UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE SISTEMAS INFORMÁTICOS

MODELO ALGEBRAICO CON
PRECÁLCULO DE OPERACIONES PARA
LA DETECCIÓN DE SITUACIONES
PELIGROSAS EN GRANDES
INSTALACIONES FERROVIARIAS

Tesis doctoral presentada por Roberto Maestre Martínez
(Maestría en inteligencia artificial)

Dirigida por los doctores Antonio Hernando Esteban y Eugenio Roanes Lozano

Titulo: *Modelo algebraico con precálculo de operaciones para la detección de situaciones peligrosas en grandes instalaciones ferroviarias*

Autor: Roberto Maestre Martinez

Directores: Antonio Hernando Esteban y Eugenio Roanes Lozano

Marzo 2018

Resumen

Comprobar la seguridad de una instalación ferroviaria es un problema desde el punto de vista del coste computacional ya que es un proceso muy laborioso. Distintos autores han desarrollado diferentes enfoques para verificar automáticamente la seguridad de diferentes instalaciones ferroviarias que varían de tamaño, desde pequeñas a medias. A pesar de que esos enfoques son muy simples de implementar, tienen el inconveniente de que requieren un gran tiempo de computación para realizar dichas comprobaciones, lo que hace inviable su aplicación a estaciones de tamaño grande.

En este trabajo se presenta un nuevo modelo capaz de I) detectar situaciones peligrosas en una estación ferroviaria cuando en ella circulan trenes ocupando una o varias secciones, y II) precalcular diferentes posibles situaciones de la instalación (trenes ocupando secciones, color de los semáforos o la conectividad de las secciones). Este precálculo permite reducir drásticamente el tiempo en el que se comprueba la seguridad de la instalación. Se implementará una estación real, compleja y de gran tamaño (Chamartín) para demostrar que, mejorando a sus modelos predecesores mas cercanos, es capaz de realizar los cálculos inherentes a la comprobación de la seguridad en un tiempo adecuado para su puesta aplicación a un entorno real.

Abstract

The safety of a railway station is a very important issue considered very labour-intensive. Different authors have developed different approaches in order to detect automatically the safety of small to midsize railway stations. Although these approaches are very simple to implement, they have the drawback of being unsuitable to large stations, since the algorithm takes large time to be run.

The present PhD thesis has the objective of presenting a new logic-algebraic model able to: I) check the safety in large railway stations when trains are located in a one or more sections, and II) precalculate different states of the station (trains located in sections, colour of the semaphores, position of the switches, etc ...). Once a precalculation is made for certain state, the time to check the safety in large railway networks is reduced dramatically. As a case study we provide a comparison between several models in a real large railway station (Chamartín) showing that the time results are suitable to check the safety of such a station.

Contenidos

Índice de Figuras	xi
Índice de tablas	xiii
1 Publicaciones científicas derivadas	1
2 Introducción	3
2.1 Conceptos ferroviarios	5
2.2 Conceptos Matemáticos	12
2.2.1 Semigrupo, Grupo y Grupo abeliano	12
2.2.2 Anillo	13
2.2.3 Anillo con unidad	13
2.2.4 Subanillo	13
2.2.5 Ideal	14
2.2.6 Cuerpo	14
2.2.7 Anillo de polinomios	14
2.2.8 Retículo	15
2.2.9 Álgebra de Boole	16
2.2.10 Anillo booleano	16
2.2.11 Anillo de polinomios booleano	17
2.2.12 Base de Groebner	18

CONTENIDOS

2.2.13	Resumen	22
2.3	Motivación	23
2.4	Formalismo de una instalacion de ferrocarriles	25
3	Estado del arte	29
3.1	Modelo Algebraico	34
3.1.1	Definición formal	34
3.1.1.1	Aplicación del modelo a una instalación ferroviaria	34
3.1.1.2	Teorema principal	35
3.1.2	Aplicación del modelo al ejemplo	35
3.1.2.1	Variables escritas en el ejemplo	36
3.1.2.2	Ideales	36
3.1.3	Ventajas y desventajas	37
3.2	Modelo Lógico	39
3.2.1	Definición formal	39
3.2.1.1	Aplicación del modelo a una instalación ferroviaria	39
3.2.1.2	Teorema principal	40
3.2.2	Aplicación del modelo al ejemplo	41
3.2.2.1	Variables en el ejemplo	41
3.2.2.2	Fórmulas en el ejemplo	41
3.2.3	Ventajas y desventajas	43
3.3	Lógico-Algebraico	44
3.3.1	Definición formal	44
3.3.1.1	Teorema principal	45
3.3.1.2	Aplicación del modelo a una instalación ferroviaria	45
3.3.2	Aplicación del modelo al ejemplo	46
3.3.2.1	Variables escritas en el ejemplo	46
3.3.2.2	Ideales en el ejemplo	47
3.3.3	Ventajas y desventajas	48
3.4	Answer Set Programming	49

CONTENIDOS

3.4.1	Definición formal	49
3.4.1.1	Aplicación del modelo al sistema ferroviario . .	50
3.4.1.2	Teorema principal	51
3.4.2	Aplicación del modelo al ejemplo	52
3.4.2.1	Reglas relacionadas con desvíos en el ejemplo .	52
3.4.2.2	Reglas relacionadas con los semáforos en el ejemplo	52
3.4.2.3	Reglas relacionadas con los trenes en el ejemplo	53
3.4.3	Ventajas y desventajas	53
4	Modelo Propuesto	55
4.1	Definición formal	56
4.2	Fundamentos teóricos	58
4.2.1	Fundamentos algebraicos	58
4.2.2	Inferencia de situaciones peligrosas con un enfoque basado en estados	61
4.2.3	Interpretación de los estados en términos algebraicos . . .	63
4.2.4	Teorema principal	65
4.3	Aplicación del modelo al ejemplo	66
4.3.1	Variables en el ejemplo	66
4.3.2	Ideales en el ejemplo	66
5	Experimentos y resultados	69
5.1	Experimento I	73
5.2	Experimento II	74
6	Resumen y conclusiones	77
A	Extensión del modelo para trenes ocupando varias secciones a la vez	81

CONTENIDOS

B	Código del intérprete	85
B.1	Intérprete	85
C	Código de los modelos de la estación de Chamartín	87
C.1	Modelo propuesto en la tesis	87
C.2	ASP Model / Smodels	97
	Referencias	103

Índice de Figuras

2.1	Tren de alta velocidad en Berlín Hauptbahnhof (ICE 2 de Deutsche Bahn)(Fuente: Elaboración propia)	5
2.2	Conjunto raíl / rueda. 1- Pestaña de la rueda, 2- Banda de rodadura, 3- Banda de rodadura en contacto con el raíl, es el punto de contacto de la rueda con el raíl. (Fuente: Ferropedia)	6
2.3	Dos tipos de desvío (usual, a la izquierda, y en curva, a la derecha) (Fuente: Elaboración propia)	7
2.4	Cambio de agujas o desvío (Fuente: Elaboración propia)	7
2.5	Estación de Beasain, Guipúzcoa (Fuente: Ferropedia)	8
2.6	Antiguo enclavamiento mecánico en la estación de Aljucén (Fuente: Elaboración propia)	9
2.7	1. Señal, 2. Señal mecánica y 3. Semáforo (Fuente: 1. Elaboración propia, 2. Wikipedia(EN) y 3. Ferropedia.)	10
2.8	Mapa conceptual resumen	22
2.9	Capas para la modelización de una instalación ferroviaria	23
2.10	Instalación ferroviaria sencilla sin trenes (Fuente: Elaboración propia)	25
2.11	Instalación ferroviaria sencilla con trenes (Fuente: Elaboración propia)	25
3.1	Estación sencilla que se usará en esta sección para detallar algunos modelos previos (Fuente: Elaboración propia)	33

ÍNDICE DE FIGURAS

4.1	Estación sencilla para ilustrar el nuevo modelo propuesto	58
4.2	Instalación usada para ilustrar el nuevo modelo propuesto (Fuente: Elaboración propia)	64
5.1	Diagrama actualizado de la estación de Chamartín (Fuente: Fun- dación de los Ferrocarriles Españoles. Atlas-AVE)	71
5.2	Vista aérea de la estación de Chamartín(Fuente: Google Maps) . .	72
A.1	Posible situación de varios trenes ocupando varias secciones a la vez. La situación es segura. (Fuente: Elaboración propia)	82
A.2	Posible situación de varios trenes ocupando varias secciones a la vez. La situación es peligrosa. (Fuente: Elaboración propia) . . .	82

Índice de tablas

5.1	Comparativa de tiempos entre modelos para detectar situaciones peligrosas en una instalación de ferrocarriles con N secciones y M trenes	73
5.2	Comparativa de tiempos entre modelos para detectar situaciones peligrosas en la instalación de Chamartin	75

Publicaciones científicas derivadas

A continuación se listan las publicaciones científicas derivadas de esta tesis doctoral:

- "A new algebraic approach to decision making in a railway interlocking system based on preprocess". Pendiente de publicación en "Mathematical Problems in Engineering" (2018).
- "A Natural Language for Implementing Algebraically Expert Systems" [19] Publicado en "Mathematics and Computers in Simulation" (2016).
- "An algebraic approach for detecting nearly dangerous situations in expert systems" [27]. Publicado en "An algebraic approach for detecting nearly dangerous situations in expert systems" (2016)

Introducción

Los ferrocarriles han sido un método eficiente de transporte¹, especialmente en grandes rutas y símbolo del desarrollo económico de los países². Por lo tanto el desarrollo de sistemas que aseguren la seguridad en las redes de ferrocarriles es un tema de vital importancia.

A lo largo de los años se han desarrollado diferentes modelos y sistemas para modelar una instalación ferroviaria y verificar su seguridad. Dado que realizar dicha comprobación es muy costoso desde el punto de vista computacional, el modelo aquí propuesto utiliza, por un lado, una librería especializada que permitirá reducir los tiempos de verificación y, por otro, modeliza y precalcula las diferentes operaciones sobre la circulación de los trenes que el jefe de estación puede ordenar.

El principal tema tratado en esta tesis doctoral es el de la seguridad de una instalación ferroviaria. Se tratará el que se puedan producir o no colisiones entre los trenes que circulan por ellas (respetando las señales) en el peor de los casos (de hecho,

¹http://www.ppiaf.org/sites/ppiaf.org/files/documents/toolkits/railways_toolkit/ch1_1_4.html,
<http://www.railway-energy.org/tfee/index.php>

²<https://www.gov.uk/government/policies/expanding-and-improving-the-rail-network>

2. INTRODUCCIÓN

los trenes incorporan sistemas que impiden el rebase de un semáforo que impida el paso). No se consideran otros problemas como el talonamiento de desvíos.

Para tratar el problema de verificar la seguridad en una instalación ferroviaria propondremos un modelo matemático capaz de, en primer lugar, modelar los elementos que existen en las instalaciones ferroviarias, como pueden ser las vías, los desvíos, los trenes o los semáforos y, en segundo lugar, un conjunto de operaciones matemáticas para comprobar si la situación modelada es segura o no.

A continuación se introducirán conceptos claves sobre ferrocarriles y sobre los métodos matemáticos utilizados en esta tesis.

2.1 Conceptos ferroviarios

Se entiende por ferrocarril, en el sentido amplio del término, al sistema de transporte terrestre guiado sobre carriles o raíles de cualquier tipo a distancia constante, aunque normalmente se entiende que los raíles son de acero o hierro. Un tren puede ser definido como un medio de transporte que circula sobre carriles, compuesto por uno o más vagones o coches arrastrados por una locomotora o bien constituido por automotores. Por lo tanto los trenes circulan a lo largo de las vías férrea o líneas ferroviarias. A continuación se muestra en un tren de Alta Velocidad formado por un automotor eléctrico circulando sobre unos carriles.

Figura 2.1: Tren de alta velocidad en Berlín Hauptbahnhof (ICE 2 de Deutsche Bahn)(Fuente: Elaboración propia)

El guiado de los trenes por los raíles se consigue por la forma de las ruedas de los trenes. Las pestañas de las ruedas proporcionan el guiado del tren para que éstos no descarrilen (Figura 2.2). Cabe destacar que, a diferencia de lo que supone la cultura popular, las pestañas no mantienen aferrado el tren a los raíles; si esto fuera así se traduciría en una gran pérdida de energía en forma de calor por el rozamiento y un sonido chirriante constante debido a dicho rozamiento [43].

2. INTRODUCCIÓN

Figura 2.2: Conjunto raíl / rueda. 1- Pestaña de la rueda, 2- Banda de rodadura, 3- Banda de rodadura en contacto con el raíl, es el punto de contacto de la rueda con el raíl. (Fuente: Ferropedia)

Los desvíos o cambios de agujas se definen como la “Bifurcación de una línea ferroviaria en otras dos, denominadas vía directa y vía desviada, respectivamente”. Los desvíos pueden tomar dos posiciones, la posición “vía directa” en la que el tren que se aproxima al desvío por el lado en el que la vía se divide en dos (“punta”; el lado opuesto se denomina “talón”) sigue recto o por la vía de mínima curvatura y la posición “vía desviada” en la que el tren prosigue por la vía de máxima curvatura. La siguiente figura (Figura 2.3) muestra dos desvíos, en ambas imágenes si el desvío se encuentra en posición directa el tren entraría por A y saldría por C, por el contrario, si el desvío estuviera en posición desviada el tren entraría por A y saldría por B.

Figura 2.3: Dos tipos de desvío (usual, a la izquierda, y en curva, a la derecha)

(Fuente: Elaboración propia)

Los desvíos tienen dos componentes básicos: una parte móvil denominada "agujas" y el cruzamiento. La siguiente figura muestra un desvío, en rojo se destacan las agujas y el círculo verde el cruzamiento.

Figura 2.4: Cambio de agujas o desvío (Fuente: Elaboración propia)

En la red española existen diferentes tipos de desvíos dependiendo de la velocidad de los trenes, los principales son:

- A: Permite velocidades de 140 km/h por vía directa y de 30 Km/h por vía desviada.
- B: Permite velocidades de 160 y 140 Km/h por vía directa y de 30, 45 o 60 km/h por vía desviada, según el modelo del aparato.

2. INTRODUCCIÓN

- C: Permite velocidades de 200 Km/h por vía directa y de 45, 50 y 60 Km/h por vía desviada, según el modelo de aparato.
- V: Permite velocidades de 200 Km/h por vía directa y de 100 Km/h por vía desviada.
- G: Permite velocidades de 250 Km/h por vía directa y de 160 Km/h por vía desviada.
- AV: Permite velocidades de 350 Km/h por vía directa y de 220 Km/h por vía desviada.

A su vez, a lo largo de las vías férreas o líneas ferroviarias se encuentran las instalaciones ferroviarias. Una instalación ferroviaria es una instalación de vías y desvíos, protegida por semáforos, donde se pueden coordinar procesos de circulación y cuyos límites quedan definidos por las señales de entrada de ambos extremos. La siguiente figura muestra una instalación ferroviaria.

Figura 2.5: Estación de Beasain, Guipúzcoa (Fuente: Ferropedia)

2.1 Conceptos ferroviarios

Las instalaciones ferroviarias pueden ser de tipo pasante o de tipo terminal. Las instalaciones de tipo "pasante" son las situadas a lo largo de una línea ferroviaria y las instalaciones de tipo "terminal" son las situadas al final de una línea ferroviaria. Las instalaciones ferroviarias pueden dar diferentes tipos de servicios atendiendo a la naturaleza y finalidad de cada servicio.

Por su parte, un enclavamiento [28] es un dispositivo que permite supervisar la circulación en una instalación de ferrocarriles y es capaz de manejar elementos de control como los semáforos y los desvíos, de modo que se eviten colisiones entre los trenes que circulen por la estación (y que respeten la señalización). La siguiente figura muestra los mandos de control de un antiguo enclavamiento mecánico:

Figura 2.6: Antiguo enclavamiento mecánico en la estación de Aljucén (Fuente: Elaboración propia)

Es importante destacar que el método clásico de verificar la compatibilidad

2. INTRODUCCIÓN

de acciones en un enclavamiento es establecer previamente ciertos itinerarios y estudiar su compatibilidad.

Las señales [15] por su parte, se definen como "toda aquella indicación presentada por los elementos dispuestos a lo largo del trazado ferroviario o aquéllas que puedan ser utilizadas por los agentes con el objeto de comunicar a los maquinistas determinadas órdenes en la circulación de los trenes". Hay que distinguir entre señal, señal mecánica (cada vez más en desuso) y semáforo. La Figura 2.7 es un ejemplo de señal, señal mecánica y semáforo.

Figura 2.7: 1. Señal, 2. Señal mecánica y 3. Semáforo (Fuente: 1. Elaboración propia, 2. Wikipedia(EN) y 3. Ferropedia.)

Dadas estas definiciones preliminares, podemos denominar por "topología de

2.1 Conceptos ferroviarios

una instalación ferroviaria” a la disposición e interconexión de las distintas vías. Esta topología está diseñada por ingenieros durante la fase de diseño de la estación y en contadas ocasiones sufre cambios. El jefe de estación, durante la fase de explotación, determinará el color de los semáforos y la posición de las agujas de los desvíos.

2. INTRODUCCIÓN

2.2 Conceptos Matemáticos

A continuación, se enumeran los principales conceptos matemáticos necesarios para abordar el trabajo propuesto en esta tesis.

2.2.1 Semigrupo, Grupo y Grupo abeliano

Sea A un conjunto no vacío y $\star$ una operación binaria definida en A , lo que representaremos $(A, \star)$. Las siguientes dos propiedades definen un semigrupo.

- $\star$ es operación interna: $\forall a, b \in A, a \star b \in A$
- la operación $\star$ es asociativa: $\forall a, b, c \in A, (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$

Si además cumple las siguientes dos condiciones, se dice que tiene estructura de grupo:

- $\exists n \in A$ que se comporta como elemento neutro: $\forall a \in A, a \star n = n \star a = a$
- todos los elementos de A tienen simétrico para $\star$: $\forall a \in A, \exists b \in A, a \star b = b \star a = n$

Además, si se da la siguiente condición, se dice que el grupo es abeliano o conmutativo:

- La operación $\star$ es conmutativa: $\forall a, b \in A, a \star b = b \star a$

Por ejemplo, el conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ y la suma forman un semigrupo abeliano. Los números enteros $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ con la suma forman un grupo abeliano.

2.2.2 Anillo

Sea A un conjunto no vacío y dos operaciones binarias $\star$ y $\circ$ definidas en A . Se dice que $(A, \star, \circ)$ es un anillo si y sólo si $(A, \star)$ es grupo abeliano, $(A, \circ)$ es semigrupo y:

- la operación $\circ$ es distributiva respecto de $\star$:

$$\forall a, b, c \in A, \quad \begin{cases} a \circ (b \star c) = (a \circ b) \star (a \circ c) \\ (a \star b) \circ c = (a \circ c) \star (b \circ c) \end{cases}$$

Si además, se cumple que:

- la operación $\circ$ es conmutativa. $\forall a, b \in A, a \circ b = b \circ a$

decimos que el anillo es conmutativo.

El ejemplo más familiar de anillo conmutativo, es el de los números enteros, la suma y el producto, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

2.2.3 Anillo con unidad

Si un anillo cuenta con un elemento neutro para la segunda operación se dice que es un anillo con unidad. A dicho elemento se le suele llamar la unidad para diferenciarlo del elemento neutro de la primera operación.

2.2.4 Subanillo

Un subanillo S de un anillo $(R, \star, \circ)$ es un subconjunto $S \subseteq R, S \neq \emptyset$ que es también anillo. Para que S sea subanillo (criterio de subanillo), es condición necesaria y suficiente que, para cualquier $a, b \in S, a \star b' \in S$ y $a \circ b \in S$, donde $'$ representa el simétrico para la operación $\star$.

Un ejemplo de subanillo de $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ lo forman los números pares $(2\mathbb{Z})$. Se cumple que

- $2\mathbb{Z}$ es no vacío. Por ejemplo $2, 4 - 6, \dots \in 2\mathbb{Z}$.

2. INTRODUCCIÓN

- $\forall x, y \in 2\mathbb{Z}, x + (-y) \in 2\mathbb{Z}$. Por ejemplo, $2 + (-4) = -2 \in 2\mathbb{Z}$,
- $\forall x, y \in 2\mathbb{Z}, x \cdot y \in 2\mathbb{Z}$. Por ejemplo, $2 \cdot 4 = 8 \in 2\mathbb{Z}$

2.2.5 Ideal

Un ideal es un subanillo especial: un ideal $(I, \star, \circ)$ es un subconjunto de un anillo $(R, \star, \circ)$ tal que:

- $(I, \star)$ es un subgrupo de $(R, \star)$
- $\forall x \in I, \forall r \in R : r \circ x, x \circ r \in I$

Los ideales generalizan ciertos subconjuntos de los números enteros, como los formados por los múltiplos de un número. Por ejemplo, la adición y sustracción de números pares preserva que el número obtenido sea par, y de la multiplicación de un número par por otro número entero cualquiera también se obtiene un número par.

2.2.6 Cuerpo

Un cuerpo $(F, \star, \circ)$ es un anillo unitario en el que todo elemento distinto del neutro de $\star$ tiene simétrico para la operación $\circ$. Si además $\circ$ es conmutativo, se dice que el cuerpo es conmutativo. Por ejemplo $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ son cuerpos conmutativos.

2.2.7 Anillo de polinomios

El anillo de polinomios $K[x]$, donde K es un anillo o un cuerpo, se define como un conjunto de expresiones llamadas polinomios en la variable x , de la forma:

$$p = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_{m-1}x^{m-1} + p_mx^m$$

donde $p_0, p_1, p_2, \dots, p_m$, denominados coeficientes de p , son elementos de K .

Los polinomios en x se suman y multiplican de acuerdo con las reglas ordinarias de manipulación de expresiones algebraicas, creando así una estructura de un anillo. Específicamente, si:

$$p = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_mx^m,$$

y:

$$q = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \dots + q_nx^n,$$

entonces:

$$p + q = r_0 + r_1x + r_2x^2 + \dots + r_kx^k,$$

donde:

$$k = \max(m, n)$$

$$r_i = p_i + q_i, i = 0, \dots, \min(m, n)$$

$$r_{m+1} = p_{m+1}, \dots, r_n = p_n \text{ si } n > m$$

$$r_{n+1} = q_{m+1}, \dots, r_m = q_m \text{ si } m > n$$

Por otra parte:

$$pq = s_0 + s_1x + s_2x^2 + \dots + s_lx^l,$$

y:

$$s_i = p_0q_i + p_1q_{i-1} + \dots + p_iq_0 = \sum_{j=0}^i p_jq_{i-j}$$

2.2.8 Retículo

Un conjunto L donde están definidas dos operaciones binarias $\sqcup$ y $\sqcap$, es un retículo, si y sólo si, ambas operaciones son conmutativas y asociativas, y se cumplen las leyes de absorción, es decir, si y sólo si para todos los elementos $a, b, c \in L$:

$$a \sqcup b = b \sqcup a$$

$$a \sqcap b = b \sqcap a$$

$$a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c$$

$$a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$$

$$a \sqcup (b \sqcap a) = a$$

$$a \sqcap (b \sqcup a) = a$$

2. INTRODUCCIÓN

De las anteriores definiciones se deriva que si $L(\sqcup, \sqcap)$ es un retículo, ambas operaciones son idempotentes, es decir, para cada elemento $a \in L$:

$$a \sqcup a = a \qquad a \sqcap a = a$$

2.2.9 Álgebra de Boole

Dadas las tres siguientes definiciones:

Definición: Un retículo $(L, \sqcup, \sqcap)$ es distributivo si y sólo si ambas operaciones son distributivas con respecto a la otra operación, es decir, para todos los elementos $a, b, c \in L$:

$$a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c) \qquad a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$$

Definición: Un retículo está acotado, si y sólo si, tiene supremo e ínfimo. El supremo e ínfimo de un retículo, son denotados tradicionalmente como $\underline{1}$ y $\underline{0}$ respectivamente.

Definición: Un retículo acotado $(L, \sqcup, \sqcap)$ es complementario, si y sólo si, para cada elemento $a \in L$, hay un elemento a' tal que:

$$a \sqcup a' = \underline{1} \qquad a \sqcap a' = \underline{0}$$

Definición: Un álgebra de Boole es un retículo distributivo y complementario.

2.2.10 Anillo booleano

Un anillo booleano es un anillo con unidad tal que su segunda operación es idempotente. Sea $(L, \Delta, \sqcap)$ un anillo booleano, $\underline{0}$ su elemento neutro, $'$ el símbolo de opuesto y $\underline{1}$ la unidad.

Se cumplen dos propiedades [39], (I) en un anillo booleano $(L, \Delta, \sqcap)$ cualquier elemento es su propio opuesto, y (II) es un anillo conmutativo.

Por lo tanto, un anillo booleano $(L, \Delta, \sqcap)$ puede ser definido desde un álgebra de Boole $(L, \sqcup, \sqcap, ')$: para todos los elementos $a, b \in L$:

$$a \Delta b = (a \sqcap b') \sqcup (a' \sqcap b)$$

Y al contrario, un álgebra de Boole $(L, \sqcup, \sqcap, ')$ puede ser definida a partir de un anillo booleano $(L, \Delta, \sqcap)$: para todos los elementos $a, b \in L$:

$$a \sqcup b = (a \Delta b) \Delta (a \sqcap b)$$

2.2.11 Anillo de polinomios booleano

De manera general, un anillo booleano de polinomios $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ debe cumplir las dos siguientes propiedades:

- Cada elemento es su propio opuesto, es decir, $\forall a \in \mathcal{A}, a + a = 2 \cdot a = 0$, por lo que $\mathcal{A}$ se define sobre un anillo de característica 2.
- La segunda operación es idempotente, por lo que se considera el anillo de clases residuales módulo el ideal de polinomios $\langle p^2 - p, q^2 - q, \dots, r^2 - r \rangle$

El cociente del anillo de polinomios $\mathbb{Z}_2[x_1, \dots, x_n]$ sobre el ideal $\langle x_1^2 + x_1, \dots, x_n^2 + x_n \rangle$ es un anillo de polinomios booleano [3], es decir:

$$\mathbb{Z}_2[x_1, \dots, x_n] / \langle x_1^2 + x_1, \dots, x_n^2 + x_n \rangle$$

Los monomios de los polinomios de este anillo cociente tienen grado uno como máximo en cada variable. Estos polinomios se denominan polinomios booleanos. Un ejemplo de este tipo de polinomios es el siguiente:

$$p = x_1x_2 + x_3x_4 + x_3x_4$$

Como sus coeficientes pertenecen a $\mathbb{Z}_2$ y sabemos que $1 + 1 = 0$ en $\mathbb{Z}_2$, el polinomio p es equivalente al polinomio x_1x_2 debido a que $x_1x_2 + x_3x_4 + x_3x_4 = x_1x_2 + (1 + 1) \cdot x_3x_4 = x_1x_2 + 0 \cdot x_3x_4 = x_1x_2$.

2. INTRODUCCIÓN

2.2.12 Base de Groebner

Dado un ideal, su base de Groebner [4, 23, 45] es un conjunto de polinomios multivariados que tiene la siguiente propiedad: fijado el tipo de orden (lexicográfico, grado total, ...) y el orden de las variables, la base de Groebner reducida caracteriza completamente al ideal y existe un algoritmo constructivo para su cálculo. Por lo tanto, cada ideal tiene una única base de Groebner reducida [42]. En consecuencia, dos conjuntos de polinomios generan el mismo ideal, si y sólo si, sus correspondientes bases de Groebner reducidas son idénticas.

Este proceso puede verse como la generalización de eliminación gaussiana [33] para resolver sistemas lineales de ecuaciones. Por ejemplo, sea $\mathcal{F} = \{4x - y - 10, 2x + 3y - 12\}$ un conjunto de polinomios, el algoritmo de eliminación gaussiana transformará este conjunto en $\mathcal{G} = \{x - 3, y - 2\}$.

Dado un anillo de polinomios $K[x_1, \dots, x_n]$, si $\mathcal{F}$ es un conjunto de polinomios, entonces el ideal generado por $\mathcal{F}$ es el conjunto $\langle \mathcal{F} \rangle$ consistente en todas las combinaciones lineales de sus polinomios:

$$\langle \mathcal{F} \rangle = \{p_1 f_1 + \dots + p_r f_r : f_1, \dots, f_r \in \mathcal{F} \text{ y } p_1, \dots, p_r \in K[x_1, \dots, x_n]\}$$

Por lo tanto, el conjunto de polinomios $\mathcal{F} = \{4x - y - 10, 2x + 3y - 12\}$ y $\mathcal{G} = \{x - 3, y - 2\}$ generan el mismo ideal:

$$\langle \mathcal{F} \rangle = \langle \mathcal{G} \rangle$$

A continuación formalizamos el concepto de *orden* como elemento fundamental para la construcción de una base de Groebner. Un *orden monomial* en $K[x]$ es una relación $\prec$ en $\mathbb{Z}^n$, es decir, una relación en el conjunto de monomios X^α donde $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, que satisface las siguientes condiciones:

- $\prec$ es una relación de orden total en $\mathbb{Z}^n$

- si $\alpha < \beta$ y $\gamma \in \mathbb{Z}^n$, entonces, $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$
- todo conjunto no vacío de $\mathbb{Z}^n$ tiene un elemento minimal para $\prec$.

Sean:

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}^n$$

y definamos algunos de los órdenes más importantes:

I **(lex)** Orden lexicográfico: Decimos que $\alpha \succ_{lex} \beta$ si, en el vector $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$ la primera entrada por la izquierda distinta de 0 es positiva.

Como ejemplo, si definimos el orden lexicográfico $x > y > z$ y dos monomios $m_1 = x^3y$ y $m_2 = x^2y^3$, tendríamos que $m_1 \succ_{lex} m_2$ debido a que $m_1 = xxxy$ y $m_2 = xxyyy$.

II **(grlex)** Orden lexicográfico graduado: Decimos que $\alpha \succ_{grlex} \beta$ si,

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i > |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i \quad \text{o} \quad |\alpha| = |\beta| \text{ y } \alpha \succ_{lex} \beta$$

Dado el mismo orden para las variables y los mismos monomios m_1, m_2 , tenemos que, por ejemplo, $m_1 \prec_{grlex} m_2$ ya que el grado de los monomios m_1, m_2 son respectivamente $3 + 1$ y $2 + 3$.

Por lo tanto, fijado un orden $\prec$, cada polinomio f tiene un término líder único $in_{\prec}(f) = x^a$ (por ejemplo, fijado $\prec_{grlex}$ y el polinomio $f = x^3y + x^2y^3$ su término líder es $in_{\prec}(f) = x^2y^3$).

Supongamos ahora que tenemos el ideal $I \in K[x_1, \dots, x_n]$, entonces su *ideal inicial* $in_{\prec}(I)$ es el ideal generado por todos los términos líder de todos los polinomios en I , es decir:

$$in_{\prec}(I) = \langle in_{\prec}(f) : f \in I \rangle$$

2. INTRODUCCIÓN

Por lo tanto, un subconjunto finito $\mathcal{G}$ de I , es una base de Groebner dado un orden $\prec$, si los términos iniciales de los elementos en $\mathcal{G}$ satisfacen generar el ideal inicial:

$$\text{in}_{\prec}(I) = \langle \text{in}_{\prec}(g) : g \in \mathcal{G} \rangle$$

Ya que cualquier subconjunto finito de I que contiene $\mathcal{G}$ es una Base de Groebner, decimos que $\mathcal{G}$ es una Base de Groebner reducida si cumple:

- para cada $g \in \mathcal{G}$, el coeficiente de $\text{in}_{\prec}(g)$ en g es 1.
- el conjunto $\{\text{in}_{\prec}(g) : g \in \mathcal{G}\}$ genera mínimamente $\text{in}_{\prec}(I)$
- ningún término independiente de algún $g \in \mathcal{G}$ pertenece a $\text{in}_{\prec}(I)$

Con la definición de base de Groebner reducida, tenemos que: dado un orden $\prec$, entonces cada ideal I en $K[x_1, \dots, x_n]$ tiene una única Base de Groebner reducida. La Base de Groebner reducida se puede calcular para cada conjunto generador de I por el algoritmo introducido por Bruno Buchberger [6, 7], que en pseudocódigo define los siguientes pasos.

1. $G = F$
2. $\forall f_i, f_j \in G$, donde $\text{in}_{\prec}(f_i) = g_i$, $\text{in}_{\prec}(f_j) = g_j$ y a_{ij} el mínimo común múltiplo de g_i, g_j
3. Elegir dos polinomios de G y calcular $S_{ij} = \frac{a_{ij}}{g_i} f_i - \frac{a_{ij}}{g_j} f_j$. Nótese que $\frac{a_{ij}}{g_i} f_i$ y $\frac{a_{ij}}{g_j} f_j$ tienen los mismos términos líder por lo que se cancelarán.
4. Reducir S_{ij} (S-polynomial) con el *algoritmo de división multivariado* [25, 47] relativo al conjunto G hasta que el resultado no pueda ser reducido más. Si el resultado es distinto de 0, añadirlo a G .
5. Repetir los pasos del 2-4 hasta que todos los pares sean considerados, incluidos los nuevos polinomios añadidos en el paso 4.

donde F es un conjunto de polinomios que genera I . La complejidad del algoritmo es [12]:

$$\mathcal{O}(d^{2^n})$$

donde d es el máximo grado total de los polinomios y n el número de variables.

Existen variantes mejoradas del algoritmo de Buchberger como por ejemplo los algoritmos F4 y F5 de Faugère [13] con implementaciones en paralelo [32].

2.2.13 Resumen

2.3 Motivación

La motivación principal de esta tesis doctoral es la de definir un modelo matemático capaz de comprobar la seguridad de una situación propuesta en una estación de ferrocarril y además poder pre-calcular diferentes situaciones de la instalación aprovechando así el tiempo de cómputo.

A nivel teórico, podemos representar el proceso de modelización y comprobación de la seguridad de una instalación a partir de cuatro capas, como se muestra en la Figura 2.9. La primera hace referencia a la topología de la instalación; la segunda hace referencia al enclavamiento (es decir, el control de los semáforos y de los desvíos); la tercera hace referencia al lenguaje formal que es capaz de codificar la topología y el enclavamiento (un estudio completo puede encontrarse en [19]); y la cuarta hace referencia a los polinomios, anillos, ideales y otras definiciones matemáticas sobre las que se realizarán procesos para verificar diferentes situaciones en una instalación ferroviaria.

Topología de la estación ferroviaria
Enclavamiento
Lenguaje formal de modelización
Algebra

Figura 2.9: Capas para la modelización de una instalación ferroviaria

Con respecto a la seguridad de una instalación ferroviaria, las situaciones tienen dos estados posibles: situación segura y situación peligrosa. Las situaciones seguras son aquellas en las que no pueden producirse colisiones entre trenes que respeten la señalización en toda la instalación. Por el contrario, las situaciones

2. INTRODUCCIÓN

peligrosas son aquellas situaciones en la que puede producirse una colisión entre trenes que respetan la señalización en la instalación.

En la sección sobre el Estado del Arte, se introducirán varios modelos matemáticos de representación y verificación de la seguridad de una instalación ferroviaria: un modelo algebraico, un modelo lógico, un modelo lógico-algebraico y un modelo basado en lógica pero utilizando un paradigma diferente (Answer Set Programming). Sin embargo, veremos que estos modelos no permiten inferir situaciones de peligro sin modificar la configuración del modelo completo. Es decir, si se propone cualquier cambio en la configuración de la instalación ferroviaria (desvíos que cambian la posición de las agujas o semáforos que cambian de color), se debe realizar un nuevo cálculo matemático para poder conocer si ese cambio hipotético conduciría a una situación peligrosa en la instalación ferroviaria.

El nuevo modelo presentado en este trabajo podrá precalcular diferentes situaciones de una instalación de ferrocarriles, lo que supondrá un pequeño handicap con respecto al cálculo inicial para posteriormente poder utilizar el resultado del precálculo para agilizar las comprobaciones de manera significativa. Veremos que los tiempos de cálculo tanto de la fase de precálculo como los tiempos una vez realizado el precálculo, son adecuados para su puesta en producción en una instalación grande y compleja como es la estación de Chamartín. Además este nuevo modelo es independiente del número de trenes, por lo que será todavía más útil en instalaciones donde exista gran cantidad de trenes operando.

Se desarrollarán como ejemplo varias instalaciones ferroviarias usando el paquete especializado en cálculo de polinomios en anillos Booleanos PolyBoRi [2] para detectar situaciones peligrosas siguiendo el esquema de capas de modelización de una instalación de ferrocarriles propuesta en la Figura 2.9.

2.4 Formalismo de una instalacion de ferrocarriles

Utilizaremos las siguientes figuras que representan unas instalaciones ferroviarias muy sencillas para ilustrar las definiciones que se introducirán en esta etapa de formalización.

Figura 2.10: Instalación ferroviaria sencilla sin trenes (Fuente: Elaboración propia)

Figura 2.11: Instalación ferroviaria sencilla con trenes (Fuente: Elaboración propia)

Una sección es una parte conectada de la instalación y separada de la sección adyacente por un semáforo y/o un desvío. Por ejemplo, en la Figura 2.10 podemos observar varias secciones como pueden ser S0 o S1, dos desvíos (Z0 y Z7) y dos semáforos (L0 y L1).

Los principales elementos de la instalación ferroviaria son:

- Desvíos: la posición de las agujas de los desvíos se representa en la Figura 2.10 por:
 - Símbolo “-” en cada variable que representa un desvío si las agujas están en la posición “vía directa”. Por ejemplo, en el desvío Z7- las agujas conectan S3 y S2.

2. INTRODUCCIÓN

- Símbolo “/” en cada variable que representa un desvío si las agujas están en la posición “vía desviada”. Por ejemplo, en el desvío $Z0/$ las agujas conectan $S0$ y $S1$.
- Trenes: Representados por T_N en la Figura 2.11 con segmentos negros. Tres trenes están situados del modo siguiente: $T5$ en la sección $S0$, $T7$ en la sección $S1$ y $T2$ en la sección $S4$. Un tren puede pasar a una sección adyacente siempre que sea posible por la posición de los desvíos y los colores de los semáforos.
- Semáforos: La señalización con luces está instalada en el lado derecho. Por ejemplo, el semáforo en rojo ($L0$) de la Figura 2.11 significa que no se permite la transición del tren T_2 desde la sección $S4$ a la sección $S3$.

Formalicemos cuándo diremos que las secciones s_i y s_j son adyacentes:

- En el caso de que exista un desvío que conecte dichas secciones. Por ejemplo, en la Figura 2.10 las secciones $S0$ y $S1$ son adyacentes puesto que están separadas por el desvío $Z0$. Las secciones $S2$ y $S3$ de la Figura 2.10 son adyacentes puesto que están separadas por el desvío $Z7$, ...
- En el caso en que exista un semáforo entre la sección s_i y la sección s_j . Por ejemplo las secciones $S4$ y $S3$ de la Figura 2.10 son adyacentes.

Definición 1 un tren t_i puede alcanzar la sección s_j se define recursivamente:

- si el tren t_i está en la sección s_j , entonces el tren t_i puede alcanzar la sección s_j
- si el tren t_i situado en s_l puede alcanzar la sección s_k y es posible pasar de s_k a s_j de acuerdo con la posición de las agujas y el color de los semáforos, entonces el tren t_i puede alcanzar la sección s_j

2.4 Formalismo de una instalacion de ferrocarriles

Definición 2 Una sección s es segura si no es posible que dos trenes distintos, t_i y t_j , alcancen la sección s .

Definición 3 La instalación ferroviaria al completo es segura si y sólo si todas sus secciones son seguras.

Estado del arte

El desarrollo de sistemas de control que permiten aumentar la seguridad de las instalaciones ferroviarias supone un desafío, tanto en la representación formal de la instalación, como en el método elegido para verificar su seguridad.

Existe una gran variedad de enfoques diferentes para definir los componentes de una estación de ferrocarriles (desvíos, semáforos y trenes) y de verificar la seguridad de una instalación ferroviaria, una vez que se ha definido de manera formal. Muchos de los enfoques no son independientes de la topología de la estación, es decir, el proceso por el cual se decide si una estación es segura o no en un momento determinado no puede aplicarse a diferentes instalaciones. Tradicionalmente se ha utilizado y se sigue utilizando la configuración a mano de itinerarios, comprobando que no se producirán situaciones que puedan llevar a una colisión.

En la tesis doctoral [30] se detalla de manera exhaustiva la lógica de los enclavamientos de los ferrocarriles Británicos, facilitando además un prototipo de verificación implementado en lógica de orden superior.

Utilizando el método formal de verificación de seguridad expuesto en el trabajo citado y un programa de lógica anotada llamado EVALP (Extended Vector Annot-

3. ESTADO DEL ARTE

ated Logic Program) con razonamiento temporal, en [31] se propone un sistema (y un simulador) de recuperación del sistema de ferrocarriles ante un desorden provocado, por ejemplo, por un accidente o un fallo en la línea. Este último trabajo está más enfocado a la planificación.

En [48] se utiliza el verificador de modelos simbólicos *NuSVM* [8] para comprobar las propiedades de los diseños de interbloqueo desde el punto de vista de la seguridad. El modelo simbólico es representado internamente como “Diagramas de decisión binarios” *BDDs* [5] e implementa el paquete “Colorado University Decision Diagram” *CUDD* [46] que proporciona una librería de algoritmos eficientes para todas las operaciones con *BDD* (Binay Decission Diagram). A pesar de que los modelos basados en *BDDs* son eficaces desde el punto de vista computacional, se detalla el problema de que para verificar grandes modelos se requieren grandes tiempos de computación.

En [36] los autores utilizan el paradigma *Answer Set Programming (ASP)* que es una metodología declarativa especializada en la resolución de problemas complejos de búsqueda combinatorial, concretamente implementan un modelo lógico con *Smodels*¹ que es un *SAT solver* (algoritmo que permite solucionar problemas de satisfacibilidad booleana) muy eficiente para representar y comprobar la seguridad de una estación de ferrocarriles. *ASP* combina ideas del uso y diseño de *SAT solvers* y de *Prolog*. En este trabajo se mejora el tiempo de cómputo necesario para verificar la seguridad respecto a los modelos previos analizados en dicho trabajo.

También se destaca la utilización de este paradigma para solucionar otros problemas complejos por ejemplo en [35]. En este último caso se utiliza un *DLV solver* para la generación automática de equipos de empleados en el puerto marítimo de *Gioia Tauro*.

En [50] podemos encontrar un modelo basado en componentes para describir la topología de la estación y a partir de los datos de la topología deducir posibles itinerarios compatibles. Más concretamente, se utilizan dos grafos no dirigidos para

¹<http://www.tcs.hut.fi/Software/smodels/>

representar la topología de la estación: un primer grafo consistente en semáforos, desvíos y secciones conectadas; y un segundo consistente en las posiciones de los desvíos. Para comprobar la compatibilidad de varias rutas, es decir, que no se puedan producir colisiones, se comprueba que el conjunto de componentes de cada ruta son disjuntos.

Los autores de [49] desarrollan un nuevo modelo parecido al anterior, pero esta vez utilizan diagramas de estado para describir la lógica del enclavamiento. Para verificar que la lógica descrita con los diagramas de estado es compatible con la seguridad se utiliza *Statemate* [17].

Un enfoque formal para la construcción y verificación de sistemas de control de ferrocarriles, en este caso utilizando *SystemC* como “lenguaje” de programación para los sistemas de control, puede encontrarse en [18]. Se utiliza *SystemC*, por un lado, como lenguaje objetivo de la compilación desde una descripción semiformal DSL a una especificación semántica formal, y, por otro, como lenguaje de alto nivel el cual puede ser compilado en código ejecutable. Las condiciones de seguridad son expresadas en un subconjunto de expresiones lógicas temporales con *PSL* (*PSL* es un estándar en la industria).

En [44] se desarrolla una nueva herramienta software llamada *VeRaSiS* (Verification of Railway Signaling Systems) que, por medio de un *parser* capaz de convertir ecuaciones Booleanas a notación B *Event-B model*, formaliza y verifica topologías de estaciones y los movimientos de los trenes. Es una herramienta con interfaz gráfica diseñada para ser utilizada en el campo industrial por usuarios que no estén familiarizados con la modelización formal comentada anteriormente. El análisis preliminar realizado de la herramienta con la ayuda de una compañía brasileña de transportes, encontró un fallo de validación cuando los expertos de la compañía realizaron la validación a mano, lo que pone de relieve la importancia de acercar herramientas y métodos de formalización y verificación.

Otra aproximación se puede encontrar en [38], donde los autores formalizan y tratan el problema de verificar la seguridad de una situación a través de teoría de grafos y un enfoque basado en matrices. Se utilizan dos matrices para representar

3. ESTADO DEL ARTE

dos grafos dirigidos, una representando la conectividad entre secciones dada por las posiciones de las agujas de los desvíos y otro correspondiente a los semáforos. Aplicando una operación matricial correspondiente al "y" lógico conectivo, se fusionan estas dos matrices construyendo su cierre transitivo. Aunque no se realiza, podría aplicarse un tratamiento específico para matrices dispersas, reduciendo así el tiempo de cómputo.

En [40, 41], el problema de la formalización y verificación se traduce a un problema algebraico. La posición de la agujas, semáforos y trenes se traducen en polinomios generadores de un ideal de un anillo polinomial. Se puede probar que la seguridad propuesta al enclavamiento es equivalente a la compatibilidad de un sistema algebraico no lineal, y esta compatibilidad puede decidirse usando bases de Groebner [7, 9].

En este capítulo se comentarán en detalle algunos modelos previos que están relacionados de manera directa con el modelo propuesto en esta tesis doctoral. Se utilizará la siguiente figura para ilustrar cada uno de los modelos.

Figura 3.1: Estación sencilla que se usará en esta sección para detallar algunos modelos previos (Fuente: Elaboración propia)

3. ESTADO DEL ARTE

3.1 Modelo Algebraico

En esta sección se introducen los conceptos iniciales aportados en [41], en el que se muestran los detalles para modelar los elementos de una instalación ferroviaria y comprobar si es segura o no. Este modelo es expuesto en esta tesis en primer lugar, puesto que fue el trabajo del cual derivan la mayoría de los modelos propuestos en esta sección de Estado del arte.

3.1.1 Definición formal

3.1.1.1 Aplicación del modelo a una instalación ferroviaria

Se definen las siguientes variables:

- Variables relacionadas con las secciones. Por cada sección i se define una variable x_i .
- Polinomios relacionados con la conectividad de las secciones. Si un tren puede acceder a una sección s_i y se puede pasar de la sección s_i a la sección s_j , entonces ese mismo tren puede acceder a la sección s_j . Esto está formalizado de la siguiente manera:

$$x_i(x_i - x_j)$$

- Polinomios relacionados con la posición de los trenes. Cada tren es representado por un número entero $\alpha \neq 0$. Por lo tanto, si un tren t está situado en la sección s_i , se define de la siguiente manera:

$$x_i - \alpha$$

En este modelo, un tren puede ocupar más de una sección al mismo tiempo. Por ejemplo, un tren α que ocupe las secciones x_i, x_j , se representará con los dos polinomios siguientes:

$$x_i - \alpha, x_j - \alpha$$

A continuación se definirán los siguientes ideales:

- El ideal I relacionado con los polinomios que representan la conectividad entre las secciones:

$$I = \langle x_i(x_i - x_j), \dots, x_i(x_i - x_n) \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_M]$$

- El ideal P relacionado con los polinomios que representan la situación de los trenes en las secciones.

$$P = \langle x_i - \alpha_a, \dots, x_j - \alpha_b \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_M]$$

3.1.1.2 Teorema principal

Por medio del siguiente teorema, podemos determinar la seguridad de una instalación ferroviaria.

Teorema 1. *Una situación de la instalación ferroviaria, determinada por la posición de los trenes (dada por el ideal P), y la posición de las agujas en los desvíos y los colores de los semáforos (dada por el ideal I), es segura si y sólo si:*

$$I + P \neq \langle 1 \rangle$$

Corolario 1. *Una situación de la instalación ferroviaria, determinada por la posición de los trenes (dada por el ideal P), y la posición de las agujas en los desvíos y los colores de los semáforos (dada por el ideal I), es segura si y sólo si:*

$$GB(I + P) \neq \{1\}$$

3.1.2 Aplicación del modelo al ejemplo

Vamos a aplicar este modelo algebraico al ejemplo de la figura 3.1.

3. ESTADO DEL ARTE

3.1.2.1 Variables escritas en el ejemplo

Las variables en las que los polinomios se definen están relacionadas con las secciones de la instalación ferroviaria. En efecto, para cada sección de la instalación, podemos considerar una variable x . De este modo, el estado de una instalación ferroviaria con treinta y tres secciones se representaría por polinomios definidos en el anillo:

$$\mathbb{Q}[x_0, \dots, x_{32}]$$

3.1.2.2 Ideales

Consideraremos los siguientes ideales:

- En el ejemplo de la figura 3.1, se considerarán los polinomios:
 - $x_0(x_0 - x_{28})$: Es posible pasar desde la sección x_0 a la sección x_{28} .
 - $x_{30}(x_{30} - x_{15})$: Es posible pasar desde la sección x_{30} a la sección x_{15} .
 - $x_8(x_8 - x_{20})$: Es posible pasar desde la sección x_8 a la sección x_{20} .
 - ...

En consecuencia, el ideal I se define como:

$$I = \langle x_0(x_0 - x_{28}), x_{30}(x_{30} - x_{15}), x_8(x_8 - x_{20}), \dots \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_M] \quad (3.1)$$

No se está considerando el polinomio $x_6(x_6 - x_{14})$ porque no es posible pasar de la sección x_6 a la sección x_{14} ya que las agujas del desvío Z_2 están en posición "vía directa". Por lo tanto, los trenes pueden pasar de la sección x_6 a x_{15} . Por otro lado, para el desvío que conecta las secciones x_6, x_{14}, x_{15} es necesario generar dos polinomios, puesto que es posible pasar de x_6 a x_{15} pero también de x_{15} a x_6 .

- Relacionado con la posición de los trenes. Si un tren α está situado en la sección x_i , se considerará el polinomio:

$$x_i - \alpha$$

En el ejemplo de la figura 3.1 consideramos que hay dos trenes situados en las secciones x_0, x_{26} , por lo tanto se considerarán los polinomios:

- $x_0 - 1$: El tren 1 se sitúa en x_0 .
- $x_{26} - 2$: El tren 2 se sitúa en x_{26} .

Así, el ideal P se define de la siguiente forma:

$$P = \langle x_0 - 1, x_{26} - 2 \rangle$$

Podemos aplicar el anterior teorema 1 para evaluar si una instalación ferroviaria es segura. Como la Base de Groebner del ideal $GB(I + P) = \langle 1 \rangle$ podemos concluir que la situación propuesta no es segura.

3.1.3 Ventajas y desventajas

En este enfoque, se está considerando la posibilidad de que un tren esté ocupando diferentes secciones. Dado que el anillo de polinomios en este modelo algebraico está definido en el cuerpo $\mathbb{Q}$, el cálculo de la base de Groebner de los ideales de estos polinomios puede llevar demasiado tiempo. Las posibles acciones sobre desvíos y semáforos se modelan para una única situación. Se necesita calcular una base de Groebner para cada ideal diferente I y P . Estos ideales cambian cuando:

- El ideal P cambia. Es decir, un tren se introduce o sale de la instalación ferroviaria.
- El ideal I cambia. Es decir, la situación de la instalación cambia (por ejemplo, las agujas de un desvío cambian de posición o un semáforo cambia de color).

3. ESTADO DEL ARTE

Por lo tanto, los ideales I y P son sensibles a los cambios, y consecuentemente, se puede requerir calcular muchas bases de Groebner (lo que implica mucho tiempo de cálculo asociado). De esta manera, si el desvío Z_{10} que conecta las secciones x_{31} con x_{20} o x_{21} , en la estación de ejemplo de la figura 3.1, cambia sus agujas a la posición vía desviada, el ideal I cambiará. Por lo tanto, se necesitará:

- Eliminar los polinomios $x_{31}(x_{31} - x_{20})$ y $x_{20}(x_{20} - x_{31})$ del ideal I .
- Añadir los polinomios $x_{31}(x_{31} - x_{21})$ y $x_{21}(x_{21} - x_{31})$ al ideal I .

Este modelo no permite precalcular diferentes situaciones de la instalación ferroviaria y cada situación es dependiente del número y posición de los trenes. Es decir, para detectar si podemos cambiar el estado de un semáforo o una intersección, hay trenes que entran o salen de la instalación, o los trenes simplemente cambian de posición, se necesita calcular los nuevos ideales asociados a este nuevo estado y detectar si pertenece a la base de Groebner de $I + P$.

3.2 Modelo Lógico

A continuación, mostraremos el enfoque sugerido en [37]. Es un modelo matemático basado en lógica proposicional que nos permite evaluar si una sección dada de la instalación ferroviaria es segura o evaluar si la instalación completa es segura.

3.2.1 Definición formal

3.2.1.1 Aplicación del modelo a una instalación ferroviaria

En este modelo se consideran dos tipos de proposiciones atómicas:

- Por cada sección de la instalación ferroviaria, se debe considerar una proposición atómica, s_i .
- Por cada tren que está posicionado en la instalación, se debe considerar una proposición atómica, t_i .

Una vez que hemos definido las proposiciones atómicas anteriores, podemos definir los siguientes tres tipos de fórmulas:

- Fórmulas relacionadas con la conectividad de las secciones de la instalación ferroviaria:

$$\mathcal{S} = \{s_j \rightarrow s_i \mid \text{es posible pasar desde la sección } s_i \text{ a la sección } s_j\}$$

- Fórmulas relacionadas con la posición de los trenes en la instalación ferroviaria:

$$\mathcal{P} = \{s_j \rightarrow t_j \mid \text{si la sección } s_j \text{ está ocupada por el tren } t_j\}. \text{ En este caso, se contempla que un tren pueda ocupar más de una sección.}$$

- Otra fórmulas relacionadas con los trenes (dos trenes no pueden ocupar la misma sección):

$$\mathcal{T} = \{\neg t_i \vee \neg t_j \mid t_i \text{ y } t_j \text{ son proposiciones atómicas relativas a trenes } i \neq j\}$$

3. ESTADO DEL ARTE

Obsérvese que $\neg t_i \vee \neg t_j \leftrightarrow \neg(t_i \wedge t_j)$. Dadas las definiciones anteriores relacionadas con las proposiciones atómicas y los diferentes tipos de fórmulas, podemos definir el siguiente lema:

3.2.1.2 Teorema principal

Lema 1. *Un tren t puede alcanzar una sección s , si y sólo si:*

$\{s\} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{P} \models t$ (consecuencia tautológica)

Por consiguiente, el siguiente teorema define si una sección es segura o no:

Teorema 2. *Una s sección es segura, si y sólo si:*

$\forall s \in \mathcal{S}, \{s\} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{T}$ es consistente

Demostración: La sección s no es segura $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists t_i, t_j$ trenes, los cuales pueden alcanzar la sección $s \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists t_i, t_j$ trenes, tal que $\{s\} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{P} \models t_i$ y $\{s\} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{P} \models t_j \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists t_i, t_j$ trenes, tal que $\{s\} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{P} \models (t_i \wedge t_j)$ es consistente $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists t_i, t_j$ trenes, tal que $\{s\} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{P} \models \neg(t_i \wedge t_j)$ es inconsistente $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists t_i, t_j$ trenes, tal que $\{s\} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{P} \models \neg t_i \vee \neg t_j$ es inconsistente $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{s\} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{T}$ es inconsistente.

Por lo tanto, por el siguiente teorema, podemos determinar cuando una instalación ferroviaria es segura.

Teorema 3. *La instalación ferroviaria es segura, si y sólo si, para cada sección de la instalación el conjunto de fórmulas*

$\{s\} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{T}$ es consistente.

Como hemos visto en los teoremas de esta sección, para cada sección de la instalación ferroviaria se necesita resolver un problema SAT (Satisfacibilidad). Este problema SAT puede resolverse mediante algoritmos como MiniSat¹ que está basado en la técnica DPLL [10].

¹<http://minisat.se>

3.2.2 Aplicación del modelo al ejemplo

3.2.2.1 Variables en el ejemplo

Este modelo lógico está basado en la lógica proposicional y permite comprobar si una sección determinada es segura tal como está definido en el teorema 2. En este modelo, se considerarán dos tipos de variables Booleanas:

- Para cada sección que constituye la instalación ferroviaria, se considera una proposición atómica, s_i . Como hay treinta y tres secciones, se definen treinta y tres variables booleanas relacionadas con las secciones $s_0, \dots, s_{32}$.
- Para cada tren situado en la instalación ferroviaria (y que es supervisado), se considera una proposición atómica, t_j . A diferencia del anterior modelo algebraico definido en la Sección 3.1, se consideran también variables para modelar los trenes. Como hay dos trenes, se definen dos variables booleanas relacionadas con los trenes t_1, t_2 .

3.2.2.2 Fórmulas en el ejemplo

Se consideran tres tipos de fórmulas en las variables booleanas definidas en la sección de variables lógicas:

- Fórmulas relacionadas con la topología de la instalación y los movimientos permitidos por desvíos y semáforos. Por lo tanto considera el siguiente conjunto de fórmulas:

$$\mathcal{S} = \{s_j \rightarrow s_i \mid \text{si es posible pasar de } s_i \text{ a } s_j\}$$

Así, en el ejemplo de la Figura 3.1, se consideraban las fórmulas:

1. $s_{28} \rightarrow s_0$: Si es posible pasar de la sección s_0 a la sección s_{28} .
2. $s_{15} \rightarrow s_{30}$: Si es posible pasar de la sección s_{30} a la sección s_{15} .
3. $s_{20} \rightarrow s_8$: Si es posible pasar de la sección s_8 a la sección s_{20} .

3. ESTADO DEL ARTE

4. ...

En consecuencia,

$$\begin{aligned} S = \langle s_0 \rightarrow s_{28}, s_3 \rightarrow s_{29}, s_2 \rightarrow s_1, s_8 \rightarrow s_5, s_{30} \rightarrow s_{15}, s_{11} \rightarrow s_{10}, \\ s_{13} \rightarrow s_{12}, s_{30} \rightarrow s_{27}, s_{17} \rightarrow s_{16}, s_7 \rightarrow s_{19}, s_8 \rightarrow s_{20}, s_{11} \rightarrow s_{21}, \\ \dots s_{26} \rightarrow s_{25}, s_{24} \rightarrow s_{23} \rangle \end{aligned} \quad (3.2)$$

- Fórmulas relacionadas con la posición de los trenes. Se considera el siguiente conjunto de fórmulas (un tren largo puede ocupar más de una sección):

$$\mathcal{P} = \{s_i \rightarrow t_j \mid \text{si la sección } s_i \text{ está ocupada por el tren } t_j\}$$

De esta forma, en el ejemplo contemplado en la Figura 3.1, se consideran las fórmulas lógicas:

- $s_0 \rightarrow t_0$: El tren t_0 está situado en s_0 .
- $s_{26} \rightarrow t_1$: El tren t_1 está situado en s_{26} .

En consecuencia,

$$\mathcal{P} = \{s_0 \rightarrow t_0, s_{26} \rightarrow t_1\}$$

- Fórmulas relacionadas con trenes. Se considera el siguiente conjunto de fórmulas:

$$\mathcal{T} = \{\neg t_i \vee \neg t_j \mid t_i \text{ y } t_j \text{ son variables booleanas denotando trenes}\}$$

Así, en el ejemplo de la Figura 3.1, se tendrá que:

$$\mathcal{T} = \{\neg t_0 \vee \neg t_1\}$$

En este ejemplo se puede comprobar fácilmente que la sección s_2 en el ejemplo de la Figura 3.1 no es segura debido a que:

$$\begin{aligned} & \{s_{28} \rightarrow s_0, s_1 \rightarrow s_{28}, s_2 \rightarrow s_1, s_2 \rightarrow s_6, s_0 \rightarrow t_0, s_6 \rightarrow t_1, \neg t_0 \vee \neg t_1\} \\ & \cup \{s_2\} \subset \mathcal{S} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{T} \\ & \text{es inconsistente.} \end{aligned}$$

3.2.3 Ventajas y desventajas

En este enfoque, se está considerando la posibilidad de que un tren pueda situarse en secciones diferentes. Para detectar si una situación de la instalación ferroviaria es segura, se necesita calcular M problemas SAT (uno para cada sección). Este modelo no permite precalcular diferentes situaciones de la instalación ferroviaria y cada situación es dependiente del número y posición de los trenes, es decir, para detectar si se puede cambiar el estado de un semáforo o una intersección, los trenes cambian de posición o entran y salen nuevos trenes de la instalación, se necesita calcular M problemas SAT.

3.3 Lógico-Algebraico

3.3.1 Definición formal

Se define un modelo [21] que combina los dos descritos anteriormente. Este modelo utiliza varios resultados matemáticos [20, 22, 39] que permiten resolver problemas relacionados con lógica proposicional mediante técnicas algebraicas.

Definamos $\mathcal{C}$ como un conjunto de fórmulas usando las proposiciones atómicas $X_1, \dots, X_m$. Podemos ver este enfoque en el modelo lógico definido en la sección anterior. Cada fórmula de $\mathcal{C}$ tendrá asociada un polinomio en $\mathbb{Z}_2[x_1, \dots, x_m]$. Para poder hacer esta asociación, se definirá el ideal:

$$I = \langle x_1^2 + x_1, \dots, x_m^2 + x_m \rangle$$

Definición 1. Se define recursivamente la función $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{Z}_2[x_1, \dots, x_m]$ como sigue:

- Si $A \equiv X_i$, entonces $\varphi(A) = x_i$
- Si $A \equiv \neg B$ donde $B \in \mathcal{C}$, entonces $\varphi(A) = NF(1 + \varphi(B), I)$
- Si $A \equiv B \wedge C$ donde $B, C \in \mathcal{C}$, entonces $\varphi(A) = NF(\varphi(B) \cdot \varphi(C), I)$
- Si $A \equiv B \vee C$ donde $B, C \in \mathcal{C}$, entonces $\varphi(A) = NF(\varphi(B) + \varphi(C) + \varphi(B) \cdot \varphi(C), I)$
- Si $A \equiv B \rightarrow C$ donde $B, C \in \mathcal{C}$, entonces $\varphi(A) = NF(1 + \varphi(B) + \varphi(B) \cdot \varphi(C), I)$.

(donde NF es “forma normal”, i.e., la reducción de un polinomio módulo un ideal)

Una propiedad muy interesante que se desprende de la definición anterior, es que el grado del polinomio total generado por la función φ puede ser como mucho igual al número de variables, y que el grado en cada una de las variables no puede ser mayor que 1. Esta propiedad permite que estos polinomios puedan ser tratados

de manera más sencilla desde un punto de vista computacional.

El siguiente teorema (que se puede encontrar detallado en [21]) muestra cómo problemas relativos a lógica proposicional son traducidos en términos algebraicos:

Teorema 4. *Dado $A_1, \dots, A_n, B \in \mathcal{C}$, se cumple lo siguiente:*

$$\{A_1, \dots, A_n\} \models B \Leftrightarrow \varphi(\neg B) \in \langle \varphi(\neg A_1), \dots, \varphi(\neg A_n) \rangle + I$$

La importancia de este teorema es debido a que muchos de los problemas algebraicos relacionados con este teorema se pueden resolver por medio del uso de Bases de Groebner [7]. Recordamos que una base de Groebner reducida de un ideal $\mathcal{J}$ es un conjunto finito de polinomios $G = \{q_1, \dots, q_k\}$ tal que $\langle q_1, \dots, q_k \rangle = \mathcal{J}$, con unas propiedades muy especiales.

3.3.1.1 Teorema principal

Lema 2. *Sean I, S, P, T los ideales asociados a una determinada situación de desvíos y semáforos dentro de una instalación ferroviaria (S, P, T son formalmente definidos en la siguiente sección), tenemos que:*

$$\text{una sección } s \text{ no es segura si y solo si } s \in I + S + P + T$$

Por lo tanto, acorde con el siguiente teorema, una sección es segura si y sólo si:

Teorema 5. *Sean I, S, P, T los ideales asociados a una determinada situación de desvíos y semáforos dentro de una instalación ferroviaria y siendo $\mathcal{G}$ base de Groebner reducida de $I + S + P + T$, entonces:*

$$\text{una sección no es segura} \Leftrightarrow s \in \mathcal{G}$$

3.3.1.2 Aplicación del modelo a una instalación ferroviaria

En este modelo se definirán los siguientes ideales:

3. ESTADO DEL ARTE

- Ideal I relacionado con las propiedades para traducir problemas relacionados con la lógica proposicional en términos algebraicos. Aquí las variables s y t están relacionadas con las secciones y trenes.

$$I = \langle s_1^2 + s_1, \dots, s_m^2 + s_m, t_1^2 + t_1, \dots, t_n^2 + t_n \rangle$$

- El ideal S relacionado con la conectividad entre secciones de la instalación ferroviaria (incluyendo la posición de las agujas de los desvíos o el color de los semáforos).

$$S = \{(s_i + 1)s_j, \text{ si es posible pasar de } s_j \text{ a } s_i\}$$

- El ideal P relacionado con la secciones ocupadas por los trenes de la instalación ferroviaria:

$$P = \{(t_j + 1)s_i, \text{ si la sección } s_i \text{ es ocupada por el tren } t_j\}$$

(En este modelo también está contemplado que un mismo tren pueda ocupar varias secciones a la vez).

- El ideal T relacionado con la secciones ocupadas por los trenes de la instalación ferroviaria:

$$T = \{(t_i t_j) | t_i \neq t_j \text{ son variables que denotan trenes}\}$$

3.3.2 Aplicación del modelo al ejemplo

3.3.2.1 Variables escritas en el ejemplo

En primer lugar, se define el anillo sobre el que trabaja este modelo.

$$\mathbb{Z}_2[s_0, \dots, s_{32}, t_1, t_2]$$

A diferencia del modelo algebraico descrito anteriormente, los coeficientes de los polinomios se encuentran en $\mathbb{Z}_2$. Además se usan variables Booleanas para modelar los trenes.

3.3.2.2 Ideales en el ejemplo

Para detectar si una instalación ferroviaria es segura, se necesita definir los siguientes ideales:

- El ideal I de polinomios relacionados con propiedades de la traducción de lógica en términos algebraicos. En la Figura 3.1 es:

$$I = \langle s_0^2 + s_0, \dots, s_{32}^2 + s_{32}, t_1^2 + t_1, \dots, t_2^2 + t_2 \rangle$$

- El ideal S de polinomios relacionados con la topología de la instalación y los movimientos permitidos por desvíos y semáforos. De esta manera, se consideran los siguientes polinomios para la definición del ideal S en la Figura 3.1:

- $(s_0 + 1)s_{28}$: Es posible pasar de la sección s_0 a la sección s_{28} .
- $(s_{30} + 1)s_{15}$: Es posible pasar de la sección s_{30} a la sección s_{15} .
- $(s_8 + 1)s_{20}$: Es posible pasar de la sección s_8 a la sección s_{20} .
- ...

En consecuencia,

$$\begin{aligned} S = \langle & (s_{28} + 1)s_0, (s_{29} + 1)s_3, (s_1 + 1)s_2, (s_5 + 1)s_8, \\ & (s_{15} + 1)s_{30}, (s_{10} + 1)s_{11}, (s_{12} + 1)s_{13}, (s_{27} + 1)s_{30}, \\ & (s_{16} + 1)s_{17}, (s_{19} + 1)s_7, (s_{20} + 1)s_8, (s_{21} + 1)s_{11}, \\ & (s_{25} + 1)s_{26}, (s_{23} + 1)s_{24} \rangle \end{aligned} \quad (3.3)$$

- El ideal P de polinomios relacionados con la posición de los trenes. De esta manera, se consideran los siguientes polinomios para la definición del ideal P en la Figura 3.1:

- $s_0(t_0 + 1)$: El tren t_0 está situado en s_0 .
- $s_{26}(t_1 + 1)$: El tren t_1 está situado en s_{26} .

3. ESTADO DEL ARTE

Consecuentemente:

$$P = \langle s_0(t_0 + 1), s_{26}(t_1 + 1) \rangle \quad (3.4)$$

- El ideal T de polinomios relacionados con trenes. De esta manera, el ideal T en el ejemplo de la Figura 3.1 sería:

$$T = \langle t_0, t_1 \rangle \quad (3.5)$$

Por lo tanto, se puede evaluar que la situación propuesta no es segura debido a que $s_2 \in G$ donde G es la base de Groebner de $I + S + P + T$.

3.3.3 Ventajas y desventajas

Este modelo resuelve los principales inconvenientes de los modelos anteriores:

- A diferencia del anterior enfoque lógico en el que se requiere calcular M problemas SAT, aquí sólo se necesita calcular una base de Groebner (como en el modelo algebraico anterior).
- A diferencia del anterior enfoque algebraico, los polinomios usados son Booleanos y en consecuencia, la base de Groebner se calcula mucho más rápido. Sin embargo, este modelo no permite precalcular diferentes situaciones de la instalación ferroviaria y cada situación es dependiente del número y posición de los trenes.

3.4 Answer Set Programming

3.4.1 Definición formal

Answer set programming (*ASP*) se basa en las semánticas de modelo estable *answer set* y es usado para definir una semántica declarativa para programas lógicos con negación por fallo (*NAF*). La negación por fallo es una regla de inferencia en programación lógica y es útil cuando queremos detectar casos explícitos que invaliden un predicado. *ASP* es una forma de programación declarativa orientado a problemas complejos de búsqueda (principalmente NP-Hard). En *ASP* los problemas de búsqueda se reducen a:

- la computación de modelos estables,
- y *answer set solvers* (programas para generar modelos estables [14, 16]) para realizar la búsqueda de soluciones.

Estos algoritmos de búsqueda se basan en su mayoría en el procedimiento de Davis-Putman-Logemann-Loveland [11] (algoritmo DPLL) mejorado. En definitiva el método *ASP* define un dominio o problema utilizando reglas lógicas, utiliza restricciones para eliminar soluciones (modelos) y el sistema computa modelos estables (*answer sets*) que corresponden a soluciones correctas del problema.

Smodels y frontend *lparse* [34] forman uno de los sistemas *ASP* más utilizados. Usaremos el siguiente ejemplo [24] para introducir dicho lenguaje. Considere la siguiente cláusula de Horn:

$$(p \wedge ((p \wedge q) \rightarrow r) \wedge ((p \wedge \neg q) \rightarrow s))$$

se define en *lparse* como:

$p.$

$r :- p, q.$

3. ESTADO DEL ARTE

$s :- p, \text{ not } q.$

computando sus modelos estables, obtendremos el siguiente resultado:

Answer: 1

Stable Model: $s \ p$

Más intuitivamente, este resultado es debido a lo siguiente: (I) p es incluido en el modelo estable ya que es declarado como un hecho directamente; (II) q no aparece en la cabeza de ninguna de las reglas, no es incluido en el modelo estable, (III) r aparece en la cabeza de una regla, pero q falla por lo visto en (II), y por último (IV) s se incluye en el modelo estable ya que aparece en la cabeza de una regla y demás, p es un echo y $\neg q$ es satisfactorio.

3.4.1.1 Aplicación del modelo al sistema ferroviario

Dado S un conjunto de secciones y T un conjunto de trenes:

- (i) Dado $t \in T$ y suponiendo que t está posicionado en la sección A , definamos la relación $\mathcal{R}_t$ que captura la accesibilidad a secciones adyacentes al tren t en la situación propuesta: si un tren t puede pasar a la sección adyacente B en la situación propuesta, el par ordenado (A, B) se añadirá al conjunto $\mathcal{R}_t \subset S \times S$. Este proceso es repetido para todas las secciones adyacentes y accesibles.
- (ii) Por lo tanto la accesibilidad general viene dada por el cierre transitivo de $\mathcal{R}_t$. Hay que tener también en cuenta el cierre reflexivo puesto que un tren puede permanecer donde esté. Por lo tanto, denotaremos $\hat{\mathcal{R}}_t$ al cierre transitivo-reflexivo de $\mathcal{R}_t$. El conjunto de todas las secciones accesibles desde la sección $A \in S$, denotado por $\text{AccS}(A)$, es:

$$\text{AccS}(A) = \{W \in S \mid (A, W) \in \hat{\mathcal{R}}_t\}$$

Un tren $t \in T$ podría ocupar mas de una sección (como en algunos modelos anteriores, se contempla esta posibilidad), definimos $\text{Occ}(t)$ como el conjunto de secciones ocupadas por un tren. Como podrá moverse hacia adelante o hacia atrás en el conjunto de las secciones de $\text{Occ}(t)$, la accesibilidad desde todas las secciones de $\text{Occ}(t)$ deben ser comprobadas para el tren t , por lo tanto, el conjunto de todas las secciones accesibles por el tren $t \in T$, denotado por $\text{AccT}(t)$ es:

$$\text{AccT}(t) = \bigcup_{J \in \text{OccT}(t)} \text{AccS}(J)$$

(iii) Finalmente, la seguridad de la situación propuesta será equivalente a:

$$\forall t_1, t_2 \in T, t_1 \neq t_2 : \text{AccT}(t_1) \cap \text{AccT}(t_2) = \emptyset$$

3.4.1.2 Teorema principal

Como hemos visto anteriormente en la definición formal (iii), podremos verificar la seguridad de la instalación ferroviaria a través de la siguiente regla:

```
has_problems(Ca, T1, T2) :- reachable(T1, Ca),
reachable(T2, Ca), T1 < T2.
show has_problems(Ca, T1, T2).
```

donde: *has_problems* verifica si existe posibilidad de colisión dados dos trenes a través de *reachable*, que a su vez verifica si un tren puede alcanzar una sección, obteniendo el siguiente resultado

```
Answer: 1
Stable Model: has_problems(s000,t000,t001)
```

Como podemos observar, se detecta la situación peligrosa en la sección s_0 puesto que puede ser alcanzada por los trenes t_0 y t_1

3. ESTADO DEL ARTE

3.4.2 Aplicación del modelo al ejemplo

A continuación se muestran las reglas en formato *LPARSE* relacionadas con los desvíos

3.4.2.1 Reglas relacionadas con desvíos en el ejemplo

```
turnout(s028,s001,s004,tur028001) .  
state(tur028001,direct) .  
turnout(s002,s007,s006,tur002007) .  
state(tur002007,diverted) .  
turnout(s006,s015,s014,tur006015) .  
state(tur006015,direct) .  
...  
state(tur009010,diverted) .  
turnout(s032,s005,s009,tur032005) .
```

A continuación se muestran las reglas en formato *LPARSE* relacionadas con los semáforos.

3.4.2.2 Reglas relacionadas con los semáforos en el ejemplo

```
colour(sem030027,red) .  
semaphore(s017,s016,sem017016) .  
colour(sem017016,green) .  
semaphore(s007,s019,sem007019) .  
colour(sem007019,red) .  
semaphore(s008,s020,sem008020) .  
colour(sem008020,green) .
```

```
...  
semaphore(s011,s021,sem011021).  
colour(sem011021,red).  
semaphore(s026,s025,sem026025).  
colour(sem026025,green).  
semaphore(s024,s023,sem024023).  
colour(sem024023,green).  
...  
are_neighbours(s028,s000).  
are_neighbours(s029,s003).  
are_neighbours(s001,s002).  
are_neighbours(s005,s008).
```

A continuación se muestran las reglas en formato *LPARSE* relacionadas con la posición de los trenes.

3.4.2.3 Reglas relacionadas con los trenes en el ejemplo

```
occupies(t001,s026).  
occupies(t000,s000).
```

3.4.3 Ventajas y desventajas

Este enfoque presenta unos tiempos de cómputo muy inferiores a los modelos anteriormente analizados en esta sección (algebraico, lógico y lógico-algebraico). Por ello, este modelo puede ser usado para verificar la seguridad en grandes instalaciones ferroviarias, como por ejemplo en la estación de Chamartin, como se demostrará en los siguientes apartados. No obstante, este modelo ha de realizar todos los cálculos para verificar la seguridad de

3. ESTADO DEL ARTE

una instalación cada vez que la situación cambia, y al igual que los modelos anteriores, los tiempos de cálculo son dependientes del número de trenes que están operando en la estación.

Modelo Propuesto

En este apartado definiremos el modelo propuesto en esta tesis doctoral. Si definimos como *situación de los elementos de control* en una instalación ferroviaria, una situación determinada de posiciones de desvíos y color de los semáforos en un momento dado; el nuevo modelo propuesto en este trabajo podrá realizar un precálculo para guardar dicha situación (con su correspondiente base de Groebner), y poder utilizar este precálculo para futuras comprobaciones de seguridad de los trenes que circulan por la instalación para hacerlo de manera mucho más rápida y efectiva a través del uso de la forma normal en vez de tener que calcular la base de Groebner de nuevo. En este punto cabe recordar que el cálculo de una base de Groebner es mucho más costoso que el de una forma normal.

En relación con el estado del arte, en este nuevo enfoque no se modelan directamente los trenes, que se utilizarán más tarde para realizar la comprobación de la seguridad de la instalación a través del cálculo de formas normales. Este enfoque es muy potente debido a varias razones:

4. MODELO PROPUESTO

- Para una situación dada de los elementos de control, solamente calcularemos una vez una base de Groebner. Una vez precalculada, se utiliza esta base de Groebner para comprobar la seguridad de los trenes que circulan en la estación siempre que la situación de los elementos de control no cambien. Si cambian, se comprobará si se ha realizado el precálculo de la nueva situación, si es así, se reutilizará. Este precálculo puede ser muy eficiente cuando en una instalación ferroviaria se repiten más frecuentemente algunas situaciones de los elementos de control que otras. Esto puede comprobarse en los itinerarios de entradas y salidas de trenes en las estaciones, existen algunos patrones que se repiten con frecuencia.
- Los trenes no se utilizan para el cálculo de la base de Groebner correspondiente a la topología de la instalación como en el resto de modelos. En el nuevo enfoque se utiliza la posición de los trenes en el cálculo de la forma normal con la que obtendremos si una determinada situación con los trenes posicionados en diferentes secciones es segura o no.

Además el nuevo modelo se implementará sobre la librería PolyBoRi [2] especializada en polinomios en anillos booleanos, y que internamente implementa *ZDDs* [29] (Zero-suppressed Binary Decision Diagrams) proporcionando una ventaja competitiva sobre otros sistemas en la representación y operación de este tipo de polinomios.

4.1 Definición formal

En esta sección definiremos el enfoque propuesto en este nuevo modelo para determinar la seguridad de una instalación ferroviaria compuesta por N secciones: $S_1, \dots, S_N$. Definiremos el siguiente conjunto de polinomios booleanos en variables $s_1, \dots, s_N, t_1, \dots, t_N$. Por lo tanto, una variable s_i y una

variable t_i son considerados para cada sección S_i de la instalación. Para la configuración de la instalación de ferrocarriles, que define la posición de los desvíos y el color de los semáforos, usaremos:

Paso 1. Obtener un conjunto K de polinomios de acuerdo con la conectividad de las secciones. Si es posible pasar desde la sección S_i a la sección S_j , consideraremos el siguiente polinomio $t_i + s_i t_j$. De manera general tenemos.:

$$K = \{t_i + s_i t_j \mid \text{si es posible pasar de la sección } S_i \text{ a la sección } S_j\}$$

Paso 2. Calcular la base de Groebner G del ideal:

$$I = K + \{s_1^2 + s_1, \dots, s_N^2 + s_N, t_1^2 + t_1, \dots, t_N^2 + t_N\}$$

(con respecto a un cierto orden para las variables y un cierto orden para los polinomios)

Una vez que los dos pasos anteriores calculados, podremos comprobar si la posición de un conjunto de trenes es peligrosa o no. En este enfoque, un tren sólo puede ocupar una sección a la vez, pero en el Anexo A extenderemos el modelo para comprobar la seguridad de la instalación cuando hay trenes ocupando varias secciones a la vez.

Paso 3. Para determinar si la posición de M trenes situados en las secciones $S_1, S_2, \dots, S_M$ es peligrosa, calcularemos la forma normal del monomio $t_1 t_2 \dots t_M$ módulo I (I viene dado a través de la base de Groebner G previamente calculada):

$$\text{NF}(t_1 t_2 \dots t_M, I)$$

Como veremos en el Teorema 4, la posición de M trenes es peligrosa si y sólo si $\text{NF}(t_1 t_2 \dots t_M, I)$ contiene un número de variables menor que M .

4. MODELO PROPUESTO

Los pasos 1 y 2 sólo son necesarios cuando la configuración de la instalación cambia. El paso 3 se realiza para las diferentes posiciones que ocupan o que pueden ocupar los trenes (este paso es muy rápido, $\sim 0.0001s$).

4.2 Fundamentos teóricos

Aunque en la Sección 2.2 hemos definido los conceptos matemáticos más importantes, ahora veremos esos conceptos de manera más aplicada a la inferencia de situaciones peligrosas en este nuevo enfoque. Además, incluimos la siguiente estación como ejemplo para ilustrar en profundidad los fundamentos teóricos en esta sección:

Figura 4.1: Estación sencilla para ilustrar el nuevo modelo propuesto

4.2.1 Fundamentos algebraicos

El ideal J de $\mathbb{Z}_2[x_1, \dots, x_N]$, generado por los polinomios $p_1, \dots, p_m$ y denotado por $J = \langle p_1, \dots, p_m \rangle$, resulta ser el conjunto de polinomios de la forma:

$$\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_m p_m$$

donde $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ son polinomios en $\mathbb{Z}_2[x_1, \dots, x_N]$, esto es, el conjunto de todas las combinaciones algebraicas de $p_1, \dots, p_m$.

Dado un polinomio p tenemos que $p + J$ es el conjunto de polinomios con la forma $p + q$ donde $q \in J$. Es posible que $p + J = q + J$ a pesar de $p \neq q$ (esto ocurrirá si $p - q \in J$).

Ejemplo: Consideremos el ideal $J = \langle x_1 + x_2x_3, x_2 + x_3x_4 \rangle$ del anillo $\mathbb{Z}_2[x_1, x_2, x_3, x_4]$ y el polinomio $p = x_1x_4 + x_2$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
 p + J &= x_1x_4 + x_2 + J \\
 &= x_2x_3x_4 + x_2 + J && (x_1 = x_2x_3 \text{ porque } x_1 + x_2x_3 \in J) \\
 &= x_3^2x_4^2 + x_2 + J && (1^{\text{a}} \text{ ocurrencia de } x_2 = x_3x_4 \text{ porque } x_2 + x_3x_4 \in J) \\
 &= x_3^2x_4^2 + x_3x_4 + J && (2^{\text{a}} \text{ ocurrencia de } x_2 = x_3x_4 \text{ porque } x_2 + x_3x_4 \in J)
 \end{aligned}$$

En este modelo consideraremos polinomios en $\mathbb{Z}_2[s_1, \dots, s_N, t_1, \dots, t_N]$. El ideal I definido en la sección anterior, es generado por los siguientes polinomios:

- Los polinomios $s_i^2 + s_i, t_i^2 + t_i \in I, i = 1, \dots, n$. Esto implica que, para cada polinomio p , podemos obtener un polinomio q tal que $p + I = q + I$ y tal que los exponentes de todas las variables en q son 1.

Ejemplo: Consideremos el ideal I y el polinomio $p = s_1^2t_2^3 + s_1t_2 + s_1^3$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 p + I &= s_1^2t_2^3 + s_1t_2 + s_1^3 + I \\
 &= s_1t_2^2t_2 + s_1t_2 + s_1^2s_1 + I && (s_1^2 = s_1, t_2^3 = t_2^2t_2 \text{ y } s_1^3 = s_1^2s_1) \\
 &= s_1t_2t_2 + s_1t_2 + s_1s_1 + I && (t_2^2 = t_2 \text{ y } s_1^2 = s_1) \\
 &= s_1t_2^2 + s_1t_2 + s_1^2 + I && (t_2^2 = t_2^2 \text{ y } s_1s_1 = s_1^2) \\
 &= s_1t_2 + s_1t_2 + s_1 + I && (t_2^2 = t_2 \text{ y } s_1^2 = s_1) \\
 &= s_1 + I && (2s_1t_2 = 0)
 \end{aligned}$$

Como anteriormente hemos definido,

$$K = \{t_i + s_it_j \mid \text{si es posible pasar desde la sección } s_i \text{ a la sección } s_j\}$$

4. MODELO PROPUESTO

y

$$I = K + \{s_1^2 + s_1, \dots, s_N^2 + s_N, t_1^2 + t_1, \dots, t_N^2 + t_N\}$$

- El polinomio $t_i + s_i t_j \in I$ si y solo si es posible pasar desde la sección s_i a la sección s_j . Esto implica que, para el monomio $t_1 \dots t_n$ (que representan a los trenes en la estación) podemos obtener otros monomios en variables t y s .

Ejemplo: En el ejemplo de la Figura 4.1, si $p = t_1 t_{10} t_8$

$$\begin{aligned}
 p + I &= t_1 t_{10} t_8 + I \\
 &= t_1 t_{10} s_8 t_7 + I && (t_8 = s_8 t_7 \text{ porque } t_8 + s_8 t_7 \in I) \\
 &= t_1 s_{10} t_{11} s_8 t_7 + I && (t_{10} = s_{10} t_{11} \text{ porque } t_{10} + s_{10} t_{11} \in I) \\
 &= t_1 s_{10} s_{11} t_6 s_8 t_7 + I && (t_{11} = s_{11} t_6 \text{ porque } t_{11} + s_{11} t_6 \in I) \\
 &= t_1 s_{10} s_{11} s_6 t_7 s_8 t_7 + I && (t_6 = s_6 t_7 \text{ porque } t_6 + s_6 t_7 \in I) \\
 &= t_1 s_{10} s_{11} s_6 t_7^2 s_8 + I && (t_7 t_7 = t_7^2) \\
 &= t_1 s_{10} s_{11} s_6 t_7 s_8 + I && (t_7^2 = t_7) \\
 &= t_1 s_{10} s_{11} s_6 t_8 + I && (s_8 t_7 = t_8 \text{ porque } t_8 + s_8 t_7 \in I)
 \end{aligned}$$

Por medio de esas sustituciones definidas por el ideal I , podemos obtener, para cada monomio p , otro monomio q cuyas variables son potencia de 1 y tal que $p + I = q + I$. Otro problema complejo resuelto en el álgebra computacional, es el de encontrar el monomio más “sencillo” q tal que $q + I = p + I$. De manera más formal, utilizamos el polinomio mínimo q (donde un orden entre monomios, $\preceq$, tiene que ser definido) tal que $p + I = q + I$. Este polinomio q es llamado forma normal de p módulo un ideal I (bajo el orden $\preceq$), $\text{NF}(p, I)$, el cual es calculado realizando pseudo-divisiones de un polinomio p por una base de Groebner del ideal I (el cual es calculado previamente).

El concepto de forma normal, requiere la definición de un orden, al igual que las bases de Groebner.

El orden elegido es lexicográfico y grado total, y con el orden para las variables $t > s$:

$$s_3 \preceq t_1 = \text{True}$$

$$t_1 \preceq s_3 = \text{False}$$

$$t_2 \preceq t_1 = \text{True}$$

$$t_1 \preceq t_2 = \text{False}$$

$$s_1 \preceq s_2 = \text{False}$$

4.2.2 Inferencia de situaciones peligrosas con un enfoque basado en estados

Veremos como el problema de la inferencia de situaciones peligrosas en una estación de ferrocarriles puede ser descrita por medio de estados, los cuales pueden ser transformados por medio de operaciones. Por un lado, un estado describe las secciones donde los trenes están localizados en la estación en un momento dado, por otro lado, un estado pasado, describe las secciones donde los trenes estuvieron localizados en el pasado. Las operaciones de los estados (es decir, las transiciones entre estados) representan posibles movimientos de los trenes en la estación.

Con este propósito, cada estado es descrito como un subconjunto de variables $s_1, \dots, s_N, t_1, \dots, t_N$.

A continuación, proponemos ejemplos de posibles estados en la estación representada en la Figura 4.1:

$$\mathcal{E}_0 = \{t_1 t_{10} t_8\}, \mathcal{E}_1 = \{t_1 t_{10} s_8 t_7\}, \mathcal{E}_2 = \{t_1 s_{10} t_{11} s_8 t_7\},$$

$$\mathcal{E}_3 = \{t_1 s_{10} s_{11} t_6 s_8 t_7\}, \mathcal{E}_4 = \{t_1 s_{10} s_{11} s_6 t_7 s_8 t_7\}, \mathcal{E}_5 = \{t_1 s_{10} s_{11} s_6 t_8\}$$

4. MODELO PROPUESTO

Podemos transformar el estado $\mathcal{E}_i$ en otro estado $\mathcal{E}_j$ (denotado por $\mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{E}_j$) por medio de las operaciones siguientes:

- es posible, sustituir $t_i \in \mathcal{E}_i$ por el monomio $s_it_j \in I$ si es posible pasar desde la sección S_i a S_j . Por ejemplo, tenemos que $\mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{E}_1$ ($\mathcal{E}_0 = \{t_1t_{10}t_8\}$ y $\mathcal{E}_1 = \{t_1t_{10}s_8t_7\}$) sustituyendo t_8 por s_8t_7 porque $t_8 + s_8t_7 \in I$.
- es posible, sustituir $s_it_j \in \mathcal{E}_i$ por el monomio $t_i \in I$ si es posible pasar desde la sección S_i a S_j . Por ejemplo, tenemos que $\mathcal{E}_4 \rightarrow \mathcal{E}_5$ ($\mathcal{E}_4 = \{t_1s_{10}s_{11}s_6t_7s_8t_7\}$ y $\mathcal{E}_5 = \{t_1s_{10}s_{11}s_6t_8\}$) sustituyendo s_8t_7 por t_8 porque $t_8 + s_8t_7 \in I$.

Las variables t y s en esos estados informan sobre los posibles movimientos de los trenes. Las variables t indican la posición actual de los trenes, y las variables s las secciones a través de las cuales los trenes han pasado.

- El estado $\mathcal{E}_0 = \{t_1t_{10}t_8\}$ representa que hay trenes en las secciones S_1, S_{10}, S_8 .
- El estado $\mathcal{E}_1 = \{t_1t_{10}s_8t_7\}$ representa que hay trenes en las secciones S_1, S_7, S_{10} y al menos uno de esos trenes ha pasado a través de la sección S_8 (la variable s_8 aparece en $\mathcal{E}_1$).
- El estado $\mathcal{E}_2 = \{t_1s_{10}t_{11}s_8t_7\}$ representa que hay trenes en las secciones S_1, S_7, S_{11} y al menos uno de esos trenes ha pasado a través de las secciones S_8, S_{10} (las variables s_{10} y s_8 aparecen en $\mathcal{E}_2$).
- El estado $\mathcal{E}_3 = \{t_1s_{10}s_{11}t_6s_8t_7\}$ representa que hay trenes en las secciones S_1, S_6, S_7 y al menos uno de esos trenes ha pasado a través de las secciones S_8, S_{10}, S_{11} (las variables s_8, s_{10}, s_{11} aparecen en $\mathcal{E}_3$).

Como hemos visto, los estados $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ contienen el mismo número de variables t representando la posición de los trenes en situaciones diferentes. Sin embargo, nosotros podemos transformar el estado $\mathcal{E}_3 = \{t_1s_{10}s_{11}t_6s_8t_7\}$

en el estado $\mathcal{E}_4 = \{t_1 s_{10} s_{11} s_6 t_7 s_8 t_7\} = \{t_1 s_{10} s_{11} s_6 t_7 s_8\}$ sustituyendo t_6 con s_6, t_7 (el tren que estaba en la sección S_6 se mueve a la sección S_7). En este caso, el número de variables “ t ” es menor que el cardinal de $\mathcal{E}_3$, porque la variable t_7 (que se añadió con la operación) aparece en el estado $\mathcal{E}_3$. La operación significa que el tren que estaba situado en la sección S_6 se mueve a la sección S_7 , y dado que la sección S_7 estaba ocupada por otro tren, una posible colisión puede suceder.

Siguiendo este razonamiento, tenemos que:

Proposición 1. *La posición de M trenes posicionados en las secciones $S_1, \dots, S_M$ es peligrosa $\Leftrightarrow$ el estado $\mathcal{E}_0 = \{t_1 \dots t_M\}$ puede ser transformado en el estado $\mathcal{E}_z$ con un número de variables t menor que M .*

En el ejemplo anterior $\{t_1 t_{10} t_8\} = \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{E}_4 = \{t_1 s_{10} s_{11} s_6 t_7 s_8\}$. De acuerdo con la proposición anteriormente definida, la posición de los trenes localizados en las secciones S_1, S_{10}, S_8 (relacionados con el estado $\mathcal{E}_0 = \{t_1 t_{10} t_8\}$) es peligrosa.

4.2.3 Interpretación de los estados en términos algebraicos

En esta sección, representaremos los estados descritos anteriormente por medio de monomios Booleanos. Como veremos, esta representación es útil para determinar cuando la posición de trenes puede ser peligrosa o no.

Para cada estado $\mathcal{E}$ representamos con $\varphi(\mathcal{E}) \in \mathbb{Z}_2[s_1 \dots, s_N, t_1 \dots, t_N]$ al monomio perteneciente al estado (un conjunto con un monomio).

Por ejemplo:

- $\varphi(\mathcal{E}_0) = \varphi(\{t_1 t_{10} t_8\}) = t_1 t_{10} t_8$
- $\varphi(\mathcal{E}_1) = \varphi(\{t_1 t_{10} s_8 t_7\}) = t_1 t_{10} s_8 t_7$

4. MODELO PROPUESTO

$$- \varphi(\mathcal{E}_4) = \varphi(\{t_1 s_{10} s_{11} s_6 t_7 s_8\}) = t_1 s_{10} s_{11} s_6 t_7 s_8$$

Como vimos, las operaciones definidas para transformar un estado $\mathcal{E}_1$ a un estado $\mathcal{E}_2$ están completamente relacionadas con el hecho de que $\varphi(\mathcal{E}_1) + I = \varphi(\mathcal{E}_2) + I$. Por lo tanto:

Proposición 2. Sean $\mathcal{E}_a, \mathcal{E}_b$ dos estados. Tenemos que:

$$\mathcal{E}_a \rightarrow \mathcal{E}_b \Leftrightarrow \varphi(\mathcal{E}_a) + I = \varphi(\mathcal{E}_b) + I$$

Utilizaremos la siguiente figura, para ilustrar esta proposición:

Figura 4.2: Instalación usada para ilustrar el nuevo modelo propuesto (Fuente: Elaboración propia)

En el caso de que $K = \{t_1 + s_1 t_2\}$ porque la señal luminosa representada por $\neg \circ_1$ indica que el paso entre las secciones es posible, tenemos que $I = K + \{t_1 + t_1^2, t_2 + t_2^2, s_1 + s_1^2\}$

Podemos definir varios posibles estados:

$$\varphi(\mathcal{E}_a) = t_1 \quad (\text{hay un tren posicionado en } s_1)$$

$$\varphi(\mathcal{E}_b) = t_2 \quad (\text{hay un tren posicionado en } s_2)$$

$$\varphi(\mathcal{E}_c) = s_1 t_2 \quad (\text{hay un tren posicionado en } s_2 \text{ que pasó por } s_1)$$

$$\varphi(\mathcal{E}_d) = t_1 t_2 \quad (\text{hay un tren posicionado en } s_1 \text{ y un tren posicionado en } s_2)$$

El estado $\mathcal{E}_c$ que es equivalente al estado $\mathcal{E}_a$ pero diferente del estado $\mathcal{E}_b$ ($\mathcal{E}_a \rightarrow \mathcal{E}_c$ y $\mathcal{E}_c \rightarrow \mathcal{E}_a$). Calculando $\text{NF}(\varphi(\mathcal{E}_d), I)$, que representa dos trenes localizados en s_1 y s_2 respectivamente, tenemos que:

$$\text{NF}(\varphi(\mathcal{E}_d), I) = t_1 t_2 + I$$

$$\begin{aligned}
 &= s_1 t_2 t_2 + I && (t_1 + I = s_1 t_2 + I \text{ porque } t_1 + s_1 t_2 \in I.) \\
 &= s_1 t_2 + I && (t_2^2 + I = t_2 + I \text{ porque } t_2^2 + t_2 \in I)
 \end{aligned}$$

Consecuentemente, la Proposición 1 quedaría de la siguiente forma:

Proposición 3. *La posición de M trenes posicionados en secciones $S_1, \dots, S_M$ es peligrosa $\Leftrightarrow$ existe un monomio p con un número de variables t_α menor que M tal que $p + I = t_1 t_2 \dots t_M + I$.*

Con el objetivo de encontrar este polinomio p , haremos uso de $\text{NF}(t_1 t_2 \dots t_M, I)$, la forma normal de un monomio módulo el ideal I . De acuerdo con lo expuesto en la sección 4.2.2, $\text{NF}(t_1 t_2 \dots t_M, I)$ devuelve el monomio p con el mínimo número de variables t_α tal que $p + I = t_1 t_2 \dots t_M + I$. Consecuentemente, tenemos el siguiente resultado:

4.2.4 Teorema principal

A continuación se define el teorema principal de este modelo, cuyo resultado utilizaremos para comprobar la seguridad dada una situación en una instalación:

Teorema 4. *La posición de M trenes posicionados en las secciones $S_1, \dots, S_M$ es peligrosa $\Leftrightarrow \text{NF}(t_1 t_2 \dots t_M, I)$ contiene un número de variables t_α menor que M .*

4. MODELO PROPUESTO

4.3 Aplicación del modelo al ejemplo

4.3.1 Variables en el ejemplo

Considerando de nuevo la instalación ferroviaria representada en la Figura 3.1, tenemos $M = 33$ secciones, por lo tanto haremos uso de los siguiente polinomios en variables $s_0, \dots, s_{32}, t_0, \dots, t_{32}$.

4.3.2 Ideales en el ejemplo

Paso 1. Calculamos el conjunto K de polinomios relacionados con la conectividad de la instalación ferroviaria.

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = \langle & t_{28} + s_{28}t_1, t_1 + s_1t_{28}, t_2 + s_2t_6, t_6 + s_6t_{15}, t_{15} + s_{15}t_6, \\ & t_{16} + s_{16}t_{27}, t_{18} + s_{18}t_{17}, t_{17} + s_{17}t_{16}, \dots, t_8 + s_8t_{20}, \\ & t_{26} + s_{26}t_{25} \rangle \end{aligned} \quad (4.1)$$

debido a que :

- Es posible pasar desde la sección s_{28} a la sección s_1 : $t_{28} + s_{28}t_1$
- Es posible pasar desde la sección s_6 a la sección s_{15} : $t_6 + s_6t_{15}$
- ...
- Es posible pasar desde la sección s_8 a la sección s_{20} : $t_8 + s_8t_{20}$

Paso 2. Calculamos la base de Groebner del ideal:

$$I = K + \{s_1^2 + s_1, \dots, s_{28}^2 + s_{28}, t_1^2 + t_1, \dots, t_{28}^2 + t_{28}\}$$

obteniendo:

$$\begin{aligned} G = \{ & t_0t_{28} + t_{28}, t_0s_{28} + t_{28}, t_{28}s_{28} + t_{28}, \dots, t_{26}s_{18}s_{25}, \\ & t_2 + t_6 + s_2 \} \end{aligned}$$

4.3 Aplicación del modelo al ejemplo

Gracias al Teorema 4, podemos evaluar la seguridad de la instalación. Como hay tres trenes posicionados en las secciones s_0, s_{11}, s_{26} , para determinar si dichas posiciones son peligrosas tenemos que calcular simplemente

$$\text{NF}(t_0 t_{11} t_{26}, I) = t_{11} t_{30} s_{27}$$

Como vemos, sólo hay dos variables t_α ($t_{11} t_{30}$) en $\text{NF}(t_0 t_{11} t_{26}, I)$, que es menor que el número de trenes. Por lo tanto, la situación es peligrosa.

Experimentos y resultados

En este apartado realizaremos dos experimentos con el nuevo modelo presentado en este trabajo y definido en la Sección 4. En [26] podemos encontrar más comparativas entre modelos y CAS (Computer Algebra Systems).

El primer experimento (**Experimento I**) consistirá en comparar el nuevo modelo con sus modelos más cercanos desde el punto de vista conceptual como son el modelo Algebraico definido en la sección 3.1, el modelo Lógico definido en la sección 3.2 y el modelo Lógico-Algebraico definido en la sección 3.3. En este experimento, se utilizará una instalación ferroviaria de tamaño pequeño como es la propuesta en la figura 3.1 y se irá duplicando sucesivamente para conocer los tiempos y limitaciones de cada modelo.

Por otro lado, el segundo experimento (**Experimento II**) se realizará comparando el nuevo modelo con el modelo mas rápido del estado del arte definido en la sección 3.4 (Answer Set Programming) sobre una instalación ferroviaria real y de gran tamaño, proporcionando así un caso real y práctico de la aplicación de este nuevo modelo.

5. EXPERIMENTOS Y RESULTADOS

Para la implementación de dicha estación, hemos tomado algunas decisiones sobre qué elementos de la estación incluir, son las siguientes: los cantones correspondiente a aparatos de vía (desvíos y travesías de unión doble), también denominados secciones de aguja, se han considerado puntuales. No lo son en la realidad y en el plano original, en el que se marcan los límites de las secciones de agujas. No supone ningún cambio desde el punto de vista tecnológico, puesto que en esos límites no existen semáforos de control de paso. En la realidad no son puntuales por no serlo el desvío y tenerse que detectar la presencia de los vehículos ferroviarios ("shunt" entre los dos carriles).

La estación de ferrocarriles elegida para el **Experimento II** se corresponde a la estación de Chamartín en Madrid antes de la conversión de parte de sus vías a ancho internacional. Es una estación muy importante puesto que centraliza todas las comunicaciones ferroviarias desde Madrid hacia el cuadrante noroeste de la Península Ibérica. Puede consultarse más información en la página web de *ADIF* [1] (Administrador de Infraestructuras Ferroviarias).

La siguiente Figura 5.1 representa el plano esquemático simplificado de dicha estación ferroviaria. Para la introducción de datos relativos a la estación, se ha utilizado un esquema de vías y señales de ADIF correspondiente al año 2008 con 300 secciones conectadas, 115 semáforos, 20 travesías de unión doble, varios cruces fijos y 72 desvíos. La Figura 5.2 muestra una vista aérea de la estación de Chamartin.

5. EXPERIMENTOS Y RESULTADOS

Figura 5.2: Vista aérea de la estación de Chamartín(Fuente: Google Maps)

5.1 Experimento I

La siguiente tabla muestra los tiempos de cálculo de cada uno de los modelos sobre diferentes instalaciones ferroviarias. Como ya se ha comentado anteriormente, es la misma estación que la definida en la Figura 3.1, pero duplicando la estación cada vez, obteniendo un mayor número de secciones conectadas (N) y simulando diferente número de trenes (M).

	$M=15$ $N=32$	$M=15$ $N=64$	$M=45$ $N=93$	$M=60$ $N=127$	$M=65$ $N=160$	$M=105$ $N=224$	$M=210$ $N=447$
Modelo Algebraico (3.1)	10.23 s	250.250 s	> 1 h	> 1h	> 1h	> 1h	> 1h
Modelo Lógico (3.2)	15.356 s	380.368 s	> 1 h	> 1h	> 1h	> 1h	> 1h
Modelo Lógico-Algebraico (3.3)	0.005 s	0.060 s	1.1 s	3.348 s	10.323 s	38.392 s	554.180 s
Nuevo modelo (4)	0.005 s	0.018 s	0.040 s	0.060 s	0.108 s	0.187s	0.671s

Tabla 5.1: Comparativa de tiempos entre modelos para detectar situaciones peligrosas en una instalación de ferrocarriles con N secciones y M trenes

Puede observarse que, por un lado, para los modelos Algebraico y Lógico, a partir de instalaciones con un número de secciones mayor de 64, el cálculo para comprobar la seguridad de dicha situación se vuelve muy lento, demostrando así, que estos modelos aun siendo apropiados para estaciones pequeñas, se vuelven ineficientes para estaciones más grandes. El modelo Lógico-Algebraico es capaz de computar la base de Groebner pero para estaciones muy grandes ($N = 447$) sus tiempos de cómputo $\sim 9,23\text{seg.}$ hacen que no sea un modelo aplicable a grandes instalaciones ferroviarias, aunque podría aplicarse a pequeñas instalaciones ($N < 127$) ya que sus tiempos de respuesta son de $\sim 3\text{seg.}$.

Por otro lado, podemos observar que el número de trenes también afecta a los tiempos en todos los modelos salvo en el nuevo modelo presentado en este trabajo. Para el modelo lógico queda claro que cuantos más trenes, más problemas de satisfactibilidad tendrá que resolver y por lo tanto más tiempo de cómputo. Para los modelos algebraicos y lógico-algebraicos, se necesitará

5. EXPERIMENTOS Y RESULTADOS

computar una base de Groebner, y aunque, es difícil estimar la complejidad del algoritmo de Buchberger en casos específicos (por ejemplo, en el modelo algebraico si aumenta el número de trenes, disminuye la complejidad, se sustituyen variables por números), el tiempo de cómputo es muy dependiente del número de variables y polinomios que se encuentren en el conjunto inicial, por lo tanto y de manera general, a más variables y polinomios, más tiempo de cómputo. El nuevo modelo, al ser independiente del número de trenes su base de Groebner, no es dependiente de los polinomios que representan los trenes.

Por último, es importante destacar que para el nuevo modelo en esta tabla se muestran los tiempos de cómputo de la Base de Groebner y que es capaz de calcularla para una gran estación de 447 secciones en aproximadamente unos 0.6seg. haciendo compatible su instalación con grandes estaciones de ferrocarriles.

5.2 Experimento II

Como ya se ha mencionado anteriormente, para el segundo experimento, utilizaremos una estación real y de gran tamaño como la de Chamartín. La Figura 5.1 representa el diseño esquemático de la estación de Chamartín con 300 secciones conectadas, 115 semáforos, 20 travesías de unión doble, varios cruces fijos y 72 desvíos. La siguiente tabla muestra la comparativa de tiempos entre los dos únicos modelos capaces de calcular en un tiempo operativo razonable la seguridad de la estación ferroviaria.

Como vemos, el modelo ASP proporciona unos tiempos de cálculo excelentes para una gran instalación ferroviaria, aunque como ejercicio teórico, es dependiente del número de trenes que circulan por la instalación. No sucede lo mismo con el nuevo modelo que, por definición, puede precalcular diferentes situaciones de los elementos de control, necesita 2.3 segundos en

5.2 Experimento II

	$M=5$ $N=300$	$M=15$ $N=300$	$M=30$ $N=300$
Smodels	0.646s	0.716s	0.799s
Nuevo modelo (GB)	2.3s	2.3s	2.3s
Nuevo modelo (NF)	0.0001s	0.00039s	0.0054s

Tabla 5.2: Comparativa de tiempos entre modelos para detectar situaciones peligrosas en la instalación de Chamartin

un ordenador *i5* a $2.9G_{hz}$ con $8Gb$ de memoria RAM para precalcular una situación dada de la estación de ferrocarriles de Chamartín utilizando ese precálculo en sucesivas comprobaciones de la seguridad. Así pues, el tiempo de cálculo para comprobar la seguridad de la estación, una vez precomputada la situación de los elementos de la estación, ha sido de ~ 0.0003 segundos para cinco trenes.

A su vez, vemos que los tiempos de cálculo de la seguridad de la estación con el nuevo modelo practicamente se mantienen con el número de trenes (una vez precomputada la situación). En el caso de ASP los tiempos crecen ligeramente con el número de trenes, pero más que en el nuevo modelo propuesto en este trabajo.

Resumen y conclusiones

En este trabajo se ha presentado un nuevo modelo algebraico para la comprobación de la seguridad en grandes instalaciones ferroviarias. Resuelve algunos problemas detectados en modelos predecesores como pueden ser (I) la implementación efectiva en grandes instalaciones de ferrocarriles, (II) la dependencia del modelo con el número de trenes, (III) el aprovechamiento del tiempo de cálculo de la base de Groebner, (IV) las librerías utilizadas para su implementación (teniendo en cuenta que algunas están diseñadas de manera general y no en un cuerpo matemático específico).

- (I) Hemos analizado una gran instalación ferroviaria como la de Chamartín para implementar el modelo propuesto y compararlo con otros modelos del estado del arte. Hemos demostrado que el nuevo modelo es capaz de pre-computar una situación determinada de la estación en un tiempo del orden de un par de segundos y comprobar posteriormente la seguridad de la misma en un tiempo del orden de los milisegundos.

6. RESUMEN Y CONCLUSIONES

- (II) Respecto a la dependencia del número de trenes, esta dependencia, aunque no siempre es negativa en relación al número de polinomios representando trenes ya que en bases de Grobner definidas en el anillo $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, por ejemplo, puede resultar beneficioso; de manera general complica el cálculo de las bases de Groebner como vimos en la Sección 2.2.12 y de manera rigurosa aumenta los tiempos de cálculo en los modelos lógicos que necesitan resolver problemas *SAT* para comprobar dicha seguridad. Por ello, en el nuevo modelo esta dependencia no impacta de manera directa en el tiempo de cálculo, puesto que la comprobación de la seguridad se realizará utilizando formas normales usando una base de Groebner precalculada.
- (III) Respecto al aprovechamiento de los tiempos de cálculo de la correspondiente base de Groebner, en ninguno de los modelos estudiados aquí se reutiliza este tiempo de cálculo. En el nuevo modelo propuesto en este trabajo se puede guardar el pre-cálculo de la base de Groebner correspondiente a una situación dada de los elementos de control. Además, gracias al uso de una librería especializada en polinomios en anillos booleanos podremos almacenar de manera eficiente estas bases precalculadas. Cabe destacar que en esta tesis hemos realizado y/o estudiado diferentes modelos con diferentes diseños de precálculo, como por ejemplo en [27] en el que se modela de antemano todas las acciones que el jefe de estación puede realizar sobre los elementos de control de una instalación ferroviaria. Se ha llegado a la conclusión de que para grandes instalaciones ferroviarias no es viable precomputar todas las acciones ya que el cálculo de la base de Groebner sería inviable desde un punto de vista computacional y de almacenamiento; por lo tanto se podría aplicar a pequeñas o medias instalaciones, pero nunca a grandes. El nuevo modelo presentado en este trabajo, representa el balance entre el cómputo de bases de Groebner y la utilización

de las bases previamente calculadas para su uso de manera industrial en grandes instalaciones ferroviarias.

- (IV) Gracias a la librería PolyBoRi [2] especializada en polinomios en anillos booleanos, y que internamente implementa *ZDDs* [29] (Zero-suppressed Binary Decision Diagrams) proporcionando una ventaja competitiva sobre otros sistemas en la representación y operación de este tipo de polinomios, podemos computar de manera más rápida que otros sistemas tipo *CAS* (Computer Algebra Systems) [26] y guardar la base de Groebner calculada de una manera mucho más compacta gracias a la implementación basada en *ZDDs*.

Extensión del modelo para trenes ocupando varias secciones a la vez

En este Anexo A veremos cómo extender el modelo presentado en esta tesis para poder comprobar la seguridad de la estación cuando existan trenes ocupando varias secciones a la vez. La Figura A.1 muestra una estación sencilla con un tren ocupando las secciones s_1, s_2 a la vez y otro tren ocupando la sección s_{10} . La situación es segura.

La Figura A.2 muestra una estación sencilla con un tren ocupando las secciones s_6, s_7, s_8 a la vez y otro tren ocupando la sección s_{10} . La situación es peligrosa.

Es normal encontrarnos trenes ocupando varias secciones a la vez, como la que se representa en la Figura A.1. Con el objetivo de comprobar la seguridad

de una estación con M trenes, cuando estos puedan ocupar varias secciones al mismo tiempo, redefinimos el paso 3 de la Sección 4.1:

Paso 3.1 Por cada tren t_i que ocupa las secciones $s_{i1}, \dots, s_{iM}$, calculamos la

$$p_i = \text{NF}(t_{i1}, \dots, t_{iM}).$$

Paso 3.2 Calculamos $q = \text{NF}(p_1, \dots, p_N)$

Paso 3.3 Para determinar si la posición de M trenes es segura, comprobamos que:

$$\left(\sum_{i=1}^M \eta(p_i)\right) > \eta(q)$$

donde, $\eta(p_i) \rightarrow \mathbb{N}$ es una función que devuelve el número de variables t_α en el monomio p_i .

Como ejemplo, se comprobará la seguridad de la estación de la Figura A.1:

Ejemplo 1: Paso 3.1: El primer tren se representa por $\{t_1 t_2\}$ y el segundo tren se representa por $\{t_{11}\}$. Por lo tanto, los estados iniciales de los trenes

son:

$$\begin{aligned}p_1 &= \text{NF}(t_1 t_2, I) = t_4 s_3 \\p_2 &= \text{NF}(t_{10}, I) = t_{11}\end{aligned}$$

Paso 3.2 Cálculo conjunto de todos los estados iniciales:

$$q = \text{NF}(p_1 \cdot p_2, I) = t_4 t_{11}$$

Paso 3.3 Comprobar el número de variables t en ambos monomios:

$$\eta(p_1) + \eta(p_2) = \eta(q) = 2$$

Por lo que la situación propuesta en la Figura A.1 es segura.

Otro ejemplo relacionado con una situación peligrosa es la situación representada por la Figura A.2. Para comprobar la seguridad de la estación, calcularemos:

Ejemplo 2: Paso 3.1: El primer tren se representa por $\{t_{10}\}$ y el segundo tren se representa por $\{t_6 t_7 t_8\}$. Por lo tanto, los estados iniciales de los trenes son:

$$\begin{aligned}p_1 &= \text{NF}(t_{10}, I) = t_{11} \\p_2 &= \text{NF}(t_6 t_7 t_8, I) = t_{11}\end{aligned}$$

Paso 3.2 Cálculo conjunto de todos los estados iniciales:

$$q = \text{NF}(p_1 \cdot p_2, I) = t_{11},$$

Paso 3.3 Comprobar el número de variables t en ambos monomios:

$$\eta(p_1) + \eta(p_2) > \eta(q)$$

Por lo que la situación propuesta en la figura A.2 es peligrosa.

Código del intérprete

B.1 Intérprete

El intérprete lee y analiza el código que especifica cada instalación de ferrocarriles por medio de expresiones regulares guardando cada uno de los elementos en una estructura de datos. Una vez que ha terminado el análisis y la construcción de dichas estructuras de datos, procede a ejecutar cada uno de los modelos definidos en la carpeta de "models". Cada modelo creará sus anillos, variables, polinomios y operaciones para producir un código interpretable directamente por PolyBoRi.

Tanto el intérprete como la implementación de cada uno de los modelos están integrados dentro de un contenedor Docker accesible desde la siguiente dirección: <https://hub.docker.com/r/rmaestre/02a63d8b2bfa/>

Además del código, el propio contenedor proporciona el entorno de ejecución donde se han desarrollado los experimentos, por lo tanto proporcionamos un

B. CÓDIGO DEL INTÉRPRETE

método eficaz de reproductibilidad para los experimentos propuestos en esta tesis.

Código de los modelos de la estación de Chamartín

El intérprete lee y analiza el lenguaje en alto nivel, que especifica cada instalación de ferrocarriles, por medio de expresiones regulares guardando cada uno de los elementos en una estructura de datos. Una vez que ha terminado el análisis y la construcción de dichas estructuras de datos, procede a ejecutar cada uno de los modelos definidos en la carpeta de “models”.

C.1 Modelo propuesto en la tesis

En esta sección se muestra el código resultante después de la ejecución del intérprete utilizando las definiciones de la Sección 4.

$$P = [t(2) + s(2) * t(1), t(3) + s(3) * t(2), t(9) + s(9) * t(10), \\ t(8) + s(8) * t(9), t(5) + s(5) * t(11), t(24) + s(24) * t(22),$$

C. CÓDIGO DE LOS MODELOS DE LA ESTACIÓN DE CHAMARTÍN

t (25)+s (25) *t (23) , t (6)+s (6) *t (26) , t (36)+s (36) *t (27) ,
t (17)+s (17) *t (4) , t (45)+s (45) *t (50) , t (43)+s (43) *t (287) ,
t (41)+s (41) *t (288) , t (39)+s (39) *t (32) , t (46)+s (46) *t (291) ,
t (44)+s (44) *t (292) , t (42)+s (42) *t (293) , t (40)+s (40) *t (294) ,
t (65)+s (65) *t (64) , t (67)+s (67) *t (63) , t (68)+s (68) *t (290) ,
t (72)+s (72) *t (60) , t (70)+s (70) *t (59) , t (73)+s (73) *t (75) ,
t (71)+s (71) *t (74) , t (82)+s (82) *t (56) , t (83)+s (83) *t (55) ,
t (81)+s (81) *t (79) , t (84)+s (84) *t (80) , t (69)+s (69) *t (75) ,
t (76)+s (76) *t (74) , t (138)+s (138) *t (79) , t (86)+s (86) *t (54) ,
t (88)+s (88) *t (51) , t (87)+s (87) *t (90) , t (89)+s (89) *t (91) ,
t (295)+s (295) *t (291) , t (93)+s (93) *t (292) , t (94)+s (94) *t (293) ,
t (95)+s (95) *t (294) , t (96)+s (96) *t (38) , t (37)+s (37) *t (97) ,
t (119)+s (119) *t (80) , t (117)+s (117) *t (90) , t (107)+s (107) *t (164) ,
t (93)+s (93) *t (91) , t (98)+s (98) *t (168) , t (164)+s (164) *t (169) ,
t (165)+s (165) *t (170) , t (167)+s (167) *t (171) , t (142)+s (142) *t (172) ,
t (148)+s (148) *t (149) , t (152)+s (152) *t (147) , t (179)+s (179) *t (182) ,
t (197)+s (197) *t (200) , t (198)+s (198) *t (201) , t (260)+s (260) *t (261) ,
t (259)+s (259) *t (262) , t (150)+s (150) *t (149) , t (194)+s (194) *t (199) ,
t (202)+s (202) *t (204) , t (203)+s (203) *t (205) , t (206)+s (206) *t (215) ,
t (211)+s (211) *t (213) , t (230)+s (230) *t (282) , t (240)+s (240) *t (261) ,
t (239)+s (239) *t (172) , t (231)+s (231) *t (232) , t (235)+s (235) *t (171) ,
t (232)+s (232) *t (270) , t (233)+s (233) *t (273) , t (228)+s (228) *t (169) ,
t (229)+s (229) *t (170) , t (214)+s (214) *t (213) , t (282)+s (282) *t (285) ,
t (283)+s (283) *t (284) , t (280)+s (280) *t (281) , t (277)+s (277) *t (278) ,
t (275)+s (275) *t (276) , t (220)+s (220) *t (266) , t (266)+s (266) *t (268) ,
t (222)+s (222) *t (267) , t (267)+s (267) *t (269) , t (270)+s (270) *t (272) ,
t (273)+s (273) *t (274) , t (16)+s (16) *t (19) , t (13)+s (13) *t (19) ,

C.1 Modelo propuesto en la tesis

$t(15)+s(15)*t(19), t(11)+s(11)*t(19), t(16)+s(16)*t(13),$
 $t(13)+s(13)*t(16), t(15)+s(15)*t(11), t(11)+s(11)*t(15),$
 $t(102)+s(102)*t(101), t(99)+s(99)*t(101),$
 $t(100)+s(100)*t(101), t(96)+s(96)*t(101),$
 $t(102)+s(102)*t(99), t(99)+s(99)*t(102), t(100)+s(100)*t(96),$
 $t(96)+s(96)*t(100), t(104)+s(104)*t(105), t(102)+s(102)*t(105),$
 $t(103)+s(103)*t(105), t(95)+s(95)*t(105), t(104)+s(104)*t(102),$
 $t(102)+s(102)*t(104), t(103)+s(103)*t(95), t(95)+s(95)*t(103),$
 $t(109)+s(109)*t(108), t(104)+s(104)*t(108), t(107)+s(107)*t(108),$
 $t(106)+s(106)*t(108), t(109)+s(109)*t(104), t(104)+s(104)*t(109),$
 $t(107)+s(107)*t(106), t(106)+s(106)*t(107), t(112)+s(112)*t(113),$
 $t(109)+s(109)*t(113), t(111)+s(111)*t(113),$
 $t(110)+s(110)*t(113), t(112)+s(112)*t(109),$
 $t(109)+s(109)*t(112), t(111)+s(111)*t(110),$
 $t(110)+s(110)*t(111), t(116)+s(116)*t(115),$
 $t(112)+s(112)*t(115), t(114)+s(114)*t(115),$
 $t(296)+s(296)*t(115), t(116)+s(116)*t(112),$
 $t(112)+s(112)*t(116), t(114)+s(114)*t(296),$
 $t(296)+s(296)*t(114), t(110)+s(110)*t(125),$
 $t(93)+s(93)*t(125), t(123)+s(123)*t(125),$
 $t(124)+s(124)*t(125), t(110)+s(110)*t(93),$
 $t(93)+s(93)*t(110), t(123)+s(123)*t(124),$
 $t(124)+s(124)*t(123), t(127)+s(127)*t(129),$
 $t(126)+s(126)*t(129), t(128)+s(128)*t(129),$
 $t(66)+s(66)*t(129), t(127)+s(127)*t(126),$
 $t(126)+s(126)*t(127), t(128)+s(128)*t(66),$
 $t(66)+s(66)*t(128), t(132)+s(132)*t(131),$

C. CÓDIGO DE LOS MODELOS DE LA ESTACIÓN DE CHAMARTÍN

$t(76)+s(76)*t(131), t(130)+s(130)*t(131),$
 $t(128)+s(128)*t(131), t(132)+s(132)*t(76),$
 $t(76)+s(76)*t(132), t(130)+s(130)*t(128),$
 $t(128)+s(128)*t(130), t(140)+s(140)*t(141),$
 $t(138)+s(138)*t(141), t(139)+s(139)*t(141),$
 $t(130)+s(130)*t(141), t(140)+s(140)*t(138),$
 $t(138)+s(138)*t(140), t(139)+s(139)*t(130),$
 $t(130)+s(130)*t(139), t(135)+s(135)*t(137),$
 $t(134)+s(134)*t(137), t(136)+s(136)*t(137),$
 $t(127)+s(127)*t(137), t(135)+s(135)*t(134),$
 $t(134)+s(134)*t(135), t(136)+s(136)*t(127),$
 $t(127)+s(127)*t(136), t(176)+s(176)*t(295),$
 $t(122)+s(122)*t(295), t(175)+s(175)*t(295),$
 $t(139)+s(139)*t(295), t(176)+s(176)*t(122),$
 $t(122)+s(122)*t(176), t(175)+s(175)*t(139),$
 $t(139)+s(139)*t(175), t(187)+s(187)*t(188),$
 $t(185)+s(185)*t(188), t(186)+s(186)*t(188),$
 $t(136)+s(136)*t(188), t(187)+s(187)*t(185),$
 $t(185)+s(185)*t(187), t(186)+s(186)*t(136),$
 $t(136)+s(136)*t(186), t(185)+s(185)*t(296),$
 $t(178)+s(178)*t(296), t(184)+s(184)*t(296),$
 $t(135)+s(135)*t(296), t(185)+s(185)*t(178),$
 $t(178)+s(178)*t(185), t(184)+s(184)*t(135),$
 $t(135)+s(135)*t(184), t(195)+s(195)*t(196),$
 $t(193)+s(193)*t(196), t(194)+s(194)*t(196),$
 $t(187)+s(187)*t(196), t(195)+s(195)*t(193),$
 $t(193)+s(193)*t(195), t(194)+s(194)*t(187),$

$t(187)+s(187)*t(194), t(190)+s(190)*t(191),$
 $t(183)+s(183)*t(191), t(189)+s(189)*t(191),$
 $t(186)+s(186)*t(191), t(190)+s(190)*t(183),$
 $t(183)+s(183)*t(190), t(189)+s(189)*t(186),$
 $t(186)+s(186)*t(189), t(183)+s(183)*t(182),$
 $t(297)+s(297)*t(182), t(181)+s(181)*t(182),$
 $t(184)+s(184)*t(182), t(183)+s(183)*t(297),$
 $t(297)+s(297)*t(183), t(181)+s(181)*t(184),$
 $t(184)+s(184)*t(181), t(180)+s(180)*t(181),$
 $t(176)+s(176)*t(181), t(179)+s(179)*t(181),$
 $t(177)+s(177)*t(181), t(180)+s(180)*t(176),$
 $t(176)+s(176)*t(180), t(179)+s(179)*t(177),$
 $t(177)+s(177)*t(179), t(211)+s(211)*t(212),$
 $t(209)+s(209)*t(212), t(210)+s(210)*t(212),$
 $t(207)+s(207)*t(212), t(211)+s(211)*t(209),$
 $t(209)+s(209)*t(211), t(210)+s(210)*t(207),$
 $t(207)+s(207)*t(210), t(237)+s(237)*t(241),$
 $t(239)+s(239)*t(241), t(242)+s(242)*t(241),$
 $t(240)+s(240)*t(241), t(237)+s(237)*t(239),$
 $t(239)+s(239)*t(237), t(242)+s(242)*t(240),$
 $t(240)+s(240)*t(242), t(263)+s(263)*t(264),$
 $t(219)+s(219)*t(264), t(265)+s(265)*t(264),$
 $t(214)+s(214)*t(264), t(263)+s(263)*t(219),$
 $t(219)+s(219)*t(263), t(265)+s(265)*t(214),$
 $t(214)+s(214)*t(265)]$

C. CÓDIGO DE LOS MODELOS DE LA ESTACIÓN DE CHAMARTÍN

$S = [(t(3) + s(3) * t(5)) ,$
 $(t(5) + s(5) * t(3)) ,$
 $(t(7) + s(7) * t(8)) ,$
 $(t(8) + s(8) * t(7)) ,$
 $(t(12) + s(12) * t(14)) ,$
 $(t(14) + s(14) * t(12)) ,$
 $(t(16) + s(16) * t(17)) ,$
 $(t(17) + s(17) * t(16)) ,$
 $(t(15) + s(15) * t(21)) ,$
 $(t(21) + s(21) * t(15)) ,$
 $(t(14) + s(14) * t(48)) ,$
 $(t(48) + s(48) * t(14)) ,$
 $(t(48) + s(48) * t(50)) ,$
 $(t(50) + s(50) * t(48)) ,$
 $(t(6) + s(6) * t(28)) ,$
 $(t(28) + s(28) * t(6)) ,$
 $(t(30) + s(30) * t(36)) ,$
 $(t(36) + s(36) * t(30)) ,$
 $(t(30) + s(30) * t(31)) ,$
 $(t(31) + s(31) * t(30)) ,$
 $(t(29) + s(29) * t(28)) ,$
 $(t(28) + s(28) * t(29)) ,$
 $(t(31) + s(31) * t(32)) ,$
 $(t(32) + s(32) * t(31)) ,$
 $(t(33) + s(33) * t(34)) ,$
 $(t(34) + s(34) * t(33)) ,$
 $(t(29) + s(29) * t(288)) ,$

$(t(288) + s(288) * t(29)) ,$
 $(t(18) + s(18) * t(57)) ,$
 $(t(57) + s(57) * t(18)) ,$
 $(t(61) + s(61) * t(289)) ,$
 $(t(289) + s(289) * t(61)) ,$
 $(t(47) + s(47) * t(52)) ,$
 $(t(52) + s(52) * t(47)) ,$
 $(t(53) + s(53) * t(21)) ,$
 $(t(21) + s(21) * t(53)) ,$
 $(t(46) + s(46) * t(45)) ,$
 $(t(45) + s(45) * t(46)) ,$
 $(t(43) + s(43) * t(44)) ,$
 $(t(44) + s(44) * t(43)) ,$
 $(t(41) + s(41) * t(42)) ,$
 $(t(42) + s(42) * t(41)) ,$
 $(t(40) + s(40) * t(39)) ,$
 $(t(39) + s(39) * t(40)) ,$
 $(t(72) + s(72) * t(73)) ,$
 $(t(73) + s(73) * t(72)) ,$
 $(t(71) + s(71) * t(70)) ,$
 $(t(70) + s(70) * t(71)) ,$
 $(t(82) + s(82) * t(77)) ,$
 $(t(77) + s(77) * t(82)) ,$
 $(t(84) + s(84) * t(78)) ,$
 $(t(78) + s(78) * t(84)) ,$
 $(t(81) + s(81) * t(77)) ,$
 $(t(77) + s(77) * t(81)) ,$

C. CÓDIGO DE LOS MODELOS DE LA ESTACIÓN DE CHAMARTÍN

$(t(83) + s(83) * t(78)) ,$
 $(t(78) + s(78) * t(83)) ,$
 $(t(66) + s(66) * t(65)) ,$
 $(t(65) + s(65) * t(66)) ,$
 $(t(126) + s(126) * t(69)) ,$
 $(t(69) + s(69) * t(126)) ,$
 $(t(87) + s(87) * t(86)) ,$
 $(t(86) + s(86) * t(87)) ,$
 $(t(88) + s(88) * t(89)) ,$
 $(t(89) + s(89) * t(88)) ,$
 $(t(120) + s(120) * t(119)) ,$
 $(t(119) + s(119) * t(120)) ,$
 $(t(120) + s(120) * t(121)) ,$
 $(t(121) + s(121) * t(120)) ,$
 $(t(97) + s(97) * t(98)) ,$
 $(t(98) + s(98) * t(97)) ,$
 $(t(296) + s(296) * t(93)) ,$
 $(t(93) + s(93) * t(296)) ,$
 $(t(295) + s(295) * t(92)) ,$
 $(t(92) + s(92) * t(295)) ,$
 $(t(106) + s(106) * t(94)) ,$
 $(t(94) + s(94) * t(106)) ,$
 $(t(103) + s(103) * t(165)) ,$
 $(t(165) + s(165) * t(103)) ,$
 $(t(167) + s(167) * t(100)) ,$
 $(t(100) + s(100) * t(167)) ,$
 $(t(111) + s(111) * t(143)) ,$

$(t(143) + s(143) * t(111)) ,$
 $(t(142) + s(142) * t(114)) ,$
 $(t(114) + s(114) * t(142)) ,$
 $(t(144) + s(144) * t(146)) ,$
 $(t(146) + s(146) * t(144)) ,$
 $(t(118) + s(118) * t(116)) ,$
 $(t(116) + s(116) * t(118)) ,$
 $(t(132) + s(132) * t(133)) ,$
 $(t(133) + s(133) * t(132)) ,$
 $(t(140) + s(140) * t(177)) ,$
 $(t(177) + s(177) * t(140)) ,$
 $(t(121) + s(121) * t(174)) ,$
 $(t(174) + s(174) * t(121)) ,$
 $(t(145) + s(145) * t(148)) ,$
 $(t(148) + s(148) * t(145)) ,$
 $(t(190) + s(190) * t(192)) ,$
 $(t(192) + s(192) * t(190)) ,$
 $(t(180) + s(180) * t(297)) ,$
 $(t(297) + s(297) * t(180)) ,$
 $(t(195) + s(195) * t(197)) ,$
 $(t(197) + s(197) * t(195)) ,$
 $(t(189) + s(189) * t(207)) ,$
 $(t(207) + s(207) * t(189)) ,$
 $(t(181) + s(181) * t(208)) ,$
 $(t(208) + s(208) * t(181)) ,$
 $(t(250) + s(250) * t(175)) ,$
 $(t(175) + s(175) * t(250)) ,$

C. CÓDIGO DE LOS MODELOS DE LA ESTACIÓN DE CHAMARTÍN

$(t(250) + s(250) * t(260)) ,$
 $(t(260) + s(260) * t(250)) ,$
 $(t(249) + s(249) * t(173)) ,$
 $(t(173) + s(173) * t(249)) ,$
 $(t(231) + s(231) * t(299)) ,$
 $(t(299) + s(299) * t(231)) ,$
 $(t(233) + s(233) * t(234)) ,$
 $(t(234) + s(234) * t(233)) ,$
 $(t(234) + s(234) * t(242)) ,$
 $(t(242) + s(242) * t(234)) ,$
 $(t(226) + s(226) * t(228)) ,$
 $(t(228) + s(228) * t(226)) ,$
 $(t(229) + s(229) * t(223)) ,$
 $(t(223) + s(223) * t(229)) ,$
 $(t(221) + s(221) * t(220)) ,$
 $(t(220) + s(220) * t(221)) ,$
 $(t(221) + s(221) * t(225)) ,$
 $(t(225) + s(225) * t(221)) ,$
 $(t(224) + s(224) * t(226)) ,$
 $(t(226) + s(226) * t(224)) ,$
 $(t(224) + s(224) * t(225)) ,$
 $(t(225) + s(225) * t(224)) ,$
 $(t(222) + s(222) * t(224)) ,$
 $(t(224) + s(224) * t(222)) ,$
 $(t(263) + s(263) * t(279)) ,$
 $(t(279) + s(279) * t(263)) ,$
 $(t(279) + s(279) * t(282)) ,$

```
(t(282)+s(282)*t(279)),  
(t(265)+s(265)*t(275)),  
(t(275)+s(275)*t(265))]
```

C.2 ASP Model / Smodels

En esta sección se muestra el código resultante después de la ejecución del intérprete utilizando las definiciones de la Sección 3.4.

```
turnout(s001,s003,s004,tur001003).  
state(tur001003,direct).  
turnout(s003,s006,s005,tur003006).  
state(tur003006,direct).  
turnout(s005,s008,s010,tur005008).  
state(tur005008,direct).  
turnout(s007,s002,s004,tur007002).  
state(tur007002,direct).  
turnout(s007,s012,s014,tur007012).  
state(tur007012,direct).  
turnout(s014,s016,s015,tur014016).  
state(tur014016,direct).  
turnout(s005,s008,s010,tur005008).  
state(tur005008,direct).  
turnout(s026,s023,s022,tur026023).  
state(tur026023,direct).  
turnout(s027,s025,s026,tur027025).  
state(tur027025,direct).
```

C. CÓDIGO DE LOS MODELOS DE LA ESTACIÓN DE CHAMARTÍN

```
turnout(s027,s029,s028,tur027029) .
state(tur027029,direct) .
turnout(s024,s021,s020,tur024021) .
state(tur024021,direct) .
turnout(s028,s024,s027,tur028024) .
state(tur028024,direct) .
semaphore(s009,s008,sem009008) .
colour(sem009008,red) .
semaphore(s017,s010,sem017010) .
colour(sem017010,red) .
semaphore(s011,s006,sem011006) .
colour(sem011006,red) .
semaphore(s013,s012,sem013012) .
colour(sem013012,red) .
semaphore(s018,s015,sem018015) .
colour(sem018015,red) .
semaphore(s019,s016,sem019016) .
colour(sem019016,red) .
semaphore(s017,s020,sem017020) .
colour(sem017020,red) .
semaphore(s011,s021,sem011021) .
colour(sem011021,red) .
semaphore(s013,s025,sem013025) .
colour(sem013025,red) .
semaphore(s018,s022,sem018022) .
colour(sem018022,red) .
semaphore(s019,s023,sem019023) .
```

```
colour(sem019023, red) .
```

```
occupies(t001, s028) .
```

```
occupies(t000, s001) .
```

```
are_neighbours(s008, s009) .
```

```
are_neighbours(s010, s017) .
```

```
are_neighbours(s006, s011) .
```

```
are_neighbours(s012, s013) .
```

```
are_neighbours(s015, s018) .
```

```
are_neighbours(s016, s019) .
```

```
are_neighbours(s020, s017) .
```

```
are_neighbours(s021, s011) .
```

```
are_neighbours(s025, s013) .
```

```
are_neighbours(s022, s018) .
```

```
are_neighbours(s023, s019) .
```

```
train(X) :- occupies(X, Y) .
```

```
section(X) :- occupies(T, X) .
```

```
section(X) :- semaphore(X, Y, Z) .
```

```
section(Y) :- semaphore(X, Y, Z) .
```

```
section(X) :- turnout(X, Y, Z, U) .
```

```
section(Y) :- turnout(X, Y, Z, U) .
```

```
section(Z) :- turnout(X, Y, Z, U) .
```

```
section(X) :- double_switch(X, Y, Z, V, W, L) .
```

```
section(Y) :- double_switch(X, Y, Z, V, W, L) .
```

```
section(Z) :- double_switch(X, Y, Z, V, W, L) .
```

```
section(W) :- double_switch(X, Y, Z, V, W, L) .
```

C. CÓDIGO DE LOS MODELOS DE LA ESTACIÓN DE CHAMARTÍN

```
section(V) :- double_switch(X,Y,Z,V,W,L).
is_semaphore(X) :- semaphore(A,B,X).
is_turnout(X) :- turnout(A1,A2,A3,X).
is_double_switch(X) :- double_switch(A1,A2,A3,A4,A5,X).
#domain train(T;T1;T2).
#domain section(Ca;Ca1;Ca2;Ca3).
#domain is_semaphore(S).
#domain is_turnout(D).
are_neighbours(Ca1,Ca2) :- are_neighbours(Ca2,Ca1).
are_neighbours(Ca1,Ca2) :- semaphore(Ca1,Ca2,X).
forbidden(Ca1,Ca2) :- semaphore(Ca1,Ca2,S), colour(S,red).
reachable(T,Ca) :- occupies(T,Ca).
reachable(T,Ca) :- reachable(T,Ca1), turnout(Ca1,Ca,Ca2,D),
state(D,direct), not forbidden(Ca1,Ca).
reachable(T,Ca) :- reachable(T,Ca1), turnout(Ca,Ca1,Ca2,D),
state(D,direct), not forbidden(Ca1,Ca).
reachable(T,Ca) :- reachable(T,Ca1), turnout(Ca1,Ca2,Ca,D),
state(D,diverted), not forbidden(Ca1,Ca).
reachable(T,Ca) :- reachable(T,Ca1), turnout(Ca,Ca2,Ca1,D),
state(D,diverted), not forbidden(Ca1,Ca).
reachable(T,Ca) :- reachable(T,Ca1), are_neighbours(Ca1,Ca),
not forbidden(Ca1,Ca).
reachable(T,Ca) :- reachable(T,Ca1),
double_switch(Ca1,Ca2,Ca3,Ca4,Ca,E),
state(E,direct), not forbidden(Ca1,Ca).
reachable(T,Ca) :- reachable(T,Ca1),
double_switch(Ca2,Ca1,Ca3,Ca4,Ca,E),
```

```
state(E,direct), not forbidden(Ca1,Ca).
reachable(T,Ca) :- reachable(T,Ca1),
double_switch(Ca2,Ca3,Ca1,Ca4,Ca,E),
state(E,direct), not forbidden(Ca1,Ca).
reachable(T,Ca) :- reachable(T,Ca1),
double_switch(Ca2,Ca3,Ca4,Ca1,Ca,E),
state(E,direct), not forbidden(Ca1,Ca).
reachable(T,Ca) :- reachable(T,Ca1),
double_switch(Ca,Ca2,Ca1,Ca4,Ca3,E),
state(E,direct), not forbidden(Ca1,Ca).
reachable(T,Ca) :- reachable(T,Ca1),
double_switch(Ca1,Ca2,Ca,Ca4,Ca3,E),
state(E,direct), not forbidden(Ca1,Ca).
reachable(T,Ca) :- reachable(T,Ca1),
double_switch(Ca4,Ca1,Ca2,Ca,Ca3,E),
state(E,direct), not forbidden(Ca1,Ca).
reachable(T,Ca) :- reachable(T,Ca1),
double_switch(Ca4,Ca,Ca2,Ca1,Ca3,E),
state(E,direct), not forbidden(Ca1,Ca).
reachable(T,Ca) :- reachable(T,Ca1),
double_switch(Ca1,Ca2,Ca3,Ca4,Ca,E),
state(E,diverted), not forbidden(Ca1,Ca).
reachable(T,Ca) :- reachable(T,Ca1),
double_switch(Ca2,Ca1,Ca3,Ca4,Ca,E),
state(E,diverted), not forbidden(Ca1,Ca).
reachable(T,Ca) :- reachable(T,Ca1),
double_switch(Ca2,Ca3,Ca1,Ca4,Ca,E),
```

C. CÓDIGO DE LOS MODELOS DE LA ESTACIÓN DE CHAMARTÍN

```
state(E,diverted), not forbidden(Ca1,Ca).
reachable(T,Ca) :- reachable(T,Ca1),
double_switch(Ca2,Ca3,Ca4,Ca1,Ca,E),
state(E,diverted), not forbidden(Ca1,Ca).
reachable(T,Ca) :- reachable(T,Ca1),
double_switch(Ca,Ca1,Ca2,Ca3,Ca4,E),
state(E,diverted), not forbidden(Ca1,Ca).
reachable(T,Ca) :- reachable(T,Ca1),
double_switch(Ca1,Ca,Ca2,Ca3,Ca4,E),
state(E,diverted), not forbidden(Ca1,Ca).
reachable(T,Ca) :- reachable(T,Ca1),
double_switch(Ca3,Ca2,Ca,Ca1,Ca4,E),
state(E,diverted), not forbidden(Ca1,Ca).
reachable(T,Ca) :- reachable(T,Ca1),
double_switch(Ca3,Ca2,Ca1,Ca,Ca4,E),
state(E,diverted), not forbidden(Ca1,Ca).
has_problems(Ca,T1,T2) :- reachable(T1,Ca),
reachable(T2,Ca), T1 < T2.
hide.
show has_problems(Ca,T1,T2).
```


Referencias

- [1] ADIF (2017). Administrador de infraestructuras ferroviarias (ADIF). http://www.adif.es/es_ES/infraestructuras/estaciones/17000/informacion_000295.shtml. 70
- [2] Brickenstein, M. and Dreyer, A. (2009). Polybori: A framework for Groebner-basis computations with boolean polynomials. *Journal of Symbolic Computation*, 44(9):1326–1345. 24, 56, 79
- [3] Brickenstein, M. and Dreyer, A. (2010). Network-driven boolean normal forms. In *Verification over discrete-continuous boundaries*, number 10271 in Dagstuhl Seminar Proceedings. Schloss Dagstuhl, Zentrum fuer Informatik. 17
- [4] Brickenstein, M., Dreyer, A., Greuel, G.-M., Wedler, M., and Wienand, O. (2009). New developments in the theory of Groebner bases and applications to formal verification. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 213(8):1612–1635. 18
- [5] Bryant, R. (1986). Graph-based algorithms for boolean function manipulation. *IEEE Transactions on Computers*, C-35(8):677–691. 30
- [6] Buchberger, B. (1976). A theoretical basis for the reduction of polynomials to canonical forms. *SIGSAM Bull.*, 10(3):19–29. 20

REFERENCIAS

- [7] Buchberger, B. (2006). Bruno Buchberger's PhD Thesis 1965: An algorithm for finding the basis elements of the residue class ring of a zero dimensional polynomial ideal. *Journal of Symbolic Computation*, 41(3–4):475–511. 20, 32, 45
- [8] Cimatti, A., Clarke, E., Giunchiglia, F., and Roveri, M. (1999). NuSMV: A new symbolic model verifier. In *Proceedings of the 11th International Conference on Computer Aided Verification*, pages 495–499. Springer. 30
- [9] Cox, D., Little, J., and O'Shea, D. (2007). *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Springer. 32
- [10] Davis, M., Logemann, G., and Loveland, D. (1962). A machine program for theorem-proving. *Communications of the ACM*, 5(7):394–397. 40
- [11] Davis, M. and Putnam, H. (1960). A computing procedure for quantification theory. *Journal of the ACM*, 7(3):201–215. 49
- [12] Dubé, T. W. (1990). The structure of polynomial ideals and Groebner bases. *SIAM Journal on Computing (SICOMP)*, 19(4):750–773. 21
- [13] Faugere, J. C. (1999). A new efficient algorithm for computing Groebner bases (F4). *Journal of Pure and Applied Algebra*, 139(13):61–88. 21
- [14] Ferraris, P. (2005). Answer sets for propositional theories. In *Proceedings of the 8th International Conference on Logic Programming and Nonmonotonic Reasoning, LPNMR'05*, pages 119–131. Springer. 49
- [15] Fontán Antunez, M. (2008). Señalización mecánica. Vía ancha española. *Editorial Maquetren*. 10

- [16] Gelfond, M. and Lifschitz, V. (1988). The stable model semantics for logic programming. In *Proceedings of the Fifth International Conference on Logic Programming (ICLP)*, pages 1070–1080. MIT Press. 49
- [17] Harel, D., Lachover, H., Naamad, A., Pnueli, A., Politi, M., Sherman, R., Shtull-Trauring, A., and Trakhtenbrot, M. (1990). Statemate: a working environment for the development of complex reactive systems. *IEEE Transactions on Software Engineering*, 16(4):403–414. 31
- [18] Haxthausen, A. E., Peleska, J., and Kinder, S. (2011). A formal approach for the construction and verification of railway control systems. *Formal Aspects of Computing*, 23(2):191–219. 31
- [19] Hernando, A., Maestre-Martínez, R., and Roanes-Lozano, E. (2016). A natural language for implementing algebraically expert systems. *Mathematics and Computers in Simulation*, 129:31–49. 1, 23
- [20] Hernando, A., Roanes-Lozano, E., and Laita, L. M. (2011). A polynomial model for logics with a prime power number of truth values. *Journal of Automated Reasoning*, 46(2):205–221. 44
- [21] Hernando, A., Roanes-Lozano, E., Maestre-Martínez, R., and Tejedor, J. (2012). A logic-algebraic approach to decision taking in a railway interlocking system. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 65(4):317–328. 44, 45
- [22] Laita, L. M., Ledesma, L. d., Roanes-Lozano, E., and Roanes-Macías, E. (1995). An interpretation of the propositional boolean algebra as k-algebra. effective calculus. In *Selected Papers from the Second International Conference on Integrating Symbolic Mathematical Computation and Artificial Intelligence*, AISMC-2, pages 255–263. Springer. 44
- [23] Lauritzen, N. (2003). *Concrete Abstract Algebra*. Cambridge University Press. Cambridge Books Online. 18

REFERENCIAS

- [24] Lifschitz, V. (2002). Answer set programming and plan generation. *Artificial Intelligence*, 138:39–54. 49
- [25] Lipkovski, A. and Zeada, S. (2015). A note on multivariate polynomial division and Gröbner bases. *Publications de l’Institut Mathématique*, 97(111):43–48. 20
- [26] Maestre-Martínez, R. (2010). A natural language for implementing algebraically expert systems. Bachelor Thesis, Universidad Politécnica de Madrid. 69, 79
- [27] Maestre-Martínez, R., Hernando, A., and Roanes-Lozano, E. (2016). An algebraic approach for detecting nearly dangerous situations in expert systems. *Mathematics and Computers in Simulation*, 129:81–93. 1, 78
- [28] Martínez, L. and García, M. (1991). Curso de ferrocarriles: Explotación técnica. *Servicio de Publicaciones and Universidad Politécnica de Madrid. E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos*, (libro 5). 9
- [29] Minato, S. (2001). Zero-suppressed bdds and their applications. *International Journal on Software Tools for Technology Transfer*, 3(2):156–170. 56, 79
- [30] Morley, J. (1991). Modelling british rail’s interlocking logic: Geographic data correctness. Technical report, ECS-LFCS-91-186, Department of Computer Science, University of Edinburgh. 29
- [31] Nakamatsu, K., Kiuchi, Y., and Suzuki, A. (2004). Evalpsn based railway interlocking simulator. In *Knowledge-Based Intelligent Information and Engineering Systems*, volume 3214, pages 961–967. Springer. 30
- [32] Neumann, S. (2012). *Computer Algebra in Scientific Computing: 14th International Workshop, CASC 2012, Maribor, Slovenia, September 3-6*,

2012. *Proceedings*, chapter Parallel Reduction of Matrices in Groebner Bases Computations, pages 260–270. Springer. 21
- [33] Olschowka, M. and Neumaier, A. (1996). A new pivoting strategy for gaussian elimination. *Linear Algebra and its Applications*, 240:131 – 151. 18
- [34] Patrik, S. (2009). Smodels: An implementation of the stable model semantics for logic programs. Software disponible en : <http://www.tcs.hut.fi/Software/smodels/>. 49
- [35] Ricca, F., Grasso, G., Alviano, M., Manna, M., Lio, V., Iiritano, S., and Leone, N. (2012). Team-building with answer set programming in the Gioia-Tauro seaport. *Theory and Practice of Logic Programming*, 12(03):361–381. 30
- [36] Roanes-Lozano, E., Alonso, J. A., and Hernando, A. (2014). An approach from answer set programming to decision making in a railway interlocking system. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas*, 108(2):973–987. 30
- [37] Roanes-Lozano, E., Hernando, A., Alonso, J. A., and Laita, L. M. (2011). A logic approach to decision taking in a railway interlocking system using maple. *Mathematics and Computers in Simulation*, 82(1):15–28. 39
- [38] Roanes-Lozano, E. and Laita, L. M. (1998). An applicable topology-independent model for railway interlocking systems. *Mathematics and Computer in Simulation*, 45(1-2):175–183. 31
- [39] Roanes-Lozano, E., Laita, L. M., Hernando, A., and Roanes-Macías, E. (2010). An algebraic approach to rule based expert systems. *RACSAM - Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas*, 104(1):19–40. 16, 44

REFERENCIAS

- [40] Roanes-Lozano, E., Laita, L. M., and Roanes-Macías, E. (1998). An application of an ai methodology to railway interlocking systems using computer algebra. In *Proceedings of the 11th International Conference on Industrial and Engineering Applications of Artificial Intelligence and Expert Systems: Tasks and Methods in Applied Artificial Intelligence*, IEA/AIE, pages 687–696. Springer. 32
- [41] Roanes-Lozano, E., Roanes-Macías, E., and Laita, L. M. (2000). Railway interlocking systems and Groebner bases. *Mathematics and Computer in Simulation*, 51(5):473–481. 32, 34
- [42] Roanes-Lozano, E., Roanes-Macías, E., and Laita, L. M. (2004). The geometry of algebraic systems and their exact solving using Groebner bases. *Computing in Science and Engineering*, 6(2):76–79. 18
- [43] Rossouw, D. (2009). How do trains stay on track? *Materials Engineering Newsletter*, 1(5):1–3. 5
- [44] Russo, A. and Ladenberger, L. (2012). A formal approach to safety verification of railway signaling systems. In *Reliability and Maintainability Symposium (RAMS), 2012 Proceedings - Annual*, pages 1–4. 31
- [45] Sato, Y., Inoue, S., Suzuki, A., Nabeshima, K., and Sakai, K. (2011). Boolean Groebner bases. *Journal of Symbolic Computation*, 46(5):622–632. 18
- [46] Somenzi, F. (2015). CUDD: BDD package, University of Colorado. Software disponible en : <http://vlsi.colorado.edu/~fabio/CUDD/>. 30
- [47] Thieu, V. N. (2013). *Reduction Modulo Ideals and Multivariate Polynomial Interpolation*. Ph.d. Thesis, Université Bordeaux 1 UFR Mathématiques et Informatique. 20

- [48] Winter, K., Johnston, W., Robinson, P., Strooper, P., and van den Berg, L. (2005). Tool support for checking railway interlocking designs. In *Tenth Australian Workshop on Safety-Related Programmable Systems (SCS)*, volume 55, pages 101–107. ACS. 30
- [49] Xiangxian, C., Hai, H., and Yulin, H. (2010). Automatic generation of relay logic for interlocking system based on statecharts. In *Software Engineering (WCSE)*, volume 2, pages 183–188. 31
- [50] Xiangxian, C., Yulin, H., and hai, H. (2011). A component-based topology model for railway interlocking systems. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81(9):1892 – 1900. 30