Actas del Segundo Congreso Nacional de Historia de la Construcción, A Coruña, 22-24 octubre 1998, eds. F. Bores, J. Fernández, S. Huerta, E. Rabasa, Madrid: I. Juan de Herrera, SEdHC, U. Coruña, CEHOPU, 1998.

La teoría de bóvedas en el siglo XVIII: La contribución de Philippe de La Hire

Santiago Huerta Fernández
Rafael Hernando de la Cuerda

Qué forma debe tener un arco (o bóveda) y cuánto deben medir sus estribos. Estas son las preguntas claves en la construcción abovedada en fábrica desde sus orígenes hace unos 6.000 años hasta la actualidad. En particular, toda la seguridad de la obra depende de los estribos; una bóveda mal proyectada se hundirá en el momento del descimbrado, pero puede reconstruirse después mejorando su perfil (esto ocurrió en Santa Sofía); si fallan los estribos toda la construcción se viene abajo.

Así, el dimensionado de los estribos ha preocupado a los constructores desde la más remota antigüedad. Tradicionalmente éstos usaban reglas estructurales (geométricas en su mayor parte, pero también aritméticas) y el conjunto de reglas y sus rangos de aplicación constituía, en cada época, la «teoría de estructuras». La bondad de esta teoría queda demostrada por los edificios que se construyeron con ella: el Panteón de Roma, Santa Sofía o las catedrales góticas, por ejemplo. La teoría se basaba en un conocimiento de las propiedades fundamentales de las estructuras de fábrica adquirido por la experiencia de la construcción y el empleo de modelos a escala.[1] Como ejemplo en la Fig. 1 se muestra una antigua regla gótica para el cálculo de los estribos, recogida en el tratado de cantería de Derand.[2]

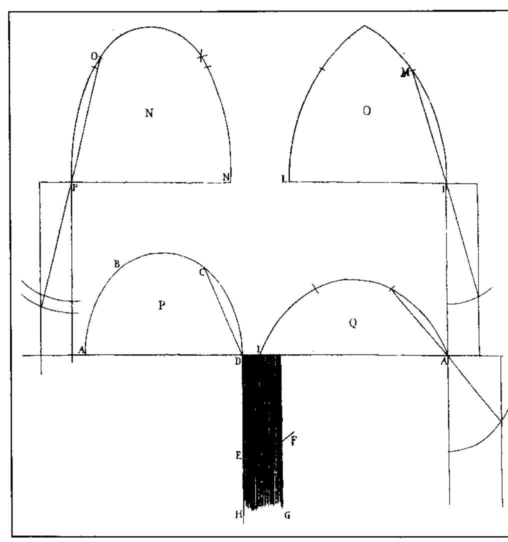

Figura 1
Regla geométrica gótica para el cálculo de los estribos (Derand, 1643)

A finales del siglo XVII esta situación empieza a cambiar. La ciencia de la mecánica había adquirido un desarrollo suficiente y, sobre todo, emergía una nueva mentalidad que pedía una justificación «científica» de los procesos técnicos. En efecto, el descubrimiento de la ley de descomposición de las fuerzas por Stevin, los trabajos de Galileo sobre resistencia de materiales y la formulación general de las leyes de la mecánica por Newton, abrían por primera vez la posibilidad de un estudio científico del equilibrio de las construcciones.[3] Para el arquitecto o ingeniero «culto» de esta época ya no parecía razonable seguir empleando meras reglas —la antigua teoría de estructuras— había que elaborar una nueva teoría de las estructuras.

No obstante, la pregunta no cambia: el objetivo es conseguir proyectar una bóveda y, sobre todo, un estribo que resista su empuje con seguridad suficiente. No se trata de realizar una investigación abstracta sobre la naturaleza del equilibrio de las construcciones, se trata de desarrollar una teoría, basada en las leyes de la mecánica, que permita proyectar construcciones reales que sean suficientemente seguras. Rankine fue, quizá, el primero en señalar esta diferencia.[4] La primera es la actitud del «científico» y su pregunta es ¿qué quiero saber?; la segunda es la actitud del «técnico» y su pregunta es ¿qué quiero hacer? En palabras del propio Rankine:

> En la ciencia práctica la pregunta es *¿Qué quiero hacer?*, y la respuesta a esta pregunta implica la adopción inmediata de alguna regla de trabajo. En caso de duda, la mejora de nuestras máquinas y construcciones no puede esperar al avance de la ciencia; y si los datos existentes son insuficientes para llegar a una solución exacta del problema, es preciso de todas formas dar una solución aproximada que, según los datos disponibles, sea la más probable.[5]

Ésta ha sido siempre la actitud del constructor, arquitecto o ingeniero, a la hora de proyectar sus máquinas o edificios. En relación a la teoría de bóvedas, a finales del siglo XVII y principios del XVIII también se buscaba una respuesta a las dos preguntas enunciadas al principio —qué forma debe tener un arco y qué estribos precisa—, pero dentro de la ciencia de la Mecánica: La respuesta debería ser un procedimiento científico de «cálculo» que permitiera determinar la estabilidad de cualquier arco y dimensionar el estribo correspondiente.

Por supuesto, los resultados finales no deberían ser muy diferentes de los obtenidos aplicando las reglas antiguas, que habían demostrado sobradamente su validez. De hecho en ausencia de ensayos sobre edificios reales, ¿qué otra manera de verificar las nuevas teorías sino comparar los resultados con las proporciones de las construcciones existentes, o con las antiguas reglas que no eran sino una codificación de estas proporciones?

A finales del siglo XVII Robert Hooke[6] y Philippe de La Hire, de manera independiente, intentaron dar respuesta a estas preguntas. Los enfoques fueron muy diferentes pero ambos marcaron el desarrollo de la teoría de bóvedas y su aplicación práctica en sus respectivos países, Inglaterra y Francia. El presente trabajo se ocupará únicamente de la aportación de La Hire y su influencia posterior. Empezaremos dando una breve semblanza biográfica.

Philippe de La Hire (París 1640-1718)

Educado entre artistas y técnicos, Philippe de La Hire estuvo desde muy joven interesado en perspectiva, mecánica práctica, dibujo y pintura, completando su formación en Venecia donde estudio a los grandes pintores y geometría clásica, particularmente la teoría de las cónicas de Apollonius.

Durante toda su vida mantuvo un interés por el arte, la ciencia y la tecnología. Destacan sus estudios en matemáticas, astronomía y física, así como su interés por la geometría y los métodos gráficos (aunque La Hire no ignoraba el cálculo infinitesimal incipiente, y en aquel momento motivo de discusiones en la Academia de Ciencias, apenas lo utiliza en sus investigaciones).[7]

Realizó observaciones astronómicas regularmente, en la Academia de Ciencias de París desde su nominación en 1678 como «Astronome pensionnaire», y desde 1682 dio cursos en el College Royal, de astronomía, mecánica, hidrostática, dióptrica, y navegación, fecha en la que fue elegido para la cátedra de matemáticas, que había estado vacante desde la muerte de Roberval.

En el área de la ciencia experimental los esfuerzos de La Hire son confirmados por la descripción de varios experimentos: caída de los cuerpos, magnetismo, electrostática, calor reflejado por la luna, los efectos del frío, propiedades físicas del agua, y la transmisión del sonido. También estudió el barómetro, el termómetro, el clinómetro, los relojes, instrumentos de viento, máquinas electrostáticas, e imanes.

Simultáneamente La Hire tomó parte, a veces en colaboración con Picard, en importantes proyectos geodésicos. Determinó las coordenadas de diferentes puntos a lo largo de la costa francesa, en la idea de establecer un nuevo mapa de Francia, y en 1683 participó en los trabajos del trazado del meridiano de París.

La Hire fue nombrado, en 1687, profesor en la Real Academia de Arquitectura, reemplazando a F.

Blondel. Las lecturas semanales que dio hasta finales de 1717, de las que hay numerosas referencias en el «Procés-verbaux de l´Académie royale d´architecture», se ocuparon de la teoría de arquitectura y técnicas asociadas como la estereotomía de la piedra y la carpintería de armar. De hecho, escribió un *Tratado de Estereotomía,* del que se conserva el manuscrito, y que no se llegó a publicar. También escribió un comentario par la segunda edición del *Tratado de Carpintería* de Maturin Jousse.

La Hire reúne pues las condiciones idóneas para atacar el problema de la teoría de bóvedas: una sólida formación en Mecánica y Geometría, y una relación duradera con los constructores y artesanos de la construcción. Su contribución se produce en dos etapas: en primer lugar en su *Traité de mécanique*, 1695, ataca el problema de la estabilidad de los arcos; diecisiete años más tarde, en 1712, publica su Mémoire sobre el cálculo de los estribos.

EQUILIBRIO DE ARCOS: TRATADO DE MECÁNICA, 1695

Philippe de La Hire trata el equilibrio de los arcos en la Proposición CXXV de su *Tratado de mecánica.*[8] La Hire considera el equilibrio de una bóveda independientemente de sus apoyos, aunque comienza llamando la atención, sobre la dificultad que existe para obtener el tamaño necesario de los estribos para soportar los arcos y las bóvedas. No tratará este problema hasta su segundo trabajo de 1712.

La memoria considera un arco de medio punto, suponiendo las superficies de contacto entre las dovelas infinitamente pulidas, pudiendo deslizar las unas sobre las otras sin ningún impedimento. Esta hipótesis obliga a que las fuerzas de apoyo entre las dovelas sean perpendiculares.

El problema planteado en la memoria es encontrar los pesos de las dovelas, de manera que se mantengan en equilibrio. La Hire es precursor en la utilización del polígono de fuerzas para el equilibrio de un sistema de fuerzas concurrentes, y en la definición del polígono funicular fijado por la forma del arco.

Los pesos de cada dovela son aplicados en sus respectivos centros de gravedad y siguen la dirección vertical. Se asigna un peso a la clave, fijando su espesor, y se considera tanto la clave como el resto de las dovelas como cuñas que se apoyan en las contiguas a través de las superficies de contacto. El peso de cada dovela es soportado por fuerzas siempre perpendiculares (al no tener rozamiento) a dichas superficies de contacto (juntas). Sucesivamente y en cada dovela, estas dos fuerzas y el peso de la misma, deben equilibrarse (ver Figs. 2 y 3).

La Hire utiliza el principio basado en que las intensidades respectivas de tres fuerzas en equilibrio convergentes en un punto, deben estar en proporción con los lados de un triángulo perpendicular a la dirección de dichas fuerzas. Así, el peso se corresponde con el lado LO y los empujes en cada junta con los lados coincidentes.

Fijado el peso de la dovela de la clave y conociendo las direcciones de todas las fuerzas actuantes en cada una de las dovelas, La Hire, aplicando el principio anterior (comenzando desde la clave), obtiene los pesos de todas las dovelas que forman los arcos y las bóvedas. De hecho, el polígono CKLOE... no es más que el polígono de fuerzas del polígono antifunicular EDBA... Como puede verse en el dibujo, la fuerza que equilibra la dovela de los arranques debe tener un peso infinito, en la hipótesis aceptada de ausencia de rozamiento; en efecto, al ser las líneas de arranque del arco horizontales nunca podríamos cerrar un triángulo perpendicular a la dirección de dichas fuerzas.

La Hire, ante dicha contradicción, plantea que en realidad las juntas no resultan perfectamente lisas a causa del material que se interpone entre ellas, y que el rozamiento, se encargará de anular esta paradoja.

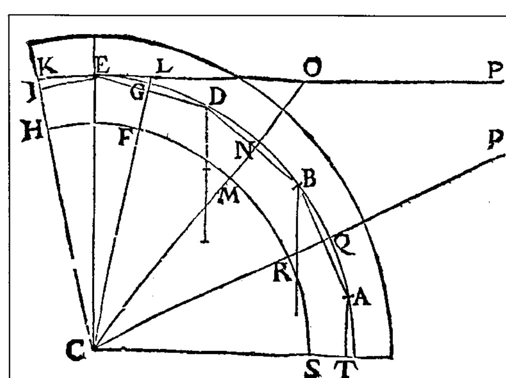

Figura 2
Equilibrio de un arco formado por dovelas infinitamente pulidas (La Hire, 1695)

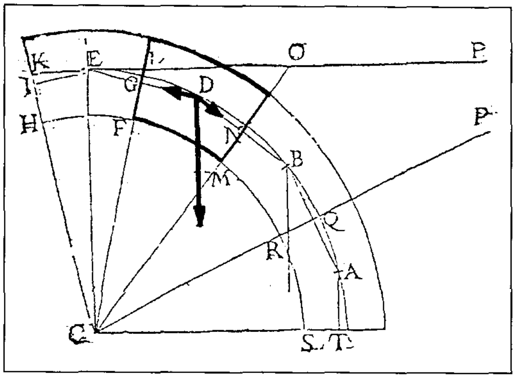

Figura 3
Equilibrio de una dovela

Esta memoria, tuvo gran influencia en el proyecto de arcos, apareciendo en muchos casos el arco de sección variable, que presenta la sección mínima en la clave, creciendo la sección de sus dovelas hasta alcanzar el máximo en los arranques.

CÁLCULO DE ESTRIBOS: MEMORIA SOBRE LA CONSTRUCCIÓN DE BÓVEDAS EN LOS EDIFICIOS, 1712

El objetivo de la Memoria[9] es el cálculo del los estribos para un arco (o bóveda de cañón) de forma dada. La Hire repite la afirmación que ya hizo al comienzo de su análisis en el tratado de mecánica: «Uno de los problemas más difíciles de la Arquitectura es el de conocer el tamaño que han de tener los estribos de las bóvedas para resistir su empuje; y los Arquitectos no han encontrado hasta el presente ninguna regla cierta para calcularlos.»[10] El tamaño de los estribos depende de la luz del arco, de su sección y de la altura de sus arranques. La Hire considera este problema perteneciente a la Mecánica y advierte que para resolverlo hay que hacer algunas suposiciones. Así, define el empuje de las bóvedas, como el esfuerzo que hacen todas las piedras que la forman, y que están talladas en forma de cuña (dovelas), para separar las jambas o estribos, que sostienen estas bóvedas. Luego realiza las siguientes suposiciones:

— Supone por observación que cuando los estribos de una bóveda son demasiado débiles para soportar su empuje ésta se rompe hacia la mitad, entre la imposta y la clave.

— Todas las dovelas en la zona superior del semiarco (MLFN en la Fig. 4) actúan como una sola pieza. Por tanto, considera tres bloques de mayor tamaño: La zona superior del semiarco, y las dos zonas inferiores unidas solidariamente a los estribos.

— Considera aplicado el empuje de la parte superior en el intradós de la junta de rotura. Esto implica, aunque La Hire no lo dice explícitamente, dicho empuje debe ser tangente al intradós.

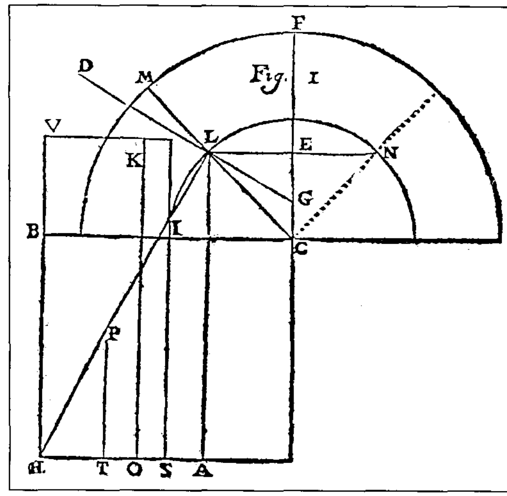

Figura 4
Cálculo del estribo para un arco de medio punto (La Hire, 1712)

El considerar el sector superior como una «cuña» le permite definir el empuje de la bóveda, que no es sino el de la cuña que tiende a descender por su propio peso. La Hire ya había estudiado con detalle el problema de la cuña en su Tratado de Mecánica (de hecho, la cuña era una de las «máquinas simples» estudidas en la mecánica de los griegos) y puede calcular sin dificultad esta fuerza que tiene que ser normal a la junta de rotura (además de ser tangente como hemos visto). La Fig. 5 dibuja en esquema el «mecanismo» que pudo haber imaginado La Hire, en el momento en que la cuña superior empieza a empujar los estribos, estrictamente en equilibrio.

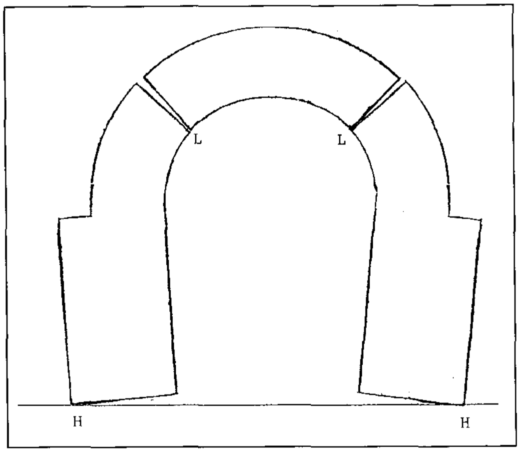

Figura 5
Situación de equilibrio límite de la cuña superior y los estribos

Este empuje tiende a hacer volcar el estribo ISHB del que forma parte también la parte inferior de la bóveda por debajo de la junta de rotura (ambas partes forman «como una sola piedra», dice La Hire[11]), y el

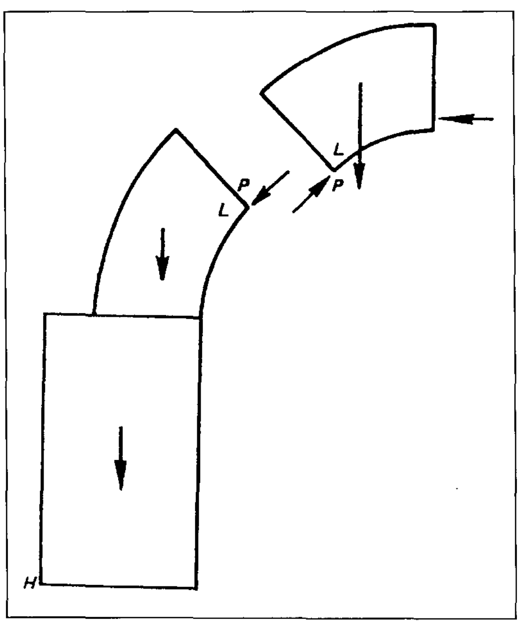

Figura 6
Fuerzas que intervienen en el equilibrio de una bóveda y su estribo, según La Hire (Heyman, 1998)

problema que se plantea es el de calcular el espesor del arco HS para cualquier arco. En la Fig. 6 (de Heyman[12]) se han dibujado las distintas fuerzas que intervienen.

En la memoria se desarrollan tres procedimientos: el primero analítico completo, el segundo analítico reducido, simplificación del anterior, y el último gráfico. Se trata el arco de medio punto y, al final, el arco adintelado aunque La Hire advierte que el método es aplicable a cualquier tipo de bóvedas: «Se hará lo mismo para todo tipo de arcos, ya sean rebajados, peraltados o, incluso, arcos por traquil.»

Empieza, considerando una bóveda con perfil de medio punto (Fig. 4) y, para una más sencilla resolución del problema, considera también las siguientes simplificaciones:

— El arco y su estribo tienen igual espesor, y están construidos de manera que es posible considerar sus superficies en lugar de sus pesos, al estar construidos del mismo material.

— Considera solo la mitad del arco, ya que el arco es simétrico y, por tanto, en todo momento los esfuerzos van a ser simétricos.

El proceso seguido es el siguiente. En primer lugar calcula el empuje producido por la cuña superior, que es, por supuesto, proporcional al peso de la madia cuña LMF. La Hire descompone este empuje en dos fuerzas una en la dirección LH en la Fig. 4 (que no afecta la estanilidad del estribo ya que pasa por el punto de giro) y otra en dirección perpendicular LD (que llama "D") que es la que tiende a volcar el estribo. La Hire deduce, con la ayuda del teorema de los senos, que esta fuerza desestabilizante es al peso de la media cuña, como GC es a LG. La deducción es correcta e independiente del ángulo que forme la junta considerada con la horizontal (aunque la junta dibujada está a 45°).[13]

Obtenida la fuerza D en el extremo L del brazo HL, proyecta el peso del estribo junto a la parte inferior del arco sobre la horizontal HA. La Hire en vez de considerar por separado el peso de los dos elementos estructurales estabilizantes, estribo, y porción de arco con sus respectivas distancias a H, reduce el área del trozo de arco ILM a la de un rectángulo que tiene la misma base que el estribo y concentra posteriormente el peso en el mismo punto T. Establece después el equilibrio de la «biela acodada» representada en la Fig. 7, tomando momentos respecto al punto H. Esto nos lleva a una expresión que relacio-

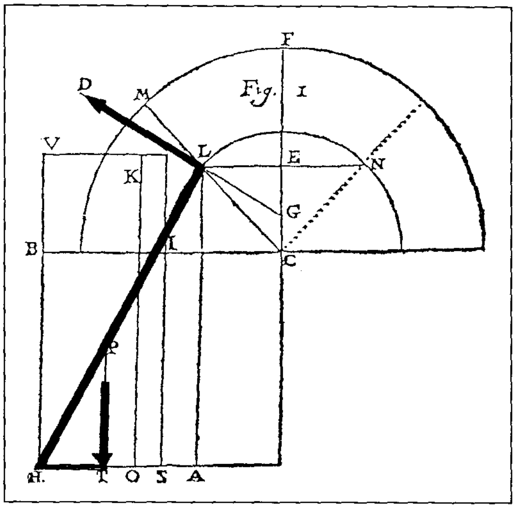

Figura 7
Representación del equilibrio de fuerzas y momentos, con ayuda de una "biela acodada" (basado en La Hire 1712)

na los parámetros geométricos del arco, y donde la incógnita es el espesor del estribo HS. La ecuación, con la nomenclatura de La Hire es como sigue (se ha modificado ligeramente para facilitar su lectura):

$$1/2\ bfy^2 + 1/2\ f(vv)y + fh(vv) = (ss)eg - (ss)fy - (ss)fa$$

donde (Fig. 4): y = HS (la incógnita); b = IS; f = LE; (vv) = área de ILM; h = TD; (ss) = área de LMF; e = CE; g = LA; a = SA.

En realidad, se trata de una sencilla ecuación de segundo grado en y ; la única dificultad reside en hallar la posición del centro de gravedad de la parte de bóveda ILM. Sin embargo, el elevado número de parámetros geométricos (¡nueve!)que La Hire hace intervenir en su desarrollo, hace que su aplicación sea excesivamente trabajosa.

Así, a continuacion, La Hire propone una notable simplificación para su aplicación práctica: sustituye la parte ILM por un rectángulo equivalente, IBV, que es la prolongación del estribo hasta la altura L. Esto va a favor de seguridad y la expresión se simplifica enormemente:

$$y^2 + 2ny = 2me - 2na$$

donde: m = (ss)/f; n = (ss)/g.

El número de parámetros geométricos se reduce a menos de la mitad y la ecuación se vuelve manejable. A continuación propone un método geométrico de resolución de la ecuación, Fig. 8, útil en una época en la que los cálculos numéricos eran siempre trabajosos.[14]

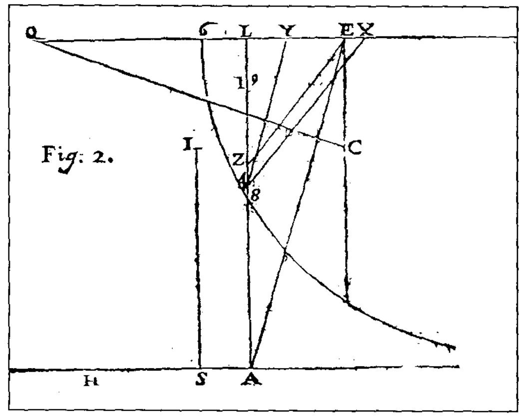

Figura 8
Método gráfico simplificado el cálculo de estribos (La Hire, 1712)

La construcción geométrica simplificada le permite darse cuenta de un hecho que considera fundamental: «Puede verse claramente gracias a esta construcción que cuanto más alto sea el estribo, para el mismo arco, más espesor HS deberá tener dicho estribo».[15] Este argumento será utilizado en todo el siglo XVIII para criticar las reglas geométricas tradicionales, como la de Derand, que no tienen en cuenta la altura del estribo.[16]

La memoria finaliza con la aplicación de la teoría expuesta al cso de un arco adintelado. El proceso es el mismo: primero se deduce la expresión analítica simplificada y, luego, se da la resolución gráfica de la ecuación anterior. En este caso, La Hire superpone los dos dibujos, Fig. 9.

En definitiva, establecida la posición de la junta de rotura la teoría de La Hire permite fijar el empuje de la bóveda en posición, magnitud y dirección. Conocido este empuje el cálculo del estribo no reviste nin-

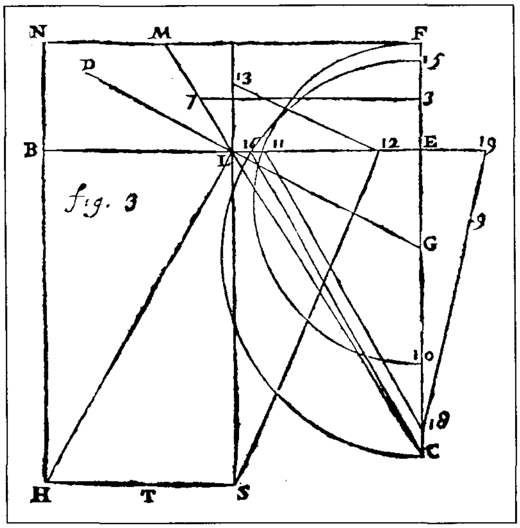

Figura 9
Cálculo del estribo de un arco adintelado (La Hire, 1712)

guna dificultad: basta con tomar momentos respecto al extremo inferior del estribo, alrededor del cual se produciría el vuelco.

Resulta interesante que La Hire no determina la posición de dicha junta; sólo dice que «ordinariamente cuando los estribos de una bóveda son demasiado débiles para soportar su empuje la bóveda se rompe hacia la mitad entre la imposta y la mitad de la clave». Con seguridad se da cuenta de que al variar la posición de la junta resultan valores diferentes del empuje y, por tanto, estribos diferentes. De hecho la deducción matemática que aporta es enteramente general, para cualquier posición de la junta.

Cabría pensar si sería posible determinar su posición mediante tanteos, buscando el empuje máximo. De hecho estos tanteos no llevan a ningún lado; hemos comprobado que, por ejemplo, para un arco de medio punto el empuje crece indefinidamente al desplazar la junta hacia la clave. Posiblemente La Hire sugería tantear en las proximidades de la mitad entre imposta y clave; no dice nada sobre este asunto.

Otro aspecto a considerar es el de la verificación; cualquier teoría científica requiere una comprobación experimental. ¿Cómo sabía La Hire que su teoría no conducía a resultados absurdos, a estribos enormes o insuficientes? En realidad, La Hire ya sabía, como lo sabía cualquier conocedor de la arquitectura o constructor experimentado, la proporción aproximada del estribo en relación con la luz; bastaba con mirar construcciones reales, o con comparar con las reglas empíricas que codificaban las proporciones de estas construcciones.

De hecho, como ha señalado Heyman,[17] la teoría de La Hire conduce a un empuje de la bóveda más desfavorable que el empuje real. Como resultado de ello, los estribos calculados por el método de La Hire, están sobredimensionados y tienen una proporción parecida a los estribos habitualmente empleados en la práctica constructiva. Esta es la verificación que sin duda realizó La Hire, pero que no cita en su Memoria (quizá por obvia).

La simplificación de Bélidor

Para una aplicación práctica, el método de cálculo de La Hire resulta artificioso y complicado (a pesar de los bienintencionados intentos de simplificación y las construcciones gráficas); además, la posición de la junta de rotura no está determinada. En este estado el método era casi inaplicable para un arquitecto o ingeniero.

Fue un ingeniero, Bernard Forest de Bélidor (1697-1761), quien primero se dio cuenta de las posibilidades de la teoría de La Hire, y de la necesidad de simplificar su aplicación. De hecho, fue Bélidor el primero en aplicarlo a un caso práctico; en su *Nuevo curso de matemáticas*, dedica un apartado a «La aplicación de la mecánica a la construcción de los almacenes de pólvora» en el que incluye una Tabla para calcular el espesor de los estribos de estos almacenes.[18]

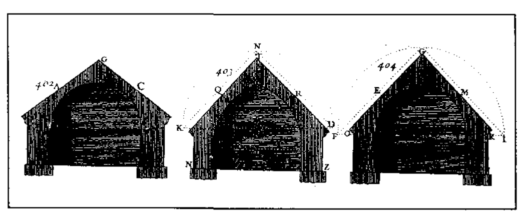

Figura 10
Almacenes de pólvora según Bélidor. Están marcadas las juntas de rotura consideradas en el cálculo de la Tabla de la Fig. 11

Bélidor critica las reglas tradicionales (cita expresamente la de Derand) «porque no tienen en cuenta ni el espesor del arco ni la altura de los estribos», y cita la Memoria de La Hire de 1712 como base de sus cálculos para elaborar la Tabla, Fig. 11. Renuncia a exponer la teoría completa de La Hire por su «complicado cálculo algebraico» y refiere directamente a los lectores a su Memoria.

TABLE

Pour regler l'épaiſſeur qu'il faut donner aux pieds droits des voûtes des Magazins à poudre.

Largeur des Magaz. à poudre.	Epaiſſeur des pieds droits des voûtes en plein ceintre pour les Magazins à un étage.			Epaiſſeur des pieds droits des voûtes en tiers points pour les Magazins à un étage.			Epaiſſeur des pieds droits pour les voûtes des Magazins qui ont un étage ſouterrein.			Epaiſſeur des pieds droits pour les voûtes des Magazins qui ont un étage au deſſus de celui du rez-de-chauſſée.		
pieds	*pie.*	*pou.*	*lig.*	*pie*	*pou.*	*lig.*	*pieds.*	*pou.*	*lig.*	*pieds.*	*pou.*	*lig.*
20	5	10	0	5	2	0	7	0	0	5	5	6
21	5	11	8	5	3	0	7	2	5	5	8	6
22	6	2	2	5	5	6	7	4	10	5	10	6
23	6	4	6	5	7	4	7	7	3	6	0	10
24	6	6	0	5	10	0	7	9	8	6	2	6
25	6	8	3	6	0	4	8	0	1	6	4	6
26	6	10	0	6	2	0	8	2	6	6	5	11
27	6	11	9	6	5	0	8	4	10	6	8	0
28	7	2	6	6	8	0	8	7	3	6	10	3
29	7	4	9	6	10	6	8	9	8	7	0	0
30	7	7	0	7	1	0	9	0	1	7	2	9
31	7	9	4	7	2	4	9	2	6	7	5	6
32	7	11	10	7	4	9	9	5	11	7	8	0
33	8	2	8	7	7	0	9	8	4	7	10	6
34	8	3	11	7	9	4	9	10	9	8	2	0
35	8	5	9	7	11	0	10	1	2	8	4	2
36	8	8	0	8	0	0	10	3	7	8	6	0

Figura 11
Tabla para el cálculo de los estribos de los almacenes de pólvora (Bélidor, 1725)

En esta primera aplicación Bélidor realiza ya una simplificación: fija la junta de rotura exactamente en la mitad del arco entre la imposta y la clave. En cuanto a la posición del empuje (fijado por La Hire en el intradós y que él como veremos establece cuatro años después, 1729, en la mitad de la junta), no dice nada. Tratando de averiguar este punto, hemos verificado dos casos de la primera tabla (primera columna en la Fig. 11; bóvedas de medio punto y estribos de 9 pies de altura) para luces de 20 y 30 pies, respectivamente, tratando de averiguar la posición del empuje. En el primer caso fija el empuje, como La Hire, en el intradós; pero en el segundo lo fija en la mitad de la junta. A falta de una comprobación del resto de la Tabla, esto sugiere una etapa de tanteos previa a la formulación de una teoría completa.

Es en su *Ciencia de los ingenieros*, publicada cuatro años más tarde,[19] donde Bélidor expone su teoría completa de bóvedas con ejemplos de aplicación. De hecho, el libro II de este importante compendio (el primer manual de ingeniería) está dedicado enteramente a la «Mecánica de las bóvedas».

En el primer capítulo expone su teoría del funcionamiento de un arco de dovelas sin rozamiento. La exposición es confusa pero los argumentos le sirven para rechazar explícitamente la regla empírica de Derand. Los capítulos segundo y tercero están dedicados enteramente al cálculo de estribos: primero para bóvedas de medio punto (cap. 2) y después para bóvedas rebajadas, apuntadas, adinteladas (cap. 3). Al final del libro trata brevemente el proyecto de puentes.

Bélidor hace dos modificaciones al método de La Hire:

1) fija la junta de rotura a 45°

2) sitúa el empuje en la mitad de dicha junta

Además, Bélidor toma momentos directamente respecto al borde exterior del estribo, sin recurrir a la complicada «biela acodada» de La Hire, Fig. 12. Fi-

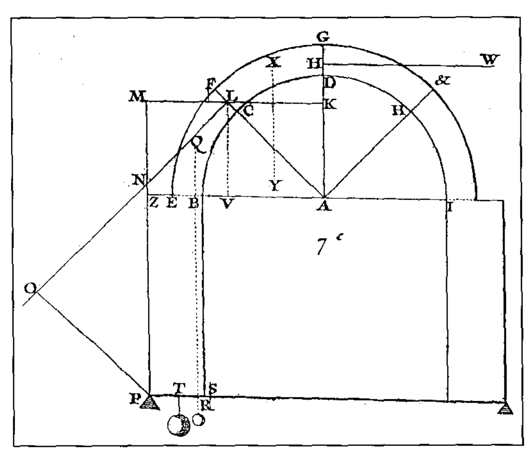

Figura 12

nalmente, Bélidor se ocupa del problema de la seguridad; advierte que el cálculo da el estribo en «el punto de equilibrio» con el empuje de la bóveda, y recomienda aumentar su espesor en 5 ó 6 pulgadas, o añadir contrafuertes.[20]

La aplicación del método de Bélidor es sencilla y carece de ambigüedad. Por otra parte, el libro incluye numerosos ejemplos de aplicación a las situaciones más corrientes en la práctica de la construcción, considerando incluso el caso de edifcios completos, Fig. 13. Como consecuencia de ello, el método de La Hire modificado por Bélidor se convirtió rápidamente en el método estándar de cálculo de estribos.

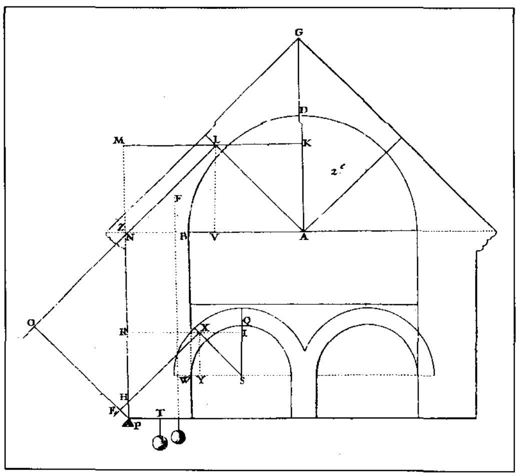

Figura 13
Aplicación del método de Bélidor a un edificio (Bélidor, 1729)

CÁLCULO DE ESTRIBOS DE PUENTES: LAS TABLAS DE PERRONET

Bélidor trata sumariamente el proyecto de puentes. En cuanto al espesor en la clave da las tablas de Gautier,[21] excesivamente conservadoras; sobre los estribos (cepas) no habla, y en de las pilas intermedias cita la antigua regla empírica de 1/5 de la luz.

Jean Rodolphe Perronet (1708-1794), el gran ingeniero francés del siglo XVIII, revolucionó el proyecto y la construcción de puentes. Favoreció el empleo del arco carpanel de varios centros, disminuyó el espesor de las pilas, y mejoró el proyecto de las cimbras y las técnicas de descimbramiento. Además, ideó una nueva regla para calcular el espesor de la bóveda del puente en la clave, que conducía a espesores notablemente menores que la regla de Gautier.

Para el cálculo de los estribos de los puentes acepta la teoría de La Hire, situando el empuje en el intradós, pero en el caso de arcos rebajados carpaneles de tres centros dice que la junta de rotura no se producirá a 45° sino en el punto de cambio de curvatura, L en la Fig. 14.

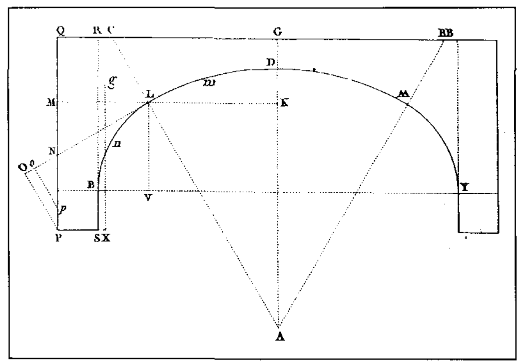

Figura 14
Cálculo del estribo de un arco carpanel (Perronet/Chezy, 1810)

Hacia 1750 aplica esta teoría a la confección de unas completas tablas para el cálculo de estribos de puentes con bóvedas de medio punto y carpaneles de tres centros; las tablas dan para cada tipo de arco, luz y altura de los arranques, el espesor en la clave y el de los estribos. Por otro lado, Perronet escribió una larga memoria con una primera parte teórica como justificación (que incluía las tablas al final). La memoria no llegó a publicarse aunque se conserva el manuscrito completo de una de las primeras versiones.[22] No obstante las tablas de Perronet tuvieron gran difusión entre los ingenieros en la segunda mitad del XIX, y Patte las incluye en el tomo VI del *Curso de arquitectura* de Blondel, si bien dice ignorar el nombre de su autor.[23]

De nuevo, encontramos en Perronet una actitud «práctica»: no tiene inconveniente en modificar la teoría aceptada de Bélidor o la originaria de La Hire para que los resultados se adapten a lo que le dicta su experiencia y el volumen acumulado de información sobre puentes construidos.

Tras su muerte Chezy publicó las tablas con un breve texto explicativo del proceso de cálculo.[24] Las tablas fueron recogidas en muchos de los tratados de construcción de más difusión en la primera mitad del siglo XIX, cuando la teoría de La Hire se consideraba completamente superada.[25]

La «estabilidad de La Hire»

La teoría de La Hire daba buenos resultados prácticos pero tenía una base teórica defectuosa: dado el elevado coeficiente de rozamiento de las piedras, resulta difícil creer, como Bélidor, que el empuje de la bóveda se debe al deslizamiento de la parte superior que funciona como una cuña. De hecho los experimentos con modelos de bóvedas demostraron ya en 1732 que las piedras no deslizan,[26] el colapso se produce por formación de «articulaciones» entre las piedras. Couplet[27] escribe la primera contribución sobre esta base en 1729 y Coulomb[28] establece la teoría correcta para calcular el empuje de las bóvedas en 1773. Los ensayos a gran escala de Boistard[29] en 1800 ratifican el modo de colapso de las bóvedas por formación de articulaciones.

A principios del siglo XIX nadie duda que la teoría de La Hire es defectuosa, pero se sigue usando. Cuando en 1820 Audoy[30] aplica la teoría correcta de Coulomb al cálculo de los estribos se ve obligado a plantearse seriamente el problema de la seguridad; los estribos obtenidos corresponden a una situación real de colapso y son muy esbeltos. ¿Cuánto hay que recrecer los estribos? Audoy afirma que se trata de un problema práctico y que habría que comparar con estribos de construcciones existentes, o con un método sancionado por la práctica. el método de La Hire «da espesores verificados por el tiempo y conviene compararlos con los obtenidos con nuestra teoría».[31]

Así, Audoy calcula que hay que multiplicar el empuje horizontal de la bóveda en la clave por 1,9 para que el estribo resultante tenga las mismas dimensiones que el obtenido por la teoría de La Hire. No se puede llevar más lejos el espíritu práctico: se aplica la teoría correcta, pero se establece la seguridad respecto a la teoría incorrecta de La Hire. Durante las siguientes dos décadas la teoría de La Hire sigue siendo el referente sobre la estabilidad de los estribos: un estribo era suficientemente estable si poseía la «estabilidad de La Hire» y este dato aparece con frecuencia en las tablas para el cálculo de estribos.[32]

142 VOÛTES EN PLEIN CINTRE, A EXTRADOS PARALLÈLE.

(A) *TABLE des angles de rupture, des poussées et des épaisseurs limites de piédroits.*

VALEUR du rapport $K=\frac{R}{r}$.	RAPPORT du diamètre à l'épaisseur.	VALEUR de l'angle de rupture	RAPPORT C de la poussée au carré du rayon r de l'intrados.		RAPPORT $\sqrt{2C}$ de l'épaisseur limite du piédroit au rayon de l'intrados.	
			Cas de la rotation.	Cas du glissement.	Équilibre strict.	Stabilité de Lahire.
2.732	1.154	0° 00′	0,00000	0,98923		
2.70	1.176	18 42	0,00211	0,96262		
2.65	1.212	22 00	0,00319	0,92168		
2.60	1.250	27 30	0,00809	0,88151		
2.50	1.333	35 52	0,02283	0,80346		
2.40	1.428	42 6	0,04109	0,72847		
2.30	1.538	46 47	0,06835	0,65654		
2.20	1.666	51 4	0,08648	0,58767		
2.10	1.810	54 27	0,10926	0,52186		
2.00	2.000	57 17	0,13017	0,45912	0,9582	1,3223
1.90	2.282	59 37	0,14813	0,39943	0,8938	1,2320
1.80	2.500	61 24	0,16373	0,34281	0,8280	1,1414
1.70	2.857	62 53	0,17180	0,28924	0,7606	1,0484
1.60	3.333	63 49	0,17517	0,23874	0,6910	0,9525
1.59	3.389	63 52	0,17533	0,23386	0,6839	0,9427
1.58	3.448	63 55	0,17535	0,22901	0,6768	0,9329
1.57	3.508	63 58	0,17524	0,22434	0,6698	0,9233
1.56	3.571	64 1	0,17499	0,21940	0,6624	0,9131
1.55	3.636	64 3	0,17478	0,21464	0,6552	0,9031
1.54	3.703	64 5	0,17445	0,20991	0,6479	0,8931
1.53	3.773	64 7	0,17397	0,20521	0,6406	0,8831
1.52	3.846	64 8	0,17352	0,20054	0,6333	0,8730
1.51	3.920	64 8	0,17310	0,19590	0,6259	0,8628
1.50	4.000	64 9	0,17254	0,19130	0,6185	0,8527
1.49	4:081	64 8	0,17180	0,18673	0,6111	0,8424
1.48	4.166	64 8	0,17095	0,18218	0,6036	0,8320
1.47	4.255	64 7	0,17008	0,17766	0,5961	0,8216
1.46	4.347	64 6	0,16915	0,17318	0,5885	0,8112
1.45	4.444	64 5	0,16798	0,16872	0,5809	0,8007
1.44	4.545	64 3	0,16683	0,16430	0,5776	0,7962
1.43	4.651	64 00	0,16568	0,15991	0,5756	0,7934
1.42	4.761	63 56	0,16448	0,15555	0,5735	0,7906
1.41	4.878	63 52	0,16317	0,15122	0,5713	0,7874
1 40	5.000	63 48	0,16167	0,14691	0,5686	0,7838
1.39	5.128	63 43	0,16014	0,14264	0,5659	0,7801
1.38	5.263	63 38	0,15845	0,13841	0,5629	0,7760
1.37	5.406	63 32	0,15672	0,13420	0,5598	0,7717

Figura 15
Tablas para el cálculo de estribos (Petit, 1835)

Conclusión

Philippe de La Hire es el primero en «resolver» el problema fundamental de la construcción abovedada, el cálculo de los estribos, dentro del marco de la Mecánica. El método propuesto no se deduce de una teoría científica rigurosa previa; La Hire pretende simplemente calcular un empuje de la bóveda que conduzca a unos estribos suficientemente seguros. La referencia para verificar su teoría estaba, por supuesto, en las proporciones habitualmente aceptadas en la práctica, que el sin duda conocía.

Efectivamente, la teoría de La Hire, modificada ligeramente primero por Bélidor y después por Perronet, conduce a buenos resultados prácticos, si bien las hipótesis de partida pueden parecer arbitrarias. (De hecho La Hire no propone ninguna teoría sobre el funcionamiento estructural de las bóvedas. La interpretación mecánica posterior de Bélidor suponiendo que, efectivamente, la cuña superior tiende a deslizar, es simplemente absurda dado el elevado coeficiente de rozamiento de las piedras.)

El método de La Hire refleja el punto de vista «técnico» al que se aludió al principio: el constructor, ingeniero o arquitecto, no es un científico y usará la mejor teoría disponible para resolver el problema que le ocupa: en este caso calcular el estribo para una bóveda dada. Quizá el mejor ejemplo de esta actitud lo suministre el pragmatismo de los ingenieros franceses de la primera mitad del XIX que, disponiendo de la teoría correcta, toman como referencia la «estabilidad de La Hire», obtenida por la teoría incorrecta.

El trabajo del arquitecto o ingeniero es construir «aquí y ahora». Como dijo Rankine, si la pregunta del científico es ¿qué quiero saber?, la del constructor es ¿qué quiero hacer? La respuesta a esta última no admite dilaciones.

NOTAS

1. Sobre la teoría moderna de estructuras que permite juzgar estas reglas: J. Heyman, *The Stone Skeleton. Structural Engineering of Masonry Architecture*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. Sobre las reglas estructurales hasta el siglo XIX, con un inventario y estudio sobre su validez: S. Huerta, «Diseño estructural de arcos, bóvedas y cúpulas en España, ca. 1500- ca. 1800.» Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, E. T. S. de Arquitectura, 1990.
2. F. Derand, *L'architecture des voûtes ou l'art des traits et coupe des voûtes,* Paris: 1643. La construcción geométrica es como sigue: Sea un arco cualquiera de medio punto, apuntado o rebajado, por ejemplo, el de medio punto, P, Fig. 1. Primero se divide el intradós del arco en tres partes iguales, definidas en este caso por los puntos B y C. Luego se traza una recta que una uno de los puntos con el punto de arranque más cercano, el D en este caso. Finalmente, sobre dicha recta se lleva a partir de D una distancia DF = CD, por ejemplo con la ayuda de un compás como aconseja Derand. El punto F nos define el estribo que la regla considera de sección constante, sin retallos. Esta regla da estribos mayores para arcos rebajados y menores para arcos apuntados, tal y como puede verse en la figura. En la época gótica se tomaba el arco perpiaño del tramo considerado. Con frecuencia la regla se ha interpretado erróneamente. Para una interpretación correcta ver: G. Ungewitter y K. Mohrmann, *Lehrbuch der gotischen Konstruktionen.* 3ª ed. Leipzig: 1890. Sobre su aplicación a algunas catedrales góticas: S. Huerta "Mecánica de las bóvedas de la catedral de Gerona." *Actas del curso sobre grandes bóvedas hispanas (Madrid, mayo de 1997)* S. Tarragó Cid ed. Madrid: CEDEX-CEHOPU, 1998. pp. 53-65.
3. Para un excelente resumen de la historia de la aplicación de la mecánica a las construcciones, ver: H. Straub, *A History of Civil Engineering,* Londres: Leonard Hill, 1952.
4. W. J. M. Rankine, «Preliminary dissertation on the harmony of theory and practice in Machanics,» *A Manual of Applied Mechanics,* 3ª ed. Londres: Charles Griffin, 1864. pp. 1-11. Véase también: D. F. Channell, «The Harmony of Theory and Practice: The Engineering Science of W. J. M. Rankine,» *Technology and Culture,* vol. 23, 1982, pp. 39-52.
5. Rankine, op. cit. p. 10.
6. Hooke tuvo la idea genial de asimilar el funcionamiento del arco a una cadena invertida: «Del mismo modo que cuelga el hilo flexible, así, pero invertido, se sostendrá el arco rígido», escribió en forma de anagrama al final de uno de sus libros (*A description of helioscopes, and some other instruments.* Londres, 1676). La idea de Hooke fue aplicada en el proyecto de puentes por los ingenieros ingleses del s. XVIII, ver: T. Ruddock, *Arch Bridges and Their Builders, 1735-1835*, Cambridge, 1979. Sobre la probable aplicación de su principio al proyecto de la cúpula de S. Pablo, en colaboración con Wren, ver: H. I. Dorn, *The Art of Building and the Science of Mechanics*, Ph.D. diss., Princeton University, 1970, pp. 107-121, y R. Graefe «Zum Formgebung von Bögen und Gewölben,» *Architectura*, vol. 16, 1986, pp. 50-67.
7. Para una breve biografía y una exposición de sus contribuciones científicas, ver la entrada correspondiente en: C. C. Gillispie, *Dictionary of Scientific Biography*. New York: Charles Scribner's Sons, 1970-80. 16 Vols.
8. Ph. de La Hire, *Traité de méchanique, ou l'on explique tout ce qui est nécessaire dans la pratique des Arts, et les proprietés des corps pesants lesquelles ont eu plus grand usage dans la Physique*, Paris: 1695.
9. P. de La Hire, "Sur la construction des voûtes dans les

édifices." *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris,* 1712. pp. 70-78. Presentada el 27 de febrero de 1712; el volumen correspondiente al 1712 se publicó en 1714; se volvió a publicar en 1731. Para un examen detallado de su contenido ver: A. Buti y M. Corradi, "I contributi di un matematico del XVII secolo ad un problema di architettura: Philippe de La Hire e la statica degli archi." *Atti della Accademia Ligure di Scienze e Lettere, Genova,* 1981 (pub. 1982), Vol. 38. pp. 303-323. Véase también: E. Benvenuto, *An Introduction to the History of Structural Mechanics. Part II: Vaulted Structures and Elastic Systems.* New York/Berlin: Springer Verlag, 1991.

10. Ibidem, pág. 70.
11. Ibidem, pág. 71.
12. J. Heyman, *Structural analysis. A historical approach,* Cambridge: University Press, 1998.
13. Debemos esta demostración a G. López Manzanares.
14. Para una comparación entre las distintas expresiones analíticas y la construcción gráfica, ver: A. Buti y M. Corradi, op. cit., pág. 315.
15. La Hire, op. cit. pág. 76.
16. En realidad la línea de empujes en el estribo tiene una asíntota para un crecimiento indefinido de la altura del estribo y esto hace que pueda obviarse este parámetro. El primero en darse cuenta de esto fue: Danyzy, "Méthode générale pour déterminer la résistance qu'il faut opposer à la poussée des voûtes." *Histoire de la Société Royale des Sciences établie à Montpellier,* Vol. 2, 1732. pp. 40-; si bien normalmente se atribuye a H. Moseley, *The Mechanical Principles of Engineering and Architecture,* Londres: 1843.
17. J. Heyman, *Coulomb's Memoir on Statics: An Essay in the History of Civil Engineerin,*. Londres: Cambridge University Press, 1972. (reimpre. Londres: Imperial College, 1998).
18. B. F. Belidor, *Nouveau cours de Mathématique a l'Usage de l'Artillerie et du Génie où l'on applique les parties les plus utiles de cette Science à la Théorie et à la pratique des différens sujets qui peuvent avoir rapport à la Guerre,* París: 1725, pp. 490-7, lám. 31.
19. B. F. Belidor, *La science des ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification et architecture civile.* Paris: 1729.
20. Bélidor, op. cit., Lib. II, pág. 14.
21. H. Gautier, H. *Dissertation sur l'epaisseur des culées des Ponts, sur la Largeur des piles, sur la Portée des voussoirs, sur l'Erfort & la Pesanteur des Arches à differens surbaissemens...* Paris: 1717.
22. J. R. Perronet, «Mémoire sur l'épaisseur que doivent avoir les voûtes des ponts, avec des tables et expériences,» 1748. Bibliothéque de l'École des Ponts et Chaussées, Ms. 1491, 32 fol.
23. J. F. Blondel y P. Patte, *Cours d'Architecture, ou Traité de la décoration, distribution et construction des bâtiments... continué par M. Patte.* tomo VI, Paris: 1777, pp. 193-205.
24. J. R. Perronet y Chezy "Formule générale pour déterminer l'épaisseur des piles et culées des arches des ponts, soit qu'elles soient en plein cintre ou surbaissées." *Recueil de divers mémoires extraits de la bibliothéque impériale des ponts et chaussées a l'usage de MM. les ingénieurs,* editado por P. Lesage. Paris: 1810. Vol.2, pp. 243-273, lám. XVII.
25. Por ejemplo: J. M. Sganzin, *Programme ou résumé des leçons d'un cours de constructions, avec des applications tirées specialement de l'art de l'ingenieur des ponts et chaussées,* 5a ed. Liege: 1840-44; J. A. Borgnis, *Traité élémentaire de construction appliqué a l'architecture civile.* 2ª ed. Paris: 1838.
26. Danyzy, op. cip., más arriba.
27. P. Couplet, P. "Seconde partie de l'examen de la poussée des voûtes." *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences Paris,* 1730. pp. 117-141, láms. 6-7.
28. C. A. Coulomb, "Essai sur une application des régles de maximis et minimis à quelques problémes de statique relatifs à l'architecture." *Mémoires de Mathématique et de Physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences par Divers Savants et lus dans ses Assemblées (Paris),* Vol. 7, 1773. pp. 343-382.
29. L. C. Boistard, "Expériences sur la stabilité des voûtes." *Recueil de divers mémoires extraits de la bibliothéque impériale des ponts et chaussées a l'usage de MM. les ingénieurs,* editado por P. Lesage. Paris: Chez Firmin Didot, 1810. vol.2, pp. 171-217, láms. XI-XVI.
30. Audoy, "Mémoire sur la poussée des voûtes en berceau." *Mémorial de l'Officier du Génie,* nº 4, 1820. pp. 1-96, láms.I-VI.
31. Audoy, op. cit. 75-88.
32. Por ejemplo en las tablas de Petit, "Mémoire sur le calcul des voûtes circulaires." *Mémorial de l'Officier du Génie,* nº 12, 1835. pp. 73-150, que tuvieron gran difusión durante todo el siglo XIX.