DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECÁNICA

**Escuela Técnica Superior de
Ingenieros Industriales**

INFLUENCIA DEL COMPORTAMIENTO DE UNA MÁQUINA DE CINEMÁTICA PARALELA EN LOS PROCESOS DE MICROMECHANIZADO DE FILO ÚNICO

Autor: D. Marcelo Fajardo Pruna
Ingeniero Mecánico

Director: D. Antonio Vizán Idoipe
Dr. Ingeniero Industrial

2018

Agradecimientos

Quiero expresar aquí mi agradecimiento a todas aquellas personas e instituciones que me han apoyado de una forma u otra durante los años que he pasado desarrollando este trabajo. De forma especial a mi familia, mi madre, mi padre y mis hermanos, sin cuyo constante apoyo esto no habría sido posible.

Mi eterna gratitud a mi compañera, mi otra mitad, D.^a Daniela Barreiro, por su apoyo, paciencia y aliento durante los años de realización de este trabajo. Este logro también es tuyo.

Gracias al director de tesis, D. Antonio Vizán Idoipe, por su constante ayuda y guía que ha servido para que este trabajo haya salido adelante. Gracias también a la profesora de la Universidad de León, D.^a Hilde Pérez y al profesor de la Universidad de la Frontera, D. Eduardo Diez; sus consejos, ayuda, ánimos y apoyo han sido un gran soporte durante este tiempo.

Agradecer a mis compañeros del programa de doctorado en Ingeniería Mecánica de la UPM, en especial a D. Luis López-Estrada, por su apoyo y amistad en cada día, buenos y malos, del largo camino que ha sido el desarrollo de la tesis doctoral.

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a D. Daniel Gualoto, D. Juan Cuervo, D. Giovanny Pillajo y D.^a Aracely Santander de Pillajo por su sincera amistad, su apoyo y soporte durante toda mi estancia en Madrid.

Quisiera agradecer a D. Ramón San Miguel y D. Javier Tena, técnicos del laboratorio de fabricación de la UPM, por su amistad, apoyo y buena disposición que siempre tuvieron durante toda la realización de este trabajo.

Mi agradecimiento a todos los profesores del área de Fabricación del Departamento de Ingeniería Mecánica de la ETSI Industriales de la UPM, Jesús Pérez, José Ríos, José Ramón Álvarez, Juan Márquez y Juan Carlos Hernández. Gracias por vuestro apoyo en todo este tiempo que he pasado en vuestra escuela.

Finalmente, quiero agradecer a la SENESCYT, Secretaria de Educación Superior, Ciencia, Tecnología e Innovación del gobierno de la República del Ecuador por la concesión de la beca 223-2012 en la Convocatoria Abierta 2012 para realizar los estudios del programa de doctorado.

Muchas gracias a todos ellos.

Agradecimientos	I
Índice.....	III
Lista de figuras.....	VI
Nomenclatura	XI
Resumen	XXI
Abstract	XXII
Capítulo 1. Introducción	1
1.1. Ámbito de aplicación de la Tesis.....	1
1.2. Objetivos de la tesis	3
1.3. Estructura de la tesis.....	4
Capítulo 2. Estado del Arte.....	7
2.1. Preliminar	7
2.2. Micromecanizado	9
2.3. Proceso de corte	13
2.4. Proceso de corte empleados en micromecanizado.....	19
2.4.1. Proceso de corte con filo único.....	20
2.4.2. Proceso de corte propuesto.....	22
2.5. Los mecanismos paralelos y los procesos de fabricación.....	25
Capítulo 3. Proceso de mecanizado de filo único	29
3.1. Descripción del proceso	29
3.2. Modelo mecanicista para corte oblicuo	33
3.2.1. Modelo de estimación de fuerzas de corte propuesto	34
3.3. Metodología Experimental.....	34

3.4. Estrategia de mecanizado.....	39
Capítulo 4. Comportamiento cinemático de la máquina desarrollada.....	47
4.1. Introducción.....	47
4.2. Cinemática de la máquina 3PRS	48
4.3. Análisis de posicionamiento cinemático.....	50
4.3.1. Análisis cinemático inverso del mecanismo 3PRS	50
4.3.1.1. Compensación de los movimientos parásitos.....	60
4.3.1.2. Rango de movimiento de la máquina herramienta 3PRS+XY+C... 60	
4.3.1.3. Movimientos de barrido del mecanismo 3PRS+C.....	64
4.4. Cinemática directa del mecanismo 3PRS+C	67
4.4.1. Análisis de velocidades del mecanismo 3PRS+C	73
4.4.1.1. Análisis inverso de velocidades	74
4.4.1.1.1. Obtención de la matriz Jacobiana del mecanismo 3PRS.....	75
4.4.1.2. Análisis directo de velocidades	76
4.4.2. Singularidades en el mecanismo 3PRS+C.....	78
4.4.3. Análisis de aceleraciones	82
Capítulo 5. Posicionamiento de la máquina herramienta	85
5.1. Análisis de la configuración dinámica	85
5.1.1. Análisis del cabezal de herramienta	86
5.1.2. Análisis de los brazos de las cadenas PRS.....	88
5.1.3. Modelado de la estructura de la máquina herramienta.....	92
5.1.3.1. Rigidez del mecanismo 3PRS.....	92
5.1.4. Incertidumbre de posicionamiento.....	98
5.1.5. Compensación del filo de la herramienta de corte.....	101
5.2. Movimiento del mecanismo 3PRS+XY+C.....	104

Capítulo 6. Resultados Experimentales	109
6.1. Ensayos de posicionamiento y orientación	109
6.2. Deflexión en la punta de la herramienta y cuantificación de los defectos de posicionamiento	115
Conclusiones.....	121
7.1. Conclusiones de la tesis	121
7.2. Trabajos futuros	124
Anexo 1. Máquina Herramienta	125
A.1. Configuración de la máquina herramienta	125
A.1.1. Movilidad de la máquina herramienta.....	127
A.1.1.1. GDL del mecanismo 3PRS+C.....	129
A.1.1.2. GDL del mecanismo XY	131
A.2. Descripción de los elementos del mecanismo 3PRS+C	132
A.2.1. Cadena cinemática PRS.....	133
A.3. Mecanismo XY	137
A.4. Sistema de medición en la máquina 3PRS+XY+C.....	138
A.5. Sistema de 4 sensores.....	139
A.6. Sistema de control y adquisición de datos	141
Anexo 2. Funciones de la Cinemática Directa	143
A.1. Funciones de la cinemática directa	143
Referencias Bibliográficas	155

Lista de figuras

Figura 2.1.	Tamaño dimensional para el micromecanizado mecánico.....	10
Figura 2.2.	Aspectos clave a ser considerados en microfresado	12
Figura 2.3.	Modelo para calcular la fuerza de corte	15
Figura 2.4.	Comparación entre las fuerzas calculadas por el modelo J-C y las medidas en el proceso para AL 7075-T6 en relación a, (a) y (c) ángulo de inclinación, (b) y (d) espesor de corte y (e) velocidad de corte.	18
Figura 2.5.	Proceso propuesto para el corte de filo único.	23
Figura 2.6.	Modelo geométrico de la máquina herramienta híbrida 3PRS+XY+C.	24
Figura 3.1.	Procesos de corte con herramienta de filo único.	29
Figura 3.2.	Ángulos del proceso de corte.....	30
Figura 3.3.	Microgeometrías obtenidas en el proceso de mecanizado de filo único, la imagen superior muestra una cúpula cóncava y convexa, la imagen inferior muestra un microcono en comparación con un cabello humano.	31
Figura 3.4.	Geometría de la herramienta de corte de borde único, a) una fotografía en perspectiva de la herramienta, b) vista frontal de la herramienta y c) una fotografía lateral de la herramienta.	32
Figura 3.5.	Diagrama de la configuración experimental para la adquisición de la fuerza en el proceso de corte.....	36
Figura 3.6.	Ecuaciones de tendencia lineal para $\lambda_s = 0^\circ$, aluminio 7075-T6 con una herramienta de corte de un solo filo.	36
Figura 3.7.	Fuerzas en el proceso de micro corte para $\chi_r = 60^\circ$, $ap = 5 \mu\text{m}$, $a_e = 5 \mu\text{m}$	37

Figura 3.8. Presión específica de corte para el proceso con $\chi_r = 60^\circ$, $\lambda_s = 0^\circ$, $a_p = 5 \mu\text{m}$.	38
Figura 3.9. Influencia del ángulo de inclinación λ en la trayectoria de corte	41
Figura 3.10. Influencia del ángulo de posición χ_r en la trayectoria de corte.	43
Figura 4.1. Sistemas de referencia de la máquina herramienta.	49
Figura 4.2. Diferentes zonas de corte y estrategias para una cúpula cóncava.	50
Figura 4.3. Movimientos de barrido del mecanismo o_{3x} y o_{3y} 3PRS.	51
Figura 4.4. Arreglo de las cadenas cinemáticas en el sistema 3PRS+C (a) Plataforma móvil o cabezal de herramienta, (b) Plataforma fija o base.	52
Figura 4.5. Parámetros cinemáticos de la máquina-herramienta 3PRS+XY+C.	54
Figura 4.6. Matrices de rotación para los ejes (a) x_1 , (b) y_1 y (c) z_1 .	54
Figura 4.7. Evolución del grado de libertad γ en el cabezal de la herramienta durante una trayectoria curva.	59
Figura 4.8. Máquina-herramienta híbrida 3PRS+XY+C con su control CNC Fagor® 8070.	61
Figura 4.9. Desviación del posicionamiento α .	63
Figura 4.10. Desviación del posicionamiento β .	63
Figura 4.11. Movimientos parásitos en la máquina herramienta 3PRS+XY+C, (a) o_{3x} , (b) o_{3y} , (c) γ_b para $\alpha, \beta \in -30^\circ, 30^\circ$.	65
Figura 4.12. Movimientos parásitos o_{3x} y o_{3y} para $h \in [0, 100] \text{ mm}$.	66
Figura 4.13. Parámetros de la cadena cinemática PRS para el cálculo de la cinemática directa.	67
Figura 4.14. Singularidades de la cinemática inversa	79
Figura 4.15. Singularidades de la cinemática directa	80

Figura 4.16. $ J_x $ del PCD para $P_z = 150$ mm.	81
Figura 4.17. $ J_h $ del PCI para $P_z = 150$ mm.....	81
Figura 5.1. Fuerzas, momentos de reacción y masas en la máquina herramienta 3PRS+XY+C.	86
Figura 5.2. Parámetros en el análisis dinámico.....	90
Figura 5.3. Modelo de la fuerza de corte actuando en el mecanismo 3PRS.....	94
Figura 5.4. Rigidez estática para una altitud determinada P_z (a) K_{xx} , (b) K_{yy} , (c) K_{zz}	98
Figura 5.5. Incertidumbres ΔP de la trayectoria P , (a) ΔP_x (b) ΔP_y (c) ΔP_z	101
Figura 5.6. Configuración del sistema de stereo visión, a) Modelo CAD del sistema diseñado, b) Sistema real montado en la máquina herramienta.	102
Figura 5.7. Medición de la posición de la punta de la herramienta de corte (Δ_x , Δ_y) en el sistema de referencia R_n	102
Figura 5.8. Esquema de la trayectoria y rotación de la herramienta de corte.	103
Figura 5.9. Trayectoria	105
Figura 5.10. Aceleración de la Punta de la Herramienta	106
Figura 5.11. Desplazamientos o_{3x} y o_{3y}	107
Figura 6.1. Diferentes inclinaciones del cabezal de herramienta 3PRS para validar el modelo de corte.....	110
Figura 6.2. Comparación de fuerzas, empírica (línea sólida) y predicha (línea entrecortada). A= 50x50 μm , B= 40x40 μm , C= 30x30 μm , D= 20x20 μm , E= 10x10 μm , F= 5x5 μm	111
Figura 6.3. (a) Segmentos de trayectoria en el plano XZ de la estrategia de mecanizado analizada. (b) Esquema de la estrategia de corte y la inclinación relativa de la herramienta con la superficie mecanizada.	113

Figura 6.4.	Fuerzas de corte experimentales obtenidas en la estrategia de corte analizada (puntos) comparadas con las fuerzas simuladas en las mismas condicione (líneas) usando el modelo de corte para herramienta de filo único.....	114
Figura 6.5.	Fuerzas F_{zi} requeridas en los ejes lineales Zi durante el proceso de corte.....	115
Figura 6.6.	Esquema de la variación entre la posición real y teórica de la punta de la herramienta.....	116
Figura 6.7.	Errores teóricos en la trayectoria de la punta de la herramienta.....	117
Figura 6.8.	Medidas de la trayectoria mecanizada usando un microscopio DINOLITE® AM7515MZT.....	118
Figura 6.9.	Mecanizado de la geometría de prueba, la línea azul indica la trayectoria programada (a) vista superior de la superficie orientando la herramienta de corte (b) con la herramienta perpendicular al plano x_1y_1	119
Figura 6.10.	Rugosidad obtenida en la pieza mecanizada.....	120
Figura A.1.	Modelo CAD de la máquina herramienta	126
Figura A.2.	Máquina-herramienta 3PRS+XY+C (a) Cadenas cinemáticas (b) Grafos asociados	128
Figura A.3.	Base de la máquina herramienta 3PRS+XY+C (eslabón 1).....	130
Figura A.4.	(a) Modelo CAD del Mecanismo 3PRS+C (b) Dimensiones del mecanismo.....	132
Figura A.5.	Eslabón 1 del Mecanismo 3PRS+C	133
Figura A.6.	Eslabón 2,3,4 del Mecanismo 3PRS+C	135
Figura A.7.	Eslabón 5,6,7 del Mecanismo 3PRS+C	136
Figura A.8.	Cabezal de herramienta en el Mecanismo 3PRS+C	137

Figura A.9. Modelo CAD de la Mesa XY.....	138
Figura A.10. Equipos de medición en la máquina herramienta 3PRS+XY+C.	139
Figura A.11. Grupo de 4 sensores de 3 fuerzas Kistler.....	140
Figura A.12. Componentes de fuerza del sistema de 4 sensores	140
Figura A.13. Componentes de la máquina herramienta	142

Nomenclatura

$\mathbf{a}_{o_3}$	Aceleración de la punta de la herramienta.
a_e	Espesor de viruta sin deformar
$\mathbf{a}_G$	Aceleración del centro de gravedad del cabezal de herramienta
$\mathbf{a}_{G_i}$	Aceleración del centro de gravedad de la i-extremidad
a_p	Profundidad de la viruta sin deformar
C	Eje de rotación en CNC FAGOR® 8070
C	Magnitud de la rotación alrededor del eje z_3 .
$\mathbf{E}_m$	Filo principal
$\mathbf{E}_r$	Superficie del flanco
$\mathbf{E}_s$	Filo secundario
$\mathbf{F}$	Vector de la fuerza resultante
F	Magnitud de la fuerza resultante
$\mathbf{F}_c$	Vector de la fuerza de corte
F_c	Magnitud de la fuerza de corte
F_{cx}	Componente x de la fuerza de corte
F_{cy}	Componente y de la fuerza de corte.
F_{cz}	componente z de la fuerza de corte
$\mathbf{F}_i$	Suma de fuerzas en la i-extremidad
$\mathbf{f}_l$	Avance
$\mathbf{F}_{R1x}$	Fuerza de reacción en la dirección x de la articulación de revolución 1
$\mathbf{F}_{R1y}$	Fuerza de reacción en la dirección y de la articulación de revolución 1

F_{R1z}	Fuerza de reacción en la dirección z de la articulación de revolución 1
F_{R2x}	Fuerza de reacción en la dirección x de la articulación de revolución 2.
F_{R2y}	Fuerza de reacción en la dirección y de la articulación de revolución 2.
F_{R2z}	Fuerza de reacción en la dirección z de la articulación de revolución 2.
F_{R3x}	Fuerza de reacción en la dirección x de la articulación de revolución 3.
F_{R3y}	Fuerza de reacción en la dirección y de la articulación de revolución 3.
F_{R3z}	Fuerza de reacción en la dirección z de la articulación de revolución 3
F_{Si}	Fuerza de reacción en la articulación i-esférica.
F_{S1x}	Fuerza de reacción en la dirección x de la articulación esférica 1
F_{S1y}	Fuerza de reacción en la dirección y de la articulación esférica 1
F_{S1z}	Fuerza de reacción en la dirección z de la articulación esférica 1
F_{S2x}	Fuerza de reacción en la dirección x de la articulación esférica 2
F_{S2y}	Fuerza de reacción en la dirección y de la articulación esférica 2
F_{S2z}	Fuerza de reacción en la dirección z de la articulación esférica 2
F_{S3x}	Fuerza de reacción en la dirección x de la articulación esférica 3
F_{S3y}	Fuerza de reacción en la dirección y de la articulación esférica 3
F_{S3z}	Fuerza de reacción en la dirección z de la articulación esférica 3
F_{Zi}	Fuerza de reacción en el par i-prismático.
F_{Z1}	Fuerza de reacción en el par prismático 1.
F_{Z2}	Fuerza de reacción en el par prismático 2.
F_{Z3}	Fuerza de reacción en el par prismático 3.
g	Vector de gravedad
GS_i	Vector de posición relativa de la articulación i-esférica al centro de gravedad del cabezal de herramienta

$\mathbf{Go}_3$	Vector de posición relativa de la punta de la herramienta en relación con el centro de gravedad del cabezal de herramienta
H	Altura al inicio del par prismático relativo a $\mathbf{R}_b$.
h	Longitud de la herramienta de corte
$\mathbf{I}_G$	Matriz de inercia del cabezal de herramienta
$\mathbf{I}_{Gi}$	Matriz de inercia de la i-extremidad.
$\mathbf{I}_{G1}$	Matriz de inercia de la extremidad 1
$\mathbf{I}_{G2}$	Matriz de inercia de la extremidad 2.
$\mathbf{I}_{G3}$	Matriz de inercia de la extremidad 3.
$\mathbf{J}_h$	Matriz jacobiana del problema cinemático inverso.
$\mathbf{J}_x$	Matriz jacobiana del problema cinemático directo.
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez
$\mathbf{k}$	Dirección vectorial de la actuación de los pares prismáticos
k_0	Coeficiente del modelo corte
k_1	Coeficiente del modelo corte
k_2	Coeficiente del modelo corte
k_s	Presión específica de corte
$\mathbf{K}_{xx}$	Componente de la matriz de rigidez en $x_1 - x_1$
$\mathbf{K}_{yy}$	Componente de la matriz de rigidez en $y_1 - y_1$
$\mathbf{K}_{zz}$	Componente de la matriz de rigidez en $z_1 - z_1$
k_{xx}	Componente de la matriz de rigidez en la posición 11
k_{xy}	Componente de la matriz de rigidez en la posición 12
k_{xz}	Componente de la matriz de rigidez en la posición 13
k_{yx}	Componente de la matriz de rigidez en la posición 21

k_{yy}	Componente de la matriz de rigidez en la posición 22.
k_{yz}	Componente de la matriz de rigidez en la posición 23
k_{zx}	Componente de la matriz de rigidez en la posición 31
k_{zy}	Componente de la matriz de rigidez en la posición 32
k_{zz}	Componente de la matriz de rigidez en la posición 33
L	Radio de la plataforma fija
l	Radio de la plataforma móvil / cabezal de herramienta
m	Coeficiente exponencial de la profundidad de corte
$\mathbf{M}_G$	Sumatoria de momentos en el cabezal de herramienta
$\mathbf{M}_{G_i}$	Sumatoria de momentos en la i-extremidad
m_p	Masa del cabezal de herramienta
m_r	Masa de cada extremidad
$\mathbf{M}_{R_i}$	Momento de reacción en la i-articulación de revolución
$\mathbf{M}_{R1x}$	Momento de reacción en la dirección x de la articulación de revolución 1
$\mathbf{M}_{R1y}$	Momento de reacción en la dirección y de la articulación de revolución 1
$\mathbf{M}_{R1z}$	Momento de reacción en la dirección z de la articulación de revolución 1
$\mathbf{M}_{R2x}$	Momento de reacción en la dirección x de la articulación de revolución 2
$\mathbf{M}_{R2y}$	Momento de reacción en la dirección y de la articulación de revolución 2
$\mathbf{M}_{R2z}$	Momento de reacción en la dirección z de la articulación de revolución 2
$\mathbf{M}_{R3x}$	Momento de reacción en la dirección x de la articulación de revolución 3
$\mathbf{M}_{R3y}$	Momento de reacción en la dirección y de la articulación de revolución 3
$\mathbf{M}_{R3z}$	Momento de reacción en la dirección z de la articulación de revolución 3
o_1	Origen del sistema de referencia general
o_2	Origen del sistema de referencia de la pieza

o_3	Punta de herramienta, origen del sistema de referencia de la herramienta de corte.
o'_3	Desplazamiento de la punta de herramienta del sistema R_n
o_{3x}	Coordenada x de la punta de herramienta o_3 relativa al sistema R_b
o_{3y}	Coordenada y de la punta de herramienta o_3 relativa al sistema R_b
o'_{3xz}	Distancia medida del desplazamiento de la punta de herramienta o'_3 en el plano x_3z_3
o'_{3yz}	Distancia medida del desplazamiento de la punta de herramienta o'_3 en el plano y_3z_3
o'_{3x}	Coordenada x del desplazamiento de la punta de herramienta o'_3 relativa al sistema R_b
o'_{3y}	Coordenada y del desplazamiento de la punta de herramienta o'_3 relativa al sistema R_b
o'_{3z}	Coordenada z del desplazamiento de la punta de herramienta o'_3 relativa al sistema R_b
o_{3s}	Origen del sistema de referencia desplazado en la punta de herramienta.
P	Vector de posiciones en la trayectoria.
Pr	Plano de referencia de la herramienta
Pn	Plano normal al filo
Ps	Plano del filo de la herramienta
P_i	Vector de posición del i-par prismático
P_1	Par prismático 1
P_2	Par prismático 2
P_3	Par prismático 3

P_x	Coordenada x de la trayectoria
P_y	Coordenada y de la trayectoria
P_z	Coordenada z de la trayectoria
$\mathbf{R}$	Matriz de rotación de $\mathbf{R}_n$ a $\mathbf{R}_b$
$\mathbf{R}_b$	Sistema de referencia general
R_1	Articulación de revolución 1
R_2	Articulación de revolución 2
R_3	Articulación de revolución 3
$\mathbf{R}_i \mathbf{G}_i$	Vector de posición relativa del centro de gravedad de la i-extremidad a la i-articulación de revolución
$\mathbf{R}_i \mathbf{S}_i$	Vector de la i-extremidad
$R_i S_i$	Magnitud del vector de la i-extremidad
$\mathbf{R}_n$	Sistema de referencia de la herramienta de corte
$\mathbf{R}_w$	Sistema de referencia de la pieza de trabajo
$\mathbf{R}_{x_1(\alpha)}$	Matriz de rotación x
$\mathbf{R}_{y_1(\beta)}$	Matriz de rotación y
$\mathbf{R}_{z_1(\gamma)}$	Matriz de rotación z
$\mathbf{R}_{z_1 x_1 y_1}$	Matriz de rotación z-x-y
$\mathbf{S}_i$	Vector de posición de la i-articulación esférica
S_{iz}	Coordenada z de la i-articulación esférica relativa a $\mathbf{R}_b$.
S_1	Articulación esférica 1
S_2	Articulación esférica 2
S_3	Articulación esférica 3

$\mathbf{S_i o_3}$	Vector de posición relativa de la punta de herramienta a la i-articulación esférica
t	tiempo
$\mathbf{v_{o_3}}$	Velocidad de la punta de herramienta
$\mathbf{v_c}$	Vector de velocidad en el proceso de corte
X	Eje X en el control CNC FAGOR® 8070
X	Actuación del eje x en el sistema de referencia general
x_1	Eje x en el sistema de referencia general
x_2	Eje x en el sistema de referencia de la pieza de trabajo
x_3	Eje x en el sistema de referencia de la herramienta de corte
x_{3s}	Eje x en el sistema de referencia desplazado de la herramienta de corte
Y	Eje y en el control CNC FAGOR® 8070
Y	Actuación del eje y en el sistema de referencia general
y_1	Eje y en el sistema de referencia general
y_2	Eje y en el sistema de referencia de la pieza
y_3	Eje y en el sistema de referencia de la herramienta de corte.
y_{3s}	Eje y en el sistema de referencia desplazado de la herramienta de corte
Z_i	Actuación del eje z del sistema de referencia general
z_1	Eje z en el sistema de referencia general
z_2	Eje z en el sistema de referencia de la pieza
z_3	Eje z en el sistema de referencia de la herramienta de corte
z_{3s}	Eje z en el sistema de referencia desplazado de la herramienta de corte
$\mathbf{Z}$	Vector de actuación de los pares prismáticos
$\dot{Z}_i$	Magnitud del vector de velocidad de la actuación en el i-par prismático

$\ddot{Z}_i$	Magnitud del vector de aceleración de la actuación en el i-par prismático
Z1	Eje z en el control CNC FAGOR® 8070 para el par prismático 1
Z2	Eje z en el control CNC FAGOR® 8070 para el par prismático 2
Z3	Eje z en el control CNC FAGOR® 8070 para el par prismático 3
Z1	Magnitud de la actuación en el par prismático 1
Z2	Magnitud de la actuación en el par prismático 2
Z3	Magnitud de la actuación en el par prismático 3
α	Ángulo de Euler de la rotación alrededor del eje x_1
α_{03}	Aceleración angular del cabezal de herramienta
α_i	Aceleración angular de la i-extremidad
α_1	Aceleración angular de la extremidad 1
α_2	Aceleración angular de la extremidad 2
α_3	Aceleración angular de la extremidad 3
β	Ángulo de Euler de la rotación alrededor del eje y_1
γ	Ángulo de Euler de la rotación alrededor del eje z_1
γ_b	Movimiento de barrido de la rotación alrededor del eje z_1
γ_n	Ángulo de filo de la herramienta de corte
γ_{ns}	Ángulo de filo seleccionado
γ_{ncr}	Ángulo de filo crítico no óptimo
γ_{ncr2}	Angulo de filo crítico no útil
δ	Vector de deformaciones en la punta de la herramienta
δ_x	Componente x del vector de deformaciones en la punta de la herramienta
δ_y	Componente y del vector de deformaciones en la punta de la herramienta
δ_z	Componente z del vector de deformaciones en la punta de la herramienta

λ_s	Ángulo de inclinación de la herramienta de corte
ω_{o3}	Velocidad angular del cabezal de herramienta
ω_i	Velocidad angular de la i-extremidad
ω_1	Velocidad angular de la extremidad 1
ω_2	Velocidad angular de la extremidad 2
ω_3	Velocidad angular de la extremidad 3
χ_r	Ángulo de posicionamiento
χ_{rs}	Ángulo de posicionamiento seleccionado
χ_{rcr}	Ángulo de posicionamiento crítico

Resumen

Este trabajo presenta un novedoso proceso de micromecanizado en el que una herramienta de un solo filo puede cortar secciones de viruta de dimensiones micrométricas, con una formación de viruta adecuada. La base de este proceso consiste en la posibilidad de posicionar la herramienta con 6 grados de libertad en el espacio de trabajo mediante traslaciones y orientaciones en su trayectoria.

Para lograr este objetivo, se ha desarrollado una máquina herramienta híbrida que tiene alta rigidez y precisión de posicionamiento suficiente en el extremo de la herramienta para un proceso de micromecanizado. La máquina construida se basa en un dispositivo híbrido compuesto por un mecanismo paralelo 3PRS (prismático-revolución-esférico), una mesa XY y un eje de rotación C.

Para estudiar este proceso se ha desarrollado un modelo de corte que considera todos los ángulos del proceso con el fin de determinar la carga a la que estará sometida la estructura de la máquina y estimar su comportamiento mediante el análisis cinemático y dinámico de los mecanismos utilizados. Debido a las restricciones de la máquina herramienta y con la finalidad de fabricar piezas de forma adecuada, se establecen las condiciones que deben cumplir las estrategias de mecanizado.

Se han llevado a cabo un elevado número de ensayos experimentales para diversas condiciones de mecanizado a las que esta sujeta la máquina herramienta con el fin de analizar la validez del modelo desarrollado. Se concluye que el modelo de corte propuesto en la máquina herramienta es una alternativa precisa y competitiva a las tecnologías actuales de micromecanizado.

Abstract

This thesis presents a novel micro-machining process in which a single-edge tool is able to cut chip sections of a micrometric range with a proper chip formation. The basis of this process consists in the translation and orientation of the cutting tool tangent to its trajectory. To achieve this goal an innovative 6 degrees of freedom parallel machine-tool, with high stiffness and enough positioning precision of the tool-tip was developed. The built machine is based on a hybrid device composed by a 3PRS (prismatic-revolution-spherical) parallel mechanism with a linear XY-Stage and a C rotational axis. A cutting model has been established that considers all the angles of the process to determine the load to which the machine will be subjected and thus establishing its deformation. To manufacture a workpiece properly, a machining strategy has been developed considering the geometry of the tool and the kinematic restrictions of the machine-tool. Through the kinematic and dynamic modelling of the machine, it is possible to establish the level of work precision for a given machining strategy. From the tests carried out, it is shown that the proposed parallel machine tool-process is an alternative to micro-milling technologies.

A large number of experimental tests have been made under several manufacturing conditions in which the machine tool operates. It is concluded that the proposed cutting model in the hybrid machine tool is a precise and competitive alternative to the actual manufacturing technologies.

Introducción

1.1. Ámbito de aplicación de la Tesis

De las múltiples acciones de mejora que se pueden realizar en los procesos de microfabricación, el desarrollo de nuevos procesos de micromecanizado se presentan como una opción que proporciona alternativas rentables a las demandas de microproductos que requieren un alto grado de precisión y calidad. El estudio de la relación entre las máquinas herramientas y estos procesos de fabricación permite simular los resultados antes, durante y después de su ejecución aplicando configuraciones no convencionales en la estructura de la máquina herramienta utilizada en estos procesos. Con este fin es necesario conocer la magnitud de las fuerzas de corte en el proceso y su influencia en la estructura de las máquinas herramientas.

El modelo de estimación de la fuerza de corte permite analizar su acción en la estructura de la máquina herramienta y cuantificar su influencia en el posicionamiento del extremo de la herramienta.

La aplicación de mecanismos paralelos a las máquinas herramientas supone una mejora en características como precisión y rigidez del extremo de la herramienta. Sin embargo, el comportamiento de estos mecanismos varía según la ubicación de la herramienta en el espacio de trabajo lo cual influye en la calidad de la superficie mecanizada.

Hacer una estimación precisa de las fuerzas de corte es una tarea compleja debido a que en el micromecanizado las condiciones del proceso están afectadas por fenómenos que no influyen en la escala macroscópica como son, el filo de la corte, el radio de punta de la herramienta, la penetración, los efectos de fricción, entre otros; esto hace que el valor de fuerza cambie notablemente durante las operaciones. Además, las condiciones reales del mecanizado de las piezas son con frecuencia cambiantes en cuanto a ancho de corte, profundidad de corte, formación de viruta, etc. Por lo tanto, es recomendable que, para mantener la eficiencia del mecanizado, las variables del proceso, (ángulos de la herramienta, velocidad de corte y de avance) y la forma de mecanizar (estrategias de mecanizado) sean susceptibles de ser modificadas durante el proceso.

La modificación de las variables de mecanizado puede realizarse eficientemente si se conoce adecuadamente el comportamiento de la máquina herramienta durante las operaciones a realizar y los límites de operación de esta. El modelo del comportamiento de la máquina herramienta incorpora las restricciones mecánicas al comportamiento de la herramienta de corte. También es posible mejorar la forma de mecanizar con la definición de las restricciones en las estrategias de mecanizado y estableciendo cuál es su ganancia en la eficiencia del proceso.

Los dos elementos constitutivos de este trabajo son, por lo tanto, la determinación de la fuerza de corte en el proceso de filo único y el modelo de la máquina herramienta. Debido a la escala del proceso, las fuerzas producidas durante el micro corte afectan la precisión de la superficie obtenida en la pieza final porque inducen pequeñas desviaciones que tienen gran influencia en la sección de corte. Esto tiene una relación directa con pequeñas deformaciones en la estructura de la máquina.

Para validar la funcionalidad del dispositivo como alternativa a los procesos tradicionales de micro corte, el presente trabajo analiza el comportamiento de la máquina herramienta durante el proceso de micro corte, aplicando un modelo de fuerza para herramientas de filo único y analizando su influencia en la estructura de la máquina herramienta y en la superficie final obtenida en el mecanizado.

El análisis de la simulación, pone de manifiesto determinados aspectos que ocurren durante el proceso de mecanizado que de otra forma no sería posible. Con ello permite mejorar la eficiencia del proceso de corte con herramienta de filo único.

1.2. Objetivos de la tesis

El objetivo general de esta tesis es analizar la *Influencia del Comportamiento de una Máquina de Cinemática Paralela en los Procesos de Micromecanizado de Filo Único*.

Este análisis se utiliza para estudiar una metodología que permite corregir los errores de posicionamiento e incertidumbres inducidas en la superficie a mecanizar por los diferentes elementos de la estructura de la máquina herramienta.

Los objetivos específicos del presente trabajo son los que se listan a continuación:

1. Realizar un estado del arte sobre máquinas herramientas de cinemática paralela y procesos de corte de filo único empleados en micromecanizado.
2. Particularizar las características principales del proceso de corte con herramienta de filo único y analizar el comportamiento de la herramienta durante este proceso.
3. Desarrollar una máquina herramienta para el proceso propuesto empleando estructuras paralelas y un control comercial CNC que permita el control total del posicionamiento de la herramienta de corte.
4. Desarrollar un modelo para estimar los errores de posicionamiento de la punta de la herramienta de corte considerando cada uno de los elementos que forman las cadenas cinemáticas de un mecanismo paralelo, identificando en cada instante las características del proceso tanto para la máquina herramienta como para el proceso de corte.
5. Establecer una metodología estándar de análisis de datos que permita relacionar el proceso de corte de filo único con el comportamiento de la máquina herramienta.
6. Analizar las estrategias de mecanizado óptimas en el espacio de trabajo del mecanismo paralelo para obtener un proceso eficiente y maximizar las capacidades de la máquina herramienta.

1.3. Estructura de la tesis

El presente trabajo se ha estructurado en siete capítulos, siendo la presente introducción el primero de ellos.

En el segundo capítulo se desarrolla el estado del arte para los procesos de corte empleados en micromecanizado y para los mecanismos paralelos empleados como elementos de máquinas herramientas.

En el tercer capítulo se presentan los modelos para la estimación de las fuerzas de corte en el proceso con herramienta de filo único y la variación en los parámetros de mecanizado con el cambio en la orientación de la herramienta. La orientación de la herramienta de corte define la estrategia de mecanizado óptima. Los modelos analizados cubren las condiciones de corte ortogonal y corte oblicuo.

Se comprueban los modelos desarrollados mediante ensayos experimentales demostrando que estos permiten una correcta predicción de los valores de fuerza total durante el proceso de corte. Esta fuerza es la que actúa sobre la máquina herramienta desarrollada.

En el cuarto capítulo se describe la configuración cinemática de la máquina herramienta desarrollada, analizando su movilidad y los elementos que la constituyen. Se describe y caracteriza cada elemento con sus propiedades físicas y su relación con el sistema de control CNC.

En el quinto capítulo se desarrolla el análisis cinemático y dinámico de la máquina para definir los movimientos de cada eje del control CNC que permiten mecanizar una superficie dada y los errores de posicionamiento que se esperan durante ese proceso.

Se presenta el modelo de la máquina herramienta que relaciona los parámetros de corte y la máquina herramienta desarrollado en Simulink para facilitar el análisis.

En el sexto capítulo se presenta el trabajo experimental desarrollado en la tesis. En la primera parte se indica la metodología empleada para la determinación de las fuerzas de corte y los procedimientos desarrollados para la obtención de resultados.

En el último capítulo se presentan las conclusiones del trabajo y las aportaciones realizadas por el mismo, así como las líneas futuras de investigación que podrían seguirse a partir del mismo.

Estado del Arte

2.1. Preliminar

Los procesos convencionales de fabricación tales como, el mecanizado por descarga eléctrica (EDM), mecanizado por rayo láser (LBM), mecanizado por ultrasonidos (USM) y los procesos de corte (ej. fresado, torneado) (Masuzawa 2000) se han adaptado para ser introducidos con éxito en la industria de la micro fabricación. Debido a la alta capacidad de los procesos de corte para la fabricación de piezas, su bajo costo relativo en comparación con otras tecnologías y la amplia gama de investigaciones en la fabricación a macro escala, hacen que estos conocimientos sean atractivos para ser aplicados en microescala. El microfresado es el proceso de corte más extendido (Egashira et al. 2016; Lai, Liao, and Chao 2018), ya que puede obtener geometrías complejas a un coste aceptable pero tiene limitaciones debido a la dificultad en la fabricación de herramientas de corte muy diminutas (Uhlmann and Schauer 2005). Las geometrías más pequeñas requieren herramientas de fresado aún más pequeñas, lo cual es una tarea compleja y costosa (Cheng et al. 2014).

Según Câmara et al. (2012), el micromecanizado se define basándose en las dimensiones de la herramienta de corte, que debe estar en el intervalo de 1 a 1000

μm , sin embargo, el aspecto más relevante relacionado con el rango de este grupo de operaciones reside en el hecho de que el ancho de viruta y el tamaño de grano de la pieza de trabajo poseen dimensiones de trabajo comparables al radio del filo cortante.

La constante tendencia hacia la miniaturización de los elementos o microformas y partes de mecanismos o de sus distintos componentes, así como también el desarrollo de nuevas aplicaciones que requieren componentes de menores dimensiones, ha llevado a la industria hacia el desarrollo de distintos procesos y tecnologías con el fin de cumplir con estos nuevos requerimientos de fabricación. Por lo tanto, el micromecanizado es,

un proceso que permite obtener microgeometrías mediante diferentes procedimientos que eliminan material progresivamente para obtener una forma determinada en una pieza de trabajo (Câmara et al. 2012).

En la industria automovilística, la fabricación de los inyectores en los motores de combustión interna requiere de microperforaciones para realizar la pulverización del combustible debido a la constante búsqueda para mejorar la eficiencia de la combustión, lo cual está relacionado con las regulaciones ambientales en este tipo de industria. Otros ejemplos de la aplicación de los procesos de microfabricación son, los componentes eléctricos y los circuitos integrados, los cuales después de la introducción de los semiconductores fueron miniaturizándose y conteniendo microdispositivos que requieren de microperforaciones en las placas de circuitos.

Las aplicaciones actuales, potenciales y futuras que los microdispositivos y microformas tienen y tendrán en diferentes campos de la actividad humana, vienen acompañadas por el desarrollo paralelo de procesos que permitan la fabricación de estos productos. En el campo de los servicios de salud, se están desarrollando microequipos quirúrgicos que podrían realizar operaciones de forma indolora en

aplicaciones específicas dado que las células se encuentran dentro del rango de la escala microscópica. En este sentido se puede decir que,

“el micromecanizado es una de las claves tecnológicas que puede permitir realizar todos los requerimientos para los microproductos y cumplir con sus requerimientos en constante expansión (Masuzawa 2000).

Para fabricar estos componentes que contienen microformas, existen una gran variedad de procesos que eliminan material mediante distintos procesos. Se puede micromecanizar mediante energía mecánica, fusión y vaporización, ablación, deformación plástica, solidificación, laminación, recomposición. Algunos de los procesos típicamente empleados serían: electroerosión, rayo láser, ultrasonido, corte, fundición y electroquímica.

2.2. Micromecanizado

Dentro del micromecanizado, este trabajo se enfoca en el estudio de los procesos que emplean una energía mecánica a los cuales llamaremos micromecanizado en forma general. Estos procesos, como se puede apreciar en la Figura 2.1, nos permiten manufacturar elementos desde unas cuantas décimas de micrómetros a unos pocos milímetros (Chae, Park, and Freiheit 2006). El atractivo para mecanizar elementos a escala microscópica y mesoscópica viene de la traslación de los conocimientos existentes para los procesos a escala macroscópica hacia la escala microscópica.

Figura 2.1. Tamaño dimensional para el micromecanizado mecánico

Sin embargo, esta traslación presenta varios puntos desfavorables debido a que en la escala micro determinados fenómenos que a escala macro no ejercen gran influencia sobre el resultado final de una pieza pueden ser determinantes. Algunas de las características que se deben analizar son: el rendimiento de las herramientas, la influencia de las vibraciones, la precisión en el posicionamiento de la herramienta, la respuesta a los esfuerzos del proceso, la vida de las herramientas y el control de tolerancias dimensionales (Alting et al. 2003).

Varios estudios de estos efectos se han realizado mediante la medida de la fuerza durante el proceso de corte para supervisar y analizar el comportamiento de las herramientas y máquinas utilizadas en los procesos de micromecanizado. Esto permite optimizar la calidad de las geometrías generadas al relacionar las fuerzas durante el proceso con el desgaste de la herramienta (Tansel et al. 2000a, 2000b), su comportamiento dinámico (Liu et al. 2004) y los efectos de rozamiento, penetración y elasticidad en el espesor mínimo de viruta de corte (Jun 2005). Estas investigaciones permiten extender la vida de las herramientas de corte (Tansel et al. 1998). Sin embargo, dada la magnitud de las fuerzas presentes durante el proceso es difícil

detectar el daño en los filos de corte e incluso ejes de herramientas rotos (X. Li, Lin, and Leow 2000).

El proceso de micromecanizado más ampliamente estudiado es el microfresado que permite obtener la fabricación de una gran variedad de geometrías tridimensionales para un variado rango de materiales. Sin embargo, su aplicación no es simplemente una reducción de la escala del fresado convencional.

En la Figura 2.2 se muestran los principales aspectos que se deben tener en cuenta en el microfresado en cada uno de los cuales se han realizado investigaciones que se detallan a continuación.

Para la pieza de trabajo se investiga el comportamiento de diferentes materiales como, cerámicos sinterizados (Romanus et al. 2014), aleaciones metálicas (Adams et al. 2001) y aleaciones con memoria de forma (NiTi) (Weinert and Petzoldt 2008), los efectos de la deformación en las piezas de trabajo con paredes delgadas (Lazoglu and Mamedov 2016) y los efectos de filo y espesor mínimo de viruta en el proceso de micromecanizado (de Oliveira et al. 2015).

El comportamiento de las herramientas y sus parámetros se investiga para definir las zonas de condiciones estables de operación (Afazov et al. 2013; Rusinek, Wiercigroch, and Wahi 2015), predecir y optimizar la vida de las herramientas utilizando los parámetros primarios del proceso como el avance por diente y la velocidad y profundidad de corte (Saedon et al. 2012), la influencia del efecto filo y la relación entre el radio del filo de corte y el espesor de la viruta sin deformar (Aramcharoen and Mativenga 2009) y la estimación de la magnitud de las fuerzas de corte utilizando modelos mecanicistas con la presión específica de corte con el fin de determinar el coeficiente de la fuerza de corte en cada instante del proceso (Pérez et al. 2008).

La determinación del comportamiento de la máquina herramienta durante el proceso es un factor que influye de manera significativa en el desempeño del micromecanizado. Sus características mecánicas permiten caracterizar las estrategias de mecanizado óptimas para cada operación (Brecher, Wenzel, and Klar 2008) y mejorar las condiciones de corte en la máquina herramienta analizando su influencia en el desgaste de la herramienta y calidad superficial del proceso (Krebs and Kersting 2014).

Las fuerzas durante el proceso de mecanizado varían dependiendo del material, velocidad de corte, avance, entre otros. En el caso del microfresado, se conoce que la fuerza específica de corte disminuye a medida que el espesor de viruta aumenta (Pérez et al. 2007).

Figura 2.2. Aspectos clave a ser considerados en microfresado

Por lo tanto, la importancia del micromecanizado radica en su capacidad para cumplir con los requerimientos de la fabricación de microformas. Además, las

investigaciones realizadas demuestran la viabilidad del micromecanizado como solución tecnológica.

2.3. Proceso de corte

Las fuerzas generadas por los procesos de micromecanizado son pequeñas, pero pueden producir pequeñas deformaciones en la punta de la herramienta debido a las dimensiones reducidas de las mismas. Estas deformaciones se reflejarán en la precisión de la pieza y en la sección de la viruta cortada. Además, la fuerza de corte es una magnitud que proporciona información sobre la capacidad real de la herramienta de corte y es la base para los algoritmos de optimización de control del proceso.

Analizando el modelo teórico del proceso de corte oblicuo de Altintas (2000) y Budak, Altintaş, and Armarego (1996) se observa que para un rango de condiciones de corte de filo único es posible escribir una relación lineal para la fuerza de corte. Esto es muy evidente durante el macromecanizado, pero tiene algunas limitaciones en los procesos de micromecanizado por los fenómenos que se han descrito anteriormente.

Las investigaciones desarrolladas para determinar el efecto de estos fenómenos en los procesos de micromecanizado se enfocan en la generación de superficies y estimación de fuerzas. Rahman et al. (2017) estudia la generación de superficies en términos del afilado relativo de la herramienta, el cual es una combinación de cizallamiento, extrusión, fricción y penetración como los principales parámetros que afectan al proceso. Zhang, Yu, and Wang (2018) introdujeron un modelo de estimación de la fuerza de corte en fresado, que considera la relación entre el espesor

de viruta sin cortar y la profundidad mínima de la viruta lo cual es crucial en las operaciones de micromecanizado. Chae, Park, and Freiheit (2006) en su investigación sobre las operaciones de micromecanizado concluyen que el radio del filo de la herramienta debe ser mayor que el espesor de la viruta para evitar la deformación elástica. Zhou et al. (2015) por ejemplo, consideran el efecto del radio de filo, el endurecimiento del material, la fricción y el desgaste en el modelo de predicción de la fuerza de corte, a través del análisis de la viruta en la punta de la herramienta.

Otros autores han abordado la generación de superficies en las operaciones de micromecanizado, como Z. Sun et al. (2018) que estudió los efectos del espesor mínimo de viruta y la penetración, en la generación de superficies en la parte central y lateral de una ranura generada por microfresado. Por otro lado, Twardowski et al. (2011) presentó el análisis de varios parámetros de fresado que afectan la rugosidad de la superficie, concluyendo que el factor más significativo es el avance por revolución en lugar del avance por diente. W. Chen et al. (2018) propuso un modelo de microfresado basado en la matriz de transformación homogénea, que considera la influencia de la geometría de la herramienta durante la trayectoria de mecanizado.

Estos enfoques son complejos de implementar de una manera práctica, por otro lado, la estimación de fuerzas introducida por Jin and Altintas (2011) presenta un modelo de línea de deslizamiento para el proceso de micromecanizado con una herramienta de corte de filo redondo. Los efectos que incluyen son, la deformación, la velocidad de deformación y la temperatura en el esfuerzo del flujo de cizallamiento del material. Este modelo está basado en la línea de deslizamiento es efectivo, sin embargo, monitorear el afilado relativo de la herramienta o la línea de deslizamiento durante el proceso de corte no es algo práctico.

Uno de los métodos usados para el cálculo de las fuerzas durante el proceso de corte ortogonal es el modelo de Johnson-Cook. En el corte ortogonal los ángulos de corte están definidos por la forma de la herramienta cuando el avance es tangente a la trayectoria de corte (Fu et al. 2014). Cuando esto no es posible debido a las limitaciones de la máquina, o una trayectoria de corte mal planificada, los ángulos varían en cada punto de la trayectoria, produciendo defectos no deseados. En la Figura 2.3 se muestra el modelo para el cálculo de la fuerza en el plano de corte principal (B. Li et al. 2011).

Figura 2.3. Modelo para calcular la fuerza de corte

Para el modelo es necesario determinar las propiedades físicas del material de la pieza de trabajo que incluyen, propiedades térmicas, fricción, transferencia de calor, tensión de flujo del material de la pieza de trabajo, velocidad de deformación y temperatura durante el proceso de corte. El modelo Johnson-Cook, definido por la ecuación (2.1), se utiliza comúnmente como modelo de tensión de flujo del material de trabajo en operaciones de modelado de mecanizado debido a su precisión y simplicidad.

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[A + B \left(\frac{\gamma}{\sqrt{3}} \right)^n \right] \left[1 + C \ln \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_0} \right) \right] \left[1 - \left(\frac{T - T_r}{T_m - T_r} \right)^m \right] \quad (2.1)$$

Donde γ es la deformación plástica de corte, $\dot{\gamma}$ es la velocidad de cizalladura, $\dot{\gamma}_0$ es la velocidad de deformación plástica de referencia, T_m es la temperatura de fusión del material de trabajo, T es la temperatura instantánea del material de la pieza y T_r es temperatura ambiente o pieza de trabajo inicial temperatura.

La constante A es el límite elástico (MPa), B es el módulo de endurecimiento (MPa), C es el coeficiente de sensibilidad de la velocidad de deformación (viscosidad), n es el coeficiente de endurecimiento, m es el coeficiente de reblandecimiento térmico. En la Tabla 2.1 se muestran las constantes para Aluminio 7075-T6 que determinaron Brar, Joshi, and Harris (2009) de forma experimental

Tabla 2.1.
Constantes para aluminio 7075-T6

A	B	C	n	m
546	678	0.71	0.024	1.56

Para calcular las fuerzas de corte, en primer lugar se calcula el ángulo de fricción β_f y el ángulo de corte ϕ utilizando las ecuaciones (2.2), (2.3) y (2.4) de forma iterativa.

$$V_c = \frac{V \sin \phi}{\cos(\phi - \gamma_n)} \quad (2.2)$$

$$\phi = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta_f}{2} + \frac{\gamma_n}{2} \quad (2.3)$$

$$f = f_0 V_c^p \quad (2.4)$$

Posteriormente se calcula el esfuerzo de flujo τ_s en el plano de corte principal de la ecuación (2.1) y finalmente la fuerza cortante F_s de la ecuación (2.5). Utilizando las condiciones geométricas de la herramienta y del proceso se obtiene la fuerza de corte F_c y la fuerza de avance F_f mediante las ecuaciones (2.6) y 2.7).

$$F_s = \frac{a_e a_p}{\sin \phi} \tau_s \quad (2.5)$$

$$F_c = \frac{F_s \cos(\beta - \gamma_0)}{\cos(\phi + \beta - \gamma_0)} \quad (2.6)$$

$$F_f = \frac{F_s \sin(\beta - \gamma_0)}{\cos(\phi + \beta - \gamma_0)} \quad 2.7)$$

En la Figura 2.4, se muestra la relación entre las fuerzas, de corte F_c y avance F_f , espesor de corte a_p , ángulo de inclinación γ_n y velocidad de avance V para las condiciones indicadas en un material de la pieza de trabajo AL 7075-T6. Adicional a las constantes de la Tabla 2.1 se emplean los siguientes datos en el modelo de la ecuación (2.1), $h = 0.33a_e$ mm (V. P. Astakhov, Osman, and Hayajneh 2001; Tounsi et al. 2002), $q = 3$ (B. Li et al. 2011), $f_0 = 0.54$ (Baradeswaran and Elaya Perumal 2014), $p = -0.248$ (Dudzinski and Molinari 1997) y $T \approx T_r$. Los datos adicionales como la velocidad V de la pieza de trabajo, el espesor de la viruta a_e , la profundidad de la viruta a_p y el ángulo de desprendimiento γ_n dependen de las condiciones del proceso de corte. Las fuerzas se miden con un dinamómetro Kistler MiniDyn 9256C1 en una máquina herramienta convencional.

Figura 2.4. Comparación entre las fuerzas calculadas por el modelo J-C y las medidas en el proceso para AL 7075-T6 en relación a , (a) y (c) ángulo de inclinación, (b) y (d) espesor de corte y (e) velocidad de corte.

En Wojciechowski and Mrozek (2017) se observa una mejora en el acabado de la superficie cuando la inclinación del eje de la herramienta respecto a la superficie de trabajo a lo largo de la trayectoria y el avance por diente se seleccionan de manera óptima, reduciendo al mismo tiempo las vibraciones del proceso de fresado.

Las vibraciones y los desplazamientos de la herramienta pueden causar una variación en las fuerzas de corte y en la formación de viruta. Wojciechowski (2011) investigó el efecto de estos fenómenos sobre la rugosidad de la superficie, viéndose

esta afectada principalmente por la desviación radial del filo de la herramienta. Esta desviación es ocasionada por los errores geométricos de la pinza de la máquina herramienta.

Los modelos mecanicistas se han utilizado ampliamente en la estimación de fuerzas de corte para aplicaciones industriales. Coelho et al. (2003) presenta un modelo basado en la presión específica de corte con muchos de los parámetros del proceso incorporados en el coeficiente. Hamade, Seif, and Ismail (2006) extraen las fuerzas y los coeficientes de un proceso de corte, basados en modelos mecanicistas. Esto lo convierte en un método viable para ser supervisado y obtener el espesor mínimo de viruta establecidos unos parámetros de corte.

Muchos de los modelos mencionados, incluido el propuesto en este documento, han sido probados empíricamente con máquinas herramientas tradicionales. Para aprovechar al máximo las capacidades del modelo de corte, las condiciones de corte deben mantenerse constantes durante la mayor parte del proceso. En el corte con herramienta de filo único, esto requiere que la máquina posicione a la herramienta en el espacio de trabajo con seis grados de libertad.

2.4. Proceso de corte empleados en micromecanizado

Dentro de los procesos válidos que han sido estudiados para el micromecanizado están el taladrado, torneado y el fresado. El microtaladrado puede conseguir dimensiones de decenas de micrómetros y sus ventajas son que se puede mecanizar fácilmente metales, polímeros e incluso composites, y que el tiempo de mecanizado es fácilmente controlable debido a que el proceso es estable cuando se configura correctamente el avance por rotación.

Las desventajas del microtaladrado vienen dadas por la magnitud de la superficie mecanizada y el material de trabajo. La parte previamente mecanizada del producto influye en la orientación de la broca por lo que, si no se posiciona correctamente la punta de la herramienta o incluso, si esta se desvía un poco del punto deseado, la broca se inclinará para seguir la dirección dada por las superficies previamente mecanizadas. Adicionalmente, los materiales extremadamente duros son difíciles de taladrar, requieren una pequeña profundidad de corte o un avance muy lento.

Para conseguir otro tipo de geometrías como ranuras, cavidades o formas convexas se puede emplear el microfresado, para este caso la fuerza de corte ejerce una gran influencia en la precisión debido a que la dirección principal de la fuerza es perpendicular al eje de la herramienta.

En el microtorneado se pueden conseguir diámetros de 100 μ m como aplicación práctica, pero hay que tener en consideración la deformación de la pieza de trabajo debido a que generalmente, la pieza de trabajo es mucho más elástica que la herramienta.

2.4.1. Proceso de corte con filo único

Los micro procesos que utilizan herramientas de filo único se aplican a casos muy concretos, como en procesos de micro torneado o procesos de micro torneado combinado (Masuzawa 2000). La capacidad del micro torneado básico para producir piezas de reducidas dimensiones ha sido superada experimentalmente por los procesos de micro-EDM (electroerosión) (Masuzawa and Tönshoff 1997) los cuales han conseguido formas de revolución de un diámetro de 5 μ m y una longitud de 100 μ m. El micro torneado combinado tiene una mayor aplicación, debido a la capacidad

de mecanizar en más de tres ejes; pudiendo fabricar piezas con formas más complejas.

El corte con filo único, también llamado microlimado, es un proceso alternativo que, trabajando con 6 grados de libertad permite emplear herramientas cuya complejidad es notablemente menor a otros procesos como el microfresado. Este proceso permite la microfabricación de piezas complejas de reducidas dimensiones con un buen acabado superficial. Este aspecto es uno de los más críticos ya que las velocidades de corte que se emplean en el proceso son muy reducidas y considerablemente mucho más pequeñas que en el caso del microtorneado.

El microlimado es un proceso que permite el conformado de piezas mediante el arranque de material en secciones muy reducidas una herramienta de filo único que se desplaza en cualquier dirección de la zona de trabajo con una velocidad de corte baja. A pesar de este valor de velocidad, el volumen de material arrancado por unidad de tiempo es semejante a otros procesos de micromecanizado y está comprendido entre $4,5 \times 10^{-6} \text{ mm}^3/\text{s}$ y $0,9 \times 10^{-3} \text{ mm}^3/\text{s}$. Para llevar adelante este proceso es necesario posicionar y orientar el extremo de la herramienta en el espacio de trabajo a unas coordenadas $\mathbf{P} = [P_x \ P_y \ P_z \ \alpha \ \beta \ \gamma]^T$ que representan la trayectoria de mecanizado.

El proceso propuesto se realiza desplazando la herramienta por la pieza a una velocidad de corte, manteniendo su plano de referencia (ISO 3002) perpendicular al desplazamiento. Consecuentemente, los planos de trabajo y de retroceso también se orientan de acuerdo con la geometría de la pieza para mantener el eje de la herramienta con una orientación que permita mantener los ángulos efectivos de la herramienta sensiblemente constantes a lo largo de toda su trayectoria.

Para ello es necesario realizar el mecanizado con 6 ejes simultáneos aun cuando con 4 ejes podrían obtenerse las mismas piezas, pero con una menor eficiencia, ya que sería necesaria la utilización de varias herramientas de geometrías distintas para la misma operación. La capacidad de proceso para producir piezas complejas depende de la forma geométrica de la herramienta y de las estrategias empleadas en el mecanizado.

El filo cortante que se encuentra en contacto con la pieza de trabajo está sujeto a un esfuerzo cuya magnitud depende de la sección de la viruta y del material mecanizado. Este esfuerzo está prácticamente determinado por las condiciones de corte seleccionadas.

2.4.2. Proceso de corte propuesto

El proceso de corte con herramienta de filo único ofrece una solución alternativa con la ventaja de una herramienta de corte menos compleja (Viktor P. Astakhov 2010). El trabajo previo sobre un modelo de corte de López-Estrada et al. (2015) explora las posibilidades y los resultados preliminares del modelo utilizando una máquina herramienta cartesiana de 4 ejes. Este proceso se ha perfeccionado para adaptarlo a sección de viruta de hasta $3\ \mu\text{m} \times 3\ \mu\text{m}$. Las secciones de viruta inferiores requieren perfeccionar la herramienta para asegurar un radio en la punta inferior a la sección que se desea cortar (Chae, Park, and Freiheit 2006). Se ha observado que el proceso produce mejores resultados, principalmente en las características de acabado superficial de las geometrías mecanizadas, cuando la herramienta tiene una orientación tangente con respecto a la trayectoria de corte. Sin embargo, con una

máquina cartesiana de 4 ejes esta condición solo es posible en las trayectorias de corte sobre el plano XY.

Para aprovechar al máximo el modelo propuesto, se construyó una máquina herramienta que combina un mecanismo serie y paralelo (Fajardo-Pruna, Diez, et al. 2014). Las características principales son, una amplia gama de orientación de la herramienta y un mecanismo de alta precisión y alta rigidez (El-Khasawneh and Ferreira 1999). Esto permite minimizar el efecto de las pequeñas deformaciones que afectan al proceso de corte y a la geometría de la pieza mecanizada. La orientación relativa de la herramienta en relación con la trayectoria puede permanecer constante (Hsieh 2010) para lo que un sistema de referencia asociado a la herramienta debe posicionarse constantemente a lo largo de la trayectoria de corte (Figura 2.5) .

Figura 2.5. Proceso propuesto para el corte de filo único.

Explorando las capacidades del sistema paralelo, el diseño final de la máquina herramienta desarrollada se denomina *máquina híbrida 3PRS+XY+C* que se muestra en la Figura 2.6. El dispositivo tiene 6 grados de libertad y está basado en un

mecanismo paralelo 3PRS, una mesa XY y un cabezal para la herramienta de corte. El sistema 3PRS permite la orientación y posicionamiento en Z de la herramienta en la superficie de la pieza de trabajo, la mesa XY traslada la pieza de trabajo durante el proceso y el cabezal gira la herramienta de corte alrededor de su propio eje para posicionar el filo de corte en la trayectoria.

Las limitaciones del mecanismo paralelo en la orientación de la herramienta de corte afectan directamente el proceso dando lugar a zonas específicas que no podrán ser mecanizadas de forma adecuada por lo que es preciso considerar las características de la máquina para establecer la estrategia de mecanizado adecuada para cada pieza. Para realizar el análisis de la máquina herramienta es necesario relacionar la pieza de trabajo y la herramienta de corte con la base de la máquina en cada instante del proceso.

Figura 2.6. Modelo geométrico de la máquina herramienta híbrida 3PRS+XY+C.

Dada la naturaleza de las máquinas basadas en cinemática paralela, sus movimientos están restringidos por un conjunto específico de condiciones funcionales (Fajardo-Pruna, Márquez, et al. 2014; Y. Li and Xu 2007), la evolución de la herramienta de corte en el espacio de trabajo y el comportamiento cinemático no uniforme de los sistemas paralelos. Estos parámetros afectan las dimensiones máximas de la pieza de trabajo a mecanizar (Fajardo-Pruna et al. 2015).

2.5. Los mecanismos paralelos y los procesos de fabricación

Las máquinas paralelas han sido usadas en una amplia variedad de aplicaciones como el movimiento de simuladores, manipuladores paralelos, nanomanipuladores y micromanipuladores. En años recientes, la investigación y aplicación ha evolucionado desde el mecanismo general de 6 grados de libertad a mecanismos paralelos de menor movilidad.

Los mecanismos de menor movilidad tienen aplicaciones similares que los mecanismos de 6 grados de libertad pero son más simples en estructura y más económicos en costo. El estudio de nuevos mecanismos de menor movilidad ha creado una generación de máquinas como: Delta, Tricept, y robots médicos contruidos para diferentes aplicaciones.

Los robots paralelos, constan básicamente de dos plataformas unidas por un mínimo de dos cadenas cinemáticas que proporcionan un movimiento relativo entre la plataforma móvil y la plataforma base.

La creciente necesidad de mayor rendimiento en los propósitos generales de la industria, así como el continuo desarrollo en los robots paralelos, la investigación en

la teoría de mecanismos, el análisis de movilidad, la síntesis dimensional, el modelado cinemático y dinámico y la optimización del diseño han ampliado la aplicación de estos mecanismos.

Uno de los primeros mecanismos estudiados fue el poliedro, específicamente una plataforma con 6 conexiones presentada en 1947 por Eric Gough (el primer hexápodo octaédrico) que revolucionó la industria de la robótica o el mecanismo de 1965 presentado por Stewart que publicó un artículo describiendo una plataforma móvil de 6 grados de libertad que fue diseñada como un simulador de aviación, también llamada plataforma de Stewart. Esta última ha tenido un gran impacto en los desarrollos posteriores popularizando el diseño de Gough en la academia.

En el desarrollo de máquinas herramientas los mecanismos paralelos han sido ampliamente estudiados aprovechando su alta rigidez y precisión en comparación con los mecanismos en serie convencionales. Geldart et al. (2003) estudian el rendimiento de las máquinas-herramienta convencionales de 3 y 5 ejes, en comparación con una máquina-herramienta paralela de 5 ejes en las mismas condiciones. Los resultados muestran cómo, en los dispositivos convencionales ocurre una falla prematura de la herramienta de corte en ciertas condiciones, mientras que, con el mecanismo paralelo de 5 ejes, debido a su mayor rigidez estructural estos fallos no ocurren.

Uno de los principales puntos débiles que restringen la aplicación de mecanismos paralelos en la industria de las máquinas herramienta son los problemas de precisión de posicionamiento. Chanal, Duc, and Ray (2006) estudian estos errores en una "estructura paralela Tricept" para aplicaciones de perforación y ranurado, al definir el espacio de trabajo mecánico de cada operación de mecanizado, se observa que los defectos más significativos son los de posicionamiento en los desplazamientos. Para

facilitar la identificación de errores estructurales, P. Huang et al. (2011) utilizan un "método de regularización" en un mecanismo 3PRS, concluyendo que si no se mide la libertad de movimientos, los errores de la estructura no identificables son exactamente la combinación lineal de aquellos que puedan tener influencia sobre el movimiento no medido, y que la incertidumbre de su combinación lineal no contribuye a otra libertad de movimientos que si es medida. En la misma familia de mecanismos, T. Sun et al. (2016) calibran un mecanismo paralelo 3PRS utilizando un rastreador láser como una forma efectiva y de bajo costo de mejorar la precisión geométrica de los actuadores paralelos. Company and Pierrot (2002) hacen un análisis para obtener cuál es la disposición más adecuada para una máquina herramienta de taladrado entre las configuraciones posibles de una máquina herramienta paralela de 3 ejes.

Los esfuerzos para mejorar la precisión de tales sistemas provienen de la no linealidad presente al acoplar muchas articulaciones en un mecanismo paralelo. El nivel de error en el efector final es causado principalmente por la calidad en la fabricación y el montaje de los elementos mecánicos. Por esta razón, los elementos mecánicos de alta precisión elegidos para construir un sistema paralelo de n grados de libertad se deben probar conjuntamente para cada aplicación como en Fan et al. (2003) y Ma et al. (2016), donde se estudia un cabezal de husillo para fresado mediante análisis de sensibilidad e integración CAD-CAE para mecanismos de 3 grados de libertad. Esto permite definir los aspectos clave que influyen en el posicionamiento y orientación, en las configuraciones cinemática y dinámica obteniendo una buena coincidencia entre los valores pronosticados y medidos. Chanal, Duc, and Ray (2006) se basan en hipótesis elásticas para calcular los desplazamientos de cada elemento y cuantificar las deformaciones generadas por las

fuerzas de corte, lo que permite obtener la rigidez estática más rápido que con el análisis CAD-CAE.

La máquina herramienta propuesta 3PRS+XY+C presenta un cabezal de herramienta diferente del que se utiliza en el fresado convencional debido a que en el proceso de filo único la orientación de la herramienta debe controlarse por lo que el giro de la herramienta es un grado de libertad adicional. Este movimiento tiene en cuenta los movimientos parásitos generados por el mecanismo 3PRS y la posición real del filo para orientar de la herramienta según se requiera.

Para eliminar algunos de los errores de posicionamiento debido a las variaciones de geometría en las herramientas de corte fabricadas, se ha integrado un sistema de visión artificial desarrollado por López-Estrada, Fajardo-Pruna, Sánchez-González, Pérez, and Vizán (2018a), capaz de ubicar la punta de la herramienta y realizar las correcciones adecuadas en la trayectoria de corte (López-Estrada, Fajardo-Pruna, Sánchez-González, Pérez, Fernández-Robles, et al. 2018). Esta corrección en conjunto con guías lineales de alta precisión, uniones esféricas y un control CNC comercial, hacen de este dispositivo una buena alternativa en tecnologías de micro corte.

Proceso de mecanizado de filo único

3.1. Descripción del proceso

El mecanizado de filo único es un proceso que se va a desarrollar con una herramienta que corta fundamentalmente por un solo filo que se tiene que desplazar en el espacio de trabajo como se muestra en la Figura 3.1. La herramienta de corte se mueve a lo largo de una determinada geometría, pero teniendo la necesidad de orientarse según la dirección de la superficie que se está fabricando. Los planos principales de la herramienta son los que permiten definir los ángulos del proceso. Siendo **Pr** el plano de referencia de la herramienta, **Pn** el plano normal al filo y **Ps** el plano del filo de la herramienta.

Figura 3.1. Procesos de corte con herramienta de filo único.

La sección de corte de la herramienta aparece en Figura 3.2 donde se muestra el filo principal durante el corte en la pieza de trabajo. La herramienta, como se ha indicado antes, tiene similitudes a las herramientas utilizadas en torno y limado que son procesos de corte de filo único. La sección de viruta que corta la herramienta en cada momento está definida por el ancho a_e y profundidad de corte a_p en el filo principal. Este filo está orientado respecto a la trayectoria de corte, por los ángulos χ_r , λ_s y γ_n

Figura 3.2. Ángulos del proceso de corte.

Como se ha comentado antes, se necesita una máquina herramienta que permita hacer los recorridos durante las trayectorias de mecanizado, que oriente la herramienta en el espacio de trabajo y que la gire para mantener los ángulos durante el proceso. De esta forma, los parámetros de mecanizado, como son los ángulos de corte, pueden ser constantemente relacionados con las actuaciones de los ejes de la máquina herramienta. Esto permite modificarlos durante el proceso o mantenerlos constantes según los requerimientos de cada operación, manteniendo la integridad geométrica de la superficie mecanizada con una adecuada tolerancia dimensional. En

la Figura 3.3 se recogen algunas geométricas simples obtenidas utilizando este proceso.

Figura 3.3. Microgeometrías obtenidas en el proceso de mecanizado de filo único, la imagen superior muestra una cúpula cóncava y convexa, la imagen inferior muestra un microcono en comparación con un cabello humano.

Como se aprecia en la Figura 3.1 la posición y la geometría de la herramienta afectan directamente a los ángulos relativos del proceso de corte entre la pieza de trabajo y la herramienta. Estos ángulos se pueden corregir, cambiar o mantener constantes mediante el accionamiento de los ejes de la máquina herramienta dentro de un cierto rango en el espacio de trabajo de la herramienta donde esta disponga de mayor movilidad. Fuera de este rango, la posición de la herramienta de corte afecta

los ángulos de corte, lo que provoca un cambio en los valores deseados para la operación de corte. Estos ángulos influyen en el valor de las fuerzas de corte, lo que afecta la precisión del trabajo.

Los métodos disponibles para calcular las fuerzas de corte varían según las aplicaciones y materiales utilizados. Pueden ser analíticos, empíricos o numéricos. Dentro de los métodos analíticos podemos analizar la herramienta discretizando cada uno de los filos de corte (Sutherland and DeVor 1986) y comparar los resultados con los ensayos en máquina, o en un enfoque empírico, realizar una serie de experimentos para determinar las variables del proceso para unas condiciones específicas de materiales y herramientas (Rusinek 2010; Adolfsson and Ståhl 1995).

Debido a la naturaleza del proceso es necesario desarrollar un modelo de cálculo de fuerza donde se considere la influencia de estos ángulos. Los ángulos afectados son el desprendimiento γ_n , la inclinación λ_s y la posición χ_r . En la Figura 3.4 se muestra una herramienta con $\chi_r = 57^\circ$, $K_r = 61^\circ$ y un ángulo de incidencia $\alpha_r = 18^\circ$.

Figura 3.4. Geometría de la herramienta de corte de borde único, a) una fotografía en perspectiva de la herramienta, b) vista frontal de la herramienta y c) una fotografía lateral de la herramienta.

3.2. Modelo mecanicista para corte oblicuo

El proceso de corte de filo único es oblicuo en su naturaleza más general. El proceso de micromecanizado se enfoca en secciones desde $30\text{ }\mu\text{m} \times 30\text{ }\mu\text{m}$ a menos de $3\text{ }\mu\text{m} \times 3\text{ }\mu\text{m}$. En estas secciones influyen los fenómenos físicos asociados con la microgeometría del borde de la herramienta de corte. El efecto de penetración complica el poder determinar la capacidad real de formación de viruta. Además, si la posición de la herramienta de corte no es adecuada, la fricción en el filo puede alcanzar valores significativos.

Una estimación precisa de las fuerzas de corte en estas circunstancias es difícil, los cálculos del modelo de corte complejo se han desarrollado tratando de dar cuenta de estos efectos presentados por B. Li et al. (2011). Estos modelos aumentan el número de parámetros y la identificación de estos requiere una gran cantidad de trabajo. En general, los cambios en las condiciones de corte influyen en los parámetros y conducen a una nueva identificación del proceso.

Uno de los modelos más ampliamente aceptado está fundamentado en Sabberwaal (1960), el cual introduce una relación entre la sección de viruta sin cortar y la fuerza de corte a través de la presión de corte específica como se muestra en la ecuación (3.1). Este modelo se aplica ampliamente para estudios científicos y en la industria.

$$F = k_s a_e a_p \quad (3.1)$$

Donde a_e , a_p son el ancho de corte y la profundidad de corte, respectivamente. k_s es la constante conocida como coeficiente específico de corte, que incorpora un parámetro de mecanizado relacionado con la geometría de la herramienta y las

propiedades mecánicas del material. La presión específica de corte generalmente depende potencialmente del espesor de la viruta.

3.2.1. Modelo de estimación de fuerzas de corte propuesto

Debido a que los ángulos de corte varían en la trayectoria de corte, se propone el modelo de la ecuación (3.2) donde la presión específica de corte es función de los ángulos χ_r , λ_s y γ_n . Se supone la relación de λ_s y γ_n es de forma lineal y χ_r es exponencial Ozturk and Altan (2012).

$$k_s = k_0(1 + k_1\gamma_n + k_2\lambda_s)(a_e \cdot \text{sen } \chi_r)^{-m} \quad (3.2)$$

Los modelos mecanicistas han demostrado su validez dentro de los procesos de fabricación a escala macro. Para un espesor de viruta sin cortar inferior a 10 μm , la influencia del radio de la punta de la herramienta puede ser significativa. Varias investigaciones han demostrado que, dado un valor de espesor de viruta inferior al radio de filo, la función de presión específica de corte tiene una discontinuidad (Yoon and Ehmann 2016).

3.3. Metodología Experimental

Para determinar las constantes de la ecuación (3.2) donde el modelo es válido se realizan pruebas experimentales utilizando una máquina herramienta de 4 ejes desarrollada en el Laboratorio de Microfabricación de la UPM con una resolución en su posicionamiento de 1 μm . La máquina emplea un control CNC Fagor® 8070 que permite programar las estrategias de mecanizado de la herramienta en código ISO, genérico a los procesos de manufactura. Se utilizan un dinamómetro Kistler MiniDyn

9256B y una tarjeta de adquisición de datos National Instruments DAQ PCI-6251 para recopilar los datos de fuerza. Con estos datos se calcula la presión específica de corte específica (Figura 3.5).

El material utilizado para el proceso de mecanizado es aluminio 7075-T6. Cada espécimen de prueba se ha preparado en una máquina herramienta Deckel Maho DMU 50 Evolution. Posteriormente en la máquina-herramienta de laboratorio, se prepara la superficie a mecanizar realizando una operación de planeado para asegurar el espesor y la profundidad de la viruta.

La punta de la herramienta se orienta tangente a la trayectoria del proceso para mantener constantes los ángulos de corte. Con el objetivo de cubrir una amplia gama de condiciones de corte posibles, y utilizando una herramienta de filo único para corte ortogonal hecha a medida, con un ángulo de borde de 60° . Se realizan varias combinaciones de área de corte con diferentes ángulos de inclinación y corte. Con los datos recopilados se realiza una evaluación de la presión específica de corte.

Figura 3.5. Diagrama de la configuración experimental para la adquisición de la fuerza en el proceso de corte.

Para una profundidad de corte específica se observa una fuerte relación lineal entre la fuerza durante el proceso de corte F y el espesor de viruta a_e como se muestra en la Figura 3.6.

Figura 3.6. Ecuaciones de tendencia lineal para $\lambda_s = 0^\circ$, aluminio 7075-T6 con una herramienta de corte de un solo filo.

La ecuación que representa esta relación lineal se obtiene utilizando análisis de regresión mostrando los resultados en las ecuaciones (3.3), (3.4), (3.5) y (3.6).

$$F_c|_{a_p=30\ \mu\text{m}} = 17.74a_e + 0.48 \rightarrow R^2 = 0,95 \quad (3.3)$$

$$F_c|_{a_p=20\ \mu\text{m}} = 32,15a_e + 0,11 \rightarrow R^2 = 0,98 \quad (3.4)$$

$$F_c|_{a_p=10\ \mu\text{m}} = 9,84a_e + 0,07 \rightarrow R^2 = 0,95 \quad (3.5)$$

$$F_c|_{a_p=5\ \mu\text{m}} = 3,28a_e + 0,04 \rightarrow R^2 = 0,81 \quad (3.6)$$

La influencia del ángulo de desprendimiento e inclinación sobre la fuerza de corte se muestra en la Figura 3.7. Las pruebas representadas en esta figura corresponden a una sección de corte de $5\ \mu\text{m} \times 5\ \mu\text{m}$ con un ángulo de desprendimiento γ_n entre $[-20^\circ, 20^\circ]$. La variación en el ángulo de inclinación está entre $[0^\circ, 10^\circ]$. La linealidad observada es alta incluso para una sección de viruta pequeña.

Figura 3.7. Fuerzas en el proceso de micro corte para $\chi_r = 60^\circ$, $a_p = 5\ \mu\text{m}$, $a_e = 5\ \mu\text{m}$.

Finalmente se obtiene la presión específica de corte seleccionando una profundidad de corte de $5\text{ }\mu\text{m}$ y un ángulo de inclinación λ_s de 0° , mientras que el ángulo de inclinación γ_n varía de -15° a 20° y el espesor de corte varía desde $10\text{ }\mu\text{m}$ a $5\text{ }\mu\text{m}$. La superficie que se muestra en la Figura 3.8 representa la función propuesta (3.7).

Figura 3.8. Presión específica de corte para el proceso con $\chi_r = 60^\circ$, $\lambda_s = 0^\circ$, $a_p = 5\text{ }\mu\text{m}$.

La expresión de presión específica de corte de la ecuación (3.2) sigue el comportamiento del proceso con alta precisión en las condiciones más extremas del área de corte ($5\text{ }\mu\text{m} \times 5\text{ }\mu\text{m}$). En la ecuación (3.7) se indican los valores de las constantes para el caso particular.

$$k_s = 163.7(1 - 0.01\gamma_n + 0.05\lambda_s)(a_e \sin \chi_r)^{-0.68} \quad (3.7)$$

El modelo sigue el comportamiento experimental con un 92% de precisión. Se han obtenido resultados similares para otras condiciones de corte, incluso en procesos de formación de pequeñas virutas que implican fenómenos adicionales como el efecto

de filo y el flujo de plasticidad del material. El proceso se comporta de forma similar a la formación de viruta a mayor escala. Con este modelo, el proceso se caracteriza por una función que estima de manera eficiente las principales características de las fuerzas de corte.

Se observa que del ajuste del modelo de la ecuación (3.2), hay una evolución lineal de la presión específica de corte con el ángulo γ_n . En el caso de λ_s también el crecimiento es lineal, aunque con menor pendiente.

La variación de a_e , que es la variación del espesor de viruta (h_1), es mucho más significativa, tiene una evolución logarítmica con la presión de corte específica en la Figura 3.8. De acuerdo con lo que se preveía, a_e es un efecto significativo que induce el crecimiento en el valor de la fuerza de corte.

Para a_e pequeños ($2\ \mu\text{m}$), el modelo mecanicista clásico es válido, debido a lo cual el modelo se mantiene sin complicar el modelo con los efectos del filo de corte, radio de punta y penetración.

Los modelos que han desarrollado otros investigadores que se detallan en el Capítulo 2 basados en la consideración de los parámetros de filo de corte, radio de punta, fricción, penetración, etc., aumentan la precisión del cálculo de las fuerzas en el proceso de corte, sin embargo, no aportan grandes cambios en el desarrollo del presente trabajo.

3.4. Estrategia de mecanizado

La máquina desarrollada orienta la herramienta completamente en el espacio de trabajo. Sin embargo, debido a sus limitaciones mecánicas existen áreas donde esta

capacidad se ve reducida. Esto produce que los ángulos del proceso de corte varíen afectando el valor de la fuerza aplicada a la estructura de la máquina herramienta en el proceso de corte. Por lo tanto, es necesario analizar si esta variación tiene efectos significativos en el proceso de mecanizado por lo cual el modelo de estimación de la fuerza de corte es importante. Esta fuerza puede ser la causa de pequeñas defecciones en la herramienta que afecten a la superficie generada por el proceso.

Debido a la influencia de los ángulos del proceso de corte en el valor de la fuerza indicado en 3.2.1, estos podrían dar lugar a deformaciones muy diferentes en el espacio de trabajo. Por lo cual, se establecen estrategias para minimizar los efectos de estos ángulos mediante el modelo desarrollado que permita estimar la influencia de los parámetros de corte en el posicionamiento de la herramienta.

La geometría de la pieza y la forma en que la máquina se mueve son características fundamentales de la fase de planificación del proceso. En esta fase, entre otras cosas, se establece la forma en que se debe mecanizar la pieza, la forma en que la herramienta se desplaza en el espacio de trabajo, las zonas en las que se puede usar la misma herramienta y sus condiciones, las geometrías de la herramienta y las fuerzas generadas durante el proceso.

Durante los movimientos de la herramienta pueden estar presentes dos tipos básicos de trayectorias, las que permiten la variación en la posición y orientación de la herramienta y las que provocan un cambio en el ángulo de corte por encontrarse fuera del rango de movimiento de la máquina herramienta.

El primero se produce cuando el eje de la herramienta de corte es perpendicular a la trayectoria, de manera que en el corte sucesivo la herramienta cambia su posición relativa a la pieza de trabajo para mantener o variar las condiciones de corte. El

segundo caso se produce cuando la herramienta ha alcanzado sus límites de movilidad por la configuración de la máquina herramienta y la variación en los ángulos de corte se da por la geometría de la pieza de trabajo siendo reducida la capacidad de actuación mediante la movilidad de la herramienta. La Figura 3.9 muestra la posición de la herramienta en diferentes zonas durante el proceso de mecanizado de una pieza de referencia con sección circular en referencia con el ángulo de inclinación de la herramienta respecto a la trayectoria.

Figura 3.9. Influencia del ángulo de inclinación λ en la trayectoria de corte

En estas operaciones, el ángulo de posición da lugar a un cambio en el espesor de la viruta y, por lo tanto, a un cambio en las fuerzas de corte. La zona superior de la pieza se puede mecanizar utilizando los mismos ángulos de la herramienta gracias a los movimientos de orientación de la máquina y, por lo tanto, obtener condiciones óptimas de corte (Figura 3.10). Fuera de esta zona, los ángulos cambian y por lo tanto también la geometría de corte, dando lugar a un corte diferente del seleccionado, pero aún con la capacidad de ser mecanizado. Cuando el ángulo de posición aumenta,

puede dar lugar a un espesor de viruta reducido que eleva considerablemente el espesor de corte, aumentando el contacto con el filo cortante de la herramienta. En un caso extremo, los ángulos grandes pueden causar interferencia geométrica entre la herramienta y la pieza. Estas situaciones se pueden clasificar de la siguiente manera:

$\chi_r > \chi_{rs}$ Zona de corte no óptima.

$\chi_r = \chi_{rs}$ Zona de corte óptima.

$\chi_r < \chi_{rs}$ Zona de corte no óptima.

$\chi_r < \chi_{rcr}$ Zona de corte no útil.

$\chi_r < 0$ Zona de corte no útil.

Donde χ_{rs} es el ángulo de posición seleccionado para la operación y χ_{rcr} el ángulo de posición crítico, desde el cual el ancho de corte es demasiado grande para la herramienta.

Las operaciones con un ángulo de corte diferente son aquellas en las que la herramienta se mueve perpendicular a la Mesa XY, es decir el cabezal de herramienta no es capaz de dotar de mayor movilidad a la herramienta y solo se desplaza en la dirección z_1 . En la misma trayectoria, el ángulo de corte varía de diferentes condiciones de corte, desde ángulos de corte negativos (altas fuerzas de corte) hasta ángulos de corte positivos.

Figura 3.10. Influencia del ángulo de posición χ_r en la trayectoria de corte.

Cuando el ángulo de corte es menor que el seleccionado, las fuerzas de corte aumentan y si se supera un valor crítico, el espesor de la viruta se extiende a lo largo del borde cortante de la herramienta. La zona de corte óptima se obtiene con el movimiento de orientación de la herramienta $\mathcal{C}$ o giro en z_3 . Cuando el ángulo es mayor que el seleccionado, el proceso mecanizado puede realizarse, pero en condiciones diferentes a las planificadas, si se supera un valor específico, se presentan interferencias geométricas. Por lo tanto, las zonas de trabajo de la pieza se pueden clasificar de la siguiente manera:

$\gamma_n < \gamma_{ncr}$ Zona de corte no adecuada.

$\gamma_n < \gamma_{ns}$ Zona de corte no óptima.

$\gamma_n = \gamma_{ns}$ Zona de corte óptima.

$\gamma_n > \gamma_{ncr}$ Zona de corte no óptima.

$\gamma_n > \gamma_{ncr2}$ Zona de corte no útil.

Para evitar interferencias geométricas durante el mecanizado, la geometría de la herramienta de corte debe analizarse y compararse con la evolución de la trayectoria durante el proceso. De la Figura 3.9 y Figura 3.10 se definen tres filos en la herramienta de corte analizada, filo de holgura E_r , filo principal de corte E_m y filo auxiliar de corte E_s y dos avances, en la dirección f_d tangente a la trayectoria de mecanizado P y en la dirección f_l perpendicular a f_d . Las condiciones que deben cumplirse durante la trayectoria de mecanizado son las indicadas en la ecuaciones (3.8), (3.9) y (3.10).

$$f_l \nparallel E_s \quad (3.8)$$

$$f_l \nparallel E_m \quad (3.9)$$

$$f_d \nparallel E_r \quad (3.10)$$

La variación de λ_s afecta principalmente a la fuerza y a la dirección en la cual se produce el flujo de viruta. Sin embargo, el efecto en la variación de la magnitud de la fuerza de corte de γ_n es mucho mayor que el de λ_s porque el primero afecta al valor de h_1 . Si se intenta mecanizar con la misma profundidad de corte a_p en la zona no óptima de γ_n el filo se alarga y el espesor de viruta se reduce significativamente, por lo tanto, la fuerza crece exponencialmente dando lugar a deformaciones mucho mayores que en la zona óptima.

Por lo tanto, la posición de la herramienta relativa a la trayectoria de corte, como se indica en las figuras Figura 3.9 y Figura 3.10, varían la sección de viruta significativamente cuando se encuentra fuera de la zona óptima de trabajo. Esto aumenta la fuerza en el proceso de corte como se indicó en 3.3. Esta variación puede generar deformaciones mayores de la herramienta de corte, maximizando los errores

de posicionamiento en la zona no óptima de trabajo y minimizándolos en la zona óptima.

Comportamiento cinemático de la máquina desarrollada

4.1. Introducción

La máquina herramienta desarrollada está controlada por un CNC Fagor 8070 por lo que es necesario establecer la relación entre la superficie que se desea mecanizar y el movimiento de los ejes del sistema de control. La máquina herramienta está formada por dos elementos, el mecanismo paralelo 3PRS+C que orienta la herramienta en el espacio mediante el movimiento de los ejes **Z1**, **Z2**, **Z3** y **C**. Correlativamente hay una mesa XY la cual se moverá de forma que la combinación de movimientos genere la trayectoria $\mathbf{P} = [P_x \ P_y \ P_z \ \alpha \ \beta \ \gamma]^T$.

Debido a esto, es necesario conocer el movimiento de cada uno de los ejes del sistema de control CNC en cada instante del proceso de mecanizado mediante el análisis cinemático de la máquina herramienta donde se define las entradas necesarias para definir el movimiento de los ejes en el proceso de mecanizado.

En el estudio cinemático se realizan dos análisis, la cinemática inversa y la cinemática directa. La cinemática directa se realiza para conocer la influencia del posicionamiento de los ejes del control en la posición y orientación de la herramienta debido a que el sistema de control no actúa directamente sobre la orientación de la

herramienta, sino indirectamente a través de los pares prismáticos del mecanismo 3PRS.

La cinemática inversa se realiza para definir qué las actuaciones se deben realizar en los ejes del sistema de control para obtener la geometría requerida $\mathbf{P} = [P_x \ P_y \ P_z \ \alpha \ \beta \ \gamma]^T$. La cinemática inversa se define como el cálculo de todas las combinaciones posibles de movimientos en los pares cinemáticos que pueden dar la posición y orientación dada para el efector final o herramienta de corte en la presente aplicación.

4.2. Cinemática de la máquina 3PRS

Para validar la configuración elegida para el proceso en términos de precisión y rigidez, se requiere un análisis cinemático, con él se obtiene el comportamiento mecánico de la estructura y una evaluación del proceso de corte en las condiciones estudiadas. La pieza de trabajo se monta en la mesa XY que proporciona el movimiento de avance en el plano XY y la compensación de los movimientos de barrido de la herramienta producto de la configuración 3PRS+C del cabezal, como se muestra en el esquema de la máquina herramienta en la Figura A.1 descrita en el Anexo A. Para analizar la cinemática de la máquina herramienta se definen y asignan tres sistemas de referencia diferentes $\mathbf{R}_n$, $\mathbf{R}_w$, $\mathbf{R}_b$. Estos sistemas corresponden con la punta de la herramienta de corte, la pieza de trabajo y la base de la máquina herramienta, respectivamente como se muestra en la Figura 4.1.

Figura 4.1. Sistemas de referencia de la máquina herramienta.

Las posiciones P de cada trayectoria de corte se alcanzan utilizando una combinación del mecanismo 3PRS+C y la mesa XY. El mecanismo 3PRS+C sigue el movimiento de la pieza de trabajo en la mesa XY con el objetivo de mantener la orientación de la herramienta de corte entre la zona óptima y no óptima y evitar las zonas no adecuadas y no útiles. Esto requiere una planificación de trayectoria para las condiciones específicas en cada zona (Figura 4.2).

La rotación en el cabezal de la herramienta está limitada por las articulaciones esféricas del mecanismo 3PRS (Zhao et al. 2015). En esta máquina-herramienta, este límite es ± 30 grados para los ángulos de Euler α , β . Esta limitación no significa que la máquina-herramienta no puede mecanizar ángulos mayores, sino que las condiciones de mecanizado en tales ángulos cambian como se indica en 3.4.

Figura 4.2. Diferentes zonas de corte y estrategias para una cúpula cóncava.

4.3. Análisis de posicionamiento cinemático

Para definir correctamente cada trayectoria en el proceso de mecanizado es necesario resolver la cinemática de la máquina-herramienta 3PRS+XY+C (Figura 4.5) que se describió en el Anexo A. Los movimientos combinados de los seis ejes o grados de libertad del mecanismo 3PRS+XY+C pueden alcanzar una amplia gama de configuraciones para la herramienta de corte. La máquina-herramienta tiene como cabezal de herramienta un mecanismo paralelo 3PRS+C (T. Huang et al. 2010) el cual rota la herramienta en α , β .

4.3.1. Análisis cinemático inverso del mecanismo 3PRS

El análisis cinemático inverso permite obtener los movimientos de barrido o_{3x} y o_{3y} del extremo de la herramienta de corte, conocidos también como movimientos parásitos y el valor de la actuación de los ejes $Z1$, $Z2$, $Z3$ y C para obtener la trayectoria

P. Estos movimientos de barrido se originan por la movilidad reducida del sistema 3PRS como se indica en la Figura 4.3.

Figura 4.3. Movimientos de barrido del mecanismo o_{3x} y o_{3y} 3PRS.

La configuración de los mecanismos paralelos 3PRS consiste en tres cadenas cinemáticas PRS idénticas donde P representa un par prismático, R un par de revoluciones y S una articulación esférica. Cada cadena tiene sus movimientos restringidos en un plano, que se denomina plano de la extremidad (Q. Li et al. 2011). El subtipo de mecanismo 3PRS en esta máquina-herramienta es el que se compone de tres planos de extremidades dispuestos simétricamente con un ángulo entre cada dos ramas consecutivas de 120° como se indica en la Figura 4.4 donde, el radio característico de la cabeza de la herramienta y la base fija son L y l (Shiau, Tsai, and Tsai 2008).

Figura 4.4. Arreglo de las cadenas cinemáticas en el sistema 3PRS+C (a) Plataforma móvil o cabezal de herramienta, (b) Plataforma fija o base.

En la Figura 4.4 se observa que el movimiento de junta esférica S_i está limitado a un plano denominado plano de extremidad. Por lo tanto, la cadena cinemática de la extremidad 1 solo puede moverse en el plano definido por $x_1 = -\sqrt{3}y_1$, la extremidad 2 en el plano $x_1 = 0$ y la extremidad 3 en el plano $x_1 = \sqrt{3}y_1$.

La Figura 4.5 muestra el diagrama esquemático del mecanismo paralelo 3PRS y sus componentes principales. La base fija $P_1P_2P_3$, el cabezal de herramienta $S_1S_2S_3$, la punta de la herramienta o_3 y la longitud de los brazos R_iS_i . H es la posición inicial de los pares prismáticos en el eje Z_i y h es la longitud de la herramienta de corte, que es un parámetro muy importante ya que los movimientos parásitos en los ejes x_1 y y_1 se amplifican directamente con este valor. Los pares prismáticos P_iR_i en los que se realiza la actuación se denominan como $\mathbf{Z} = [Z1\mathbf{k} \ Z2\mathbf{k} \ Z3\mathbf{k}]$, donde $\mathbf{k} = [0 \ 0 \ -1]^T$ es el vector de dirección de los pares prismáticos.

Los vectores de posición de la junta esférica $\mathbf{S}_i$ relativos al sistema de referencia general o de la base de la máquina herramienta para cada cadena cinemática PRS ($i = 1,2,3$) se escriben en la ecuación (4.1) en su forma vectorial.

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{o}_3 + \mathbf{o}_3 \mathbf{S}_i = \mathbf{P}_i + Zi\mathbf{k} + \mathbf{R}_i \mathbf{S}_i \quad (4.1)$$

En las ecuaciones (4.2) y (4.3) se indican los vectores relativos utilizados para la resolución del problema.

$$\mathbf{o}_3 \mathbf{S}_i = \mathbf{R}(\mathbf{S}_i)_{R_n} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{R}_i \mathbf{S}_i = \mathbf{o}_3 + \mathbf{o}_3 \mathbf{S}_i - \mathbf{R}_i = \mathbf{o}_3 + \mathbf{o}_3 \mathbf{S}_i - \mathbf{P}_i - Zi\mathbf{k} \quad (4.3)$$

Donde, $(\mathbf{S}_i)_{R_n}$ son las coordenadas de las juntas esféricas en el sistema de referencia de la herramienta que se obtiene mediante la matriz de rotación $\mathbf{R}$ que relaciona la orientación del sistema de referencia de la herramienta de corte con el sistema de la máquina herramienta o plataforma fija.

Figura 4.5. Parámetros cinemáticos de la máquina-herramienta 3PRS+XY+C.

La matriz de rotación $\mathbf{R}$ se calcula utilizando las matrices correspondientes a la rotación de cada ángulo de Euler correspondiente a cada eje del sistema de referencia general observando el orden de la operación dado que esta no es conmutativa. Estas matrices se visualizan en las ecuaciones (4.4), (4.5) y (4.6) y en la Figura 4.6.

Figura 4.6. Matrices de rotación para los ejes (a) x_1 , (b) y_1 y (c) z_1 .

$$\mathbf{R}_{(x,\alpha)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{R}_{(y,\beta)} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{R}_{(z,\gamma)} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Para correlacionar la orientación de la herramienta de corte con la el sistema de referencia de la máquina herramienta, los ángulos de Euler α , β y γ se usan en la matriz de rotación $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{z_1 x_1 y_1} = \mathbf{R}_{y_1(\beta)} \mathbf{R}_{x_1(\alpha)} \mathbf{R}_{z_1(\gamma)}$ de la ecuación (4.7).

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & -\cos\beta\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\cos\gamma & -\sin\alpha \\ -\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & \sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Los vectores $\mathbf{P}_i$ de la ecuación (4.8) corresponden a los puntos fijos de la plataforma fija relativos al sistema de referencia $\mathbf{R}_b$. Estos son los puntos “0” de cada eje $\mathbf{Z}_i$ del sistema de control. Aquí es donde comienza la actuación de los pares prismáticos. Los vectores $\mathbf{S}_i$ de la ecuación (4.9) son las coordenadas de las uniones esféricas relativas al sistema de la herramienta $\mathbf{R}_n$.

$$[\mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2 \quad \mathbf{P}_3] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}L & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}L \\ -\frac{1}{2}L & L & -\frac{1}{2}L \\ H & H & H \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$[\mathbf{S}_1 \quad \mathbf{S}_2 \quad \mathbf{S}_3]_{\mathbf{R}_n} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}l & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}l \\ -\frac{1}{2}l & l & -\frac{1}{2}l \\ h & h & h \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

La posición de los puntos de las juntas rotatorias respecto al sistema $\mathbf{R}_b$ considerando la actuación de las juntas prismáticas de $\mathbf{Z} = [Z1\mathbf{k} \ Z2\mathbf{k} \ Z3\mathbf{k}]$ corresponde a la ecuación (4.10).

$$[\mathbf{R}_1 \ \mathbf{R}_2 \ \mathbf{R}_3] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}L & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}L \\ -\frac{1}{2}L & L & -\frac{1}{2}L \\ H - Z1 & H - Z2 & H - Z3 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

La matriz de transformación homogénea de la ecuación (4.11) y (4.12) permite obtener la posición de las juntas esféricas $\mathbf{S}_i$ relativas al sistema $\mathbf{R}_b$ con los datos de la ecuación (4.9).

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{o}_{3 \times 1} \\ \mathbf{f}_{1 \times 3} & \mathbf{w}_{1 \times 1} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} k_1 & m_1 & n_1 & O_{3x} \\ k_2 & m_2 & n_2 & O_{3y} \\ k_3 & m_3 & n_3 & O_{3z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Donde $\mathbf{R}$ corresponde a la matriz de rotación de (4.7), los vectores de orientación $\mathbf{k} = [k_1 \ k_2 \ k_3]^T$, $\mathbf{m} = [m_1 \ m_2 \ m_3]^T$ y $\mathbf{n} = [n_1 \ n_2 \ n_3]^T$, son los cosenos directores de los ejes x_3, y_3, z_3 con respecto a los ejes del sistema de coordenadas x_1, y_1, z_1 . $\mathbf{O}_3 = [O_{3x} \ O_{3y} \ O_{3z}]^T$ es el vector de traslación (herramienta de corte), $\mathbf{f}$ representa la matriz de cambio de perspectiva, y $\mathbf{w}$ representa el escalado global. Para efectos prácticos solo interesa conocer el valor de $R_{3 \times 3}$ y $\vec{A}_{3 \times 1}$, considerándose las componentes de $\mathbf{f}$ nulas y la de $\mathbf{w}$ igual a la unidad. Por lo tanto, las coordenadas de las juntas esféricas en el sistema de referencia fijo $\mathbf{R}_b$ se obtienen de la ecuación (4.13).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{o}_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\mathbf{S}_i)_{\mathbf{R}_n} \\ 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{T}] \cdot \begin{bmatrix} (\mathbf{S}_i)_{\mathbf{R}_n} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Las componentes para cada junta esférica en las ecuaciones (4.14) para $\mathbf{S}_1$, (4.15) para $\mathbf{S}_2$ y (4.16) para $\mathbf{S}_3$ se obtienen sustituyendo la ecuación (4.9) en (4.13).

$$\begin{bmatrix} S_{1x} \\ S_{1y} \\ S_{1z} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}lk_1 - \frac{l}{2}m_1 + hn_1 + o_{3x} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}lk_2 - \frac{l}{2}m_2 + hn_2 + o_{3y} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}lk_3 - \frac{l}{2}m_3 + hn_3 + o_{3z} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\begin{bmatrix} S_{2x} \\ S_{2y} \\ S_{2z} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} lm_1 + hn_1 + o_{3x} \\ lm_2 + hn_2 + o_{3y} \\ lm_3 + hn_3 + o_{3z} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\begin{bmatrix} S_{3x} \\ S_{3y} \\ S_{3z} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}lk_1 - \frac{l}{2}m_1 + hn_1 + o_{3x} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}lk_2 - \frac{l}{2}m_2 + hn_2 + o_{3y} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}lk_3 - \frac{l}{2}m_3 + hn_3 + o_{3z} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Las restricciones de los planos de extremidad permiten obtener las ecuaciones las (4.17), (4.18) y (4.19) al sustituir los parámetros x_1 y y_1 de las ecuaciones (4.14), (4.15) y (4.16). Por lo tanto, los movimientos de barrido pueden obtenerse operando estas ecuaciones como se indica a continuación.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}lk_1 - \frac{l}{2}m_1 + hn_1 + o_{3x} = -\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}lk_2 - \frac{l}{2}m_2 + hn_2 + o_{3y}\right) \quad (4.17)$$

$$lm_1 + hn_1 + o_{3x} = 0 \quad (4.18)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}lk_1 - \frac{l}{2}m_1 + hn_1 + o_{3x} = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}lk_2 - \frac{l}{2}m_2 + hn_2 + o_{3y}\right) \quad (4.19)$$

Se suma las ecuaciones (4.17) y (4.19) y se reemplaza en (4.18) obteniendo la ecuación (4.20).

$$m_1 = k_2 \quad (4.20)$$

De la resta de (4.17) y (4.19) se obtiene la expresión para el movimiento de barrido o_{3y} en la ecuación (4.21).

$$o_{3y} = \frac{1}{2}l(m_2 - k_1) - hn_2 \quad (4.21)$$

Finalmente, al reemplazar la ecuación (4.7) en (4.18), (4.20) y (4.21) se obtienen los movimientos de barrido en las ecuaciones (4.22), (4.23) y (4.24) para el mecanismo 3PRS. Estas relaciones son funciones de los parámetros geométricos del mecanismo 3PRS (Q. Li et al. 2011) y de los ángulos de Euler. El ángulo de Euler parásito o de barrido γ_b inducido por el cambio o actuación en los grados de libertad α y β de la herramienta es el primer movimiento parásito que debe ser calculado porque es indispensable para definir los movimientos parásitos traslacionales o_{3x} y o_{3y} . Este movimiento es una función directa de los otros dos ángulos de Euler α y β .

$$\gamma_b = \arctan\left(\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}\right) \quad (4.22)$$

$$o_{3x} = l(\cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma) - h \cos \alpha \sin \beta \quad (4.23)$$

$$o_{3y} = \frac{1}{2}l(\cos \alpha \cos \gamma - \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) + h \sin \alpha \quad (4.24)$$

El eje C debe rotar la herramienta en el eje z_3 del sistema R_n para compensar el movimiento de barrido γ_b y para posicionar la punta de la herramienta respecto a la trayectoria P (Figura 4.7) mediante la actuación del eje C (4.25). La rotación resultante es el ángulo de Euler γ expresado por la matriz de rotación $R_{z_1(\gamma)}$.

$$C = \gamma - \gamma_b \quad (4.25)$$

Las ecuaciones (4.22), (4.23) y (4.24) demuestran que si se conoce α , β y P_z , se puede determinar O_{3_x} y O_{3_y} . La matriz de transformación se obtiene de la ecuación (4.12) y la posición cartesiana de cada junta esférica se calcula con la ecuación (4.13) relativas al sistema de referencia R_b . Como la longitud de los brazos $R_i S_i$ es constante, la posición R_{i_z} de la junta rotacional se puede calcular usando la cinemática inversa como se indica en la ecuación (4.26) (Fan et al. 2003).

$$R_{i_z} = S_{i_z} \pm \sqrt{R_i S_i^2 - \left[(R_{i_x} - S_{i_x})^2 - (R_{i_y} - S_{i_y})^2 \right]} \quad (4.26)$$

Figura 4.7. Evolución del grado de libertad γ en el cabezal de la herramienta durante una trayectoria curva.

La ecuación (4.26) tiene dos soluciones, pero la posición de la junta rotatoria esta siempre sobre la junta esférica, por lo tanto, solo la solución positiva es efectiva. Finalmente, el valor de desplazamiento en los pares prismáticos Z_i , para el control CNC se obtiene mediante la ecuación (4.27).

$$Z_i = P_{i_z} - R_{i_z} \quad (4.27)$$

Donde $\mathbf{P}_i = [P_{i_x} \ P_{i_y} \ P_{i_z}]^T$, $\mathbf{R}_i = [R_{i_x} \ R_{i_y} \ R_{i_z}]^T$ y $\mathbf{S}_i = [S_{i_x} \ S_{i_y} \ S_{i_z}]^T$ son los vectores de posición de las juntas prismáticas, rotatorias y esféricas respectivamente, en el sistema de referencia general $\mathbf{R}_b$.

4.3.1.1. Compensación de los movimientos parásitos

Para poder conseguir los puntos de la trayectoria de corte definida como $\mathbf{P} = [P_x \ P_y \ P_z \ \alpha \ \beta \ \gamma]^T$, los movimientos de barrido o_{3_x} y o_{3_y} (Q. Li et al. 2011; Fan et al. 2003) del cabezal de herramienta 3PRS+C deben ser compensados por la mesa XY. Estos movimientos se expresan mediante las ecuaciones (4.28) y (4.29) y son los parámetros para la actuación en los ejes X y Y del control CNC.

$$X = P_x + o_{3_x} \quad (4.28)$$

$$Y = P_y + o_{3_y} \quad (4.29)$$

4.3.1.2. Rango de movimiento de la máquina herramienta 3PRS+XY+C

La máquina herramienta analizada se muestra en la Figura 4.8. Se usa un control CNC Fagor 8070 en el cual los ejes a programar son X , Y , $Z1$, $Z2$, $Z3$, C . Durante el movimiento en la dirección z_1 , las tres guías lineales del mecanismo 3PRS+C tienen

los mismos parámetros de desplazamiento para definir la carrera de cada eje. El valor del parámetro inicial es $[Z1 \ Z2 \ Z3]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$ comenzando desde la posición “0” de los pares prismáticos y la posición final es $[Z1 \ Z2 \ Z3]^T = [190 \ 190 \ 190]^T$. El valor inicial en los ejes de la mesa XY es $[X \ Y]^T = [-50 \ 50]^T$ y la posición final es $[X \ Y]^T = [50 \ 50]^T$.

Figura 4.8. Máquina-herramienta híbrida 3PRS+XY+C con su control CNC Fagor® 8070.

Todos los parámetros se establecen en milímetros. Donde X , Y corresponde con las ecuaciones (4.28) y (4.29) respectivamente. Las actuaciones de $Z1$, $Z2$, $Z3$ se obtienen de la ecuación (4.26) y la actuación rotacional C de la herramienta de corte se obtiene con la ecuación (4.25). Los valores de los parámetros geométricos del mecanismo 3PRS+C para resolver el problema cinemático inverso se indican en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1.
Parámetros geométricos del mecanismo 3PRS+C.

<i>Parámetro</i>	<i>Descripción</i>	<i>Valor</i>
L	Radio de la plataforma fija	180 mm

l	Radio del cabezal de herramienta	80 mm
H	Altura al inicio de los pares prismáticos	530 mm
$R_i S_i$	Longitud de los brazos	200 mm
h	Longitud de la herramienta de corte	60 mm

Para la rotación alrededor del eje x_1 , movemos el mecanismo a una posición P_z determinada y utilizando la función G55 del CNC para realizar una traslación de origen, establecemos la posición actual como posición “0”. El actuador **Z2** está en el plano $y_1 z_1$ y tiene una actuación directa en el ángulo α . En esta posición, movemos $[Z1 \ Z2 \ Z3]^T$ para lograr $\alpha = [-30^\circ \ 30^\circ]^T$ de acuerdo con la cinemática inversa a una posición P_z constante. El rango de movimiento de cada actuador es $[Z1 \ Z2 \ Z3]^T = [-20 \ 50.337 \ -20]^T$ a su posición inicial en $\alpha = -30^\circ$ y $[Z1 \ Z2 \ Z3]^T = [20 \ -29.663 \ 20]^T$ hasta la posición final en $\alpha = 30^\circ$.

En la Figura 4.9 y Figura 4.10 se muestra la desviación en el posicionamiento angular para parámetros programados y medidos en la máquina-herramienta utilizando un sistema de visión personalizado desarrollado en el Laboratorio de Micromecanizado de la UPM por López-Estrada et al. (2018). Estas desviaciones son consecuencia de la orientación del cabezal de la herramienta.

Figura 4.9. Desviación del posicionamiento α .

Para la rotación alrededor del eje y_1 , movemos el mecanismo a una posición P_z determinada manera similar a lo que se hizo en el eje x_1 . Configurando $[Z1 \ Z2 \ Z3]^T$ para lograr $\beta = [-30^\circ \ 30^\circ]^T$. El rango de movimiento de cada actuador es $[Z1 \ Z2 \ Z3]^T = [-27.994 \ -2.985 \ 41.288]^T$ a su posición inicial $\beta = -30^\circ$ y $[Z1 \ Z2 \ Z3]^T = [41.288 \ -2.985 \ -27.994]^T$ hasta la posición final en $\beta = 30^\circ$.

Figura 4.10. Desviación del posicionamiento β .

En el CNC Fagor 8070 la máxima aceleración y avance de los ejes de la máquina-herramienta están establecidos en 2000 mm/s^2 y 8000 mm/s respectivamente. El

avance máximo permitido para cada motor es de 15000 mm/s. Por lo que, el avance máximo de la máquina-herramienta es inferior al avance máximo permitido para los actuadores lineales.

Los movimientos rotacionales α y β están limitados a $\pm 30^\circ$ por las juntas esféricas Myostat SRJ012C fabricadas por Hephaist Seiko que tienen un ángulo de oscilación máximo de $\pm 30^\circ$.

4.3.1.3. Movimientos de barrido del mecanismo 3PRS+C

Para resolver las ecuaciones (4.22), (4.23) y (4.24) es necesario definir tres parámetros de entradas que son, los GDL rotacionales $\alpha = [-30,30]$, $\beta = [-30,30]$ y el grado de libertad traslacional $P_z = O_{3z}$. Estos parámetros de entrada se obtienen de la trayectoria de corte $\mathbf{P} = [P_x \ P_y \ P_z \ \alpha \ \beta \ \gamma]^T$. En la Figura 4.11 se muestran los movimientos de barrido o parásitos del centro de la plataforma móvil, es decir, cuando la longitud de la herramienta de corte es $h = 0$ mm.

Figura 4.11. Movimientos parásitos en la máquina herramienta 3PRS+XY+C, (a) o_{3x} , (b) o_{3y} , (c) γ_b para $\alpha, \beta \in [-30^\circ, 30^\circ]$.

Los movimientos de barrido aumentan a medida que el extremo de la herramienta se aleja de su posición central. Estos movimientos están definidos por el arreglo geométrico de sus cadenas cinemáticas y están altamente relacionadas con la longitud de la herramienta de corte. Mientras el movimiento parásito en el ángulo de Euler γ_b es independiente de la longitud de la herramienta de corte h (4.22), o_{3x} y o_{3y} tienen una relación directa que es expresada por las ecuaciones (4.23) y (4.24).

Cuanto mayor es la longitud de la herramienta, mayores son los movimientos parásitos lo cual puede apreciarse en la Figura 4.12. Si la longitud de la herramienta es 100 mm, los movimientos parásitos máximos son aproximadamente 5 veces mayores que con una longitud de 0 mm. Esto es crucial debido a que la mesa XY tiene que compensar estos desplazamientos para alcanzar las posiciones programadas de la trayectoria $\mathbf{P} = [P_x \ P_y \ P_z \ \alpha \ \beta \ \gamma]^T$ usando las ecuaciones (4.28) y (4.29).

Figura 4.12. Movimientos parásitos o_{3x} y o_{3y} para $h \in [0, 100]$ mm.

Se puede apreciar que, cuanto mayores son los movimientos de barrido o_{3x} y o_{3y} , mayores son los desplazamientos que debe realizar la Mesa XY para compensarlos. Por lo tanto, para aumentar la capacidad de la máquina herramienta se debe considerar incrementar los desplazamientos de la mesa XY que actualmente se limitan a 100 mm.

4.4. Cinemática directa del mecanismo 3PRS+C

La cinemática directa se calcula para conocer la influencia del posicionamiento de los ejes $Z1$, $Z2$ y $Z3$ del sistema de control en el posicionamiento del extremo de la herramienta debido a que la actuación que se realiza en estos ejes posiciona la herramienta en el espacio de trabajo de forma indirecta.

La posición y orientación de la herramienta de corte se calcula para un grupo de actuaciones $Z = [Z1 \ Z2 \ Z3]^T$ utilizando la cinemática directa. Para esto definimos un ángulo θ_i que se mide desde la plataforma fija hacia el brazo de cada cadena cinemática $R_i S_i$ como se muestra en la Figura 4.13. Entonces, la posición de las juntas esféricas relativas al sistema de referencia R_b se expresa como los tres vectores de las ecuaciones (4.30), (4.31) y (4.32).

Figura 4.13. Parámetros de la cadena cinemática PRS para el cálculo de la cinemática directa.

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}(L - R_i S_i \cos \theta_1) \\ -\frac{1}{2}(L - R_i S_i \cos \theta_1) \\ H - \mathbf{Z1} - R_i S_i \sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ L - R_i S_i \cos \theta_2 \\ H - \mathbf{Z2} - R_i S_i \sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$\mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}(L - R_i S_i \cos \theta_3) \\ -\frac{1}{2}(L - R_i S_i \cos \theta_3) \\ H - \mathbf{Z3} - R_i S_i \sin \theta_3 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Existe una restricción geométrica de distancia constante entre dos juntas esféricas adyacentes $\overline{S_1 S_2} = \overline{S_2 S_3} = \overline{S_3 S_1} = \sqrt{3}l$ que se expresa por la ecuación (4.33).

$$[\mathbf{S}_i - \mathbf{S}_{i+1}]^T [\mathbf{S}_i - \mathbf{S}_{i+1}] - 3l^2 = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.33)$$

Al reemplazar las coordenadas de las ecuaciones (4.30), (4.31) y (4.32) en (4.33) obtenemos la ecuación (4.34) cuyo desarrollo permite resolver el problema cinemático directo.

$$\begin{aligned} e_1 \cos \theta_i \cos \theta_{i+1} + e_2 \sin \theta_i \sin \theta_{i+1} + e_3 \cos \theta_i + e_{4i} \sin \theta_i + e_5 \cos \theta_{i+1} \\ + e_6 \sin \theta_{i+1} + e_{7i} = 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Donde, $e_1 = R_i S_i^2$, $e_2 = -2R_i S_i^2$, $e_3 = -3LR_i S_i$, $e_{4i} = 2k_i R_i S_i$, $e_5 = -3LR_i S_i$, $e_{6i} = 2k_i R_i S_i$, $e_{7i} = 3L^2 + 2R_i S_i^2 + k_i^2 - 3l^2$ y $k_i = Z(i+1) - Zi$, para $i = 1, 2$ y 3 . Al reemplazar las identidades trigonométricas, $\sin \theta_i = \frac{2t_i}{1+t_i^2}$, $\cos \theta_i = \frac{1-t_i^2}{1+t_i^2}$ y $|t_i| = \tan \frac{\theta_i}{2}$ en la ecuación (4.34) se obtienen tres polinomios de cuarto grado en t_1 , t_2 y t_3 de la forma (4.35).

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{1i}t_i^2t_{i+1}^2 + \mathfrak{R}_{2i}t_it_{i+1}^2 + \mathfrak{R}_{3i}t_i^2t_{i+1} + \mathfrak{R}_{4i}t_i^2 + \mathfrak{R}_{5i}t_{i+1}^2 + \mathfrak{R}_6t_it_{i+1} + \mathfrak{R}_{7i}t_i \\ + \mathfrak{R}_{8i}t_{i+1} + \mathfrak{R}_{9i} = 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Donde $\mathfrak{R}_{1i} = e_1 - e_3 - e_5 + e_{7i}$, $\mathfrak{R}_{2i} = 2e_{4i}$, $\mathfrak{R}_{3i} = 2e_{6i}$, $\mathfrak{R}_{4i} = -e_1 - e_3 + e_5 + e_{7i}$, $\mathfrak{R}_{5i} = -e_1 + e_3 - e_5 + e_{7i}$, $\mathfrak{R}_6 = 4e_2$, $\mathfrak{R}_{7i} = 2e_{4i}$, $\mathfrak{R}_{8i} = 2e_{6i}$ y $\mathfrak{R}_{9i} = e_1 + e_3 + e_5 + e_{7i}$. La ecuación (4.35) debe cumplir con la condición $(1 + t_i^2)(1 + t_{i+1}^2) \neq 0$.

Se resuelven los tres polinomios anteriores en t_1 , t_2 y t_3 utilizando el método de eliminación dialítica de Sylvester. Con este método se reduce el sistema de ecuaciones a un polinomio de una variable de grado 16. Para eliminar t_3 se escribe la ecuación (4.35) para $i = 2$ y 3 de la forma (4.36) y (4.37).

$$At_3^2 + Bt_3 + C = 0 \quad (4.36)$$

$$Dt_3^2 + Et_3 + F = 0 \quad (4.37)$$

Donde A , B y C son polinomios de segundo grado en t_2 y D , E y F polinomios de segundo grado en t_1 . Operando $(4.37) \times A - (4.36) \times D$ y $(4.37) \times C - (4.36) \times F$, y reescribiendo las dos ecuaciones en forma matricial se obtiene la ecuación (4.38).

$$\begin{bmatrix} AE - BD & AF - CD \\ CD - AF & CE - BF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

La ecuación (4.38) representa un sistema de dos ecuaciones lineales en t_3 y 1 . La solución se obtiene calculando el determinante de la matriz de coeficientes e igualándola a cero como en la ecuación (4.39).

$$(AE - BD)(CE - BF) + (AF - CD)^2 = 0 \quad (4.39)$$

Para eliminar la variable t_2 se escribe la ecuación (4.39) en la forma de la ecuación (4.40). Donde L , M , N , P y Q son polinomios de cuarto grado en t_1 .

$$Lt_2^4 + Mt_2^3 + Nt_2^2 + Pt_2 + Q = 0 \quad (4.40)$$

Donde L , M , N , P y Q son polinomios de cuarto grado en t_1 que se muestran en el Anexo B. Se escribe la ecuación (4.35) de la forma (4.41). para $i = 1$.

$$Gt_2^2 + Ht_2 + I = 0 \quad (4.41)$$

Donde G , H e I son polinomios de segundo grado en t_1 de la forma G , H e I . Eliminamos la variable desconocida t_2 de las ecuaciones (4.40) y (4.41) operando de la forma $(4.41) \times Lt_2 - (4.40) \times G$ se obtiene la ecuación (4.42).

$$(HL - GM)t_2^3 + (IL - GN)t_2^2 - GPt_2 - GQ = 0 \quad (4.42)$$

Al operar $(4.41) \times (Gt_2 + H) - (4.40) \times (Lt_2^3 + Mt_2^2)$ se obtiene la ecuación (4.43).

$$(GN - LI)t_2^3 + (GP + HN - MI)t_2^2 + (GQ + HP)t_2 + HQ = 0 \quad (4.43)$$

Se multiplica la ecuación (4.41) por t_2 se obtiene la ecuación (4.44).

$$Gt_2^3 + Ht_2^2 + It_2 = 0 \quad (4.44)$$

Las ecuaciones (4.41)-(4.45) pueden considerarse un sistema de cuatro sistemas homogéneos lineales en las cuatro variables t_2^3 , t_2^2 , t_2 y 1. El determinante característico es el de la ecuación (4.45).

$$\begin{bmatrix} HL - GM & LI - GN & -GP & -GQ \\ GN - LI & GP + HN - MI & GQ + HP & HQ \\ G & H & I & 0 \\ 0 & G & H & I \end{bmatrix} = 0 \quad (4.45)$$

El determinante de la ecuación (4.45) se expresa como la ecuación (4.46). Expandiendo la ecuación (4.46) obtenemos un polinomio de grado 8 en t_1^2 .

$$\begin{aligned}
& (HL - GM)(GP + HN - MI)I^2 - (GP)(HQ)G^2 - (GQ)(GN - LI)H^2 \\
& - (HL - GM)(HQ)IG + (GP)(GP + HN - MI)IG = 0
\end{aligned} \tag{4.46}$$

De ello se deduce que hay como máximo ocho pares de soluciones para t_1 , siendo una el valor negativo de la otra. Cuando se obtiene t_1 , se calcula un único valor para t_2 estableciendo el máximo común divisor de primer grado entre las ecuaciones (4.40) y (4.41) a cero y el valor único de t_3 se puede obtener resolviendo la ecuación (4.38). Por último, hay 16 conjuntos de soluciones para θ_1 , θ_2 y θ_3 (Angeles 2014).

Las posiciones de los vectores $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ y $\mathbf{S}_3$ se obtienen reemplazando los valores de θ_i en las ecuaciones (4.30), (4.31) y (4.32). La posición del vector $\mathbf{G}$ que representa el baricentro de la plataforma móvil es el de la ecuación (4.47).

$$\mathbf{G} = \frac{1}{3}(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3) \tag{4.47}$$

Los componentes de la matriz de rotación se expresan mediante las ecuaciones (4.48), (4.49) y (4.50).

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{S}_1 - \mathbf{G}}{l} \tag{4.48}$$

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_3}{\sqrt{3}b} \tag{4.49}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{k} \times \mathbf{m} \tag{4.50}$$

Por lo tanto, los ángulos de Euler α , β y γ puede resolverse considerando las ecuaciones (4.4)-(4.24).

$$\alpha = \arctan\left(\frac{-n_y}{\sqrt{k_y^2 + m_y^2}}\right) \tag{4.51}$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{n_x}{n_y}\right) \quad (4.52)$$

$$\gamma = \arctan\left(\frac{k_y}{m_y}\right) \quad (4.53)$$

Todas las configuraciones posibles de la plataforma móvil pueden ser obtenidas por medio de este enfoque. Sin embargo, es una tarea que requiere una gran cantidad de tiempo y da como resultado algunas soluciones que son despreciables. Por consiguiente, para resolver el problema de posicionamiento cinemático directo se emplea el método numérico iterativo clásico de Newton.

Para una posición dada del mecanismo 3PRS+C, un sistema de tres ecuaciones puede ser escrito en la forma de la ecuación (4.54).

$$f(P_z, \alpha, \beta) = \mathbf{Zi}(P_z, \alpha, \beta) - \mathbf{Zi}_{\text{inicial}} \quad (4.54)$$

Donde $\mathbf{Zi}(P_z, \alpha, \beta)$ es el vector del espacio de coordenadas de las juntas prismáticas de la solución del problema cinemático inverso y $\mathbf{Zi}_{\text{inicial}}$ es el vector del espacio de coordenadas de las juntas que puede ser medido.

Dado un conjunto de $(P_z^n, \alpha^n, \beta^n)$ nombrado, $\mathbf{x}^n$. El método iterativo de Newton está dado por la ecuación (4.55).

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \left[\frac{\partial f(\mathbf{x}^k)}{\partial \mathbf{x}} \right]^{-1} f(\mathbf{x}^k) \quad (4.55)$$

Se puede demostrar que $\frac{\partial f(\mathbf{x}^k)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{x}^k)$, donde $\mathbf{J}$ es la matriz jacobiana del mecanismo. Por lo tanto, la ecuación (4.55) se puede escribir de la forma (4.56).

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - [\mathbf{J}(\mathbf{x}^k)]^{-1}[\mathbf{Zi}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{Zi}_{\text{inicial}}] \quad (4.56)$$

Un ordenador es programado utilizando Matlab para implementar el método iterativo de Newton para los parámetros cinemáticos de la Tabla 4.1. Este cálculo permite conocer el espacio de trabajo de la máquina herramienta y maximizar su utilización.

Por lo tanto, con el análisis cinemático inverso y directo se determina las relaciones entre la punta de la herramienta y los ejes de actuación del sistema de control.

4.4.1. Análisis de velocidades del mecanismo 3PRS+C

Debido a que el avance solo se puede definir para de los ejes en el sistema de control de la máquina herramienta se realiza el análisis de velocidades para:

1. Conocer la velocidad en la punta de la herramienta cuando se han definido los avances en los ejes del sistema de control.
2. Definir que avances son necesarios en los ejes del sistema de control si se desea definir un avance determinado en el extremo de la herramienta de corte.

Este estudio permite conocer la relación entre las velocidades de avance de los ejes del sistema de control y la velocidad en el avance de la punta de la herramienta durante el proceso de mecanizado. Esto permite estimar el tiempo del proceso para una geometría dada y habilita a controlar los avances durante el proceso de corte.

4.4.1.1. Análisis inverso de velocidades

El análisis inverso se realiza para conocer el avance que se debe dar a cada eje del sistema de control $Z1$, $Z2$ y $Z3$ para obtener un avance determinado en el extremo de la herramienta. De esta manera se obtiene una relación entre las velocidades de salida $\dot{\mathbf{o}}_3$ y las de entrada $\dot{Z}i$.

Al expresar la ecuación (4.1) en la forma de la ecuación (4.57) y diferenciar ambos lados se obtiene la expresión de la velocidad en la punta de la herramienta de corte en la ecuación (4.58) (Liping et al. 2016).

$$\mathbf{o}_3 = \mathbf{P}_i + Zi\mathbf{k} + \mathbf{R}_i\mathbf{S}_i + \mathbf{S}_i\mathbf{o}_3 \quad (4.57)$$

$$\mathbf{v}_{o_3} = \dot{Z}i\mathbf{k} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{R}_i\mathbf{S}_i + \boldsymbol{\omega}_{o_3} \times \mathbf{S}_i\mathbf{o}_3 \quad (4.58)$$

Donde $\boldsymbol{\omega}_{o_3}$ es la velocidad angular del cabezal de herramienta y $\boldsymbol{\omega}_i$ es la velocidad angular de cada brazo $\mathbf{R}_i\mathbf{S}_i$ como se muestra en la Figura 4.5. Multiplicando la ecuación (4.58) por el vector unitario de cada brazo $\mathbf{u}_{R_iS_i}$ se obtiene la ecuación (4.59).

$$\mathbf{u}_{R_iS_i} \cdot \mathbf{v}_{o_3} + \boldsymbol{\omega}_{o_3} \cdot (\mathbf{o}_3\mathbf{S}_i \times \mathbf{u}_{R_iS_i}) = \dot{Z}i(\mathbf{u}_{R_iS_i} \cdot \mathbf{k}) \quad (4.59)$$

Si se expresa la ecuación (4.59) en la forma matricial se obtienen las ecuaciones (4.60) y (4.61).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{R_1S_1}^T & (\mathbf{o}_3\mathbf{S}_1 \times \mathbf{u}_{R_1S_1})^T \\ \mathbf{u}_{R_2S_2}^T & (\mathbf{o}_3\mathbf{S}_2 \times \mathbf{u}_{R_2S_2})^T \\ \mathbf{u}_{R_3S_3}^T & (\mathbf{o}_3\mathbf{S}_3 \times \mathbf{u}_{R_3S_3})^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{o_3} \\ \boldsymbol{\omega}_{o_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{R_1S_1} \cdot \mathbf{k} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{u}_{R_2S_2} \cdot \mathbf{k} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{u}_{R_3S_3} \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{Z}1 \\ \dot{Z}2 \\ \dot{Z}3 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

$$\mathbf{J}_x \dot{\mathbf{o}}_3 = \mathbf{J}_h \dot{Z}i \quad (4.61)$$

Donde $\mathbf{J}_x$ es la matriz jacobina del problema cinemático directo y $\mathbf{J}_h$ la matriz jacobiana del problema cinemático inverso. $\dot{\mathbf{o}}_3 = [\mathbf{V}_{o_3} \quad \boldsymbol{\omega}_{o_3}]^T$ es el vector que contiene las velocidades en la punta de la herramienta y $\dot{\mathbf{z}}i = [\dot{z}_1 \quad \dot{z}_2 \quad \dot{z}_3]^T$ es el vector de las velocidades en las juntas prismáticas del mecanismo 3PRS+C. Cuando el mecanismo se encuentra fuera de singularidades, se cumple la ecuación (4.62) que representa la solución para el problema inverso de las velocidades en el mecanismo 3PRS.

$$\dot{\mathbf{z}}i = \mathbf{J}_a \dot{\mathbf{o}}_3 \quad (4.62)$$

Donde $\mathbf{J}_a = \mathbf{J}_h^{-1} \mathbf{J}_x$ es una matriz 3x6. Se debe indicar que los elementos de la velocidad lineal y angular del vector $\dot{\mathbf{o}}_3$ no son todos independientes debido a la movilidad del mecanismo explicada en la sección A.1.1. Las relaciones entre los componentes se pueden observar en la ecuación (4.63).

4.4.1.1.1. Obtención de la matriz Jacobiana del mecanismo 3PRS

La matriz Jacobiana nos permite relacionar las velocidades de entrada y salida del mecanismo para de una forma directa obtener las velocidades para cada instante del proceso de mecanizado. Del análisis cinemático inverso en la sección 4.3.1 se conoce que las variables independientes del mecanismo 3PRS son P_z , α y β . Siendo las variables para el problema de velocidad $\dot{\mathbf{x}} = [\dot{P}_z \quad \dot{\alpha} \quad \dot{\beta}]$, cuando el mecanismo se encuentra alejado de las singularidades se obtiene la ecuación (4.63).

$$\dot{\mathbf{o}}_3 = \mathbf{J}_r \dot{\mathbf{x}} \quad (4.63)$$

Donde $\mathbf{J}_r$ se define por la ecuación (4.64).

$$\mathbf{J}_r = \begin{bmatrix} \frac{\partial o_{3x}}{\partial P_z} & \frac{\partial o_{3x}}{\partial \alpha} & \frac{\partial o_{3x}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial o_{3y}}{\partial P_z} & \frac{\partial o_{3y}}{\partial \alpha} & \frac{\partial o_{3y}}{\partial \beta} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \gamma_b}{\partial P_z} & \frac{\partial \gamma_b}{\partial \alpha} & \frac{\partial \gamma_b}{\partial \beta} \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

De la ecuación (4.62) y la ecuación (4.63) se puede obtener la ecuación (4.65).

$$\dot{\mathbf{Z}}\mathbf{i} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{x}} \quad (4.65)$$

Donde $\mathbf{J} = \mathbf{J}_a \mathbf{J}_r$ es la matriz Jacobiana 3x3 del mecanismo 3PRS que incluye los efectos de las restricciones mecánicas y es llamada la matriz Jacobiana restringida del mecanismo paralelo. Esta matriz permite analizar el espacio de trabajo para la configuración de la máquina herramienta empleada.

4.4.1.2. Análisis directo de velocidades

Utilizando el análisis directo de velocidades se determina la velocidad de la herramienta de corte para unas condiciones de entrada en los pares prismáticos programadas en el sistema de control.

Se multiplica la ecuación (4.58) por un vector perpendicular a cada plano de extremidad $\mathbf{u}_i$ que representa el vector unitario de cada junta rotatoria pasiva se obtiene la ecuación (4.66).

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_{o_3} + \boldsymbol{\omega}_{o_3} \cdot (\mathbf{o}_3 \mathbf{S}_i \times \mathbf{u}_i) = 0 \quad (4.66)$$

La ecuación (4.66) se representa en forma matricial para obtener la ecuación (4.67).

$$\mathbf{J}_g \dot{\mathbf{o}}_3 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (4.67)$$

Donde $\mathbf{J}_g$ se define por la ecuación (4.68).

$$\mathbf{J}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T & (\mathbf{o}_3 \mathbf{S}_1 \times \mathbf{u}_1)^T \\ \mathbf{u}_2^T & (\mathbf{o}_3 \mathbf{S}_2 \times \mathbf{u}_2)^T \\ \mathbf{u}_3^T & (\mathbf{o}_3 \mathbf{S}_3 \times \mathbf{u}_3)^T \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Las ecuaciones (4.61) y (4.67) se representan de forma conjunta y se expresan como la ecuación (4.69).

$$\mathbf{J}_f \dot{\mathbf{o}}_3 = \mathbf{J}_e \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_i \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

Donde $\mathbf{J}_f$ y $\mathbf{J}_e$ se expresan por la ecuación (4.70) y (4.71).

$$\mathbf{J}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_x \\ \mathbf{J}_g \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

$$\mathbf{J}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_h & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

Cuando la ecuación (4.70) es invertible, la ecuación (4.69) se puede escribir en la forma de la ecuación (4.72).

$$\dot{\mathbf{o}}_3 = \mathbf{J}_b \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_i \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

Donde $\mathbf{J}_b = \mathbf{J}_f^{-1} \mathbf{J}_e$. La ecuación (4.72) representa la solución al problema directo de velocidades para el mecanismo paralelo 3PRS.

4.4.2. Singularidades en el mecanismo 3PRS+C

Debido a que el mecanismo paralelo 3PRS que es usado como cabezal de herramienta tiene un rango reducido de movimiento, las configuraciones singulares pueden aparecer durante el funcionamiento del mecanismo en el proceso de corte. Por medio de este análisis es posible asegurar que la máquina herramienta trabaje en un área libre de singularidades.

Estas configuraciones pueden dividirse en dos, singularidades de cinemática inversa y de cinemática directa. Estas singularidades usualmente se encuentran en posiciones que el mecanismo paralelo no puede alcanzar debido a las limitaciones físicas de las juntas esféricas.

La metodología para aproximar las singularidades del mecanismo consiste en el análisis del determinante de las matrices Jacobianas J_x y J_h o el análisis de su rango en el caso de matrices no invertibles, para un número finito de posiciones posibles de la punta de la herramienta (Kao and Zhan 2010). Las singularidades del problema cinemático inverso corresponden a la ecuación (4.73) y las del problema cinemático directo a la ecuación (4.74).

$$\det(J_h) = 0 \quad (4.73)$$

$$\text{rank}(J_x) = 1 \vee \text{rank}(J_x) = 2 \quad (4.74)$$

Las singularidades de la cinemática inversa ocurren cuando el mecanismo alcanza sus límites, J_h no es invertible. En estas posiciones el mecanismo es incapaz de continuar moviéndose hacia la posición indicada y por lo tanto no puede alcanzar esta configuración. Estas singularidades pueden definirse como los límites del espacio de trabajo para el mecanismo 3PRS. En la ecuación (4.60) y (4.73) se aprecia que esto

ocurre cuando uno o más brazos se encuentran perpendiculares a la dirección de cada uno de los actuadores Z_i como se muestra en la Figura 4.14. En esta situación el mecanismo pierde uno o más de sus grados de libertad dependiendo del número de brazos que se posicionan perpendiculares a dicho actuador.

Figura 4.14. Singularidades de la cinemática inversa

Las singularidades de la cinemática directa ocurren cuando la punta de la herramienta de corte alcanza una posición que no se puede controlar por ninguno de los grados de libertad. La ocurrencia de estas singularidades depende de las dimensiones geométricas del mecanismo. Estas singularidades ocurren cuando J_x no es invertible, sin embargo, debido a que J_x no es una matriz cuadrada, las singularidades en la cinemática inversa aparecen cuando esta no tiene rango completo, es decir su rango es igual a 1 o 2. En la ecuación (4.60) se puede apreciar que si $\mathbf{n}_i = \mathbf{o}_3 \mathbf{S}_i \times \mathbf{u}_{R_i S_i}$ representa un vector normal al plano que contiene los puntos $\mathbf{o}_3$, R_i y S_i , las singularidades directas se presentan cuando los tres vectores $\mathbf{n}_i$ son paralelos a la plataforma fija o base del mecanismo 3PRS. Pero J_x no es deficiente en rango incluso si $\mathbf{n}_i$ son linealmente dependientes o si solo uno de los tres vectores

tiene componentes cero (Y. Li and Xu 2007). Si dos o todos los vectores tienen componente cero, $\mathbf{J}_x$ se convierte en singular como se muestra en la ecuación (4.75).

$$\text{rank}(\mathbf{J}_x) = 1 \vee \text{rank}(\mathbf{J}_x) = 2 \quad (4.75)$$

Esta condición implica que las cadenas cinemáticas PRS están alineadas con la plataforma móvil o cabezal de herramienta como se muestra en la Figura 4.15. La proyección de la línea $R_i S_i$ pasa por el centro de la plataforma móvil G produciendo que el mecanismo tenga uno o más grados de libertad que no son controlables, incluso si el mecanismo está bloqueado.

Figura 4.15. Singularidades de la cinemática directa

Existe un tercer tipo de singularidades que se dan únicamente en arreglos especiales y cumplen con las propiedades antes mencionadas para la cinemática directa e inversa, es decir $\mathbf{J}_h$ no es invertible y $\mathbf{J}_x$ no tiene rango completo.

Figura 4.16. $|J_x|$ del PCD para $P_z = 150$ mm.

En la Figura 4.16 y Figura 4.17 se indican los valores de $|J_x|$ y $|J_h|$ para los grados de libertad α , β y para P_z constante y considerando los límites del mecanismo los cuales son $\alpha = [-30^\circ \ 30^\circ]^T$ y $\beta = [-30^\circ \ 30^\circ]^T$. Se puede observar que en el espacio de trabajo restringido no hay singularidades para la cinemática directa o inversa debido a que los valores de $|J_x| \neq 0$ y $|J_h| \neq 0$.

Figura 4.17. $|J_h|$ del PCI para $P_z = 150$ mm.

4.4.3. Análisis de aceleraciones

Las aceleraciones en el mecanismo se obtienen para calcular las fuerzas motrices en los ejes lineales F_{z1} , F_{z2} y F_{z3} . Estas fuerzas permiten alcanzar la trayectoria P definida en el problema cinemático. Para esto, se diferencia la ecuación (4.58) obteniendo la ecuación (4.76) para el punto o_3 en el sistema de referencia R_b .

$$\mathbf{a}_{o_3} = \ddot{z}i\mathbf{k} + \boldsymbol{\alpha}_i \times \mathbf{R}_i\mathbf{S}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{R}_i\mathbf{S}_i) + \boldsymbol{\alpha}_{o_3} \times \mathbf{S}_i\mathbf{o}_3 + \boldsymbol{\omega}_{o_3} \times (\boldsymbol{\omega}_{o_3} \times \mathbf{S}_i\mathbf{o}_3) \quad (4.76)$$

Donde o_3 es la posición de la punta de la herramienta, $\mathbf{R}_i\mathbf{S}_i$ es el vector del i -ésimo brazo, $\mathbf{S}_i\mathbf{o}_3$ es la posición de la junta esférica relativa a la posición de la punta de la herramienta o_3 , $\boldsymbol{\omega}_{o_3}$ es la velocidad angular del cabezal de herramienta y $\boldsymbol{\omega}_i$ es la velocidad angular de cada brazo, $\mathbf{v}_{o_3}$ es la velocidad lineal de la punta de la herramienta, $\mathbf{a}_{o_3}$ y $\boldsymbol{\alpha}_{o_3}$ son la aceleración lineal y angular, respectivamente, del cabezal de herramienta y $\boldsymbol{\alpha}_i$ es la velocidad angular del i -ésimo brazo.

La ecuación (4.77) se obtiene al multiplicar la ecuación (4.76) por el vector unitario $\mathbf{u}_i$ de la dirección de las juntas rotatorias.

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{a}_{o_3} + \boldsymbol{\alpha}_{o_3} \cdot (\mathbf{o}_3\mathbf{S}_i \times \mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_i \cdot (\boldsymbol{\omega}_{o_3} \times (\boldsymbol{\omega}_{o_3} \times \mathbf{S}_i\mathbf{o}_3)) \quad (4.77)$$

La ecuación (4.78) es el resultado de multiplicar la ecuación (4.76) por el vector unitario $\mathbf{u}_{R_iS_i}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{R_iS_i} \cdot \mathbf{a}_{o_3} + \boldsymbol{\alpha}_{o_3} \cdot (\mathbf{o}_3\mathbf{S}_i \times \mathbf{u}_{R_iS_i}) \\ = \ddot{z}i(\mathbf{u}_{R_iS_i} \cdot \mathbf{k}) + \mathbf{u}_{R_iS_i} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{o_3} \times (\boldsymbol{\omega}_{o_3} \times \mathbf{S}_i\mathbf{o}_3)) \\ - |\boldsymbol{\omega}_i|^2(\mathbf{u}_{R_iS_i} \cdot \mathbf{R}_i\mathbf{S}_i) \end{aligned} \quad (4.78)$$

La ecuación (4.79) que relaciona las aceleraciones de entrada en los ejes del sistema de control y las aceleraciones de salida en el extremo de la herramienta de corte se obtiene al expresar de forma matricial las ecuaciones (4.77) y (4.78).

$$\mathbf{H}_x \cdot \ddot{\mathbf{o}}_3 = \mathbf{H}_h \cdot \ddot{\mathbf{Z}}i + \mathbf{C}_1 \quad (4.79)$$

Donde $\mathbf{H}_x$ es la matriz Hessiana del problema directo, $\mathbf{H}_h$ es la matriz Hessiana del problema inverso (Herrero et al. 2018), $\ddot{\mathbf{o}}_3 = [\mathbf{a}_{\mathbf{o}_3} \quad \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{o}_3}]^T$ es el vector que contiene las aceleraciones resultantes en el punto $\mathbf{o}_3$, $\ddot{\mathbf{Z}}i$ es el vector de las aceleraciones motrices y $\mathbf{C}_1$ es el vector que contiene los términos independientes de la ecuación (4.80).

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{R_1 S_1} \cdot (\boldsymbol{\omega}_A \times (\boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{S}_1 \mathbf{A})) - |\boldsymbol{\omega}_1|^2 (\mathbf{u}_{R_1 S_1} \cdot \mathbf{R}_1 \mathbf{S}_1) \\ \mathbf{u}_{R_2 S_2} \cdot (\boldsymbol{\omega}_A \times (\boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{S}_2 \mathbf{A})) - |\boldsymbol{\omega}_2|^2 (\mathbf{u}_{R_2 S_2} \cdot \mathbf{R}_2 \mathbf{S}_2) \\ \mathbf{u}_{R_3 S_3} \cdot (\boldsymbol{\omega}_A \times (\boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{S}_3 \mathbf{A})) - |\boldsymbol{\omega}_3|^2 (\mathbf{u}_{R_3 S_3} \cdot \mathbf{R}_3 \mathbf{S}_3) \\ \mathbf{u}_1 \cdot (\boldsymbol{\omega}_A \times (\boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{S}_1 \mathbf{A})) \\ \mathbf{u}_2 \cdot (\boldsymbol{\omega}_A \times (\boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{S}_2 \mathbf{A})) \\ \mathbf{u}_3 \cdot (\boldsymbol{\omega}_A \times (\boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{S}_3 \mathbf{A})) \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

Posicionamiento de la máquina herramienta

5.1. Análisis de la configuración dinámica

Para resolver las reacciones (fuerzas y momentos) presentes en todas las juntas de la Figura 5.1 se usa el método de Newton Euler (Herrero et al. 2018) a una ecuación de la forma (5.1).

$$\mathbf{Coef} \cdot \mathbf{React} = \mathbf{Ind} \quad (5.1)$$

Donde **Coef** es la matriz de coeficientes que multiplica el vector de fuerzas de reacción en las juntas **React** e **Ind** es el término independiente. Las relaciones para el sistema de la ecuación (5.1) se obtienen analizando los diagramas de cuerpo libre de los brazos de cada cadena PRS y el cabezal de herramienta como se indican en la Figura 5.1.

Figura 5.1. Fuerzas, momentos de reacción y masas en la máquina herramienta 3PRS+XY+C.

La fuerza motriz F_{Zi} aplicada en los pares prismáticos no se indican en la Figura 5.1 debido a que, por el principio de acción y reacción, el valor de esta es igual a la fuerza de reacción en el par rotatorio F_{Ri} .

5.1.1. Análisis del cabezal de herramienta

La suma de las reacciones en el cabezal de la herramienta debe ser igual a la sumatoria de las fuerzas de inercia y la fuerza aplicada a la herramienta durante el proceso de corte como se indica en la ecuación (5.2).

$$\sum \mathbf{F}_{Si} = m_p \mathbf{a}_G - \mathbf{F} \quad (5.2)$$

Donde m_p es la masa del cabezal de herramienta, $\mathbf{a}_G$ es la aceleración lineal de su centro de gravedad y $\mathbf{F}$ es la fuerza total aplicada en la punta de la herramienta durante el proceso de corte. Escribiendo la ecuación vectorial (5.2) para cada componente de la forma de las ecuaciones (5.3), (5.4) y (5.5) obtenemos las primeras relaciones para el sistema de (5.1).

$$F_{S1x} + F_{S2x} + F_{S3x} = m_p a_{Gx} - F_x \quad (5.3)$$

$$F_{S1y} + F_{S2y} + F_{S3y} = m_p a_{Gy} - F_y \quad (5.4)$$

$$F_{S1z} + F_{S2z} + F_{S3z} = m_p a_{Gz} - F_z \quad (5.5)$$

Para calcular la aceleración del centro de gravedad del cabezal de herramienta se utiliza la ecuación (5.6).

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_{o_3} + \boldsymbol{\alpha}_{o_3} \times \mathbf{o}_3 \mathbf{G} + \boldsymbol{\omega}_{o_3} \times (\boldsymbol{\omega}_{o_3} \times \mathbf{o}_3 \mathbf{G}) \quad (5.6)$$

Donde $\mathbf{a}_{o_3}$ y $\boldsymbol{\alpha}_{o_3}$ son la aceleración lineal y angular de la punta de la herramienta respectivamente. $\boldsymbol{\omega}_{o_3}$ es la velocidad angular del cabezal de herramienta y $\mathbf{o}_3 \mathbf{G}$ es el vector de la posición re la punta de herramienta relativa al centro de gravedad $\mathbf{G}$ de la plataforma móvil. Todos los vectores se encuentran en el sistema de referencia base $\mathbf{R}_b$.

La sumatoria de momentos en el centro de gravedad $\mathbf{G}$ se obtiene aplicando el teorema del momento angular como se indica en la ecuación (5.7).

$$\mathbf{M}_G = \mathbf{G} \mathbf{o}_3 \times \mathbf{F} + \sum [\mathbf{G} \mathbf{S}_i \times \mathbf{F}_{Si}] \quad (5.7)$$

Donde $\mathbf{M}_G$ es la sumatoria de los momentos creados por la fuerza aplicada en punta de la herramienta y las fuerzas de reacción en las articulaciones esféricas.

5.1.2. Análisis de los brazos de las cadenas PRS

Al considerar la suma de todas las fuerzas aplicadas en cada brazo, la ecuación (5.8) representa el comportamiento del brazo durante el movimiento del mecanismo. Donde m_r es la masa del brazo R_iS_i y $\mathbf{a}_{G_i}$ es la aceleración lineal del centro de gravedad de cada brazo.

$$\sum [\mathbf{F}_{R_i} - \mathbf{F}_{S_i}] = m_r \cdot \mathbf{a}_{G_i} \quad (5.8)$$

El desarrollo de la ecuación (5.8) utilizando la Figura 5.1 permite obtener las ecuaciones (5.9), (5.10) y (5.11).

$$F_{Rix} - F_{Six} = m_r a_{Gix} \quad (5.9)$$

$$F_{Riy} - F_{Siy} = m_r a_{Giy} \quad (5.10)$$

$$F_{Riz} - F_{Siz} = m_r a_{Giz} \quad (5.11)$$

Para calcular la aceleración del centro de gravedad del cabezal de herramienta se utiliza la ecuación (5.12).

$$\mathbf{a}_{G_i} = \mathbf{a}_{R_i} + \boldsymbol{\alpha}_i \times \mathbf{R}_i \mathbf{G}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{R}_i \mathbf{G}_i) \quad (5.12)$$

Donde $\mathbf{a}_{R_i}$ es la aceleración lineal de la junta rotatoria, $\boldsymbol{\omega}_i$ y $\boldsymbol{\alpha}_i$ son la velocidad y aceleración angular de cada brazo $\mathbf{R}_i \mathbf{S}_i$. $\mathbf{R}_i \mathbf{G}_i$ es el vector de posición relativa de la articulación rotatoria al centro de gravedad $\mathbf{G}_i$ del brazo correspondiente en el sistema de referencia base $\mathbf{R}_b$.

Para calcular el momento resultante en el centro de gravedad de cada brazo $\mathbf{R}_i \mathbf{S}_i$ se utiliza el teorema de momento angular como se indica en la ecuación (5.13).

$$\mathbf{M}_{G_i} = \sum [\mathbf{R}_i \mathbf{G}_i \times (\mathbf{F}_{R_i} - \mathbf{F}_{S_i}) + \mathbf{M}_{R_i}]_{\mathbf{R}_b} = \left[\frac{d\mathbf{H}_{G_i}}{dt} \right]_{\mathbf{R}_b} \quad (5.13)$$

Donde $\sum [\mathbf{R}_i \mathbf{G}_i \times (\mathbf{F}_{R_i} - \mathbf{F}_{S_i}) + \mathbf{M}_{R_i}]_{\mathbf{R}_b}$ es la suma de los momentos en el brazo $\mathbf{R}_i \mathbf{S}_i$ y $\left[\frac{d\mathbf{H}_{G_i}}{dt} \right]_{\mathbf{R}_b}$ es la derivada del momento angular en el sistema de referencia $\mathbf{R}_b$ definido por la ecuación (5.14).

$$\left[\frac{d\mathbf{H}_{G_i}}{dt} \right]_{\mathbf{R}_b} = \mathbf{R}_{Ri} \left[\frac{d\mathbf{H}_{G_i}}{dt} \right]_{x_{Ri} y_{Ri} z_{Ri}} = \mathbf{R}_{Ri} \left[\frac{d(\mathbf{I}_{G_i} \cdot \boldsymbol{\omega}_{G_i})}{dt} \right]_{x_{Ri} y_{Ri} z_{Ri}} \quad (5.14)$$

Donde $\mathbf{I}_{G_i}$ es la matriz de inercia de cada brazo en su centro de gravedad y $\boldsymbol{\omega}_{G_i} = \boldsymbol{\omega}_i$ es su velocidad angular. Ambos valores son relativos al sistema de referencia local de cada cadena cinemática PRS, $(x_{Ri} \ y_{Ri} \ z_{Ri})$ como se muestra en la Figura 5.2. $\mathbf{R}_{Ri}$ es la matriz de rotación que relaciona cada brazo con el sistema de referencia $\mathbf{R}_b$.

Figura 5.2. Parámetros en el análisis dinámico.

Las ecuaciones (5.2), (5.7), (5.8) y (5.13) proveen de 24 ecuaciones con 26 incógnitas. Para resolver el sistema de la ecuación (5.1) se considera las restricciones propias de los pares rotatorios que implica que el momento en la dirección perpendicular al plano de trabajo de cada cadena cinemática y_{Ri} es nulo empleando la ecuación (5.15).

$$[\mathbf{M}_{Ri}]_{\mathbf{R}_b} = \mathbf{R}_{Ri} [\mathbf{M}_{Ri}]_{x_{Ri}y_{Ri}z_{Ri}} \quad (5.15)$$

Donde $\mathbf{M}_{Ri}$ es el momento en la articulación rotatoria que es expresada en los sistemas de referencia $\mathbf{R}_b$ y $(x_{Ri} \ y_{Ri} \ z_{Ri})$.

Los parámetros del mecanismo 3PRS se obtienen del modelo geométrico CAD y se presentan en la Tabla 5.1 donde I_G e I_{Gi} son los momentos de inercia en $\text{kg} \times \text{cm}^2$ obtenidos en el centro de masa y alineados con el sistema de coordenadas R_n .

Tabla 5.1.

Parámetros de la máquina herramienta 3PRS+XY+C para el análisis dinámico.

Parámetro	Descripción	Valor
m_p	Masa del cabezal de herramienta	2.86 kg
m_r	Masa del i-ésimo brazo	0.61 kg
I_G	Matriz de inercia del cabezal de herramienta	$\begin{bmatrix} 45.95 & -0.02 & -0.0 \\ -0.02 & 42.4 & 0.65 \\ -0.00 & 0.65 & 60.0 \end{bmatrix}$
I_{G1}	Matriz de inercia del brazo 1	$\begin{bmatrix} 25.23 & -2.9 & 10.9 \\ -2.9 & 28.7 & -6.2 \\ 10.9 & -6.2 & 8.73 \end{bmatrix}$
I_{G2}	Matriz de inercia del brazo 2	$\begin{bmatrix} 30.42 & -0.0 & -0.06 \\ -0.03 & 23.5 & 12.59 \\ -0.06 & 12.6 & 8.73 \end{bmatrix}$
I_{G3}	Matriz de inercia del brazo 3	$\begin{bmatrix} 25.29 & 2.99 & -10.9 \\ 2.99 & 28.7 & -6.35 \\ -10.8 & -6.3 & 8.73 \end{bmatrix}$

Las principales características que influyen en el error en la posición de la punta de la herramienta son la deflexión de la estructura mecánica cuando esta es sometida a condiciones de corte y la incertidumbre en el posicionamiento de los ejes X , Y y Z .

Las reacciones de la Figura 5.1 son necesarias para calcular la deformación total de la estructura la cual es la suma de todas las deformaciones de los elementos en el ensamblaje de cada cadena cinemática 3PRS. Dentro del rango de movimientos del mecanismo, las propiedades varían de una configuración a otra.

5.1.3. Modelado de la estructura de la máquina herramienta

Los sistemas mecánicos como el de la máquina estudiada, tienen una masa y elasticidad distribuida y como tal poseen un número infinito de grados de libertad. La teoría para tratar este tipo de sistemas analíticamente no está totalmente desarrollada por lo que se recurre generalmente a tratar de forma individual los elementos aislados de un mecanismo y analizar su efecto en el comportamiento de la estructura.

Para establecer la deformación de la estructura en la punta de la herramienta, es necesario conocer la rigidez estática del sistema cuando es sometido a una fuerza total $\mathbf{F}$ en el punto $\mathbf{o}_3$ que representa la punta de la herramienta como se muestra en la Figura 5.3 (Company and Pierrot 2002).

Para cada punto en el espacio de trabajo de la estructura, se calcula la deflexión producida por la fuerza aplicada en cada punto. Esta deflexión produce pequeños desplazamientos en la punta de la herramienta expresados por la ecuación (5.16) la cual afecta directamente la precisión de posicionamiento de la máquina e introduce defectos en las piezas mecanizadas. Para determinar la deflexión en la punta de la herramienta es necesario calcular la matriz de rigidez estática.

$$\begin{bmatrix} F_{cx} \\ F_{cy} \\ F_{cz} \end{bmatrix} = \mathbf{K} \boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

5.1.3.1. Rigidez del mecanismo 3PRS

La evaluación de la rigidez de una máquina herramienta es siempre un problema complejo y se puede realizar mediante dos métodos de modelado de estructuras, análisis de elementos finitos y estudio de los desplazamientos de cada elemento

utilizando hipótesis elástica (Chanal, Duc, and Ray 2006). Dado que en nuestro caso es necesario analizar un gran conjunto de puntos en el espacio de trabajo y se requiere una metodología que permita el menor tiempo de cálculo se elige el segundo enfoque.

Aplicando las características del mecanismo 3PRS al método desarrollado por Svinin et al (Svinin, Hosoe, and Uchiyama 2001) para las plataformas Gough-Stewart (Figura 5.3), la rigidez estructural del mecanismo es obtenida bajo condiciones de estabilidad (5.17) y (5.18). La rigidez de cada elemento debe ser tomada en cuenta para calcular la rigidez estructural (Company and Pierrot 2002).

Las fuerzas actuantes $\mathbf{F}_{zi}$ que se requieren para el cálculo de la matriz de rigidez, son, como se indicó iguales a las fuerzas de reacción en los pares de revolución $\mathbf{F}_{Riz}$ debido al principio de acción y reacción.

$$\mathbf{F} + m_p \mathbf{g} + \sum \mathbf{F}_{Si} = \mathbf{0} \quad (5.17)$$

$$\mathbf{F} \times \mathbf{Go}_3 + \sum [\mathbf{GS}_i \times \mathbf{F}_{Si}] = \mathbf{0} \quad (5.18)$$

Figura 5.3. Modelo de la fuerza de corte actuando en el mecanismo 3PRS.

Escribiendo el balance de momentos de las fuerzas externas en cada brazo con respecto a la junta rotatoria R_i se obtiene la ecuación (5.19).

$$R_i S_i \mathbf{u}_{R_i S_i} \times \mathbf{F}_{S_i} = \frac{m_r R_i S_i}{2} \mathbf{u}_{R_i S_i} \times \mathbf{g} + \mathbf{M}_{R_i} \quad (5.19)$$

Si la fuerza motriz f_i es la proyección de la fuerza interna de actuación $\mathbf{F}_{S_i} - m_r \mathbf{g}$ sobre el eje $\mathbf{u}_{R_i S_i}$ obtenemos la ecuación (5.20).

$$\mathbf{F}_{S_i} \cdot \mathbf{u}_{R_i S_i} = m_r \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}_{R_i S_i} + f_i \quad (5.20)$$

La solución de las ecuaciones (5.19) y (5.20) con relación a $\mathbf{F}_{S_i}$ esta definida por la ecuación (5.21).

$$\mathbf{F}_{S_i} = f_i \mathbf{u}_{R_i S_i} + m_r \mathbf{g} + \frac{S_i}{R_i S_i} \mathbf{u}_{R_i S_i} \times (\mathbf{g} \times \mathbf{u}_{R_i S_i}) + \mathbf{M}_{R_i} \times \mathbf{u}_{R_i S_i} \quad (5.21)$$

Donde el parámetro $s_i = m_r b$ es el momento estático del i -ésimo brazo $R_i S_i$ en su configuración inicial.

La matriz de rigidez relaciona los cambios infinitesimales en las fuerzas $\Delta \mathbf{F}$ y los momentos $\Delta \mathbf{M}$ aplicados en el centro de la plataforma móvil con el desplazamiento lineal resultante $\Delta \mathbf{x}_G$ y rotacional $\boldsymbol{\theta}$ de la base de la herramienta de corte. La matriz de rigidez puede obtenerse mediante la linealización de las ecuaciones estáticas (5.17) y (5.18) donde $\mathbf{M} = \mathbf{F} \times \mathbf{G} \mathbf{o}_3$ resultando las ecuaciones (5.22) y (5.23).

$$\Delta \mathbf{F} = -\sum \Delta \mathbf{F}_{Si} \quad (5.22)$$

$$\Delta \mathbf{M} = -\sum \Delta \mathbf{o}_3 \mathbf{S}_i \times \mathbf{F}_{Si} + \mathbf{o}_3 \mathbf{S}_i \times \Delta \mathbf{F}_{Si} \quad (5.23)$$

Teniendo en cuenta que el diferencial de un vector de distancia $\boldsymbol{\rho}$ que es constante en relación con su cuerpo se define como $\Delta \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\rho}$, la ecuación (5.23) se puede transformar en la ecuación (5.24) (Svinin, Hosoe, and Uchiyama 2001).

$$\Delta \mathbf{M} = \mathbf{K}_{\text{con}} \boldsymbol{\theta} - \sum \mathbf{A} \mathbf{S}_i \times \Delta \mathbf{F}_{Si} \quad (5.24)$$

Donde el término convectivo se representa por la ecuación (5.25).

$$\mathbf{K}_{\text{con}} = \sum \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{F}_{Si}) \boldsymbol{\Omega}^T(\mathbf{o}_3 \mathbf{S}_i) \quad (5.25)$$

Donde $\boldsymbol{\Omega}$ es el operador simétrico oblicuo. Teniendo en cuenta que $\Delta \mathbf{u}_{R_i S_i} = \boldsymbol{\theta}_i \times \mathbf{u}_{R_i S_i}$, donde $\boldsymbol{\theta}_i$ es el vector de la rotación infinitesimal en el i -ésimo brazo, linealizado en la ecuación (5.26).

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{F}_{S_i} = & \Delta f_i \mathbf{u}_{R_i S_i} + \boldsymbol{\theta}_i \times f_i \mathbf{u}_{R_i S_i} - \frac{s_i \Delta R_i S_i}{R_i S_i} \mathbf{u}_{R_i S_i} \times (\mathbf{g} \times \mathbf{u}_{R_i S_i}) \\
& - \frac{s_i}{R_i S_i} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{u}_{R_i S_i}) \boldsymbol{\theta}_i \times \mathbf{u}_{R_i S_i} - \frac{s_i}{R_i S_i} \mathbf{u}_{R_i S_i} [\mathbf{g} \cdot (\boldsymbol{\theta}_i \times \mathbf{u}_{R_i S_i})] \\
& + \Delta \mathbf{M}_{R_i} \times \mathbf{u}_{R_i S_i} + \mathbf{M}_{R_i} \times \Delta \mathbf{u}_{R_i S_i}
\end{aligned} \tag{5.26}$$

A continuación, considerando la relación lineal (5.27).

$$\Delta f_i = -k_i \Delta R_i S_i \tag{5.27}$$

Donde la rigidez activa k_i del movimiento de traslación del i -ésimo brazo es generada por el sistema de control. De este modo, el sistema perturbado (5.22) y (5.23) describe el equilibrio de un cuerpo suspendido elásticamente, precargado con fuerzas internas y externas. Para relacionar $\Delta R_i S_i$ y $\boldsymbol{\theta}_i$ se considera la ecuación de restricción (5.28). Esta relación expresa la coincidencia del punto de contacto del i -ésimo brazo con la punta del i -ésimo brazo bajo desplazamientos infinitesimales. La ecuación (5.29) indica que los brazos no pueden girar alrededor de sí mismos.

$$\boldsymbol{\theta}_i \times R_i S_i \mathbf{u}_{R_i S_i} + \Delta R_i S_i \mathbf{u}_{R_i S_i} = \Delta \mathbf{x}_G + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{o}_3 \mathbf{S}_i \tag{5.28}$$

$$\boldsymbol{\theta}_i \cdot \mathbf{u}_{R_i S_i} = 0 \tag{5.29}$$

Resolviendo (5.28) y (5.29) con relación a $\Delta R_i S_i$ y $\boldsymbol{\theta}_i$ se obtiene las ecuaciones (5.30) y (5.31).

$$\Delta R_i S_i = \mathbf{u}_{R_i S_i} \cdot (\Delta \mathbf{x}_G + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{o}_3 \mathbf{S}_i) \tag{5.30}$$

$$\boldsymbol{\theta}_i = \frac{1}{R_i S_i} \mathbf{u}_{R_i S_i} \times (\Delta \mathbf{x}_G + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{o}_3 \mathbf{S}_i) \tag{5.31}$$

Substituyendo (5.30), (5.31), (5.26) y (5.27) en (5.22) y (5.24) obtenemos la matriz de rigidez $\mathbf{K}$.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_k + \mathbf{K}_g + \mathbf{K}_f \quad (5.32)$$

Estas son las funciones lineales de la rigidez activa k_i , los parámetros s_i , m_r , y las fuerzas motrices f_i , respectivamente.

En la Figura 5.4 los resultados de los cálculos de rigidez del mecanismo son presentados. Se observa que la rigidez máxima se encuentra en el medio del espacio de trabajo y que esta decrece a medida que la punta de la herramienta se desvía de las posiciones centrales. Esto se debe a la combinación de rigideces, la magnitud de $\mathbf{K}_{zz}$ (Figura 5.4a) es el término dominante con el máximo valor de rigidez, mientras tanto $\mathbf{K}_{xx}$ (Figura 5.4b) y $\mathbf{K}_{yy}$ (Figura 5.4c) tienen comportamientos similares pero orientados en sus respectivos ejes. Estos términos penalizan la rigidez en el espacio de trabajo, sin embargo, contrario a $\mathbf{K}_{zz}$ la rigidez aumenta cuando la punta de la herramienta se aleja de las posiciones centrales.

Figura 5.4. Rigidez estática para una altura determinada P_z (a) K_{XX} , (b) K_{YY} , (c) K_{ZZ} .

5.1.4. Incertidumbre de posicionamiento

Debido a las cadenas cinemáticas PRS que unen la actuación en los pares prismáticos Z_i con las coordenadas de la punta de la herramienta O_3 , es necesario vincular estos parámetros para propagar las incertidumbres de posicionamiento desde los ejes actuados a la punta de la herramienta. Las incertidumbres de los ejes lineales Z_i , X y Y son medidas directamente. La incertidumbre del eje C es

considerada como la precisión de posicionamiento del actuador Harmonic Drive® FHA-11C-50. Una compilación de estos valores se muestra en la Tabla 5.2.

De acuerdo con Chen and Kang (G. Chen and Kang 2014), la matriz Jacobiana (5.34) obtenida considerando (5.33), puede usarse directamente en (5.35) para obtener las incertidumbres $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ y Δp_z . Entonces, la incertidumbre $\Delta\mathbf{P}$ de los puntos de la trayectoria $\mathbf{P}$, es calculada usando (4.28)-(4.25) y mostrada en la in Figura 5.5.

$$\begin{bmatrix} \frac{dZ_1}{dt} & \frac{dZ_2}{dt} & \frac{dZ_3}{dt} \end{bmatrix}^T = J \begin{bmatrix} \frac{d\alpha}{dt} & \frac{d\beta}{dt} & \frac{dp_z}{dt} \end{bmatrix}^T \quad (5.33)$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial Z_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial Z_1}{\partial \beta} & \frac{\partial Z_1}{\partial p_z} \\ \frac{\partial Z_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial Z_2}{\partial \beta} & \frac{\partial Z_2}{\partial p_z} \\ \frac{\partial Z_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial Z_3}{\partial \beta} & \frac{\partial Z_3}{\partial p_z} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

$$\Delta Z_i = \left| \frac{\partial Z_i}{\partial \alpha} \right| \Delta\alpha + \left| \frac{\partial Z_i}{\partial \beta} \right| \Delta\beta + \left| \frac{\partial Z_i}{\partial p_z} \right| \Delta p_z \quad i = 1,2,3 \quad (5.35)$$

Tabla 5.2.

Incertidumbre de posicionamiento de los ejes de la máquina herramienta.

Ejes	Incertidumbre	Unidades
ΔZ_1	4.172e-4	[mm]
ΔZ_2	3.603e-4	[mm]
ΔZ_3	4.884e-4	[mm]
ΔX	3.907e-4	[mm]
ΔY	3.229e-4	[mm]
ΔC	4.363e-4	[rad]

Figura 5.5. Incertidumbres $\Delta \mathbf{P}$ de la trayectoria $\mathbf{P}$, (a) ΔP_x (b) ΔP_y (c) ΔP_z .

5.1.5. Compensación del filo de la herramienta de corte

La configuración de la máquina herramienta considera como posición de la punta de la herramienta de corte el origen de un sistema de coordenadas $\mathbf{R}_n$. Sin embargo, dada la variedad de geometrías posibles para las herramientas de filo único, la posición real de la punta de la herramienta no es coincidente con este punto del sistema de referencia. Para mediar esta diferencia se emplea el sistema de medida desarrollado por López-Estrada et al. (2018) que utiliza visión artificial para localizar la punta de la herramienta. Como se observa en la Figura 5.6, las cámaras del sistema se encuentran ubicadas de forma perpendicular a los ejes x_3 y y_3 para obtener estas distancias.

Figura 5.6. Configuración del sistema de stereo visión, a) Modelo CAD del sistema diseñado, b) Sistema real montado en la máquina herramienta.

Este sistema permite localizar y medir la posición de la punta de herramienta con una precisión de $\pm 3 \mu\text{m}$ en el sistema de referencia R_n como se muestra en la Figura 5.7. Con esta información, la posición teórica es corregida a la posición real del filo de corte para cualquier herramienta de filo único.

Figura 5.7. Medición de la posición de la punta de la herramienta de corte (Δ_x , Δ_y) en el sistema de referencia R_n .

La desviación de la posición entre el filo de corte y el eje z_3 de la máquina herramienta debe ser considerado para evitar errores en la trayectoria de corte inducidos por esta diferencia.

Para realizar las correcciones adecuadas en cada uno de los ejes del dispositivo, es necesario medir la desviación relativa a los planos de herramienta R_n en una

posición inicial en el eje C . Estos valores se determinan como Δ_x , Δ_y que permiten calcular la orientación inicial del filo de corte $\Delta\theta$ mediante la ecuación (5.36), y se representan en la Figura 5.8. Para mantener el filo tangente a la trayectoria P durante el proceso de corte, es necesario corregir los desplazamientos generados por el movimiento de la punta de la herramienta cuando el eje C gira de acuerdo con las ecuaciones (5.39) y (5.40). Estos desplazamientos corresponden a los movimientos de un círculo de radio r_Δ con una posición inicial para el filo de corte ϕ , donde γ es el ángulo de Euler en z_1 expresado por la ecuación (5.37).

$$\Delta\theta = \text{atan}\left(\frac{\Delta_x}{\Delta_y}\right) \quad (5.36)$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \Delta\theta + \gamma \quad (5.37)$$

$$r_\Delta = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2} \quad (5.38)$$

$$\delta_{xr} = r_\Delta \cos(\phi) \quad (5.39)$$

$$\delta_{yr} = r_\Delta \sin(\phi) \quad (5.40)$$

Figura 5.8. Esquema de la trayectoria y rotación de la herramienta de corte.

Aplicando la matriz de rotación $R_{z_1x_1y_1}$ al vector de distancia a la posición real de la punta de la herramienta se obtiene este vector en el sistema R_b utilizando la ecuación (5.41).

$$\begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix}_{R_b} = R \begin{bmatrix} \delta_{xr} \\ \delta_{yr} \\ 0 \end{bmatrix}_{R_n} \quad (5.41)$$

Por lo tanto, las correcciones necesarias que deben realizarse en cada punto considerando la posición real de la punta de la herramienta están expresadas por las ecuaciones (5.42), (5.43) y (5.44) para las nuevas posiciones de los ejes X , Y y Zi de la máquina herramienta (López-Estrada, Fajardo-Pruna, Sánchez-González, Pérez, Fernández-Robles, et al. 2018).

$$X_p = X + \delta_x \quad (5.42)$$

$$Y_p = Y + \delta_y \quad (5.43)$$

$$Zi_p = Zi + \delta_z \quad (5.44)$$

5.2. Movimiento del mecanismo 3PRS+XY+C

El espacio de trabajo de cada mecanismo está limitado por sus características mecánicas, los límites de carrera de cada elemento actuado y las restricciones de las juntas esféricas empleadas en el mecanismo 3PRS+XY+C. En la Figura 5.9 se emplea una altura constante, pero si consideramos el recorrido posible de los pares cinemáticos lineales de las cadenas PRS, el resultado es un espacio de área igual a la de la Figura 5.11 y de altura 220 mm.

Para la mesa X-Y se considera el recorrido de cada eje, para la máquina disponible cada eje tiene un recorrido absoluto de 100mm, por lo que el espacio de trabajo de la mesa X-Y el sistema R_b está definido por el cuadrilátero inscrito entre las coordenadas $(-50, 50)$, $(50, 50)$, $(50, -50)$, $(-50, -50)$.

Empleando la cinemática inversa se puede determinar las posiciones de cada uno de los pares cinemáticos lineales requeridos para desarrollar una geometría circular de 70 [mm] de diámetro en la cual la herramienta siempre se encuentra en una dirección perpendicular a la superficie mecanizada como se muestra en la Figura 5.9a, calculando los parámetros α , β , A_z (Figura 5.9b) necesarios para obtener la trayectoria deseada (Figura 5.9c) y sobre la cual se aplica una fuerza de 100 [N] tangente a la trayectoria en el plano X-Y como se observa en la Figura 5.9d.

Figura 5.9. Trayectoria

Debido a la configuración del mecanismo, existen tres puntos de singularidades correspondientes a las inversiones del movimiento que se muestran en la Figura 5.10.

Estos puntos corresponden con la alineación del brazo de conexión con el plano de la plataforma móvil. De izquierda a derecha los puntos indicados corresponden a las cadenas 3, 1 y 2 respectivamente. Estas condiciones se consideran críticas durante el funcionamiento del mecanismo.

Figura 5.10. Aceleración de la Punta de la Herramienta

La punta de la herramienta realiza la trayectoria indicada en la Figura 5.11, como se indicó en la cinemática la mesa XY debe compensar los desplazamientos de la herramienta o_{3x} y o_{3y} para obtener la forma de la Figura 5.9c que corresponde a los puntos $P = [P_x, P_y, P_z, \alpha, \beta, \gamma]^T$ requeridos en cada instante.

Figura 5.11. Desplazamientos o_{3x} y o_{3y} .

Por lo tanto, con el análisis presentado se conoce los parámetros cinemáticos y dinámicos de la máquina herramienta durante el proceso de corte.

Resultados Experimentales

6.1. Ensayos de posicionamiento y orientación

Para validar la funcionalidad de la máquina, los resultados empíricos son comparados con los resultados de las simulaciones, considerando la cinemática de la máquina herramienta y las características del modelo de corte. La primera trayectoria de mecanizado consiste en un conjunto de trayectorias lineales para micro corte en la pieza de trabajo de la Figura 6.1, cada una con una inclinación específica relativa al plano XY. La herramienta de corte se mantiene perpendicular, relativa a la trayectoria de corte en cada superficie de mecanizado. El objetivo es comparar las fuerzas obtenidas durante el proceso de mecanizado con las simuladas en el modelo de corte en las mismas condiciones de mecanizado.

Figura 6.1. Diferentes inclinaciones del cabezal de herramienta 3PRS para validar el modelo de corte.

El área de corte varía de $50 \times 50 \mu\text{m}$ a $5 \times 5 \mu\text{m}$. Este intervalo cubre un amplio rango de posibles profundidades y espesores de corte en la práctica de un proceso de mecanizado.

Para cada orientación de la herramienta las fuerzas de corte tienen un comportamiento similar como se puede apreciar en la Figura 6.2. La diferencia en magnitud es debida al cambio en el área de corte. Los datos experimentales son medidos en el sistema de referencia R_n . El modelo (3.1) se corresponde adecuadamente con el comportamiento de los datos empíricos. Esto valida ambos, la precisión en el posicionamiento angular de la herramienta y la funcionalidad del modelo desarrollado.

Figura 6.2. Comparación de fuerzas, empírica (línea sólida) y predicha (línea entrecortada). A= 50x50 μm , B= 40x40 μm , C= 30x30 μm , D= 20x20 μm , E= 10x10 μm , F= 5x5 μm .

Como elemento integral del análisis de la máquina herramienta, la planificación de las trayectorias de mecanizado determina cuales geometrías son viables para ser producidas por el dispositivo. Las limitaciones en los ángulos α y β para la herramienta de corte relativos a la superficie a mecanizar deben ser consideradas como se indica en el Capítulo 3.

Diferentes trayectorias pueden producir la misma geometría, pero no todas ellas toman ventaja de las capacidades de la máquina. Por lo tanto, es importante planificar trayectorias donde las condiciones óptimas para un corte de dilo único puedan ser aplicadas. Cómo se muestra en la Figura 6.3a, la trayectoria usada para evaluar las capacidades de la máquina herramienta está formada por un segmento lineal (puntos

1 a 2) con una inclinación de 50° , un arco (puntos 2 a 4) con 0.5 mm de radio, una sección horizontal (puntos 4 a 5) de 0.319 mm, un segundo arco (puntos 5 a 6) de con radio 0.5 mm y finalmente, un segmento (puntos 6 a 7) con 150° de inclinación. El propósito de dichas trayectorias de corte es probar las diferentes zonas de corte, enfocándose en las zonas óptimas y no óptima. El bloque de pruebas bruto tiene un volumen de $2 \times 2 \times 1$ mm, por lo tanto, la trayectoria planificada considera la entrada y salida de la herramienta de corte.

La orientación de la herramienta cambia durante la trayectoria de mecanizado como se muestra en la Figura 6.3b. Desde el punto 1 al punto 3 el eje longitudinal de la herramienta se mantiene a 20° en relación con la dirección normal de la trayectoria de corte. Desde el punto 3 al 4 el Angulo cambia desde 20° a 0° y desde el punto 4 al punto 7, la inclinación se mantiene a 0° . Esto se realiza con el propósito de probar el modelo y el mecanizado en tres condiciones, en corte no óptimo, en la transición de corte no óptimo a corte óptimo y en corte óptimo como se aprecia en la Figura 6.4.

(a)

Figura 6.3. (a) Segmentos de trayectoria en el plano XZ de la estrategia de mecanizado analizada. (b) Esquema de la estrategia de corte y la inclinación relativa de la herramienta con la superficie mecanizada.

Usando la trayectoria de la Figura 6.3b con una profundidad de corte de $50\ \mu\text{m}$ y un ancho de $10\ \mu\text{m}$ como condiciones de corte, se obtiene la simulación del proceso de mecanizado. Las fuerzas esperadas se calculan usando el modelo del Capítulo 3.

Figura 6.4. Fuerzas de corte experimentales obtenidas en la estrategia de corte analizada (puntos) comparadas con las fuerzas simuladas en las mismas condiciones (líneas) usando el modelo de corte para herramienta de filo único.

Las fuerzas esperadas siguen, ambas, el cambio de inclinación que está presente en la trayectoria planificada y el comportamiento basado en las condiciones de mecanizado. Las desviaciones son un resultado probable de los fenómenos físicos característicos del micro corte como la penetración (ploughing).

6.2. Deflexión en la punta de la herramienta y cuantificación de los defectos de posicionamiento

Para calcular las deformaciones de la ecuación (5.16) es necesario transformar $[\mathbf{F}_c]_{R_n}$ al sistema de referencia fijo $[\mathbf{F}_c]_{R_b}$ usando la matriz de rotación $\mathbf{R}$ (6.1). Las fuerzas de actuación $\mathbf{F}_{Zi}$ deben ser calculadas para obtener la rigidez estática. Entonces, la deflexión en la punta de la herramienta para la trayectoria realizada puede ser calculada.

$$[\mathbf{F}_c]_{R_b} = \mathbf{R}[\mathbf{F}_c]_{R_n} \quad (6.1)$$

Figura 6.5. Fuerzas F_{Zi} requeridas en los ejes lineales Zi durante el proceso de corte.

La variación en la posición real de la punta de la herramienta debida a la rigidez estática de la estructura es calculada mediante la ecuación (6.1) considerando la herramienta de corte como un cuerpo rígido en un proceso de corte con herramienta de filo único.

Figura 6.6. Esquema de la variación entre la posición real y teórica de la punta de la herramienta.

Considerando una posición teórica de la punta de la herramienta, esta tiene un sistema de referencia local solidario R_n $O_3(X_3, Y_3, Z_3)$. El sistema de referencia R_n , $O_{3s}(X_{3s}, Y_{3s}, Z_{3s})$ se encuentra en la punta de herramienta desplazada como se aprecia en la Figura 6.6. Este método considera la evolución de la deflexión de la estructura de la máquina herramienta a lo largo del proceso de mecanizado el cual influencia la orientación del eje de la herramienta de corte. El valor del error de posicionamiento es la distancia entre cada punto calculado para la posición teórica y la posición desplazada. Las simulaciones de las deformaciones del proceso de mecanizado en la máquina herramienta 3PRS+XY+C que se analizan son obtenidas usando la aproximación del modelo del Capítulo 3 mostrando los siguientes resultados para la deflexión en la punta de la herramienta son inferiores a $1.4 \mu\text{m}$ para Z_1 y $1.3 \mu\text{m}$ para X_1 y Y_1 cómo se observa en la Figura 6.7.

Figura 6.7. Errores teóricos en la trayectoria de la punta de la herramienta.

Esta simulación determina la deformación de la punta de la herramienta resultante por la estructura de la máquina herramienta que puede ser trasladada a errores en la superficie de mecanizada. El factor más importante observado es el error de posicionamiento. Sin embargo, estos defectos no son constantes en cada punto del espacio de trabajo.

Para comparar los resultados de la superficie de mecanizado, la misma trayectoria es empleada sin orientar la herramienta perpendicular a ella (la herramienta se mantiene perpendicular al plano x_1y_1).

Figura 6.8. Medidas de la trayectoria mecanizada usando un microscopio DINOLITE® AM7515MZT.

La geometría resultante es medida usando un microscopio (Figura 6.8) y los valores se indican en la Tabla 6.1. Considerando la alta rigidez de la estructura 3PRS y su baja incertidumbre de posicionamiento, los errores se encuentran dentro del margen de error de la simulación. Además, en el ensayo de rugosidad (Figura 6.10) los valores mostrados se encuentran entre $0.2\ \mu\text{m}$ y $0.36\ \mu\text{m}$ el cual es competitivo con taladrado, torneado o fresado (Kohser and Black 2012).

Tabla 6.1.

Medidas del ensayo de posicionamiento

Feature	Nominal	Measured	Variation
Angle 1-2	50°	50.042°	0.042°
Arc 2-4	0.5 mm	0.502 mm	0.002 mm
Line 4-5	0.319 mm	0.318 mm	0.001 mm
Arc 5-6	0.5 mm	0.504 mm	0.004 mm
Angle 6-7	30°	30.394°	0.394°

Figura 6.9. Mecanizado de la geometría de prueba, la línea azul indica la trayectoria programada (a) vista superior de la superficie orientando la herramienta de corte (b) con la herramienta perpendicular al plano x_1y_1 .

Como se muestra en la Figura 6.9b, el posicionamiento de la herramienta perpendicular a la trayectoria de corte asegura un mejor acabado superficial incluso

en las secciones no óptimas debido a que se mantienen las mejores condiciones de corte. La superficie de la Figura 6.9c muestra que cuando la herramienta se mantiene perpendicular al plano x_1y_1 el resultado es deficiente debido al deslizamiento y penetración de la herramienta en el material a mecanizar.

Figura 6.10. Rugosidad obtenida en la pieza mecanizada.

7.1. Conclusiones de la tesis

En este trabajo se ha presentado un análisis teórico experimental de la influencia del comportamiento de una máquina herramienta de Cinemática Paralela en los procesos de micromecanizado de filo único.

El análisis teórico del comportamiento de la máquina herramienta se realizó utilizando simulaciones numéricas del proceso de corte y de los modelos cinemático y dinámicos de la máquina herramienta determinando que tanto el proceso propuesto de mecanizado y la máquina herramienta permiten operaciones de manera eficiente.

El modelo para el cálculo de la fuerza en el proceso de mecanizado considera los parámetros geométricos de la herramienta de corte y la sección de viruta. Este modelo permite calcular las fuerzas en la punta de la herramienta utilizando la presión específica de corte y con esta información analizar su influencia en la estructura cinemática paralela cada instante de la trayectoria durante el proceso de corte.

El modelo cinemático y dinámico de la máquina herramienta permite analizar la influencia del posicionamiento de la punta de la herramienta durante el proceso, así

como los requerimientos de corrección en la trayectoria inducidos por la geometría de la herramienta de corte. De la misma manera, nos habilita a estudiar la idoneidad de la estrategia de mecanizado seleccionada en relación con las características de la máquina herramienta (avance de los ejes, avance de la punta de la herramienta, fuerzas motrices).

Se desarrolló y utilizó un sistema de adquisición de datos empleando la plataforma LabVIEW que permite adquirir señales simultáneas de fuerza en el sistema de referencia de la pieza de trabajo y de fuerza y momento en el sistema de referencia de la herramienta de corte.

Tanto las simulaciones numéricas, como los ensayos experimentales realizados durante este trabajo permiten extraer las siguientes conclusiones:

1. Se ha establecido un proceso de mecanizado con herramienta de filo único empleando una máquina híbrida de 6GDL en configuración cinemática serie-paralela.
2. Se ha desarrollado un modelo para el proceso de micro mecanizado con una herramienta de filo único considerando los ángulos de corte durante el proceso. Con este modelo, es posible representar con precisión el proceso de micromecanizado para anchos de corte por debajo de 3 μm permitiendo la estimación precisa de las fuerzas de corte resultantes, que influyen en la máquina herramienta.
3. El modelo de fuerzas realizado no considera de forma separada los efectos del radio de punta de la herramienta, la penetración, fricción. Se analizó el límite hasta el cual el modelo de corte convencional es aplicado en un proceso de micromecanizado.

4. El modelo de la máquina herramienta puede determinar la influencia de las deformaciones de la máquina herramienta sobre la precisión del trabajo. Se ha demostrado que estas deformaciones tienen poca influencia en la precisión, gracias a la configuración y diseño de la máquina propuesta.
5. Las fuerzas obtenidas del modelo son representativas de los valores obtenidos con el método empírico, y se ha demostrado que la técnica de mecanizado y la planificación de la trayectoria de la herramienta son muy importantes cuando se utiliza este innovador método de micro corte de un solo filo.
6. Este proceso representa una alternativa ventajosa en comparación con otros procesos de micro corte, principalmente debido a la geometría simple de la herramienta.
7. Las estrategias de mecanizado se definen en relación con las características del proceso de mecanizado y el comportamiento cinemático de la máquina. Estas estrategias determinan las zonas que se pueden mecanizar de manera óptima. Para que esto suceda, ha sido necesario determinar los ángulos para la orientación de la herramienta a lo largo de la trayectoria de corte y los valores de profundidad y ancho de corte.
8. La precisión de la trayectoria de la herramienta está influenciada por la incertidumbre del posicionamiento de los 6 grados de libertad y la rigidez de la máquina herramienta. Esta rigidez depende de la posición y la orientación de la herramienta de corte en el espacio de trabajo.
9. Se ha desarrollado una metodología para estimar “a priori” errores de mecanizado debido a las fuerzas de corte y a los errores de posicionamiento que incluye el modelado de la máquina-herramienta y las fuerzas del proceso de corte.

10. En general, los resultados prueban la viabilidad de la máquina y el modelo de corte de filo único como una alternativa precisa y competitiva a las tecnologías actuales de micro mecanizado. El uso de un CNC comercial facilita la integración con los estándares, procedimientos y técnicas actuales de la industria.

7.2. Trabajos futuros

Como continuación de los desarrollos realizados en esta tesis y del conocimiento tecnológico adquirido, las líneas principales de investigación de mayor interés a desarrollar serían las siguientes:

- Modelado del comportamiento de la precisión del posicionamiento conjunto de todos los ejes de la máquina.
- Compensación de los errores inducidos y aumento de la precisión de trabajo de la máquina herramienta mediante la incorporación de actuadores piezoeléctricos.
- Análisis de la influencia del efecto filo en las fuerzas de mecanizado para el proceso de filo único.

Estos estudios permitirían profundizar el conocimiento de aspectos como la influencia del desgaste de la herramienta, la evaluación precisa de las diferentes estrategias de mecanizado y la optimización de las condiciones de corte.

Máquina Herramienta

A.1. Configuración de la máquina herramienta

La máquina herramienta para el proceso de corte con filo único descrito en el Capítulo 3 está formada por dos mecanismos que caracterizan su movilidad. El cabezal de herramienta está montado sobre un mecanismo híbrido que combina una cadena cinemática cerrada y una cadena cinemática abierta. Adicionalmente una cadena cinemática abierta que combina dos desplazamientos lineales es empleada para aumentar la movilidad de la máquina en su conjunto.

A esta disposición de elementos denominamos máquina herramienta híbrida 3PRS+XY+C (Figura A.1). Utiliza una base o bancada compuesta de bloques de granito para maximizar la rigidez, estabilidad térmica y dimensional del conjunto. Sobre ella, en el plano horizontal van montados dos posicionadores lineales (cadena cinemática abierta) para configurar el movimiento bidimensional XY en el plano. Este conjunto forma la mesa-XY. Perpendicular a la mesa XY se encuentra el mecanismo híbrido 3PRS+C formado por un mecanismo paralelo 3PRS y un lazo abierto que actúa sobre un eje de rotación en la plataforma móvil del mecanismo paralelo que

denominaremos C . El cabezal de herramienta montado en el mecanismo 3PRS tiene 3 grados de libertad que son, dos rotaciones y una traslación. Este mecanismo proveerá las coordenadas α , β , P_z a la herramienta de corte, donde α , β son los ángulos de Euler relativos a los ejes generales o de referencia x_1 e y_1 . P_z es el desplazamiento lineal en la dirección z_1 del cabezal de herramienta. La mesa XY y la actuación en C terminaran de definir en el espacio de trabajo la posición requerida por la punta de la herramienta de corte para la trayectoria requerida en la estrategia de mecanizado $\mathbf{P} = [P_x \ P_y \ P_z \ \alpha \ \beta \ \gamma]$.

Figura A.1. Modelo CAD de la máquina herramienta

A.1.1. Movilidad de la máquina herramienta

La movilidad es el principal parámetro estructural de un mecanismo y también uno de los conceptos fundamentales en su modelado cinemático y dinámico. La movilidad o “*grado de libertad (GDL)*” representa el número de coordenadas independientes necesarias para definir la configuración de una cadena cinemática. La movilidad es útil para verificar que una cadena cinemática sea un mecanismo ($GDL > 0$), para indicar el número de parámetros independientes que se manejarán en los modelos y para determinar el número de entradas necesarias que serán actuadas para manipular el mecanismo.

Dos tipos de movilidades son posibles calcular, instantánea y global. La movilidad global tiene un valor único para un mecanismo dado que caracteriza el mecanismo en todas las configuraciones excepto en las singulares. La movilidad instantánea es un parámetro local que caracteriza el mecanismo en una configuración dada, incluidas las singulares. En una configuración singular, la movilidad instantánea es diferente de la movilidad global.

La movilidad global se calcula empleando criterios de movilidad mientras que la movilidad instantánea se obtiene del conjunto de ecuaciones cinemáticas.

El criterio de movilidad es una relación explícita entre la movilidad y los parámetros estructurales del mecanismo: el número de enlaces y articulaciones, los parámetros de movimiento/restricción de articulaciones y mecanismos (Gogu 2005).

Por lo general, los parámetros estructurales se determinan fácilmente inspeccionando la configuración de los elementos de las cadenas cinemáticas sin

necesidad de desarrollar el conjunto de ecuaciones que por otro lado son necesarias en el cálculo de la movilidad instantánea.

Para el estudio de la máquina herramienta 3PRS+XY+C esta se divide en dos mecanismos que se analizan independientemente (Figura A.1), un mecanismo híbrido 3PRS+C y un mecanismo XY. El mecanismo 3PRS+C es una cadena cinemática híbrida formada por un mecanismo paralelo 3PRS (eslabones 1-8) y un par de rotación que conecta los eslabones 8 y 9 en una cadena abierta (Figura A.2a). El segundo mecanismo es una cadena cinemática abierta (Figura A.2b) con los pares cinemáticos de tipo prismático perpendiculares entre sí, de forma que coincidan con los ejes x_1 e y_1 del sistema general de coordenadas.

Figura A.2. Máquina-herramienta 3PRS+XY+C (a) Cadenas cinemáticas (b) Grafos asociados

Los grados de libertad de cada mecanismo y de la máquina herramienta en conjunto se calculan usando el criterio general de Grübler-Kutzbach (Y. Li and Xu 2007) para el análisis de la movilidad utilizando la ecuación (A.1).

$$GDL = \Lambda(n - j - 1) + \sum_{i=1}^3 f_i \quad (A.1)$$

Dónde Λ representa el orden del espacio de trabajo, n es el número de eslabones, j es el número de pares cinemáticos y f_i indica los grados de libertad del i -ésimo par como se muestra en la Tabla A.1.

Para la máquina 3PRS+XY+C, $\Lambda = 6$ por el espacio de trabajo tridimensional, $n = 11$ (el eslabón base 1 es común a los mecanismos 3PRS+C y XY), $j = 12$ (5P+4R+3S) y $f_i = 18$. Por lo tanto, la máquina herramienta posee 6 GDL como resultado de la ecuación (A.2). La movilidad de cada mecanismo se analiza en las secciones A.1.1.1 (3PRS+C) y A.1.1.2 (XY).

$$GDL = 6(11 - 12 - 1) + 18 = 6 \quad (A.2)$$

Tabla A.1.

Grados de libertad de los pares cinemáticos utilizados.

<i>Tipo de Junta</i>	<i>GDL</i>
Prismática (P)	1
Revolución (R)	1
Esférica (S)	3

A.1.1.1. GDL del mecanismo 3PRS+C

De la Figura A.2, las características del mecanismo 3PRS son, 1 plataforma fija o base (Figura A.3), una plataforma móvil o cabezal de herramienta (eslabón 8) y tres

lazos cinemáticos idénticos PRS formados por tres eslabones cada uno (1-2-5, 1-3-6, 1-4-7) (Ruiz et al. 2016). Estos pares de eslabones están unidos por un par prismático, un par rotatorio y un par esférico a la plataforma fija por un extremo y a la plataforma móvil (cabezal de herramienta) por el otro. Adicionalmente, conectado a la plataforma móvil se encuentra el eslabón 9 que es actuado directamente por una junta rotacional y corresponde con la herramienta de corte para el proceso indicado en el Capítulo 3.

Los mecanismos se unen a la base de la máquina herramienta a través de una estructura que asegura rigidez al conjunto ensamblado. Esta estructura está formada por los elementos mostrados en la Figura A.3. La plataforma móvil está compuesta de tres placas unidas por medio de conexiones angulares que aseguran la disposición del mecanismo 3PRS+C, esta se une a la base de granito mediante escuadra atornillada al mismo.

Figura A.3. Base de la máquina herramienta 3PRS+XY+C (eslabón 1)

Reemplazando los datos correspondientes en la ecuación (A.1), $\Lambda = 6$ por el espacio de trabajo tridimensional, $n = 9$, $j = 10$ (3P+4R+3S) y $f_i = 16$ asignando los GDL correspondientes a cada par cinemático. Por lo tanto, los GDL del mecanismo se expresan por la ecuación (A.3).

$$GDL = 6(9 - 10 - 1) + 16 = 4 \quad (A.3)$$

En el mecanismo 3PRS las juntas prismáticas (P_1, P_2, P_3), son los elementos actuados mientras que las juntas rotatorias y esféricas son pasivas sumando el GDL de la rotación del eslabón 9 (R_4) se obtienen los 4 movimientos que definen completamente la posición y orientación de la herramienta de corte. Como consecuencia, la plataforma móvil o cabezal de herramienta del mecanismo 3PRS+C tiene 4GDL que son dos rotaciones en los ejes x_1 e y_1 del sistema general (plataforma fija), una rotación en el eje z_3 de la plataforma móvil y un desplazamiento en el eje z_1 del sistema general. De estos GDL, tres son modificados indirectamente por medio de los pares prismáticos P_1, P_2, P_3 . Únicamente el par R_4 actúa directamente a su GDL correspondiente.

A.1.1.2. GDL del mecanismo XY

Esta cadena cinemática abierta tiene las actuaciones aplicadas directamente en cada uno de sus GDL que coinciden con los pares prismáticos empleados (Figura A.2b). Reemplazando sus características en el criterio de Grübler-Kutzbach obtenemos los grados de libertad correspondientes a la ecuación (A.4). $\Lambda = 3$ por el espacio bidimensional de la mesa-XY, $n = 3$, $j = 2$ (2P) y $f_i = 2$ asignando los GDL correspondientes a cada par cinemático.

$$GDL = 3(3 - 2 - 1) + 2 = 2 \quad (A.4)$$

En la mesa XY las juntas prismáticas son los elementos actuados. En consecuencia, el mecanismo tiene dos GDL que son traslaciones en los ejes x_1 e y_1 del sistema general. Estos grados de libertad coinciden con los movimientos que no pueden ser alcanzados por el sistema 3PRS+C.

A.2. Descripción de los elementos del mecanismo 3PRS+C

Es esta sección describiremos los tres lazos PRS y el cabezal de herramienta del mecanismo 3PRS+C que se muestran en la Figura A.4. Finalmente, el conjunto motriz que acciona los pares primaticos de la cadena cinemática PRS y el sistema de control de tipo CNC es presentado.

Figura A.4. (a) Modelo CAD del Mecanismo 3PRS+C (b) Dimensiones del mecanismo

A.2.1. Cadena cinemática PRS

Cada cadena cinemática de la Figura A.4 está formada por tres eslabones y tres pares cinemáticos. El primer eslabón de cada cadena (eslabón 1) se encuentra fijo y es utilizado como bastidor sobre el que se ensambla el conjunto motriz y el par prismático (Figura A.5).

Figura A.5. Eslabón 1 del Mecanismo 3PRS+C

El par prismático es una guía de movimiento lineal IKO LRX-12-R300-C2-T1-H que asegura un alto desempeño y precisión de posicionamiento gracias a su sistema de desplazamiento por rodamientos. Sus propiedades se indican en la Tabla A.2.

Tabla A.2.

Propiedades mecánicas de la guía IKO LRX-12-R300-C2-T1-H (IKO-THOMPSON LTD 2012).

Capacidad de carga dinámica básica	Capacidad de carga estática básica	Capacidad de par estático		
		T_0	T_x	T_y
N	N	N · m	N · m	N · m
5890	10400	78.7	343	343

El conjunto motriz está formado por un servo motor de corriente alterna Mitsubishi HF-MP-13 (Tabla A.3), un acople motriz flexible RULAND PCMR25-8-6-A (Tabla A.4) y un husillo NSK PSS1205N1D0421 de 5 mm/rev de avance (Tabla A.5) con sus correspondientes soportes WBK08-01B (lado de accionamiento) y WBK08S-01B (opuesto al accionamiento) ambos con rodamientos NSK 606ZZ. Para el control CNC que se implementará se montan tres sensores inductivos OMRON E2B-S08KN04-WP-B1 (OMRON 2013) en cada componente del eslabón 1 de cada lazo PRS que permitirán identificar los finales de carrera de los pares prismáticos y su correspondiente origen de movimiento (Posición “0”).

Tabla A.3.

Propiedades mecánicas del servo motor Mitsubishi HF-MP-13 (Mitsubishi 2012).

Capacidad de la instalación de energía	Servicio continuo		Velocidad nominal	Momento de inercia
	Potencia nominal	Par nominal		
kVA	W	N · m	rpm	kg · m ²
0.3	100	0.32	3000	0.032×10^{-4}

Tabla A.4.

Propiedades mecánicas del acople RULAND PCMR25-8-6-A (RULAND 2013).

Par estático	Par dinámico sin inversión	Par dinámico en inversión	Rigidez torsional	Momento de inercia	Velocidad máxima
--------------	----------------------------	---------------------------	-------------------	--------------------	------------------

$\text{N} \cdot \text{m}$	$\text{N} \cdot \text{m}$	$\text{N} \cdot \text{m}$	$^{\circ}/\text{N} \cdot \text{m}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	rpm
3.73	1.87	0.93	1.57	3.394×10^{-6}	6000

Tabla A.5.

Propiedades mecánicas del husillo NSK PSS1205N1D0421 (NSK 2012).

Diámetro del eje	Capacidad de carga básica		Avance	Velocidad de rotación permitida
	Dinámica	Estática		
mm	N	N	mm/rev	rpm
12	3200	5860	5	5000

El segundo eslabón del lazo PRS es un carro vertical que posee un par prismático y un par rotatorio. El par rotatorio es un eje apoyado en dos rodamientos de precisión en los extremos cómo se muestra en la Figura A.6. El husillo del conjunto motriz está unido a este eslabón y ejerce la fuerza de actuación sobre este cuerpo.

Figura A.6. Eslabón 2,3,4 del Mecanismo 3PRS+C

El tercer eslabón del lazo PRS está conectado al par rotatorio por un extremo y a la plataforma móvil (cabezal de herramienta) por medio del par esférico como se muestra en la Figura A.7 . La junta esférica es una HEPHAIST SRJ012C que tiene un

ángulo de oscilación permisible de $\pm 30^\circ$. Las propiedades de la junta se indican en la Tabla A.6.

Figura A.7. Eslabón 5,6,7 del Mecanismo 3PRS+C

Tabla A.6.

Propiedades mecánicas de la junta esférica HEPHAIST SRJ012C (HEPHAIST 2013).

Ángulo de oscilación permisible	Capacidad de carga básica	
	Dinámica	Estática
°	N	N
± 30	720	770

En la Figura A.8 se puede apreciar el cabezal de la máquina herramienta o plataforma móvil del mecanismo 3PRS+C. Sus elementos constitutivos son una plataforma móvil (eslabón 8) sobre la que están montadas las juntas esféricas (S_1 , S_2 , S_3) del mecanismo 3PRS+C y el motor que acciona el par rotatorio R_4 para posicionar el eslabón 9 (herramienta de corte). El motor es un Harmonic Drive FHA-11C-100-D200-EM1 con encoder incremental, posee un sensor inductivo para indicar la posición “0” al control CNC. Sus características se indican en la Tabla A.7. El ángulo de inclinación de la plataforma móvil está limitado por las características técnicas de las rótulas quedando limitado a $\pm 30^\circ$ para α y β .

Figura A.8. Cabezal de herramienta en el Mecanismo 3PRS+C

Tabla A.7.

Propiedades mecánicas del motor Harmonic Drive FHA-11C-100-D200-EM1 (Harmonic Drive 2013).

Par máximo	Velocidad máxima	Carga máxima de momento	Rigidez del momento	Momento de inercia
N · m	rpm	N · m	N · m/rad	kg · m ²
11	120	40	4×10^4	0.067

A.3. Mecanismo XY

El mecanismo abierto de la mesa XY se indica en la Figura A.9 y está formado por los eslabones 1, 10 y 11. Es un mecanismo compuesto por dos arreglos lineales, uno para el eje X del sistema de control (par prismático P_4) y otro para el eje Y (par prismático P_5). Cada par primático está formado por dos guías lineales IKO LRX 12 cada uno y un conjunto motriz en la parte central de dichas guías similar al de los pares primáticos del mecanismo 3PRS. Estos pares cinemáticos combinados proveen

el movimiento bidimensional de la mesa XY, dónde se montará la pieza de trabajo y los elementos de medida.

Figura A.9. Modelo CAD de la Mesa XY

A.4. Sistema de medición en la máquina 3PRS+XY+C

En la máquina herramienta se montan dos sistemas de medida que proveerán datos de fuerza y momento durante el proceso de corte (Figura A.10). En la mesa XY se coloca un dinamómetro de tres componentes KISTLER MiniDyn 9156C1 (Kistler Group 2010b) y, en el cabezal o plataforma móvil un arreglo de cuatro sensores triaxiales KISTLER (Kistler Group 2010a), 2x9017B y 2x9018B que se describe en la sección A.5.

Figura A.10. Equipos de medición en la máquina herramienta 3PRS+XY+C.

A.5. Sistema de 4 sensores

Los cuatro sensores se ubican según se indica en la Figura A.11. Estos sensores miden las tres componentes de fuerza permitiendo calcular la fuerza y momentos resultantes en el plano de los sensores que corresponde con el plano que contiene los pares esféricos o plataforma móvil. Por lo tanto, las medidas de fuerza indican la magnitud del esfuerzo aplicado durante el proceso de corte en la punta de la herramienta $[x_3 \ y_3 \ z_3]$ y los momentos indican los esfuerzos a los que esta sometida la plataforma móvil como resultado del proceso de mecanizado.

Figura A.11. Grupo de 4 sensores de 3 fuerzas Kistler

Cada uno de los 4 sensores mide tres componentes en su sistema de coordenadas local, $[x_{s_i} \ y_{s_i} \ z_{s_i}]$ que deben ser operados para obtener la resultante en el sistema $[x_s \ y_s \ z_s]$. Para obtener los momentos resultantes es necesario conocer la distancia entre elementos $2a = 70 \text{ mm}$ y $2b = 100 \text{ mm}$.

Figura A.12. Componentes de fuerza del sistema de 4 sensores

Las doce señales que proveen los sensores se operan de acuerdo a las ecuaciones (A.5) a (A.10) obteniendo las tres fuerzas resultantes F_{x_3} , F_{y_3} , F_{z_3} y los tres momentos de reacción M_{x_s} , M_{y_s} , M_{z_s} .

$$F_{x_3} = \sum_{i=1}^4 F_{x_{s_i}} \quad (\text{A.5})$$

$$F_{y_3} = - \sum_{i=1}^4 F_{y_{s_i}} \quad (\text{A.6})$$

$$F_{z_3} = - \sum_{i=1}^4 F_{z_{s_i}} \quad (\text{A.7})$$

$$M_{x_s} = b \left(-F_{z_{s_1}} - F_{z_{s_2}} + F_{z_{s_3}} + F_{z_{s_4}} \right) \quad (\text{A.8})$$

$$M_{y_s} = a \left(-F_{z_{s_1}} + F_{z_{s_2}} - F_{z_{s_3}} + F_{z_{s_4}} \right) \quad (\text{A.9})$$

$$M_{z_s} = b \left(-F_{x_{s_1}} - F_{x_{s_2}} + F_{x_{s_3}} + F_{x_{s_4}} \right) + a \left(F_{y_{s_1}} - F_{y_{s_2}} + F_{y_{s_3}} - F_{y_{s_4}} \right) \quad (\text{A.10})$$

A.6. Sistema de control y adquisición de datos

Para el CNC de la máquina herramienta se utiliza un sistema de control Fagor 8070 que controla los 6 GDL simultáneamente. Estos ejes son nominados como se indica en la Tabla A.8. El sistema de adquisición de datos del dinamómetro y sistema 4 sensores es instalado en un ordenador adjunto. Los amplificadores de carga necesarios para adquirir las 12 señales de los sensores Kistler 9017 y 9018 se montan en la parte frontal de la máquina como se indica en la Figura A.13. El CNC se programa según el código ISO para máquinas herramientas.

Tabla A.8.

Correspondencia entre los pares cinemáticos y los ejes del control CNC

Par cinemático	Eje en CNC Fagor 8070
P_4	X
P_5	Y
P_1	$Z1$
P_2	$Z2$
P_3	$Z3$
R_4	C

Figura A.13. Componentes de la máquina herramienta

Funciones de la Cinemática Directa

A.1. Funciones de la cinemática directa

Las funciones de t_1 , t_2 y t_3 que se emplean en la resolución de la eliminación Dialítica de Sylvester se indican a continuación.

$$A = (\Re_{12}t_2^2 + \Re_{22}t_2 + \Re_{52}) \quad (\text{A.1})$$

$$B = (\Re_{32}t_2^2 + \Re_{62}t_2 + \Re_{82}) \quad (\text{A.2})$$

$$C = (\Re_{42}t_2^2 + \Re_{72}t_2 + \Re_{92}) \quad (\text{A.3})$$

$$D = (\Re_{13}t_1^2 + \Re_{33}t_1 + \Re_{43}) \quad (\text{A.4})$$

$$E = (\Re_{23}t_1^2 + \Re_{63}t_1 + \Re_{73}) \quad (\text{A.5})$$

$$F = (\Re_{53}t_1^2 + \Re_{83}t_1 + \Re_{93}) \quad (\text{A.6})$$

$$G = (\Re_{11}t_1^2 + \Re_{21}t_1 + \Re_{51}) \quad (\text{A.7})$$

$$H = (\Re_{31}t_1^2 + \Re_{61}t_1 + \Re_{81}) \quad (\text{A.8})$$

$$I = (\Re_{41}t_1^2 + \Re_{71}t_1 + \Re_{91}) \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned}
L = & \{[(\Re_{12}\Re_{23} - \Re_{32}\Re_{13})(\Re_{42}\Re_{23} - \Re_{32}\Re_{53}) + (\Re_{12}\Re_{53} - \Re_{42}\Re_{13})^2]t_1^4 \\
& + [(\Re_{12}\Re_{23} - \Re_{32}\Re_{13})(\Re_{42}\Re_6 - \Re_{32}\Re_{83}) \\
& + (\Re_{12}\Re_6 - \Re_{32}\Re_{33})(\Re_{42}\Re_{23} - \Re_{32}\Re_{53}) \\
& + (\Re_{12}\Re_{53} - \Re_{42}\Re_{13})(\Re_{12}\Re_{83} - \Re_{42}\Re_{33}) \\
& + (\Re_{12}\Re_{83} - \Re_{42}\Re_{33})(\Re_{12}\Re_{53} - \Re_{42}\Re_{13})]t_1^3 \\
& + [(\Re_{12}\Re_{23} - \Re_{32}\Re_{13})(\Re_{42}\Re_{73} - \Re_{32}\Re_{93}) \\
& + (\Re_{12}\Re_6 - \Re_{32}\Re_{33})(\Re_{42}\Re_6 - \Re_{32}\Re_{83}) \\
& + (\Re_{12}\Re_{73} - \Re_{32}\Re_{43})(\Re_{42}\Re_{23} - \Re_{32}\Re_{53}) \\
& + (\Re_{12}\Re_{53} - \Re_{42}\Re_{13})(\Re_{12}\Re_{93} - \Re_{42}\Re_{43}) \\
& + (\Re_{12}\Re_{83} - \Re_{42}\Re_{33})^2 \\
& + (\Re_{12}\Re_{93} - \Re_{42}\Re_{43})(\Re_{12}\Re_{53} - \Re_{42}\Re_{13})]t_1^2 \\
& + [(\Re_{12}\Re_6 - \Re_{32}\Re_{33})(\Re_{42}\Re_{73} - \Re_{32}\Re_{93}) \\
& + (\Re_{12}\Re_{73} - \Re_{32}\Re_{43})(\Re_{42}\Re_6 - \Re_{32}\Re_{83}) \\
& + (\Re_{12}\Re_{83} - \Re_{42}\Re_{33})(\Re_{12}\Re_{93} - \Re_{42}\Re_{43}) \\
& + (\Re_{12}\Re_{93} - \Re_{42}\Re_{43})(\Re_{12}\Re_{83} - \Re_{42}\Re_{33})]t_1 \\
& + [(\Re_{12}\Re_{73} - \Re_{32}\Re_{43})(\Re_{42}\Re_{73} - \Re_{32}\Re_{93}) \\
& + (\Re_{12}\Re_{93} - \Re_{42}\Re_{43})^2]\}
\end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
M = & \{[(\Re_{12}\Re_{23} - \Re_{32}\Re_{13})(\Re_{72}\Re_{23} - \Re_6\Re_{53}) \\
& + (\Re_{22}\Re_{23} - \Re_6\Re_{13})(\Re_{42}\Re_{23} - \Re_{32}\Re_{53}) \\
& + (\Re_{12}\Re_{53} - \Re_{42}\Re_{13})(\Re_{22}\Re_{53} - \Re_{72}\Re_{13}) \\
& + (\Re_{22}\Re_{53} - \Re_{72}\Re_{13})(\Re_{12}\Re_{53} - \Re_{42}\Re_{13})]t_1^4 \\
& + [(\Re_{12}\Re_{23} - \Re_{32}\Re_{13})(\Re_{72}\Re_6 - \Re_6\Re_{83}) \\
& + (\Re_{12}\Re_6 - \Re_{32}\Re_{33})(\Re_{72}\Re_{23} - \Re_6\Re_{53}) \\
& + (\Re_{22}\Re_{23} - \Re_6\Re_{13})(\Re_{42}\Re_6 - \Re_{32}\Re_{83}) \\
& + (\Re_{22}\Re_6 - \Re_6\Re_{33})(\Re_{42}\Re_{23} - \Re_{32}\Re_{53}) \\
& + (\Re_{12}\Re_{53} - \Re_{42}\Re_{13})(\Re_{22}\Re_{83} - \Re_{72}\Re_{33}) \\
& + (\Re_{12}\Re_{83} - \Re_{42}\Re_{33})(\Re_{22}\Re_{53} - \Re_{72}\Re_{13}) \\
& + (\Re_{22}\Re_{53} - \Re_{72}\Re_{13})(\Re_{12}\Re_{83} - \Re_{42}\Re_{33}) \\
& + (\Re_{22}\Re_{83} - \Re_{72}\Re_{33})(\Re_{12}\Re_{53} - \Re_{42}\Re_{13})]t_1^3 \\
& + [(\Re_{12}\Re_{23} - \Re_{32}\Re_{13})(\Re_{72}\Re_{73} - \Re_6\Re_{93}) \\
& + (\Re_{12}\Re_6 - \Re_{32}\Re_{33})(\Re_{72}\Re_6 - \Re_6\Re_{83}) \\
& + (\Re_{12}\Re_{73} - \Re_{32}\Re_{43})(\Re_{72}\Re_{23} - \Re_6\Re_{53}) \\
& + (\Re_{22}\Re_{23} - \Re_6\Re_{13})(\Re_{42}\Re_{73} - \Re_{32}\Re_{93}) \\
& + (\Re_{22}\Re_6 - \Re_6\Re_{33})(\Re_{42}\Re_6 - \Re_{32}\Re_{83}) \\
& + (\Re_{22}\Re_{73} - \Re_6\Re_{43})(\Re_{42}\Re_{23} - \Re_{32}\Re_{53}) \\
& + (\Re_{12}\Re_{53} - \Re_{42}\Re_{13})(\Re_{22}\Re_{93} - \Re_{72}\Re_{43}) \\
& + (\Re_{12}\Re_{83} - \Re_{42}\Re_{33})(\Re_{22}\Re_{83} - \Re_{72}\Re_{33}) \\
& + (\Re_{12}\Re_{93} - \Re_{42}\Re_{43})(\Re_{22}\Re_{53} - \Re_{72}\Re_{13}) \\
& + (\Re_{22}\Re_{53} - \Re_{72}\Re_{13})(\Re_{12}\Re_{93} - \Re_{42}\Re_{43}) \\
& + (\Re_{22}\Re_{83} - \Re_{72}\Re_{33})(\Re_{12}\Re_{83} - \Re_{42}\Re_{33}) \\
& + (\Re_{22}\Re_{93} - \Re_{72}\Re_{43})(\Re_{12}\Re_{53} - \Re_{42}\Re_{13})]t_1^2
\end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
& +[(\Re_{12}\Re_{23} - \Re_{32}\Re_{13})(\Re_{92}\Re_{73} - \Re_{82}\Re_{93}) \\
& \quad + (\Re_{12}\Re_6 - \Re_{32}\Re_{33})(\Re_{92}\Re_6 - \Re_{82}\Re_{83}) \\
& \quad + (\Re_{12}\Re_{73} - \Re_{32}\Re_{43})(\Re_{92}\Re_{23} - \Re_{82}\Re_{53}) \\
& \quad + (\Re_{22}\Re_{23} - \Re_6\Re_{13})(\Re_{72}\Re_{73} - \Re_6\Re_{93}) \\
& \quad + (\Re_{22}\Re_6 - \Re_6\Re_{33})(\Re_{72}\Re_6 - \Re_6\Re_{83}) \\
& \quad + (\Re_{22}\Re_{73} - \Re_6\Re_{43})(\Re_{72}\Re_{23} - \Re_6\Re_{53}) \\
& \quad + (\Re_{52}\Re_{23} - \Re_{82}\Re_{13})(\Re_{42}\Re_{73} - \Re_{32}\Re_{93}) \\
& \quad + (\Re_{52}\Re_6 - \Re_{82}\Re_{33})(\Re_{42}\Re_6 - \Re_{32}\Re_{83}) \\
& \quad + (\Re_{52}\Re_{73} - \Re_{82}\Re_{43})(\Re_{42}\Re_{23} - \Re_{32}\Re_{53}) \\
& \quad + (\Re_{12}\Re_{53} - \Re_{42}\Re_{13})(\Re_{52}\Re_{93} - \Re_{92}\Re_{43}) \\
& \quad + (\Re_{12}\Re_{83} - \Re_{42}\Re_{33})(\Re_{52}\Re_{83} - \Re_{92}\Re_{33}) \\
& \quad + (\Re_{12}\Re_{93} - \Re_{42}\Re_{43})(\Re_{52}\Re_{53} - \Re_{92}\Re_{13}) \\
& \quad + (\Re_{22}\Re_{53} - \Re_{72}\Re_{13})(\Re_{22}\Re_{93} - \Re_{72}\Re_{43}) \\
& \quad + (\Re_{22}\Re_{83} - \Re_{72}\Re_{33})^2 \\
& \quad + (\Re_{22}\Re_{93} - \Re_{72}\Re_{43})(\Re_{22}\Re_{53} - \Re_{72}\Re_{13}) \\
& \quad + (\Re_{52}\Re_{53} - \Re_{92}\Re_{13})(\Re_{12}\Re_{93} - \Re_{42}\Re_{43}) \\
& \quad + (\Re_{52}\Re_{83} - \Re_{92}\Re_{33})(\Re_{12}\Re_{83} - \Re_{42}\Re_{33}) \\
& \quad + (\Re_{52}\Re_{93} - \Re_{92}\Re_{43})(\Re_{12}\Re_{53} - \Re_{42}\Re_{13})]t_1^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +[(\Re_{12}\Re_6 - \Re_{32}\Re_{33})(\Re_{92}\Re_{73} - \Re_{82}\Re_{93}) \\
& \quad + (\Re_{12}\Re_{73} - \Re_{32}\Re_{43})(\Re_{92}\Re_6 - \Re_{82}\Re_{83}) \\
& \quad + (\Re_{22}\Re_6 - \Re_6\Re_{33})(\Re_{72}\Re_{73} - \Re_6\Re_{93}) \\
& \quad + (\Re_{22}\Re_{73} - \Re_6\Re_{43})(\Re_{72}\Re_6 - \Re_6\Re_{83}) \\
& \quad + (\Re_{52}\Re_6 - \Re_{82}\Re_{33})(\Re_{42}\Re_{73} - \Re_{32}\Re_{93}) \\
& \quad + (\Re_{52}\Re_{73} - \Re_{82}\Re_{43})(\Re_{42}\Re_6 - \Re_{32}\Re_{83}) \\
& \quad + (\Re_{12}\Re_{83} - \Re_{42}\Re_{33})(\Re_{52}\Re_{93} - \Re_{92}\Re_{43}) \\
& \quad + (\Re_{12}\Re_{93} - \Re_{42}\Re_{43})(\Re_{52}\Re_{83} - \Re_{92}\Re_{33}) \\
& \quad + (\Re_{22}\Re_{83} - \Re_{72}\Re_{33})(\Re_{22}\Re_{93} - \Re_{72}\Re_{43}) \\
& \quad + (\Re_{22}\Re_{93} - \Re_{72}\Re_{43})(\Re_{22}\Re_{83} - \Re_{72}\Re_{33}) \\
& \quad + (\Re_{52}\Re_{83} - \Re_{92}\Re_{33})(\Re_{12}\Re_{93} - \Re_{42}\Re_{43}) \\
& \quad + (\Re_{52}\Re_{93} - \Re_{92}\Re_{43})(\Re_{12}\Re_{83} - \Re_{42}\Re_{33})]t_1 \\
& +[(\Re_{12}\Re_{73} - \Re_{32}\Re_{43})(\Re_{92}\Re_{73} - \Re_{82}\Re_{93}) \\
& \quad + (\Re_{22}\Re_{73} - \Re_6\Re_{43})(\Re_{72}\Re_{73} - \Re_6\Re_{93}) \\
& \quad + (\Re_{52}\Re_{73} - \Re_{82}\Re_{43})(\Re_{42}\Re_{73} - \Re_{32}\Re_{93}) \\
& \quad + (\Re_{12}\Re_{93} - \Re_{42}\Re_{43})(\Re_{52}\Re_{93} - \Re_{92}\Re_{43}) \\
& \quad + (\Re_{22}\Re_{93} - \Re_{72}\Re_{43})^2 \\
& \quad + (\Re_{52}\Re_{93} - \Re_{92}\Re_{43})(\Re_{12}\Re_{93} - \Re_{42}\Re_{43})]]\}
\end{aligned}$$

$$N = \{[(\Re_{12}\Re_{23} - \Re_{32}\Re_{13})(\Re_{92}\Re_{23} - \Re_{82}\Re_{53}) \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}
& + (\Re_{22}\Re_{23} - \Re_6\Re_{13})(\Re_{72}\Re_{23} - \Re_6\Re_{53}) \\
& + (\Re_{52}\Re_{23} - \Re_{82}\Re_{13})(\Re_{42}\Re_{23} - \Re_{32}\Re_{53}) \\
& + (\Re_{12}\Re_{53} - \Re_{42}\Re_{13})(\Re_{52}\Re_{53} - \Re_{92}\Re_{13}) \\
& + (\Re_{22}\Re_{53} - \Re_{72}\Re_{13})^2 \\
& + (\Re_{52}\Re_{53} - \Re_{92}\Re_{13})(\Re_{12}\Re_{53} - \Re_{42}\Re_{13})]t_1^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +[(\mathfrak{R}_{12}\mathfrak{R}_{23} - \mathfrak{R}_{32}\mathfrak{R}_{13})(\mathfrak{R}_{92}\mathfrak{R}_6 - \mathfrak{R}_{82}\mathfrak{R}_{83}) \\
& \quad + (\mathfrak{R}_{12}\mathfrak{R}_6 - \mathfrak{R}_{32}\mathfrak{R}_{33})(\mathfrak{R}_{92}\mathfrak{R}_{23} - \mathfrak{R}_{82}\mathfrak{R}_{53}) \\
& \quad + (\mathfrak{R}_{22}\mathfrak{R}_{23} - \mathfrak{R}_6\mathfrak{R}_{13})(\mathfrak{R}_{72}\mathfrak{R}_6 - \mathfrak{R}_6\mathfrak{R}_{83}) \\
& \quad + (\mathfrak{R}_{22}\mathfrak{R}_6 - \mathfrak{R}_6\mathfrak{R}_{33})(\mathfrak{R}_{72}\mathfrak{R}_{23} - \mathfrak{R}_6\mathfrak{R}_{53}) \\
& \quad + (\mathfrak{R}_{52}\mathfrak{R}_{23} - \mathfrak{R}_{82}\mathfrak{R}_{13})(\mathfrak{R}_{42}\mathfrak{R}_6 - \mathfrak{R}_{32}\mathfrak{R}_{83}) \\
& \quad + (\mathfrak{R}_{52}\mathfrak{R}_6 - \mathfrak{R}_{82}\mathfrak{R}_{33})(\mathfrak{R}_{42}\mathfrak{R}_{23} - \mathfrak{R}_{32}\mathfrak{R}_{53}) \\
& \quad + (\mathfrak{R}_{12}\mathfrak{R}_{53} - \mathfrak{R}_{42}\mathfrak{R}_{13})(\mathfrak{R}_{52}\mathfrak{R}_{83} - \mathfrak{R}_{92}\mathfrak{R}_{33}) \\
& \quad + (\mathfrak{R}_{12}\mathfrak{R}_{83} - \mathfrak{R}_{42}\mathfrak{R}_{33})(\mathfrak{R}_{52}\mathfrak{R}_{53} - \mathfrak{R}_{92}\mathfrak{R}_{13}) \\
& \quad + (\mathfrak{R}_{22}\mathfrak{R}_{53} - \mathfrak{R}_{72}\mathfrak{R}_{13})(\mathfrak{R}_{22}\mathfrak{R}_{83} - \mathfrak{R}_{72}\mathfrak{R}_{33}) \\
& \quad + (\mathfrak{R}_{22}\mathfrak{R}_{83} - \mathfrak{R}_{72}\mathfrak{R}_{33})(\mathfrak{R}_{22}\mathfrak{R}_{53} - \mathfrak{R}_{72}\mathfrak{R}_{13}) \\
& \quad + (\mathfrak{R}_{52}\mathfrak{R}_{53} - \mathfrak{R}_{92}\mathfrak{R}_{13})(\mathfrak{R}_{12}\mathfrak{R}_{83} - \mathfrak{R}_{42}\mathfrak{R}_{33}) \\
& \quad + (\mathfrak{R}_{52}\mathfrak{R}_{83} - \mathfrak{R}_{92}\mathfrak{R}_{33})(\mathfrak{R}_{12}\mathfrak{R}_{53} - \mathfrak{R}_{42}\mathfrak{R}_{13})]t_1^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +[(\mathfrak{R}_{12}\mathfrak{R}_{23} - \mathfrak{R}_{32}\mathfrak{R}_{13})(\mathfrak{R}_{92}\mathfrak{R}_{73} - \mathfrak{R}_{82}\mathfrak{R}_{93}) \\
& + (\mathfrak{R}_{12}\mathfrak{R}_6 - \mathfrak{R}_{32}\mathfrak{R}_{33})(\mathfrak{R}_{92}\mathfrak{R}_6 - \mathfrak{R}_{82}\mathfrak{R}_{83}) \\
& + (\mathfrak{R}_{12}\mathfrak{R}_{73} - \mathfrak{R}_{32}\mathfrak{R}_{43})(\mathfrak{R}_{92}\mathfrak{R}_{23} - \mathfrak{R}_{82}\mathfrak{R}_{53}) \\
& + (\mathfrak{R}_{22}\mathfrak{R}_{23} - \mathfrak{R}_6\mathfrak{R}_{13})(\mathfrak{R}_{72}\mathfrak{R}_{73} - \mathfrak{R}_6\mathfrak{R}_{93}) \\
& + (\mathfrak{R}_{22}\mathfrak{R}_6 - \mathfrak{R}_6\mathfrak{R}_{33})(\mathfrak{R}_{72}\mathfrak{R}_6 - \mathfrak{R}_6\mathfrak{R}_{83}) \\
& + (\mathfrak{R}_{22}\mathfrak{R}_{73} - \mathfrak{R}_6\mathfrak{R}_{43})(\mathfrak{R}_{72}\mathfrak{R}_{23} - \mathfrak{R}_6\mathfrak{R}_{53}) \\
& + (\mathfrak{R}_{52}\mathfrak{R}_{23} - \mathfrak{R}_{82}\mathfrak{R}_{13})(\mathfrak{R}_{42}\mathfrak{R}_{73} - \mathfrak{R}_{32}\mathfrak{R}_{93}) \\
& + (\mathfrak{R}_{52}\mathfrak{R}_6 - \mathfrak{R}_{82}\mathfrak{R}_{33})(\mathfrak{R}_{42}\mathfrak{R}_6 - \mathfrak{R}_{32}\mathfrak{R}_{83}) \\
& + (\mathfrak{R}_{52}\mathfrak{R}_{73} - \mathfrak{R}_{82}\mathfrak{R}_{43})(\mathfrak{R}_{42}\mathfrak{R}_{23} - \mathfrak{R}_{32}\mathfrak{R}_{53}) \\
& + (\mathfrak{R}_{12}\mathfrak{R}_{53} - \mathfrak{R}_{42}\mathfrak{R}_{13})(\mathfrak{R}_{52}\mathfrak{R}_{93} - \mathfrak{R}_{92}\mathfrak{R}_{43}) \\
& + (\mathfrak{R}_{12}\mathfrak{R}_{83} - \mathfrak{R}_{42}\mathfrak{R}_{33})(\mathfrak{R}_{52}\mathfrak{R}_{83} - \mathfrak{R}_{92}\mathfrak{R}_{33}) \\
& + (\mathfrak{R}_{12}\mathfrak{R}_{93} - \mathfrak{R}_{42}\mathfrak{R}_{43})(\mathfrak{R}_{52}\mathfrak{R}_{53} - \mathfrak{R}_{92}\mathfrak{R}_{13}) \\
& + (\mathfrak{R}_{22}\mathfrak{R}_{53} - \mathfrak{R}_{72}\mathfrak{R}_{13})(\mathfrak{R}_{22}\mathfrak{R}_{93} - \mathfrak{R}_{72}\mathfrak{R}_{43}) \\
& + (\mathfrak{R}_{22}\mathfrak{R}_{83} - \mathfrak{R}_{72}\mathfrak{R}_{33})^2 \\
& + (\mathfrak{R}_{22}\mathfrak{R}_{93} - \mathfrak{R}_{72}\mathfrak{R}_{43})(\mathfrak{R}_{22}\mathfrak{R}_{53} - \mathfrak{R}_{72}\mathfrak{R}_{13}) \\
& + (\mathfrak{R}_{52}\mathfrak{R}_{53} - \mathfrak{R}_{92}\mathfrak{R}_{13})(\mathfrak{R}_{12}\mathfrak{R}_{93} - \mathfrak{R}_{42}\mathfrak{R}_{43}) \\
& + (\mathfrak{R}_{52}\mathfrak{R}_{83} - \mathfrak{R}_{92}\mathfrak{R}_{33})(\mathfrak{R}_{12}\mathfrak{R}_{83} - \mathfrak{R}_{42}\mathfrak{R}_{33}) \\
& + (\mathfrak{R}_{52}\mathfrak{R}_{93} - \mathfrak{R}_{92}\mathfrak{R}_{43})(\mathfrak{R}_{12}\mathfrak{R}_{53} - \mathfrak{R}_{42}\mathfrak{R}_{13})]t_1^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [(\Re_{12}\Re_6 - \Re_{32}\Re_{33})(\Re_{92}\Re_{73} - \Re_{82}\Re_{93}) \\
& \quad + (\Re_{12}\Re_{73} - \Re_{32}\Re_{43})(\Re_{92}\Re_6 - \Re_{82}\Re_{83}) \\
& \quad + (\Re_{22}\Re_6 - \Re_6\Re_{33})(\Re_{72}\Re_{73} - \Re_6\Re_{93}) \\
& \quad + (\Re_{22}\Re_{73} - \Re_6\Re_{43})(\Re_{72}\Re_6 - \Re_6\Re_{83}) \\
& \quad + (\Re_{52}\Re_6 - \Re_{82}\Re_{33})(\Re_{42}\Re_{73} - \Re_{32}\Re_{93}) \\
& \quad + (\Re_{52}\Re_{73} - \Re_{82}\Re_{43})(\Re_{42}\Re_6 - \Re_{32}\Re_{83}) \\
& \quad + (\Re_{12}\Re_{83} - \Re_{42}\Re_{33})(\Re_{52}\Re_{93} - \Re_{92}\Re_{43}) \\
& \quad + (\Re_{12}\Re_{93} - \Re_{42}\Re_{43})(\Re_{52}\Re_{83} - \Re_{92}\Re_{33}) \\
& \quad + (\Re_{22}\Re_{83} - \Re_{72}\Re_{33})(\Re_{22}\Re_{93} - \Re_{72}\Re_{43}) \\
& \quad + (\Re_{22}\Re_{93} - \Re_{72}\Re_{43})(\Re_{22}\Re_{83} - \Re_{72}\Re_{33}) \\
& \quad + (\Re_{52}\Re_{83} - \Re_{92}\Re_{33})(\Re_{12}\Re_{93} - \Re_{42}\Re_{43}) \\
& \quad + (\Re_{52}\Re_{93} - \Re_{92}\Re_{43})(\Re_{12}\Re_{83} - \Re_{42}\Re_{33})] t_1 \\
& \quad + [(\Re_{12}\Re_{73} - \Re_{32}\Re_{43})(\Re_{92}\Re_{73} - \Re_{82}\Re_{93}) \\
& \quad + (\Re_{22}\Re_{73} - \Re_6\Re_{43})(\Re_{72}\Re_{73} - \Re_6\Re_{93}) \\
& \quad + (\Re_{52}\Re_{73} - \Re_{82}\Re_{43})(\Re_{42}\Re_{73} - \Re_{32}\Re_{93}) \\
& \quad + (\Re_{12}\Re_{93} - \Re_{42}\Re_{43})(\Re_{52}\Re_{93} - \Re_{92}\Re_{43}) \\
& \quad + (\Re_{22}\Re_{93} - \Re_{72}\Re_{43})^2 \\
& \quad + (\Re_{52}\Re_{93} - \Re_{92}\Re_{43})(\Re_{12}\Re_{93} - \Re_{42}\Re_{43})]
\end{aligned}$$

$$P = \{[(\Re_{22}\Re_{53} - \Re_{72}\Re_{13})(\Re_{52}\Re_{53} - \Re_{92}\Re_{13}) \quad (A.13)$$

$$\begin{aligned} &+ (\Re_{52}\Re_{53} - \Re_{92}\Re_{13})(\Re_{22}\Re_{53} - \Re_{72}\Re_{13}) \\ &+ (\Re_{22}\Re_{53} - \Re_{72}\Re_{13})(\Re_{52}\Re_{53} - \Re_{92}\Re_{13}) \\ &+ (\Re_{52}\Re_{53} - \Re_{92}\Re_{13})(\Re_{22}\Re_{53} - \Re_{72}\Re_{13})]t_1^4 \\ &+ [(\Re_{22}\Re_{53} - \Re_{72}\Re_{13})(\Re_{52}\Re_{83} - \Re_{92}\Re_{33}) \\ &+ (\Re_{22}\Re_{83} - \Re_{72}\Re_{33})(\Re_{52}\Re_{53} - \Re_{92}\Re_{13}) \\ &+ (\Re_{52}\Re_{53} - \Re_{92}\Re_{13})(\Re_{22}\Re_{83} - \Re_{72}\Re_{33}) \\ &+ (\Re_{52}\Re_{83} - \Re_{92}\Re_{33})(\Re_{22}\Re_{53} - \Re_{72}\Re_{13}) \\ &+ (\Re_{22}\Re_{53} - \Re_{72}\Re_{13})(\Re_{52}\Re_{83} - \Re_{92}\Re_{33}) \\ &+ (\Re_{22}\Re_{83} - \Re_{72}\Re_{33})(\Re_{52}\Re_{53} - \Re_{92}\Re_{13}) \\ &+ (\Re_{52}\Re_{53} - \Re_{92}\Re_{13})(\Re_{22}\Re_{83} - \Re_{72}\Re_{33}) \\ &+ (\Re_{52}\Re_{83} - \Re_{92}\Re_{33})(\Re_{22}\Re_{53} - \Re_{72}\Re_{13})]t_1^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ [(\Re_{22}\Re_{53} - \Re_{72}\Re_{13})(\Re_{52}\Re_{93} - \Re_{92}\Re_{43}) \\ &+ (\Re_{22}\Re_{83} - \Re_{72}\Re_{33})(\Re_{52}\Re_{83} - \Re_{92}\Re_{33}) \\ &+ (\Re_{22}\Re_{93} - \Re_{72}\Re_{43})(\Re_{52}\Re_{53} - \Re_{92}\Re_{13}) \\ &+ (\Re_{52}\Re_{53} - \Re_{92}\Re_{13})(\Re_{22}\Re_{93} - \Re_{72}\Re_{43}) \\ &+ (\Re_{52}\Re_{83} - \Re_{92}\Re_{33})(\Re_{22}\Re_{83} - \Re_{72}\Re_{33}) \\ &+ (\Re_{52}\Re_{93} - \Re_{92}\Re_{43})(\Re_{22}\Re_{53} - \Re_{72}\Re_{13}) \\ &+ (\Re_{22}\Re_{53} - \Re_{72}\Re_{13})(\Re_{52}\Re_{93} - \Re_{92}\Re_{43}) \\ &+ (\Re_{22}\Re_{83} - \Re_{72}\Re_{33})(\Re_{52}\Re_{83} - \Re_{92}\Re_{33}) \\ &+ (\Re_{22}\Re_{93} - \Re_{72}\Re_{43})(\Re_{52}\Re_{53} - \Re_{92}\Re_{13}) \\ &+ (\Re_{52}\Re_{53} - \Re_{92}\Re_{13})(\Re_{22}\Re_{93} - \Re_{72}\Re_{43}) \\ &+ (\Re_{52}\Re_{83} - \Re_{92}\Re_{33})(\Re_{22}\Re_{83} - \Re_{72}\Re_{33}) \\ &+ (\Re_{52}\Re_{93} - \Re_{92}\Re_{43})(\Re_{22}\Re_{53} - \Re_{72}\Re_{13})]t_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [(\mathfrak{R}_{22}\mathfrak{R}_{83} - \mathfrak{R}_{72}\mathfrak{R}_{33})(\mathfrak{R}_{52}\mathfrak{R}_{93} - \mathfrak{R}_{92}\mathfrak{R}_{43}) \\
& \quad + (\mathfrak{R}_{22}\mathfrak{R}_{93} - \mathfrak{R}_{72}\mathfrak{R}_{43})(\mathfrak{R}_{52}\mathfrak{R}_{83} - \mathfrak{R}_{92}\mathfrak{R}_{33}) \\
& \quad + (\mathfrak{R}_{52}\mathfrak{R}_{83} - \mathfrak{R}_{92}\mathfrak{R}_{33})(\mathfrak{R}_{22}\mathfrak{R}_{93} - \mathfrak{R}_{72}\mathfrak{R}_{43}) \\
& \quad + (\mathfrak{R}_{52}\mathfrak{R}_{93} - \mathfrak{R}_{92}\mathfrak{R}_{43})(\mathfrak{R}_{22}\mathfrak{R}_{83} - \mathfrak{R}_{72}\mathfrak{R}_{33}) \\
& \quad + (\mathfrak{R}_{22}\mathfrak{R}_{83} - \mathfrak{R}_{72}\mathfrak{R}_{33})(\mathfrak{R}_{52}\mathfrak{R}_{93} - \mathfrak{R}_{92}\mathfrak{R}_{43}) \\
& \quad + (\mathfrak{R}_{22}\mathfrak{R}_{93} - \mathfrak{R}_{72}\mathfrak{R}_{43})(\mathfrak{R}_{52}\mathfrak{R}_{83} - \mathfrak{R}_{92}\mathfrak{R}_{33}) \\
& \quad + (\mathfrak{R}_{52}\mathfrak{R}_{83} - \mathfrak{R}_{92}\mathfrak{R}_{33})(\mathfrak{R}_{22}\mathfrak{R}_{93} - \mathfrak{R}_{72}\mathfrak{R}_{43}) \\
& \quad + (\mathfrak{R}_{52}\mathfrak{R}_{93} - \mathfrak{R}_{92}\mathfrak{R}_{43})(\mathfrak{R}_{22}\mathfrak{R}_{83} - \mathfrak{R}_{72}\mathfrak{R}_{33})]t_1 \\
& \quad + [(\mathfrak{R}_{22}\mathfrak{R}_{93} - \mathfrak{R}_{72}\mathfrak{R}_{43})(\mathfrak{R}_{52}\mathfrak{R}_{93} - \mathfrak{R}_{92}\mathfrak{R}_{43}) \\
& \quad + (\mathfrak{R}_{52}\mathfrak{R}_{93} - \mathfrak{R}_{92}\mathfrak{R}_{43})(\mathfrak{R}_{22}\mathfrak{R}_{93} - \mathfrak{R}_{72}\mathfrak{R}_{43}) \\
& \quad + (\mathfrak{R}_{22}\mathfrak{R}_{93} - \mathfrak{R}_{72}\mathfrak{R}_{43})(\mathfrak{R}_{52}\mathfrak{R}_{93} - \mathfrak{R}_{92}\mathfrak{R}_{43}) \\
& \quad + (\mathfrak{R}_{52}\mathfrak{R}_{93} - \mathfrak{R}_{92}\mathfrak{R}_{43})(\mathfrak{R}_{22}\mathfrak{R}_{93} - \mathfrak{R}_{72}\mathfrak{R}_{43})] \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q = & \{[(\Re_{52}\Re_{23} - \Re_{82}\Re_{13})(\Re_{92}\Re_{23} - \Re_{82}\Re_{53}) \\
& + (\Re_{52}\Re_{53} - \Re_{92}\Re_{13})(\Re_{22}\Re_{53} - \Re_{72}\Re_{13})]t_1^4 \\
& + [(\Re_{52}\Re_{23} - \Re_{82}\Re_{13})(\Re_{92}\Re_6 - \Re_{82}\Re_{83}) \\
& + (\Re_{52}\Re_6 - \Re_{82}\Re_{33})(\Re_{92}\Re_{23} - \Re_{82}\Re_{53}) \\
& + (\Re_{52}\Re_{53} - \Re_{92}\Re_{13})(\Re_{22}\Re_{83} - \Re_{72}\Re_{33}) \\
& + (\Re_{52}\Re_{83} - \Re_{92}\Re_{33})(\Re_{22}\Re_{53} - \Re_{72}\Re_{13})]t_1^3 \\
& + [(\Re_{52}\Re_{23} - \Re_{82}\Re_{13})(\Re_{92}\Re_{73} - \Re_{82}\Re_{93}) \\
& + (\Re_{52}\Re_6 - \Re_{82}\Re_{33})(\Re_{92}\Re_6 - \Re_{82}\Re_{83}) \\
& + (\Re_{52}\Re_{73} - \Re_{82}\Re_{43})(\Re_{92}\Re_{23} - \Re_{82}\Re_{53}) \\
& + (\Re_{52}\Re_{53} - \Re_{92}\Re_{13})(\Re_{22}\Re_{93} - \Re_{72}\Re_{43}) \\
& + (\Re_{52}\Re_{83} - \Re_{92}\Re_{33})(\Re_{22}\Re_{83} - \Re_{72}\Re_{33}) \\
& + (\Re_{52}\Re_{93} - \Re_{92}\Re_{43})(\Re_{22}\Re_{53} - \Re_{72}\Re_{13})]t_1^2 \\
& + [(\Re_{52}\Re_6 - \Re_{82}\Re_{33})(\Re_{92}\Re_{73} - \Re_{82}\Re_{93}) \\
& + (\Re_{52}\Re_{73} - \Re_{82}\Re_{43})(\Re_{92}\Re_6 - \Re_{82}\Re_{83}) \\
& + (\Re_{52}\Re_{83} - \Re_{92}\Re_{33})(\Re_{22}\Re_{93} - \Re_{72}\Re_{43}) \\
& + (\Re_{52}\Re_{93} - \Re_{92}\Re_{43})(\Re_{22}\Re_{83} - \Re_{72}\Re_{33})]t_1 \\
& + [(\Re_{52}\Re_{73} - \Re_{82}\Re_{43})(\Re_{92}\Re_{73} - \Re_{82}\Re_{93}) \\
& + (\Re_{52}\Re_{93} - \Re_{92}\Re_{43})(\Re_{22}\Re_{93} - \Re_{72}\Re_{43})]\}
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Referencias Bibliográficas

- Adams, David P., Michael J. Vasile, Gilbert Benavides, and Ann N. Campbell. 2001. "Micromilling of Metal Alloys with Focused Ion Beam-fabricated Tools." *Precision Engineering* 25 (2): 107–13. [https://doi.org/10.1016/S0141-6359\(00\)00064-7](https://doi.org/10.1016/S0141-6359(00)00064-7).
- Adolfsson, C., and J. E. Ståhl. 1995. "Cutting Force Model for Multi-Toothed Cutting Processes and Force Measuring Equipment for Face Milling." *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 35 (12): 1715–28. [https://doi.org/10.1016/0890-6955\(95\)00004-H](https://doi.org/10.1016/0890-6955(95)00004-H).
- Afazov, S.M., D. Zdebski, S.M. Ratchev, J. Segal, and S. Liu. 2013. "Effects of Micro-Milling Conditions on the Cutting Forces and Process Stability." *Journal of Materials Processing Technology* 213 (5): 671–84. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2012.12.001>.
- Alting, L., F. Kimura, H.N. Hansen, and G. Bissacco. 2003. "Micro Engineering." *CIRP Annals* 52 (2): 635–57. [https://doi.org/10.1016/S0007-8506\(07\)60208-X](https://doi.org/10.1016/S0007-8506(07)60208-X).
- Altintas, Y. 2000. "Modeling Approaches and Software for Predicting the Performance of Milling Operations at MAL-UBC." *Machining Science and Technology* 4 (3): 445–78. <https://doi.org/10.1080/10940340008945718>.
- Angeles, Jorge. 2014. *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems*. Vol. 124. Mechanical Engineering Series. Cham: Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-01851-5>.
- Aramcharoen, A., and P.T. Mativenga. 2009. "Size Effect and Tool Geometry in Micromilling of Tool Steel." *Precision Engineering* 33 (4): 402–7. <https://doi.org/10.1016/j.precisioneng.2008.11.002>.
- Astakhov, V. P., M. O M Osman, and M. T. Hayajneh. 2001. "Re-Evaluation of the Basic Mechanics of Orthogonal Metal Cutting: Velocity Diagram, Virtual Work Equation and Upper-Bound Theorem." *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 41 (3): 393–418. [https://doi.org/10.1016/S0890-6955\(00\)00084-5](https://doi.org/10.1016/S0890-6955(00)00084-5).
- Astakhov, Viktor P. 2010. *Geometry of Single-Point Turning Tools and Drills. Geometry of Single-Point Turning Tools and Drills, Fundamentals and Practical Application*. Springer Series in Advanced Manufacturing. London: Springer London. <https://doi.org/10.1007/978-1-84996-053-3>.

- Baradeswaran, A., and A. Elaya Perumal. 2014. "Study on Mechanical and Wear Properties of Al 7075/Al₂O₃/Graphite Hybrid Composites." *Composites Part B: Engineering* 56 (May 2016): 464–71. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.08.013>.
- Brar, N S, V. S. Joshi, and B W Harris. 2009. "Constitutive Model Constants for Al7075-T651 and Al7075-T6." In *AIP Conference Proceedings*, 1195:945–48. <https://doi.org/10.1063/1.3295300>.
- Brecher, C., C. Wenzel, and R. Klar. 2008. "Characterization and Optimization of the Dynamic Tool Path of a Highly Dynamic Micromilling Machine." *CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology* 1 (2): 86–91. <https://doi.org/10.1016/J.CIRPJ.2008.09.013>.
- Budak, E., Y. Altıntaş, and E. J. a. Armarego. 1996. "Prediction of Milling Force Coefficients From Orthogonal Cutting Data." *Journal of Manufacturing Science and Engineering* 118 (2): 216. <https://doi.org/10.1115/1.2831014>.
- Câmara, M. A., J. C Campos Rubio, A. M. Abrão, and J. P. Davim. 2012. "State of the Art on Micromilling of Materials, a Review." *Journal of Materials Science and Technology*. [https://doi.org/10.1016/S1005-0302\(12\)60115-7](https://doi.org/10.1016/S1005-0302(12)60115-7).
- Chae, J., S.S. Park, and T. Freiheit. 2006. "Investigation of Micro-Cutting Operations." *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 46 (3–4): 313–32. <https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2005.05.015>.
- Chanal, H., E. Duc, and P. Ray. 2006. "A Study of the Impact of Machine Tool Structure on Machining Processes." *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 46 (2): 98–106. <https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2005.05.004>.
- Chen, Guoqiang, and Jianli Kang. 2014. "Development of a MATLAB Toolbox for 3-PRS Parallel Robot." *International Journal of Hybrid Information Technology* 7 (5): 401–12. <https://doi.org/10.14257/ijhit.2014.7.5.37>.
- Chen, Wanqun, Wenkun Xie, Dehong Huo, and Kai Yang. 2018. "A Novel 3D Surface Generation Model for Micro Milling Based on Homogeneous Matrix Transformation and Dynamic Regenerative Effect." *International Journal of Mechanical Sciences* 144: 146–57. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.05.050>.
- Cheng, X., X. H. Yang, Y. M. Huang, G. M. Zheng, and Li Li. 2014. "Helical Surface Creation by Wire Electrical Discharge Machining for Micro Tools." *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 30 (3): 287–94.

<https://doi.org/10.1016/j.rcim.2013.10.010>.

- Coelho, R. T., a. Braghini Jr., C. M. O. Valente, and G. C. Medalha. 2003. "Experimental Evaluation of Cutting Force Parameters Applying Mechanistic Model in Orthogonal Milling." *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* 25 (3): 247–53. <https://doi.org/10.1590/S1678-58782003000300005>.
- Company, O., and F. Pierrot. 2002. "Modelling and Design Issues of a 3-Axis Parallel Machine-Tool." *Mechanism and Machine Theory* 37 (11): 1325–45. [https://doi.org/10.1016/S0094-114X\(02\)00040-X](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(02)00040-X).
- Dudzinski, D., and a. Molinari. 1997. "A Modelling of Cutting for Viscoplastic Materials." *International Journal of Mechanical Sciences* 39 (4): 369–89. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(96\)00043-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(96)00043-4).
- Egashira, Kai, Takuya Furukawa, Keishi Yamaguchi, and Minoru Ota. 2016. "Microcutting Using a Micro Turn-Milling Machine." *Precision Engineering* 44 (April): 81–86. <https://doi.org/10.1016/j.precisioneng.2015.10.005>.
- El-Khasawneh, Bashar S., and Placid M. Ferreira. 1999. "Computation of Stiffness and Stiffness Bounds for Parallel Link Manipulators." *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 39 (2): 321–42. [https://doi.org/10.1016/S0890-6955\(98\)00039-X](https://doi.org/10.1016/S0890-6955(98)00039-X).
- Fajardo-Pruna, Marcelo, Eduardo Diez, Hilde Pérez, and Antonio Vizán. 2014. "Desarrollo de Una Máquina Herramienta Paralela Para Micromecanizado Con Herramienta de Filo Único." In *Congreso Latinoamericano de Ingeniería Mecánica*, 1012–17. Cuenca: Universidad Politécnica Salesiana. https://www.researchgate.net/publication/324969518_Desarrollo_de_una_Maquina_Herramienta_Paralela_Para_Micromecanizado_con_Herramienta_de_Filo_Unico.
- Fajardo-Pruna, Marcelo, Eduardo Diez, Jesus Pérez, and Antonio Vizán. 2015. "Dynamic Behaviour in Single-Point Micromachining Process with a Machining Tool of 3-PRS Structure." In *Advances in Materials and Processing Technologies*, 230. Madrid: Universidad Carlos III de Madrid. https://www.researchgate.net/publication/324969486_Dynamic_behaviour_in_single-point_micromachining_process_with_a_machining_tool_of_3-PRS_structure.
- Fajardo-Pruna, Marcelo, Juan Márquez, Miguel Rubio, and Antonio Vizán. 2014. "Análisis Cinemático Inverso Para Un Mecanismo Paralelo 3-PRS." In *Congreso Latinoamericano de Ingeniería Mecánica*, 824–29. Cuenca, Ecuador.

https://www.researchgate.net/publication/324969545_Analisis_Cinematico_Inverso_para_un_Mecanismo_Paralelo_3-PRS.

Fan, Kuang Chao, Hai Wang, Jun Wei Zhao, and Tsan Hwei Chang. 2003. "Sensitivity Analysis of the 3-PRS Parallel Kinematic Spindle Platform of a Serial-Parallel Machine Tool." *International Journal of Machine Tools and Manufacture*. [https://doi.org/10.1016/S0890-6955\(03\)00202-5](https://doi.org/10.1016/S0890-6955(03)00202-5).

Fu, Zhongtao, Xiaoming Zhang, Xuelin Wang, and Wenyu Yang. 2014. "Analytical Modeling of Chatter Vibration in Orthogonal Cutting Using a Predictive Force Model." *International Journal of Mechanical Sciences* 88: 145–53. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.08.005>.

Geldart, M., P. Webb, H. Larsson, M. Backstrom, N. Gindy, and K. Rask. 2003. "A Direct Comparison of the Machining Performance of a Variax 5 Axis Parallel Kinetic Machining Centre with Conventional 3 and 5 Axis Machine Tools." *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 43 (11): 1107–16. [https://doi.org/10.1016/S0890-6955\(03\)00119-6](https://doi.org/10.1016/S0890-6955(03)00119-6).

Gogu, Grigore. 2005. "Chebychev-Grübler-Kutzbach's Criterion for Mobility Calculation of Multi-Loop Mechanisms Revisited via Theory of Linear Transformations." *European Journal of Mechanics, A/Solids* 24 (3): 427–41. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2004.12.003>.

Hamade, R. F., C. Y. Seif, and F. Ismail. 2006. "Extracting Cutting Force Coefficients from Drilling Experiments." *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 46 (3–4): 387–96. <https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2005.05.016>.

Harmonic Drive. 2013. "FHA-C Mini Series AC Servo Actuator Manual." <http://www.harmonicdrive.net/products/rotary-actuators/hollow-shaft-actuators/fha-mini>.

HEPHAIST, SEIKO Co. 2013. "Spherical Rolling Joint." 2013. <http://www.hephaist.co.jp/e/pro/ball.html>.

Herrero, Saioa, Charles Pinto, Oscar Altuzarra, and Mikel Diez. 2018. "Analysis of the 2PRU-1PRS 3DOF Parallel Manipulator: Kinematics, Singularities and Dynamics." *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 51 (July 2016): 63–72. <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2017.11.018>.

Hsieh, Jung F. 2010. "Mathematical Modeling of Interrelationships among Cutting Angles, Setting Angles and Working Angles of Single-Point Cutting Tools." *Applied Mathematical Modelling* 34 (10): 2738–48.

<https://doi.org/10.1016/j.apm.2009.12.009>.

Huang, Peng, Jinsong Wang, Liping Wang, and Rui Yao. 2011. "Identification of Structure Errors of 3-PRS-XY Mechanism with Regularization Method." *Mechanism and Machine Theory* 46 (7): 927–44. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2011.02.006>.

Huang, T., P. F. Wang, X. M. Zhao, and D. G. Chetwynd. 2010. "Design of a 3-DOF Hybrid PKM Module for Large Structural Component Assembly." *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 59 (1): 159–62. <https://doi.org/10.1016/j.cirp.2010.03.098>.

IKO-THOMPSON LTD. 2012. "Linear Motion Rolling Guide Series General Catalog IKO-THOMPSON LTD." Shanghai. https://www.bianchi-industrial.it/download/cataloghi/lineari/iko/IKO_LinearMotionRollingGuideSeries_BLUE.pdf.

Jin, Xiaoliang, and Yusuf Altintas. 2011. "Slip-Line Field Model of Micro-Cutting Process with Round Tool Edge Effect." *Journal of Materials Processing Technology* 211 (3): 339–55. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2010.10.006>.

Jun, Martin. 2005. "Modeling and Analysis of Micro -End Milling Dynamics." University of Illinois. <https://www.ideals.illinois.edu/handle/2142/83825>.

Kao, Chih Cheng, and Tung Sheng Zhan. 2010. "Singularity Robustness of the 3RPS Parallel Manipulator by Using the Damped-Rate Resolved-Acceleration Control." *Expert Systems with Applications* 37 (7): 5134–44. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2009.12.081>.

Kistler Group. 2010a. *Instruction Manual 3-Component Force Sensor Type 9016B4, 9017B, 9018B*. Switzerland.

———. 2010b. *Instruction Manual MiniDyn 3-Component Dynamometer Type 9256B* ... Switzerland.

Kohser, Ronald A., and J. T. Black. 2012. *DeGarmo's Materials and Processes in Manufacturing*. 11th ed. John Wiley & Sons.

Krebs, E., and P. Kersting. 2014. "Improving the Cutting Conditions in the Five-Axis Micromilling of Hardened High-Speed Steel by Applying a Suitable Tool Inclination." *Procedia CIRP* 14: 366–70. <https://doi.org/10.1016/j.procir.2014.03.032>.

- Lai, Yuan Lung, Chien Chih Liao, and Zi Gui Chao. 2018. "Inverse Kinematics for a Novel Hybrid Parallel–serial Five-Axis Machine Tool." *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 50 (September 2017): 63–79. <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2017.09.002>.
- Lazoglu, Ismail, and Ali Mamedov. 2016. "Deformation of Thin Parts in Micromilling." *CIRP Annals* 65 (1): 117–20. <https://doi.org/10.1016/j.cirp.2016.04.077>.
- Li, Binglin, Xuelin Wang, Yujin Hu, and Chenggang Li. 2011. "Analytical Prediction of Cutting Forces in Orthogonal Cutting Using Unequal Division Shear-Zone Model." *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 54 (5–8): 431–43. <https://doi.org/10.1007/s00170-010-2940-8>.
- Li, Qinchuan, Zhi Chen, Qiaohong Chen, Chuanyu Wu, and Xudong Hu. 2011. "Parasitic Motion Comparison of 3-PRS Parallel Mechanism with Different Limb Arrangements." *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 27 (2): 389–96. <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2010.08.007>.
- Li, Xinxin, Rongming Lin, and Kok Wah Leow. 2000. "Performance-Enhanced Micro-Machined Resonant Systems with Two-Degrees-of-Freedom Resonators." *Journal of Micromechanics and Microengineering* 10 (4): 534–39. <https://doi.org/10.1088/0960-1317/10/4/308>.
- Li, Yangmin, and Qingsong Xu. 2007. "Kinematic Analysis of a 3-PRS Parallel Manipulator." *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 23 (4): 395–408. <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2006.04.007>.
- Liping, Wang, Xu Huayang, Guan Liwen, and Zhi Yu. 2016. "A Novel 3-PUU Parallel Mechanism and Its Kinematic Issues." *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 42 (December): 86–102. <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2016.05.003>.
- Liu, Xinyu, Martin B. G. Jun, Richard E. DeVor, and Shiv G. Kapoor. 2004. "Cutting Mechanisms and Their Influence on Dynamic Forces, Vibrations and Stability in Micro-Endmilling." *ASME Conference Proceedings* 2004 (47136): 583–92. <https://doi.org/10.1115/IMECE2004-62416>.
- López-Estrada, Luis, Marcelo Fajardo-Pruna, Lidia Sánchez-González, Hilde Pérez, Laura Fernández-Robles, and Antonio Vizán. 2018. "Design and Implementation of a Stereo Vision System on an Innovative 6DOF Single-Edge Machining Device for Tool Tip Localization and Path Correction." *Sensors* 18 (9): 3132. <https://doi.org/10.3390/s18093132>.

- López-Estrada, Luis, Marcelo Fajardo-Pruna, Lidia Sánchez-González, Hilde Pérez, and Antonio Vizán. 2018a. "Design and Implementation of a Vision System on an Innovative Single Point Micro-Machining Device for Tool Tip Localization." In *International Joint Conference SOCO'17-CISIS'17-ICEUTE'17 León, Spain, September 6–8, 2017, Proceeding*, 219–28.
- . 2018b. "Design and Implementation of a Vision System on an Innovative Single Point Micro-Machining Device for Tool Tip Localization." In *Advances in Intelligent Systems and Computing*, edited by H. Perez Garcia, J. Alfonso-Cendon, L. Sanchez Gonzalez, E. Corchado, and H. Quintian, 219–28. León: Springer Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-319-67180-2_21.
- López-Estrada, Luis, Juan Márquez, Hilde Pérez, and Antonio Vizán. 2015. "Four Axis Single Point Cutting Micro-Machining Model." In *Advances in Materials and Processing Technologies*, 218. Madrid: Universidad Carlos III de Madrid.
- Ma, Yue, Wentie Niu, Zhenjun Luo, Fuwen Yin, and Tian Huang. 2016. "Static and Dynamic Performance Evaluation of a 3-DOF Spindle Head Using CAD–CAE Integration Methodology." *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 41: 1–12. <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2016.02.006>.
- Masuzawa, T. 2000. "State of the Art of Micromachining." *CIRP Annals - Manufacturing Technology*. [https://doi.org/10.1016/S0007-8506\(07\)63451-9](https://doi.org/10.1016/S0007-8506(07)63451-9).
- Masuzawa, T., and H.K. Tönshoff. 1997. "Three-Dimensional Micromachining by Machine Tools." *CIRP Annals* 46 (2): 621–28. [https://doi.org/10.1016/S0007-8506\(07\)60882-8](https://doi.org/10.1016/S0007-8506(07)60882-8).
- Mitsubishi, Electric Corporation. 2012. "Servo Motor HF-MP Series General-Purpose AC Servo MELSERVO-J3." <https://www.konighartman.nl/UserFiles/Product/Datasheet/MR-HF-MP.pdf>.
- NSK. 2012. "NSK Standard Ball Screws: Compact FA Series." https://stevenengineering.com/Tech_Support/PDFs/NSK_BALL-SCREW-FA.pdf.
- Oliveira, Fernando Brandão de, Alessandro Roger Rodrigues, Reginaldo Teixeira Coelho, and Adriano Fagali de Souza. 2015. "Size Effect and Minimum Chip Thickness in Micromilling." *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 89 (February): 39–54. <https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2014.11.001>.
- OMRON, Corporation. 2013. "E2B PROXIMITY SENSORS." Japan.

- https://www.ia.omron.com/data_pdf/cat/e2b_d118-e1_1_2_csm1014203.pdf?id=3203.
- Ozturk, Sabri, and Erhan Altan. 2012. "Slip-Line Metal Cutting Model with Negative Rake Angle." *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* 34 (3): 246–52. <https://doi.org/10.1590/S1678-58782012000300004>.
- Pérez, H., J. Rios, E. Díez, and A. Vizán. 2008. "Increase of Material Removal Rate in Peripheral Milling by Varying Feed Rate." *Journal of Materials Processing Technology* 201 (1–3): 486–90. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2007.11.191>.
- Pérez, H., A. Vizán, J.C. Hernandez, and M. Guzmán. 2007. "Estimation of Cutting Forces in Micromilling through the Determination of Specific Cutting Pressures." *Journal of Materials Processing Technology* 190 (1–3): 18–22. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2007.03.118>.
- Rahman, M. Azizur, M. Raihan Amrun, Mustafizur Rahman, and A. Senthil Kumar. 2017. "Variation of Surface Generation Mechanisms in Ultra-Precision Machining Due to Relative Tool Sharpness (RTS) and Material Properties." *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 115 (June 2016): 15–28. <https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2016.11.003>.
- Romanus, Heleen, Eleonora Ferraris, Jan Bouquet, Dominiek Reynaerts, and Bert Lauwers. 2014. "Micromilling of Sintered ZrO₂ Ceramic via CBN and Diamond Coated Tools." *Procedia CIRP* 14 (January): 371–76. <https://doi.org/10.1016/J.PROCIR.2014.03.063>.
- Ruiz, A., F. J. Campa, C. Roldán-Paraponiari, O. Altuzarra, and C. Pinto. 2016. "Experimental Validation of the Kinematic Design of 3-PRS Compliant Parallel Mechanisms." *Mechatronics* 39: 77–88. <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2016.08.006>.
- RULAND. 2013. "PCMR25-8-6-A, 8mm x 6mm Four Beam Coupling, Aluminum." 2013. <https://www.ruland.com/PCMR25-8-6-A.html>.
- Rusinek, Rafal. 2010. "Cutting Process of Composite Materials: An Experimental Study." *International Journal of Non-Linear Mechanics* 45 (4): 458–62. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2010.01.004>.
- Rusinek, Rafal, Marian Wiercigroch, and Pankaj Wahi. 2015. "Orthogonal Cutting Process Modelling Considering Tool-Workpiece Frictional Effect." *Procedia CIRP* 31: 429–34. <https://doi.org/10.1016/j.procir.2015.03.033>.

- Sabberwaal, A.J.P. 1960. "Chip Section and Cutting Force during the Milling Operation." *Annals of CIRP* 10 (3): 197–203.
- Saedon, J.B., S.L. Soo, D.K. Aspinwall, A. Barnacle, and N.H. Saad. 2012. "Prediction and Optimization of Tool Life in Micromilling AISI D2 (~62 HRC) Hardened Steel." *Procedia Engineering* 41 (January): 1674–83. <https://doi.org/10.1016/J.PROENG.2012.07.367>.
- Shiau, Ting-Nung, Yi-Jeng Tsai, and Meng-Shiun Tsai. 2008. "Nonlinear Dynamic Analysis of a Parallel Mechanism with Consideration of Joint Effects." *Mechanism and Machine Theory* 43 (4): 491–505. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2007.03.008>.
- Sun, Tao, Yapu Zhai, Yimin Song, and Jiateng Zhang. 2016. "Kinematic Calibration of a 3-DoF Rotational Parallel Manipulator Using Laser Tracker." *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 41: 78–91. <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2016.02.008>.
- Sun, Zhanwen, Suet To, Shaojian Zhang, and Guoqing Zhang. 2018. "Theoretical and Experimental Investigation into Non-Uniformity of Surface Generation in Micro-Milling." *International Journal of Mechanical Sciences* 140 (May): 313–24. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.03.019>.
- Sutherland, J. W., and R. E. DeVor. 1986. "An Improved Method for Cutting Force and Surface Error Prediction in Flexible End Milling Systems." *Journal of Engineering for Industry* 108 (4): 269. <https://doi.org/10.1115/1.3187077>.
- Svinin, M. M., S. Hosoe, and M. Uchiyama. 2001. "On the Stiffness and Stability of Gough-Stewart Platforms." *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation* 4: 3268–73. <https://doi.org/10.1109/ROBOT.2001.933122>.
- Tansel, I N, T T Arkan, W Y Bao, N Mahendrakar, B Shisler, D Smith, and M Mccool. 2000a. "Tool Wear Estimation in Micro-Machining. Part I: Tool Usage–cutting Force Relationship." *International Journal of Machine Tools & Manufacture* 40: 599–608. <https://pdfs.semanticscholar.org/6dce/bdffeea8dbc9e273d44571e340c0adb7dd9d.pdf>.
- . 2000b. "Tool Wear Estimation in Micro-Machining. Part II: Neural-Network-Based Periodic Inspector for Non- Metals." *International Journal of Machine Tools & Manufacture* 40: 609–20. <https://pdfs.semanticscholar.org/9f97/84e0d65094cad070547818b4ccfaa24bb1ec.pdf>.

- Tansel, I N, A Nedbouyan, M Trujillo, and B Tansel. 1998. "Micro-End-Milling—II. Extending Tool Life with a Smart Workpiece Holder (SWH)." *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 38 (12): 1437–48. [https://doi.org/10.1016/S0890-6955\(98\)00016-9](https://doi.org/10.1016/S0890-6955(98)00016-9).
- Tounsi, N., J. Vincenti, A. Otho, and M. A. Elbestawi. 2002. "From the Basic Mechanics of Orthogonal Metal Cutting toward the Identification of the Constitutive Equation." *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 42 (12): 1373–83. [https://doi.org/10.1016/S0890-6955\(02\)00046-9](https://doi.org/10.1016/S0890-6955(02)00046-9).
- Twardowski, Paweł, Szymon Wojciechowski, Michał Wieczorowski, and Thomas Mathia. 2011. "Surface Roughness Analysis of Hardened Steel after High-Speed Milling." *Scanning* 33 (5): 386–95. <https://doi.org/10.1002/sca.20274>.
- Uhlmann, E., and K. Schauer. 2005. "Dynamic Load and Strain Analysis for the Optimization of Micro End Mills." *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 54 (1): 75–78. [https://doi.org/10.1016/S0007-8506\(07\)60053-5](https://doi.org/10.1016/S0007-8506(07)60053-5).
- Weinert, K., and V. Petzoldt. 2008. "Machining NiTi Micro-Parts by Micro-Milling." *Materials Science and Engineering: A* 481–482 (May): 672–75. <https://doi.org/10.1016/J.MSEA.2006.10.220>.
- Wojciechowski, Szymon. 2011. "Machined Surface Roughness Including Cutter Displacements in Milling of Hardened Teel." *Metrology and Measurement Systems* 18 (3): 429–40. <https://doi.org/10.2478/v10178-011-0009-7>.
- Wojciechowski, Szymon, and Krzysztof Mrozek. 2017. "Mechanical and Technological Aspects of Micro Ball End Milling with Various Tool Inclinations." *International Journal of Mechanical Sciences* 134: 424–35. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.10.032>.
- Yoon, Hyung Suk, and Kornel F. Ehmann. 2016. "Dynamics and Stability of Micro-Cutting Operations." *International Journal of Mechanical Sciences* 115–116 (May): 81–92. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.06.009>.
- Zhang, Xuwei, Tianbiao Yu, and Wanshan Wang. 2018. "Prediction of Cutting Forces and Instantaneous Tool Deflection in Micro End Milling by Considering Tool Run-Out." *International Journal of Mechanical Sciences* 136 (February): 124–33. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.12.019>.
- Zhao, Yongjie, Ke Qiu, Shuangxi Wang, and Ziqiang Zhang. 2015. "Inverse Kinematics and Rigid-Body Dynamics for a Three Rotational Degrees of Freedom Parallel Manipulator." *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 31 (1):

40–50. <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2014.07.002>.

Zhou, L, F Y Peng, R Yan, P F Yao, C C Yang, and B Li. 2015. “Analytical Modeling and Experimental Validation of Micro End-Milling Cutting Forces Considering Edge Radius and Material Strengthening Effects.” *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 97: 29–41. <https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2015.07.001>.