GRUPO DE SISTEMAS COMPLEJOS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA AGROFORESTAL
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AGRONÓMICA, ALIMENTARIA Y
DE BIOSISTEMAS

MODELOS DE REDES ADAPTATIVAS CRÍTICAMENTE AUTO-ORGANIZADAS. APLICACIÓN AL ESTUDIO DE MODELOS DE POBLACIÓN

Alfonso Allen-Perkins Avendaño

Máster en Física de Sistemas Complejos
Máster en Globalización y Desarrollo
Ingeniero Industrial

Director: Juan Manuel Pastor Ruíz

Doctor en Ciencias Físicas

Codirector: Roberto Fernandes Silva Andrade

Doctor en Ciencias Físicas

2018

“You must get your living by loving”.¹

Henry David Thoreau

¹[Tho05]

Agradecimientos

Este trabajo no es una *tesis esférica en el vacío*. He necesitado ayudas de todo tipo para llegar hasta aquí.

A mis directores, Juanma y Roberto, les agradezco sinceramente sus muchos buenos ejemplos y el constante apoyo recibido, durante todos estos años. Ser vuestro doctorando es un privilegio.

A mis coautores, Javi (Galeano), Ernesto, Thiago y Alfredo, les quedo agradecido por las múltiples (¡y *múltiplex!*) oportunidades que me han dado de aprender a su lado.

A los integrantes del Grupo de Sistemas Complejos (UPM) y a los miembros del Grupo de “Física Estadística e Sistemas Complejos” (UFBa), les agradezco su excelente acogida, la mucha ayuda brindada, el gran estímulo recibido y la rigurosa formación proporcionada. En el caso particular del Grupo de Sistemas Complejos, también quiero agradecerle el importante esfuerzo económico que hizo para enviarme al congreso de Puebla (México).

A mis amistades les reconozco y agradezco su probada capacidad para airear-me el corazón y el cerebro.

A mi familia le debo el catalizador (¿heterogéneo?) que ha hecho posible todo lo anterior: Su amor insondable y sincero. Muchas gracias por su arropo más allá de las distancias a Sofía, Fer y Diego, así como a Hugo, Yoshi, Sammy y Snipy. Finalmente, muchas gracias a Iuliana y Pisi por formar parte de mi vida diaria y hacerla sustancialmente mejor. *Iubiyus!*

¡A todos muchas gracias!

Ե՛կ սեպհոյց մձ ԽճԼԵ ԳԼԼ ՏՄ ՇԻԽԱԿՅ. Ե՛կ սեպհոյց
մձ ՎԴՂԸ ՄԱԽՏՅ՝ Ե՛կ սեպհոյց մձ ԴԽԴՄԱ ՄԱԽՏ
ԳԼԼ ԿԴԸ ԴԴ ԴԴՂԸ ՄԱԽՏ ԽԴՄԱ ԿԴՏԵ ԺԸԱԽԽԵԴԸԽ

Resumen

En el contexto de la globalización, las sociedades humanas se han descrito como sistemas críticamente auto-organizados (SOC). Un evento banal, ocurrido en lugar y un instante cualesquiera, puede iniciar una reacción en cadena, capaz de afectar a un número arbitrariamente grande de individuos. En esta tesis, se proponen los ingredientes básicos para definir modelos de redes con dinámica SOC, aplicables al estudio de modelos de población.

En nuestra propuesta, los modelos se basan en redes adaptativas de osciladores Kuramoto acoplados, sujetas a una restricción de sincronización. Se define un *parámetro de orden local* (POL) que describe el grado de sincronización entre un nodo y sus primeros vecinos. A la red se le impone una mezcla asortativa por POL. La dinámica de los modelos se impulsa con la adición de nuevos enlaces, en cada paso de tiempo.

Para analizar la evolución del sistema anterior, se presentan varios conceptos y métodos analíticos. Se propone la noción de *asortatividad de vecindario*, como la tendencia de un nodo a pertenecer a una comunidad (su vecindario) que muestra una propiedad promedio similar a la suya. Haciendo uso de un modelo de red adaptativa, se muestra que la dinámica SOC se puede encontrar simplemente imponiendo la mezcla asortativa de vecindario según el grado. También se introduce la *asortatividad de dos-pasos* según el grado, una extensión del concepto de asortatividad de grado que captura la influencia de los segundos vecinos de un nodo. Se halla una expresión analítica para este nuevo índice en función de los subgrafos presentes en la red, y ésta se estudia en redes reales. Finalmente, se analizan las escalas de tiempo asociadas al parámetro de orden global y a la sincronización entre capas, en redes múltiplex de osciladores de Kuramoto acoplados. Se evidencia que la convergencia del parámetro de orden global es más rápida que la sincronización entre capas, y también que esta última generalmente es más rápida que la sincronización global del múltiplex.

Usando todas estas nuevas herramientas conceptuales y una muestra de 49 redes reales, se estudia la evolución temporal de las redes adaptativas de osciladores de Kuramoto. Las simulaciones por ordenador evidencian que, bajo ciertas condiciones, los modelos adaptativos, diseñados siguiendo estas pautas, generan dinámicas SOC, y estructuras similares a las de las interacciones socioeconómicas de las poblaciones humanas.

Abstract

In the context of globalization, human societies have been described as self-organized critical (SOC) systems. A banal event, occurring at any place and any time, can initiate a chain reaction, capable of affecting an arbitrarily large number of individuals. In this thesis we propose the basic ingredients to define network models with SOC dynamics, applicable to the study of population models.

In our proposal, the models are based on adaptive networks of coupled Kuramoto oscillators, subject to a synchronization constraint. We define a *local order parameter* (LOP) which describes the degree of synchronization between a node and its first neighbors. Then, an assortative mixing by LOP is imposed to the network. The models dynamics are driven by the addition of new links, at each time step.

To analyze the evolution of the prior system, several concepts and analytical methods were introduced. We presented the notion of *neighborhood assortativity*, as the tendency of a node to belong to a community (its neighborhood) showing an average property similar to its own. We showed that SOC dynamics can be found simply by imposing neighborhood assortative mixing by degree to an adaptive network model. We also introduced the *two-walks degree assortativity*, an extension of the concept of degree assortativity that accounts for the effect of second neighbors to a given node in a graph. We found an analytical expression for this new index as a function of contributing subgraphs, and we studied it in real-world networks. Finally, we analyzed the timescales associated with the global order parameter and the interlayer synchronization of coupled Kuramoto oscillators on multiplexes. We demonstrated that the convergence of the global order parameter is faster than the interlayer synchronization, and the latter is generally faster than the global synchronization of the multiplex.

Using all these new conceptual tools and a sample of 49 real-world networks, we studied the time evolution of the adaptive networks of Kuramoto oscillators. Computer simulations showed that, under certain conditions, the adaptive models designed in this way generate SOC dynamics, and structures similar to those of socio-economic interactions of human populations.

Indice

Agradecimientos	v
Resumen	vii
Abstract	ix
I Introducción y metodología	1
1. Introducción general	3
1.1. Las particularidades de los sistemas críticamente auto-organizados .	4
1.1.1. El concepto de criticalidad auto-organizada	4
1.1.2. Rasgos dinámicos clásicos de los sistemas críticamente auto-organizados: El ejemplo del modelo de pila de arena	6
Modelos de SOC con disipación	8
1.2. Criticalidad auto-organizada y redes adaptativas	9
1.3. Sincronización en redes adaptativas críticamente auto-organizadas .	10
1.4. Objetivos de este trabajo	12
1.5. Estructura del trabajo	13
2. Metodología	15
2.1. Breve caracterización de las redes complejas, atendiendo a su estructura	15
2.1.1. Redes: Definición y propiedades generales	16
2.1.2. Redes homogéneas y heterogéneas	17
2.1.3. Redes “mundo pequeño”	18
2.1.4. Redes asortativas y disasortativas	19
Mezcla asortativa según el grado y estructura de una red . . .	21
2.1.5. Redes modulares	22
2.1.6. Redes monoplex y múltiplex	22
2.2. Detección de dinámicas críticamente auto-organizadas	26
2.2.1. Funciones de correlación	26
2.2.2. Correlaciones espaciales no triviales	28

2.2.3. Correlaciones espaciales en redes complejas más allá de los primeros vecinos de un nodo	28
2.2.4. Escalado de tamaño finito	29
Hipótesis de multiescalado	30
Estabilidad marginal y régimen estacionario estadístico	32
2.2.5. Espectro de potencia	33
2.2.6. Fluctuaciones de energía liberada	34
2.2.7. Distribución de los tiempos de espera	35
2.3. Evolución del parámetro de orden en redes de osciladores de Kuramoto acoplados	36
2.3.1. Modelo de Kuramoto original	37
2.3.2. Modelo de Kuramoto en redes complejas	39
2.3.3. Tiempo de relajación del modelo de Kuramoto en redes complejas	40
Teoría espectral	40
Resultados para redes “mundo pequeño” [Rod+16]	41
Resultados para redes libres de escala [Rod+16]	42
2.3.4. El modelo de Kuramoto en topología múltiplex	44
2.3.5. Tiempo de relajación del modelo de Kuramoto en redes múltiplex	44
Tiempo de relajación del sistema empleando la Teoría espectral	44
Definición del tiempo de relajación del parámetro de orden de Kuramoto y de la sincronización entre capas en redes múltiplex	45
Tiempo de relajación lineal de la sincronización entre capas	46
Tiempo de relajación no-lineal de la sincronización entre capas	47
Estimación del tiempo de relajación del parámetro de orden global	49
II Colección de artículos	51
3. Inducing Self-Organized Criticality in a network toy model by neighborhood assortativity	53
3.1. Abstract	53
3.2. Introduction	54
3.3. Toy Model	55
3.4. Numerical Results	57
3.5. Statistical results	64
3.6. Conclusions	65
4. Two-Walks Degree Assortativity in Graphs and Networks	67

4.1. Abstract	67
4.2. Introduction	68
4.3. Preliminaries	69
4.4. Two-Walks Degree assortativity in Graphs and Networks	71
4.5. Main Result	73
4.6. Computational results	77
4.6.1. Small graphs	77
4.6.2. Real-world networks	78
4.7. Conclusions	79
5. Relaxation time of the global order parameter on multiplex networks: The role of interlayer coupling in Kuramoto oscillators	81
5.1. Abstract	81
5.2. Introduction	82
5.3. Kuramoto model in multiplexes and diffusion	84
5.4. Relaxation time of Kuramoto order parameter	86
5.5. Numerical results	90
5.5.1. Linear Kuramoto model	91
5.5.2. Non-linear Kuramoto model	95
5.6. Conclusions	100
III Discusión general	105
6. Análisis y discusión de resultados	107
6.1. Análisis y discusión de resultados del compendio de publicaciones .	108
6.1.1. Modelos de crecimiento sujetos a una restricción de las dife- rencias entre un nodo y sus primeros vecinos: Inducción de dinámicas críticamente auto-organizadas	108
6.1.2. Nuevos rasgos topológicos en redes reales y en modelos de crecimiento sujetos a una restricción de las diferencias entre un nodo y sus primeros vecinos: Estudio de la asortatividad de vecindario y la asortatividad de dos-pasos	109
6.1.3. La sincronización de redes de osciladores de Kuramoto en un escenario de dinámicas adaptativas críticamente auto-organizadas	113
6.2. Descripción integrada: Ejemplo de aplicación de los resultados de las publicaciones al desarrollo de modelos de población	117
6.2.1. Ejemplo de condición de estabilidad	118
6.2.2. Ejemplo de proceso de construcción de la red	119
6.3. Validación numérica de la aplicación propuesta	122

6.3.1. Estudio de la dinámica de una sintonización particular del modelo	123
6.3.2. Cuasi-criticalidad auto-organizada: La influencia de los valores de los parámetros en la dinámica del modelo	128
6.3.3. Comparación del modelo con redes reales	133
6.3.4. Comentarios sobre el ejemplo de aplicación presentado	136
7. Conclusiones generales	139
8. General conclusions	143
9. Futuras líneas de investigación	147
 IV Apéndices	 149
A. Real-world network dataset	151
B. Real-world network dataset II	155
C. Analytical results for a multiplex network formed by complete graphs	159
C.1. Eigenvalue spectrum of the supra-Laplacian matrix	159
C.2. Estimation of the average time evolution of the linear Kuramoto model	159
D. Árbol de decisión para clasificar redes atendiendo a su topología	165
D.1. Árboles de decisión con y sin asortatividad de grado de dos-pasos . .	166
E. Acerca de este documento	171
Bibliografía	173

Índice de figuras

1.1.	En una red adaptativa, la evolución de la topología depende de la dinámica de los nodos. Por lo tanto, se crea un ciclo de retroalimentación en el que es posible un intercambio dinámico de información. De [GB08].	10
2.1.	Crecimiento de un grafo al que se le añaden nodos en cada instante de tiempo, usando el mecanismo de enlace preferencial. Cada nodo se identifica por un color y cada nuevo vértice se conecta a una cantidad fija de nodos presentes en la red $m_{BA} = 2$. (a) t : El grafo semilla, un ciclo de tres nodos o triángulo, y el nuevo nodo (verde). (b) $t + 1$: Resultado de t y el nuevo nodo (cian). (c) $t + 2$: Resultado de $t + 1$ y el nuevo nodo (azul).	18
2.2.	Redes W-S compuestas por $N = 15$ nodos y $\langle k \rangle = 4$, al considerarse diferentes probabilidades de rebobinado p . (a) $p = 0.01$. (b) $p = 0.25$. (c) $p = 0.80$	20
2.3.	Ejemplo de una red multicapa compuesta por 6 capas. Nótese la diferente cantidad de nodos que puebla cada uno de los subconjuntos. Los datos se han visualizado empleando el software MuxViz [DDPA15].	23
2.4.	Ejemplo de una red multiplex simple con dos capas. Los datos se han visualizado empleando el software MuxViz [DDPA15].	24
2.5.	(a) Distribución acumulada $C(s L) = \sum_{k=s}^{s_{\max}} P_s(k L)$ de los tamaños de avalancha s para el modelo de pila de arena BTW, en una malla regular de tamaño lineal L . (b) Espectro multifractal $f_s(\alpha)$ de la distribución del tamaño de la avalancha P_s para diferentes tamaños lineales L . (c) Función de escalado $\sigma_s(q)$ del momento q de P_s , $\langle s^q \rangle \sim L^{\sigma(q)}$ obtenido del ajuste lineal de $\ln \langle s^q \rangle (L)$. La línea discontinua representa el ajuste de la región donde σ_s tiene dependencia lineal. La pendiente del ajuste lineal se usa para estimar $D_s = 2.8$ y $\tau_s = 1.31$. De [MG14].	33
2.6.	Tiempo de relajación dado por la Ec. 2.42 para redes “mundo pequeño”. (a) Grado promedio fijo $\langle k \rangle = 4$. (b) Longitud de camino más corto promedio fija $\langle \ell \rangle = 4$. El recuadro de (a) representa la distancia d (Ec. 2.41) a lo largo del tiempo. La línea continua se calcula usando la Ec. 2.43. De [Rod+16].	42
3.1.	Network snapshot for $C = 2.5$, at time $t = 3000$. The node's degree is size coded from $k = 1$ to 6.	58
3.2.	Average time evolution of the total number of nodes for different buffering capacity constants: $C = 2.0$ (blue line), $C = 2.5$ (red line), and $C = 2.75$ (black line). The inset shows the collapse of the different plots.	59
3.3.	(a) Time evolution of the network size normalized by the stationary system size for $C = 2$; the horizontal dashed line represents the average stationary system size. (b) Power spectra, for $C = 1$ (orange), $C = 4/3$ (red), $C = 2$ (purple), $C = 2.5$ (blue). Gray straight lines of slope m are guides for the eye: $m = -1.6$, dotted line; $m = -1.9$, dashed line; and $m = -2.0$, solid line.	60
3.4.	Normalized avalanche sizes evolution during 5000 time units for $C = 2$	60
3.5.	(a) Cumulative normalized event size distribution for different buffering capacity constants: $C = 1$ (theoretical), cyan line; $C = 1$, blue circles; $C = 4/3$, green pluses; $C = 2.0$, magenta stars; $C = 2.5$ red triangles, and $C = 2.75$, black squares. The dashed line with slope $\gamma = -0.8$ is a guide for the eye for the power-law regime. (b) Collapse of the same plot for $C \geq 2$	61
3.6.	a) Cumulative WTD for different buffering capacity constants: $C = 1.0$ (blue circles), $C = 1.33$ (green pluses), $C = 2.0$ (magenta stars), $C = 2.5$ (red triangles), and $C = 3.0$ (black squares), on log-lin scales. (b) Collapse of plots in (a) according to Eq. 3.5, for $C \geq 2$, with $\beta = 0.38$	62
3.7.	Probability distribution of removed nodes fluctuations for different time intervals $\Delta t = 1$ (blue circles), 10 (red asterisks), and 1000 (black pluses). The inset shows a zoom-in of positive values and the q -Gaussian fit for $\Delta t = 1, 10, 100, 1000$, with $\delta s < 20$ and $q = 2.2$	63
3.8.	Fluctuation function $F(d)$ for $C = 2.75$. The inset shows $F(d^*)$ functions for $C = 2$ (magenta circles), $C = 2.5$ (red triangles), and $C = 2.75$ (black squares); the dashed line is a guide for the eye with slope -0.7	63
3.9.	(a) Time evolution of the average system size (in percentage) for $C = 1$ and $L = 3$ (blue circles), $L = 4$ (green squares), $L = 5$ (red diamonds), $L = 6$ (cyan stars), $L = 7$ (black triangles); points are average results from numerical simulations and lines connecting points are theoretical results. (b) Time evolution of the average avalanche size (in percentage) for $C = 1$ and $s = 0$ (no-events) (blue circles), $s = 1$ (green squares), $s = 2$ (red diamonds), $s = 3$ (cyan stars), $s = 4$ (black triangles); points are average results from numerical simulations and lines connecting points are theoretical results	65

4.1.	Example of the structural effect that may produce a change from degree disassortative (left panel) to two-walks degree assortative (right panel) in a simple graph. Here the nodes are drawn in red if their degree (resp. two-walks degree) is smaller than the average degree, or blue otherwise. The size of the node is proportional to the magnitude of this difference.	73
4.2.	Degree and two-walks degree assortativities for all the connected graphs with 9 unlabelled nodes.	77
4.3.	Degree and two-walks degree assortativities for all the real-world networks studied in this work.	78
4.4.	Illustration of the differences between the degrees and mean degree of every node (top panels) and the same for the two-walks degrees (bottom panels) in the protein interaction network <i>B. subtilis</i> , food web of Scotch Broom, and transcription network of yeast from left to right.	79
5.1.	Example of an undirected multiplex network with two layers, G^1 and G^2 (data visualization with MuxViz [DDPA15]).	83
5.2.	Dependence on λ^{12} of the smallest nonzero eigenvalue σ_2 of the Laplacian matrices of layer 1 (blue triangles), layer 2 (magenta squares), the superposition of both layers (red rhombus), Λ_Δ (black circles) and Λ_2 (black continuous line). The results are presented for an $M = 2$ multiplex $\mathcal{M}$ with $N = 100$ nodes in each layer, when $\lambda^1 = \lambda^2 = 1$. Each layer consists of a scale-free network with degree distribution $P(k) \sim k^{-3}$	86
5.3.	Numerical results for $N = 500$, $\lambda = 2.0$, $\mu^1 = \pi/2$, $\mu^2 = 0$, and $\alpha = 0.1$. Each multiplex layer has the same topological features described in Fig. 5.2. Panels (a) and (b): Time evolution of $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$ (blue continuous line), $\eta_\Delta(t)$ (red circles) and $\eta_2(t)$ (black squares) for $\lambda^{12} = 0.1\lambda$ (a), and $\lambda^{12} = 10.0\lambda$ (b). Panels (c) and (d): Time evolution of $1 - r(t)$ (blue continuous line) and $\eta_r(t)$ (red circles) for $\lambda^{12} = 0.1\lambda$ (c), and $\lambda^{12} = 10.0\lambda$ (d).	92
5.4.	Time evolution of $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$, $\eta_\Delta(t)$ and $\eta_2(t)$ for $N = 50$, $\lambda = 2.0$, $\mu^1 = \pi/2$, $\mu^2 = 0$, and $\alpha = 0.1$. Each layer contains an Erdős-Rényi random graph with mean degrees $\langle k \rangle = 4.04$ and $\langle k \rangle = 5.4$, respectively. The used symbols and lines are the same as in Fig. 5.3a and Fig. 5.3b. (a) Left panel: $\lambda^{12} = 0.1\lambda$. (b) Right panel: $\lambda^{12} = 10.0\lambda$	93
5.5.	Time evolution of $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$, $\eta_\Delta(t)$ and $\eta_2(t)$ for $N = 50$, $\lambda = 1.0$, $\mu^1 = \pi/4$, $\mu^2 = 0$, and $\alpha = 0.01$. One layer contains an Erdős-Rényi random graph with mean degree $\langle k \rangle = 5.52$. The other one contains a network with asymptotic degree distribution $P(k) \sim k^{-3}$. The used symbols and lines are the same as in Fig. 5.3a and Fig. 5.3b. (a) Left panel: $\lambda^{12} = 0.1\lambda$. (b) Right panel: $\lambda^{12} = 10.0\lambda$	93
5.6.	Time evolution of $1 - r(t)$ and $\eta_r(t)$ for $N = 50$, $\lambda = 2.0$, $\mu^1 = \pi/2$, $\mu^2 = 0$, and $\alpha = 0.1$. The used symbols and lines are the same as in Figs. 5.3c and 5.3d. The multiplexes are the same as those used in Figs. 5.4a and 5.4b. (a) Left panel: $\lambda^{12} = 0.1\lambda$. (b) Right panel: $\lambda^{12} = 10.0\lambda$	94
5.7.	Time evolution of $1 - r(t)$ and $\eta_r(t)$. The used symbols and lines are the same as in Figs. 5.3c and Fig. 5.3d. The multiplexes are the same as those used in Figs. 5.5a and 5.5b. (a) Left panel: $\lambda^{12} = 0.1\lambda$. (b) Right panel: $\lambda^{12} = 10.0\lambda$	94
5.8.	Time evolution of $1 - r(t)$ (blue continuous line) and $\eta_r(t)$ (red circles) for $N = 10$, $\lambda = 2.0$, $\lambda^{12} = 10\lambda$, $\mu^1 = \pi/2$, $\mu^2 = 0$ and $\alpha = 0.1$. Each layer contains a complete graph. The inset shows the results by considering $\alpha = 0$	95
5.9.	Time evolution of $1 - r(t)$ and $\eta_r(t)$. $\lambda^{12} = 10\lambda$ in both panels, and the used symbols and lines are the same as in Fig. 5.8. (a) Left panel: The multiplexes are the same as those used in Figs. 5.4a and 5.4b, except for $N = 15$ and $\alpha = 0.0$. (b) Right panel: The multiplexes are the same as those used in Figs. 5.5a and 5.5b, except for $\alpha = 0.0$	95
5.10.	Time evolution of $1 - r(t)$ (blue continuous line), $\eta_r(t)$ (red circles) and a guide for the eye proportional to $e^{-2\lambda N t}$ (black squares), for $\lambda = 2.0$, $\lambda^{12} = 100\lambda$, $\mu^1 = \pi/2$, $\mu^2 = 0$, and $\alpha = 0.1$. Each layer contains a complete graph. (a) Left panel: $N = 10$. (b) Right panel: $N = 100$	96
5.11.	(a) Left panel: Time evolution of $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$, $\eta_\Delta(t)$, and $\eta_2(t)$. (b) Right panel: Time evolution of $1 - r(t)$ and $\eta_r(t)$. $\lambda^{12} = 0.1\lambda$ in both panels, and the used symbols and lines are the same as in Figs. 5.3a and 5.3c. The multiplexes are the same as those used in Fig. 5.3.	96
5.12.	(a) Left panel: Time evolution of $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$, $\eta_\Delta(t)$, and $\eta_2(t)$. (b) Right panel: Time evolution of $1 - r(t)$ and $\eta_r(t)$. $\lambda^{12} = 10.0\lambda$ in both panels, and the used symbols and lines are the same as in Figs. 5.3b and 5.3d. The multiplexes are the same as those used in Fig. 5.3.	97
5.13.	Time evolution of $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$, $\eta_\Delta(t)$ and $\eta_2(t)$. $\Omega_n^\alpha = 0$ for all n in both panels, and the used symbols and lines are the same as in Fig. 5.3a and Fig. 5.3b. The multiplexes are the same as those used in Figs. 5.5a and 5.5b. (a) Left panel: $\lambda^{12} = 0.1\lambda$. (b) Right panel: $\lambda^{12} = 10.0\lambda$	97
5.14.	Time evolution of $1 - r(t)$ and $\eta_r(t)$. $\Omega_n^\alpha = 0$ for all n in both panels, and the used symbols and lines are the same as in Figs. 5.3c and 5.3d. The multiplexes are the same as those used in Fig. 5.5a and Fig. 5.5b. (a) Left panel: $\lambda^{12} = 0.1\lambda$. (b) Right panel: $\lambda^{12} = 10.0\lambda$	98
5.15.	Time evolution of $1 - r(t)$ (blue continuous line) and $\eta_r(t)$ (red circles) for $N = 10$, $\lambda = 2.0$, $\lambda^{12} = 10\lambda$, $\mu^1 = \pi/2$, $\mu^2 = 0$, and $\alpha = 0.1$. Each layer contains a complete graph. The inset shows $\alpha = 0$	98
5.16.	Time evolution of $1 - r(t)$ (blue continuous line), $\eta_r(t)$ (red circles) and a guide for the eye proportional to $e^{-2\Lambda_2 t}$ (black squares). $\lambda^{12} = 10\lambda$ and $\Omega_n^\alpha = 0$. The multiplex is the same as those used in Figs. 5.4a and 5.4b, except for $N = 15$ and $\lambda = 1.0$	99
5.17.	Time evolution of $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$, $\eta_\Delta(t)$, and $\eta_2(t)$. The multiplex parameters, symbols and lines are the same as in Figs. 5.3a and 5.3b, except for $\Omega_n^\alpha \in \mathcal{U}(0.8, 1.2)$. (a) Left panel: $\lambda^{12} = 0.1\lambda$. (b) Right panel: $\lambda^{12} = 10.0\lambda$	99

5.18.	Time evolution of $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$, $\eta_\Delta(t)$, and $\eta_2(t)$. The multiplex parameters, symbols and lines are the same as in Fig. 5.3b. The model parameters are $\lambda = 2.0$, $\lambda^{12} = 10\lambda$, and $2\langle\Omega\rangle^{12} = \Lambda_\Delta$. Green triangles indicate the asymptotic value obtained with Eq. 5.17.	100
5.19.	Time evolution of $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$, $\eta_\Delta(t)$ and $\eta_2(t)$. The used symbols and lines are the same as in Fig. 5.18. The multiplex parameters are the same as those used in Figs. 5.5a and 5.5b, except for $\Omega_n^\alpha \in \mathcal{U}(0.8, 1.2)$ for all n . (a) Left panel: $\lambda^{12} = 0.1\lambda$. (b) Right panel: $\lambda^{12} = 10.0\lambda$	101
5.20.	Time evolution of $1 - r(t)$ and $\eta_r(t)$. The multiplex parameters, symbols and lines are the same as in Figs. 5.3c and 5.3d, except for $\Omega_n^\alpha \in \mathcal{U}(0.8, 1.2)$. (a) Left panel: $\lambda^{12} = 0.1\lambda$. (b) Right panel: $\lambda^{12} = 10.0\lambda$	101
5.21.	Time evolution of $1 - r(t)$ and $\eta_r(t)$. The used symbols and lines are the same as in Figs. 5.20a and 5.20b. The multiplex parameters are the same as those used in Fig. 5.5a and Fig. 5.5b, except for $\Omega_n^\alpha \in \mathcal{U}(0.8, 1.2)$ for all n . (a) Left panel: $\lambda^{12} = 0.1\lambda$. (b) Right panel: $\lambda^{12} = 10.0\lambda$	102
5.22.	Time evolution of $\sin\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$ (blue continuous line) and the results adapted from Eq. 5.19 (red circles) for $N = 500$, $\lambda = 2.0$, $\lambda^{12} = 10\lambda$, $\mu_1 = \pi/2$, $\mu_2 = 0$, $\alpha = 0.1$ and $2.8\Lambda_\Delta = \langle\Omega\rangle^{12} $. The multiplex parameters are the same as those used in Fig. 5.3.	102
6.1.	Asortatividad de grado, r_k , y assortatividad de dos-pasos, $r_{\tilde{k}}$, calculadas para las redes del modelo de [APGP16], empleando la metodología de [APPE17], cuando el sistema se halla en un régimen estacionario estadístico. Los datos se han obtenido al simular el sistema durante $t = 5000$ unidades de macro-tiempo, con $C = 3$	112
6.2.	(a) Ejemplo de correlación de grado en las redes del modelo de [APGP16], empleando el método de [PSVV01]. (b) Ejemplo de correlación de grado local de dos-pasos, en las redes del modelo de [APGP16], empleando el método de [PSVV01]. Los datos se han calculado, a partir de una simulación con $C = 3.0$, durante $t = 5000$ unidades de macro-tiempo, empleando la red de tamaño máximo obtenida durante la simulación. En la red analizada, los coeficientes de correlación de Pearson de las assortatividades de grado y grado de dos-pasos son $r_k = -1.91 \cdot 10^{-4}$ (asortatividad de grado nula) y $r_{\tilde{k}} = 4.49 \cdot 10^{-1}$ (elevada assortatividad de grado de dos-pasos) respectivamente.	113
6.3.	Instantánea de red una red del modelo de [APGP16], obtenida cuando $C = 3.0$, tras $t = 5000$ unidades de macro-tiempo. El grado del nodo tiene un tamaño codificado de $k = 1$ a 6 . El recuadro muestra un detalle de la red. En éste se han destacado los nodos separadores (círculos de color rojo y línea discontinua).	114
6.4.	Evolución de una red con $m = 274$ enlaces y 63 nodos en la componente gigante inicialmente, durante una unidad de macro-tiempo, cuando los parámetros del sistema son $N = 100$, $T_g = 3$, $\lambda = 1$, $\omega_0 = 20$, $\delta\theta = \pi$ y $\mathcal{U} = 0.05$. Los enlaces estables (inestables) se muestran en color verde (rojo). Los nodos que pertenecen a la componente gigante se han sombreado en color amarillo. Los nodos sin vecinos ($k_n = 0$) no poseen sombreado. (a) Inicio del instante de tiempo t . (b) Adición de $m_{BA} = 3$ nuevos enlaces. (c) Resultado, tras la integración de Ec. 2.37. (d) Resultado del proceso de relajación: 46 roturas y 2 escisiones (nodos de color rojo), durante dos unidades de micro-tiempo.	121
6.5.	(a) Evolución macro-temporal de la cantidad de enlaces del sistema m , cuando $N = 100$ (línea azul sólida) y $N = 250$ (línea roja discontinua). (b) Evolución macro-temporal del tamaño de las avalanchas s de los anteriores sistemas: $N = 100$ (línea azul sólida) y $N = 250$ (línea roja discontinua). Los datos se han obtenido al simular el sistema con $m_{BA} = 3$, $T_g = 3$, $\lambda = 1$, $\omega_0 = 20$, $\delta\theta = \pi$ y $\mathcal{U} = 0.05$	123
6.6.	Evolución macro-temporal de la cantidad de enlaces del sistema m . Los datos se han obtenido al simular el sistema con $m_{BA} = 3$, $T_g = 3$, $\lambda = 1$, $\omega_0 = 20$, y $\delta\theta = \pi$. (a) Los enlaces de manera aleatoria, $N = 100$, y $\mathcal{U} = 0.5$. (b) Los enlaces de manera preferencial, $N = 50$, y $\mathcal{U} = 0.5$	124
6.7.	(a) Evolución de la cantidad promedio de avalanchas, ζ , para varios tamaños del sistema: $N = 50$ (círculos rojos), $N = 100$ (cuadrados naranjas), $N = 150$ (triángulos cian), $N = 250$ (rombos azules), $N = 500$ (hexágonos magenta), y $N = 750$ (cruces negras). Los datos se han obtenido al simular el sistema durante $t = 25000$ unidades de macro-tiempo, con $m_{BA} = 3$, $T_g = 3$, $\lambda = 1$, $\omega_0 = 20$, $\delta\theta = \pi$ y $\mathcal{U} = 0.05$. (b) Colapso de los regímenes estacionarios de las anteriores curvas.	125
6.8.	Distribución acumulada $C_s(s N) = \sum_{k=s}^{s_{\max}} P_s(k L)$ de los tamaños de avalancha s , calculada para varios tamaños del sistema: $N = 50$ (círculos rojos), $N = 100$ (cuadrados naranjas), $N = 150$ (triángulos cian), $N = 250$ (rombos azules), $N = 500$ (hexágonos magenta), y $N = 750$ (cruces negras). Los datos se han obtenido al simular el sistema durante $t = 25000$ unidades de macro-tiempo, con $m_{BA} = 3$, $T_g = 3$, $\lambda = 1$, $\omega_0 = 20$, $\delta\theta = \pi$ y $\mathcal{U} = 0.05$. La línea discontinua es una guía visual con pendiente -0.5	126
6.9.	(a) Espectro multifractal $f_s(\alpha)$ de la distribución del tamaño de la avalancha P_s para las curvas de la Fig. 6.8. La línea discontinua es una guía visual con pendiente -0.5 . (b) Función de escalado $\sigma_s(q)$ del momento q de P_s , $\langle s^q \rangle \sim L^{\sigma(q)}$ (círculos rojos), obtenido del ajuste lineal de $\ln\langle s^q \rangle$ (L), cuando $N = 750$. La línea azul representa el ajuste de la región donde σ_s tiene dependencia lineal ($q \geq 10$).	126
6.10.	Distribuciones de probabilidad de las fluctuaciones de energía $P(\delta S_{\Delta t})$ cuando $\Delta t = 1$ (círculos rojos), $\Delta t = 10$ (cuadrados naranjas), $\Delta t = 100$ (triángulos cian), y $\Delta t = 1000$ (rombos azules). Los datos se han obtenido simulando el sistema durante $t = 25000$ unidades de macro-tiempo, con $N = 100$, $T_g = 3$, $\lambda = 1$, $\omega_0 = 20$, $\delta\theta = \pi$ y $\mathcal{U} = 0.05$	127

6.11.	Evolución macro-temporal de la cantidad de enlaces m , calculada para varias funciones $\Omega_n = Y/(k_n + 1)$: $\omega_0 = 5$ (círculos rojos), $\omega_0 = 20$ (cuadrados negros), y $\omega_0 = 80$ (triángulos azules). Los datos se han obtenido al simular el sistema durante $t = 10000$ unidades de macro-tiempo, con $N = 100$, $m_{BA} = 3$, $T_g = 3$, $\lambda = 1$, y $\delta\theta = \pi$. En los recuadros se muestran los detalles de las curvas anteriores en escala log-log, cuando $s \leq 10$. (a) $U = 0.025$. (b) $U = 0.050$. (a) $U = 0.100$	129
6.12.	Distribución acumulada de los tamaños de avalancha s , $C_s(s \omega_0)$, calculada para varias funciones $\Omega_n = Y/(k_n + 1)$: $\omega_0 = 5$ (línea continua roja), $\omega_0 = 20$ (línea discontinua negra), y $\omega_0 = 80$ (línea azul punteada). Los datos se han obtenido al simular el sistema durante $t = 10000$ unidades de macro-tiempo, con $N = 100$, $m_{BA} = 3$, $T_g = 3$, $\lambda = 1$, y $\delta\theta = \pi$. En los recuadros se muestran los detalles de las curvas anteriores en escala log-log, cuando $s \leq 10$. (a) $U = 0.025$. (b) $U = 0.050$. (a) $U = 0.100$	129
6.13.	Resultados obtenidos para varias cantidades de conexiones añadidas al inicio de cada instante t , m_{BA} , al simular el sistema durante $t = 20000$ unidades de macro-tiempo, con $N = 100$, $T_g = 3$, $\lambda = 1$, $\omega_0 = 20$, $\delta\theta = \pi$ y $U = 0.05$. En el recuadro se muestra un detalle de las curvas anteriores en escala log-log, cuando $s \leq 10$. (a) Evolución macro-temporal de la cantidad de enlaces m : $m_{BA} = 1$ (línea roja sólida), $m_{BA} = 3$ (línea negra discontinua), y $m_{BA} = 4$ (línea azul punteada) (b) Distribución acumulada de los tamaños de avalancha s , $C_s(s m_{BA})$: $m_{BA} = 1$ (círculos rojos), $m_{BA} = 3$ (cuadrados negros), y $m_{BA} = 4$ (triángulos azules).	131
6.14.	Distribución acumulada de los tamaños de avalancha s , $C_s(s T_g)$, calculada para varios tiempos de integración: $T_g = 1$ (círculos rojos), $T_g = 3$ (cuadrados negros), y $T_g = 6$ (triángulos azules). Los datos se han obtenido al simular el sistema durante $t = 20000$ unidades de macro-tiempo, con $N = 100$, $m_{BA} = 3$, $\lambda = 1$, $\omega_0 = 20$, $\delta\theta = \pi$ y $U = 0.05$. En el recuadro se muestra un detalle de las curvas anteriores en escala log-log, cuando $s \leq 10$	131
6.15.	Resultados obtenidos para varias fuerzas de acoplamiento entre osciladores, λ , al simular el sistema durante $t = 20000$ unidades de macro-tiempo, con $N = 100$, $m_{BA} = 3$, $T_g = 3$, $\omega_0 = 20$, $\delta\theta = \pi$ y $U = 0.05$. En el recuadro se muestra un detalle de las curvas anteriores en escala log-log, cuando $s \leq 10$. (a) Evolución macro-temporal de la cantidad de enlaces m : $\lambda = 0.5$ (línea roja sólida), $\lambda = 1$ (línea negra discontinua), y $\lambda = 3$ (línea azul punteada) (b) Distribución acumulada de los tamaños de avalancha s , $C_s(s \lambda)$: $\lambda = 0.5$ (círculos rojos), $\lambda = 1$ (cuadrados negros), y $\lambda = 3$ (triángulos azules).	132
6.16.	Distribución acumulada de los tamaños de avalancha s , $C_s(s \delta\theta)$, calculada para diferentes condiciones iniciales de fase: $\delta\theta = 0$ (círculos rojos), $\delta\theta = \pi/2$ (cuadrados negros), y $\delta\theta = \pi$ (triángulos azules). Los datos se han obtenido al simular el sistema durante $t = 20000$ unidades de macro-tiempo, con $N = 100$, $m_{BA} = 3$, $T_g = 3$, $\lambda = 1$, $\omega_0 = 20$, y $U = 0.05$	133
6.17.	Evolución macro-temporal de la cantidad de nodos de la componente conexa n_g (línea negra), cuando $m_{BA} = 3$, $T_g = 3$, $\lambda = 1$, $\omega_0 = 20$, $\delta\theta = \pi$ y $U = 0.05$. Cuando la topología se puede clasificar como una red "social o económica" se marca con un cuadrado rojo. Con cuadrados verdes se marcan las "redes ecológicas" y con "triángulos negros" los restantes tipos de redes. (a) $N = 50$. (b) $N = 100$	135
C.1.	Time evolution of $1 - r(t)$ (blue continuous line) and the results obtained with Eq. C.23 (red circles) for $N = 10$, $\lambda = 2.0$, $\lambda^{12} = 100\lambda$, $\mu_1 = \pi/2$, $\mu_2 = 0$ and $\alpha = 0.1$. Each layer contains a complete graph	163
D.1.	Árbol de descisión estimado para clasificar las 49 redes reales de los apéndices A y B, atendiendo a sus respectivos dominios.	167
D.2.	Árbol de descisión estimado para clasificar las 49 redes reales de los apéndices A y B, atendiendo a sus respectivos dominios. Para su confección no se han empleado los datos de la asortatividad de dos-pasos (r_k) de las redes reales.	168

Índice de cuadros

2.1. Dependencia del parámetro de orden modificado r' , el tiempo de relajación τ_r^{-1} y la susceptibilidad χ de la fuerza del acoplamiento λ , en redes con distribución de grado libre de escala $P(k) \sim k^{-\gamma}$ cerca del estado de sincronización, cuando el campo es nulo $a = 0$; y como una función de la amplitud del campo, cuando $\lambda = \lambda_c$. De [Yoo+15] en [Rod+16].	43
4.1. Collection of subgraphs in Eq. 4.8, excluding the paths P_2, P_3, P_4, P_5 , and the cycle C_3	74
A.1. Dataset of real-world networks: network name, domain, N number of nodes, m number of links, reference, degree and two-walks degree assortative coefficients.	152
B.1. Dataset of real-world networks: network name, domain, shortest path length, transitivity, clustering coefficient, small-world-ness coefficient, and modularity.	156

Parte I

Introducción y metodología

1 | Introducción general

La globalización ha acrecentado los niveles de interdependencia y complejidad de las sociedades humanas. Consecuencia de ello, un acontecimiento banal, ocurrido en un lugar y un instante cualesquiera, puede iniciar una reacción en cadena, capaz de afectar a un número arbitrariamente grande de individuos. Zygmunt Bauman, al abordar el desafío ético de la globalización, lo expresó así:

“Lo que hacemos (o nos abstenemos de hacer) puede influir en las condiciones de vida (o de muerte) de gente que vive en lugares que nunca visitaremos y de generaciones que no conoceremos jamás” [Bau01].

Otros sociólogos han expresado esta misma idea haciendo uso de un concepto de las ciencias de la complejidad: Las sociedades humanas son *sistemas críticamente auto-organizados* [KG09].

Este trabajo se interesa por tal propuesta, debido a los rasgos inherentes a las dinámicas críticamente auto-organizadas [Bak96]:

1. El resultado de un acontecimiento depende de la historia de todo el conjunto, incluidos los pequeños eventos pasados. De este modo, para entender el sistema, se está obligado a analizarlo durante largos periodos de tiempo.
2. Los acontecimientos catastróficos son una consecuencia de las mismas dinámicas que producen los eventos cotidianos; no un producto de sucesos extraordinarios.
3. Pese a que haya mayor cantidad de acontecimientos pequeños, la mayor parte de los cambios del sistema está asociada a eventos grandes o catastróficos.

Se ha realizado una búsqueda de modelos de redes sociales en los que se emplee una dinámica críticamente auto-organizada. Sin embargo, no se han hallado resultados positivos. De hecho, en general, son escasos los estudios sobre redes (de cualquier tipo) y criticalidad auto-organizada.

En este contexto, se presenta este trabajo, un estudio preliminar para la formulación de modelos de redes críticamente auto-organizadas que puedan emplearse para describir la evolución de las interacciones entre los individuos de una cierta población.

Con objeto de capturar la posibilidad de que el estado de las personas (o agentes) pueda alterar su red de contactos y viceversa, los modelos que se proponen en esta tesis son *adaptativos*. Esto es, se utilizan modelos en los que existe una retroalimentación entre las dinámicas propias de cada elemento del sistema (es decir, la evolución de las propiedades de nodos y/o enlaces) y los contactos entre los mismos (es decir, la topología de la red). Debido a la novedad de los modelos adaptativos, el enfoque adoptado refuerza el valor de esta investigación.

Por otro lado, en esta tesis además se estudian las relaciones humanas desde la óptica de la *sincronización*: la coordinación de individuos que interactúan dinámicamente, en ausencia de una autoridad central [Are+08]. Por sus características, este fenómeno complejo y emergente es compatible con el marco de la auto-organización. En el caso de los humanos, con frecuencia sus interacciones se han modelado haciendo uso de osciladores no lineales de fase [SCT90; AST95; Sch+94; YY11]. A tales efectos, en los modelos se considerará la posibilidad de que los nodos de las redes sean osciladores y sus dinámicas adaptativas dependan del grado de sincronización entre los nodos y sus vecinos.

En aras de desarrollar los anteriores aspectos, a continuación se indica la estructura de este capítulo. En la Sec. 1.1, se presenta una breve caracterización de las particularidades de los sistemas críticamente auto-organizados. Como se desea modelar una red con tal dinámica, posteriormente, en la Sec. 1.2 se revisan las características generales de los modelos de redes complejas empleados para su estudio. Por otro lado, en la Sec. 1.3 se introduce el concepto de sincronización y su interés para este trabajo. Atendiendo la información presentada en los anteriores apartados, en la Sec. 1.4, se establecerán los objetivos para esta tesis. Finalmente, en la Sec. 1.5, se describirá la estructura de la misma.

1.1 Las particularidades de los sistemas críticamente auto-organizados

1.1.1 El concepto de criticalidad auto-organizada

La *criticalidad auto-organizada* (SOC, por sus siglas en inglés: *Self-Organized Criticality*) es considerada como uno de los mecanismos que generan la complejidad que nos rodea [Bak96].

El concepto criticalidad auto-organizada fue introducido por Bak *et al.* en 1987 [BTW87]. Con él se alude a la capacidad que poseen ciertos sistemas disipativos abiertos, compuestos por muchos elementos, para mantenerse cerca de un punto (o estado) crítico, sin la intervención de un agente externo.¹ El estado crítico de un sistema, por su parte, hace referencia a la tendencia (macroscópica) de un conjunto a romper su simetría y desarrollar en su seno largas correlaciones espaciales y temporales (típicas de una transición de fase de segundo orden).²

Tal y como indican Marković y Gros, la característica más atrayente de la teoría SOC es su relación con el campo de las transiciones de fase y la noción de universalidad [MG14]. La hipótesis de la universalidad [Kad90] agrupa los fenómenos críticos en un pequeño número de clases de universalidad. Los sistemas que pertenecen a la misma clase de universalidad comparten los valores de los exponentes críticos y siguen funciones de escalado equivalentes [Sta99] (ver Cap. 2). Este comportamiento universal cerca de un punto crítico lo causa la existencia una longitud de correlación divergente. La longitud de correlación es mucho mayor que el rango de las interacciones microscópicas, por lo que el comportamiento colectivo del sistema y sus componentes se vuelve independiente de sus detalles microscópicos. Esto implica que incluso el modelo más simple captura todos los aspectos del comportamiento crítico de la clase de universalidad correspondiente.

Desde el artículo original, se han identificado muchos ejemplos empíricos vinculados a las dinámicas de SOC. Por ejemplo, los terremotos [PS03], las llamaradas solares [LH91], la actividad neuronal [BP03] o las pilas de arena [Hel+90; Gru+93]. Estos sistemas físicos se caracterizan por un flujo constante de materia y energía desde y hacia el ambiente. Por lo tanto, son intrínsecamente sistemas fuera del equilibrio.³

De todos modos, a pesar de la evidencia de que sistemas físicos bastante diferentes exhiben propiedades dinámicas similares a modelos con dinámicas críticamente auto-organizadas, no hay pruebas de que este mecanismo sea la verdadera explicación causal [MG14]. Aún persiste una controversia sustancial con respecto a la interpretación de los datos empíricos, y permanece abierto el debate sobre las características generales de la criticalidad auto-organizada, o las condiciones necesarias y suficientes para su aparición [Pru12]. Todo ello hace de la criticalidad auto-organizada un campo de investigación activo.

¹En el caso del SOC, el punto crítico se alcanza espontáneamente, no por un ajuste externo del parámetro de orden del sistema. Un ejemplo de la situación contraria se encuentra en una transición ferromagnética. Para obrar un cambio abrupto en las propiedades magnéticas de un material ferromagnético, sí es necesario que un agente externo modifique la temperatura de dicho sistema.

²Generalmente resumidas en un escalado genérico, según una ley de potencias.

³Así todo, el concepto de universalidad sigue siendo aplicable a las transiciones de fase fuera del equilibrio.

1.1.2 Rasgos dinámicos clásicos de los sistemas críticamente auto-organizados: El ejemplo del modelo de pila de arena

Para determinar las propiedades físicas de estas dinámicas se han propuesto diferentes tipos de modelos [Pru12].

El modelo arquetípico es el modelo de la pila de arena (modelo BTW) [BTW88]. En éste, un autómata celular imita el proceso de formación de un montón de arena, a partir de la adición de los granos, uno a uno. Para describir el modelo, se va a seguir la notación de [MG14]. En general, se define un retículo de dimensionalidad d , con un tamaño lineal L , que contiene $N = L^d$ puntos de intersección o nodos. Esta malla equivale a la base del montón de arena. A cada nodo se le asocia una variable positiva real o entera, h , que da cuenta de la altura local de la pila de arena (a veces también denominado el nivel de energía local o estrés local). Para imitar la adición de un grano al montón (esto es, es la interacción del sistema con el entorno), se selecciona aleatoriamente un único nodo en cada paso de tiempo t y se le agrega una pequeña cantidad de energía δh a su nivel de energía local,

$$h_{\vec{r}}(t+1) = h_{\vec{r}}(t) + \delta h \quad (1.1)$$

donde el índice $\vec{r} = (r_1, \dots, r_d)$, $r_i \in 1, \dots, L$ representa la localización del nodo en la retícula d -dimensional. Si h es una variable entera positiva, entonces el aumento de la altura local procede en pasos discretos, usualmente ajustando $\delta h = 1$.

El modelo simula la inestabilidad mecánica propia de las pilas de arena reales haciendo uso de un umbral predefinido de altura (o diferencia de altura máxima relativa a los vecinos), h_T . Los granos se mantendrán en su posición siempre y cuando no aparezcan desniveles (verticales) superiores a ese umbral. Si aparece un talud con una gran inclinación (es decir, si la energía en algún nodo alcanza o excede un valor de umbral predefinido h_T), la configuración de energía del sistema se vuelve inestable. En tal tesitura, la fuente externa se detiene y la energía local se redistribuye simulando que desde la parte más alta del talud se desprenden uno o varios granos, tal y como se describe a continuación:

1. Primero, el nivel de energía del nodo activo, para el cual $h_{\vec{r}} \geq h_T$, se reduce en una cantidad Δh .

$$h_{\vec{r}} \rightarrow h_{\vec{r}} - \Delta h \quad (1.2)$$

2. En segundo lugar, los vecinos más cercanos del nodo activo reciben una fracción α de la energía perdida Δh . Denotando con $\vec{e}_n$ la ubicación relativa

de los vecinos más cercanos con respecto a la ubicación del nodo activo $\vec{r}$, podemos escribir

$$h_{\vec{r}+\vec{e}_n} \rightarrow h_{\vec{r}+\vec{e}_n} + \beta \Delta h \quad (1.3)$$

Por ejemplo, en el caso de un malla bidimensional ($d = 2$) tenemos $\vec{e}_n = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$.

3. La actualización se repite siempre que haya uno o varios nodos activos (es decir, hasta que la configuración de energía se estabilice o hasta que no haya taludes en exceso inclinados).

El anterior proceso de desestabilización permite la aparición de *avalanchas*: el movimiento de granos de arena sobre la superficie de la pila, sin necesidad de que intervenga un agente externo. Consecuencia de ello, el sistema se auto-organiza.

Para que la avalancha dure un lapso de tiempo finito (es decir, para que el sistema alcance una configuración estable, correspondiente a un estado absorbente⁴), es necesario permitir que la energía se disipe en los límites de la malla (es decir, permitir que los granos puedan caer de la mesa). Ello se logra manteniendo vacíos a los nodos del contorno del sistema.

Cuando la arena (o la energía) se conserva localmente durante la avalancha (esto es, cuando $\beta = 1/2d$), el flujo entrante de granos de arena (o energía) y las avalanchas permiten que el montón de arena alcance un estado en el que el ángulo que forman sus laderas con el suelo (o soporte horizontal) se mantiene, grosso modo, constante. Las avalanchas, especialmente las grandes, se encargan de ello. Cuando la pila es capaz de mantener el ángulo, ésta se encuentra en un estado crítico.

El interés del anterior comportamiento radica en que, cuando la pila de arena alcanza el estado crítico, es imposible anticipar si la adición de un nuevo grano pondrá en movimiento uno o unos pocos granos (*evento pequeño*); o si –por el contrario– se provocará el colapso de toda la ladera (*evento catastrófico*). Lo único que se conoce con antelación es que los eventos pequeños son mucho más frecuentes que los grandes o catastróficos, siendo la distribución de tamaños de las avalanchas una ley de potencias.

Las principales consecuencias de la dinámica de la pila de arena son las señaladas al inicio de esta introducción [Bak96]:

⁴Un estado absorbente es una configuración en la que el sistema se queda atrapado indefinidamente, en ausencia de interacción con el entorno. En el caso de un modelo de pila de arena, sería una configuración donde no hay nodos activos, esto es, $h_{\vec{r}} \in [0, h_T - 1]$ en cada nodo. Por lo tanto, en el límite termodinámico existen infinitamente muchos estados absorbentes.

1. El resultado de añadir un grano al montón depende de la historia de todo el conjunto, incluidos los pequeños acontecimientos pasados. Por tanto, para entender el sistema, se está obligado a analizarlo durante largos periodos de tiempo.⁵
2. Los eventos catastróficos a gran escala (como el colapso de una ladera) son una consecuencia de las mismas dinámicas que producen los eventos cotidianos (como el movimiento de unos pocos granos); no un producto de sucesos extraordinarios.
3. Pese a que haya mayor cantidad de eventos pequeños, la mayor parte de los cambios del sistema está asociada con eventos grades o catastróficos.

Modelos de SOC con disipación

Los modelos críticamente auto-organizados, como el modelo BTW descrito en la sección previa, requieren que el número de granos de arena (o la energía) se conserve localmente, durante las avalanchas, para mostrar un comportamiento de escalamiento crítico. En [BM09], Bonachela y Muñoz ponen de manifiesto que la presencia de dinámicas con disipación local de energía durante una avalancha (como, por ejemplo, la que se produciría si se eliminasen aleatoriamente uno o más granos de arena, durante su desprendimiento del talud) impiden que un sistema alcance un auténtico estado de criticalidad.

Para recuperar el equilibrio energético y así lograr comportamiento críticamente auto-organizado (o al menos el comportamiento “casi crítico”), se requiere la incorporación de un mecanismo de carga adicional, con el que complementar la agregación estocástica de partículas o energía. El nuevo mecanismo debe aumentar la energía total dentro del sistema, acercándolo al punto crítico, pero sin iniciar una avalancha [BM09]. Si y sólo si el proceso de carga adicional está perfectamente ajustado para generar la energía precisa, se observa una verdadera criticalidad.

En el límite de un sistema de tamaño infinito, es fácil lograr un “ajuste fino” del mecanismo adicional de carga y, por ende, la criticalidad [BM09]. Sin embargo, cuando el tamaño es finito, se requiere una afinación precisa. De todos modos, incluso con el parámetro de carga bien sintonizado, la dinámica del sistema finito sólo se desplazará cerca del estado crítico, sin alcanzarlo exactamente. Bonachela y Muñoz denominaron a este comportamiento *cuasi-criticalidad auto-organizada* (SOqC, por sus siglas en inglés) [BM09].

⁵El tiempo de análisis se estima que es del orden del tiempo necesario para que la pila de arena alcance el estado crítico, partiendo de un grano [Bak96].

1.2 Criticalidad auto-organizada y redes adaptativas

En el apartado precedente se han presentado las características generales de las dinámicas críticamente auto-organizadas. Dado que se desea modelar una red con tal dinámica, ahora se revisan las características generales de los modelos de redes complejas empleados para su estudio.

Una red compleja básicamente es una estructura matemática formada por nodos conectados por enlaces (véase el capítulo 2.1). Su uso se ha popularizado a la hora de estudiar sistemas complejos, compuestos por una gran cantidad de elementos que interactúan. Los nodos de la red representan los componentes del sistema, mientras que los enlaces simbolizan las relaciones entre ellos (enlaces físicos, canales de comunicación, etcétera). Ejemplos típicos de sistemas complejos modelados como redes son internet, las redes corticales, las redes metabólicas, las interacciones entre presas y depredadores, las redes epidémicas, las redes sociales o las redes comerciales, entre muchos otros [CG09].

Una de las ventajas de las redes complejas es que permiten crear modelos que exhiben dinámicas críticamente auto-organizadas. A grandes rasgos, se pueden distinguir dos grandes grupos de trabajos. El primero está integrado por estudios donde cada nodo de la red representa un sistema dinámico, acoplado de acuerdo con una topología estática⁶ [Bon95; Goh+05; DAH02; MV02; Lee+04a; Lee+04b; KM05; LKK05; BS13; HMA13]. En estos trabajos fundamentalmente se explora la influencia de topologías no regulares sobre los exponentes de escala de los modelos de criticalidad auto-organizada estudiados en mallas regulares. En [MG14] se resumen los principales resultados de estos estudios.⁷

La asunción básica en los anteriores modelos es que los cambios de la topología son muy lentos comparados con la escala temporal de la dinámica de los nodos. Sin embargo, en la mayoría de las redes del mundo real la evolución de la topología está invariablemente vinculada al estado de la red y viceversa. Ambos tipos de cambios pueden ocurrir en escalas temporales comparables, o bien, incluso cuando dichas escalas están realmente bien separadas, las variables involucradas en el proceso más lento han de especificarse como parámetros externos. Por eso, se intrujo una segunda categoría de modelos, denominados *adaptativos* en los que la red de interacciones se convierte también en una variable dinámica, y se establece una retroalimentación entre los procesos dinámicos de la red y la topología de la misma [GB08; CG09] (véase la Fig. 1.1). Grosso modo, se vincula

⁶La topología de una red, a grandes rasgos, es la disposición en la que se conectan sus distintos nodos.

⁷El resultado más destacable del estudio de modelos de pila de arena en redes de topología compleja (y estática) quizás sea que los exponentes de escalamiento dependen genéricamente de la estructura fina de la red. Ello sugiere que el número de las clases de universalidad es muy grande, cuando no infinito [MG14].

la existencia de un enlace al valor que toma una propiedad en cada uno de sus extremos. A dicha propiedad se le denomina *parámetro de adecuación*. La criticidad en los modelos adaptativos se logra o bien modificando el parámetro de adecuación o a través de un proceso de rebobinado (o cambio) de los enlaces [BM04; FFH06; CG09; WMY15; Wan+16].

FIG. 1.1: En una red adaptativa, la evolución de la topología depende de la dinámica de los nodos. Por lo tanto, se crea un ciclo de retroalimentación en el que es posible un intercambio dinámico de información. De [GB08].

En esta tesis nos decantamos por emplear los modelos adaptativos. Además de su novedad, son los únicos modelos que toman en consideración la posibilidad de que las personas puedan cambiar su comportamiento y su red de contactos sociales. Este último rasgo nos parece especialmente pertinente para un modelo que aspira describir la evolución de las interacciones sociales dentro de una población.

1.3 Sincronización en redes adaptativas críticamente auto-organizadas

Caracterizar las acciones colectivas de los individuos y la actividad agregada de una sociedad constituye un desafío central tanto para la sociología como para la economía [Mor+17]. En aras de comprender estas dinámicas complejas, se ha acudido al estudio de la *sincronización*, un fenómeno emergente, propio de una población de unidades que interactúan dinámicamente [Are+08]. Específicamente la sincronización se interesa por cuán coordinados están los elementos que integran un sistema. Dicho nivel de coordinación se denomina *grado de sincronización* y matemáticamente se cuantifica a través de un cierto parámetro de orden, cuya evolución depende típicamente de la fuerza de las interacciones entre los

componentes (o agentes) que integran el sistema. Es importante destacar que en la sincronización no existe una autoridad central que organice a las unidades. Luego es un fenómeno auto-organizado. Por estos rasgos, la sincronización juega un papel destacado en muchos otros contextos, como, por ejemplo, en la biología, la ecología, la climatología, la tecnología o incluso en las artes [Are+08].

En el caso de los humanos, la sincronización se ha abordado desde la escala micro hasta la macro. Los estudios se interesan por las interacciones que se establecen entre dos o tres personas, hasta las que existen entre ciudades, localizadas en diferentes continentes [YY11; Né+00a; Né+00b; Str+05; SCT90; Mor+17].

Frecuentemente las interacciones entre las personas se han modelado como interacciones entre osciladores no lineales de fase [SCT90; AST95; Sch+94; YY11]. Dentro de esta categoría de osciladores, el uso del modelo dinámico de Kuramoto [Kur75; Kur84] está muy extendido tanto en estructuras homogéneas como no homogéneas. Éste es lo suficientemente complejo para ser no trivial, lo suficientemente flexible como para adaptarse a muchos contextos diferentes y, al mismo tiempo, lo suficientemente simple como para ser matemáticamente tratable [Ace+05]. Asimismo, muestran una gran variedad de patrones de sincronización. La mayor parte de la investigación realizada sobre el modelo de Kuramoto en redes complejas se ha resumido en la revisión de Rodrigues *et al.* [Rod+16].

Dado que este trabajo de tesis está orientado a la formulación de un modelo de red críticamente auto-organizada que pueda emplearse para describir la evolución de las interacciones entre los individuos de una cierta población, se considera pertinente incorporar la sincronización a este estudio. A tales efectos, los nodos de la red estarán formados por osciladores y las dinámicas adaptativas dependerán del grado de sincronización entre éstos. Por su sencillez y versatilidad, se escoge trabajar con el modelo de Kuramoto.

El estudio anterior es viable e interesante. Wang *et al.* publicaron recientemente un modelo de red adaptativa críticamente auto-organizada, formada por osciladores no lineales (basados en el mapa logístico caótico y el modelo de Rössler) [Wan+16]. Su red es un sistema abierto al que se añaden nodos en cada instante de tiempo. Los nodos (u osciladores) están sujetos a una condición de estabilidad que depende de la buena sincronía entre la unidad y la media de todo el sistema. Si el error entre el oscilador y la media excede un umbral, se elimina el oscilador. Esta restricción causa un crecimiento no monótono de la red. Asimismo, hace que el sistema evolucione hasta alcanzar un estado crítico, en el cual la adición de un único nuevo nodo puede provocar la pérdida de sincronización de un grupo de osciladores y, de este modo, conducir a toda la red a su colapso.

La introducción de esta clase de modelos permite abordar una cuestión crucial, desde el punto de vista de la “sostenibilidad”: mantener el rendimiento de sistemas que crecen, operando bajo restricciones. Este sería el caso de todo tipo

de instalaciones y servicios esenciales (por ejemplo, las redes eléctricas, las carreteras o el suministro de agua), en un escenario en el que una cierta población aumentase. Por ello, “[d]esarrollar un marco teórico integral para comprender, a nivel cuantitativo, la dinámica fundamental de la sostenibilidad en sistemas complejos sujetos a crecimiento continuo es un problema desafiante y abierto en el presente.” [Wan+16]. Este trabajo de tesis pretende ser un paso que avance en esa dirección.

1.4 Objetivos de este trabajo

Tal y como se ha visto en los apartados anteriores, los modelos de redes utilizados para estudiar las dinámicas críticamente auto-organizadas son adaptativos. También se ha subrayado el interés de abordar este problema desde la óptica de la sincronización. Por ese motivo, se han establecido los siguientes objetivos:

1. Objetivo General (O.G.):

- O.G.1 Estudiar los ingredientes fundamentales que sirvan para definir modelos de población, vistos como sistemas complejos, en los que esté presente una dinámica críticamente auto-organizada.

2. Objetivos Específicos (O.E.):

- O.E.1 Estudiar la aparición de dinámicas críticamente auto-organizadas en redes adaptativas cuando se restringen las diferencias entre un nodo y su vecindario. Además, desarrollar herramientas para caracterizar la presencia de tales dinámicas en redes adaptativas.
- O.E.2 Caracterizar las diferencias entre un nodo y su vecindario, tomando en consideración el efecto de los segundos vecinos de los nodos.
- O.E.3 Estudiar las características topológicas de redes reales, tanto sociales como de otros tipos. Por ejemplo, su asortatividad, su coeficiente de agrupamiento, su modularidad, la presencia del efecto “mundo pequeño” u otros parámetros de interés.
- O.E.4 Estudiar la sincronización en redes, tanto monocapa como múltiple (típicas de las relaciones sociales). En concreto, el régimen transitorio de su parámetro de orden.
- O.E.5 Comparar los resultados anteriores con las medidas de las redes reales estudiadas.

1.5 Estructura del trabajo

La estructura de esta tesis doctoral se ha articulado siguiendo las pautas aprobadas por el Consejo de Gobierno de la Universidad Politécnica de Madrid para la modalidad de tesis por compendio de publicaciones (30 de noviembre de 2017).⁸

El documento se divide en cuatro grandes partes. La primera de ellas, denominada Parte I, se ocupa de introducir el trabajo de tesis y explicar su metodología. En el capítulo 1 se ubica la presente introducción general. La metodología empleada para desarrollar el modelo de red críticamente auto-organizada se presenta en el capítulo 2. En éste, se expone una breve caracterización de las redes complejas, atendiendo a su estructura. Asimismo, se describen las metodologías empleadas para detectar dinámicas críticamente auto-organizadas en las redes de los modelos, y las herramientas para evaluar la evolución temporal de la sincronización en una red de osciladores de Kuramoto acoplados, en función de las características topológicas del sistema y de los parámetros de los osciladores.

La Parte II de la tesis contiene la colección de artículos científicos. En total se presentan tres trabajos. La primera publicación del compendio es [APGP16], la cual se reproduce en el capítulo 3. En dicho artículo, se introduce el concepto de *asortatividad de vecindario* en redes: La tendencia de un nodo a pertenecer a una comunidad (sus vecinos) con una propiedad media similar a la suya. Asimismo, se muestra que la imposición de la asortatividad de vecindario (según el grado) a un sencillo modelo de red adaptativo produce como resultado una dinámica críticamente auto-organizada.

La segunda publicación de la colección de artículos es [APPE17], la cual se transcribe en el capítulo 4. En este trabajo se estudia la *asortatividad de dos-pasos*, una versión de la asortatividad de vecindario (según el grado) propuesta en [APGP16]. En la primera parte del estudio, se halla una expresión analítica para el nuevo índice. Después se realiza un análisis de las estructuras de 49 redes reales y el conjunto de 261,000 redes conexas de 9 nodos, en función de la asortatividad de grado de Newman y la asortatividad de dos-pasos. El estudio exhibe que estructuras de las redes de [APGP16] son las más abundantes en la muestra analizada.

La tercera y última publicación del compendio es [AP+17], la cual se incluye en el capítulo 5. En este artículo se estudian los procesos de sincronización y difusión en redes de osciladores de Kuramoto acoplados. En concreto, se analiza la escala de tiempo del parámetro de orden, y se identifica la influencia que sobre

⁸Para cumplir los requisitos de formato aprobados para esta modalidad de tesis, la extensión conjunta de las Partes I y III de este trabajo es superior a 18,000 palabras. Asimismo, en ambas partes se hace referencia a los artículos incluidos en la Parte II, para así demostrar su unidad temática.

ellas ejercen los principales parámetros del sistema, a saber: la fuerza del acoplamiento entre los nodos, la topología del sistema y las condiciones iniciales de los osciladores de Kuramoto.

En la Parte III de la tesis se desarrolla una discusión general. En el capítulo 6 se analizan de manera conjunta los resultados de las publicaciones de esta tesis. Para ilustrar la versatilidad de las observaciones discutidas, a modo de ejemplo, se muestra cómo pueden aplicarse éstas para obtener modelos de redes SOC, con estructuras similares a las de las interacciones socioeconómicas, presentes en las poblaciones humanas. Atendiendo a los resultados obtenidos y a la discusión de los mismos, en el capítulo 7 se elaboran las conclusiones generales de este trabajo de tesis. En el capítulo 8, las conclusiones generales se presentan en inglés. En el capítulo 9, se proponen nuevas líneas de investigación.

Finalmente, en la cuarta parte de la tesis, se incluyen los apéndices referenciados en los capítulos precedentes.

2 | Metodología

Este capítulo del trabajo de tesis presenta la metodología empleada para su desarrollo. Tal y como se indicó en el capítulo 1, el objetivo general de esta investigación es estudiar los ingredientes fundamentales que permiten definir modelo de redes adaptativas críticamente auto-organizadas, formada por osciladores de Kuramoto, cuya evolución temporal proporcione un grafo con las características típicamente identificadas en las redes reales. A tales efectos, en la Sec. 2.1, se presenta una breve caracterización de las redes complejas, atendiendo a su estructura. Las definiciones y métricas ahí descritas se emplean para analizar y comparar las características topológicas de redes reales utilizadas en esta tesis y las redes obtenidas con los modelos. Por otro lado, en la Sec. 2.2, se introducen las metodologías usadas para detectar dinámicas críticamente auto-organizadas en las redes de los modelos. Finalmente, en la Sec. 2.3, se presentan varias herramientas para evaluar la evolución temporal de la sincronización en una red de osciladores de Kuramoto acoplados, en función de las características topológicas del sistema y de los parámetros de los osciladores. Se procede así porque los osciladores del modelo de esta tesis operarán generalmente fuera del régimen estacionario, debido al aporte de energía desde el exterior del sistema y a las dinámicas internas de relajación, propias de los sistemas críticamente auto-organizados.

2.1 Breve caracterización de las redes complejas, atendiendo a su estructura

En general, la descripción de la estructura de una red exige emplear una gran cantidad de información. De hecho, la complejidad de una red se puede entender como “*la cantidad de información que necesitamos para describir con precisión su estructura*” [Est12]. La caracterización de tal estructura es crucial. Las redes se utilizan para representar el esqueleto topológico de una amplia gama de sistemas naturales y antropogénicos [AB02; New03b; Boc+06; Str01] y es sabido que su

estructura condiciona los procesos evolutivos, funcionales y dinámicos que tienen lugar en tales sistemas [Str01; BBV08; Cos+07; Est12].

En esta sección se describen sucintamente la terminología y las medidas estándar (de la Ciencia de Redes), utilizadas en este trabajo. Éstas se emplearán para obtener información sobre la estructura de las redes reales analizadas en este estudio (véanse los Apéndices A y B), y la topología de las redes generadas por el modelo propuesto en el capítulo 6. En base a esos datos, se compararán los sistemas reales y la aplicación propuesta, al final del capítulo 6.

A continuación se indica la estructura de la sección. En el apartado 2.1.1, se presenta una definición formal de red y algunas de sus características generales. En el apartado 2.1.2, se introduce la clasificación de redes homogéneas y heterogéneas. En el apartado 2.1.3, se presentan las redes “mundo pequeño”. La distinción entre redes asortativas y disasortativas se realiza en el apartado 2.1.4. Las redes modulares se revisan en 2.1.5. Finalmente, se introducen los conceptos de redes monoplex y multiplex en el apartado 2.1.6.

2.1.1 Redes: Definición y propiedades generales

Formalmente, una red compleja es un grafo $G = (V, E)$, donde V representa el conjunto de N nodos (o vértices) de la red y E es un subconjunto de m pares de V , indicándose así que existe un enlace (o conexión) entre los elementos de dicho par. Si los enlaces determinan pares no ordenados (el enlace $i \rightarrow j$ es indistinguible del enlace $j \rightarrow i$) la red se nombra como *bidireccional* o *no dirigida*. En cambio, si el orden de los pares es determinante, la red se califica como *unidireccional* o *dirigida*.

Los grafos frecuentemente se representan por una matriz de adyacencia $\mathbf{A}$, cuyas entradas $a_{ij} = 1$, si existe un enlace dirigido (i, j) contenido en E ; ¹ y 0 en caso contrario. Consecuencia de esta definición, si una red es bidireccional, $\mathbf{A}$ es simétrica. Por el contrario, si la red es unidireccional, $\mathbf{A}$ es asimétrica.

En el caso más general de las *redes pesadas*, los enlaces del grafo se caracterizan por una matriz $\mathbf{W}$, cuyas entradas $w_{ij} \in \mathbb{R}$ representan la fuerza (o el peso) del enlace (i, j) . Si la red es bidireccional, $\mathbf{W}$ es simétrica. En cambio, si la red es unidireccional, $\mathbf{W}$ es asimétrica.

Se dice que una red es *conexa*, si todos sus nodos están directa o indirectamente conectados entre sí. En el caso de redes no conexas, se define una *componente conexa* como aquel subconjunto de nodos de la red que cumplen la condición anterior. Por su parte, se denomina *componente gigante* a la mayor de las componentes conexas.

¹La tupla (i, j) denota el enlace que parte desde i y llega hasta j .

Se denomina red *simple* a aquel grafo formado por enlaces bidireccionales, no pesados y que no contienen “auto-bucles” (es decir, enlaces de un nodo consigo mismo, $a_{ii} = 0$), ni múltiples enlaces entre dos nodos i y j . Finalmente, se nombra como *grafo completo* a aquella red simple en la que $a_{ij} = 1$, cuando $i \neq j$, y cero en caso contrario (es decir, en un grafo completo un nodo i está enlazado a los $N - 1$ nodos restantes).

2.1.2 Redes homogéneas y heterogéneas

Entre las propiedades estadísticas de las redes complejas, habitualmente se destaca su *distribución de grado*, $P(k)$. En el caso de redes no dirigidas, el *grado* de un nodo i , k_i , se define como el número de enlaces de i (esto es, $k_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$).² De este modo, la distribución de grado $P(k)$ determina la probabilidad de encontrar un nodo con un cierto grado k .

Atendiendo a $P(k)$ se establecen dos grandes categorías de redes: Las redes *homogéneas* y las redes *heterogéneas*. Su distinción está generalmente asociada a la cola de la distribución $P(k)$. Si la probabilidad de la distribución decae exponencialmente con el grado, esas redes se denominan homogéneas. El ejemplo más representativo es el *grafo aleatorio* del modelo de Erdős-Rényi (E-R) [ER59]. En dicho modelo, se parte de N nodos desconectados y se crean todas las posibles conexiones con una probabilidad fija p . Por tanto, su distribución de grado $P(k)$ es una distribución binomial, la cual converge a una distribución de Poisson en el límite termodinámico, cuando el grado medio $\langle k \rangle$ es constante:

$$P(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k} \rightarrow \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \langle k \rangle \approx \text{cons.}}} P(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}. \quad (2.1)$$

El caso límite de redes homogéneas lo constituyen las *redes regulares*, aquellas en las que todos los nodos tienen el mismo grado k_i , es decir, $P(k = k_i) = 1$.

Por otro lado, cuando la cola de $P(k)$ es pesada, se suele señalar que la red es heterogénea. Si $P(k)$ se distribuye según una ley de potencia, $P(k) \sim k^{-\gamma}$, el grafo se nombra como red *libre de escala*. El modelo de Barabási-Albert (B-A) es paradigmático de este último tipo de grafos [BA99]. En él además se introduce un concepto ampliamente utilizado dentro de la Ciencia de Redes: El *enlace preferencial*. En el modelo B-A, existe una red que crece por la adición de nuevos nodos, los cuales, en el momento de la incorporación, se conectan a una cantidad fija de nodos presentes en la red, m_{BA} , con una probabilidad de enlace p_i proporcional

²En el caso en que la red sea dirigida, es posible definir dos tipos de grado en cada nodo: el grado incidente y el grado saliente. El grado incidente de un nodo i , k_i^{in} , se define como la cantidad de enlaces que inciden en i ($k_i^{\text{in}} = \sum_{j=1}^N a_{ji}$). En cambio, el grado saliente de i , k_i^{out} , indica la cantidad de enlaces que parten de i ($k_i^{\text{out}} = \sum_{j=1}^N a_{ij}$).

al grado de cada nodo i objetivo (elegido aleatoriamente de entre los nodos ya existentes): $p_i = k_i / \sum_{j=1}^N k_j$. Este mecanismo de enlace es lo que típicamente se denomina enlace preferencial. En la Fig. 2.1 se muestra un ejemplo de crecimiento de una red, en el cual se emplea el mecanismo de enlace preferencial del modelo B-A. En el límite termodinámico ($N \rightarrow \infty$), el exponente del modelo B-A es $\gamma = 3$.

FIG. 2.1: Crecimiento de un grafo al que se le añaden nodos en cada instante de tiempo, usando el mecanismo de enlace preferencial. Cada nodo se identifica por un color y cada nuevo vértice se conecta a una cantidad fija de nodos presentes en la red $m_{BA} = 2$. (a) t : El grafo semilla, un ciclo de tres nodos o triángulo, y el nuevo nodo (verde). (b) $t + 1$: Resultado de t y el nuevo nodo (cian). (c) $t + 2$: Resultado de $t + 1$ y el nuevo nodo (azul).

2.1.3 Redes “mundo pequeño”

Durante mucho tiempo $P(k)$ se ha considerado el factor más relevante de cara a diferenciar topologías. Sin embargo, progresivamente se han incorporado otras medidas con las que afinar la anterior clasificación de los grafos. Un ejemplo de estas medidas es la *longitud media del camino más corto* $\ell = \langle d_{ij} \rangle$, donde d_{ij} es la longitud de la ruta más corta entre el nodo i y el nodo j , esto es, la cantidad de enlaces de la secuencia de conexiones que une i con j , empleando el mínimo número de pasos. Otro caso lo constituye el coeficiente de agrupamiento C , el cual representa hasta qué punto los vecinos de un nodo están conectados entre ellos. Es decir, la fracción de *triángulos* (o conjuntos de tres nodos, donde cada vértice está conectado a los otros dos) que hay en la red frente a todos los posibles triángulos que podría contener el grafo. Por lo general, se calcula como sigue:

$$C^\Delta = \frac{3 \times \text{número de triángulos}}{\text{número de caminos de longitud 2}} = \frac{3N_\Delta}{N_3}, \quad (2.2)$$

donde $N_\Delta = \frac{1}{3} \sum_{i,j,k} a_{ij} a_{jk} a_{ki}$ y $N_3 = \sum_{i,j,k} a_{ki} a_{kj}$. En la literatura, C^Δ también recibe el nombre de *transitividad*. No obstante, existen otras alternativas para

realizar el cálculo del agrupamiento, tal y como se muestra a continuación:

$$C^{WS} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{2n_i}{k_i(k_i - 1)}, \quad (2.3)$$

donde n_i es el número de conexiones entre los vecinos más cercanos del nodo i , y k_i es su grado [WS98].

En general, un coeficiente de agrupamiento elevado implica muchas conexiones transitivas (esto es, entre los vecinos de un nodo) y, en consecuencia, rutas redundantes en la red. Una agrupamiento bajo implica lo contrario.

Atendiendo a las anteriores métricas y a los hallazgos hechos en redes reales [Mil67], suele introducirse un nuevo tipo de categoría: las redes “mundo pequeño”. Una red G con N nodos y m enlaces se cataloga como red de mundo pequeño, si el valor promedio de su longitud de camino más corto (ℓ_G) es similar al de un grafo aleatorio E-R equivalente (es decir, con los mismos valores de N y m) (ℓ_{rnd}), pero presenta una mayor coeficiente de agrupamiento (C_G^Δ) que el gráfico aleatorio equivalente (C_{rnd}^Δ) [HG08]. Una manera de cuantificar esta característica de mundo pequeño la proporciona la siguiente métrica:

$$S^\Delta \equiv \frac{C_G^\Delta}{C_{\text{rnd}}^\Delta} \frac{\ell_{\text{rnd}}}{\ell_G} \quad (2.4)$$

Una red de mundo pequeño se define como aquella en la que $S^\Delta > 1$ [HG08]. El ejemplo paradigmático de este tipo de redes lo proporciona el modelo de Watts-Strogatz (W-S) [WS98]. Para construir una red W-S, se parte de un anillo con N nodos, cada uno de los cuales está conectado a sus κ vecinos más cercanos en cada dirección, y siendo el grado de cada nodo $k_i = \kappa$. A continuación, se escoge un nodo y el enlace que lo conecta a su vecino más cercano (buscando a éste último en sentido horario). Con probabilidad p , el enlace anterior se reconecta a un nodo elegido uniformemente al azar en todo el grafo. Este proceso se repite, nodo a nodo, siguiendo en el sentido de las agujas del reloj alrededor del anillo, hasta completar una vuelta. Cuando $p = 0$, se tiene un retículo ordenado. Cuando $p \rightarrow 1$, la red se convierte en un grafo aleatorio con pocos bucles y una longitud ℓ pequeña. En la Fig. 2.2 se presentan redes W-S generadas con diferentes valores de la probabilidad p .

2.1.4 Redes asortativas y disasortativas

Los enlaces de las redes generalmente no conectan nodos independientemente de sus características. En las redes sociales, por ejemplo, las evidencias sugieren que las personas prefieren asociarse a otras con una edad, religión, educación u ocupación similar a la de ellos mismos [MSLC01]. La mezcla asortativa es una

FIG. 2.2: Redes W-S compuestas por $N = 15$ nodos y $\langle k \rangle = 4$, al considerarse diferentes probabilidades de rebobinado p . (a) $p = 0.01$. (b) $p = 0.25$. (c) $p = 0.80$.

métrica de las redes que alude a la tendencia de que los nodos se conecten a otros nodos que son similares (o diferentes) a sí mismos en alguna característica [New03a]. Si los nodos son similares (diferentes), la red posee mezcla asortativa (disasortativa) según esa característica.

Por lo general, la asortatividad se determina para el grado de los nodos en la red [New02; PSVV01; Est11; PPZ08]. La tendencia de los nodos de alto grado a asociarse preferentemente con otros nodos de alto grado juega un papel relevante en muchos procesos de interés, tales como la propagación epidémica, la sincronización o la resiliencia de la red (frente a ataques), entre otros [New02; NP03; EK02; BPSV03; DBGS07].

Las correlaciones de grado (esto es, la estimación de las posibles relaciones que existen entre los grados de los nodos, localizados en los extremos de un enlace) se pueden obtener de diversas maneras. Una alternativa común consiste en calcular la distribución conjunta $P(k, k')$, la cual describe la probabilidad de que un nodo de grado k esté conectado con un nodo de grado k' [PSVV01]. En el caso de redes simples, otra alternativa muy empleada para estimar la asortatividad consiste en calcular el coeficiente de correlación de Pearson, dado por:

$$r_k = \frac{\frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in E} k_i k_j - \left\{ \frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in E} \frac{1}{2} [k_i + k_j] \right\}^2}{\frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in E} \frac{1}{2} [k_i^2 + k_j^2] - \left\{ \frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in E} \frac{1}{2} [k_i + k_j] \right\}^2}, \quad (2.5)$$

donde k_i y k_j son los grados de los extremos del enlace $(i, j) \in E$. Si $r_k > 0$, los nodos de elevado grado tienden a estar enlazados con otros de grado alto. Por otro lado, si $r_k < 0$, los nodos de elevado grado tienden a estar enlazados con nodos de grado pequeño.

En cualquier caso, la asortatividad puede aplicarse a cualquier característica de nodo, incluidas las propiedades no topológicas de los nodos, tales como el lenguaje o la raza [New03a]. La mayoría de las investigaciones realizadas en esta área se ha resumido en la revisión de Noldus *et al.* [NM14].

Mezcla asortativa según el grado y estructura de una red

La asortatividad según el grado, r_k , dada por la Ec. 2.5, puede expresarse en función de varios parámetros estructurales de una red (simple). En [Est11], Estrada expresa r_k en función de las cantidades de varios tipos de *subgrafos* (o fragmentos) de la red estudiada, e interpreta su significado en términos estructurales. A continuación se reproducen algunos de sus principales hallazgos, ya que éstos constituyen el punto de partida de [APPE17], presentado en el capítulo 4.

Un subgrafo de una red $G(V, E)$ es otro grafo formado a partir de un subconjunto de los vértices y los enlaces de G . El subconjunto de nodos debe incluir todos los puntos finales del subconjunto de conexiones. No obstante, también puede incluir vértices adicionales (subgrafo no conexo).

En el caso del coeficiente de la asortatividad de grado, Estrada demuestra que la Ec. 2.5 puede reescribirse como:

$$r_k = \frac{|P_3| + 3|C_3| - \frac{|P_2|^2}{|P_1|}}{|P_2| + 3|S_{1,3}| - \frac{|P_2|^2}{|P_1|}}. \quad (2.6)$$

donde $|\dots|$ denota la cantidad de subgrafos de un cierto tipo; P_1 , P_2 y P_3 son los caminos (“paths”³) de longitud 1, 2 y 3, respectivamente; y C_3 alude a un ciclo de tres nodos (esto es, un triángulo). Introduciendo la notación $|P_{r/s}|$ para referirse al ratio $|P_r|/|P_s|$, $|S_{1,3}|$ para nombrar la cantidad de grafos de tipo estrella de cuatro nodos,⁴ y $C^\Delta = 3|C_3|/|P_2|$ (o la transitividad dada por la Ec. 2.2), Estrada muestra que una red G es:

1. asortativa ($r > 0$): si y sólo si $|P_{3/2}| + C^\Delta > |P_{2/1}|$,
2. neutral ($r = 0$): si y sólo si $|P_{3/2}| + C^\Delta = |P_{2/1}|$, y $3|S_{1,3}| - |P_2|(|P_{2/1}| - 1) \neq 0$, y
3. disasortativa ($r < 0$): si y sólo si $|P_{3/2}| + C^\Delta < |P_{2/1}|$,

ya que el denominador de la Ec. 2.6 es mayor o igual que cero.

El coeficiente $|P_{2/1}|$ mide la “ramificación relativa” de una red. Por su parte, $|P_{3/2}|$ da cuenta de la conexión entre módulos de la red (véase el apartado 2.1.5, dedicado a las redes modulares). En [Est11], el autor discute cómo son las estructuras de las redes asortativas y disasortativas, en función de sus valores de $|P_{2/1}|$, $|P_{3/2}|$ y C^Δ .

³Un “path” de longitud l es una secuencia de nodos diferentes $v_1, v_2, \dots, v_l, v_{l+1}$, tal que existe un enlace que conecta los vértices v_i y v_{i+1} para $i = 1, 2, \dots, l$ [Est12].

⁴Un grafo estrella (simple) de N nodos es una red conexa formada por un nodo de grado $N - 1$ y $N - 1$ nodos de grado 1.

2.1.5 Redes modulares

Muchas redes muestran una estructura denominada *modular*. Esto es, existen particiones de la red (también llamadas módulos, comunidades, clusters o grupos) donde la razón entre los enlaces dentro de cada partición (intra-enlaces) y los enlaces entre particiones (inter-enlaces) es alta y particularmente mayor que la esperada en el caso de redes aleatorias.

Encontrar la mejor partición de una red en comunidades es un problema difícil. Las soluciones más exitosas, en términos de precisión y costo computacional [Dan+05], son aquellas basadas sobre la optimización de una magnitud llamada *modularidad*, propuesta en [NG04], que permite precisamente la comparación de diferentes particiones de la red. Dada una red simple dividida en comunidades, la definición matemática de modularidad se expresa en términos de la matriz de adyacencia a_{ij} y el número total de enlaces $m = \frac{1}{2} \sum_i k_i$, tal y como se muestra a continuación:

$$Q = \frac{1}{2m} \sum_{ij} \left(a_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m} \right) \delta_{c_i, c_j}, \quad (2.7)$$

donde c_i es la comunidad a la que se asigna el nodo i y la función delta de Kronecker δ_{c_i, c_j} toma el valor 1 si los nodos i y j están en la misma comunidad, y 0 en caso contrario. Cuanto más grande es la Q , más modular es la red.

En este trabajo de tesis, por su simplicidad y menor tiempo de cómputo,⁵ emplearemos el método Louvain para establecer las particiones [Blo+08]. El algoritmo optimiza iterativamente la partición en comunidades hasta que la modularidad global no puede ser mejorada (a través de modificaciones de la partición).

2.1.6 Redes monoplex y múltiplex

El modelado de redes descrito en los apartados previos, pese a su simplicidad, ha sido extremadamente exitoso. Ha permitido ilustrar que muchas redes reales poseen una distribución de grado libre de escala, la propiedad de mundo pequeño o estructuras modulares, entre otras características. Sin embargo, a medida que la investigación de los sistemas complejos ha madurado, se ha vuelto imperiosa la necesidad de ir más allá de estos marcos simples e investigar otros más complicados, pero sustancialmente más realistas.

Entre los nuevos enfoques desarrollados recientemente destaca el de las *redes multicapa*. Éste nace de la observación de que diversos sistemas complejos se pueden dividir, de manera muy natural, en subconjuntos de componentes que interactúan de forma diferente con los coparticipantes del mismo conjunto, en comparación con los miembros de otros subconjuntos. De esta forma, cada subconjunto

⁵Comparado con el algoritmo de Girvan Newman [NG04].

puede ser representado por una capa de una red multicapa. El gran número de investigaciones recientes en este tipo de redes ha contribuido a descubrir varios aspectos topológicos y dinámicos de sistemas complejos [Boc+14; Kiv+14; Bul+10; Chu97; SR+13; PBH10]. Asimismo, el concepto de red multicapa ha demostrado ser lo suficientemente amplio como para registrar y caracterizar las diversas interacciones de en un agente que interactúa de manera diferente con los miembros de otros subconjuntos [Don+11; Gao+12; BNL14]. En la Fig. 2.3 se muestra un ejemplo de red multicapa compuesta por 6 subconjuntos de nodos.

FIG. 2.3: Ejemplo de una red multicapa compuesta por 6 capas. Nótese la diferente cantidad de nodos que puebla cada uno de los subconjuntos. Los datos se han visualizado empleando el software MuxViz [DDPA15].

Las *redes múltiplex* forman una clase particular de redes multicapa, en la que cada capa está formada por el mismo número de nodos N . Además, un múltiplex está formado por agentes, cada uno de los cuales se identifica con un nodo de la red, con su propia etiqueta, en todas las capas de la red [BNL14; Sol+13; DD+14]. Debido a ello, cada una de las representaciones de este agente está conectada a sus propias representaciones en todas las demás capas [Car+13a; Car+13b; SLT10]. La fuerza de estas interacciones puede depender del agente y de las capas entre las cuales se produce la interacción [GB14; GPB16; Lot+16]. Se puede observar un ejemplo de este tipo de estructuras en la Fig. 2.4.

Estas propiedades hacen que los múltiplex sean una representación adecuada de sistemas complejos reales, donde cada agente tiene múltiples propósitos y capacidades. Este es el caso, por ejemplo, de agentes que representan a inversores operando en diferentes mercados. Otra representación de interés es el de las redes sociales, donde cada capa corresponde a una estructura social diferente (por ejemplo, Facebook y Twitter) y los usuarios juegan el papel de nodos. En estas circunstancias, es natural preguntarse si la cooperación y la competencia

FIG. 2.4: Ejemplo de una red múltiplex simple con dos capas. Los datos se han visualizado empleando el software MuxViz [DDPA15].

[RA13; GG+15; GG+12; Mat+15; WSP12; WWP14] favorecen la difusión de la información y la sincronización [Sor12; GFGG15; SE+15; DG+16; Bap+16; DBJ17] entre las diferentes capas, o la aparición de comportamientos colectivos, como la auto-organización [KHDG15; Asl+14] o la propagación de epidemias de algún tipo [GGA13].

Para concluir esta presentación de los múltiplex, a continuación se introduce uno de los posibles formalismos para describir su estructura, equivalente a la matriz de adyacencia A o W , vistas en el apartado 2.1.1. Por sencillez, en esta presentación nos constreñimos al caso de un múltiplex con dos capas ($M = 2$).

Sea $\mathcal{M}$ una red múltiplex con dos capas $G^1 = (V^1, E^1)$ and $G^2 = (V^2, E^2)$. De acuerdo con [Boc+14], es posible asociar a $\mathcal{M}$ una red (monocapa) $\tilde{\mathcal{M}} = (\tilde{V}, \tilde{E})$, en la que $\tilde{V}$ es la unión disjunta de todos los nodos de G^1 y G^2 , es decir:

$$\tilde{V} = \bigsqcup_{1 \leq \alpha \leq 2} V^\alpha = \{x_n^\alpha; x \in V^\alpha\}, \quad (2.8)$$

y $\tilde{E}$ viene dado por:

$$\left(\bigcup_{\alpha=1}^2 \{(x_n^\alpha, x_m^\alpha); (x_n^\alpha, x_m^\alpha) \in E^\alpha\} \right) \cup \{(x_n^1, x_n^2); x_n \in X\}. \quad (2.9)$$

Nótese que $\tilde{\mathcal{M}}$ es una red (monocapa) con $2N$ nodos, cuya matriz de adyacencia $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$, denominada *matriz de supra-adyacencia* de $\mathcal{M}$, puede ser escrita como una matriz por bloques:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A^1 & I \\ \hline I & A^2 \end{array} \right), \quad (2.10)$$

donde A^α es la matriz de adyacencia de la capa G^α . Tómesese en consideración que las características de $\bar{A}$ dependen de las propias de A^α (estructura simple, dirigida, pesada, *etc.*). Por ejemplo, si A^1 y A^2 son matrices simples, $\bar{A}$ también lo es. En el caso de que el múltiplex sólo posea una capa ($M = 1$), se obtiene un grafo como los definidos en el apartado 2.1.1. Cuando $M = 1$, se utiliza la denominación *red monoplex*.

2.2 Detección de dinámicas críticamente auto-organizadas

En esta sección se exponen los métodos que se emplean en este trabajo de tesis para dictaminar la presencia de una dinámica SOC.

Tal y como se indicó en la sección 1.1, el concepto de criticidad auto-organizada básicamente alude a la tendencia (macroscópica) de algunos sistemas (fuera del equilibrio) a desarrollar en su seno largas correlaciones espaciales y temporales, generalmente resumidas en un escalado según una ley de potencias. Así todo, los debates sobre las características generales de la criticalidad auto-organizada, las condiciones necesarias y suficientes para su aparición, o la interpretación de los datos empíricos aún permanecen abiertos [Pru12]. Por tales razones, en lo sucesivos apartados, además de describir diversas metodologías, se introducirán las controversias o limitaciones identificadas en la Teoría de SOC.

A continuación se detalla la estructura de la sección. En el apartado 2.2.1, se describen los conceptos básicos sobre las funciones de correlación. Por su parte, las correlaciones espaciales no triviales se caracterizan en el apartado 2.2.2. El cálculo de correlaciones espaciales en redes complejas más allá de los primeros vecinos de un nodo se expone en 2.2.3. El escalado de tamaño finito se describe en el apartado 2.2.4. Este apartado también contiene información sobre el cálculo del espectro multifractal y sobre la estimación de la estabilidad marginal y régimen estacionario estadístico de los sistemas SOC. En el apartado 2.2.5, se presentan los espectros de potencia y se discute su posible uso en el ámbito de la Teoría de SOC. La caracterización de las fluctuaciones de energía, se realiza en el apartado 2.2.6. Finalmente, en el apartado 2.2.7, se describen las distribuciones de tiempos de espera y se discute su posible utilidad para caracterizar un estado críticamente auto-organizado. Las anteriores metodologías se han tomado de los trabajos de revisión de McAteer *et al.* [McA+16], y Marković y Gros [MG14].

A partir de metodologías previas, se han implementado diversas herramientas en Python. Éstas se emplean en los capítulos 3 y 6, para obtener información sobre las dinámicas de las redes estudiadas y validar la presencia de un estado críticamente auto-organizado.

2.2.1 Funciones de correlación

Los sistemas críticamente auto-organizados desarrollan en su seno largas correlaciones espaciales y temporales. De ellos se espera, por un lado, que cada una de sus partes interactúe con todas las demás (a través de su entorno) y también consigo misma, y, por otro, que las interacciones dependan de la historia de todo el conjunto. Con objeto de medir y cuantificar estas interacciones efectivas, una primera herramienta a emplear son las funciones de correlación.

Sean $\phi(\vec{r}, t)$ los *grados de libertad locales*, en la posición $\vec{r}$ y el instante de tiempo t . Por ejemplo, en el caso del modelo BTW (descrito en el capítulo 1), $\phi(\vec{r}, t)$ podría asumir el papel de la altura local $h_{\vec{r}}$ de una posición $\vec{r}$ en un instante t .⁶ Siguiendo a [McA+16], la función de autocorrelación más básica viene dada por:

$$\mathcal{C}(\vec{r}_2, t_2, \vec{r}_1, t_1) = \langle \phi(\vec{r}_2, t_2) \phi(\vec{r}_1, t_1) \rangle - \langle \phi(\vec{r}_2, t_2) \rangle \langle \phi(\vec{r}_1, t_1) \rangle, \quad (2.11)$$

donde $\langle \cdot \rangle$ representa el valor esperado, es decir, el promedio del conjunto. Si $\phi(\vec{r}_2, t_2)$ y $\phi(\vec{r}_1, t_1)$ no están correlacionados (es decir, si el comportamiento de $\phi(\vec{r}_2, t_2)$ no se ve influenciado por el de $\phi(\vec{r}_1, t_1)$, y viceversa), $\mathcal{C}(\vec{r}_2, t_2, \vec{r}_1, t_1) = 0$. Por otro lado, cuando $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$ y $t_1 = t_2$, la función de correlación $\mathcal{C}(\vec{r}_2, t_2, \vec{r}_1, t_1)$, de hecho, describe la varianza del ϕ local. La Ec. 2.11 también se puede escribir del siguiente modo:

$$\mathcal{C}(\vec{r}_2, t_2, \vec{r}_1, t_1) = (\phi(\vec{r}_2, t_2) - \langle \phi(\vec{r}_2, t_2) \rangle) (\phi(\vec{r}_1, t_1) - \langle \phi(\vec{r}_1, t_1) \rangle). \quad (2.12)$$

Como muestra la Ec. 2.12, la autocorrelación es grande, cuando la presencia de una gran fluctuación en $\vec{r}_1, t_1$ coincide con otra gran fluctuación en $\vec{r}_2, t_2$. La función de correlación puede ser negativa, señalando *anti-correlaciones*, cuando las fluctuaciones positivas en $\vec{r}_1, t_1$ ($\phi(\vec{r}_1, t_1) - \langle \phi(\vec{r}_1, t_1) \rangle > 0$) típicamente ocurren cuando éstas son negativas en $\vec{r}_2, t_2$ ($\phi(\vec{r}_2, t_2) - \langle \phi(\vec{r}_2, t_2) \rangle < 0$), y viceversa.

Las funciones de correlación también adoptan frecuentemente la siguiente forma:

$$\mathcal{G}(\vec{r}_2, t_2, \vec{r}_1, t_1) = \langle \phi(\vec{r}_2, t_2) \psi(\vec{r}_1, t_1) \rangle - \langle \phi(\vec{r}_2, t_2) \rangle \langle \psi(\vec{r}_1, t_1) \rangle, \quad (2.13)$$

donde $\psi(\vec{r}_1, t_1)$ denota una *perturbación* del sistema en el tiempo t_1 y la posición $\vec{r}_1$ y $\phi(\vec{r}_2, t_2)$ es la respuesta en el tiempo t_2 y la posición $\vec{r}_2$.

Para distinguir la Ec. 2.11 de la Ec. 2.13 en el contexto de SOC, la primera a menudo se denomina función de autocorrelación de actividad-actividad y la segunda, menos común, se denomina función de propagación o respuesta (correlación).

En general, las funciones de correlación no han recibido mucha atención en los trabajos sobre SOC. Los principales motivos de que ello suceda pueden resumirse en que requieren datos de alta resolución, pueden ser técnicamente difíciles de determinar, son notoriamente ruidosas o prohibitivas en términos de esfuerzo computacional⁷ [McA+16].

⁶Otros ejemplos de grados de libertad locales pueden ser la actividad local de las avalanchas, la densidad local de partículas, la energía, etc.

⁷Las funciones de correlación deben determinarse para un rango de coordenadas diferentes $\vec{r}_1, t_1$ y $\vec{r}_2, t_2$ para revelar la dependencia funcional total de estos parámetros.

2.2.2 Correlaciones espaciales no triviales

Cuando dentro de un sistema existen interacciones que dominan a gran escala, generalmente aparecen correlaciones espaciales *no triviales* [McA+16]. Aquí *trivial* significa que las correlaciones se producen en ausencia de interacción (las partículas no se *ven* entre sí). Por ejemplo, en el caso de una pila de arena BTW, trivial sería que la solución a una condición inicial con dos partículas depositadas inicialmente fuese sólo la suma de las soluciones para cada partícula individualmente.

La dependencia espacial de las correlaciones espaciales no triviales normalmente se cuantifica estudiando si las funciones de correlación siguen el siguiente tipo de escalado [McA+16]:

$$C(\vec{r}, t, \vec{0}, t) = k |\vec{r}|^{-(d-2+\eta)} \mathcal{F}\left(\frac{|\vec{r}|}{\xi}\right) \quad (2.14)$$

donde k es el denominado *factor métrico* (independiente de ξ), d es la *dimensión euclidiana*, η es el exponente universal (también conocido como *dimensión anómala*), y $\mathcal{F}$ una función de escalamiento (o corte) que describe cómo las correlaciones finalmente decaen al considerar escalas mayores que la *longitud de correlación*, ξ .

La divergencia de ξ es probablemente la señal más directa de criticalidad. En sistemas SOC de tamaño finito L , la longitud de correlación está naturalmente limitada por L . En tal tesitura, los observables globales del sistema SOC están sujetos a un escalado de tamaño finito (véase el apartado 2.2.4). Por eso, en sistemas de tamaño finito, una de las pruebas más directas de la criticalidad del sistema consiste en demostrar que $\xi \propto L$.

Por otro lado, un exponente η distinto de cero es una señal clara de que existe un comportamiento no trivial de largo alcance. Sin embargo, lo inverso no es verdadero: $\eta = 0$ no implica necesariamente trivialidad. Otras funciones de correlación y otros observables aún pueden llevar la señal de una interacción efectiva de largo alcance, incluso cuando la función de respuesta no lo hace [McA+16]. El exponente η normalmente es positivo (fruto de la interacción entre las partes del sistema). Por esa razón, las fluctuaciones hacen que las correlaciones decaigan más rápido. De hecho, cuando $\eta \geq 2$, las correlaciones decaen tan rápidamente que los grados locales de libertad muestran correlaciones gaussianas (es decir, triviales), desde una óptica “*coarse-grained*”.

2.2.3 Correlaciones espaciales en redes complejas más allá de los primeros vecinos de un nodo

En las redes adaptativas que se presentan en este trabajo de tesis, las cantidades de nodos y enlaces presentes en la componente gigante varían a lo largo del

tiempo. Por tal razón, no se ha encontrado una manera adecuada de definir los parámetros $\bar{r}_1$, t_1 , $\bar{r}_2$ y t_2 , presentes en la Ec. 2.11.

Para intentar superar esta dificultad, se ha empleado una variante de la metodología propuesta por Rybski *et al.* para calcular las fluctuaciones de grado a lo largo de caminos cortos de longitud ℓ , en redes complejas [RRK10]. Para realizar el cálculo de éstas, se siguen los siguientes pasos [RRK10]:

1. Determinar los caminos más cortos entre todas las posibles parejas de nodos. Si el camino más corto entre un par de nodos no es único, se escoge uno arbitrariamente.
2. Se toman todos los caminos cortos de longitud ℓ y se calcula la media $k_\ell = \langle k_p \rangle$ de la secuencia (k_p) , esto es, la secuencia de grados a lo largo de estos caminos de longitud ℓ ; con $1 \leq p \leq \ell + 1$.
3. Se repite el paso anterior para todos los valores de ℓ en la red.
4. Se calcula la función de fluctuación $F(\ell) = \sigma(k_\ell | \ell)$, la desviación normal de los valores promedios de k_ℓ para los caminos de longitud ℓ .

En el caso de que $F(\ell) \sim \ell^{\alpha_k}$, las correlaciones de largo alcance positivas se caracterizan por exponentes de fluctuación $-1/2 < \alpha_k < 0$. Las correlaciones de largo alcance negativas (o *anti-correlaciones* de largo alcance), en cambio, se caracterizan por exponentes de fluctuación $-1 < \alpha_k < -1/2$. Según [RRK10], el valor del exponente ajustado, α_k , está relacionado con el típico *exponente de Hurst* [Kan+01], α_H , según la relación $\alpha_H = \alpha_k + 1$.

El método no sólo permite cuantificar las correlaciones de largo alcance del grado de los nodos, en las redes complejas. También posee la ventaja de que puede ser adaptado al estudio de cualquier propiedad ϕ (o grado de libertad local) de los nodos de la red. Por ejemplo, al final de la sección 3.4, se emplea este método para estimar la existencia de correlaciones de largo alcance en la “actividad” de los nodos de una red, dada por el término $-a_i$ de la Ec. 3.2.

2.2.4 Escalado de tamaño finito

Como se ha indicado en el apartado previo, cuando las funciones de correlación siguen el escalado dado por la Ec. 2.14, los observables globales del sistema siguen un escalado de tamaño finito (FSS, por sus siglas en inglés). Según el supuesto FSS [Car96], en un sistema de tamaño finito L , la distribución de probabilidad de una variable x , $P_x(x|L)$, debe poseer la siguiente forma funcional:

$$P_x(x|L) = x^{-\tau_x} \mathcal{F}_x\left(\frac{x}{L^{D_x}}\right), \quad (2.15)$$

donde τ_x y D_x son los exponentes críticos de la variable x . La función de escalado $\mathcal{F}_x$ describe la corrección de la ley de potencias, introducida por el tamaño finito del sistema:

$$\begin{cases} \mathcal{F}_x \rightarrow \text{cons.} & \text{cuando } x \ll L^{D_x} \\ \mathcal{F}_x \rightarrow 0 & \text{cuando } x \rightarrow L^{D_x} \end{cases} \quad (2.16)$$

Como puede observarse, los eventos de tamaño x sustancialmente más pequeños que el tamaño del sistema siguen una ley de potencia, mientras que las fluctuaciones largas se ven truncadas.

El escalado de tamaño finito se emplea frecuentemente para extraer los exponentes críticos de varias cantidades relacionadas con las avalanchas: por ejemplo, el tamaño s de la avalancha (el número total de activaciones durante una avalancha), el área a de una avalancha (el número de nodos distintos activados), la duración de la avalancha t (el número de actualizaciones paralelas hasta alcanzar una configuración estable) y el tamaño lineal de la avalancha r (generalmente estimado como el radio de giro).

Los primeros estudios sobre las dinámicas SOC mostraron que ciertos modelos se desvían del escalado FSS. Las razones de que ello suceda se encuentran en las premisas detrás del mismo:

1. Los límites no deberían tener un papel especial en el comportamiento del sistema.
2. Un sistema finito pequeño debe comportarse igual que una parte pequeña de un sistema grande.

Por ejemplo, en la mayoría de los modelos de pila de arena la energía se disipa en los límites, y su forma influye en el comportamiento del escalado, tal y como muestran los estudios en redes complejas, con topologías estáticas. En la Fig. 2.5a, se muestran las desviaciones del escalado FSS de la distribución acumulada $C_s(s|L) = \sum_{k=s}^{s_{\max}} P_s(k|L)$ de los tamaños de avalancha s para el modelo de pila de arena BTW, en una malla regular de tamaño lineal L .

Hipótesis de multiescalado

Los estudios de sistemas críticamente auto-organizados tienden a concentrar sus esfuerzos en el cálculo de los exponentes críticos, a partir de los datos disponibles. Sin embargo, pueden existir distintos regímenes de escalado, tal y como ilustran las transiciones de fase termodinámicas. Por eso, si se está interesado en determinar correctamente la clase de universalidad de un sistema SOC,

se deberían extraer tanto sus exponentes de escala como las *funciones de escala* que caracterizan a dichos regímenes de escalado. Las variaciones de exponentes de escala entre las diversas clases de universalidad son a menudo pequeñas, mientras que las funciones de escalado respectivas pueden mostrar diferencias significativas.

Siguiendo a [MG14], un posible enfoque para discriminar distintos regímenes de escala es realizar una transformación de reescalado del observable de interés x (por ejemplo, el tamaño de la avalancha, el área de la misma o su duración). Para ello, se parte de la distribución acumulada de probabilidad de x , obtenida cuando el tamaño del sistema es L , $C_x(x|L)$, y se reescribe del siguiente modo:

$$C_x(x|L) = \int_x^\infty P_x(x'|L)dx' \rightarrow C_x(\alpha|L) = \int_{L^\alpha}^\infty P_x(x'|L)dx', \quad (2.17)$$

La anterior distribución se reescala según la *Hipótesis de multiescalado* [Kad+89; DMST98; TDMS99], dado por:

$$f_x(\alpha) = \frac{\log(C_x(\alpha|L))}{\log(L)}. \quad (2.18)$$

El resultado es $f_x(\alpha)$, el llamado *espectro multifractal*. Se puede establecer una relación entre los momentos q -ésimos de la distribución $P_x(x'|L)$ y el tamaño del sistema L , a través de la siguiente relación:

$$\langle x^q \rangle_L = \int P_x(x'|L)x'^q dx' \sim L^{\sigma_x(q)}, \quad (2.19)$$

donde $\sigma_x(q)$ son los llamados *exponentes de escala*. El espectro multifractal $f_x(\alpha)$ y $\sigma_x(q)$ están relacionados, a través de una transformada de Legendre.⁸ Por tanto, se cumple:

$$\sigma_x(q) = \sup_{\alpha} [f_x(\alpha) + q\alpha], \quad (2.20)$$

donde $\sup$ denota el supremo.

Si el escalado FSS es válido (es decir, cuando $P_x(x'|L)$ sigue una ley de potencia simple con un “corte nítido” en $x = L^{D_x}$), entonces se espera la siguiente forma funcional para $f_x(\alpha)$:

$$f_x(\alpha) = \begin{cases} \alpha(1 - \tau_x) & \text{cuando } 0 < \alpha \leq D_x \\ -\infty & \text{cuando } \alpha > D_x \end{cases}. \quad (2.21)$$

⁸En matemáticas se dice que f^* es la transformada de Legendre de una función f derivable, si cada una de sus primeras derivadas son función inversa de la otra. Es decir, $Df = (Df^*)^{-1}$, o equivalentemente si $f'(f^{*'}(x^*)) = x$ y $f^{*'}(f'(x)) = x^*$.

Atendiendo a la Ec. 2.20 y al espectro multifractal dado por la Ec. 2.21, se obtienen los siguientes exponentes de escala $\sigma_x(q)$:

$$\sigma_x(q) = \begin{cases} D_x(q - \tau_x + 1) & \text{cuando } q > \tau_x - 1 \\ 0 & \text{cuando } q < \tau_x - 1 \end{cases} \quad (2.22)$$

Si el escalado FSS no se cumple estrictamente y se permiten eventos de tamaño arbitrariamente grande x , pero exponencialmente poco probables, el salto de $f_x(\alpha)$ a $-\infty$ es reemplazado por un descenso continuo en la Ec. 2.21. Por tanto, el espectro fractal $f_x(\alpha)$ será lineal a tramos, cuando las distribuciones que tengan regímenes de escalas bien definidos y bien separados. En cambio, el espectro fractal mostrará un “escalado multifractal”, cuando los regímenes lineales no son discernibles.

A modo de ejemplo, en la Fig. 2.5 se muestran el espectro multifractal $f_s(\alpha)$ y el exponente de escala $\sigma_s(q)$ obtenidos al estudiar los tamaños de avalancha s del modelo BTW (esto es, el número de sitios activados durante una avalancha), cuando se ensayan diferentes tamaños de sistema L [MG14]. La función $\sigma_s(q)$ se calcula como la pendiente del ajuste lineal de $\ln \langle s^q \rangle (L)$ para un momento fijo q . El descenso continuo de $f_s(\alpha)$ para un valor de α grande, observado en la Fig. 2.5b, resulta de la ausencia de un corte nítido en $P_s(s|L)$, ya que los valores de s pueden ser arbitrariamente grandes (a diferencia de lo que sucedería, por ejemplo, con el área de las avalanchas, la cual estaría limitada por el área de la pila de arena, L^d). Atendiendo a la falta de linealidad de $f_s(\alpha)$ y $\sigma_s(q)$ mostradas en las figuras 2.5b y 2.5c, respectivamente, el modelo BTW de pila de arena exhibe un escalado múltiple. Se concluye destacando que en la Fig. 2.5b aparecen colapsados los espectros multifractales de las distintas curvas de la Fig. 2.5a. La pendiente del ajuste lineal de la Fig. 2.5c permite estimar los siguientes valores para los exponentes críticos de s : $D_s = 2.8$ y $\tau_s = 1.31$.

Estabilidad marginal y régimen estacionario estadístico

Las dinámicas críticamente auto-organizadas se caracterizan por una distribución de tamaños de la avalancha libre de escala: una pequeña perturbación dada puede causar avalanchas de todos los tamaños. La característica también se denomina *estado marginalmente estable*, una suerte de estado estadísticamente estacionario (pues, las distribuciones de los observables siguen el escalado FSS) lejos del equilibrio.

El análisis de la estabilidad marginal se basa en estudiar la evolución temporal del valor medio de las variables de campo que determinan el umbral de inestabilidad del sistema. La aparición de un estado marginalmente estable se refleja en la estabilización de las anteriores variables, tras un cierto tiempo (esto es, el lapso

FIG. 2.5: (a) Distribución acumulada $C(s|L) = \sum_{k=s}^{s_{\max}} P_s(k|L)$ de los tamaños de avalancha s para el modelo de pila de arena BTW, en una malla regular de tamaño lineal L . (b) Espectro multifractal $f_s(\alpha)$ de la distribución del tamaño de la avalancha P_s para diferentes tamaños lineales L . (c) Función de escalado $\sigma_s(q)$ del momento q de P_s , $\langle s^q \rangle \sim L^{\sigma(q)}$ obtenido del ajuste lineal de $\ln \langle s^q \rangle (L)$. La línea discontinua representa el ajuste de la región donde σ_s tiene dependencia lineal. La pendiente del ajuste lineal se usa para estimar $D_s = 2.8$ y $\tau_s = 1.31$. De [MG14].

temporal necesario para que el sistema alcance el estado de SOC).

Un segundo indicio de que el sistema ha alcanzado el estado SOC es que el volumen total de energía alcanza, en media, es un valor asintótico estable. Esta estabilización surge de las tendencias competitivas de la inyección de energía en el sistema y la disipación dentro del mismo, a través de eventos de relajación o avalanchas.

Otra alternativa para dictaminar la existencia de un régimen estacionario estadístico viene dada por la siguiente premisa: Después de que un sistema dinámico ha ingresado en el estado SOC, el número de avalanchas producidas dentro de un intervalo de tiempo fijo varía alrededor de un valor promedio bien definido [McA+16].

2.2.5 Espectro de potencia

El espectro de potencia de Fourier, $S(f)$, es una herramienta útil y simple para examinar la ocurrencia de eventos en el dominio temporal. Cuando surgió la Teoría de la criticalidad auto-organizada, se analizaban los espectros de potencia de las señales temporales, con el objetivo de identificar leyes de potencia, especialmente en el régimen de bajas frecuencias:

$$S(f) \propto f^{-p} \quad (2.23)$$

donde f es la frecuencia y $p \geq 0$. Como el SOC estaba destinado a explicar el

origen del ruido $1/f$,⁹ se consideró que los valores de $p \approx 1$ (lo que se conoce como “ruido rosa”) eran el sello distintivo de una dinámica SOC. Cuando el exponente $p = 1$, la función de correlación $\mathcal{C}$ es esencialmente constante [Pru12]. Por tanto, el ruido rosa puede ser considerado como un signo de “correlaciones infinitas” o correlaciones temporales de largo alcance.

Sin embargo, actualmente el estudio del espectro de frecuencia ha pasado de moda. Las principales razones son las siguientes [Pru12]: es algo engorroso de manejar numéricamente,¹⁰ pocos modelos muestran sólidamente “ruido rosa” (de hecho, se demostró que el paradigmático modelo BTW exhibe “ruido browniano”, esto es, $p \approx 2$ [JCF89]), y se ha hallado “ruido rosa” en diversas configuraciones que no muestran correlaciones espaciales.

2.2.6 Fluctuaciones de energía liberada

Tal y como se indicó al inicio de esta sección, los sistemas que exhiben dinámicas críticamente auto-organizadas muestran invariancias de escala espaciales y temporales en las correlaciones, típicas de una transición de fase. Para caracterizar la autosimilitud de un proceso estocástico actualmente se emplean las estadísticas de las *fluctuaciones de energía liberada*, δE . Se define la *energía liberada* o *retorno* de una avalancha como la diferencia relativa del tamaño de avalanchas liberadas en los tiempos t y $t + \tau$, respectivamente. Su fluctuación se calcula del siguiente modo:

$$\delta E = \frac{s(t + \tau) - s(t)}{\sigma_\tau}, \quad (2.24)$$

siendo

$$\sigma_\tau^2 = \left\langle (s(t + \tau) - s(t))^2 \right\rangle. \quad (2.25)$$

A partir de las definiciones anteriores, se evalúa la probabilidad de encontrar una fluctuación δE para un tiempo τ fijo, $P_\tau(\delta E)$. En los modelos de SOC clásicos (como el modelo BTW), la distribución $P_\tau(\delta E)$ es invariable con respecto a un cambio de la escala de tiempo τ (es decir, $P_\tau(\delta E) = P_{\tau'}(\delta E)$ para cualquier $\tau \neq \tau'$). Cuando lo anterior sucede, entonces la serie temporal es autosimilar [MG14].

⁹El trabajo fundacional de Bak *et al.* lleva por título “Self-organized criticality: An explanation of the $1/f$ noise”.

¹⁰En los primeros trabajos, muchas señales temporales se transformaban en “supuestos” espectros de potencia. Esto introdujo algunas inconsistencias en los primeros estudios de la literatura sobre SOC [Pru12].

2.2.7 Distribución de los tiempos de espera

Otra magnitud que se estudia en las series temporales de los sistemas críticamente auto-organizados es la *distribución de los tiempos de espera* (WTD por sus siglas en inglés), $P(\Delta t)$. El *tiempo de espera* Δt se define como el lapso temporal entre dos eventos consecutivos.

En los modelos genéricos de criticalidad auto-organizada, cuando el disparo de avalanchas no está correlacionado, las distribuciones muestran un comportamiento exponencial [Bof+99; SNC02]. En otros fenómenos, como los terremotos o las llamaradas solares, la distribución de los tiempos de espera sigue una ley de potencia [MG14].

En [McA+16] se recoge el largo debate (aún activo) sobre la posibilidad de que una distribución WTD exponencial sea un requisito necesario de una dinámica SOC. Por esa razón, Mc Ateer *et al.* recomiendan precaución a la hora de interpretar los resultados de WTD y, de hecho, sugieren que éstos no se empleen como una prueba de la existencia de un comportamiento SOC en los sistemas físicos [McA+16].

2.3 Evolución del parámetro de orden en redes de osciladores de Kuramoto acoplados

Tal y como se indicó en el capítulo 1, en esta tesis uno de los ingredientes que se estudia para desarrollar modelos de población críticamente auto-organizados es la sincronización de osciladores de Kuramoto acoplados. Esta elección acarrea que la dinámica del sistema (y, por ende, la aparición del SOC) dependa en alguna medida del grado de sincronización de tales osciladores.

Como los sistemas críticamente auto-organizados están fuera del equilibrio (debido al aporte de energía del entorno y a sus dinámicas internas de relajación), los osciladores de esta tesis operan generalmente fuera del régimen estacionario. En tal tesitura, se desea comprender cómo la topología de una red y los parámetros de los osciladores aceleran o retrasan la sincronización. Según se vió en la sección 1.1.2, la elección de un modelo disipativo (donde no exista una conservación local de la energía) puede requerir una sintonización fina de algunos parámetros del sistema, en aras de posibilitar la aparición de un estado de cuasi-criticalidad auto-organizada (SOqC) [BM09].

Pensando en la posibilidad de aplicar los desarrollos de este trabajo de tesis a redes en las que existan distintos tipos de enlaces, se ha realizado el análisis desde una óptica múltiplex. Así podrán elaborarse estudios en escenarios más realistas, como las actuales redes sociales: modelos de poblaciones con varias capas o tipos de interacción, en las que cada capa corresponde a una estructura social diferente (por ejemplo, Facebook y Twitter) y donde los usuarios juegan el papel de nodos.

Para dar cuenta de estos contenidos, se ha empleado la estructura que se indica a continuación. El modelo de Kuramoto original se presenta en el apartado 2.3.1. La adaptación del anterior modelo a redes complejas se aborda en el apartado 2.3.2. En el apartado 2.3.3, se muestran los principales hallazgos relacionados con el tiempo de relajación del modelo de Kuramoto en redes complejas. Concretamente, se revisan los aportes de la Teoría espectral, y los resultados obtenidos para redes “mundo pequeño” y libres de escala. Posteriormente, en el apartado 2.3.4, se define el modelo de Kuramoto en topología múltiplex. Finalmente, en el apartado 2.3.5, se estudia el tiempo de relajación del modelo de Kuramoto en redes múltiplex. A tales efectos, se repasan los hallazgos de la Teoría espectral para estudiar el tiempo de relajación del sistema y de la sincronización entre capas, así como la estimación del tiempo de relajación del parámetro de orden del múltiplex.

2.3.1 Modelo de Kuramoto original

El modelo de Kuramoto consiste en un sistema $\mathcal{S}$ formado por N osciladores, identificados como x_n (tal que $1 \leq n \leq N$), en el que todas las unidades están acopladas entre sí. La ecuación que rige la dinámica del oscilador n -ésimo viene dada por [Kur75; Kur84]:

$$\dot{\theta}_n = \Omega_n + \frac{\lambda}{N} \sum_{m=1}^N \sin(\theta_m - \theta_n), \quad (2.26)$$

donde el factor $1/N$ se incorpora para garantizar un buen comportamiento del modelo en el límite termodinámico ($N \rightarrow \infty$), Ω_n es la frecuencia interna del oscilador n -ésimo y λ es la fuerza del acoplamiento entre las unidades. Como puede observarse, la Ec. 2.26 incluye un término de acoplamiento no lineal que depende de la diferencia de las fases de x_n y las propias de los $N - 1$ osciladores conectados a él. Cuando la fuerza del acoplamiento λ es suficientemente grande, el acoplamiento no lineal se encarga de que las oscilaciones se vayan ajustando progresivamente hasta alcanzar el estado de sincronización $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_N$. Por otro lado, cabe destacarse que, en su trabajo original, Kuramoto consideró que las frecuencias internas de los osciladores se distribuían según una distribución de probabilidad $g(\Omega)$ unimodal y simétrica, centrada en $\Omega = \bar{\Omega}$. Se puede asumir sin pérdida de generalidad que $\bar{\Omega} = 0$, simplemente haciendo una rotación del sistema de referencia $\Omega_i \rightarrow \Omega_i + \bar{\Omega}$, de tal suerte que Ω_i denote las desviaciones de la frecuencia media $\bar{\Omega} = 0$ del nodo i .

Con objeto de cuantificar la sincronía de una población de N osciladores, Kuramoto definió el siguiente parámetro de orden macroscópico:

$$r(t)e^{i\psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{x_n \in \mathcal{S}} e^{i\theta_n(t)}. \quad (2.27)$$

Esta cantidad puede ser interpretada como el centroide de un conjunto de N puntos $e^{i\theta_n(t)}$ en el plano complejo, distribuidos en el círculo unidad. Si en un cierto instante de tiempo t las fases se distribuyen uniformemente en el rango $[0; 2\pi]$, entonces no hay sincronía entre los osciladores y el centroide se localiza en el origen del plano complejo ($r(t) \approx 0$). En cambio, si en el instante t todos los osciladores rotan agrupados en un clúster síncrono, con la misma fase promedio $\psi(t)$, el centroide se ubica entorno al punto $e^{i\psi(t)}$ ($r(t) \approx 1$). Usando las cantidades de campo medio $r(t)$ y $\psi(t)$, es posible reescribir el conjunto de ecuaciones dado por la Ec. 2.26. Basta con multiplicar ambos lados de la Ec. 2.27 por $-e^{i\theta_n}$ e

igualar las partes imaginarias para obtener:

$$r \sin(\psi - \theta_n) = \frac{\lambda}{N} \sum_{m=1}^N \sin(\theta_m - \theta_n). \quad (2.28)$$

De manera que, la Ec. 2.26 resulta:

$$\dot{\theta}_n = \Omega_n + \lambda r \sin(\psi - \theta_n). \quad (2.29)$$

En esta formulación, las fases θ_n interaccionan las unas con las otras a través del campo medio definido por $r(t)$ y $\psi(t)$. Como puede observarse, a medida que r aumenta porque la población se vuelve más coherente, el acoplamiento efectivo entre los osciladores de la Ec. 2.29 se fortalece aún más y se puede reclutar a nuevas unidades para formar parte del “grupo coherente”. Por tanto, existe una relación de retroalimentación positiva entre el acoplamiento y la sincronización (descrita por la Ec. 2.27).

A continuación se presenta el estudio analítico de Kuramoto en el límite termodinámico ($N \rightarrow \infty$). Cuando el número de osciladores tiende a infinito, el sistema se puede describir por medio de una densidad de probabilidad $\rho(\theta, \Omega, t)$, tal que $\rho(\theta, \Omega, t)d\theta$ proporciona la fracción de osciladores con fases entre θ y $d\theta$, y frecuencia Ω , en el instante de tiempo t . Como ρ es no negativa y 2π -periódica en θ (es decir, $\rho(\theta, \Omega, t) = \rho(\theta + 2\pi C, \Omega, t)$ para cualquier $C \in \mathbb{Z}$), es posible escribir la siguiente condición de normalización:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta', \Omega, t) d\theta' = 1 \quad (2.30)$$

La densidad ρ debe obedecer la siguiente ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v) = 0, \quad (2.31)$$

donde $v(\theta, \Omega, t) = \Omega + \lambda r \sin(\psi - \theta)$ es la velocidad angular de un oscilador con fase θ y frecuencia natural Ω en el instante t ($\dot{\Omega} = 0$). En el límite continuo, el parámetro de orden r y la fase promedio ψ pueden determinarse a partir de la densidad $\rho(\theta, \Omega, t)$, del siguiente modo:

$$r(t)e^{i\psi(t)} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta'} \rho(\theta', \Omega', t) g(\Omega') d\Omega' d\theta' \quad (2.32)$$

Las ecuaciones 2.31 y 2.32 admiten la solución trivial $r = 0$, que corresponde a la distribución estacionaria uniforme $\rho = 1/2\pi$, propia de un estado perfectamente incoherente. Otro caso trivial es $r = 1$, el cual equivale a exigir una sincronización completa, en la que todos los osciladores tienen la misma fase ψ , siendo $\rho = \delta(\theta - \psi)$. En el estado parcialmente sincronizado ($0 < r < 1$), la ecuación de continuidad

2.31 conduce en el régimen estacionario ($\partial\rho/\partial t = 0$) a:

$$\rho(\theta, \Omega) \begin{cases} \delta \left[\theta - \psi - \arcsin \left(\frac{\Omega}{\lambda r} \right) \right] & \text{cuando } |\Omega| \leq \lambda r \\ \frac{\sqrt{\Omega^2 - (\lambda r)^2}}{2\pi |\Omega - \lambda r \sin(\theta - \psi)|} & \text{cuando } |\Omega| > \lambda r \end{cases} \quad (2.33)$$

Las soluciones para la distribución estacionaria muestran que en el estado de sincronización parcial los osciladores se dividen en dos grupos. Por un lado, están las unidades con frecuencias $|\Omega| \leq \lambda r$. Este grupo lo forman los osciladores que se ven arrastrados por el campo medio, mateniéndose en una fase promedio común $\psi(t) = \bar{\Omega}_s t$, donde $\bar{\Omega}_s$ es la frecuencia promedio de esta población. Por otro lado, los osciladores con $|\Omega| > \lambda r$ (denominados osciladores “a la deriva”) giran incoherentemente, a veces acelerándose y otras veces rotando con baja frecuencia. Al insertar las distribuciones estacionarias dadas por la Ec. 2.33 en la Ec. 2.32, se obtiene la siguiente ecuación para el parámetro de orden:

$$r = \lambda r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta' g(\lambda r \sin \theta') d\theta', \quad (2.34)$$

donde la integral refleja la contribución de los osciladores a la deriva desaparecidos, habiéndose considerado las simetrías $g(\Omega) = g(-\Omega)$ y $\rho(\theta + \pi, -\Omega) = \rho(\theta, \Omega)$, así como $e^{i(\theta + \pi)} = -e^{i\theta}$. Haciendo que $r \rightarrow 0^+$ en la Ec. 2.34, se obtiene la fuerza de acoplamiento crítica para el inicio de la sincronización que obtuvo Kuramoto [Kur75; Kur84]:

$$\lambda_c^{KM} = \frac{2}{\pi g(0)}. \quad (2.35)$$

2.3.2 Modelo de Kuramoto en redes complejas

Se obtiene la generalización del modelo de Kuramoto en redes complejas al incluir la conectividad en el término de acoplamiento del siguiente modo [Are+08; BBV08; Rod+16]:

$$\dot{\theta}_n = \Omega_n + \sum_{m=1}^N \lambda_{ij} a_{ij} \sin(\theta_m - \theta_n), \quad (2.36)$$

donde λ_{ij} representa la fuerza de acoplamiento entre los nodos i y j , y a_{ij} son los elementos de la matriz de adyacencia $\mathbf{A}$ (descritos en el apartado 2.1.1). La definición del modelo dado por la Ec. 2.36 pone de relieve un importante problema al abordar el modelo de Kuramoto en topologías complejas: la elección de λ_{ij} . Como se mostró en el apartado anterior, en la red completamente conectada, descrita por la Ec. 2.26, el acoplamiento $\lambda_{ij} = \lambda/N$ se adopta, con objeto de que el modelo se comporte bien en el límite termodinámico, ya que el grado de los

nodos es proporcional al tamaño del sistema, $k_i = N - 1$. Por analogía, el factor de normalización para la fuerza de acoplamiento en las redes complejas debería definirse de una manera que incorpore las dependencias del grado de los nodos, en función del tamaño del sistema. No obstante, como ya se ha indicado, los diferentes modelos de red generan diferentes distribuciones de grado $P(k)$, lo que hace que la elección de un *acoplamiento intensivo* λ_{ij} no sea única. Esto ha llevado a muchos investigadores a simplemente adoptar un *acoplamiento constante* $\lambda_{ij} = \lambda$, sin ninguna dependencia del tamaño del sistema, N :

$$\dot{\theta}_n = \Omega_n + \lambda \sum_{m=1}^N a_{ij} \sin(\theta_m - \theta_n), \quad (2.37)$$

Establecer la interacción entre los osciladores a través de una fuerza de acoplamiento constante, sin ningún factor de normalización adicional, parece ser más apropiado cuando se compara la sincronización de diferentes redes, ya que el número total de conexiones puede escalar de manera diferente según el tamaño de red considerado. Como señalan Rodrigues *et al.*, la elección de un acoplamiento intensivo es de hecho un problema importante con respecto a la formulación del modelo de Kuramoto en redes complejas, especialmente cuando se trata de la determinación del inicio de la sincronización [Rod+16]. Arenas *et al.* [Are+08] proporcionan una discusión interesante sobre las diferentes prescripciones para los acoplamientos intensivos y también las consecuencias correspondientes de cada elección en la dinámica de la red.

2.3.3 Tiempo de relajación del modelo de Kuramoto en redes complejas

Teoría espectral

Una alternativa empleada para estudiar el tiempo de relajación de las redes complejas (conexas) de osciladores de Kuramoto, τ_r , se basa en estudiar la dinámica linealizada del modelo de Kuramoto en términos del espectro de autovalores de la *matriz Laplaciana* del sistema, $\mathbf{L}$ [ADGPV06b; ADGPV06a].

En el caso general de una red pesada $\mathcal{S}$ con matriz de adyacencia $\mathbf{W}$, la matriz laplaciana de la red, $\mathbf{L}$, se define como la matriz $N \times N$, cuyos elementos están dados por $(\mathbf{L})_{nm} = l_{nm} = s_n \delta_{nm} - w_{nm}$, siendo $s_n = \sum_{x_m \in \mathcal{S}} w_{nm}$ y δ la función delta de Kronecker. Cuando $\Omega_n \approx 0$ y $\mathcal{S}$ es una red pesada, la dinámica linealizada de la Ec. 2.37 (esto es, la dinámica cerca del atractor de sincronización), viene dada por:

$$\dot{\theta}_n \approx \lambda \sum_{m=1}^N w_{ij} \sin(\theta_m - \theta_n) \approx \lambda \sum_{m=1}^N w_{ij} (\theta_m - \theta_n) \rightarrow \dot{\vec{\theta}} = -\lambda \mathbf{L} \vec{\theta}, \quad (2.38)$$

donde $\vec{\theta}$ es un vector columna que describe la fase de los osciladores, tal que $\vec{\theta}^T = (\theta_1, \dots, \theta_N)$, y $\mathbf{X}^T$ representa la traspuesta de la matriz $\mathbf{X}$.

Para caracterizar el espectro de autovalores $S(\lambda\mathbf{L}) \equiv \{\sigma_i\}$, se clasifican sus autovalores en orden ascendente: $0 = \sigma_1 < \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_N$ [ADGPV06b; ADGPV06a; Gó+13]. La solución de la Ec. 2.38 en función de los modos normales $\varphi_i(t)$ viene dada por:

$$\vec{\varphi} = \mathbf{B}^T \vec{\theta}, \quad (2.39)$$

donde $\varphi_i(t) = \varphi_i(0)e^{-\sigma_i t}$, y $\mathbf{B} = \left(\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \mid \dots \mid \vec{v}_N \right)$ es la matriz de autovectores de $\lambda\mathbf{L}$ (esto es, $\sigma_i \vec{v}_i = \lambda\mathbf{L}\vec{v}_i$) [ADGPV06b; ADGPV06a].

De este modo, el tiempo de relajación de los procesos difusivos en una red compleja, τ_r , depende de la topología de la red y está dominado por el menor autovalor positivo σ_2 de $\mathbf{L}$ [ADGPV06b; ADGPV06a; ADG07; GGT11; Gra+10; SJH08], es decir:

$$\tau_r = \frac{1}{\sigma_2} \quad (2.40)$$

Resultados para redes “mundo pequeño” [Rod+16]

En [Gra+10] el tiempo de relajación τ_r de las redes W-S simples (no pesadas y no dirigidas), formadas por osciladores idénticos sujetos al acoplamiento $\lambda_{ij} = \lambda/k_i$ (en la Ec. 2.36) ha sido investigado numéricamente, considerando la siguiente distancia:

$$d(t) = \max_{i,j} \left(\text{dist}(\theta_i(t), \theta_j(t)) \right). \quad (2.41)$$

En el caso de que la red W-S sea conexa, $d(t)$ viene dado por:

$$d(t) \sim \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right), \quad (2.42)$$

donde el tiempo de relajación τ_r es:

$$\tau_r = \frac{1}{\text{Re}\sigma_2^w}, \quad (2.43)$$

siendo σ_2^w el menor autovalor positivo de la matriz $\lambda\mathbf{L}^w$. La matriz $\mathbf{L}^w$ se denomina *matriz laplaciana pesada* y tiene por elementos a:

$$(\mathbf{L}^w)_{nm} = \frac{1}{k_i} (\mathbf{L})_{nm} = \delta_{ij} - \frac{1}{k_i} (1 - \delta_{ij}). \quad (2.44)$$

La introducción de esta nueva matriz Laplaciana es una consecuencia del acoplamiento utilizado en este estudio ($\lambda_{ij} = \lambda/k_i \rightarrow \dot{\vec{\theta}} = -\lambda\mathbf{L}^w\vec{\theta}$). Nótese que éste es

diferente al empleado previamente en la teoría espectral ($\lambda_{ij} = \lambda \rightarrow \dot{\vec{\theta}} = -\lambda \vec{L}\vec{\theta}$).

Fijando los valores de N y $\langle k \rangle$, en la Fig. 2.6a se muestra el efecto de aumentar la heterogeneidad de la red (esto es, la probabilidad de rebobinado p) sobre τ_r : cuanto mayor es p , menor es τ_r . Por otro lado, cuando la longitud promedio del camino más corto $\langle \ell \rangle$ se mantiene constante y se varía el parámetro p , en la Fig. 2.6b observa que τ_r alcanza un máximo dentro del rango de valores de p propio de las redes “mundo pequeño”. Este resultado es sorprendente porque significa que la inclusión de “atajos” en la red termina por retrasar el inicio de la sincronización. Asimismo, es contraintuitivo dado que la fuerza del acoplamiento crítico en las redes W-S, λ_c^{WS} , es menor que el de las estructuras regulares [Rod+16].

FIG. 2.6: Tiempo de relajación dado por la Ec. 2.42 para redes “mundo pequeño”. (a) Grado promedio fijo $\langle k \rangle = 4$. (b) Longitud de camino más corto promedio fija $\langle \ell \rangle = 4$. El recuadro de (a) representa la distancia d (Ec. 2.41) a lo largo del tiempo. La línea continua se calcula usando la Ec. 2.43. De [Rod+16].

Resultados para redes libres de escala [Rod+16]

La teoría introducida por Ott y Antonsen [OA08; OA09] permite evaluar la dinámica de relajación completa de una red no correlacionada. El método logra reducir la dimensión del sistema a un conjunto pequeño de ecuaciones diferenciales con el que describir la evolución temporal de un parámetro de orden global alternativo, r' . Dicho parámetro se define del siguiente modo:

$$r'(t)e^{\psi(t)} = \frac{1}{N \langle k \rangle} \sum_{m=1}^N k_m e^{i\theta_m(t)} \quad (2.45)$$

Los detalles de los desarrollos analíticos se exponen en [OA08; OA09; Rod+16]. Debido a su gran extensión, aquí únicamente se reproducen los resultados mostrados en [Rod+16] para redes con distribución de grado libre de escala $P(k) \sim k^{-\gamma}$,

cuando se consideran sólo pequeñas perturbaciones entorno al estado estacionario y una distribución de Lorentz para $g(\Omega) = [\pi(\Omega^2 + 1)]^{-1}$. En la tabla 2.1, se muestran los resultados para el régimen incoherente ($\lambda < \lambda_c$), en el que $r' = 0$, y los hallazgos para el régimen en el que $r' > 0$ ($\lambda > \lambda_c$), donde λ_c representa el acoplamiento crítico de las redes libres de escala, dado por:

$$\lambda_c = \frac{2 \langle k \rangle}{\pi g(0) \langle k^2 \rangle} = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle} \lambda_c^{KM}. \quad (2.46)$$

Como puede observarse, en el análisis se contempla la posibilidad de que un campo externo uniforme esté actuando las sobre las fases de los osciladores, según:

$$\dot{\theta}_n = \Omega_n + \lambda \sum_{m=1}^N a_{ij} \sin(\theta_m - \theta_n) - a \sin(\theta_n), \quad (2.47)$$

donde la constante a representa la amplitud de una fuerza periódica o el *umbral de excitación del modelo*. Finalmente, al igual que se hace en los sistemas magnéticos, donde la respuesta a los cambios en el campo magnético puede ser cuantificada por la susceptibilidad magnética, atendiendo a la Ec. 2.47, también es posible definir la *susceptibilidad* χ correspondiente al parámetro de orden r' con respecto a pequeñas variaciones de a como:

$$\chi = \frac{dr'}{da} \quad (2.48)$$

TAB. 2.1: Dependencia del parámetro de orden modificado r' , el tiempo de relajación τ_r^{-1} y la susceptibilidad χ de la fuerza del acoplamiento λ , en redes con distribución de grado libre de escala $P(k) \sim k^{-\gamma}$ cerca del estado de sincronización, cuando el campo es nulo $a = 0$; y como una función de la amplitud del campo, cuando $\lambda = \lambda_c$. De [Yoo+15] en [Rod+16].

Acoplamiento	r'	τ_r^{-1}	χ
$\gamma > 5$			
$\lambda < \lambda_c$	0	$1 - \frac{\lambda}{\lambda_c}$	$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^{-1}$
$\lambda > \lambda_c$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda_c} - 1\right)^{1/2}$	$2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} - 1\right)$	$\frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} - 1\right)^{-1}$
$\lambda = \lambda_c$	$\propto a^{1/3}$	$\propto a^{2/3}$	$\propto a^{-2/3}$
$3 < \gamma \leq 5$			
$\lambda < \lambda_c$	0	$1 - \frac{\lambda}{\lambda_c}$	$\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} - 1\right)^{-1}$
$\lambda > \lambda_c$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda_c} - 1\right)^{1/(\gamma-3)}$	$\propto \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} - 1\right)$	$\frac{1}{2(\gamma-3)} \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} - 1\right)^{-1}$
$\lambda = \lambda_c$	$\propto a^{1/(\gamma-2)}$	$\propto a^{(\gamma-3)/(\gamma-2)}$	$\propto a^{-(\gamma-3)/(\gamma-2)}$

2.3.4 El modelo de Kuramoto en topología múltiplex

Se considera una red múltiplex no dirigida $\mathcal{M}$ con M capas G^α , $1 \leq \alpha \leq M$, en la que cada capa contiene N osciladores identificados como x_n^α , $1 \leq n \leq N$ (véase la Fig. 2.4 para observar un ejemplo en el que $M = 2$). El oscilador localizado en el nodo x_n^α de la capa G^α se caracteriza por su fase θ_n^α , cuya dinámica está determinada por:

$$\dot{\theta}_n^\alpha = \Omega_n^\alpha + \lambda^\alpha \sum_{x_m^\alpha \in G^\alpha} w_{nm}^\alpha \sin(\theta_m^\alpha - \theta_n^\alpha) + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^M \lambda^{\alpha\beta} w_{nn}^{\alpha\beta} \sin(\theta_n^\beta - \theta_n^\alpha). \quad (2.49)$$

Aquí, Ω_n^α es la frecuencia natural del oscilador x_n^α , λ^α y $\lambda^{\alpha\beta}$ representan la fuerza del acoplamiento dentro de la capa α y la fuerza del acoplamiento entre las capas α y β , respectivamente, w_{nm}^α es el peso de las conexiones entre los nodos x_n^α y x_m^α , y $w_{nn}^{\alpha\beta}$ representa el peso de la conexión entre los nodos x_n^α y x_n^β . En el caso de un múltiplex simple $\mathcal{M}$, $w_{mn}^{\alpha\beta} = 1$ y $w_{nn}^\alpha = 1$, si existe una conexión entre los nodos x_n^α y x_m^α , y 0 en caso contrario.

2.3.5 Tiempo de relajación del modelo de Kuramoto en redes múltiplex

Tiempo de relajación del sistema empleando la Teoría espectral

El tiempo de relajación de redes múltiplex próximas al estado de sincronización puede aproximarse por un proceso de difusión [Gó+13; SR+13; Boc+14; Kiv+14; LMG15; DD+16]. Para mostrar una comparación más cercana entre los resultados proporcionados por la Ec. 2.49 y los de la difusión en múltiplex, se considera el caso más sencillo de una red múltiplex no dirigida $M = 2$, sin fuentes ni sumideros de frecuencia ($\Omega_n^\alpha = 0$). En tales condiciones, la aproximación lineal del modelo de Kuramoto viene dada por:

$$\dot{\theta}_n^\alpha(t) = \lambda^\alpha \sum_{x_m^\alpha \in G^\alpha} w_{nm}^\alpha (\theta_m^\alpha - \theta_n^\alpha) + \lambda^{12} (\theta_n^\beta - \theta_n^\alpha), \quad (2.50)$$

donde $1 \leq n, m \leq N$, $1 \leq \alpha, \beta \leq 2$ y $w_{nn}^{12} = 1$.

El conjunto de ecuaciones dado por la Ec. 2.50 puede reescribirse como:

$$\dot{\vec{\theta}} = -\mathcal{L}\vec{\theta}, \quad (2.51)$$

donde $\vec{\theta}$ es un vector columna que describe la fase de los osciladores, tal que $\vec{\theta}^T = \left(\theta_1^1, \dots, \theta_N^1 \mid \theta_1^2, \dots, \theta_N^2 \right)$. La matriz $\mathcal{L}$ se denomina *matriz supra-Laplaciana*

de $\mathcal{M}$ y se define como:

$$\mathcal{L} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda^1 \mathbf{L}_1 + \lambda^{12} \mathbf{I} & -\lambda^{12} \mathbf{I} \\ \hline -\lambda^{12} \mathbf{I} & \lambda^2 \mathbf{L}_2 + \lambda^{12} \mathbf{I} \end{array} \right), \quad (2.52)$$

donde $\mathbf{I}$ es una matriz identidad de dimensiones $N \times N$, y $\mathbf{L}_\alpha$ es la matriz Laplaciana $N \times N$ de G^α , cuyos elementos son $(\mathbf{L}_\alpha)_{nm} = s_n^\alpha \delta_{nm} - w_{nm}^\alpha$. Por su parte, $s_n^\alpha = \sum_{x_m^\alpha \in G^\alpha} w_{nm}^\alpha$ y δ es la función delta de Kronecker.

Para caracterizar el espectro de autovalores $S(\mathcal{L}) \equiv \{\Lambda_i\}$, se clasifican sus autovalores en orden ascendente: $0 = \Lambda_1 < \Lambda_2 \leq \dots \leq \Lambda_{2N}$ [ADGPV06b; ADGPV06a; Gó+13]. La solución de la Ec. 2.51 en función de los modos normales $\varphi_i(t)$ viene dada por:

$$\vec{\varphi} = \mathbf{B}^T \vec{\theta}, \quad (2.53)$$

donde $\varphi_i(t) = \varphi_i(0)e^{-\Lambda_i t}$, y $\mathbf{B} = \left(\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \mid \dots \mid \vec{v}_{2N} \right)$ es la matriz de autovectores de $\mathcal{L}$ (i.e. $\Lambda_i \vec{v}_i = \mathcal{L} \vec{v}_i$) [ADGPV06b; ADGPV06a; Gó+13].

De este modo, el tiempo de relajación de los procesos difusivos en un multiplex (empleado como aproximación lineal para el estudio de la sincronización de osciladores de Kuramoto), $\tau_{\mathcal{M}}$, depende de la topología de la red y está dominado por el menor autovalor positivo Λ_2 de la matriz $\mathcal{L}$, es decir, $\tau_{\mathcal{M}} = 1/\Lambda_2$ [Gó+13; SR+13; SGA17]. Este comportamiento coincide con los hallazgos hechos en redes monocapa de osciladores de Kuramoto acoplados, presentados en la Sec. 2.3.3.

Si se considera $\lambda^1 = \lambda^2 = 1$, los resultados analíticos de [Gó+13; SR+13] para la difusión en redes multiplex muestran que $S(\mathcal{L})$ posee las siguientes propiedades:

- (I) $2\lambda^{12} \equiv \Lambda_\Delta$ siempre es un autovalor de $\mathcal{L}$.
- (II) Cuando el acoplamiento es pequeño, esto es, $\lambda^{12} \ll 1$, entonces $\Lambda_2 = \Lambda_\Delta$.
- (III) Cuando el acoplamiento es grande, es decir, $\lambda^{12} \gg 1$, entonces $\Lambda_2 \sim \sigma_s/2$, donde σ_s es el menor autovalor positivo de la matriz de superposición $(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2)/2$, y $\mathbf{L}_\alpha$ es la matriz laplaciana de la capa α .

Definición del tiempo de relajación del parámetro de orden de Kuramoto y de la sincronización entre capas en redes multiplex

A continuación se van a introducir las herramientas para estimar teóricamente el tiempo de relajación del parámetro de orden de Kuramoto y de la sincronización entre capas, en redes multiplex. De aquí en adelante, la metodología que se expone forma parte del trabajo [AP+17] (en el capítulo 5).

El nivel de sincronización global de un sistema $\mathcal{S}$ con N osciladores de Kuramoto viene descrito por un parámetro de orden r , dado por la Ec. 2.27 [Kur75;

Kur84]. En el caso de una red múltiplex $\mathcal{M}$ de dos capas ($M = 2$) con N nodos en cada capa, tal parámetro puede calcularse como:

$$r(t)e^{i\psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{x_n^\alpha \in \mathcal{S}} e^{i\theta_n^\alpha(t)} \rightarrow r(t) = \frac{1}{2N} \left| \sum_{x_n^\alpha \in \mathcal{M}} e^{i\theta_n^\alpha(t)} \right|. \quad (2.54)$$

Análogamente, se puede definir un parámetro de orden para cada capa G^α , r^α , del siguiente modo:

$$r^\alpha(t)e^{i\psi^\alpha(t)} = \frac{1}{N} \sum_{x_n^\alpha \in G^\alpha} e^{i\theta_n^\alpha(t)}. \quad (2.55)$$

Cuando $r^\alpha(t) \approx 1$ ($r^\alpha(t) \approx 0$), los osciladores de la capa G^α muestran una sincronización completa (un comportamiento asíncrono). La cuestión importante relacionada con la definición r^α es que nos ayude a comprender el proceso de sincronización al nivel de la capa α , cuando el acoplamiento entre las capas G^1 y G^2 , λ^{12} , se modifica. El parámetro de orden global r , común al del modelo de Kuramoto simple (o redes monoplex simples), no proporciona por sí mismo esos detalles -a nivel de capa- sobre el proceso de sincronización. $\psi^\alpha(t)$ y $\psi(t)$ indican las fases promedio de la capa α y del sistema múltiplex, respectivamente. Cuando $M = 2$, es sencillo expresar r en función de r^α , del siguiente modo:

$$r = \sqrt{\frac{(r^1)^2 + (r^2)^2 + 2r^1r^2 \cos(\psi^1 - \psi^2)}{4}}. \quad (2.56)$$

Este resultado puede ser fácilmente obtenido multiplicando $re^{i\psi}$ por $e^{-i\psi^2}$ y realizando las necesarias operaciones.

Con el fin de presentar resultados analíticos, nuestro análisis se restringe al caso $r^\alpha(t) \approx 1$, esto es, se asume que $\theta_n^\alpha(t) \approx \psi^\alpha(t)$ para $1 \leq n \leq N_\alpha$, $1 \leq \alpha \leq M$, $\forall t$. En el capítulo 5, se muestra que estas restricciones se satisfacen en gran medida por el sistema en Ec. 2.49 cuando, en $t = 0$, el grado de sincronización en cada capa es alto. Bajo dichas condiciones, se reescribe r para el caso $M = 2$ como:

$$r(t) \approx \left| \cos\left(\frac{\psi^1 - \psi^2}{2}\right) \right| = \left| \cos\left(\frac{\Delta}{2}\right) \right|, \quad (2.57)$$

donde $\Delta(t) = \psi^1(t) - \psi^2(t)$ es la diferencia entre las fases promedio de las capas G^1 y G^2 . Por tanto, las escalas temporales de r y $\left| \cos\left(\frac{\psi^1 - \psi^2}{2}\right) \right|$ son las mismas.

Tiempo de relajación lineal de la sincronización entre capas

El tiempo de relajación lineal del proceso de sincronización de la intercapa se puede estimar empleando la diferencia entre las fases promedio de las

capas G^1 y G^2 , Δ , definidas en la Ec. 2.57. Considerando la propiedad (I) de $S(\mathcal{L})$, el vector columna de Λ_Δ , $\vec{v}_\Delta$, cumple: $\vec{v}_\Delta^T = \left(v_1^1, \dots, v_N^1 \mid v_1^2, \dots, v_N^2 \right) = \left(1, \dots, 1 \mid -1, \dots, -1 \right)$.

Por definición, L_1 y L_2 son matrices simétricas reales cuyas filas y columnas suman cero, es decir, $L_\alpha \vec{1} = \vec{0}$, donde $\vec{x}$ es un vector con todas sus componentes iguales a x . Por tanto,

$$\mathcal{L}\vec{v}_\Delta = \left(\begin{array}{c|c} \lambda^1 L_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \lambda^2 L_2 \end{array} \right) \vec{v}_\Delta + \left(\begin{array}{c|c} \lambda^{12} \mathbf{I} & -\lambda^{12} \mathbf{I} \\ \hline -\lambda^{12} \mathbf{I} & \lambda^{12} \mathbf{I} \end{array} \right) \vec{v}_\Delta = \vec{0} + 2\lambda^{12} \vec{v}_\Delta = \Lambda_\Delta \vec{v}_\Delta. \quad (2.58)$$

De acuerdo con [ADGPV06b; ADGPV06a; Gó+13], el modo normal relacionado con $\Lambda_\Delta = 2\lambda^{12}$ es:

$$\vec{v}_\Delta^T \vec{\theta} = \sum_{x_n^1 \in G^1} \theta_n^1 - \sum_{x_m^2 \in G^2} \theta_m^2 = \varphi_\Delta(0) e^{-\Lambda_\Delta t}. \quad (2.59)$$

Según la Ec. 2.57, cuando es válida la suposición de que $r^\alpha(t) \approx 1$, la Ec. 2.59 conduce a:

$$\Delta(t) = \psi^1(t) - \psi^2(t) \approx \frac{\varphi_\Delta(0)}{N} e^{-\Lambda_\Delta t}. \quad (2.60)$$

Dado que el tiempo de relajación para la sincronización entre capas se puede estimar mediante $\tau_\Delta = 1/\Lambda_\Delta$, obtenemos las siguientes conclusiones, las cuales son similares a los resultados enumerados en la sección 2.3.4:

- (I) Cuando $\lambda^{12} \ll 1$, la escala temporal del proceso difusivo de $\mathcal{M}$ coincide con el tiempo de sincronización entre las capas, es decir, $\Lambda_2 = \Lambda_\Delta$.
- (II) Cuando $\lambda^{12} \gg 1$, la escala temporal del proceso difusivo de $\mathcal{M}$ excede el tiempo de sincronización entre las capas, es decir, $\Lambda_2 \ll \Lambda_\Delta$ ($\Leftrightarrow \tau_{\mathcal{M}} \gg \tau_\Delta$).

Tiempo de relajación no-lineal de la sincronización entre capas

Para derivar la escala de tiempo de relajación no lineal de la sincronización entre capas para el sistema en la Ec. 2.49, se reescribe en términos de los parámetros de la orden de cada capa G^α , r^α , de la siguiente manera:

$$\dot{\theta}_n^\alpha = \Omega_n^\alpha + \lambda^\alpha r^\alpha N \bar{w}_n^\alpha \sin(\psi^\alpha - \theta_n^\alpha) + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^M \lambda^{\alpha\beta} w_{nn}^{\alpha\beta} \sin(\theta_n^\beta - \theta_n^\alpha), \quad (2.61)$$

donde $\bar{w}_n^\alpha$ se define como:

$$\bar{w}_n^\alpha \sum_{x_m^\alpha \in G^\alpha} e^{i\theta_m^\alpha} = \sum_{x_m^\alpha \in G^\alpha} w_{nm}^\alpha e^{i\theta_m^\alpha}. \quad (2.62)$$

Como $r^\alpha(t) \approx 1$, se obtiene la siguiente aproximación para un múltiplex no dirigido $\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}^\alpha &= \frac{1}{N} \sum_{x_n^\alpha \in G^\alpha} \dot{\theta}_n^\alpha = \frac{1}{N} \left[\sum_{n=1}^N \Omega_n^\alpha \right] + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^M \lambda^{\alpha\beta} \sin(\psi^\beta - \psi^\alpha) \left[\sum_{n=1}^N w_{nn}^{\alpha\beta} \right] = \\ &= \langle \Omega \rangle^\alpha + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^M \lambda^{\alpha\beta} \sin(\psi^\beta - \psi^\alpha) \frac{s^{\alpha\beta}}{N}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

donde $s^{\alpha\beta}$ es la suma de los pesos de la entrecapa formada por los enlaces entre las capas G^α y G^β . Entonces, la evolución de la diferencia de fase promedio entre G^α y G^β es:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}^{\alpha\beta} &= \dot{\psi}^\alpha - \dot{\psi}^\beta = \left(\langle \Omega \rangle^\alpha - \langle \Omega \rangle^\beta \right) - 2\lambda^{\alpha\beta} \sin(\psi^\alpha - \psi^\beta) \frac{s^{\alpha\beta}}{N} \\ &+ \sum_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \alpha, \beta}}^M \left[\lambda^{\alpha\gamma} \sin(\psi^\gamma - \psi^\alpha) \frac{s^{\alpha\gamma}}{N} - \lambda^{\beta\gamma} \sin(\psi^\gamma - \psi^\beta) \frac{s^{\beta\gamma}}{N} \right]. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Restringiendo el desarrollo al caso $M = 2$ y $w_{nn}^{12} = 1 \Rightarrow s^{12} = N$, en primer lugar, se considera $\langle \Omega \rangle^1 \approx \langle \Omega \rangle^2$, de manera que la sincronización del sistema puede ser estimada como:

$$\left| \tan \left(\frac{\Delta(t)}{2} \right) \right| \approx \left| \tan \left(\frac{\Delta(0)}{2} \right) \right| e^{-\int_0^t 2\lambda^{12} dt'} = \left| \tan \left(\frac{\Delta(0)}{2} \right) \right| e^{-\Lambda_\Delta t} \equiv \eta_\Delta(t), \quad (2.65)$$

donde $\Delta(t) = \Delta^{12}(t)$. La Ec. 2.65 y el desarrollo en serie de $\tan(x) \simeq x$ muestra que el tiempo de relajación de Δ se ve dominado por Λ_Δ , esto es, $\Delta/2 \propto e^{-\Lambda_\Delta t}$.

Después, si $\langle \Omega \rangle^1 \neq \langle \Omega \rangle^2$, es posible integrar la Ec. 2.64 y expresar la solución correspondiente en términos de una variable $\xi(t)$:

$$\xi(t) = \frac{\left| \tan \left(\frac{\Delta(t)}{2} \right) - \operatorname{sgn} \left(\langle \Omega \rangle^{12} \right) \left(|R| - \sqrt{R^2 - 1} \right) \right|}{\left| \tan \left(\frac{\Delta(t)}{2} \right) - \operatorname{sgn} \left(\langle \Omega \rangle^{12} \right) \left(|R| + \sqrt{R^2 - 1} \right) \right|} = \xi(0) e^{-t|\langle \Omega \rangle^{12}| \sqrt{R^2 - 1}}, \quad (2.66)$$

donde $\text{sgn}(\cdot)$ es la función signo, $\langle \Omega \rangle^{12} \equiv \langle \Omega \rangle^1 - \langle \Omega \rangle^2$ y

$$R = \frac{\Lambda_\Delta}{\langle \Omega \rangle^1 - \langle \Omega \rangle^2} \equiv \frac{\Lambda_\Delta}{\langle \Omega \rangle^{12}}. \quad (2.67)$$

La Ec. 2.66 es válida cuando $|R| > 1$, mientras que, para el caso $|R| \leq 1$, la integración de la Ec. 5.15 da como resultado:

$$\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right) = R + \sqrt{1 - R^2} \tan\left(\frac{\langle \Omega \rangle^{12} \sqrt{1 - R^2}}{2} t + \tan^{-1}\left(\frac{\tan\left(\frac{\Delta(0)}{2}\right) - R}{\sqrt{1 - R^2}}\right)\right). \quad (2.68)$$

Como puede observarse, la Ec. 2.68 muestra que $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$ es una función periódica cuando $\Lambda_\Delta \leq |\langle \Omega \rangle^{12}|$. Este comportamiento a la deriva simplemente indica que, si la fuerza de acoplamiento de la capa intermedia no es lo suficientemente grande, ya no es posible reducir la diferencia de las frecuencias promedio entre las capas y arrastrar a todo el sistema hacia la sincronización.

Suponiendo que $\Delta/2 \gtrsim 0$, $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right) \geq 2|R|$ y $\Lambda_\Delta \gg |\langle \Omega \rangle^{12}|$, pueden eliminarse los valores absolutos de la Ec. 2.66, de manera que ésta puede aproximarse como:

$$\frac{\tan\left(\frac{\Delta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\Delta}{2}\right) - A} = -\frac{1}{A} \left(\frac{\Delta}{2}\right) - \frac{1}{A^2} \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 - \frac{(A^2 + 3)}{3A^3} \left(\frac{\Delta}{2}\right)^3 - \dots \approx \xi(0)e^{-\Lambda_\Delta t}, \quad (2.69)$$

donde $A = 2|R|\text{sgn}(\langle \Omega \rangle^{12})$. Bajo estas condiciones, el tiempo de relajación de Δ es dominado por Λ_Δ . Por tanto, con tal que $r^1(t) \approx r^2(t) \approx 1$ y $\Lambda_\Delta \gg |\langle \Omega \rangle^{12}|$, el modelo de Kuramoto (Ec. 2.49) y el análisis espectral conduce al mismo tiempo de relajación para el proceso de sincronización entre capas, cuando $M = 2$: $\tau_\Delta = 1/\Lambda_\Delta = 1/2\lambda^{12}$.

Estimación del tiempo de relajación del parámetro de orden global

Para pequeños valores de Δ , la evolución del parámetro de orden dado por la Ec. 2.57 puede aproximarse por $r(t) \simeq 1 - \Delta^2/8$. Por lo tanto, la escala de tiempo del parámetro de orden (τ_r) queda determinada por la menor potencia no negativa de $\Delta/2$, hallándose la siguiente estimación aproximada: $\tau_r \gtrsim 1/2\Lambda_\Delta$.

Recopilando los resultados en las Secs. 2.3.4 y 2.3.5, la fase de sincronización asintótica del modelo de Kuramoto en múltiplex se caracteriza por el siguiente comportamiento:

(i) Cuando $\lambda^{12} \ll \lambda^1 = \lambda^2$, las escalas temporales se ordenan del siguiente modo:

$$\tau_{\mathcal{M}} = \tau_\Delta > \tau_r.$$

(II) Cuando $\lambda^{12} \gg \lambda^1 = \lambda^2$, , las escalas temporales se ordenan del siguiente modo:
 $\tau_{\mathcal{M}} \gg \tau_{\Delta} > \tau_r$.

Según la Ec. 2.65, incrementar el valor de λ^{12} acelera el régimen transitorio de la sincronización entre capas y el propio del parámetro de orden global. Asimismo, reduce la diferencia entre la fase media de cada capa y, de este modo, favorece la sincronización completa del sistema.

Parte II

Colección de artículos

3 | Inducing Self-Organized Criticality in a network toy model by neighborhood assortativity

Alfonso Allen-Perkins^{*}, Javier Galeano^{*} and Juan Manuel Pastor^{*}

Phys. Rev. E 94, 052304 (7 pp)– Published 7 November 2016

DOI: [10.1103/PhysRevE.94.052304](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.052304)

Cuartil de la revista: Primero (Q1)

3.1 Abstract

Complex networks are a recent type of frameworks used to study complex systems with many interacting elements, such as self-organized criticality (SOC). The network nodes' tendency to link to other nodes of similar type is characterized by assortative mixing. Real networks exhibit assortative mixing by vertex degree, however, typical random network models, such as the Erdős-Rényi or the Barabási-Albert model, show no assortative arrangements. In this paper we introduce the notion of *neighborhood assortativity*, as the tendency of a node to belong to a community (its neighborhood) showing an average property similar to its own. Imposing neighborhood assortative mixing by degree in a network toy model, SOC dynamics can be found. These dynamics are driven only by the network topology.

^{*} Complex Systems Group (ETSIAAB), Technical University of Madrid, 28040 Madrid, Spain.

The long-range correlations resulting from criticality have been characterized by means of fluctuation analysis and show an anticorrelation in the node's activity. The model contains only one parameter and its statistics plots for different values of the parameter can be collapsed into a single curve. The simplicity of the model allows us to perform numerical simulations and also to study analytically the statistics for a specific value of the parameter, making use of the Markov chains.

3.2 Introduction

Self-organized criticality is a paradigm of a complex system. In their seminal work, Bak *et al.* introduced the idea of self-organized criticality (SOC) using a computer cellular automaton as a sandpile experiment [BTW87]. Their system assembled itself in a critical state. When the system relaxed (recovering the stationary state) it showed spatial and temporal self-similarities. Systems exhibiting SOC dynamics are open dissipative systems, involving two time scales: a slow energy income and a quick relaxation. Empirical examples that have been linked to SOC dynamics are earthquakes [PS03], solar flares [LH91], neuronal activity [BP03], and sand piles [Hel+90; Gru+93], among others.

In order to determine the physical properties of these dynamics, different models have been proposed [Pru12]. The archetypal model of SOC is the sandpile model, which mimics the process of adding sand grains one by one over a sandpile [BTW88]. The mechanical instability is simulated by a threshold height (or height difference relative to its neighbors). This process allows the development of avalanches with an event size distribution similar to those of the sandpile experiments. In order to model earthquakes SOC dynamics Olami *et al.* introduced a non-conservative SOC model based on a two-dimensional spring-block system connected to a rigid driving plate [OFC92]. Their cellular automaton displayed similar statistics and gave a good prediction of the Gutenberg-Richter law. Caruso *et al.* analyzed the Olami-Feder-Christensen (OFC) model in a regular lattice and small-world network [Car+07]. They reported a well-defined power-law distribution of the avalanche size and characterized the presence of criticality by the probability density function (PDF) of the differences between avalanche sizes at different times t and $t + \Delta t$.

The study of complex systems employing a network science framework has attracted much interest in many interacting-elements systems [CG09]. Several models for studying SOC in complex networks have been proposed [DAH02; MV02; BM04]. In these models criticality is produced by a fitness parameter defined on the nodes or by a rewiring process [BM04; FFH06].

We present a simple network model that mimics the instability condition of the sandpile models imposing a local stability condition associated with an average property of its neighborhood. This neighborhood assortativity produces SOC dynamics driven by the network's topology, namely, a node will become unstable when its degree is greater than a threshold condition (like in sandpile models). This generalization of sandpile models can describe a system of many interacting elements in which the maximum value of the node's property depends on its neighborhood's values. This SOC model is driven exclusively by the network topology (neither rewiring requirements nor non-topological properties associated with the nodes have been used).

The model definition and its main features are explained in Sec. 3.3. Numerical simulations are reported in Sec. 3.4. In Sec. 3.4, we first characterize the neighborhood topology conducted by the stability condition (introducing the neighborhood assortativity). We then show a complete characterizations of the SOC dynamics and we compare our results with the classical OFC model [Car+07]. In Sec. 3.5 we develop the algorithms for the probability distribution by means of the Markov chains for a special case where the network is restricted to a linear chain, and compare the results with numerical simulations. Conclusions are summarized in Sec. 4.7.

3.3 Toy Model

Starting from a single node the network grows by adding a new node (with a single link) at each time step; nonetheless, a topological stability condition constrains the growth. After a new addition the system can result in an unstable configuration. This unstable state leads to a relaxation process, which, eventually, can end with the removal of nodes. The interplay between the dynamics and topology drives the system.

In this model the stability of a node depends on the support of its neighbors as follows. The node's degree must be less than or equal to the average degree of its neighbors plus a global constant (hereafter buffering capacity C). Therefore, the stability condition can be written as follows:

$$k_i \leq \langle k_j \rangle_{N_i} + C, \quad (3.1)$$

where k_i is the degree of the node i , and N_i is the set of nearest neighbors of node i .

This inequation may be rewritten as an equation introducing a new local parameter α_i :

$$k_i + \alpha_i = \frac{1}{k_i} \sum_{j \in N_i} k_j + C, \quad (3.2)$$

where α_i is a grade of stability, i.e., the higher α_i is, the more stable the node is. We will identify the term $-\alpha_i$ as the node's activity. Note that α_i is negative for unstable nodes.

When a node becomes unstable, one of its k_i links is randomly removed and the smallest subnet is deleted. Since the degree has changed, the stability conditions of the node and its neighbors have to be checked again in an iterative process until every node in the network is stable. The set of removals nodes performed until every node in the network is stable represents an avalanche. The size of the avalanche can be defined as the total number of nodes removed from the network.

Starting from a single node or a small network, these dynamics make the system evolve towards a finite network whose average size, in the stationary regime, depends on the buffering capacity constant. Note that this model generates tree-like networks since one link is added at each time step and there is no rewiring between nodes, thus there are no cycles in the network. Moreover, starting from a full-connected network as the initial seed after a long time period every cycle will break up (for any finite C). Therefore, the average number of links is always less than 2. These tree-type networks can be found in the tree topology of physical connections on a local area network (hybrid bus and star topologies), where a switch can only distribute through a limited number of connections, and also in branching processes such as fractal trees [VA97].

The node's stability condition is related to the average degree of its neighbors. Thus, it will produce networks of positive neighborhood assortativity, i.e., the node's degree tends to be similar to the average degree of its neighborhood, as shown in the next section.

This condition implies a maximum degree in the network. This maximum degree depends on the constant C . Starting from a single seed, the maximum degree of the network can be increased when the new node is added to a node with the highest degree but connected to neighbors with the same maximum degree. In this case the new stability condition can be written as

$$k_i + 1 \leq \frac{k_i^2 + 1}{k_i + 1} + C, \quad (3.3)$$

Let $k_{\max}$ be the maximum degree on the network. The minimum value of C satisfying $k_i + 1 = k_{\max}$ will be

$$C_{\min}^{k_{\max}} = \frac{2(k_{\max} - 1)}{k_{\max}}, \quad (3.4)$$

For example, for $k_{\max} = 2$, $C_{\min} = 1$; for $k_{\max} = 3$, $C_{\min} = 4/3$; and for $k_{\max} = \infty$, $C_{\min} = 2$.

Dynamically, this model shows four behaviors depending on the global parameter C : (i) $0 \leq C < 1$, whose solution is the trivial duple since adding a new node is always unstable; (ii) $1 \leq C < 4/3$, which generates only linear chains, i.e., the possible stable configurations require $k_{\max} = 2$ (this fact will allow us to study this case statistically in Sec. 3.5); (iii) $4/3 \leq C < 2$, which produces networks with the value of $k_{\max}$ restricted by Eq. 3.4, with, however, the average size of these networks limited to a value dependent on C (as can be seen in Sec. 3.4, Fig. 3.2); and (iv) $C \geq 2$, which produces networks without any limit in the maximum degree (but also with the stationary average size limited to a value dependent on C). The limit case $C = \infty$ allows adding a new node to any node in the network; all configurations are stable, thus there will not be any pruning events and the network will grow without any limit.

3.4 Numerical Results

We performed numerical simulations starting from a single node and checked that by starting from a different seed, only the statistics at initial time steps change, while at the stationary state they stay the same. A snapshot of a network with $C = 2.5$ at time $t = 3000$ is depicted in Fig. 3.1.

The stability condition in the model implies a different type of assortative mixing in which the nodes's tendency to link does not depend on its nearest neighbors' properties but on the neighborhood's average property. In order to characterize the neighborhood's assortativity we have assigned a new property to the node: the neighborhood's average degree, defined as, $\tilde{k}_i \equiv \sum k_j / (k_i + 1)$, where $j \in N_i$, i.e., the average degree including the node i .

For this magnitude we can obtain an assortativity coefficient as the standard Pearson correlation coefficient. The average value of the neighborhood assortativity coefficient, averaged over 1000 networks in the stationary state, is around $r_{\tilde{k}} = 0.45$, for C in the range 2.0 – 3.0. The significance of these values is evaluated by the jackknife method [New03a], with an estimated error of $\sigma_r = 0.05$. This approach of assortative mixing by a neighborhood's average property indicates that

FIG. 3.1: Network snapshot for $C = 2.5$, at time $t = 3000$. The node's degree is size coded from $k = 1$ to 6.

a node is more likely to connect to a neighborhood whose average degree is close to its own degree.

It is worth noting that assortative mixing by vertex degree is null ($r = 0$) for this model as for random graphs [the Erdős-Rényi (E-R) model] or the Barabási-Albert (B-A) model [New02]. However, assortative mixing by neighborhood's average degree is significantly positive, $r_k = 0.45$, while it is null for E-R or B-A models.

Our preliminary results on neighborhood assortativity for real-world and synthetic networks (such as trimmed and diluted Cayley trees [VA97]) show that some of them exhibit positive neighborhood assortativity and null degree assortativity.

Regarding the dynamics, this model includes two time scales: a slow energy income (one node per time unit t) and a fast relaxation process triggered by the stability criterion (associated with a micro-time). The instability of a node involves the pruning of a link, which can lead to another instability situation at the next micro-time, and so on, eventually producing an avalanche. These fluctuations of slow increase and sudden decrease can be seen as a sign of criticality; the system is in a marginal stability state and evolves itself toward the stationary state. A complete characterization of its SOC dynamics is presented below.

The time evolution of the system size (number of nodes) averaged over 100 realizations, for different values of the buffering capacity constant is plotted in Fig. 3.2. The marginal stability of the SOC state can be determined by the stationarity of the averaged value of a characteristic global magnitude, such as the system size (or the average degree), as can be observed in Fig. 3.2. These average sizes in the stationary state n_{stat} versus buffering capacity constant can be fitted by a power law (when k_{max} is unlimited). Thus, the statistics from different values of C can be collapsed after rescaling by n_{stat} . The transition time can also be fitted with respect to the average stationary system size as $t_x \sim n_{\text{stat}}^{1/z}$, with an exponent $z = 0.8 \pm 0.1$ (following the notation of fractal growth dynamics). In the inset of Fig. 3.2 we represent the master curve for the main figure (collapsed from the different plots).

FIG. 3.2: Average time evolution of the total number of nodes for different buffering capacity constants: $C = 2.0$ (blue line), $C = 2.5$ (red line), and $C = 2.75$ (black line). The inset shows the collapse of the different plots.

A typical time evolution of the normalized number of nodes, $n(t)/n_{\text{stat}}$, (for $C = 2$) is plotted in Fig. 3.3a, where the dotted horizontal line corresponds to the average stationary system size. Figure 3.3b shows the power spectra of these discharge events for different values of C (averaged over 1000 realizations). For $C \geq 2$ (dynamics with no restrictions on k_{max}) a well-defined f^{-2} fit is obtained, in agreement with mass fluctuations in sandpile experiments [Hel+90], and theoretical results [JCF89]. When $1 \leq C < 2$ the power spectra exhibits a lower slope and a cutoff at low frequencies.

A characteristic aspect of SOC is the cumulative avalanche size distribution that exhibits power-law scaling with a finite-size effect. Figure 3.4 depicts the normalized avalanche size evolution during 5000 time units, for $C = 2$, where the Y axis represents the size of events s normalized with respect to the stationary system size, i.e., $s^* = s/n_{\text{stat}}$ (note that in these units avalanches of size greater

FIG. 3.3: (a) Time evolution of the network size normalized by the stationary system size for $C = 2$; the horizontal dashed line represents the average stationary system size. (b) Power spectra, for $C = 1$ (orange), $C = 4/3$ (red), $C = 2$ (purple), $C = 2.5$ (blue). Gray straight lines of slope m are guides for the eye: $m = -1.6$, dotted line; $m = -1.9$, dashed line; and $m = -2.0$, solid line.

than 0.5 can be observed). The cumulative avalanche size distribution for different values of C exhibits a power-law behavior $P(s \geq S) \sim s^{-\gamma}$. The scale-free nature of the event size distribution allows us to collapse all the event size distributions for different buffering capacity values, by normalizing with the stationary system size. The normalized avalanche size cumulative distribution for different *buffering capacities*, from $C = 1$ to $C = 2.75$, is plotted in Fig. 3.5a; the larger the buffering capacity, the wider the range of the power law behavior. In Sec. 3.5 we obtain theoretically the same results for $C = 1$ [cyan solid line in Fig. 3.5a]. The collapse of plots for $C \geq 2$ is depicted in Fig. 3.5b. The cumulated power-law exponent $\gamma = -0.8 \pm 0.1$ is in agreement with the corresponding value for the OFC model (a -1.8 exponent for the PDF)[OFC92].

FIG. 3.4: Normalized avalanche sizes evolution during 5000 time units for $C = 2$.

FIG. 3.5: (a) Cumulative normalized event size distribution for different buffering capacity constants: $C = 1$ (theoretical), cyan line; $C = 1$, blue circles; $C = 4/3$, green pluses; $C = 2.0$, magenta stars; $C = 2.5$ red triangles, and $C = 2.75$, black squares. The dashed line with slope $\gamma = -0.8$ is a guide for the eye for the power-law regime. (b) Collapse of the same plot for $C \geq 2$.

Another magnitude studied in SOC time series is the waiting time distribution (WTD), which represents the distribution of time intervals between two consecutive events. In generic SOC models, when the triggering is not correlated [Bof+99; SNC02], the distribution shows an exponential behavior, unlike earthquakes or solar flare activity data with a power-law distribution. Figure 3.6a shows the cumulative WTD for different buffering capacities from $C = 1.0$ to $C = 3.0$. Note the logarithmic scale of the Y axis and the linear scale of the X axis. The cumulative WTD can be fitted by an exponential function $\exp(-\Delta t / t_C^*)$. We can collapse the curves for $C \geq 2$, with different exponential slopes [Fig. 3.6b], rescaling the interval times with a power of the stationary system size,

$$t_C^* \sim n_{\text{stat}}^\beta, \quad (3.5)$$

with an exponent $\beta = 0.38 \pm 0.05$.

Referring to the correlations statistics, different procedures have been reported in the literature [MG14; McA+16]. Based on the idea of the relative difference in the size of avalanches described in studies of solar flares or earthquakes, we can define the relative difference in the size of avalanches at different times t and $t + \Delta t$ as follows:

$$\delta S_{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\sigma_{\Delta t}}, \quad \sigma_{\Delta t}^2 = \langle [s(t + \Delta t) - s(t)]^2 \rangle. \quad (3.6)$$

FIG. 3.6: a) Cumulative WTD for different buffering capacity constants: $C = 1.0$ (blue circles), $C = 1.33$ (green pluses), $C = 2.0$ (magenta stars), $C = 2.5$ (red triangles), and $C = 3.0$ (black squares), on log-lin scales. (b) Collapse of plots in (a) according to Eq. 3.5, for $C \geq 2$, with $\beta = 0.38$.

The probability distributions for removed nodes fluctuations $P(\delta S_{\Delta t})$, obtained for different values of Δt from $\Delta t = 1$ to $\Delta t = 1000$, are depicted in Fig. 3.7. The overlapping of different interevent scales Δt indicates the lack of time scales in the correlations.

Caruso *et al.* reported that in the critical Olami-Feder-Christensen model (on a small-world topology) the PDF of the avalanche size differences (referred to as returns) can be fitted by a q -Gaussian curve $f(x) = A [1 - (1 - q)x^2/B]^{1/(1-q)}$ [Car+07]. In the critical regime they obtained a value of $q = 2.0 \pm 0.1$. In our case, similar results were obtained. The inset of Fig. 3.7 shows a zoom-in for small returns and a suitable fitting for different values (from $\Delta t = 1$ to $\Delta t = 1000$); the solid line corresponds to the fitting by a q -Gaussian curve, with an exponent $q = 2.2 \pm 0.2$, compatible with the OFC model [Car+07].

Finally, we have tried to quantify the long-range spatial correlations following the fluctuation analysis introduced by Rybski *et al.* for networks [RRK10]. This approach is based on the fluctuations of degree sequence along shortest paths of length d and it can be adapted to any topological property of the network, such as node activity. In our case, the magnitude playing the role of node activity is $-\alpha_i$, which is defined in Eq. 3.2 (the more negative α_i is, the more unstable the node i is).

Following the procedure described in [RRK10], we have considered all the shortest paths of length d in the network and calculated the standard deviation of the averages of our activity α_i , $F(d)$. Figure 3.8 shows the fluctuation function $F(d)$ for

FIG. 3.7: Probability distribution of removed nodes fluctuations for different time intervals $\Delta t = 1$ (blue circles), 10 (red asterisks), and 1000 (black pluses). The inset shows a zoom-in of positive values and the q -Gaussian fit for $\Delta t = 1, 10, 100, 1000$, with $\delta s < 20$ and $q = 2.2$

$C = 2.75$, averaged over 2000 snapshots. A power-law tendency can be observed (superimposed with the exponential finite-size effect). Since the usual Hurst-like exponent α_H is related to the fitted value α by $\alpha_H = \alpha + 1$ [RRK10], positive long-range correlations are characterized by exponents $-1/2 < \alpha < 0$, while the negative ones are characterized by exponents $-1 < \alpha < -1/2$.

FIG. 3.8: Fluctuation function $F(d)$ for $C = 2.75$. The inset shows $F(d^*)$ functions for $C = 2$ (magenta circles), $C = 2.5$ (red triangles), and $C = 2.75$ (black squares); the dashed line is a guide for the eye with slope -0.7 .

The main challenge of studying the networks of this model is the variation of their size. In order to overcome this difficulty we have rescaled the distance d with the diameter of the network, $d^* = d/d_{\max}$. The inset of Fig. 3.8 depicts the fluctuation function for three values of C by rescaling the distance, $F(d^*)$. For different values of C , we have always obtained an exponent $\alpha < -0.5$, indicating anticorrelations in the activity. This result is in agreement with the meaning of the node's activity ($-a_i$) since a node with high activity (more negative values of a_i) has a higher degree than its neighbors (on average).

This anticorrelation can also be found by employing the assortative mixing by activity, r_a . As mentioned by Newman, one can compute the standard Pearson correlation coefficient for any scalar variable associated with the nodes [New03a]. The value of this correlation coefficient for the activity is $r_a = -0.5 \pm 0.1$ (where the error is calculated by the jackknife method [New03a]), in agreement with the result shown by the fluctuation function. It is worth remembering that assortative mixing by vertex degree is null-like in the case of other typical random network models.

3.5 Statistical results

In this model there exists a special case that, due to its simplicity, can be treated statistically. When the buffering capacity constant is $1 \leq C < 4/3$ the node degree is limited to $k_{\max} = 2$. Therefore, the only possible result is a linear chain whose size evolves stochastically.

The probability of finding a linear chain of size L at time t can be solved using Markov chains. We define the transition matrix, $\mathbf{P}$, that contains the probabilities of transition p_{ij} from state i to state j and an initial probability vector $\mathbf{u}$ with the probabilities of all the r states at the initial time ($\mathbf{u} = \{s_1, s_2, \dots, s_r\}$). In our particular case s_i refers to a network with i nodes. After n time steps the probability that the system is in state $\mathbf{v} = \{s'_1, s'_2, \dots, s'_r\}$ can be obtained as the power of the transition matrix:

$$\mathbf{v}^{(n)} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}^n, \quad (3.7)$$

where $\mathbf{u} = \{1, 0, 0, \dots\}$ for a single-node seed. Note that a linear chain of length L_i , at time t , from a system of length L_{i-1} and from L_j , for any $j > i$, at time $t - 1$ can be obtained. In our work we have studied their first 30 time units. In the stationary state, the average system size (number of nodes) is 5.23. This statistical value is confirmed by numerical simulations (averaged over 10^4 realizations), *i.e.* $\langle L_{C=1}(t = 30) \rangle = 5.23$. The probability distribution $\mathbf{v}$ at any time can be defined for any value of the system size, even for very large number of nodes. For example, the probability of finding a linear chain of size $L = 20$ at $t = 30$ is about 10^{-9} . Figure 3.9a shows the time evolution of the percentage for networks with size L , from $L = 3$ to $L = 7$ (only up to $t = 6$ for clarity). Lines correspond to values obtained from the statistics study and the symbols correspond to average values from numerical simulations. From the probability transitions in the Markov chain the average event size distribution can also be estimated. In Fig. 3.9b the lines represent the theoretical values computed from the statistics study and the symbols represent the results from numerical simulations averaged over 10^8 realizations.

FIG. 3.9: (a) Time evolution of the average system size (in percentage) for $C = 1$ and $L = 3$ (blue circles), $L = 4$ (green squares), $L = 5$ (red diamonds), $L = 6$ (cyan stars), $L = 7$ (black triangles); points are average results from numerical simulations and lines connecting points are theoretical results. (b) Time evolution of the average avalanche size (in percentage) for $C = 1$ and $s = 0$ (no-events) (blue circles), $s = 1$ (green squares), $s = 2$ (red diamonds), $s = 3$ (cyan stars), $s = 4$ (black triangles); points are average results from numerical simulations and lines connecting points are theoretical results

This statistical approach to the special case of linear chains can be used to gain better insight into the event size distribution. Even in this simple case the event size can vary from 1 to more than a half of the system size at any time, and with this approach we can obtain the probability of an event of any size, and also the probability of having a linear chain of size L at any time. As can be seen in Fig. 3.9 the statistical approach and the numerical simulations are in complete agreement.

3.6 Conclusions

The characteristic behavior of the SOC dynamics and some of its statistics properties can be analyzed with our simple network model. In this model the system (the network) is maintained out of equilibrium by a constant flux of matter (nodes). The criticality appears due to a stability condition that relates one node's topological property (its degree) to its neighborhood (the average degree). This local condition is associated with a neighborhood's assortativity. This approach represents one step beyond Newman's assortative mixing: A node's tendency of linking does not depend on its neighbors' properties but on the neighborhood's average property. This assortative mixing by the neighborhood's average property should

be more suitable for studying social community networks. An exhaustive study of neighborhood assortativity with real and synthetic networks is left for future work.

In this toy model, the interplay between topology and dynamics drives the system to a self-organized stationary state. The only parameter in the model that controls the system size at the stationary state (without any dynamical variable) is the buffering capacity constant C .

In order to characterize the SOC dynamics we have performed simulations for different values of the buffering capacity. The statistics of events and time intervals between events show distributions with an exponent ($\gamma = 0.8$) similar to the ones observed in the OFC model [Car+07]. Moreover, all the distribution plots for different buffering capacity constants (and for different system sizes) can be collapsed into an universal curve, indicating that their own dynamics is tuning the phenomena in the same organized way, without external conditions. The PDF of the returns (differences between avalanche size at times t and $t + \Delta t$) can be fitted by a q -Gaussian curve. The fit exponent $q = 2.2 \pm 0.2$ can also be compared with the exponent found in the OFC model [Car+07]. In general, the model exhibits a SOC behavior with exponents similar to the OFC model.

We have also studied the statistical model for the special case of linear chains ($1 \leq C < 4/3$) by means of the Markov chains. With this procedure we have obtained the probability of finding the system in a state s_i (a network of i nodes) at time t and, moreover, it can reproduce the system size distribution obtained from simulations.

By producing small variations that allow cycles and clusters, the model can become a possible representation for some social organizations, such as corporation hierarchy or population organization.

4 | Two-Walks Degree Assortativity in Graphs and Networks

Alfonso Allen-Perkins^{*}, Juan Manuel Pastor^{*,†} and Ernesto Estrada[‡]

Applied Mathematics and Computation. Volume 311, 15 October 2017, pp 262-271

DOI: [10.1016/j.amc.2017.05.025](https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.05.025)

Cuartil de la revista: Primero (Q1)

4.1 Abstract

Degree assortativity is the tendency for nodes of high degree (resp. low degree) in a graph to be connected to high degree nodes (resp. to low degree ones). It is usually quantified by the Pearson correlation coefficient of the degree-degree correlation. Here we extend this concept to account for the effect of second neighbours to a given node in a graph. That is, we consider the two-walks degree of a node as the sum of all the degrees of its adjacent nodes. The two-walks degree assortativity of a graph is then the Pearson correlation coefficient of the two-walks degree-degree correlation. We found here analytical expression for this two-walks degree assortativity index as a function of contributing subgraphs. We then study all the 261,000 connected graphs with 9 nodes and observe the existence of assortative-assortative and disassortative-disassortative graphs according to degree and two-walks degree, respectively. More surprisingly, we observe a class of

^{*} Complex System Group, Universidad Politécnica de Madrid, 28040 Madrid, Spain.

[†] E.T.S.I.A.A.B, Universidad Politécnica de Madrid, Avd. Puerta de Hierro 4, 28040 Madrid, Spain.

[‡] Department of Mathematics and Statistics, University of Strathclyde, Glasgow G1 1XQ, United Kingdom.

graphs which are degree disassortative and two-walks degree assortative. We explain the existence of some of these graphs due to the presence of certain topological features, such as a node of low-degree connected to high-degree ones. More importantly, we study a series of 49 real-world networks, where we observe the existence of the disassortative-assortative class in several of them. In particular, all biological networks studied here were in this class. We also conclude that no graphs/networks are possible with assortative-disassortative structure.

4.2 Introduction

Networks represent the topological skeleton of a wide range of systems in nature and society [AB02; New03b; Boc+06; Str01]. The characterization of their structure is crucial since it shapes the evolutionary, functional, and dynamical processes that take place in those systems [Str01; BBV08; Cos+07].

It is well known that links generally do not connect nodes regardless of their characteristics. In social networks, for instance, evidence suggests that individuals prefer to associate with others of similar age, religion, education or occupation as themselves [MSLC01]. Assortativity or assortative mixing is a graph metric that refers to the tendency for nodes in networks to be connected to other nodes that are similar (or different) to themselves in some way [New03a]. Typically, it is determined for the *degree* (i.e. the number of direct neighbours, k) of the nodes in the network [New02; PSVV01; Est11; PPZ08]. The tendency for high-degree nodes to associate preferentially with other high-degree nodes plays a major role in many important processes, such as epidemic spreading, synchronization or network robustness, among others [New02; NP03; EK02; BPSV03; DBGS07]. However, assortativity may be applied to any characteristics of a node, including non-topological vertex properties, such as language or race [New03a]. Most of the research done in this area has been summarized in the review of Noldus *et al.* [NM14]. Other extensions to account for interactions beyond the nearest-neighbours have also been proposed in the recent literature [APGP16].

The aim of this work is to define an assortativity index that captures the influence of first and second neighbours of a node. We then express this two-walks assortativity in terms of the subgraphs contributing to it.

The paper is organized as follows. In Section 4.3, the preliminaries are presented. In Section 4.4, the concept of two-walks degree assortativity is introduced and analysed. Main result is demonstrated in Section 4.5. Numerical results are presented in Section 4.6. Conclusions are summarized in Section 4.7.

4.3 Preliminaries

Here we consider simple, undirected graphs $G = (V, E)$, i.e., graphs without multiple edges, self-loops, directions or weights in their edges. The notation used is standard and the reader can check for instance [Est12]. Let us define some of the measures used in this work in order to make it self-contained. First, we define the degree assortativity index [New03a]. Mathematically, it is written as:

$$r_k = \frac{\frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in E} k_i k_j - \left\{ \frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in E} \frac{1}{2} [k_i + k_j] \right\}^2}{\frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in E} \frac{1}{2} [k_i^2 + k_j^2] - \left\{ \frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in E} \frac{1}{2} [k_i + k_j] \right\}^2}, \quad (4.1)$$

where k_i and k_j are the degrees at both ends of link $(i, j) \in E$ and m is the number of links. A positive assortativity index $r_k > 0$ indicates the tendency of higher degree nodes in the graph to be connected to other higher degree nodes. On the other hand, $r_k < 0$ indicates the tendency of higher degree nodes to be connected to lower degree nodes. It was previously proved the following result [Est11].

Lemma 4.1. *Let $G = (V, E)$ be a simple graph and let k_i be the degree of the vertex i . Let $|P_1|$, $|P_2|$ and $|P_3|$ be the number of edges, of paths of length two and of paths of length three, respectively. Finally, let $|C_3|$ be the number of triangles in G . Then, the assortativity coefficient can be written combinatorially as:*

$$r_k = \frac{|P_3| + 3|C_3| - \frac{|P_2|^2}{|P_1|}}{|P_2| + 3|S_{1,3}| - \frac{|P_2|^2}{|P_1|}}. \quad (4.2)$$

Let $|P_{r/s}|$ be the ratio $|P_r|/|P_s|$, $|S_{1,3}|$ the number of star graphs of four nodes, and $C = 3|C_3|/|P_2|$. Then G is:

1. assortative ($r > 0$): if and only if $|P_{3/2}| + C > |P_{2/1}|$,
2. neutral ($r = 0$): if and only if $|P_{3/2}| + C = |P_{2/1}|$, and $3|S_{1,3}| - |P_2|(|P_{2/1}| - 1) \neq 0$, and
3. disassortative ($r < 0$): if and only if $|P_{3/2}| + C < |P_{2/1}|$

It is worth mentioning that the denominator of Eq. 4.2 is non-negative. Consequently, the sign of r_k depends only upon the sign of the numerator, which is determined by the following structural factors: the global clustering coefficient (i.e. $C = 3|C_3|/|P_2|$), the intermodular connectivity (i.e. $|P_{3/2}| = |P_3|/|P_2|$) and the branching (i.e. $|P_{2/1}| = |P_2|/|P_1|$) [Est11].

The number of subgraphs contributing to the degree assortativity can be obtained using the following results [AYZ97].

Lemma 4.2. Let $G = (V, E)$ be a simple graph. Let k_i be the degree of the vertex i . Let $|C_3|$ be the number of triangles in G . Then, the number of edges $|P_1|$, path of length two $|P_2|$ and three $|P_3|$ are given, respectively by

$$|P_1| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i,$$

$$|P_2| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i (k_i - 1),$$

$$|P_3| = \sum_{(i,j) \in E} (k_i - 1) (k_j - 1) - 3|C_3|.$$

Lemma 4.3. Let $G = (V, E)$ be a simple graph. Let k_i be the degree of the vertex i in G . Let A be the adjacency matrix of G . Let $|P_1|$ and $|P_2|$ be respectively the number of edges and the number of paths of length two in G . Let $|S_{T1D}|$ be the number of subgraphs S_{T1D} in G (see Table 4.1). Let $|C_i|$ be the number of cycles of i nodes in G . Then, $|C_3|$, $|C_4|$ and $|C_5|$ are given, respectively by

$$|C_3| = \frac{1}{6} \text{tr} (A^3),$$

$$|C_4| = \frac{1}{8} \text{tr} (A^4) - 2|P_1| - 4|P_2|,$$

$$|C_5| = \frac{1}{10} \text{tr} (A^5) - 3|C_3| - |S_{T1S}|.$$

Lemma 4.4. Let $G = (V, E)$ be a simple graph. Let k_i be the degree of the vertex i . Let A be the adjacency matrix of G . Let $|S_{1,3}|$, $|S_{T1S}|$, $|S_{T2S}|$, $|S_{T1D}|$, $|S_{C/}|$ and $|S_{C1S}|$ be the number of subgraphs $S_{1,3}$, S_{T1S} , S_{T2S} , S_{T1D} , $S_{C/}$ and S_{C1S} , respectively, in G (see Table 4.1). Then,

$$|S_{1,3}| = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n k_i (k_i - 1) (k_i - 2),$$

$$|S_{T1S}| = \frac{1}{2} \left(\vec{k} - \vec{2} \right)^T \text{diag} (A^3),$$

$$|S_{T2S}| = \frac{1}{4} \left(\left(\vec{k} - \vec{2} \right) \circ \left(\vec{k} - \vec{3} \right) \right)^T \text{diag} (A^3),$$

$$|S_{T1D}| = \frac{1}{2} \vec{1}^T \left(A^2 - A^{2(D)} \right) \text{diag} (A^3) - 6|C_3| - 2|S_{T1S}| - 4|S_{C/}|,$$

$$|S_{C/}| = \vec{1}^T (Q \circ (Q - A)) (\vec{k} - \vec{2}),$$

$$|S_{C1S}| = \vec{1}^T (P - P^{(D)}) (\vec{k} - \vec{2}) - 2|S_{C/}|,$$

where $Q = A^2 \circ A$, $P = \frac{1}{2} (A^2 \circ (A^2 - 1))$, $\vec{x}$ is an all- x vector and $\circ$ denotes the Hadamard product.

4.4 Two-Walks Degree assortativity in Graphs and Networks

Let us start by the definition of the degree of a node i , k_i . The intuition behind this index is very simple. Every nearest neighbour of the node i receives an identical weight of 1. Then, we sum the weights of every node adjacent to i to obtain k_i . Mathematically, this corresponds to obtaining the following vector $\vec{k}$ after assigning the unit weights to every node:

$$\vec{k} = A\vec{1}, \tag{4.3}$$

where $\vec{1}$ is an all-ones vector.

It is customary to consider that not all the neighbours of one particular node are equally important. This is the basis for instance of Katz centrality index [Kat53], eigenvector centrality [Bon72], PageRank [BP98], subgraph centrality [ERV05] and so for. Then, we can consider that every neighbour of the node i is weighted according to its “importance”. Of course, the definition of that importance will define the way in which we will proceed. In order to consider the current development as an extension of the concept of node degree we simply weight every node by its own degree. That is, now we consider the vector $\vec{k}$ as the weighting vector for the nodes of the graph. Consequently, an extension of the concept of degree is given by applying a similar procedure as in (4.3) to $\vec{k}$,

$$\vec{k}_2 = A\vec{k}. \tag{4.4}$$

It is straightforward to realize that $\vec{k}_2 = A(A\vec{1}) = A^2\vec{1}$. Then, obviously, the entries of this new vector represent a new kind of centrality of the nodes which counts the number of two-walks starting at the corresponding node. Consequently, we suggest the name of “two-walks” degree for the entries of $\vec{k}_2$. Let us call $\tilde{k}_i$ the i th entry of $\vec{k}_2$ in a graph. Notice that $\tilde{k}_i$ accounts for the degree of the node i , i.e., closed walks of length two, as well as for the number of second neighbours of this

node. Then,

$$\tilde{k}_i = \sum_{j \in N(i)} k_j, \quad (4.5)$$

where $N(i)$ is the neighbourhood of the node i , i.e., $N(i) = \{j | (j, i) \in E\}$. That is, the two-walks degree $\tilde{k}_i$ represents the number of weighted neighbours that the node i has, where the weight of the nodes is given by its own degree.

Let us now define a quantity analogous to the degree assortativity index based on the two-walks degrees instead of on the node degrees.

Definition 4.5. Let G be a connected simple graph with adjacency matrix A and let $\tilde{k}_i$ be the two-walks degree of the vertex i . The two-walks degree assortativity index of a graph is defined as

$$r_{\tilde{k}} = \frac{\frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in E} \tilde{k}_i \tilde{k}_j - \left\{ \frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in E} \frac{1}{2} [\tilde{k}_i + \tilde{k}_j] \right\}^2}{\frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in E} \frac{1}{2} [\tilde{k}_i^2 + \tilde{k}_j^2] - \left\{ \frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in E} \frac{1}{2} [\tilde{k}_i + \tilde{k}_j] \right\}^2}. \quad (4.6)$$

Obviously, this quantity tell us how well connected the most important nodes in a graph are. That is, if $r_{\tilde{k}} > 0$, the graph is two-walks degree assortative, which means that the most weighted nodes in terms of the degree of their neighbours tend to be connected to each other. On the other hand, if $r_{\tilde{k}} < 0$, the graph is two-walks degree disassortative, which means that the most weighted nodes in terms of the degree of their neighbours tend to be connected to those with least weight. If $r_{\tilde{k}} = 0$, neither of these two tendencies is observed and we shall call such graphs neutral.

In Fig. 4.1 we represent a graph which is strongly disassortative for the degree ($r_k \approx -0.822$) but it is assortative for the two-walks degree index ($r_{\tilde{k}} \approx 0.212$). We plot the graph with the nodes weighted by the difference between the degree (resp. two-walks degree) minus the average degree (resp. average two-walks degree). The negative values are colored in red and the positive contributions in blue. The size of the nodes is proportional to the absolute value of this difference. As can be seen in this picture the degree-degree interaction between the nodes (left panel) is dominated by red-blue interactions, which indicates a large number of interactions between high degree nodes (blue ones) with low degree ones (red nodes). This of course results in a negative degree assortativity coefficient. On the other hand, for the two-walks degree plot the graph is dominated by blue-blue and red-red interactions. That is, nodes of high two-walks degree interact with each other, and low two-walks degree nodes also interact preferentially among them. This effects result in a two-walks degree assortativity coefficient.

FIG. 4.1: Example of the structural effect that may produce a change from degree disassortative (left panel) to two-walks degree assortative (right panel) in a simple graph. Here the nodes are drawn in red if their degree (resp. two-walks degree) is smaller than the average degree, or blue otherwise. The size of the node is proportional to the magnitude of this difference.

With the new correlation coefficient introduced here we assess the tendency of neighbourhoods with many interactions to be connected to other “high-connected” neighbourhoods. However, in order for a graph to display a transition from degree diassortative to two-walks degree assortative it is necessary that there are *separator nodes* between the high-degree nodes. The graph in Fig. 4.1 has a separator, which is the node of degree 2 connecting both nodes of degree 3 and 5. A separator must be a low-degree node which connects two or more high-degree ones. Notice that if the number of high-degree nodes connected to the separator is too high, it will produce an increase in its own degree, which decreases its chances of being a proper separator. This characteristic –a separator connected to two high-degree nodes– introduces disassortativity to the graph. However, in terms of the second-order correlation a separator allow the two-steps interactions between hubs, which results in two-walks degree assortativity. Mathematically, it is not difficult to see that the two-walks degree is related to walks of length two between node.

It is easy to realize that the two-walks degree assortativity can be written in matrix-vector form in the following way:

$$r_{\vec{k}} = \frac{\vec{1}^T A^5 \vec{1} - (\vec{1}^T A \vec{1})^{-1} (\vec{1}^T A^3 \vec{1})^2}{(\vec{k}_2 \circ \vec{k}_2)^T A \vec{1} - (\vec{1}^T A \vec{1})^{-1} (\vec{1}^T A^3 \vec{1})^2}. \quad (4.7)$$

4.5 Main Result

Our main result here consists on the determination of the two-walks degree assortativity of a graph in terms of contributing subgraphs of the graph. This allows us to understand this quantity in structural terms for the analysis of real world systems in further sections of this work.

TAB. 4.1: Collection of subgraphs in Eq. 4.8, excluding the paths P_2 , P_3 , P_4 , P_5 , and the cycle C_3 .

Theorem 4.6. *Let G be a simple graph. Then, G is, in terms of two-walks degree,*

- i) *assortative if $R > 2|P_2||P_{2/1}|(|P_{3/2}| + C + 2)^2$,*
- ii) *neutral if $R = 2|P_2||P_{2/1}|(|P_{3/2}| + C + 2)^2$,*
- iii) *disassortative if $R < 2|P_2||P_{2/1}|(|P_{3/2}| + C + 2)^2$,*

where

$$R = 4|P_2| + 8|P_3| + 4|P_4| + 2|P_5| + 42|C_3| + 24|C_4| + 10|C_5| + 12|S_{1,3}| + 4|S_Y| + 22|S_{T1S}| + 4|S_{T2S}| + 4|S_{T1D}| + 12|S_{C/}| + 4|S_{C1S}|, \quad (4.8)$$

$$|P_{r/s}| = |P_r|/|P_s| \text{ and } C = 3|C_3|/|P_2|.$$

First, we prove that the denominator of the expression (4.7) is always non-negative.

Lemma 4.7. *Let G be a connected simple graph with adjacency matrix A . Let $\vec{k}$ and $\vec{k}_2$ be vectors of the nodes degrees and a vector of nodes two-walks degrees, respectively. Then,*

$$\left(\vec{k}_2 \circ \vec{k}_2\right)^T A \vec{1} - \left(\vec{1}^T A \vec{1}\right)^{-1} \left(\vec{1}^T A^3 \vec{1}\right)^2 \geq 0, \quad (4.9)$$

where m is the network's number of edges, $\vec{1}$ is an all-ones vector and $\circ$ denotes the Hadamard product.

Demostración. By the Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz inequality:

$$\begin{aligned} \left(\vec{1}^T A \vec{1}\right)^{-1} \left(\vec{1}^T A^3 \vec{1}\right)^2 &= \left(\vec{1}^T A \vec{1}\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^V k_i \tilde{k}_i\right)^2 \leq \left(\vec{1}^T A \vec{1}\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^V k_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^V \tilde{k}_i^2\right) \quad (4.10) \\ &= \frac{2|P_1| + 2|P_2|}{2|P_1|} \sum_{i=1}^V \tilde{k}_i^2 = \sum_{i=1}^V \tilde{k}_i^2 \left(\frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^V k_i^2}{\sum_{i=1}^V k_i}\right). \end{aligned}$$

Then, we have

$$\begin{aligned} \left(\vec{k}_2 \circ \vec{k}_2\right)^T A \vec{1} - \left(\vec{1}^T A \vec{1}\right)^{-1} \left(\vec{1}^T A^3 \vec{1}\right)^2 &\geq \sum_{i=1}^V \tilde{k}_i^2 \left(k_i - \frac{1}{n} \frac{\sum_{j=1}^V k_j^2}{\sum_{j=1}^V k_j}\right) \quad (4.11) \\ &= \sum_{i=1}^V \tilde{k}_i^2 \frac{nk_i \sum_{j=1}^V k_j (nk_i - k_j)}{n \sum_{j=1}^V k_j}. \end{aligned}$$

As G is a connected simple graph, $k_i \geq 1$ and the maximum degree in the graph is $n-1$, then, $nk_i - k_j \geq 0$, and hence the last term is always greater than or equal to zero, which proves the result. $\square$

What remains now for the proof of the main result is to express the numerator $N(r)$ of the Pearson coefficient of the two-walks degree - two-walks degree correlation in terms of subgraphs of the graph (reminding that when the denominator is equal to zero, the Pearson Correlation coefficient is not defined). We can write $N(r)$ as follows:

$$N(r) = \frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in E} \tilde{k}_i \tilde{k}_j - \left\{ \frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in E} \frac{1}{2} [\tilde{k}_i + \tilde{k}_j] \right\}^2, \quad (4.12)$$

where $\tilde{k}_i$ and $\tilde{k}_j$ are the two-walks degrees of nodes i and j , respectively, located at both ends of link $(i,j) \in E$. We can now rewrite the sums in Eq. (4.12) as:

$$\sum_{(i,j) \in E} \tilde{k}_i \tilde{k}_j = \frac{1}{2} \vec{k}_2^T A \vec{k}_2, \quad (4.13)$$

$$\sum_{(i,j) \in E} (\tilde{k}_i + \tilde{k}_j) = \vec{k}_2^T \vec{k}. \quad (4.14)$$

Let us now find the expressions for the two terms contributing to $N(r)$. The first is given by

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in E} \tilde{k}_i \tilde{k}_j = & \frac{1}{2m} (2|P_1| + 12|P_2| + 12|P_3| + 4|P_4| + 2|P_5| + \\ & + 54|C_3| + 24|C_4| + 10|C_5| + 12|S_{1,3}| + 22|S_{T1S}| + \\ & + 4|S_Y| + 4|S_{T2S}| + 4|S_{T1D}| + 12|S_{C/}| + 4|S_{C1S}|), \end{aligned} \quad (4.15)$$

where $|P_4|$ and $|P_5|$ are the number of paths of order 4 and 5, respectively, and $|S_Y|$ is the number of fragments S_Y which are illustrated in Table 4.1. We will give formulas for calculating these fragments for the sake of completeness of the paper.

For the second term contributing to $N(r)$ we have

$$\left\{ \frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in E} \frac{1}{2} [\tilde{k}_i + \tilde{k}_j] \right\}^2 = \frac{1}{(2m)^2} (2|P_1| + 4|P_2| + 2|P_3| + 6|C_3|^2). \quad (4.16)$$

Thus, we can rewrite $N(r)$ as:

$$N(r) = \frac{1}{2m} \left(R - 2|P_2||P_{2/1}| (|P_{3/2}| + C + 2)^2 \right), \quad (4.17)$$

which proves the main result.

Let us now give the formulas for calculating the subgraphs remaining in the expression of the two-walks degree assortativity which have not been previously defined. The proofs of these results are based on the strategy developed and explained in [EK15] and are not given here as they are lengthy and technical.

Lemma 4.8. *Let $G = (V, E)$ be a simple graph. Let k_i be the degree of the vertex i . Let $|S_Y|$ be the number of subgraphs S_Y (see Table 4.1). Then,*

$$|S_Y| = \sum_{(i,j) \in E} \left\{ \binom{k_i - 1}{2} (k_j - 1) + \binom{k_j - 1}{2} (k_i - 1) \right\} - 2|S_{T1S}|. \quad (4.18)$$

Lemma 4.9. *Let $G = (V, E)$ be a simple graph. Then, the number of subgraphs $|P_4|$ and $|P_5|$ in G are given by, respectively,*

$$|P_4| = \frac{1}{2} \vec{1}^T A^4 \vec{1} - |P_1| - 4|P_2| - 2|P_3| - 9|C_3| - 4|C_4| - 6|S_{1,3}| - 4|S_{T1S}|, \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} |P_5| = & \frac{1}{2} \vec{1}^T A^5 \vec{1} - |P_1| - 6|P_2| - 6|P_3| - 2|P_4| - 27|C_3| + \\ & - 12|C_4| - 5|C_5| - 6|S_{1,3}| - 2|S_Y| - 11|S_{T1S}| - 2|S_{T2S}| + \\ & - 2|S_{T1D}| - 6|S_{C/}| - 2|S_{C1S}|. \end{aligned} \quad (4.20)$$

FIG. 4.2: Degree and two-walks degree assortativities for all the connected graphs with 9 unlabelled nodes.

4.6 Computational results

4.6.1 Small graphs

In this Section we describe the results obtained for all the 261,000 connected graphs with 9 unlabelled nodes. We have calculated the degree and two-walks degree assortativities for these graphs (see Fig. 4.2). As we can see there is no trivial correlation between the two indices, which indicates that the new index does not duplicate the structural information contained in the degree assortativity and consequently gives some new structural insights about graphs. This conclusion is also easily obtained by considering the subgraph contributions to both measures.

According to computer calculations 7 % of the networks are assortative-assortative by both measures (AA), 60 % are disassortative-disassortative (DD) and 33 % are disassortative by degree and assortative by two-walks degree (DA). The main observation is that there are no graphs which are degree assortative and two-walks degree disassortative (AD). We conjecture that these graphs cannot exist. Computer calculations show that $R \gtrsim 2|P_2|(|P_{3,2}| + C)(|P_{3,2}| + C + 2)^2$. Therefore, we can express the numerator of the neighbourhood assortativity (Eq. (4.17)) as follows:

$$N(r) \gtrsim \frac{1}{m} |P_2|(|P_{3,2}| + C - |P_{2/1}|)(|P_{3,2}| + C + 2)^2, \quad (4.21)$$

Using the results from [Est11], if $r_k \geq 0$, then $N(r) \geq 0$. The intuition behind this result is very simple. Nodes that belong to a degree assortative network tend to be linked to other nodes with similar degree. Therefore, their two-walks degrees tend to be similar too.

Generally, the two-walks degree assortativity depends on the balance between

FIG. 4.3: Degree and two-walks degree assortativities for all the real-world networks studied in this work.

four structural factors: the weighted sum of subgraphs given by $R/|P_2|$, transitivity (C), intermodular connectivity ($|P_{3,2}|$), relative branching ($|P_{2,1}|$). The first three produce a positive contribution to the two-walks degree assortativity of a network, while branching is more likely associated with disassortative networks.

4.6.2 Real-world networks

In this subsection we study of group of 49 real-world networks representing systems in ecological (E), biological (B), social (S), technological (T) and socio-economic (SE) environments. The networks are described in the Appendix of this paper (see Appendix A). We have calculated the degree and two-walks degree assortativities for these networks (see Fig. 4.3). According to these results 14% of the networks are assortative-assortative (AA) according to both measures, 24% are disassortative-disassortative (DD) and the majority of networks analyzed (61%) are disassortative-assortative (DA). This confirms our previous observation that there are no graphs/networks which are assortative-disassortative (AD). The analysis of the networks according to the functions shows the following trends: 53% of the ecological networks analyzed are DD, 27% are DA and 20% are AA; 50% of the social networks analyzed are DA, 30% are AA and 20% are DD; 80% of technological networks are DA, 10% are AA and 10% are DD. Finally, 100% of biological networks considered are DA. They included 9 protein-protein interaction networks (PINs), 3 transcription networks and 3 brain networks. This is a remarkable observation because it is the only single functional class of networks which is formed by one structural class, i.e., DA.

An important characteristic of our current approach is that we can understand

FIG. 4.4: Illustration of the differences between the degrees and mean degree of every node (top panels) and the same for the two-walks degrees (bottom panels) in the protein interaction network *B. subtilis*, food web of Scotch Broom, and transcription network of yeast from left to right.

the structural causes for the different kinds of assortativity in networks using the interpretation of these quantities in terms of subgraphs of the graph. As we have seen before an important structural feature of graphs allowing the transition from degree disassortative to two-walks degree assortative is the presence of separators. It has to be stressed that this is not a unique structural feature of this kind of networks and more studies are needed to completely understand the structural characterization of this kind of networks. However, it is easy to visualize the connectors in the small PIN of the bacterium *B. subtilis* (see left panel in Fig. 4.4). In Fig. 4.4 we also illustrate the degree and two-walks degree of the nodes in the food web of ScotchBroom and in the transcription network of *E. coli*. All of them displaying DA characteristics.

4.7 Conclusions

Here we have proposed an extension of the concept of degree assortativity to one that account for the correlation between the degrees of the nodes and their nearest neighbours in graphs and networks. This measure, here named the two-walks degree assortativity, is expressed in terms of subgraphs of the graph. As we

have proved here there are a few more fragments contributing to the two-walks degree assortativity than to the degree assortativity. This clearly indicates that the new quantity accounts for more structural information than the previous one. We have seen that both measures are not linearly correlated neither for all the connected graphs with 9 nodes nor for real-world networks. Further studies are needed to understand the role of this quantity in the study of real-world problems, as we have seen here, there are some apparently universal features of some classes of networks in relation to this quantity. For instance, all real-world biological networks studied here are degree disassortative but two-walks assortative. The implications of this observation for the study of the biological processes taking place on these networks is far beyond the scope of this work.

5 | Relaxation time of the global order parameter on multiplex networks: The role of interlayer coupling in Kuramoto oscillators

Alfonso Allen-Perkins^{*,†}, Thiago A. de Assis^{*,†}, Juan Manuel Pastor^{*} and Roberto F. S. Andrade[†]

Phys. Rev. E 96, 042312 pp 15 – Published 31 October 2017

DOI: [10.1103/PhysRevE.96.042312](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.96.042312)

Cuartil de la revista: Primero (Q1)

5.1 Abstract

This work considers the timescales associated with the global order parameter and the interlayer synchronization of coupled Kuramoto oscillators on multiplexes. For two-layer multiplexes with an initially high degree of synchronization in each layer, the difference between the average phases in each layer is analyzed from two different perspectives: the spectral analysis and the non-linear Kuramoto model. Both viewpoints confirm that the prior timescales are inversely proportional to the interlayer coupling strength. Thus, increasing the interlayer coupling

^{*} *Complex System Group, Universidad Politécnica de Madrid, 28040-Madrid, Spain.*

[†] *Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, 40210-210, Salvador, Brazil.*

always shortens the transient regimes of both the global order parameter and the interlayer synchronization. Surprisingly, the analytical results show that the convergence of the global order parameter is faster than the interlayer synchronization, and the latter is generally faster than the global synchronization of the multiplex. The formalism also outlines the effects of frequencies on the difference between the average phases of each layer, and it identifies the conditions for an oscillatory behavior. Computer simulations are in fairly good agreement with the analytical findings and they reveal that the time scale of the global order parameter is half the size of the time scale of the multiplex, if not smaller.

5.2 Introduction

The large number of recent investigations on multilayer networks have contributed to uncovering several topological and dynamical aspects of complex systems [Boc+14; Kiv+14; Bul+10; Chu97; SR+13; PBH10]. These studies have been motivated by the observation that several such systems can be divided, in a very natural way, into subsets of components that interact in a different way with the co-participants of the same set as compared to members of other subsets. In this way, each such subset can be represented by a layer of a multilayer network. This concept has proven to be broad enough to represent different interaction aspects of the same agent, provided it also interacts differently with members of other subsets [Don+11; Gao+12; BNL14].

Multiplexes form a particular class of multilayer networks, where each layer is formed by the same number N of nodes. Moreover, a multiplex is formed by agents that are identified as one network node, with its own label, in every multiplex layer [BNL14; Sol+13; DD+14]. Because of this, each of these agent's representation is connected to its own representations in all other layers [Car+13a; Car+13b; SLT10]. The strength of these interactions can be dependent of the agent and of the layers between which the interaction occurs [GB14; GPB16; Lot+16].

These properties make multiplexes a suitable representation of actual complex systems, where each agent has multiple purposes and abilities. This is the case, for instance, for economic systems in which each agent represents an investor that can trade in different world markets. It can use the communication flow between markets and different market features expressed by local bylaw restrictions to develop strategies in each market to maximize hedge, risk, and profits. Under these circumstances, it is natural to ask how and if cooperation and competition [RA13; GG+15; GG+12; Mat+15; WSP12; WWP14] favor the spread of information and synchronization [Sor12; GFGG15; SE+15; DG+16; Bap+16; DBJ17] among the

different layers, or the emergence of collective behavior such as self-organization [KHDG15; Asl+14] or epidemics [GGA13].

To help understand real-world complex dynamics, several synchronous models with non-identical interacting agents have been introduced for a description of synchronization, starting from the Rössler and Kuramoto models [Kur75; Kur84] in homogeneous structures. More recently, network science explored similar models on non-homogenous structures [Str04; MMZ04; KG11; GFGG15]. These dynamic models are sufficiently complex to be non trivial and display a large variety of synchronization patterns. In particular, the Kuramoto model has the advantage of being sufficiently flexible that it can be adapted to many different contexts, and, at the same time, simple enough to be mathematically tractable [Ace+05]. Most of the research done about the Kuramoto model in complex networks has been summarized in the review of Rodrigues *et al.* [Rod+16].

The collective dynamics of several interacting populations of Kuramoto oscillators has been investigated on multilayers [OA08; Bar+08; And+12]. Most of the studies on network synchronization focus on the effects of network topology on the dynamics in the stationary regime, or when the asymptotic phase of the synchronization is reached. Other investigations have addressed the question of multiplex diffusion [Gó+13; SR+13], and the limits to which it can be enhanced in comparison to the corresponding spread processes in a single layer. However, because the question of how fast the network synchronizes in the steady state is equally important [Rod+16], we want to focus here on the difference between diffusion and synchronization speed in multiplexes. The two phenomena are certainly related, but, as we will discuss in the forthcoming sections, they also present different features in multiplex topology.

FIG. 5.1: Example of an undirected multiplex network with two layers, G^1 and G^2 (data visualization with MuxViz [DDPA15]).

In this work, we present analytical results for the multiplex order parameter derived from Kuramoto's equations of motion, both in the linear approximation and in their complete non-linear form, under the assumption that the initial order parameter of each layer is close to unity. Numerical integration of equations of motion corroborates these predictions and presents a consistent scenario in which it is possible to identify the diffusion relaxation time and the interlayer synchronization phase. As a consequence, the interlayer synchronization is observed to proceed at a faster or equal pace as compared to diffusion.

The paper is organized as follows. In section 5.3, we define the model and briefly list the main results of the diffusion relaxation time in multiplexes [Gó+13; SR+13; Boc+14; Kiv+14; SGGA17]. In section 5.4, the relaxation time of the order parameter and that of the interlayer synchronization are deduced from spectral analysis and the non-linear Kuramoto model. Numerical results supporting the analytical expressions are presented in section 5.5. Section 5.6 summarizes our conclusions.

5.3 Kuramoto model in multiplexes and diffusion

We consider initially an undirected multiplex $\mathcal{M}$ with M layers G^α , $1 \leq \alpha \leq M$, where each layer contains N nodes identified by x_n^α , $1 \leq n \leq N$ (see Fig. 5.1). A system of coupled Kuramoto oscillators, which takes into account the intra-layer and inter-layer connections, is defined on $\mathcal{M}$. The oscillator in each node x_n^α of the layer G^α is characterized by its phase θ_n^α , whose dynamics is described by

$$\dot{\theta}_n^\alpha = \Omega_n^\alpha + \lambda^\alpha \sum_{x_m^\alpha \in G^\alpha} w_{nm}^\alpha \sin(\theta_m^\alpha - \theta_n^\alpha) + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^M \lambda^{\alpha\beta} w_{nn}^{\alpha\beta} \sin(\theta_n^\beta - \theta_n^\alpha). \quad (5.1)$$

Here, Ω_n^α is the natural frequency of the oscillator x_n^α , λ^α and $\lambda^{\alpha\beta}$ are the coupling strength of the layer α and of the interlayer $\alpha\beta$, respectively, w_{nm}^α is the weight of the connection between the nodes x_n^α and x_m^α , and $w_{nn}^{\alpha\beta}$ is the weight of the connection between the nodes x_n^α and x_n^β . In the case of a unweighted and undirected $\mathcal{M}$, $w_{mn}^{\alpha\beta} = 1$ and $w_{nn}^{\alpha\beta} = 1$ if there is a link between the nodes x_n^α and x_m^α , and 0 otherwise.

To present a closer comparison between the results for Eq. 5.1 and those for multiplex diffusion [Gó+13; SR+13; Boc+14; Kiv+14; LMG15; DD+16], we consider first the simplest case of an undirect $M = 2$ multiplex, without sources and sinks of frequency ($\Omega_n^\alpha = 0$), for which the linear approximation of the Kuramoto model

reads

$$\dot{\theta}_n^\alpha(t) = \lambda^\alpha \sum_{x_m^\alpha \in G^\alpha} w_{nm}^\alpha (\theta_m^\alpha - \theta_n^\alpha) + \lambda^{12} (\theta_n^\beta - \theta_n^\alpha), \quad (5.2)$$

with $1 \leq n, m \leq N$, $1 \leq \alpha, \beta \leq 2$ and $w_{nn}^{12} = 1$.

Once Eq. 5.2 is equivalent to the multiplex diffusion equation [Gó+13; Boc+14], it can be written as

$$\dot{\vec{\theta}} = -\mathcal{L}\vec{\theta}, \quad (5.3)$$

where $\vec{\theta}$ is a column vector that describes the phase of the oscillators such that $\vec{\theta}^T = (\theta_1^1, \dots, \theta_N^1 \mid \theta_1^2, \dots, \theta_N^2)$, and X^T stands for the transpose of matrix X . $\mathcal{L}$, the *supra-Laplacian matrix* of $\mathcal{M}$, is defined as

$$\mathcal{L} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda^1 \mathbf{L}_1 + \lambda^{12} \mathbf{I} & -\lambda^{12} \mathbf{I} \\ \hline -\lambda^{12} \mathbf{I} & \lambda^2 \mathbf{L}_2 + \lambda^{12} \mathbf{I} \end{array} \right), \quad (5.4)$$

where $\mathbf{I}$ is a $N \times N$ identity matrix and $\mathbf{L}_\alpha$ is the usual $N \times N$ Laplacian matrix of G^α , with elements $(\mathbf{L}_\alpha)_{nm} = s_n^\alpha \delta_{nm} - w_{nm}^\alpha$. $s_n^\alpha = \sum_{x_m^\alpha \in G^\alpha} w_{nm}^\alpha$ and δ is the Kronecker delta function.

To characterize the eigenvalue spectrum $S(\mathcal{L}) \equiv \{\Lambda_i\}$, we rank its eigenvalues in ascending order $0 = \Lambda_1 < \Lambda_2 \leq \dots \leq \Lambda_{2N}$ [ADGPV06b; ADGPV06a; Gó+13]. The solution of Eq. 5.3 in terms of the normal modes $\varphi_i(t)$ is given by

$$\vec{\varphi} = \mathbf{B}^T \vec{\theta}, \quad (5.5)$$

where $\varphi_i(t) = \varphi_i(0)e^{-\Lambda_i t}$, and $\mathbf{B} = (\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \mid \dots \mid \vec{v}_{2N})$ is the matrix of eigenvectors of $\mathcal{L}$ (i.e. $\Lambda_i \vec{v}_i = \mathcal{L} \vec{v}_i$) [ADGPV06b; ADGPV06a; Gó+13].

Consequently, the diffusive relaxation time of multiplex networks, $\tau_{\mathcal{M}}$, depends on the network topology and is dominated by the smallest nonzero eigenvalue Λ_2 of the $\mathcal{L}$, i.e. $\tau_{\mathcal{M}} = 1/\Lambda_2$ [Gó+13; SR+13; SGGA17]. This behavior is in line with analogous findings for mono-layer networks of coupled Kuramoto oscillators, which have shown that the relaxation time mainly depends on the smallest non-zero eigenvalue of the corresponding Laplacian matrix [ADG07; GGT11; Gra+10; SJH08].

If we consider $\lambda^1 = \lambda^2 = 1$, the analytical results in [Gó+13; SR+13] for multiplex diffusion indicate the following properties of $S(\mathcal{L})$:

- (i) $2\lambda^{12} \equiv \Lambda_\Delta$ is always an eigenvalue of $\mathcal{L}$.
- (ii) When the interlayer coupling is small, i.e. $\lambda^{12} \ll 1$, $\Lambda_2 = \Lambda_\Delta$.

- (III) When the interlayer coupling is large, i.e. $\lambda^{12} \gg 1$, $\Lambda_2 \sim \sigma_s/2$, where σ_s is the smallest nonzero eigenvalue of the superposition matrix $(L_1 + L_2)/2$, and L_α is the Laplacian matrix of layer α .

In Fig. 5.2 we show an example of the dependence of Λ_2 on λ^{12} .

FIG. 5.2: Dependence on λ^{12} of the smallest nonzero eigenvalue σ_2 of the Laplacian matrices of layer 1 (blue triangles), layer 2 (magenta squares), the superposition of both layers (red rhombus), Λ_Δ (black circles) and Λ_2 (black continuous line). The results are presented for an $M = 2$ multiplex $\mathcal{M}$ with $N = 100$ nodes in each layer, when $\lambda^1 = \lambda^2 = 1$. Each layer consists of a scale-free network with degree distribution $P(k) \sim k^{-3}$.

5.4 Relaxation time of Kuramoto order parameter

The level of synchronization in a general system $\mathcal{S}$ of N Kuramoto oscillators is described by a parameter r defined as

$$r(t)e^{i\psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{x_n^\alpha \in \mathcal{S}} e^{i\theta_n^\alpha(t)} \rightarrow r(t) = \frac{1}{2N} \left| \sum_{x_n^\alpha \in \mathcal{M}} e^{i\theta_n^\alpha(t)} \right|, \quad (5.6)$$

where $\psi(t)$ is the average phase of the oscillators in the system. Here, $r \approx 1$ ($r \approx 0$) indicates a full synchronization (an asynchronous behavior) of the system $\mathcal{M}$ [Kur75; Kur84].

In this work, Eq.(5.6) is used to both layer (r^α) and global (r) order parameters, by appropriately choosing the set of nodes (G^α or the whole set $\mathcal{M}$) where the sum is performed. The important issue regarding the definition of the α -layer order parameter (r^α) is to help understand the synchronization process at the α -layer level, when interlayer coupling is changed. The global order parameter (r), which

is common also to the plain monolayer Kuramoto model, does not provide a clear picture of the synchronization details by itself. $\psi^\alpha(t)$ and $\psi(t)$ indicate α -layer and multiplex average phases, respectively. When $M = 2$, it is possible to express r in terms r^α as

$$r = \sqrt{\frac{(r^1)^2 + (r^2)^2 + 2r^1r^2 \cos(\psi^1 - \psi^2)}{4}}. \quad (5.7)$$

This can be easily obtained by multiplying $re^{i\psi}$ by $e^{-i\psi^2}$ and conducting the necessary manipulation.

For the purpose of putting forward the analytical results, we restrict our analysis to the $r^\alpha(t) \approx 1$ case, i.e., we assume that $\theta_n^\alpha(t) \approx \psi^\alpha(t)$ for $1 \leq n \leq N_\alpha$, $1 \leq \alpha \leq M$, $\forall t$. In section 5.5 we show that these conditions are fairly well satisfied for the system in Eq. 5.1 when, at $t = 0$, the degree of synchronization in each layer is high. Under such restrictions, we rewrite r for the $M = 2$ case as

$$r(t) \approx \left| \cos\left(\frac{\psi^1 - \psi^2}{2}\right) \right| = \left| \cos\left(\frac{\Delta}{2}\right) \right|, \quad (5.8)$$

where $\Delta(t) = \psi^1(t) - \psi^2(t)$ is the difference between the average phases of the layers G^1 and G^2 . Hence, the timescales of r and $\left| \cos\left(\frac{\psi^1 - \psi^2}{2}\right) \right|$ are the same.

The linear relaxation time of the interlayer synchronization process can be estimated by the difference between the average phases of layers G^1 and G^2 , Δ , defined in Eq. 5.8. Taking into account the property (I) of $S(\mathcal{L})$, the column eigenvector of Λ_Δ , $\vec{v}_\Delta$, is such that $\vec{v}_\Delta^\top = \left(v_1^1, \dots, v_{N_1}^1 \mid v_1^2, \dots, v_{N_2}^2 \right) = \left(1, \dots, 1 \mid -1, \dots, -1 \right)$.

By definition, L_1 and L_2 are symmetric real matrices with row and column sums zero, i.e., $L_\alpha \vec{1} = \vec{0}$, where $\vec{x}$ is an all- x vector. Thus,

$$\mathcal{L}\vec{v}_\Delta = \left(\begin{array}{c|c} \lambda^1 L_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \lambda^2 L_2 \end{array} \right) \vec{v}_\Delta + \left(\begin{array}{c|c} \lambda^{12} \mathbf{I} & -\lambda^{12} \mathbf{I} \\ \hline -\lambda^{12} \mathbf{I} & \lambda^{12} \mathbf{I} \end{array} \right) \vec{v}_\Delta = \vec{0} + 2\lambda^{12} \vec{v}_\Delta = \Lambda_\Delta \vec{v}_\Delta. \quad (5.9)$$

Following [ADGPV06b; ADGPV06a; Gó+13], the normal mode related to $\Lambda_\Delta = 2\lambda^{12}$ is

$$\vec{v}_\Delta^\top \vec{\theta} = \sum_{x_n^1 \in G^1} \theta_n^1 - \sum_{x_m^2 \in G^2} \theta_m^2 = \varphi_\Delta(0) e^{-\Lambda_\Delta t}. \quad (5.10)$$

According to Eq. 5.8, when the assumption $r^\alpha(t) \approx 1$ is valid, Eq. 5.10 leads to

$$\Delta(t) = \psi^1(t) - \psi^2(t) \approx \frac{\varphi_\Delta(0)}{N} e^{-\Lambda_\Delta t}. \quad (5.11)$$

Since the relaxation time for interlayer synchronization can be estimated by

$\tau_\Delta = 1/\Lambda_\Delta$, we draw the following similar conclusions to the results listed in section 5.3:

- (I) When $\lambda^{12} \ll 1$, the diffusive timescale of $\mathcal{M}$ coincides with the interlayer synchronization time, i.e. $\Lambda_2 = \Lambda_\Delta$.
- (II) When $\lambda^{12} \gg 1$, the diffusive timescale of $\mathcal{M}$ exceeds the interlayer synchronization time, i.e. $\Lambda_2 \ll \Lambda_\Delta$ ($\Leftrightarrow \tau_{\mathcal{M}} \gg \tau_\Delta$).

To derive the non-linear relaxation time scale of the interlayer synchronization for the system in Eq. 5.1, we rewrite it in terms of the order parameters r^α of each layer G^α as

$$\dot{\theta}_n^\alpha = \Omega_n^\alpha + \lambda^\alpha r^\alpha N \bar{w}_n^\alpha \sin(\psi^\alpha - \theta_n^\alpha) + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^M \lambda^{\alpha\beta} w_{nn}^{\alpha\beta} \sin(\theta_n^\beta - \theta_n^\alpha), \quad (5.12)$$

where $\bar{w}_n^\alpha$ is defined by

$$\bar{w}_n^\alpha \sum_{x_n^\alpha \in G^\alpha} e^{i\theta_m^\alpha} = \sum_{x_m^\alpha \in G^\alpha} w_{nm}^\alpha e^{i\theta_m^\alpha}. \quad (5.13)$$

As $r^\alpha(t) \approx 1$, we obtain the following approximation for an undirected multiplex $\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}^\alpha &= \frac{1}{N} \sum_{x_n^\alpha \in G^\alpha} \dot{\theta}_n^\alpha = \frac{1}{N} \left[\sum_{n=1}^N \Omega_n^\alpha \right] + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^M \lambda^{\alpha\beta} \sin(\psi^\beta - \psi^\alpha) \left[\sum_{n=1}^N w_{nn}^{\alpha\beta} \right] = \\ &= \langle \Omega \rangle^\alpha + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^M \lambda^{\alpha\beta} \sin(\psi^\beta - \psi^\alpha) \frac{s^{\alpha\beta}}{N}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

where $s^{\alpha\beta}$ is the sum of the interlayer strengths between nodes of the layers G^α and G^β . Also, the evolution of the average phase difference between G^α and G^β becomes

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}^{\alpha\beta} &= \dot{\psi}^\alpha - \dot{\psi}^\beta = \left(\langle \Omega \rangle^\alpha - \langle \Omega \rangle^\beta \right) - 2\lambda^{\alpha\beta} \sin(\psi^\alpha - \psi^\beta) \frac{s^{\alpha\beta}}{N} \\ &+ \sum_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \alpha, \beta}}^M \left[\lambda^{\alpha\gamma} \sin(\psi^\gamma - \psi^\alpha) \frac{s^{\alpha\gamma}}{N} - \lambda^{\beta\gamma} \sin(\psi^\gamma - \psi^\beta) \frac{s^{\beta\gamma}}{N} \right]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Restricting the discussion to $M = 2$ and $w_{nn}^{12} = 1 \Rightarrow s^{12} = N$, we consider first $\langle \Omega \rangle^1 \approx \langle \Omega \rangle^2$, so that the synchronization of the system can be estimated as

$$\left| \tan \left(\frac{\Delta(t)}{2} \right) \right| \approx \left| \tan \left(\frac{\Delta(0)}{2} \right) \right| e^{-\int_0^t 2\lambda^{12} dt'} = \left| \tan \left(\frac{\Delta(0)}{2} \right) \right| e^{-\Lambda_\Delta t} \equiv \eta_\Delta(t), \quad (5.16)$$

where we use the short-hand notation $\Delta(t) = \Delta^{12}(t)$. Eq. 5.16 and the series expansion $\tan(x) \simeq x$ show that the relaxation time of Δ is dominated by Λ_Δ , i.e., $\Delta/2 \propto e^{-\Lambda_\Delta t}$.

Next, if $\langle \Omega \rangle^1 \neq \langle \Omega \rangle^2$, it is possible to integrate Eq. 5.15 and express the corresponding solution in terms of a variable $\xi(t)$ such that

$$\xi(t) = \frac{\left| \tan \left(\frac{\Delta(t)}{2} \right) - \text{sgn} \left(\langle \Omega \rangle^{12} \right) \left(|R| - \sqrt{R^2 - 1} \right) \right|}{\left| \tan \left(\frac{\Delta(t)}{2} \right) - \text{sgn} \left(\langle \Omega \rangle^{12} \right) \left(|R| + \sqrt{R^2 - 1} \right) \right|} = \xi(0) e^{-t|\langle \Omega \rangle^{12}| \sqrt{R^2 - 1}}, \quad (5.17)$$

where $\text{sgn}(\cdot)$ is the sign function, $\langle \Omega \rangle^{12} \equiv \langle \Omega \rangle^1 - \langle \Omega \rangle^2$ and

$$R = \frac{\Lambda_\Delta}{\langle \Omega \rangle^1 - \langle \Omega \rangle^2} \equiv \frac{\Lambda_\Delta}{\langle \Omega \rangle^{12}}. \quad (5.18)$$

Eq. 5.17 is valid when $|R| > 1$, while, for the $|R| \leq 1$, the integration of Eq. 5.15 results in

$$\tan \left(\frac{\Delta(t)}{2} \right) = R + \sqrt{1 - R^2} \tan \left(\frac{\langle \Omega \rangle^{12} \sqrt{1 - R^2}}{2} t + \tan^{-1} \left(\frac{\tan \left(\frac{\Delta(0)}{2} \right) - R}{\sqrt{1 - R^2}} \right) \right). \quad (5.19)$$

As can be observed, Eq. 5.19 shows that $\tan \left(\frac{\Delta(t)}{2} \right)$ is a periodic function for $\Lambda_\Delta \leq |\langle \Omega \rangle^{12}|$. This drifting behavior just states that, if the interlayer coupling strength is not large enough, it is no longer possible to reduce the difference of the average frequencies between the layers and entrain the whole system.

Supposing that $\Delta/2 \gtrsim 0$, $\tan \left(\frac{\Delta(t)}{2} \right) \geq 2|R|$ and $\Lambda_\Delta \gg |\langle \Omega \rangle^{12}|$, the absolute value signs in Eq. 5.17 can be removed, thus it can be approximated as:

$$\frac{\tan \left(\frac{\Delta}{2} \right)}{\tan \left(\frac{\Delta}{2} \right) - A} = -\frac{1}{A} \left(\frac{\Delta}{2} \right) - \frac{1}{A^2} \left(\frac{\Delta}{2} \right)^2 - \frac{(A^2 + 3)}{3A^3} \left(\frac{\Delta}{2} \right)^3 - \dots \approx \xi(0) e^{-\Lambda_\Delta t}, \quad (5.20)$$

where $A = 2|R| \text{sgn} \left(\langle \Omega \rangle^{12} \right)$. Under these conditions, the relaxation time of Δ is dominated once again by Λ_Δ . Hence, provided that $r^1(t) \approx r^2(t) \approx 1$ and $\Lambda_\Delta \gg$

$|\langle \Omega \rangle^{12}|$, the non-linear Kuramoto model (Eq. 5.1) and the spectral analysis lead to the same relaxation time for the interlayer synchronization process for $M = 2$: $\tau_\Delta = 1/\Lambda_\Delta = 1/2\lambda^{12}$.

For small values of Δ , the time evolution of the order parameter in Eq. 5.8 can be approximated by $r(t) \simeq 1 - \Delta^2/8$. Therefore, the timescale of the order parameter (τ_r) is determined by the smallest nonzero power of $\Delta/2$, and a rough estimation is $\tau_r \gtrsim 1/2\Lambda_\Delta$.

Summarizing the results in Secs. 5.3 and 5.4, the asymptotic synchronization phase of the Kuramoto model on multiplexes is characterized by the following behavior:

- (i) When $\lambda^{12} \ll \lambda^1 = \lambda^2$, the timescales rank as follows: $\tau_{\mathcal{M}} = \tau_\Delta > \tau_r$.
- (ii) When $\lambda^{12} \gg \lambda^1 = \lambda^2$, the timescales rank as follows: $\tau_{\mathcal{M}} \gg \tau_\Delta > \tau_r$.

According to Eq. 5.16, increasing the value of λ^{12} accelerates the transient regimes of the interlayer synchronization and of the global order parameter, respectively. Additionally, it reduces the difference between the average phase of each layer and, hence, it favors the full synchronization of the system. Actually, it is important to call the attention to the fact that this result stays in opposition to what is observed for the multiplex diffusive relaxation when $r^\alpha \simeq 1$.

These results are in accordance with the prior findings on *superdiffusion* [Gó+13; SR+13; SGG+17]. Superdiffusion emerges when the timescale of the multiplex is faster than that of both layers acting separately [Gó+13; SR+13], i.e. $\Lambda_2 > \max(\sigma_2^1, \sigma_2^2)$, where σ_2^α is the smallest nonzero eigenvalue of the Laplacian matrix of layer G^α . For large coupling between layers, spectral analysis predicts that superdiffusion is not guaranteed; it depends on the specific structures coupled together. Increasing the interlayer coupling accelerates the convergence of the global order parameter and of the difference between the average phase of each layer. Nevertheless, it also increases the magnitude of the perturbations that are transmitted across the interlayer.

5.5 Numerical results

In this section we show that the prior analytical findings are in complete agreement with computer simulations. We compare the results of the numerical integration of the coupled Kuramoto oscillators for several multiplexes realizations, using 16-digit variables. From the solution for $\theta_n^\alpha(t)$ we obtain the time evolution of $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$ and $1 - r(t)$ for the linear and non-linear regimes that are compared, respectively, to

$$\begin{aligned}\eta_2(t) &= \left| \tan\left(\frac{\Delta(0)}{2}\right) \right| e^{-\Lambda_2 t}, \\ \eta_r(t) &= (1 - r(0)) e^{-2\Lambda_\Delta t}.\end{aligned}\tag{5.21}$$

$\eta_r(t)$ is a measure of the synchronization dynamics, while $\eta_2(t)$ has the same dependence on time as the multiplex diffusive dynamics. Besides that, $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$ is also compared to $\eta_\Delta(t)$ in Eq. 5.16.

5.5.1 Linear Kuramoto model

We start by presenting numerical results from the integration of Eq. 5.2, where the initial phases $\theta_n^\alpha(0)$ are drawn randomly from a uniform distribution $\mathcal{U}_{\subseteq\phi}$ of width $2a$ centered at the value μ^α . Results satisfying $a \ll 1$ can be compared to the analytical expressions derived in the previous sections for $\tan\left(\frac{\Delta}{2}\right)$ and $1 - r$, as in these cases the condition $r^\alpha \simeq 1$ is satisfied. For the sake of an easier comparison with the analytical results, we set $\lambda^1 = \lambda^2 = \lambda$. We remark that the results depend on the following factors: coupling strengths, initial conditions and network topology.

The dependence on the coupling strengths is in agreement with section 5.4. Fig. 5.3a (see also Figs. 5.4a and 5.5a) shows that, for $\lambda^{12} \ll \lambda$, the timescales of interlayer synchronization and of diffusion on $\mathcal{M}$ are equal: the time evolution of $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$ is well approximated by $\eta_\Delta(t)$ and $\eta_2(t)$, i.e., $\Lambda_2 \approx \Lambda_\Delta$. However, when $\lambda^{12} \gg \lambda$, these timescales differ, i.e., $\Lambda_2 \neq \Lambda_\Delta$, as indicated by lines with different slopes in Fig. 5.3b (see also Figs. 5.4b and 5.5b). Moreover, it is also shown that the agreement between $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$ and $\eta_\Delta(t)$ has a lower limit $\sim 10^{-10}$. Nevertheless, the difference between the average phases of both layers relaxes faster than the whole system, i.e. $\tau_{\mathcal{M}} \gg \tau_\Delta$ for $\lambda \ll \lambda^{12}$. Both panels reveal the presence of random fluctuations $\sim 10^{-15}$, which depend on the precision of the used variables.

The same (somewhat different) features are observed in Figs. 5.3c, 5.6a and 5.7a (Figs. 5.3d, 5.6b and 5.7b), where we compare the approximation $\eta_r(t)$ with the actual value of $1 - r(t)$. The evolution of $1 - r(t)$ is well adjusted by $\eta_r(t)$ for $\lambda^{12} \ll \lambda$. However, when $\lambda^{12} \gg \lambda$, the quantities agree with each other in a more limited range $\gtrsim 10^{-4}$.

For a given choice of the coupling parameters, the deviations from the exponential behavior can be influenced by topological differences among the layers and by the initial values $\theta_n^\alpha(0)$. To emphasize the importance of the later, we consider $M = 2$ multiplexes where each layer consists of a complete graph, for which analytical expressions for Λ_2 can be obtained (see the Appendix C). In Fig. 5.8 we show the numerical results for $1 - r(t)$ when $a = 0$ and 0.1. The inset shows that the time

FIG. 5.3: Numerical results for $N = 500$, $\lambda = 2.0$, $\mu^1 = \pi/2$, $\mu^2 = 0$, and $\alpha = 0.1$. Each multiplex layer has the same topological features described in Fig. 5.2. Panels (a) and (b): Time evolution of $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$ (blue continuous line), $\eta_\Delta(t)$ (red circles) and $\eta_2(t)$ (black squares) for $\lambda^{12} = 0.1\lambda$ (a), and $\lambda^{12} = 10.0\lambda$ (b). Panels (c) and (d): Time evolution of $1 - r(t)$ (blue continuous line) and $\eta_r(t)$ (red circles) for $\lambda^{12} = 0.1\lambda$ (c), and $\lambda^{12} = 10.0\lambda$ (d).

evolution of $1 - r(t)$ is well adjusted by $\eta_r(t)$, when $\alpha = 0$ (see also Figs. 5.9a and 5.9b), while departures from the exponential decay take place when $\alpha > 0$. Here, the agreement between the curves is limited to the range $\gtrsim 10^{-6}$.

Figures 5.3 and 5.8 suggest that it may be possible to relate the range of values of $1 - r$ where the numerical results coincide with the analytical predictions to τ_D , the characteristic timescale for the emergence of these discrepancies. It turns out that τ_D is mainly controlled by the value of Λ_2 as follows:

$$\tau_D \approx \frac{1}{2\Lambda_2}. \quad (5.22)$$

Therefore, in the case $\Lambda_\Delta \approx \Lambda_2$, deviations disappear until the numeric precision of the used variables is reached, whether or not $\alpha = 0$ (see Figs. 5.3a, 5.3c, 5.4a, 5.5a, 5.6a and 5.7a). However, if $\Lambda_\Delta > \Lambda_2$ and $\alpha > 0$, discrepancies will manifest.

Finally, still using complete graphs for the sake of comparison to analytical

FIG. 5.4: Time evolution of $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$, $\eta_\Delta(t)$ and $\eta_2(t)$ for $N = 50$, $\lambda = 2.0$, $\mu^1 = \pi/2$, $\mu^2 = 0$, and $\alpha = 0.1$. Each layer contains an Erdős-Rényi random graph with mean degrees $\langle k \rangle = 4.04$ and $\langle k \rangle = 5.4$, respectively. The used symbols and lines are the same as in Fig. 5.3a and Fig. 5.3b. (a) Left panel: $\lambda^{12} = 0.1\lambda$. (b) Right panel: $\lambda^{12} = 10.0\lambda$.

FIG. 5.5: Time evolution of $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$, $\eta_\Delta(t)$ and $\eta_2(t)$ for $N = 50$, $\lambda = 1.0$, $\mu^1 = \pi/4$, $\mu^2 = 0$, and $\alpha = 0.01$. One layer contains an Erdős-Rényi random graph with mean degree $\langle k \rangle = 5.52$. The other one contains a network with asymptotic degree distribution $P(k) \sim k^{-3}$. The used symbols and lines are the same as in Fig. 5.3a and Fig. 5.3b. (a) Left panel: $\lambda^{12} = 0.1\lambda$. (b) Right panel: $\lambda^{12} = 10.0\lambda$.

expressions, we illustrate the dependence of the multiplex dynamics on the topology, for a given choice of the coupling strengths and the initial conditions. We note that the dependence on the topology can be observed just by changing the number of nodes in each layer of the complete graph. Indeed, if $\Lambda_\Delta > \Lambda_2$, the smallest nonzero eigenvalue of the supra-Laplacian matrix is $\Lambda_2 = \lambda N$ (see the

FIG. 5.6: Time evolution of $1 - r(t)$ and $\eta_r(t)$ for $N = 50$, $\lambda = 2.0$, $\mu^1 = \pi/2$, $\mu^2 = 0$, and $\alpha = 0.1$. The used symbols and lines are the same as in Figs. 5.3c and 5.3d. The multiplexes are the same as those used in Figs. 5.4a and 5.4b. (a) Left panel: $\lambda^{12} = 0.1\lambda$. (b) Right panel: $\lambda^{12} = 10.0\lambda$.

FIG. 5.7: Time evolution of $1 - r(t)$ and $\eta_r(t)$. The used symbols and lines are the same as in Figs. 5.3c and Fig. 5.3d. The multiplexes are the same as those used in Figs. 5.5a and 5.5b. (a) Left panel: $\lambda^{12} = 0.1\lambda$. (b) Right panel: $\lambda^{12} = 10.0\lambda$.

Appendix C). Therefore, according to Eq. 5.22, the smaller the number of nodes N , the larger are the deviations, for $\tau_M > \tau_\Delta$ and $\alpha > 0$. In Figs. 5.10a and 5.10b, we display the time evolution of $1 - r(t)$, $\eta_r(t)$, and a guide for the eye proportional to $e^{-2\lambda N t}$ for $N = 10$ and $N = 100$, respectively, and $\alpha > 0$. As can be observed, these results are in good agreement with Eq. 5.22. In the Appendix C, we show analytically the dependence of the global order parameter r on $e^{-2\lambda_2 t}$ (i.e., $e^{-2\lambda N t}$), when each layer of the multiplex network is a complete graph.

FIG. 5.8: Time evolution of $1 - r(t)$ (blue continuous line) and $\eta_r(t)$ (red circles) for $N = 10$, $\lambda = 2.0$, $\lambda^{12} = 10\lambda$, $\mu^1 = \pi/2$, $\mu^2 = 0$ and $\alpha = 0.1$. Each layer contains a complete graph. The inset shows the results by considering $\alpha = 0$.

FIG. 5.9: Time evolution of $1 - r(t)$ and $\eta_r(t)$. $\lambda^{12} = 10\lambda$ in both panels, and the used symbols and lines are the same as in Fig. 5.8. (a) Left panel: The multiplexes are the same as those used in Figs. 5.4a and 5.4b, except for $N = 15$ and $\alpha = 0.0$. (b) Right panel: The multiplexes are the same as those used in Figs. 5.5a and 5.5b, except for $\alpha = 0.0$.

5.5.2 Non-linear Kuramoto model

The numerical results for the non-linear equations Eq. 5.1 were obtained using the same procedure described in the previous subsection. When all natural frequencies of the oscillators are set to zero, i.e., $\Omega_n^\alpha = 0 \forall n$, the time evolutions of $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$ and $1 - r(t)$ for $\lambda^{12} \ll \lambda$ are essentially the same as those in Figs. 5.3a and 5.3c (see Figs. 5.11a and 5.11b, respectively).

However, when $\lambda^{12} \gg \lambda$, which causes $\Lambda_2 \neq \Lambda_\Delta$ and $\tau_M \gg \tau_\Delta$, $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$ deviates from both $\eta_2(t)$ and $\eta_\Delta(t)$, and $1 - r(t)$ deviates from $\eta_r(t)$. The comparison

FIG. 5.10: Time evolution of $1 - r(t)$ (blue continuous line), $\eta_r(t)$ (red circles) and a guide for the eye proportional to $e^{-2\lambda N t}$ (black squares), for $\lambda = 2.0$, $\lambda^{12} = 100\lambda$, $\mu^1 = \pi/2$, $\mu^2 = 0$, and $\alpha = 0.1$. Each layer contains a complete graph. (a) Left panel: $N = 10$. (b) Right panel: $N = 100$.

FIG. 5.11: (a) Left panel: Time evolution of $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$, $\eta_\Delta(t)$, and $\eta_2(t)$. (b) Right panel: Time evolution of $1 - r(t)$ and $\eta_r(t)$. $\lambda^{12} = 0.1\lambda$ in both panels, and the used symbols and lines are the same as in Figs. 5.3a and 5.3c. The multiplexes are the same as those used in Fig. 5.3.

between Figs. 5.3b and 5.12a shows that the non-linear terms affect the evolution $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$. Notice that the effect on the evolution of $1 - r(t) \sim \Delta^2$ is much smaller, in such a way that the changes induced by the non-linear terms in Fig. 5.12b are minute in comparison to Fig. 5.3d.

Other examples for different values of the interlayer and intralayer coupling constants and several initial conditions for the coupled Kuramoto oscillators, are presented in Figs. 5.13a, 5.13b, 5.14a and 5.14b. All of them are in complete agreement with the results described in this section.

FIG. 5.12: (a) Left panel: Time evolution of $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$, $\eta_\Delta(t)$, and $\eta_2(t)$. (b) Right panel: Time evolution of $1 - r(t)$ and $\eta_r(t)$. $\lambda^{12} = 10.0\lambda$ in both panels, and the used symbols and lines are the same as in Figs. 5.3b and 5.3d. The multiplexes are the same as those used in Fig. 5.3.

FIG. 5.13: Time evolution of $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$, $\eta_\Delta(t)$ and $\eta_2(t)$. $\Omega_n^\alpha = 0$ for all n in both panels, and the used symbols and lines are the same as in Fig. 5.3a and Fig. 5.3b. The multiplexes are the same as those used in Figs. 5.5a and 5.5b. (a) Left panel: $\lambda^{12} = 0.1\lambda$. (b) Right panel: $\lambda^{12} = 10.0\lambda$.

The dependence of $1 - r(t)$ on α for $M = 2$ multiplexes formed by complete graphs is very similar to that in Fig. 5.8. When $\alpha = 0$, $1 - r(t)$ and $\eta_r(t)$ are in complete agreement, if they are greater than or similar to 10^{-12} , while for $\alpha = 0.1$, deviations appear when $\eta_r(t) \lesssim 10^{-5}$ (see Figs. 5.15 and 5.16).

Let us now discuss the results when the natural frequencies Ω_n^α are different from zero so that, in general, $\langle \Omega \rangle^1 \neq \langle \Omega \rangle^2$. Following [AG+12], the values of the

FIG. 5.14: Time evolution of $1 - r(t)$ and $\eta_r(t)$. $\Omega_n^\alpha = 0$ for all n in both panels, and the used symbols and lines are the same as in Figs. 5.3c and 5.3d. The multiplexes are the same as those used in Fig. 5.5a and Fig. 5.5b. (a) Left panel: $\lambda^{12} = 0.1\lambda$. (b) Right panel: $\lambda^{12} = 10.0\lambda$.

FIG. 5.15: Time evolution of $1 - r(t)$ (blue continuous line) and $\eta_r(t)$ (red circles) for $N = 10$, $\lambda = 2.0$, $\lambda^{12} = 10\lambda$, $\mu^1 = \pi/2$, $\mu^2 = 0$, and $\alpha = 0.1$. Each layer contains a complete graph. The inset shows $\alpha = 0$.

frequencies are drawn randomly from a uniform distribution $\mathcal{U}(0.8, 1.2)$. As observed in Figs. 5.17a and 5.17b, the time evolution of $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$ diverges from $\eta_\Delta(t)$ when $\langle\Omega\rangle^1 \neq \langle\Omega\rangle^2$, for both $\lambda^{12} \ll \lambda$ and $\lambda^{12} \gg \lambda$. In both cases, Δ converges to a non-zero value and, consequently, the oscillators do not reach full synchronization in accordance with Eqs. 5.17 and 5.18. We notice that the deviations from the exponential predictions for $\lambda^{12} \ll \lambda$ occur at a larger value of $\eta_2(t)$ as compared to $\lambda^{12} \gg \lambda$. This stays in opposition to the previously observed behavior for $\Omega_n^\alpha \equiv 0$. Indeed, a relatively small interlayer coupling favors the emergence of the deviations, once interlayer synchronization is impeded for $\lambda^{12} \approx 0$. Hence, if $|\langle\Omega\rangle^{12}| > 0$ and $\lambda^{12} \approx 0$, the exponential decay barely takes place. In the case of $\lambda^{12} \gg 0$, the

FIG. 5.16: Time evolution of $1 - r(t)$ (blue continuous line), $\eta_r(t)$ (red circles) and a guide for the eye proportional to $e^{-2\Lambda_2 t}$ (black squares). $\lambda^{12} = 10\lambda$ and $\Omega_n^\alpha = 0$. The multiplex is the same as those used in Figs. 5.4a and 5.4b, except for $N = 15$ and $\lambda = 1.0$.

FIG. 5.17: Time evolution of $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$, $\eta_\Delta(t)$, and $\eta_2(t)$. The multiplex parameters, symbols and lines are the same as in Figs. 5.3a and 5.3b, except for $\Omega_n^\alpha \in \mathcal{U}(0.8, 1.2)$. (a) Left panel: $\lambda^{12} = 0.1\lambda$. (b) Right panel: $\lambda^{12} = 10.0\lambda$.

relaxation time of the synchronization error gets closer to the estimation given by $\eta_r(t)$, whether or not $\lambda \gg \lambda^{12}$.

The asymptotic value of the difference between the average phases of both layers can be estimated from Eq. 5.17. If $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right) \geq \text{sgn}\left(\langle\Omega\rangle^{12}\right)\left(|R| + \sqrt{R^2 - 1}\right)$, Eq. 5.17 can be rewritten as

$$\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right) = \left(|R| - \sqrt{R^2 - 1} \frac{1 + \xi(0)e^{-t|\langle\Omega\rangle^{12}|\sqrt{R^2 - 1}}}{1 - \xi(0)e^{-t|\langle\Omega\rangle^{12}|\sqrt{R^2 - 1}}}\right) \text{sgn}\left(\langle\Omega\rangle^{12}\right), \quad (5.23)$$

so that its asymptotic value $t \rightarrow \infty$ is given by

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right) = (|R| - \sqrt{R^2 - 1}) \operatorname{sgn}(\langle \Omega \rangle^{12}). \quad (5.24)$$

If $\langle \Omega \rangle^1 \simeq \langle \Omega \rangle^2$, R diverges and Δ decays to zero exponentially. On the other hand, in Fig. 5.18 we expose the time evolution of $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$ for $2\langle \Omega \rangle^{12} = \Lambda_\Delta$. In that case, according to Eq. 5.17 and Eq. 5.24, the asymptotic value of the difference between the average phases of both layers is $\psi^1 - \psi^2 = \pi/6$ (green triangles). It is easy to see that the prior estimation is very accurate. Other examples for different conditions are presented in Figs. 5.19a and 5.19b. All of them are in complete agreement with the results described in this section.

FIG. 5.18: Time evolution of $\tan\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$, $\eta_\Delta(t)$, and $\eta_2(t)$. The multiplex parameters, symbols and lines are the same as in Fig. 5.3b. The model parameters are $\lambda = 2.0$, $\lambda^{12} = 10\lambda$, and $2\langle \Omega \rangle^{12} = \Lambda_\Delta$. Green triangles indicate the asymptotic value obtained with Eq. 5.17.

Figures 5.20a and 5.21a (Figures 5.20b and 5.21b) illustrate the behavior of $1 - r(t)$ for small (large) interlayer coupling, respectively. As can be observed, synchronization error departs from $\eta_r(t)$ values whether or not $\lambda^{12} \ll \lambda$. As expected, its asymptotic value does not decay to zero.

Finally, we show that $\Delta(t)$ is a periodic function, in the case of $\Lambda_\Delta \leq |\langle \Omega \rangle^{12}|$ (see Fig. 5.22). As can be observed, its time evolution is in complete agreement with that obtained from Eq. 5.19.

5.6 Conclusions

We have developed a simple formalism to study the timescales of the global order parameter and the interlayer synchronization of multilayer networks. Our

FIG. 5.19: Time evolution of $\tan \left(\frac{\Delta(t)}{2} \right)$, $\eta_\Delta(t)$ and $\eta_2(t)$. The used symbols and lines are the same as in Fig. 5.18. The multiplex parameters are the same as those used in Figs. 5.5a and 5.5b, except for $\Omega_n^\alpha \in \mathcal{U}(0.8, 1.2)$ for all n . (a) Left panel: $\lambda^{12} = 0.1\lambda$. (b) Right panel: $\lambda^{12} = 10.0\lambda$.

FIG. 5.20: Time evolution of $1 - r(t)$ and $\eta_r(t)$. The multiplex parameters, symbols and lines are the same as in Figs. 5.3c and 5.3d, except for $\Omega_n^\alpha \in \mathcal{U}(0.8, 1.2)$. (a) Left panel: $\lambda^{12} = 0.1\lambda$. (b) Right panel: $\lambda^{12} = 10.0\lambda$.

approach has been addapted to a two-layer multiplex with high degrees of synchronization in each layer (i.e., $r^\alpha(t) \approx 1$ for $1 \leq \alpha \leq 2$ and $t \geq 0$), in a particular setup in which nodes are preserved through layers.

We have analyzed the difference between the average phase of each layer of the multiplex network from two different perspectives: spectral analysis and the non-linear Kuramoto model. Our analytical results showed that the time scales of the global order parameter τ_r and the interlayer synchronization τ_Δ are inversely proportional to the interlayer coupling strength λ^{12} . Surprisingly, the convergence

FIG. 5.21: Time evolution of $1 - r(t)$ and $\eta_r(t)$. The used symbols and lines are the same as in Figs. 5.20a and 5.20b. The multiplex parameters are the same as those used in Fig. 5.5a and Fig. 5.5b, except for $\Omega_n^\alpha \in \mathcal{U}(0.8, 1.2)$ for all n . (a) Left panel: $\lambda^{12} = 0.1\lambda$. (b) Right panel: $\lambda^{12} = 10.0\lambda$.

FIG. 5.22: Time evolution of $\sin\left(\frac{\Delta(t)}{2}\right)$ (blue continuous line) and the results adapted from Eq. 5.19 (red circles) for $N = 500$, $\lambda = 2.0$, $\lambda^{12} = 10\lambda$, $\mu_1 = \pi/2$, $\mu_2 = 0$, $\alpha = 0.1$ and $2.8\Lambda_\Delta = \left|\langle\Omega\rangle^{12}\right|$. The multiplex parameters are the same as those used in Fig. 5.3.

of the global order parameter is faster than the convergence of interlayer synchronization, and the latter is generally faster than the relaxation time of the multiplex network $\tau_{\mathcal{M}}$. These features do not depend on the specific structures coupled together. Therefore, increasing the interlayer coupling always shortens the global order parameter and the interlayer synchronization transient regimes.

On the other hand, our formalism outlined the effects of frequencies on the

evolution of the global order parameter and on the interlayer synchronization process. In addition, conditions for an oscillatory behavior were also identified.

The analytical findings were in fairly good agreement with computer simulations. In the case of multiplex networks with relatively small interlayer coupling (i.e. $\lambda^{12} \ll \lambda$), similar average frequencies in each layer (i.e. $\langle \Omega \rangle^1 \approx \langle \Omega \rangle^2$) and high degrees of synchronization in each layer, at the initial time (i.e. $r^\alpha(0) \approx 1$ for $1 \leq \alpha \leq 2$), the analytical and numerical results were in complete agreement. However, supposing similar average frequencies in each layer, if the interlayer coupling is relatively large (i.e., $\lambda^{12} \gg \lambda$), and if there exists an initial intralayer phase heterogeneity (i.e. there is at least one layer G^α that contains two or more oscillators whose phases are different at $t = 0$), the numerical results showed deviations from the predicted exponential decay, although major changes of the global order parameter and of the interlayer synchronization were fairly well adjusted by our analytical approach. The timescale of these discrepancies, τ_D , is inversely proportional to twice as small as non-zero eigenvalue of the supra-Laplacian matrix $\mathcal{L}$ of the multiplex network, Λ_2 . According to prior works [Gó+13; SR+13], this dependence on Λ_2 implies that deviations from our analytical results are shaped by topological characteristics of the layers involved as well as the respective values of λ and λ^{12} .

When the average frequencies of each layer are dissimilar (i.e. $\langle \Omega \rangle^{12} = \langle \Omega \rangle^1 - \langle \Omega \rangle^2 \neq 0$), computer simulations are in good agreement with our analytical results. If $\Lambda_\Delta \geq |\langle \Omega \rangle^{12}|$, the asymptotic values of the global order parameter and of the interlayer synchronization converge to a non-zero value. If $\Lambda_\Delta \leq |\langle \Omega \rangle^{12}|$, a periodic behavior is obtained. Discrepancies from our analytical description do not appear, unless the asymptotic values of the global order parameter and of the interlayer synchronization are close to zero (i.e. $\langle \Omega \rangle^{12} \approx 0$).

Thus, under the hypotheses of this work, we conclude that the time scale of the global order parameter is at least twice as small as the time scale of multiplex networks (i.e. $2\tau_r \approx 2\tau_D \approx \tau_M = 1/\Lambda_2$), and the major changes of this parameter are fairly well adjusted by our analytical findings (i.e., $\tau_r \approx \tau_\Delta = 1/\Lambda_\Delta = 1/2\lambda^{12}$).

Parte III

Discusión general

6 | **Análisis y discusión de resultados**

En este capítulo se recopilan y analizan los resultados de las publicaciones incluidas en los capítulos 3, 4 y 5. Por un lado, se estudian los efectos impuestos por la restricción de las diferencias entre un nodo de una red adaptativa y sus primeros vecinos, sobre la dinámica del sistema y su estructura. Por otro lado, en lo que atañe a la sincronización de redes fuera del equilibrio, se caracterizan las principales escalas de tiempo de una red de osciladores de Kuramoto, así como la influencia de los parámetros del modelo. La discusión permite ilustrar que las diferentes contribuciones de la colección de artículos constituyen ingredientes básicos para definir modelos de redes adaptativas con dinámica SOC, aplicables al estudio de modelos de población.

Adicionalmente, con objeto de exhibir la versatilidad de las herramientas y los conceptos presentados en esta tesis, a modo de ejemplo, se describe integralmente una aplicación de las observaciones discutidas anteriormente, con la que es posible obtener modelos de redes adaptativas con dinámicas SOC (o SOqC), y estructuras similares a las de las interacciones socioeconómicas, presentes en las poblaciones humanas. Para justificar y validar los logros apuntados, el capítulo incluye un estudio numérico del ejemplo anterior, en el que se destacan las conexiones con los resultados de la colección de publicaciones. Todo ello evidencia el alto grado de consecución del objetivo general de este trabajo de tesis.

A continuación se indica la estructura del capítulo. En la Sec. 6.1, se analizan los resultados de las publicaciones previas. Atendiendo a los mismos, en la Sec. 6.2, se hace la descripción integrada de una aplicación que permite generar, bajo ciertas condiciones de operación, redes adaptativas críticamente auto-organizadas, similares a las redes de interacciones socioeconómicas de las poblaciones humanas. Finalmente, la validación numérica de la aplicación descrita se presenta en la Sec. 6.3.

6.1 Análisis y discusión de resultados del compendio de publicaciones

En esta sección, se recopilan y analizan de una manera integrada los aportes de [APGP16; APPE17; AP+17] (incluidos en los capítulos 3, 4 y 5 respectivamente). Tal y como se muestra, los conceptos y las lecciones aprendidas aquí presentadas proporcionan claves fundamentales para desarrollar modelos de redes adaptativas, críticamente auto-organizadas, aplicables al estudio de poblaciones. En tal tesitura, las publicaciones seleccionadas permiten alcanzar el objetivo general de esta tesis, lo cual justifica la pertinencia de su inclusión.

La sección se estructura como sigue. En el apartado 6.1.1, se revisan los hallazgos realizados en materia de modelos de crecimiento sujetos a una restricción de las diferencias entre un nodo y sus primeros vecinos, y la inducción de dinámicas críticamente auto-organizadas. En el apartado 6.1.2, se analizan los nuevos rasgos topológicos identificados en redes reales, así como en los modelos de crecimiento sujetos a la restricción previa. Finalmente, en el apartado 6.1.3, se examinan las lecciones aprendidas sobre sincronización de redes de osciladores de Kuramoto, en sistemas con dinámicas adaptativas críticamente auto-organizadas.

6.1.1 Modelos de crecimiento sujetos a una restricción de las diferencias entre un nodo y sus primeros vecinos: Inducción de dinámicas críticamente auto-organizadas

En esta tesis, se proponen ingredientes básicos para definir modelos de redes con dinámica SOC, aplicables al estudio de modelos de población. Uno de los rasgos seleccionados es la restricción de las diferencias entre un nodo y sus primeros vecinos, al igual que se hace en otros modelos SOC, como, por ejemplo, el modelo BTW (véase la Sec. 1.1.2). En el trabajo desarrollado en [APGP16] (véase el capítulo 3) se muestra un modelo sencillo de red adaptativa, sujeto a una restricción topológica, dada por la Ec. 3.1 (véase la Sec. 3.3). En tal modelo, se trasladan y adaptan algunas de las principales características del modelo BTW [BTW87] a una red, a saber:

1. Considerar que la red es un sistema abierto, en el que pueden variar, a lo largo del tiempo, tanto la cantidad de nodos como la de enlaces.
2. Imponer una dinámica que mantenga fuera del equilibrio al sistema, a través de un flujo constante de materia (en este caso, nodos).
3. Establecer que la estabilidad de los nodos dependa de sus propias características topológicas, así como de las particularidades de su entorno inmediato (su vecindario). Ello permite, por un lado, acoplar la dinámica de la

red a su topología y, por otro, vincular el surgimiento de largas correlaciones espacio-temporales a las interacciones locales.

4. Requerir que la condición de estabilidad de los nodos induzca un comportamiento asortativo en la red, similar al observado en los montones de arena. En las pilas de arena, los granos de la superficie son estables, si el desnivel entre ellos y sus vecinos se mantiene por debajo de un cierto umbral.

Como ha podido comprobarse, la restricción impuesta por la condición de estabilidad (Ec. 3.1), unida al mecanismo de generación de la red, induce la aparición de un comportamiento críticamente auto-organizado en [APGP16].

El único parámetro del modelo es la *constante de discrepancia*, C . Cuanto mayor es C , mayores son las diferencias toleradas entre el nodo y su entorno, y también mayor es el tamaño promedio del sistema (cuando se alcanza el régimen estacionario estadístico).

Con objeto de caracterizar la dinámica críticamente auto-organizada, se han realizado simulaciones, empleando diferentes valores de C . Las estadísticas de los espectros de potencia y los tiempos de espera se corresponden, en general, con los propios del modelo BTW [BTW87; Hel+90]. Las estadísticas del tamaño de las avalanchas y las fluctuaciones de energía muestran similitudes con el modelo OFC [Car+07]. El exponente ajustado para la distribución acumulada de tamaños de avalancha $\gamma = -0.8 \pm 0.1$ es comparable al hallado en el modelo OFC [Car+07]. Lo mismo sucede con el exponente ajustado de la curva q-gaussiana, asociada a las fluctuaciones de energía liberada o retornos: $q = 2.2 \pm 0.2$ [Car+07].

Finalmente, es destacable señalar que, en [APGP16], también se ha incluido un estudio teórico de la estadística asociada a las cadenas lineales ($1 \leq C < 4/3$), empleando las cadenas de Markov. Con este procedimiento, se han obtenido las probabilidades de que el sistema posea un cierto tamaño, L , en un instante de tiempo cualquiera, t . Ello ha permitido reproducir teóricamente las distribuciones de tamaños de las avalanchas y de las redes proporcionadas por la simulación computacional.

6.1.2 Nuevos rasgos topológicos en redes reales y en modelos de crecimiento sujetos a una restricción de las diferencias entre un nodo y sus primeros vecinos: Estudio de la asortatividad de vecindario y la asortatividad de dos-pasos

En aras de desarrollar modelos de población críticamente auto-organizados, en esta tesis, la restricción de las diferencias entre un nodo y sus primeros vecinos se ha identificado como un elemento clave. Apoyándonos en la definición de nuevas métricas, se ha comprobado que, consecuencia de la imposición de esta

limitación, aparecen rasgos topológicos que no están presentes en otros modelos de crecimiento, como el modelo B-A. Asimismo, tales características se han observado en redes reales.¹

El artículo [APGP16] muestra que la restricción de las diferencias de grado entre un nodo y sus vecinos acarrea la aparición de un nuevo tipo de asortatividad: la *asortatividad de vecindario* (según el grado) o *asortatividad de grado local* (véanse las Secs. 3.3 y 3.4). Bajo este nuevo enfoque, la tendencia de un nodo a enlazarse ya no depende de la propiedad de sus vecinos (tomados de uno en uno, como sucede en [New02; New03a]²), sino del valor medio de la propiedad de éstos.

En [APGP16], se comprueba que la condición de estabilidad (Ec. 3.1), en principio, no garantiza la generación de redes asortativas según el grado. Nodos de grados diferentes pueden estar enlazados, sin que su estabilidad quede comprometida únicamente por esa circunstancia. De hecho, los resultados muestran que las redes generadas en [APGP16], en general, poseen una asortatividad nula según el grado, al igual que les sucede a las redes aleatorias (E-R) y libres de escala (B-A). En cambio, al definir una nueva propiedad en los nodos (denominada *grado local*) y calcular su coeficiente de correlación de Pearson en los enlaces de la red (esto es, su *asortatividad de vecindario*), se ha comprobado que las redes de [APGP16] poseen una elevada asortatividad de vecindario, mientras que las redes aleatorias (E-R) y libres de escala (B-A) son nulas bajo esta óptica (ver 3.4).

La presencia de estructuras con asortatividad de vecindario altamente positiva y asortatividad de grado nula o negativa en el modelo de [APGP16] motivó el trabajo desarrollado en [APPE17] (véase el capítulo 4). En esta investigación, se propone una extensión del concepto de asortatividad según el grado (de Newman [New02; New03a]), con objeto de estudiar, por un lado, las correlaciones de grado entre los nodos de una red y sus vecinos directos, y, por otro lado, la estructura de una red, atendiendo a los valores de dos tipos de asortatividades: la asortatividad de grado y la asortatividad de dos-pasos.

Con objeto de realizar un estudio analítico de la asortatividad de vecindario, se simplificó la medida introducida en [APGP16]. La nueva métrica se denomina *asortatividad de dos-pasos*, $r_{\tilde{k}}$ (véase la Ec. 4.6) y se funda en el concepto de *grado de dos-pasos* (definido en la Ec. 4.5).

¹A continuación se indican las redes reales que se han identificado con un coeficiente de asortatividad de grado aproximadamente nulo ($r_k = 0$) y un coeficiente de asortatividad de vecindario (según el grado) muy positivo. Para ello, se especifica el dominio de las redes y el número identificador del conjunto de datos que figuran en los Apéndices A y B. Redes biológicas: 1, 4, 5, 6, y 9. Redes sociales: 32, 33, 34, 37, y 38. Redes tecnológicas: 40, 41, 42, 44, 46, y 47.

²La asortatividad de Newman viene dada por el coeficiente de correlación de Pearson de la correlación grado-grado.

Analíticamente se ha comprobado que la nueva medida incorpora más información estructural que la métrica tradicional. La cantidad de subgrafos que determinan analíticamente la asortatividad de dos-pasos (15 en total) es mayor que la de la asortatividad según el grado (5 en total). Por otro lado, también se ha verificado que no están linealmente correlacionadas.

El trabajo incluye un estudio de las asortatividades del conjunto completo de redes conexas de 9 nodos (sin etiquetar), así como de 49 redes reales de distintos tipos (sociales, biológicas, ecológicas o tecnológicas, entre otros). La descripción de las redes reales empleadas puede consultarse en el Apéndice A. Los resultados obtenidos para las redes reales muestran que el 14 % de las estructuras pertenece al tipo asortativa-asortativa (AA) según el grado y el grado local (i.e., asortatividad de dos pasos), respectivamente; el 24 % forma parte de la categoría disasortativa-disasortativa (DD); y la gran mayoría de las redes analizadas (61 %) integra el grupo diasortativa-asortativa (DA). No hay grafos con estructuras asortativas-disasortativas (AD).

Por su parte, el análisis de las redes según sus funciones muestra las siguientes tendencias: el 53 % de las redes ecológicas analizadas son DD, el 27 % DA y el 20 % AA; el 50 % de las redes sociales analizadas son DA, el 30 % AA y el 20 % DD; el 80 % de las redes tecnológicas son DA, el 10 % AA y el 10 % DD. Finalmente, el 100 % de las redes biológicas estudiadas es DA. El estudio numérico en el conjunto completo de redes conexas de 9 nodos (sin etiquetar) revela que, en general, el coeficiente de asortatividad de dos-pasos es mayor o igual que el coeficiente de asortatividad de grado.

Por otro lado, la abundancia de redes DA en cualesquiera de las categorías funcionales se explica parcialmente por la presencia de *nodos separadores*, esto es, nodos de grado dos que conectan dos nodos de elevado grado (véase la Fig. 4.1). Así todo, aún son necesarias nuevas investigaciones para comprender el papel que juega la nueva métrica en el estudio de redes reales y en la caracterización de sus estructuras.

Finalmente, atendiendo a los anteriores resultados, el estudio de [APPE17] revela dos características importantes de las redes del modelo de [APGP16]:

1. Las estructuras generadas por la dinámica críticamente auto-organizada pertenecen a la categoría DA y, por ende, sus rasgos de asortatividad generalmente son los propios de la mayoría de las redes reales que se han estudiado.³ A modo de ejemplo, en la Fig. 6.1 se representan los valores de

³A continuación se indican las redes reales del Apéndice A que se han identificado con un coeficiente de asortatividad de grado $r_k \leq 0$ y un coeficiente de asortatividad de vecindario (según el grado de dos-pasos) $r_{\tilde{k}} \geq 0$. Para ello, se especifica el dominio de las redes y el número identificador del conjunto de datos. Redes biológicas: 1-13. Redes ecológicas: 17, 19, y 21. Redes sociales: 30, 32, 33, 34, 37, y 38. Redes tecnológicas: 40, 41, 42, 44, 46, 47, 48, y 49.

la asortatividad de grado y de la asortatividad de dos-pasos de las redes generadas por el modelo de [APGP16], cuando $C = 3$. El 80.81% de las redes mostradas en la figura anterior pertenecen a la categoría DA.

FIG. 6.1: Asortatividad de grado, r_k , y asortatividad de dos-pasos, $r_{\tilde{k}}$, calculadas para las redes del modelo de [APGP16], empleando la metodología de [APPE17], cuando el sistema se halla en un régimen estacionario estadístico. Los datos se han obtenido al simular el sistema durante $t = 5000$ unidades de macro-tiempo, con $C = 3$.

Adicionalmente se han comparado las medidas de asortatividad anteriores (dadas por el coeficiente de correlación de Pearson) con las propias del método propuesto por Pastor-Satorras *et al.* [PSVV01]. En general, al estudiar las correlaciones de grado de los nodos del modelo de [APGP16], los datos indican que los nodos de grado próximo a uno están enlazados (en media) a nodos de mayor grado, mientras que los nodos de grado elevado están conectados (en media) a nodos de elevado grado. Por tanto, existe una tendencia disasortativa según el grado, cuando $k_i \lesssim 2$; y una mezcla asortativa según el grado, cuando $k_i \gtrsim 4$ (véase, a modo de ejemplo, la Fig. 6.2a). Todo ello es consecuencia de la condición de estabilidad de [APGP16] (Ec. 3.1) y el proceso de generación de la red ahí descrito. La primera impide la aparición de nodos de topologías similares a los grafos de tipo estrella. El segundo permite añadir al azar nodos de grado uno a cualquier vértice presente en la red, incluidos los nodos de mayor grado. La presencia simultánea de estos comportamientos antagónicos provoca la aparición de coeficientes de asortatividad “global” (según el grado) nulos, estimados a través del coeficiente de Pearson para la correlación grado-grado, r_k .

Por su parte, el estudio de las correlaciones según el grado de dos-pasos, en general, muestra que (en media) existe una mezcla asortativa según $\tilde{k}_i$ (véase, a modo de ejemplo, la Fig. 6.2b). Ello causa la aparición de coeficientes de asortatividad “global” (según el grado de dos-pasos) positivos, estimados éstos a través del coeficiente de Pearson para la correlación grado de dos-pasos

- grado de dos-pasos, $r_{\tilde{k}}$.

FIG. 6.2: (a) Ejemplo de correlación de grado en las redes del modelo de [APGP16], empleando el método de [PSVV01]. (b) Ejemplo de correlación de grado local de dos-pasos, en las redes del modelo de [APGP16], empleando el método de [PSVV01]. Los datos se han calculado, a partir de una simulación con $C = 3.0$, durante $t = 5000$ unidades de macro-tiempo, empleando la red de tamaño máximo obtenida durante la simulación. En la red analizada, los coeficientes de correlación de Pearson de las asortatividades de grado y grado de dos-pasos son $r_k = -1.91 \cdot 10^{-4}$ (asortatividad de grado nula) y $r_{\tilde{k}} = 4.49 \cdot 10^{-1}$ (elevada asortatividad de grado de dos-pasos) respectivamente.

2. La presencia de nodos separadores en las redes de [APGP16] (véase la Fig. 6.3) explica parcialmente la asortatividad “global” según el grado de dos-pasos, $r_{\tilde{k}}$.

6.1.3 La sincronización de redes de osciladores de Kuramoto en un escenario de dinámicas adaptativas críticamente auto-organizadas

Como ya se adelantó en los capítulos 1 y 2, en este trabajo de tesis, la sincronización es uno de los rasgos esenciales que se proponen para la obtención de modelos adaptativos de poblaciones críticamente auto-organizadas. La sincronización es *per se* un fenómeno auto-organizado. En ausencia de una agente externo que organice las múltiples unidades que integran un sistema, puede emerger un comportamiento coordinado entre éstas, fruto de sus interacciones dinámicas. Asimismo, la sincronización se ha empleado en numerosas ocasiones para modelar las interacciones humanas [YY11; Né+00a; Né+00b; Str+05; SCT90; Mor+17].

Desde el punto de vista del modelado adaptativo, la retroalimentación entre las dinámicas de los nodos y la topología de la red puede depender del grado de sincronización entre los nodos y sus vecinos. Por ello, una posible opción de

FIG. 6.3: Instantánea de red una red del modelo de [APGP16], obtenida cuando $C = 3.0$, tras $t = 5000$ unidades de macro-tiempo. El grado del nodo tiene un tamaño codificado de $k = 1$ a 6. El recuadro muestra un detalle de la red. En éste se han destacado los nodos separadores (círculos de color rojo y línea discontinua).

modelado es considerar que los nodos de las redes son osciladores de fase [SCT90; AST95; Sch+94; YY11]. En esta tesis, se han estudiado las aplicaciones en las que los nodos son osciladores de Kuramoto, dada la sencillez y versatilidad de éstos.

En un contexto de dinámicas SOC, nuestras redes serán sistemas operando fuera del equilibrio. Si los nodos de las redes están integrados por osciladores, las perturbaciones del sistema harán que éstos, en general, se encuentren fuera del régimen estacionario. Adicionalmente, si la estabilidad de los enlaces depende de una restricción de la sincronización, la evolución de su grado de sincronización será lo que marque la frecuencia y el tamaño de las avalanchas de la dinámica SOC. Por esa razón, es vital contar con una estimación del tiempo de relajación del proceso de sincronización, así como conocer la influencia que sobre él ejercen los parámetros propios del modelo de Kuramoto.

La investigación que figura en [AP+17] aborda las anteriores cuestiones (véase el capítulo 5). No obstante, lo hace en un marco de trabajo más general que el propio de las redes monocapa: las redes multicapa. Concretamente, el formalismo fue adaptado a una red multiplex de dos capas, cada una de las cuales se

encuentra altamente sincronizada a nivel interno. Las razones para proceder así fueron las siguientes:

1. La evidencia de que las relaciones humanas se canalizan simultáneamente a través de diversos canales de comunicación [SLT10; Lot+16; GG+15; GG+12; Mat+15; WSP12; WWP14], nos hizo plantearnos estudiar la posible necesidad de incorporar varias capas a nuestro modelo de evolución de poblaciones humanas.
2. La generalidad del marco de análisis empleado permite extrapolar con facilidad los comportamientos descritos en este estudio al caso más simple de redes monocapa de osciladores de Kuramoto acoplados. De hecho, los resultados analíticos y numéricos de [AP+17] destacan y refuerzan la analogía entre las respuestas de los diferentes tipos de sistema, múnoplex [ADG07; GGT11; Gra+10; SJH08] y múnplex.
3. Además, el análisis desde la óptica múnplex posee la importante ventaja de allanar la generalización a redes en las que existan distintos tipos de enlaces, tal y como sucede en dichos sistemas. Un ejemplo de estos escenarios es el propio de las redes sociales, donde cada capa corresponde a una estructura social diferente (por ejemplo, Facebook y Twitter) y los usuarios juegan el papel de nodos.

Uno de los aspectos más novedosos y relevantes del análisis realizado en [AP+17] es el concepto de parámetro de orden de una capa (dado por la Ec. 2.55). Como ya se mostró, este desglose en capas del parámetro de orden permitió capturar detalles de la dinámica que quedan ocultos al analizar sólo el parámetro de orden global. Este aporte abre la posibilidad de adaptar la Ec. 2.55 para definir nuevos párametros de orden a una escala menor que la de [AP+17] (véase la Ec. 6.1), con los que estudiar, por ejemplo, las interacciones locales entre un nodo y sus vecinos (tal y como se hizo en [APGP16]). A su vez, éstos nuevos parámetros de orden pueden emplearse para establecer nuevas condiciones de estabilidad local, basadas en criterios de sincronización (véase el apartado 6.2.1).

Por otro lado, en [AP+17], es interesante la comparación de las escalas de tiempo del parámetro de orden global (τ_r) y de la sincronización entre capas (τ_Δ) con la escala temporal de todo el sistema (τ_M). Por medio de la teoría espectral y del modelo no lineal de Kuramoto, se muestran que τ_r y τ_Δ son inversamente proporcionales a la fuerza del acoplamiento entre las capas, λ^{12} . Asimismo, tal y como se mostró en la sección 5.4, la convergencia del parámetro de orden global es más rápida que la convergencia de la sincronización entre capas, y esta última generalmente es más rápida que el tiempo de relajación de todo el sistema, τ_M . Además, se comprobó que estas características generales no dependen de las

estructuras de las capas acopladas. Asimismo, se demostró que al aumentar el acoplamiento entre capas siempre se acorta la sincronización entre las mismas, así como el régimen transitorio del parámetro de orden global.

Los hallazgos analíticos describen bien los resultados obtenidos en las simulaciones computacionales. En el caso de redes múltiplex con un acoplamiento entre capas relativamente pequeño (en comparación con el acoplamiento dentro de cada capa, λ ; esto es, $\lambda^{12} \ll \lambda$), donde las frecuencias promedio en cada capa son similares (esto es, $\langle \Omega \rangle^1 \approx \langle \Omega \rangle^2$), y existen un alto grado de sincronización dentro de cada capa, en el instante inicial; los resultados analíticos y numéricos coinciden. Sin embargo, suponiendo frecuencias medias similares en cada capa, si el acoplamiento entre las capas es relativamente grande (es decir, $\lambda^{12} \gg \lambda$), e inicialmente existe una heterogeneidad de fase dentro de cada capa (es decir, hay al menos una capa que contiene dos o más osciladores cuyas fases son diferentes en $t = 0$), los resultados numéricos exhiben desviaciones del decaimiento exponencial previsto por la teoría. No obstante, los cambios principales en el parámetro de orden global y en la sincronización entre capas se ajustan bastante bien al enfoque analítico propuesto. La escala de tiempo de estas discrepancias, τ_D , es inversamente proporcional al doble del menor autovalor distinto de cero de la matriz supra-laplaciana del sistema, Λ_2 . Al igual que sucede en trabajos anteriores [Gó+13; SR+13], esta dependencia de Λ_2 implica que las desviaciones de los resultados analíticos están determinadas por las características topológicas de las capas involucradas, así como por los valores del acoplamiento dentro de las capas y entre las capas, λ y λ^{12} , respectivamente.

Cuando las frecuencias promedio de cada capa son diferentes (es decir, $\langle \Omega \rangle^{12} = \langle \Omega \rangle^1 - \langle \Omega \rangle^2 \neq 0$), los resultados de las simulaciones se ajustan bien a los hallazgos analíticos. Si $\lambda^{12} \geq |\langle \Omega \rangle^{12}|$, los valores asintóticos del parámetro de orden global y de la sincronización entre las capas convergen a un valor no nulo. Si $\lambda^{12} \leq |\langle \Omega \rangle^{12}|$, se obtiene un comportamiento periódico. Las discrepancias de nuestra descripción analítica no aparecen, a menos que los valores asintóticos del parámetro de orden global y de la sincronización entre capas estén cerca de cero (es decir, $\langle \Omega \rangle^{12} \approx 0$).

Al igual que en [ADGPV06b; ADGPV06a], los anteriores hallazgos sugieren, en primer lugar, que la sincronización de una “parte” (o subgrafo) de la red es tanto más rápida cuanto más local sea ésta (al compararse su escala de tiempos con la propia del sistema completo). Asimismo, los resultados muestran que un aumento de la fuerza del acoplamiento entre las distintas “partes” que integran el sistema acelera la sincronización entre ellas. Estas características son válidas en aquellas aplicaciones en las que las “partes” analizadas son un nodo y sus primeros vecinos (véase la Sec. 6.3 para acceder a un ejemplo).

Finalmente, se aclara que es posible aplicar los razonamientos anteriores (obtenidos para redes con una estructura estática) al análisis del régimen transitorio de las redes adaptativas de osciladores de Kuramoto, siempre y cuando la topología de estas últimas permanezca fija durante la sincronización de los osciladores. A modo de ejemplo, en el apartado 6.2.2, se presenta una aplicación en la que, por un lado, se han adaptado las principales características de [APGP16] y, por otro, los enlaces permanecen fijos, durante la sincronización de los osciladores. Como puede observarse en el apartado 6.2.2, bajo ciertas condiciones, estos modelos permiten generar redes adaptativas SOC, con estructuras similares a las interacciones socioeconómicas de las poblaciones humanas.

6.2 Descripción integrada: Ejemplo de aplicación de los resultados de las publicaciones al desarrollo de modelos de población

A partir de los resultados de [APGP16; APPE17; AP+17], en los apartados precedentes, se han presentado y analizado varios elementos básicos con los que desarrollar modelos de redes críticamente auto-organizadas, aplicables al estudio de modelos de población: la restricción de las diferencias entre un nodo y sus vecinos, el modelado adaptativo y la sincronización. En este apartado, para ilustrar la versatilidad de la anterior propuesta, a modo de ejemplo, se muestra una aplicación de los anteriores resultados, con la que es posible definir modelos de redes adaptativas críticamente auto-organizadas, compuestos por osciladores de Kuramoto, capaz de generar estructuras similares a las propias de las interacciones socioeconómicas, presentes en las poblaciones humanas. Para justificar este logro, en la Sec. 6.3, se incluye un estudio numérico del sistema. A continuación se detallan los aspectos generales del ejemplo propuesto.

Según se señaló en el apartado 2.3.2, al abordar el modelo de Kuramoto en redes complejas, existen diversas maneras de definir la dinámica de las unidades, en función de cómo se defina la fuerza del acoplamiento entre los osciladores. En línea con la elección hecha en [AP+17], en el ejemplo que se propone, la interacción entre los osciladores se produce a través de una fuerza de acoplamiento constante, sin ningún factor de normalización adicional. Como ya se mencionó en el apartado 2.3.2, esta elección parece ser más apropiada cuando se compara la sincronización de diferentes redes [Are+08; Rod+16]. En el caso que nos ocupa, se va a comparar la sincronización de diferentes “partes” de las redes, cada una de las cuales cuenta, a priori, con diferentes cantidades de nodos y patrones de conexión disímiles (véase la 6.2.1). De ahí la elección hecha. Consecuencia de lo

anterior, en la aplicación propuesta, la dinámica de cada oscilador de Kuramoto, x_n , vendrá dada por la Ec. 2.37:

$$\dot{\theta}_n = \Omega_n + \lambda \sum_{m=1}^N a_{ij} \sin(\theta_m - \theta_n),$$

donde N es la cantidad de nodos del grafo. Nótese que, como primera aproximación, en este estudio se trabaja con una red monoplex simple. Sin embargo, atendiendo al formalismo de [AP+17], la generalización a varias capas (dada por la Ec. 5.1) es sencilla.

Por otro lado, en este ejemplo, a diferencia de lo que sucedía en [APGP16], se supone una población fija de N osciladores. Los cambios en la topología se producen por la adición y eliminación de enlaces, a lo largo del tiempo, según se describe en el apartado 6.2.2. Los enlaces, por tanto, jugarán el papel de la “energía” que se carga y disipa en el sistema. La extensión a modelos en los que la cantidad de osciladores N (esto es, ecuaciones 2.37) se incrementa (monótonicamente) con el tiempo es simple. La única dificultad que plantea ese cambio es el incremento del tiempo de cálculo (debido al número creciente de ecuaciones diferenciales que hay que resolver, conforme avanza el tiempo).

En tal tesitura, un aspecto que conviene destacar es que la introducción de nuevos enlaces se efectúa preferencialmente, al igual que hicieron [Wan+16] en su modelo de osciladores (mapas caóticos acoplados) críticamente auto-organizados. Además de ser una opción de modelado típica (desde que Barabási y Albert la introdujesen en [BA99]), existen evidencias de que la vinculación preferencial impulsa el crecimiento de algunos sistemas reales [JNB03], incluidas, por ejemplo, las redes socioeconómicas [Kon+14].

A continuación, en el apartado 6.2.1, se expone la condición de estabilidad de los nodos. El mecanismo de construcción de la red se describe en el apartado 6.2.2.

6.2.1 Ejemplo de condición de estabilidad

Tal y como se adelantó en el apartado 6.1.3, a partir de la definición del parámetro de orden global r dada por Kuramoto para un sistema S con N osciladores de Kuramoto (véase la Ec. 2.27) [Kur75; Kur84], se establece el siguiente “parámetro de orden local”, entorno al nodo n , r_n :

$$r(t)e^{i\psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{x_n \in S} e^{i\theta_n(t)} \rightarrow r_n(t)e^{i\psi_n(t)} = \frac{1}{k_n + 1} \left(e^{i\theta_n(t)} + \sum_{x_m \in N_n} e^{i\theta_m(t)} \right), \quad (6.1)$$

donde N_n representa el conjunto de los k_n primeros vecinos del nodo x_n (esto es, $\forall x_m \in N_n : a_{nm} \neq 0$). Cuando $r_n \approx 1$, el oscilador x_n y sus vecinos directos muestran una sincronización completa. En cambio, cuando $r_n \approx 0$, el oscilador x_n y sus vecinos directos muestran un comportamiento asíncrono. Por su parte, el parámetro $\psi_n(t)$ encarna la fase media del nodo x_n y sus k_n primeros vecinos. En caso de que un nodo esté aislado ($k_n = 0$, $N_n = \emptyset$), $r_n = 1$ y $\psi_n = \theta_n$. Nótese que la definición de parámetro de orden local propuesta (Ec. 6.1) difiere de otras propuestas con idéntico nombre, aparecidas en la literatura [AG+12].

Atendiendo a la definición de r_n (Ec. 6.1), se establece la siguiente condición de estabilidad: Un enlace $e(i, j)$ de la red es estable, si y sólo se cumple:

$$|r_i(t) - r_j(t)| \leq U, \quad (6.2)$$

siendo i y j los extremos del enlace e , y $U \in [0, 1]$ un valor constante. Dado que $r_n \in [0, 1]$, los enlaces sólo serán estables si conectan dos regiones del sistema con parámetros de orden locales similares, siendo la constante U directamente proporcional a la diferencia que se admite entre ambos entornos. Nótese que en [APGP16] las diferencias entre un nodo y sus primeros vecinos también están acotadas (Ec 3.1), si bien ahí la propiedad examinada es el grado del nodo, no su parámetro de orden local.

6.2.2 Ejemplo de proceso de construcción de la red

Atendiendo a la condición de estabilidad presentada en el apartado anterior (Ec. 6.2), se establece el siguiente algoritmo para generar la red:

1. En $t = 0$, se crea un grafo con un N osciladores desconectados.⁴ A cada unidad x_n se le asigna una fase inicial $\theta_n(0)$, escogida de una distribución uniforme $\mathcal{U}(-\delta\theta, \delta\theta)$. Asimismo, se le proporciona una frecuencia Ω_n , dada por:

$$\Omega_n(t) = \frac{\omega_0}{k_n(t) + 1} \quad (6.3)$$

donde $\omega_0 \geq 0$ es una cantidad constante y $k_n(t)$ es el grado del nodo x_n , en el instante de macro-tiempo t . Como $k_n = 0$ en $t = 0$, $\Omega_n(0) = \omega_0$. Con esta elección de $\Omega_n(t)$, se modela un escenario simplificado en que cuanto más “sociable” es una persona (esto es, cuantos más nexos tiene con otros agentes), más fácilmente alcanza acuerdos con sus interlocutores.

⁴Se han realizado pruebas en las que inicialmente los nodos se enlazaban al azar. Los datos muestran ello no afecta a los resultados que se van a presentar. Únicamente se observa un proceso de relajación de corta duración.

2. En cada instante de *macro-tiempo* t , se selecciona aleatoriamente un nodo de la red y se le añaden m_{BA} enlaces de forma preferencial a m_{BA} nodos a los que no estuviera previamente conectado.
3. Introducidos los nuevos enlaces en el sistema, se actualizan las frecuencias Ω_n de los osciladores y se integra numéricamente el sistema de ecuaciones dado por la Ec. 2.37, durante un tiempo fijo T_g .
4. Tras la integración, se evalúa la estabilidad de todos los enlaces presentes en el grafo. Un enlace se cataloga como *estable* cuando satisface la condición de estabilidad dada por $|r_i(t) - r_j(t)| \leq U$ (Ec. 6.2). En caso contrario, el enlace se clasifica como *inestable*. Si hay enlaces inestables, se eliminan todos a la vez. Esta acción se denomina “proceso de rotura”. Por su parte, cada enlace eliminado se designa como *rotura*. Como las roturas pueden inducir nuevas inestabilidades, tras cada “proceso de rotura”, iterativamente se evalúa la estabilidad de todos los enlaces presentes y se suprimen los inestables, hasta que todas las conexiones de la red sean estables.

Se denomina *micro-tiempo* a la escala temporal en la que acontecen los “procesos de rotura”. Nótese que varias roturas pueden ocurrir simultáneamente en el mismo instante de micro-tiempo, a diferencia de lo que sucedía en el modelo del capítulo 3.

5. No se añaden nuevos enlaces hasta que todas las conexiones de la red son estables. La adición de un nuevos enlaces marca el inicio del siguiente instante de macro-tiempo ($t \rightarrow t + 1$).

Dado que el número de osciladores N permanece constante y la red es simple, la cantidad máxima de roturas que pueden producirse en una unidad de macro-tiempo es $N(N - 1)/2$.

En la Fig. 6.4, se muestra la evolución de una red entre dos instantes de macro-tiempo consecutivos. Tras iniciarse el instante de tiempo t (Fig. 6.4a), se selecciona un nodo al azar, x_p ,⁵ y se le añaden preferencialmente $m_{BA} = 3$ nuevos enlaces (Fig. 6.4b). Después de la integración de la Ec. 2.37, aparecen 37 enlaces inestables (Fig. 6.4c). Al finalizar el proceso de relajación, tras 2 unidades de micro-tiempo (o 2 “procesos de rotura”), la red ha sufrido 46 roturas en total (Fig. 6.4d). En color rojo se han marcado los dos nodos que ha perdido la componente gigante, como consecuencia de las roturas acaecidas.

Atendiendo al mecanismo de construcción de la red descrito, es claro que la forma funcional de la frecuencia Ω_n refuerza la retroalimentación entre la topología y la dinámica de los nodos. Atendiendo a las Ecs. 2.37 y 6.3, cuando un nodo

⁵En la Fig. 6.4b, se ha seleccionado un nodo x_p que casualmente está aislado. Recuérdese que x_p se selecciona aleatoriamente entre los N que componen la red.

FIG. 6.4: Evolución de una red con $m = 274$ enlaces y 63 nodos en la componente gigante inicialmente, durante una unidad de macro-tiempo, cuando los parámetros del sistema son $N = 100$, $T_g = 3$, $\lambda = 1$, $\omega_0 = 20$, $\delta\theta = \pi$ y $U = 0.05$. Los enlaces estables (inestables) se muestran en color verde (rojo). Los nodos que pertenecen a la componente gigante se han sombreado en color amarillo. Los nodos sin vecinos ($k_n = 0$) no poseen sombreado. (a) Inicio del instante de tiempo t . (b) Adición de $m_{BA} = 3$ nuevos enlaces. (c) Resultado, tras la integración de Ec. 2.37. (d) Resultado del proceso de relajación: 46 roturas y 2 escisiones (nodos de color rojo), durante dos unidades de micro-tiempo.

gana enlaces, su frecuencia disminuye, lo cual hace que el oscilador experimente con mayor intensidad su acoplamiento con su vecindario y se vuelva más fácil de sincronizar. Por contra, cuando un nodo pierde enlaces, su valor de Ω_n aumenta y el oscilador se torna más difícil de coordinar. En tal tesitura, la frecuencia de los osciladores Ω_n actúa como un mecanismo que inyecta una “energía” potencialmente inestabilizadora (aunque ésta no sea en forma de conexiones), en los nodos que experimentan pérdidas de enlaces. Conviene destacar, además, que los efectos de esta adición de energía no induce la aparición de nuevas roturas (en los enlaces que continúan incidiendo en un nodo), dentro del mismo instante

de macro-tiempo. El cambio de Ω_n sólo se hace patente durante el proceso de integración del siguiente instante de macro-tiempo.

Por su parte, nótese que el valor de la constante ω_0 regula la cantidad de energía (o inestabilidad) que se aporta, durante las roturas de enlace. Por ejemplo, cuando $\omega_0 = 0$, no hay fuentes ni sumideros de fase θ_n en la red, $\Omega_n = 0$ (véase la Ec. 2.37), y, como consecuencia, el sistema evoluciona hacia un estado en el que todos los nodos tienen la misma fase y la red es un grafo completo (incluso en el caso extremo de que $U = 0$). En cambio, como se muestra en la Sec. 6.3, los valores muy elevados de ω_0 también tornan prácticamente insensible al sistema frente a los cambios de U , limitando en extremo la cantidad de enlaces que admite el sistema (véanse las Figs. 6.11 y 6.12).

Finalmente, nótese que este proceso de construcción de la red posee los rasgos que ya se mencionaron en el apartado 6.1.1:

1. La red es un sistema abierto que se mantiene fuera del equilibrio, a través de un flujo constante de energía (en este caso, m_{BA} enlaces) y un mecanismo de inyección de energía (asociado a la frecuencia de los osciladores Ω_n).
2. La estabilidad de los nodos (dada por la Ec. 6.2) depende de sus características locales (k_n , θ_n y Ω_n) y también de las de su vecindario (Ec. 2.37). Asimismo, la dinámica de la red y la topología también están acopladas a través de Ω_n .
3. La estabilidad de los enlaces depende de que las diferencias entre los parámetros de orden local de sus extremos sean menores que un cierto umbral, U (según la Ec. 6.2). Recuérdese que en el modelo de [APGP16] las diferencias admisibles (en este caso, en el grado) entre un nodo y su vecindario también estaban acotadas (Ec. 3.1).

6.3 Validación numérica de la aplicación propuesta

En esta sección del trabajo se presentan y analizan los resultados de las simulaciones computacionales de la aplicación descrita en 6.2. En primer lugar, se hace una caracterización de su dinámica, en aras de hallar un comportamiento críticamente auto-organizado. A tales efectos, en el apartado 6.3.1, se sintonizan los parámetros del sistema y se estudia su compartamiento, variando el tamaño del sistema. Después, en el apartado 6.3.2, se discute brevemente cuán robusta es la dinámica anterior frente a posibles cambios en la configuración del sistema. Finalmente, en el apartado 6.3.3, se investiga el parecido “topológico” entre las redes generadas por la aplicación y las redes reales que figuran en los Apéndices

A y B, y se discuten las posibilidades de clasificar las redes sintéticas dentro del dominio socioeconómico.

6.3.1 Estudio de la dinámica de una sintonización particular del modelo

En este apartado, se analiza la dinámica del sistema cuando sus parámetros se ajustan del siguiente modo: $m_{BA} = 3$, $T_g = 3$, $\lambda = 1$, $\omega_0 = 20$, $\delta\theta = \pi$ y $U = 0.05$. Los valores propuestos se han obtenido a partir de un estudio exploratorio (previo) del espacio de parámetros. Para evaluar la aparición de un comportamiento críticamente auto-organizado, se va a investigar -lo que aquí se ha dado en llamar- el *tamaño de avalancha*, s : la cantidad de roturas de enlace que se produce entre dos instantes de macro-tiempo consecutivos.

En la Fig. 6.5a se muestra la evolución macro-temporal de la cantidad de enlaces del sistema m , para dos tamaños del sistema, $N = 100, 250$. Como puede observarse, en ambos casos aparecen fluctuaciones, fruto de un aumento lento de la cantidad de enlaces (debido a la adición de m_{BA} enlaces preferenciales por unidad macro-tiempo) y de unas súbitas relajaciones (asociadas a las rupturas de las uniones inestables, en la escala de micro-tiempos). Por su parte, en la Fig. 6.5b, se presentan la evolución (macro-temporal) del tamaño de las avalanchas de los ejemplos mostrados en la Fig. 6.5a. Como puede comprobarse, en ambas figuras, cuanto mayor es el tamaño del sistema N , mayor es la cantidad de enlaces que se acumula antes de un gran colapso, y mayor el tamaño de las avalanchas.

FIG. 6.5: (a) Evolución macro-temporal de la cantidad de enlaces del sistema m , cuando $N = 100$ (línea azul sólida) y $N = 250$ (línea roja discontinua). (b) Evolución macro-temporal del tamaño de las avalanchas s de los anteriores sistemas: $N = 100$ (línea azul sólida) y $N = 250$ (línea roja discontinua). Los datos se han obtenido al simular el sistema con $m_{BA} = 3$, $T_g = 3$, $\lambda = 1$, $\omega_0 = 20$, $\delta\theta = \pi$ y $U = 0.05$.

Es destacable que, en general, los colapsos reducen la cantidad de enlaces a unas pocas unidades, al igual que sucede en el modelo de [Wan+16]. Se considera que la causa de estas drásticas reducciones radica en la adición de enlaces de manera preferencial y en el reducido valor del umbral U utilizado. Los experimentos realizados con una adición de enlaces aleatoria muestran que la cantidad media de enlaces $\langle m \rangle$ fluctúa entorno a valores mucho mayores que cero, cuando $U \gg 0$ (a modo de ejemplo, véase la Fig. 6.6a, donde $\langle m \rangle \approx 66$).⁶ Si se emplean enlaces preferenciales y $U \gg 0$, el sistema evoluciona hacia un grafo completo (véase, por ejemplo, la Fig. 6.6b).

FIG. 6.6: Evolución macro-temporal de la cantidad de enlaces del sistema m . Los datos se han obtenido al simular el sistema con $m_{BA} = 3$, $T_g = 3$, $\lambda = 1$, $\omega_0 = 20$, y $\delta\theta = \pi$. (a) Los enlaces de manera aleatoria, $N = 100$, y $U = 0.5$. (b) Los enlaces de manera preferencial, $N = 50$, y $U = 0.5$.

Como se indicó en apartado 2.2.4, una alternativa para dictaminar la existencia de SOC es mostrar que existe un régimen estacionario estadístico. Después de que un sistema dinámico ha ingresado en el estado SOC, el número de avalanchas producidas dentro de un intervalo de tiempo fijo varía alrededor de un valor promedio bien definido [McA+16]. A tales efectos, se define $\zeta(t)$, la cantidad media de avalanchas ocurridas entre los instantes de macro-tiempo 0 y t . En la Fig. 6.7a se ve la evolución macro-temporal de $\zeta(t)$, para varios tamaños del sistema. Como puede observarse, cuando $t \gtrsim 10^3$, $\zeta(t)$ permanece constante. Por tanto, la aplicación muestra un régimen estacionario estadístico, en las condiciones estudiadas. Asimismo, es reseñable que el valor estacionario de ζ , ζ_∞ , es mayor, cuanto menor es N (es decir, en los sistemas pequeños las avalanchas son más frecuentes que en los grandes). Por último, se ha comprobado que $\zeta_\infty \sim N^{-0.31}$. En la Fig. 6.7b, se muestra colapso de los regímenes estacionarios de las curvas precedentes.

⁶En este trabajo no se han empleado estos modelos con adición de enlaces aleatoria, dado que las distribuciones de sus observables globales son exponenciales y no se ajustaban asintóticamente al escalado FSS (expuesto en el apartado 2.2.4).

FIG. 6.7: (a) Evolución de la cantidad promedio de avalanchas, ζ , para varios tamaños del sistema: $N = 50$ (círculos rojos), $N = 100$ (cuadrados naranjas), $N = 150$ (triángulos cian), $N = 250$ (rombos azules), $N = 500$ (hexágonos magenta), y $N = 750$ (cruces negras). Los datos se han obtenido al simular el sistema durante $t = 25000$ unidades de macro-tiempo, con $m_{BA} = 3$, $T_g = 3$, $\lambda = 1$, $\omega_0 = 20$, $\delta\theta = \pi$ y $U = 0.05$. (b) Colapso de los regímenes estacionarios de las anteriores curvas.

Otro rasgo característico de un sistema que exhibe dinámicas críticamente auto-organizadas es que sus observables globales siguen un escalado de tamaño finito (FSS), descrito por la Ec. 2.15 (según se señaló en el apartado 2.2.4). En la Fig. 6.8, se muestran las distribuciones de probabilidad acumuladas de los tamaños de avalancha s , $C_s(s|N)$, obtenidas para varios tamaños de sistema N , cuando éste se sintoniza con los parámetros previamente señalados. Como puede observarse, cuando $s \gtrsim 6$ aparece un comportamiento según una ley de potencia $C_s(s|N) \sim s^{1-\tau_s}$ (consecuencia del FSS de $P_s(s|N) \sim s^{-\tau_s}$), con un corte exponencial. Asimismo, se ve que cuanto mayor es el tamaño del sistema N , mayor es el alcance del comportamiento libre de escala. A partir de la distribución acumulada, se ha estimado el siguiente valor del exponente crítico de $P_s(s|N)$: $\tau_s = 1.51 \pm 0.01$. Así pues, cuando $s \gtrsim 6$, el comportamiento del sistema en el límite termodinámico ($N \rightarrow \infty$) viene dado por la guía visual con pendiente $\gamma = \tau_s - 1 = 0.51$ (línea discontinua), que se ha añadido a la Fig. 6.8, atendiendo a las relaciones entre $P_s(s|N)$ y $C_s(s|N)$.

Por otro lado, se ha obtenido el espectro multifractal de $P_s(s|N)$, $f_s(\alpha)$, para varios tamaños del sistema N , siguiendo la metodología del apartado 2.2.4. En la Fig. 6.9a se muestran sus resultados. Como puede observarse, hay un descenso continuo de $f_s(\alpha)$ para valores de α grandes. Ello resulta de la ausencia de un corte nítido en $C_s(s|L)$, ya que los valores de s pueden ser muy grandes (hasta $N(N-1)/2$), pese a ser exponencialmente poco probables. Es destacable el colapso que se observa de las curvas $f_s(\alpha)$. También es reseñable la buena descripción

FIG. 6.8: Distribución acumulada $C_s(s|N) = \sum_{k=s}^{s_{\max}} P_s(k|L)$ de los tamaños de avalancha s , calculada para varios tamaños del sistema: $N = 50$ (círculos rojos), $N = 100$ (cuadrados naranjas), $N = 150$ (triángulos cian), $N = 250$ (rombos azules), $N = 500$ (hexágonos magenta), y $N = 750$ (cruces negras). Los datos se han obtenido al simular el sistema durante $t = 25000$ unidades de macro-tiempo, con $m_{BA} = 3$, $T_g = 3$, $\lambda = 1$, $\omega_0 = 20$, $\delta\theta = \pi$ y $U = 0.05$. La línea discontinua es una guía visual con pendiente -0.5 .

que se obtiene de la evolución de $f_s(\alpha)$, utilizando el valor previo de $\tau_s = 1.51$, para valores pequeños de α (véase la guía visual (línea discontinua) que se ha añadido a la Fig. 6.9a).

FIG. 6.9: (a) Espectro multifractal $f_s(\alpha)$ de la distribución del tamaño de la avalancha P_s para las curvas de la Fig. 6.8. La línea discontinua es una guía visual con pendiente -0.5 . (b) Función de escalado $\sigma_s(q)$ del momento q de P_s , $\langle s^q \rangle \sim L^{\sigma(q)}$ (círculos rojos), obtenido del ajuste lineal de $\ln \langle s^q \rangle (L)$, cuando $N = 750$. La línea azul representa el ajuste de la región donde σ_s tiene dependencia lineal ($q \geq 10$).

Adicionalmente, se han calculado los exponentes de escala $\sigma_s(q)$, a partir de la distribución $P_s(s|N = 750)$. El resultado se muestra en la Fig. 6.9b. Atendiendo a la falta de linealidad de $f_s(\alpha)$ y $\sigma_s(q)$, se concluye que el ejemplo de aplicación

propuesto exhibe un escalado múltiple, en el rango de parámetros sintonizados. Finalmente, haciendo uso del valor de $\tau_s = 1.51$ y las ecuaciones 2.21 y 2.22 (pese a que $P_s(s|N)$ no cumple estrictamente el escalado FSS), se estimó un exponente crítico $D_s = 0.79 \pm 0.01$. Por tanto, cuando $6 \lesssim s \lesssim N^{0.79}$, el comportamiento del tamaño de las avalanchas sigue una distribución libre de escala. Esto confirma lo observado en la Fig. 6.8: cuanto mayor es el tamaño del sistema N , mayor es el alcance del tramo en ley de potencia.

Por último, se comprueba si el sistema exhibe invariancias de escala temporales en las correlaciones, típicas de una transición de fase. Siguiendo la metodología descrita en el apartado 2.2.6, se han calculado la distribución de probabilidad de las fluctuaciones de energía liberada de s δE . A modo de ejemplo, en la Fig. 6.10, se presenta la distribución $P_\tau(\delta E)$ de una serie temporal del tamaño de las avalanchas s , sujeta a varios cambios de la escala de tiempo τ . Como puede verse, la distribución es razonablemente invariante frente a dichos cambios (es decir, $P_\tau(\delta E) \approx P_{\tau'}(\delta E)$ para cualquier $\tau \neq \tau'$). Se puede concluir, por tanto, que la serie temporal de s es autosimilar [MG14].

FIG. 6.10: Distribuciones de probabilidad de las fluctuaciones de energía $P(\delta S_{\Delta t})$ cuando $\Delta t = 1$ (círculos rojos), $\Delta t = 10$ (cuadrados naranjas), $\Delta t = 100$ (triángulos cian), y $\Delta t = 1000$ (rombos azules). Los datos se han obtenido simulando el sistema durante $t = 25000$ unidades de macro-tiempo, con $N = 100$, $T_g = 3$, $\lambda = 1$, $\omega_0 = 20$, $\delta\theta = \pi$ y $U = 0.05$.

En virtud de los datos mostrados en este apartado, se valora que en el ejemplo de aplicación de modelos de población aparece un comportamiento críticamente auto-organizado, cuando se emplea la configuración de parámetros especificada al inicio de este estudio. En el próximo apartado, se analiza el efecto de variar la sintonización del sistema.

6.3.2 Cuasi-criticalidad auto-organizada: La influencia de los valores de los parámetros en la dinámica del modelo

En el apartado precedente, se caracterizó la dinámica del sistema para varios tamaños de éste, N , a través de simulaciones, en las que se mantuvieron constantes los parámetros $\omega_0 = 20$, $U = 0.05$, $m_{BA} = 3$, $T_g = 3$, $\lambda = 1$, y $\delta\theta = \pi$. Ahora, se va a estudiar cuán robusto es ese comportamiento frente a posibles cambios en los valores de ω_0 , U , m_{BA} , T_g , λ , y $\delta\theta$, mientras se mantiene fijo el tamaño del sistema ($N = 100$). El principal objetivo que se persigue con ello es averiguar si una modificación de la sintonización del modelo (cuando el tamaño del sistema es finito) produce la pérdida de la criticalidad previamente observada. En el caso de que ello suceda y se evidencie la dependencia de la dinámica SOC del ajuste del modelo, únicamente habrá que precisar que el sistema está cuasi-críticamente auto-organizado (SOqC) [BM09] (véase el apartado 1.1.2), sin menoscabo del interés de los resultados presentados en el apartado 6.3.⁷ Por otro lado, el estudio que se propone a continuación también servirá para caracterizar sucintamente el rol de los distintos parámetros del modelo y, según el caso, establecer conexiones con los resultados del compendio de artículos.

Para realizar el análisis, en primer lugar, se examinarán los efectos de variar ω_0 y U conjuntamente, mientras los demás parámetros se mantienen constantes. Se ha decidido proceder así por el relevante papel que ambos desempeñan en la evolución de la red: ω_0 limita la cantidad adicional de “energía” (desestabilizadora) que se inyecta al sistema con las roturas de enlace, mientras que U acota las diferencias toleradas en la condición de estabilidad (véanse las Ecs. 6.2 y 6.3). Posteriormente se revisarán los efectos de alterar m_{BA} , T_g , λ , y $\delta\theta$, en cada caso, variando únicamente el parámetro de estudio, mientras los restantes permanecen fijos.

En las Figs. 6.11 y 6.12, se presentan los resultados obtenidos al modificar de manera conjunta los valores de ω_0 y U . La evolución macro-temporal de la cantidad de enlaces m (véase la Fig. 6.11) pone de manifiesto que, cuando la inyección adicional de energía es baja ($\omega_0 = 5$), el sistema evoluciona hasta convertirse en un grafo completo, con todos valores de U aquí ensayados, sin importar cuán pequeño sean dichos umbrales (nótese que en un caso se ha empleado $U = 0.025$). De hecho, la distribución acumulada de los tamaños de avalancha s , $C_s(s|\omega_0 = 5)$, muestra que la práctica ausencia de avalanchas, para los valores de U testados (véanse los recuadros de la Fig. 6.12). Por otro lado, cuando la inyección de energía es muy elevada ($\omega_0 = 80$), tampoco se aprecian efectos significativos al modificar los valores de los umbrales, U . Como puede observarse, aunque se duplique la tolerancia U ($U = 0.05 \rightarrow U = 0.1$) o ésta se divida a la mitad ($U = 0.05 \rightarrow U = 0.025$),

⁷Por ejemplo, se ha comprobado que el emblemático modelo de SOC propuesto por Olami-Feder-Christensen [OFC92] es, en realidad, un sistema SOqC [BM09].

en todos los casos la cantidad máxima de enlaces que admite el sistema se mantiene entorno a $m_{\max} \approx 20$, tal y como muestran las Figs. 6.11 y 6.12. Un umbral en exceso reducido ($U = 0.025$) sólo eleva ligeramente la probabilidad de que sucedan eventos muy pequeños ($s \lesssim 4$). Finalmente, cuando la inyección adicional de energía es la utilizada en el apartado 6.3.1 ($\omega_0 = 20$), se observa que cuanto mayor es el umbral U , mayor es $m_{\max}$ y, por ende, mayor es también la probabilidad de que sucedan avalanchas de gran tamaño.

FIG. 6.11: Evolución macro-temporal de la cantidad de enlaces m , calculada para varias funciones $\Omega_n = Y/(k_n + 1)$: $\omega_0 = 5$ (círculos rojos), $\omega_0 = 20$ (cuadrados negros), y $\omega_0 = 80$ (triángulos azules). Los datos se han obtenido al simular el sistema durante $t = 10000$ unidades de macro-tiempo, con $N = 100$, $m_{BA} = 3$, $T_g = 3$, $\lambda = 1$, y $\delta\theta = \pi$. En los recuadros se muestran los detalles de las curvas anteriores en escala log-log, cuando $s \leq 10$. (a) $U = 0.025$. (b) $U = 0.050$. (c) $U = 0.100$.

FIG. 6.12: Distribución acumulada de los tamaños de avalancha s , $C_s(s | \omega_0)$, calculada para varias funciones $\Omega_n = Y/(k_n + 1)$: $\omega_0 = 5$ (línea continua roja), $\omega_0 = 20$ (línea discontinua negra), y $\omega_0 = 80$ (línea azul punteada). Los datos se han obtenido al simular el sistema durante $t = 10000$ unidades de macro-tiempo, con $N = 100$, $m_{BA} = 3$, $T_g = 3$, $\lambda = 1$, y $\delta\theta = \pi$. En los recuadros se muestran los detalles de las curvas anteriores en escala log-log, cuando $s \leq 10$. (a) $U = 0.025$. (b) $U = 0.050$. (c) $U = 0.100$.

En virtud del análisis precedente, es posible concluir que, dado un sistema de tamaño N , su comportamiento dependerá fuertemente de la cantidad de energía inyectada, ω_0 . Sin un ajuste adecuado de dicho parámetro, el sistema no muestra el comportamiento críticamente auto-organizado visto en el apartado 6.3.1. En tal tesitura, el análisis de ω_0 revela que el ejemplo de la aplicación presentado

exhibe una dinámica cuasi-críticamente auto-organizada (SOqC). Por otro lado, si el valor de ω_0 se sintoniza en un rango compatible con la dinámica SOqC, cuanto mayor es el umbral U , mayor es $m_{\max}$. De hecho, cuando $U = 1$ (esto es, cuando cualquier enlace es siempre estable), el sistema evolucionará hasta convertirse en un grafo completo.

En lo que atañe a la cantidad de enlaces que se introducen preferencialmente en cada instante de macro-tiempo, m_{BA} , los datos de las simulaciones (recogidos en la Fig. 6.13) revelan que una disminución su valor ($m_{BA} = 3 \rightarrow m_{BA} = 1$) causa la reducción de $m_{\max}$, la cantidad de enlaces máxima que admite el sistema. La razón radica en que, además de introducirse menos enlaces por unidad de macro-tiempo en el sistema, los nuevos enlaces incorporados apenas reducen la frecuencia Ω_n del oscilador (antes de la integración), lo cual dificulta su sincronización, en las condiciones de sintonización descritas en este apartado (así como en apartado 6.3.1). Por contra, como puede comprobarse en la Fig. 6.13, el aumento de m_{BA} ($m_{BA} = 3 \rightarrow m_{BA} = 4$), por un lado, reduce significativamente la probabilidad de eventos de tamaño $4 \lesssim s \lesssim 25$ y, por otro, eleva sustancialmente la probabilidad de las avalanchas medianas y grandes ($30 \lesssim s \lesssim 90$). Asimismo, en la Fig. 6.13a, se observa que, cuando $m_{BA} = 4$, las avalanchas no destruyen por completo la componente conexa. Tampoco se observan las abruptas caídas, típicas de los sistemas críticamente auto-organizados (nótese que el eje X de la Fig. 6.13a está en escala natural). Por todo ello, se considera que el valor de m_{BA} ejerce una fuerte influencia sobre la dinámica del sistema, cuando los restantes parámetros del mismo se mantienen constantes. De tal suerte que, para observar un comportamiento SOqC, también es necesario sintonizar este parámetro.

En lo que respecta al tiempo de integración, T_g , los resultados de las simulaciones muestran que la disminución de éste ($T_g = 3 \rightarrow T_g = 1$) acarrea un aumento de la probabilidad de los eventos más pequeños y la consiguiente reducción de la probabilidad de los grandes colapsos. Por ejemplo, en el recuadro de la Fig. 6.14, puede verse que la curva de $C_s(s|T_g = 1) > C_s(s|T_g = 3)$, cuando $s \lesssim 3$, mientras que $C_s(s|T_g = 3) > C_s(s|T_g = 1)$, cuando $s \gtrsim 4$. La merma de T_g , el tiempo de interacción entre un nodo y sus vecinos, limita la capacidad de éstos para coordinarse y, por extensión, también sus posibilidades de consolidar un enlace estable, con el que aumentar el tamaño de la componente gigante. En cambio, aumentar el valor de T_g ($T_g = 3 \rightarrow T_g = 6$) favorece la aparición de sistemas y avalanchas de mayor tamaño, en detrimento de las pequeñas. Por ejemplo, cuando $s \gtrsim 32$, $C_s(s|T_g = 6) > C_s(s|T_g = 3)$.

Con relación a la fuerza del acoplamiento entre los osciladores, λ , los resultados de las simulaciones (presentados en la Fig. 6.15) ponen de manifiesto que una reducción del valor λ ($\lambda = 1 \rightarrow \lambda = 0.5$) disminuye $m_{\max}$, la cantidad de enlaces máxima que admite el sistema. No sorprende este comportamiento, ya que, como

FIG. 6.13: Resultados obtenidos para varias cantidades de conexiones añadidas al inicio de cada instante t , m_{BA} , al simular el sistema durante $t = 20000$ unidades de macro-tiempo, con $N = 100$, $T_g = 3$, $\lambda = 1$, $\omega_0 = 20$, $\delta\theta = \pi$ y $U = 0.05$. En el recuadro se muestra un detalle de las curvas anteriores en escala log-log, cuando $s \leq 10$. (a) Evolución macro-temporal de la cantidad de enlaces m : $m_{BA} = 1$ (línea roja sólida), $m_{BA} = 3$ (línea negra discontinua), y $m_{BA} = 4$ (línea azul punteada) (b) Distribución acumulada de los tamaños de avalancha s , $C_s(s|m_{BA})$: $m_{BA} = 1$ (círculos rojos), $m_{BA} = 3$ (cuadrados negros), y $m_{BA} = 4$ (triángulos azules).

FIG. 6.14: Distribución acumulada de los tamaños de avalancha s , $C_s(s|T_g)$, calculada para varios tiempos de integración: $T_g = 1$ (círculos rojos), $T_g = 3$ (cuadrados negros), y $T_g = 6$ (triángulos azules). Los datos se han obtenido al simular el sistema durante $t = 20000$ unidades de macro-tiempo, con $N = 100$, $m_{BA} = 3$, $\lambda = 1$, $\omega_0 = 20$, $\delta\theta = \pi$ y $U = 0.05$. En el recuadro se muestra un detalle de las curvas anteriores en escala log-log, cuando $s \leq 10$.

se apuntó en el apartado 6.1.3, cuanto menor sea λ , menores serán las interacciones entre una unidad y sus vecinos. Ello reduce la capacidad de los osciladores para sincronizarse, quedando así más limitadas sus posibilidades de estabilizar los enlaces presentes y aumentar el tamaño de la componente gigante. En cambio, como puede verse en la Fig. 6.15, el incremento de λ ($\lambda = 1 \rightarrow \lambda = 3$), reduce

sustancialmente la cantidad de avalanchas y sus tamaños. De hecho, en el ejemplo mostrado, al elevar λ , sólo aparece un evento pequeño ($s = 4$), durante todo el tiempo de la simulación, lo que acarrea que la red evolucione hacia un grafo completo. Por tanto, λ ejerce fuerte influencia sobre la dinámica del sistema, cuando los restantes parámetros del mismo se mantienen constantes. De este modo, para observar un comportamiento SOqC, es imprescindible un ajuste de λ .

FIG. 6.15: Resultados obtenidos para varias fuerzas de acoplamiento entre osciladores, λ , al simular el sistema durante $t = 20000$ unidades de macro-tiempo, con $N = 100$, $m_{BA} = 3$, $T_g = 3$, $\omega_0 = 20$, $\delta\theta = \pi$ y $\mathcal{U} = 0.05$. En el recuadro se muestra un detalle de las curvas anteriores en escala log-log, cuando $s \leq 10$. (a) Evolución macro-temporal de la cantidad de enlaces m : $\lambda = 0.5$ (línea roja sólida), $\lambda = 1$ (línea negra discontinua), y $\lambda = 3$ (línea azul punteada) (b) Distribución acumulada de los tamaños de avalancha s , $C_s(s|\lambda)$: $\lambda = 0.5$ (círculos rojos), $\lambda = 1$ (cuadrados negros), y $\lambda = 3$ (triángulos azules).

Finalmente, se ha analizado la influencia de la heterogeneidad de las fases iniciales de los osciladores, regulada por $\delta\theta$. Tal y como se mencionó en el apartado 6.2.2, $\theta_n(t = 0)$ se asignan aleatoriamente, a partir de una distribución uniforme $\mathcal{U}(-\delta\theta, \delta\theta)$. Por tanto, cuanto mayor sea el valor de $\delta\theta$, mayor será la heterogeneidad inicial de las fases de los osciladores. En la Fig. 6.16, se presenta la distribución acumulada de los tamaños de avalancha s , $C_s(s|\delta\theta)$, para varios valores de $\delta\theta$. Cuando la heterogeneidad inicial es máxima ($\delta\theta = \pi$), se observa una disminución de la probabilidad de las avalanchas de mayor tamaño. Sin embargo, en un rango de tamaños de avalancha grande ($s \lesssim 70$), las distribuciones de probabilidad acumuladas de la máxima y la mínima heterogeneidad de $\theta_n(t = 0)$ son muy similares ($C_s(s|\delta\theta = \pi) \approx C_s(s|\delta\theta = 0)$). Lo anterior, unido a la observación de que $C_s(s|\delta\theta = \pi) \approx C_s(s|\delta\theta = \pi/2)$, sugiere que, a diferencia de lo que sucede con otros parámetros, el valor de $\delta\theta$ ejerce una moderada influencia sobre la dinámica del sistema, cuando los restantes parámetros del mismo se mantienen

constantes.

FIG. 6.16: Distribución acumulada de los tamaños de avalancha s , $C_s(s|\delta\theta)$, calculada para diferentes condiciones iniciales de fase: $\delta\theta = 0$ (círculos rojos), $\delta\theta = \pi/2$ (cuadrados negros), y $\delta\theta = \pi$ (triángulos azules). Los datos se han obtenido al simular el sistema durante $t = 20000$ unidades de macro-tiempo, con $N = 100$, $m_{BA} = 3$, $T_g = 3$, $\lambda = 1$, $\omega_0 = 20$, y $U = 0.05$.

A la luz de los anteriores resultados, prácticamente todos los parámetros (salvo $\delta\theta$) ejercen una influencia significativa sobre la evolución del modelo. De hecho, es imprescindible un ajuste de los mismos para observar un comportamiento semejante a la criticalidad. Ello nos permite concluir que nuestro modelo es SOqC.

Detectada la presencia de un comportamiento cuasi-crítico, cuando el modelo se sintoniza en las condiciones del apartado 6.3.1, en siguiente apartado se van a caracterizar y clasificar las estructuras obtenidas en tales condiciones.

6.3.3 Comparación del modelo con redes reales

Tras la anterior caracterización de la dinámica del ejemplo descrito en la Sec. 6.2, en este apartado, se comparan las redes que éste genera con las redes reales que figuran en los Apéndices A y B. El objetivo es estimar el dominio al que podrían pertenecer las estructuras aparecidas, con objeto de valorar su posible uso para modelar sistemas socioeconómicos. Las categorías que se barajan son las siguientes: redes ecológicas, socioeconómicas (sociales y/o económicas), biológicas, tecnológicas, y redes de información.

La clasificación se va a realizar atendiendo a las siguientes propiedades descritas en la sección 2.1: la asortatividad de grado (r_k), la asortatividad de “dos-pasos” ($r_{\bar{k}}$), la longitud media de camino más corto (ℓ), la transitividad (C^Δ), el coeficiente de agrupamiento (C^{WS}), el coeficiente de “mundo pequeño” (S^Δ) y la modularidad (Q). Debido a que las redes del sistema, en general, no son redes conexas, algunas de las anteriores propiedades no están bien definidas. Por esa razón, los cálculos

de las propiedades se efectuarán sobre la componente gigante del grafo estudiado (véase el apartado 2.1.1).

Para decidir a qué categoría podría pertenecer una cierta topología, se ha elaborado el árbol de decisión. Éste se ha obtenido utilizando los módulos “scikit-learn” y “pandas” de Python. El algoritmo de construcción del árbol se ha “entrenado” con las 49 redes reales de los Apéndices A y B: 14 redes ecológicas, 14 socioeconómicas (sociales y/o económicas), 10 biológicas, 10 tecnológicas, y 1 red de información. Asimismo, se ha hecho uso de todas la propiedades mencionadas anteriormente, asignándoles el mismo peso o importancia. El árbol de decisión resultante puede consultarse en el Apéndice D (la Fig. D.1 contiene el algoritmo). Atendiendo al resultado obtenido, se hacen los siguientes comentarios:

1. A la hora de clasificar las redes reales de la muestra, no son significativos los valores de la asortatividad de grado, el coeficiente de “mundo pequeño”, ni la modularidad. En cambio, la asortatividad de “dos-pasos” sí es un parámetro relevante para catalogar la topología, al igual que la longitud media de camino más corto, la transitividad y el coeficiente de agrupamiento.
2. El algoritmo muestra que algunas topologías pueden ser clasificadas en dos dominios diferentes. Por ejemplo, cuando $\ell \leq 2.405$, $-0.222 < r_{\bar{k}} \leq 0.166$, y $C^{WS} > 0.692$, la topología puede pertenecer a una red social o a una red ecológica con la misma probabilidad. Para deshacer esta ambigüedad sería necesario añadir nuevas propiedades al “entrenamiento” del algoritmo de construcción del árbol de decisión, o nuevas redes a la muestra.
3. Adicionalmente se ha comparado la precisión del árbol estimado con un árbol en el que no se han considerado los datos de la asortatividad de “dos-pasos” (véase la Sec. D.1 del Apéndice D). Los test señalan que el árbol que incluye la asortatividad de “dos-pasos” es más preciso que el obtenido al prescindir de ella. Por ejemplo, las predicciones hechas a partir del conjunto de datos de validación muestra que la precisión media del primer árbol es del 60 %, mientras que la del segundo es del 44 %.

Obtenida la herramienta para clasificar topologías, a continuación se muestran los hallazgos realizados cuando ésta se aplica a las redes proporcionadas por el modelo auto-organizado, operando con la configuración (cuasi-crítica) descrita en el apartado 6.3.1: $m_{BA} = 3$, $T_g = 3$, $\lambda = 1$, $\omega_0 = 20$, $\delta\theta = \pi$ y $U = 0.05$. Para visualizar los resultados, se ha utilizado el siguiente método:

1. Si existe una probabilidad p_S no nula de que la red pertenezca al dominio socioeconómico ($p_S > 0$), ésta se marca con un círculo rojo.

2. Si $p_s = 0$ y existe una probabilidad no nula de que la red pertenezca al dominio ecológico, se marca con un cuadrado verde.
3. Si la topología no pertenece a ninguna de las anteriores categorías, se marca con un triángulo negro.

En la Fig. 6.17, se muestra la evolución macro-temporal de la cantidad de nodos de la componente conexa n_g y las posibles clasificaciones de la topología, obtenidas al simular el sistema con $N = 50$ y $N = 100$, respectivamente. Como puede observarse, en general, cuando $n_g \lesssim 20$, las topologías pueden clasificarse en la categoría socioeconómica. En cambio, cuando $n_g \gtrsim 20$, la estructura se asemeja a la propia de las redes ecológicas de la muestra empleada. Es destacable que casi todas las redes pertenecen a alguna de las categorías anteriores. De hecho, en los ejemplos mostrados sólo aparecen dos configuraciones de otros dominios (véase la Fig. 6.17b, cuando $t \approx 105$). Los resultados anteriores sugieren que la proporción de redes clasificables como socioeconómicas será mayor, cuanto menor sea la dimensión del sistema, ya que menor será también el tamaño máximo que alcance la componente gigante.

FIG. 6.17: Evolución macro-temporal de la cantidad de nodos de la componente conexa n_g (línea negra), cuando $m_{BA} = 3$, $T_g = 3$, $\lambda = 1$, $\omega_0 = 20$, $\delta\theta = \pi$ y $U = 0.05$. Cuando la topología se puede clasificar como una red “social o económica” se marca con un cuadrado rojo. Con cuadrados verdes se marcan las “redes ecológicas” y con “triángulos negros” los restantes tipos de redes. (a) $N = 50$. (b) $N = 100$.

Por otro lado, el análisis de los resultados obtenidos muestra que la transición de red -clasificable como- socioeconómica a red -catalogable como- ecológica (cuando ℓ es pequeña), se produce por un cambio en la asortatividad de “dos-pasos”, $r_{\bar{k}}$. Cuando $r_{\bar{k}} \leq -0.222$, las redes son socioeconómicas (específicamente, son económicas). En cambio, cuando $-0.222 < r_{\bar{k}} \lesssim 0.166$, la probabilidad de que

sean ecológicas es muy elevada. Dado que la muestra empleada sólo contiene una red económica, son necesarios nuevos estudios con una muestra de redes reales ampliada (y, en especial, con una mayor cantidad de redes económicas), con objeto de validar las observaciones hechas aquí. En cualquier caso, es interesante destacar el inesperado protagonismo que juega la magnitud r_k en el estudio presentado en este apartado. Por eso mismo y dado que aún no es clara la información estructural que proporciona este nuevo tipo de asortatividad, se retoma aquí lo ya indicado en [APPE17]: Se requieren investigaciones adicionales sobre esta métrica, con objeto de aclarar tanto su significado como su posible aplicación al estudio de redes reales.

6.3.4 Comentarios sobre el ejemplo de aplicación presentado

En esta Sec. 6.3, se ha evaluado numéricamente la aplicación descrita en la Sec. 6.2, obtenida a partir de los resultados de la colección de publicaciones de esta tesis. A continuación se resumen los principales hallazgos realizados

El análisis numérico de las series temporales del tamaño de las avalanchas, s , obtenido para varios tamaños del sistema N , muestran que las redes exhiben un comportamiento aparentemente crítico y un escalado múltiple, cuando los parámetros del ejemplo se sintonizan del siguiente modo: $\omega_0 = 20$, $U = 0.05$, $m_{BA} = 3$, $T_g = 3$, $\lambda = 1$, y $\delta\theta = \pi$. Empleando la simulación computacional, se ha verificado que, en las condiciones anteriores, el sistema alcanza un régimen estacionario estadístico. Asimismo, el cálculo del espectro multifractal $f_s(\alpha)$ y de los exponentes de escala $\sigma_s(q)$ ha evidenciado que existe un multiescalado en el sistema. Además, ha permitido verificar los valores ajustados para exponentes críticos de s : $\tau_s = 1.51 \pm 0.01$ y $D_s = 0.79 \pm 0.01$. Finalmente, el análisis de las fluctuaciones de energía de las avalanchas $\delta S_{\Delta t}$ ha revelado que existe invarianza de escala en las correlaciones temporales.

Verificada la presencia de un comportamiento aparentemente crítico, se ha comprobado que éste depende sustancialmente del ajuste fino de los valores de ω_0 , U , m_{BA} , T_g , y λ . Si dicho ajuste no se realiza, se produce la pérdida de criticidad y, o bien el sistema no admite muchos enlaces, o bien evoluciona hasta convertirse en un grafo completo. Por tanto, la aplicación descrita en este capítulo -en sentido estricto- no está críticamente auto-organizado (SOC), sino cuasi-críticamente auto-organizado (SOqC).

Por otro lado, en esta sección también se ha estudiado el parecido topológico entre las redes generadas sintéticamente y las redes socioeconómicas reales. Para ello, se ha ajustado un árbol de decisión, a partir de las características estructurales de las redes reales de los Apéndices A y B. Los resultados numéricos obtenidos muestran que es posible clasificar las componentes gigantes de las redes de nuestra aplicación como redes socioeconómicas, cuando su tamaño es pequeño

($n_G \lesssim 20$). En cambio, cuando su tamaño aumenta, en general, el árbol de decisión las clasifica como redes ecológicas. La transición entre uno y otro dominio descansa, en general, en los valores que adopte $r_{\bar{k}}$ (especialmente cuando los valores de ℓ son pequeños). Lo cual refuerza el interés de la nueva métrica que se introdujo en [APPE17].

En virtud de los resultados obtenidos con la aplicación propuesta en este capítulo, y habida cuenta de que el objetivo general de este trabajo de tesis es estudiar los ingredientes fundamentales que permitan definir modelos de población críticamente auto-organizados, se considera que dicho objetivo ha sido alcanzado.

De todos modos, se recomiendan estudios adicionales con los que corroborar los hallazgos aquí presentados, especialmente en lo que a la clasificación de topologías se refiere. Como se ha indicado, la catalogación está fuertemente condicionada por el árbol de decisión construido. Considerando que éste se ha calibrado a partir de las redes reales y las propiedades mostradas en los Apéndices A y B, se sugiere estudiar el efecto de añadir nuevas propiedades al “entrenamiento” del algoritmo de construcción del árbol, y/o nuevas redes a muestra, para así validar los hallazgos hechos en esta investigación. Del mismo modo, podrían emplearse nuevas herramientas de clasificación, con objeto de ver su efecto en los resultados. Todas estas propuestas están más allá del alcance del estudio exploratorio aquí desarrollado.

Asimismo, el inesperado protagonismo de la asortatividad de dos-pasos, $r_{\bar{k}}$, al clasificar las topologías, también aconseja el desarrollo de nuevas investigaciones sobre esta métrica, con objeto de aclarar tanto su significado como su posible aplicación al estudio de redes reales.

Finalmente, se recuerda que el análisis presentado en este capítulo sólo prueba que, en unas condiciones de operación muy concretas, la aplicación mostrada, por un lado, exhibe una dinámica cuasi-críticamente auto-organizada y, por otro, genera topologías similares a las de los sistemas socioeconómicos (de la muestra empleada). A tales efectos, el estudio numérico presentado en este capítulo es suficiente para lograr los objetivos de esta tesis. Así todo, quedaría pendiente realizar una caracterización pormenorizada del comportamiento del ejemplo de aplicación propuesto (si bien, se considera que ello está más allá del alcance de esta tesis). Dado que esta aplicación permite el ajuste de 7 parámetros, se recomienda, por un lado, mantener fijas las condiciones de sincronización (por ejemplo, en los valores aquí empleados: $T_g = 3$, $\lambda = 1$, y $\delta\theta = \pi$), y, por otro, retringir los estudios futuros al análisis de los efectos de N , ω_0 , U , y m_{BA} . Tales parámetros tienen un impacto directo sobre el tamaño del sistema y sus procesos de carga y relajación. Podría reducirse la dimensionalidad del sistema, definiéndose nuevas magnitudes, a partir de N , ω_0 , U , y m_{BA} .

7 | Conclusiones generales

El objetivo general de esta tesis ha sido avanzar en el estudio de los ingredientes fundamentales que permiten definir modelos de población, vistos como sistemas complejos con una dinámica críticamente auto-organizada. Como base de estos modelos se ha considerado su representación como redes complejas adaptativas. Para las interacciones sociales se ha propuesto implementar osciladores de Kuramoto por ser los más usados para estudiar la sincronización de conjuntos de población.

En [APGP16], se ha propuesto y estudiado un modelo sencillo de red adaptativa que presenta una dinámica SOC, y puede servir de base para los modelos de población. Este modelo incorpora los ingredientes básicos de los sistemas SOC. Empleando una restricción local puramente topológica, denominada *condición de estabilidad*, aparecen correlaciones espaciales y temporales de largo alcance. Se han estudiado las estadísticas de los eventos desencadenados y otras propiedades estadísticas del sistema, y los resultados son comparables a los encontrados en otros modelos de SOC, como el modelo de Bak-Tang-Wiesenfeld (BTW) [BTW87; Hel+90] o el de Olami-Feder-Christensen (OFC) [Car+07].

La característica fundamental de la restricción topológica de los nodos es que ésta se formula a partir de una propiedad (local) promedio de sus vecinos. Este ingrediente parece muy importante a la hora de desencadenar una dinámica SOC. La imposición de esta restricción hace que aparezca un nuevo tipo de mezcla asortativa, la denominada *asortatividad de vecindario*, que indica que los nodos de la red tienden a estar conectados a *vecindarios* con propiedades promedio similares a las suyas. Esta propiedad también se puede encontrar en la mayoría de las redes reales. Sin embargo, no aparece en los modelos clásicos de generación de redes (como el de Erdős-Rényi o el de Barabási-Albert). Esta nueva propiedad debería aparecer en los modelos de población y la manera más sencilla de obtenerla es comparando una cierta propiedad del nodo con la propiedad promediada en el vecindario.

Con objeto de explorar analíticamente las características estructurales de las topologías con asortatividad de vecindario, en [APPE17] se propuso una versión

simplificada de dicha métrica: la *asortatividad de dos-pasos* (según el grado). Gracias a un estudio analítico, la nueva medida se expresó en función de los subgrafos de la red. Los resultados evidenciaron que la cantidad de fragmentos que contribuyen a esta nueva asortatividad es mucho mayor que la propia de la asortatividad tradicional (según grado). Por tanto, la nueva cantidad contiene más información estructural que la medida clásica. También se verificó que ambas métricas no están correlacionadas linealmente, estudiando el conjunto de 261000 grafos conexos con 9 nodos (sin etiquetar) y 49 redes reales de diferentes dominios (redes sociales, biológicas, ecológicas o tecnológicas, entre otros).

El estudio de las redes reales mostró que existen algunas características aparentemente universales en algunas clases de sistemas. Por ejemplo, todas las redes biológicas (reales) estudiadas son desasortativas según el grado, pero asortativas según el coeficiente de dos-pasos (DA).¹ Las implicaciones de esta observación para el estudio de los procesos biológicos que tienen lugar en tales redes iban más allá del alcance de este trabajo. De todos modos, habida cuenta de ese hallazgo, se retoma aquí una de las conclusiones de [APPE17]: Se necesitan más estudios para comprender tanto el significado de esta medida como su papel en el estudio de problemas del mundo real.

En lo que se refiere al elemento de sincronización de los modelos de población, en [APPE17], se estudiaron los tiempos de relajación del parámetro de orden global y la sincronización entre las capas de una red biplex (esto es, un múltiplex de dos capas), compuesta por osciladores de Kuramoto acoplados. Asimismo, se analizó analítica y computacionalmente la influencia que ejercen sobre ambos procesos los parámetros del modelo de sincronización.

Uno de los aspectos más novedosos y relevantes del análisis de [AP+17] fue el concepto de *parámetro de orden de una capa*. Como se señaló, este desglose en capas del parámetro de orden permitió capturar detalles de la dinámica que quedaban ocultos al analizar sólo el parámetro de orden global.

Los hallazgos hechos sugirieron, en primer lugar, que la sincronización de una “parte” (o subgrafo) de la red es tanto más rápida cuanto más local sea ésta (al compararse su escala de tiempos con la propia del sistema completo). Asimismo, se mostró que un aumento de la fuerza del acoplamiento entre las distintas “partes” que integran el sistema acelera la sincronización entre ellas.

En la aplicación de los modelos de población, se puede extender este concepto de *parámetro de orden local* para confeccionar restricciones de sincronización. Como se comentó anteriormente, un ingrediente fundamental para la generación de una dinámica SOC puede ser la definición de una condición de estabilidad en

¹De hecho, es reseñable que las redes DA son las más frecuentes en cualquiera de las categorías funcionales estudiadas. Su sobreabundancia se explica parcialmente por la presencia de *nodos separadores*, esto es, nodos de grado dos que conectan dos nodos de elevado grado.

la que se compare la propiedad de un nodo con la propiedad de su vecindario. En el ejemplo de aplicación propuesto sobre modelos de población, incluido en la discusión general, la propiedad local sería un parámetro de orden de sincronización local.

Atendiendo a los hallazgos anteriores, en primer lugar, se considera que el objetivo general de esta tesis se ha alcanzado. Adicionalmente, en la discusión general de esta tesis, se ha mostrado que es posible generar redes que, por un lado, exhiban dinámicas SOC (o SOqC) y, por otro, posean estructuras similares a las de las redes socioeconómicas, propias de las poblaciones reales.

Finalmente, la posibilidad de que las interacciones socioeconómicas y/o ecológicas reales puedan exhibir comportamientos SOC (o SOqC) invita a establecer las siguientes recomendaciones para el análisis de dichos sistemas:

1. Las interacciones deberían observarse durante largos periodos de tiempo, en lugar de emplear una o unas pocas “imágenes” estáticas de las mismas. Si el sistema es SOC, en general, el resultado de un acontecimiento depende de la historia de todo el conjunto, incluidos los pequeños eventos pasados.
2. Las dinámicas asociadas a los acontecimientos catastróficos deberían examinarse tomando en consideración que, si el sistema es SOC, los desastres son una consecuencia de las mismas dinámicas que producen los eventos cotidianos, no un producto de sucesos extraordinarios.
3. Debería estudiarse si los cambios en el sistema son discretos o continuos. Si el sistema es SOC, la mayor parte de los cambios del sistema estará asociada a eventos grades, pese a que haya mayor cantidad de acontecimientos pequeños.

8 | General conclusions

The main objective of this thesis was to study the basic ingredients to define population models that exhibit SOC dynamics, using the complex systems framework. Our models are based on adaptive networks. We propose modeling social interactions, by means of coupled Kuramoto oscillators.

In [APGP16], we have proposed an adaptive network toy model that shows SOC dynamics. It can be used to develop new population models. This model incorporates all the basic ingredients of SOC systems. A topological restriction, denoted as *stability condition*, makes appear SOC dynamics. Long spatial and temporal correlations have been found and we have shown that their features are comparable to those of two well-known SOC models: the Bak-Tang-Wiesenfeld (BTW) model and the Olami-Feder-Christensen (OFC) one.

The topological restriction of the nodes is based on an average (local) property of its neighbors. This ingredient seems very important to induce SOC dynamics. The topological restriction induces a new type of assortativity: the *neighborhood assortativity* (or assortativity by local degree). According to this new approach, the tendency of a node to be linked to other nodes depends on the mean value of the property of its neighbors.

Our findings indicated that the random networks (of the Erdős-Rényi model, E-R) and the scale free ones (of the Barabási-Albert model, B-A) show no assortative arrangements by local degree. However, the model of [APGP16] displays a positive neighborhood-assortative coefficient and so does most real networks. Considering that all prior models (E-R, B-A, and [APGP16]) are null by degree assortativity, the new assortative metric captures structural information that is not being registered by the traditional one. This new property should appear in the population models and the simplest way to obtain it is by comparing a certain property of the node with the average property of its neighborhood.

In order to unveil the structural characteristics of topologies with positive neighborhood assortativity, in [APPE17] a simplified version of this metric was proposed: the *two-step assortativity* (by degree). This new measure is expressed in terms of the subgraphs of the network. We have shown that the number of

fragments that contribute to this new assortative coefficient is larger than that of the traditional assortativity (by degree). This clearly indicates that the new quantity accounts for more structural information than the previous one. We have seen that both measures are not linearly correlated neither for all the connected graphs with 9 (unlabelled) nodes nor for real-world networks.

As we have seen, there are some apparently universal features of some classes of networks in relation to this quantity. For instance, all real-world biological networks studied here are degree disassortative but two-walks assortative (DA).¹ The implications of this observation for the study of the biological processes taking place on these networks is far beyond the scope of this work. Thus, according to this result, we conclude that further studies are needed to understand the structural meaning of this quantity and its role in the study of real-world problems.

Regarding the synchronization of population models, in [APPE17], we have studied the relaxation times of the global order parameter and the interlayer synchronization of coupled Kuramoto oscillators on multiplexes. The influence exerted on both processes by the synchronization parameters was also analyzed.

One of the most novel and relevant aspects of the analysis proposed in [AP+17] was the concept of *layer order parameter*. As noted, this layered breakdown of the order parameter allowed capturing details of the dynamics that were hidden when analyzing only the global order parameter.

Our findings suggested that the smaller a “part” (or subgraph) of a network, the faster the synchronization between those components. Also, it has been shown that the larger the coupling strength between the subgraphs, the shorter the transient regime. In the case of multiplex networks, our analytical results and the computer simulation revealed that the convergence of the global order parameter is faster than the interlayer synchronization, and the latter is generally faster than the global synchronization of the multiplex. In fact, we have shown that the time scale of the global order parameter is half the size of the time scale of the multiplex, if not smaller.

The concept of *local order parameter* can be extended to propose new synchronization constraints for population models. As mentioned above, a stability condition in which a property of a node is compared with the property of its neighborhood, can be a key ingredient for generating SOC dynamics. In the example of population models included in the general discussion, the local property is a local order parameter.

In view of the above findings, the main objective of the thesis has been reached. In the general discussion, we also showed that it is possible to generate networks

¹In fact, it is noteworthy that DA networks are the most frequent in any of the functional categories studied. Its overabundance is partially explained by the presence of *separators*, that is, nodes with degree two (i.e., $k_n = 2$) that are connected to high-degree ones.

that, on one hand, exhibit SOC (or SOqC) dynamics and, on the other hand, have structures similar to those of real socioeconomic or ecological networks.

Finally, the possibility that real socio-economic and / or ecological interactions may exhibit SOC (or SOqC) behaviors allows us to establish the following recommendations for the analysis of such systems:

1. Interactions should be observed for long periods of time. Generally, the process of self-organization takes place over a very long transient period. Also, in the case of SOC dynamics, the outcome of an event depends on the history of the whole system. The small past events should be considered.
2. The dynamics associated with catastrophic events should be examined taking into consideration that, if the system is SOC, large catastrophic events occur as a consequence of the same dynamics that produces small ordinary everyday events.
3. It should be studied if the changes in the system are discrete or continuous. In the case of SOC dynamics, even though there are many more small events than large ones, most of the changes of the system are associated with the large, catastrophic events. If the system is SOC, large avalanches, instead of gradual change, transform the system.

9 | Futuras líneas de investigación

A continuación se indican varias líneas de investigación futuras.

1. Investigar la asortatividad de vecindario.

Tal y como se ha observado en el capítulo 6, la asortatividad de dos-pasos, r_k , ha sido un parámetro relevante en la clasificación de las topologías. No obstante, como aún no están bien establecidos su significado o sus posibles aplicaciones al estudio de redes reales, se aconsejan nuevas investigaciones sobre esta métrica.

2. Desarrollar herramientas para comparar y clasificar diversas topologías.

En este trabajo de tesis sólo se ha empleado un árbol de decisión para catalogar en distintos dominios funcionales las topologías de la aplicación presentada en el capítulo 6 (o cualesquiera otras). En tal tesitura, en primer lugar, se sugiere estudiar el efecto de añadir nuevas propiedades al “entrenamiento” del algoritmo de construcción del árbol. También se recomienda analizar las consecuencias de ampliar la muestra de redes de “entrenamiento”.

Adicionalmente, en aras de validar los resultados propuestos, se considera importante la implementación de nuevas herramientas para catalogar las topologías en dominios funcionales. Por ejemplo, se podría ensayar una clasificación basada en los “k-vecinos más cercanos” (en inglés “k-Nearest neighbors”, o k-nn), o en cualquier otro método típico de “machine learning”.

3. Caracterizar en detalle el modelo SOqC.

La aplicación del capítulo 6 permite ajustar 7 parámetros. Para hacer un estudio pormenorizado de su dinámica, se recomienda, por un lado, mantener fijas las condiciones de sincronización (por ejemplo, empleando los siguientes valores: $T_g = 3$, $\lambda = 1$, y $\delta\theta = \pi$), y, por otro, retringir los estudios futuros al análisis de los efectos de N , ω_0 , U , y m_{BA} . Como ya se indicó, tales parámetros tienen un impacto directo sobre el tamaño del sistema y sus procesos

de carga y relajación. Para reducir la dimensionalidad del sistema, podrían definirse nuevas magnitudes, a partir de N , ω_0 , U , y m_{BA} .

4. Desarrollar un modelo que incorpore una componente espacial.

En la aplicación del capítulo 6, los enlaces se han introducido utilizando meramente un mecanismo de enlace preferencial. Una posible generalización de los modelos podría consistir en imbuir a los osciladores en un espacio métrico (definiendo una referencia y asignándoles una cierta posición espacial), con objeto de modular la probabilidad de creación de enlaces entre dos nodos (o dos agentes), en función de la distancia que los separe. En [BBV05], por ejemplo, se introduce un modelo de red, inmersa en un proceso de crecimiento, donde existen restricciones espaciales para la creación de enlaces.

También podría emplearse la componente espacial para definir el movimiento de las unidades (u osciladores) y, en función de éste, establecer las interacciones locales de los nodos (o agentes) con sus vecinos [OHS17; LPDG17].

5. Desarrollar un modelo que incorpore diversos tipos de enlace.

Finalmente, otra línea de investigación de posible interés es la generalización de los modelos mónoplex con dinámicas SOC (o SOqC), basados en alguna restricción sobre la sincronización de los nodos, a redes en las que existan distintos tipos de enlaces, tal y como sucede en los múltiplex. Por el momento, sólo se han hallado estudios aislados sobre el modelo BTW en sistemas múltiplex [L GK12].

Parte IV

Apéndices

A | Real-world network dataset

The real-world networks used in this paper belong to different domains: ecological (includes food webs and ecosystems), social (networks of friendships, communication networks, corporate relationships), technological (internet, transport, software development networks), informational (vocabulary networks, citations) and biological (protein-protein interaction networks, transcriptional regulation networks). The dataset comprises networks of different sizes, ranging from $N = 29$ to $N = 4941$ nodes. The networks are listed in Table [A.1](#).

TAB. A. 1: Dataset of real-world networks: network name, domain, N number of nodes, m number of links, reference, degree and two-walks degree assortative coefficients.

No.	Dataset	Domain	N	m	Ref.	r_k	$r_{\tilde{k}}$
1	Drosophila PIN	biological	3039	3715	[Gio+03]	-0.060	0.462
2	Hpyroli	biological	710	1396	[Lin+05]	-0.243	0.161
3	KSHV	biological	50	122	[Uet+06]	-0.058	0.215
4	MacaqueVisualCortex	biological	30	190	[SK04]	-0.030	0.113
5	Malaria PIN	biological	229	604	[LaC+05]	-0.083	0.116
6	Neurons	biological	280	1973	[Whi+86]	-0.069	0.187
7	PIN-Afulgidus	biological	32	38	[Mot+02]	-0.472	0.154
8	Pin-Bsubtilis	biological	84	98	[NNG04]	-0.486	0.136
9	PIN-Ecoli	biological	230	695	[But+05]	-0.015	0.397
10	PIN-Human	biological	2783	6438	[Rua+05]	-0.137	0.231
11	Trans-Ecoli	biological	328	456	[Mil+04]	-0.265	0.330
12	Transc-yeast	biological	662	1062	[Mil+04]	-0.410	0.401
13	Trans-urchin	biological	45	80	[Mil+04]	-0.207	0.194
14	Benguela	ecological	29	191	[Yod00a]	0.0211	0.153
15	BridgeBrook	ecological	75	547	[Pol91]	-0.668	-0.193
16	Canton	ecological	108	708	[Tow+98]	-0.226	-0.123
17	Chesapeake	ecological	33	72	[CL99]	-0.196	0.081
18	Coachella	ecological	30	261	[War89]	0.0347	0.148
19	ElVerde	ecological	156	1441	[RW96]	-0.174	0.009
20	ReefSmall	ecological	50	524	[Opi96]	-0.193	-0.127
21	ScotchBroom	ecological	154	370	[MMC00]	-0.311	0.350
22	Shelf	ecological	81	1476	[Lin02]	-0.094	-0.035
23	Skipwith	ecological	35	364	[Yod00b]	-0.319	-0.122
24	StMarks	ecological	48	221	[GR93]	0.111	0.199
25	StMartin	ecological	44	218	[Mar91]	-0.153	-0.0365
26	Stony	ecological	112	832	[BU89]	-0.222	-0.115
27	Ythan1	ecological	134	597	[HBR96]	-0.263	-0.119
28	World Trade	economic	80	875	[BM06]	-0.392	-0.355
29	SmallW	informational	233	994	[BM01]	-0.303	-0.251
30	ColoSPG	social	324	347	[Pot+02]	-0.295	0.296
31	CorporatePeople	social	1586	13126	[DYB03]	0.268	0.431
32	Dolphins	social	62	159	[Lus+03]	-0.044	0.303
33	Drugs	social	616	2012	[BM06]	-0.117	0.304
34	Hi-tech	social	33	91	[Kra99]	-0.087	0.191
35	Geom	social	3621	9461	[BM06]	0.168	0.356
36	PRISON-Sym	social	67	142	[Mac60]	0.103	0.332

No.	Dataset	Domain	N	m	Ref.	r_k	$r_{\tilde{k}}$
37	Sawmill	social	36	62	[MM97]	-0.071	0.243
38	social3	social	32	80	[Zel50]	-0.119	0.179
39	Zackar	social	34	78	[Zac77]	-0.476	-0.089
40	electronic1	technological	122	189	[Mil+02]	-0.002	0.337
41	electronic2	technological	252	399	[Mil+02]	-0.006	0.355
42	electronic3	technological	512	819	[Mil+02]	-0.030	0.367
43	Power grid	technological	4941	6594	[WS98]	0.003	0.599
44	Software Abi	technological	1035	1736	[Mye03]	-0.086	0.208
45	Software Digital	technological	150	198	[Mye03]	-0.228	0.447
46	Software Mysql	technological	1480	4221	[Mye03]	-0.083	0.147
47	Software-XMMS	technological	971	1809	[Mye03]	-0.114	0.397
48	Software-VTK	technological	771	1369	[Mye03]	-0.195	0.126
49	USA Air 97	technological	332	2126	[BM01]	-0.208	-0.000

B | Real-world network dataset

II

The real-world networks used in this Appendix are the same as Appendix A. They belong to different domains: ecological (includes food webs and ecosystems), social (networks of friendships, communication networks, corporate relationships), technological (internet, transport, software development networks), informational (vocabulary networks, citations) and biological (protein-protein interaction networks, transcriptional regulation networks). The dataset comprises networks of different sizes, ranging from $N = 29$ to $N = 4941$ nodes. The networks are listed in Table B.1. The modularity Q has been estimated by means of the Louvain algorithm [Blo+08].

TAB. B.1: Dataset of real-world networks: network name, domain, shortest path length, transitivity, clustering coefficient, small-world-ness coefficient, and modularity.

No.	Dataset	Domain	ℓ	C^Δ	C^{WS}	S^Δ	Q
1	Drosophila PIN	biological	9.430	0.041	0.026	55.868	0.859
2	Hpyroli	biological	4.152	0.015	0.015	8.157	0.538
3	KSHV	biological	2.837	0.144	0.126	1.456	0.362
4	MacaqueVisualCortex	biological	1.589	0.594	0.634	1.346	0.242
5	Malaria PIN	biological	3.375	0.116	0.178	5.87	0.504
6	Neurons	biological	2.630	0.199	0.280	3.703	0.398
7	PIN-Afulgidus	biological	3.597	0.029	0.063	0.364	0.573
8	Pin-Bsubtilis	biological	4.051	0.025	0.042	1.053	0.682
9	PIN-Ecoli	biological	3.784	0.155	0.223	5.334	0.499
10	PIN-Human	biological	4.840	0.035	0.072	35.379	0.633
11	Trans-Ecoli	biological	4.834	0.024	0.110	5.807	0.733
12	Transc-yeast	biological	5.199	0.016	0.049	2.804	0.756
13	Trans-urchin	biological	3.221	0.196	0.210	4.262	0.435
14	Benguela	ecological	1.621	0.571	0.567	1.149	0.104
15	BridgeBrook	ecological	2.165	0.191	0.201	0.877	0.368
16	Canton	ecological	2.350	0.026	0.053	0.182	0.205
17	Chesapeake	ecological	2.799	0.187	0.199	1.147	0.440
18	Coachella	ecological	1.464	0.697	0.707	1.265	0.108
19	ElVerde	ecological	2.301	0.232	0.213	1.628	0.214
20	ReefSmall	ecological	1.602	0.565	0.614	1.361	0.164
21	ScotchBroom	ecological	3.394	0.208	0.141	4.854	0.529
22	Shelf	ecological	1.572	0.577	0.591	1.276	0.122
23	Skipwith	ecological	1.417	0.615	0.625	1.017	0.055
24	StMarks	ecological	2.087	0.291	0.284	1.388	0.256
25	StMartin	ecological	1.931	0.325	0.327	1.361	0.256
26	Stony	ecological	2.336	0.020	0.068	0.127	0.157
27	Ythan1	ecological	2.402	0.144	0.228	2.165	0.309
28	World Trade	economic	1.724	0.460	0.752	1.653	0.219
29	SmallW	informational	2.371	0.160	0.556	5.512	0.445
30	ColoSPG	social	8.325	0.038	0.030	2.717	0.861
31	CorporatePeople	social	3.506	0.388	0.501	36.703	0.531
32	Dolphins	social	3.357	0.309	0.259	2.829	0.523
33	Drugs	social	5.284	0.368	0.550	24.212	0.767
34	Hi-tech	social	2.360	0.372	0.453	1.922	0.308
35	Geom	social	5.316	0.224	0.540	149.262	0.732
36	PRISON-Sym	social	3.355	0.288	0.310	3.702	0.578

No.	Dataset	Domain	ℓ	C^Δ	C^{WS}	S^Δ	Q
37	Sawmill	social	3.138	0.230	0.311	1.503	0.550
38	social3	social	2.296	0.243	0.327	1.239	0.344
39	Zackar	social	2.408	0.256	0.571	1.730	0.419
40	electronic1	technological	4.928	0.057	0.059	2.356	0.674
41	electronic2	technological	5.806	0.052	0.056	4.468	0.745
42	electronic3	technological	6.858	0.048	0.055	8.164	0.793
43	Power grid	technological	18.989	0.103	0.080	54.003	0.934
44	Software Abi	technological	5.082	0.039	0.058	12.137	0.712
45	Software Digital	technological	4.847	0.067	0.051	5.970	0.685
46	Software Mysql	technological	5.474	0.058	0.156	12.763	0.653
47	Software-XMMS	technological	6.347	0.042	0.055	15.892	0.773
48	Software-VTK	technological	4.528	0.044	0.061	20.498	0.670
49	USA Air 97	technological	2.738	0.396	0.625	9.611	0.351

C | Analytical results for a multiplex network formed by complete graphs

C.1 Eigenvalue spectrum of the supra-Laplacian matrix

Given an undirected multiplex network $\mathcal{M}$ with $M = 2$ layers, if both layers contain a complete network, then the supra-Laplacian matrix $\mathcal{L}$ has the following eigenvalues Λ :

- (I) $\Lambda = 0$. It is a nondegenerate eigenvalue.
- (II) $\Lambda = \lambda N$. It is a degenerate eigenvalue. It appears $N - 1$ times.
- (III) $\Lambda = 2\lambda^{12}$. It is a nondegenerate eigenvalue.
- (IV) $\Lambda = 2\lambda^{12} + \lambda N$. It is a degenerate eigenvalue. It appears $N - 1$ times.

Thus, in the case of $\lambda^{12}/\lambda \geq N/2$ ($\lambda^{12}/\lambda < N/2$), the smallest nonzero eigenvalue of the supra-Laplacian matrix is $\Lambda = \lambda N$ ($\Lambda = 2\lambda^{12}$).

C.2 Estimation of the average time evolution of the linear Kuramoto model

Given an undirected multiplex network $\mathcal{M}$ with $M = 2$ layers, if both layers contain a complete network, then Eq. 5.2 results in

$$\dot{\theta}_n^\alpha(t) = \lambda^\alpha N \langle \theta^\alpha \rangle - \lambda^\alpha N \theta_n^\alpha + \lambda^{12} (\theta_n^\beta - \theta_n^\alpha), \quad (\text{C.1})$$

where

$$\langle \theta^\alpha \rangle = \frac{1}{N} \sum_{x_n^\alpha \in G^\alpha} \theta_n^\alpha. \quad (\text{C.2})$$

We estimate the average value of $\dot{\theta}_n^\alpha$ in the layer G^α , $\langle \dot{\theta}^\alpha \rangle$. The result is given by

$$\langle \dot{\theta}^\alpha \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \dot{\theta}_n^\alpha = -\lambda^{12} (\langle \theta^\alpha \rangle - \langle \theta^\beta \rangle). \quad (\text{C.3})$$

Note that according to Eq. C.3, the sum of the phases of the multiplex network is constant, for $M = 2$, when each layer contains a complete graph, i.e. $\langle \dot{\theta}^1 \rangle + \langle \dot{\theta}^2 \rangle = 0$. Therefore,

$$\langle \theta^1(t) \rangle + \langle \theta^2(t) \rangle = \langle \theta^1(0) \rangle + \langle \theta^2(0) \rangle = \Gamma. \quad (\text{C.4})$$

On the other hand, according to Eq. C.3, it can be written that

$$\langle \dot{\theta}^1 \rangle - \langle \dot{\theta}^2 \rangle = -2\lambda^{12} (\langle \theta^1 \rangle - \langle \theta^2 \rangle). \quad (\text{C.5})$$

It results in

$$\langle \theta^1(t) \rangle - \langle \theta^2(t) \rangle = (\langle \theta^1(0) \rangle - \langle \theta^2(0) \rangle) e^{-2\lambda^{12}t} = \gamma e^{-2\lambda^{12}t} \quad (\text{C.6})$$

Hence, the evolution of the average value of θ^1 and of the average value of θ^2 are given by

$$\langle \theta^1(t) \rangle = \frac{\gamma}{2} e^{-2\lambda^{12}t} + \frac{\Gamma}{2}, \quad (\text{C.7})$$

and

$$\langle \theta^2(t) \rangle = -\frac{\gamma}{2} e^{-2\lambda^{12}t} + \frac{\Gamma}{2}. \quad (\text{C.8})$$

By considering the series expansion

$$e^{i\theta_n^\alpha} = e^{i\langle \theta^\alpha \rangle} + ie^{i\langle \theta^\alpha \rangle} (\theta_n^\alpha - \langle \theta^\alpha \rangle) - \frac{1}{2} e^{i\langle \theta^\alpha \rangle} (\theta_n^\alpha - \langle \theta^\alpha \rangle)^2 + \dots, \quad (\text{C.9})$$

we observe that

$$\sum_{x_n^\alpha \in G^\alpha} e^{i\theta_n^\alpha} = N e^{i\langle \theta^\alpha \rangle} + ie^{i\langle \theta^\alpha \rangle} \left(\left[\sum_{x_n^\alpha \in G^\alpha} \theta_n^\alpha \right] - N \langle \theta^\alpha \rangle \right) -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}e^{i\langle\theta^\alpha\rangle} \left(\left[\sum_{x_n^\alpha \in G^\alpha} (\theta_n^\alpha)^2 \right] + N \langle\theta^\alpha\rangle^2 - 2 \langle\theta^\alpha\rangle \sum_{x_n^\alpha \in G^\alpha} \theta_n^\alpha \right) + \dots \approx \\
 & \approx N e^{i\langle\theta^\alpha\rangle} - \frac{1}{2}e^{i\langle\theta^\alpha\rangle} \left(N \langle(\theta^\alpha)^2\rangle + N \langle\theta^\alpha\rangle^2 - 2N \langle\theta^\alpha\rangle^2 \right)
 \end{aligned} \tag{C.10}$$

We characterize the degree of synchronization of each layer G^α by means of its own order parameter, r^α , expressed by

$$r^\alpha(t)e^{i\psi^\alpha(t)} = \frac{1}{N} \sum_{x_n^\alpha \in G^\alpha} e^{i\theta_n^\alpha(t)} \rightarrow r^\alpha(t) = \frac{1}{N} \left| \sum_{x_n^\alpha \in G^\alpha} e^{i\theta_n^\alpha(t)} \right|. \tag{C.11}$$

Consequently, according to Eq. C.10 and Eq. C.11, it is straightforward to realize that $\psi^\alpha \approx \langle\theta^\alpha\rangle$ and

$$r^\alpha \approx 1 + \frac{1}{2} \langle\theta^\alpha\rangle^2 - \frac{1}{2} \langle(\theta^\alpha)^2\rangle. \tag{C.12}$$

In case $M = 2$, we obtain the following expressions for $\langle(\theta^1)^2\rangle$, $\langle(\theta^2)^2\rangle$ and $\langle\theta^1\theta^2\rangle$, respectively:

$$\langle(\theta^1)^2\rangle = \frac{\Gamma^2}{4} + K_1 e^{-2\lambda N t} + \frac{\gamma^2}{4} e^{-4\lambda^{12} t} - K_2 e^{-2(\lambda N + 2\lambda^{12})t} + \frac{\gamma\Gamma}{2} e^{-2\lambda^{12} t} + K_3 e^{-(2\lambda N + 2\lambda^{12})t}, \tag{C.13}$$

$$\langle(\theta^2)^2\rangle = \frac{\Gamma^2}{4} + K_1 e^{-2\lambda N t} + \frac{\gamma^2}{4} e^{-4\lambda^{12} t} - K_2 e^{-2(\lambda N + 2\lambda^{12})t} - \frac{\gamma\Gamma}{2} e^{-2\lambda^{12} t} - K_3 e^{-(2\lambda N + 2\lambda^{12})t}, \tag{C.14}$$

and

$$\langle\theta^1\theta^2\rangle = \frac{\Gamma^2}{4} + K_1 e^{-2\lambda N t} - \frac{\gamma^2}{4} e^{-4\lambda^{12} t} + K_2 e^{-2(\lambda N + 2\lambda^{12})t}, \tag{C.15}$$

where K_1 , K_2 and K_3 are constant values that depend on the initial conditions, given by

$$K_1 = \frac{2 \langle\theta^1\theta^2\rangle(0) - \Gamma^2 + \langle(\theta^1)^2\rangle(0) + \langle(\theta^2)^2\rangle(0)}{4}, \tag{C.16}$$

$$K_2 = \frac{2 \langle\theta^1\theta^2\rangle(0) + \gamma^2 - \langle(\theta^1)^2\rangle(0) - \langle(\theta^2)^2\rangle(0)}{4}, \tag{C.17}$$

and

$$K_3 = \frac{\langle (\theta^1)^2 \rangle(0) - \langle (\theta^2)^2 \rangle(0) - \gamma\Gamma}{2}. \quad (\text{C.18})$$

Thus, according to Eq. C.7, Eq. C.8, Eq. C.13 and Eq. C.14, the order parameters for layers G^1 and G^2 are given by

$$r^1 \approx 1 - \frac{1}{2}K_1 e^{-2\lambda N t} + \frac{1}{2}K_2 e^{-2(\lambda N + 2\lambda^{12})t} - \frac{1}{2}K_3 e^{-(2\lambda N + 2\lambda^{12})t} = \zeta - \chi, \quad (\text{C.19})$$

and

$$r^2 \approx 1 - \frac{1}{2}K_1 e^{-2\lambda N t} + \frac{1}{2}K_2 e^{-2(\lambda N + 2\lambda^{12})t} + \frac{1}{2}K_3 e^{-(2\lambda N + 2\lambda^{12})t} = \zeta + \chi, \quad (\text{C.20})$$

where

$$\zeta = \left(e^{2\lambda N t} - \frac{1}{2}K_1 - \frac{1}{2}K_2 e^{-4\lambda^{12}t} \right) e^{-2\lambda N t}, \quad (\text{C.21})$$

and

$$\chi = \frac{1}{2}K_3 e^{-2\lambda^{12}t} e^{-2\lambda N t}. \quad (\text{C.22})$$

Finally, the global order parameter of the multiplex network $\mathcal{M}$ (given by Eq. 5.7) can be approximated as

$$r = \sqrt{\frac{(r^1)^2 + (r^2)^2 + 2r^1 r^2 \cos(\Delta)}{4}} \approx \sqrt{\zeta^2 \cos^2\left(\frac{\Delta}{2}\right) + \chi^2 \sin^2\left(\frac{\Delta}{2}\right)}, \quad (\text{C.23})$$

where

$$\Delta = \psi^1 - \psi^2 \approx \langle \theta^1 \rangle - \langle \theta^2 \rangle = \gamma e^{-2\lambda^{12}t}. \quad (\text{C.24})$$

In Fig. C.1, we compare the numerical results for $1 - r(t)$ with the estimation obtained from Eq. C.23, when $\Lambda_\Delta \gg \Lambda$ (i.e. $2\lambda^{12} \gg N\lambda$) and there exists an initial intralayer phase heterogeneity ($\alpha > 0$). As it can be observed, they are in good agreement.

FIG. C.1: Time evolution of $1 - r(t)$ (blue continuous line) and the results obtained with Eq. C.23 (red circles) for $N = 10$, $\lambda = 2.0$, $\lambda^{12} = 100\lambda$, $\mu_1 = \pi/2$, $\mu_2 = 0$ and $\alpha = 0.1$. Each layer contains a complete graph.

D | Árbol de decisión para clasificar redes atendiendo a su topología

En este apéndice se muestra el árbol de decisión estimado para clasificar las 49 redes reales de los apéndices A y B, en sus correspondientes dominios o grupos funcionales.

Un árbol de decisión es una herramienta de apoyo para la toma de decisiones. Empleando un grafo arborescente, se representa un algoritmo que sólo contiene enunciados de control condicionales. El resultado se muestra en la Fig. D.1. Para su confección, se han empleado los módulos “scikit-learn” y “pandas” de Python, así como las 49 redes reales de los apéndices A y B, y los siguientes rasgos de cada red: la asortatividad de grado (r_k), la asortatividad de dos-pasos ($r_{\bar{k}}$), la longitud de camino más corto (ℓ), la transitividad (C^Δ), el coeficiente de agrupamiento (C^{WS}), el coeficiente de “mundo pequeño” (S^Δ) y la modularidad (Q).

En la Fig. D.1, los dominios se han codificado del siguiente modo: redes ecológicas (0), sociales (1), biológicas (2), tecnológicas (3), de información (4) y económicas (5). En cada hoja (nodo o “cuadro”) del diagrama se señala el criterio (o la condición) que se emplea para clasificar las redes que llegan hasta ella. Asimismo, se indica la cantidad de redes de la muestra de “entrenamiento” que llegaron hasta ese nodo, a través del valor de “sample”. La composición de “sample” se proporciona con ayuda de un vector de valores (“value”). La componente i -ésima del vector da cuenta de la cantidad de redes que pertenecen al dominio $i - 1$, siendo $1 \leq i \leq L$ y L la cantidad de dominios. Por ejemplo, si $\text{value} = [11, 0, 1, 0, 0, 0]$, entonces $L = 6$ y la muestra de la hoja contiene 12 redes ($\text{sample} = 12$): 11 redes ecológicas y 1 red biológica.

El flujo de las decisiones se representa a través de flechas. La hoja donde se inicia la toma de decisiones está en la parte superior de la Fig. D.1. Nótese que sólo existe una secuencia de resultados en las decisiones capaz de conectar el nodo inicial con cada uno de los restantes. Las decisiones son excluyentes.

Finalmente, cada hoja muestra *la impureza de Gini*, una medida de cuán a menudo un elemento del conjunto “sample” (de la hoja), seleccionado al azar, sería etiquetado incorrectamente, si el etiquetado se realizase de manera aleatoria, escogiendo entre las etiquetas disponibles del vector de valores. Por tanto, cuando todos la muestra de la hoja pertenece a una sola categoría de destino, la impureza es 0. En general, la impureza de Gini se calcula del siguiente modo:

$$I_G(\vec{v}) = \sum_{i=1}^L \frac{(\vec{v})_i}{\text{sample}} \left(1 - \frac{(\vec{v})_i}{\text{sample}} \right), \quad (\text{D.1})$$

donde $\vec{v}$ equivale a “value”, y $(\vec{v})_i$ es la componente i -ésima de $\vec{v}$. Por ejemplo, si $\text{value} = [11, 0, 1, 0, 0, 0]$, la posibilidad de etiquetar erróneamente es 0.153. El algoritmo empleado para calcular el diagrama de la Fig. D.1 requiere que los resultados de una decisión generen muestras (u hojas) con una menor impureza de Gini.

D.1 Árboles de decisión con y sin asortatividad de grado de dos-pasos

Siguiendo una metodología análoga a la anterior, se ha confeccionado un árbol de decisión sin considerar los datos de la asortatividad de dos-pasos (r_k) de las redes reales. El resultado puede observarse en la Fig. D.2.

La comparación entre las Figs. D.1 y D.2 permite observar que la eliminación de r_k hace que el coeficiente de “mundo pequeño” (S^Δ) y la modularidad (Q) se tornen parámetros relevantes para clasificar las topologías. Por otro lado, se observa que la eliminación de r_k no provoca un aumento de la cantidad de hojas (sin hijos) con impureza de Gini mayores que cero (5 hojas en ambos casos). Sin embargo, sí se constata que las impurezas de las anteriores hojas son menores en la Fig. D.1 que en la Fig D.2 ($\{0.44, 0.5, 0.5, 0.5, 0.44\}$ frente a $\{0.75, 0.5, 0.5, 0.5, 0.44\}$).

Finalmente, se ha estudiado la precisión de ambos árboles. Tal cantidad se define del siguiente modo:

$$P(\hat{y}, y) = \frac{1}{n_m} \sum_{i=0}^{n_m-1} 1(\hat{y}_i = y_i), \quad (\text{D.2})$$

donde P es la precisión del árbol de decisión, $\hat{y}_i$ es el valor predicho de la muestra i -ésima, y_i es el valor real de la muestra anterior, n_m el número total de muestras y $1(x)$ es la función indicatriz.

Los test de precisión señalan que el árbol que incluye la asortatividad de dos-pasos obtiene mejores puntuaciones. Los test realizados (con el 50% de las redes

FIG. D.1: Árbol de decisión estimado para clasificar las 49 redes reales de los apéndices A y B, atendiendo a sus respectivos dominios.

Fig. D.2: Árbol de decisión estimado para clasificar las 49 redes reales de los apéndices A y B, atendiendo a sus respectivos dominios. Para su confección no se han empleado los datos de la asoratividad de dos-pasos (tr_2) de las redes reales.

de la muestra) indican que la precisión media del primer árbol de decisión asciende a un 40 %, mientras que la precisión media del segundo es del 35 %. Por su parte, las predicciones hechas a partir del conjunto de datos de validación muestra que la precisión media del primer árbol es del 60 %, mientras que la del segundo es del 44 %.

E | Acerca de este documento

Este trabajo se ha escrito en `LaTeX`, utilizando como base la memoria de tesis doctoral elaborada por Francisco Javier García Algarra. Los ficheros fuente de dicho documento pueden descargarse libremente desde `github` usando el comando:

```
git clone https://github.com/ghostdatalearner/texto_tutto.git
```


Bibliografía

- [AB02] R. Albert y A.-L. Barabási. “Statistical mechanics of complex networks”. En: *Reviews of Modern Physics* 74.1 (2002), págs. 47-97. DOI: [10.1103/RevModPhys.74.47](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.74.47).
- [Ace+05] J.A. Acebrón et al. “The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena”. En: *Reviews of Modern Physics* 77.1 (2005), págs. 137-185. DOI: [10.1103/RevModPhys.77.137](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.137).
- [ADG07] J.A. Almendral y A. Díaz-Guilera. “Dynamical and spectral properties of complex networks”. En: *New Journal of Physics* 9 (2007). DOI: [10.1088/1367-2630/9/6/187](https://doi.org/10.1088/1367-2630/9/6/187).
- [ADGPV06a] A. Arenas, A. Díaz-Guilera y C.J. Pérez-Vicente. “Synchronization processes in complex networks”. En: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 224.1-2 (2006), págs. 27-34. DOI: [10.1016/j.physd.2006.09.029](https://doi.org/10.1016/j.physd.2006.09.029).
- [ADGPV06b] A. Arenas, A. Díaz-Guilera y C.J. Pérez-Vicente. “Synchronization reveals topological scales in complex networks”. En: *Physical Review Letters* 96.11 (2006). DOI: [10.1103/PhysRevLett.96.114102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.114102).
- [AG+12] V. Avalos-Gaytán et al. “Assortative and modular networks are shaped by adaptive synchronization processes”. En: *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 86.1 (2012). DOI: [10.1103/PhysRevE.86.015101](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.86.015101).
- [And+12] D. Anderson et al. “Multiscale dynamics in communities of phase oscillators”. En: *Chaos* 22.1 (2012). DOI: [10.1063/1.3672513](https://doi.org/10.1063/1.3672513).
- [AP+17] Alfonso Allen-Perkins et al. “Relaxation time of the global order parameter on multiplex networks: The role of interlayer coupling in Kuramoto oscillators”. En: *Phys. Rev. E* 96.042312 (2017). DOI: [10.1103/PhysRevE.96.042312](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.96.042312).
- [APGP16] A. Allen-Perkins, J. Galeano y J.M. Pastor. “Inducing self-organized criticality in a network toy model by neighborhood assortativity”. En: *Physical Review E* 94.5 (2016). DOI: [10.1103/PhysRevE.94.052304](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.052304).
- [APPE17] Alfonso Allen-Perkins, Juan Manuel Pastor y Ernesto Estrada. “Two-walks degree assortativity in graphs and networks”. En: *Applied Mathematics and Computation* 311.15 (2017), 262–271. DOI: [10.1016/j.amc.2017.05.025](https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.05.025).

- [Are+08] Alex Arenas et al. "Synchronization in complex networks". En: *Physics Reports* 469.3 (2008), págs. 93-153. DOI: [10.1016/j.physrep.2008.09.002](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2008.09.002).
- [Asl+14] M. Asllani et al. "Turing patterns in multiplex networks". En: *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 90.4 (2014). DOI: [10.1103/PhysRevE.90.042814](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.90.042814).
- [AST95] P.G. Amazeen, R.C. Schmidt y M.T. Turvey. "Frequency detuning of the phase entrainment dynamics of visually coupled rhythmic movements". En: *Biological Cybernetics* 72.6 (1995), págs. 511-518. DOI: [10.1007/BF00199893](https://doi.org/10.1007/BF00199893).
- [AYZ97] N. Alon, R. Yuster y U. Zwick. "Finding and Counting Given Length Cycles". En: *Algorithmica (New York)* 17.3 (1997), págs. 209-223. DOI: [10.1007/BF02523189](https://doi.org/10.1007/BF02523189).
- [BA99] A.-L. Barabási y R. Albert. "Emergence of scaling in random networks". En: *Science* 286.5439 (1999), págs. 509-512. DOI: [10.1126/science.286.5439.509](https://doi.org/10.1126/science.286.5439.509).
- [Bak96] P. Bak. *How nature works: the science of self-organized criticality*. Springer, 1996.
- [Bap+16] M.S. Baptista et al. "Chaotic, informational and synchronous behaviour of multiplex networks". En: *Scientific Reports* 6 (2016). DOI: [10.1038/srep22617](https://doi.org/10.1038/srep22617).
- [Bar+08] E. Barreto et al. "Synchronization in networks of networks: The onset of coherent collective behavior in systems of interacting populations of heterogeneous oscillators". En: *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 77.3 (2008). DOI: [10.1103/PhysRevE.77.036107](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.77.036107).
- [Bau01] Zygmunt Bauman. "El desafío ético de la globalización". En: *El País* (jul. de 2001).
- [BBV05] A. Barrat, M. Barthélemy y A. Vespignani. "The effects of spatial constraints on the evolution of weighted complex networks". En: *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* 5 (2005), págs. 49-68. DOI: [10.1088/1742-5468/2005/05/P05003](https://doi.org/10.1088/1742-5468/2005/05/P05003).
- [BBV08] A. Barrat, M. Barthélemy y A. Vespignani. *Dynamical Processes on Complex Networks*. Cambridge University Press, 2008. ISBN: 9781107377424.
- [Blo+08] V.D. Blondel et al. "Fast unfolding of communities in large networks". En: *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* 2008.10 (2008). DOI: [10.1088/1742-5468/2008/10/P10008](https://doi.org/10.1088/1742-5468/2008/10/P10008).
- [BM01] V. Batagelj y A. Mrvar. *Pajek datasets*. 2001. URL: <http://vlado.fmf.uni-lj.si/pub/networks/data/>.
- [BM04] G. Bianconi y M. Marsili. "Clogging and self-organized criticality in complex networks". En: *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 70.3 2 (2004), págs. 035105-1-035105-4. DOI: [10.1103/PhysRevE.70.035105](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.70.035105).

- [BM06] V. Batagelj y A. Mrvar. "Analysis of large networks". En: *Proceedings of Pajek Workshop at XXVI Sunbelt Conference* (2006).
- [BM09] J.A. Bonachela y M.A. Muñoz. "Self-organization without conservation: True or just apparent scale-invariance?" En: *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* 2009.9 (2009). DOI: [10.1088/1742-5468/2009/09/P09009](https://doi.org/10.1088/1742-5468/2009/09/P09009).
- [BNL14] F. Battiston, V. Nicosia y V. Latora. "Structural measures for multiplex networks". En: *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 89.3 (2014). DOI: [10.1103/PhysRevE.89.032804](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.89.032804).
- [Boc+06] S. Boccaletti et al. "Complex networks: Structure and dynamics". En: *Physics Reports* 424.4-5 (2006), págs. 175-308. DOI: [10.1016/j.physrep.2005.10.009](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2005.10.009).
- [Boc+14] S. Boccaletti et al. "The structure and dynamics of multilayer networks". En: *Physics Reports* 544.1 (2014), págs. 1-122. DOI: [10.1016/j.physrep.2014.07.001](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2014.07.001).
- [Bof+99] G. Boffetta et al. "Power laws in solar flares: Self-organized criticality or turbulence?" En: *Physical Review Letters* 83.22 (1999), págs. 4662-4665. DOI: [10.1103/PhysRevLett.83.4662](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.4662).
- [Bon72] P. Bonacich. "Factoring and weighting approaches to status scores and clique identification". En: *The Journal of Mathematical Sociology* 2.1 (1972), págs. 113-120. DOI: [10.1080/0022250X.1972.9989806](https://doi.org/10.1080/0022250X.1972.9989806).
- [Bon95] E. Bonabeau. "Sandpile Dynamics on Random Graphs". En: *Journal of the Physical Society of Japan* 64.1 (1995), págs. 327-328. DOI: [10.1143/JPSJ.64.327](https://doi.org/10.1143/JPSJ.64.327).
- [BP03] J.M. Beggs y D. Plenz. "Neuronal Avalanches in Neocortical Circuits". En: *Journal of Neuroscience* 23.35 (2003), págs. 11167-11177.
- [BP98] S. Brin y L. Page. "The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine". En: *Computer Networks and ISDN Systems* 30 (1998), págs. 1-7.
- [BPSV03] M. Boguñá, R. Pastor-Satorras y A. Vespignani. "Absence of Epidemic Threshold in Scale-Free Networks with Degree Correlations". En: *Physical Review Letters* 90.2 (2003), pág. 4. DOI: [10.1103/PhysRevLett.90.028701](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.90.028701).
- [BS13] H. Bhaumik y S.B. Santra. "Critical properties of a dissipative sandpile model on small-world networks". En: *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 88.6 (2013). DOI: [10.1103/PhysRevE.88.062817](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.88.062817).
- [BTW87] P. Bak, C. Tang y K. Wiesenfeld. "Self-organized criticality: An explanation of the 1/f noise". En: *Physical Review Letters* 59.4 (1987), págs. 381-384. DOI: [10.1103/PhysRevLett.59.381](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.59.381).
- [BTW88] P. Bak, C. Tang y K. Wiesenfeld. "Self-organized criticality". En: *Physical Review A* 38.1 (1988), págs. 364-374. DOI: [10.1103/PhysRevA.38.364](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.38.364).

- [BU89] D. Baird y R.E. Ulanowicz. "The seasonal dynamics of the Chesapeake Bay ecosystem". En: *Ecological Monographs* 59.4 (1989), págs. 329-364. DOI: [10.2307/1943071](https://doi.org/10.2307/1943071).
- [Bul+10] S.V. Buldyrev et al. "Catastrophic cascade of failures in interdependent networks". En: *Nature* 464.7291 (2010), págs. 1025-1028. DOI: [10.1038/nature08932](https://doi.org/10.1038/nature08932).
- [But+05] G. Butland et al. "Interaction network containing conserved and essential protein complexes in Escherichia coli". En: *Nature* 433.7025 (2005), págs. 531-537. DOI: [10.1038/nature03239](https://doi.org/10.1038/nature03239).
- [Car+07] F. Caruso et al. "Analysis of self-organized criticality in the Olami-Feder-Christensen model and in real earthquakes". En: *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 75.5 (2007). DOI: [10.1103/PhysRevE.75.055101](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.75.055101).
- [Car+13a] A. Cardillo et al. "Emergence of network features from multiplexity". En: *Scientific Reports* 3 (2013). DOI: [10.1038/srep01344](https://doi.org/10.1038/srep01344).
- [Car+13b] A. Cardillo et al. "Modeling the multi-layer nature of the European Air Transport Network: Resilience and passengers re-scheduling under random failures". En: *European Physical Journal: Special Topics* 215.1 (2013), págs. 23-33. DOI: [10.1140/epjst/e2013-01712-8](https://doi.org/10.1140/epjst/e2013-01712-8).
- [Car96] J. Cardy. *Scaling and Renormalization in Statistical Physics*. Cambridge Lecture Notes in Physics. Cambridge University Press, 1996. ISBN: 9780521499590.
- [CG09] G. Caldarelli y D. Garlaschelli. "Adaptive Networks: Theory, Models and Applications". En: ed. por T. Gross y H. Sayama. Springer Berlin Heidelberg, 2009. Cap. Self-Organization and Complex Networks, págs. 121-135.
- [Chu97] F.R.K. Chung. "Spectral graph theory". En: *Spectral Graph Theory* (1997).
- [CL99] R.R. Christian y J.J. Luczkovich. "Organizing and understanding a winter's seagrass foodweb network through effective trophic levels". En: *Ecological Modelling* 117.1 (1999), págs. 99-124. DOI: [10.1016/S0304-3800\(99\)00022-8](https://doi.org/10.1016/S0304-3800(99)00022-8).
- [Cos+07] L.D.F. Costa et al. "Characterization of complex networks: A survey of measurements". En: *Advances in Physics* 56.1 (2007), págs. 167-242. DOI: [10.1080/00018730601170527](https://doi.org/10.1080/00018730601170527).
- [DAH02] L. De Arcangelis y H.J. Herrmann. "Self-organized criticality on small world networks". En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 308.1-4 (2002), págs. 545-549. DOI: [10.1016/S0378-4371\(02\)00549-6](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(02)00549-6).
- [Dan+05] L. Danon et al. "Comparing community structure identification". En: *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* 9 (2005), págs. 219-228. DOI: [10.1088/1742-5468/2005/09/P09008](https://doi.org/10.1088/1742-5468/2005/09/P09008).

- [DBGS07] M. Di Bernardo, F. Garofalo y F. Sorrentino. "Effects of degree correlation on the synchronization of networks of oscillators". En: *International Journal of Bifurcation and Chaos* 17.10 (2007), págs. 3499-3506. DOI: [10.1142/S0218127407019263](https://doi.org/10.1142/S0218127407019263).
- [DBJ17] S.K. Dwivedi, M.S. Baptista y S. Jalan. "Optimization of synchronizability in multiplex networks by rewiring one layer". En: *Physical Review E* 95.4 (2017). DOI: [10.1103/PhysRevE.95.040301](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.95.040301).
- [DD+14] M. De Domenico et al. "Mathematical formulation of multilayer networks". En: *Physical Review X* 3.4 (2014). DOI: [10.1103/PhysRevX.3.041022](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.3.041022).
- [DD+16] M. De Domenico et al. "The physics of spreading processes in multilayer networks". En: *Nature Physics* 12.10 (2016), págs. 901-906. DOI: [10.1038/nphys3865](https://doi.org/10.1038/nphys3865).
- [DDPA15] M. De Domenico, M.A. Porter y A. Arenas. "MuxViz: A tool for multilayer analysis and visualization of networks". En: *Journal of Complex Networks* 3.2 (2015), págs. 159-176. DOI: [10.1093/comnet/cnu038](https://doi.org/10.1093/comnet/cnu038).
- [DG+16] C.I. Del Genio et al. "Synchronization in networks with multiple interaction layers". En: *Sci. Adv.* 2 (2016).
- [DMST98] M. De Menech, A.L. Stella y C. Tebaldi. "Rare events and breakdown of simple scaling in the abelian sandpile model". En: *Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics* 58.3 (1998), R2677-R2680. DOI: [10.1103/PhysRevE.58.R2677](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.58.R2677).
- [Don+11] J.F. Donges et al. "Investigating the topology of interacting networks: Theory and application to coupled climate subnetworks". En: *European Physical Journal B* 84.4 (2011), págs. 635-651. DOI: [10.1140/epjb/e2011-10795-8](https://doi.org/10.1140/epjb/e2011-10795-8).
- [DYB03] G.F. Davis, M. Yoo y W.E. Baker. "The Small World of the American Corporate Elite, 1982-2001". En: *Strategic Organization* 1.3 (2003), págs. 301-326. DOI: [10.1177/14761270030013002](https://doi.org/10.1177/14761270030013002).
- [EK02] V. Eguíluz y K. Klemm. "Epidemic Threshold in Structured Scale-Free Networks". En: *Physical Review Letters* 89.10 (2002). DOI: [10.1103/PhysRevLett.89.108701](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.108701).
- [EK15] E. Estrada y P.A. Knight. "A First Course in Network Theory". En: *A First Course in Network Theory* (2015).
- [ER59] P. Erdős y A. Rényi. "On random graphs". En: *Publ. Math.* 6 (1959), págs. 290-297.
- [ERV05] E. Estrada y J.A. Rodríguez-Velázquez. "Subgraph centrality in complex networks". En: *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 71.5 (2005). DOI: [10.1103/PhysRevE.71.056103](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.71.056103).
- [Est11] E. Estrada. "Combinatorial study of degree assortativity in networks". En: *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 84.4 (2011). DOI: [10.1103/PhysRevE.84.047101](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.84.047101).
- [Est12] E. Estrada. *The Structure of Complex Networks: Theory and Applications*. EBSCO ebook academic collection. OUP Oxford, 2012. ISBN: 9780199591756.

- [FFH06] P. Fronczak, A. Fronczak y J.A. Holyst. "Self-organized criticality and coevolution of network structure and dynamics". En: *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 73.4 (2006). DOI: [10.1103/PhysRevE.73.046117](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.73.046117).
- [Gao+12] J. Gao et al. "Networks formed from interdependent networks". En: *Nature Physics* 8.1 (2012), págs. 40-48. DOI: [10.1038/nphys2180](https://doi.org/10.1038/nphys2180).
- [GB08] T. Gross y B. Blasius. "Adaptive coevolutionary networks: A review". En: *Journal of the Royal Society Interface* 5.20 (2008), págs. 259-271. DOI: [10.1098/rsif.2007.1229](https://doi.org/10.1098/rsif.2007.1229).
- [GB14] R. Gallotti y M. Barthelemy. "Anatomy and efficiency of urban multimodal mobility". En: *Scientific Reports* 4 (2014). DOI: [10.1038/srep06911](https://doi.org/10.1038/srep06911).
- [GFGG15] L.V. Gambuzza, M. Frasca y J. Gómez-Gardeñes. "Intra-layer synchronization in multiplex networks". En: *EPL* 110.2 (2015). DOI: [10.1209/0295-5075/110/20010](https://doi.org/10.1209/0295-5075/110/20010).
- [GG+12] J. Gómez-Gardeñes et al. "Evolution of cooperation in multiplex networks." En: *Scientific reports* 2 (2012), pág. 620.
- [GG+15] J. Gómez-Gardeñes et al. "Layer;layer competition in multiplex complex networks". En: *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 373.2056 (2015). DOI: [10.1098/rsta.2015.0117](https://doi.org/10.1098/rsta.2015.0117).
- [GGA13] C. Granell, S. Gómez y A. Arenas. "Dynamical interplay between awareness and epidemic spreading in multiplex networks". En: *Physical Review Letters* 111.12 (2013). DOI: [10.1103/PhysRevLett.111.128701](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.128701).
- [GGT11] C. Grabow, S. Grosskinsky y M. Timme. "Speed of complex network synchronization". En: *European Physical Journal B* 84.4 (2011), págs. 613-626. DOI: [10.1140/epjb/e2011-20038-9](https://doi.org/10.1140/epjb/e2011-20038-9).
- [Gio+03] L. Giot et al. "A Protein Interaction Map of Drosophila melanogaster". En: *Science* 302.5651 (2003), págs. 1727-1736. DOI: [10.1126/science.1090289](https://doi.org/10.1126/science.1090289).
- [Goh+05] K.-I. Goh et al. "Cascading toppling dynamics on scale-free networks". En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 346.1-2 SPEC. ISS. (2005), págs. 93-103. DOI: [10.1016/j.physa.2004.08.054](https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.08.054).
- [GPB16] R. Gallotti, M.A. Porter y M. Barthelemy. "Lost in transportation: Information measures and cognitive limits in multilayer navigation". En: *Science advances* 2.2 (2016), e1500445. DOI: [10.1126/sciadv.1500445](https://doi.org/10.1126/sciadv.1500445).
- [GR93] L. Goldwasser y J. Roughgarden. "Construction and analysis of a large Caribbean food web". En: *Ecology* 74.4 (1993), págs. 1216-1233.
- [Gra+10] C. Grabow et al. "Do small worlds synchronize fastest?" En: *Europhys. Lett.* 90.4 (2010).
- [Gru+93] S.K. Grumbacher et al. "Self-organized criticality: An experiment with sandpiles". En: *Am. J. Phys.* 61.4 (1993).

- [Gó+13] S. Gómez et al. "Diffusion dynamics on multiplex networks". En: *Physical Review Letters* 110.2 (2013). DOI: [10.1103/PhysRevLett.110.028701](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.028701).
- [HBR96] M. Huxham, S. Beaney y D. Raffaelli. "Do parasites reduce the chances of triangulation in a real food web?" En: *Oikos* 76.2 (1996), págs. 284-300.
- [Hel+90] G.A. Held et al. "Experimental study of critical-mass fluctuations in an evolving sandpile". En: *Physical Review Letters* 65.9 (1990), págs. 1120-1123. DOI: [10.1103/PhysRevLett.65.1120](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.65.1120).
- [HG08] M.D. Humphries y K. Gurney. "Network 'small-world-ness': A quantitative method for determining canonical network equivalence". En: *PLoS ONE* 3.4 (2008). DOI: [10.1371/journal.pone.0002051](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0002051).
- [HMA13] M. Hoore y S. Moghimi-Araghi. "Critical behavior of a small-world sandpile model". En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 46.19 (2013). DOI: [10.1088/1751-8113/46/19/195001](https://doi.org/10.1088/1751-8113/46/19/195001).
- [JCF89] H.J. Jensen, K. Christensen y H.C. Fogedby. "1/f noise, distribution of lifetimes, and a pile of sand". En: *Physical Review B* 40.10 (1989), págs. 7425-7427. DOI: [10.1103/PhysRevB.40.7425](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.40.7425).
- [JNB03] H. Jeong, Z. Neda y A.L. Barabási. "Measuring preferential attachment in evolving networks". En: *Europhysics Letters* 61.4 (2003), págs. 567-572. DOI: [10.1209/epl/i2003-00166-9](https://doi.org/10.1209/epl/i2003-00166-9).
- [Kad+89] L.P. Kadanoff et al. "Scaling and universality in avalanches". En: *Physical Review A* 39.12 (1989), págs. 6524-6537. DOI: [10.1103/PhysRevA.39.6524](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.39.6524).
- [Kad90] L.P. Kadanoff. "Scaling and universality in statistical physics". En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 163.1 (1990), págs. 1-14. DOI: [10.1016/0378-4371\(90\)90309-G](https://doi.org/10.1016/0378-4371(90)90309-G).
- [Kan+01] Jan W. Kantelhardt et al. "Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis". En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 295.3-4 (jun. de 2001), págs. 441-454.
- [Kat53] L. Katz. "A new status index derived from sociometric analysis". En: *Psychometrika* 18.1 (1953), págs. 39-43. DOI: [10.1007/BF02289026](https://doi.org/10.1007/BF02289026).
- [KG09] T. Kron y T. Grund. "Society as a Self-Organized Critical System". En: *Cybernetics and Human Knowing* 16.1-2 (2009), págs. 65-82.
- [KG11] D. Kelly y G.A. Gottwald. "On the topology of synchrony optimized networks of a Kuramoto-model with non-identical oscillators". En: *Chaos* 21.2 (2011). DOI: [10.1063/1.3590855](https://doi.org/10.1063/1.3590855).
- [KHDG15] N.E. Kouvaris, S. Hata y A. Díaz-Guilera. "Pattern formation in multiplex networks". En: *Scientific Reports* 5 (2015). DOI: [10.1038/srep10840](https://doi.org/10.1038/srep10840).
- [Kiv+14] M. Kivelä et al. "Multilayer networks". En: *Journal of Complex Networks* 2.3 (2014), págs. 203-271. DOI: [10.1093/comnet/cnu016](https://doi.org/10.1093/comnet/cnu016).

- [KM05] R. Karmakar y S.S. Manna. "Sandpile model on an optimized scale-free network on Euclidean space". En: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 38.6 (2005), págs. L87-L93. DOI: [10.1088/0305-4470/38/6/L03](https://doi.org/10.1088/0305-4470/38/6/L03).
- [Kon+14] D. Kondor et al. "Do the rich get richer? An empirical analysis of the Bitcoin transaction network". En: *PLoS ONE* 9.2 (2014). DOI: [10.1371/journal.pone.0086197](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0086197).
- [Kra99] D. Krackhardt. "The ties that torture: Simmelian tie analysis in organizations". En: *Research in the Sociology of Organizations* 16 (1999), págs. 183-210.
- [Kur75] Y. Kuramoto. "Self-entrainment of a population of coupled nonlinear oscillators". En: *Lecture Notes in Physics* 39 (1975), págs. 420-422.
- [Kur84] Y. Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Springer Series in Synergetics. Springer Berlin Heidelberg, 1984. ISBN: 9783642696893.
- [LaC+05] D.J. LaCount et al. "A protein interaction network of the malaria parasite *Plasmodium falciparum*". En: *Nature* 438.7064 (2005), págs. 103-107. DOI: [10.1038/nature04104](https://doi.org/10.1038/nature04104).
- [Lee+04a] D.-S. Lee et al. "Branching Process Approach to Avalanche Dynamics on Complex Networks". En: *Journal of the Korean Physical Society* 44.3 I (2004), págs. 633-637.
- [Lee+04b] D.-S. Lee et al. "Sandpile avalanche dynamics on scale-free networks". En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 338.1-2 SPEC. ISS. (2004), págs. 84-91. DOI: [10.1016/j.physa.2004.02.028](https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.02.028).
- [LGK12] K.-M. Lee, K.-I. Goh e I.-M. Kim. "Sandpiles on multiplex networks". En: *Journal of the Korean Physical Society* 60.4 (2012), págs. 641-647. DOI: [10.3938/jkps.60.641](https://doi.org/10.3938/jkps.60.641).
- [LH91] E.T. Lu y R.J. Hamilton. "Avalanches and the distribution of solar flares". En: *Astrophysical Journal* 380.2 PART 2 (1991), págs. L89-L92.
- [Lin+05] C.-Y. Lin et al. "hp-DPI: Helicobacter pylori database of protein interactomes - Embracing experimental and inferred interactions". En: *Bioinformatics* 21.7 (2005), págs. 1288-1290. DOI: [10.1093/bioinformatics/bti101](https://doi.org/10.1093/bioinformatics/bti101).
- [Lin02] J. Link. "Does food web theory work for marine ecosystems?" En: *Marine Ecology Progress Series* 230 (2002), págs. 1-9.
- [LKK05] J. Lahtinen, J. Kertész y K. Kaski. "Sandpiles on Watts-Strogatz type small-worlds". En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 349.3-4 (2005), págs. 535-547. DOI: [10.1016/j.physa.2004.10.024](https://doi.org/10.1016/j.physa.2004.10.024).
- [LMG15] K.-M. Lee, B. Min y K.-I. Goh. "Towards real-world complexity: an introduction to multiplex networks". En: *European Physical Journal B* 88.2 (2015). DOI: [10.1140/epjb/e2015-50742-1](https://doi.org/10.1140/epjb/e2015-50742-1).
- [Lot+16] L. Lotero et al. "Rich do not rise early: Spatio-temporal patterns in the mobility networks of different socio-economic classes". En: *Royal Society Open Science* 3.10 (2016). DOI: [10.1098/rsos.150654](https://doi.org/10.1098/rsos.150654).

- [LPDG17] D. Levis, I. Pagonabarraga y A. Díaz-Guilera. "Synchronization in dynamical networks of locally coupled self-propelled oscillators". En: *Physical Review X* 7.1 (2017). DOI: [10.1103/PhysRevX.7.011028](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.7.011028).
- [Lus+03] D. Lusseau et al. "The bottlenose dolphin community of doubtful sound features a large proportion of long-lasting associations: Can geographic isolation explain this unique trait?" En: *Behavioral Ecology and Sociobiology* 54.4 (2003), págs. 396-405. DOI: [10.1007/s00265-003-0651-y](https://doi.org/10.1007/s00265-003-0651-y).
- [Mac60] D. MacRae. "Direct factor analysis of sociometric data". En: *Sociometry* (1960).
- [Mar91] N.D. Martinez. "Artifacts or attributes? Effects of resolution on the Little Rock Lake food web". En: *Ecological Monographs* 61.4 (1991), págs. 367-392. DOI: [10.2307/2937047](https://doi.org/10.2307/2937047).
- [Mat+15] J.T. Matamalas et al. "Strategical incoherence regulates cooperation in social dilemmas on multiplex networks". En: *Scientific Reports* 5 (2015). DOI: [10.1038/srep09519](https://doi.org/10.1038/srep09519).
- [McA+16] R.T.J. McAteer et al. "25 years of self-organized criticality: Numerical detection methods". En: *Space Sci. Rev.* 198 (2016), pág. 217.
- [MG14] D. Marković y C. Gros. "Power laws and self-organized criticality in theory and nature". En: *Physics Reports* 536.2 (2014), págs. 41-74. DOI: [10.1016/j.physrep.2013.11.002](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2013.11.002).
- [Mil+02] R. Milo et al. "Network motifs: Simple building blocks of complex networks". En: *Science* 298.5594 (2002), págs. 824-827. DOI: [10.1126/science.298.5594.824](https://doi.org/10.1126/science.298.5594.824).
- [Mil+04] R. Milo et al. "Superfamilies of Evolved and Designed Networks". En: *Science* 303.5663 (2004), págs. 1538-1542. DOI: [10.1126/science.1089167](https://doi.org/10.1126/science.1089167).
- [Mil67] S. Milgram. "The small world problem". En: *Psychology Today* 1 (mayo de 1967), págs. 61-67.
- [MM97] J.H. Michael y J.G. Massey. "Modeling the communication network in a sawmill". En: *Forest Products Journal* 47.9 (1997), págs. 25-30.
- [MMC00] J. Memmott, N.D. Martinez y J.E. Cohen. "Predators, parasitoids and pathogens: Species richness, trophic generality and body sizes in a natural food web". En: *Journal of Animal Ecology* 69.1 (2000), págs. 1-15. DOI: [10.1046/j.1365-2656.2000.00367.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-2656.2000.00367.x).
- [MMZ04] S.C. Manrubia, A.S. Mikhailov y D.H. Zanette. *Emergence Of Dynamical Order: Synchronization Phenomena In Complex Systems*. World Scientific Lecture Notes In Complex Systems. World Scientific Publishing Company, 2004. ISBN: 9789814482950. URL: <https://books.google.es/books?id=tgbJCgAAQBAJ>.
- [Mor+17] A.J. Morales et al. "Global patterns of synchronization in human communications". En: *Journal of the Royal Society Interface* 14.128 (2017). DOI: [10.1098/rsif.2016.1048](https://doi.org/10.1098/rsif.2016.1048).

- [Mot+02] M. Motz et al. "Elucidation of an archaeal replication protein network to generate enhanced PCR enzymes". En: *Journal of Biological Chemistry* 277.18 (2002), págs. 16179-16188. DOI: [10.1074/jbc.M107793200](https://doi.org/10.1074/jbc.M107793200).
- [MSLC01] M. McPherson, L. Smith-Lovin y J.M. Cook. "Birds of a feather: Homophily in social networks". En: *Annual Review of Sociology* 27 (2001), págs. 415-444.
- [MV02] Y. Moreno y A. Vazquez. "The Bak-Sneppen model on scale-free networks". En: *Europhysics Letters* 57.5 (2002), págs. 765-771. DOI: [10.1209/epl/i2002-00529-8](https://doi.org/10.1209/epl/i2002-00529-8).
- [Mye03] C.R. Myers. "Software systems as complex networks: Structure, function, and evolvability of software collaboration graphs". En: *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 68.4 2 (2003), págs. 461161-4611615.
- [New02] M.E.J. Newman. "Assortative Mixing in Networks". En: *Physical Review Letters* 89.20 (2002). DOI: [10.1103/PhysRevLett.89.208701](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.208701).
- [New03a] M.E.J. Newman. "Mixing patterns in networks". En: *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 67.2 2 (2003), págs. 261261-2612613.
- [New03b] M.E.J. Newman. "The structure and function of complex networks". En: *SIAM Review* 45.2 (2003), págs. 167-256. DOI: [10.1137/S003614450342480](https://doi.org/10.1137/S003614450342480).
- [NG04] M.E.J. Newman y M. Girvan. "Finding and evaluating community structure in networks". En: *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 69.2 2 (2004), págs. 026113-1-026113-15. DOI: [10.1103/PhysRevE.69.026113](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.69.026113).
- [NM14] R. Noldus y P.V. Mieghem. "Assortativity in complex networks". En: *Journal of Complex Networks* 3.4 (2014), págs. 507-542. DOI: [10.1093/comnet/cnv005](https://doi.org/10.1093/comnet/cnv005).
- [NNG04] P. Noirot y M.-F. Noirot-Gros. "Protein interaction networks in bacteria". En: *Current Opinion in Microbiology* 7.5 (2004), págs. 505-512. DOI: [10.1016/j.mib.2004.08.005](https://doi.org/10.1016/j.mib.2004.08.005).
- [NP03] M.E.J. Newman y J. Park. "Why social networks are different from other types of networks". En: *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 68.3 2 (2003), págs. 361221-3612218.
- [Né+00a] Z. Neda et al. "Physics of the rhythmic applause". En: *Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics* 61.6 B (2000), págs. 6987-6992. DOI: [10.1103/PhysRevE.61.6987](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.61.6987).
- [Né+00b] Z. Neda et al. "The sound of many hands clapping". En: *Nature* 403.6772 (2000), págs. 849-850. DOI: [10.1038/35002660](https://doi.org/10.1038/35002660).
- [OA08] E. Ott y T.M. Antonsen. "Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators". En: *Chaos* 18.3 (2008). DOI: [10.1063/1.2930766](https://doi.org/10.1063/1.2930766).
- [OA09] E. Ott y T.M. Antonsen. "Long time evolution of phase oscillator systems". En: *Chaos* 19.2 (2009). DOI: [10.1063/1.3136851](https://doi.org/10.1063/1.3136851).

- [OFC92] Z. Olami, H.J.S. Feder y K. Christensen. "Self-organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modeling earthquakes". En: *Physical Review Letters* 68.8 (1992), págs. 1244-1247. DOI: [10.1103/PhysRevLett.68.1244](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.68.1244).
- [OHS17] K.P. O'Keeffe, H. Hong y S.H. Strogatz. "Oscillators that sync and swarm". En: *Nature Communications* 8.1 (2017). DOI: [10.1038/s41467-017-01190-3](https://doi.org/10.1038/s41467-017-01190-3).
- [Opi96] S. Opitz. "Trophic interactions in Caribbean coral reefs". En: *Trophic Interactions in Caribbean Coral Reefs* (1996).
- [PBH10] R. Parshani, S.V. Buldyrev y S. Havlin. "Interdependent networks: Reducing the coupling strength leads to a change from a first to second order percolation transition". En: *Physical Review Letters* 105.4 (2010). DOI: [10.1103/PhysRevLett.105.048701](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.048701).
- [Pol91] G.A. Polis. "Complex trophic interactions in deserts: an empirical critique of food-web theory". En: *American Naturalist* 138.1 (1991), págs. 123-155. DOI: [10.1086/285208](https://doi.org/10.1086/285208).
- [Pot+02] J.J. Potterat et al. "Risk network structure in the early epidemic phase of HIV transmission in Colorado Springs". En: *Sexually Transmitted Infections* 78.SUPPL. 1 (2002), págs. i159-i163.
- [PPZ08] M. Piraveenan, M. Prokopenko y A.Y. Zomaya. "Local assortativeness in scale-free networks". En: *EPL* 84.2 (2008). DOI: [10.1209/0295-5075/84/28002](https://doi.org/10.1209/0295-5075/84/28002).
- [Pru12] G. Pruessner. *Self-Organised Criticality: Theory, Models and Characterisation*. Self-organised Criticality: Theory, Models, and Characterisation. Cambridge University Press, 2012. ISBN: 9780521853354. URL: <https://books.google.es/books?id=TXKcpGqMSDYC>.
- [PS03] V.F. Pisarenko y D. Sornette. "Characterization of the frequency of extreme earthquake events by the Generalized Pareto Distribution". En: *Pure and Applied Geophysics* 160.12 (2003), págs. 2343-2364. DOI: [10.1007/s00024-003-2397-x](https://doi.org/10.1007/s00024-003-2397-x).
- [PSVV01] R. Pastor-Satorras, A. Vázquez y A. Vespignani. "Dynamical and correlation properties of the internet". En: *Physical review letters* 87.25 (2001), pág. 258701.
- [RA13] F. Radicchi y A. Arenas. "Abrupt transition in the structural formation of interconnected networks". En: *Nature Physics* 9.11 (2013), págs. 717-720. DOI: [10.1038/nphys2761](https://doi.org/10.1038/nphys2761).
- [Rod+16] F.A. Rodrigues et al. "The Kuramoto model in complex networks". En: *Physics Reports* 610 (2016), págs. 1-98. DOI: [10.1016/j.physrep.2015.10.008](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2015.10.008).
- [RRK10] D. Rybski, H.D. Rozenfeld y J.P. Kropp. "Quantifying long-range correlations in complex networks beyond nearest neighbors". En: *EPL* 90.2 (2010). DOI: [10.1209/0295-5075/90/28002](https://doi.org/10.1209/0295-5075/90/28002).

- [Rua+05] J.-F. Rual et al. "Towards a proteome-scale map of the human protein-protein interaction network". En: *Nature* 437.7062 (2005), págs. 1173-1178. DOI: [10.1038/nature04209](https://doi.org/10.1038/nature04209).
- [RW96] D.P. Reagan y R.B. Waide. "The Food Web of a Tropical Rain Forest". En: *The Food Web of a Tropical Rain Forest* (1996).
- [Sch+94] R.C. Schmidt et al. "Effects of Social and Physical Variables on Between-Person Visual Coordination". En: *Ecological Psychology* 6.3 (1994), págs. 159-183. DOI: [10.1207/s15326969eco0603_1](https://doi.org/10.1207/s15326969eco0603_1).
- [SCT90] R.C. Schmidt, C. Carello y M.T. Turvey. "Phase Transitions and Critical Fluctuations in the Visual Coordination of Rhythmic Movements Between People". En: *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance* 16.2 (1990), págs. 227-247. DOI: [10.1037/0096-1523.16.2.227](https://doi.org/10.1037/0096-1523.16.2.227).
- [SE+15] R. Sevilla-Escoboza et al. "Enhancing the stability of the synchronization of multivariable coupled oscillators". En: *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 92.3 (2015). DOI: [10.1103/PhysRevE.92.032804](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.032804).
- [SGGA17] A.B. Serrano, J. Gómez-Gardeñes y R.F.S. Andrade. "Optimizing diffusion in multiplexes by maximizing layer dissimilarity". En: *Phys. Rev. e* 95 (2017), pág. 052312.
- [SJH08] S.-W. Son, H. Jeong y H. Hong. "Relaxation of synchronization on complex networks". En: *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 78.1 (2008). DOI: [10.1103/PhysRevE.78.016106](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.78.016106).
- [SK04] O. Sporns y R. Kötter. "Motifs in brain networks". En: *PLoS Biol* 2.11 (2004).
- [SLT10] M. Szell, R. Lambiotte y S. Thurner. "Multirelational organization of large-scale social networks in an online world". En: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 107.31 (2010), págs. 13636-13641. DOI: [10.1073/pnas.1004008107](https://doi.org/10.1073/pnas.1004008107).
- [SNC02] R. Sánchez, D.E. Newman y B.A. Carreras. "Waiting-time statistics of self-organized-criticality systems". En: *Physical Review Letters* 88.6 (2002), págs. 068302/1-068302/4.
- [Sol+13] L. Solá et al. "Eigenvector centrality of nodes in multiplex networks". En: *Chaos* 23.3 (2013). DOI: [10.1063/1.4818544](https://doi.org/10.1063/1.4818544).
- [Sor12] F. Sorrentino. "Synchronization of hypernetworks of coupled dynamical systems". En: *New Journal of Physics* 14 (2012). DOI: [10.1088/1367-2630/14/3/033035](https://doi.org/10.1088/1367-2630/14/3/033035).
- [SR+13] A. Solé-Ribalta et al. "Spectral properties of the Laplacian of multiplex networks". En: *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 88.3 (2013). DOI: [10.1103/PhysRevE.88.032807](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.88.032807).

- [Sta99] H.E. Stanley. "Scaling, universality, and renormalization: Three pillars of modern critical phenomena". En: *Reviews of Modern Physics* 71.SUPPL. 2 (1999), S358-S366.
- [Str+05] S.H. Strogatz et al. "Crowd synchrony on the Millennium Bridge". En: *Nature* 438.7064 (2005), págs. 43-44. DOI: [10.1038/43843a](https://doi.org/10.1038/43843a).
- [Str01] S.H. Strogatz. "Exploring complex networks". En: *Nature* 410.6825 (2001), págs. 268-276. DOI: [10.1038/35065725](https://doi.org/10.1038/35065725).
- [Str04] S. Strogatz. *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order*. Penguin Books Limited, 2004. ISBN: 9780141933184.
- [TDMS99] C. Tebaldi, M. De Menech y A.L. Stella. "Multifractal scaling in the bak-tang-wiesenfeld sandpile and edge events". En: *Physical Review Letters* 83.19 (1999), págs. 3952-3955. DOI: [10.1103/PhysRevLett.83.3952](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.3952).
- [Tho05] H.D. Thoreau. *Life Without Principle*. Simple life series. Arthur C. Fifield, 1905. URL: https://en.wikisource.org/wiki/The_Atlantic_Monthly/Volume_12/Number_71/Life_Without_Principle.
- [Tow+98] C.R. Townsend et al. "Disturbance, resource supply, and food-web architecture in streams". En: *Ecology Letters* 1.3 (1998), págs. 200-209.
- [Uet+06] P. Uetz et al. "Herpesviral protein networks and their interaction with the human proteome". En: *Science* 311.5758 (2006), págs. 239-242. DOI: [10.1126/science.1116804](https://doi.org/10.1126/science.1116804).
- [VA97] N. Vandewalle y M. Ausloos. "Construction and properties of fractal trees with tunable dimension: The interplay of geometry and physics". En: *Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics* 55.1 (1997), págs. 94-98. DOI: [10.1103/PhysRevE.55.94](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.55.94).
- [Wan+16] Y. Wang et al. "Growth, collapse, and self-organized criticality in complex networks". En: *Scientific Reports* 6 (2016). DOI: [10.1038/srep24445](https://doi.org/10.1038/srep24445).
- [War89] P.H. Warren. "Spatial and temporal variation in the structure of a freshwater food web". En: *Oikos* 55.3 (1989), págs. 299-311.
- [Whi+86] J.G. White et al. "The Structure of the Nervous System of the Nematode *Caenorhabditis elegans*". En: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 314 (1986).
- [WMY15] Akitomo Watanabe, Shogo Mizutaka y Kousuke. Yakubo. "Fractal and Small-World Networks Formed by Self-Organized Critical Dynamics". En: *JOURNAL OF THE PHYSICAL SOCIETY OF JAPAN* 84.11 (2015).
- [WS98] D.J. Watts y S.H. Strogatz. "Collective dynamics of small-world networks". En: *Nature* 393.6684 (1998), págs. 409-410.
- [WSP12] Z. Wang, A. Szolnoki y M. Perc. "Evolution of public cooperation on interdependent networks: The impact of biased utility functions". En: *EPL* 97.4 (2012). DOI: [10.1209/0295-5075/97/48001](https://doi.org/10.1209/0295-5075/97/48001).

- [WWP14] Z. Wang, L. Wang y M. Perc. "Degree mixing in multilayer networks impedes the evolution of cooperation". En: *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 89.5 (2014). DOI: [10.1103/PhysRevE.89.052813](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.89.052813).
- [Yod00a] P. Yodzis. "Diffuse effects in food webs". En: *Ecology* 81.1 (2000), págs. 261-266. DOI: [10.1890/0012-9658\(2000\)081\[0261:DEIFW\]2.0.CO;2](https://doi.org/10.1890/0012-9658(2000)081[0261:DEIFW]2.0.CO;2).
- [Yod00b] P. Yodzis. "Diffuse effects in food webs". En: *Ecology* 81.1 (2000), págs. 261-266. DOI: [10.1890/0012-9658\(2000\)081\[0261:DEIFW\]2.0.CO;2](https://doi.org/10.1890/0012-9658(2000)081[0261:DEIFW]2.0.CO;2).
- [Yoo+15] S. Yoon et al. "Critical behavior of the relaxation rate, the susceptibility, and a pair correlation function in the Kuramoto model on scale-free networks". En: *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 91.3 (2015). DOI: [10.1103/PhysRevE.91.032814](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.032814).
- [YY11] K. Yokoyama e Y. Yamamoto. "Three people can synchronize as coupled oscillators during sports activities". En: *PLoS Computational Biology* 7.10 (2011). DOI: [10.1371/journal.pcbi.1002181](https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1002181).
- [Zac77] W.W. Zachary. "An information flow model for conflict and fission in small groups". En: *Journal of Anthropological Research* 33 (1977), págs. 452-473.
- [Zel50] L.D. Zeleny. "Adaptation of research findings in social leadership to college classroom procedures". En: *Sociometry* 13 (1950).