

**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID**  
**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE**  
**TELECOMUNICACIÓN**



**Caracterización de circuitos no lineales: análisis de  
modelos algebraico-diferenciales mediante la teoría  
de grafos**

**TESIS DOCTORAL**

Ignacio García de la Vega Chamorro  
*Ingeniero de Telecomunicación*

2017



Departamento de Matemática Aplicada a las Tecnologías de la Información y  
las Comunicaciones

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE  
TELECOMUNICACIÓN



# **Caracterización de circuitos no lineales: análisis de modelos algebraico-diferenciales mediante la teoría de grafos**

Autor: Ignacio García de la Vega Chamorro  
*Ingeniero de Telecomunicación*

Director: Ricardo Riaza Rodríguez  
*Doctor en Ciencias Matemáticas*  
*Ingeniero de Telecomunicación*



Tribunal nombrado por el Mgfco. y Excmo. Sr. Rector de la Universidad Politécnica de Madrid, el día

Presidente:

Vocal:

Vocal:

Vocal:

Secretario:

Realizado el acto de defensa y lectura de la Tesis el día  
en Madrid.

Calificación<sup>1</sup>:

Fdo.:

EL PRESIDENTE

LOS VOCALES

EL SECRETARIO

---

<sup>1</sup>Conforme al Real Decreto 99/2011, el Tribunal podrá otorgar la mención de *cum laude* si la calificación global es de Sobresaliente y se emite en tal sentido el voto secreto positivo por unanimidad. De acuerdo con el Reglamento de Doctorado de la Universidad Politécnica de Madrid, en el caso de que la calificación sea de Sobresaliente los votos serán introducidos en un sobre que quedará cerrado y cuya apertura se realizará en una reunión posterior de la Comisión Académica del Programa de Doctorado.



# AGRADECIMIENTOS

Este trabajo no hubiera sido posible sin el apoyo permanente de mi director de tesis, Ricardo Riaza. Su motivación y sus enseñanzas me han acompañado desde mucho antes de comenzar este proyecto. Por todo ello quisiera expresarle mi gratitud.

Quiero darles las gracias a mis padres por todos los esfuerzos y recursos que han destinado a mi formación durante tantos años. Me gustaría también destacar la ayuda y las enseñanzas que me han proporcionado mis abuelos.

La investigación que ha conducido a los resultados que se recogen en esta Tesis Doctoral ha sido parcialmente financiada por los Proyectos de Investigación MTM2010-15102 y MTM2015-67396-P del Plan Estatal de I+D+i del Ministerio de Economía y Competitividad, en los que se enmarcan las líneas de investigación aquí abordadas, y por el Departamento de Matemática Aplicada a las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones de la ETSI Telecomunicación (Universidad Politécnica de Madrid).





---

# RESUMEN

---

La presente Tesis Doctoral tiene por objeto el estudio de ciertas propiedades de las ecuaciones algebraico-diferenciales que aparecen en el modelado de circuitos eléctricos y electrónicos no lineales. Se sitúa en la denominada *aproximación estructural* a la teoría de circuitos no lineales, que pretende caracterizar sistemáticamente diferentes propiedades analíticas de estos en términos de la topología del digrafo subyacente y de las propiedades eléctricas de los dispositivos que conforman el circuito.

Diversos trabajos previos han abordado el estudio de propiedades tanto analíticas como, específicamente, cualitativas en el contexto de los circuitos no lineales y desde esa perspectiva estructural. Desde un punto de vista analítico, uno de los problemas centrales en esta disciplina es la caracterización del denominado *índice* de diferentes modelos algebraico-diferenciales de circuitos no lineales. Trabajos recientes han empleado resultados procedentes de la teoría de grafos para abordar la caracterización del índice en contextos no pasivos; estos trabajos, sin embargo, presentan algunas limitaciones que se superan en esta Tesis mediante la utilización de nuevos modelos y técnicas. A grandes rasgos, tales limitaciones radican en el hecho de que solo se ha abordado el estudio de configuraciones denominadas no degeneradas en modelos nodales y con ciertas restricciones en las variables de control de los dispositivos. En el curso de nuestra investigación se ha obtenido una caracterización general del índice sin las restricciones anteriores, mediante el empleo de modelos simétricos (específicamente, modelos de ramas e híbridos).

La segunda línea de trabajo, de tipo cualitativo, se centra en aspectos de estabilidad y en el análisis de bifurcaciones en puntos de equilibrio asociados a la polarización de circuitos. Específicamente, se abordará de forma novedosa la caracterización de la bifurcación silla-nodo en circuitos no lineales. El elemento clave que conecta estos resultados con los anteriores estriba en que la linealización del problema en el punto de bifurcación conduce a una forma en cierto sentido dual de las matrices que surgen en la caracterización del índice.

En la primera parte de la Tesis se detalla el contexto teórico en el cual se enmarcan los resultados. Se recopilarán los conceptos y resultados de la teoría de grafos, álgebra matricial, ecuaciones algebraico-diferenciales y sistemas dinámicos que necesitaremos más adelante, y se hará una introducción detallada a los diferentes modelos circuitales que se abordarán posteriormente.

En una segunda parte se aborda la caracterización del índice anteriormente referida. Se caracterizará el conjunto de configuraciones que conducen a modelos de índice uno y dos sin imponer restricciones de pasividad ni restringir las variables de control o las topologías admitidas. En la obtención de estos resultados ha sido necesario abordar la caracterización de la

regularidad de un determinado tipo de matrices (matrices *mixtas*), ampliando ciertos resultados previos de Maxwell y Kirchhoff a través de un teorema de interés independiente.

La última parte del trabajo se centra en la caracterización de la bifurcación silla-nodo en circuitos no lineales, mediante la adaptación del teorema clásico que describe esta bifurcación (demostrado por J. Sotomayor en 1973) al contexto algebraico-diferencial para, en una segunda fase, caracterizar las configuraciones circuitales que dan lugar a este fenómeno.

A lo largo de toda la Tesis tendrá un papel esencial el *memristor*. Se trata del que puede entenderse como cuarto elemento circuital fundamental junto a resistencias, bobinas y condensadores, cuya existencia se postuló en 1971 y que ha sido objeto de intensa investigación en la última década. Todos los resultados analíticos obtenidos en el curso de la investigación se extenderán al contexto de los circuitos memristivos.

**PALABRAS CLAVE:** grafo, digrafo, árbol de expansión, árbol normal, circuito no lineal, memristor, modelo de ramas, modelo híbrido, fórmula de Cauchy-Binet, ecuación algebraico-diferencial, índice, punto de equilibrio, estabilidad, bifurcación silla-nodo.

---

# ABSTRACT

---

This Doctoral Thesis addresses the study of certain properties of differential-algebraic equations arising in nonlinear electrical and electronic circuit modelling. According to the so-called *structural approach* to nonlinear circuit theory, we aim at a systematic characterization of different analytical properties of such circuits in terms of the topology of the underlying digraph and the electrical features of the devices.

Different previous works have tackled several analytical and qualitative properties in the nonlinear circuit setting within the aforementioned approach. From an analytical point of view, one of the main problems in this discipline is the characterization of the *index* of differential-algebraic circuit models. Recent works have used graph-theoretic tools in order to address the index characterization in a non-passive context; these works, however, present several limitations which are overcome in this Thesis by means of novel models and techniques. Broadly, such limitations are related to the fact that previous approaches are focused on non-degenerate topologies in nodal models, with several additional restrictions on the controlling variables of the circuit devices. In this research we obtain a very general index characterization without such restrictions by using so-called *symmetric* models (specifically, branch models and hybrid models).

The second research direction, which involves qualitative aspects, is focused on stability issues and on the analysis of bifurcations of equilibria which model operating points of nonlinear circuits. Specifically, we address in a novel manner the characterization of the saddle-node bifurcation in nonlinear circuits. The key element connecting these results to the previous ones is the fact that the linearization at the bifurcation point leads to certain matrices which are in a sense dual to the ones arising in index analyses.

The first part of the document details the theoretical background which frames the research. We compile concepts and results from graph theory, matrix analysis, differential-algebraic equations and dynamical systems which are needed later, and provide a detailed introduction to the different circuit models which will be analyzed in later chapters.

The second part of the work addresses the index characterization mentioned above. We will characterize the configurations leading to index one and index two models without restrictions on the circuit topology or on the passivity or controlling variables of the devices. In order to achieve these results we will tackle the non-singularity of a family of matrices (so-called *mixed matrices*) and will obtain a result which nicely generalizes two previous ones by Kirchhoff and Maxwell dual to each other.

Finally, we tackle the characterization of the saddle-node bifurcation in nonlinear circuits, by adapting Sotomayor's saddle-node theorem (proved in 1973) to the differential-algebraic

context. This paves the way for a later analysis of the configurations which are responsible for this phenomenon in the circuit context.

Throughout the whole document, a key role is played by the *memristor*. This can be understood as the fourth elementary circuit element, alongside resistors, inductors and capacitors. The existence of this device was postulated in 1971 and it has been the object of much research attention in the last decade. All our analytical results will be also extended to the memristive circuit context.

**KEYWORDS:** graph, digraph, spanning tree, normal tree, nonlinear circuit, memristor, branch model, hybrid model, Cauchy-Binet formula, differential-algebraic equation, index, equilibrium point, stability, saddle-node bifurcation.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Contexto y objetivos de la investigación . . . . .	1
1.2. Estructura del documento . . . . .	3
1.3. Parte I: Marco teórico . . . . .	3
1.3.1. Fundamentos matemáticos . . . . .	4
1.3.2. Modelos circuitales . . . . .	4
1.4. Parte II: Estudio del índice de modelos simétricos . . . . .	5
1.5. Parte III: Aspectos cualitativos . . . . .	6
<b>I Preliminares</b>	<b>9</b>
<b>2. Fundamentos matemáticos</b>	<b>11</b>
2.1. Teoría de grafos . . . . .	11
2.1.1. Conceptos fundamentales . . . . .	12
2.1.2. Representación matricial de digrafos . . . . .	13
2.1.3. Árboles normales . . . . .	17
2.2. Algunos resultados del análisis matricial . . . . .	18
2.2.1. Complemento de Schur . . . . .	19
2.2.2. Fórmula de Cauchy-Binet . . . . .	19
2.3. Ecuaciones algebraico-diferenciales . . . . .	20
2.3.1. Ecuaciones lineales y haces de matrices . . . . .	21
2.3.2. Ecuaciones semiexplícitas y semilineales . . . . .	23
2.3.3. Ecuaciones de Hessenberg . . . . .	25
2.3.4. Ecuaciones cuasilineales . . . . .	26

2.4.	Teoría local de sistemas dinámicos . . . . .	27
2.4.1.	Sistemas modelados por ecuaciones diferenciales ordinarias explícitas .	27
2.4.2.	Sistemas modelados por ecuaciones algebraico-diferenciales . . . . .	29
<b>3.</b>	<b>Modelos circuitales</b>	<b>33</b>
3.1.	Leyes de Kirchhoff y dispositivos circuitales clásicos . . . . .	34
3.1.1.	Variables fundamentales . . . . .	34
3.1.2.	Leyes de Kirchhoff . . . . .	35
3.1.3.	Dispositivos clásicos: ecuaciones características . . . . .	35
3.2.	El memristor . . . . .	37
3.2.1.	Memristores y sistemas memristivos . . . . .	37
3.2.2.	Ecuaciones del memristor . . . . .	38
3.3.	Pasividad . . . . .	40
3.4.	Modelo de ramas . . . . .	40
3.4.1.	Circuitos clásicos . . . . .	40
3.4.2.	Circuitos memristivos . . . . .	41
3.5.	Modelo híbrido . . . . .	42
3.5.1.	Ecuaciones híbridas para circuitos clásicos . . . . .	42
3.5.2.	Circuitos con memristores . . . . .	45
3.6.	Otros modelos . . . . .	48
<b>II</b>	<b>Análisis del índice en modelos simétricos de circuitos no pasivos</b>	<b>51</b>
<b>4.</b>	<b>Matrices mixtas y caracterización del índice en el modelo de ramas</b>	<b>53</b>
4.1.	Introducción . . . . .	53
4.2.	Fórmula de Maxwell para el cálculo de determinantes . . . . .	54
4.3.	Matrices mixtas . . . . .	57
4.3.1.	Definición . . . . .	57
4.3.2.	Extensión de los desarrollos de Maxwell y Kirchhoff . . . . .	58
4.4.	Análisis del índice del modelo de ramas . . . . .	61
4.4.1.	Configuraciones de índice uno . . . . .	62

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	III
4.4.2. Configuraciones de índice dos . . . . .	64
4.5. Análisis del índice en circuitos memristivos . . . . .	70
4.6. Casos de estudio . . . . .	72
4.6.1. Índice uno . . . . .	72
4.6.2. Índice dos . . . . .	74
<b>5. Análisis del índice en modelos híbridos</b>	<b>77</b>
5.1. Introducción . . . . .	77
5.2. Configuraciones de índice cero . . . . .	78
5.3. Configuraciones de índice uno . . . . .	80
5.4. Estudio del modelo híbrido de circuitos con memristores . . . . .	82
5.5. Fuentes independientes . . . . .	84
5.6. Casos de estudio . . . . .	85
5.6.1. Índice de un circuito con memristores . . . . .	85
5.6.2. Transistores y fuentes controladas . . . . .	88
<b>III Aspectos cualitativos</b>	<b>93</b>
<b>6. Bifurcaciones silla-nodo en circuitos no lineales</b>	<b>95</b>
6.1. Introducción . . . . .	95
6.2. Bifurcación silla-nodo en EDOs explícitas . . . . .	96
6.3. Formulación algebraico-diferencial . . . . .	98
6.4. La bifurcación silla-nodo en circuitos no lineales clásicos . . . . .	101
6.5. Circuitos con memristores . . . . .	109
6.6. Caso de estudio . . . . .	112
<b>7. Conclusiones y líneas futuras de investigación</b>	<b>115</b>
7.1. Análisis del índice sin restricciones de pasividad . . . . .	115
7.2. Aspectos cualitativos . . . . .	117
<b>Bibliografía</b>	<b>119</b>





# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Contexto y objetivos de la investigación

Las ecuaciones algebraico-diferenciales (*differential-algebraic equations*, DAEs) han desempeñado un papel muy significativo durante los últimos años en el análisis y la simulación de diferentes sistemas en diversos campos de las ciencias y la ingeniería y, específicamente, en la teoría de circuitos eléctricos y electrónicos no lineales [7, 59, 60, 77, 78, 104, 111]. A grandes rasgos, el formalismo algebraico-diferencial permite establecer modelos matemáticos de circuitos complejos de manera automática, a partir de los cuales es posible aplicar un tratamiento numérico directo o abordar el estudio de diferentes aspectos analíticos y cualitativos de la dinámica circuital sin necesidad de obtener un modelo reducido (denominado *modelado de estados*) formulado como una ecuación diferencial ordinaria (EDO). En muchos casos reales, la obtención automática de estos modelos de estados es difícil o imposible. En este sentido, los modelos algebraico-diferenciales o de *semiestados* permiten superar diferentes limitaciones de las metodologías basadas en la formulación de tales modelos de estados.

En el contexto anterior, la caracterización del índice de los modelos algebraico-diferenciales de circuitos eléctricos y electrónicos es un problema central en la simulación de circuitos no lineales [32, 54, 55, 107, 111, 136, 137]. Esto se debe al hecho de que el índice tiene una relación directa con las técnicas numéricas empleadas en la simulación de la dinámica circuital, y también con diversas propiedades analíticas y cualitativas de los sistemas que modela la ecuación algebraico-diferencial correspondiente. Para una introducción detallada al concepto de índice algebraico-diferencial (que, en términos generales, extiende al contexto no lineal la noción de *índice de nilpotencia* de un haz de matrices) pueden consultarse las referencias [7, 59, 60, 77, 78, 104, 111].

El empleo de formulaciones de semiestados para el modelado de circuitos no lineales tiene su origen en los trabajos seminales de Dziurla y Newcomb [29, 96]. No obstante, el análisis del índice de modelos circuitales algebraico-diferenciales no se aborda de una manera sistemática hasta finales de la década de los 90 [32, 107, 136, 137], dentro de lo que puede denominarse una filosofía *estructural* para el análisis de circuitos no lineales. Esta metodología pretende caracterizar sistemáticamente diferentes propiedades analíticas de los circuitos en términos de la topología del digrafo subyacente y de las propiedades de los elementos que constituyen el

mismo. No obstante, la aplicabilidad de las caracterizaciones del índice obtenidas en los trabajos citados anteriormente se limita al contexto pasivo, es decir, a circuitos en los que las matrices incrementales de inductancia, capacidad, conductancia y resistencia (siendo cada una de las dos últimas independiente de la otra, entendiéndose que se aplican, respectivamente, a resistencias controladas por tensión y por corriente) son definidas positivas en toda la región de trabajo. En consecuencia, de los resultados anteriores quedan excluidos, por citar algunos ejemplos relevantes, las resistencias no lineales que aparecen en los osciladores de Van der Pol [138] o en el circuito de Chua [37, 82]. Muchos elementos circuitales modernos, como las uniones de Josephson o los diodos de efecto túnel, tampoco satisfacen la condición de pasividad en ciertas regiones de operación.

En trabajos previos a la presente Tesis se abordó la caracterización del índice en modelos circuitales nodales sin condiciones de pasividad [30, 31, 116]. No obstante, tales trabajos presentan diversas limitaciones que se superarán en el curso de esta investigación mediante la utilización de nuevos modelos y técnicas. A grandes rasgos, tales limitaciones radican en el hecho de que solo se ha abordado el estudio de configuraciones denominadas *no degeneradas* en modelos nodales y con ciertas restricciones en las variables de control de los dispositivos involucrados. El primero de los objetivos de la investigación desarrollada en esta Tesis Doctoral se sitúa en este contexto, dando continuidad a los estudios del índice sin restricciones de pasividad: se pretende, específicamente, caracterizar de forma completa el conjunto de configuraciones que conducen a modelos de índice uno o dos sin imponer restricciones de pasividad ni restringir las variables de control en los dispositivos involucrados, extendiendo los resultados también a configuraciones degeneradas. Para ello será esencial el empleo de modelos denominados *simétricos* (modelos de ramas y modelos híbridos), a diferencia de los utilizados en [30, 31, 116]. En la obtención de estos resultados ha sido necesario abordar la caracterización de la regularidad (invertibilidad) de un determinado tipo de matrices (matrices *mixtas*), ampliando ciertos resultados previos de Maxwell y Kirchhoff. Esto ha dado lugar a un resultado matemático de interés independiente que generaliza los teoremas de Maxwell y Kirchhoff, que pasan a ser los casos extremos de un resultado más general (cf. Teorema 4.3).

Coherentemente con la filosofía estructural arriba referida, en la caracterización del índice va a ser determinante la aplicación de diversas propiedades de la teoría de grafos, de tal manera que en los resultados estarán sistemáticamente presentes estructuras propias de esta teoría como *cutsets*, lazos o árboles. El uso de estas propiedades también va a resultar clave para abordar los problemas cualitativos que ocupan la última parte de la Tesis. Asimismo, desde el punto de vista matemático se utilizarán a lo largo de la memoria diversas herramientas y resultados procedentes del álgebra lineal y de la teoría local de sistemas dinámicos.

En la teoría de circuitos no lineales, las bifurcaciones se corresponden con cambios cualitativos en la dinámica local en torno a un determinado punto de trabajo, y su caracterización resulta importante ya que estos cambios pueden traducirse en fenómenos tales como la pérdida de estabilidad o la aparición de soluciones periódicas espurias. La segunda línea de investigación desarrollada en esta Tesis abordará este tipo de problemas. En concreto, el segundo objetivo que se persigue es adaptar las condiciones clásicas que caracterizan la bifurcación silla-nodo [127, 128] al ámbito de las ecuaciones algebraico-diferenciales (Teorema 6.1) y, a partir de esto, obtener condiciones que garanticen la existencia de tales bifurcaciones en circuitos no lineales (Teorema 6.2). Esto se enmarca en el contexto del estudio estructural de propiedades

cualitativas realizado en los trabajos [119, 120, 122], abordándose aquí de forma novedosa el estudio de bifurcaciones. El elemento clave que conecta este objetivo con el anterior, aparentemente independiente, se encuentra en el hecho de que la linealización del circuito en el punto de bifurcación conduce a una forma en cierto sentido dual de las matrices mixtas referidas anteriormente y que surgen en la caracterización del índice; compárense, en este sentido, las matrices (4.23) y (6.30).

A lo largo de toda la Tesis se prestará especial atención al memristor, elemento sintetizado por primera vez en 2008 [130] y anteriormente postulado desde un punto de vista teórico por Leon Chua en 1971 [22]. Dicho dispositivo, definido por una relación no lineal entre la carga y el flujo, ha sido objeto de gran atención en los últimos años y en la actualidad desempeña un papel muy relevante en Electrónica, especialmente a nivel nanométrico. Los diferentes resultados analíticos obtenidos en el curso de la investigación se extenderán al ámbito de los circuitos con memristores.

## 1.2. Estructura del documento

La memoria de la Tesis Doctoral se divide en tres partes claramente diferenciadas:

- En una primera parte, que comprende los Capítulos 2 y 3, se recopilan una serie de conceptos y resultados previos que configuran el marco teórico a partir del cual se desarrollarán posteriores análisis.
- La segunda parte de la Tesis está dedicada a la caracterización del índice en modelos simétricos de circuitos no lineales sin restricciones de pasividad. En el Capítulo 4 se abordará el problema para el modelo general de ramas, mientras que en el Capítulo 5 se analizarán los modelos denominados híbridos.
- En la tercera parte, desarrollada en el Capítulo 6, se abordará la caracterización de la bifurcación silla-nodo en circuitos no lineales.

Finalmente, en el Capítulo 7 se recoge una serie de conclusiones y se apuntan posibles líneas futuras de investigación.

## 1.3. Parte I: Marco teórico

La primera parte de la Tesis está dedicada a presentar los conceptos y resultados necesarios para poder desarrollar más adelante el análisis del índice y el estudio cualitativo de circuitos no lineales. Dividiremos los contenidos en una parte matemática y una parte circuital que se recogerán en los Capítulos 2 y 3, respectivamente.

### 1.3.1. Fundamentos matemáticos

Los aspectos matemáticos recopilados en el Capítulo 2 combinan resultados procedentes de disciplinas diversas, a saber, la teoría de grafos, el álgebra matricial, la teoría de ecuaciones algebraico-diferenciales y la teoría de sistemas dinámicos. A continuación se indica brevemente qué aspectos específicos de cada disciplina se emplearán en el curso de la investigación.

**Teoría de grafos.** Los grafos tienen un papel muy relevante en el análisis de circuitos, tanto en el ámbito lineal como en el no lineal. Esto se manifiesta, por ejemplo, en el hecho de que las leyes de Kirchhoff se expresan de forma natural utilizando matrices de cutsets (o de incidencia) y de lazos. En general, las propiedades del grafo subyacente al circuito resultan fundamentales en el modelado y en el análisis de muy diversos aspectos del mismo. También los árboles de expansión aparecen sistemáticamente en el modelado y análisis de circuitos. En la primera parte del Capítulo 2 se recogen definiciones de diversos conceptos básicos, las propiedades de las principales matrices empleadas en la descripción analítica de grafos y digrafos, y se presentan y discuten diversos aspectos de los árboles normales.

**Álgebra matricial.** En la demostración de diversos resultados se hará uso de la fórmula de Cauchy-Binet y del complemento de Schur. Dedicamos el segundo apartado de este capítulo a presentar estas y otras herramientas del álgebra matricial.

**Ecuaciones algebraico-diferenciales.** Los resultados obtenidos en este trabajo se enmarcan dentro de la teoría de ecuaciones algebraico-diferenciales. Por completitud, en la sección 2.3 se introducirán los conceptos básicos de esta teoría y se presentará una taxonomía de las ecuaciones con las que se trabajará más adelante.

**Sistemas dinámicos.** Por último, en la sección 2.4 se recopilarán diversos aspectos básicos de la teoría local de sistemas dinámicos, para su uso posterior en el Capítulo 6.

### 1.3.2. Modelos circuitales

En la sección 3.1 se recopilan las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de los circuitos clásicos, es decir, aquellos integrados por fuentes, condensadores, bobinas y resistencias. Todos estos dispositivos pueden presentar características no lineales. En la generación de modelos se distinguen de forma natural dos grandes grupos de ecuaciones: las leyes de Kirchhoff, por un lado, y las ecuaciones características de los dispositivos por otro. En la sección 3.2 ampliaremos el espectro de dispositivos presentando el *memristor*, que desde hace una década desempeña un papel muy relevante en diversos ámbitos de la Electrónica, particularmente a escala nanométrica. En la sección 3.3 se introduce la noción de pasividad de un circuito, concepto clave en nuestra investigación pues, de acuerdo con lo indicado en la sección 1.1, la no asunción de restricciones de pasividad es una de las hipótesis esenciales del presente trabajo. Finalizamos el capítulo presentando los modelos simétricos de ramas e híbridos, que permitirán la extensión de los resultados presentados en [30, 31, 116], según las directrices metodológicas presentadas en la sección 1.1.

## 1.4. Parte II: Estudio del índice de modelos simétricos

Se resumen a continuación los resultados esenciales presentados en los Capítulos 4 y 5; puede encontrarse en dichos capítulos un planteamiento mucho más detallado de los objetivos que han guiado la investigación en este terreno. Al comienzo del Capítulo 4 presentamos la fórmula clásica de Maxwell para el cálculo de determinantes de matrices de admitancia nodal, que surgen naturalmente en el análisis nodal de circuitos y que, en el contexto más sencillo posible (en cierto sentido), definido por un circuito puramente resistivo, tienen la forma

$$A_g G A_g^T. \quad (1.1)$$

Aquí  $A_g$  es la matriz de incidencia reducida del circuito y  $G$  es la matriz (diagonal, posiblemente incremental) de conductancias; las hipótesis esenciales que subyacen al modelado de este tipo de circuitos son que todas las resistencias están controladas por tensión y que no hay acoplos entre ellas. La fórmula de Maxwell para el cálculo del determinante de esta matriz puede entenderse como una consecuencia directa de la fórmula de Cauchy-Binet y de las propiedades de la matriz de incidencia de un grafo dirigido.

El caso dual, analizado por Kirchhoff, involucra matrices de la forma

$$B_r R B_r^T, \quad (1.2)$$

siendo ahora  $B_r$  una matriz de lazos reducida y  $R$  una matriz de resistencias; se supone en este caso que el circuito está formado exclusivamente por resistencias controladas por corriente y que no existen fenómenos de acoplo entre ellas. Las matrices de la forma mostrada en (1.2) aparecen de forma natural en el modelado de circuitos mediante los métodos de lazos y mallas (este último, aplicable a circuitos planos).

Uno de los resultados centrales de la Tesis consiste en determinar la singularidad de un tipo de matrices con una estructura más compleja que las anteriores, a las que denominaremos *matrices mixtas*. Dichas matrices generalizan tanto las matrices de conductancia nodal (1.1) como el caso dual (1.2). Estas matrices mixtas tienen la estructura

$$\begin{pmatrix} B_r R & B_g \\ Q_r & Q_g G \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

siendo  $B$  y  $Q$  las matrices de lazos y cutsets del circuito y  $R$  y  $G$  las matrices (diagonales, posiblemente incrementales) de resistencias y conductancias. En el Capítulo 4 se abordará específicamente la relación exacta entre las matrices (1.1), (1.2) y (1.3) anteriores. Este resultado va a resultar clave para poder desarrollar los análisis del índice de las secciones posteriores.

Independientemente del interés matemático del resultado anterior, desde el punto de vista puramente circuital la aproximación anterior permitirá llevar a cabo un análisis del índice que tendrá, como aspectos diferenciadores respecto a trabajos previos, el hecho de que en nuestro contexto se realizará sin condiciones de pasividad, incluyéndose tanto resistencias controladas por tensión como por corriente, y realizándose también caracterizaciones de topologías degeneradas que conducirán a modelos de índice dos. En la sección 4.4 se presentarán específicamente los resultados de caracterización del índice para el modelo de ramas de circuitos clásicos y pos-

teriormente, en la sección 4.5, se ampliarán a circuitos que incluyan dispositivos memristivos. El capítulo concluye con un caso de estudio en el que se ilustra de manera práctica cómo es posible aplicar los resultados obtenidos para la determinación del índice sin necesidad de obtener las ecuaciones del modelo, de acuerdo con el planteamiento estructural que gobierna la investigación.

El Capítulo 5 tiene unos objetivos similares a los que guían el Capítulo 4; se pretende la caracterización del índice en modelos híbridos de circuitos no lineales, sin restricciones de pasividad y contemplando tanto resistencias controladas por tensión como por corriente. El interés de estos modelos híbridos estriba en que presentan por sistema un índice inferior al de los modelos MNA (*Modified Nodal Analysis*) en circunstancias idénticas, pudiendo entenderse como una reducción del modelo general de ramas analizado en el Capítulo 4. Nuestros resultados extienden al contexto no pasivo el análisis del índice de modelos híbridos realizado en los trabajos [68, 69, 70, 132, 133, 134]; cabe destacar que la formalización en el contexto algebraico-diferencial de estos modelos, abordada en los trabajos anteriores, es relativamente reciente, pese a que la historia de la formulación híbrida se remonta hasta, al menos, la década de 1930 [74]. Como en el caso anterior, en el análisis de modelos híbridos primero presentaremos los resultados para circuitos clásicos, extendiéndose posteriormente al ámbito de los circuitos memristivos. Al final del capítulo puede encontrarse, de nuevo, un caso de estudio que ilustra los resultados obtenidos.

## 1.5. Parte III: Aspectos cualitativos

En la tercera parte de la Tesis se analizan aspectos cualitativos de la dinámica de circuitos no lineales empleando modelos algebraico-diferenciales. En concreto, nos centraremos en obtener configuraciones circuitales que conduzcan a un fenómeno de bifurcación silla-nodo, extendiendo el estudio de propiedades cualitativas iniciado en [119, 120, 122]. En el Capítulo 6, tras una breve introducción, realizamos una exposición de la caracterización de J. Sotomayor relativa a la bifurcación silla-nodo en ecuaciones diferenciales ordinarias. No nos limitamos meramente a exponer las condiciones originales, sino que se presentará también una reformulación algebraica de algunas de ellas para facilitar análisis posteriores. En la sección 6.3 se presenta uno de los resultados centrales de este capítulo, que consiste en adaptar las condiciones anteriores al ámbito de las ecuaciones algebraico-diferenciales semiexplícitas.

Una vez caracterizada la bifurcación silla-nodo en el contexto algebraico-diferencial, estamos en disposición de aplicar este resultado (de manera no trivial) a modelos específicamente circuitales, para obtener una caracterización de dicha bifurcación en el lenguaje de la teoría de circuitos. En la sección 6.4 se desarrolla este análisis para circuitos no lineales clásicos; se asumirá que el parámetro se corresponde con la corriente de una fuente independiente  $y$ , por simplicidad, que existe una única resistencia localmente activa en torno al punto de trabajo en el que se produce la bifurcación. En la sección 6.5, manteniendo las mismas premisas que en el anterior apartado, se añade la existencia de un memristor, lo cual se va a traducir en la existencia de una curva de puntos equilibrio en torno a la cual se va a producir la bifurcación. Concluirémos el capítulo presentando un caso de estudio que ilustra los resultados desarrollados a lo largo del mismo.

Cabe destacar el carácter novedoso del estudio de bifurcaciones en términos estructurales abordado en este capítulo. En este sentido, los resultados obtenidos podrían definir un primer paso hacia una teoría más amplia en la que tuvieran acomodo otras bifurcaciones clásicas como la bifurcación transcítica, la de Hopf, etc.; los resultados obtenidos en el caso con memristores también abren el camino al estudio de posibles conexiones en el ámbito circuital entre estos fenómenos clásicos de bifurcación y las denominadas *bifurcaciones sin parámetros*, teoría desarrollada en las dos últimas dos décadas a partir de los trabajos [33, 34, 35, 36] (véase también el libro [81], de reciente publicación).

Finalmente, el Capítulo 7 recopila las principales conclusiones derivadas de la investigación, apuntándose también posibles líneas futuras de investigación en las direcciones de trabajo aquí abordadas.





**Parte I**

**Preliminares**



# Capítulo 2

## Fundamentos matemáticos

En este capítulo se recopilan los conceptos y resultados matemáticos que sirven de base para desarrollar los análisis de capítulos posteriores. La sección 2.1 está dedicada a presentar los conceptos fundamentales de la teoría de grafos, las propiedades de las matrices que se emplearán en la representación de grafos dirigidos (o digrafos) y cierto tipo de grafos que serán especialmente relevantes en el modelado de circuitos eléctricos y electrónicos no lineales. En la sección 2.2 presentaremos algunos resultados del álgebra y el análisis matriciales que utilizaremos en varias de nuestras demostraciones. A continuación, en la sección 2.3 se hará una introducción a las ecuaciones algebraico-diferenciales, presentando los conceptos básicos y los tipos de ecuaciones que analizaremos más adelante. Esta última sección es especialmente relevante para contextualizar los resultados obtenidos en la Tesis Doctoral, habida cuenta de que la mayor parte de los modelos empleados en la generación automática de modelos circuitales presentan de manera natural una forma algebraico-diferencial. Finalmente, en la sección 2.4 se hace una introducción a algunos aspectos fundamentales de la teoría local de sistemas dinámicos modelados mediante ecuaciones diferenciales ordinarias explícitas, que serán de utilidad en el Capítulo 6.

El lector puede encontrar un tratamiento más extenso de los aspectos matemáticos aquí tratados en los libros [5, 17, 27, 39] (teoría de grafos), [40, 41, 66, 67] (análisis matricial), [7, 59, 60, 77, 78, 104, 111] (ecuaciones algebraico-diferenciales) y [1, 53, 64, 97, 131, 140] (sistemas dinámicos).

### 2.1. Teoría de grafos

A lo largo de la tesis desarrollaremos diferentes análisis de circuitos compuestos por elementos de dos terminales. Desde los trabajos fundamentales de Kirchhoff en el siglo XIX, es natural asociar un grafo (dirigido) a este tipo de circuitos, estableciendo una correspondencia entre las ramas del grafo y los dispositivos del circuito e identificando los nodos (resultantes de la incidencia de unas ramas en otras) con la interconexión de los elementos circuitales. Como se pondrá de manifiesto posteriormente, las propiedades de los grafos asociados a los circuitos considerados serán de gran relevancia para la resolución de los problemas tratados; de hecho,

como se indica en el Capítulo 1, la denominada *aproximación estructural* a la teoría de circuitos no lineales busca el desarrollo de herramientas de análisis que permitan caracterizar sistemática y explícitamente propiedades de los circuitos en términos del grafo subyacente y de las propiedades eléctricas de los dispositivos involucrados.

Esta sección se articula de la siguiente manera:

- En el apartado 2.1.1 recopilamos las definiciones básicas de la teoría de grafos sobre las que se fundamentan posteriores desarrollos.
- En el apartado 2.1.2 presentamos las matrices de incidencia, *cutsets* y lazos empleadas habitualmente para la representación de la topología de los grafos dirigidos, junto con sus principales propiedades.
- Finalmente, el apartado 2.1.3 está dedicado a los *árboles normales*, un tipo de grafos que aparecerán de manera natural en los modelos circuitales y en las caracterizaciones del índice que se abordarán en los Capítulos 3, 4 y 5.

### 2.1.1. Conceptos fundamentales

Un *grafo dirigido* o *digrafo*  $G$  es una terna  $(V, E, \Psi_G)$ , donde  $V$  es un conjunto no vacío de elementos llamados *vértices* o *nodos*,  $E$  es un conjunto, disjunto de  $V$ , de elementos llamados *aristas* o *ramas* y  $\Psi_G$  es una función (denominada de *incidencia*) que asocia cada elemento de  $E$  con un par ordenado de elementos de  $V$ . Un *grafo* está definido por una terna como la anterior, estando en este caso el codominio de la función de incidencia definido por el conjunto de pares no ordenados de vértices. Esto formaliza la idea de que no exista una dirección asociada a cada una de las ramas. A cada digrafo  $G_d$ , es posible asociarle un *grafo subyacente*  $G$ , cuyos vértices y ramas sean idénticos a aquellos de  $G_d$ , excepto porque sus ramas no poseen direcciones. Las nociones y propiedades enunciadas a continuación para grafos también son válidas para digrafos, salvo que se indique lo contrario.

Un *subgrafo* de  $G = (V, E, \Psi)$  es un grafo  $G_s = (V_s, E_s, \Psi_s)$  en el que  $V_s$  y  $E_s$  son subconjuntos de  $V$  y  $E$ , respectivamente y, además, para toda arista  $e$  perteneciente a  $E_s$  se cumple que  $\Psi_s(e) = \Psi(e)$ . En la definición anterior está implícito (al asumir que  $G_s$  es un grafo) el hecho de que los vértices en los que inciden todas las ramas de  $E_s$  pertenecen al conjunto  $V_s$ . Si  $V_s = V$ , el subgrafo se denomina *recubridor* o *de expansión*.

Dos grafos  $G_1$  y  $G_2$  son *isomorfos* ( $G_1 \cong G_2$ ) si existen biyecciones  $\phi_1 : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$  y  $\phi_2 : E(G_1) \rightarrow E(G_2)$  tales que  $\Psi_{G_1}(e) = \{u, v\}$  si y solo si  $\Psi_{G_2}(\phi_2(e)) = \{\phi_1(u), \phi_1(v)\}$ .

En adelante, usaremos las letras  $n$  y  $m$  para referirnos al cardinal de los conjuntos  $V$  y  $E$ , respectivamente, y  $k$  para el número de componentes conexas. El *rango* de un grafo,  $r$ , se define como  $r = n - k$  y el *número ciclomático*,  $c$ , viene dado por la expresión  $c = m - r = m - n + k$ .

Dado un grafo  $G = (V, E, \Psi_G)$ , si  $e \in E$  y  $v_1, v_2 \in V$  verifican que  $\Psi_G(e) = \{v_1, v_2\}$ , entonces decimos que  $v_1$  y  $v_2$  son nodos adyacentes y que  $e$  es incidente en  $v_1$  y  $v_2$ . En el caso de los digrafos, tendríamos que  $\Psi_G(e) = (v_1, v_2)$  y diríamos que la arista  $e$  va dirigida de  $v_1$  a  $v_2$ . Dos aristas  $e_1$  y  $e_2$  se dicen *paralelas* si inciden en el mismo par de nodos, es decir, si

los pares  $\Psi_G(e_1)$  y  $\Psi_G(e_2)$  son iguales; en ausencia de aristas paralelas, cualquier arista  $e$  se identifica sin ambigüedad con el par  $\{v_1, v_2\}$  (o  $(v_1, v_2)$ ) de vértices en los que incide. Se dice que un nodo es *aislado* si ninguna rama incide en él.

Una secuencia de aristas  $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ , siendo  $e_i$  incidente en  $v_{i-1}$  y  $v_i$ , se dice cerrada si  $v_0 = v_k$  y abierta en caso contrario. Si todos los vértices en los que inciden las aristas de una secuencia como la anterior son distintos, entonces dicha secuencia define un *camino* (en algunos textos se utiliza también la expresión *camino elemental* para esto). A un camino cerrado se le denomina *ciclo* o *lazo*. Al caso particular de una arista  $e$  tal que  $\Psi_G(e) = (v_i, v_i)$  se la denomina *bucle*. Un grafo se dice *simple* si no tiene bucles ni aristas paralelas.

Un grafo es *conexo* si existe un camino entre dos cualesquiera de sus nodos. Una *componente* conexa es un subgrafo conexo maximal, es decir, tal que no existe otro subgrafo conexo que lo contenga estrictamente.

Un conjunto de corte (*cutset*) es un conjunto de aristas tales que su eliminación da lugar a un grafo con mayor número de componentes conexas que el original, permaneciendo por el contrario igual el número de componentes conexas si se mantienen una o más aristas de dicho conjunto.

Dado un grafo  $G$ , un *árbol de expansión* o *recubridor* es un subgrafo recubridor de  $G$  acíclico y conexo. Su existencia requiere que el propio grafo sea conexo. Puntualmente y cuando no haya ambigüedad posible podremos referirnos a los árboles de expansión simplemente como *árboles*. A las aristas que forman parte del árbol se las denomina *ramas de árbol* (*twigs*) y al resto, ramas de enlace (*links*). El subgrafo formado por los nodos del grafo y las ramas de enlace recibe el nombre de *coárbol*; implícito en esta definición está el hecho de que el árbol que define un coárbol dado siempre es recubridor.

En un grafo con  $k$  componentes conexas se puede definir un *bosque*, que es un conjunto de  $k$  grafos acíclicos y conexos, cada uno de los cuales es un árbol de expansión del subgrafo definido por una componente conexa distinta. Al conjunto de coárboles se le denomina *cobosque*.

La operación de eliminación de una rama  $e$ , representada por  $G \setminus e$ , consiste en eliminar  $e$  del conjunto de ramas y dejar las restantes aristas y vértices inalterados. Se define análogamente la operación de eliminación de un vértice  $v$ , representada por  $G - v$ , en la que se elimina el vértice  $v$  y todas las ramas que inciden en él. La operación de contracción de aristas consiste en la eliminación de una rama  $e$  y la posterior identificación de los vértices  $v_1$  y  $v_2$  sobre los que era incidente en uno solo,  $\tilde{v}$ , de manera que todas las ramas que eran incidentes en  $v_1$  o  $v_2$  pasan a incidir en  $\tilde{v}$ . Se dice que  $G_M$  es un *menor* de  $G$  si podemos obtener  $G_M$  realizando operaciones de eliminación (de vértices o ramas) y contracción de ramas sobre  $G$ .

### 2.1.2. Representación matricial de digrafos

Las demostraciones de los resultados recogidos en esta sección pueden encontrarse en [5, 17, 39].

### 2.1.2.1. Matriz de incidencia

Las entradas  $a_{ij}$  de la *matriz de incidencia*  $\bar{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  de un grafo dirigido están definidas por las relaciones

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la rama } j \text{ sale del nodo } i \\ -1 & \text{si la rama } j \text{ llega al nodo } i \\ 0 & \text{si la rama } j \text{ no incide en el nodo } i. \end{cases}$$

La suma de todas las filas de  $\bar{A}$  da como resultado 0, ya que cada rama sale de un nodo y llega a otro, lo que se traduce en que cada columna tenga solo dos entradas no nulas y con valores 1 y  $-1$ . Por lo tanto el conjunto de  $n$  filas de la matriz de incidencia  $\bar{A}$  es linealmente dependiente. Una *matriz de incidencia reducida*  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{r \times m}$  resulta de eliminar  $k$  filas de la matriz  $\bar{A}$ , cada una correspondiente a un nodo de una componente conexa distinta. Los  $k$  nodos asociados a las filas eliminadas se denominan *nodos de referencia*. Si el digrafo es conexo (hipótesis habitual en teoría de circuitos), habrá un único nodo de referencia que puede tomarse libremente de entre todos los del digrafo.

**Lema 2.1.** *El rango de la matriz de incidencia de un digrafo es igual a  $r = n - k$ .*

Si  $x$  es un conjunto de ramas de un grafo  $G$ , denotaremos como  $A_x$  (resp.  $A_{G-x}$ ) a la submatriz de  $A$  formada por las columnas que se corresponden con las ramas de  $x$  (resp. que no están en  $x$ ).

**Lema 2.2.** *Un conjunto de ramas  $x$  no contiene lazos si y solo si  $A_x$  tiene rango completo por columnas.*

**Lema 2.3.** *Un conjunto de ramas  $x$  no contiene cutsets si y solo si  $A_{G-x}$  tiene rango completo por filas.*

De lo expuesto hasta ahora se puede deducir el siguiente resultado:

**Corolario 2.1.** *Existe una correspondencia biyectiva entre los árboles de expansión de un grafo conexo  $G$  y las submatrices regulares de orden  $n - 1$  de cualquier matriz de incidencia reducida de  $G$ .*

### 2.1.2.2. Matriz de lazos

Las entradas  $b_{ij}$  de la matriz de lazos  $\bar{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{l \times m}$  de un grafo dirigido se definen, habiendo definido una orientación cualquiera en cada uno de los lazos, de la forma siguiente:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la rama } j \text{ está en el lazo } i \text{ con la misma orientación} \\ -1 & \text{si la rama } j \text{ está en el lazo } i \text{ con la orientación opuesta} \\ 0 & \text{si la rama } j \text{ no está en el lazo } i. \end{cases}$$

**Lema 2.4.** *El rango de la matriz de lazos de un digrafo es igual al número ciclomático  $c = m - n + k$ .*

En adelante trabajaremos con *matrices de lazos reducidas*  $B \in \mathbb{R}^{c \times m}$ , que son aquellas formadas por  $c$  filas de  $\bar{B}$  linealmente independientes.

**Lema 2.5.** *Un conjunto de ramas  $x$  no contiene cutsets si y solo si  $B_x$  tiene rango completo por columnas.*

**Lema 2.6.** *Un conjunto de ramas  $x$  no contiene lazos si y solo si  $B_{G-x}$  tiene rango completo por filas.*

De lo anterior se deduce el siguiente resultado, que enunciaremos solo para grafos conexos aunque admite una generalización natural a casos con un número arbitrario de componentes conexas.

**Corolario 2.2.** *Existe una correspondencia biyectiva entre los coárboles de un grafo conexo  $G$  y las submatrices regulares de orden  $m - n + 1$  de cualquier matriz de lazos reducida de  $G$ .*

### 2.1.2.3. Matriz de cutsets

Finalmente, las entradas de la matriz de cutsets  $\bar{Q} = (q_{ij}) \in \mathbb{R}^{q \times m}$ , siendo  $q$  el número de cutsets de un grafo dirigido, quedan definidas por las relaciones:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la rama } j \text{ está en el cutset } i \text{ con la misma orientación} \\ -1 & \text{si la rama } j \text{ está en el cutset } i \text{ con la orientación opuesta} \\ 0 & \text{si la rama } j \text{ no está en el cutset } i. \end{cases}$$

En la definición anterior se ha hecho uso de la idea de la orientación de un cutset, que se define a partir del hecho de que la eliminación de todas las aristas de un cutset necesariamente divide en dos una componente conexa del digrafo original; la orientación del cutset se define, sencillamente, dirigiéndolo desde una de las componentes resultantes de esa eliminación hacia la otra.

**Lema 2.7.** *El rango de la matriz de cutsets de un digrafo es igual a  $n - k$ .*

En adelante, y análogamente a lo indicado para las matrices de incidencia y de lazos, trabajaremos con matrices de cutsets reducidas  $Q \in \mathbb{R}^{(n-k) \times m}$ , formadas por  $n - k$  filas linealmente independientes.

Finalmente, es importante constatar el hecho de que si en el Lema 2.2, el Lema 2.3 y el Corolario 2.1 sustituimos la matriz de incidencia reducida  $A$  por una matriz de cutsets reducida  $Q$ , las afirmaciones siguen siendo correctas. Por brevedad evitamos enunciar explícitamente los tres resultados correspondientes. A grandes rasgos, esto es consecuencia del hecho de que las filas de las matrices  $\bar{A}$  y  $\bar{Q}$  generan el mismo subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^m$ ; equivalentemente, dadas dos matrices reducidas de incidencia y de cutsets  $A$  y  $Q$ , existe una matriz regular  $M$  para la cual se verifica la relación

$$Q = MA.$$

#### 2.1.2.4. Matrices fundamentales

En esta sección vamos a presentar un tipo de matrices de lazos y cutsets que denominaremos *fundamentales*. Definiremos qué se entiende por lazo y cutset fundamental y presentaremos las matrices fundamentales y sus formas.

**Definición 2.1.** *Los lazos fundamentales de un digrafo conexo  $G$  con respecto a un árbol de expansión  $T$ , son los  $m - n + 1$  lazos formados por una rama de enlace y el único camino posible de ramas de árbol que completa el lazo, es decir, que conecta los vértices en los que incide esa rama de enlace. La orientación de cada lazo se define de acuerdo con la de la rama de enlace.*

**Definición 2.2.** *Los cutsets fundamentales de un digrafo conexo  $G$  con respecto a un árbol de expansión  $T$ , son los  $r = n - 1$  cutsets definidos por cada rama de árbol  $e$  junto con todas las de coárbol que conectan las dos componentes conexas de  $T \setminus e$ . La orientación de cada cutset se escoge de acuerdo con la de la rama de árbol.*

En adelante supondremos que las ramas del digrafo, denominémoslas  $e_i$ , se numeran de forma que a las  $r$  ramas del árbol les correspondan los subíndices  $i \in \{1, \dots, r\}$  y a las  $c$  ramas de coárbol los subíndices  $i \in \{r + 1, \dots, m\}$ . En las matrices fundamentales que se definen más adelante, los cutsets (lazos) se ordenarán conforme a la numeración de la rama de árbol (coárbol) que contengan.

La matriz fundamental de cutsets con respecto a un árbol de expansión  $T$  estará constituida por los cutsets fundamentales definidos por dicho árbol. Si las filas y columnas de  $Q_f$  siguen la ordenación de los cutsets y las aristas indicada anteriormente, la matriz fundamental de cutsets será de la forma:

$$Q_f = (I_r \quad \hat{Q}).$$

Análogamente, la matriz fundamental de lazos con respecto a un árbol de expansión  $T$  estará constituida por los lazos fundamentales respecto a dicho árbol. Si las filas y columnas de  $B_f$  siguen el orden referido anteriormente, la matriz fundamental de lazos tendrá la forma:

$$B_f = (\hat{B} \quad I_c).$$

#### 2.1.2.5. Ortogonalidad. Otras propiedades

En este apartado se recogen algunas relaciones entre las matrices presentadas anteriormente y otras propiedades que serán de utilidad más adelante. Se puede encontrar la demostración de estos resultados en las referencias [5, 17], entre otras.

**Lema 2.8.** *Si las columnas de las matrices  $A$ ,  $Q$  y  $B$  de un digrafo conexo están dispuestas según el mismo orden de aristas, entonces se cumple que  $BA^T = BQ^T = 0$ .*



Este resultado expresa la ortogonalidad en  $\mathbb{R}^m$  de los espacios que expanden, respectivamente, las filas de  $A$  (o, equivalentemente de  $Q$ ) y las de  $B$ ; en ocasiones estos espacios se denominan *espacios de cortes* y *de ciclos* (cf. [5]).

Aplicando el Lema 2.8 a las matrices fundamentales presentadas en el apartado anterior se obtiene de manera sencilla que

$$\hat{Q} = -\hat{B}^T.$$

Además, teniendo en cuenta sus rangos, se puede deducir que

$$\text{im } A^T = \text{im } Q^T = \ker B$$

y, análogamente,

$$\text{im } B^T = \ker A = \ker Q,$$

resultados válidos tanto para matrices fundamentales como no fundamentales.

**Definición 2.3.** *Una matriz totalmente unimodular es aquella con la propiedad de que el determinante de cada una de sus submatrices cuadradas es 1,  $-1$  o 0.*

**Lema 2.9.** *Las matrices  $A$ ,  $B_f$  y  $Q_f$  de un digrafo conexo son totalmente unimodulares. Las matrices de cutsets o lazos arbitrarias (es decir, no construidas necesariamente como matrices fundamentales a partir de un árbol de expansión) no tienen por qué ser unimodulares, pero sí verifican que todas sus submatrices cuadradas de orden máximo tienen un determinante con valor absoluto constante.*

### 2.1.3. Árboles normales

Los circuitos con los que trabajaremos posteriormente estarán constituidos por elementos de diferente naturaleza, motivo por el cual resulta útil trabajar con grafos en los que las ramas se encuentran divididas en diferentes categorías. Es este apartado trabajaremos con tales grafos y presentaremos los *árboles normales* como objeto característico de este contexto. Estos grafos fueron introducidos por Bryant [9] y han sido utilizados en el estudio de distintas propiedades analíticas de los circuitos eléctricos [108, 116, 134].

En un grafo conexo que tiene  $p$  tipos de ramas diferentes, los árboles recubridores se distinguirán, además de por su topología, por el número de ramas que tienen de cada tipo. La siguiente definición de árbol normal surge de la priorización de un tipo de ramas frente a otros.

**Definición 2.4.** *Un árbol de expansión se dice normal si tiene el mayor número posible de ramas de tipo 1, el mayor número de ramas de tipo 2 de entre los anteriores, ... y por último el mayor número de ramas de tipo  $p - 1$  de entre todos los anteriores.*

Alternativamente, un árbol normal puede también definirse, equivalentemente, de la manera expuesta a continuación.

**Definición 2.5.** *Un árbol de expansión puede definirse como normal si tiene el menor número posible de ramas de tipo  $p$ , el menor número de ramas de tipo  $p - 1$  de entre los anteriores, ... y por último el menor número de ramas de tipo 2 de entre todos los anteriores.*

Obsérvese que, en ambos casos, el número de ramas de tipo  $p$  (en la Definición 2.4) o, respectivamente, de tipo 1 (en la Definición 2.5) quedan fijados por el número de total de ramas presentes en cualquier árbol, esto es,  $n - 1$  en un grafo conexo de  $n$  vértices.

Consideremos a continuación la forma que toman las matrices fundamentales definidas por un árbol normal. Sigamos para ello el siguiente orden en la disposición de las columnas de las matrices: las ramas de árbol precederán a las de coárbol, y dentro de cada grupo se respetará el orden de prioridad de ramas de un árbol normal. Bajo estos supuestos, las matrices fundamentales serán de la forma:

$$Q_f = \begin{pmatrix} I_{tr-1} & 0 & \cdots & 0 & Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1p} \\ 0 & I_{tr-2} & \cdots & 0 & 0 & Q_{22} & \cdots & Q_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_{tr-p} & 0 & 0 & \cdots & Q_{pp} \end{pmatrix},$$

$$B_f = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & \cdots & 0 & I_{ctr-1} & 0 & \cdots & 0 \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & 0 & 0 & I_{ctr-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{p1} & B_{p2} & \cdots & B_{pp} & 0 & 0 & \cdots & I_{ctr-p} \end{pmatrix}.$$

Esto se debe a que una rama  $e_i$  de tipo  $a$  de un árbol normal no puede formar parte de un cutset con un rama de enlace  $e_j$  de tipo  $b$ , si  $b < a$ . Si tal situación se diera podríamos tomar el árbol de referencia, quitar  $e_i$  y en su lugar tomar la rama  $e_j$ . El resultado sería otro árbol que tendría una rama más de tipo  $b$  y una menos de tipo  $a$  y por lo tanto el árbol de partida no sería normal. De manera análoga, una rama de enlace no puede formar un lazo fundamental con una rama de árbol de un tipo mayor que ella (inferior en prioridad). Además entre los bloques de las matrices existe la relación  $Q_{ij} = -B_{ji}^T$  (cf. Lema 2.8).

Vamos a definir los menores  $G_i$  como el resultado de eliminar todas las ramas de tipo  $k > i$ , y contraer todas las ramas tipo  $j < i$ . En tal caso las matrices de cutsets y de lazos asociados a dicho menor son  $Q_i = (I_{tr-i} \quad Q_{ii})$  y  $B_i = (B_{ii} \quad I_{ctr-i})$ .

Las nociones presentadas en esta sección se utilizarán sistemáticamente en los Capítulos 3 y 5 para la formulación y el análisis de modelos circuitales híbridos.

## 2.2. Algunos resultados del análisis matricial

En el estudio de diferentes aspectos analíticos de los circuitos eléctricos y electrónicos considerados posteriormente necesitaremos caracterizar la regularidad de determinadas matrices. Para ello resultarán de gran utilidad el lema de Schur y la fórmula de Cauchy-Binet, que se presentan a continuación. El primero de estos resultados nos permitirá estudiar la regularidad de una matriz a través de cierta reducción de esta. Por su parte, la fórmula de Cauchy-Binet nos permitirá estudiar el determinante de una matriz formulada como un producto de matrices no cuadradas, generalizando la fórmula del Álgebra elemental que expresa el determinante de un producto de matrices cuadradas como el producto de los determinantes. Ambos resultados se presentan con más detalle en [66].

### 2.2.1. Complemento de Schur

**Lema 2.10.** *Sea una matriz*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

en la que  $A \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{r \times p}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times r}$  y  $D \in \mathbb{R}^{p \times p}$ . Si la matriz  $D$  es regular, entonces  $M$  será regular si y solo si la matriz

$$E = A - BD^{-1}C$$

también lo es. La matriz  $E$  se conoce como complemento de Schur de  $D$  en  $M$ . La relación entre los determinantes de la matriz original y su complemento viene dada por la siguiente ecuación:

$$\det M = \det E \det D.$$

### 2.2.2. Fórmula de Cauchy-Binet

Utilizaremos la notación  $X^{c,d}$  para referirnos a la submatriz de  $X$  formada por las filas referenciadas por los elementos del conjunto  $c$  y las columnas referenciadas por los elementos del conjunto  $d$ . Si por ejemplo  $c = \{1, 3\}$  y  $d = \{2, 3\}$ , entonces  $X^{c,d}$  es la submatriz formada por los elementos que pertenecen simultáneamente a las filas 1 o 3 y a las columnas 2 o 3 de  $X$ .

**Lema 2.11.** *Si  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , con  $n \leq m$ , entonces se cumple que:*

$$\det(DG) = \sum_{\alpha} \det(D^{\omega, \alpha}) \det(G^{\alpha, \omega}),$$

para todo  $\alpha \subseteq \{1, \dots, m\}$  tal que  $|\alpha| = n$  y donde  $\omega = \{1, \dots, n\}$ .

Es fácil extender la fórmula anterior para el caso en que el determinante a estudiar sea el de una matriz definida como producto de otras tres. Si  $G = EF$ , con  $E \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y  $F \in \mathbb{R}^{m \times a}$ , entonces se tiene

$$\det(G^{\alpha, \omega}) = \sum_{\beta} \det(E^{\alpha, \beta}) \det(F^{\beta, \omega}),$$

con  $|\beta| = |\alpha| = n$ . De aquí se deduce fácilmente la fórmula de Cauchy-Binet para el producto de tres matrices recogida a continuación.

**Lema 2.12.** *Si  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $E \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , con  $n \leq m$ , entonces se cumple que:*

$$\det(DEF) = \sum_{\alpha, \beta} \det(D^{\omega, \alpha}) \det(E^{\alpha, \beta}) \det(F^{\beta, \omega}),$$

donde la suma se extiende sobre todos los pares de familias de índices  $\alpha \subseteq \{1, \dots, m\}$ ,  $\beta \subseteq \{1, \dots, m\}$  tales que  $|\alpha| = |\beta| = n$ , y donde  $\omega = \{1, \dots, n\}$ .

### 2.3. Ecuaciones algebraico-diferenciales

En este apartado se va a dar una visión general de la teoría de las ecuaciones algebraico-diferenciales (*differential-algebraic equations* o DAEs) y se van a estudiar ciertas estructuras de interés en el modelado circuital (ecuaciones lineales, semilineales y cuasilineales). Las nociones y resultados aquí presentados se desarrollan en detalle en las referencias [7, 59, 60, 77, 78, 104, 111].

Las ecuaciones o sistemas algebraico-diferenciales constituyen un activo campo de investigación desde hace tres décadas, impulsado por problemas procedentes de campos como la mecánica, la teoría de circuitos eléctricos, los procesos químicos o la teoría de control [7, 12, 13, 14, 49, 52, 59, 60, 89]. Buena parte de la investigación en este ámbito se ha centrado en cuestiones de teoría fundamental (existencia y unicidad de soluciones en subconjuntos del espacio de estados) y en aspectos de tipo numérico. Dependiendo del campo de aplicación, estas ecuaciones han recibido también el nombre de sistemas descriptores, sistemas de semiestados, ecuaciones implícitas, sistemas singulares o ecuaciones con restricciones, entre otros.

En términos generales, puede entenderse que una ecuación algebraico-diferencial es una ecuación diferencial ordinaria implícita

$$F(x', x, t) = q(t), \quad (2.1)$$

en la que se imponen ciertas restricciones sobre la aplicación  $F$ , particularmente sobre la matriz de derivadas parciales  $F_{x'}$  (la expresión  $x'$  se utiliza para denotar la derivada temporal de  $x$ ). En el contexto autónomo, la ecuación anterior toma la forma

$$F(x', x) = 0, \quad (2.2)$$

siendo frecuente que este sistema de ecuaciones simplemente combine ecuaciones diferenciales explícitas definidas para algunas componentes del vector  $x'$  con restricciones de naturaleza algebraica (no diferencial) que relacionan las componentes de  $x$ ; de este tipo de problemas surge el nombre genérico de *ecuación algebraico-diferencial*.

Asumiendo en (2.1) que  $F : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es suficientemente diferenciable, en el contexto algebraico-diferencial es habitual suponer que  $F_{x'}$  es singular en cierto  $(p_0, x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ ; más aún, es frecuente imponer que  $F_{x'}$  sea singular con rango constante en todo un entorno de dicho punto. Esto define, bajo ciertas hipótesis adicionales, al sistema (2.1) como una ecuación algebraico-diferencial *regular*. Por el contrario, el hecho de que  $F_{x'}$  pueda experimentar una caída de rango en  $(p_0, x_0, t_0)$  (o, más comúnmente, en una hipersuperficie que albergue el punto  $(p_0, x_0, t_0)$ ) conduce al estudio de *singularidades* de ecuaciones algebraico-diferenciales. La presente Tesis Doctoral abordará únicamente problemas regulares.

La característica fundamental de los problemas denominados regulares es la existencia de soluciones solo en una subvariedad del espacio de estados (o, más propiamente, de *semiestados*), denominada *variedad solución*. El estudio de problemas regulares se articula típicamente, por un lado, a partir de una taxonomía de problemas definida por la estructura del problema, asociada a la expresión que adopta  $F$  en (2.1). Particularmente importantes son los problemas lineales, semilineales (que incluyen como caso particular los problemas semiexplícitos) y cua-

silineales; esta taxonomía estructura esta sección.

Por otro lado, el análisis de las diferentes estructuras anteriores se organiza tradicionalmente en torno al *índice* de la ecuación. A grandes rasgos, existen diferentes nociones del índice que generalizan (a contextos no lineales y/o variantes el tiempo) el concepto de índice de Kronecker (o índice de nilpotencia) de un haz de matrices regular para ecuaciones lineales e invariantes en el tiempo. A grandes rasgos, el índice puede entenderse como el número de ligaduras que caracterizan la variedad en la que están definidas las soluciones del problema. Existen diferentes nociones del índice que, de hecho, sustentan diferentes métodos (tanto analíticos como numéricos) para el análisis de ecuaciones algebraico-diferenciales: estos son el índice *de diferenciación* o *diferencial* [7, 14, 15, 50], el *geométrico* [100, 101, 104, 105, 111], el índice *de perturbación* [59, 60] y el *índice de proyección* [52, 78, 87, 89, 111]. En términos muy generales, el objetivo de los diferentes métodos de análisis que emanan de las nociones anteriores es describir la dinámica de (2.1), bien en términos de una ecuación diferencial ordinaria explícita

$$x' = f(x, t), \quad (2.3)$$

bien en términos de una ecuación explícita en dimensión más baja

$$y' = g(y, t), \quad (2.4)$$

siendo la dimensión de  $y$  estrictamente menor que la de  $x$ . El primero de los escenarios es el que se persigue en el marco del índice de diferenciación, donde (2.3) tiene a la variedad solución de (2.1) como variedad invariante. Por el contrario, el modelo (2.4) corresponderá típicamente a una descripción en coordenadas locales de la dinámica que (2.1) genera en dicha variedad solución, y es propio de los métodos de reducción basados en el índice geométrico. Por ello,  $x$  en (2.1) recibe habitualmente el nombre de *variable de semiestado*, en la medida en que la dimensión de la variedad solución (que corresponde propiamente al espacio de estados, siendo  $y$  una *variable de estado*) es estrictamente menor que la del espacio ambiente.

En los epígrafes siguientes se presentan algunas estructuras sencillas, junto con algunas de las herramientas conceptuales habitualmente empleadas en su estudio, y se discute el concepto de índice para estos problemas. Por su uso sistemático a lo largo del resto de la memoria, recogemos a continuación el teorema de la función implícita.

**Lema 2.13.** *Sea una función  $g \in C^1(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ . Si  $g(x^*, y^*) = 0$  y la matriz de derivadas parciales  $g_y(x^*, y^*)$  es invertible, entonces existen un entorno  $U$  de  $(x^*, y^*)$  y una función  $\tilde{g}$  de clase  $C^1$  tales que  $g(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \tilde{g}(x), \forall (x, y) \in U$ .*

### 2.3.1. Ecuaciones lineales y haces de matrices

Una ecuación algebraico-diferencial lineal de coeficientes constantes queda definida por un sistema de la forma

$$Ax' + Bx = q(t), \quad (2.5)$$

donde  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\det A \neq 0$  y  $q(t)$  es una función  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  suficientemente diferenciable. Obsérvese que ese sistema surge como una particularización de (2.1) en la que la aplicación  $F$

que aparece en el miembro de la izquierda de dicha ecuación es lineal en  $x$ ,  $x'$  e independiente del tiempo; el sistema será lineal y autónomo si, además,  $q(t) = 0$  en (2.5).

De forma análoga a la habitualmente empleada para el estudio de sistemas lineales de ecuaciones explícitas de coeficientes constantes, la búsqueda de soluciones de la forma  $e^{\lambda t}x_0$  para el sistema homogéneo

$$Ax' + Bx = 0, \quad (2.6)$$

lleva al problema de autovalores generalizado caracterizado por la ecuación  $\det(\lambda A + B) = 0$ , condición que define los autovalores del haz de matrices  $\{A, B\}$ : dadas dos matrices  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , se define el haz  $\{A, B\}$  como la familia  $\{\lambda A + B : \lambda \in \mathbb{C}\}$ . El espectro  $\sigma(A, B)$  del haz es el conjunto  $\{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda A + B) = 0\}$ . Obsérvese que  $\det(\lambda A + B)$  es un polinomio en  $\lambda$  con grado  $m \leq n$ : cuando este polinomio no es idénticamente nulo o, equivalentemente, cuando el espectro es finito, el haz se denomina *regular* [41] y se puede reducir a la denominada *forma canónica de Kronecker* (o de *Weierstrass-Kronecker*, cf. [78]; aunque el nombre de Kronecker se asocia genéricamente a la forma canónica que sigue, para haces regulares los primeros resultados se deben a Weierstrass. Siguiendo el convenio habitual en el campo de las ecuaciones algebraico-diferenciales, y por brevedad, nos referiremos a la forma canónica como la forma de Kronecker). Siendo  $\{A, B\}$  un haz regular, la forma canónica de Kronecker se deriva de la existencia de matrices no singulares  $E, F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tales que

$$EAF = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}, \quad EBF = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

donde  $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$  para cierto  $m \leq n$  y  $N \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$  es una matriz nilpotente con índice  $\nu \leq n - m$ , esto es,  $N^\nu = 0$ ,  $N^{\nu-1} \neq 0$ . En el caso particular en que  $n = m$ , que equivale a la condición de que  $A$  sea una matriz regular, se dice que el haz tiene índice cero. En general, la matriz  $N$  puede tomarse en forma canónica de Jordan, y el índice de nilpotencia  $\nu$  es el *índice de Kronecker* del haz.

La forma canónica anterior proporciona, de manera natural, un *desacoplo* de las soluciones de (2.5). Efectivamente, premultiplicando (2.5) por  $E$  y con el cambio  $x = Fy$ , se obtiene

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{q}_1(t) \\ \tilde{q}_2(t) \end{pmatrix},$$

donde  $\tilde{q}(t) = Eq(t)$ . En la nueva variable  $y = (y_1, y_2)$ , la ecuación adopta la forma

$$y_1' + Wy_1 = \tilde{q}_1(t) \quad (2.8a)$$

$$Ny_2' + y_2 = \tilde{q}_2(t). \quad (2.8b)$$

La primera de estas dos ecuaciones es una ecuación diferencial ordinaria “clásica” definida para la variable  $y_1$ , y puede entenderse como una realización de (2.4) en este contexto. Por su parte, las soluciones (para la variable  $y_2$ ) de la ecuación (2.8b) pueden calcularse explícitamente, reescribiendo dicha ecuación como

$$(ND + I_{n-m})y_2 = \tilde{q}_2(t)$$

con  $D \equiv d/dt$ , y entonces

$$y_2 = (ND + I_{n-m})^{-1} \tilde{q}_2(t) = \sum_{j=0}^{\nu-1} (-1)^j (ND)^j \tilde{q}_2(t).$$

La interpretación del *índice de perturbación* [59, 60] es sencilla a partir de lo anterior, pues si  $\nu \geq 2$ , las soluciones dependen no solo de la excitación  $q(t)$ , sino también de las derivadas  $q'(t), \dots, q^{(\nu-1)}(t)$ . Esto revela una característica típica de las ecuaciones algebraico-diferenciales de índice  $\nu \geq 2$ , a saber, la dependencia de las soluciones respecto a las *derivadas* de la excitación, que se manifiesta también en versiones no lineales del problema (2.1).

En el caso homogéneo ( $q = 0$ ), el proceso anterior da lugar a

$$y_1' = -W y_1 \quad (2.9a)$$

$$0 = y_2. \quad (2.9b)$$

Esto indica que las trayectorias están definidas solo en el subespacio vectorial  $m$ -dimensional definido por la condición  $y_2 = 0$ , ecuación que describe en estas variables la variedad solución anteriormente referida. La dinámica queda caracterizada por la *ecuación reducida*  $y_1' = -W y_1$  que aparece en (2.9a) (cf. (2.4)).

Se pueden encontrar diversos resultados relativos a problemas lineales y variantes en el tiempo en [11, 63, 75, 76, 102, 103, 111]. En particular, el uso de los denominados *métodos de proyección* para problemas lineales puede consultarse en [52, 89, 90, 91, 111, 117, 118]. Es destacable, en relación a este tipo de métodos, la monografía [78], de reciente publicación. El uso de estos métodos para el análisis sistemático de circuitos se desarrolla en los textos [78] y [111] citados anteriormente, y en [32, 136, 137].

### 2.3.2. Ecuaciones semiexplícitas y semilineales

El estudio de las ecuaciones algebraico-diferenciales no lineales se articula también en torno al concepto de índice. Como se ha indicado anteriormente, en el ámbito no lineal existen distintas definiciones de este concepto, que extienden en diversos sentidos la noción de índice de Kronecker detallada en la sección anterior. Los conceptos empleados habitualmente en este campo son los del *índice diferencial* [7, 14, 15, 50], *índice geométrico* [100, 101, 104, 105, 111], *índice de perturbación* [14, 59, 60, 111] y el *índice de proyección* [52, 78, 89]. A grandes rasgos, puede decirse que los índices diferencial y de perturbación fundamentan sendas familias de métodos numéricos ampliamente utilizados en este ámbito (cf. [7, 60]) mientras que los índices geométrico y de proyección han permitido en las últimas dos décadas profundizar en la comprensión de las propiedades analíticas de estas ecuaciones [78, 104, 111].

Una familia muy relevante en el ámbito algebraico-diferencial es la definida por las ecuaciones denominadas *semiexplícitas*, que toman la forma

$$u' = f(u, v) \quad (2.10a)$$

$$0 = g(u, v), \quad (2.10b)$$

donde  $f : \mathbb{R}^{r+p} \rightarrow \mathbb{R}^r$ ,  $g : \mathbb{R}^{r+p} \rightarrow \mathbb{R}^p$ . La presencia explícita de las restricciones algebraicas (no diferenciales) (2.10b) permite realizar una introducción sencilla a la noción de índice diferencial y a otros conceptos relacionados mencionados anteriormente. Si  $g$  es de clase  $C^1$ , diferenciando en (2.10b) se obtiene el sistema (en general implícito) de ecuaciones diferenciales

$$u' = f(u, v) \quad (2.11a)$$

$$g_v(u, v)v' = -g_u(u, v)f(u, v). \quad (2.11b)$$

Supongamos ahora que la matriz de derivadas  $g_v(u^*, v^*)$  de la función  $g$  definida en (2.10) es regular (invertible) en un punto  $(u^*, v^*)$  que verifica la restricción (2.10b). Esto permite reescribir (2.11), al menos en un entorno de dicho punto, como

$$u' = f(u, v) \quad (2.12a)$$

$$v' = -g_v^{-1}(u, v)g_u(u, v)f(u, v). \quad (2.12b)$$

En otras palabras, la hipótesis de regularidad en  $g_v(u^*, v^*)$  conlleva que un paso de derivación sea suficiente para obtener la ecuación explícita denominada *subyacente* (2.12), para la cual  $g = 0$  es una variedad invariante (esta noción se define más adelante, en la sección 2.4.1); en este contexto de índice uno,  $g = 0$  de hecho describe la *variedad solución* de la ecuación algebraico-diferencial.

Esta es la idea esencial que fundamenta la noción del índice diferencial. El hecho de que un paso de diferenciación permita obtener (al menos localmente) una ecuación subyacente explícita hace que el índice diferencial del sistema sea uno en torno a  $(u^*, v^*)$  (esta noción se presenta en detalle en [7]). Obsérvese además que, como consecuencia del teorema de la función implícita (cf. Lema 2.13), existe una aplicación  $\tilde{g}$  tal que  $g(u, v) = 0 \Leftrightarrow v = \tilde{g}(u)$  en un entorno de  $(u^*, v^*)$  que permite describir la dinámica local de la ecuación mediante la *ecuación reducida*

$$u' = f(u, \tilde{g}(u)). \quad (2.13)$$

Una generalización de las ecuaciones semiexplícitas la constituyen las ecuaciones algebraico-diferenciales *semilineales*, definidas, en el contexto autónomo, por una ecuación de la forma

$$Ax' = f(x), \quad (2.14)$$

donde  $A$  es una matriz no invertible y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función vectorial suficientemente diferenciable. Obsérvese que la ecuación semiexplícita (2.10) es un caso particular de ecuación semilineal, pues podemos reescribir (2.10) como

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u, v) \\ g(u, v) \end{pmatrix}$$

que es un sistema de la forma (2.14), con la notación  $x = (u, v)$ . Recíprocamente, una ecuación semilineal se puede escribir en forma semiexplícita: con la notación  $\text{rk}A = r$ , existen matrices



$E, F$  invertibles para las cuales

$$EAF = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con  $I \in \mathbb{R}^{r \times r}$  (véase, por ejemplo, [40]). Multiplicando (2.14) por  $E$  y aplicando el cambio de variable  $x = Fy$ , la ecuación semilineal adopta la expresión semiexplícita

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = Ef(Fy).$$

Por ello, es frecuente que las ecuaciones semilineales se estudien directamente en la forma semiexplícita (2.10).

### 2.3.3. Ecuaciones de Hessenberg

Las ecuaciones de índice superior presentan dificultades adicionales desde un punto de vista tanto analítico como numérico, lo que define algunos de los problemas más relevantes de la teoría de ecuaciones algebraico-diferenciales [7, 59, 60, 78, 89, 111]. Las *ecuaciones de Hessenberg*, que son un caso particular de ecuaciones semiexplícitas (2.10) en las que  $f$  y  $g$  tienen una estructura especial, definen un contexto algo más sencillo y permiten hacer una introducción a algunas de las ideas de fondo de la teoría de ecuaciones algebraico-diferenciales de índice superior. Este tipo de ecuaciones aparecerán, en concreto, en la reducción del modelo de ramas que se llevará a cabo en la sección 4.4.2.

Las ecuaciones de Hessenberg son ecuaciones semiexplícitas de la forma

$$u' = f(u, v) \tag{2.15a}$$

$$0 = g(u), \tag{2.15b}$$

donde  $f : \mathbb{R}^{r+p} \rightarrow \mathbb{R}^r$ ,  $g : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^p$ , y  $r > p$ . Nótese que  $g$  no depende de la variable algebraica  $v$  y hay que hacer notar que, más adelante, se restringirá también la forma que toma  $f$ . Diferenciando (2.15b) se obtiene, empleando la relación (2.15a),

$$0 = g_u(u)f(u, v). \tag{2.16}$$

Esta ecuación define una *restricción oculta* que debe ser satisfecha por las soluciones de (2.15). La variedad solución del problema estará ahora definida por las ecuaciones (2.15b) y (2.16) (habiendo restricciones adicionales en casos de índice superior a dos). La diferenciación de esta restricción da lugar a

$$u' = f(u, v) \tag{2.17a}$$

$$g_u(u)f_v(u, v)v' = (-g_u f)_u(u, v)f(u, v). \tag{2.17b}$$

Supóngase que  $(u^*, v^*)$  satisface (2.15b) y (2.16), y que  $g_u(u^*)f_v(u^*, v^*)$  es una matriz invertible, es decir,  $\text{rk}(g_u(u^*)f_v(u^*, v^*)) = p$ . Esto define a (2.15) como un problema de índice dos [7]. Por su parte, (2.17) es la ecuación subyacente, que puede reescribirse localmente de forma

sencilla como una ecuación ordinaria explícita a partir de la invertibilidad de  $g_u(u^*)f_v(u^*, v^*)$ . Además, puede demostrarse que la condición  $\text{rk}(g_u(u^*)f_v(u^*, v^*)) = p$  implica que las ecuaciones (2.15b) y (2.16) definen una variedad solución  $(r - p)$ -dimensional, que es invariante para la dinámica subyacente (2.17). Nótese que de forma natural esta idea generaliza la que sustentaba la noción de índice (diferencial) uno para ecuaciones semiexplícitas, como se detalla en la sección anterior.

Es relativamente sencillo definir ecuaciones con índice superior a dos (arbitrariamente alto, de hecho) utilizando esta estructura de Hessenberg. En concreto, una ecuación algebraico-diferencial de Hessenberg de *tamaño*  $k$  queda definida por el sistema [7]

$$\begin{aligned} u'_1 &= f_1(u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, v) \\ u'_2 &= f_2(u_1, u_2, \dots, u_{k-1}) \\ &\vdots \\ u'_i &= f_i(u_{i-1}, \dots, u_{k-1}), \quad 3 \leq i \leq k-1 \\ &\vdots \\ 0 &= g(u_{k-1}), \end{aligned}$$

con  $u_i \in \mathbb{R}^{r_i}$ ,  $v \in \mathbb{R}^p$ . Este sistema resulta tener índice diferencial  $k$  si la matriz

$$M = \frac{dg}{du_{k-1}} \frac{\partial f_{k-1}}{\partial u_{k-2}} \cdots \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \frac{\partial f_1}{\partial v}$$

es invertible. En este caso la variedad solución estará definida por un total de  $k$  restricciones, de las cuales  $k - 1$  son restricciones ocultas, que pueden calcularse de manera sencilla a partir de lo indicado anteriormente para el caso de índice dos.

### 2.3.4. Ecuaciones cuasilineales

Todas las familias de ecuaciones descritas en secciones anteriores (lineales, semiexplícitas -y, en particular, ecuaciones de Hessenberg- y semilineales) son formas particulares de las denominadas ecuaciones *cuasilineales*, con las que se cierra esta sección. Estas ecuaciones tienen la forma

$$A(x)x' = f(x), \tag{2.18}$$

con  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  suficientemente diferenciables. En contextos regulares, la matriz  $A(x)$  será singular con rango constante  $r < n$  en torno a un  $x^*$  dado. En problemas de índice uno, se puede demostrar que la dinámica de (2.18) está bien definida en la variedad (que resulta ser  $r$ -dimensional) definida por la condición  $f(x) \in \text{im } A(x)$ . En sistemas de índice superior, las soluciones están definidas solo en una subvariedad de dicho conjunto. Diversos resultados acerca de este tipo de problemas, así como sobre problemas no lineales generales, pueden encontrarse en [7, 14, 78, 100, 101, 104, 105, 111]; en particular, en los trabajos [104, 111] puede encontrarse una introducción detallada al índice geométrico y a los métodos denominados *de reducción* que en él se basan.

Estos sistemas son particularmente relevantes en el contexto del análisis circuital, ya que amplias familias de modelos, como los basados en MNA (Modified Nodal Analysis), adoptan una forma cuasilineal [65, 88, 111]. Véase, en este sentido, la sección 3.6.

## 2.4. Teoría local de sistemas dinámicos

### 2.4.1. Sistemas modelados por ecuaciones diferenciales ordinarias explícitas

En el Capítulo 6 se abordarán distintos aspectos cualitativos relacionados con la dinámica de circuitos clásicos y memristivos no lineales. Para facilitar la lectura de ese capítulo se realiza a continuación una recopilación de algunos de los resultados básicos de la teoría cualitativa local de sistemas dinámicos formulados mediante (sistemas de) ecuaciones diferenciales ordinarias explícitas. Las referencias [1, 53, 64, 97, 131, 140] constituyen textos ya clásicos y proporcionan excelentes introducciones a esta teoría.

Consideremos, para ello, el sistema

$$x' = f(x, t) \quad (2.19)$$

donde, típicamente,  $f \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ , siendo  $\Omega$  un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Es bien sabido que la hipótesis de que  $f$  sea de clase  $C^1$  garantiza la existencia local y la unicidad de solución del sistema de ecuaciones (2.19) una vez fijado un valor inicial  $(x^*, t^*)$ . Sería suficiente para ello incluso que  $f$  fuese continua y satisficiera una condición de Lipschitz.

Cuando el campo de vectores  $f$  no depende de  $t$ , el sistema (2.19) se denomina *autónomo* y en adelante la exposición se centrará en este tipo de problemas, esto es, en sistemas que adoptan la forma

$$x' = f(x) \quad (2.20)$$

con  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . En este escenario, un valor inicial  $x^*$  en el denominado *espacio de estados*  $\Omega$  determina de forma única una *trayectoria* (u *órbita*) que verifica  $x(0) = x^*$  y que denotaremos como  $x(t, x^*)$  (o como  $x(t)$  cuando pueda omitirse el valor inicial  $x^*$  sin ambigüedad posible).

En el contexto no lineal y ante la imposibilidad práctica de obtener, excepto en casos muy concretos, las soluciones analíticas o trayectorias de (2.20), el estudio cualitativo de este tipo de sistemas típicamente pretende estimar el comportamiento asintótico del conjunto de trayectorias o de una parte de ellas. En este sentido, una estrategia habitual consiste en determinar, en primer lugar, algunos conjuntos denominados *invariantes* para (2.20);  $S \subseteq \Omega$  es invariante si

$$x^* \in S \Rightarrow x(t, x^*) \in S$$

para todos los valores  $t$  para los que la solución  $x(t, x^*)$  está bien definida. Las familias más sencillas de conjuntos invariantes están definidas por los puntos de equilibrio y las trayectorias periódicas. Todos los resultados de carácter cualitativo aquí abordados se centrarán en invariantes del primer tipo (puntos de equilibrio). Se dice que  $x^*$  es un punto de equilibrio de (2.20)

sencillamente si

$$f(x^*) = 0,$$

pues en este caso  $x(t, x^*) = x^*$  es una trayectoria del sistema (definida, de hecho, para todo  $t \in \mathbb{R}$ ).

El segundo paso en la estrategia anteriormente citada consiste en determinar la *estabilidad* de los invariantes arriba mencionados. En términos generales, existen diferentes nociones de estabilidad e interrelaciones no triviales entre ellas (cf. los textos [1, 53, 64, 97, 131, 140] anteriormente referidos). Sin embargo, en el caso concreto de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo como (2.20) las definiciones se simplifican y, en este contexto, la noción de estabilidad de Lyapunov puede considerarse universal; así, se dice que un punto de equilibrio  $x^*$  de (2.20) es *estable* (en el sentido de Lyapunov) si para todo entorno  $V$  de  $x^*$  existe otro entorno  $U \subseteq V$  tal que la condición  $x_0 \in U$  garantiza que  $x(t, x_0)$  está definida y permanece en  $V$  para todo  $t > 0$  (esta definición y las que siguen pueden encontrarse por ejemplo en [64]). Si  $U$  puede tomarse de forma que, además de lo anterior, se verifique que  $x(t, x_0) \rightarrow x^*$  para todo  $x_0 \in U$ , entonces  $x^*$  se dice *asintóticamente estable*. Un punto de equilibrio que no es estable se denomina *inestable*.

Las técnicas fundamentales para el estudio de la estabilidad de puntos de equilibrio se deben igualmente a Lyapunov; él introdujo, por una parte, las funciones que finalmente vendrían a denominarse *funciones de Lyapunov* y cuya existencia local asegura la estabilidad (o, en el caso llamado estricto, la estabilidad asintótica) de un punto de equilibrio dado. En este trabajo no se hará, sin embargo, uso de este concepto. También se deben a él las técnicas de linealización que, por el contrario, se emplearán por sistema en el Capítulo 6 y cuyos fundamentos se resumen a continuación. La idea esencial del método de linealización de Lyapunov consiste en examinar la matriz jacobiana  $J(x^*) = f'(x^*)$  resultante de la diferenciación del campo de vectores  $f$  en el punto de equilibrio bajo estudio; la ubicación de los autovalores de la matriz jacobiana determina diversas propiedades de estabilidad del punto de equilibrio. En particular (véase de nuevo [64], aunque estos resultados pueden encontrarse prácticamente en cualquier referencia sobre teoría cualitativa de sistemas dinámicos):

- Si  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  para todos los autovalores  $\lambda$  de  $J(x^*)$ , entonces  $x^*$  es asintóticamente estable.
- Si  $x^*$  es estable, entonces  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$  para todo autovalor  $\lambda$  de  $J(x^*)$ ; equivalentemente, si  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  para algún autovalor, entonces  $x^*$  es inestable.

Un punto de equilibrio se dice *hiperbólico* si todos los autovalores verifican  $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ . De las afirmaciones anteriores es inmediato concluir que todo punto de equilibrio hiperbólico es necesariamente asintóticamente estable o inestable; más precisamente, si es estable, entonces también es asintóticamente estable. Los puntos de equilibrio hiperbólicos se clasifican en:

- *Sumideros*, para los que todos los autovalores verifican  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ .
- *Fuentes*, para los cuales todos los autovalores verifican  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ .
- *Puntos de silla*, para los que algunos autovalores tienen parte real negativa y otros parte real positiva.

En el caso particular de los sistemas planos (sistemas dinámicos definidos en  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ), los sumideros (o, dualmente, las fuentes) suelen subclasificarse en las siguientes categorías:

- *Nodos (propios)*, para los que ambos autovalores son reales, del mismo signo y distintos.
- *Focos*, para los que ambos autovalores son iguales y la matriz jacobiana es diagonalizable.
- *Nodos impropios*, para los que ambos autovalores son iguales y la matriz jacobiana no es diagonalizable.
- *Espirales*, con autovalores no reales (siendo entonces necesariamente complejos conjugados).

En el Capítulo 6 se abordarán propiedades cualitativas de sistemas dependientes de un parámetro, que en el caso de los sistemas descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias responderían a un modelo de la forma

$$x' = f(x, \mu). \quad (2.21)$$

En esta situación las propiedades cualitativas de un invariante dado (y en particular de un punto de equilibrio o, más precisamente, de una familia uniparamétrica de puntos de equilibrio) pueden ser dependientes del valor del parámetro  $\mu$ . La teoría de bifurcaciones estudia precisamente los posibles cambios en este comportamiento cualitativo asociados a cambios paramétricos, lo que a su vez puede responder a variaciones en alguno de los parámetros físicos del sistema modelado por (2.21). Se prestará especial atención a la bifurcación denominada *silla-nodo*, en cierto sentido la más elemental (cf. [53, 127, 128]) y que aparece asociada al cambio de signo de un autovalor real por transición a través del origen a lo largo de una curva de equilibrio. Obsérvese que esta terminología surge como generalización del caso plano, pues en este contexto y a partir de la taxonomía de arriba la única transición posible asociada al cambio de signo de un solo autovalor (real) está necesariamente vinculada a la transformación de un punto de silla en un nodo, o viceversa. Otras bifurcaciones de puntos de equilibrio relevantes en la teoría clásica de sistemas dinámicos son la bifurcación transcítica y la bifurcación de Hopf, que no se abordarán en el presente trabajo. Más recientemente se han estudiado bifurcaciones locales también en contextos no paramétricos, asociadas a la existencia de variedades de puntos de equilibrio no aislados y que aparecen sistemáticamente en el ámbito de los circuitos memristivos (entre otros campos) [33, 34, 35, 36, 81, 94, 114].

### 2.4.2. Sistemas modelados por ecuaciones algebraico-diferenciales

Como se ha indicado en secciones anteriores, muchos sistemas dinámicos procedentes de diferentes campos de las ciencias y la ingeniería pueden modelarse de un modo sencillo y directo mediante ecuaciones algebraico-diferenciales que, por ejemplo, capturen explícitamente la presencia de restricciones en el sistema. Eventualmente, a través de un proceso de reducción puede llegarse a un modelo basado en ecuaciones diferenciales ordinarias explícitas, como se detalla en la sección 2.3.

El potencial interés de la teoría cualitativa de sistemas dinámicos se extiende, por supuesto, a los sistemas modelados mediante ecuaciones algebraico-diferenciales. En este contexto, el

estudio cualitativo puede abordarse de dos maneras: una primera alternativa consiste en reducir sistemáticamente el modelo a otro basado en ecuaciones diferenciales ordinarias explícitas, como se indica en el párrafo anterior, y aplicar a este modelo reducido técnicas clásicas como las referidas en la sección 2.4.1. Sin embargo, esta estrategia es en muchas ocasiones difícil o imposible de aplicar en la práctica, por ejemplo en casos (típicos en la teoría de circuitos electrónicos no lineales) en los que la dimensión del problema impide automatizar este proceso de reducción.

La segunda alternativa consiste en extender los resultados de tipo cualitativo al contexto de las ecuaciones algebraico-diferenciales, de forma que no sea necesario el proceso de reducción anteriormente referido para aplicar herramientas de carácter analítico o cualitativo. En esta dirección, en las últimas dos décadas se ha desarrollado sistemáticamente la teoría cualitativa de sistemas dinámicos modelados mediante ecuaciones algebraico-diferenciales [79, 80, 85, 86, 106, 109, 110, 111, 112, 135], disponiéndose en la actualidad de un amplio abanico de técnicas directamente aplicables en este contexto.

En el caso particular de los puntos de equilibrio, las técnicas de linealización conducen de forma natural al estudio de los haces de matrices presentados en la sección 2.3. Considérese en primer lugar el caso lineal, definido por un sistema de la forma

$$Ax' + Bx = 0, \quad (2.22)$$

donde  $\{A, B\}$  define un haz de matrices regular. La forma canónica de Kronecker (2.7) (que reproducimos por claridad en la exposición),

$$EAF = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}, \quad EBF = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

conduce a una reducción de la forma

$$y_1' = -Wy_1, \quad (2.24)$$

cf. (2.9a). Obsérvese que las matrices  $E, F$  que aparecen en la transformación a la forma de Kronecker no influyen en el espectro del haz pues

$$\det(\lambda EAF + EBF) = \det E \det(\lambda A + B) \det F,$$

siendo  $E$  y  $F$  matrices regulares. Esto significa que

$$\det(\lambda A + B) = 0 \Leftrightarrow \det(\lambda EAF + EBF) = 0.$$

Más aún, puede comprobarse que, por el hecho de ser  $N$  una matriz nilpotente, para cualquier valor de  $\lambda$  la matriz  $\lambda N + I$  es regular, con  $\det(\lambda N + I) = 1$ , por lo que

$$\det(\lambda EAF + EBF) = \det(\lambda I_m + W),$$

de lo que se concluye que, efectivamente, el espectro del haz de matrices caracteriza la linealización del sistema reducido (2.24) y que, por tanto, las propiedades de estabilidad de (2.22) están asociadas a las del haz  $\{A, B\}$ .

En problemas no lineales la relación con el haz de matrices del problema linealizado es más compleja, necesitándose, en términos generales, que el índice de la ecuación esté localmente bien definido para caracterizar las propiedades locales de un punto de equilibrio hiperbólico en términos de las del correspondiente haz de matrices; estos resultados se detallan en [86, 106, 112]. A los efectos de la investigación aquí desarrollada, es suficiente con constatar el hecho de que para ecuaciones algebraico-diferenciales semiexplícitas de índice uno y también para ecuaciones de Hessenberg es bien sabido que el haz de matrices efectivamente caracteriza las propiedades de estabilidad del correspondiente punto de equilibrio (cf. por ejemplo [78, 111]).

Finalmente, y como se desarrolla en el Capítulo 6, la aproximación anterior al estudio cualitativo de sistemas (aplicada ya, específicamente, al modelado de circuitos) tendrá una etapa adicional en la transcripción de las condiciones que caracterizan la estabilidad y las posibles bifurcaciones de puntos de equilibrio a un lenguaje puramente circuital, en términos de la topología del grafo subyacente al circuito y las características de los diferentes dispositivos que constituyen el mismo.





# Capítulo 3

## Modelos circuitales

En este capítulo introduciremos los conceptos fundamentales de teoría de circuitos que, junto con las herramientas matemáticas presentadas en el capítulo anterior, completarán el marco teórico esencial para desarrollar los resultados tratados en el presente trabajo.

En la sección 3.1 se presentan las ecuaciones que rigen el comportamiento de un circuito formado por componentes clásicos. En primer lugar se presentan las leyes de Kirchhoff y, posteriormente, se formulan las ecuaciones características de condensadores, bobinas, resistencias controladas por corriente, resistencias controladas por tensión (dispositivos que, en todos los casos, pueden ser no lineales) y fuentes independientes. El espectro de componentes circuitales clásicos se ampliará en la sección 3.2 con la presentación del memristor y sus ecuaciones características.

La sección 3.3 está dedicada al concepto de pasividad y sus implicaciones matemáticas. Esta noción juega un papel fundamental en los problemas abordados en esta Tesis pues, a grandes rasgos, los objetivos esenciales del trabajo (como se detalla en la sección 1.1) están asociados a la extensión a contextos no pasivos de diferentes resultados sobre el índice de modelos algebraico-diferenciales, desarrollados previamente (y con diferentes técnicas) para circuitos pasivos, y al estudio de fenómenos de bifurcación intrínsecamente ligados, por naturaleza, a circuitos necesariamente no pasivos.

Las secciones 3.4 y 3.5 están dedicadas a la presentación de los modelos circuitales de ramas e híbrido, respectivamente. Es procedente indicar que los resultados obtenidos en el curso de la investigación son de aplicación para circuitos que, en general, serán no lineales (esto es, alguno(s) de sus dispositivos pueden presentar una relación característica no lineal entre las variables involucradas en la misma). Es por ello que los modelos empleados se formulan en el tiempo, tomando generalmente una forma algebraico-diferencial (véase, en este sentido, la sección 2.3). Por último, y con intención de proporcionar una panorámica completa de las familias de modelos circuitales empleados en contextos no lineales, la sección 3.6 recopila una breve introducción a los modelos nodales.

Esta división de las secciones del capítulo refleja el hecho de que el conjunto de modelos circuitales algebraico-diferenciales se divide en dos grandes familias. Por un lado, los modelos nodales buscan formulaciones compactas, eliminando para ello y en la medida de lo posible las diferentes variables circuitales para expresarlas en términos de los potenciales de nodos (al

precio de perder la simetría entre corrientes y tensiones), a través del uso sistemático de la matriz de incidencia  $A$  (cf. sección 2.1). El lector puede ampliar conocimientos sobre el análisis del índice en modelos nodales en las referencias [30, 31, 32, 55, 111, 136, 137], siendo especialmente relevantes [30, 31] en el contexto de la presente Tesis por su análisis del índice sin condiciones de pasividad. Por otro lado, los modelos llamados *simétricos* preservan la simetría corriente-tensión, lo que resulta conveniente para tratar ciertos problemas analíticos, al precio de mantener una dimensión más alta en los modelos resultantes; la representación del digrafo subyacente se basa en estos modelos en las matrices reducidas de cutsets  $Q$  y lazos  $B$  presentadas en la sección 2.1. En esta segunda familia se enmarcan los modelos de ramas e híbridos introducidos en las secciones 3.4 y 3.5, y analizados con detalle en los capítulos posteriores de la Tesis. Puede consultarse [111] para una introducción detallada a los modelos de ramas de circuitos pasivos, como síntesis de una larga tradición que se remonta a los trabajos seminales de Bashkow y Bryant [4, 9, 10], siendo otras referencias importantes en este ámbito los trabajos [108, 125, 126]. Como principales referencias en el ámbito del análisis del índice en modelos híbridos destacamos los artículos [68, 69, 134]. Por último, los textos [3, 20, 25, 38, 111] pueden servir como introducción general al modelado en el tiempo de circuitos eléctricos y electrónicos no lineales.

## 3.1. Leyes de Kirchhoff y dispositivos circuitales clásicos

### 3.1.1. Variables fundamentales

La práctica totalidad de los dispositivos empleados en la teoría de circuitos eléctricos y electrónicos se formulan en términos de (algunas de) las cuatro magnitudes físicas denominadas *fundamentales* en el ámbito electromagnético: la carga (representada por la variable  $q$  y medida en culombios), la corriente (representada por la variable  $i$  y medida en amperios), el flujo magnético (representado por la variable  $\phi$  y medido en webers) y la tensión (representada por la variable  $v$  y medida en voltios). Entre dichas magnitudes existen las siguientes relaciones:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (3.1a)$$

$$v = \frac{d\phi}{dt}. \quad (3.1b)$$

En diferentes familias de modelos se emplean otras variables circuitales definidas (explícita o implícitamente) a partir de las anteriores. En particular, la tensión de las ramas se corresponde con la diferencia de potencial que existe entre los nodos de dicha rama. Si utilizamos la variable  $e$  para representar los potenciales de los nodos, la relación anterior puede expresarse mediante la siguiente ecuación, esencial en la formulación de modelos nodales:

$$v = A^T e. \quad (3.2)$$

Dualmente, las corrientes de rama  $i$  pueden expresarse en términos de las denominadas *corrientes de lazo*  $j$  asociadas a cualquier sistema linealmente independiente de lazos del circuito. Si

$B$  denota la correspondiente matriz de lazos reducida, la relación en este caso toma la forma

$$i = B^T j.$$

En el estudio de circuitos mediante el análisis de lazos (o de mallas, en circuitos planos), típicamente las incógnitas asociadas a las corrientes de rama se expresan en términos de las de lazos a partir de la relación anterior.

### 3.1.2. Leyes de Kirchhoff

La **ley de Kirchhoff de las corrientes** (KCL por sus siglas en inglés), o **de nudos**, expresa que la suma de las corrientes de las ramas incidentes en cualquier nodo es cero. Puede ser expresada matemáticamente utilizando una matriz de incidencia de la siguiente forma:

$$Ai = 0. \quad (3.3)$$

Debido a que las matrices reducidas de incidencia y de cutsets están relacionadas por un producto de la forma  $Q = MA$  (siendo  $M$  una matriz regular), es posible expresar esta ley alternativamente en función de la matriz de cutsets:

$$Qi = 0. \quad (3.4)$$

Esta ley es consecuencia del principio de conservación de la carga.

De manera dual, de acuerdo con la **ley de Kirchhoff de las tensiones** (KVL por sus siglas en inglés), o **de lazos**, la suma de las caídas de tensión en las ramas de cualquier lazo es cero. Puede expresarse en función de una matriz de lazos de la siguiente manera:

$$Bv = 0. \quad (3.5)$$

La ley anterior expresa el hecho de que la tensión eléctrica es una variable conservativa, lo que por otra parte sustenta la posibilidad de expresarla en términos de un potencial, como se recoge en (3.2).

### 3.1.3. Dispositivos clásicos: ecuaciones características

En este apartado se recopilan las relaciones matemáticas que existen entre las magnitudes físicas involucradas en fuentes de tensión y corriente independientes, bobinas, condensadores y resistencias. Más adelante, trataremos las ecuaciones del memristor, un elemento circuital recientemente descubierto, que completa las posibles relaciones entre las magnitudes eléctricas fundamentales y que tendrá un papel muy relevante en el presente trabajo.

**Condensadores.** La ecuación característica de los condensadores establece las relaciones entre las cargas y las tensiones que caen en estos elementos. Asumiremos a lo largo de la memoria que los condensadores son controlados por tensión, lo que confiere a esta ecuación

la forma

$$q = \gamma_c(v_c), \quad (3.6)$$

siendo  $\gamma_c$  de clase  $C^1$ .

Denotaremos la *capacidad incremental* como  $C(v_c) = \gamma'_c(v_c)$ . Si derivamos la ecuación (3.6) respecto del tiempo y tenemos en cuenta (3.1a), podemos expresar la relación entre la corriente y la tensión en un condensador de la siguiente manera:

$$i_c = C(v_c)v'_c. \quad (3.7)$$

En adelante utilizaremos esta última expresión para la descripción de los condensadores, pudiendo  $C$  ser interpretada como una matriz constante si los condensadores son lineales. En caso contrario,  $C$  es una función que toma valores matriciales dependientes de  $v_c$ . Tanto en el contexto lineal como en el no lineal, en el caso de que no existan acoplos entre los condensadores  $C$  será diagonal.

**Bobinas.** La ecuación característica de las bobinas relaciona el flujo magnético y la corriente. Se asumirá que las bobinas son controladas por corriente, de manera que su ecuación característica será de la forma

$$\phi = \gamma_l(i_l), \quad (3.8)$$

donde  $\gamma_l$  es de clase  $C^1$ .

La matriz  $L(i_l) = \gamma'_l(i_l)$  es la *inductancia incremental*. Derivando la ecuación (3.8) respecto del tiempo y a la vista de la ecuación (3.1b), la relación entre la corriente y la tensión en una bobina toma la expresión

$$v_l = L(i_l)i'_l. \quad (3.9)$$

De igual manera que en el caso de los condensadores, será esta última expresión la que utilizaremos en adelante. Si las bobinas son lineales,  $L$  puede entenderse como una matriz constante, tomando valores matriciales dependientes de  $i_l$  en el caso no lineal. Si no existen acoplos entre las bobinas,  $L$  será una matriz diagonal.

**Resistencias.** En la teoría de circuitos clásica se distinguen dos tipos de resistencias, las controladas por tensión (utilizaremos el subíndice  $g$  para representarlas) y las controladas por corriente (simbolizadas por el subíndice  $r$ ). Sus ecuaciones características son:

$$i_g = g(v_g) \quad (3.10a)$$

$$v_r = f(i_r), \quad (3.10b)$$

siendo  $g$  y  $f$  de clase  $C^1$ . Obsérvese que empleamos la noción de resistencia en un sentido amplio, que incluye también, por ejemplo, dispositivos no lineales como el diodo; desde este punto de vista, cualquier dispositivo gobernado por una relación no diferencial entre tensión y corriente es una resistencia. Nótese también que la descripción anterior asume que no existen acoplos entre ambos tipos de resistencias (controladas por tensión y por corriente).

Las matrices de derivadas parciales  $G(v_g) = g'(v_g)$  y  $R(i_r) = f'(i_r)$  son las matrices de *conductancia* y *resistencia* incrementales de cada uno de los dos tipos de resistencias. Si las resistencias son lineales entonces  $G$  y  $R$  son matrices constantes y las ecuaciones características

pueden expresarse del siguiente modo:

$$i_g = Gv_g \quad (3.11a)$$

$$v_r = Ri_r. \quad (3.11b)$$

Como en casos anteriores, si no existen acoplos dentro de cada uno de los grupos de resistencias, entonces  $G$  y  $R$  serán diagonales.

**Fuentes de tensión y corriente independientes.** Las fuentes de alimentación son los elementos que aportan energía en los circuitos. En el presente trabajo trabajaremos con fuentes independientes, pudiéndose distinguir dos tipos: las fuentes de tensión (las representaremos con los subíndices  $u$ ) y las fuentes de corriente (que asociaremos con los subíndices  $j$ ). Las ecuaciones que modelan estos dispositivos son, sencillamente,

$$v_u = u(t) \quad (3.12a)$$

$$i_j = j(t), \quad (3.12b)$$

donde  $u(t)$  y  $j(t)$  son funciones dependientes del tiempo.

Nótese que, si las ramas de un cutset estuviesen formadas por fuentes independientes de corriente, entonces violarían genéricamente la ley de Kirchhoff de las corrientes, por lo que tal situación no se contempla en la práctica. De igual manera, un lazo de fuentes de tensión violaría genéricamente la ley de tensiones de Kirchhoff, por lo que tampoco contemplaremos esta topología. Estas configuraciones se denominan habitualmente *mal condicionadas* (ill-posed) y se excluyen por sistema en la teoría de circuitos.

## 3.2. El memristor

### 3.2.1. Memristores y sistemas memristivos

En 1971, Leon Chua postuló la existencia de un cuarto tipo de elemento circuital fundamental, el memristor (contracción de *memory resistor*) [22]. Dicha postulación se basaba en un razonamiento de simetría, en lo que se refiere a la relación de pares de variables circuitales fundamentales: efectivamente, habida cuenta de que los pares carga-tensión, flujo-corriente y tensión-corriente caracterizan a condensadores, bobinas y resistencias (cf. las relaciones (3.6), (3.8), (3.10a) y (3.10b)), y a la vista de (3.1a) y (3.1b), tan solo el par flujo-carga escapa del contexto de los dispositivos clásicos. El denominado *cuarto elemento* habría de estar definido, por tanto, por una característica carga-flujo. Posteriormente, en [26], Chua y Kang propusieron un sistema de ecuaciones que permiten modelar un conjunto más amplio de elementos con memoria. De acuerdo a este modelo, el memristor es un caso particular de sistema memristivo. Además, se plantearon ecuaciones análogas para ampliar el modelado de condensadores y bobinas al contexto con memoria mediante la introducción de los denominados sistemas memcapacitivos y meminductivos. Elementos como las uniones de Josephson pueden modelarse con precisión utilizando las ecuaciones de estos sistemas con memoria [24, 71].

Aunque el artículo de Chua suponía potencialmente una revolución conceptual, al introducir

un nuevo elemento fundamental, durante varias décadas no se diseñó ningún dispositivo que tuviese una característica memristiva, permaneciendo de esta forma el memristor solo como postulación teórica. Fue en mayo de 2008 cuando un equipo de investigadores de la empresa Hewlett-Packard anunció la consecución de un prototipo de memristor a escala nanométrica [130], aumentando considerablemente la repercusión de los trabajos de Chua y abriendo nuevas posibilidades en el diseño electrónico.

Una de las aplicaciones que tendrán los memristores será la de crear dispositivos electrónicos de almacenamiento de información sin necesidad de aporte de energía para su mantenimiento [47, 48]. Otra de las aplicaciones que se investigan actualmente está en la implementación *hardware* de redes neuronales artificiales. En este campo, el memristor es un candidato natural para modelar la conexión sináptica, identificando el peso de una conexión con la variable de conductancia o memductancia. En particular, los memristores basados en el modelo de HP [130] tienen esencialmente dos estados estables, de alta y baja conductancia, lo cual modela bien la presencia o ausencia de conexión sináptica. De forma natural, la función de multiplicación se implementaría mediante la ley de Ohm y la suma ponderada característica de las entradas a las neuronas se obtendría de la ley de Kirchhoff de corrientes. Además, la *plasticidad* sináptica, o capacidad de variar la fortaleza o la eficiencia de la conexión, se amolda bien a la resistencia variable del memristor; más aún, su conductancia (o memductancia) es ajustable mediante pulsos eléctricos, lo que puede reproducir el comportamiento de las neuronas naturales, en los que la plasticidad se modela en términos de la temporización de determinados pulsos eléctricos (*Spike Timing Dependent Plasticity* (STDP)) [124, 141].

Todo ello ha generado grandes expectativas en relación a la implementación *hardware* de redes neuronales basadas en memristores, lo que ha dado lugar a una creciente actividad investigadora en torno a este tipo de redes en los últimos años. Existen ya implementaciones *hardware* de retículos (*grids*) de memristores a escala nanométrica y de muy bajo consumo [72, 143], aptos para la implementación de redes neuronales memristivas, y se prevé una intensa actividad de investigación y desarrollo en este ámbito en el futuro próximo.

En esta sección nos limitaremos a presentar las ecuaciones características que permiten describir de manera general el comportamiento de los memristores sin particularizarlas para los modelos desarrollados experimentalmente, analizando posteriormente los modelos circuitales resultantes en términos de las propiedades analíticas (pasividad, etc.) del dispositivo en abstracto. Presentaremos también, por completitud, el concepto de sistema memristivo, algo más general, y las nociones análogas en el ámbito reactivo (memcondensadores y membobinas).

### 3.2.2. Ecuaciones del memristor

Existen dos tipos de memristores: controlados por carga (los representaremos con el subíndice  $m$ ) o por flujo (que representaremos con el subíndice  $w$ ). En el primer caso su ecuación característica es

$$\phi_m = \theta(q_m), \quad (3.13)$$

con  $\theta$  de clase  $C^1$ . En el caso de un memristor controlado por flujo, la ecuación característica toma la forma

$$q_w = \sigma(\phi_w), \quad (3.14)$$

siendo  $\sigma$  de clase  $C^1$ .

Las magnitudes  $M(q) = \theta'(q)$  y  $W(\phi) = \sigma'(\phi)$  se denominan *memristencia* y *memductancia*, respectivamente. Si derivamos con respecto al tiempo las ecuaciones (3.13) y (3.14), se obtienen como ecuaciones características de los memristores controlados por carga y por flujo las siguientes relaciones:

$$v_m = M(q_m)i_m \quad (3.15a)$$

$$i_w = W(\phi_w)v_w. \quad (3.15b)$$

En un instante  $t_1$ , el memristor se comporta como una resistencia, pero a diferencia de esta, el valor de su memristencia (memductancia) depende de  $q_m = \int_{-\infty}^{t_1} i_m$  (o de  $\phi_w = \int_{-\infty}^{t_1} v_w$ , respectivamente). Es decir, tiene dependencia de las corrientes (tensiones) a que ha sido sometido desde el principio y de este fenómeno viene su nombre de *memory resistor*. Obsérvese que el memristor es un dispositivo esencialmente no lineal, pues si la relación carga-flujo fuese lineal entonces  $M$  (o, en su caso,  $W$ ) no dependería de la carga (flujo) y el dispositivo se identificaría con una resistencia lineal.

La idea subyacente a todo lo anterior se abordó con mayor generalidad en el trabajo de Chua y Kang [26], en el que se presentan los denominados *sistemas memristivos*, de la forma

$$q'_m = \eta(q_m, i_m) \quad (3.16a)$$

$$v_m = M(q_m, i_m)i_m, \quad (3.16b)$$

o

$$\varphi'_w = \psi(\varphi_w, v_w) \quad (3.17a)$$

$$i_w = W(\varphi_w, v_w)v_w, \quad (3.17b)$$

en los que las variables de estado  $q$  y  $\varphi$  pierden el significado físico de carga y flujo, respectivamente, para convertirse en entidades abstractas de las que depende dinámicamente la resistencia o la conductancia del dispositivo; este es el contexto en el que se sitúan, por ejemplo, los modelos memristivos propuestos por Pershin y Di Ventra en [98, 99] para la implementación del aprendizaje hebbiano mediante redes neuronales memristivas.

Es posible también extender las nociones anteriores al contexto reactivo, como propusieron Di Ventra, Pershin y Chua en [28]. Un *memcondensador* estaría definido por una relación de la forma

$$q = C_m(\varphi)v, \quad (3.18)$$

siendo  $C_m$  la *memcapacidad*, dependiente del flujo  $\varphi(t) = \int_{-\infty}^t v(\tau)d\tau$ . El dispositivo dual sería una *membobina*, definida por

$$\varphi = L_m(q)i, \quad (3.19)$$

donde  $L_m(q)$  es la *meminductancia*. También la forma más general considerada para los sistemas memristivos (3.16) y (3.17) puede extenderse a este contexto reactivo.

### 3.3. Pasividad

En el contexto clásico (esto es, sin memristores), un circuito se dice pasivo (resp. estrictamente pasivo) si los condensadores, bobinas y resistencias que forman parte del mismo son pasivos (resp. estrictamente pasivos). En el caso lineal e invariante en el tiempo, esto significa que las matrices de capacidad, inductancia, resistencia y conductancia son semidefinidas positivas (resp. definidas positivas). Una matriz  $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$  se dice semidefinida positiva si  $u^T M u \geq 0$  para todo  $u \in \mathbb{R}^m$ , y será definida positiva si  $u^T M u > 0$  para todo  $u \in \mathbb{R}^m$  distinto del vector nulo.

En el caso no lineal, las nociones anteriores pasan a depender del punto de trabajo, es decir, las matrices incrementales pueden ser (semi)definidas positivas solo para ciertos valores de sus variables de control. Esto permite extender las nociones anteriores para definir punto a punto dispositivos y circuitos *localmente* pasivos (resp. estricta y localmente pasivos).

Los conceptos anteriores pueden también extenderse de forma natural al contexto memristivo. Un conjunto de memristores se dirá pasivo o estrictamente pasivo si la matriz  $M(q)$  (o  $W(\phi)$  en el caso controlado por flujo) es semidefinida positiva o, respectivamente, definida positiva. Obsérvese que, si no existen acoplos entre los memristores, entonces estas matrices serán diagonales.

Diremos, finalmente, que un dispositivo o circuito es activo (quizá localmente) si no es pasivo (nótese que este término se utiliza también en otros sentidos en teoría de circuitos, en particular para indicar la presencia de fuentes controladas que, por simplicidad, no consideraremos en el presente trabajo).

### 3.4. Modelo de ramas

El resto del capítulo está orientado a integrar las leyes de Kirchhoff y los dispositivos anteriormente presentados en familias de ecuaciones que modelen la dinámica global del circuito y que serán objeto de análisis en capítulos posteriores. La atención se centrará fundamentalmente en modelos de carácter simétrico, que transcriben las leyes de Kirchhoff en términos de las matrices de cutsets y lazos, y que mantienen las corrientes y tensiones como variables del modelo; en particular, esta sección presenta los denominados *modelos de ramas*, mientras que la sección 3.5 se derivan los modelos llamados *híbridos* y que, en cierto sentido, pueden entenderse como una reducción de los anteriores. En la sección 3.6 se incluye, por completitud, una breve introducción a modelos (no simétricos) de naturaleza nodal.

#### 3.4.1. Circuitos clásicos

El modelo general de ramas viene determinado, sencillamente, por las leyes de Kirchhoff en la forma recogida en (3.4) y (3.5) y las ecuaciones características de los elementos circuitales que conforman el circuito. En el caso de los circuitos formados por elementos clásicos, el



modelo de ramas viene determinado por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$C(v_c)v'_c = i_c \quad (3.20a)$$

$$L(i_l)i'_l = v_l \quad (3.20b)$$

$$0 = i_g - g(v_g) \quad (3.20c)$$

$$0 = v_r - f(i_r) \quad (3.20d)$$

$$0 = v_u - u(t) \quad (3.20e)$$

$$0 = i_j - j(t) \quad (3.20f)$$

$$0 = Qi \quad (3.20g)$$

$$0 = Bv. \quad (3.20h)$$

Este tipo de modelos se encuentra en la base del problema de la formulación de un modelo de estados para circuitos no lineales, tratado de forma seminal por Bashkow y Bryant (cf. [4, 9, 10]; véase también [3]). El modelo general de ramas puede también ser considerado como un modelo *tableau*, sin incluir las ecuaciones que relacionan las tensiones con los potenciales de nodos (cf. [25, 57]).

### 3.4.2. Circuitos memristivos

Para obtener el modelo de ramas de circuitos con memristores, a las ecuaciones del modelo (3.20) habrá que añadir las ecuaciones características de los memristores, (3.15a) y (3.15b). También entrarán en juego dos nuevas variables: la carga (de los memristores controlados por carga) y el flujo (de los memristores controlados por flujo); así como las ecuaciones que vinculan estas variables con la corriente y la tensión, (3.1a) y (3.1b). Esto confiere al sistema la forma siguiente:

$$C(v_c)v'_c = i_c \quad (3.21a)$$

$$L(i_l)i'_l = v_l \quad (3.21b)$$

$$q'_m = i_m \quad (3.21c)$$

$$\phi'_w = v_w \quad (3.21d)$$

$$0 = i_g - g(v_g) \quad (3.21e)$$

$$0 = v_r - f(i_r) \quad (3.21f)$$

$$0 = v_m - M(q_m)i_m \quad (3.21g)$$

$$0 = i_w - W(\phi_w)v_w \quad (3.21h)$$

$$0 = v_u - u(t) \quad (3.21i)$$

$$0 = i_j - j(t) \quad (3.21j)$$

$$0 = Qi \quad (3.21k)$$

$$0 = Bv. \quad (3.21l)$$

### 3.5. Modelo híbrido

El análisis híbrido, que presentamos en este apartado, fue propuesto por primera vez por Kron [74] y desarrollado posteriormente por Amari [2] y Branin [6] en la década de los 60. La idea general es reducir en la medida de lo posible el número de variables involucradas en el sistema manteniendo, sin embargo (y al contrario que en la formulación nodal) la simetría tensión-corriente del modelo. En el Capítulo 5 trataremos la caracterización del índice para modelos híbridos de circuitos no lineales sin hipótesis de pasividad, extendiendo, mediante otro tipo de herramientas matemáticas, los resultados obtenidos en [68, 70, 132, 134] para modelos híbridos de circuitos pasivos.

Las ecuaciones híbridas toman como variables independientes algunas corrientes y tensiones de rama y pueden entenderse como una reducción del modelo de ramas anteriormente presentado. La selección adecuada de dichas variables requiere dividir el conjunto de ramas en diferentes tipos y puede formularse como un problema de intersección de matroides. Esta selección hace que el número de ecuaciones híbridas nunca sea mayor que el resultante de los análisis nodal o de lazos. Además, el índice del modelo híbrido nunca excede el del extendido análisis MNA en las mismas condiciones (cf. [68, 70, 134]). Si se desea profundizar en este problema más allá de lo que se tratará en este trabajo, pueden consultarse las referencias anteriormente citadas o la sección 8.6 de [19].

#### 3.5.1. Ecuaciones híbridas para circuitos clásicos

En este apartado presentamos las ecuaciones híbridas para circuitos no lineales con condensadores, bobinas, y resistencias controladas por corriente y por tensión. Se utilizarán los subíndices  $c$ ,  $l$ ,  $r$  y  $g$  para diferenciar estos cuatro tipos de elementos circuitales. No será necesario suponer que las resistencias, condensadores y bobinas sean elementos estrictamente pasivos, es decir, sus matrices asociadas no serán necesariamente definidas positivas. Supondremos que no existen acoplos entre los diferentes elementos, de manera que las matrices características serán diagonales. Sin pérdida de generalidad, podemos excluir a las fuentes del análisis; la extensión de los resultados a problemas con fuentes independientes, siempre que no existan lazos de fuentes de tensión ni cutsets de fuentes de corriente, no ofrece dificultad.

Denotemos el digrafo asociado a un circuito dado como  $G = (V, E, \Psi)$ . Dividamos el conjunto total de aristas en dos subconjuntos disjuntos:  $E = (E_y \cup E_z)$  con  $E_y \cap E_z = \emptyset$ . Una partición  $(E_y, E_z)$ , se denomina *admisibile* si  $E_y$  incluye todas las ramas asociadas a condensadores y  $E_z$  incluye todas las asociadas a bobinas.

Por simplicidad asumiremos en todo el desarrollo que el circuito analizado es conexo. Un árbol recubridor es un *árbol de referencia* si tiene tantas ramas como sea posible de entre las del conjunto  $E_y$ . Dentro del grupo de los árboles de referencia se encuentran los árboles normales (cf. sección 2.1.3), que tienen tantas aristas como sea posible siguiendo el orden de prioridad definido por la siguiente secuencia: condensadores, resistencias controladas por tensión, resistencias controladas por corriente y bobinas. Para generar las ecuaciones híbridas es necesario partir de un árbol de referencia, que no debe ser necesariamente normal. No obstante, por simplicidad nosotros partiremos de un árbol normal, lo que facilitará el análisis.

En la derivación del modelo, expresaremos en primer lugar la ley de Kirchhoff de las corrientes usando una matriz fundamental de cutsets con respecto a un árbol de referencia normal:

$$\begin{pmatrix} i_{ctr} \\ i_{gtr} \\ i_{rtr} \\ i_{ltr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11}^T & F_{21}^T & F_{31}^T & F_{41}^T \\ 0 & F_{22}^T & F_{32}^T & F_{42}^T \\ 0 & 0 & F_{33}^T & F_{43}^T \\ 0 & 0 & 0 & F_{44}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{cco} \\ i_{gco} \\ i_{rco} \\ i_{lco} \end{pmatrix}.$$

Este sistema de ecuaciones puede reescribirse como

$$i_{ctr} = F_{11}^T i_{cco} + F_{21}^T i_{gco} + F_{31}^T i_{rco} + F_{41}^T i_{lco} \quad (3.22a)$$

$$i_{gtr} = F_{22}^T i_{gco} + F_{32}^T i_{rco} + F_{42}^T i_{lco} \quad (3.22b)$$

$$i_{rtr} = F_{33}^T i_{rco} + F_{43}^T i_{lco} \quad (3.22c)$$

$$i_{ltr} = F_{44}^T i_{lco}. \quad (3.22d)$$

La ley de Kirchhoff de las tensiones, formulada a partir de la matriz fundamental de lazos con respecto al mismo árbol normal, toma la forma:

$$\begin{pmatrix} v_{cco} \\ v_{gco} \\ v_{rco} \\ v_{lco} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_{11} & 0 & 0 & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & 0 \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{ctr} \\ v_{gtr} \\ v_{rtr} \\ v_{ltr} \end{pmatrix},$$

o, equivalentemente,

$$v_{cco} = -F_{11} v_{ctr} \quad (3.23a)$$

$$v_{gco} = -F_{21} v_{ctr} - F_{22} v_{gtr} \quad (3.23b)$$

$$v_{rco} = -F_{31} v_{ctr} - F_{32} v_{gtr} - F_{33} v_{rtr} \quad (3.23c)$$

$$v_{lco} = -F_{41} v_{ctr} - F_{42} v_{gtr} - F_{43} v_{rtr} - F_{44} v_{ltr}. \quad (3.23d)$$

Las anteriores ecuaciones junto a las ecuaciones características de los diferentes dispositivos forman el sistema de ecuaciones del análisis de ramas, bajo el supuesto de que las matrices  $Q$  y  $B$  en (3.20g) y (3.20h) son matrices fundamentales definidas por un árbol de referencia normal. Para obtener el modelo híbrido eliminaremos algunas variables: el objetivo será obtener un sistema de ecuaciones que dependa exclusivamente de  $v_{ctr}$ ,  $v_{gtr}$ ,  $i_{rco}$  e  $i_{lco}$ . A continuación detallamos las transformaciones necesarias para obtener dicho sistema de ecuaciones híbrido.

1. En primer lugar eliminaremos las variables  $i_{ctr}$ ,  $i_{cco}$  e  $i_{gco}$  reescribiendo la ecuación (3.22a) mediante (3.7) y (3.10a):

$$C_{tr}(v_{ctr})v'_{ctr} = F_{11}^T C_{co}(v_{cco})v'_{cco} + F_{21}^T g_{co}(v_{gco}) + F_{31}^T i_{rco} + F_{41}^T i_{lco}.$$

2. Utilizando las ecuaciones (3.23a) y (3.23b) podemos eliminar  $v_{c_{co}}$  y  $v_{g_{co}}$ :

$$(C_{tr}(v_{ctr}) + F_{11}^T C_{co}(-F_{11}v_{ctr})F_{11})v'_{ctr} = F_{21}^T g_{co}(-F_{21}v_{ctr} - F_{22}v_{gtr}) + F_{31}^T i_{r_{co}} + F_{41}^T i_{l_{co}}.$$

3. En la ecuación (3.22b) podemos eliminar también  $i_{gtr}$  mediante (3.10a):

$$g_{tr}(v_{gtr}) = F_{22}^T g_{co}(v_{gco}) + F_{32}^T i_{r_{co}} + F_{42}^T i_{l_{co}}$$

4. Utilizando (3.23b) la ecuación anterior se transforma en:

$$g_{tr}(v_{gtr}) = F_{22}^T g_{co}(-F_{21}v_{ctr} - F_{22}v_{gtr}) + F_{32}^T i_{r_{co}} + F_{42}^T i_{l_{co}}$$

5. Análogamente, eliminamos de la ecuación (3.23c) las variables  $v_{r_{co}}$  y  $v_{r_{tr}}$  mediante (3.10b):

$$f_{co}(i_{r_{co}}) = -F_{31}v_{ctr} - F_{32}v_{gtr} - F_{33}f_{tr}(i_{r_{tr}})$$

6. Utilizando (3.22c) podemos eliminar también  $i_{r_{tr}}$ :

$$f_{co}(i_{r_{co}}) = -F_{31}v_{ctr} - F_{32}v_{gtr} - F_{33}f_{tr}(F_{33}^T i_{r_{co}} + F_{43}^T i_{l_{co}})$$

7. Transformamos la ecuación (3.23d) eliminando  $v_{l_{co}}$ ,  $v_{l_{tr}}$  y  $v_{r_{tr}}$  mediante (3.9) y (3.10b):

$$L_{co}(i_{l_{co}})i'_{l_{co}} = -F_{41}v_{ctr} - F_{42}v_{gtr} - F_{43}f_{tr}(i_{r_{tr}}) - F_{44}L_{tr}(i_{l_{tr}})i'_{l_{tr}}$$

8. Finalmente, utilizando (3.22c) y (3.22d) resulta:

$$(L_{co}(i_{l_{co}}) + F_{44}L_{tr}(F_{44}^T i_{l_{co}})F_{44}^T)i'_{l_{co}} = -F_{41}v_{ctr} - F_{42}v_{gtr} - F_{43}f_{tr}(F_{33}^T i_{r_{co}} + F_{43}^T i_{l_{co}})$$

Así pues, el modelo híbrido de un circuito clásico sin fuentes es:

$$(C_{tr}(v_{ctr}) + F_{11}^T C_{co}(-F_{11}v_{ctr})F_{11})v'_{ctr} = F_{21}^T g_{co}(-F_{21}v_{ctr} - F_{22}v_{gtr}) + F_{31}^T i_{r_{co}} + F_{41}^T i_{l_{co}} \quad (3.24a)$$

$$(L_{co}(i_{l_{co}}) + F_{44}L_{tr}(F_{44}^T i_{l_{co}})F_{44}^T)i'_{l_{co}} = -F_{41}v_{ctr} - F_{42}v_{gtr} - F_{43}f_{tr}(F_{33}^T i_{r_{co}} + F_{43}^T i_{l_{co}}) \quad (3.24b)$$

$$g_{tr}(v_{gtr}) = F_{22}^T g_{co}(-F_{21}v_{ctr} - F_{22}v_{gtr}) + F_{32}^T i_{r_{co}} + F_{42}^T i_{l_{co}} \quad (3.24c)$$

$$f_{co}(i_{r_{co}}) = -F_{31}v_{ctr} - F_{32}v_{gtr} - F_{33}f_{tr}(F_{33}^T i_{r_{co}} + F_{43}^T i_{l_{co}}). \quad (3.24d)$$

Para su uso posterior, obsérvese que este sistema es una ecuación algebraico-diferencial de la forma:

$$M(x)x' = h_1(x, y) \quad (3.25a)$$

$$0 = h_2(x, y), \quad (3.25b)$$

donde:

$$x = (v_{ctr}, i_{l_{co}}),$$

$$y = (v_{g_{tr}}, i_{r_{co}}),$$

$$M = \begin{pmatrix} C_{tr}(v_{c_{tr}}) + F_{11}^T C_{co}(-F_{11} v_{c_{tr}}) F_{11} & 0 \\ 0 & L_{co}(i_{l_{co}}) + F_{44} L_{tr}(F_{44}^T i_{l_{co}}) F_{44} \end{pmatrix}.$$

### 3.5.2. Circuitos con memristores

En este apartado describimos las modificaciones al proceso anterior necesarias para obtener las ecuaciones del modelo híbrido en circuitos con memristores. Al incluir estos dispositivos, el orden de preferencia o prioridad para definir un árbol normal pasa a ser el siguiente: condensadores, resistencias controladas por tensión, memristores controlados por flujo, resistencias controladas por corriente, memristores controlados por carga y bobinas.

En primer lugar establecemos la ley de Kirchhoff de las corrientes que, utilizando una matriz de cutsets con respecto a un árbol normal, resulta:

$$\begin{pmatrix} i_{c_{tr}} \\ i_{g_{tr}} \\ i_{w_{tr}} \\ i_{r_{tr}} \\ i_{m_{tr}} \\ i_{l_{tr}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11}^T & F_{21}^T & F_{31}^T & F_{41}^T & F_{51}^T & F_{61}^T \\ 0 & F_{22}^T & F_{32}^T & F_{42}^T & F_{52}^T & F_{62}^T \\ 0 & 0 & F_{33}^T & F_{43}^T & F_{53}^T & F_{63}^T \\ 0 & 0 & 0 & F_{44}^T & F_{54}^T & F_{64}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_{55}^T & F_{65}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{66}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{c_{co}} \\ i_{g_{co}} \\ i_{w_{co}} \\ i_{r_{co}} \\ i_{m_{co}} \\ i_{l_{co}} \end{pmatrix}.$$

Si desarrollamos el producto matricial, el sistema anterior se puede reescribir como:

$$i_{c_{tr}} = F_{11}^T i_{c_{co}} + F_{21}^T i_{g_{co}} + F_{31}^T i_{w_{co}} + F_{41}^T i_{r_{co}} + F_{51}^T i_{m_{co}} + F_{61}^T i_{l_{co}} \quad (3.26a)$$

$$i_{g_{tr}} = F_{22}^T i_{g_{co}} + F_{32}^T i_{w_{co}} + F_{42}^T i_{r_{co}} + F_{52}^T i_{m_{co}} + F_{62}^T i_{l_{co}} \quad (3.26b)$$

$$i_{w_{tr}} = F_{33}^T i_{w_{co}} + F_{43}^T i_{r_{co}} + F_{53}^T i_{m_{co}} + F_{63}^T i_{l_{co}} \quad (3.26c)$$

$$i_{r_{tr}} = F_{44}^T i_{r_{co}} + F_{54}^T i_{m_{co}} + F_{64}^T i_{l_{co}} \quad (3.26d)$$

$$i_{m_{tr}} = F_{55}^T i_{m_{co}} + F_{65}^T i_{l_{co}} \quad (3.26e)$$

$$i_{l_{tr}} = F_{66}^T i_{l_{co}}. \quad (3.26f)$$

Ahora expresaremos la ley de las tensiones de Kirchhoff haciendo uso de la matriz fundamental de lazos con respecto al mismo árbol normal:

$$\begin{pmatrix} v_{c_{co}} \\ v_{g_{co}} \\ v_{w_{co}} \\ v_{r_{co}} \\ v_{m_{co}} \\ v_{l_{co}} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & 0 & 0 & 0 \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} & 0 & 0 \\ F_{51} & F_{52} & F_{53} & F_{54} & F_{55} & 0 \\ F_{61} & F_{62} & F_{63} & F_{64} & F_{65} & F_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{c_{tr}} \\ v_{g_{tr}} \\ v_{w_{tr}} \\ v_{r_{tr}} \\ v_{m_{tr}} \\ v_{l_{tr}} \end{pmatrix},$$

sistema que puede reescribirse de la siguiente manera:

$$v_{c_{co}} = -F_{11}v_{c_{tr}} \quad (3.27a)$$

$$v_{g_{co}} = -F_{21}v_{c_{tr}} - F_{22}v_{g_{tr}} \quad (3.27b)$$

$$v_{w_{co}} = -F_{31}v_{c_{tr}} - F_{32}v_{g_{tr}} - F_{33}v_{w_{tr}} \quad (3.27c)$$

$$v_{r_{co}} = -F_{41}v_{c_{tr}} - F_{42}v_{g_{tr}} - F_{43}v_{w_{tr}} - F_{44}v_{r_{tr}} \quad (3.27d)$$

$$v_{m_{co}} = -F_{51}v_{c_{tr}} - F_{52}v_{g_{tr}} - F_{53}v_{w_{tr}} - F_{54}v_{r_{tr}} - F_{55}v_{m_{tr}} \quad (3.27e)$$

$$v_{l_{co}} = -F_{61}v_{c_{tr}} - F_{62}v_{g_{tr}} - F_{63}v_{w_{tr}} - F_{64}v_{r_{tr}} - F_{65}v_{m_{tr}} - F_{66}v_{l_{tr}}. \quad (3.27f)$$

En este contexto, el modelo híbrido dependerá de las variables

$$v_{c_{tr}}, v_{g_{tr}}, v_{w_{tr}}, i_{r_{co}}, i_{m_{co}}, i_{l_{co}}, \phi_w, q_m.$$

Para formular dicho modelo tendremos que hacer las transformaciones que se detallan a continuación.

**1. Transformación de la ecuación (3.26a).** Primero se utilizan las ecuaciones (3.7), (3.10a) y (3.15b) para eliminar las corrientes de condensadores, resistencias controladas por tensión y memristores controlados por flujo. Después utilizaremos (3.27a), (3.27b) y (3.27c) para eliminar las tensiones de coárbol. Así, obtenemos la primera ecuación híbrida:

$$[C_{tr}(v_{c_{tr}}) + F_{11}^T C_{co}(-F_{11}v_{c_{tr}})F_{11}]v'_{c_{tr}} = F_{21}^T g_{co}(-F_{21}v_{c_{tr}} - F_{22}v_{g_{tr}}) + F_{31}^T W(\phi_{w_{co}})(-F_{31}v_{c_{tr}} - F_{32}v_{g_{tr}} - F_{33}v_{w_{tr}}) + F_{41}^T i_{r_{co}} + F_{51}^T i_{m_{co}} + F_{61}^T i_{l_{co}}. \quad (3.28)$$

**2. Transformación de la ecuación (3.26b).** Mediante (3.10a) y (3.15b) conseguimos eliminar las corrientes de las resistencias controladas por tensión y los memristores controlados por flujo. Luego, a través de (3.27b) y (3.27c), eliminamos las tensiones de coárbol. La segunda ecuación híbrida será, entonces,

$$g_{tr}(v_{g_{tr}}) = F_{22}^T g_{co}(-F_{21}v_{c_{tr}} - F_{22}v_{g_{tr}}) + F_{32}^T W_{co}(\phi_{w_{co}})(-F_{31}v_{c_{tr}} - F_{32}v_{g_{tr}} - F_{33}v_{w_{tr}}) + F_{42}^T i_{r_{co}} + F_{52}^T i_{m_{co}} + F_{62}^T i_{l_{co}}. \quad (3.29)$$

**3. Transformación de la ecuación (3.26c).** Primero, haciendo uso de (3.15b), eliminamos las corrientes de los memristores controlados por flujo. Luego, a través de (3.27c), se eliminan las tensiones de coárbol. De esta forma se obtiene la tercera ecuación híbrida:

$$[W_{tr}(\phi_{w_{tr}}) + F_{33}^T W_{co}(\phi_{w_{co}})F_{33}]v_{w_{tr}} = F_{33}^T W_{co}(\phi_{w_{co}})(-F_{31}v_{c_{tr}} - F_{32}v_{g_{tr}}) + F_{43}^T i_{r_{co}} + F_{53}^T i_{m_{co}} + F_{63}^T i_{l_{co}}. \quad (3.30)$$

**4. Transformación de la ecuación (3.26d).** En esta transformación primero eliminaremos las tensiones de las resistencias controladas por corriente mediante (3.10b). Luego, mediante (3.26d), se eliminan del modelo las corrientes de árbol de las resistencias controladas por

corriente. La cuarta ecuación híbrida toma la forma:

$$\begin{aligned} f_{co}(i_{r_{co}}) = & -F_{41}v_{ctr} - F_{42}v_{gtr} - F_{43}v_{wtr} - \\ & F_{44}f_{tr}(F_{44}^T i_{r_{co}} + F_{54}^T i_{m_{co}} + F_{64}^T i_{l_{co}}). \end{aligned} \quad (3.31)$$

**5. Transformación de la ecuación (3.26e).** Mediante las ecuaciones (3.10b) y (3.15a) eliminamos las tensiones de las resistencias controladas por corriente y de los memristores controlados por carga. Luego, a través de las ecuaciones (3.26d) y (3.26e), conseguimos eliminar las corrientes de árbol. Esto conduce a la quinta ecuación híbrida:

$$\begin{aligned} [M_{co}(q_{m_{co}}) + F_{55}M_{tr}(q_{m_{tr}})F_{55}^T]i_{m_{co}} = & -F_{51}v_{ctr} - F_{52}v_{gtr} - F_{53}v_{wtr} - \\ & F_{54}f_{tr}(F_{44}^T i_{r_{co}} + F_{54}^T i_{m_{co}} + F_{64}^T i_{l_{co}}) - F_{55}M_{tr}(q_{m_{tr}})F_{65}^T i_{l_{co}}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

**6. Transformación de la ecuación (3.26f).** Para eliminar las tensiones de bobinas, resistencias controladas por corriente y memristores controlados por carga de (3.26f), haremos uso de las ecuaciones (3.9), (3.10b) y (3.15a). Luego, a través de las ecuaciones (3.26d), (3.26e) y (3.26f), eliminaremos las corrientes de árbol. La sexta ecuación híbrida será:

$$\begin{aligned} [L_{co}(i_{l_{co}}) + F_{66}L_{tr}(F_{66}^T i_{l_{co}})F_{66}^T]i'_{l_{co}} = & -F_{61}v_{ctr} - F_{62}v_{gtr} - F_{63}v_{wtr} \\ -F_{64}f_{tr}(F_{44}^T i_{r_{co}} + F_{54}^T i_{m_{co}} + F_{64}^T i_{l_{co}}) - & F_{65}M_{tr}(q_{tr})(F_{55}^T i_{m_{co}} + F_{65}^T i_{l_{co}}). \end{aligned} \quad (3.33)$$

El sistema de ecuaciones híbrido se verá completado por las siguientes ecuaciones:

$$\phi'_{wtr} = v_{wtr} \quad (3.34a)$$

$$\phi'_{wco} = -F_{31}v_{ctr} - F_{32}v_{gtr} - F_{33}v_{wtr} \quad (3.34b)$$

$$q'_{mtr} = F_{55}^T i_{m_{co}} + F_{65}^T i_{l_{co}} \quad (3.34c)$$

$$q'_{mco} = i_{m_{co}}. \quad (3.34d)$$

El modelo híbrido de circuitos memristivos queda de esta manera definido por las ecuaciones (3.28), (3.29), (3.30), (3.31), (3.32), (3.33) y (3.34). Como en el caso clásico (sin memristores, cf. (3.24)), este modelo se sitúa en el formalismo algebraico-diferencial, adoptando la forma:

$$\tilde{M}(x)x' = h_1(x, y) \quad (3.35a)$$

$$0 = h_2(x, y), \quad (3.35b)$$

donde

$$x = (v_{ctr}, i_{l_{co}}, \phi_{wtr}, \phi_{wco}, q_{mtr}, q_{mco}),$$

$$y = (v_{gtr}, v_{wtr}, i_{r_{co}}, i_{m_{co}}),$$

y

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} C_{tr}(v_{ctr}) + F_{11}^T C_{co}(-F_{11}v_{ctr})F_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{co}(i_{lco}) + F_{44}L_{tr}(F_{44}^T i_{lco})F_{44}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

### 3.6. Otros modelos

El análisis nodal de circuitos no lineales está, desde hace varias décadas, ampliamente extendido en los simuladores circuitales. Cabe destacar, por ejemplo, el hecho de que los modelos basados en *Modified Nodal Analysis* (MNA) se emplean de forma generalizada en SPICE y en sus derivados comerciales. Pueden encontrarse introducciones detalladas a este tipo de modelos en el texto clásico [25] o, como referencias más modernas (y más próximas al enfoque algebraico-diferencial), [30, 31, 32, 55, 111, 121, 136, 137].

Como se indicó anteriormente, la mayor parte de estos modelos eliminan en la medida de lo posible las tensiones de rama expresándolas en términos de los potenciales en los nodos, para generar un modelo tan compacto como sea posible. En el caso de un un circuito que solo incluya fuentes independientes, los modelos MNA toman la forma siguiente:

$$A_c C(A_c^T e) A_c^T e' = -A_r g(A_r^T e) - A_l i_l - A_u i_u - A_j j(t) \quad (3.36a)$$

$$L(i_l) i_l' = A_l^T e \quad (3.36b)$$

$$0 = u(t) - A_u^T e. \quad (3.36c)$$

Este modelo adopta la forma cuasilineal presentada en (2.18); además de la ecuación (3.36c), que es de naturaleza algebraica, obsérvese que la matriz de coeficientes de  $e'$  en (3.36a) será por sistema, excepto en topologías muy singulares, una matriz no invertible. Es destacable también la hipótesis, implícita en (3.36a), de que todas las resistencias del circuito están controladas por tensión.

Con el fin de limitar, en cierta medida, algunas dificultades analíticas y numéricas vinculadas a la forma cuasilineal anterior, también es frecuente el uso en el contexto nodal de modelos ANA (*Augmented Nodal Analysis*):

$$C(v_c) v_c' = i_c \quad (3.37a)$$

$$L(i_l) i_l' = A_l^T e \quad (3.37b)$$

$$0 = A_r g(A_r^T e) + A_l i_l + A_c i_c + A_u i_u + A_j j(t) \quad (3.37c)$$

$$0 = v_c - A_c^T e \quad (3.37d)$$

$$0 = u(t) - A_u^T e, \quad (3.37e)$$

que presentan (o pueden reescribirse trivialmente) en forma semiexplícita bajo el supuesto de que las matrices de capacidad e inductancia incrementales  $C(v_c)$  y  $L(i_l)$  sean regulares. Nótese que el modelo anterior resulta de “recuperar” las variables  $v_c$  e  $i_c$ , asociadas a los condensadores, para evitar la matriz de capacidad nodal que aparece en el coeficiente del miembro de



la izquierda de (3.36a); específicamente, la sustitución de estas variables empleando (3.37a) y (3.37d) permite obtener (3.36) como una reducción de (3.37); cf. [111].



## **Parte II**

# **Análisis del índice en modelos simétricos de circuitos no pasivos**



# Capítulo 4

## Matrices mixtas y caracterización del índice en el modelo de ramas

### 4.1. Introducción

Como se indica en el Capítulo 1, la llamada *aproximación estructural* a la teoría de circuitos no lineales, que pretende caracterizar sistemáticamente diferentes propiedades analíticas de tales circuitos en términos de la topología del digrafo subyacente y de las propiedades eléctricas de los dispositivos, se ha aplicado en las últimas dos décadas al modelado algebraico-diferencial de circuitos no lineales. En este campo es seminal el trabajo de, entre otros, la profesora C. Tischendorf [32, 92, 136, 137]. Véanse también los trabajos [54, 55, 56, 68, 70, 107, 132, 133, 134]. Como se ha indicado en capítulos anteriores, el uso de modelos algebraico-diferenciales en este campo viene motivado por la imposibilidad de automatizar en la práctica la formulación de ecuaciones de estado explícitas que modelen circuitos de alta escala de integración. Los simuladores actuales, como SPICE y sus derivados, utilizan sistemáticamente el formalismo algebraico-diferencial.

El uso de modelos algebraico-diferenciales requiere una caracterización de su índice, pues (entre otros motivos) este posibilita el uso de unas técnicas numéricas u otras para la simulación de la dinámica circuital. En los trabajos [32, 136] se presenta una caracterización completa del índice de modelos nodales bajo restricciones de pasividad. A grandes rasgos, el asumir la pasividad de los dispositivos hace posible una caracterización puramente topológica del índice del modelo, como se detalla en los trabajos citados anteriormente. Algunos de estos resultados en el contexto pasivo se han extendido a algunos otros modelos (modelos denominados *de ramas*) y utilizando índices alternativos al de proyección [111].

Más recientemente se ha abordado el problema de la caracterización del índice sin hipótesis de pasividad. En particular, en los trabajos [30, 31] se desarrolla una caracterización completa de las configuraciones de índice bajo (cero o uno) para modelos nodales de circuitos. El objetivo de este capítulo y el siguiente es la extensión de los resultados anteriores a los modelos denominados *simétricos*, centrándose el presente capítulo en concreto en el denominado *modelo de ramas* (*branch model*).

Se obtendrá para ello un resultado matricial de interés independiente que generaliza las fórmulas basadas en determinantes de Kirchhoff y Maxwell (cf. [19, 73, 93]), que podrán considerarse los casos extremos de un teorema más general (cf. Teorema 4.3). En este contexto se caracterizarán también las configuraciones de índice dos, que corresponden a circuitos con algún tipo de degeneración en su topología (a diferencia de los resultados de [30, 31], que abordan solo topologías no degeneradas). Asimismo, en los resultados aquí obtenidos se elimina otra restricción presente en los trabajos anteriores, en concreto la hipótesis de que todas las resistencias están controladas por tensión; la naturaleza simétrica de los modelos aquí empleados da acomodo a resistencias tanto controladas por tensión como por corriente y, de hecho, posibilita la generalización de los teoremas de Kirchhoff y Maxwell referida anteriormente. De todo lo anterior se obtendrá una caracterización del índice de gran generalidad.

Comenzamos el capítulo presentando el estudio que realizó Maxwell para la caracterización de la matriz de admitancia nodal en términos de la suma de determinadas conductancias del circuito, junto con el caso dual, debido a Kirchhoff. Posteriormente, en la sección 4.3 realizaremos la caracterización de la regularidad de las llamadas *matrices mixtas*, resultado que supone una ampliación respecto de los obtenidos por Maxwell y Kirchhoff y que jugará un papel fundamental en los posteriores análisis del índice.

Los estudios del índice del modelo de ramas se desarrollan en las secciones 4.4 y 4.5. Los resultados obtenidos permiten la caracterización de las configuraciones de índices uno y dos en circuitos no lineales sin condiciones de pasividad y, como se ha indicado anteriormente, amplían estudios previos similares realizados en modelos nodales [30, 31]. En la sección 4.4 se considerarán circuitos formados por los elementos clásicos mientras que en la sección 4.5 se extiende el análisis al contexto memristivo. Finalmente, en la sección 4.6 ilustramos los resultados anteriores mediante el análisis de algunos ejemplos.

Los resultados detallados en este capítulo se han publicado en el artículo [44], y fueron objeto de la ponencia [43].

## 4.2. Fórmula de Maxwell para el cálculo de determinantes

En esta sección se presentará el método empleado por Maxwell [93] para la caracterización de la regularidad de cierto tipo de matrices que aparecen en diversos problemas de teoría de circuitos. Para simplificar la exposición y centrarla en los aspectos esenciales, lo haremos abordando el caso más sencillo posible (en cierto sentido), considerando para ello la familia de circuitos formados únicamente por resistencias (quizá no lineales) controladas por tensión y no acopladas entre sí; el problema matemático asociado consiste en la determinación de la unicidad de la solución, en sentido local en casos no lineales. Es importante hacer constar, no obstante, que los resultados son de aplicación en contextos mucho más generales, definidos por circuitos que incluyan todo tipo de dispositivos o modelados en el dominio de la frecuencia; en este último caso, los resultados aquí enunciados en términos de conductancias y resistencias pasan a formularse en términos de admitancias e impedancias, respectivamente.

Consideremos, por tanto, un circuito conexo con  $m$  ramas y  $n$  nodos constituido únicamente por resistencias controladas por tensión y sin efectos de acoplo. En tal caso, las ecuaciones que

gobiernan el circuito son:

$$A_g i_g = 0 \quad (4.1a)$$

$$v_g = A_g^T e \quad (4.1b)$$

$$i_g = g(v_g), \quad (4.1c)$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{(n-1) \times m}$  es la matriz de incidencia (reducida) obtenida al tomar un nodo de referencia arbitrario. El sistema de ecuaciones (4.1) puede expresarse en términos de los potenciales de nodo como

$$A_g g(A_g^T e) = 0.$$

Si asumimos que este sistema de ecuaciones posee una solución  $e = e^*$ , para poder determinar si esta solución es localmente única necesitamos caracterizar la regularidad de la denominada *matriz de conductancia* (o *admitancia*) *nodal*

$$A_g G A_g^T, \quad (4.2)$$

donde  $G$  representa la matriz de conductancia incremental  $g'(v_g^*) = g'(A_g^T e^*)$ . Si el circuito es lineal, es decir, si  $g(v_g) = G v_g$ , la regularidad (invertibilidad) de (4.2) garantiza que la solución nula es la única solución del problema anterior, en sentido global. En una configuración estrictamente pasiva, es decir, si la matriz  $G$  es definida positiva, se puede demostrar fácilmente que (4.2) es no singular, incluso en presencia de efectos de acoplo; efectivamente, si  $u \in \ker A_g G A_g^T$ , premultiplicando la igualdad  $A_g G A_g^T u = 0$  por  $u^T$  se tiene

$$u^T A_g G A_g^T u = 0$$

y el hecho de que  $G$  sea definida positiva conlleva que  $A_g^T u = 0$ , lo que a su vez equivale a que  $u = 0$  pues las filas de la matriz de incidencia reducida  $A_g$  son linealmente independientes. La condición  $u = 0$  muestra entonces que  $A_g G A_g^T$  es regular en el contexto estrictamente pasivo.

La fórmula de Maxwell permite obtener las condiciones que caracterizan la regularidad de la matriz nodal  $A_g G A_g^T$  con independencia de la pasividad de los dispositivos, bajo la restricción de que no existan acoplos resistivos. Para ello se analiza el determinante de la matriz nodal mediante la fórmula de Cauchy-Binet (cf. sección 2.2.2). Utilizando esta fórmula, el determinante de (4.2) puede expresarse de la siguiente manera:

$$\det(A_g G A_g^T) = \sum_{\alpha} \det A_g^{\omega, \alpha} \det G^{\alpha, \alpha} \det (A_g^T)^{\alpha, \omega}. \quad (4.3)$$

Las matrices  $A_g^{\omega, \alpha}$  tendrán rango máximo si y solo si el índice  $\alpha$  especifica las ramas de un árbol de expansión, siendo en este caso su determinante

$$\det A_g^{\omega, \alpha} = \det (A_g^T)^{\alpha, \omega} = \pm 1 \quad (4.4)$$

(cf. Lema 2.9). En consecuencia, la igualdad (4.3) puede escribirse como

$$\det(A_g G A_g^T) = \sum_{\alpha} \det G^{\alpha, \alpha}, \quad (4.5)$$

para todo  $\alpha$  asociado a un árbol de expansión del circuito, resultado que queda recogido en el Teorema 4.1.

**Teorema 4.1** (Maxwell). *Si  $G$  es diagonal, la matriz (4.2) es regular si y solo si la suma de productos de conductancias de árbol, extendida sobre el conjunto de los árboles de expansión del circuito, es distinta de cero.*

Las mismas condiciones de regularidad se obtienen para la matriz

$$Q_g G Q_g^T, \quad (4.6)$$

siendo  $Q_g$  una matriz de cutsets reducida. El análisis del determinante de esta matriz es similar al realizado anteriormente, con la única diferencia de que las submatrices de rango máximo de  $Q$  tienen valor absoluto constante pero este no tiene por qué ser 1; es decir, en este caso la condición análoga a (4.4) es

$$\det Q^{\omega, \alpha} = \det(Q^T)^{\alpha, \omega} = \pm k$$

para todas las submatrices cuadradas de orden máximo de  $Q$  (cf. Lema 2.9). Siguiendo, por lo demás, un razonamiento totalmente análogo al anterior se demuestra que el enunciado recogido en el Teorema 4.1 es también válido para la matriz (4.6).

El caso dual, analizado por Kirchhoff [73], parte en este contexto simplificado de la hipótesis de que todas las resistencias son controladas por corriente, sin acoplos entre ellas, y de que el circuito es conexo. El modelo dual a (4.1) es

$$B_r v_r = 0 \quad (4.7a)$$

$$i_r = B_r^T j \quad (4.7b)$$

$$v_r = f(i_r), \quad (4.7c)$$

donde  $B_r \in \mathbb{R}^{(m-n+1) \times m}$  es una matriz de lazos reducida y  $j$  es el correspondiente conjunto de corrientes de lazo, característico del llamado *análisis por lazos*. La reducción análoga a la anterior conduce al sistema

$$B_r f(B_r^T j) = 0 \quad (4.8)$$

y la linealización del problema da lugar a una matriz (llamada *de impedancia de lazos*) de la forma

$$B_r R B_r^T, \quad (4.9)$$

en la que  $R = f'(i_r) = f'(B_r^T j)$  es la matriz (diagonal) de resistencias, posiblemente incrementales. En este contexto, el resultado dual del Teorema 4.1 es el siguiente.



**Teorema 4.2 (Kirchhoff).** *Si  $R$  es diagonal, la matriz (4.9) es regular si y solo si la suma de productos de resistencias de coárbol, extendida sobre el conjunto de los árboles de expansión del circuito, es distinta de cero.*

Actualmente, en el contexto de la teoría de grafos los resultados anteriores se conocen como *teorema de Kirchhoff* o *matrix-tree theorem*. El término inglés responde al hecho de que tomando  $G = I$  en (4.2) se obtiene la matriz laplaciana (reducida) del grafo, esto es, el producto  $AA^T$  (ignorando el subíndice  $g$ , que atribuía una naturaleza eléctrica a las ramas), y la demostración del Teorema 4.1 muestra que el determinante de dicha matriz es igual al número total de árboles de expansión del grafo [5, 18]. Desde otra perspectiva, y por el uso mucho más extendido de los modelos nodales en el modelado y la simulación de circuitos, la aproximación anterior suele asociarse al nombre de Maxwell pese a que, históricamente, el origen se remonta al trabajo de Kirchhoff.

## 4.3. Matrices mixtas

### 4.3.1. Definición

En esta sección vamos a analizar la regularidad de un tipo de matrices con una estructura más compleja que las matrices de admitancia nodal (4.2) y de impedancia de lazos (4.9) consideradas en la sección anterior. Este tipo de matrices surge de manera natural en el análisis de circuitos que incluyen resistencias controladas por corriente junto con resistencias controladas por tensión, y en cierto sentido se puede considerar una generalización tanto de (4.2) como de (4.9).

Con el fin de introducir el problema, de nuevo en el contexto más sencillo posible, consideraremos el caso de un circuito resistivo y conexo que combine ambos tipos de resistencias. En esta situación, las ecuaciones que gobiernan el circuito son

$$B_r v_r + B_g v_g = 0 \quad (4.10a)$$

$$Q_r i_r + Q_g i_g = 0 \quad (4.10b)$$

$$i_g - g(v_g) = 0 \quad (4.10c)$$

$$v_r - f(i_r) = 0, \quad (4.10d)$$

siendo ahora  $B = (B_r \ B_g)$  y  $Q = (Q_r \ Q_g)$  sendas matrices de lazos y cutsets reducidas; ambas matrices se subdividen por columnas en función de la variable de control (corriente o tensión) de las correspondientes resistencias. La unicidad de solución para este sistema (supuesta su existencia y entendiéndose la unicidad en sentido local en casos no lineales) depende de la regularidad de la matriz

$$J_0 = \begin{pmatrix} B_r & B_g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_r & Q_g \\ 0 & -G & 0 & I \\ I & 0 & -R & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

con  $G = g'$ ,  $R = f'$  evaluadas en el punto de análisis. Desplazando, por claridad, el primer bloque de columnas al extremo derecho (operación que no altera la posible regularidad de la matriz) se obtiene

$$\tilde{J}_0 = \begin{pmatrix} B_g & 0 & 0 & B_r \\ 0 & Q_r & Q_g & 0 \\ -G & 0 & I & 0 \\ 0 & -R & 0 & I \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

El complemento de Schur de la menor submatriz cuadrada que contiene a los dos bloques de submatrices identidad es

$$J = \begin{pmatrix} B_r R & B_g \\ Q_r & Q_g G \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Las condiciones de regularidad de la matriz  $J_0$  y por lo tanto la unicidad local de la solución del sistema de ecuaciones (4.10) pueden estudiarse a través de la matriz  $J$ , a la que nos referiremos como *matriz mixta*.

### 4.3.2. Extensión de los desarrollos de Maxwell y Kirchhoff

Un resultado auxiliar de especial importancia a la hora de abordar la caracterización de este tipo de matrices es el presentado a continuación (cf. Lema 2.8 de [18]). En él utilizaremos los índices  $\omega, \alpha$  y  $\beta$  con el mismo significado que el expresado en el Lema 2.11.

**Lema 4.1.** *Consideremos las matrices*

$$D = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix},$$

donde  $B$  y  $Q$  son sendas matrices reducidas de lazos y de cutsets asociadas a un digrafo conexo. Si  $\det D^{\omega, \alpha} \neq 0$  y  $\det F^{\alpha, \omega} \neq 0$ , entonces  $\det D^{\omega, \alpha} \det F^{\alpha, \omega} = \kappa \neq 0$ , donde  $\kappa$  no depende de la familia de índices  $\alpha$ .

*Demostración.* Tomemos la matriz

$$H = \begin{pmatrix} B \\ Q \end{pmatrix}.$$

Dado que se cumple  $BQ^T = QB^T = 0$  si el orden de las columnas es el mismo para ambas matrices (de acuerdo con el Lema 2.8), el producto  $HH^T$  tiene la estructura

$$HH^T = \begin{pmatrix} BB^T & 0 \\ 0 & QQ^T \end{pmatrix}.$$

Utilizando las propiedades enunciadas en el Lema 2.9 y la fórmula de Cauchy-Binet, se comprueba fácilmente que  $\det(BB^T) = \tau(k(B))^2$  y  $\det(QQ^T) = \tau(k(Q))^2$ , donde  $\tau$  se corresponde con el número de árboles recubridores del grafo. Esto se traduce en la siguiente expresión

$$\det(HH^T) = \tau^2(k(B)k(Q))^2$$

y, en consecuencia,

$$\det H = \pm \tau k(B)k(Q). \quad (4.14)$$

Por otro lado, la matriz  $H$  puede expresarse como el producto  $DF$  y, por lo tanto, podemos utilizar la fórmula de Cauchy-Binet para estudiar su determinante. De esta forma,

$$\det H = \sum_{\alpha} \det D^{\omega, \alpha} \det F^{\alpha, \omega} \quad (4.15)$$

para las familias de índices  $\alpha$  que verifiquen simultáneamente que  $\det D^{\omega, \alpha} \neq 0$  y  $\det F^{\alpha, \omega} \neq 0$ .

Escribiendo  $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$ , donde  $\alpha_1$  (resp.  $\alpha_2$ ) hace referencia a las columnas de la submatriz  $B$  (resp.  $Q$ ) presentes en  $D$ , la submatriz  $D^{\omega, \alpha}$  será regular si y solo si  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  se corresponden con las ramas de un coárbol y un árbol (de expansión), respectivamente. Además, para que la matriz  $F^{\alpha, \omega}$  sea no singular debe cumplirse que las ramas especificadas por  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  sean disjuntas, es decir, la familia de índices  $\alpha_1$  debe hacer referencia al coárbol asociado al árbol de expansión definido por  $\alpha_2$ . En consecuencia, el número de índices  $\alpha$  para los que se cumple simultáneamente que  $\det D^{\omega, \alpha}$  y  $\det F^{\alpha, \omega}$  son no nulos es  $\tau$  y, además, en estos casos se cumple

$$\det D^{\omega, \alpha} \det F^{\alpha, \omega} = \pm k(B)k(Q).$$

La suma que aparece en (4.15) puede escribirse como

$$\det H = \sum_{\alpha} (-1)^{x(\alpha)} k(B)k(Q) \quad (4.16)$$

para las familias de índices  $\alpha$  especificadas anteriormente. Aquí  $x(\alpha)$  refleja el hecho de que el signo puede depender de  $\alpha$ . Sin embargo, de acuerdo con (4.14), este sumatorio es igual a  $\pm \tau k(B)k(Q)$  y como acabamos de comprobar solo existen  $\tau$  sumandos distintos de cero, por lo que todos los términos en (4.16) tienen el mismo signo; de aquí se deduce que  $\det D^{\omega, \alpha} \det F^{\alpha, \omega} = \kappa$  para cierta constante  $\kappa$  si  $\det D^{\omega, \alpha} \neq 0$  y  $\det F^{\alpha, \omega} \neq 0$ , como queríamos demostrar. □

Antes de proceder a presentar la caracterización de la regularidad de las matrices mixtas, resulta conveniente introducir la definición de *producto resistivo*, que nos ayudará en la exposición de los resultados obtenidos.

**Definición 4.1.** *Consideremos un circuito conexo compuesto por resistencias controladas por corriente y por tensión. El producto resistivo asociado a un árbol de expansión se define como el producto de las conductancias incrementales de las resistencias controladas por tensión presentes en el árbol y de las resistencias incrementales asociadas a las resistencias controladas por corriente del coárbol.*

*Si en un árbol de expansión dado todas las resistencias están controladas por corriente y las resistencias del coárbol asociado están controladas por tensión, entonces el producto resistivo es 1.*

Utilizando la definición anterior y con ayuda del Lema 4.1, estamos en condiciones de

enunciar y demostrar el teorema en el que se establecen las condiciones de regularidad de las matrices mixtas, lo que constituye uno de los resultados centrales de este trabajo.

**Teorema 4.3.** *Si  $R$  y  $G$  son diagonales, la matriz  $J$  de (4.13) es regular si y solo si la suma de productos resistivos, extendida sobre el conjunto de árboles de expansión del circuito, es distinta de cero.*

*Demostración.* El primer paso de la demostración consiste en expresar la matriz  $J$  como el producto  $J = DEF$ , siendo

$$D = \begin{pmatrix} B_r & B_g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_r & Q_g \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Si hacemos uso de la fórmula de Cauchy-Binet es posible expresar el determinante de  $J$  como

$$\det J = \sum_{\alpha} \det D^{\omega, \alpha} \det E^{\alpha, \beta} \det F^{\beta, \omega}.$$

Dado que  $E$  es una matriz diagonal, se tiene  $\det E^{\alpha, \beta} \neq 0$  si y solo si  $\alpha = \beta$ , de manera que

$$\det J = \sum_{\alpha} \det D^{\omega, \alpha} \det E^{\alpha, \alpha} \det F^{\alpha, \omega}.$$

En el sumatorio están presentes los factores  $\det D^{\omega, \alpha}$  y  $\det F^{\alpha, \omega}$ , cuyo producto ha sido estudiado en el Lema 4.1. Usando por tanto este resultado se obtiene

$$\det J = \kappa \sum_{\alpha} \det E^{\alpha, \alpha},$$

donde la suma se realiza sobre los conjuntos  $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$  tales que  $\alpha_1$  hace referencia a un coárbol y  $\alpha_2$  al resto de ramas, es decir, al árbol de expansión al que esta asociado el coárbol definido por  $\alpha_1$ . Utilizando la Definición 4.1, es inmediato comprobar que  $\det E^{\alpha, \alpha}$  es precisamente el producto resistivo asociado al árbol especificado por la familia de índices  $\alpha$ . En consecuencia, la matriz  $J$  es regular si y solo si la suma de productos resistivos, extendida sobre el conjunto de árboles de expansión del circuito, es distinta de cero, como se quería demostrar. □

**Relación entre las matrices (4.2), (4.6), (4.9) y (4.13).** El Teorema 4.3 puede entenderse como una generalización de los resultados enunciados en los Teoremas 4.1 y 4.2 en el sentido que se detalla a continuación. El elemento clave es la relación entre las matrices (4.2) (o, más exactamente, (4.6)), (4.9) y (4.13).

Supongamos en primer lugar que todas las resistencias están controladas por tensión. En esta caso la matriz (4.13) toma la forma

$$\begin{pmatrix} B_g \\ Q_g G \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

Premultiplicando esta matriz por  $(B_g^T \ Q_g^T)$ , que es regular por la propiedad de ortogonalidad que se deriva del Lema 2.8, se obtiene

$$\begin{pmatrix} B_g \\ Q_g G \end{pmatrix} (B_g^T \ Q_g^T) = \begin{pmatrix} B_g B_g^T & 0 \\ Q_g G B_g^T & Q_g G Q_g^T \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

a partir del hecho de que  $B_g Q_g^T = 0$ . Dado que  $B_g B_g^T$  es regular, la matriz del miembro de la derecha de (4.18) (y con ella la matriz (4.17)) será regular si y solo si lo es  $Q_g G Q_g^T$  (cf. (4.6)) o, equivalentemente, si lo es la matriz de conductancia nodal  $A_g G A_g^T$  (4.2).

Análogamente, si todas las resistencias están controladas por corriente, la matriz  $J$  de (4.13) adopta la expresión

$$\begin{pmatrix} B_r R \\ Q_r \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

y, procediendo de una forma similar a la anterior, puede comprobarse que esta matriz es regular si y solo si lo es la matriz de impedancia de lazos (4.9).

Esto muestra que cuando todas las resistencias admiten el mismo tipo de descripción (es decir cuando todas ellas están simultáneamente controladas por tensión, o cuando todas lo están por corriente), entonces la regularidad de la matriz mixta (4.13) es equivalente a la de las matrices (4.6) o (4.9), respectivamente. Sin embargo, cuando algunos de los valores de  $G$  o de  $R$  se hace nulo, puede ocurrir que una de las dos descripciones (por corriente o por tensión, respectivamente) no exista, ni siquiera en un sentido local; obsérvese que estos casos críticos pueden ser relevantes en la práctica, por ejemplo en el estudio de bifurcaciones, que bien pueden estar asociadas a la transición de la región de trabajo de una resistencia a través de un valor en el que la conductancia o la resistencia incrementales se hagan cero. Obsérvese que la forma de la matriz  $J$  de (4.13) admite que los valores de algunas resistencias (en la matriz  $R$ ) o conductancias (en  $G$ ) puedan anularse.

En particular, los Teoremas 4.1 y 4.2 son inaplicables en situaciones en las que necesariamente se combinan descripciones de distinto tipo para diferentes resistencias. En este sentido, el Teorema 4.3 puede entenderse como un resultado que generaliza los de Maxwell y Kirchhoff, siendo estos los casos extremos del resultado aquí obtenido. Obsérvese que en el caso particular de que todas las resistencias estén controladas por tensión, cada producto resistivo en el Teorema 4.3 pasa a ser un producto de conductancias en las ramas del correspondiente árbol de expansión, como en el Teorema 4.1. Dualmente, cuando todas las resistencias son controladas por corriente, el producto resistivo pasa a ser igual al producto de las resistencias en las ramas del córbol correspondiente, coherentemente con el Teorema 4.2.

## 4.4. Análisis del índice del modelo de ramas sin hipótesis de pasividad

Los resultados matriciales de la sección anterior permiten abordar el análisis del índice de modelos algebraico-diferenciales de circuitos no pasivos en un contexto mucho más amplio que el considerado para modelos nodales en [30, 31]. Específicamente, estos resultados hacen

posible eliminar las hipótesis de control de los diferentes dispositivos involucrados y, concretamente, permiten acomodar resistencias tanto controladas por tensión como por corriente, coherentemente con la naturaleza simétrica de los modelos circuitales considerados en el curso de esta investigación y, en concreto, del modelo denominado *de ramas*, presentado en la sección 3.4 y objeto de análisis en este capítulo. Asimismo, los resultados aquí obtenidos serán también de aplicación para configuraciones circuitales denominadas *degeneradas*, que típicamente conducen a modelos de índice dos (nótese que los resultados de [30, 31] caracterizan solo configuraciones de índice cero o uno).

Como se indicó en la sección 3.4, el modelo de ramas viene definido por las ecuaciones

$$C(v_c)v'_c = i_c \quad (4.20a)$$

$$L(i_l)i'_l = v_l \quad (4.20b)$$

$$0 = B_c v_c + B_l v_l + B_g v_g + B_r v_r + B_u v_u + B_j v_j \quad (4.20c)$$

$$0 = Q_c i_c + Q_l i_l + Q_g i_g + Q_r i_r + Q_u i_u + Q_j i_j \quad (4.20d)$$

$$0 = i_g - g(v_g) \quad (4.20e)$$

$$0 = v_r - f(i_r) \quad (4.20f)$$

$$0 = v_u - u(t) \quad (4.20g)$$

$$0 = i_j - j(t). \quad (4.20h)$$

Este modelo circuitual es una ecuación algebraico-diferencial semiexplícita

$$x' = h_1(x, y, t) \quad (4.21a)$$

$$0 = h_2(x, y, t), \quad (4.21b)$$

con  $x = (v_c, i_l)$  e  $y = (v_j, v_l, v_r, v_g, v_u, i_j, i_r, i_g, i_u, i_c)$ .

En las secciones 4.4.1 y 4.4.2 caracterizaremos las configuraciones circuitales que dan lugar a ecuaciones de índices uno y dos para este modelo. En el curso del análisis, en diversas ocasiones se hará referencia a cutsets (lazos)  $X_1 X_2 \dots X_p$ ; estos son cutsets (lazos) en los que cada elemento pertenece a algún tipo  $X_i$  ( $i \in \{1, \dots, p\}$ ). La nomenclatura utilizada para cada tipo de elemento será la siguiente: los símbolos  $V$ ,  $C$ ,  $G$ ,  $R$ ,  $L$  y  $J$  especificarán, respectivamente, fuentes de tensión (V), condensadores (C), resistencias controladas por tensión (G), resistencias controladas por corriente (R), bobinas (L) y fuentes de corriente (J). Así, por ejemplo, un lazo VC es un lazo formado exclusivamente por fuentes de tensión y/o condensadores, un cutset IL es un cutset formado solo por fuentes de corriente y/o bobinas, etc.

#### 4.4.1. Configuraciones de índice uno

Como se indica en la sección 2.3.2, una ecuación algebraico-diferencial semiexplícita tiene índice uno si y solo si la matriz de derivadas parciales  $h_{2y}$  es no singular. Antes de analizar las configuraciones que conducen a ecuaciones de índice uno en el modelo de ramas (4.20) es necesario introducir el concepto de *árbol propio*: se dice que un árbol (de expansión) del circuito es propio cuando en él están contenidas todas las ramas asociadas a fuentes de tensión y condensadores y ninguna de las asociadas a bobinas o fuentes de corriente. La existencia de

árboles propios requiere que el circuito no tenga lazos VC ni cutsets IL (cf. [8]), requisito que define una de las hipótesis del Teorema 4.4, que puede considerarse una extensión del Teorema 4.3.

**Teorema 4.4.** *Si las matrices de capacidad y de inductancia son regulares y no existen acoplos resistivos, el modelo (4.20) tiene índice uno si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *El circuito no tiene lazos VC ni cutsets IL.*
2. *La suma de productos resistivos en árboles propios es distinta de cero.*

*Demostración.* El modelo circuital (4.20) posee índice uno si la matriz de derivadas parciales de (4.20c)-(4.20h) respecto a las variables

$$v_j, v_l, v_r, v_g, v_u, i_j, i_r, i_g, i_u, i_c \quad (4.22)$$

es regular. Utilizando el complemento de Schur, esta condición puede estudiarse a través de la matriz

$$J_1 = \begin{pmatrix} B_{jl} & B_r R & B_g & 0 \\ 0 & Q_r & Q_g G & Q_{uc} \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

donde  $B_{jl} = (B_j \ B_l)$  y  $Q_{uc} = (Q_u \ Q_c)$ . Obsérvese que los bloques  $B_{jl}$  y  $Q_{uc}$  permiten considerar a esta matriz como una extensión, en cierto sentido, de la matriz (4.13), que se traduce en que las propiedades analíticas del circuito pasen a depender de la estructura de los árboles propios y no del conjunto total de árboles de expansión del circuito.

Por las propiedades de las matrices de lazos y de cutsets detalladas en las secciones 2.1.2.2 y 2.1.2.3 se puede observar fácilmente que la ausencia de cutsets IL y de lazos VC es necesaria para que el modelo tenga índice uno.

La matriz que estamos estudiando admite la factorización  $J_1 = DEF$ , con

$$D = \begin{pmatrix} B_{jl} & B_r & B_g & B_{uc} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{jl} & Q_r & Q_g & Q_{uc} \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Utilizando la fórmula de Cauchy-Binet y, dado que  $E$  es una matriz diagonal, podemos expresar el determinante de  $J_1$  de la siguiente manera:

$$\det J_1 = \sum_{\alpha} \det D^{\omega, \alpha} \det E^{\alpha, \alpha} \det F^{\alpha, \omega}.$$

A la luz de los resultados recogidos en el Lema 4.1, este sumatorio se reduce a

$$\det J_1 = \kappa \det E^{\alpha, \alpha}$$

para las familias de índices  $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$  tales que  $\alpha_2$  hace referencia a las ramas de un árbol de expansión y  $\alpha_1$  a las ramas del coárbol asociado. La estructura de la matriz  $E$  hace que  $\det E^{\alpha, \alpha}$  se anule si alguna fuente de corriente o bobina se encuentra en el árbol o si algún condensador o fuente de tensión se encuentra en el coárbol, pues si así fuera dicha submatriz incluiría al menos una fila/columna de ceros.

En consecuencia las únicas aportaciones no nulas a la suma de productos resistivos son las que proceden de árboles propios, completándose así la demostración del teorema. □

#### 4.4.2. Configuraciones de índice dos

Es bien sabido que las configuraciones denominadas *degeneradas* o *singulares* (lazos VC y cutsets IL) conducen típicamente, en el contexto pasivo, a modelos de índice dos [32, 111, 136]. Por el contrario, dichas configuraciones no han sido estudiadas en escenarios sin restricciones de pasividad (cf. [30, 31]), tarea que se aborda a continuación. Específicamente, en esta sección obtendremos condiciones que conducen a ecuaciones de índice dos en modelos de ramas de circuitos que posean lazos VC o cutsets IL, suponiendo están bien planteados, es decir, que no poseen lazos de fuentes de tensión ni cutsets de fuentes de corriente. Para ello se transformará el modelo de ramas (4.20) en un sistema de la forma

$$x' = f(x, y, t) \tag{4.24a}$$

$$0 = g(x, t), \tag{4.24b}$$

donde  $f : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^r$ ,  $g : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ , y  $r > p$ . Este sistema, que define una ecuación algebraico-diferencial de Hessenberg (presentada en la sección 2.3.2), tendrá índice dos si la matriz  $g_x(x^*)f_y(x^*, y^*)$  es regular.

El Teorema 4.5 hace uso de la noción de *menor normal de tipo X*. En un grafo en el que se han priorizado las diferentes clases de ramas, el menor normal de tipo  $X$  es el subgrafo resultante de contraer las ramas de mayor prioridad que  $X$  y eliminar las ramas de menor prioridad que  $X$ . Por ejemplo, el menor capacitivo resulta de contraer las fuentes de tensión y eliminar el resto de ramas, exceptuando a los condensadores, como se indica en la sección 2.1.3.

**Teorema 4.5.** *Un circuito en el que no existan acoplos entre sus elementos, que esté bien planteado (es decir, que no posea lazos de fuentes de tensión ni cutsets de fuentes de corriente) y en el que existen lazos VC y/o cutsets IL, tendrá índice dos si se verifican las condiciones recogidas a continuación.*

- *La suma de productos resistivos, asociados a todos los bosques del menor resultante de contraer las ramas VC y eliminar las ramas IL, es distinta de cero.*



- La suma de productos de capacidades asociadas a todos los bosques del menor normal capacitivo es distinta de cero.
- La suma de productos de inductancias asociadas a todos los cobosques del menor normal inductivo es distinta de cero.

*Demostración.* Expresaremos las leyes de Kirchhoff mediante matrices asociadas a un árbol normal, es decir, un árbol de expansión que contiene todas las fuentes de tensión, el máximo número posible de condensadores, algunas resistencias, el mínimo número posible de bobinas y ninguna fuente de corriente. Obsérvese que las condiciones impuestas sobre las fuentes son factibles por la hipótesis de que no existen lazos de fuentes de tensión ni cutsets de fuentes de corriente. Con el fin de simplificar la demostración, se priorizarán las resistencias controladas por tensión sobre las resistencias controladas por corriente, aunque el análisis puede llevarse a cabo sin este requisito adicional. En estas circunstancias, el modelo (4.20) tiene la forma

$$C(v_c)v'_c = i_c \quad (4.25a)$$

$$L(i_l)i'_l = v_l \quad (4.25b)$$

$$0 = \begin{pmatrix} v_{cco} \\ v_{gco} \\ v_{rco} \\ v_{lco} \\ v_j \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} v_u \\ v_{ctr} \\ v_{gtr} \\ v_{rtr} \\ v_{ltr} \end{pmatrix} \quad (4.25c)$$

$$0 = \begin{pmatrix} i_u \\ i_{ctr} \\ i_{gtr} \\ i_{rtr} \\ i_{ltr} \end{pmatrix} - K^T \begin{pmatrix} i_{cco} \\ i_{gco} \\ i_{rco} \\ i_{lco} \\ i_j \end{pmatrix} \quad (4.25d)$$

$$0 = i_{gtr} - g_{tr}(v_{gtr}) \quad (4.25e)$$

$$0 = i_{gco} - g_{co}(v_{gco}) \quad (4.25f)$$

$$0 = v_{rtr} - f_{tr}(i_{rtr}) \quad (4.25g)$$

$$0 = v_{rco} - f_{co}(i_{rco}) \quad (4.25h)$$

$$0 = v_u - u(t) \quad (4.25i)$$

$$0 = i_j - j(t), \quad (4.25j)$$

donde  $K$  es la submatriz de la matriz fundamental de cutsets definida por el árbol normal anteriormente indicado y posee la siguiente estructura:

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & 0 \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} \end{pmatrix},$$

en virtud de la priorización de dispositivos referida anteriormente. Obsérvese, en particular, que la priorización de las resistencias controladas por tensión sobre las controladas por corriente

permite asumir que el bloque que correspondería a la entrada  $K_{24}$  en la matriz anterior es nulo.

En primer lugar demostraremos que es posible expresar las variables resistivas ( $i_{r_{tr}}, i_{r_{co}}, v_{g_{tr}}, v_{g_{co}}, i_{g_{tr}}, i_{g_{co}}, v_{r_{tr}}, v_{r_{co}}$ ) en términos de  $v_u = u(t)$ ,  $i_j = j(t)$  y las variables reactivas. Esta reducción, en el contexto pasivo, conduce al sistema conocido como *modelo multipuerto* [23, 111, 126].

La matriz de derivadas parciales de la tercera y la cuarta ecuación de (4.25d), la segunda y la tercera de (4.25c) y las ecuaciones características (4.25e), (4.25f), (4.25g), (4.25h) con respecto a las variables resistivas es

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & -K_{33}^T & 0 & 0 & I & -K_{23}^T & 0 & 0 \\ I & -K_{34}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{23} & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} & 0 & 0 & 0 & K_{34} & I \\ 0 & 0 & -G_{tr} & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_{co} & 0 & I & 0 & 0 \\ -R_{tr} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & -R_{co} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

El complemento de Schur de la submatriz inferior derecha definida por los cuatro bloques de matrices identidad es

$$\begin{pmatrix} 0 & -K_{33}^T & G_{tr} & -K_{23}^T G_{co} \\ I & -K_{34}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{23} & I \\ K_{34} R_{tr} & R_{co} & K_{33} & 0 \end{pmatrix}$$

y puede reordenarse para obtener la matriz

$$M_1 = \begin{pmatrix} G_{tr} & -K_{23}^T G_{co} & 0 & -K_{33}^T \\ 0 & 0 & I & -K_{34}^T \\ K_{23} & I & 0 & 0 \\ K_{33} & 0 & K_{34} R_{tr} & R_{co} \end{pmatrix}.$$

La matriz anterior puede factorizarse como  $M_1 = DEF$ , con

$$D = \begin{pmatrix} I & -K_{23}^T & 0 & -K_{33}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & -K_{34}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{23} & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{33} & 0 & K_{34} & I \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} G_{tr} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{co} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{tr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{co} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

El menor resistivo obtenido de cortocircuitar las fuentes de tensión y los condensadores y eliminar las fuentes de tensión y las bobinas tiene asociadas las siguientes matrices de cutsets y de lazos:

$$Q = \begin{pmatrix} I & 0 & -K_{23}^T & -K_{33}^T \\ 0 & I & 0 & -K_{34}^T \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} K_{23} & 0 & I & 0 \\ K_{33} & K_{34} & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Esto es consecuencia del hecho de que la eliminación de las fuentes de corriente y las bobinas no afecta a los lazos fundamentales definidos por resistencias del coárbol, ya que estos están definidos únicamente por fuentes de tensión, condensadores y resistencias, y de que cortocircuitar fuentes de tensión y condensadores transforma los lazos fundamentales originales en lazos del menor resistivo. Lo mismo es de aplicación, de forma dual, para la matriz de cutsets.

Si expresamos la matrices  $Q$  y  $B$  en términos de las submatrices

$$Q_g = \begin{pmatrix} I & -K_{23}^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_r = \begin{pmatrix} 0 & -K_{23}^T \\ I & -K_{34}^T \end{pmatrix}, \quad B_g = \begin{pmatrix} K_{23} & I \\ K_{33} & 0 \end{pmatrix}, \quad B_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ K_{34} & I \end{pmatrix}$$

y agrupamos las matrices de resistencias y conductancias

$$R = \begin{pmatrix} R_{tr} & 0 \\ 0 & R_{co} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} G_{tr} & 0 \\ 0 & G_{co} \end{pmatrix},$$

entonces las matrices  $D$ ,  $E$  y  $F$  adoptan la forma

$$D = \begin{pmatrix} Q_g & Q_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_g & B_r \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Esta última transformación conduce a la misma factorización que la estudiada en el Teorema 4.3 y, en consecuencia, la matriz  $M_0$  en (4.26) será regular si la suma de productos resistivos en los árboles del menor resistivo antes definido es distinta de cero. Esta condición nos permite expresar, de manera local en torno del punto de operación, las variables resistivas en términos de  $v_u = u(t)$ ,  $i_j = j(t)$ ,  $v_{ctr}$  e  $i_{lco}$  mediante unas funciones  $\eta_{gco}$ ,  $\eta_{rco}$ ,  $\eta_{gtr}$  y  $\eta_{rtr}$  definidas localmente. Además, podemos expresar las variables  $i_{ctr}$  y  $v_{lco}$ , mediante la segunda ecuación

de (4.25d) y la cuarta de (4.25c), como

$$\begin{aligned} i_{ctr} &= \xi_1(i_{cco}, v_{ctr}, i_{lco}, u(t), j(t)) \\ v_{lco} &= \xi_2(v_{ltr}, v_{ctr}, i_{lco}, u(t), j(t)). \end{aligned}$$

En concreto,  $\xi_1(i_{cco}, v_{ctr}, i_{lco}, u(t), j(t))$  puede escribirse como

$$K_{12}^T i_{cco} + K_{22}^T \eta_{gco}(v_{ctr}, i_{lco}, u(t), j(t)) + K_{32}^T \eta_{rco}(v_{ctr}, i_{lco}, u(t), j(t)) + K_{42}^T i_{lco} + K_{52}^T j(t)$$

y, análogamente,  $\xi_2(v_{ltr}, v_{ctr}, i_{lco}, u(t), j(t))$  adquiere la expresión

$$-K_{41}u(t) - K_{42}v_{ctr} - K_{43}\eta_{gtr}(v_{ctr}, i_{lco}, u(t), j(t)) - K_{44}\eta_{rtr}(v_{ctr}, i_{lco}, u(t), j(t)) - K_{45}v_{ltr}.$$

De esta manera las variables  $i_{ctr}$  y  $v_{lco}$  pueden eliminarse del modelo sin afectar al índice. Por todo lo anterior y debido a la ausencia de acoplos podemos expresar las ecuaciones circuitales como

$$v'_{ctr} = C_{tr}^{-1}(v_{ctr})\xi_1(i_{cco}, v_{ctr}, i_{lco}, u(t), j(t)) \quad (4.27a)$$

$$v'_{cco} = C_{co}^{-1}(v_{cco})i_{cco} \quad (4.27b)$$

$$i'_{ltr} = L_{tr}^{-1}(i_{ltr})v_{ltr} \quad (4.27c)$$

$$i'_{lco} = L_{co}^{-1}(i_{lco})\xi_2(v_{ltr}, v_{ctr}, i_{lco}, u(t), j(t)) \quad (4.27d)$$

$$0 = i_{ltr} - K_{45}^T i_{lco} - K_{55}^T j(t) \quad (4.27e)$$

$$0 = v_{cco} + K_{11}u(t) + K_{12}v_{ctr}. \quad (4.27f)$$

Nótese que la regularidad de las matrices de condensadores ( $C$ ) y bobinas ( $L$ ), diagonales por la ausencia de acoplos, implica que todas las capacidades e inductancias son distintas de cero y que, por lo tanto, su inversa está bien definida.

El sistema (4.27) define una ecuación de Hessenberg de la forma descrita en (4.24), con  $x = (v_{ctr}, v_{cco}, i_{ltr}, i_{lco})$  e  $y = (i_{cco}, v_{ltr})$ . De hecho, ni la variable  $i_{cco}$  ni  $v_{ltr}$  aparecen en (4.27e)-(4.27f). Tal y como se indicó anteriormente, una ecuación de Hessenberg tiene índice dos si y solo si el producto  $g_x f_y$  es no singular; en este caso  $f$  y  $g$  se corresponden con las expresiones del miembro de la derecha de las igualdades (4.27a)-(4.27d) y (4.27e)-(4.27f), respectivamente. Es inmediato comprobar que

$$g_x f_y = \begin{pmatrix} 0 & (I - K_{45}^T)L^{-1}(i_l)(I - K_{45}^T)^T \\ (K_{12} \ I)C^{-1}(v_c)(K_{12} \ I)^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

y, por lo tanto, la condición de índice dos recae en la no singularidad de

$$A_1 = (K_{12} \ I)C^{-1}(v_c)(K_{12} \ I)^T \quad (4.29)$$

y

$$A_2 = (I - K_{45}^T)L^{-1}(i_l)(I - K_{45}^T)^T, \quad (4.30)$$

que analizamos a continuación.

### Regularidad de la matriz $A_1$

Empecemos analizando la regularidad de  $A_1$ . La matriz  $(K_{12} \ I)$  es una matriz de lazos (que denotaremos por  $\tilde{B}$ ) del menor capacitivo, resultado de eliminar las fuentes de corriente, las bobinas y las resistencias y cortocircuitar las fuentes de tensión. Por lo tanto, utilizando el método de Maxwell presentado al principio del capítulo, se obtiene

$$\det A_1 = (k(\tilde{B}))^2 \sum_{\alpha \in C_c} \prod_{i \in \alpha} C_i^{-1}, \quad (4.31)$$

donde  $C_c$  designa la familia de conjuntos de cobosques del menor capacitivo.

Dado que  $\det C$  se corresponde con el producto de las capacidades de todos los condensadores, siendo por tanto distinto de cero, si multiplicamos la anterior expresión por este determinante obtenemos

$$\det C \sum_{\alpha \in C_c} \prod_{i \in \alpha} C_i^{-1} = \sum_{\alpha \in F_c} \prod_{i \in \alpha} C_i \quad (4.32)$$

donde ahora  $F_c$  representa el conjunto de índices que especifican un bosque del menor capacitivo. En consecuencia

$$\det A_1 \neq 0 \Leftrightarrow \sum_{\alpha \in F_c} \prod_{i \in \alpha} C_i \neq 0, \quad (4.33)$$

donde se ha utilizado la propiedad  $k(\tilde{B}) \neq 0$ . Esto quiere decir que el hecho de que la suma de productos de capacidades extendida sobre el conjunto de bosques del menor capacitivo sea distinta de cero caracteriza la no singularidad de  $A_1$  en (4.29).

### Regularidad de la matriz $A_2$

La matriz  $A_2$  se puede factorizar como  $A_2 = DEF$ , donde  $D = (I \ -F_{44}^T)$ ,  $E = \begin{pmatrix} L_{tr}^{-1} & 0 \\ 0 & L_{co}^{-1} \end{pmatrix}$  y  $F = (I \ -F_{44}^T)^T$ . La matriz  $D$  se trata de la matriz de cutsets del menor inductivo, siendo este el resultado de contraer las ramas de las fuentes de tensión, los condensadores y las resistencias y de eliminar las fuentes de corriente. El estudio de la regularidad de la matriz  $A_2$  puede tratarse de manera análoga a la que se ha empleado para la matriz  $A_1$  para obtener

$$\det A_2 = (k(\tilde{Q}))^2 \sum_{\alpha \in F_l} \prod_{i \in \alpha} L_i^{-1}, \quad (4.34)$$

donde  $F_l$  representa la familia de conjuntos de bosques del menor inductivo.

Si ahora multiplicamos por  $\det L$ , llegamos a

$$\det L \sum_{\alpha \in F_l} \prod_{i \in \alpha} L_i^{-1} = \sum_{\alpha \in C_l} \prod_{i \in \alpha} L_i \quad (4.35)$$

siendo  $C_l$  el conjunto de índices que especifican un cobosque del menor inductivo. En consecuencia,

$$\det A_2 \neq 0 \Leftrightarrow \sum_{\alpha \in C_l} \prod_{i \in \alpha} L_i \neq 0, \quad (4.36)$$

es decir, que la suma de productos de inductancias extendida sobre el conjunto de cobosques del menor inductivo sea distinta de cero caracteriza la regularidad de  $A_2$ , lo que completa la demostración del Teorema 4.5.

□

## 4.5. Análisis del índice en circuitos memristivos

Los resultados anteriores pueden extenderse de forma natural al contexto de los circuitos con memristores, como se detalla a continuación. El modelo de ramas para circuitos con memristores se presenta en la sección 3.4 y está constituido por las ecuaciones:

$$C(v_c)v'_c = i_c \quad (4.37a)$$

$$L(i_l)i'_l = v_l \quad (4.37b)$$

$$q'_m = i_m \quad (4.37c)$$

$$\phi'_w = v_w \quad (4.37d)$$

$$0 = i_g - g(v_g) \quad (4.37e)$$

$$0 = v_r - f(i_r) \quad (4.37f)$$

$$0 = v_m - M(q_m)i_m \quad (4.37g)$$

$$0 = i_w - W(\phi_w)v_w. \quad (4.37h)$$

$$0 = v_u - u(t) \quad (4.37i)$$

$$0 = i_j - j(t) \quad (4.37j)$$

$$0 = Qi \quad (4.37k)$$

$$0 = Bv. \quad (4.37l)$$

En el análisis del índice, los memristores controlados por carga y por flujo se comportan localmente de manera idéntica a las resistencias controladas por corriente y tensión, respectivamente. Por este motivo, resulta de gran utilidad para la expresión de los resultados la siguiente definición.

**Definición 4.2.** *Un producto memresistivo asociado a un árbol de expansión es el producto de las conductancias y memductancias presentes en dicho árbol y las memristencias y resistencias del coárbol asociado.*

**Teorema 4.6.** *El modelo de ramas (4.37) de un circuito memristivo tendrá índice uno si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:*

- *No existen lazos VC ni cutsets IL.*
- *La suma de los productos memresistivos asociados a todos sus árboles propios es distinta de cero.*

A continuación resaltamos los aspectos relevantes para realizar la demostración de este resultado, demostración que paraleliza la presentada anteriormente para el Teorema 4.4. La con-

dición de índice uno recae en la no singularidad de la matriz

$$K_1 = \begin{pmatrix} B_r & B_g & B_m & B_w & B_{jl} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{uc} & Q_r & Q_g & Q_m & Q_w \\ 0 & -G(v_g) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R(i_r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -M(q_m) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -W(\phi_w) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Reordenando las columnas y utilizando el lema de Schur, se puede observar que la regularidad de esta matriz es equivalente a la de

$$K_2 = \begin{pmatrix} B_r R & B_g & B_m M & B_w & B_{jl} & 0 \\ Q_r & Q_g G & Q_m & Q_w W & 0 & Q_{uc} \end{pmatrix}.$$

Aquí queda patente la equivalencia en el comportamiento de las resistencias y los memristores antes mencionada, de manera que si agrupamos los elementos  $r$  y  $m$  y los elementos  $g$  y  $w$  obtenemos la siguiente expresión:

$$K_3 = \begin{pmatrix} B_{jl} & B_{gw} & B_{rm} X_{rm} & 0 \\ 0 & Q_{gw} X_{gw} & Q_{rm} & Q_{uc} \end{pmatrix},$$

donde

$$X_{rm} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}, X_{gw} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}.$$

La matriz  $K_3$  tiene una estructura idéntica a la de la matriz  $J_1$  estudiada al caracterizar las configuraciones de índice uno en el contexto de los circuitos clásicos (cf. (4.23)), por lo que del mismo razonamiento anterior obtenemos el resultado enunciado en el Teorema 4.6.

Para caracterizar las configuraciones de índice dos, será necesario proporcionar primeramente condiciones que permitan obtener el modelo multipuerto, conforme a la indicado en la demostración del Teorema 4.5. El proceso es exactamente igual al descrito en la sección 4.4.2, con la diferencia de que ahora habrá que tener en cuenta las ecuaciones de los memristores. Por su similitud con razonamientos anteriores, obviaremos los desarrollos matemáticos necesarios para deducir el siguiente resultado.

**Lema 4.2.** *Si la suma de productos memresistivos asociados a todos los bosques del menor resultante de contraer las ramas VC y eliminar las ramas IL es distinta de cero, entonces el modelo multipuerto está bien definido.*

El modelo multipuerto toma nuevamente la forma (4.27), como resultado de la eliminación de las variables memristivas. En este contexto, el modelo de ramas tendrá índice dos si satisface las condiciones de regularidad de la matriz  $g_x f_y$  estudiada en la sección 4.4.2. De todo esto se deduce el resultado enunciado a continuación.

**Teorema 4.7.** *Un circuito en el que sus elementos no presentan acoplos, que está bien planteado (es decir, que no presenta cutsets de fuentes de corriente ni lazos de fuente de tensión) y en*

el que existen lazos VC y/o cutsets IL, tendrá índice dos si:

- La suma de productos memresistivos, asociados a todos los bosques del menor resultante de contraer las ramas VC y eliminar las ramas IL, es distinta de cero.
- La suma de productos de capacidades asociadas a todos los bosques del menor normal de tipo C es distinta de cero.
- La suma de productos de inductancias asociadas a todos los cobosques del menor normal de tipo L es distinta de cero.

## 4.6. Casos de estudio

En esta sección se ilustrará la caracterización del índice en casos no lineales sin restricciones de pasividad utilizando algunos circuitos tomados de [142]. El objetivo es emplear ejemplos muy sencillos que permitan ilustrar fácilmente la aproximación estructural desarrollada en este capítulo, conforme a la cual la propiedad analítica central (el índice) de los circuitos aquí considerados puede obtenerse en términos puramente topológicos, incluso sin necesidad de calcular explícitamente el modelo del circuito.

### 4.6.1. Índice uno

Consideremos el circuito de la Figura 4.1 [142]. En él podemos observar dos diodos que asumiremos gobernados por sendas ecuaciones no lineales dependientes de la tensión de la forma  $i_{d_1} = g_1(v_{d_1})$ ,  $i_{d_2} = g_2(v_{d_2})$ . Las funciones  $g_1$  y  $g_2$  pueden corresponder, por ejemplo, a la descripción de Shockley de diodos localmente pasivos para los que la presencia de un efecto túnel hace que  $g_1$  o  $g_2$  sean decrecientes en una determinada región. Esto implica una conductancia incremental negativa y un comportamiento activo en dicha región. Se asume que el resto de elementos son lineales pero no necesariamente pasivos, aunque el análisis que sigue también es válido para los casos en que  $R_0$  y  $R_1$  sean reemplazados por resistencias controladas por corriente mediante una relación no lineal.

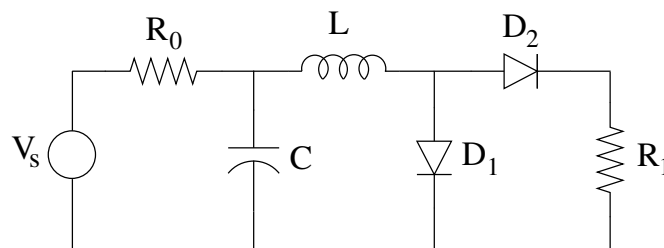


Figura 4.1: Configuración de índice uno (de [142])



La dinámica de este circuito viene definida por

$$Cv'_c = i_{r_0} - i_l \tag{4.38a}$$

$$Li'_l = v_c - v_{d_1} \tag{4.38b}$$

$$0 = v_s(t) + R_0 i_{r_0} + v_c \tag{4.38c}$$

$$0 = -v_{d_1} + v_{d_2} + R_1 i_{r_1} \tag{4.38d}$$

$$0 = -i_l + g_1(v_{d_1}) + i_{r_1} \tag{4.38e}$$

$$0 = g_2(v_{d_2}) - i_{r_1}. \tag{4.38f}$$

Este sistema de ecuaciones, que puede entenderse como una reducción parcial del modelo de ramas que conserva el índice, tendrá índice uno si y solo si la matriz de derivadas parciales de (4.38c)-(4.38f) respecto de las variables algebraicas  $i_{r_0}, i_{r_1}, v_{d_1}, v_{d_2}$  es no singular. Dicha matriz tiene la expresión

$$\begin{pmatrix} R_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & G_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & G_2 \end{pmatrix}, \tag{4.39}$$

donde  $G_1, G_2$  representan las conductancias incrementales de los diodos. En términos del determinante de (4.39), la condición para que el modelo (4.38) tenga índice uno es

$$R_0(R_1 G_1 G_2 + G_1 + G_2) \neq 0. \tag{4.40}$$

Esta condición puede formularse sin necesidad de obtener el modelo (4.38), de acuerdo con lo enunciado en el Teorema 4.4, ya que el circuito no posee lazos VC ni cutsets IL. Los árboles de expansión de este circuito necesarios para obtener las condiciones de índice uno se representan en la Figura 4.2.

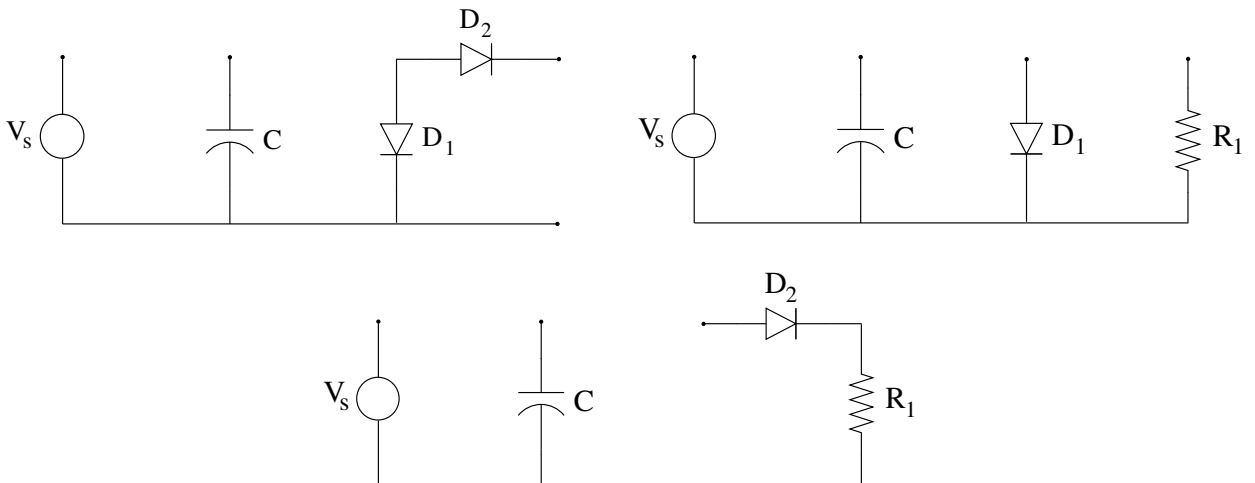


Figura 4.2: Árboles propios

En el primer árbol se encuentran los diodos  $D_1$  y  $D_2$ , mientras que en el coárboles encontra-

mos las resistencias controladas por corriente  $R_0$  y  $R_1$ ; de ahí el producto  $R_0R_1G_1G_2$ . En cada uno de los otros dos árboles solo está presente uno de los dos diodos y en el coárbol siempre está  $R_0$ , dando lugar a los productos  $R_0G_1$  y  $R_0G_2$ . La suma de los productos anteriores se corresponde con la de la ecuación (4.40) y, por lo tanto, queda ilustrado que el examen de los productos resistivos en los árboles propios es suficiente para determinar la condición de índice uno (4.40).

### 4.6.2. Índice dos

Si cortocircuitamos  $R_0$  en el ejemplo anterior, obtenemos el circuito de la Figura 4.3, en el que existe un lazo VC, lo que nos lleva a una configuración degenerada como las analizadas en el Teorema 4.5.

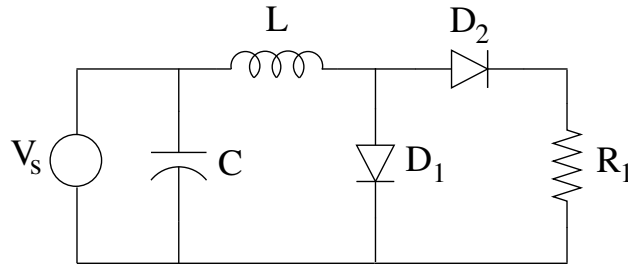


Figura 4.3: Configuración de índice dos

La existencia de una sola bobina y un solo condensador reduce las condiciones a comprobar a que la suma de productos resistivos en el menor resistivo sea distinta de cero, suponiendo que tanto la capacidad  $C$  como la inductancia  $L$  son no nulas.

El menor resistivo de este circuito está compuesto por los dos diodos y la resistencia  $R_1$ , siendo sus árboles normales los formados por los pares  $D_1$ - $D_2$ ,  $D_1$ - $R_1$  y  $D_2$ - $R_1$ . Esto nos lleva a los productos resistivos  $G_1G_2R_1$ ,  $G_1$  y  $G_2$ . En consecuencia la condición para que el modelo de ramas de este ejemplo tenga índice dos es

$$R_1G_1G_2 + G_1 + G_2 \neq 0. \quad (4.41)$$

La obtención topológica de esta condición es más sencilla que su derivación mediante el análisis del modelo circuital, cuyas principales pasos comentamos a continuación a efectos meramente ilustrativos.

Las ecuaciones que gobiernan el circuito del ejemplo son

$$Cv'_c = i_u - i_l \quad (4.42a)$$

$$Li'_l = v_c - v_{d_1} \quad (4.42b)$$

$$0 = v_s(t) + v_c \quad (4.42c)$$

$$0 = -v_{d_1} + v_{d_2} + R_1i_{r_1} \quad (4.42d)$$

$$0 = -i_l + g_1(v_{d_1}) + i_{r_1} \quad (4.42e)$$

$$0 = g_2(v_{d_2}) - i_{r_1}, \quad (4.42f)$$

donde  $i_u$  es la corriente en la rama de la fuente de tensión; de nuevo se han eliminado algunas variables irrelevantes a efectos del índice del modelo. Si derivamos las ecuaciones (4.42c - 4.42f) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= v'_s(t) + v'_c \\ 0 &= -v'_{d_1} + v'_{d_2} + R_1 i'_{r_1} \\ 0 &= -i'_l + G_1(v_{d_1})v'_{d_1} + i'_{r_1} \\ 0 &= G_2(v_{d_2})v'_{d_2} - i'_{r_1} \end{aligned}$$

con  $G_1(v_{d_1}) = g'_1(v_{d_1})$ ,  $G_2(v_{d_2}) = g'_2(v_{d_2})$ . Esto nos lleva al sistema

$$Cv'_c = i_u - i_l \quad (4.44a)$$

$$Li'_l = v_c - v_{d_1} \quad (4.44b)$$

$$0 = v'_s(t) + \frac{1}{C}(i_u - i_l) \quad (4.44c)$$

$$-v'_{d_1} + v'_{d_2} + R_1 i'_{r_1} = 0 \quad (4.44d)$$

$$G_1(v_{d_1})v'_{d_1} + i'_{r_1} = \frac{1}{L}(v_c - v_{d_1}) \quad (4.44e)$$

$$G_2(v_{d_2})v'_{d_2} - i'_{r_1} = 0. \quad (4.44f)$$

Al ser el coeficiente de  $i_u$  no nulo en (4.44c), si la matriz de coeficientes de abajo es regular, entonces este modelo tiene índice uno y esto implica que el modelo original tenga índice dos. Por lo tanto, si la matriz de coeficientes asociada a  $v'_{d_1}$ ,  $v'_{d_2}$  e  $i'_{r_1}$  en (4.44d)-(4.44f) es regular, el modelo será de índice dos. Dicha matriz es

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & R_1 \\ G_1 & 0 & 1 \\ 0 & G_2 & -1 \end{pmatrix},$$

con determinante  $R_1 G_1 G_2 + G_1 + G_2$ , coherentemente con la condición obtenida en (4.41) mediante el análisis de la estructura de árboles normales.



# Capítulo 5

## Análisis del índice en modelos híbridos

### 5.1. Introducción

El origen de la formulación de los modelos denominados *híbridos* se remonta a los estudios seminales realizados por Kron [74] (véanse también [2, 6, 19, 61, 123]). Como se desarrolla en la sección 3.5, bajo esta aproximación se pretende realizar una reducción del modelo de ramas con el propósito de conseguir un conjunto mínimo de variables que capturen la dinámica del circuito sin perder la simetría del modelo. Recientemente, estos modelos han sido analizados bajo hipótesis de pasividad utilizando un formalismo algebraico-diferencial [69, 70, 132, 134]. En este contexto, la reducción del modelo anteriormente referida se traduce en que el índice del modelo resultante no es superior a uno en condiciones de pasividad. Tal característica supone una ventaja por ejemplo con respecto al modelo MNA (*Modified Nodal Analysis*; cf. sección 3.6), que para ciertas configuraciones posee índice dos.

En el presente capítulo extendemos los estudios del índice en circuitos no lineales sin restricciones de pasividad, iniciados en el capítulo anterior, a los modelos híbridos, completando de esta forma los resultados recogidos en [69, 70, 132, 134] y mencionados anteriormente. Presentaremos la caracterización del índice no solo en el contexto clásico sino también en el memristivo. Asumiremos en el análisis que los circuitos únicamente están formados por elementos de dos terminales y que no existen acoplos entre ellos; por simplicidad (y sin pérdida de generalidad), supondremos que todos los circuitos analizados son conexos. En la medida en que la formulación híbrida surge como una reducción de los modelos de ramas analizados en el capítulo anterior, parte de las técnicas que aquí se emplearán son análogas a las presentadas con anterioridad aunque, como se detallará más adelante, los modelos aquí analizados presentan peculiaridades no encontradas en contextos previos.

En las secciones 5.2 y 5.3 se desarrollará la caracterización de las configuraciones de índice cero y uno, respectivamente, en modelos híbridos de circuitos clásicos. Posteriormente, la sección 5.4 extiende los resultados anteriores a circuitos memristivos. En la sección 5.5 se indican, por completitud, las modificaciones necesarias para la inclusión de fuentes independientes en el análisis. Finalmente, en la sección 5.6 se analizan dos casos de estudio; en uno de ellos se ilustrará la aplicabilidad de los resultados obtenidos en las secciones anteriores, mientras que el segundo está encaminado a apuntar las direcciones en las que el análisis podría extenderse a

circuitos con fuentes controladas.

Los resultados documentados en este capítulo han sido publicados en el artículo [42].

## 5.2. Configuraciones de índice cero

El modelo híbrido de circuitos formados por condensadores, bobinas, resistencias controladas por corriente y resistencias controladas por tensión está definido por el sistema de ecuaciones (5.1). La derivación de este modelo a partir de las ecuaciones características de los dispositivos involucrados y de las leyes de Kirchhoff se detalla en la sección 3.5.

$$[C_{tr}(v_{ctr}) + F_{11}^T C_{co}(-F_{11}v_{ctr})F_{11}]v'_{ctr} = F_{21}^T g_{co}(-F_{21}v_{ctr} - F_{22}v_{gtr}) + F_{31}^T i_{rco} + F_{41}^T i_{lco} \quad (5.1a)$$

$$[L_{co}(i_{lco}) + F_{44}L_{tr}(F_{44}^T i_{lco})F_{44}]i'_{lco} = -F_{41}v_{ctr} - F_{42}v_{gtr} - F_{43}f_{tr}(F_{33}^T i_{rco} + F_{43}^T i_{lco}) \quad (5.1b)$$

$$g_{tr}(v_{gtr}) = F_{22}^T g_{co}(-F_{21}v_{ctr} - F_{22}v_{gtr}) + F_{32}^T i_{rco} + F_{42}^T i_{lco} \quad (5.1c)$$

$$f_{co}(i_{rco}) = -F_{31}v_{ctr} - F_{32}v_{gtr} - F_{33}f_{tr}(F_{33}^T i_{rco} + F_{43}^T i_{lco}). \quad (5.1d)$$

Utilizamos los subíndices  $tr$  y  $co$  para referirnos a las variables de las ramas de árbol y coárbol, respectivamente. Recordemos que para definir el modelo híbrido se ha utilizado como referencia un árbol normal con el siguiente orden de prioridad por tipo de ramas: condensadores, resistencias controladas por tensión, resistencias controladas por corriente y bobinas.

El sistema de ecuaciones (5.1) define una ecuación algebraico-diferencial con la siguiente estructura:

$$M(x)x' = h_1(x, y) \quad (5.2a)$$

$$0 = h_2(x, y), \quad (5.2b)$$

donde

$$x = (v_{ctr}, i_{lco}),$$

$$y = (v_{gtr}, i_{rco}),$$

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{tr}(v_{ctr}) + F_{11}^T C_{co}(-F_{11}v_{ctr})F_{11} & 0 \\ 0 & L_{co}(i_{lco}) + F_{44}L_{tr}(F_{44}^T i_{lco})F_{44} \end{pmatrix}.$$

Este tipo de ecuaciones tiene índice cero si la matriz  $M(x)$  es regular, las variables  $y$  no están presentes y las restricciones algebraicas asociadas (en general) a la ecuación (5.2b) no existen. En tal caso el sistema podría ser reformulado de manera inmediata como la ecuación diferencial ordinaria explícita  $x' = (M(x))^{-1}h_1(x)$ .

Por la construcción del modelo híbrido y, en concreto, la priorización de elementos en los árboles normales, para que las restricciones algebraicas impuestas en (5.2b) y la variable  $y$  puedan desaparecer del sistema de ecuaciones (5.2), es necesario que todas las resistencias controladas por tensión formen parte de un coárbol normal y que todas las resistencias controladas por corriente formen parte de un árbol normal. Para que las resistencias controladas por ten-

sión formen parte del coárbol, estas deben formar un lazo con elementos de mayor prioridad (condensadores) y, a su vez, para que las resistencias controladas por corriente formen parte del árbol de referencia deben pertenecer a un cutset compuesto únicamente por elementos de menor prioridad (bobinas). Esto conduce de forma natural a la definición de la *condición acíclica de resistencias* que presentamos a continuación.

**Definición 5.1.** *Se dice que un circuito verifica la condición acíclica de resistencias si y solo si todas las resistencias controladas por tensión forman un lazo con condensadores y todas las resistencias controladas por corriente forman un cutset con bobinas.*

A partir de esta condición, la caracterización de las configuraciones de índice cero dependerá solo de las condiciones que determinen la regularidad de la matriz  $M(x)$ , como se detalla en el Teorema 5.1. Tanto en la presentación como en la demostración de este resultado haremos uso de ciertos tipos de subgrafos (menores asociados a árboles normales) y de sus matrices asociadas, que se describen en la sección 2.1.3.

**Teorema 5.1.** *Consideremos un circuito en el que no existen efectos de acoplo entre los condensadores ni entre las bobinas. En tal caso, el modelo híbrido (5.1) tiene índice cero si y solo si*

- *se verifica la condición acíclica de resistencias;*
- *la suma de todos los productos de capacidades correspondientes a condensadores que forman un bosque del menor normal capacitivo es distinta de cero; y*
- *la suma de todos los productos de inductancias correspondientes a bobinas que forman un bosque del menor normal inductivo es distinta de cero.*

*Demostración.* Vamos a estudiar la regularidad de la matriz  $M(x)$  antes presentada a través de la regularidad de sus submatrices

$$M_1 = C_{tr}(v_{ctr}) + F_{11}^T C_{co}(-F_{11}v_{ctr})F_{11}$$

y

$$M_2 = L_{co}(i_{lco}) + F_{44}L_{tr}(F_{44}^T i_{lco})F_{44}^T.$$

La matriz  $M_1$  puede factorizarse como  $M_1 = DEF$ , siendo

$$D = \begin{pmatrix} I & -F_{11}^T \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} C_{tr} & 0 \\ 0 & C_{co} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} I \\ -F_{11} \end{pmatrix}.$$

De acuerdo a lo especificado en la sección 2.1.3,  $D$  se corresponde con la matriz de cutsets del menor capacitivo (resultado de eliminar todas las ramas no correspondientes a condensadores). Haciendo uso de la fórmula de Cauchy-Binet es posible expresar el determinante de  $M_1$  de la manera siguiente:

$$\det M_1 = \sum_{\alpha, \beta} \det D^{\omega, \alpha} \det E^{\alpha, \beta} \det F^{\beta, \omega},$$

Dado que  $E$  es diagonal por la ausencia de acoplos, tenemos que  $\det E^{\alpha,\beta} \neq 0$  si y solo si  $\alpha = \beta$ . También se puede observar que  $D = F^T$ , y por lo tanto  $\det D^{\omega,\alpha} = \det F^{\alpha,\omega}$ . Sabemos además, por las propiedades de las matrices de cutsets, que  $\det D^{\omega,\alpha}$  es distinto de cero si y solo si el conjunto de índices  $\alpha$  especifica un bosque, siendo en ese caso  $\det D^{\omega,\alpha} = \pm 1$  (Lema 2.9). Como consecuencia de todo ello tenemos que

$$\det M_1 = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}_c} \det D^{\omega,\alpha} \det E^{\alpha,\alpha} \det F^{\alpha,\omega} = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}_c} (\det D^{\omega,\alpha})^2 \prod_{i \in \alpha} C_i = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}_c} \prod_{i \in \alpha} C_i, \quad (5.3)$$

donde  $\mathcal{T}_c$  denota la familia de conjuntos de índices que especifican bosques del menor capacitivo. De (5.3) resulta evidente que  $M_1$  es no singular si y solo si la suma de productos de capacidades en el bosque capacitivo es distinta de cero.

Ahora abordaremos la caracterización de la matriz  $M_2$ , para lo cual la factorizaremos como  $M_2 = DEF$  con

$$D = \begin{pmatrix} F_{44} & I \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} L_{tr} & 0 \\ 0 & L_{co} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_{44}^T \\ I \end{pmatrix},$$

donde  $D = \begin{pmatrix} F_{44} & I \end{pmatrix}$  es la matriz de lazos del menor inductivo (resultado de contraer todas las ramas no correspondientes a bobinas). Procediendo de manera análoga a como lo hicimos para  $M_1$ , obtenemos que el determinante de  $M_2$  puede expresarse de la siguiente manera:

$$\det M_2 = \sum_{\alpha} \det D^{\omega,\alpha} \det E^{\alpha,\alpha} \det F^{\alpha,\omega} = \sum_{\alpha} (\det D^{\omega,\alpha})^2 \prod_{i \in \alpha} L_i.$$

Además,  $\det D^{\omega,\alpha}$  es distinta de cero si y solo si  $\alpha$  especifica un coárbol, y en tal caso  $\det D^{\omega,\alpha} = \pm 1$  ya que  $D$  es una matriz fundamental (de acuerdo con lo indicado en el Lema 2.9). Por lo tanto,

$$\det M_2 = \sum_{\alpha \in \mathcal{C}_l} \prod_{i \in \alpha} L_i,$$

donde  $\mathcal{C}_l$  representa la familia de índices que hacen referencia a cobosques del menor inductivo. En definitiva, la matriz  $M_2$  es no singular si y solo si la suma de productos inductivos extendida sobre el conjunto de coárboles del menor inductivo es distinta de cero. Esto completa la demostración del teorema.  $\square$

### 5.3. Configuraciones de índice uno

En la caracterización de las configuraciones de índice uno en modelos híbridos, haremos uso del *menor resistivo*, que, de acuerdo a la priorización de elementos realizada en la sección 3.5.1 y en base a las definiciones presentadas en la sección 2.1.3, es el resultado de contraer las ramas asociadas a condensadores y eliminar las ramas asociadas a las bobinas. Además, volveremos a hacer uso del concepto de producto resistivo, que se corresponde con el producto de las conductancias de las resistencias controladas por tensión presentes en un árbol y de las resistencias controladas por corriente del coárbol.



**Teorema 5.2.** *Consideremos un circuito sin acoplos formado por condensadores, bobinas y resistencias controladas por corriente y por tensión. Bajo las hipótesis de que en este circuito no se cumpla la condición acíclica de resistencias y de que las sumas de productos de capacidades y de inductancias contempladas en el Teorema 5.1 sean no nulas, el modelo híbrido (5.1) tiene índice uno si la suma de productos resistivos extendida sobre el conjunto de bosques del menor resistivo es distinta de cero.*

*Demostración.* La condición de índice uno está vinculada a la regularidad de la matriz de derivadas parciales de las restricciones algebraicas del modelo (ecuaciones (5.2b)) con respecto a las variables  $v_{gtr}$  e  $i_{rco}$ . Esta matriz es

$$J = \begin{pmatrix} G_{tr} + F_{22}^T G_{co} F_{22} & -F_{32}^T \\ F_{32} & R_{co} + F_{33} R_{tr} F_{33}^T \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Consideremos ahora la matriz

$$J_1 = \begin{pmatrix} G_{tr} & 0 & -F_{22}^T G_{co} & -F_{32}^T \\ 0 & I & 0 & -F_{33}^T \\ F_{22} & 0 & I & 0 \\ F_{32} & F_{33} R_{tr} & 0 & R_{co} \end{pmatrix}.$$

El complemento de Schur de la menor submatriz cuadrada que incluye los bloques identidad resulta ser, precisamente, la matriz  $J$  de (5.4). Por lo tanto, es posible estudiar la regularidad de  $J$  a través de la matriz  $J_1$  (cf. Lema 2.10). Con tal fin, expresaremos la matriz  $J_1$  como el producto  $DEF$  donde

$$D = \begin{pmatrix} I & 0 & -F_{22}^T & -F_{32}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -F_{33}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_{22} & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_{32} & F_{33} & 0 & I \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} G_{tr} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{co} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{tr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{co} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Nótese en particular que las submatrices de  $D$

$$D_1 = \begin{pmatrix} I & 0 & -F_{22}^T & -F_{32}^T \\ 0 & I & 0 & -F_{33}^T \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} F_{22} & 0 & I & 0 \\ F_{32} & F_{33} & 0 & I \end{pmatrix}$$

se corresponden con las matrices de cutsets y de lazos del menor resistivo.

Podemos utilizar la fórmula de Cauchy-Binet para expresar el determinante de  $J_1$  como

$$\det J_1 = \sum_{\alpha, \beta} \det D^{\omega, \alpha} \det E^{\alpha, \beta} \det F^{\beta, \omega}.$$

Dadas las estructuras de las matrices involucradas en el sumatorio y las propiedades de las matrices de cutsets y de lazos, observamos que los conjuntos de índices deben cumplir las siguientes condiciones para que el producto  $\det D^{\omega, \alpha} \det E^{\alpha, \beta} \det F^{\beta, \omega}$  sea distinto de cero:

- Los índices  $\alpha$  y  $\beta$  deben coincidir ya que  $E$  es diagonal por la ausencia de acoplos.
- El subconjunto de índices  $\alpha_1$  (resp.  $\alpha_2$ ) que hacen referencia a las columnas de la submatriz  $D_1$  (resp.  $D_2$ ) deben especificar las ramas de un bosque (resp. cobosque) para que  $\det D^{\omega, \alpha}$  sea no nulo.
- Los subconjuntos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  deben ser complementarios para que  $F^{\alpha, \omega}$  sea no singular (nótese que  $F^{\beta, \omega} = F^{\alpha, \omega}$  por la condición  $\alpha = \beta$  derivada anteriormente).

De acuerdo a los razonamientos anteriores es posible llegar a la expresión

$$\det J_1 = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}_{gr}} \det D^{\omega, \alpha} \det E^{\alpha, \alpha} \det F^{\alpha, \omega}, \quad (5.5)$$

donde  $\mathcal{T}_{gr}$  es la familia de conjuntos de índices  $\alpha$  tales que  $\alpha_1$  especifica las ramas de un bosque del menor resistivo y  $\alpha_2$  el cobosque asociado.

Ahora estamos en disposición de utilizar el Lema 4.1 del capítulo anterior, que nos permite obviar los términos  $\det D^{\omega, \alpha} \det F^{\alpha, \omega}$  a la hora de determinar la regularidad de  $J_1$  por ser constantes. En definitiva,  $J$  será regular si la suma de productos de las conductancias de resistencias de árbol controladas por tensión y de las resistencias de coárbol de aquellas que estén controladas por corriente, extendida sobre el conjunto de los bosques del menor resistivo, es distinta de cero.

□

## 5.4. Estudio del modelo híbrido de circuitos con memristores

Los resultados anteriores pueden extenderse de forma natural al contexto de los circuitos memristivos. Las ecuaciones del modelo híbrido para circuitos con memristores se detallan en la sección 3.5.2: el sistema resultante está formado por las ecuaciones diferenciales de los elementos reactivos,

$$\begin{aligned} [C_{tr}(v_{ctr}) + F_{11}^T C_{co}(-F_{11}v_{ctr})F_{11}]v'_{ctr} &= F_{21}^T h_{co}(-F_{21}v_{ctr} - F_{22}v_{gtr}) + \\ &+ F_{31}^T W(\varphi_{wco})(-F_{31}v_{ctr} - F_{32}v_{gtr} - F_{33}v_{wtr}) + F_{41}^T i_{rco} + F_{51}^T i_{mco} + F_{61}^T i_{lco} \end{aligned} \quad (5.6a)$$

$$\begin{aligned} [L_{co}(i_{lco}) + F_{66}L_{tr}(F_{66}^T i_{lco})F_{66}^T]i'_{lco} &= -F_{61}v_{ctr} - F_{62}v_{gtr} - F_{63}v_{wtr} - \\ &- F_{64}f_{tr}(F_{44}^T i_{rco} + F_{54}^T i_{mco} + F_{64}^T i_{lco}) - F_{65}M_{tr}(q_{mtr})(F_{55}^T i_{mco} + F_{65}^T i_{lco}), \end{aligned} \quad (5.6b)$$

las ecuaciones diferenciales de los memristores,

$$\varphi'_{w_{tr}} = v_{w_{tr}} \quad (5.7a)$$

$$\varphi'_{w_{co}} = -F_{31}v_{c_{tr}} - F_{32}v_{g_{tr}} - F_{33}v_{w_{tr}} \quad (5.7b)$$

$$q'_{m_{tr}} = F_{55}^T i_{m_{co}} + F_{65}^T i_{l_{co}} \quad (5.7c)$$

$$q'_{m_{co}} = i_{m_{co}}, \quad (5.7d)$$

junto con las restricciones algebraicas

$$h_{tr}(v_{g_{tr}}) = F_{22}^T h_{co}(-F_{21}v_{c_{tr}} - F_{22}v_{g_{tr}}) + F_{32}^T W_{co}(\varphi_{w_{co}})(-F_{31}v_{c_{tr}} - F_{32}v_{g_{tr}} - F_{33}v_{w_{tr}}) + F_{42}^T i_{r_{co}} + F_{52}^T i_{m_{co}} + F_{62}^T i_{l_{co}} \quad (5.8a)$$

$$[W_{tr}(\varphi_{w_{tr}}) + F_{33}^T W_{co}(\varphi_{w_{co}})F_{33}]v_{w_{tr}} = F_{33}^T W_{co}(\varphi_{w_{co}})(-F_{31}v_{c_{tr}} - F_{32}v_{g_{tr}}) + F_{43}^T i_{r_{co}} + F_{53}^T i_{m_{co}} + F_{63}^T i_{l_{co}} \quad (5.8b)$$

$$f_{co}(i_{r_{co}}) = -F_{41}v_{c_{tr}} - F_{42}v_{g_{tr}} - F_{43}v_{w_{tr}} - F_{44}f_{tr}(F_{44}^T i_{r_{co}} + F_{54}^T i_{m_{co}} + F_{64}^T i_{l_{co}}) \quad (5.8c)$$

$$[M_{co}(q_{m_{co}}) + F_{55}M_{tr}(q_{m_{tr}})F_{55}^T]i_{m_{co}} = -F_{51}v_{c_{tr}} - F_{52}v_{g_{tr}} - F_{53}v_{w_{tr}} - F_{54}f_{tr}(F_{44}^T i_{r_{co}} + F_{54}^T i_{m_{co}} + F_{64}^T i_{l_{co}}) - F_{55}M_{tr}(q_{m_{tr}})F_{65}^T i_{l_{co}}. \quad (5.8d)$$

En consecuencia, en el ámbito de los circuitos memristivos las variables diferenciales se corresponden con  $(v_{c_{tr}}, i_{l_{co}}, \varphi_{w_{tr}}, \varphi_{w_{co}}, q_{m_{tr}}, q_{m_{co}})$  y las algebraicas con  $(v_{g_{tr}}, v_{w_{tr}}, i_{r_{co}}, i_{m_{co}})$ .

Antes de comenzar con el análisis es conveniente definir la condición acíclica de memristencias, que traslada al contexto actual la introducida para circuitos clásicos en la sección 5.2. Esta condición establece que todas las resistencias controladas por tensión y todos los memristores controlados por flujo forman lazos con algunos condensadores; por su parte, todas las resistencias controladas por corriente y todos los memristores controlados por carga deben formar un cutset con algunas bobinas. La verificación de tal condición elimina la posibilidad de escoger resistencias controladas por tensión o memristores controlados por flujo como ramas de árbol, y resistencias controladas por corriente o memristores controlados por carga como ramas de coárbol. Supone una extensión natural de la condición acíclica de resistencias al ámbito de los circuitos con memristores.

De igual manera, la noción de producto resistivo debe ser sustituida por la de *producto mem-resistivo* que involucra las conductancias y memductancias de las resistencias controladas por tensión y de los memristores controlados por flujo del árbol, respectivamente, y las resistencias y memristencias de las resistencias controladas por corriente y los memristores controlados por carga del coárbol.

La caracterización de las configuraciones de índice cero es idéntica a la presentada en el Teorema 5.1, ahora en términos de la condición acíclica de memristencias. Nótese también que el menor capacitivo es en este contexto el resultado de eliminar las resistencias, memristores y bobinas, mientras que el menor inductivo se obtiene al contraer las ramas de los condensadores, resistencias y memristores.

En la caracterización de las configuraciones de índice uno, existen algunas diferencias con respecto a los circuitos clásicos que especificamos a continuación.

**Teorema 5.3.** *Consideremos un circuito formado por elementos sin acoplos que no cumple la condición acíclica de memristencias y en el que las sumas de capacidades e inductancias especificadas en el Teorema 5.1 son no nulas. En tal caso, el modelo híbrido definido por las ecuaciones (5.6), (5.7) y (5.8) tiene índice uno si y solo si la suma de productos memresistivos extendida sobre el conjunto de bosques del menor resultante de contraer las ramas de condensadores y eliminar las ramas de bobinas es distinta de cero.*

*Demostración.* El modelo híbrido de circuitos con memristores tiene como variables diferenciales a  $v_{ctr}$ ,  $i_{lco}$ ,  $\varphi_{wtr}$ ,  $\varphi_{wco}$ ,  $q_{mtr}$  y  $q_{mco}$ , y como variables algebraicas a  $v_{gtr}$ ,  $v_{wtr}$ ,  $i_{rco}$  y  $i_{mco}$ . La condición de índice uno recae en la regularidad de la matriz de derivadas parciales de las restricciones algebraicas con respecto a  $v_{gtr}$ ,  $v_{wtr}$ ,  $i_{rco}$  y  $i_{mco}$ , que toma la expresión

$$\begin{pmatrix} G_{tr} + F_{22}^T G_{co} F_{22} + F_{32}^T W_{co} F_{32} & F_{32}^T W_{co} F_{33} & -F_{42}^T & -F_{52}^T \\ F_{33}^T W_{co} F_{32} & W_{tr} + F_{33}^T W_{co} F_{33} & -F_{43}^T & -F_{53}^T \\ F_{42} & F_{43} & R_{co} + F_{44} R_{tr} F_{44}^T & F_{44} R_{tr} F_{54}^T \\ F_{52} & F_{53} & F_{54} R_{tr} F_{44}^T & M_{co} + F_{55} M_{tr} F_{55}^T + F_{54} R_{tr} F_{54}^T \end{pmatrix}.$$

Definamos las matrices

$$Y_{tr} = \begin{pmatrix} G_{tr} & 0 \\ 0 & W_{tr} \end{pmatrix}, Y_{co} = \begin{pmatrix} G_{co} & 0 \\ 0 & W_{co} \end{pmatrix}, Z_{tr} = \begin{pmatrix} R_{tr} & 0 \\ 0 & M_{tr} \end{pmatrix}, Z_{co} = \begin{pmatrix} R_{co} & 0 \\ 0 & M_{co} \end{pmatrix},$$

y

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} F_{22} & 0 \\ F_{32} & F_{33} \end{pmatrix}, \hat{F} = \begin{pmatrix} F_{42} & F_{43} \\ F_{52} & F_{53} \end{pmatrix}, \bar{F} = \begin{pmatrix} F_{44} & 0 \\ F_{54} & F_{55} \end{pmatrix}.$$

Entonces la matriz a estudiar queda configurada de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} Y_{tr} + \tilde{F}^T Y_{co} \tilde{F} & -\hat{F}^T \\ \hat{F} & Z_{co} + \bar{F} R_{tr} \bar{F}^T \end{pmatrix}$$

que muestra la misma estructura que la estudiada en (5.4). Por lo tanto la demostración del Teorema 5.2 se puede aplicar literalmente si agrupamos las resistencias controladas por tensión con los memristores controlados por flujo y las resistencias controladas por corriente con los memristores controlados por carga. □

## 5.5. Fuentes independientes

Por simplicidad en la formulación de los modelos, las secciones anteriores abordan la caracterización del índice considerando únicamente circuitos con condensadores, bobinas y resistencias (y, en su caso, memristores). Sin embargo, los resultados pueden ampliarse de manera muy sencilla para su aplicación a circuitos en los que también existan fuentes independientes siempre que tales circuitos estén bien planteados, es decir, bajo la hipótesis de que no existan lazos de fuentes de tensión ni cutsets de fuentes de corriente.

Por completitud, indicamos brevemente a continuación las modificaciones que permiten extender los resultados anteriores a circuitos con fuentes. En la priorización de elementos circuitales realizada en la definición de los árboles normales, las fuentes de tensión pasan a ser los dispositivos de mayor prioridad y, dualmente, las fuentes de corriente los de menor prioridad y, consecuentemente:

- los árboles normales incluyen todas las fuentes de tensión y ninguna de corriente;
- en la definición de los menores capacitivos, (mem)resistivos e inductivos, además de hacer las operaciones especificadas en las secciones anteriores, es necesario contraer las ramas asociadas a las fuentes de tensión y eliminar las ramas asociadas a las fuentes de corriente;
- finalmente, en la condición acíclica de (mem)resistencias, las resistencias controladas por tensión (y, en su caso, los memristores controlados por flujo) deben formar un lazo con condensadores y/o fuentes de tensión. Asimismo, las resistencias controladas por corriente (y los memristores controlados por carga) deben formar un cutset con bobinas y/o fuentes de corriente.

Con estas modificaciones, el conjunto de resultados y demostraciones anteriores son de aplicación también para circuitos con fuentes independientes.

## 5.6. Casos de estudio

### 5.6.1. Índice de un circuito con memristores

Presentaremos en primer lugar un sencillo ejemplo con el fin de ilustrar los resultados obtenidos previamente sobre la caracterización del índice en modelos híbridos. El ejemplo está basado en el circuito representado en la Figura 5.1.

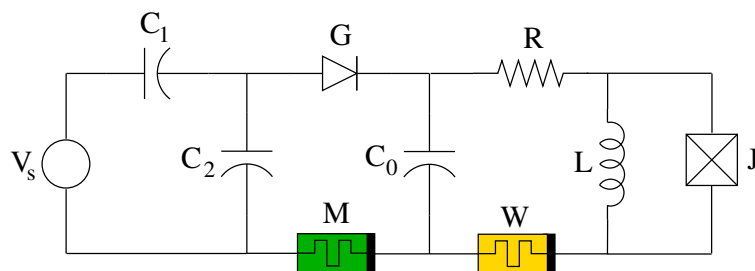


Figura 5.1: Circuito memristivo

Este circuito incluye una fuente de tensión  $V_s$ , tres condensadores lineales (con capacidades  $C_0, C_1, C_2$ ), una bobina lineal con inductancia  $L$ , una resistencia lineal controlada por corriente con resistencia  $R$ , y cuatro elementos no lineales: un diodo (que será modelado como una resistencia no lineal controlada por tensión mediante la ecuación característica  $i_g = h(v_g)$ , con conductancia incremental  $G = h'$ ), un memristor controlado por carga con memristencia  $M$ ,

un memristor controlado por flujo con memductancia  $W$  y, por último, una unión de Josephson (etiquetada como  $J$ ). Este último elemento (cf. [25]) puede entenderse como una bobina no lineal gobernada por una relación entre corriente y flujo de la forma

$$i_j = I_0 \sin(k_0 \varphi_J),$$

donde  $I_0$  y  $k_0$  son constantes. Denotaremos como  $L_J$  a su inductancia incremental, que puede ser negativa en ciertas regiones de trabajo. De igual manera la conductancia incremental  $G$  puede ser negativa en presencia, por ejemplo, de un efecto túnel.

Formularemos las ecuaciones del modelo híbrido en términos del árbol normal representado en la Figura 5.2. Nótese que se hubiera podido elegir igualmente el árbol normal que resulta de reemplazar el condensador  $C_1$  por  $C_2$ , obteniéndose los mismos resultados.

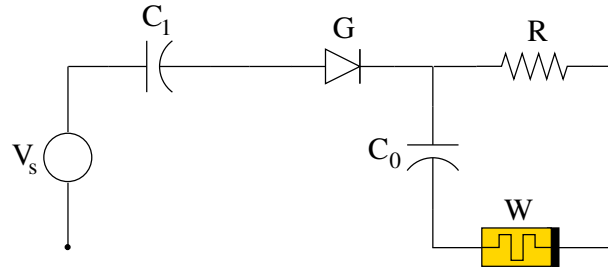


Figura 5.2: Árbol normal

Con esta elección, y representando  $v_0$  y  $v_1$  las tensiones en  $C_0$  y  $C_1$ , respectivamente, las ecuaciones híbridas son

$$C_0 v_0' = -i_m - i_l - i_J \quad (5.9a)$$

$$(C_1 + C_2)v_1' = C_2 v_s'(t) - i_m \quad (5.9b)$$

$$L i_l' = v_0 + v_w - R(i_l + i_J) \quad (5.9c)$$

$$L_J(i_J) i_J' = v_0 + v_w - R(i_l + i_J) \quad (5.9d)$$

$$\varphi_w' = v_w \quad (5.9e)$$

$$q_m' = i_m \quad (5.9f)$$

$$0 = h(v_g) + i_m \quad (5.9g)$$

$$0 = i_l + i_J + W(\varphi_w)v_w \quad (5.9h)$$

$$0 = M(q_m)i_m + v_s(t) - v_0 - v_1 - v_g. \quad (5.9i)$$

Este sistema está formulado en términos de las tensiones de los condensadores del árbol  $v_0$  y  $v_1$ , las corrientes de las bobinas de coárbol  $i_l$  e  $i_J$ , el flujo y la carga de los memristores controlados por flujo ( $\varphi_w$ ) y por carga ( $q_m$ ), respectivamente, la tensión de la resistencia controlada por tensión ( $v_g$ ) y de los memristores controlados por flujo ( $v_w$ ) del árbol y, finalmente, las corrientes de las resistencias controladas por corriente ( $i_r$ ) y de los memristores controlados por carga ( $i_m$ ) de los coárboles.

En virtud de las ecuaciones (5.9), es fácil comprobar que la matriz asociada a las variables

diferenciales (cf. (5.9a)-(5.9f)) es no singular si y solo si

$$C_0 \neq 0 \neq C_1 + C_2, L \neq 0 \neq L_J, \quad (5.10)$$

y que la condición de índice uno de (5.9g)-(5.9i) es

$$W(GM + 1) \neq 0. \quad (5.11)$$

Nuestro objetivo es mostrar que es posible obtener estos mismos resultados en términos puramente grafo-teóricos, examinando la condición acíclica de memresistencias y la estructura de los árboles de los menores capacitivo, inductivo y memresistivo. Se puede comprobar que la condición acíclica de resistencias no se cumple (y, por lo tanto, el modelo híbrido no tiene índice cero), ya que solo  $R$  satisface las condiciones de este requerimiento debido al cutset que define junto con  $L$  y  $J$ .

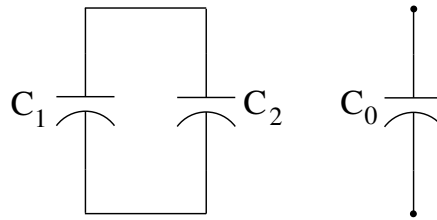


Figura 5.3: Menor capacitivo

El menor capacitivo del circuito se representa en la Figura 5.3. De esta figura resulta obvio que el menor tiene dos bosques, uno definido por  $C_0, C_1$  y el otro por  $C_0, C_2$ . La suma de productos asociados a estos bosques es  $C_0C_1 + C_0C_2 = C_0(C_1 + C_2)$ , lo que nos lleva a la primera condición  $C_0 \neq 0 \neq C_1 + C_2$  en (5.10).

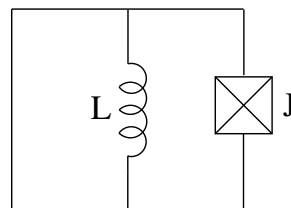


Figura 5.4: Menor inductivo

La Figura 5.4 representa el menor inductivo del circuito analizado. Como se puede observar existe un único bosque y, en consecuencia, un único cobosque que contiene a la unión de Josephson. El producto inductivo es  $LL_J$  y ello implica que ninguna de las dos inductancias de dicho producto puede ser nula.

Finalmente, en la Figura 5.5 se presenta el menor memresistivo. Este menor tiene dos bosques, definidos por  $G, R, W$  y por  $M, R, W$ , respectivamente. Si tenemos en cuenta la definición de producto memresistivo, observaremos que para el primer bosque este equivale a

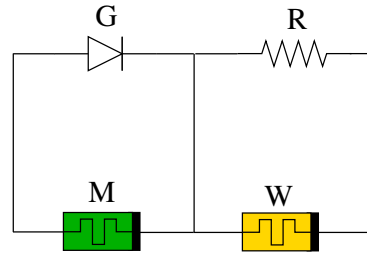


Figura 5.5: Menor memresistivo

$GWM$ , mientras que para el segundo se reduce a la memductancia  $W$ . Esto nos lleva a la última condición de índice uno,  $W(GM + 1) \neq 0$ , en (5.11).

Con efectos ilustrativos, se ha escogido un ejemplo en el que tanto la obtención del modelo (5.9) como el cálculo explícito del índice son fáciles de llevar a cabo. No obstante, esto no siempre ocurre así; en particular, en circuitos de alta escala de integración tanto la derivación del modelo como el cómputo del índice pueden ser muy costosos en la práctica. Por el contrario, el análisis del índice en términos de las propiedades del grafo subyacente al circuito es fácilmente automatizable, sin necesidad de hacer un cálculo explícito del modelo, lo que puede resultar muy beneficioso en aplicaciones reales. Por todo ello, los resultados obtenidos tanto en este capítulo como en el anterior son prometedores desde la perspectiva de la simulación de la dinámica de circuitos no lineales, contemplándose como una línea futura de trabajo la implementación de este tipo de técnicas en simuladores circuitales.

### 5.6.2. Transistores y fuentes controladas

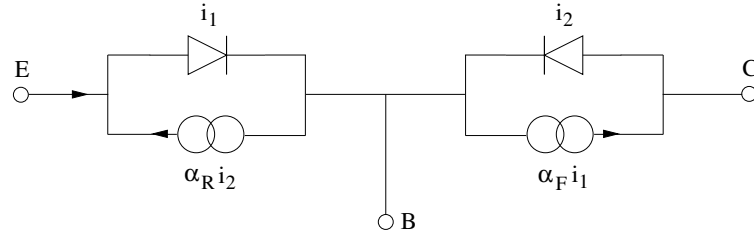
Los resultados de secciones anteriores se basan en la hipótesis de que los elementos del circuito no presentan ningún tipo de acoplo. En presencia de fenómenos de acoplo o de fuentes controladas, el análisis resulta ser más complicado. En el contexto de los modelos nodales, en [116] se presentan algunos resultados basados en los denominados *árboles equilibrados* para circuitos sin topologías degeneradas y que incluyan fuentes controladas. El ejemplo que se presenta a continuación, que incluye un transistor de unión bipolar, pretende apuntar cómo se podrían extender los resultados de [116] al contexto de los modelos híbridos.

La Figura 5.6 muestra el modelo de Ebers-Moll de un transistor *pnp*. Las uniones base-emisor y base-colector se modelan mediante la conexión paralela de un diodo de Shockley y una fuente de corriente controlada por corriente.

Denotemos como  $i_1$  e  $i_2$  las corrientes en los diodos base-emisor y base-colector; por su parte  $i_{EB}$ ,  $v_{EB}$  (resp.  $i_{CB}$ ,  $v_{CB}$ ) serán la corriente total y la caída de tensión en la rama emisor-base (resp. colector-base). Con esta notación, se tiene

$$\begin{aligned} i_1 &= g_1(v_{EB}) = I_{ES}(e^{v_{EB}/v_T} - 1) \\ i_2 &= g_2(v_{CB}) = I_{CS}(e^{v_{CB}/v_T} - 1), \end{aligned}$$



Figura 5.6: Modelo de Ebers-Moll de un transistor *pnp*

siendo las ecuaciones de Ebers-Moll

$$\begin{aligned} i_{EB} &= I_{ES}(e^{v_{EB}/v_T} - 1) - \alpha_R I_{CS}(e^{v_{CB}/v_T} - 1) \\ i_{CB} &= -\alpha_F I_{ES}(e^{v_{EB}/v_T} - 1) + I_{CS}(e^{v_{CB}/v_T} - 1). \end{aligned}$$

Aquí  $I_{ES}$  e  $I_{CS}$  son las corrientes inversas de saturación en los diodos emisor y colector, respectivamente;  $\alpha_F$  y  $\alpha_R$  son las ratios de transferencia de corriente directa e inversa, mientras que  $v_T$  es el voltaje térmico. Obsérvese la reciprocidad implícita en la relación  $\alpha_F I_{ES} = \alpha_R I_{CS}$ .

Cabe destacar el hecho de que las fuentes de corriente pueden modelarse también como fuentes no lineales de corriente controladas por tensión, estando las fuentes base-emisor y base-colector controladas por los voltajes base-colector y base-emisor, respectivamente. Este punto de vista será útil más adelante pues permite hacer una descripción del modelo en términos de resistencias acopladas, a saber, mediante sendas ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} i_{EB} &= g_1(v_{EB}) - g_3(v_{CB}) \\ i_{CB} &= -g_4(v_{EB}) + g_2(v_{CB}), \end{aligned}$$

con  $g_3(v_{CB}) = \alpha_R g_2(v_{CB})$  y  $g_4(v_{EB}) = \alpha_F g_1(v_{EB})$ . Las conductancias incrementales  $G_1 = g'_1(v_{EB})$ ,  $G_2 = g'_2(v_{CB})$ ,  $G_3 = g'_3(v_{CB})$  y  $G_4 = g'_4(v_{EB})$  verifican  $G_4 = \alpha_F G_1$ ,  $G_3 = \alpha_R G_2$ .

Consideremos ahora el amplificador de emisor común mostrado en la Figura 5.7. Esencialmente, el transistor *pnp* actúa como un amplificador para un voltaje de entrada  $v_i$ ; el circuito muestra también una resistencia parásita de entrada  $R_i$ , un condensador  $C$ , una resistencia  $R_b$ , una carga  $R_L$  (modelada también como una resistencia) y una fuente de tensión continua  $V_{cc}$ . Empleando el modelo de Ebers-Moll para el transistor se obtiene el circuito equivalente mostrado en la Figura 5.8.

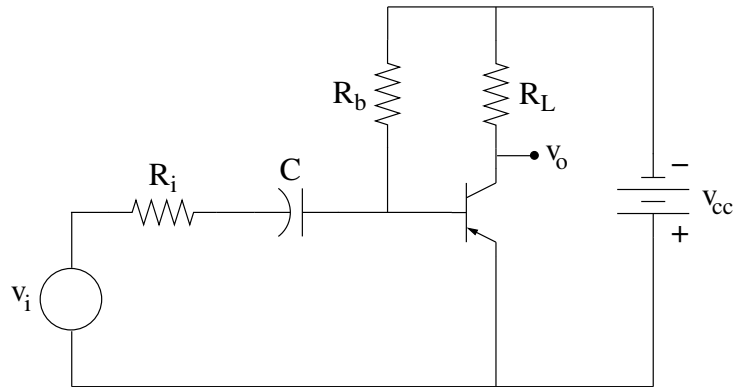


Figura 5.7: Amplificador en emisor común

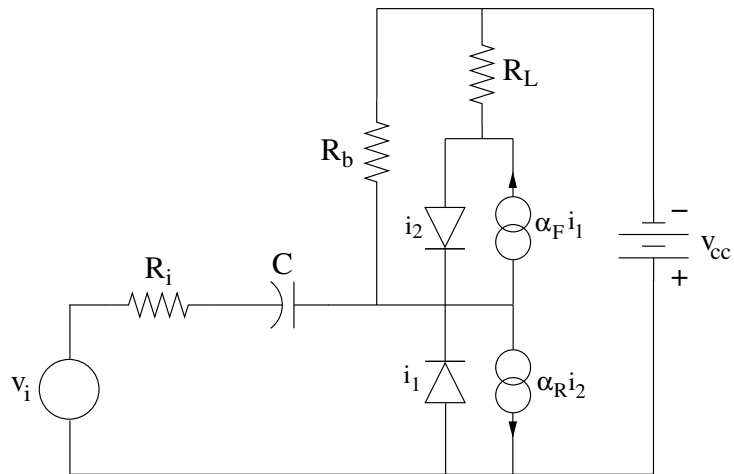


Figura 5.8: Circuito equivalente

Omitiendo detalles de cálculo, las ecuaciones híbridas para este circuito resultan ser

$$v'_c = i_{R_i} \quad (5.12a)$$

$$0 = g_1(v_{EB}) - g_3(v_{CB}) - i_{R_L} - i_{R_b} + i_{R_i} \quad (5.12b)$$

$$0 = g_2(v_{CB}) - g_4(v_{EB}) + i_{R_L} \quad (5.12c)$$

$$0 = v_i(t) - v_c - R_i i_{R_i} + v_{EB} \quad (5.12d)$$

$$0 = -v_{cc} + R_b i_{R_b} + v_{EB} \quad (5.12e)$$

$$0 = -v_{cc} + R_L i_{R_L} + v_{EB} - v_{CB}. \quad (5.12f)$$

El modelo queda descrito en términos de la tensión  $v_c$  en el condensador, las corrientes  $i_{R_i}$ ,  $i_{R_b}$  e  $i_{R_L}$  en las resistencias y las tensiones base-emisor y base-colector  $v_{EB}$ ,  $v_{CB}$ . La condición de índice uno para el modelo (5.12), basada en la regularidad de la matriz de derivadas parciales

de (5.12b)-(5.12f) con respecto a las variables algebraicas  $v_{EB}$ ,  $v_{CB}$ ,  $i_{R_i}$ ,  $i_{R_b}$  y  $i_{R_L}$ , es

$$R_i + R_b + G_2 R_b R_L + G_2 R_i R_L + (G_1 + G_2 - G_3 - G_4) R_i R_b + (G_1 G_2 - G_3 G_4) R_i R_b R_L \neq 0. \quad (5.13)$$

Se obtiene de nuevo una suma de de productos de conductancias de árbol y resistencias de enlace. Los diferentes términos que aparecen en la expresión anterior corresponden a una serie de árboles de expansión del menor resistivo mostrado en la Figura 5.9, donde cada dispositivo queda representado por su conductancia o su resistencia incremental. Nótese que en las fuentes controladas, cada una de las conductancias  $G_3$  y  $G_4$  depende de la caída de tensión en la otra unión. Específicamente, los términos que aparecen en (5.13) se corresponden con los productos de conductancias de árbol y resistencias de enlace en los árboles de expansión definidos por los pares  $R_b-R_L$ ,  $R_i-R_L$ ,  $G_2-R_i$ ,  $G_2-R_b$ ,  $G_1-R_L$ ,  $G_2-R_L$ ,  $G_3-R_L$ ,  $G_4-R_L$ ,  $G_1-G_2$  y  $G_3-G_4$  mostrados en la Figura 5.10.

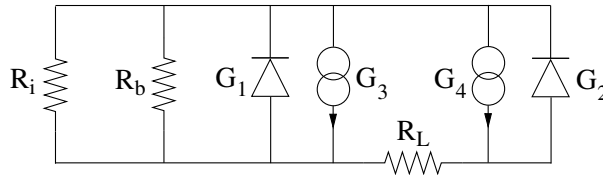


Figura 5.9: Menor resistivo

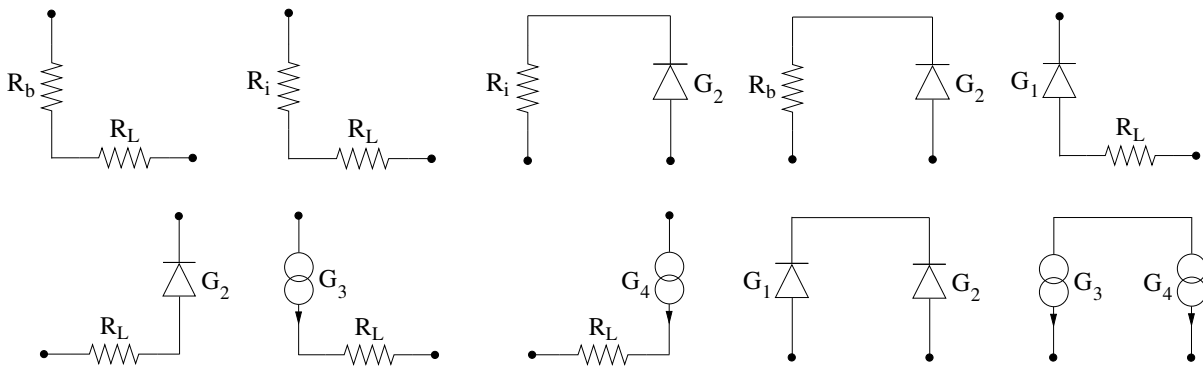


Figura 5.10: Árboles equilibrados

Estos árboles de expansión resultan ser exactamente los árboles *equilibrados*, en la terminología de [116]. Un árbol equilibrado es un árbol de expansión definido por las dos condiciones siguientes:

- el árbol no contiene simultáneamente una fuente controlada y la rama que alberga el dispositivo que la controla; y
- el reemplazo de todas las fuentes controladas por sus ramas controladoras genera otro árbol de expansión.

El primer requisito excluya a los pares  $G_1-G_4$  y  $G_2-G_3$  del conjunto de árboles equilibrados; por su parte, el segundo excluye a los pares  $G_4-R_i$  y  $G_4-R_b$  (obsérvese que ninguno de los pares  $G_1-R_i$ ,  $G_1-R_b$  define un árbol); véase a este respecto la Figura 5.11. Se puede comprobar que la *signatura* de los árboles  $G_3-R_L$ ,  $G_4-R_L$  y  $G_3-G_4$ , en los términos que se definen en [116], es  $-1$ , lo que explica el signo negativo que precede a los términos  $G_3R_iR_b$ ,  $G_4R_iR_b$  y  $G_3G_4R_iR_bR_L$  en (5.13).

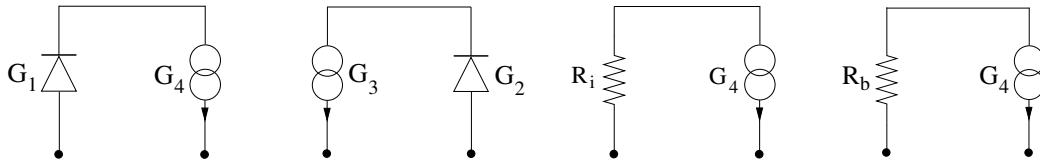


Figura 5.11: Árboles de expansión no equilibrados

Este ejemplo muestra que los resultados de [116] posiblemente puedan extenderse con carácter general al contexto de los modelos híbridos de circuitos con fuentes controladas, de hecho en un escenario más amplio que el de [116] en la medida en que nuestra aproximación da también acomodo a topologías degeneradas y a resistencias tanto controladas por tensión como por corriente. Igualmente, los resultados de nuestra investigación sugieren que de forma natural podrían también incluirse dispositivos memristivos en este análisis. Estos aspectos definen líneas de investigación para el futuro.

## **Parte III**

### **Aspectos cualitativos**



# Capítulo 6

## Bifurcaciones silla-nodo en circuitos no lineales

### 6.1. Introducción

La teoría de bifurcaciones tiene gran relevancia en el estudio del comportamiento cualitativo de los sistemas dinámicos. En un sistema de ecuaciones diferenciales con parámetros, la bifurcación de un punto de equilibrio describe un cambio en el comportamiento local cuando el parámetro traspasa un determinado valor. En teoría de circuitos no lineales se corresponde con cambios en la dinámica local en torno a un punto de trabajo y su caracterización resulta importante ya que puede determinar cambios drásticos en el comportamiento del sistema, incluyendo la pérdida de su estabilidad; esto es particularmente relevante, por ejemplo, en circuitos (distribuidos) que modelen sistemas de potencia. A modo de referencia y como introducción a la teoría cualitativa de circuitos no lineales, pueden tomarse los textos [20, 25, 38, 62, 111].

Una de las principales bifurcaciones de puntos de equilibrio es la conocida como *bifurcación silla-nodo*, en la que un punto de equilibrio caracterizado por un autovalor cero simple se divide en dos puntos de equilibrio diferentes cuando se varía el parámetro en un determinado sentido. Estos dos puntos de equilibrio se caracterizan por ser hiperbólicos; como se detalla en el Capítulo 2, esto significa que todos los autovalores de la matriz jacobiana en el punto de equilibrio están fuera del eje imaginario. Además, se cumple que exactamente un autovalor (real) cambia de signo al atravesarse el punto de bifurcación a lo largo de la curva de equilibrio. En el caso particular de un sistema bidimensional, estos dos puntos de equilibrio se corresponden necesariamente con un punto de silla (punto de equilibrio con los dos autovalores reales y de distinto signo) y un nodo (dos autovalores reales del mismo signo y diferentes, cf. Capítulo 2). La caracterización esencial de la bifurcación silla-nodo se debe a Sotomayor; cf. [127, 128]. Se remite al lector a los textos ya clásicos [21, 53, 97] como referencias generales donde puede obtenerse una introducción detallada a la teoría de bifurcaciones y, en particular, al fenómeno de bifurcación silla-nodo.

En este contexto, el objetivo de nuestra investigación es caracterizar la existencia de bifurcaciones silla-nodo en sistemas de ecuaciones algebraico-diferenciales que modelen circuitos no lineales, tanto en configuraciones clásicas como en presencia de memristores. Esto extiende

de manera natural diversos resultados de carácter cualitativo obtenidos en los últimos años en relación a la estabilidad de circuitos no lineales en contextos sin parámetros [119, 120, 122], abordándose aquí, de forma novedosa, el estudio sistemático de fenómenos de bifurcación. Como se detalla posteriormente, el elemento clave de nuestra investigación en este campo se encuentra en el hecho de que, para circuitos sin restricciones en las variables de control de los elementos resistivos, las matrices que aparecen en la linealización del problema adoptan esencialmente la forma de las matrices mixtas estudiadas en anteriores capítulos, lo que posibilita la aplicación de técnicas similares a las anteriores también para el estudio de fenómenos de bifurcación. Cabe destacar, sin embargo, que estas propiedades cualitativas involucrarán también aspectos y resultados analíticos diferentes a los empleados en los capítulos precedentes.

Con tal fin, en la sección 6.2 comenzamos introduciendo la caracterización de la bifurcación silla-nodo para ecuaciones diferenciales ordinarias explícitas desarrollada por Sotomayor en [127, 128]. Se reformularán algunas condiciones de naturaleza algebraica con el fin de facilitar posteriores análisis. De acuerdo con la estrategia indicada al final del Capítulo 2, en la sección 6.3 se extiende la caracterización de la bifurcación silla-nodo al ámbito de las ecuaciones algebraico-diferenciales semiexplícitas de índice uno, para permitir su posterior aplicación al contexto de los circuitos no lineales, tarea que se aborda para circuitos clásicos en la sección 6.4. Posteriormente, en la sección 6.5 se analiza el efecto de la presencia de un memristor en la descripción del fenómeno de bifurcación silla-nodo. El capítulo finaliza con la presentación de un caso práctico (sección 6.6).

Los resultados aquí detallados han dado lugar al artículo [45] y a la comunicación [46], presentada en forma de póster.

## 6.2. Bifurcación silla-nodo en ecuaciones diferenciales ordinarias explícitas

La caracterización general de la bifurcación silla-nodo fue obtenida por J. Sotomayor en 1973, y se recoge en los artículos [127, 128]. En estos trabajos se considera una ecuación diferencial ordinaria con parámetros de la forma

$$x' = f(x, \mu), \quad (6.1)$$

con  $x \in \mathbb{R}^r$  y  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^r)$ . No obstante, los requisitos de diferenciabilidad de  $f$  pueden rebajarse y, análogamente, el análisis puede restringirse a un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^r$ .

En los artículos citados anteriormente se demuestra que el sistema (6.1) presenta una bifurcación silla-nodo si existe un punto de equilibrio  $(x^*, \mu^*)$  que cumpla las siguientes condiciones:

1. La matriz  $f_x(x^*, \mu^*)$  posee al cero como autovalor simple (es decir, con multiplicidad algebraica uno), y el resto de autovalores se encuentran fuera del eje imaginario.
2. Si  $f_x^T(x^*, \mu^*)w = 0$ , entonces  $w^T f_\mu(x^*, \mu^*) \neq 0$ .
3. Si  $f_x(x^*, \mu^*)v = 0$ , entonces  $w^T f_{xx}(x^*, \mu^*)(v, v) \neq 0$ .



Si se cumplen las condiciones 1-3 podemos afirmar que una curva diferenciable de puntos de equilibrio pasa por  $(x^*, \mu^*)$  de tal manera que para  $\mu < \mu^*$  (o  $\mu > \mu^*$ ) el sistema (6.1) no posee puntos de equilibrio, mientras que para  $\mu > \mu^*$  (o  $\mu < \mu^*$ ) existen dos puntos de equilibrio. Además (siempre localmente) se cumple que ambos puntos son hiperbólicos, es decir, que todos los autovalores tienen parte real distinta de cero; además, el número de autovalores con parte real positiva (o negativa) difiere en uno entre los dos puntos de equilibrio asociados a un valor fijo del parámetro. Esto quiere decir que un autovalor cruza el origen y cambia de signo en  $(x^*, \mu^*)$  al desplazar el punto de trabajo a lo largo de la curva de equilibrio.

La condición 1 implica que  $\text{rk } f_x(x^*, \mu^*) = r - 1$ , y esto nos permite reformular las condiciones 2 y 3 en otros términos que facilitarán posteriores análisis.

**Condición 2.** Esta condición expresa que  $w^T f_\mu(x^*, \mu^*) \neq 0$ , donde  $w$  es un autovector asociado al autovalor cero de la matriz  $f_x^T(x^*, \mu^*)$ . Dado que  $w^T f_x(x^*, \mu^*) = 0$  si y solo si  $w$  es ortogonal a  $\text{im } f_x(x^*, \mu^*)$ , la condición 2 anterior puede expresarse equivalentemente como

$$f_\mu(x^*, \mu^*) \notin \text{im } f_x(x^*, \mu^*), \quad (6.2)$$

o también como

$$\text{rk } f'(x^*, \mu^*) = r, \quad (6.3)$$

donde  $f'$  representa la matriz completa de derivadas parciales de  $f$ , es decir,  $f' = (f_x \ f_\mu)$ . De (6.3) se puede concluir que la ecuación  $f(x, \mu) = 0$  describe localmente una curva de equilibrio en torno a  $(x^*, \mu^*)$ ; se puede comprobar además que esta curva es tangente al hiperplano  $\mu = \mu^*$  en el punto de equilibrio  $(x^*, \mu^*)$ .

**Condición 3.** Siguiendo el mismo razonamiento que en el punto anterior, la ecuación

$$w^T f_{xx}(x^*, \mu^*)(v, v) \neq 0$$

se puede expresar como  $f_{xx}(x^*, \mu^*)(v, v) \notin \text{im } f_x(x^*, \mu^*)$ . A su vez, esta condición puede reformularse como

$$(\det f_x)_x(x^*, \mu^*)v \neq 0, \quad (6.4)$$

para cualquier  $v \in \ker f_x(x^*, \mu^*) - \{0\}$ . Esto es consecuencia del hecho siguiente: dada una función  $A(x)$  de clase  $C^1$  que toma valores en el conjunto de matrices cuadradas de orden  $r$ , diferenciando la identidad

$$(\det A(x)) I_r = \text{Adj} A(x) A(x), \quad (6.5)$$

donde  $\text{Adj} A$  es la matriz de cofactores de  $A^T$ , se obtiene

$$((\det A(x))'u)v = ((\text{Adj} A(x))'u)A(x)v + \text{Adj} A(x)A'(x)uv. \quad (6.6)$$

Tomando en particular  $u = v \in \ker A(x)$ , la identidad anterior se transforma en

$$((\det A(x))'v)v = \text{Adj} A(x)A'(x)vv. \quad (6.7)$$

Supongamos ahora que  $\text{rk} A(x) = r - 1$ . En este caso se verifica  $\text{rk} \text{Adj} A(x) = 1$  y además  $w \in \text{im} A(x)$  si y solo si  $\text{Adj} A(x) w = 0$ . Esto permite reformular (6.7) como

$$(\det A(x))'v \neq 0 \Leftrightarrow A'(x)vv \notin \text{im} A(x) \quad (6.8)$$

para cualquier  $v \in \ker A(x) - \{0\}$ . En particular, si  $f \in C^2(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^r)$  verifica  $\text{rk} f'(x) = r - 1$ , la aplicación de la identidad (6.8) a  $A(x) = f'(x)$  demuestra que

$$(\det f'(x))'v \neq 0 \Leftrightarrow f''(x)(v, v) \notin \text{im} f(x), \quad (6.9)$$

donde  $v$  es un vector que pertenece a  $\ker f'(x) - \{0\}$ . Geométricamente, esta condición expresa la transversalidad del núcleo  $\ker f'(x)$  y el denominado *conjunto singular* de  $f$ , es decir, el conjunto de puntos en los que la matriz jacobiana  $f'(x)$  es singular. Esta propiedad define al punto  $x$  como un *punto de pliegue (fold)* en la teoría de singularidades de aplicaciones diferenciables [51, 84].

En el caso paramétrico se obtiene (6.4) automáticamente. También se usará posteriormente el hecho de que, a partir de (6.4), la condición 3 puede expresarse alternativamente como

$$\text{rk} \begin{pmatrix} f_x(x^*, \mu^*) \\ (\det f_x)_x(x^*, \mu^*) \end{pmatrix} = r. \quad (6.10)$$

### 6.3. Formulación algebraico-diferencial

De acuerdo con lo expuesto en la sección 2.4.2, la única estrategia factible para la caracterización de fenómenos cualitativos en sistemas algebraico-diferenciales que no admiten (al menos de forma general) una reducción a forma ordinaria explícita consiste en la traslación de los resultados analíticos correspondientes al propio contexto algebraico-diferencial. En esta dirección, en la presente sección estudiaremos las condiciones que garantizan la existencia de una bifurcación silla-nodo para ecuaciones algebraico-diferenciales semiexplícitas, es decir, para sistemas de la forma

$$x' = h(x, y, \mu) \quad (6.11a)$$

$$0 = g(x, y, \mu), \quad (6.11b)$$

con vistas a facilitar el estudio posterior de este fenómeno de bifurcación en modelos circuitales. En el sistema de ecuaciones (6.11) asumiremos que  $h \in C^\infty(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^r)$  y que  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^p)$ .

Asumiremos a priori la existencia de un punto de equilibrio  $(x^*, y^*, \mu^*)$  de (6.11), es decir, un punto en el que se verifica  $h(x^*, y^*, \mu^*) = 0$  y  $g(x^*, y^*, \mu^*) = 0$ . Igualmente, trabajaremos bajo la hipótesis de que el sistema tiene índice uno alrededor del punto de equilibrio. Esto se traduce, como se describió en la sección 2.3.2, en que la matriz de derivadas parciales  $g_y(x^*, y^*, \mu^*)$  es no singular. Haciendo uso del teorema de la función implícita podemos afirmar que la variedad  $g(x, y, \mu) = 0$  queda descrita en torno a  $(x^*, y^*, \mu^*)$  por una relación de la forma

$$y = \psi(x, \mu), \quad (6.12)$$

para cierta función  $\psi(x, \mu)$  definida localmente. La dinámica local de la ecuación algebraico-diferencial (6.11) queda a su vez descrita mediante la siguiente ecuación diferencial ordinaria explícita:

$$x' = f(x, \mu) = h(x, \psi(x, \mu), \mu). \quad (6.13)$$

Sabemos también, por el teorema de la función implícita, que  $\psi_x = -(g_y)^{-1}g_x$  y, en consecuencia, que

$$f_x = h_x - h_y(g_y)^{-1}g_x, \quad (6.14)$$

cuando el miembro de la izquierda de la igualdad se evalúa en puntos  $(x, \mu)$  pertenecientes a un entorno de  $(x^*, \mu^*)$  y el de la derecha en  $(x, \psi(x, \mu), \mu)$ .

En un entorno de  $(x^*, y^*, \mu^*)$ , los puntos de equilibrio  $(x, y, \mu)$  de la ecuación algebraico-diferencial (6.11) están en correspondencia biyectiva con los puntos de equilibrio  $(x, \mu)$  de la reducción (6.13). En consecuencia, existirá una bifurcación silla-nodo para la ecuación algebraico-diferencial en  $(x^*, y^*, \mu^*)$  si y solo si existe tal bifurcación en  $(x^*, \mu^*)$  en el sistema reducido (6.13). Obsérvese que la reducción anterior se empleará como un recurso teórico para la demostración de resultados posteriores (y, particularmente, en la demostración del Teorema 6.1), no siendo necesario en la práctica calcular la función local  $\psi$  o la función reducida  $f$  (cf. (6.13)) asociadas a problemas concretos. En este sentido, es importante resaltar que los resultados se formularán en términos de las funciones  $h$  y  $g$  que aparecen en la descripción original del problema (esto es, la ecuación (6.11)).

En concreto, la expresión de las condiciones que caracterizan la bifurcación silla-nodo en el ámbito de las ecuaciones semiexplícitas de índice uno requiere la reformulación de las condiciones 1-3 de la sección 6.2 en términos de las funciones  $h$  y  $g$  presentes en (6.11), como se lleva a cabo a continuación en el Teorema 6.1. Nótese que, consistentemente con la naturaleza algebraico-diferencial del problema, la condición 1 establecida en la sección 6.2 se expresará ahora en términos del haz de matrices (cf. sección 2.3.1)  $\lambda A - B^*$ , con

$$A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} h_x & h_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}, \quad B^* = B(x^*, y^*, \mu^*), \quad (6.15)$$

donde el bloque identidad en la primera matriz tiene orden  $r$  e  $y^* = \psi(x^*, \mu^*)$ .

**Teorema 6.1.** *Asúmase que la ecuación algebraico-diferencial (6.11) posee un punto de equilibrio  $(x^*, y^*, \mu^*)$  en el que la matriz de derivadas parciales  $g_y(x^*, y^*, \mu^*)$  es regular, y que se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *El haz de matrices  $\lambda A - B^*$ , con  $A, B^*$  definidos en (6.15), tiene un autovalor cero simple, y el resto de autovalores se encuentra fuera del eje imaginario.*

2. *La matriz*

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} h_x & h_y & h_\mu \\ g_x & g_y & g_\mu \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

*tiene rango máximo  $r + p$  en  $(x^*, y^*, \mu^*)$ .*

3. La matriz

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} h_x & h_y \\ g_x & g_y \\ (\det B)_x & (\det B)_y \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

tiene rango máximo  $r + p$  en  $(x^*, y^*, \mu^*)$ .

Entonces el sistema (6.11) presenta una bifurcación silla-nodo en  $(x^*, y^*, \mu^*)$ ; esto es, existe una curva diferenciable de puntos de equilibrio que pasa por  $(x^*, y^*, \mu^*)$ , cumpliéndose localmente que para  $\mu < \mu^*$  (o bien para  $\mu > \mu^*$ ), el sistema no presenta puntos de equilibrio y para  $\mu > \mu^*$  (o bien para  $\mu < \mu^*$ ) tiene dos puntos de equilibrio hiperbólicos. El número de autovalores con parte real positiva (o negativa) difiere exactamente en uno de un punto de equilibrio al otro.

*Demostración.* Demostraremos que el hecho de que se verifiquen las condiciones 1-3 del presente enunciado conlleva que se cumplan las condiciones 1-3 recogidas en la sección 6.2 para el sistema reducido (6.13), deduciéndose por tanto el presente resultado del teorema clásico de la bifurcación silla-nodo [127, 128].

Los autovalores del haz de matrices  $\lambda A - B^*$  son los valores de  $\lambda$  que hacen que la matriz

$$\lambda \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_x & h_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I - h_x & -h_y \\ -g_x & -g_y \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

sea singular en  $(x^*, y^*, \mu^*)$ . Por hipótesis, la matriz de derivadas parciales  $g_y$  es regular en  $(x^*, y^*, \mu^*)$ , por lo que podemos evaluar la singularidad de la matriz presente en la expresión de la derecha en (6.18) tomando el complemento de Schur de su submatriz  $g_y$ , que se corresponde con

$$\lambda I - h_x + h_y(g_y)^{-1}g_x = \lambda I - (h_x - h_y(g_y)^{-1}g_x), \quad (6.19)$$

evaluada en  $(x^*, y^*, \mu^*)$ . A la vista de (6.14), los valores de  $\lambda$  que hacen que la matriz (6.19) sea singular en  $(x^*, y^*, \mu^*)$  son los propios autovalores de  $f_x(x^*, \mu^*)$ . Esto significa que las hipótesis de que el autovalor nulo sea simple y que los restantes autovalores estén fuera del eje imaginario se transfieren a (6.13), de tal manera que la condición 1 de la sección 6.2 efectivamente se verifica para la ecuación diferencial ordinaria reducida (6.13).

Análogamente, el hecho de que se satisfaga la condición 2 del presente enunciado conlleva que se verifique también la condición 2 de la sección 6.2 para el sistema reducido (6.13). Esto es consecuencia del hecho de que el complemento de Schur de  $g_y(x^*, y^*, \mu^*)$  en  $\hat{B}$  es

$$(h_x - h_y(g_y)^{-1}g_x \quad h_\mu - h_y(g_y)^{-1}g_\mu), \quad (6.20)$$

evaluado en  $(x^*, y^*, \mu^*)$ . A partir del teorema de la función implícita puede comprobarse que la matriz (6.20) es la derivada  $(f_x \ f_\mu)$  en  $(x^*, \mu^*)$ , y por lo tanto la condición de rango máximo que aparece en (6.16) hace que se verifique (6.3) para la ecuación reducida (6.13). A su vez, esta condición de rango máximo es equivalente a la condición 2 de la sección 6.2 tal y como se justificó allí.

Por último, si tomamos el complemento de Schur de  $g_y(x^*, y^*, \mu^*)$  en  $\tilde{B}$  obtenemos

$$\begin{pmatrix} h_x - h_y(g_y)^{-1}g_x \\ (\det B)_x - (\det B)_y(g_y)^{-1}g_x \end{pmatrix}, \quad (6.21)$$

evaluado en  $(x^*, y^*, \mu^*)$ . La condición de rango máximo en (6.17) se transfiere por tanto a (6.21). Haciendo uso de la fórmula del determinante recogida en el Lema 2.10, esto es,

$$\det M = \det D \det(A - BD^{-1}C),$$

obtenemos, para la matriz  $B$  de (6.15),

$$\det B = \det g_y \det(h_x - h_y(g_y)^{-1}g_x)$$

para  $(x, y, \mu)$  en un entorno de  $(x^*, y^*, \mu^*)$ . En particular, empleando la descripción  $y = \psi(x, \mu)$  se obtiene

$$\det B(x, \psi(x, \mu), \mu) = \det g_y(x, \psi(x, \mu), \mu) \det f_x(x, \mu) \quad (6.22)$$

en la variedad  $g = 0$ .

Derivando ahora el producto (6.22) respecto de  $x$  y teniendo en cuenta que  $f_x$  es una matriz singular en  $(x^*, \mu^*)$  (y que, por lo tanto,  $\det f_x(x^*, \mu^*) = 0$ ) ya que tiene un autovalor nulo, se obtiene la expresión

$$((\det B)_x - (\det B)_y(g_y)^{-1}g_x)(x^*, y^*, \mu^*) = \det g_y(x^*, y^*, \mu^*) (\det f_x)_x(x^*, \mu^*), \quad (6.23)$$

con  $\det g_y(x^*, y^*, \mu^*) \neq 0$  por hipótesis.

De todo ello se deduce que la matriz (6.21) tiene la siguiente estructura:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \det g_y(x^*, y^*, \mu^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x(x^*, \mu^*) \\ (\det f_x)_x(x^*, \mu^*) \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

y, en consecuencia, la condición de rango máximo sobre la matriz (6.21) se transfiere al segundo factor de (6.24). Nótese que esta es exactamente la matriz que aparece en el miembro de la izquierda de (6.10). A su vez, (6.10) es una reformulación (equivalente) de la condición 3 de la sección 6.2, por lo que la condición 3 del enunciado conlleva que, efectivamente, se satisfaga la condición 3 de la caracterización silla-nodo clásica para el sistema reducido (6.13), completándose así la demostración del Teorema 6.1.

□

## 6.4. La bifurcación silla-nodo en circuitos no lineales clásicos

Como se ha indicado en capítulos anteriores, la filosofía estructural para el estudio de las propiedades cualitativas de circuitos no lineales busca una caracterización sistemática de tales propiedades en términos de la topología del digrafo subyacente al circuito y de las propiedades

eléctricas de los dispositivos eléctricos que forman el mismo. En esta dirección, cabe destacar las referencias [23, 38, 58, 62] y, más recientemente, los trabajos [119, 120, 122]. Estos últimos artículos abordan la caracterización sistemática de la estabilidad de puntos de equilibrio en circuitos no lineales; bajo hipótesis de pasividad se demuestra que necesariamente los autovalores de la linealización en un punto de equilibrio verifican  $\text{Re } \lambda \leq 0$ , lo que centra el problema de la estabilidad asintótica en el análisis de las configuraciones que puedan conducir a autovalores ubicados en el eje imaginario puro; obsérvese que la hipótesis de pasividad permite hacer una aproximación topológica al problema, es decir, buscar una caracterización pura en términos de la topología del digrafo subyacente al circuito. Tal y como se demuestra en [58], la ausencia de lazos VL y de cutsets IC en un circuito pasivo imposibilita la existencia de autovalores nulos; la caracterización de la existencia de autovalores imaginarios puros requiere un análisis más minucioso y en este sentido se han obtenido diversos resultados que se recogen en [120, 122].

Es natural por tanto abordar el siguiente paso del análisis, asociado a la posible pérdida de estabilidad cuando se eliminan las hipótesis de pasividad en (algunos de) los dispositivos involucrados. Este problema puede plantearse, en particular, como el estudio de un fenómeno de bifurcación vinculado a la transición de un dispositivo de una zona de operación localmente pasiva a otra localmente activa. Este fenómeno ocurre a lo largo de una curva de equilibrio cuando se atraviesa un punto de bifurcación silla-nodo, y los resultados de la sección anterior posibilitan el estudio estructural de esta bifurcación en el contexto circuital.

Una vez que se han trasladado las condiciones de la sección 6.2 al ámbito de las ecuaciones algebraico-diferenciales (lo que se concreta en el Teorema 6.1 de la sección 6.3) estamos en disposición de abordar tal estudio, tarea que se realiza a continuación. Estudiaremos en particular una serie de configuraciones que garantizan la aplicabilidad del Teorema 6.1 en el ámbito circuital, tanto para circuitos clásicos como (con las modificaciones pertinentes) para circuitos memristivos. Para ello, consideraremos el escenario en cierto sentido más sencillo, definido por la hipótesis de que exista un único elemento activo en el punto de polarización del circuito. Asumiremos que tal elemento es una resistencia no lineal (a la que nos referiremos por sistema con el subíndice  $n$ ) gobernada por la ecuación característica

$$i_n = \zeta(v_n),$$

y que existe un punto de trabajo para el cual

$$\zeta'(v_n^*) = 0, \quad \zeta''(v_n^*) \neq 0.$$

Esto implica que el dispositivo es localmente activo ( $\zeta'(v_n) < 0$ ) bien para  $v_n < v_n^*$  (si  $\zeta''(v_n^*) > 0$ ) o para  $v_n > v_n^*$  (si  $\zeta''(v_n^*) < 0$ ).

Asumiremos también que el parámetro de bifurcación está dado por la corriente de una fuente continua independiente. Por lo tanto, la variación de la corriente de dicha fuente será la responsable del fenómeno de bifurcación, que se producirá cuando dicho parámetro se traduzca en una modificación crítica en la zona de trabajo de la resistencia no pasiva.

Además de la resistencia no pasiva y la fuente, el circuito podría incluir también, en general, condensadores (con  $C(v_c)$  como matriz incremental de capacidad), bobinas (siendo  $L(i_l)$  la matriz incremental de inductancia) y resistencias pasivas que asumiremos controladas por

tensión (y cuya matriz incremental de conductancia denotaremos como  $\gamma'(v_g) = G(v_g)$ ). Las ecuaciones que gobiernan un circuito de estas características, escritas en forma de ecuación semiexplícita, son las siguientes:

$$C(v_c)v'_c = i_c \quad (6.25a)$$

$$L(i_l)i'_l = v_l \quad (6.25b)$$

$$0 = B_c v_c + B_l v_l + B_g v_g + B_n v_n + B_j v_j + B_v V \quad (6.25c)$$

$$0 = Q_c i_c + Q_l i_l + Q_g \gamma(v_g) + Q_n \zeta(v_n) + Q_j \mu + Q_v i_v. \quad (6.25d)$$

Obsérvese que este modelo surge de forma natural como adaptación del modelo general de ramas (3.20) a este contexto.

Agruparemos las variables de las ramas en  $x = (v_c, i_l)$  e  $y = (i_c, v_l, v_g, v_n, v_j, i_v)$ , de tal manera que las funciones  $h$  y  $g$  definidas en el apartado anterior se corresponden con:

$$h(x, y, \mu) = \begin{pmatrix} (C(v_c))^{-1} i_c \\ (L(i_l))^{-1} v_l \end{pmatrix} \quad (6.26a)$$

$$g(x, y, \mu) = \begin{pmatrix} B_c v_c + B_l v_l + B_g v_g + B_n v_n + B_j v_j + B_v V \\ Q_c i_c + Q_l i_l + Q_g \gamma(v_g) + Q_n \zeta(v_n) + Q_j \mu + Q_v i_v \end{pmatrix}, \quad (6.26b)$$

y definiremos, por simplicidad notacional,  $F = (h, g)$ . Denotaremos el punto de equilibrio como  $(x^*, y^*, \mu^*)$ , con  $x^* = (v_c^*, i_l^*)$  y  $y^* = (i_c^*, v_l^*, v_g^*, v_n^*, v_j^*, i_v^*)$ , cumpliéndose necesariamente que  $i_c^* = 0, v_l^* = 0$ .

Antes de abordar la caracterización de la bifurcación silla-nodo, será de utilidad el siguiente resultado, de carácter auxiliar.

**Lema 6.1.** *Dividamos las ramas de un digrafo en cuatro conjuntos disjuntos  $K_1, K_2, K_3, K_4$ , y denotemos por  $B_i, Q_i$  las submatrices de las matrices de lazos y cutsets  $B$  y  $Q$  definidas por las columnas correspondientes a las ramas de  $K_i$ . Asumamos que  $P$  es definida positiva, y consideremos la matriz*

$$M = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & B_3 \\ 0 & Q_2 & Q_3 P \end{pmatrix}.$$

*En tal caso se cumple que  $\ker M = \ker B_1 \times \ker Q_2 \times \{0\}$ . En particular, el núcleo de  $M$  es trivial (esto es, está formado exclusivamente por el vector nulo) si no existen cutsets definidos por ramas de  $K_1$  ni lazos definidos por ramas de  $K_2$ .*

*Demostración.* Sea  $v = (v_1, v_2, v_3) \in \ker M$ . Entonces

$$B_1 v_1 + B_3 v_3 = 0 \quad (6.27a)$$

$$Q_2 v_2 + Q_3 P v_3 = 0, \quad (6.27b)$$

es decir,  $(v_1, 0, v_3, 0) \in \ker B$  y  $(0, v_2, P v_3, 0) \in \ker Q$ . Entonces por las propiedades de ortogonalidad de los espacios de cutsets y de lazos (Lema 2.8), tenemos que  $v_3^T P v_3 = 0$  y dado que  $P$  es una matriz definida positiva, se concluye que  $v_3 = 0$ .

□

Estamos ya en condiciones de presentar la caracterización de la bifurcación silla-nodo para circuitos clásicos modelados por ecuaciones algebraico-diferenciales semiexplícitas de índice uno, resultado que se enuncia a continuación.

**Teorema 6.2.** *Consideremos un circuito compuesto por los elementos especificados anteriormente, y supongamos que existe un punto de equilibrio  $(x^*, y^*, \mu^*)$  en el que las matrices  $G$ ,  $C$  y  $L$  son definidas positivas, siendo además  $C$  y  $L$  simétricas. Asumamos también que se satisfacen las condiciones  $\zeta'(v_n^*) = 0$ ,  $\zeta''(v_n^*) \neq 0$  y que se verifica lo siguiente:*

- *Existe un único cutset ICN, que incluye la fuente de corriente, la resistencia no pasiva y al menos un condensador.*
- *El circuito no tiene cutsets ILN ni lazos VCL.*

*Entonces la dinámica del circuito experimenta una bifurcación silla-nodo cuando el parámetro  $\mu$  alcanza el valor  $\mu^*$ .*

*Demostración.* Las ecuaciones (6.26) definen las funciones  $h$  y  $g$  para el modelo circuital (6.25). Las derivadas parciales de dichas funciones, evaluadas en el punto de equilibrio, toman las expresiones

$$h_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_y = \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.28a)$$

$$g_x = \begin{pmatrix} B_c & 0 \\ 0 & Q_l \end{pmatrix}, \quad g_y = \begin{pmatrix} 0 & B_l & B_g & B_n & B_j & 0 \\ Q_c & 0 & Q_g G & 0 & 0 & Q_v \end{pmatrix}, \quad (6.28b)$$

donde  $C$  y  $L$  representan las matrices de capacidad y de inductancia en el punto de equilibrio (en el que  $i_c^* = 0$ ,  $v_l^* = 0$ ), y  $G = \gamma'(v_g^*)$  es la matriz de conductancia de las resistencias pasivas, evaluada también en el punto de equilibrio.

A partir de (6.28b) se puede comprobar que  $g_y$  es una matriz no singular, a tenor de los resultados expresados en el Lema 6.1 y de las identidades

$$\ker \begin{pmatrix} B_l & B_n & B_j \end{pmatrix} = \{0\}, \quad \ker \begin{pmatrix} Q_c & Q_v \end{pmatrix} = \{0\},$$

que se deben a la ausencia de cutsets ILN y de lazos VC, respectivamente. Hemos utilizado el hecho de que la inexistencia de lazos VC se sigue (en particular) de la ausencia de lazos VCL.

El espectro del haz de matrices  $\lambda A - B^*$  se corresponde, como indicamos en la demostración del Teorema 6.1, con los autovalores de la matriz de derivadas parciales  $f_x$  en el punto de equilibrio. En primer lugar, demostraremos que dicho haz tiene un autovalor nulo y que este tiene multiplicidad geométrica uno; esto es consecuencia del hecho de que, de acuerdo con el Lema 2.10, el corranjo de  $f_x$  coincide con el de la matriz

$$B^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_c & 0 & 0 & B_l & B_g & B_n & B_j & 0 \\ 0 & Q_l & Q_c & 0 & Q_g G & 0 & 0 & Q_v \end{pmatrix}. \quad (6.29)$$



A su vez, el corrago de esta matriz se corresponde con el de

$$\begin{pmatrix} B_c & 0 & B_g & B_n & B_j & 0 \\ 0 & Q_l & Q_g G & 0 & 0 & Q_v \end{pmatrix}, \quad (6.30)$$

de nuevo por las propiedades del complemento de Schur. Utilizaremos además las identidades

$$\dim \ker \begin{pmatrix} B_c & B_n & B_j \end{pmatrix} = 1, \quad \ker \begin{pmatrix} Q_l & Q_v \end{pmatrix} = \{0\},$$

la primera debida a la existencia de un único cutset ICN, y la segunda a la exclusión de lazos VL (caso particular de lazo VCL). Por el Lema 6.1 podemos entonces concluir que  $B^*$  (y consecuentemente  $f_x$ ) tiene corrago uno, de tal manera que el autovalor cero tiene multiplicidad geométrica uno.

Para que el autovalor nulo sea simple, necesitamos demostrar además que

$$\ker f_x \cap \operatorname{im} f_x = \{0\}$$

en  $(x^*, \mu^*)$  (en adelante todas las derivadas serán evaluadas en el punto de equilibrio salvo que se indique lo contrario). A partir del hecho de que  $h_x = 0$ , de (6.14) se deduce que

$$f_x = -h_y(g_y)^{-1}g_x.$$

Asumamos que  $v \in \ker f_x \cap \operatorname{im} f_x$  o, equivalentemente,  $w \in \ker h_y$  con  $w = (g_y)^{-1}g_x v$ . Por la estructura de la matriz  $h_y$ , el vector  $w$  debe tener la forma

$$w = (0, \bar{w}),$$

y dada la identidad  $w = (g_y)^{-1}g_x v$ , equivalente a  $g_y w = g_x v$ , entonces se cumple que

$$g_{\bar{y}} \bar{w} = g_x v,$$

donde  $\bar{y}$  representa las variables  $(v_g, v_n, v_j, i_v)$ . Si desarrollamos la expresión anterior a partir de las estructuras de las matrices  $g_y$  y  $g_x$  antes presentadas, obtenemos las ecuaciones

$$B_g w_1 + B_n w_2 + B_j w_3 = B_c v_1 \quad (6.31a)$$

$$Q_g G w_1 + Q_v w_4 = Q_l v_2, \quad (6.31b)$$

donde el vector  $\bar{w}$  se ha subdividido en  $(w_1, w_2, w_3, w_4)$ .

Por la ortogonalidad de los espacios de cutsets y de lazos se tiene que los vectores

$$(-v_1, 0, w_1, w_2, w_3, 0), \quad (0, -v_2, G w_1, 0, 0, w_4)$$

deben ser ortogonales entre sí. Esto nos lleva a que  $w_1^T G w_1 = 0$  y, debido a que  $G$  es definida positiva, se deduce que  $w_1 = 0$ . La ecuación (6.31a) toma entonces la expresión simplificada

$$-B_c v_1 + B_n w_2 + B_j w_3 = 0, \quad (6.32)$$

mientras que (6.31b) se reduce a

$$Q_v w_4 - Q_l v_2 = 0.$$

Debido a la ausencia de lazos VL, la última igualdad implica que  $v_2 = 0$  y  $w_4 = 0$ .

Haciendo uso del complemento de Schur, el hecho de que  $v \in \text{im } f_x$  puede expresarse como

$$\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_x & h_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} u, \quad (6.33)$$

para un determinado vector  $u$ . Utilizando la estructura de las matrices anteriormente presentadas, esta identidad puede desglosarse como

$$Cv_1 = u_3 \quad (6.34a)$$

$$Lv_2 = u_4 \quad (6.34b)$$

$$0 = B_c u_1 + B_l u_4 + B_g u_5 + B_n u_6 + B_j u_7 \quad (6.34c)$$

$$0 = Q_l u_2 + Q_c u_3 + Q_g G u_5 + Q_v u_8. \quad (6.34d)$$

Sustituyendo  $u_3$  en (6.34d) a partir de (6.34a), llegamos a

$$Q_l u_2 + Q_c C v_1 + Q_g G u_5 + Q_v u_8 = 0. \quad (6.35)$$

Si de nuevo hacemos uso de la ortogonalidad de los espacios de cutsets y de lazos, llegamos a que los vectores

$$(-v_1, 0, 0, w_2, w_3, 0) \text{ y } (Cv_1, u_2, Gu_5, 0, 0, u_8)$$

deben ser ortogonales, de lo que se deduce la igualdad  $v_1^T C v_1 = 0$ . Podemos concluir que  $v_1 = 0$  ya que la matriz  $C$  es definida positiva. Si tenemos en cuenta la condición  $v_2 = 0$  anteriormente obtenida, llegamos a que  $v = (v_1, v_2) = 0$ . De esto se deduce que el autovalor nulo de  $f_x$  es simple, tal y como pretendíamos demostrar.

Las ecuaciones de los autovalores para el haz de matrices  $\lambda A - B^*$  pueden escribirse como

$$\begin{pmatrix} -\lambda C & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda L & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_c & 0 & 0 & B_l & B_g & B_n & B_j & 0 \\ 0 & Q_l & Q_c & 0 & Q_g G & 0 & 0 & Q_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c \\ i_l \\ i_c \\ v_l \\ v_g \\ v_n \\ v_j \\ i_v \end{pmatrix} = 0, \quad (6.36)$$

identidad que puede reescribirse, para autovalores no nulos, como

$$0 = \lambda^{-1} B_c C^{-1} i_c + \lambda B_l L i_l + B_g v_g + B_n v_n + B_j v_j \quad (6.37a)$$

$$0 = Q_c i_c + Q_l i_l + Q_g G v_g + Q_v i_v. \quad (6.37b)$$

A continuación haremos uso de la ecuación conjugada (denotaremos la operación de conjuga-

ción con el superíndice c) de (6.37b), esto es

$$0 = Q_c i_c^c + Q_l i_l^c + Q_g G v_g^c + Q_v i_v^c. \quad (6.38)$$

Al aplicar la propiedad de ortogonalidad de los espacios de cutsets y de lazos a los vectores que aparecen en las ecuaciones (6.37a) y (6.38) obtenemos

$$0 = \lambda^{-1} i_c^* C^{-1} i_c + \lambda i_l^* L i_l + v_g^* G^T v_g, \quad (6.39)$$

donde  $x^*$  indica el conjugado del vector traspuesto  $x^T$ . La semisuma de (6.39) y su conjugado traspuesto es

$$0 = \operatorname{Re}(\lambda^{-1}) i_c^* C^{-1} i_c + \operatorname{Re}(\lambda) i_l^* L i_l + v_g^* \frac{G + G^T}{2} v_g. \quad (6.40)$$

Asumamos ahora que  $\lambda$  es un autovalor imaginario puro y no nulo. La condición  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$  implica que  $\operatorname{Re}(\lambda^{-1}) = 0$ , lo que permite simplificar la anterior ecuación para obtener

$$v_g^* \frac{G + G^T}{2} v_g = 0 \quad (6.41)$$

y por lo tanto  $v_g = 0$  ya que  $G$  es definida positiva. De la ecuación (6.37b) y de la ausencia de lazos VCL obtenemos entonces que  $i_c = i_l = i_v = 0$ . Esto a su vez simplifica (6.37a) a

$$0 = B_n v_n + B_j v_j. \quad (6.42)$$

De esta última ecuación y del hecho de que no existen cutsets ILN (ni, en particular, cutsets IN) obtenemos que  $v_n = v_j = 0$ . Finalmente, de las dos primeras ecuaciones de (6.36) se puede concluir que  $v_c = v_l = 0$ . Todo ello conjuntamente implica que todos los términos que definen los autovectores de (6.36) son nulos, lo que es una contradicción. De esta manera podemos concluir que no existen autovalores imaginarios puros diferentes del autovalor nulo, y que todos los requisitos formulados sobre el espectro del haz de matrices  $\lambda A - B^*$  contemplados en la primera hipótesis del Teorema 6.1 se verifican.

Ahora necesitamos comprobar que también se satisfacen las condiciones 2 y 3 del Teorema 6.1 para el modelo circuital (6.25). La matriz especificada en (6.16) tiene en este caso la estructura

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_c & 0 & 0 & B_l & B_g & B_n & B_j & 0 & 0 \\ 0 & Q_l & Q_c & 0 & Q_g G & 0 & 0 & Q_v & Q_j \end{pmatrix},$$

la dimensión de cuyo núcleo es igual a la del núcleo de la matriz

$$\begin{pmatrix} B_c & 0 & B_g & B_n & B_j & 0 & 0 \\ 0 & Q_l & Q_g G & 0 & 0 & Q_v & Q_j \end{pmatrix}.$$

Del Lema 6.1 se sigue que las entradas no nulas del núcleo de esta matriz vienen dadas por  $\ker(B_c \ B_n \ B_j)$  o  $\ker(Q_l \ Q_v \ Q_j)$ . El núcleo de la primera tiene dimensión uno por

hipótesis, dado que asumimos la existencia de un único cutset ICN. Con respecto a la segunda matriz, hacemos uso del teorema de la rama coloreada [95, 139], de acuerdo al cual la existencia de un cutset ICN que incluye al menos la fuente de corriente descarta la existencia de un lazo de esta rama con el resto de elementos circuitales; equivalentemente, el circuito no puede presentar lazos de tipo IVLG ni, en particular, lazos IVL que incluyan la fuente de corriente. Por otro lado, no pueden existir lazos IVL sin la fuente de corriente, es decir, lazos VL, por la ausencia de lazos VCL. Esto quiere decir que

$$\ker (Q_l \quad Q_v \quad Q_j) = \{0\}.$$

Por lo tanto,  $\dim \ker \hat{B} = 1$ , lo que indica que  $\hat{B}$  tiene rango máximo, cumpliéndose en consecuencia la condición 2 del Teorema 6.1.

Finalmente demostraremos que la condición 3 del Teorema 6.1 también se cumple. Para ello haremos uso del hecho de que la condición de rango máximo en la matriz  $\tilde{B}$  en (6.17) puede formularse de manera equivalente como

$$F''(x^*, y^*, \mu^*)(v, v) \notin \text{im } B^*, \quad (6.43)$$

tal y como se demostró en la sección 6.2. Recuérdese que  $F$  representa la aplicación  $(h, g)$ , mientras que  $v$  es cualquier vector no trivial del núcleo de  $B^*$ .

La forma que adquiere la matriz  $B^*$  para el modelo circuital (6.25) fue expuesta anteriormente (cf. (6.29)) y, procediendo como antes, podemos comprobar que los vectores no nulos del núcleo deben tener la forma  $(v_1, 0, 0, 0, 0, v_6, v_7, 0)$ , satisfaciendo además la ecuación

$$B_c v_1 + B_n v_6 + B_j v_7 = 0,$$

cuyas soluciones no nulas indicarían la existencia de cutsets ICN. Dado que por hipótesis este debe incluir necesariamente la resistencia no pasiva, se deduce que  $v_6 \neq 0$  (nótese que dado que existe una única resistencia no pasiva,  $v_6$  es necesariamente un escalar).

Por otra parte, es fácil comprobar que la forma para  $h$  y  $g$  presentada en (6.26) conduce a

$$F''(x^*, y^*, \mu^*)(v, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_n \zeta''(v_n^*) v_6^2 \end{pmatrix}. \quad (6.44)$$

Hay que tener en cuenta que la última entrada es no nula, ya que  $Q_n$  no puede anularse (solo sería nula si la resistencia no pasiva definiera un bucle, configuración que no está permitida en el modelado de circuitos), y tanto  $\zeta''(v_n^*)$  como  $v_6$  son no nulos. A partir de (6.44), el requisito

$F''(x^*, y^*, \mu^*)(v, v) \in \text{im } B^*$  (cf. (6.43)) equivale a la existencia de una solución para

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_n \zeta''(v_n^*) v_6^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_c & 0 & 0 & B_l & B_g & B_n & B_j & 0 \\ 0 & Q_l & Q_c & 0 & Q_g G & 0 & 0 & Q_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix}. \quad (6.45)$$

De este sistema fácilmente se obtiene que  $u_3 = 0$ ,  $u_4 = 0$ , resultando entonces

$$0 = B_c u_1 + B_g u_5 + B_n u_6 + B_j u_7 \quad (6.46a)$$

$$0 = -Q_n \zeta''(v_n^*) v_6^2 + Q_l u_2 + Q_g G u_5 + Q_v u_8. \quad (6.46b)$$

Sin embargo, la ecuación (6.46b) exige la existencia de un lazo NLGV que incluya la resistencia no pasiva, dado que  $\zeta''(v_n^*) v_6^2 \neq 0$ . Esto es una contradicción, de acuerdo al teorema de la rama coloreada que impide la existencia de tal tipo de lazo. Por lo tanto, la condición (6.43) también se cumple y con todo ello queda demostrado el teorema. □

## 6.5. Circuitos con memristores

La caracterización de la bifurcación silla-nodo anteriormente presentada puede extenderse, con las matizaciones necesarias, al ámbito de los circuitos memristivos, como se detalla a continuación. Esencialmente, la diferencia con el contexto clásico estriba en que la presencia de memristores introduce sistemáticamente puntos de equilibrio no aislados, como se muestra en [94, 114]. Este fenómeno, de alguna forma heterodoxo dentro de la teoría clásica de sistemas dinámicos, ha conducido en años recientes a diversos resultados que actualmente se enmarcan en la denominada teoría de bifurcaciones sin parámetros [33, 34, 35, 36, 81]. En el ámbito más específico de la bifurcación (clásica) silla-nodo, la presencia de memristores se traducirá en que el fenómeno de bifurcación estará asociado a una división de una *variedad* de puntos de equilibrio en dos, con distintas propiedades de estabilidad. Por simplicidad restringiremos la discusión a problemas que involucren un único memristor, de manera que dicho fenómeno conllevará la bifurcación en dos de una curva de equilibrio.

Para concretar todo lo anterior, consideremos una configuración circuital como la descrita en la sección anterior, a la que se añade la presencia de un memristor controlado por flujo (como en la sección 6.4, la hipótesis dual, definida por la presencia de un memristor controlado por carga, puede ser tratada de forma totalmente análoga). Las ecuaciones que gobiernan un circuito

de este tipo son

$$C(v_c)v'_c = i_c \quad (6.47a)$$

$$L(i_l)i'_l = v_l \quad (6.47b)$$

$$\varphi'_m = v_m \quad (6.47c)$$

$$0 = B_c v_c + B_l v_l + B_g v_g + B_m v_m + B_n v_n + B_j v_j + B_v V \quad (6.47d)$$

$$0 = Q_c i_c + Q_l i_l + Q_g \gamma(v_g) + Q_m W(\varphi_m) v_m + Q_n \zeta(v_n) + Q_j \mu + Q_v i_v. \quad (6.47e)$$

Agrupando las variables como  $x = (v_c, i_l, \varphi_m)$ ,  $y = (i_c, v_l, v_g, v_m, v_n, v_j, i_v)$ , se puede observar fácilmente que se trata de nuevo de una ecuación algebraico-diferencial semiexplícita de la forma mostrada en (6.11).

Los puntos de equilibrio deben anular las expresiones de la derecha del sistema de ecuaciones (6.47); de las ecuaciones (6.47a)-(6.47c) obtenemos que  $i_c = 0$ ,  $v_l = 0$  y  $v_m = 0$ , quedando las ecuaciones (6.47d)-(6.47e) como

$$0 = B_c v_c + B_g v_g + B_n v_n + B_j v_j + B_v V \quad (6.48a)$$

$$0 = Q_l i_l + Q_g \gamma(v_g) + Q_n \zeta(v_n) + Q_j \mu + Q_v i_v. \quad (6.48b)$$

Como se puede observar, el flujo del memristor  $\varphi_m$  no interviene en estas ecuaciones; esto implica que los puntos de equilibrio de este circuito no están aislados. De hecho, dado un punto de equilibrio cualquiera, reasignando (o *desplegando*) el valor de  $\varphi_m$  se obtiene una variedad lineal de puntos de equilibrio. Esto conlleva, en particular, que el autovalor cero siempre esté presente en la linealización del modelo circuital (6.47) en cualquier punto de equilibrio. La bifurcación silla-nodo no puede analizarse directamente en los términos considerados anteriormente y es necesario un planteamiento algo diferente.

Para ello asumiremos a priori la existencia de un punto de equilibrio, y supondremos que la dinámica de (6.47) exhibe una hipersuperficie invariante que es transversal a la línea de puntos de equilibrio. Esto quiere decir que existe una variedad de codimensión uno gobernada por una ecuación de la forma

$$\alpha(v_c, i_l, \varphi_m, i_c, v_l, v_g, v_m, v_n, v_j, i_v) = 0, \quad (6.49)$$

tal que cualquier punto inicial para la dinámica de (6.47) sigue una trayectoria que permanece en esta variedad; es más, la transversalidad con la línea de equilibrio implica que la variedad (hipersuperficie) anterior posee localmente un único punto de equilibrio. Analíticamente, la condición de transversalidad se traduce en

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_m}(v_c^*, i_l^*, \varphi_m^*, i_c^*, v_l^*, v_g^*, v_m^*, v_n^*, v_j^*, i_v^*) \neq 0, \quad (6.50)$$

una condición que permite describir localmente dicha variedad como

$$\varphi_m = \beta(v_c, i_l, i_c, v_l, v_g, v_m, v_n, v_j, i_v). \quad (6.51)$$

Este contexto hace posible una extensión del Teorema 6.2 en los términos enunciados a continuación.

**Teorema 6.3.** *Consideremos un circuito con un único memristor controlado por flujo y asumamos que las hipótesis del Teorema 6.2 relativas a los elementos no memristivos se cumplen en un punto de equilibrio dado. Asumamos también que el memristor es estrictamente pasivo, es decir, que  $W(\varphi_m^*) > 0$ , y que existe una variedad invariante de la forma (6.49) que incluye al punto de equilibrio bajo estudio.*

*Entonces, para  $\mu = \mu^*$  el conjunto de equilibrio es localmente una línea que se divide en dos cuando  $\mu$  traspasa el valor crítico  $\mu^*$ , bien para  $\mu > \mu^*$  o para  $\mu < \mu^*$ , no existiendo (localmente) puntos de equilibrio en la otra región del espacio de parámetros. El número de autovalores con parte real negativa (o positiva) difiere exactamente en uno de una curva de equilibrio a la otra.*

*Demostración.* A continuación presentamos solo un breve esquema de la demostración ya que en muchos aspectos es idéntica a la del Teorema 6.2, una vez que la dinámica se considera restringida a la variedad definida por (6.49). De hecho, la expresión recogida en (6.51) hace posible eliminar la variable  $\varphi_m$  del modelo (6.47) y expresar la dinámica local en la variedad invariante (6.49) como

$$C(v_c)v'_c = i_c \quad (6.52a)$$

$$L(i_l)i'_l = v_l \quad (6.52b)$$

$$0 = B_c v_c + B_l v_l + B_g v_g + B_m v_m + B_n v_n + B_j v_j + B_v V \quad (6.52c)$$

$$0 = Q_c i_c + Q_l i_l + Q_g \gamma(v_g) + Q_m W(\beta(\dots))v_m + Q_n \zeta(v_n) + Q_j \mu + Q_v i_v, \quad (6.52d)$$

donde obviamos los argumentos de  $\beta$  por simplicidad en la notación; las variables realmente involucradas son aquellas mostradas en (6.51).

El sistema dinámico (6.52) tiene un punto de equilibrio aislado que cumple los requisitos de la bifurcación silla-nodo recogidos en el Teorema 6.1. De hecho, en el punto de equilibrio se tiene  $v_m = 0$  y, por lo tanto, todas las derivadas de primer orden del término  $W(\beta(\dots))v_m$  en (6.52d) desaparecen, excepto por la derivada con respecto a  $v_m$ , que es igual a  $W$ . Esto se traduce en que la matriz  $B^*$  del modelo (6.52) tiene la forma

$$B^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_c & 0 & 0 & B_l & B_g & B_m & B_n & B_j & 0 \\ 0 & Q_l & Q_c & 0 & Q_g G & Q_m W & 0 & 0 & Q_v \end{pmatrix}, \quad (6.53)$$

teniendo exactamente la misma estructura que la de (6.29). Nótese que podemos reescribir

$$(Q_g G \quad Q_m W) = (Q_g \quad Q_m) \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}$$

y, dado que  $W$  es positiva por hipótesis, el segundo factor es una matriz definida positiva. Por lo tanto, todas las consideraciones correspondientes a la condición 1 del Teorema 6.1 aplican exactamente igual que en la demostración del Teorema 6.2. Lo mismo ocurre con la condición

2, ya que si tenemos en cuenta que

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_c & 0 & 0 & B_l & B_g & B_m & B_n & B_j & 0 & 0 \\ 0 & Q_l & Q_c & 0 & Q_g G & Q_m W & 0 & 0 & Q_v & Q_j \end{pmatrix},$$

el razonamiento anterior se repite de nuevo.

Para abordar el requisito expresado en la condición 3, consideraremos los vectores pertenecientes al núcleo de  $B^*$ , que tienen la misma forma que en la demostración del Teorema 6.2, es decir, tienen la estructura

$$(v_1, 0, 0, 0, 0, 0, v_7, v_8, 0).$$

No es difícil comprobar que

$$F''(x^*, y^*, \mu^*)(v, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_n \zeta''(v_n^*) v_7^2 \end{pmatrix}, \quad (6.54)$$

donde la última variable es necesariamente distinta de cero. En este caso (6.44) tendría una solución no trivial

$$0 = -Q_n \zeta''(v_n^*) v_7^2 + Q_l u_2 + Q_g G u_5 + Q_m W u_6 + Q_v u_9.$$

Esto se correspondería con un lazo NLGMV que incluiría la resistencia no pasiva, pero esto entraría en contradicción con la existencia de un cutset ICN, de nuevo como consecuencia directa del teorema de la rama coloreada.

En conjunto esto se traduce en que el Teorema 6.1 es aplicable a (6.52) y, por lo tanto, el sistema tiene un único punto de equilibrio que se divide en dos diferentes cuando  $\mu$  sobrepasa  $\mu^*$ . Si dejamos que  $\varphi_m$  varíe en un entorno de  $\varphi_m^*$  tenemos que una variedad lineal se bifurca en dos ramas de equilibrio; las propiedades de los autovalores en una y otra rama se deducen automáticamente del fenómeno de bifurcación silla-nodo enunciado en el Teorema 6.2.      □

## 6.6. Caso de estudio

En esta sección se analiza el circuito de la Figura 6.1(a) con el fin de ilustrar los resultados obtenidos a lo largo del presente capítulo.

El parámetro de bifurcación  $\mu$  de este circuito es la corriente de una fuente de corriente independiente (representada por el símbolo I en la figura). El circuito incluye también un condensador lineal y pasivo (con capacidad  $C$ ), un diodo (D) y una unión de Josephson. Se asume que el diodo presenta una ecuación característica de la forma

$$i_d = \zeta(v_d),$$



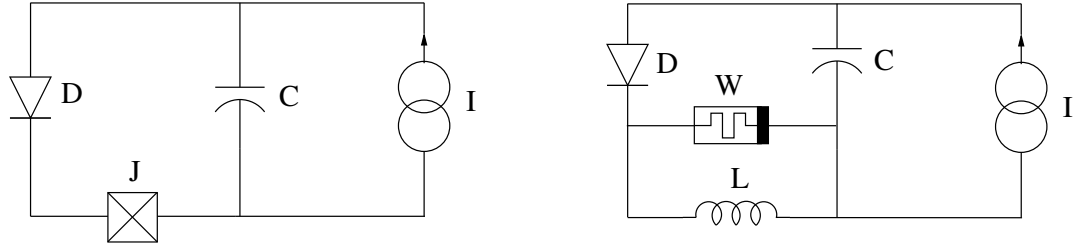


Figura 6.1: (a) Ejemplo (b) Circuito equivalente

con  $\zeta$  suficientemente diferenciable. Supondremos también que dicha característica tiene una región localmente activa, lo que se corresponde típicamente con un intervalo de efecto túnel en el que  $\zeta'(v_d) < 0$ : en concreto, la bifurcación se producirá en un punto de trabajo  $v_d^*$  en la frontera de la región de efecto túnel, en concreto en un mínimo en el que  $\zeta'(v_d^*) = 0$ ,  $\zeta''(v_d^*) > 0$ .

La unión de Josephson estará caracterizada por una ecuación característica de la forma

$$i_l = I_0 \sin(k_0 \varphi_l) \quad (6.55)$$

donde  $I_0$ ,  $k_0$  son constantes, con  $|I_0| > |\zeta(v_d^*)|$ . De acuerdo con lo indicado en [24, 71], modelos realistas de la unión de Josephson que tengan en cuenta efectos parásitos dan lugar no solo a una característica propia de una bobina no lineal como (6.55), sino que aparece también un efecto memristivo que se modela mediante un memristor controlado por flujo,  $W$ , conectado en paralelo a la bobina no lineal anterior y con la siguiente ecuación característica:

$$i_m = W(\varphi_m) v_m. \quad (6.56)$$

Nos limitaremos a analizar casos en los que  $W$  tome valores positivos.

Como se puede observar en el circuito equivalente de la Figura 6.1(b), la fuente, el condensador y el diodo forman un cutset ICN, y el circuito no presenta ni cutsets ILN ni lazos VCL. Esto quiere decir que se cumplen las condiciones topológicas descritas en los Teoremas 6.2 y 6.3. Asumiremos que  $L$  es positiva, de manera que las condiciones de pasividad de dichos resultados también se satisfacen; se ha supuesto anteriormente que  $W$  y  $C$  son positivas, es decir, que los dispositivos correspondientes son igualmente pasivos.

La dinámica del circuito queda descrita por el sistema de ecuaciones

$$Cv_c' = -\zeta(v_d) + \mu \quad (6.57a)$$

$$\varphi_l' = v_c - v_d \quad (6.57b)$$

$$\varphi_m' - \varphi_l' = 0 \quad (6.57c)$$

$$0 = \zeta(v_d) + W(\varphi_m)(v_d - v_c) - I_0 \sin(k_0 \varphi_l). \quad (6.57d)$$

Para ilustrar el fenómeno de bifurcación que predice el Teorema 6.3, tomemos el valor del parámetro  $\mu^* = \zeta(v_d^*)$  (donde, como se indica anteriormente,  $v_d^*$  es un mínimo de  $\zeta$ ). Los puntos de equilibrio de (6.57) para este valor de parámetro están definidos por  $v_c = v_d = v_d^*$ , mientras

que el valor de  $\varphi_l^*$  está definido por la solución de la ecuación

$$I_0 \sin(k_0 \varphi_l) = \zeta(v_d^*)$$

en el intervalo  $(-\pi/(2k_0), \pi/(2k_0))$ . Los puntos de equilibrio quedan descritos por cualquier vector de la forma  $(v_c^*, \varphi_l^*, \varphi_m, v_d^*)$ , lo que define una línea de puntos de equilibrio.

Dado que  $v_d^*$  es un mínimo local de  $\zeta$ , de (6.57a) se sigue que no hay puntos de equilibrio para  $\mu < \mu^*$  (al menos en un entorno de  $\mu^*$ ). Sin embargo, para  $\mu > \mu^*$  (cerca de  $\mu^*$ ) la línea de equilibrio se bifurca en dos; estas ramas estarán definidas localmente por las soluciones de (6.57a), que denotaremos como  $v_d^{(1)}$  y  $v_d^{(2)}$ . Los valores de  $v_c$  en equilibrio siguen gobernados por las ecuaciones  $v_c^{(i)} = v_d^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) y, como antes, no existe ninguna restricción sobre  $\varphi_m$ . Nótese que  $\varphi_l$  está definida por la ecuación

$$I_0 \sin(k_0 \varphi_l^{(i)}) = \zeta(v_d^{(i)})$$

(para  $i = 1, 2$ ), con una única solución en el intervalo  $(-\pi/(2k_0), \pi/(2k_0))$ . Más aún, se puede comprobar que una de las dos ramas de equilibrio anteriormente definidas está constituida por puntos de equilibrio estables, mientras que en la otra los puntos de equilibrio son inestables, conforme a lo previsto en el Teorema 6.3.

# Capítulo 7

## Conclusiones y líneas futuras de investigación

En este capítulo se exponen brevemente los principales resultados y las conclusiones obtenidas en el curso de la investigación que ha conducido a esta Tesis Doctoral. Asimismo, se recopilan las que consideramos que son las principales líneas de investigación que pueden abordarse en el futuro en las temáticas aquí estudiadas.

### 7.1. Análisis del índice sin restricciones de pasividad

El análisis del índice de los modelos algebraico-diferenciales de circuitos no lineales ha sido objeto de diversos estudios a lo largo de los últimos años. No obstante, la mayoría de los estudios previos se restringen al contexto de los circuitos pasivos, es decir, a problemas en los que las matrices incrementales características del circuito son definidas positivas en toda la región de trabajo. En este sentido, los trabajos [30, 31, 116] amplían el espectro de los estudios del índice al considerar circuitos sin restricciones de pasividad. La caracterización del índice abordada en esta Tesis Doctoral se ha enmarcado en la línea de investigación definida por los trabajos anteriormente citados.

Las principales limitaciones que se han superado con respecto a los resultados previos recogidos en las referencias anteriores consisten en la inclusión de topologías degeneradas (que conducen a ecuaciones de índice dos en el modelo general de ramas) y la generalización de los resultados a problemas que incluyen simultáneamente resistencias controladas por corriente y por tensión. Desde una perspectiva circuital, todo ello ha sido posible por el empleo de modelos de naturaleza simétrica, frente a los modelos nodales considerados en [30, 31, 116] que, para conseguir una descripción más compacta de las ecuaciones, rompen la simetría del sistema, lo que dificulta el estudio de diversas propiedades analíticas. Desde el punto de vista matemático, ha sido necesario caracterizar la regularidad de cierto tipo de matrices que se han venido a denominar *matrices mixtas*. Este resultado no solo ha sido clave en el estudio del índice, sino que puede suponer un avance matemático de interés independiente en la medida en que amplía los resultados previamente obtenidos por Maxwell para matrices de admitancia nodal: la fórmula

de Maxwell y la correspondiente al caso dual (debida a Kirchhoff) pueden ahora considerarse como casos extremos de un resultado más general (Teorema 4.3).

El resultado anterior está en el núcleo de diversas caracterizaciones del índice de diferentes modelos circuitales algebraico-diferenciales, en los términos detallados en los Capítulos 4 y 5. A modo de recopilación, los aspectos más destacables de nuestros resultados en esta línea son los recogidos a continuación.

- Los resultados obtenidos son de aplicación sin restricciones de pasividad.
- Los modelos considerados pueden incluir simultáneamente resistencias controladas por corriente y por tensión.
- Nuestros resultados son de aplicación también para circuitos con memristores, tanto controlados por carga como por flujo.
- Se ha obtenido una caracterización completa del índice para modelos híbridos no pasivos.
- Para los modelos de ramas, se ha caracterizado el índice de topologías tanto no degeneradas como degeneradas bajo hipótesis muy generales.
- Conforme a la filosofía estructural que sustenta la investigación, nuestros resultados permiten la caracterización del índice sin necesidad de calcular las ecuaciones que definen el modelo, es decir, se posibilita una caracterización formulada explícitamente en términos de la topología del circuito y de las características eléctricas de los dispositivos que lo definen.

Aunque los resultados anteriores pueden permitir considerar relativamente completa la caracterización del índice de modelos algebraico-diferenciales de circuitos no lineales, de forma natural pueden señalarse varias líneas de trabajo concretas que permitirían ampliar los resultados aquí obtenidos. En primer lugar, una futura línea de investigación podría extender el análisis del índice a modelos simétricos de circuitos con acoplos, con fuentes controladas (son prometedores, en esta dirección, los resultados obtenidos en la sección 5.6.2) o en circuitos que incluyan sistemas memristivos más generales que los aquí considerados, como los introducidos por Chua y Kang en [26]; pueden también estudiarse generalizaciones a circuitos con dispositivos memreactivos [28]. Sería natural y posiblemente no ofrezca dificultad extender los resultados relativos a las matrices mixtas al contexto reactivo, de manera que puedan incluirse en los análisis del índice condensadores controlados tanto por tensión como por carga y bobinas controladas no solo por corriente sino también por flujo. Por otra parte, algunos de los resultados podrían extenderse también al contexto de los sistemas distribuidos, empleando herramientas relacionadas con la teoría de las ecuaciones algebraico-diferenciales en derivadas parciales. Cabe destacar también que permanece abierta la caracterización completa del índice sin condiciones de pasividad para modelos nodales de circuitos con topologías degeneradas, caso que no ha sido tratado en el presente trabajo pero que es de indudable interés por el impacto práctico asociado al uso generalizado de los modelos nodales en los simuladores circuitales. Estas líneas de trabajo serían también de interés por sus potenciales aplicaciones en diversos ámbitos de la Electrónica, el modelado de sistemas de potencia, etc. o, más específicamente, en el caso de los circuitos con memristores, por su aplicabilidad en el diseño de memorias resistivas o en la implementación hardware de redes neuronales artificiales.

## 7.2. Aspectos cualitativos

Los resultados de naturaleza cualitativa obtenidos en la última parte de esta Tesis Doctoral constituyen un primer paso en el estudio estructural de bifurcaciones en circuitos eléctricos, extendiendo la línea de investigación iniciada en los trabajos [119, 120, 122], en los que se abordan aspectos analíticos relacionados con la estabilidad y la hiperbolicidad de puntos de polarización de circuitos en términos de las propiedades de los puntos de equilibrio de los correspondientes modelos algebraico-diferenciales. En este sentido es natural que la primera bifurcación local abordada haya sido la bifurcación silla-nodo: para la caracterización de esta bifurcación en el contexto circuital se ha desarrollado un resultado matemático de interés independiente, consistente en la reformulación de las condiciones que describen este fenómeno de bifurcación en el formalismo algebraico-diferencial (Teorema 6.1). Esto ha posibilitado su posterior estudio en el lenguaje de la teoría de circuitos, tanto para problemas clásicos como memristivos (véanse, en este sentido, los Teoremas 6.2 y 6.3).

El margen de ampliación de los resultados de naturaleza cualitativa es amplísimo, en la medida en que este trabajo puede considerarse el primero que aborda sistemáticamente fenómenos de bifurcación en circuitos no lineales con una metodología estructural. Así, sería muy natural considerar configuraciones circuitales más amplias que las aquí analizadas, incluyendo topologías degeneradas, y contemplar la presencia de diversos dispositivos activos y/o memristores, así como la existencia de efectos de acoplo. Igualmente, el enfoque aquí presentado para la caracterización de la bifurcación silla-nodo podría extrapolarse al estudio de otro tipo de bifurcaciones como la bifurcación de Hopf o la bifurcación transcítica clásica, entre otras. Finalmente, es prometedora la posibilidad de explorar también las interrelaciones entre los aspectos cualitativos aquí considerados y la teoría de bifurcaciones sin parámetros para circuitos memristivos, a lo largo de las líneas planteadas en [81, 94, 114].

Como se ha indicado en las secciones de introducción a los Capítulos 4, 5 y 6, los resultados obtenidos en esta Tesis Doctoral han dado lugar a las publicaciones [42, 44, 45], todas ellas en revistas recogidas en el índice JCR. En particular, los resultados obtenidos en relación a la caracterización de matrices mixtas y del índice del modelo de ramas han sido publicados en [44]. El análisis del índice de modelos híbridos dio lugar al artículo [42]. Finalmente, los teoremas de la bifurcación silla-nodo para ecuaciones algebraico-diferenciales y para circuitos no lineales se publicaron en [45]. Algunos de estos resultados han sido también presentados a través de sendas comunicaciones en dos congresos internacionales (cf. [43, 46]).



# Bibliografía

- [1] H. Amann, *Ordinary Differential Equations*, Walter de Gruyter, 1990.
- [2] S. Amari, Topological foundations of Kron's tearing of electric networks, *RAAG Memoirs* **3** (1962) 322-350.
- [3] N. Balabanian and T. A. Bickart, *Electrical Network Theory*, John Wiley & Sons, 1969.
- [4] T. R. Bashkow, The A matrix, new network description, *IRE Trans. Circuit Theory* **4** (1957) 117-119.
- [5] B. Bollobás, *Modern Graph Theory*, Springer-Verlag, 1998.
- [6] F. H. Branin, The relation between Kron's method and the classical methods of network analysis, *The Matrix and Tensor Quarterly* **12** (1962) 69-115.
- [7] K. E. Brenan, S. L. Campbell and L. R. Petzold, *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*, Classics in Applied Mathematics, SIAM, 1996.
- [8] D. P. Brown, Derivative-explicit differential equations for RLC graphs, *Journal of the Franklin Institute* **275** (1963) 503-514.
- [9] P. R. Bryant, The order of complexity of electrical networks, *Proceedings of the IEEE, Part C* **106** (1959) 174-188.
- [10] P. R. Bryant, The explicit form of Bashkow's A matrix, *IRE Trans. Circuit Theory* **9** (1962) 303-306.
- [11] S. L. Campbell, A general form for solvable linear time varying singular systems of differential equations, *SIAM J. Math. Anal.* **18** (1987) 1101-1115.
- [12] S. L. Campbell, *Singular Systems of Differential Equations*, Research Notes in Mathematics, Pitman, (1980).
- [13] S. L. Campbell, *Singular Systems of Differential Equations II*, Research Notes in Mathematics, Pitman, 1982.
- [14] S. L. Campbell and C. W. Gear, The index of general nonlinear DAEs, *Numer. Math.* **72** (1995) 173-196.

- [15] S. L. Campbell and E. Griepentrog, Solvability of general differential algebraic equations, *SIAM J. Sci. Comput.* **16** (1995) 257-270.
- [16] J. Carr, *Applications of the Center Manifold Theory*, Springer-Verlag, 1981.
- [17] W. K. Chen, *Applied Graph Theory*, North-Holland, 1971.
- [18] W. K. Chen, *Graph Theory and its Engineering Applications*, World Scientific, 1997.
- [19] W. K. Chen, *Net Theory and its Applications*, Imperial College Press, 2003.
- [20] J. Choma Jr, *Electrical Networks. Theory and Analysis*, John Wiley & Sons, 1985.
- [21] S. Chow and J. K. Hale, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, 1982.
- [22] L. O. Chua, Memristor – The missing circuit element, *IEEE Trans. Circuit Theory* **18** (1971) 507-519.
- [23] L.O. Chua, Dynamic nonlinear networks: state-of-the-art, *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **27** (1980) 1059-1087.
- [24] L. O. Chua, Nonlinear circuit foundations for nanodevices, Part I: The four-element torus, *Proc. IEEE* **91** (2003) 1830-1859.
- [25] L. O. Chua, C. A. Desoer and E. S. Kuh, *Linear and Nonlinear Circuits*, McGraw-Hill, (1987).
- [26] L. O. Chua and S. M. Kang, Memristive devices and systems, *Proceedings of the IEEE* **64** (1976) 209-223.
- [27] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer, 2000.
- [28] M. Di Ventra, Y. V. Pershin, L.O. Chua, Circuit elements with memory: memristor, mem-capacitors and meminductors, *Proceedings of the IEEE* **97** (2009) 1717-1724.
- [29] B. Dziurla and R. Newcomb, The Drazin inverse and semi-state equations, *Proc. Intl. Symp. Math. Theory of Networks and Systems*, 283-289, (1979).
- [30] A. J. Encinas, *Index Analysis of Semistate Systems without Passivity Restrictions*, Tesis Doctoral, ETSI Telecomunicación, UPM, 2009.
- [31] A. J. Encinas and R. Riaza, Tree-based characterization of low index circuit configurations without passivity restrictions, *Intl. J. Circuit Theor. Appl.* **36** (2008) 135-160.
- [32] D. Estévez-Schwarz and C. Tischendorf, Structural analysis of electric circuits and consequences for MNA, *Intl. J. Circuit Theor. Appl.* **28** (2000) 131-162.
- [33] B. Fiedler, S. Liebscher and J. C. Alexander, Generic Hopf bifurcation from lines of equilibria without parameters: I. Theory, *J. Differential Equations* **81** (2000) 16-35.
- [34] B. Fiedler and S. Liebscher, Generic Hopf bifurcation from lines of equilibria without parameters: II. Systems of viscous hyperbolic balance laws, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* **31** (2000) 1396-1404.



- [35] B. Fiedler, S. Liebscher and J. C. Alexander, Generic Hopf bifurcation from lines of equilibria without parameters: III. Binary Oscillations, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **10** (2000) 1613-1622.
- [36] B. Fiedler and S. Liebscher, Takens-Bogdanov bifurcations without parameters, and oscillatory shock profiles, in *Global Analysis of Dynamical Systems*, H. W. Broer, B. Krauskopf, and G. Vegter, eds., Institute of Physics (2001) 211-259.
- [37] L. Fortuna, M. Frasca and M. G. Xibilia, *Chua's Circuit Implementations*, World Scientific, 2009.
- [38] M. Fosséprez, *Non-Linear Circuits: Qualitative Analysis of Non-Linear, Non-Reciprocal Circuits*, John Wiley & Sons, 1992.
- [39] L. R. Foulds, *Graph Theory Applications*, Springer, 1992.
- [40] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Chelsea, 1959.
- [41] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, vol. 2, Chelsea, 1959.
- [42] I. García de la Vega and R. Riaza, Hybrid analysis of nonlinear circuits: DAE models with indices zero and one, *Circuits, Systems, and Signal Processing* **32** (2013) 2065-2095.
- [43] I. García de la Vega and R. Riaza, Characterizing DAE circuit models via mixed determinantal expansions, *SCICADE'2013*, Valladolid, España.
- [44] I. García de la Vega and R. Riaza, Index and solvability of uncoupled circuits: A characterization without restrictions on their passivity, topology or controlling structure, *Journal of Circuits, Systems, and Computers* **23** (2014) 1450087.
- [45] I. García de la Vega and R. Riaza, Saddle-node bifurcations in classical and memristive circuits, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **26** (2016) 1650064.
- [46] I. García de la Vega and R. Riaza, Turning points of nonlinear circuits, *Scientific Computing in Electrical Engineering (SCEE'2014)*, Wuppertal, Alemania. Mathematics in Industry, Vol. 23, pp. 21-29, Springer, 2016.
- [47] F. García-Redondo, P. Royer, M. López-Vallejo, H. Aparicio, P. Ituero and C. A. López-Barrio, Reconfigurable writing architecture for reliable RRAM operation in wide temperature ranges, *IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems* **25** (2017) 1224 - 1235.
- [48] F. García-Redondo and M. López-Vallejo, On the design and analysis of reliable RRAM-CMOS hybrid circuits, *IEEE Transactions on Nanotechnology* **16** (2017) 514-522.
- [49] C. W. Gear, The simultaneous numerical solution of differential-algebraic equations, *IEEE Trans. Circuit Theory* **18** (1971) 89-95.
- [50] C. W. Gear and L. R. Petzold, Differential/algebraic systems and matrix pencils, in B. Kagstrom and A. Ruhe (eds.), *Matrix Pencils*, Lect. Notes Maths. **973**, Springer-Verlag, 1983.

- [51] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable Mappings and Their Singularities*, Springer-Verlag, 1973.
- [52] E. Griepentrog and R. März, *Differential-Algebraic Equations and Their Numerical Treatment*, Teubner-Texte zur Mathematik 88, Leipzig, 1986.
- [53] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, 1983.
- [54] M. Günther and U. Feldmann, CAD-based electric-circuit modeling in industry. I: Mathematical structure and index of network equations, *Surv. Math. Ind.* **8** (1999) 97-129.
- [55] M. Günther and U. Feldmann, CAD-based electric circuit modeling in industry. II: Impact of circuit configuration and parameters, *Surv. Math. Ind.* **8** (1999) 131-157.
- [56] M. Günther and P. Rentrop, Numerical simulation of electrical circuits, *Mitt. Ges. Angew. Math. Mech* **23** (2000) 51-77.
- [57] G. D. Hachtel, R. K. Brayton and F. G. Gustafson, The sparse tableau approach to network analysis and design, *IEEE Trans. Circ. Sys.* **18** (1971) 101-113.
- [58] B. C. Haggman and P. R. Bryant, Geometric properties of nonlinear networks containing capacitor-only cutsets and/or inductor-only loops. Part I: Conservation laws, *Cir. Sys. Signal Process.* **5** (1986) 279-319.
- [59] E. Hairer, C. Lubich and M. Roche, *The Numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge-Kutta Methods*, Lect. Notes Maths. 1409, Springer-Verlag, 1989.
- [60] E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer-Verlag, 1996.
- [61] B. K. Harrison, A discussion of some mathematical techniques used in Kron's method of tearing, *Journal of the SIAM* **11** (1963) 258-280.
- [62] M. Hasler and J. Neiryneck, *Nonlinear Circuits*, Artech House, 1986.
- [63] I. Higuera and B. García-Celayeta, Logarithmic norms for matrix pencils, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **20** (1999) 646-666.
- [64] M. W. Hirsh and S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, 1974.
- [65] C. W. Ho, A. E. Ruehli and P. A. Brennan, The modified nodal approach to network analysis, *IEEE Trans. Circ. Sys.* **22** (1975) 504-509.
- [66] R. A. Horn and Ch. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985.
- [67] R. A. Horn and Ch. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge Univ. Press, 1991.

- [68] S. Iwata, M. Takamatsu and C. Tischendorf, Hybrid analysis of nonlinear time-varying circuits providing DAEs with index at most one, in *Scientific Computing in Electrical Engineering, SCEE 2008*, J. Roos, L.R.J. Costa (eds.), Mathematics in Industry, Vol. 14, pp. 151-158, Springer, 2010.
- [69] S. Iwata and M. Takamatsu, Index minimization of differential-algebraic equations in hybrid analysis for circuit simulation, *Math. Program. Ser. A* **121** (2010) 105-121.
- [70] S. Iwata, M. Takamatsu and C. Tischendorf, Tractability index of hybrid equations for circuit simulation, *Mathematics of Computation* **81** (2012) 923-939.
- [71] D. Jeltsema and A. J. van der Schaft, Memristive port-Hamiltonian systems, *Math. Comp. Model. Dyn. Sys.* **16** (2010) 75-93.
- [72] K. Kim, S. Gaba, D. Wheeler, J. M. Cruz-Albrecht, T. Hussain, N. Srinivasa and W. Lu, A functional hybrid memristor crossbar-array/CMOS system for data storage and neuromorphic applications, *Nano Letters* **2012** (2012) 389-395.
- [73] G. Kirchhoff, Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung Galvanischer Ströme geführt wird, *Annalen der Physik und Chemie* **72** (1847) 497-508. English translation: On the solution of the equations obtained from the investigation of the linear distribution of galvanic currents, *IRE Transactions on Circuit Theory* **5** (1958) 4-7.
- [74] G. Kron, *Tensor Analysis of Networks*, John Wiley and Sons, New York, 1939.
- [75] P. Kunkel and V. Mehrmann, Canonical forms for linear differential-algebraic equations with variable coefficients, *J. Comput. Appl. Math.* **56** (1994) 225-251.
- [76] P. Kunkel and V. Mehrmann, The linear quadratic optimal control problem for linear descriptor systems with variable coefficients, *Math. Control Signals Syst.* **10** (1997) 247-264.
- [77] P. Kunkel and V. Mehrmann, *Differential-Algebraic Equations*, EMS, 2006.
- [78] R. Lamour, R. März and C. Tischendorf, *Differential-Algebraic Equations: A Projector Based Analysis*, Springer, 2013.
- [79] R. Lamour, R. März and R. Winkler, How Floquet theory applies to index 1 differential algebraic equations, *J. Math. Anal. Appl.* **217** (1998) 372-394.
- [80] R. Lamour, R. März and R. Winkler, Stability of periodic solutions of index-2 differential algebraic equations, *J. Math. Anal. Appl.* **279** (2003) 475-494.
- [81] S. Liescher, *Bifurcation without Parameters*, Springer, 2015.
- [82] R. N. Madan, *Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos*, World Scientific, 1993.
- [83] J. R. Magnus and H. Neudecker, *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*, Wiley, 1999.

- [84] J. Martinet, *Singularities of smooth functions and maps*, Lecture Note Series 58, London Mathematical Society, Cambridge Univ. Press, 1982.
- [85] R. März, Practical Lyapunov stability criteria for differential algebraic equations, *Banach Center Publications* **29** (1994) 245-266.
- [86] R. März, Criteria for the trivial solution of differential algebraic equations with small nonlinearities to be asymptotically stable, *J. Math. Anal. Appl.* **225** (1998) 587-607.
- [87] R. März, The index of linear differential algebraic equations with properly stated leading term, *Results in Mathematics* **42** (2002) 308-338.
- [88] R. März, Differential algebraic systems with properly stated leading term and MNA equations, *Int. Ser. Numer. Math.* **146** (2003) 135-151.
- [89] R. März, Numerical methods for differential algebraic equations, *Acta Numerica 1992*, 141-198.
- [90] R. März and R. Riaza, Linear differential-algebraic equations with properly stated leading term: Regular points, *J. Math. Anal. Appl.* **323** (2006) 1279-1299.
- [91] R. März and R. Riaza, Linear differential-algebraic equations with properly stated leading term:  $A$ -critical points, *Math. Comp. Model. Dyn. Sys.* **13** (2007) 291-314.
- [92] R. März and C. Tischendorf, Recent results in solving index-2 differential-algebraic equations in circuit simulation, *SIAM J. Sci. Comput.* **18** (1997) 139-159.
- [93] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Clarendon Press, Oxford, 1892.
- [94] M. Messias, C. Nespoli and V. A. Botta, Hopf bifurcation from lines of equilibria without parameters in memristors oscillators, *Internat. J. Bifur. Chaos* **20** (2010) 437-450.
- [95] G. J. Minty, Monotone networks, *Proc. Royal Society* **257** (1960) 194-212.
- [96] R. W. Newcomb, The semistate description of nonlinear time-variable circuits, *IEEE Trans. Circ. Sys.* **28** (1981) 62-71.
- [97] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 1991.
- [98] Y. V. Pershin and M. Di Ventra, Experimental demonstration of associative memory with memristive neural networks, *Neural Networks* **23** (2010) 881-886.
- [99] Y. V. Pershin and M. Di Ventra, Neuromorphic, digital and quantum computation with memory circuit elements, *Proc. IEEE* **100** (2012) 2071-2080.
- [100] P. J. Rabier and W. C. Rheinboldt, A general existence and uniqueness theory for implicit differential- algebraic equations, *Differ. Integral Equ.* **4** (1991) 563-582.
- [101] P. J. Rabier and W. C. Rheinboldt, A geometric treatment of implicit differential-algebraic equations, *J. Differential Equations* **109** (1994) 110-146.

- [102] P. J. Rabier and W. C. Rheinboldt, Classical and generalized solutions of time-dependent linear differential-algebraic equations, *Lin. Alg. Appl.* **245** (1996) 259-293.
- [103] P. J. Rabier and W. C. Rheinboldt, Time-dependent linear DAEs with discontinuous inputs, *Lin. Alg. Appl.* **247** (1996) 1-29.
- [104] P. J. Rabier and W. C. Rheinboldt, Theoretical and numerical analysis of differential-algebraic equations, in P Ciarlet *et al* (eds), *Handbook of Numerical Analysis*, VIII, 183-540, Elsevier, 2002.
- [105] S. Reich, On a geometrical interpretation of differential-algebraic equations, *Cir. Sys. Signal Process.* **9** (1990) 367-382.
- [106] S. Reich, On the local qualitative behavior of differential-algebraic equations, *Cir. Sys. Signal Process.* **14** (1995) 427-443.
- [107] G. Reißig, The index of the standard circuit equations of passive RLCTG-networks does not exceed 2, *Proc. ISCAS'98*, vol. 3, 419-422, 1998.
- [108] G. Reißig, Extension of the normal tree method, *Intl. J. Circuit Theor. Appl.* **27** (1999) 241-265.
- [109] R. Riaza, Stability issues in regular and non-critical singular DAEs, *Acta Appl. Math.* **73** (2002) 301-336.
- [110] R. Riaza, Singular bifurcations in higher index differential-algebraic equations, *Dynamical Systems* **17** (2002) 243-261.
- [111] R. Riaza, *Differential-Algebraic Systems*, World Scientific, 2008.
- [112] R. Riaza, Stability loss in quasilinear DAEs by divergence of a pencil eigenvalue, *SIAM J. Math. Anal.* **41** (2010) 2226-2245.
- [113] R. Riaza, Explicit ODE reduction of memristive systems, *Intl. J. Bifurcation and Chaos* **21** (2011) 917-930.
- [114] R. Riaza, Manifolds of equilibria and bifurcations without parameters in memristive circuits, *SIAM J. Applied Mathematics* **72** (2012) 877-896.
- [115] R. Riaza, First order mem-circuits: modeling, nonlinear oscillations and bifurcations, *IEEE Transactions on Circuits and Systems - I* **60** (2013) 1570-1583.
- [116] R. Riaza and A. Encinas, Augmented nodal matrices and normal trees, *Discrete Appl. Math.* **158** (2010) 44-61.
- [117] R. Riaza and R. März, Linear index-1 DAEs: regular and singular problems, *Acta Applicandae Mathematicae* **84** (2004) 29-53.
- [118] R. Riaza and R. März, A simpler construction of the matrix chain defining the tractability index of linear DAEs, *Appl. Math. Letters* **21** (2008) 326-331.

- [119] R. Riaza and C. Tischendorf, Qualitative features of matrix pencils and DAEs arising in circuit dynamics, *Dynamical Systems* **22** (2007) 107-131.
- [120] R. Riaza and C. Tischendorf, The hyperbolicity problem in electrical circuit theory, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **33** (2010) 2037-2049.
- [121] R. Riaza and C. Tischendorf, Semistate models of electrical circuits including memristors, *Intl. J. Circuit Theor. Appl.* **39** (2011) 607-627.
- [122] R. Riaza and C. Tischendorf, Structural characterization of classical and memristive circuits with purely imaginary eigenvalues, *Intl. J. Circuit Theor. Appl.* **41** (2013) 273-294.
- [123] J. P. Roth, An application of algebraic topology: Kron's method of tearing, *Quart. Appl. Math.* **17** (1959) 1-24.
- [124] T. Serrano-Gotarredona, T. Masquelier, T. Prodromakis, G. Indiveri and B. Linares-Barranco, STDP and STDP variations with memristors for spiking neuromorphic learning systems, *Frontiers in Neuroscience* **7** (2013) 2013-2.
- [125] A. M. Sommariva, State-space equations of regular and strictly topologically degenerate linear lumped time-invariant networks: the implicit tree-tableau method, *IEEE Proceedings Circuits and Systems* **8** (2001) 1139-1141.
- [126] A. M. Sommariva, State-space equations of regular and strictly topologically degenerate linear lumped time-invariant networks: the multiport method, *Intl. J. Circuit Theor. Appl.* **29** (2001) 435-453.
- [127] J. Sotomayor. Structural stability and bifurcation theory, in *Dynamical Systems*, M. M. Peixoto (ed.). Academic Press, 549-560, 1973.
- [128] J. Sotomayor. Generic bifurcations of dynamical systems, in *Dynamical Systems*, M. M. Peixoto (ed.). Academic Press, 561-582, 1973.
- [129] R. Stanley Williams, How we found the missing memristor, *IEEE Spectrum* (December 2008) 29-35.
- [130] D. B. Strukov, G. S. Snider, D. R. Stewart and R. S. Williams, The missing memristor found, *Nature* **453** (2008) 80-83.
- [131] A. M. Stuart and A. R. Humphries, *Dynamical Systems and Numerical Analysis*, Cambridge University Press, 1996.
- [132] M. Takamatsu, Structural characterization of hybrid equations with tractability index at most two, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **411** (2014) 639-651.
- [133] M. Takamatsu and S. Iwata, Index reduction for differential-algebraic equations by substitution method, *Linear Algebra and its Applications* **429** (2008) 2268-2277.
- [134] M. Takamatsu and S. Iwata, Index characterization of differential-algebraic equations in hybrid analysis for circuit simulation, *Intl. J. Circuit Theor. Appl.* **38** (2010) 419-440.

- [135] C. Tischendorf, On the stability of solutions of autonomous index-1 tractable and quasi-linear index-2 tractable DAEs, *Cir. Sys. Signal Process.* **13** (1994) 139-154.
- [136] C. Tischendorf, Topological index calculation of DAEs in circuit simulation, *Surv. Math. Ind.* **8** (1999) 187-199.
- [137] C. Tischendorf, Coupled Systems of Differential Algebraic and Partial Differential Equations in Circuit and Device Simulation. Modeling and Numerical Analysis, Habilitationsschrift, Inst. Math., Humboldt University, Berlin, 2003.
- [138] B. Van der Pol, A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations, *Radio Rev.* **1** (1920) 701-710, 754-762; Selected Scientific Papers, vol. I, North Holland, 1960, pp. 228-237, 238-246.
- [139] J. Vandewalle and L. O. Chua, The coloured branch theorem and its application in circuit theory, *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **9** (1980) 816-825.
- [140] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, 1990.
- [141] X. Wu, V. Saxena and K. A. Campbell, Energy-efficient STDP-based learning circuits with memristor synapses, *Proc. SPIE Machine Intelligence and Bio-inspired Computation: Theory and Applications VIII*, 911906 (2014).
- [142] K. Yamamura and M. Tonokura, Formulating hybrid equations and state equations for nonlinear circuits using SPICE, *Intl. J. Circuit Theor. Appl.* **41** (2013) 101-110.
- [143] Y. Yilmaz and P. Mazumder, Image processing by a programmable grid comprising quantum dots and memristors, *IEEE Transactions on Nanotechnology* **12** (2013) 879-887.