristas. La cantidad total de aristas pertenecientes a un grafo se denota como m . Cada arista representa la relación existente entre dos vértices v_i y v_j , y se denota como $v_i v_j$ (para $0 \leq i < n$, $0 \leq j < n$). A su vez, cada arista puede tener un peso asociado w . Este peso representa el coste de transitar desde el vértice v_i hasta el vértice v_j utilizando la arista $v_i v_j$. En este caso se habla de un grafo ponderado, ver Figura No. 1. Se habla de un grafo no ponderado cuando en dicho grafo ninguna arista $v_i v_j$ tiene asociado un peso w . Esto significa que todas las aristas tienen el mismo peso. Por lo general se considera que $w=1$ para todas las aristas, ver Figura No. 2.

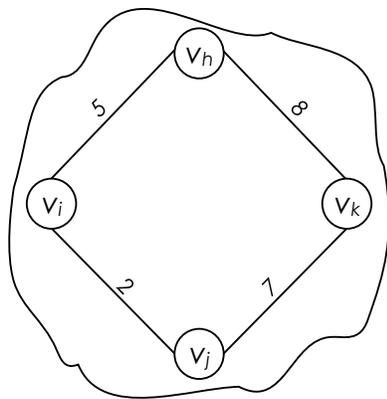


Figura No. 1: Ilustración de grafo no dirigido y ponderado. Elaborado por: M. Arcos

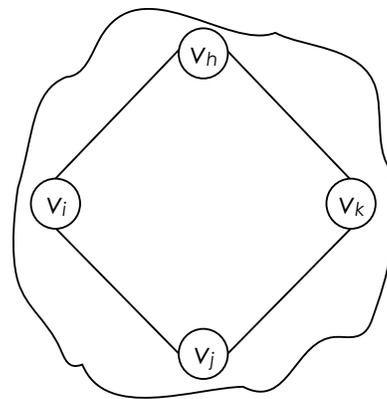


Figura No. 2: Ilustración de grafo no dirigido y no ponderado. Elaborado por: M. Arcos

Se denomina grafo no dirigido cuando las aristas del grafo no tienen una dirección definida, como se puede ver en los ejemplos de la Figura No. 1 y de la Figura No. 2. Por el contrario, cuando las aristas del grafo tienen una dirección definida, se dice que pertenecen a un grafo dirigido. En un grafo no dirigido, en el cual existan los vértices v_i y v_j , relacionados por la arista no dirigida $v_i v_j$, es posible transitar desde el vértice v_i hacia el vértice v_j , y a su vez, desde el vértice v_j hacia el vértice v_i a través de la arista $v_i v_j$. En cambio, en un grafo dirigido, también conocido como digrafo, en el cual existan los vértices v_i y v_j , relacionados por la arista dirigida $v_i v_j$, que tenga su origen en el vértice v_i y su destino en el vértice v_j , es posible transitar desde el vértice v_i hacia el vértice v_j utilizando la arista $v_i v_j$, pero no es posible transitar desde el vértice v_j hacia el vértice v_i utilizando la arista $v_i v_j$. Ver Figura No.3.

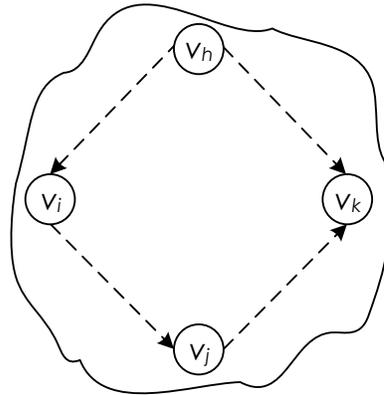
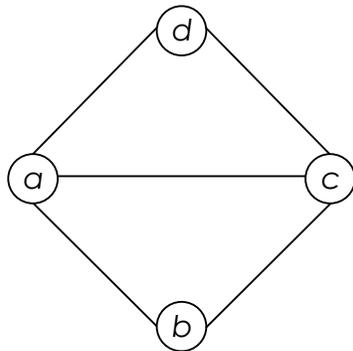


Figura No. 3: Ilustración de un digrafo. Elaborado por: M. Arcos

Las aristas nos permiten establecer los caminos existentes entre un vértice origen v_i y un vértice destino v_j . Un camino está formado por una a secuencia de vértices $v_i=v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k=v_j$ por los que se puede transitar desde el vértice origen v_i hasta el vértice destino v_j . Se denota como $v_i v_j$ -*path*. Un mismo vértice no puede aparecer en un camino más de una vez. Es posible que exista más de un camino entre dos vértices, así como también es posible que no existan

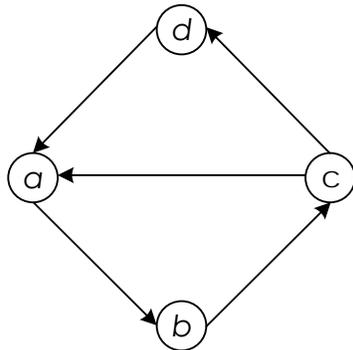
caminos entre dos vértices. Mediante los casos del ejemplo mostrado en la Figura No. 4 se ilustra la obtención de todos los caminos posibles entre el vértice origen a y el vértice destino d .



Caso (a)

Caminos existentes entre el vértice a y el vértice d :

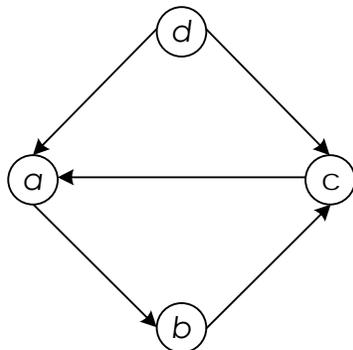
- $ad\text{-path} = a, d$
- $ad\text{-path} = a, c, d$
- $ad\text{-path} = a, b, c, d$



Caso (b)

Caminos existentes entre el vértice a y el vértice d :

- $ad\text{-path} = a, b, c, d$



Caso (c)

No existen caminos entre el vértice a y el vértice d .

Figura No. 4: Ejemplo de obtención de caminos entre dos vértices de un grafo. Elaborado por: M. Arcos.

Se dice que un grafo es conexo cuando entre cada par de vértices existe un camino. Por lo tanto, un grafo inconexo es aquel en el que uno o varios de sus vértices se encuentran aislados de los demás vértices. Ver Figura No. 5.

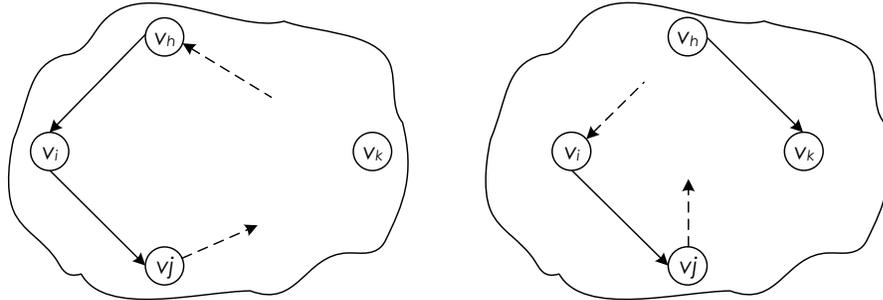


Figura No. 5: Ilustración de ejemplos de grafos inconexos. Elaborado por M. Arcos

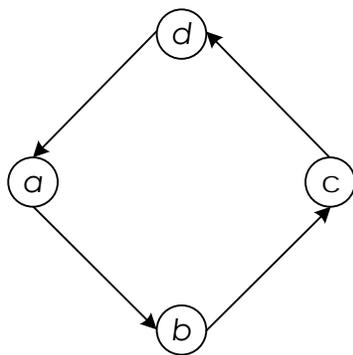
Un digrafo D es fuertemente conexo cuando, dados los vértices v_i y v_j cualesquiera, pertenecientes al digrafo D , siempre exista un $v_i v_j$ -*path*, así como un $v_j v_i$ -*path*, para todo i y para todo j . Es decir, siempre será posible transitar desde un vértice origen cualquiera, hacia un vértice destino cualquiera pertenecientes al digrafo. El caso (b) de la Figura No. 4 es un ejemplo de un digrafo fuertemente conexo.

Considerar un digrafo D , al que pertenecen los vértices v_i y v_j , y en el que existe la arista $v_i v_j$. Si se elimina de D la arista $v_i v_j$ para obtener el digrafo D' ($D' = D - v_i v_j$), y D' mantiene la propiedad de ser fuertemente conexo, entonces se dice que la arista $v_i v_j$ es transitiva.

Por ejemplo, si se asume que D es el digrafo del caso (b) que se muestra en la Figura No. 4, y que D' es el digrafo resultante de eliminar la arista ca de D , entonces:

$$D' = D - ca$$

D' se puede representar como el digrafo que se muestra en la Figura No. 6, en la que se puede notar que, a pesar de haber eliminado la arista ca , el digrafo D' mantiene la propiedad de ser fuertemente conexo, ya que es posible encontrar un camino entre un vértice origen cualquiera hasta un vértice destino cualquiera. Entonces la arista ca es una arista transitiva y, por tanto, a pesar de haber eliminado la arista ca , es posible encontrar un ca -*path*: c, d, a . De la misma manera se puede notar que la arista ab no es transitiva, ya que al eliminar esta arista es imposible encontrar un camino que tenga como destino el vértice b , por lo que se pierde la propiedad de la conexión fuerte.



Representación de D' , donde $D'=D-ca$

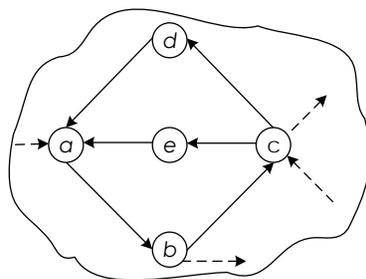
Figura No. 6: Ejemplo de digrafo resultante que mantiene la propiedad de ser fuertemente conexo. Elaborado por: M. Arcos

Formalmente, si en un digrafo D , que es fuertemente conexo, existen los vértices v_i y v_j , entonces necesariamente existe un $v_i v_j$ -*path*. Por tanto, si en D existe la arista $v_i v_j$, tal que $v_i v_j \neq v_i v_j$ -*path*, entonces $v_i v_j$ es una arista transitiva. El camino $v_i v_j$ -*path* junto a la arista $v_i v_j$ forma lo que se denomina un pseudociclo dentro de D (García-López, J. & Marijuán, C. (2012)). En el caso (b) de la Figura No. 4, el pseudociclo está formado por los vértices c, d y a , junto a las tres aristas que los relacionan.

Un digrafo fuertemente conexo es minimal (MSD) si y sólo si no contiene aristas transitivas o, equivalentemente, no contiene

pseudociclos (García-López, J. & Marijuán, C. (2012)). Una manera de comprobar que un digrafo fuertemente conexo D es minimal es eliminar cada una de las aristas de D , una cada vez, para obtener D' . Si en todos los casos D' no mantiene la propiedad de ser fuertemente conexo, entonces D es un MSD, en caso contrario no lo es.

Como se ha podido notar en todos los digrafos, los vértices tienen aristas de entrada y aristas de salida. Las aristas de entrada de un vértice v_x son aquellas que tienen al vértice v_x como destino, y las aristas de salida de un vértice v_x son aquellas que tienen al vértice v_x como origen. A la cantidad de aristas de entrada de un vértice v_x se le conoce como grado de entrada del vértice v_x y se denota por $\text{indegree}(v_x)$, y a la cantidad de aristas de salida de un vértice v_x se le conoce como grado de salida del vértice v_x y se le denota por $\text{outdegree}(v_x)$. Cuando $\text{indegree}(v_x)=1$ y $\text{outdegree}(v_x)=1$, se dice que v_x es un vértice lineal. En un MSD D , las aristas de entrada y salida de un vértice lineal nunca son aristas transitivas. Ver Figura No. 7.



Se puede identificar como vértices lineales el vértice d y el vértice e , ya que:
 $\text{indegree}(e)=\text{outdegree}(e)=1$
 $\text{indegree}(d)=\text{outdegree}(d)=1$

Figura No. 7: Ilustración de un MSD con vértices lineales. Elaborado por: M. Arcos

Un ciclo es un MSD D en el cual todos sus vértices son lineales, se denota C_n , ciclo de longitud n (ver Figura No. 8). Cuando un MSD D está compuesto por n vértices, y contiene un ciclo de longitud q , en donde $q < n$, se le denota C_q , donde $C_q \subseteq D$ y $C_q \neq D$. En este caso al menos uno de los vértices de C_q es no lineal (ver Figura No. 9).

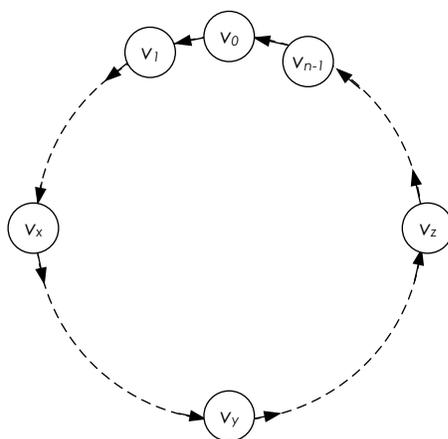


Figura No. 8: Ilustración de un MSD D , en donde el ciclo $C_n = D$.
Elaborado por: M. Arcos.

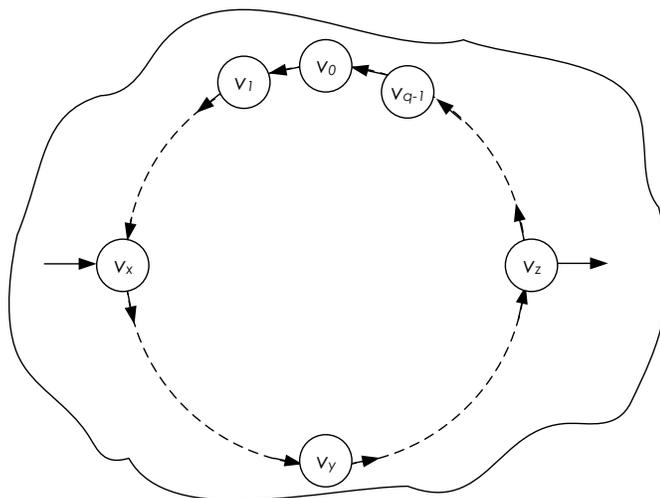


Figura No. 9: Ilustración de un MSD D que contiene un ciclo C_q , en donde $C_q \subseteq D$, y $q < n$. Elaborado por: M. Arcos.

1.2 Propiedades de los MSD

A continuación se mencionarán algunas propiedades de los MSD y la demostración de cada una de ellas.

Propiedad 1: Si D es un digrafo fuertemente conexo, entonces D es minimal si y solo si D no tiene aristas transitivas o, equivalentemente, no tiene pseudociclos.

Demostración: Por definición, un digrafo D es fuertemente conexo si existe un camino entre cada par de vértices existentes en D . Supongamos que D tiene una arista transitiva, es decir, que existen dos vértices v_i y v_j , tal que el $v_i v_j$ -*path* entre ellos es distinto de la arista $v_i v_j$, ($v_i v_j \neq v_i v_j$ -*path*). Entonces $D - v_i v_j$ sigue siendo fuertemente conexo y, consecuentemente, D no es minimal. Supongamos ahora que D no tiene aristas transitivas. Entonces es evidente que, para toda arista $v_i v_j$ de D , $D - v_i v_j$ deja de ser fuertemente conexo, porque en dicho digrafo no existe un $v_i v_j$ -*path*, y por tanto D es minimal.

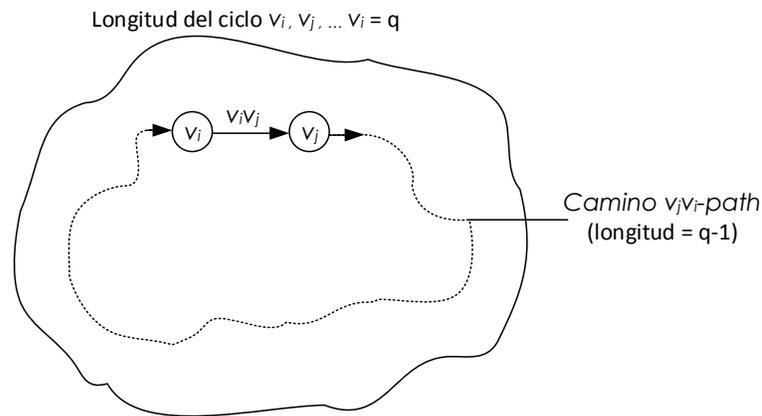
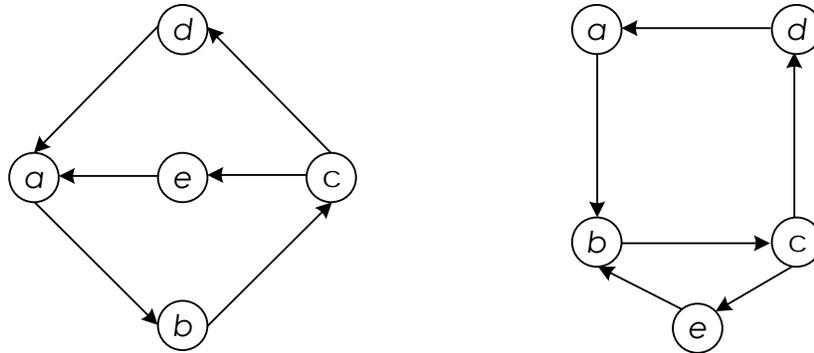


Figura No. 10: La arista $v_i v_j$ forma parte de al menos un ciclo perteneciente al MSD D , debido a que D mantiene la propiedad de ser fuertemente conexo y debe existir un camino de retorno $v_j v_i$ -*path*. Elaborado por: M. Arcos.

Propiedad 2: Toda arista contenida en un MSD D , pertenece por lo menos a un ciclo.

Demostración: Considerar un MSD D que contiene a los vértices v_i y v_j , y además contiene a la arista $v_i v_j$. Entonces $v_i v_j$ -*path* = $v_i v_j$ y, como D es fuertemente conexo, necesariamente debe existir un camino $v_j v_i$ -*path* (v_j, \dots, v_i), es decir, existe un camino de retorno desde v_j hasta v_i . Por lo tanto, la arista $v_i v_j$ pertenece por lo menos al ciclo v_i, v_j, \dots, v_i .

formado por la arista $v_i v_j$ junto al camino $v_j v_i$ -*path*, $C = v_i v_j + v_j v_i$ -*path*. Ver Figura No. 10.



Las aristas ab y bc pertenecen al ciclo a, b, c, d, a y también al ciclo a, b, c, e, a .

La arista bc pertenece al ciclo b, c, d, a, b y también al ciclo b, c, e, b .

Figura No. 11: Ejemplos concretos de MSD en los cuales se aprecia que una arista puede pertenecer a más de un ciclo. Elaborado por M. Arcos.

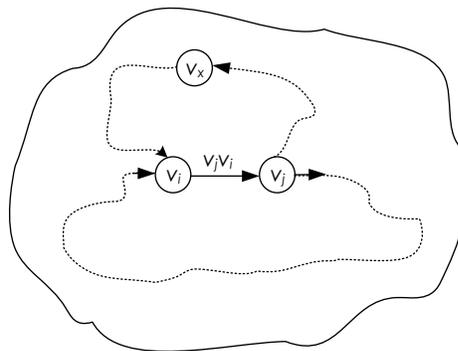


Figura No. 12: Caso general en el que se ilustra que una arista puede pertenecer a más de un ciclo. La arista $v_i v_j$ forma parte del ciclo v_i, v_j, \dots, v_i y también del ciclo $v_i, v_j, \dots, v_x, \dots, v_i$. Elaborado por: M. Arcos.

Una arista de un MSD puede pertenecer a más de un ciclo. En la Figura No.11 se puede observar ejemplos concretos de este caso de MSD, y en la Figura No. 12 se puede apreciar una ilustración del caso general.

Propiedad 3: En un MSD D , $m=n$ si y solo si D es el ciclo C_n .

Demostración: Recordar que m representa el número de aristas del MSD. Si D es el ciclo C_n entonces se cumple que $m=n$. Supongamos ahora que $m=n$ y consideremos un árbol dirigido con raíz T con n vértices, ($n \geq 2$), como subdigrafo de D . Podemos demostrar la existencia de T de forma constructiva. Elegimos un vértice cualquiera v_0 de D como raíz de T y vamos añadiendo incrementalmente los caminos dirigidos más cortos desde T a cada uno de los vértices de D . El árbol T tiene $n-1$ aristas y añadiendo la que falta hasta $m=n$ se obtiene el digrafo D . Es decir, con una sola arista T se convierte en fuertemente conexo (ver Figura No. 13).

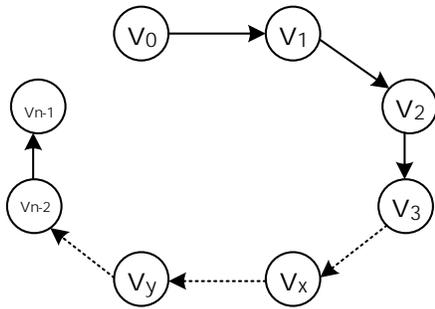


Figura No. 13: Ilustración de un árbol lineal con n vértices, que tiene raíz y una sola hoja. Elaborado por M. Arcos.

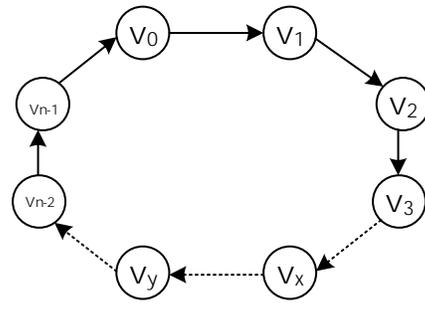


Figura No. 14: Ilustración de un ciclo obtenido a partir de un árbol lineal dirigido con n vértices. Elaborado por M. Arcos.

Se puede notar que v_0 no tiene arista de entrada, y v_{n-1} no tiene arista de salida, por lo tanto T no es fuertemente conexo. Por ello se agrega solamente la arista $v_{n-1}v_0$ como se muestra en la Figura No. 14. Con esto se obtiene el MSD D , donde $D=T+v_{n-1}v_0$, y como D es un ciclo de longitud n se puede decir que $D=C_n$. Si T tuviera más de una hoja, al agregar solamente una arista sería imposible obtener un digrafo fuertemente conexo (ver Figura No. 15).

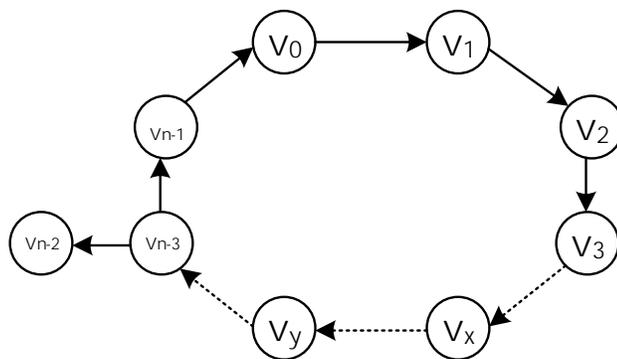


Figura No. 15: Ilustración de la obtención de un ciclo a partir de un árbol lineal dirigido con más de una hoja, el digrafo resultante no es fuertemente conexo, pues el vértice v_{n-2} no tiene arista de salida. Elaborado por: M. Arcos.

Propiedad 4: Dados un MSD D y un ciclo C de D , las siguientes configuraciones no pueden existir:

- Un vértice u no perteneciente a C con dos aristas de u a sendos vértices de C .
- Un vértice u no perteneciente a C con dos aristas de sendos vértices de C a u .

Demostración: En ambas situaciones las aristas incidentes en u son transitivas y por tanto no pueden existir simultáneamente en un MSD.

Propiedad 5: La contracción de un ciclo C_q en un MSD D con n vértices y m aristas, produce otro MSD D' con $n-q+1$ vértices y $m-q$ aristas.

Demostración: Considerar un MSD D con n vértices y m aristas que contiene al ciclo C_q con q vértices y por lo tanto q aristas. Está claro que $n \geq q$ y que $m \geq q$. Al contraer el ciclo en un solo vértice se ocultan todas las aristas de C_q y, según la propiedad 4, no desaparece ninguna arista con un único extremo en C_q . Por lo tanto se obtiene un digrafo D' con $m-q$ aristas. También se ocultan todos los vértices

de C_q excepto uno, pues el ciclo se contrae en un solo vértice v . Por lo tanto D' tendrá una cantidad de vértices igual a $n-q+1$ (ver Figura No. 16 y Figura No. 17). Entonces falta demostrar que D' es un MSD. Para ello hace falta notar que en D' se han ocultado todas las aristas pertenecientes a C_q , pero las aristas que conectan a C_q con el resto del MSD se mantienen conectándose al vértice v , tal como se ilustra en la Figura No. 17.

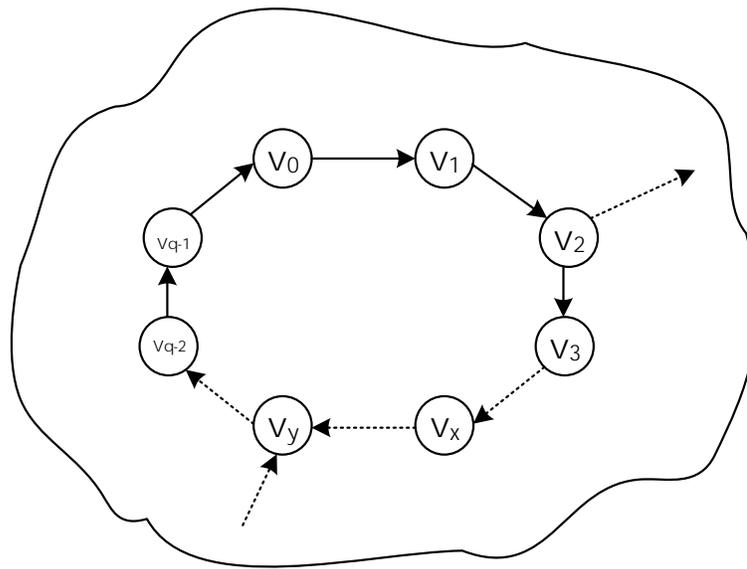


Figura No. 16: Ilustración de un MSD D con n y vértices m aristas que contiene a un ciclo C_q que tiene q vértices y q aristas. Elaborado por: M. Arcos.

Si $n=q$ entonces D' es un digrafo compuesto solamente por el vértice v , que es un digrafo fuertemente conexo, con lo que se demuestra la propiedad. Si $n>q$ entonces existe en D al menos un vértice u que no ha desaparecido. Por lo tanto u debe también estar presente en D' . Como D es fuertemente conexo, existen en D caminos entre el vértice u y todos los vértices de C_q , de la misma forma, existen en D caminos entre todos los vértices de C_q y el vértice u . Como D' conserva todas las aristas de entrada y de salida de C_q , y como ahora esas aristas en D' pertenecen al vértice v , entonces en D'

debe existir un camino entre el vértice u y el vértice v (uv -path), y un camino entre el vértice v y el vértice u (vu -path). Por tanto, D' es fuertemente conexo.

Notar que en D' no se han creado aristas, solamente se han ocultado las aristas de C_q . Por lo tanto, si en D' existieran aristas transitivas, esas aristas también serán transitivas en D . Luego en D' no existen aristas transitivas y por tanto, D' conserva la minimalidad. Luego, como D' es fuertemente conexo y es minimal, entonces D' es un MSD.

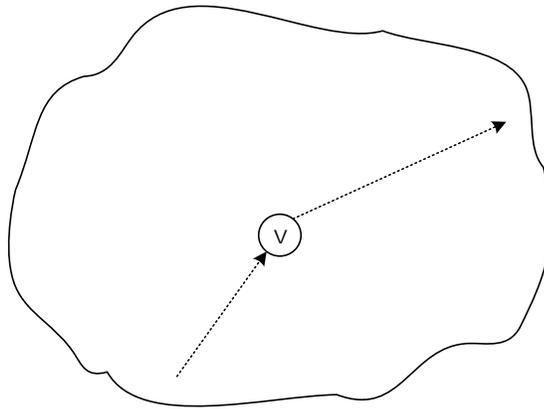


Figura No. 17: Ilustración del digrafo D' con $n-q+1$ vértices y $n-m$ aristas, generado a raíz del MSD D de la Figura No. 16, mediante la contracción del ciclo C_q en un solo vértice v . Elaborado por: M. Arcos.

Propiedad 6: En un MSD D , $m=2(n-1)$ si y solo si D es un árbol dirigido doble.

Demostración: Considerar un MSD D compuesto por n vértices y m aristas. Si D es un árbol dirigido doble entonces se verifica claramente que $m=2(n-1)$. Supongamos ahora que D es un MSD que verifica $m=2(n-1)$. Si $n=2$, entonces D es un C_2 y la propiedad se verifica. Si $n>2$, por la propiedad 2 se sabe que todo MSD contiene al menos un

ciclo C_q . Entonces, si todos los ciclos de D son C_2 , D es un árbol dirigido doble y la propiedad se verifica (ver Figura No. 18).

Supongamos por reducción al absurdo que D contiene un ciclo C_q , donde $q \geq 3$. Por la propiedad 5 se sabe que la contracción de C_q produce un nuevo MSD D' con n' vértices y m' aristas, donde:

$$n' = n - q + 1 \quad (1)$$

$$m' = m - q \quad (2)$$

Entonces, por la propiedad 7, se cumple:

$$m \leq 2(n' - 1) \quad (3)$$

Reemplazando en esta expresión los valores de n' y m' anteriores queda:

$$m - q \leq 2(n - q)$$

Y, operando, obtenemos:

$$m \leq 2n - q \leq 2n - 3 < 2(n - 1) \quad (4)$$

Esto contradice la suposición inicial $m = 2(n - 1)$ y nos permite concluir que solo pueden existir ciclos C_2 y que, por tanto, D es un árbol dirigido doble.

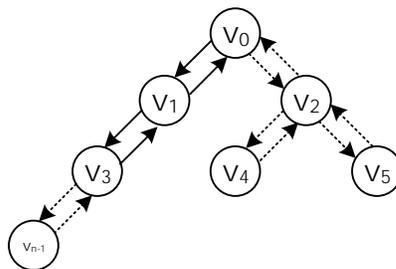


Figura No. 18: Ilustración de que un árbol dirigido doble está formado por ciclos C_2 . Elaborado por: M. Arcos.

Propiedad 7: En todo MSD D el número de aristas está acotado por:
 $n \leq m \leq 2(n-1)$.

Demostración: Por inducción en el número de vértices n .

Paso Base: si $n=2$ entonces D es el ciclo C_2 , $m=2$ y la propiedad se verifica.

Paso de inducción: Supongamos que D tiene $n+1$ vértices y que todo digrafo MSD con un número de vértices menor o igual que n verifica la propiedad (hipótesis de inducción).

Si D es el ciclo C_{n+1} la propiedad se verifica. Si D no es el ciclo C_{n+1} entonces, por la propiedad 2, se sabe que D debe contener al menos un ciclo C_q donde:

$$2 \leq q \leq n \quad (5)$$

Por la propiedad 5 se sabe que la contracción de C_q produce otro MSD D' , donde:

$$m' = m - q \quad (6)$$

$$n' = (n+1) - q + 1 = n - q + 2 \quad (7)$$

Además se verifica que $n' < n+1$ y, por tanto, que $n' \leq n$. Entonces, por hipótesis de inducción, D' verifica:

$$n' \leq m' \leq 2(n'-1) \quad (8)$$

Reemplazando (6) y (7) en (8) queda:

$$m - q \leq 2((n - q + 2) - 1) \quad (9)$$

Y operando en esta expresión obtenemos una de las desigualdades que queremos demostrar:

$$m \leq 2n - q + 2 \leq 2n \leq 2((n+1) - 1) \quad (10)$$

Reemplazando de nuevo (6) y (7) en (8) queda:

$$n-q+2 \leq m-q \quad (11)$$

Entonces, operando en esta expresión, obtenemos la otra desigualdad que queremos demostrar:

$$n+1 \leq n+2 \leq m \quad (12)$$

Finalmente, por el principio de inducción, hemos probado que todo digrafo MSD con n vértices y m aristas verifica:

$$n \leq m \leq 2(n-1) \quad (13)$$

Propiedad 8: Sea D un MSD. Luego, D puede ser factorizado en un árbol dirigido con raíz T y un bosque F de árboles con raíz invertidas.

Demostración: Como $D=(V,A)$ en donde V es el conjunto finito no vacío de vértices contenidos en D , y, A es el conjunto de aristas contenidas en D , consideremos una descomposición en orejas de D , $E=\{P_0, \dots, P_k\}$ (Bang-Jensen, J. & Gutin. G. (2001)), en donde $P_0=(V_0, A_0)$ es un ciclo y cada $P_i=(V_i, A_i)$, $1 \leq i \leq k$, es un camino o un ciclo con las siguientes propiedades:

- P_i y P_j son aristas disjuntas si $i \neq j$
- Para cada $i=1, \dots, k$: si P_i es un ciclo, luego tiene exactamente un vértice común con $U_{j=0}^{i-1} V_j$. Caso contrario, los vértices terminales de P_i son vértices distintos de $U_{j=0}^{i-1} V_j$ y ningún otro vértice de P_i pertenece a $U_{j=0}^{i-1} V_j$.
- $U_{i=0}^k A_i = A$

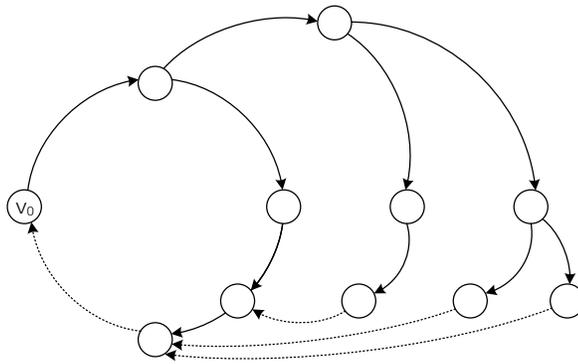


Figura No. 19: Ilustración de la descomposición en orejas de un MSD y de la construcción del correspondiente árbol dirigido con raíz v_0 . Elaborado por: M. Arcos.

Cada P_i es llamada *oreja*. Esta descomposición existe para todo digrafo fuertemente conexo. Cada oreja P_i contiene al menos un vértice nuevo respecto a $U_{j=0}^{i-1}V_j$ y dos aristas nuevas respecto a $U_{j=0}^{i-1}A_j$. La primera oreja es un ciclo $P_0 = v_0^0, v_1^0, \dots, v_{s_0-1}^0, v_0^0$. Sea T el camino $v_0^0, v_1^0, \dots, v_{s_0-1}^0$ y sea F la arista $v_{s_0-1}^0, v_0^0$. Luego, T es un árbol dirigido con raíz v_0^0 , y F es un árbol cuya raíz invertida es v_0^0 . Para cada oreja $P_j = v_0^j, v_1^j, \dots, v_{s_j}^j$, $1 \leq j \leq k$, añadimos el camino $v_0^j, v_1^j, \dots, v_{s_j-1}^j$ a T y la arista $v_{s_j-1}^j, v_{s_j}^j$ a F . Notar que todos los vértices nuevos de P_j son añadidos a T , estos son conectados a T únicamente mediante el primer vértice del camino v_0^j y tienen un indegree igual a 1. Notar también que la arista $v_{s_j-1}^j, v_{s_j}^j$ está unida a uno de los componentes conexos de F si el vértice $v_{s_j}^j$ pertenece a F , y, constituye un nuevo componente conexo si $v_{s_j}^j$ no pertenece a F . Luego es claro, por construcción, que T es un árbol dirigido con raíz v_0^0 , y que F es un bosque de árboles con raíces invertidas (ver Figura No. 19).

Notar que esta factorización depende del etiquetamiento de la primera oreja P_0 . De hecho, existen s_0 posibles factorizaciones

diferentes, siendo s_0 la longitud del ciclo P_0 (García-López, J., Marijuán, C. & Pozo-Coronado, L. M. (comunicación personal)).

Propiedad 9: Todo MSD tiene al menos 2 vértices lineales.

Demostración: La demostración se realiza por inducción sobre el orden de n .

Paso base: $n=2$. La propiedad se verifica evidentemente, pues el único MSD posible será el ciclo C_2 cuyos vértices son lineales.

Paso de inducción. Sea D un MSD con $n+1$ vértices ($n \geq 2$) y supongamos, por hipótesis de inducción, que todo MSD de orden menor o igual que n tiene al menos 2 vértices lineales.

Si D es el ciclo C_{n+1} , la propiedad se verifica pues D tendrá $n+1$ vértices lineales, para $n+1 \geq 3$ (ver Figura No. 8).

Si D no tiene ciclos de longitud mayor que 2, entonces es un árbol dirigido doble, por lo que sus hojas, es decir sus vértices extremos, son vértices lineales de D . Como cada árbol tiene al menos 2 hojas, entonces la propiedad se verifica (ver Figura No. 18).

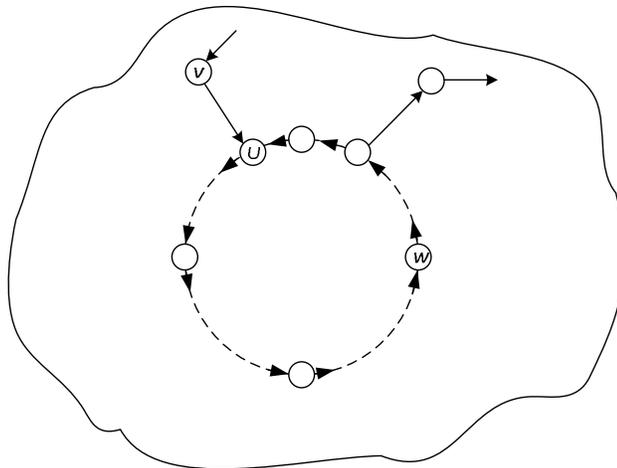


Figura No. 20: Ilustración de un MSD que contiene un ciclo. Los vértices u y w pertenecen al ciclo. Elaborado por: M. Arcos.

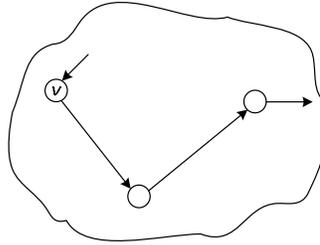


Figura No. 21: Ilustración de un MSD resultante de la contracción del ciclo del MSD de la Figura No. 20, el vértice contraído contiene al vértice lineal w . Elaborado por: M. Arcos.

Si D tiene un ciclo C_q donde $3 \leq q < (n+1)$, existe al menos un vértice v en D que no pertenece a C_q . Por la propiedad 5 se sabe que la contracción del ciclo C_q genera un nuevo MSD D' en donde el número de vértices estará dado por $n-q+2$ para $2 \leq (n-q+2) \leq n-1$. Por la hipótesis de inducción D' tiene al menos 2 vértices lineales que se pueden llamar u y v . Si uno de estos vértices, por ejemplo u , es el vértice contraído, en D existe una única arista que se dirige al ciclo C_q y una única arista que sale del ciclo C_q . Y, como $q \geq 3$, en C_q existe al menos un vértice lineal w . Luego w y v son dos vértices lineales en D (ver Figura No. 20 y Figura No. 21). Si, por el contrario, los vértices lineales u y v de D' no coinciden con el vértice contraído, estos también son vértices lineales en D (ver Figura No. 22 y Figura No. 23). (García-López, J. & Marijuán, C. (2012)).

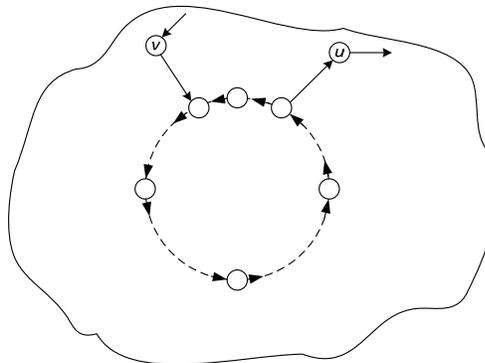


Figura No. 22: Ilustración de un MSD que contiene un ciclo. El vértice u no pertenece al ciclo. Elaborado por: M. Arcos.

Propiedad 10: Si un MSD tiene exactamente dos vértices lineales, cada uno de ellos pertenecen a un ciclo único. Además, estos ciclos podrán solamente ser un C_2 o un C_3 .

Demostración: Considerar un MSD D que contiene un ciclo C y suponer que uno de los dos vértices lineales, u , pertenece a C . Si el otro vértice lineal también pertenece a C , entonces $D=C$ (caso contrario, de la contracción de C resultaría un MSD con solamente un vértice lineal). Por lo tanto, D es un MSD con exactamente dos vértices lineales, es decir D sería el ciclo C_2 .

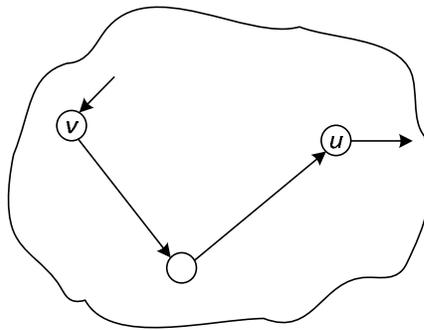


Figura No. 23: Ilustración de un MSD resultante de la contracción del ciclo del MSD de la Figura No. 22, el vértice contraído no contiene a los vértices lineales u y v . Elaborado por: M. Arcos.

Asumiendo ahora que el otro vértice lineal no pertenece al ciclo C , la contracción de C en un vértice z verifica que z es un vértice lineal en el MSD resultante D' . Sean v_1 y v_2 los vértices pertenecientes a C que inciden con las dos aristas de z . Como u es el único vértice lineal en el ciclo, C debe ser el ciclo C_3 formado por u, v_1, v_2, u o el ciclo C_2 formado por u, v_1, u en el caso de que $v_1=v_2$. (García-López, J., Marijuán, C. & Pozo-Coronado, L. M. (comunicación personal)).

Un MSD se llama lineal simple si es de una de las siguientes formas:

- El ciclo C_2 .

- La secuencia de ciclos C_3C_3 en el que los ciclos C_3 tienen una arista en común.
- La secuencia de p ciclos (para $p \geq 3$) $C_3C_4C_4\dots C_4C_3$ donde cada ciclo C_4 comparte sendas aristas disjuntas con los ciclos anterior y siguiente de la secuencia.

Un MSD es lineal si puede ser obtenido a partir de un grafo lineal mediante la sustitución de cada arista por un MSD lineal simple, identificando los puntos finales de cada arista con los vértices lineales del MSD lineal simple (García-López, J., Marijuán, C. & Pozo-Coronado, L. M. (comunicación personal)). (Ver ejemplo en Figura No. 24).

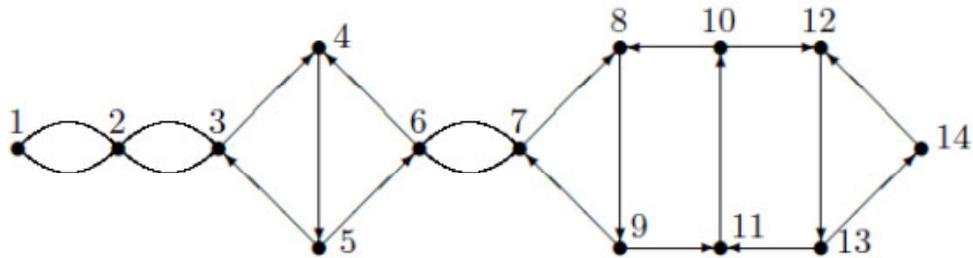


Figura No. 24: Ilustración de un MSD compuesto por cinco MSDs lineales simples. Fuente: Structural properties of minimal strong digraphs versus trees (García-López, J., Marijuán, C. & Pozo-Coronado, L. M. (comunicación personal)).

Propiedad 11: Un digrafo MSD D es lineal sí y sólo sí tiene dos vértices lineales.

Demostración: Obviamente si D es lineal solo tiene dos vértices lineales.

La demostración pendiente se realizará por inducción en el número n de vértices de D .

Paso base: $n=2$. La propiedad se verifica, puesto que D es el ciclo C_2 que es un MSD lineal simple.

Paso de inducción. Sea D un MSD con $n+1$ vértices, de los cuales exactamente dos son lineales, y supongamos, por hipótesis de inducción, que todo MSD con un número de vértices menor o igual que n y con exactamente dos vértices lineales es un MSD lineal. Llamamos u a uno de los vértices lineales de D . Por la propiedad 10 u pertenece a un ciclo C_2 o a un ciclo C_3 . Si u pertenece a un ciclo C_2 formado por $uu'u$, entonces u' es un vértice lineal en el digrafo $D'=D-u$, el ciclo $uu'u$ es un MSD lineal simple y D' tiene exactamente dos vértices lineales. Por hipótesis de inducción D' es lineal y, consecuentemente, D también. Si u pertenece a un ciclo C_3 formado por uv_1v_2u , entonces el MSD D' obtenido por la contracción del ciclo C_3 en el vértice u' , verifica la propiedad. Por la hipótesis de inducción, D' es un MSD lineal. Hay dos casos posibles y en ambos está claro que D es un MSD lineal (ver Figura No. 25).

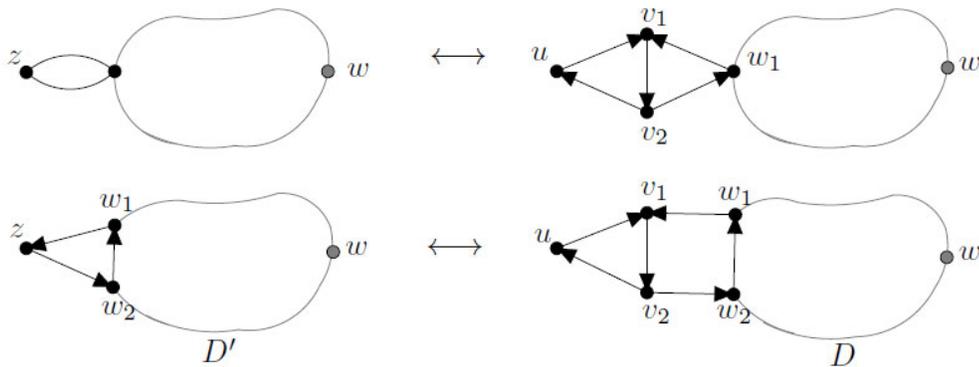


Figura No. 25: Ilustración que muestra los dos casos que demuestran la propiedad 11. Fuente: Structural properties of minimal strong digraphs versus trees (García-López, J., Marijuán, C. & Pozo-Coronado, L. M. (comunicación personal)).

Propiedad 12: Si un MSD contiene un C_2 , entonces los vértices de C_2 son vértices lineales o vértices de corte.

Demostración: Considerar un MSD D que contiene a un ciclo C_2 que a su vez está formado por el vértice u y el vértice v (ver Figura No. 26). Considerar el digrafo $D'=D-u$, es decir el resultado de eliminar de D el vértice u y todas sus aristas de entrada y de salida. Tenemos que demostrar que si u no es un vértice lineal entonces es un vértice de corte, es decir, que D' resulta ser un digrafo no conexo o, lo que es lo mismo, que se ha dividido en dos componentes y que no existe un camino para transitar de una componente a la otra (ver Figura No. 27).

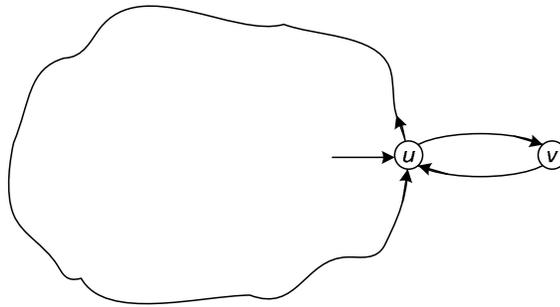


Figura No. 26: Ilustración de un MSD que contiene un C_2 . Elaborado por: M. Arcos.

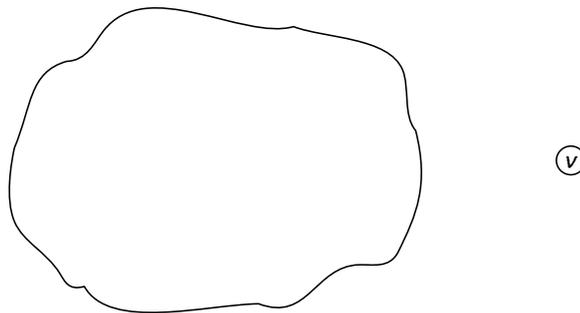


Figura No. 27: Ilustración de un digrafo resultante de la eliminación de un vértice de corte. Se obtiene un digrafo inconexo, ya que no existe un camino que permita transitar desde el vértice v hacia cualquier otra parte del grafo, y viceversa. Notar que al eliminar el vértice u se eliminan también algunas aristas de la componente que queda al lado izquierdo del digrafo. Elaborado por: M. Arcos.

Hipótesis: D es un MSD, C_2 es un ciclo de longitud 2 contenido en D formado por los vértices u y v .

Está claro que las aristas uv y vu existen en D .

Definimos:

$$U^- = \{w \mid \exists wu_path \text{ que no contiene a la arista } vu\}$$

$$U^+ = \{w \mid \exists uw_path \text{ que no contiene a la arista } uv\}$$

$$U = U^- \cup U^+$$

$$V^- = \{w \mid \exists wv_path \text{ que no contiene a la arista } uv\}$$

$$V^+ = \{w \mid \exists vw_path \text{ que no contiene a la arista } vu\}$$

$$V = V^- \cup V^+$$

Entonces para demostrar la propiedad basta con demostrar lo siguiente:

$$U^+ = U^- \tag{14}$$

$$V^+ = V^- \tag{15}$$

$$U \cap V = \emptyset \tag{16}$$

Si w pertenece a U^- , entonces existe un wu -path. Como U^- está incluido en D , y D es fuertemente conexo, entonces también existe un uw -path. Si el uw -path pasa por el vértice v , entonces la arista vu sería transitiva (ver Figura No. 28). Por lo tanto el uw -path no pasa por el vértice v , lo que implica que w pertenece a U^+ y, consecuentemente $U^- \subseteq U^+$. Análogamente se demuestra que $U^+ \subseteq U^-$ y como, consecuencia de ambas inclusiones, se demuestra que (14) es verdadera. La demostración de (15) es similar.

Para demostrar (16) supongamos, por reducción al absurdo, que existe un $w \in U \cap V$. Por ser $U = U^- \cup U^+$ y $V = V^- \cup V^+$ existirán un wu -path y un vw -

$path$ que no contienen las aristas uv y vu . Entonces llegamos a la contradicción de que la arista vu es transitiva (ver Figura No. 28). Por tanto se cumple (16).

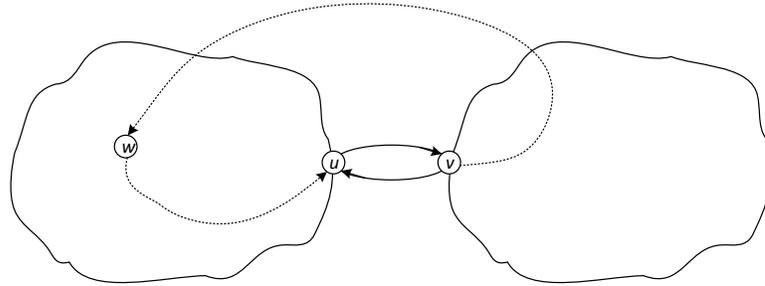


Figura No. 28: Ilustración del caso en el que la arista vu es transitiva. Elaborado por: M. Arcos.

Por lo tanto, los casos posibles son: Si $D=C_2$, el caso mostrado en la Figura No. 26 en el que un vértice de C_2 es lineal y el otro es vértice de corte, y el caso mostrado en la Figura No. 29 en el que los dos vértices de C_2 son vértices de corte.

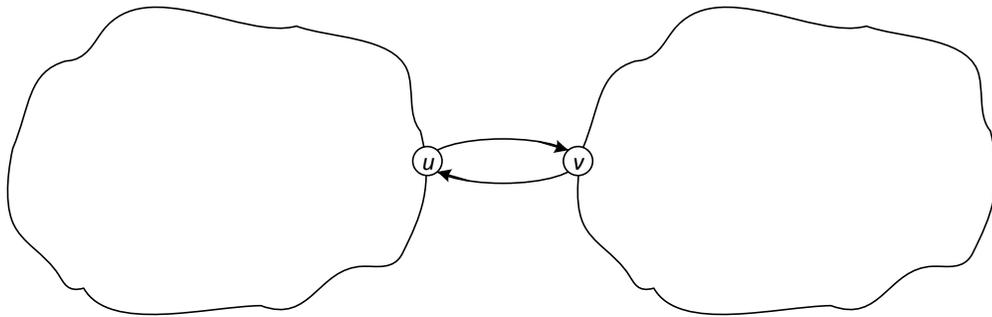


Figura No. 29: Ilustración de un MSD que contiene un C_2 cuyos dos vértices son de corte. Elaborado por: M. Arcos.

Propiedad 13: Cada ciclo de un MSD tiene dos aristas que al ser suprimidas dividen al digrafo en dos partes inconexas.

Demostración: Se puede realizar la demostración por inducción sobre el número de vértices n del MSD D .

Si $n=2$ entonces $D=C_2$, luego la propiedad se verifica, pues al suprimir sus dos aristas, sus dos vértices quedan divididos en dos componentes inconexas.

Si $n>2$, y D es un árbol dirigido doble, la propiedad se verifica, pues al suprimir las aristas de cualquier ciclo, el digrafo se divide en dos componentes inconexas (ver Figura No. 30).

En cualquier otro caso, existe en D un ciclo C_q para $q>2$. Si $D=C_q$, cualquier par de aristas, al ser eliminadas, dividen al MSD en dos componentes inconexas (ver Figura No. 31).

En otro caso existirá en D un ciclo C que comparte vértices y posiblemente aristas con el ciclo C_q . Sea D' el digrafo obtenido de D mediante la contracción del ciclo C en un vértice z . Luego, C_q se convierte en uno o varios ciclos que tiene a z como uno de sus vértices.

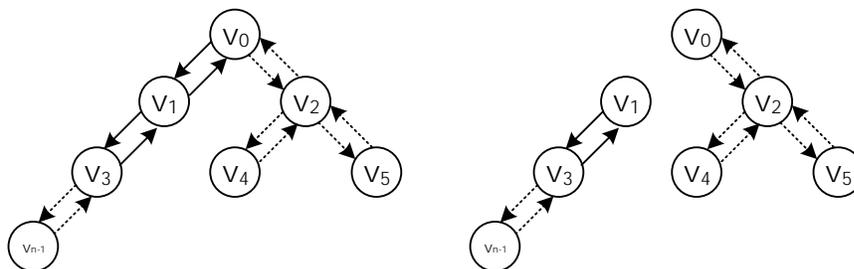


Figura No. 30: Ilustración de la división de un MSD en dos componentes inconexas mediante la eliminación de las aristas de un ciclo C_2 . Elaborado por: M. Arcos.

Se puede escoger cualquiera de esos ciclos, y, por hipótesis de inducción, debe contener dos aristas que al ser suprimidas dividen al digrafo en dos componentes inconexas. Se puede llamar a estas aristas como $u_1'v_1'$ y $v_2'u_2'$ tal que $D'-u_1'v_1'-v_2'u_2'$ tiene dos componentes a los que se les puede llamar D_1' y D_2' . El vértice z estará uno de los componentes. Si u_1' , v_1' , u_2' y v_2' son diferentes de

z , luego $u_1' = u_1$, $v_1' = v_1$, $u_2' = u_2$ y $v_2' = v_2$ son vértices de D , y las aristas originales u_1v_1 y v_2u_2 son las aristas que al ser suprimidas dividirían al MSD en dos componentes inconexas. Si $u_1' = z$ y/o $u_2' = z$ (z está en D_1') o $v_1' = z$ y/o $v_2' = z$ (z está en D_2'), significa que existen vértices w_1 y w_2 en C tales que w_1v_1 y/o v_2w_2 (z está en D_1') o v_1w_1 y/o w_2u_2 (z está en D_1') son aristas en C_q . El par de aristas de D correspondientes a las de D' son las aristas que al ser suprimidas dividen al MSD en dos componentes inconexas (García-López, J., Marijuán, C. & Pozo-Coronado, L. M. (comunicación personal)).

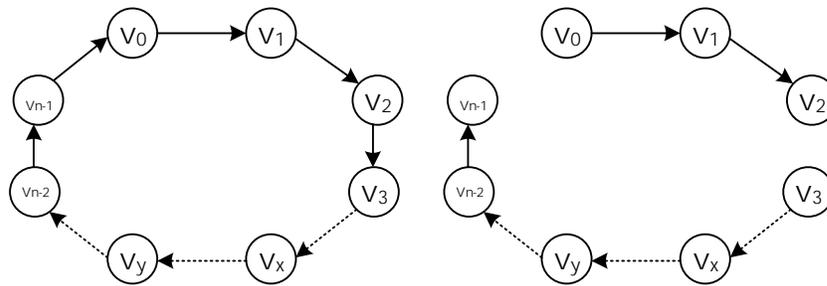


Figura No. 31: Ilustración de la división de un MSD en dos componentes inconexas mediante la eliminación de dos aristas de un ciclo C_q . Elaborado por: M. Arcos.

2. Resultados obtenidos con algoritmos implementados

2.1 Cálculo de MSD no etiquetados

Uno de los algoritmos implementados ha sido capaz de calcular las matrices de adyacencia de todos los MSD no etiquetados que contienen desde 2 vértices hasta 14 vértices (García-López, J. & Marijuán, C. (2012)). Dicho algoritmo ha sido implementado y ejecutado en un computador personal, las matrices generadas han sido almacenadas en archivos de texto.

La Tabla No. 1 muestra la cantidad de MSD calculados según el número de vértices n (desde 2 hasta 14), de cada MSD para todas las cantidades de aristas posibles m que puedan contener ($n \leq m \leq 2(n-1)$). Cabe recalcar que solamente se han contabilizado la cantidad de representantes canónicos de los MSD, con el fin de omitir digrafos isomorfos.

2.2 Cálculo de las clases isospectrales de los MSD

Otro de los algoritmos implementados calcula las clases isospectrales de los MSD, determina el digrafo y el polinomio característico para cada clase. La Tabla No. 2 muestra los resultados obtenidos. En esta tabla los autores han incluido tres filas al final. La primera fila "*Sum*" representa el número de clases isospectrales en el número de aristas posible. La segunda fila "*Total*" muestra el número total de clases isospectrales de un orden dado. La tercera fila muestra la diferencia entre las dos filas anteriores.

2.3 Análisis comparativo entre MSD y árboles dirigidos

Una vez que se ha estudiado las principales propiedades de los MSD, es posible mencionar algunas semejanzas y analogías entre los MSD y los árboles dirigidos, estas se muestran en la Tabla No.3.

$m \setminus n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14													
2	1																									
3		1																								
4			1	1																						
5				2	1																					
6					2	4	1																			
7						7	6	1																		
8							3	27	9	1																
9								23	70	12	1															
10									6	131	169	16	1													
11										66	559	344	20	1												
12											11	571	1970	662	25	1										
13												191	3479	5874	1159	30	1									
14													23	2229	17109	15526	1947	36	1							
15															541	18509	69845	37072	3086	42						
16																47	8226	120582	246971	81561	4743					
17																	1514	87963	646339	773413	167500					
18																		106	28879	732150	2954946	2191491				
19																				4217	385484	4974754	11819034			
20																					235	98146	3973379	28600421		
21																						11724	1587924	33313635		
22																							551	324638	19785730	
23																								32527	6234794	
24																									1301	1052874
25																										90285
26																										3159
UMS(n)	1	2	5	15	63	288	1526	8627	52021	328432	2160415	14707566	103263709													

Tabla No. 1: Número de MSD no etiquetados que contienen n vértices y m aristas. Fuente: Minimal Strong Digraphs (García-López, J. & Marijuán, C. (2012)).

3. Metodología de la investigación

En los apartados anteriores se ha podido evidenciar la importancia que tienen los ciclos en la estructura de un MSD. La investigación consiste precisamente en conocer la estructura y las propiedades que tienen los ciclos contenidos en un MSD.

m \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14													
2	1																									
3		1																								
4			1																							
5				2	1																					
6					2	4	1																			
7						6	6	1																		
8							3	18	9	1																
9								16	35	12	1															
10									6	62	65	16	1													
11										43	172	103	20	1												
12											11	227	395	160	25	1										
13												115	801	791	227	30	1									
14													22	769	2290	1423	319	36	1							
15															319	3530	5567	2411	424	42						
16																42	2645	12437	11942	3807	559					
17																		848	14978	36638	23583	5805				
18																			102	8812	64337	93732	43070			
19																				2349	61376	228358	217303			
20																					204	29317	318654	695323		
21																						6401	244989	1351485		
22																							488	95369	1517405	
23																								17660	949476	
24																									1078	307783
25																										48567
26																										2723
Sum		1	2	5	14	47	161	614	2446	10387	46023	213260	1027691	5139542												
Total		1	2	5	14	47	161	604	2360	9796	42510	193891	922109	4560898												
Δ		0	0	0	0	0	0	10	86	591	3513	19369	105582	578644												

Tabla No. 2: Clases isospectrales de MSD que contienen n vértices y m aristas. Fuente: Minimal Strong Digraphs (García-López, J. & Marijuán, C. (2012)).

La metodología utilizada para este propósito es el análisis exhaustivo de los casos posibles de MSD que se pueden generar partiendo de

un ciclo, iniciando desde el ciclo más pequeño C_2 . Con los resultados que se obtengan se generalizarán las propiedades que se descubran y se las demostrará matemáticamente.

El análisis exhaustivo se ha iniciado realizando de manera manual y posteriormente se ha desarrollado de manera algorítmica, mediante la implementación de dos algoritmos que se han creado para tal efecto.

Árbol Dirigido Doble	MSD
Grafo conexo minimal	Digrafo Fuertemente Conexo Minimal
Tiene un número lineal de aristas q	Tiene un número lineal de aristas q
Si un grafo es conexo y $q=n-1$ entonces es un árbol	Si un digrafo es fuertemente conexo y $q=n$ entonces es un MSD
No contiene ciclos	Contiene ciclos
El número de aristas está determinado por el número de vértices: $q=n-1$	El número de aristas está determinado por el número de vértices: $n \leq q \leq 2(n-1)$
Tiene al menos 2 hojas	Tiene al menos dos vértices lineales
Admite a lo sumo un único matching	Admite a lo sumo un único recubrimiento mediante ciclos disjuntos
Admite un recubrimiento mediante α aristas (α es el número de independencia)	Admite un recubrimiento mediante α ciclos (α es el número de independencia)

Tabla No. 3: Semejanzas y analogías entre los árboles dirigidos y los MSD. Fuente: García-López (Comunicación personal).

El algoritmo ha calculado todas las maneras posibles en las que los vértices del ciclo pueden estar contenidos en una o varias componentes fuertemente conexas del grafo resultante al eliminar todas las aristas del ciclo, y para ello se han calculado los representantes canónicos de cada configuración posible con el fin de evitar los casos isomorfos. En todos los casos obtenidos se ha verificado que las aristas del ciclo no sean transitivas al volverlas a añadir sobre una hipotética configuración de CFCs construida.

Sea D un MSD que contenga al ciclo C_q . Sea D' el digrafo resultante de la eliminación de las aristas de C_q en D . Llamamos componente

fuertemente conexa (CFC) a todo subdigrafo existente en D' cuyos vértices mantienen la propiedad de la conexión fuerte, como cada CFC está contenida en un MSD, entonces toda CFC es minimal, entonces cada CFC de manera aislada representa un MSD en D' . Cada vértice de C_q pertenece a alguna CFC, sin embargo pueden existir CFC que no contengan vértices de C_q . En la Figura No. 32 se puede apreciar que los vértices v_s, v_u, v_w y v_y se encuentran dentro de una misma CFC. Los vértices como v_0, v_t, v_v, v_x , a pesar de no tener relación con los demás vértices del ciclo por medio de aristas distintas a las del ciclo, también son considerados como CFC de manera individual.

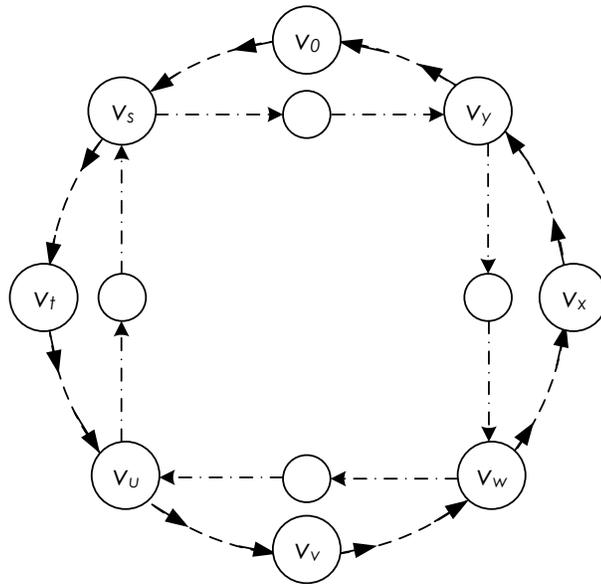


Figura No. 32: Ilustración de un ejemplo de MSD en el cual varios vértices de un ciclo se encuentran dentro de un mismo CFC. Elaborado por: M. Arcos.

4. Desarrollo de la investigación

La investigación ha tenido por objetivo descubrir propiedades importantes de los MSD que podrían permitir en futuros trabajos diseñar algoritmos para resolver problemas específicos. Los resultados más significativos de la investigación se detallan a continuación.

4.1 Cálculo de las componentes fuertemente conexas asociadas a los vértices de un ciclo

Sea D un MSD que contiene al ciclo C_q formado por v_0, v_1, \dots, v_{q-1} , y sea D' el digrafo resultante de suprimir en D las aristas de C_q . Es claro que D' no será fuertemente conexo. En D' existe la posibilidad de que vértices de C_q mantengan conexión fuerte con otros vértices de C_q por medio de las aristas de componentes fuertemente conexas que puedan existir tanto en D como en D' y que no contienen aristas de C_q . Estas componentes fuertemente conexas además tienen la propiedad de ser minimales, pues provienen y están contenidas en un MSD.

El cálculo de las componentes fuertemente conexas asociadas a los vértices de C_q se ha realizado mediante la generación de todas las conexiones posibles que puedan existir entre los vértices de un ciclo, desde C_2 hasta C_{19} . Luego se han descartado las configuraciones en las que al menos una arista de C_q se vuelve transitiva, y se ha conservado únicamente el representante canónico de las configuraciones válidas.

Esta fase de la investigación se inició de manera manual con los ciclos C_2 , C_3 , C_4 , C_5 y C_6 , posteriormente se realizó de manera algorítmica.

Cada configuración de las componentes fuertemente conexas asociadas a los vértices de C_q ha sido representada por un array de números enteros de longitud q al que se ha llamado *CompVert*:

- $CompVert[k]$ representa la componente a la que pertenece el vértice k
- $0 \leq CompVert[k] < q$ para todo $0 \leq k < q$

Las componentes fuertemente conexas han sido numeradas de manera secuencial ascendente.

Se ha omitido el análisis de los casos en los que dos vértices consecutivos de C_q están dentro de una misma componente fuertemente conexa pues no existiría la condición minimal en D . Por lo tanto en *CompVert* no pueden existir dos posiciones consecutivas con el mismo valor:

- $CompVert[k] \neq CompVert[k+1 \bmod q]$ para todo $0 \leq k < q$

Luego se han definido valores iniciales para *CompVert*:

- $CompVert = [0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1]$ si q es par
- $CompVert = [0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, 2]$ si q es impar

La última configuración válida para *CompVert* será aquella en la que todos los vértices de C_q estén contenidos en componentes fuertemente conexas distintas, así:

- $CompVert = [0, 1, 2, \dots, q-2, q-1]$

Para comprobar que cada configuración es minimal se ha verificado que ninguna arista de C_q se vuelve transitiva.

Todos los representantes canónicos se han almacenado en un archivo de texto. Cada línea del archivo representa una configuración válida de *CompVert*.

Para calcular la secuencia de configuraciones de manera exhaustiva se ha implementado una "función siguiente" que se la describe a continuación:

Paso previo, verificar que se cumplan las siguientes condiciones iniciales:

- a. $CompVert[0] = 0$
- b. $CompVert[k] \leq 1 + \max\{CompVert[j] \mid 0 \leq j < k\}$ para todo $0 < k < q$

Con esta verificación se establece que para un vértice que no pertenezca a ninguna de las componentes fuertemente conexas ya definidas, pertenecerá a la siguiente componente disponible.

- i. Localizar (mirando de $q-1$ a 0) el primer índice k que permite aumentar el valor de $CompVert[k]$ por medio de la siguiente condición:

$$CompVert[k] \leq \max\{CompVert[j] \mid 0 \leq j < k\}$$

Si $k=0$ entonces se ha generado todas las configuraciones posibles para C_q .

- ii. Asignar el nuevo valor de $CompVert[k]$, $comp_k$:

$$comp_k = \begin{cases} CompVert[k] + 1 & \text{si } CompVert[k-1] \neq CompVert[k] + 1 \\ CompVert[k] + 2 & \text{si } CompVert[k-1] = CompVert[k] + 1 \end{cases}$$

- iii. Asignar los valores a $CompVert[j]$ para todo $k < j < q$:

$$CompVert[j] = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq q-1 \text{ y } CompVert[j-1] \neq 0 \\ 1 & \text{si } CompVert[j-1] = 0 \\ 1 & \text{si } j = q-1 \text{ y } CompVert[j-1] \neq 1 \\ 2 & \text{si } j = q-1 \text{ y } CompVert[j-1] = 1 \end{cases}$$

Para conservar solamente los representantes canónicos de las configuraciones válidas y desechar los demás, se ha implementado una "función canónica" que se describe a continuación:

Comparar su vector $CompVert$ con los vectores $CompVert_k$, para $0 < k < q$, que se obtienen del siguiente modo:

- i. $Aux_k = [CompVert[k], CompVert[k+1], \dots, CompVert[k+q-1]]$
(índices módulo q).
- ii. Obtener $CompVert_k$ a partir de Aux_k , $0 < k < q$, renumerando las componentes fuertemente conexas de forma que se cumplan las condiciones iniciales de la *función siguiente*.

Si $CompVert$ es el menor de todos los vectores $CompVert_k$, $0 < k < q$, entonces es un representante canónico.

La renumeración de las componentes fuertemente conexas ha sido implementada de la siguiente manera:

- i. Asignar $CompNueva = 0$
- ii. Desde $j=0$ hasta $j=q-1$
 1. Si $Aux[j]$ no está renumerada:
 - a. Asignar $Comp = Aux[j]$
 - b. Cambiar en Aux_k los valores $Comp$ por $CompNueva$
 - c. Asignar $CompNueva = CompNueva + 1$

Una forma de representar el algoritmo implementado en esta fase de la investigación para cada ciclo C_q (para $2 \leq q \leq 19$) es la siguiente:

- Inicializar array $CompVert$
- Obtener la *configuración siguiente* (si es que existe. En este paso se utiliza la *función siguiente*)
- Mientras exista una *configuración siguiente*:
 - Si *configuración siguiente* no representa un multidigrafo:
 - Construir *matriz de adyacencia*
 - Si *matriz de adyacencia* es minimal:
 - Obtener *representante canónico*
 - Si *representante canónico* aún no ha sido obtenido antes:

- Almacenar *representante canónico* en archivo de texto

La Tabla 4 muestra los resultados obtenidos con la ejecución de la implementación descrita, en ella se puede apreciar cómo la cantidad de configuraciones posibles de componentes fuertemente conexas asociadas con los vértices de un ciclo C_q aumenta de manera exponencial a medida que q crece.

q	Cantidad de configuraciones válidas
2	1
3	1
4	2
5	2
6	5
7	6
8	16
9	28
10	43
11	162
12	427
13	1016
14	2836
15	7432
16	20579
17	52622
18	159172
19	449390

Tabla 4: Cantidad de representantes canónicos encontrados para las configuraciones de componentes fuertemente conexas asociadas a los vértices de un ciclo de longitud q .

4.2 Propiedades demostradas

Lema 1: Una CFC no puede contener vértices consecutivos de C_q .

Demostración:

Sea D un MSD que contiene al ciclo C_q cuyos vértices están asociados a CFC. Supongamos, por reducción al absurdo, que la CFC tiene dos vértices consecutivos, v_i y v_{i+1} . Entonces la arista $v_i v_{i+1}$ es transitiva, contradiciendo el hecho de que D es un MSD (ver Figura No. 33).

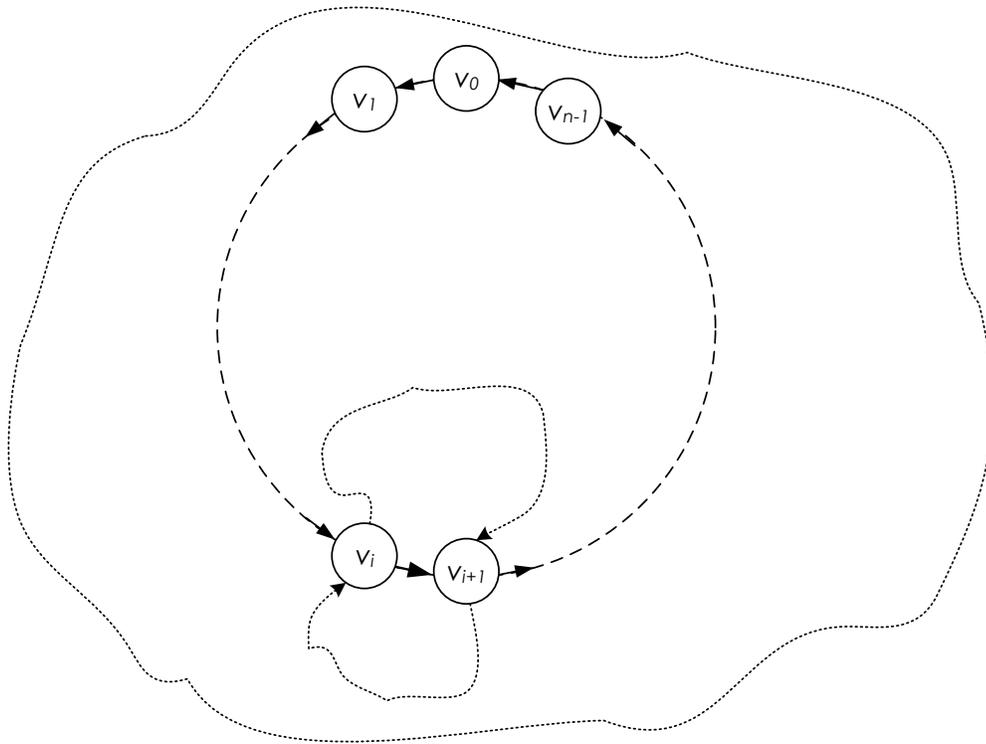


Figura No. 33: Ciclo que contiene un CFC al que pertenecen dos vértices consecutivos. Elaborado por: M. Arcos.

Definición: Decimos que dos CFC se cortan si cada una de ellas tiene dos vértices, u_1 y u_2 en la primera, y, v_1 y v_2 en la segunda, tales que el orden de dichos vértices en el ciclo C_q es $u_1 v_1 u_2 v_2$.

Lema 2: Si dos CFC se cortan entonces no pueden tener vértices consecutivos en el ciclo C_q .

Demostración:

Sea D un MSD que contiene al ciclo C_q cuyos vértices están asociados a CFC. Supongamos, por reducción al absurdo, que u y v

son vértices consecutivos en el ciclo C_q pertenecientes a dos CFC que se cortan ($u \in CFC_1$ y $v \in CFC_2$). Entonces la arista uv es transitiva, contradiciendo el hecho de que D es un MSD (ver Figura No. 34).

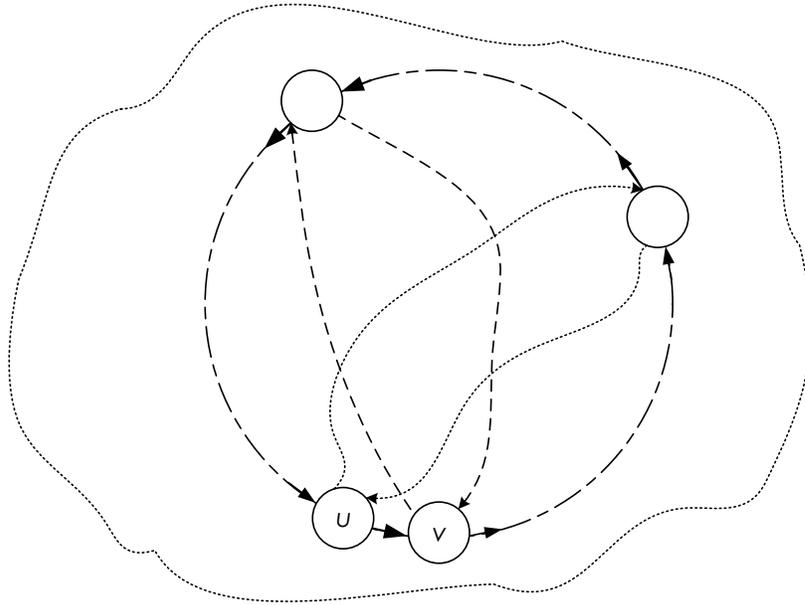


Figura No. 34: Digrafo que contiene dos CFC que se cortan. Elaborado por: M. Arcos.

Corolario 1: La cantidad de vértices λ_i contenida en una misma CFC_i está acotada por:

$$1 \leq \lambda_i \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor$$

Demostración:

Dado que, por el **lema 1**, la CFC_i no puede tener vértices consecutivos en el ciclo C_q , se concluye que:

$$\lambda_i \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor$$

La otra desigualdad, $1 \leq \lambda_i$ se cumple trivialmente.

Teorema 1: La cantidad Ω de CFC que pueden estar contenidas en un mismo ciclo C_q está acotada por:

$$\left\lfloor \frac{q+3}{2} \right\rfloor \leq \Omega \leq q$$

Demostración:

La desigualdad $\Omega \leq q$ se cumple trivialmente. Para probar la otra desigualdad consideramos los conjuntos de CFC construidos del siguiente modo:

- i. Considerar una CFC a la que se puede llamar CFC_1 , que contiene más de un vértice del ciclo C_q .
- ii. Para cada uno de los vértices de CFC_1 , considerar la CFC que contiene al siguiente vértice en el ciclo C_q y enumerar sus vértices, comenzando por el citado vértice, en el mismo orden en el que aparecen en el ciclo C_q .
- iii. Para cada una de las CFC obtenidas considerar las CFC asociadas (las CFC que contienen a los siguientes vértices en el ciclo C_q) a todos sus vértices salvo el último; y enumerar sus vértices, comenzando por los citados vértices, en el mismo orden en el que aparecen en el ciclo C_q .
- iv. Continuar el proceso aplicando (iii) a todas las CFC obtenidas mientras éstas tengan más de un vértice.

Suponer que en el proceso anterior, partiendo de la CFC_1 , se generan $CFC_1, CFC_2, \dots, CFC_s$ y que sus respectivos tamaños son k_1, k_2, \dots, k_s (ver la Figura No. 35). Dado que la CFC_1 genera k_1 nuevas CFC y la CFC_i ($2 \leq i \leq s$) genera $k_i - 1$ nuevas CFC, se verifica:

$$s = 1 + k_1 + (k_2 - 1) + \dots + (k_s - 1) = k_1 + k_2 + \dots + k_s - s + 2$$

Por tanto, el número de CFC es igual, en relación al número de vértices que contienen las CFC $k_1 + k_2 + \dots + k_s$:

$$s = \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_s + 2}{2}$$

Nótese que las CFC con un único vértice obtenidas en el proceso no generan a su vez ninguna nueva CFC y que el número de vértices cubierto por el conjunto de CFC generadas es siempre par (se emparejan cada vértice con el último vértice de la CFC asociada).

Mientras no se hayan cubierto todas las CFC con tamaño mayor que 1, se repite el proceso partiendo de una de estas CFC no incluida hasta el momento en ningún conjunto.

En cada iteración del proceso partimos de una CFC de tamaño mayor que 1 y de un vértice u tal que el anterior en el ciclo es un vértice tratado o bien un vértice que constituye una CFC y está en las mismas condiciones que u respecto a su vértice anterior en el ciclo (recursivamente). En dicha CFC ordenamos los vértices a partir de u y aplicamos el paso (iii) del proceso. Procediendo de esta forma aseguramos que los vértices siguientes a los de una CFC, a excepción del último, pertenecen a CFC no tratadas.

En cada iteración el número de CFC que se genera es $s' = \frac{k'_{s'} + \dots + k'_1 + 1}{2}$ y el número de vértices cubiertos es impar (se emparejan todos los vértices a excepción del último de la primera CFC)

Si llamamos i al número de conjuntos de CFC obtenidos y j al número de CFC con un único vértice no incluidas en ningún conjunto, entonces el número de CFC verifica:

$$\Omega = \frac{q' + i + 1 + 2j}{2} = \frac{q + i + j + 1}{2}$$

Donde q' es el número de vértices cubierto por las CFC incluidas en los i conjuntos. Dado que $i, j \geq 1$, obtenemos finalmente:

$$\Omega \geq \left\lceil \frac{q+3}{2} \right\rceil$$

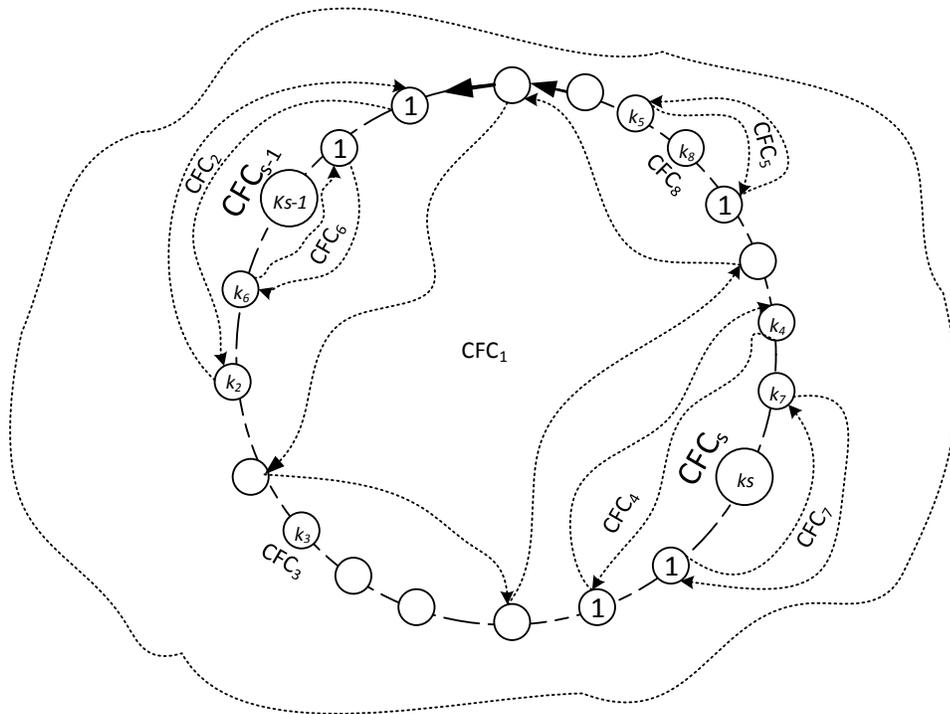


Figura No. 35: MSD cuyos CFC se han obtenido por medio del algoritmo descrito. Elaborado por: M. Arcos.

Corolario 2: El número Ω_1 de CFC con un único vértice verifica:

$$2 \leq \Omega_1 \leq q \quad \text{si } q \text{ es par}$$

$$3 \leq \Omega_1 \leq q \quad \text{si } q \text{ es impar}$$

Demostración:

La desigualdad $\Omega_1 \leq q$ se cumple trivialmente. La otra desigualdad se deduce de la demostración del teorema 1. En la generación de los conjuntos de CFC se obtienen, al menos, dos CFC con un único vértice en cada conjunto, esto demuestra el caso q par. El caso impar se deduce del hecho de que hay al menos una CFC de un único vértice que no se obtiene en el proceso.

4.3 Clases de vértices en las CFC

Sea D un MSD que contiene un ciclo C_q . Llamamos D' al digrafo resultante de suprimir en D las aristas del ciclo C_q . En dicho digrafo

consideramos las componentes fuertemente conexas. Contrayendo cada una de ellas en un vértice queda un grafo dirigido acíclico sin aristas transitivas, es decir, queda el diagrama de Hasse de una relación de orden parcial de las componentes fuertemente conexas, al que llamaremos H .

Sea S una componente fuertemente conexa de D' . Los vértices de S pertenecen a los siguientes conjuntos, no necesariamente disjuntos:

- 1) Conjunto V_c de vértices del ciclo C_q .
- 2) Conjunto V_i de vértices que tienen al menos una arista de entrada que procede de otra componente fuertemente conexa.
- 3) Conjunto V_f de vértices que tienen al menos una arista de salida que termina en otra componente fuertemente conexa.
- 4) Conjunto V_r de vértices que no pertenecen a ninguna de los conjuntos anteriores.

Estos conjuntos cumplen las siguientes propiedades:

- 1) $V_c \cup V_i \cup V_f \neq \emptyset$

Demostración: Basta con demostrar que alguno de los tres conjuntos siempre contendrá al menos un elemento.

Caso 1: S es un maximal y minimal del diagrama de Hasse. En ese caso, V_i y V_f son vacíos, pero la conexión fuerte de D obliga a que V_c no sea vacío.

Caso 2: S es un maximal, pero no minimal. Entonces V_f es vacío, pero V_i no lo es.

Caso 3: Si S es minimal pero no maximal, V_i es vacío pero V_f no lo es.

Caso 4: Si S no es maximal ni minimal, entonces ni V_i ni V_f son vacíos.

En todo caso, la unión de los tres conjuntos es no vacía.

2) Si S se corresponde con un vértice maximal o minimal de H , entonces $V_c \neq \emptyset$.

Demostración: Si S es un maximal, no hay aristas de salida desde ningún vértice de S a ninguna otra CFC, excepto quizá las aristas eliminadas del ciclo. Por tanto, si V_c es vacío, las aristas eliminadas del ciclo no involucran a ningún vértice de S , por lo que no hay aristas de salida desde ningún vértice de S hacia ningún vértice de D que no sean los de S . Eso está en contradicción con la conexión fuerte de D , ya que hay vértices de D que no están en S (por ejemplo, los vértices del ciclo), y a ellos no podríamos llegar desde los vértices de S (Figura No. 36 y Figura No. 37).

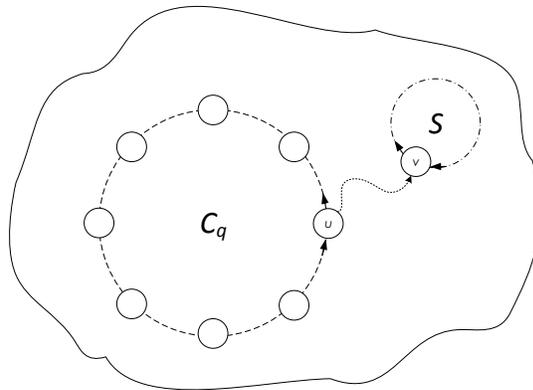


Figura No. 36: Se pierde la conexión fuerte pues no es posible conectar vértices de S con vértices de C_q . Elaborado por: M. Arcos.

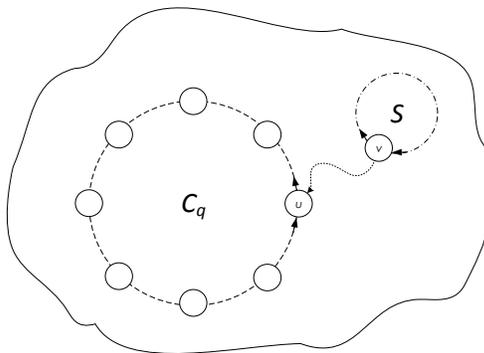


Figura No. 37: Se pierde la conexión fuerte pues no es posible conectar vértices de C_q con vértices de S . Elaborado por: M. Arcos.

3) Dados sendos vértices u y v pertenecientes a V_i y V_f respectivamente, existe un camino de u a v contenido en S .

Demostración: Dado que $u \in V_i$ y $v \in V_f$, y que V_i y V_f son conjuntos formados únicamente por vértices de S , y, por definición de componente fuertemente conexa, es evidente que en S siempre existirá un camino uv_path que contenga únicamente aristas de S .

4) Dados sendos vértices u y v pertenecientes a V_f y V_i respectivamente, existe en D un camino de u a v que no contiene aristas de S .

Demostración: A partir de H expandimos únicamente el vértice que corresponde a S para ubicar los vértices u y v . Nos ubicamos en u , recorremos por H el camino que inicia en el vértice u y que utiliza su arista de salida hacia otro vértice de H hasta encontrar un maximal de H , según la propiedad 2 en este maximal debe existir al menos un vértice de C_q al que podemos llamar w , por ahora tenemos un uw_path . Nos ubicamos ahora en el vértice v , recorremos por H el camino en sentido contrario utilizando la arista de entrada del vértice v hasta encontrar un minimal de H , según la propiedad 2 este minimal debe contener al menos un vértice de C_q al que podemos llamar t , tenemos ahora un tv_path . Es necesario que utilizando las aristas del ciclo exista un wt_path , por lo tanto existe un camino $uv_path = uw_path + wt_path + tv_path$ que no utiliza las aristas de S , pues utiliza: aristas de H , aristas contenidas en cada CFC que se encuentran en los caminos uw_path y tv_path (estos CFC corresponden a los vértices de H), y utiliza aristas de C_q , todas estas aristas son disjuntas con S (Figura No. 38).

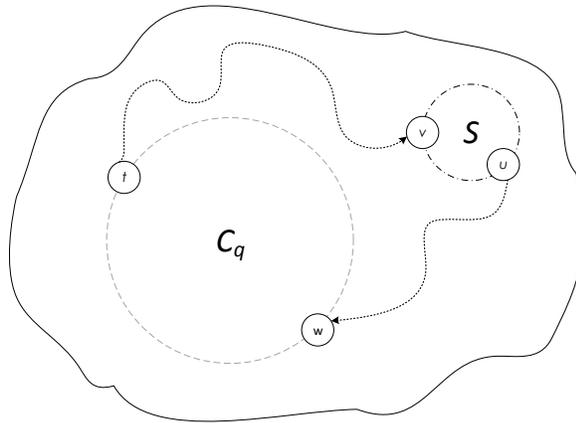


Figura No. 38: Ejemplo de camino que no contiene aristas de S .
Elaborado por: M. Arcos.

Definición: Dados dos vértices u y v pertenecientes a S , decimos que $u=U_0, U_1, \dots, U_j=U', v'=V_0, V_1, \dots, V_k=V$ es un pseudocamino de u a v respecto de la arista $v'u'$ si U_0, U_1, \dots, U_j y V_0, V_1, \dots, V_k son caminos en S pero la arista $v'u'$ se recorre en sentido inverso.

Lema 3: Dados dos vértices u y v cualesquiera de S , tales que $u \in V_c \cup \mathcal{V}_i$ y $v \in V_c \cup \mathcal{V}_f$, entonces no existe ningún pseudocamino entre u y v .

Demostración:

Basta con demostrar que si existiera una arista $v'u'$, esta sería transitiva en D . Por definición, en S siempre existirá un camino $v'v_path$, y otro camino uu'_path . Por otra parte, la propiedad 4 que acabamos de exponer implica que existe un camino vu_path en D . Por tanto, el lema se demuestra, pues siempre existiría un camino $v'u'_path = v'v_path + vu_path + uu'_path$, este camino es distinto de la arista $v'u'$, entonces esta arista sería transitiva en D .

Proposición 1: Sea S una componente fuertemente conexa de D' tal que $V_i = V_f = \emptyset$. Entonces S contiene al menos un vértice lineal en D .

Demostración:

Considerando que:

- S se conecta con todo el resto del digrafo únicamente por medio de los vértices que tiene en común con C_q .
- S no tiene aristas de entrada que procedan de otras CFC ni aristas de salida hacia otras CFC.
- S es una CFC minimal

Suponiendo primeramente el caso en el que S toca a C_q en un solo vértice u :

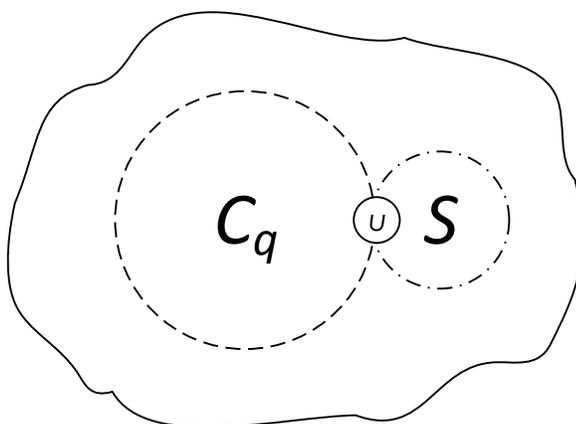


Figura No. 39: Caso en el que S y C_q tienen solamente un vértice en común. Elaborado por: M. Arcos.

Al eliminar las aristas que entran y que salen de u , excepto las aristas contenidas en S , en este caso las aristas eliminadas son las de C_q , obtenemos el siguiente digrafo D' (Figura No. 40).

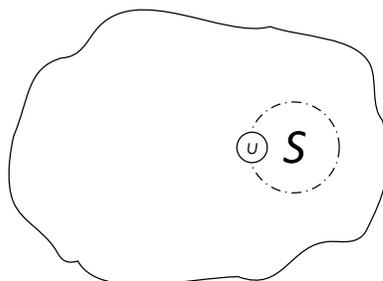


Figura 40: Digrafo D' en el que se ha eliminado las aristas de C_q a partir del MSD de la Figura No. 39. Elaborado por: M. Arcos.

Se obtiene entonces S de manera aislada en D' , como S es una CFC minimal, entonces S es un sub-digrafo que representa un MSD. Todo MSD debe tener al menos dos vértices lineales, uno de ellos podría ser u , pero u no es lineal en D , pues tiene las aristas de S y de C_q , en el caso de que u sea lineal en D' , S tendrá al menos otro vértice lineal p distinto de u que sí es lineal en D .

Suponer ahora el caso que S y C_q tienen exactamente dos vértices en común u_0 y u_1 (Figura No. 41).

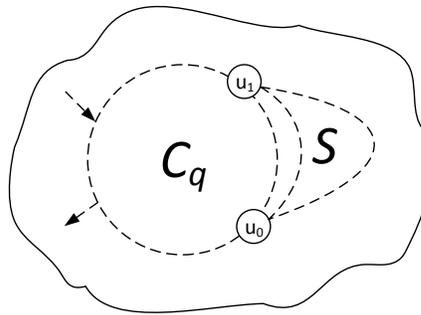


Figura No. 41: Ejemplo de caso en el que S y C_q tienen exactamente dos vértices en común. Elaborado por: M. Arcos.

Se obtiene D' al contraer C_q en un solo vértice u (Figura No. 42):

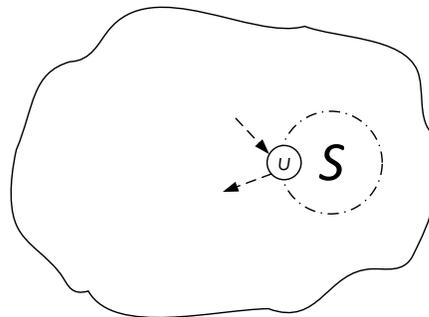


Figura No. 42: Digrafo D' que resulta de contraer C_q en un solo vértice. Elaborado por: M. Arcos.

El caso se resuelve de manera totalmente análoga al caso anterior: eliminar las aristas que entran y salen de u excepto las aristas contenidas en S , se obtiene un digrafo D'' similar al de la Figura No.

40, por lo tanto S es un MSD aislado dentro de D'' , entonces S contiene al menos dos vértices, u no podría ser lineal en D'' , pues tiene al menos dos aristas de entrada y dos aristas de salida, producto de los vértices u_0 y u_1 , entonces S tendrá al menos dos vértices lineales en D .

Finalmente suponemos el caso en el que S y C_q tienen una cantidad j de vértices en común (Figura No. 43):

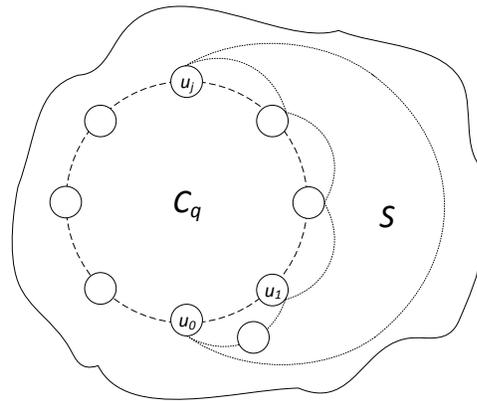


Figura No. 43: Ejemplo en el que S y C_q tienen varios vértices en común. Elaborado por: M. Arcos.

El caso anterior permite generalizar la solución de la proposición pues se resuelve de manera totalmente análoga, mediante la contracción de C_q en un solo vértice u , y la obtención de la CFC S de manera aislada mediante la eliminación de todas las aristas de entrada y salida del vértice u excepto las aristas que pertenecen a S . En este caso S también contiene al menos dos vértices lineales en D .

Proposición 2: Toda CFC que no esté compuesta por un único vértice, y , que tenga exactamente una arista de entrada y una arista de salida en el diagrama de Hasse, tiene al menos un vértice lineal en D .

Demostración:

Sea D un MSD que contiene al ciclo C_q y a la CFC S . Sea v un vértice contenido en S al que corresponde la arista de entrada en el diagrama de Hasse, y u otro vértice de S al que corresponde la arista de salida (para $v \neq u$, caso contrario, si $v = u$ entonces S sería un maximal y minimal compuesto por un único vértice, esto contradice la proposición). Sea D' el digrafo obtenido a partir de D mediante la eliminación de la arista de entrada y de la arista de salida de S . Se obtiene entonces a S de manera aislada, por lo tanto, S es un MSD aislado contenido en D' .

Suponer por reducción al absurdo que S solo tiene dos vértices lineales y que estos coinciden con u y v (por tanto u y v no son lineales en D). Luego, por la Propiedad 10, S es un digrafo lineal, y los vértices u y v solamente pueden pertenecer a un ciclo C_2 o C_3 .

Si S estuviera conformado únicamente por los vértices u y v , entonces S sería el ciclo C_2 , esto no sería posible pues una de las dos aristas de S sería transitiva en D (Ver Figura No. 44).

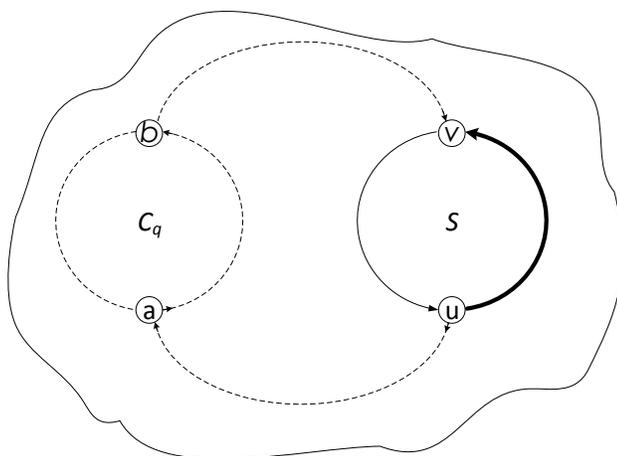


Figura No. 44: Caso en el que S sería un subdigrafo lineal en D' conformado únicamente por dos vértices. Elaborado por: M. Arcos.

En el caso en el que S estuviera conformado por más de dos vértices entonces u y v deben pertenecer o bien a un ciclo C_2 o bien a un ciclo C_3 . Analizamos estos dos casos para el vértice v .

Caso en el que v pertenece al ciclo C_2 formado por v, v', v . Como v es un vértice lineal en D' , cualquier camino que utilice únicamente aristas de S y que pase por el vértice v necesariamente debe contener a la arista $v'v$. Por definición de MSD lineal, debe existir en S los siguientes caminos que utilicen únicamente aristas de S : un $v'u_path$ (que no utiliza la arista $v'v$), un uv'_path (que no utiliza la arista $v'v$). Como D es fuertemente conexo debe existir un uv_path_1 que no utiliza aristas de S (por lo tanto no utiliza la arista $v'v$), entonces también existe un $v'v_path = v'u_path + uv_path_1 \neq v'v$, por lo tanto la arista $v'v$ contenida en S sería transitiva en D (Figura No. 45).

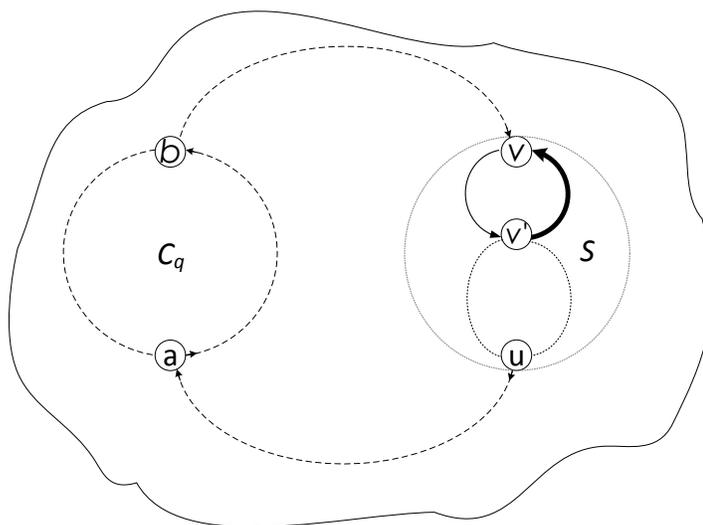


Figura No. 45: Caso en el que S sería un subdigrafo lineal en D' y en el que uno de los vértices de S pertenece a un ciclo C_2 . Elaborado por: M. Arcos.

Caso en el que v pertenece al ciclo C_3 formado por v, v', v'', v . Como v es un vértice lineal en D' , cualquier camino que utilice únicamente aristas de S y que pase por el vértice v necesariamente debe

contener la arista $v''v$. Por definición de MSD lineal, S debe contener los siguientes caminos que utilicen únicamente aristas de S : uv''_path (que no utiliza la arista $v''v$), $v''u_path$ (que no utiliza la arista $v''v$). Como D es fuertemente conexo entonces existe un camino uv_path_1 que no utiliza aristas de S (por lo tanto no utiliza la arista $v''v$), entonces existe un camino $v''v=v''u_path+uv_path_1 \neq v''v$, por lo tanto la arista $v''v$ es transitiva en D (Figura No. 46).

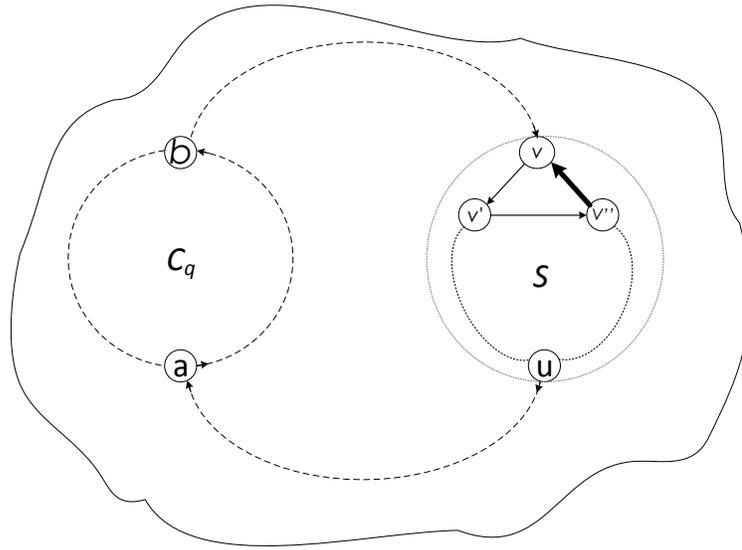


Figura No. 6: Caso en el que S sería un subdigrafo lineal en D' y en el que uno de los vértices de S pertenece a un ciclo C_3 . Elaborado por: M. Arcos.

Por lo tanto, como S está conformado por más de un vértice, y como S no puede ser un digrafo lineal en D' , entonces S debe contener al menos tres vértices lineales en D' , al menos uno de estos también será lineal en D .

Lema 4: Una CFC no puede coincidir con un ciclo sin vértices lineales en D .

Demostración:

Sea D un MSD. Sea C_q un ciclo de longitud q contenido en D , y sea S una CFC también contenida en D que coincide con el ciclo de longitud p en el que ninguno de sus vértices es lineal en D , luego $S=C_p$. Dado que todos los vértices de C_p tienen al menos una arista terminal de un camino procedente de C_q , o, al menos una arista inicial de un camino que se dirige hacia C_q , o pertenecen a C_q , y como se debe mantener la propiedad de conexión fuerte, entonces siempre existirá en C_p al menos un par de vértices u, v consecutivos que coincida con uno de los siguientes casos (en C_p existe la arista uv):

Caso 1: $u \in V_f$ y $v \in V_i$ (ver Figura No. 47 (A))

Caso 2: $u \in V_c$ y $v \in V_i$ (ver Figura No. 47 (B))

Caso 3: $u \in V_f$ y $v \in V_c$ (ver Figura No. 47 (C))

Caso 4: $u \in V_c$ y $v \in V_c$ (ver Figura No. 47 (D))

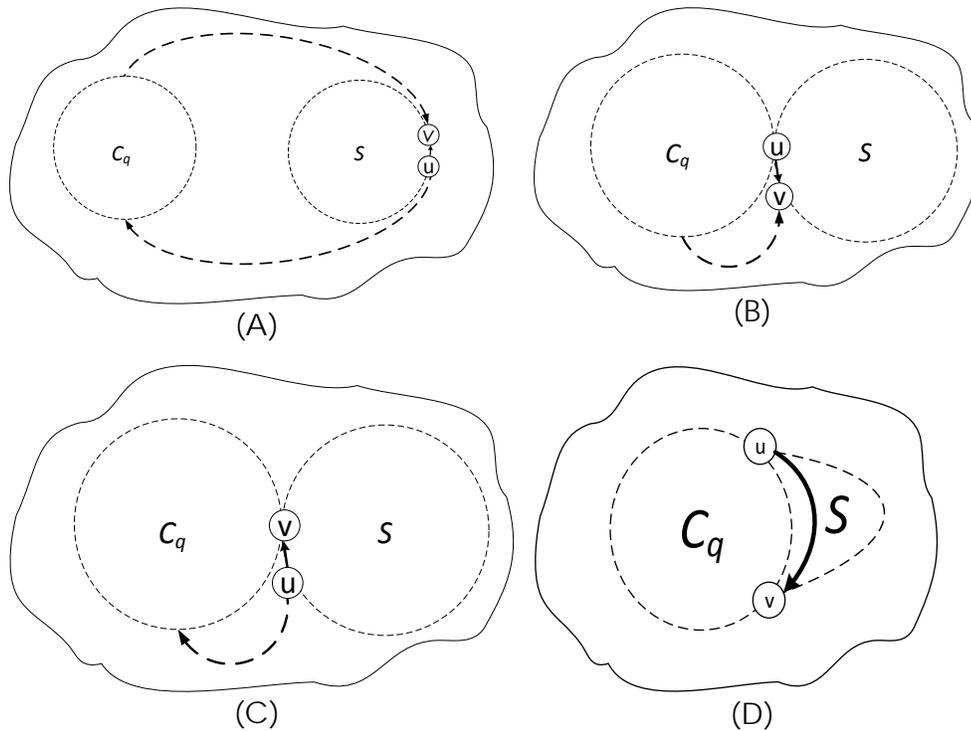


Figura No. 47: Casos posibles de vértices consecutivos de una CFC cuando esta coincide con un ciclo sin vértices lineales en D . Elaborado por: M. Arcos.

Es claro que en todos los casos existe un uv_path que no utiliza aristas de S , entonces la arista uv contenida en S sería transitiva. Por lo tanto S no puede coincidir con un ciclo C_p que no tenga vértices lineales en D . Si $S=C_p$ entonces S tiene al menos un vértice lineal en D .

Proposición 3: Toda CFC que no esté conformada por un único vértice, y , que tenga cualquier cantidad de aristas de entrada y salida en el diagrama de Hasse, y , que contenga cualquier número de vértices del ciclo C_q , tiene al menos un vértice lineal en D .

Demostración:

Sea D un MSD que contiene al ciclo C_q . Sea S una CFC que tiene g aristas de entrada procedentes de C_q , h aristas de salida hacia C_q , y j vértices de C_q (para $j \leq q$). Sea n_s la cantidad de vértices que conforman S .

Demostramos el resultado por inducción en n_s :

Paso base: Si $n_s=2$ entonces S es el ciclo C_2 y la propiedad se verifica por el lema 4.

Paso de inducción: Sea S una CFC conformada por n_s+1 vértices, y supongamos por hipótesis de inducción que toda CFC conformada por un número de vértices menor o igual a n_s contiene al menos un vértice lineal en D .

- Si S es el ciclo C_{n_s+1} entonces la propiedad se verifica por el lema 4.
- Si S contiene a un ciclo C_p en el que ninguno de sus vértices es lineal en D , y donde $p \leq n_s$, entonces S contiene al menos un vértice que no pertenece a C_p .
 - Si $p=2$, entonces S contiene el ciclo C_2 . Aplicando la propiedad 12 concluimos que los vértices de C_2 son lineales o puntos de corte. Si alguno de ellos

es lineal la propiedad se verifica. Si los dos son puntos de corte significa que el ciclo C_2 desconecta el MSD y por lo tanto sólo puede haber aristas entrantes y salientes y vértices del ciclo C_q en una de las componentes conexas que genera el ciclo C_2 . Entonces, en la otra, hay necesariamente un vértice lineal.

- o Si $p \geq 3$, la contracción de C_p en un solo vértice z genera una nueva CFC a la que llamamos S' que está contenida en D' . La cantidad de vértices de S' está dada por $2 \leq n_s - p + 2 < n_s$. Por la hipótesis de inducción S' contiene al menos un vértice lineal al que podemos llamar u . Luego, $u \neq z$, pues z representa a C_p contraído y ningún vértice de C_p es lineal, es decir cada vértice de C_p tiene al menos una arista adicional que no está contenida en C_p . Como $p \geq 3$, entonces z tiene al menos tres aristas. Por lo tanto el vértice lineal u está fuera de C_p , entonces u también es lineal en D .

Por el principio de inducción la proposición queda demostrada.

5. Conclusiones

La teoría de grafos es un tema importante para las Ciencias de la Computación. Los MSD son una generalización de los árboles dirigidos. Existen semejanzas y analogías importantes entre los MSD y los árboles dirigidos dobles. El número de aristas de un MSD depende del número de vértices del mismo. La contracción de un ciclo C_q es una propiedad importante de los MSD, a partir de la cual se pueden demostrar muchas otras propiedades. Las propiedades de los MSD demostradas permiten delimitar a esta familia de digrafos y profundizar su estudio. La cantidad de CFC asociadas a los vértices de un ciclo C_q depende del tamaño de q . La cantidad de vértices de un ciclo C_q contenidos en una misma CFC es como mucho $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor$. La cantidad de CFC asociadas a los vértices de un ciclo C_q está acotada por $\lfloor \frac{q+3}{2} \rfloor \leq \Omega \leq q$. Cualquier CFC que no tenga aristas en el diagrama de Hasse contiene al menos un vértice lineal en D . Cualquier CFC que esté conformada por más de un vértice, y, con exactamente una arista de entrada y una de salida en el diagrama de Hasse tiene al menos un vértice lineal en D . Cualquier CFC que esté conformada por más de un vértice, y, con cualquier número de aristas de entrada y salida en el diagrama de Hasse y con cualquier número de vértices en común con el ciclo C_q , tiene al menos un vértice lineal en D . En trabajos futuros se estudiará la posibilidad de existencia de algoritmos que permitan resolver problemas de tipo NP en tiempo polinomial para los MSD.

6. Referencias bibliográficas

García-López, J. & Marijuán, C. (2012). Minimal strong digraphs. *Discrete Mathematics*. 312, 737-744.

García-López, J., Marijuán, C. & L. M. Pozo-Coronado (comunicación personal), Structural properties of minimal strong digraphs versus trees.

Bang-Jensen, J., & Gutin, G. (2001). *Digraphs, Theory, Algorithms and Applications*. Springer Monographs in Mathematics.