

Decoherencia en teletransporte cuántico

André Luiz Fonseca de Oliveira, Efrain Buksman

fonseca@ort.edu.uy, buksman@ort.edu.uy
Universidad ORT Uruguay
Uruguay

Resumen: En este artículo se analiza el efecto de la decoherencia en los canales cuánticos de comunicación existentes en el método de teletransporte cuántico. De forma a proteger la información los qubits enviados son protegidos mediante la utilización de un código cuántico corrector de 5-qubits. Se muestra la mejora obtenida por la utilización de la codificación, tanto en el valor esperado de la fidelidad como en la desviación estándar de los resultados.

Palabras clave: Teletransporte cuántico, códigos correctores cuánticos, propagación de errores cuánticos.

Abstract: In this article we analyze the effect of decoherence in quantum communication channels, channels that are used in the quantum teleportation method. In order to protect the information the qubits are protected by the use of a 5-qubits correction quantum code. The improvement obtained by the use of coding is shown for the expected value of the fidelity and the standard deviation of the results.

Keywords: Quantum teleport, quantum corrective codes, propagation of quantum errors.

1. Introducción

El teletransporte cuántico es un método de comunicación que permite el transporte de información de un estado cuántico desconocido, de un punto a otro usando un estado entrelazado previamente establecido entre el emisor y el receptor, o generado por una tercera parte [Bennett93]. Lamentablemente el ruido es parte inherente de toda computación cuántica. En particular la decoherencia que sufre el estado entrelazado compartido, afecta directamente el resultado del teletransporte [Ishizaka01][Oh08].

Algunas soluciones han sido sugeridas, como usar técnicas de destilación de entrelazamiento de varias copias [Bennett96], el uso un estado entrelazado multiqubit compartido [Espoukeh14], la aplicación de medidas tenues (*weak measurement*) [Pramanik13], y la corrección del error utilizando un código cuántico de corrección parcial de tres qubits [Thacker15].

En este artículo se estudia el efecto de la degradación del estado enviado ocasionada por la presencia de errores en los canales cuánticos. Como modelos de errores son utilizados errores de despolarización de canal (*DCh*) y errores unitarios aleatorios (*XYZ*) de forma que representen efectos de decoherencia. El uso del errores unitarios aleatorios permite la observación del efecto de la desviación estadística en un ensamble de estados a enviar, ya que la representación con operadores de densidad solamente contiene información del valor esperado de la fidelidad del ensamble.

De forma a proteger la información cuántica se propone la codificación de los qubits enviados por canales cuánticos, siendo utilizado un código cuántico corrector de 5-qubits. Se considera que los errores afectan a todos los qubits codificados por igual, de modo que no se puede realizar una corrección perfecta del estado. Aun en este caso, se muestra que por debajo de cierto umbral de error conviene siempre codificar y corregir.

El paper está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se introduce el algoritmo de teletransporte

cuántico. En sección 3.1 son introducidos dos modelos de errores que permiten comparar los resultados entre el valor esperado, utilizando operadores de densidad y de Kraus, y de la desviación de los resultados utilizando un análisis estadístico con ensambles de estados puros. En la sección 3.2 se introduce el código cuántico corrector de 5-qubits. En la sección 4 son analizados los efectos de los errores en el teletransporte con y sin utilización de codificación. Finalmente en la sección 5 se detallan las conclusiones de los trabajos realizados.

2. El teletransporte cuántico

El teletransporte cuántico es una técnica que posibilita el envío de información (estado cuántico) aún en ausencia de un canal cuántico, como indicado en la figura 1.

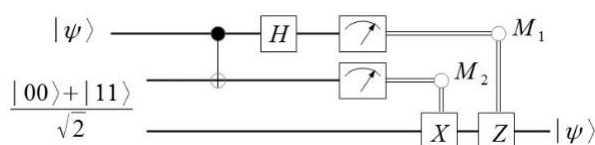


Figura 1: Algoritmo de teletransporte cuántico.

En la hipótesis que el emisor (Alice) y el receptor (Bob) comparten previamente un estado entrelazado $|\beta_{00}\rangle$ (estado de Bell), y que la información a enviar es el estado $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + b|1\rangle$, se tiene que estado completo (3 qubits) es

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha|0\rangle(|00\rangle + |11\rangle) + b|1\rangle(|00\rangle + |11\rangle)]. \quad (1)$$

Luego de la aplicación de los operadores *Cnot* y *Hadamard* el estado resultante es

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2} [|00\rangle(\alpha|0\rangle + b|1\rangle) + |01\rangle(\alpha|1\rangle + b|0\rangle) + |10\rangle(\alpha|0\rangle - b|1\rangle) + |11\rangle(\alpha|1\rangle - b|0\rangle)]. \quad (2)$$

Así, luego de realizar las mediciones en los dos primeros qubits el emisor (Alice) solo debe enviar por un canal

clásico el resultado para que el receptor (Bob) pueda aplicar los operadores correspondientes de acuerdo a la tabla

Tabla 1: Uso de operadores según la medición para el teletransporte cuántico.

Medición (M1 M2)	Operadores
00	Ninguno
01	X
10	Z
11	ZX

Como se puede observar, en el caso de la ausencia de errores, el estado final obtenido por el receptor es siempre igual al estado original enviado.

Cabe mencionar que el estado entrelazado puede ser originado por una tercera parte (Carl), la cual envía un qubit para cada una de las partes de la comunicación (Alice y Bob). Así, no es necesario la utilización de un canal cuántico entre las partes.

3. Corrección de errores cuánticos

El análisis y modelado de errores es fundamental en la implementación de cualquier equipo o sistema. Es así en todas las áreas de la ingeniería: la civil, la electrónica, la química, la informática y otras. Esto permite conocer la incertidumbre de los resultados e investigar técnicas de reducción de errores, aumentando la eficiencia de los mismos. En la computación cuántica esto también es cierto. Existen diversas fuentes de error en los algoritmos cuánticos [Clerk10] [Devitt13]:

- errores resultantes debidos al no determinismo del resultado de los algoritmos cuánticos [Cleve98] [Ekert01],
- errores debido a la decoherencia [Breuer07] [Shlosshauer05] [Zurek03],
- errores sistemáticos e imperfecciones en los equipos de control, procesos de medición y aplicación de compuertas [Cummins03].

En esta sección se introduce dos modelos de errores utilizados con la finalidad de analizar el efecto de la degradación del desempeño del algoritmo de teletransporte cuántico ocasionado por la presencia de decoherencia en canales de comunicación. A continuación, se propone un código cuántico corrector con la intención de preservar la información cuántica del algoritmo.

3.1. Modelo de errores cuánticos

Una forma natural de modelar la dinámica de un sistema cuántico abierto es mediante la hipótesis de una interacción del sistema de interés (con un estado cuántico ρ) con un sistema ambiente (con estado ρ_{amb}) formando ambos un sistema cuántico cerrado. De esta forma el sistema completo, $\hat{\rho} = \rho \otimes \rho_{amb}$, evoluciona mediante una transformación unitaria.

Así, considerando U el operador unitario que modela la interacción, el estado resultante es calculado como

$$\rho_f = \text{Tr}_{amb}(U\hat{\rho}U^\dagger) \quad (3)$$

La figura 2 ilustra este modelo de interacción.

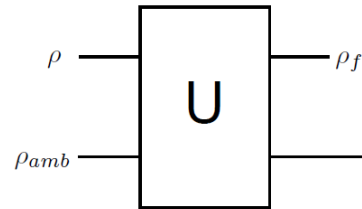


Figura 2: Modelo de error de decoherencia.

Una forma alternativa de modelar este fenómeno es mediante el uso del formalismo de representación de suma de operadores (*Operator-sum representation*) [Nielsen00]. La operación cuántica de error viene dada por

$$\epsilon(\rho) = \sum_i E_i \rho E_i^\dagger \quad (4)$$

donde los operadores E_i son llamados operadores de Kraus, y en caso de preservar la traza cumplen $\sum_i E_i E_i^\dagger = I$.

3.1.1. Error de despolarización de canal

El error de despolarización de canal (*DCh*) es un modelo de error de decoherencia que altera el estado cuántico con igual probabilidad p en todas las direcciones del espacio. Esto equivale a realizar un estado como una combinación entre el estado de máxima mezcla $I/2$ y el estado original ρ . Este modelo trabaja con el operador de densidad que representa el valor esperado de un ensamble de estados cuánticos, denominado estado cuántico mezcla.

Para un estado cuántico de 1 qubit se tiene

$$\epsilon(\rho) = p \frac{I}{2} + (1-p)\rho, \quad (5)$$

siendo I la matriz identidad de 2×2 .

Para el caso del error *DCh* los operadores de Kraus son

$$E_0^p = \sqrt{1 - \frac{3p}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, E_1^p = \sqrt{\frac{p}{4}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$E_2^p = \sqrt{\frac{p}{4}} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, E_3^p = \sqrt{\frac{p}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

siendo

$$\epsilon^p(\rho) = \sum_{i=0}^3 E_i^p \rho E_i^{p\dagger}. \quad (7)$$

3.1.2. Errores unitarios aleatorios

Con la finalidad de conocer la desviación de los resultados debidos a la decoherencia en el canal se presenta un modelo de error equivalente a una despolarización de canal mediante operadores unitarios aleatorios.

El operador unitario utilizado es definido como

$$U_{XYZ}(k) = e^{i(\alpha_x(k)X + \alpha_y(k)Y + \alpha_z(k)Z)}, \quad (8)$$

siendo $\alpha_{x,y,z}(k)$ variables aleatorias con una función de densidad de probabilidad normal, con media cero y desviación estándar γ . Así, el estado resultante es

$$|\hat{\psi}(k)\rangle = U_{XYZ}(k)|\psi(k)\rangle. \quad (9)$$

La figura 3 ilustra el ensamble de 10.000 estados resultantes del error XYZ aplicado a un estado cuántico puro de 1 qubit.

Los ensambles de estados cuánticos ocasionados por errores del tipo XYZ son representados por una matriz de densidad equivalente a la aplicación de un error del tipo DCh al estado puro original. Esta relación de equivalencia entre los valores de γ y p es ilustrada en la figura 4. En la figura 5 se aprecia la equivalencia entre la fidelidad resultante de un error DCh y la de la mezcla resultante del error XYZ aplicado a 25.000 estados puros (idénticos) originales. También se aprecia, a diferencia de la representación mediante operadores de densidad, la desviación de los estados puros finales.

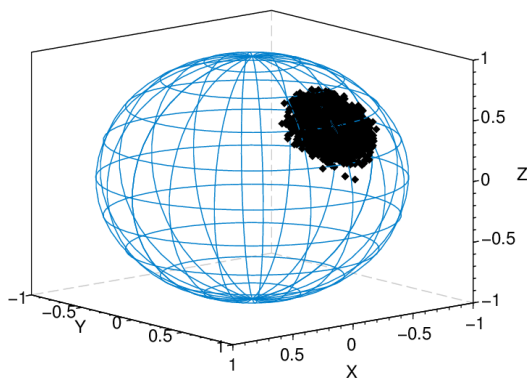


Figura 3: Ensamble de 10.000 estados cuánticos originados por la aplicación de un error del tipo XYZ ($\gamma = 0,05$) a un estado cuántico puro (esfera de Bloch).

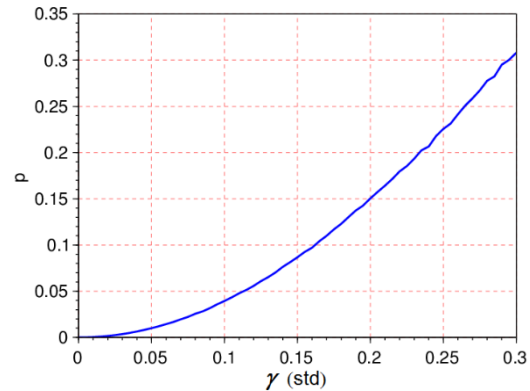


Figura 4: Equivalencia entre un error del tipo XYZ (γ) y un error DCh (p).

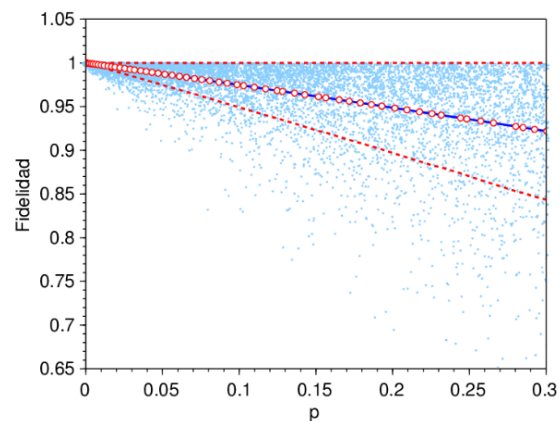


Figura 5: Fidelidad del estado resultante. Error DCh: fidelidad del estado mezcla (línea azul continua). Error XYZ en un ensamble de 25000 puntos: fidelidad del ensamble (círculos rojos), desviación estándar de la fidelidad (líneas rojas punteadas), y fidelidad de cada estado resultante (puntos celestes).

3.2. Código corrector de 5 qubits

Desde el principio del desarrollo de la computación cuántica ha existido el interés de preservar la información frente la existencia de errores. A similitud de la computación clásica, una de las propuestas con mayor estudio ha sido la utilización de códigos cuánticos correctores [Sho95] [Laflamme96] [Got97].

En [DiVincenzo96] David DiVincenzo y Peter Shor proponen un código cuántico corrector de 5 qubits, la cual es la mínima cantidad de qubits necesaria para posibilitar la corrección de un error arbitrario en un único qubit [Nakahara08]. A continuación, se detallará la construcción de este código.

3.2.1. Circuito codificador

El circuito codificador es ilustrado en la figura 6. El estado cuántico $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ es codificado en el estado de 5 qubits $|\Psi\rangle = a|0\rangle_L + b|1\rangle_L$ siendo

$$\begin{aligned}
 |0\rangle_z = \frac{1}{4} [& |0000\rangle + |11000\rangle + |01100\rangle + |00110\rangle \\
 & + |00011\rangle + |10001\rangle - |10100\rangle - |01010\rangle \\
 & - |00101\rangle - |10010\rangle - |01001\rangle - |11110\rangle \\
 & - |01111\rangle - |10111\rangle - |11011\rangle - |11101\rangle].
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 |1\rangle_z = \frac{1}{4} [& |11111\rangle + |00111\rangle + |10011\rangle + |11001\rangle \\
 & + |11100\rangle + |01110\rangle - |01011\rangle - |10101\rangle \\
 & - |11010\rangle - |01101\rangle - |10110\rangle - |00001\rangle \\
 & - |10000\rangle - |01000\rangle - |00100\rangle - |00010\rangle].
 \end{aligned} \tag{11}$$

El circuito decodificador es similar, en donde se realizan las operaciones en modo inverso.

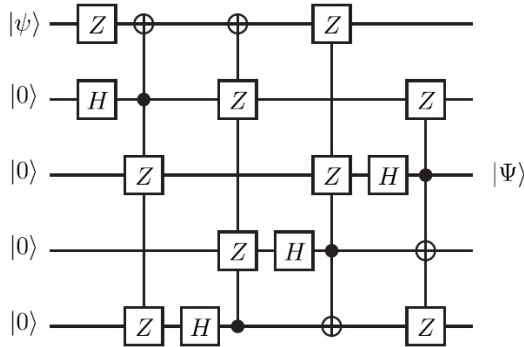


Figura 6: Código de 5 qubits. Circuito codificador.

3.2.2. Circuito corrector

Para el cálculo del síndrome y así determinar la corrección necesaria se utiliza el circuito de la figura 7, en cuál se aprecia la utilización de 4 qubits para las ancillas auxiliares. El resultado de la medición de las ancillas (M_0, M_1, M_2, M_3) determina la acción correctiva necesaria según la tabla 2.

4. Análisis de errores en el teletransporte

En esta sección se analiza el efecto de los errores en los canales de comunicación cuánticos en el método de teletransporte. Se toma como hipótesis que todas las líneas no locales de comunicación cuántica poseen la misma probabilidad de error. Esta considera en función de la desviación estándar γ del error tipo XYZ indicada mediante su equivalencia con el parámetro p de un error DCh .

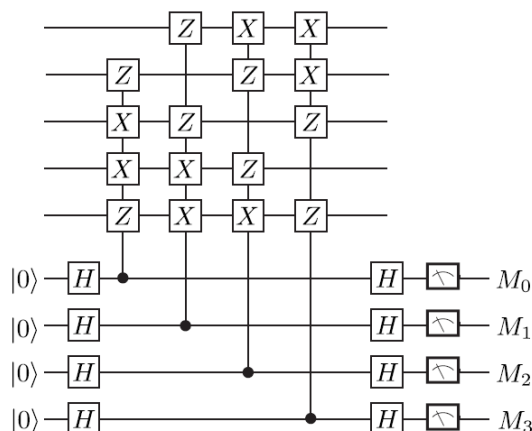


Figura 7: Código de 5 qubits. Síndrome.

Tabla 2: Código de 5 qubits. Operadores para la corrección según el síndrome.

$M_0 M_1 M_2 M_3$	Operadores (según qubit)
0000	I
0100	X_0
1010	X_1
0101	X_2
0010	X_3
1001	X_4
0111	Y_0
1011	Y_1
1101	Y_2
1110	Y_3
1111	Y_4
0011	Z_0
0001	Z_1
1000	Z_2
1100	Z_3
0110	Z_4

4.1. Teletransporte con canal cuántico de un qubit

Si se considera el método de teletransporte cuando el emisor (Alice) es el que produce el par entrelazado, entonces se podría suponer que el principal error ocurre en el canal cuántico de comunicación al enviar uno de los qubits del estado de Bell, como ilustrado en la figura 8.

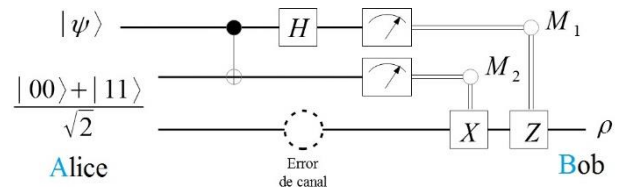


Figura 8: Algoritmo de teletransporte con canal cuántico de un qubit con error.

Como experimento numérico se compara el desempeño del método, mediante la fidelidad del estado final, cuando se utiliza el canal sin y con codificación. En el caso de enviar el qubit codificado, se supone un canal de 5 qubits, los cuales todos poseen el mismo error como indicado anteriormente. La figura 9 ilustra la fidelidad del ensamble para los casos sin codificación (línea sólida azul) y con codificación (línea sólida roja), en la cual se observa que, en media, la codificación es eficiente hasta errores con un valor de p aproximadamente 18.5%. Las líneas punteadas indican la desviación estándar de la fidelidad del ensamble para cada caso. Como se observa el ancho de la desviación también mejora para el caso codificado (rojo).

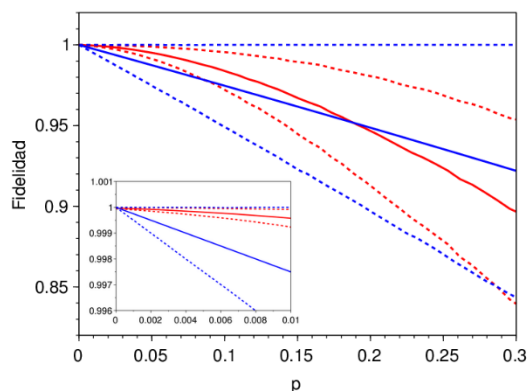


Figura 9: Fidelidad del estado final en el algoritmo de teletransporte. Las líneas sólidas representan la fidelidad del ensamble final y las punteadas la desviación estándar. Curvas azules corresponden al caso sin codificación y las curvas rojas para el caso de codificar un qubit de envío.

4.2. Teletransporte con canal cuántico de dos qubits

Si se considera el caso en el cual el par entrelazado es generado por una tercera parte (Carl) y enviado, cada qubit, a ambos interlocutores de la comunicación (Alice y Bob), se posibilita una comunicación cuántica sin la necesidad de un canal cuántico directo entre ellos. En este caso se podría considerar que ambos qubits del par entrelazado están sujetos a error, como se muestra en la figura 10.

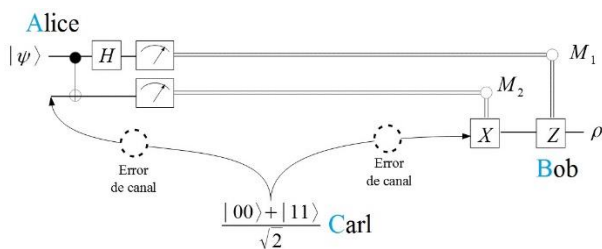


Figura 10: Algoritmo de teletransporte con canal cuántico de dos qubits con error.

En este caso se realiza un experimento similar al anterior, pero considerando errores en ambos qubits del par de Bell. Como se aprecia en la comparación ilustrada en la figura 11, a similitud de lo que ocurre con un único qubit la codificación es eficiente hasta un valor de p de aproximadamente 18,5%. Como se ve en el detalle de la figura, aún con presencia de errores en ambos qubits, la pérdida de fidelidad ocasionada es prácticamente despreciable para valores suficientemente chicos de p .

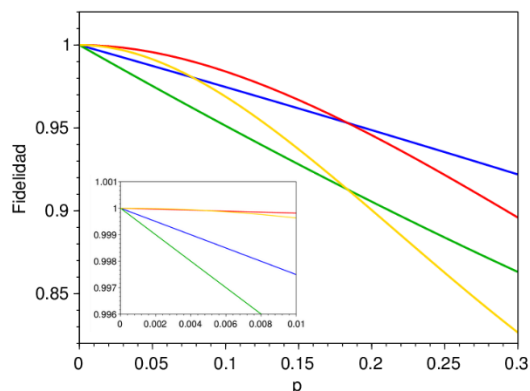


Figura 11: Fidelidad del estado final en el algoritmo de teletransporte. Las líneas azul y roja (las mismas de la figura 9) representan la fidelidad final en el caso de errores con canal cuántico de un qubit (casos sin y con codificación, respectivamente). Las líneas verde y amarilla representan la fidelidad final en el caso de errores con canal cuántico de dos qubit (casos sin y con codificación, respectivamente).

5. Conclusiones y trabajos futuros

En este artículo se ha analizado las limitaciones existentes en el método de teletransporte debidas al efecto de los errores de decoherencia existentes en los canales cuánticos de comunicación.

Se ha utilizado dos modelos de error equivalentes en lo que respecta a la fidelidad del envío de un ensamble de estados cuánticos (DCh y XYZ). Además, en el caso del modelo XYZ es posible apreciar la desviación estándar de la fidelidad del ensamble final.

Se ha visto que, con la utilización de un código cuántico corrector, el error se reduce considerablemente, especialmente en los casos de probabilidades de errores suficientemente pequeñas. También se ha determinado que para valores de probabilidad de error superiores a aproximadamente 18,5% la utilización de la codificación no tiene sentido.

Referencias bibliográficas

- [Bennett93] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters: Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, 70 (1993), p.1895.
- [Bennett96], C. Bennett, G. Brassard, S. Popescu, S. Schumacher, J. Smolin, W.K. Wootters: Purification of noisy entanglement and faithful teleportation via noisy Channels, *Phys. Rev. Lett.*, 76 (1996), pp. 722-725.
- [Breuer07] H.-P. Breuer and F. Petruccione. The Theory of Open Quantum Systems, Oxford University Press (2007).
- [Clerk10] A. A. Clerk, M. H. Devoret, S. M. Girvin, F. Marquardt, and R. J. Shoelkopf: Introduction to quantum noise, measurement, and amplification. *Rev. Mod. Phys.*, 82 (2010), pp. 1155-1208.

- [Cleve98] R. Cleve, A. Ekert, L. Henderson, C. Machiavello, and M. Mosca: On quantum algorithms. *Complexity*, 4 (1998), pp. 33-42.
- [Cummins03] H. K. Cummins, G. Llewellyn, and J. A. Jones, Tackling systematic errors in quantum logic gates with composite rotations. *Phys. Rev. A*, 67 (2003), p. 042308.
- [Devitt13] S. J. Devitt, W. J. Munro, and K. Nemoto: Quantum error correction for beginners. *Reports on Progress in Physics*, 76 (2013), p. 076001.
- [DiVincenzo96] D. P. DiVincenzo and P. W. Shor: Fault-Tolerant Error Correction with Efficient Quantum Codes. *Phys. Rev. Lett.*, 77 (1996), p. 3260.
- [Ekert01] A. Ekert, P. Hayden, and H. Inamori: Basic concepts in quantum computation. arXiv: 0011013v1 (2001).
- [Espoukeh14] P. Espoukeh and P. Pedram: Quantum teleportation through noisy channels with multi-qubit GHZ states. *Quantum Inf. Process*, 13 (2014), p. 1789.
- [Got97] D. Gottesman. *Stabilizer codes and quantum error correction*. PhD thesis, California Institute of Technology, (1997).
- [Ishizaka01] S. Ishizaka: Quantum channel locally interacting with environment. *Phys. Rev. A*, 63 (2001), pp.034301.
- [Laflamme96] R. Laflamme, C. M., J. P. Paz, and W. H. Zurek. Perfect quantum error correcting code. *Phys. Rev. Lett.*, 77 (1996), pp.198-201.
- [Nakahara08] M. Nakahara and T. Ohmi. *Quantum computing: from linear algebra to physical realizations*. CRC Press (2008).
- [Nielsen00] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge University Press (2000).
- [Oh08] S. Oh, L. Soonchil and L. Hai-woong: Fidelity of quantum teleportation through noisy channels, *Phys. Rev. A.*, 66 (2002), pp. 022316.
- [Pramanik13] T. Pramanik, A. S. Majumdar: Improving the fidelity of teleportation through noisy channels using weak measurement. *Phys. Lett. A*, 377 (2013), pp. 3209-3215.
- [Shlosshauer05] M. Shlosshauer: Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 76 (2005), pp. 1267-1305.
- [Sho95] P. W. Shor: Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory. *Phys. Rev. A*, 52 (1995), p. R2493.
- [Thacker15] W. Thacker, A. Gupta: quantum controlled error-correction teleportation (QCECT) scheme for satellite control and communication. arXiv:1512.00139v2 (2015).
- [Zurek03] W. H. Zurek: Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical, *Rev. Mod.Phys.*, 75 (2003), pp. 715-775.