UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INFORMÁTICOS

**Métodos y algoritmos en problemas de
decisión de grupo a partir de relaciones de
preferencia fuzzy**

Tesis Doctoral

María Luisa Martínez Céspedes
Ingeniero Superior de Telecomunicación
MS Computación Avanzada para Ciencias e Ingenierías

2019

POLITÉCNICA

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE
INGENIEROS INFORMÁTICOS**

**Métodos y algoritmos en problemas de decisión de
grupo a partir de relaciones de preferencia fuzzy**

Tesis Doctoral

Autora: M.^a Luisa Martínez Céspedes
MS Computación Avanzada para Ciencias e Ingenierías

Directora: Esther Dopazo González
Dra. en Informática (Universidad Politécnica de Madrid)
ETS de Ingenieros Informáticos (UPM)
Center for Computational Simulation (UPM)

2019

Doctorado en Software, Sistemas y Computación

Tribunal de defensa de tesis doctoral

Tribunal nombrado por el Excmo. Sr. Rector de la Universidad Politécnica de Madrid,
el día de de 2019.

Presidente/a

.....

Vocal 1

.....

Vocal 2

.....

Vocal 3

.....

Secretario/a

.....

Suplente

.....

Suplente

.....

Realizado el acto de defensa y lectura de la Tesis el día de
de 2019 en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Informáticos (UPM).

A mis padres.

Agradecimientos

Con estas líneas quiero mostrar mi gratitud a todas aquellas personas que han inspirado este trabajo y que han contribuido durante los últimos años al desarrollo de esta tesis doctoral. Así como a todas aquellas personas de las que he aprendido a lo largo de mi vida.

En primer lugar, agradecerle mí directora de tesis Esther, sin cuya vocación, consejo y ayuda esta tesis nunca hubiese sido posible. Muchas gracias por toda la paciencia y por todo el tiempo y esfuerzo que has empleado en mí.

Debo nombrar aquí también a todos los profesores que a lo largo de mi vida hicieron que sintiese una curiosidad por las matemáticas primero, por la programación y la electrónica más adelante y posteriormente por la teoría de la decisión. En especial agradezco a los profesores del Máster de Computación avanzada para Ciencias e Ingenierías (CACI) su vocación y su capacidad de despertar mi curiosidad.

Agradezco también a IBM, la empresa que confió en la primera idea de este trabajo, financiando su desarrollo tras resultar ganadora del concurso organizado por IBM en la Universidad Politécnica de Madrid: Smart Planet comes to you Challenge, 2013.

En el plano personal, un inmenso y cariñoso gracias a mis padres, M.^a Luisa y José, por haber confiado siempre en mí y haberme apoyado en todo. Gracias por enseñarme que con esfuerzo todo es posible y a tener ideas propias.

Índice general

Tribunal	V
Agradecimientos	IX
Índice de Contenidos	X
Índice de figuras	XII
Índice de tablas	XIII
Resumen	XV
Abstract	XVII
1. Introducción	1
2. Relaciones de Preferencia Fuzzy	5
2.1. Relaciones de Preferencia Fuzzy	5
2.2. Medidas de inconsistencia	12
3. Modelo general y algoritmos para el problema de decisión de grupo a partir de relaciones de preferencia fuzzy posiblemente incompletas	17
3.1. Introducción	18
3.2. Modelo analítico de ajuste de datos	22
3.3. Modelo computacional	33
3.4. Medidas de análisis de la solución	40
4. Problemas de decisión de grupo a partir de relaciones de preferencia fuzzy intervalares	51
4.1. Introducción	52
4.2. Modelo analítico de ajuste de datos	58

4.3. Modelo computacional	63
5. Problema de agregación de rankings imprecisos	71
5.1. Introducción	71
5.2. Agregación de rankings incompletos	75
5.2.1. Ejemplos ilustrativos	78
5.3. Agregación de rankings con información ordinal	86
5.3.1. Ejemplos ilustrativos.	88
6. Conclusiones y líneas futuras de investigación.	95
Referencias	98

Índice de figuras

3.1. Problema de decisión de grupo. Solución colectiva.	20
3.2. Niveles de consenso.	41
3.3. Desacuerdo de los expertos con la solución. Modelo Aditivo.	47
3.4. Desacuerdo de los expertos con la solución. Modelo Multiplicativo.	49
4.1. Desviaciones respecto posición de $0,5(v_i - v_j + 1)$	59
4.2. Variables de desviación respecto del intervalo.	64
5.1. Problema de agregación de rankings.	72
5.2. Métodos de agregación de rankings.	76
5.3. Pesos criterios CIMI 2016.	80
5.4. Ranking ciudades para los criterios seleccionados.	84

Índice de tablas

3.1. Relación de métodos para métricas particulares.	33
3.2. Modelo aditivo. Vectores de Prioridad y Rankings.	47
3.3. Vectores de Prioridad y Rankings. Modelo multiplicativo.	48
4.1. Relación de métodos para métricas particulares.	62
4.2. Rankings obtenidos.	70
5.1. Pesos de los criterios, CIMI 2016.	80
5.2. Rankings parciales de acuerdo a los criterios considerados (CIMI 2016). . .	81
5.3. Rankings.	83
5.4. Muestra de rankings de ciudades inteligentes para tres dimensiones.	84
5.5. Preferencias de los expertos.	89
5.6. Vectores de prioridad y desviaciones.	90
5.7. Preferencias de los expertos.	91
5.8. Vectores de prioridad, rankings y normas vectoriales de $\delta(v)$	92
5.9. Preferencias de los expertos.	92
5.10. Vectores de prioridad y normas vectoriales de $\delta(v)$	93

Resumen

Los problemas de decisión de grupo aparecen en multitud de campos de aplicación tales como la toma de decisiones, motores de búsqueda web, sistemas de búsqueda y extracción de la información, sistemas de recomendación, teoría de la elección social, entre otros. Un problema tipo de decisión de grupo consiste en un conjunto discreto de alternativas que tienen que ser ordenadas en función de la información de preferencias proporcionada individualmente por un grupo de expertos. En aplicaciones del mundo real atendiendo a la complejidad del problema, al volumen de alternativas a considerar, al conocimiento limitado, etc., la información proporcionada por los expertos puede ser cuantitativa o cualitativa, reflejar preferencias vagas o imprecisas o presentar situaciones de falta de datos o información incompleta. En este trabajo se considera que los expertos expresan sus juicios de preferencias mediante relaciones de preferencia fuzzy o rankings ordinales de las alternativas, que pueden ser incompletos o intervalares, como una forma de representar la imprecisión y la vaguedad de los juicios. Un problema adicional que se plantea es el cumplimiento de la propiedad de consistencia de las relaciones de preferencia fuzzy involucradas, considerándose en este trabajo los modelos de consistencia aditiva y multiplicativa. Por otra parte, la información proporcionada por los distintos expertos puede ser diversa y en conflicto, atendiendo a la complejidad del problema, distintos puntos de vista o campos de conocimiento de los expertos, etc.

En este contexto, se presenta un marco teórico general y métodos para abordar de forma simultánea los problemas planteados (datos posiblemente incompletos o imprecisos, falta de consistencia, información heterogénea y posiblemente en conflicto) y proporcionar un ranking colectivo de las alternativas. El modelo general que se plantea se basa en la búsqueda de un vector de prioridad colectivo o de consenso que ajuste “lo mejor posible”, en un sentido preciso, los datos proporcionados por los expertos. En el caso del problema de grupo a partir de múltiples rankings ordinales, posiblemente incompletos o imprecisos, el modelo se articula en dos pasos. En primer lugar, se construye una matriz de preferencias colectivas a partir de los datos ordinales intervalares de partida, como un modo de capturar las preferencias del grupo. En la segunda etapa, se emplean métodos basados en relaciones de preferencia fuzzy o en el autovector de Perron para construir un vector de prioridad colectivo de las alternativas. En todos los casos se proporcionan métodos computacionales de cálculo efectivo de las soluciones y medidas de análisis de las mismas.

Abstract

Group-decision problems arise in many fields such as decision-making, metasearch engines, information retrieval, recommendation systems, social choice theory, etc., just to name a few. Given a discrete set of alternatives, the group-decision problem consists on constructing a ranking of the alternatives that summarizes preference information provided by a group of experts. In real-world applications, due to the complexity of the problem, limited knowledge, large number of alternatives, etc., the available information provided by the experts can be quantitative or qualitative, may often be vague or imprecise or present situations of lack of data or incomplete information. We consider experts express individually their judgments by means fuzzy preference relations or ordinal rankings of the alternatives, which may be incomplete or interval as a way to represent uncertain and incomplete information. An additional problem that arises is the issue of consistency of the fuzzy preference relations involved. In this work we deal with additive and multiplicative consistency models. On the other hand, the information provided by the different experts can be diverse and conflicting, due to the complexity of the problem, different points of view or knowledge fields of the experts, etc.

In this context, a general theoretical framework and methods are presented to address the posed problems simultaneously (incomplete or imprecise data, lack of consistency, multiple and conflicting information) and to provide a collective ranking of the alternatives. The proposed general model is based on deriving a collective or consensus priority vector that “best fits” in a precise sense data provided by the experts. Finally, the alternatives are ranked in view of this priority vector. In the case preference information given by experts is expressed by means of ordinal rankings, possibly incomplete or imprecise, the model is articulated in two steps. First, a collective preference matrix is constructed for gathering group preferences from uncertain and possibly conflicting information (input interval ordinal data). In the second stage, priority vectors are derived from the aggregate preference matrix based on properties of fuzzy preference relations and on the Perron eigenvector. In all cases, computational methods for solving the underlying problems and performance measures to analyse the solutions are provided.

Capítulo 1

Introducción

A medida que la complejidad aumenta, los enunciados precisos pierden sentido y los enunciados significativos pierden precisión.

Lotfali Askar Zadeh (1921 – 2017)

El problema de ordenar un conjunto de elementos, opciones o alternativas en función de su relevancia o preferencia atendiendo a varios criterios o información proveniente de distintas fuentes, expertos, etc. aparece en multitud de campos tales como la teoría de la decisión, teoría de elección social, motores de búsqueda de páginas web, sistemas de recomendación, “information retrieval” (búsqueda y extracción de información en documentos), “machine learning” (aprendizaje automático), comercio electrónico, etc. En este trabajo se estudia el problema en el contexto de teoría de la decisión, donde un conjunto finito de elementos o alternativas (en adelante se referirán como alternativas, sin pérdida de generalidad) tienen que ser ordenadas de mejor a peor a partir de la información de preferencias aportada por un grupo de expertos, agentes o decisores individuales (en adelante los referiremos como expertos, sin pérdida de generalidad). El objetivo general consiste en construir una ordenación o ranking de las alternativas que integre y “refleje lo mejor posible” la información de preferencias proporcionada por los expertos y sea una decisión representativa del grupo. Atendiendo a la complejidad de los procesos de decisión en las aplicaciones reales, varios son los aspectos y desafíos a los que nos enfrentamos.

Un aspecto clave en todo proceso de decisión es la estructura matemática en la que se representan los juicios de preferencias formulados por los expertos. Éstos pueden ser cuantitativos o cualitativos, reflejar preferencias imprecisas o presentar situaciones de falta de datos o información incompleta (Ureña et al., 2015a). En este trabajo se considera que los expertos formulan sus preferencias mediante relaciones de preferencia fuzzy (Tanino, 1984) o a través de listas ordenadas o rankings de las alternativas. Las relaciones de preferencia fuzzy constituyen una estructura fundamental en el trabajo, al proporcionar un modelo matemático flexible capaz de integrar diferentes formatos de preferencias, que es ampliamente utilizado en teoría de la decisión. En aplicaciones reales, debido a la

complejidad del problema, se plantean situaciones de falta de datos, información vaga o imprecisa difícil de cuantificar y de expresar mediante estimaciones numéricas precisas. Una forma para acomodar y representar este tipo de información es el uso de datos intervalares (Xu y Chen, 2008b; Wang y Li, 2012). Por ello, en este trabajo se considerará el uso de relaciones de preferencia fuzzy y rankings con datos intervalares, como una herramienta flexible para recoger información de preferencias posiblemente incompleta, vaga o imprecisa.

Una cuestión clave para analizar la coherencia o racionalidad de la información de preferencias expresada mediante una relación de preferencia fuzzy es la propiedad de la consistencia (Tanino, 1984). En este trabajo, se consideran simultáneamente los modelos aditivo y multiplicativo de consistencia para datos puntuales e intervalares (Xu y Chen, 2008b; Wang y Li, 2012). En la mayoría de los procesos de decisión en problemas reales, las relaciones de preferencia fuzzy involucradas no son consistentes, debido a la complejidad del fenómeno y la simplificación que supone el modelo matemático, al volumen de alternativas a considerar, a conceptos intangibles difíciles de cuantificar, etc. Por lo que la falta de consistencia de los datos es una cuestión a tener en cuenta.

Como ya se ha comentado, en un problema de grupo se consideran datos aportados por diferentes fuentes o expertos. La participación de múltiples expertos enriquece el conocimiento del problema, pero a su vez complica la búsqueda de una solución colectiva o de consenso a partir de información diversa y posiblemente en conflicto, atendiendo a la diversidad de enfoques de los expertos. En la práctica, el consenso entendido como acuerdo unánime de todos los expertos con la solución final no existe. Esta definición es demasiado restrictiva en la práctica (Cabrerizo et al., 2015) pues sólo considera dos estados, ausencia o existencia de acuerdo, y es cuestionable su aplicación en problemas reales. Se trata por tanto, de extender este concepto para que tenga en cuenta la diversidad y el posible conflicto en la información de partida. De esta forma, una tarea fundamental en problemas de decisión de grupo es estudiar modelos teóricos que permitan definir y analizar la estrategia del grupo en la búsqueda de una solución colectiva o de consenso, a partir de múltiples preferencias individuales. Otro aspecto a considerar en un problema de decisión de grupo es la posibilidad de que los expertos tengan distintos pesos en la decisión (Herrera-Viedma et al., 2014), atendiendo a diferentes factores (grado de influencia, grado de conocimiento, cantidad de información aportada, etc.). Por ello, se considerará la posibilidad de que cada experto pueda tener un peso específico en la decisión.

En este contexto, en este trabajo se aborda el problema de decisión de grupo donde múltiples expertos expresan de forma individual sus preferencias mediante relaciones de preferencia fuzzy o rankings, pudiendo ser éstos incompletos o contener datos vagos o imprecisos e inconsistentes. El objetivo fundamental es proporcionar un marco teórico general para formular rigurosamente el problema y métodos que exploten, sintetizen y analicen la información aportada por los expertos para producir un ranking final de las alternativas. Para ello, en primer lugar se presenta un modelo analítico general de ajuste de datos para buscar un vector de prioridad colectivo de las alternativas, que refleje “lo mejor posible” (en un sentido preciso) la información de preferencias directamente aportada por los expertos, y que aborde simultáneamente los problemas subyacentes anteriormente mencionados. Los datos pueden ser cuantitativos, formulados mediante

relaciones de preferencia fuzzy, o cualitativos, expresados mediante rankings, en ambos casos éstos pueden ser precisos o intervalares y presentar ausencia de elementos. El modelo de ajuste de datos se construye utilizando métricas ponderadas a distintos niveles, que proporcionan gran flexibilidad y permiten implementar diferentes métodos y estrategias de actuación del grupo en la búsqueda de una solución colectiva. Paralelamente se proponen métodos y algoritmos de cálculo efectivo de la solución y medidas de análisis de la misma. La aplicación del enfoque y métodos propuestos se ilustra con ejemplos numéricos ilustrativos. Las soluciones de dichos ejemplos se obtienen implementando los algoritmos planteados en MATLAB®, herramienta de software numérico matemático que ofrece un entorno de desarrollo integrado, y en Python, lenguaje de programación interpretado de código abierto.

En el caso que los expertos expresan su información de preferencias mediante relaciones de preferencia fuzzy, se aborda en primer lugar el denominado problema de información incompleta o ausencia de datos, de interés en aplicaciones y que recientemente ha recibido gran atención. La mayoría de los trabajos en la literatura que tratan el problema de información incompleta proponen métodos previos de compleción de datos (trabajando así con datos no proporcionados directamente por los expertos) y en una etapa posterior construyen una matriz promedio a partir de las relaciones rellenadas en el paso anterior. Se señala que esta matriz se calcula a partir de datos heterogéneos, algunos de los cuales no han sido aportados directamente por los expertos, y no representa necesariamente una relación de preferencias fuzzy (no se ha creado como tal) pudiendo tener índices de inconsistencia alta. En este aspecto, el enfoque integrado que se propone se basa en métodos de ajuste de los datos aportados directamente por los expertos. Se discuten condiciones relativas a la estructura de la información de preferencias que garanticen la existencia de una solución del problema, extendiendo ciertos casos estudiados en la literatura. En segundo lugar, se considera la posibilidad de que las preferencias sean imprecisas, modeladas a través de relaciones de preferencia fuzzy con datos intervalares. Se hace notar que el enfoque de grupo propuesto produce un vector de prioridad colectivo con elementos puntuales, a partir del cual se deriva automáticamente el ranking de las alternativas. La mayoría de los métodos en la literatura que trabajan con datos intervalares producen valores de prioridad intervalares y en caso de solapamiento es necesario articular un procedimiento adicional para ordenar finalmente las alternativas.

En el caso que la información de preferencias de los expertos se formule mediante listas ordenadas o rankings de las alternativas, se abordan situaciones de listas parciales y datos imprecisos en forma de datos ordinales intervalares. Se hace notar que el modelo se articula en dos etapas, siendo la primera de construcción de una matriz colectiva que recoge adecuadamente la información cualitativa de preferencias de los expertos (contempla la posibilidad de ausencia o vaguedad en los datos) y que evita tratar los valores ordinales de posición de las alternativas como valores numéricos cuantitativos, como en algunos trabajos en la literatura. En la segunda etapa, se determina un vector de prioridad mediante métodos basados en relaciones de preferencia fuzzy o técnicas inspiradas en el autovalor dominante, a partir del cual se deriva automáticamente el ranking de las alternativas. Este enfoque proporciona métodos eficientes de cálculo, alternativos a enfoques directos que involucran encontrar una permutación de los elementos (ranking ordinal) directamente, de gran complejidad computacional. La aplicación de los métodos

propuestos se ilustra mediante ejemplos numéricos.

Parte de los resultados que se incluyen en este trabajo se han publicado en:

- Expert System with Applications (Dopazo and Martínez-Céspedes, 2017), revista incluida en el JCR situada en el primer cuartil de las categorías “Computer Science, Artificial Intelligence” y “Operations Research and Management”.
- Proceedings 2015 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE) (Dopazo and Martínez-Céspedes, 2015). El citado congreso es categoría A del “CORE Computer Science Conference Rankings”.

Adicionalmente, la autora de este trabajo ha presentado ponencias sobre el tema abordado en los siguientes congresos internacionales:

- “20th Conference of the International Federation of Operational Research Societies, IFORS2014” (Barcelona, España, Julio - 2014), en la sesión “Fuzzy Systems and Soft-Computing. Fuzzy Decision Support Systems, Soft Computing, Neural Network”.
- “24th International Conference on Multiple Criteria Decision Making” (Ottawa, Canadá, Julio-2017), en la sesión “Decision Aiding/Making in the World of Today”.
- “29th European Conference on Operational Research (EURO 2018)” (Valencia, España, Julio-2018), en la sesión “Multiobjective Fuzzy Optimization”.

El resto del trabajo se organiza de la siguiente forma. En el Capítulo 2, se introducen los principales conceptos y resultados teóricos fundamentales relativos a las relaciones de preferencia fuzzy. Adicionalmente, se discuten y se proponen medidas del grado de inconsistencia de una relación de preferencia fuzzy. En el Capítulo 3, se considera el problema de grupo cardinal a partir de relaciones de preferencia fuzzy posiblemente incompletas. Posteriormente, los conceptos y métodos establecidos en este capítulo se extienden al caso de datos imprecisos en forma de datos intervalares en el Capítulo 4. El problema de grupo a partir de datos ordinales posiblemente incompletos e imprecisos se estudia en el Capítulo 5. Por último, en el Capítulo 6 se presentan las principales conclusiones del trabajo y se plantean posibles líneas futuras de investigación que han surgido durante la elaboración de esta tesis.

Capítulo 2

Relaciones de Preferencia Fuzzy

Si una persona nunca se contradice a sí misma, debe ser que no dice nada.

Miguel de Unamuno (1864-1936)

Los procesos de toma de decisión reales involucran en general el manejo de información compleja, difícil de cuantificar de forma precisa, que puede ser intangible, imprecisa y subjetiva. En este sentido, en la modelización matemática de un problema de toma de decisiones, un aspecto clave es el modelo matemático que se utiliza para representar la información de partida de preferencias sobre las alternativas de decisión. Las relaciones de preferencia fuzzy ofrecen una herramienta flexible, ampliamente empleada en el contexto de Teoría de la Decisión, para recoger los grados o intensidades de preferencia de pares de alternativas.

En este capítulo, se revisan los principales conceptos y propiedades de las relaciones de preferencia fuzzy, tales como la transitividad y la consistencia. Posteriormente se presentan resultados teóricos fundamentales considerando varios tipos de consistencia. Por último, se discuten y plantean medidas del grado de inconsistencia de una relación de preferencia fuzzy.

2.1. Relaciones de Preferencia Fuzzy

Se considera un problema tipo de toma de decisiones, donde un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($n \geq 2$) tienen que ser ordenadas a partir de la información de preferencias proporcionada por uno o varios expertos, decisores, agentes, criterios, etc, dependiendo del contexto del problema. En adelante, en este trabajo se empleará el término experto para referirse a todos ellos en general. Para ello, previamente los expertos expresan sus preferencias sobre las alternativas mediante un conjunto de evaluaciones. Un aspecto crítico en problemas reales reside en cómo representar la información de preferencias de los expertos. En muchas aplicaciones esta información es vaga,

imprecisa y difícil de cuantificar numéricamente de forma precisa, debido a la complejidad de los problemas reales, al carácter intangible y difícilmente cuantificable de las cuestiones abordadas, al número de alternativas a considerar, entre otros factores. A continuación se indican varios modelos usuales de representación de la información de preferencias sobre un conjunto $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de alternativas (Morente-Molinera et al., 2016; Hochbaum y Levin, 2006; Chiclana et al., 1996, 1998, 2001, 2008a):

- Ordenación o lista ordinal de preferencias de las alternativas. En este caso, el experto formula sus preferencias mediante una relación ordinal o ranking $R = (r_i)$ de las alternativas, donde $r_i \in \{1, 2, \dots, n\}$ es un número ordinal que indica la posición de preferencia de la alternativa x_i en el conjunto de alternativas. En definitiva R es una permutación del conjunto de índices $\{1, 2, \dots, n\}$. Supondremos, sin pérdida de generalidad, que un menor valor ordinal indica una preferencia mayor de la alternativa en el conjunto de alternativas.
- Función de utilidad. En este caso, el experto expresa su preferencia sobre el conjunto de alternativas X mediante un conjunto de n valores de utilidad $(u_1, \dots, u_n)$. El valor $u_i \in [0, 1]$ representa la evaluación de prioridad dada por el experto a la alternativa x_i , de forma que un mayor valor de utilidad expresa una preferencia mayor.
- Relación binaria de preferencia. Los modelos anteriores recogen preferencias absolutas en ocasiones difíciles de obtener atendiendo, entre otros factores, al número de alternativas a considerar simultáneamente. Un método alternativo, más flexible, consiste en proporcionar información relativa sobre pares de alternativas, de esta forma el experto se centra en estimar sus preferencias entre cada dos alternativas (Chiclana et al., 1998). Éstas se representan mediante una relación binaria de preferencia $P = (p_{ij})$, donde p_{ij} expresa la preferencia de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j , $i, j = 1, \dots, n$.

En el modelo clásico de preferencias, basado en la teoría clásica de conjuntos, una relación de preferencia estricta $P = (p_{ij})$ sólo admite dos valores $p_{ij} \in \{0, 1\}$, indicando que la alternativa x_i es preferida (valor 1) o no es preferida (valor 0) a la alternativa x_j . Esta relación estricta se puede extender considerando un valor intermedio para representar la indiferencia o igual preferencia entre dos alternativas:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{indica que la alternativa } x_i \text{ es preferida a la alternativa } x_j, \\ 1/2 & \text{indica que } x_i \text{ y } x_j \text{ son igualmente preferidas, y} \\ 0 & \text{indica que la alternativa } x_i \text{ no es preferida a la alternativa } x_j. \end{cases}$$

El concepto de la indeferencia ha sido objeto de numerosos estudios en la literatura (Fishburn, 1970; Fodor y Roubens, 1994). Fishburn (1970) define la indiferencia como la ausencia de preferencia estricta y señala tres posibles situaciones que la originan: 1. El experto juzga que no hay diferencia real entre las alternativas. 2. El experto no está seguro de su preferencia entre las alternativas, pudiendo encontrar difícil su comparación y compromiso con un valor de preferencia estricto. 3. Las alternativas se consideran incomparables.

Las relaciones de preferencia ordinarias sólo permiten expresar preferencias absolutas, sólo usan los valores booleanos (1/verdadero, 0/falso) y $1/2$, no recogiendo distintas intensidades o grados de preferencia. En muchas aplicaciones reales, debido a la complejidad del problema, a la dificultad para evaluar cuestiones intangibles, etc., será de gran interés emplear un modelo de preferencias que permita reflejar el grado o intensidad de preferencia de una alternativa respecto de otra. De esta forma, el concepto de relación binaria de la teoría clásica de conjuntos, donde P se entiende como un subconjunto clásico de $X \times X$, se extiende a relación binaria fuzzy definida sobre conjuntos fuzzy (Zadeh, 1965; Bellman y Zadeh, 1970). Una relación binaria fuzzy P es un subconjunto fuzzy de $X \times X$ caracterizado por una función de pertenencia $\mu_P : X \times X \rightarrow [0, 1]$ donde $\mu_P(x, y) \in [0, 1]$ expresa el grado de relación de x con y atendiendo a la relación P . Obviamente, toda relación de preferencia estricta es en particular una relación de preferencia fuzzy. En este caso, la función de pertenencia $\mu_P(x, y)$ sólo toma los valores 1 si $(x, y) \in P$, ésto es, si x es preferida a y , y 0 si x no es preferida a y .

Las relaciones de preferencia fuzzy (Zadeh, 1971; Orlovsky, 1978; Bezdek et al., 1978; Tanino, 1984; Kacprzyk, 1986; Tanino, 1990; Chiclana et al., 1998, 2001; Xu, 2007) proporcionan un modelo flexible para representar información cuantitativa y cualitativa acerca de las preferencias, que permite integrar información recogida en otro tipo de estructuras de preferencias (Chiclana et al., 1998, 2001). Adicionalmente, es un modelo ampliamente empleado en Teoría de la Decisión. A continuación, se define formalmente una relación de preferencia fuzzy en este campo.

Definición 2.1 (Tanino, 1984) *Una relación de preferencia fuzzy P sobre el conjunto X es una relación binaria definida sobre X , caracterizada por una función pertenencia $\mu_P : X \times X \rightarrow [0, 1]$, donde $\mu_P(x, y)$ representa el grado de preferencia de x sobre y , con $x, y \in X$. De forma que cuanto mayor sea el valor de $\mu_P(x, y)$, mayor será la intensidad o el grado de preferencia de x sobre y .*

A toda relación de preferencia fuzzy P sobre un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, se le puede asociar una matriz $n \times n$ con elementos $p_{ij} \in [0, 1]$, $i, j = 1, \dots, n$, que también denotaremos por P :

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

donde $p_{ij} = \mu_P(x_i, x_j)$, con $x_i, x_j \in X$, $i, j = 1, \dots, n$. El elemento p_{ij} representa la intensidad de preferencia de x_i sobre x_j , de forma que:

- $p_{ij} > 1/2$ indica que la alternativa x_i es preferida a la alternativa x_j . Un mayor valor de p_{ij} representa un mayor grado de preferencia de x_i sobre x_j , de forma que $p_{ij} = 1$ expresa preferencia absoluta.
- $p_{ij} = 1/2$ indica que las alternativas x_i y x_j son igualmente preferidas o indiferentes.

- $p_{ij} < 1/2$ indica que la alternativa x_j es preferida a la alternativa x_i , a menor valor de p_{ij} , menor grado de preferencia de x_i sobre x_j . $p_{ij} = 0$ expresa preferencia absoluta de x_j sobre x_i .

Recíprocamente, toda matriz $n \times n$ con elementos en el intervalo $[0, 1]$ define una relación de preferencia fuzzy. Atendiendo a esta biyección entre las relaciones de preferencia fuzzy definidas sobre X y las matrices cuadradas $n \times n$ con elementos en $[0, 1]$, trabajaremos con estas estructuras matriciales de datos, especialmente convenientes por permitir una representación intuitiva y compacta de la información, a la vez que simplifica la manipulación algebraica.

Dada una relación de preferencia fuzzy P que recoge los juicios de preferencias de un experto sobre un conjunto de alternativas X , varios son los criterios para analizar la coherencia o racionalidad de la información de preferencias contenida en P . Una extensión de la propiedad clásica deseable de antisimetría (si la alternativa x_i es preferida a x_j , entonces x_j no debería ser preferida a x_i), formulada más restrictivamente en términos de intensidades de preferencia es modelada por la propiedad de reciprocidad:

$$p_{ij} + p_{ji} = 1, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (2.1)$$

En el campo de la Teoría de la Decisión se suele asumir que una relación de preferencia fuzzy P , que expresa los juicios de preferencia de un experto, verifica la propiedad de reciprocidad anterior. En adelante, en este trabajo se asumirá que toda relación de preferencia fuzzy es recíproca. Por ello, bastará que el experto proporcione los valores p_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, reduciéndose sustancialmente el número de juicios de preferencias pareadas que hay que estimar. De esta forma trabajaremos con el conjunto $\mathcal{M}$ de matrices recíprocas con valores en el intervalo $[0, 1]$

$$\mathcal{M} = \{P = (p_{ij}) : p_{ij} \in [0, 1], p_{ij} + p_{ji} = 1, i, j = 1, \dots, n\},$$

que representan las relaciones de preferencia fuzzy recíprocas sobre el conjunto de alternativas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($n \geq 2$). Se demuestra que $\mathcal{M}$ es un conjunto convexo y compacto en el conjunto de las matrices reales cuadradas $n \times n$ (Bezdek et al. (1978)).

Continuando con los criterios para analizar la coherencia o racionalidad de la información de preferencias en P , otra importante condición a tener en cuenta es la transitividad de los juicios de preferencia. Como punto de partida, se considera la propiedad clásica de transitividad en relaciones ordinales de preferencia: si la alternativa x_i es preferida a x_j y ésta es preferida a x_k , entonces se concluye que x_i es preferida a la alternativa x_k . A partir de este concepto de racionalidad básica se han estudiado en la literatura (Tanino, 1984; Chiclana et al., 2009, 2008a; Herrera-Viedma et al., 2004; Ramík and Vlach, 2013; Tanino, 1988; García-Lapresta and Meneses, 2003, 2005) varios criterios referidos como de transitividad o de consistencia (según los autores) para modelar niveles de racionalidad, coherencia o consistencia de la información de preferencias expresada por el experto en P . Entre ellos se destacan los siguientes:

Definición 2.2 (Tanino, 1984) *Se dice que una relación de preferencia fuzzy $P = (p_{ij})$ sobre X cumple la propiedad de transitividad débil si:*

$$p_{ij} \geq 0.5, p_{jk} \geq 0.5 \Rightarrow p_{ik} \geq 0.5, \quad \forall i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (2.2)$$

Esto es, si la alternativa x_i es preferida o igualmente preferida a x_j y x_j es preferida o igualmente preferida a x_k , entonces se puede afirmar que x_i es preferida o igualmente preferida a x_k .

Transitividad max-min moderada (Tanino, 1984). Se dice que una relación de preferencia fuzzy $P = (p_{ij})$ sobre X verifica la propiedad transitividad max-min moderada si,

$$p_{ij} \geq 0.5, p_{jk} \geq 0.5 \Rightarrow p_{ik} \geq \min \{p_{ij}, p_{jk}\}, \quad \forall i, j, k \in 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

Esto es, si x_i es preferido o igualmente preferido a x_j y x_j es preferido o igualmente preferido a x_k , entonces la intensidad de preferencia de x_i sobre x_k debe ser al menos el menor de los grados de preferencia p_{ij} y p_{jk} . Este es un criterio de transitividad más fuerte que el de transitividad débil.

Transitividad max-max moderada (Tanino, 1984). Se dice que una relación de preferencia fuzzy $P = (p_{ij})$ verifica la propiedad de transitividad max-max moderada si,

$$p_{ij} \geq 0.5, p_{jk} \geq 0.5 \Rightarrow p_{ik} \geq \max \{p_{ij}, p_{jk}\}, \quad \forall i, j, k \in 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

Esto es, si x_i es preferido o igualmente preferido a x_j y x_j es preferido o igualmente preferido a x_k , entonces la intensidad de preferencia de x_i sobre x_k debe ser por lo menos igual al mayor de los grados de preferencia estimados por p_{ij} y p_{jk} . Este criterio representa un tipo de transitividad más fuerte que el tipo de transitividad max-min moderada.

Transitividad o consistencia multiplicativa. Tanino (1984) introdujo el concepto de transitividad o consistencia para el caso de un modelo de preferencias multiplicativo, en el que el dato p_{ij} representa el grado de preferencia de x_i sobre x_j considerando una escala multiplicativa. En la definición siguiente se asume que $p_{ij} > 0, \forall i, j$.

Definición 2.3 (Tanino, 1984; Herrera-Viedma et al., 2004) Sea $P = (p_{ij})$ una relación de preferencia fuzzy sobre el conjunto X , con $p_{ij} > 0, \forall i, j$. P es una relación de preferencia fuzzy consistente multiplicativamente si

$$\frac{p_{ij}}{p_{ji}} \cdot \frac{p_{jk}}{p_{kj}} = \frac{p_{ik}}{p_{ki}}, \quad i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (2.5)$$

La propiedad de transitividad o consistencia multiplicativa anterior, reescrita como

$$p_{ij} \cdot p_{jk} \cdot p_{ki} = p_{ik} \cdot p_{kj} \cdot p_{ji}, \quad \forall i, j, k,$$

se puede extender a cualquier relación de preferencia fuzzy con valores no negativos. A lo largo de este trabajo, si P es una relación de preferencia fuzzy multiplicativamente transitiva o consistente, por extensión se dirá que la matriz que representa dicha relación de preferencia es multiplicativamente consistente. Se define así el conjunto de matrices $n \times n$ consistentes multiplicativamente como:

$$\mathcal{C}_{mn} = \{P = (p_{ij}) : p_{ij} \in [0, 1], p_{ij} + p_{ji} = 1, p_{ij} \cdot p_{jk} \cdot p_{ki} = p_{ik} \cdot p_{kj} \cdot p_{ji}, i, j, k = 1, \dots, n\}, \quad (2.6)$$

que representan las relaciones de preferencia fuzzy multiplicativamente consistentes sobre el conjunto de alternativas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Transitividad o consistencia aditiva. La transitividad o consistencia aditiva (Tanino, 1984) se aplica a modelos de preferencias aditivas, expresadas sobre una escala intervalar (de diferencias). p_{ij} proporciona una estimación de cuánto más preferida (diferencia de preferencia) es x_i sobre x_j . A continuación se presenta la definición formal de la consistencia aditiva (Tanino, 1984; Herrera-Viedma et al., 2004; Xu et al., 2014a).

Definición 2.4 Sea $P = (p_{ij})$ una relación de preferencia fuzzy sobre el conjunto X . Se dice que P es una relación de preferencia fuzzy consistente aditivamente si

$$p_{ij} + p_{jk} = p_{ik} + 0.5, \quad \forall i, j, k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.7)$$

La expresión (2.7) también se puede escribir como:

$$(p_{ij} - 0.5) + (p_{jk} - 0.5) = (p_{ik} - 0.5), \quad \forall i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (2.8)$$

Atendiendo a la interpretación de que el valor $p_{ik} - 0.5$ proporciona una estimación de la intensidad de preferencia de la alternativa x_i sobre x_k , la expresión anterior (2.8) refleja explícitamente que el grado de preferencia de x_i sobre x_k debería ser igual a la suma de las intensidades de preferencias al considerar una alternativa intermedia x_j , ésto es, $(p_{ik} - 0.5) = (p_{ij} - 0.5) + (p_{jk} - 0.5)$. Otra expresión alternativa de (2.7), utilizando la propiedad de reciprocidad, es la siguiente:

$$p_{ij} + p_{jk} + p_{ki} = \frac{3}{2} \quad \forall i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (2.9)$$

Se hace notar que la propiedad de consistencia aditiva implica la propiedad de reciprocidad. Una matriz $P = (p_{ij})$ con $p_{ij} \in [0, 1]$, se dirá que es aditivamente consistente si representa una relación de preferencia fuzzy aditivamente consistente. Se define así el conjunto de matrices $n \times n$ consistentes aditivamente

$$\mathcal{C}_{an} = \{P = (p_{ij}) : p_{ij} \in [0, 1], p_{ij} + p_{jk} = p_{ik} + 0.5, i, j, k = 1, \dots, n\}, \quad (2.10)$$

que representan las relaciones de preferencia fuzzy aditivamente consistentes sobre el conjunto finito X .

Estos conceptos de consistencia aditiva y consistencia multiplicativa, que expresan propiedades de transitividad cardinales, son más restrictivas e implican que se verifican las propiedades de transitividad max-max, transitividad max-min y transitividad débil, definidas anteriormente. Las propiedades de consistencia juegan un papel fundamental para garantizar la coherencia, la racionalidad de las decisiones y evitar soluciones erróneas que no reflejan correctamente la información de preferencias del experto. Las propiedades de consistencia aditiva, si se trabaja con un modelo aditivo de preferencias, y de consistencia multiplicativa, si se trata de un modelo multiplicativo, son los tipos de consistencia de relaciones de preferencia fuzzy robustos más usuales en teoría de la decisión y serán los tipos de consistencia fundamentales en este trabajo.

A continuación se presentan resultados importantes que relacionan las relaciones de preferencia fuzzy consistentes con vectores de prioridad, denominados así por reflejar la importancia o prioridad de las alternativas.

Proposición 2.1 *Sea $P = (p_{ij})$ una relación de preferencia fuzzy sobre X . Entonces, P es consistente aditivamente si y sólo si existe un vector no negativo $v = (v_1, \dots, v_n)$ tal que*

$$p_{ij} = \frac{1}{2}(v_i - v_j + 1), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (2.11)$$

con $|v_i - v_j| \leq 1$, $i, j = 1, \dots, n$. Además, el vector v es único salvo constante aditiva.

Del resultado anterior (Tanino, 1984; Liu et al., 2012c; Fedrizzi and Brunelli, 2009, 2010) se desprende que la propiedad de consistencia aditiva garantiza la existencia de un vector de prioridad $v = (v_1, \dots, v_n)$, que representa los pesos de preferencia de las alternativas del conjunto X . Atendiendo a que el vector v es único salvo constante aditiva, se suele imponer una condición de normalización sobre el vector v . Fedrizzi and Brunelli (2009) probaron que la condición usual de normalización, $\sum_{i=1}^n v_i = 1$, es incompatible con la ecuación (2.11) del modelo aditivo. Una condición de normalización alternativa consiste en imponer que el menor valor de las componentes del vector sea 0. Esto es, dado un vector v verificando (2.11), se considera el vector $\tilde{v} = (\tilde{v}_i)$ con $\tilde{v}_i = v_i - \min\{v_1, \dots, v_n\}$. De esta forma $\min\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\} = 0$ y $\tilde{v}_i \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, n$. Xu et al. (2014b) muestran que introduciendo un parámetro β de ajuste, las ecuaciones:

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{1}{2n\beta}(2 \sum_{j=1}^n p_{ij} - n) + \frac{1}{n}, \quad i = 1, \dots, n, \\ p_{ij} &= \beta(v_i - v_j) + \frac{1}{2}, \quad i, j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.12)$$

con $\beta \geq \max(\frac{n}{2} - \sum_{j=1}^n p_{ij})$, hacen que la condición de normalización $\sum_{i=1}^n v_i = 1$ y $v_i \geq 0$ sean compatibles con la consistencia aditiva. En (Wang and Li, 2012), los autores prueban que si P es una relación de preferencia fuzzy aditivamente consistente, existe un vector normalizado positivo v y un parámetro $\beta > 1$ tal que $p_{ij} = \frac{1}{2} + \log_\beta(v_i) - \log_\beta(v_j)$. En este caso proponen como vector de prioridad

$$v_i = \frac{\beta^{\frac{1}{n}} \sum_{j=1}^n p_{ij}}{\sum_{i=1}^n \beta^{\frac{1}{n}} \sum_{j=1}^n p_{ij}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

que verifica la condición de normalización $\sum_{i=1}^n v_i = 1$ y $v_i > 0$. En los trabajos anteriormente mencionados, se hace notar que aunque distintos vectores de pesos resultan atendiendo a la elección del parámetro β , todos ellos proporcionan la misma ordenación de preferencias de las alternativas.

Un importante resultado análogo al de la Proposición 2.1 se obtiene para las relaciones de preferencia fuzzy que verifican la propiedad de consistencia multiplicativa.

Proposición 2.2 (Tanino, 1984) *Sea $P = (p_{ij})$ una relación de preferencia fuzzy sobre X . Entonces, $P = (p_{ij})$ es consistente multiplicativamente si y sólo si existe un vector positivo $v = (v_1, \dots, v_n)$, tal que*

$$p_{ij} = \frac{v_i}{v_i + v_j}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.13)$$

Además, el vector v es único salvo constante multiplicativa.

Del resultado anterior, se concluye que la propiedad de consistencia multiplicativa garantiza la existencia de un vector $v = (v_1, \dots, v_n)$, donde $v_i > 0$ representa el peso de preferencia de la alternativa x_i , $i = 1, \dots, n$. En el modelo multiplicativo, se considerará el vector $v > 0$ verificando (2.13) con la condición usual de normalización $\sum_{i=1}^n v_i = 1$. A dicho vector v se le denominará vector de prioridad.

2.2. Medidas de inconsistencia

Los resultados de la sección anterior demuestran que a partir de una relación de preferencia fuzzy P consistente (aditivamente o multiplicativamente, según el modelo subyacente) se puede obtener un vector de prioridad, a partir del cual se deriva automáticamente una ordenación de las alternativas consideradas. Desafortunadamente, en la mayoría de los problemas reales debido a la complejidad del problema, al número de alternativas a valorar, a cuestiones intangibles, juicios subjetivos, etc., la matriz P no es consistente. La falta de la propiedad de consistencia puede llevar a decisiones incorrectas y débiles, no suficientemente fundamentadas y a rankings poco robustos y erróneos. Como se ha comentado, la propiedad normativa de la consistencia está ligada a la racionalidad y coherencia de la información de preferencias y en el proceso de decisión, la solución final esta determinada por ella.

Por tanto, dada una relacion de preferencia fuzzy $P = (p_{ij})$ sobre el conjunto de alternativas X es de gran interés proporcionar medidas del grado de inconsistencia de la información de preferencias expresada en P . Estas medidas serán de gran ayuda para analizar los datos de preferencia y revisarlos si fuera procedente. El cálculo de estas medidas en sistemas automáticos de decisión permitirá implementar procesos o módulos de control (Chiclana et al., 1998) que alerten sobre posibles datos erróneos y recomienden al experto la revisión de juicios de preferencias, si fuera el caso.

Este tema ha sido abordado en la literatura, tomando como punto de partida el índice y la razón de consistencia propuestos por Saaty (1990) en el contexto del AHP (Analytic Hierarchy Process), método de decisión multicriterio ampliamente utilizado en multitud de campos. En dicho contexto, se asume que la decisión final es aceptable si la razón de consistencia no supera el umbral de 0.1 (el índice consistencia no es mayor que un 10 por ciento de la media de los índices de consistencia de una muestra de matrices recíprocas aleatorias). En el caso del modelo aditivo de preferencias, la mayoría de los trabajos que abordan este tema proponen medidas atendiendo a las contribuciones locales a la inconsistencia asociadas a tripletas de alternativas (Fedrizzi et al., 2002; Bouchon-Meunier et al., 2013; Fedrizzi y Giove, 2007; Herrera-Viedma et al., 2007b, 2007a; Chiclana et al., 2008c).

En (Fedrizzi et al., 2002; Fedrizzi y Giove, 2007) se presenta un índice de inconsistencia global $\rho(P) = 6 \sum_{i < j < k} \epsilon_{ijk}^2$, definido en términos de las inconsistencias locales

$$\epsilon_{ijk} = |p_{ik} + p_{kj} - p_{ij} - 0.5|, \quad k \neq i, j. \quad (2.14)$$

Se observa que $\rho(P) = 0$ indica que P es consistente y a mayor valor de $\rho(P)$ mayor es el grado de inconsistencia de P .

Herrera-Viedma et al. (2007b) proponen una medida del nivel de consistencia de una relación de preferencia fuzzy P , no necesariamente recíproca, denominada CL_P . En nuestro caso, donde P se asume recíproca, esta medida se construye sobre el nivel de consistencia CL_{ij} asociado a cada dato p_{ij} , dado por

$$CL_{ij} = 1 - \frac{2}{3(n-2)} \sum_{k \neq i, k \neq j} \epsilon_{ijk}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

con ϵ_{ijk} dado en (2.14). A partir de las expresiones anteriores se define el nivel de consistencia de P como

$$CL_P = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} CL_{ij}.$$

De esta forma, $CL_P = 1$ indica que P es consistente, en otro caso el nivel de consistencia disminuye al hacerlo CL_P . Un índice de consistencia análogo se presenta en (Meng and Chen, 2015).

En (Herrera-Viedma et al., 2007a), para cada dato p_{ij} se considera la desviación con respecto al valor estimado cp_{ij} dado por

$$cp_{ij} = \frac{1}{n-2} \sum_{k \neq i, j} (p_{ik} + p_{kj} - 0.5), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.15)$$

Este error escalado $e_{ij} = \frac{2}{3} |p_{ij} - cp_{ij}|$ se toma como referencia para evaluar tres niveles de consistencia:

- Nivel de consistencia asociado al par de alternativas (x_i, x_j) : $cl_{ij} = 1 - e_{ij}$.
- Nivel de consistencia asociado a la alternativa x_i : $cl_i = \sum_{j \neq i} \frac{cl_{ij}}{n-1}$.
- Nivel de consistencia de la relación de preferencia fuzzy P : $cl(P) = \sum_{i=1}^n \frac{cl_i}{n}$.

Se hace notar que en las definiciones anteriores se asume que la relación de preferencias P es recíproca. En (Herrera-Viedma et al., 2007a) se definen estos índices para relaciones de preferencia fuzzy no necesariamente recíprocas.

Chiclana et al. (2008c) proponen un sistema de decisión en el que se incorpora un módulo de control atendiendo a la consistencia de los datos. Para ello, para cada dato p_{ij} se considera la desviación con respecto a un valor normalizado estimado ep_{ij} como la mediana de los valores 0, 1 y cp_{ij} , $ep_{ij} = \text{med}\{0, 1, cp_{ij}\}$, con cp_{ij} dado en (2.15). En este caso, se toma como valor de referencia el error local $|p_{ij} - ep_{ij}|$ para definir tres grados o niveles de consistencia, análogos a los planteados en (Herrera-Viedma et al., 2007a):

- Grado de consistencia asociado al par de alternativas (x_i, x_j) : $cd_{ij} = 1 - |p_{ij} - ep_{ij}|$.

- Grado de consistencia asociado a la alternativa x_i : $cd_i = \sum_{j \neq i} \frac{cd_{ij}}{n-1}$.
- Grado de consistencia de la relación de preferencia fuzzy P : $cd = \sum_{i=1}^n \frac{cd_i}{n}$.

No hay un método en la literatura aceptado universalmente para medir la inconsistencia, cada índice propuesto plantea un criterio de medida. Las definiciones anteriores de índices para medir el grado de consistencia o inconsistencia de una relación de preferencia fuzzy en el enfoque aditivo, se basan en las desviaciones locales de tripletas de datos de la condición de transitividad. Nuestro enfoque, parte de tratar la relación de preferencias P como una estructura de información global, conteniendo la información proporcionada por el experto, que aspira a ser una matriz ideal consistente C atendiendo al modelo de partida (aditivo o multiplicativo). De esta forma la inconsistencia se medirá esencialmente por la distancia de la matriz P a esta matriz $C = (c_{ij})$ consistente

$$\min d(P, C), \quad (2.16)$$

donde $C \in \mathcal{C}_{an}$ (2.10), si es un modelo aditivo, o $C \in \mathcal{C}_{mn}$ (2.6), si es un modelo multiplicativo. La elección de la función distancia d dependerá de las características particulares del problema a analizar. En este trabajo nos centraremos en distancias derivadas de las principales normas matriciales y normas vectoriales l_p con $p = 1, 2, \infty$. La expresión explícita de $d(P, C)$ para algunas de estas normas es la siguiente:

- Norma vectorial 1:

$$\|P - C\| = \sum_{i,j=1}^n |p_{ij} - c_{ij}|.$$

- Norma matricial de Frobenius:

$$\|P - C\|_{Fr} = \left(\sum_{i,j=1}^n (p_{ij} - c_{ij})^2 \right)^{1/2}.$$

- Norma matricial ∞ :

$$\|P - C\|_{m\infty} = \max \left\{ \sum_{j=1}^n |p_{ij} - c_{ij}| \right\}.$$

Se hace notar que al trabajar con relaciones recíprocas, en las expresiones anteriores bastaría considerar las desviaciones $|p_{ij} - c_{ij}|$ con $1 \leq i < j \leq n$. Por otra parte, aplicando la Proposición 2.1 (para el modelo aditivo) o la Proposición 2.2 (para el modelo multiplicativo), que garantizan en cada caso la existencia de un vector prioridad $v = (v_1, \dots, v_n)$, se obtienen las siguientes expresiones para los elementos de la matriz de desviaciones $|P - C|$ en términos del correspondiente vector v :

- (i) $|p_{ij} - c_{ij}| = |p_{ij} - (v_i - v_j + 1)/2|$, para el modelo aditivo de preferencias,
 - (ii) $|p_{ij} - c_{ij}| = |p_{ij} - v_i/(v_i + v_j)|$, para el modelo multiplicativo de preferencias,
- (2.17)

con $i, j = 1, \dots, n$. La medida $\|P - C\|$ se puede relativizar atendiendo a distintas cuestiones como: el número de desviaciones consideradas, por ejemplo $\|P - C\|/n(n-1)$, si se han considerado las desviaciones para $i < j$; la magnitud de la matriz original $\|P - C\|/\|P\|$, entre otros. Se hace notar que la medida relativa de inconsistencia propuesta, ésto es $\|P - C\|$ con algún criterio de normalización como los planteados anteriormente, es siempre mayor o igual que cero y es cero solamente si P es consistente. Un mayor valor, indica un mayor grado de inconsistencia de P (mayor distancia a la matriz consistente más próxima). Por lo tanto la medida del grado de inconsistencia a partir de un valor normalizado de $\|P - C\|$ plantea una medida general unificada para abordar dicho problema. El uso de diferentes métricas permite dar más o menos peso a los datos extremos e identificar inconsistencias locales maximales. A su vez permite abordar el problema considerando la información proporcionada por el experto como una unidad de información que busca un ideal consistente global. Este enfoque general incluye el modelo aditivo y multiplicativo de preferencias. Adicionalmente, esta medida forma parte del modelo general de ajuste de datos en el que se planteará el problema de decisión de grupo a partir de relaciones de preferencia fuzzy.

Medidas de consistencia en la línea de las planteadas se presentan en (Xia y Xu, 2011), donde se define una medida del grado de consistencia de P como

$$\|P - \bar{P}\| = \sum_{i,j=1}^n |p_{ij} - \bar{p}_{ij}|,$$

siendo $\bar{P}$ una matriz consistente multiplicativamente construida a partir de ciertas medias geométricas de elementos de P . En (Xia et al., 2013) se plantea un índice de consistencia geométrica

$$GCI(P) = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i,j} (\log(p_{ij}) - \log(p_{ji}) - \log(w_i) + \log(w_j))^2,$$

donde w_i se ha obtenido como un tipo de media geométrica de elementos de P .

Capítulo 3

Modelo general y algoritmos para el problema de decisión de grupo a partir de relaciones de preferencia fuzzy posiblemente incompletas

El todo es más que la suma de las partes.

Metafísica
Aristóteles (384-322 a. C.)

En este capítulo se considera el problema de decisión de grupo, consistente en proporcionar un orden de preferencias o ranking de un conjunto de alternativas a partir de las preferencias individuales de un grupo de expertos o agentes. En este escenario la información será diversa y más rica al incorporar distintos enfoques, perspectivas, etc. de los expertos, pero será heterogénea y posiblemente en conflicto. En general no habrá consenso entre los expertos, entendido éste como acuerdo unánime sobre los juicios de preferencias. En este capítulo se supondrá que los expertos formulan su información sobre las alternativas mediante relaciones de preferencia fuzzy, un modelo flexible ampliamente utilizado en teoría de la decisión. Una cuestión importante a tener en cuenta será la propiedad de consistencia de las relaciones de preferencia fuzzy. Otro problema de interés, que aparece en situaciones reales de decisión, es el referido como problema de información incompleta, en el que los expertos pueden no proporcionar todos los datos de preferencia.

En este capítulo se estudia el problema general de decisión de grupo a partir de relaciones de preferencia fuzzy (modelos aditivo y multiplicativo) con información posiblemente heterogénea, inconsistente e incompleta. El objetivo es proporcionar un modelo analítico general que permita abordar simultáneamente los problemas subyacentes y proporcionar un ranking colectivo de las alternativas. Paralealmente se desarrollarán métodos computacionales efectivos de cálculo de la solución y medidas de análisis de la misma.

3.1. Introducción

En un problema tipo de decisión se considera un conjunto finito de alternativas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($n \geq 2$) que tienen que ser ordenadas de mejor a peor, atendiendo a la información procedente de distintas fuentes, expertos, criterios, agentes, etc. Estos procesos de toma de decisión que involucran información de varios expertos, se denominan formalmente procesos de toma de decisión de grupo. De esta forma, dado el conjunto X de alternativas y un grupo de m expertos $\{E_1, \dots, E_m\}$, $m \geq 1$, el problema de decisión de grupo consiste en proporcionar un ranking colectivo o lista ordenada de las alternativas que refleje lo mejor posible la información de preferencias proporcionada por los expertos.

En los problemas del mundo real, los juicios de preferencias de los expertos pueden ser heterogéneos, reflejar opiniones diversas atendiendo a distintos enfoques, conocimiento, ideas, información, etc., no existiendo en general un consenso unánime entre los juicios de dichos expertos. El consenso entendido como acuerdo unánime de todos los miembros del grupo es difícil de alcanzar en problemas reales, atendiendo a la complejidad del problema, diferentes perspectivas, opiniones, fuentes de estudio, etc. Por tanto, una cuestión crítica a analizar en problemas de decisión de grupo es, qué se entiende por solución colectiva o de consenso. En este trabajo, se asume que el grupo interactúa como un ente colectivo (grupo cooperativo) y que los expertos comparten el interés en elegir una solución colectiva que refleje lo mejor posible la información diversa y posiblemente en conflicto de partida.

Varios son las estructuras de datos que se utilizan para representar los juicios de preferencias de los expertos sobre las alternativas. Como se vió en el Capítulo 2, el modelo de relaciones de preferencia fuzzy proporciona un marco flexible para expresar juicios posiblemente inciertos, que permite integrar diferentes formatos de representación, facilitando la integración de la información proporcionada por los expertos, además de ser un modelo ampliamente utilizado en la modelización de procesos de decisión. Por ello se consideran las relaciones de preferencia fuzzy como el elemento principal para la representación de la información. De esta forma, se supondrá que cada experto E_k formula sus preferencias sobre las alternativas de X mediante una relación de preferencia fuzzy $P^k = (p_{ij}^k)$, donde p_{ij}^k expresa el grado o intensidad de preferencia de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j con $i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m$. En este trabajo, se consideran simultáneamente los modelos multiplicativo y aditivo de preferencias y sus correspondientes propiedades de consistencia (Definición 2.3 y Definición 2.4, respectivamente). Como se planteó en el Capítulo 2, una cuestión fundamental a tener en cuenta en procesos de decisión es la consistencia de las relaciones de preferencia fuzzy involucradas, como un mecanismo de análisis de la racionalidad de las estimaciones sobre las alternativas.

El estudio de problemas de decisión de grupo es un área de gran interés en el campo de teoría de la decisión y ha sido abordado con la ayuda de la teoría de conjuntos fuzzy (Fodor y Roubens, 1994; Kacprzyk et al., 1992; Zimmermann, 1996). El problema del consenso a partir de relaciones de preferencia fuzzy ha recibido gran atención y diferentes técnicas de agregación de la información han sido propuestas en la literatura. Tanino (1990) propone construir una relación de preferencia fuzzy $P = (p_{ij})$ de grupo a partir de las preferencias individuales interpretadas como funciones de utilidad. De forma que, p_{ij} represente la dominancia relativa de i sobre j ($j \neq i$) acumulada a lo largo de las

preferencias individuales para las que $p_{ij}^k > 1/2$, $i, j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$.

Investigadores y colaboradores del Grupo de Investigación *Soft Computing y Sistemas Inteligentes* de la Universidad de Granada (España) tienen una reconocida trayectoria en el estudio del problema de decisión de grupo. En (Chiclana et al., 1998, 2001; Herrera-Viedma et al., 2002; Chiclana et al., 2007) se estudia el problema de consenso a partir de información de preferencias representada en varios formatos. En estos trabajos, un paso previo es la representación uniforme de las preferencias mediante el uso de relaciones de preferencia fuzzy aditivas. Posteriormente, se construye una relación de preferencia fuzzy aditiva colectiva mediante un operador media aritmética ponderada (OWA, Ordered Weighted Aggregating operator, Yager (1988)), donde los pesos se calculan usando un cuantificador lingüístico basado en el concepto de mayoría fuzzy. En (Chiclana et al., 2007) se extiende al uso de operadores OWA inducidos (IOWA, Induced OWA, Yager (2003)). Finalmente, se define una etapa, denominada de explotación, en la que las alternativas son ordenadas aplicando un cuantificador de dominancia (en sentido de mayoría fuzzy) a la relación de preferencia colectiva. En (Chiclana et al., 2002, 2003) se estudian las propiedades normativas de reciprocidad y consistencia aditiva de la relación de preferencia colectiva construida mediante el operador OWA. En (Chiclana et al., 2008c), al modelo de consenso se le incorpora un módulo de control de la consistencia basado en medidas de consistencia. Adicionalmente, los autores proporcionan medidas del grado de acuerdo de los expertos con la solución colectiva. Cabrerizo et al. (2010) estudian también medidas de consenso. En (Herrera et al., 2001) se consideran las matrices de comparación de Saaty (Saaty, 1990) como modelo integrador de diferentes estructuras de representación de preferencias. En este caso, en la etapa de agregación de preferencias se propone un operador media geométrica ponderada (OWG, Ordered Weighted Geometric), en el que los pesos se calculan según el concepto de mayoría fuzzy. El uso de operadores OWG inducidos más generales se estudia en (Chiclana et al., 2004).

En los trabajos anteriormente citados, una cuestión importante en la etapa de agregación de preferencias es la determinación de los pesos de ponderación en el operador promedio empleado. En (Xu y Cai, 2011) se presentan algoritmos iterativos basados en técnicas de programación por metas, de ahora en adelante GP (por su denominación en inglés Goal Programming), y programación cuadrática para calcular dichos pesos. Éstos se calculan de forma que se maximice el consenso, en el sentido de que se minimice la suma de discrepancias con los datos dados por los expertos, para el caso de relaciones de preferencia fuzzy aditivas y matrices de comparación por pares. Xu et al. (2013a) señalan algunas limitaciones de los métodos de Xu y Cai (2011) y proponen calcular los pesos de forma que se minimice la suma de desacuerdos entre cualesquiera dos pares de relaciones de preferencia ponderadas. En (Zhang et al., 2012) se propone un modelo de programación lineal para construir relaciones de preferencia fuzzy con niveles aceptables de consistencia aditiva a partir de las relaciones de preferencia fuzzy dadas por los expertos.

El problema de grupo a partir de relaciones de preferencia fuzzy multiplicativas se ha estudiado en (Wang y Fan, 2007; Xia y Xu, 2011; Xia et al., 2013). Wang y Fan (2007) utilizan técnicas mínimos cuadrados logarítmicos para derivar un vector de prioridad a partir de relaciones de preferencia fuzzy multiplicativas. En (Xia y Xu, 2011) se propone un algoritmo iterativo para llegar a una solución de consenso aceptable. En cada iteración, el

método primero calcula relaciones de preferencia fuzzy consistentes (mediante un operador media geométrica) a partir de cada una de las relaciones de preferencia individuales. Posteriormente, éstas se agregan en una relación de preferencia fuzzy mediante un operador tipo media geométrica, hasta alcanzar un nivel de consenso aceptable (calculado a través de la métrica vectorial l_1). Xia et al. (2013) proponen una variante del algoritmo anterior (Xia y Xu, 2011) e introducen una nueva medida de consenso basada en la métrica euclídea. Basándose en los trabajos anteriores, en Zhang (2016) se estudian las propiedades de consistencia y consenso de las matrices involucradas.

La mayoría de los métodos propuestos en la literatura se articulan en dos etapas, en la primera fase se agregan las preferencias de los expertos mediante operadores tipo promedio. En algunos casos se propone una segunda fase de explotación, para proporcionar un ranking de las alternativas. En este trabajo, se investiga el problema de decisión de grupo a partir de relaciones de preferencia fuzzy considerando los modelos aditivo y multiplicativo de preferencias simultáneamente y se contempla la posibilidad de que los expertos puedan tener distinto peso en la decisión atendiendo a diferentes criterios. Se aborda un enfoque que aborda simultáneamente los problemas subyacentes de diversidad y posible conflicto en las opiniones de los expertos (problema de grupo), de forma que el grupo actúa como un ente colaborativo, y de racionalidad de la información (problema de consistencia aditiva y multiplicativa). Para ello se presenta un modelo general de búsqueda de un vector de prioridad colectivo o de consenso de las alternativas, que sintetice lo mejor posible los juicios de preferencia proporcionados por los expertos. El enfoque que se propone determina la estrategia de actuación del grupo, define el tipo de solución colectiva buscada y proporciona un ranking final colectivo de las alternativas.

Figura 3.1: Problema de decisión de grupo. Solución colectiva.

Además de los problemas ya mencionados de diversidad y posible conflicto en los juicios de los expertos y de inconsistencia de las relaciones de preferencia fuzzy involucradas, otro problema que aparece frecuentemente en situaciones reales es el referido como problema de información incompleta o de falta de datos. En algunos casos, el experto no es capaz de expresar el grado de preferencia entre dos alternativas por falta de información, de conocimiento preciso, dificultad para discriminar o para evaluar gran número de alternativas, etc. (Ureña et al., 2015b). Adicionalmente, el auge de las nuevas tecnologías que facilitan la colaboración y su aplicación en campos tales como sistemas de apoyo a la decisión, sistemas de recomendación, metabuscadores, búsqueda y recuperación de información, preferencias de usuarios en la web, en redes sociales, etc., plantean nuevos

retos y situaciones en las que no se dispone de todos los datos pareados de preferencia. La mayoría de los trabajos en la literatura plantean métodos basados en información completa. En Ureña et al. (2015b) se señalan las desventajas de los métodos que descartan la información incompleta o que penalizan a los expertos que la proporcionan. En este trabajo, se considera que el caso de información incompleta no debe ser tratado como información de baja calidad. Ésto confiere, además, mayor flexibilidad para encontrar una solución colectiva en un problema de decisión de grupo. Por tanto, el reto es obtener un ranking colectivo o de consenso de las alternativas que represente lo mejor posible la información de preferencias disponible, expresada por medio de múltiples relaciones de preferencia fuzzy, posiblemente inconsistentes, incompletas y con información diversa.

El problema de información incompleta ha recibido recientemente gran atención y varios autores han abordado el problema. Ureña et al. (2015b) presentan una exhaustiva revisión y el estado de la cuestión. La mayoría de los métodos en la literatura que se enfrentan al problema de información incompleta se articulan en varios pasos, siendo uno ellos, de compleción. En esta fase, los datos de preferencias no proporcionados directamente por los expertos son reemplazados por valores numéricos estimados, siguiendo diferentes estrategias. Métodos mínimos cuadrados basados en la definición de consistencia aditiva se han presentado en (Liu et al., 2012c) y en (Fedrizzi y Giove 2007), para el caso de un sólo experto. El problema para el modelo de consistencia aditiva es abordado mediante técnicas de programación lineal en (Zhang et al., 2012) y mediante un procedimiento iterativo en (Herrera-Viedma et al., 2007a,b; Lee, 2012). Herrera-Viedma et al. (2007a) definen medidas de consistencia para estimar información incompleta y plantean un proceso iterativo con varias rondas de consenso, donde los expertos aceptan cambiar sus preferencias siguiendo el consejo de un moderador. En (Herrera-Viedma et al., 2007b) se plantea un proceso iterativo para determinar los datos no proporcionados por los expertos, guiado por el modelo aditivo de consistencia, a la vez que definen medidas de análisis de la consistencia aditiva. Lee (2012) emplea la propiedad de consistencia aditiva y el orden de consistencia para determinar los datos desconocidos. Alonso et al. (2008) proponen, para los modelos aditivo y multiplicativo, un proceso iterativo para estimar los valores indeterminados en distintos tipos de relaciones de preferencia (fuzzy, multiplicativas, intervalares y lingüísticas) incompletas. Los autores plantean condiciones mínimas sobre la falta de datos. Zhang et al. (2014) analizan las técnicas de reconstrucción presentadas por Herrera-Viedma et al. (2007b) y por Fedrizzi y Giove 2007. Chen et al. (2014) proponen un método para construir una relación de preferencia colectiva completa siguiendo la definición de consistencia aditiva. En Meng y Cen (2015) se presenta un método GP basado en la definición de consistencia aditiva para completar las relaciones de preferencia individuales. Posteriormente proponen un procedimiento iterativo para construir una matriz colectiva usando un operador de agregación IHWA (Induced Hybrid Weighted Aggregation), teniendo en cuenta medidas de consistencia de las matrices individuales y de consenso. Zhang et al. (2016) emplean la propiedad de transitividad multiplicativa para proporcionar estimaciones de los valores desconocidos de cada relación de preferencias y medir la consistencia. A partir de las matrices completas se construye una matriz promedio colectiva, donde los pesos se calculan atendiendo a la consistencia y al grado de confianza de las preferencias individuales. Si esta matriz colectiva tiene un nivel de consenso satisfactorio, se calcula un vector de dominancias de las alternativas a partir de

las filas de dicha matriz.

Un enfoque alternativo al de realizar un paso previo de completación de las matrices incompletas consiste en determinar directamente un vector de prioridad colectivo. En esta línea, se proponen técnicas GP y de programación lineal en Xu (2004b), Xu (2005) y Xu y Chen (2008a), para los casos de consistencia aditiva y multiplicativa, y técnicas mínimos cuadrados en Gong (2008) y Xu et al. (2013b), para el caso de consistencia multiplicativa.

En Alonso et al. (2010) se presenta un sistema web de apoyo a la decisión para diferentes tipos de relaciones de preferencia incompletas (relaciones de preferencia lingüísticas fuzzy, lingüísticas y multi-granulares). El proceso de consenso es guiado a través de la propiedad de consistencia multiplicativa y de medidas de consenso.

En este contexto, el objetivo es presentar un modelo analítico general para obtener un vector colectivo de prioridad de las alternativas, que refleje lo mejor posible la información diversa expresada mediante relaciones de preferencia fuzzy, posiblemente inconsistentes e incompletas, dadas por un grupo de expertos. Como se ha señalado anteriormente, la mayoría de los trabajos en la literatura que abordan el problema de grupo con información incompleta proponen métodos que requieren implementar varios procesos previos. En general, el primer paso suele ser de completación de datos (trabajando así con datos no proporcionados directamente por los expertos) y en una etapa posterior se construye una matriz promedio a partir de las relaciones de preferencia completas del paso anterior. Respecto de esta matriz, se señala que se calcula a partir de datos heterogéneos, algunos de los cuales no han sido aportados directamente por los expertos, y no representa necesariamente una relación de preferencias fuzzy, no se ha creado como tal, pudiendo tener índices de inconsistencia alta. El modelo que se propone se basa en métodos de ajuste de los datos de preferencia aportados directamente por los expertos y el uso de diferentes métricas. Este enfoque aborda simultáneamente los problemas subyacentes de grupo, el problema de racionalidad a través de las propiedades de consistencia aditiva y multiplicativa (según proceda, atendiendo al modelo de partida) y el problema de información incompleta. Se discuten condiciones relativas a la estructura de la información de preferencias que garanticen la existencia de una solución del problema, extendiendo ciertos casos estudiados en la literatura. Una vez presentado el modelo analítico general (Sección 3.2), se desarrollan métodos computacionales y algoritmos efectivos de resolución de los problemas planteados (Sección 3.3). El modelo general extiende métodos particulares presentados en la literatura. Adicionalmente, el modelo proporciona automáticamente medidas de análisis de las soluciones que se presentan en la Sección 3.4. La aplicación de los métodos propuestos se ilustra mediante un ejemplo numérico.

3.2. Modelo analítico de ajuste de datos

Se considera un problema de decisión, donde un grupo de m expertos $\{E_1, \dots, E_m\}$ proporcionan sus preferencias sobre el conjunto de alternativas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($n \geq 2$) mediante las relaciones de preferencia fuzzy $P^k = (p_{ij}^k), k = 1, \dots, m$. Debido a la

complejidad de los problemas de decisión que surgen en aplicaciones reales, una situación común es la denominada falta de datos o información incompleta (Herrera-Viedma et al., 2007b; Ureña et al., 2015b), que responde a distintas situaciones. Un caso común es aquel en el que el experto, atendiendo a su campo de conocimiento, proporciona sólo información sobre un subconjunto de las alternativas (Dopazo et al., 2005). Otros casos, se refieren a la falta o pérdida de datos puntuales, al interés en reducir el procesamiento y el requerimiento de expresar preferencias sobre gran cantidad de elementos, la dificultad para cuantificar el grado de preferencia de una alternativa sobre otra, etc. Por ello se considera que $P^k = (p_{ij}^k), k = 1, \dots, m$, puede ser una relación de preferencia fuzzy incompleta, atendiendo a la siguiente definición.

Definición 3.1 (Xu, 2004b) Sea $P = (p_{ij})$ una relación de preferencia fuzzy. P se denomina relación de preferencia fuzzy incompleta, si alguno de los valores de la matriz P no es conocido. Esto es, si $\exists i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$, tales que el valor de p_{ij} no ha sido proporcionado, denotándose en este caso por el símbolo $\star$. Esto es,

$$p_{ij} \in [0, 1], p_{ij} + p_{ji} = 1, \text{ si } p_{ij} \neq \star \wedge p_{ji} \neq \star, i, j = 1, \dots, n.$$

Esta situación se corresponde con el caso en el que el valor numérico $p_{ij} \in [0, 1]$ representa el grado de preferencia de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j . En caso contrario, $p_{ij} = \star$ indica que el valor de preferencia relativo a ambas alternativas no ha sido proporcionado por el experto.

En este escenario, el objetivo es proporcionar métodos que exploten y sintetizen la información diversa y posiblemente inconsistente e incompleta, proporcionada por los expertos, para obtener un ranking o lista ordenada colectiva de las alternativas. Así, se planteará un modelo consistente en calcular un vector de prioridad de las alternativas $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t$, donde $v_i \geq 0$ indique el peso o prioridad de la alternativa x_i , que refleje lo mejor posible la información de preferencias del grupo. Es decir, un vector de prioridad que denominaremos colectivo o de consenso que refleje “lo mejor posible” (en un sentido que se precisará) la información de preferencias (posiblemente incompatible, inconsistente e incompleta) expresada en las relaciones de preferencia fuzzy $P^k, k = 1, \dots, m$, dadas por los expertos. A partir del vector de prioridad v se ordenarán las alternativas atendiendo al orden débil inducido por v , de forma que $x_i \succeq x_j \iff v_i \geq v_j, i, j = 1, \dots, n$. De modo que un mayor valor de v_i indicará una mejor posición de la alternativa x_i en el ranking final del grupo. Se hace notar que con este enfoque se abordarán simultáneamente los siguientes problemas planteados:

- **Problema de grupo o de consenso:** La información proporcionada por los expertos es diversa, es decir, $\exists k_1, k_2 \in \{1, \dots, m\}, k_1 \neq k_2$, y $\exists i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ tales que $p_{ij}^{k_1} \neq p_{ij}^{k_2}$.
- **Problema de inconsistencia:** Las relaciones de preferencia fuzzy proporcionadas por los expertos pueden ser inconsistentes.
- **Problema de información incompleta:** Situación en la cuál los expertos pueden no proporcionar directamente valoraciones pareadas sobre algunas alternativas.

Previo a la presentación de los métodos de resolución del problema planteado, atendiendo a que el modelo que se propone utiliza solamente los datos proporcionados por los expertos, se discuten a continuación condiciones sobre la estructura de los datos aportados por el grupo de expertos. El objetivo, es garantizar que se dispone de información suficiente para proporcionar una solución aceptable.

Para ello se considera la matriz $n \times n$, $\Sigma = (\sigma_{ij})_{ij}^n$, que denominaremos matriz indicatriz, definida por:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists k \in \{1, \dots, m\} : p_{ij}^k \neq \star, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad (3.1)$$

a modo de estructura de los datos proporcionados por los expertos. La matriz Σ es la matriz de adyacencia de un grafo G que representa los pares de alternativas para las que al menos un experto ha expresado un valor de preferencia. Se hace notar que no se hace referencia al carácter dirigido del grafo G atendiendo a que se trabaja con relaciones de preferencia recíprocas. Se asume que G es un grafo conexo, en el sentido que para cualquier par de alternativas (x_i, x_j) , con $x_i, x_j \in X, i \neq j$, existe al menos una secuencia de arcos $(i, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_k, j)$ en el grafo G . Lo que significa que, para cada par de alternativas distintas, por lo menos se dispone de una estimación de preferencias pareada dada de forma directa por un experto o indirectamente a través de caminos de arcos en G . En caso contrario, el conjunto de alternativas se podría dividir en al menos dos subconjuntos disjuntos de alternativas, de modo que la información de preferencias se podrá descomponer en “bloques” separados. Cada uno de ellos conteniendo sólo información de las alternativas pertenecientes a cada uno de los subconjuntos disjuntos. Lo que resulta en al menos dos problemas independientes de preferencia, que no es el caso de estudio de este trabajo.

El requisito de conectividad asumido sobre el grafo G , esto es, sobre la estructura de los datos de preferencia aportados por el grupo, es menos restrictivo que condiciones impuestas en algunos casos en la literatura. Concretamente, contempla el caso en el que un experto no proporciona información sobre una o más alternativas, situación referida por Alonso et al. (2009, 2010) como *situación de ignorancia* o *relación de preferencia recíproca incompleta e inaceptable* (Xu et al., 2014a). Adicionalmente alerta de la inconveniencia de emplear métodos de completación en los casos en los que los datos aportados por los expertos no verifican este requerimiento o no aportan información suficiente, y que son abordados por algunos autores asignando a los datos desconocidos el valor 0 (Lee, 2012), el valor 0.5 (Chen et al., 2014) u otros valores numéricos (Meng y Chen, 2015). Como ejemplo ilustrativo sencillo de esta situación, mostramos la relación de preferencia fuzzy P incompleta presentada en el Ejemplo 2 del trabajo (Chen et al., 2014),

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & \star & \star & \star \\ \star & 0.5 & 0.4 & 0.7 \\ \star & 0.6 & 0.5 & 0.8 \\ \star & 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Los autores aplican un método GP para derivar los valores desconocidos p_{12} , p_{13} y p_{14} , y utilizando la propiedad de reciprocidad calculan p_{21} , p_{31} y p_{41} . En este caso, el experto no aporta ninguna información de preferencias sobre la alternativa x_1 . Y por lo tanto,

en ausencia de más información, creemos incorrecto derivar cualquier vector de prioridad que involucre a dicha alternativa. A partir de la información contenida en P , sólo tendría sentido obtener valores de prioridad para las alternativas x_2 , x_3 y x_4 . En este caso, se podría abordar el problema de ordenar conjuntamente todas las alternativas, si se dispusiera de información adicional sobre la relación de x_1 con otras alternativas dada por otros expertos, con el requisito de conectividad del grafo G de los datos aportados. Es decir, puede darse el caso en el que algún experto sólo aporte información sobre los subconjuntos de alternativas sobre los que posee información precisa, pero siempre que el grafo G cumpla el requisito de conectividad.

Retomando el problema general, se trata de encontrar un vector de prioridad colectivo $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t$ de las alternativas que refleje lo mejor posible la información de preferencias del grupo expresada en las relaciones de preferencia fuzzy $P^k = (p_{ij}^k)$, $k = 1, \dots, m$. De forma que, $p_{ij}^k \in [0, 1]$ si es un valor de preferencia proporcionado por el experto E^k ó $p_{ij}^k = \star$ si no es un dato disponible con $i, j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$.

Se considera en primer lugar el modelo aditivo de consistencia y el caso ideal en el que hay consenso unánime entre los expertos y las matrices P^k , $k = 1, \dots, m$, son aditivamente consistentes (Definición 2.4). Aplicando la Proposición 2.1, se deduce que existe un vector de prioridad $v = (v_1, \dots, v_n)^t$, con $v_i \geq 0$, tal que se verifican las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} v_i - v_j = 2p_{ij}^k - 1, \\ i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (3.2)$$

Además, el vector v verificando las ecuaciones (3.2) es único salvo constante aditiva, y se corresponde con el vector de prioridad que estamos buscando. Las ecuaciones expresadas en (3.2) forman un sistema lineal de ecuaciones que puede ser escrito matricialmente como $Av = b$, donde $A = (a_{ij})$ es la matriz de coeficientes de las incógnitas y b es el vector de los términos independientes del sistema. La matriz A está formada por m bloques iguales, cada uno de dimensión $(n-1)^2 \times n$, que denominaremos B (se han eliminado las ecuaciones con $i = j$ en (3.2)),

$$A = \begin{pmatrix} B \\ B \\ \vdots \\ B \end{pmatrix}.$$

Los elementos de la matriz $B = (b_{ij})$ vienen dados por :

$$\begin{cases} b_{r+i, l} = 1, & \text{si } i = 1, \dots, n-1, \\ b_{r+i, i} = -1, & \text{si } 1 \leq i < l, \\ b_{r+i, i+1} = -1, & \text{si } l \leq i \leq n-1, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (3.3)$$

con $l = 1, \dots, n$ y $r = (n-1)(l-1)$. De donde se obtiene la expresión de los elementos de la matriz $A = (a_{ij})$:

$$\begin{cases} a_{s+i, l} = 1, & \text{si } i = 1, \dots, n-1, \\ a_{s+i, i} = -1, & \text{si } 1 \leq i < l, \\ a_{s+i, i+1} = -1, & \text{si } l \leq i \leq n-1, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (3.4)$$

con $s = (n-1)(n(k-1) + l-1)$, $l = 1, \dots, n$ y $k = 1, \dots, m$. Se observa que A es una matriz dispersa con gran cantidad de elementos nulos. Por otra parte, el vector término independiente $b = (b_i)^t$ es de dimensión $(m(n-1)^2) \times 1$ y sus elementos tienen la siguiente expresión:

$$b_{s+i} = \begin{cases} 2p_{l,i}^k - 1, & \text{si } 1 \leq i < l, \\ 2p_{l,i+1}^k - 1, & \text{si } l < i < n, \end{cases} \quad (3.5)$$

con $s = (n-1)(n(k-1) + l-1)$, $l = 1, \dots, n$ y $k = 1, \dots, m$.

Atendiendo a la reciprocidad de las relaciones de preferencia fuzzy, en (3.2) bastará considerar las ecuaciones correspondientes a $1 \leq i < j \leq n$ y $k = 1, \dots, m$. En este caso, la matriz $A = (a_{ij})$ de coeficientes será de dimensión $(m \frac{n(n-1)}{2}) \times n$ y estará formada por m bloques con la misma estructura:

$$A = \begin{pmatrix} B \\ B \\ \vdots \\ (m) \\ \vdots \\ B \end{pmatrix}.$$

donde la matriz B adopta la siguiente forma:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & \\ -1 & & 1 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ -1 & & & & 1 & \\ -1 & & & & & 1 \\ & -1 & 1 & & & \\ & -1 & & \ddots & & \\ & -1 & & & 1 & \\ & -1 & & & & 1 \\ & & & \vdots & & \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Se hace notar que todos los elementos marcados en blanco en la matriz B (3.6) representan ceros. En este caso, los elementos de cada matriz $B = (b_{ij})$ vienen dados por :

$$\begin{cases} b_{t+i,l} = 1, & \text{si } i = 1, \dots, n-l, \\ b_{t+i,l+i} = -1, & \text{si } i = 1, \dots, n-l, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (3.7)$$

con $l = 1, \dots, n$ y $t = (n - \frac{l}{2})(l-1)$.

De donde se derivan las siguientes expresiones para los elementos no nulos de la matriz A :

$$\begin{cases} a_{q+i,l} = 1, & i = 1 \dots, n-l, \\ a_{q+i,i+l} = -1, & i = 1 \dots, n-l, \end{cases} \quad (3.8)$$

siendo en este caso $q = \frac{n(n-1)}{2}(k-1) + (l-1)(n - \frac{l}{2})$, $l = 1 \dots, n-1$ y $k = 1, \dots, m$. Por otra parte, el vector $b = (b_i)^t$ de términos independientes será de dimensión $(m \frac{n(n-1)}{2}) \times 1$ y sus elementos tienen la siguiente expresión:

$$b_{q+i} = 2p_{l, l+i}^k - 1, \quad i = 1 \dots, n-l, \quad (3.9)$$

con $q = \frac{n(n-1)}{2}(k-1) + (l-1)(n - \frac{l}{2})$, $l = 1 \dots, n-1$, $k = 1 \dots, m$.

Paralelamente, se considera el modelo de consistencia multiplicativa y el caso ideal en el que hay consenso unánime entre los expertos y las matrices P^k , $k = 1, \dots, m$, son multiplicativamente consistentes (Definición 2.3). Aplicando la Proposición 2.2 se concluye que existe un vector de prioridad $v = (v_1, \dots, v_n)^t$, $v_i > 0$ con $i = 1, \dots, n$, tal que se verifican las siguientes ecuaciones:

$$p_{ij}^k = \frac{v_i}{v_i + v_j}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.10)$$

Además, el vector v es único salvo constante multiplicativa. Reescribiendo (3.10) como ecuaciones lineales y considerando la condición de normalización $\sum_{i=1}^n v_i = 1$, se obtiene el siguiente sistema lineal sobredeterminado:

$$\begin{cases} (p_{ij}^k - 1)v_i + p_{ij}^k v_j = 0, & i, j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^n v_i = 1. \end{cases} \quad (3.11)$$

Las ecuaciones en (3.11) forman un sistema lineal sobredeterminado de $(m(n-1)^2) + 1$ ecuaciones y n incógnitas, que puede ser escrito matricialmente como $Av = b$, se empleará la misma notación que para el modelo aditivo de preferencias salvo que haya lugar a confusión. La matriz A de coeficientes estará formada en este caso por m bloques $A^1, \dots, A^m$, (cada uno de dimensión $(n-1)^2 \times n$), y una fila de unos correspondientes a los coeficientes de la ecuación $\sum_{i=1}^n v_i = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^k \\ \vdots \\ A^m \\ 1 \dots 1 \end{pmatrix}.$$

Los elementos no nulos de la matriz $A = (a_{ij})$ vienen dados por:

$$a_{s+i, l} = \begin{cases} p_{l, i}^k - 1, & \text{si } 1 \leq i < l, \\ p_{l, i+1}^k - 1, & \text{si } l \leq i < n, \end{cases} \quad (3.12)$$

$$a_{s+i, i} = p_{l, i}^k, \quad \text{si } 1 \leq i < l,$$

$$a_{s+i, i+1} = p_{l, i+1}^k, \quad \text{si } l \leq i < n,$$

con $s = (n-1)((k-1)n + l - 1)$, $l = 1, \dots, n$ y $k = 1, \dots, m$. Se observa que A es una matriz dispersa con gran cantidad de elementos nulos. El vector término independiente $b = (b_i)$ es de dimensión $(m(n-1)^2 + 1) \times 1$ y sus elementos tienen la siguiente expresión:

$$b_i = \begin{cases} 0, & i = 1, \dots, m(n-1)^2, \\ 1, & i = m(n-1)^2 + 1. \end{cases} \quad (3.13)$$

Atendiendo a la propiedad de reciprocidad de las relaciones de preferencia fuzzy, en (3.11) bastará considerar las ecuaciones correspondientes a $0 \leq i < j \leq n$, con $k = 1, \dots, n$, reduciéndose de esta forma el número de ecuaciones del sistema. En este caso, la matriz $A = (a_{ij})$ será por tanto de dimensión $(m \frac{n(n-1)}{2} + 1) \times n$, y sus elementos no nulos tendrán las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} a_{q+i, l} = p_{l, i+l}^k - 1, & \text{con } i = 1, \dots, n-l, \\ a_{q+i, l+i} = p_{l, i+l}^k, & \text{con } i = 1, \dots, n-l \\ a_{\frac{mn(n-1)}{2}+1, i} = 1, & i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (3.14)$$

con $l = 1, \dots, n-1$, $k = 1, \dots, m$, y siendo $q = \frac{n(n-1)}{2}(k-1) + (l-1)(n-\frac{l}{2})$, en este caso. El vector $b = (b_i)$ de términos independientes será un vector de dimensión $(m \frac{n(n-1)}{2} + 1) \times 1$, con todos sus elementos nulos salvo $b_i = 1$ con $i = \frac{mn(n-1)}{2} + 1$.

En el problema general que se aborda, en el que las relaciones de preferencia fuzzy pueden ser incompletas, en el sistema (3.2), para el modelo aditivo, se considerarán sólo las ecuaciones correspondientes a los datos aportados por los expertos ($p_{ij}^k \neq \star$):

$$\begin{cases} v_i - v_j = 2p_{ij}^k - 1, \\ i, j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m : p_{ij}^k \neq \star. \end{cases} \quad (3.15)$$

Análogamente, en el modelo multiplicativo de preferencias se considerarán las ecuaciones (3.11) derivadas de los datos dados por los expertos:

$$\begin{cases} (p_{ij}^k - 1)v_i + p_{ij}^k v_j = 0, \\ i, j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m : p_{ij}^k \neq \star, \\ \sum_{i=1}^n v_i = 1. \end{cases} \quad (3.16)$$

Procediendo como se ha hecho anteriormente, los sistemas de ecuaciones (3.15) y (3.16), en los que se han eliminado las ecuaciones relativas a los datos no proporcionados por los expertos ($p_{ij}^k = \star$), pueden ser escritos matricialmente como $Av = b$, siendo A la matriz de coeficientes y b el vector de términos independientes correspondientes. Es importante destacar, que en estos casos las matrices de coeficientes de dichos sistemas son irreducibles, dado que se ha asumido que G es un grafo conexo, condición que afecta a la mínima información requerida.

El sistema lineal (3.15), si se trabaja con el modelo aditivo de preferencias, o el sistema lineal (3.16), si se considera el modelo multiplicativo de preferencias, son sistemas lineales

sobredeterminados, el número de ecuaciones ($\sum_{k=1}^m n_k$) es mayor que el número de incógnitas (n), siendo n_k el número de datos aportados por el experto E_k ($n_k := \#\{(i, j) : p_{ij}^k \neq \star\}$). Estos sistemas sólo tienen solución exacta si los datos dados por cada experto verifican la correspondiente propiedad normativa de consistencia y hay acuerdo sobre las preferencias entre los expertos. Estas condiciones no se dan en general en problemas de decisión que surgen en aplicaciones reales, debido a la complejidad del problema, dificultad para cuantificar los grados de preferencia, los diferentes antecedentes y dominios de conocimiento de los expertos, etc. Por tanto, en general el sistema lineal sobredeterminado (3.15) ó el sistema (3.16), según proceda, será incompatible y en consecuencia no tendrá solución exacta. En este escenario, el desafío reside en proporcionar un orden de preferencia de las alternativas atendiendo a las relaciones de preferencia fuzzy proporcionadas por los expertos, que pueden ser incompletas e inconsistentes.

Para abordar el problema, se adopta una estrategia social, donde los expertos actúan como grupo compartiendo un interés común en determinar una solución colectiva en forma de vector de prioridad colectivo o de consenso $v = (v_1, \dots, v_n)^t$, cuyas componentes reflejen lo mejor posible las preferencias proporcionadas por los expertos. De esta forma, el problema se formula en términos de encontrar un vector colectivo v que resuelva lo mejor posible el sistema lineal sobredeterminado $Av = b$ expresado en (3.15) ó (3.16), según se considere el modelo aditivo o el modelo multiplicativo, respectivamente. En terminología de técnicas de ajuste de datos, se aborda el problema de decisión de n alternativas, a partir de las “muestras” $p_{ij}^k \neq \star$, $i, j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$, o datos empíricos que cuantifican los juicios de preferencias atendiendo a distintas fuentes o expertos. Se trata por tanto de proporcionar un modelo para analizar los datos y extraer un vector de prioridad colectivo de las alternativas. Se busca así, un vector no negativo $v = (v_1, \dots, v_n)^t$ que resuelva lo mejor posible el sistema sobredeterminado $Av = b$ de forma que el vector error residual $\delta(v) := |Av - b|$ sea lo menor posible en algún sentido específico. Las componentes del vector residual $\delta(v)$ vienen dadas por las expresiones (3.17) y (3.18), según se trabaje con el modelo aditivo o multiplicativo de preferencias respectivamente:

$$\delta_{ij}^k(v) = |v_i - v_j - 2p_{ij}^k + 1|, \quad i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m, \quad \text{para } p_{ij}^k \neq \star, \quad (3.17)$$

$$\delta_{ij}^k(v) = |(p_{ij}^k - 1)v_i + p_{ij}^k v_j|, \quad i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m, \quad \text{para } p_{ij}^k \neq \star. \quad (3.18)$$

En el caso que $p_{ij}^k = \star$, consideraremos $\delta_{ij}^k(v) = 0$, sin pérdida de generalidad.

Este enfoque de ajuste de datos implica el uso de métricas (distancias), siendo las más usuales la familia de normas vectoriales l_p , $1 \leq p \leq \infty$. El uso directo de estas métricas conduce a la “mejor solución l_p ” (Watson, 1980; Cadzow, 1987; Ueberhuber, 2012) del sistema lineal sobredeterminado $Av = b$, en el sentido que minimiza la norma l_p del vector error residual $\delta(v) := |Av - b|$ con componentes (3.17) ó (3.18) según se trate del modelo aditivo o multiplicativo:

$$\min \|Av - b\|_p = \begin{cases} \min \left(\sum_{k=1}^m \sum_{\substack{i,j=1 \\ p_{ij}^k \neq \star}}^n |\delta_{ij}^k(v)|^p \right)^{1/p}, & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \min \left\{ \max_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,m: p_{ij}^k \neq \star}} \{|\delta_{ij}^k(v)|\} \right\}, & \text{si } p = \infty, \end{cases} \quad (3.19)$$

sujeto a condiciones apropiadas de normalización y con $\delta_{ij}^k(v)$ como en (3.17) ó (3.18), según sea el modelo aditivo o multiplicativo.

Las normas más usualmente consideradas son las relativas a $p = 1$, $p = 2$ y $p = \infty$. El caso más habitual se corresponde con la solución mínimos cuadrados del sistema $Av = b$, relativo al uso de la métrica euclídea, donde $p = 2$:

$$\min \|Av - b\|_2^2 = \min \left(\sum_{k=1}^m \sum_{\substack{i,j=1 \\ p_{ij}^k \neq \star}}^n |\delta_{ij}^k(v)|^2 \right), \quad (3.20)$$

sujeta a condiciones de normalización. La función objetivo en (3.20) se corresponde con el error cuadrático formado por la suma de los cuadrados de las desviaciones o errores residuales puntuales. Es una función diferenciable y existen métodos numéricos bien conocidos para la resolución del problema.

El caso $p = 1$ se corresponde con la búsqueda de soluciones que minimicen la suma de los errores residuales puntuales, esto es:

$$\min \|Av - b\|_1 = \min \left(\sum_{k=1}^m \sum_{\substack{i,j=1 \\ p_{ij}^k \neq \star}}^n |\delta_{ij}^k(v)| \right). \quad (3.21)$$

Esta métrica produce una solución más robusta, en el sentido que es menos sensible a datos extremos. La resolución del problema requiere un mayor esfuerzo computacional que para el caso de $p = 2$. No obstante, en los problemas de decisión que se abordan, la matriz coeficientes A es una matriz dispersa (un porcentaje elevado de sus elementos son nulos), por lo que el esfuerzo computacional no es una cuestión crítica en este escenario.

Finalmente, el uso de la métrica $p = \infty$ también denominada norma de Chebyshev, conduce a minimizar el mayor error residual puntual:

$$\min \|Av - b\|_\infty = \min \left\{ \max_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,m \\ p_{ij}^k \neq \star}} \{ |\delta_{ij}^k(v)| \} \right\}. \quad (3.22)$$

El uso de esta métrica de este modo produce soluciones muy sensibles a extremos locales debidos a datos puntuales, qué podrían ser erróneos, por lo que en general esta métrica no se empleará en este modo (3.22) para calcular un vector de prioridad v colectivo. Sin embargo, puede ser de interés su aplicación para identificar datos puntuales p_{ij}^k extremos, fuera del rango esperado, que difieran esencialmente del resto de datos y que podrían ser erróneos. En este caso, una vez calculado v , si $\mu = \min \|Av - b\|_\infty$ es mayor que una tolerancia fijada, se identificarán los datos $p_{i_0j_0}^{k_0}$, tales que $\delta_{i_0j_0}^{k_0} = \mu$ y se pide su revisión a los expertos que han proporcionado dichos datos.

Se hace notar que en las funciones objetivo a minimizar en las formulaciones (3.19) anteriores, las componentes $\delta_{ij}^k(v)$ de $\delta(v)$ representan los errores residuales respecto de los datos p_{ij}^k proporcionados por los expertos. Éstos se pueden considerar como datos muestrales relativos a varios niveles. El indicado por el índice k , indicador referente al experto, y el relativo al par de índices (i, j) , indicador que hace referencia al par de alternativas en consideración y que denominaremos índices “locales” para cada experto

k . De esta forma, es especialmente interesante agrupar los errores residuales (3.17) ó (3.18), según se trabaje con el modelo aditivo o el modelo multiplicativo de preferencias respectivamente, atendiendo a los datos aportados por cada experto k . Volviendo a la elección de la función distancia en el modelo de ajuste de datos (3.19), ésta se debe adaptar a las características particulares del problema de decisión de grupo en cuestión. Uno de los objetivos, es modelar las diferentes formas de actuar del grupo al integrar las preferencias individuales en un vector de prioridad colectivo v . Por ello, y atendiendo a la argumentación anterior que señala dos niveles de errores, parece indicado considerar la posibilidad del uso de distintas métricas para ajustar los datos a nivel de grupo (índice k , problema de grupo o consenso) y a nivel local (índices (i, j) , problema de consistencia). Esto permitirá simular distintas estrategias del grupo a través de la agregación de los errores residuales. De esta forma, por un lado se podría emplear una norma matricial o vectorial $\|\cdot\|$ para medir los errores locales (en (i, j) , $i, j = 1, \dots, n$) atendiendo a la propiedad de consistencia. Por otro lado, se considerará una norma vectorial, típicamente la métrica l_p (qué tiene una interpretación específica en este contexto) para dirigir en este caso la agregación del vector $(\|\delta^1(v)\|, \dots, \|\delta^m(v)\|)$ de errores residuales $\delta^k(v)$ provenientes de cada experto del grupo. Adicionalmente se contempla la posibilidad de que los expertos tengan distinto peso en la decisión de acuerdo con su grado de influencia, de conocimiento en el campo del tema a tratar, etc. Para ello se considera un vector positivo de pesos $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, donde α_k indica el peso del experto E_k , con $\sum_{k=1}^m \alpha_k = 1$.

De esta forma se plantea un modelo general consistente en encontrar un vector colectivo de prioridad $v = (v_1, \dots, v_n)^t$, sujeto a las correspondientes condiciones de normalización y positividad, que ajuste lo mejor posible los datos proporcionadas por los expertos, de forma que se minimice la agregación, empleando la métrica l_p , de los errores residuales de los expertos (3.19):

$$\min \left\{ \sum_{k=1}^m \alpha_k^p \|\delta^k(v)\|^p \right\}, \quad \text{si} \quad 1 \leq p < \infty, \quad (3.23)$$

$$\min \left\{ \max_{k=1, \dots, m} \{ \alpha_k \|\delta^k(v)\| \} \right\}, \quad \text{si} \quad p = \infty, \quad (3.24)$$

donde $\delta^k(v)$ está formado por los errores residuales locales $\delta_{ij}^k(v)$ como en (3.17), para el modelo aditivo de preferencias, ó (3.18), para el modelo multiplicativo, $\delta_{ij}^k(v) = 0$ si $p_{ij}^k = \star$, y $\|\cdot\|$ representa una norma matricial o vectorial general.

La métrica l_p determina la estrategia del grupo en la búsqueda de una solución colectiva de los expertos facilitando diferentes estrategias. El caso $p = 1$ se corresponde con la solución que minimiza la suma de los errores residuales de los expertos. A medida que p aumenta, más importancia se da al experto más discrepante. El caso $p = \infty$ corresponde a la estrategia que minimiza la desviación del experto más extremo, y puede emplearse para identificar al experto más discrepante (experto “outlier”). De esta forma si

$$\delta_{max} = \max_{k=1, \dots, m} (\|\delta^1(v)\|, \dots, \|\delta^m(v)\|),$$

el experto k_0 tal que $\|\delta^{k_0}(v)\| = \delta_{max}$ es candidato a ser un “outlier”. Por tanto, el parámetro p se puede considerar un factor de balance entre el principio de la mayoría

($p = 1$) y el principio de la minoría ($p = \infty$) (González-Pachón y Romero, 2016). Por otra parte, la interpretación de la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|$, empleada en la agregación de los errores residuales locales para cada experto, se ilustrará con algunos casos especiales en la Sección 3.3. Algunos autores han hecho uso de la métrica l_p para los casos particulares de $p = 1$ y $p = 2$ (Xu (2005), Xu and Chen (2008a), Gong (2008), Xu and Cai (2011), Xu et al. (2013b) (logp2)). Sin embargo, algunos de ellos no consideran el problema de información incompleta, y no abordan simultaneamente el problema de la consistencia.

En el modelo general planteado (3.23 - 3.24) se contempla la posibilidad, de que los expertos tengan distinto peso en la decisión atendiendo al vector de pesos $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Esto aporta flexibilidad al modelo, permitiendo trabajar en problemas de decisión de grupo heterogéneos, donde la información de preferencias de los expertos tiene distinta relevancia (Herrera-Viedma et al., 2014). Si todos los miembros del grupo tienen el mismo peso $\alpha_k = \frac{1}{m}, \forall k$, el parámetro α_k puede eliminarse en la expresión del modelo.

En todas las formulaciones anteriores se simulan situaciones de decisión de grupo a partir de la información aportada por los expertos. En problemas de información incompleta, donde los expertos aportan solamente información sobre las alternativas sobre las que tienen conocimiento preciso, se pueden dar situaciones de gran disparidad en el número de datos aportados por los expertos. En estos casos, para evitar situaciones extremas en las que la información de preferencias de un experto tuviera un impacto mayor en la decisión por proporcionar un mayor número de datos que el resto de expertos, podría ser de interés ponderar la agregación de los errores residuales locales $\delta_{ij}^k(v)$ de cada experto k , en función del número n_k de datos aportados por dicho experto E_k , $\alpha_k = 1/n_k$, con $n_k := \#\{(i, j) : p_{ij}^k \neq \star\}$ (Dopazo y Ruíz-Tagle, 2011).

Se hace hincapié, en que el modelo planteado no precisa una etapa previa de compleción de datos, como la mayoría de los métodos propuestos en la literatura (Ureña et al., 2015b). Se consideran solamente los datos aportados por los expertos con una condición sobre la estructura de los datos del grupo, que garantice que se dispone de información suficiente para obtener un vector de prioridad, evitando así soluciones erróneas propuestas en la literatura (Lee, 2012; Chen et al., 2014; Meng y Chen, 2015).

Además, el modelo general (3.23 - 3.24) cubre un amplio catálogo de modos de actuar del grupo en la búsqueda de una solución colectiva, a través del enfoque y los parámetros y métricas que lo definen (que le confieren gran flexibilidad), para los modelos aditivo y multiplicativo de preferencias. Una vez calculada la solución v , los valores de las funciones objetivo proporcionan automáticamente medidas para analizar la solución. Se presenta en la Tabla 3.1 una relación de funciones objetivo de algunos de los métodos que se derivan del modelo general para métricas usuales. Éstos modelan un amplio espectro de actuaciones en problemas de decisión de grupo y se puede abordar fácilmente su resolución computacional, como se verá en la siguiente sección.

En conclusión, el modelo general planteado en (3.23 - 3.24) proporciona un marco teórico analítico para abordar y analizar simultáneamente los problemas subyacentes: i) Problema de consistencia, ii) Problema de grupo o de síntesis de datos, debido a información diversa y en conflicto procedente de distintas fuentes, y iii) Problema de

tratamiento de información incompleta, ya que sólo las desviaciones proporcionadas por los datos disponibles $p_{ij}^k \neq \star$ son consideradas. Además, el modelo general (3.23 - 3.24) cubre un amplio catálogo de modos de actuar del grupo en la búsqueda de una solución colectiva, a través del enfoque y los parámetros y métricas que lo definen, para los modelos aditivo y multiplicativo de preferencias. Una vez calculada la solución v , los valores de las funciones objetivo proporcionan automáticamente medidas para analizar la solución. El modelo general propuesto extiende casos particulares estudiados en la literatura.

Tabla 3.1: Relación de métodos para métricas particulares.

Métricas ($l_p, \ \cdot\ $)	Función Objetivo	Comentario
$p = 1, l_1$	$\sum_k \alpha_k \sum_{ij} \delta_{ij}^k(v)$	Minimiza suma errores residuales locales
$p = 2, \ \cdot\ _{Fr}$	$\sum_k \alpha_k^2 \sum_{ij} [\delta_{ij}^k(v)]^2$	Mínimos cuadrados
$p = \infty, l_1$	$\max_k \{\alpha_k \sum_{ij} \delta_{ij}^k(v)\}$	Minimiza experto más discrepante
$p = \infty, l_\infty$	$\max_k \{\alpha_k \max_{ij} \{\delta_{ij}^k(v)\}\}$	Detección datos puntuales extremos
$p = 1, \ \cdot\ _{m\infty}$	$\sum_k \alpha_k \max_i \{\sum_j \delta_{ij}^k(v)\}$	Minimiza suma errores extremos de expertos a nivel alternativas
$p = \infty, \ \cdot\ _{m\infty}$	$\max_k \{\alpha_k \max_i \{\sum_j \delta_{ij}^k(v)\}\}$	Minimiza desviación del experto más discrepante a nivel de alternativas

Por $\|\cdot\|_{Fr}$, se denota la norma matricial de Frobenius y por $\|\cdot\|_{m\infty}$ la norma matricial infinita (Ueberhuber, 2012).

3.3. Modelo computacional

Una vez planteado el modelo analítico general (3.23 - 3.24) para los modelos de preferencias aditivo y multiplicativo, nos centramos ahora en el cálculo efectivo de un vector de prioridad de consenso $v = (v_1, \dots, v_n)^t$ a partir de las relaciones de preferencia fuzzy $P^k = (p_{ij}^k)$, $k = 1, \dots, n$, posiblemente incompletas proporcionadas por los expertos sobre el conjunto X de alternativas. En el modelo general de ajuste de datos propuesto, las métricas a emplear son elementos fundamentales para simular o dirigir la actuación del grupo en la búsqueda de una solución colectiva. Adicionalmente, una cuestión importante

a considerar es la resolución computacional de los problemas de optimización resultantes. A continuación se describen las formulaciones computacionales y algoritmos asociados de los métodos que se derivan del modelo general planteado en la sección 3.2 para las métricas más usuales y que representan un amplio espectro de estrategias de resolución del problema de decisión de grupo. Como se comentó en la sección anterior, en el proceso de ajuste de datos de los expertos se manejan errores atendiendo principalmente a dos niveles. Para la agregación de los residuos de los expertos $(\delta^k, k = 1, \dots, m)$ se utilizarán las normas vectoriales l_p más usuales con $p = 1, 2, \infty$. Para agregar los errores locales δ_{ij}^k relativos a cada par de alternativas (x_i, x_j) , para cada experto k , se considerarán las normas vectoriales l_p más usuales, $p = 1, 2, \infty$, la norma matricial de Frobenius $\|\cdot\|_{Fr}$ y la norma matricial infinito, $\|\cdot\|_{m\infty}$.

Método Mínimos Cuadrados. El caso más usual, se corresponde con el uso de la métrica l_p con $p = 2$ para la agregación de las desviaciones de los expertos y el uso de la norma matricial de Frobenius $\|\cdot\|_{Fr}$ en la síntesis de las desviaciones locales de cada experto. Éste caso se corresponde con la solución l_2 ponderada o mínimos cuadrados ponderada (Ueberhuber, 2012; Watson, 1980) del sistema lineal sobredeterminado $Av = b$. Ésto conduce al siguiente problema mínimos cuadrados ponderado:

$$\min \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k^2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ p_{ij}^k \neq \star}}^n (\delta_{ij}^k(v))^2 \right), \quad (3.25)$$

donde $\delta_{ij}^k(v)$ adopta la expresión (3.17) ó (3.18), según se trate del modelo aditivo o multiplicativo de preferencias respectivamente y sujeto a las correspondientes condiciones de normalización. Para estos problemas existe una gran cantidad de procedimientos numéricos de resolución (Ueberhuber, 2012; Stoer y Bulirsch, 2013; Press, 2007). El uso de técnicas mínimos cuadrados se ha considerado en (Xu y Cai, 2011) para el modelo aditivo y en (Gong, 2008; Xu et al., 2013b,b) para el modelo multiplicativo.

Método Suma de los Residuos. Consideremos ahora el uso de la métrica l_p con $p = 1$ en la agregación de los errores residuales locales para cada experto y en la agregación de las desviaciones de cada experto, resultando el siguiente problema de optimización:

$$\min \sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{\substack{i,j=1 \\ p_{ij}^k \neq \star}}^n \delta_{ij}^k(v) = \begin{cases} \min \sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{\substack{i,j=1 \\ p_{ij}^k \neq \star}}^n |v_i - v_j - 2p_{ij}^k + 1|, & \text{caso aditivo,} \\ \min \sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{\substack{i,j=1 \\ p_{ij}^k \neq \star}}^n |(p_{ij}^k - 1)v_i + p_{ij}^k v_j|, & \text{caso multipl.} \end{cases} \quad (3.26)$$

sujeto a las correspondientes condiciones de normalización, con $\delta_{ij}^k(v)$ como en (3.17) ó (3.18), según se trate de un modelo aditivo o multiplicativo de preferencias, respectivamente. En este caso, el vector de prioridad colectivo se corresponde con la solución l_1 ponderada

(Watson, 1980; Cadzow, 1987) no negativa (modelo aditivo) o positiva (modelo multiplicativo) del sistema lineal sobredeterminado $Av = b$ con las correspondientes condiciones de normalización. La función objetivo del problema (3.26) se escribe en términos de valores absolutos de los errores residuales. Un procedimiento sistemático para traducir estos problemas en problemas de programación lineal consiste en introducir la parte positiva y negativa de los residuos considerados. Este procedimiento se detalla en (Watson, 1980) en el contexto de resolución de sistemas lineales sobredeterminados y es clave en los modelos de programación por metas (Romero, 2014; Jones and Tamiz, 2010; Charnes y Cooper, 1977).

De este modo, para el modelo aditivo de preferencias se introducen las nuevas variables de desviación negativa ν_{ij}^k y positiva π_{ij}^k , dadas por:

$$\begin{aligned}\nu_{ij}^k &= \frac{1}{2} \left[|v_i - v_j - 2p_{ij}^k + 1| + |v_i - v_j - 2p_{ij}^k + 1| \right], \text{ si } p_{ij}^k \neq \star, \\ \pi_{ij}^k &= \frac{1}{2} \left[|v_i - v_j - 2p_{ij}^k + 1| - |v_i - v_j - 2p_{ij}^k + 1| \right], \text{ si } p_{ij}^k \neq \star.\end{aligned}\tag{3.27}$$

En términos de estas nuevas variables, los errores residuales (3.17) para el modelo aditivo de preferencias se expresan como $\delta_{ij}^k(v) = \pi_{ij}^k + \nu_{ij}^k$.

Alternativamente, para el modelo de consistencia multiplicativa se consideran las nuevas variables:

$$\begin{aligned}\nu_{ij}^k &= \frac{1}{2} \left[|(p_{ij}^k - 1) + p_{ij}^k v_j| + ((p_{ij}^k - 1) + p_{ij}^k v_j) \right], \text{ si } p_{ij}^k \neq \star, \\ \pi_{ij}^k &= \frac{1}{2} \left[|(p_{ij}^k - 1) + p_{ij}^k v_j| - ((p_{ij}^k - 1) + p_{ij}^k v_j) \right], \text{ si } p_{ij}^k \neq \star.\end{aligned}\tag{3.28}$$

De esta forma, los errores residuales $\delta_{ij}^k(v)$ (3.18) se pueden expresar como $\delta_{ij}^k(v) = \pi_{ij}^k + \nu_{ij}^k$. Por simplicidad en la notación, en ambos casos, aditivo y multiplicativo, emplearemos la misma notación ν_{ij}^k y π_{ij}^k para representar la parte negativa y positiva de los errores residuales $\delta_{ij}^k(v)$, salvo que haya lugar a confusión. Se hace notar que en ambos casos $\nu_{ij}^k \geq 0$, $\pi_{ij}^k \geq 0$, $\nu_{ij}^k \cdot \pi_{ij}^k = 0$ y $\delta_{ij}^k = \pi_{ij}^k + \nu_{ij}^k$, $\forall i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m$ si $p_{ij}^k \neq \star$.

De ésta forma, el problema (3.26) para el modelo aditivo se puede escribir en términos de las nuevas variables (3.27) como,

$$\text{mín} \sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{\substack{i,j=1 \\ p_{ij}^k \neq \star}}^n (\nu_{ij}^k + \pi_{ij}^k),\tag{3.29}$$

sujeto a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} v_i - v_j - 2p_{ij}^k + 1 - \nu_{ij}^k + \pi_{ij}^k = 0, & i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m : p_{ij}^k \neq \star, \\ \nu_{ij}^k, \pi_{ij}^k \geq 0, & i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m : p_{ij}^k \neq \star, \\ v_i \geq 0, |v_i - v_j| \leq 1, & i, j = 1, \dots, n. \end{cases}\tag{3.30}$$

Alternativamente, el problema (3.26) para el modelo multiplicativo se escribe como (3.29) pero sujeto a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} (p_{ij}^k - 1)v_i + p_{ij}^k v_j - \nu_{ij}^k + \pi_{ij}^k = 0, & \text{para } i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m : p_{ij}^k \neq \star, \\ \nu_{ij}^k, \pi_{ij}^k \geq 0, & \text{para } i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m : p_{ij}^k \neq \star, \\ v_i > 0, & i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n v_i = 1. \end{cases} \quad (3.31)$$

Los problemas (3.29-3.30) y (3.29-3.31) responden a problemas de programación lineal que pueden ser resueltos aplicando el método del simplex. Métodos basados en programación lineal se han considerado en (Xu, 2004b; Xu y Chen, 2008a) para los modelos de preferencias aditivo y multiplicativo.

Método para la detección de expertos “outliers” Consideremos ahora el caso en el que se busca un vector colectivo que minimice el error residual del experto más discrepante, de especial interés para detectar posibles expertos “outlier”. En este caso se considera la métrica l_∞ en la agregación de los residuos relativos a los expertos y la métrica l_1 para la agregación de los errores residuales locales de cada experto, resultando el siguiente problema de optimización:

$$\min_{k=1, \dots, m} \max_{\substack{i, j=1 \\ p_{ij}^k \neq \star}}^n \left\{ \alpha_k \sum_{i, j=1 \\ p_{ij}^k \neq \star}^n \delta_{ij}^k(v) \right\} = \begin{cases} \min_{k=1, \dots, m} \max_{\substack{i, j=1 \\ p_{ij}^k \neq \star}}^n \left\{ \alpha_k \sum_{i, j=1 \\ p_{ij}^k \neq \star}^n |v_i - v_j - 2p_{ij}^k + 1| \right\}, & \text{caso adit.}, \\ \min_{k=1, \dots, m} \max_{\substack{i, j=1 \\ p_{ij}^k \neq \star}}^n \left\{ \alpha_k \sum_{i, j=1 \\ p_{ij}^k \neq \star}^n |(p_{ij}^k - 1)v_i + p_{ij}^k v_j| \right\}, & \text{caso mult.}, \end{cases} \quad (3.32)$$

donde $\delta_{ij}^k(v)$ adopta la expresión (3.17) para el caso aditivo y (3.18) para el caso multiplicativo, sujeto a condiciones de normalización apropiadas.

Siguiendo la misma técnica que en el método anterior, se introducen las variables de desviación ν_{ij}^k y π_{ij}^k (Watson, 1980), como en (3.27) o en (3.28), atendiendo a la naturaleza aditiva o multiplicativa del modelo de preferencias, respectivamente, y una nueva variable D no negativa, que se corresponde con la desviación máxima. A continuación, el problema (3.32) se formula en términos de éstas nuevas variables:

$$\min D \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a: } & \alpha_k \sum_{\substack{i, j=1 \\ p_{ij}^k \neq \star}}^n (\nu_{ij}^k + \pi_{ij}^k) \leq D, \quad k = 1, \dots, m, \\ & \nu_{ij}^k, \pi_{ij}^k \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m : p_{ij}^k \neq \star, \end{aligned}$$

y a las restricciones (3.30) en el modelo aditivo o (3.31) para el modelo multiplicativo. En ambos casos resultan problemas de programación lineal, que pueden ser resueltos mediante el método del simplex.

Método λ -extendido a nivel de grupo. Los métodos (3.26), denominado Método Suma de los Residuos, y (3.32), denominado Método Detección de Expertos “Outliers”, se corresponden con el uso de los valores extremos de p , $p = 1$ y $p = \infty$, respectivamente, en la agregación de las desviaciones de los expertos. De forma que en el método Suma de los Residuos se minimiza la suma de las desviaciones de los expertos y en el segundo método se minimiza la máxima desviación de los expertos. Tomando como base estos casos particulares, se puede construir una función objetivo compromiso como combinación lineal de ambos métodos, introduciendo un parámetro $\lambda \in [0, 1]$ (Carrizosa y Romero-Morales, 2001):

$$\min \left\{ (1 - \lambda) \sum_{k=1}^m \sum_{\substack{i,j=1 \\ p_{ij}^k \neq \star}}^n \alpha_k \delta_{ij}^k(v) + \lambda \max_{k=1, \dots, m} \sum_{\substack{i,j=1 \\ p_{ij}^k \neq \star}}^n \alpha_k \delta_{ij}^k(v) \right\}, \quad (3.34)$$

donde $\delta_{ij}^k(v)$, se corresponde con (3.17) para el modelo aditivo de preferencias, y (3.18) para el modelo multiplicativo, sujeto a las correspondientes condiciones de normalización. Se observa, que (3.26) y (3.32) son casos particulares de este problema para los valores $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$, respectivamente. El parámetro λ en la función objetivo (3.34) permite proporcionar una solución de compromiso entre los dos extremos opuestos, minimizar la suma de las desviaciones ponderadas de los expertos ($\lambda = 0$) y minimizar la mayor desviación ponderada de expertos ($\lambda = 1$). A medida que el valor de λ aumenta de 0 a 1, se da más importancia a los expertos más discrepantes.

El problema (3.34) se puede escribir en términos de las variables ν_{ij}^k y π_{ij}^k como un problema de programación lineal, que puede ser resuelto por el método del simplex.

En los métodos anteriores se han empleado las normas vectoriales l_p en la agregación de errores de los expertos, por su interés e interpretación en la estrategia de actuación del grupo en la búsqueda de una solución colectiva. En la agregación de los errores residuales locales ($\delta_{ij}^k(v)$) se han empleado las normas más usuales, l_2 matricial (o norma de Frobenius) y la norma l_1 (suma de los errores residuales locales). La aplicación de la norma vectorial l_∞ en la agregación de los errores residuales locales, como se comentó en la sección 3.2, carece de interés para su aplicación en el cálculo del vector de prioridad colectivo. Sin embargo, resulta de interés su aplicación a través de la norma matricial inducida (Ueberhuber, 2012) por la norma vectorial l_∞ , que se denomina norma matricial infinito y denotaremos por $\|\cdot\|_{m\infty}$. Esta norma matricial se define para cualquier matriz $M = (m_{ij})$ de dimensión $r \times s$ por

$$\|M\|_{m\infty} = \max_{i=1, \dots, r} \left\{ \sum_{j=1}^s |m_{ij}| \right\}. \quad (3.35)$$

Su aplicación a $\delta^k(v) = (\delta_{ij}^k(v))$ considerada como la matriz de errores residuales locales

del experto E_k resultará:

$$(\delta_{ij}^k(v)) = \begin{pmatrix} \delta_{11}^k \cdots \delta_{1n}^k \\ \vdots \\ \delta_{i1}^k \cdots \delta_{in}^k \\ \vdots \\ \delta_{n1}^k \cdots \delta_{nn}^k \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \sum_{j=1}^n \delta_{1j}^k(v) \\ \vdots \\ \longrightarrow \sum_{j=1}^n \delta_{ij}^k(v) \\ \vdots \\ \longrightarrow \sum_{j=1}^n \delta_{nj}^k(v) \end{matrix}$$

$$\|\delta^k(v)\|_{m\infty} = \|(\delta_{ij}^k(v))\|_{m\infty} = \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \sum_{j=1}^n |\delta_{ij}^k(v)| \right\}, \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.36)$$

Se observa que la suma de los errores residuales locales de cada fila indica el volumen de error a nivel de cada alternativa para el experto k . Esto es, la suma de la fila i -ésima, $\sum_{j=1}^n \delta_{ij}^k(v)$, expresa la magnitud del error relativo a la alternativa x_i para el experto k . De esta forma, el uso de esta norma matricial (3.36) se fijará en la máxima desviación en el nivel de las alternativas del experto k . En los siguientes métodos se hace uso de esta norma matricial.

Método de minimización de suma de desviaciones máximas a nivel de alternativas. Se considera ahora la métrica l_1 en la agregación de las discrepancias de los expertos con la solución y la norma matricial infinito $\|\cdot\|_{m\infty}$ en la agregación de los errores residuales locales, resultando el siguiente problema de optimización, sujeto a las correspondientes restricciones de positividad y condiciones de normalización:

$$\min \left\{ \sum_{k=1}^m \alpha_k \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ p_{ij}^k \neq \star}}^n \delta_{ij}^k(v) \right\} \right\} = \min \left\{ \sum_{k=1}^m \alpha_k \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ p_{ij}^k \neq \star}}^n (\nu_{ij}^k + \pi_{ij}^k) \right\} \right\}. \quad (3.37)$$

El problema de optimización anterior (3.37) se puede formular como un problema de programación lineal en las variables de desviación ν_{ij}^k y π_{ij}^k , como en (3.27), o en (3.28), atendiendo a la naturaleza aditiva o multiplicativa de las preferencias, respectivamente, y a una nueva variable no negativa D_k , que se corresponde con el máximo error a nivel de alternativas para las preferencias del experto k , resultando:

$$\min \left\{ \sum_{k=1}^m \alpha_k D_k \right\} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a: } & \sum_{j=1}^n (\nu_{ij}^k + \pi_{ij}^k) \leq D_k, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m, \\ & \nu_{ij}^k, \pi_{ij}^k \geq 0, \text{ para } p_{ij}^k \neq \star, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

y con las condiciones de normalización (3.30) o (3.31), según se trate del modelo de preferencias aditivo o multiplicativo. Este problema de programación lineal puede ser resuelto mediante el método del símplex.

Método de minimización de desviaciones máximas a nivel de alternativas y de expertos. En este método se desea simular una situación de decisión en la que se minimice la desviación del experto más discrepante a nivel de alternativas. Por ello se emplea la métrica $p = \infty$ en la agregación de las desviaciones $\delta^k(v)$ de los expertos y la norma matricial infinito en la agregación de los errores residuales locales (minimizar máxima desviación a nivel de alternativas), resultando el problema,

$$\min_{k=1,\dots,m} \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \alpha_k \max_{j=1,\dots,n} \left\{ \sum_{j=1}^n \delta_{ij}^k(v) \right\} \right\} = \min_{k=1,\dots,m} \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \alpha_k \max_{j=1,\dots,n} \left\{ \sum_{j=1}^n (\nu_{ij}^k + \pi_{ij}^k) \right\} \right\} \quad (3.39)$$

Este problema se puede reformular como un problema de programación lineal en las variables de desviación ν_{ij}^k y π_{ij}^k , como en (3.27), o en (3.28), atendiendo a la naturaleza aditiva o multiplicativa de las preferencias respectivamente, y una nueva variable D no negativa:

$$\min D \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a: } & \alpha_k \sum_{j=1}^n (\nu_{ij}^k + \pi_{ij}^k) \leq D, \quad i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m, \\ & \nu_{ij}^k, \pi_{ij}^k \geq 0, \text{ para } p_{ij}^k \neq \star, \quad i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

y con las condiciones de normalización (3.30) o (3.31), según se trate del modelo de preferencias aditivo o multiplicativo.

Método λ -extendido de grupo a nivel de alternativas. Los métodos anteriores (3.38) y (3.40) se corresponden con el uso de valores extremos de p , $p = 1$ y $p = \infty$, respectivamente, en la agregación de las desviaciones de los expertos y la norma matricial infinito en la síntesis de los residuos locales a nivel de las alternativas para cada experto. El método (3.38), minimiza la suma de las desviaciones de los expertos relativos relativos a las alternativas más discrepantes para cada experto. Por otra parte, el método (3.40) persigue minimizar el desacuerdo del experto más extremo a nivel de alternativas. Se puede plantear por tanto una solución de compromiso entre ambas estrategias introduciendo un parámetro $\lambda \in [0, 1]$ (Carrizosa y Romero-Morales, 2001):

$$\min \left\{ (1 - \lambda) \sum_{k=1}^m \alpha_k \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ p_{ij}^k \neq \star}}^n \delta_{ij}^k(v) \right\} + \lambda \max_{k=1,\dots,m} \left\{ \alpha_k \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \sum_{j=1}^n \delta_{ij}^k(v) \right\} \right\} \right\} \quad (3.41)$$

donde $\delta_{ij}^k(v)$, se corresponde con (3.17) para el modelo aditivo de preferencias, y (3.18) para el modelo multiplicativo, sujeto a las correspondientes condiciones de normalización.

Los problemas (3.38) y (3.40) son casos particulares de este problema para los valores $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$, respectivamente. El parámetro λ en la función objetivo (3.41) permite proporcionar una solución de compromiso entre los dos extremos opuestos, minimizar la suma de las desviaciones de los expertos ($\lambda = 0$) y minimizar la mayor desviación ponderada de expertos ($\lambda = 1$). A medida que λ aumenta de valor de 0 a 1, se más

importancia se da a los expertos más discrepantes. El problema (3.41) se puede formular como un problema de programación lineal, que puede ser resuelto por el método simplex.

Se concluye que en esta sección se ha presentado un catálogo de métodos computacionales que se derivan del modelo general y que plantean distintas estrategias en la búsqueda de una solución colectiva:

- Se hace notar, que todos los algoritmos propuestos se reducen a problemas de programación lineal o cuadrática, que se resuelven mediante métodos del tipo del simplex o técnicas mínimos cuadrados.
- Dado que las relaciones de preferencia fuzzy P^k son recíprocas, las desviaciones locales verifican $\delta_{ij}^k(v) = \delta_{ji}^k(v)$. Por lo tanto, en los problemas de optimización planteados basta con procesar las desviaciones $\delta_{ij}^k(v)$ con $i < j$ para los datos proporcionados por los expertos.
- El parámetro $\lambda \in [0, 1]$ en las formulaciones λ -extendida permite simular distintos criterios de optimalidad al buscar la solución, con una interpretación en la estrategia de actuación de grupo (González-Pachón y Romero, 2016).
- Una vez calculada la solución, los errores residuales considerados (a nivel local, de alternativas, de expertos o a nivel de grupo) permiten expresar las discrepancias a distintos niveles entre la solución obtenida y la información de preferencias dada por los expertos. A su vez, algunos métodos planteados permiten la detección de datos erróneos, alternativas o los expertos más discrepantes, siendo una herramienta de utilidad para el análisis de los datos y de la solución.

3.4. Medidas de análisis de la solución

Una vez obtenido el vector de prioridad colectivo $v = (v_1, \dots, v_n)^t$ de las alternativas a partir de la información de preferencias aportada por los expertos, una cuestión importante es analizar dicha solución y estudiar el grado de acuerdo de cada experto y el del grupo (como entidad colaborativa) con la solución.

El consenso, entendido como acuerdo unánime de los expertos con la solución, no existe en general en problemas reales debido a la complejidad del problema, la simplificación y discretización de la realidad que supone el modelado matemático, los diferentes puntos de vista o criterios de los expertos, etc. Sin embargo, se buscan soluciones que reciban un gran apoyo del grupo de expertos y que los expertos consideren que sus preferencias han sido suficientemente reflejadas en la solución final (Cabrerizo et al., 2015). Es por ello, que es de gran interés proporcionar herramientas y medidas a los expertos, a un moderador de grupo (si existiera), para analizar el grado de acuerdo de los expertos y del grupo con la solución final, para detectar a los expertos más discrepantes (posibles “outliers”), posibles datos erróneos, etc. De esta forma, si estas medidas no alcanzan un valor (tolerancia) prefijada, los agentes del problema (expertos, moderador, grupo, según proceda) pueden analizar y discutir la solución, y recomendar si fuera el caso la revisión

de las preferencias formuladas por los expertos. Estas cuestiones han sido estudiadas por varios autores. En (Herrera-Viedma et al., 2007b; Chiclana et al., 2008b) se propone incorporar en el proceso de decisión un procedimiento dinámico iterativo de control del consenso en un modelo de preferencias aditivo. Este se apoya en medidas de similitud de las preferencias a tres niveles (Figura: 3.2). En primer lugar, se construye la matriz de similitud $MS^{kl} = (ms_{ij}^{kl})$ para cada par de expertos E^k y E^l , con:

$$ms_{ij}^{kl} = 1 - |p_{ij}^k - p_{ij}^l|, \quad i, j = 1, \dots, n; k, l = 1, \dots, m; k \neq l. \quad (3.42)$$

Posteriormente, se calcula la matriz de consenso $MC = (mc_{ij})$, agregando las matrices de similitud con

$$mc_{ij} = \phi(ms_{ij}^{kl}), \quad k, l = 1, \dots, m, k \neq l; i, j = 1, \dots, n, \quad (3.43)$$

donde se propone como función de agregación (ϕ) el operador media aritmética de las matrices MS^{kl} con $k, l = 1, \dots, m, k \neq l$. Los datos de la matriz MC son utilizados para medir el grado de consenso a tres niveles. El consenso a nivel del par de alternativas (x_i, x_j) , viene dado por mc_{ij} . El grado de consenso del grupo con respecto a la alternativa

Figura 3.2: Niveles de consenso.

x_i , que expresa el acuerdo de los expertos sobre la alternativa x_i viene dado por:

$$ca_i = \frac{\sum_{j=0; i \neq j}^n (mc_{ij} + mc_{ji})}{2(n-1)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.44)$$

El grado cr de consenso global de todos los expertos viene dado por la media aritmética del grado de consenso de las alternativas $cr = (\sum_{i=0}^n ca_i)/n$. Los valores de cr más cercanos a 1, indican un mayor acuerdo entre los expertos. Estas medidas de consenso son consideradas en (Zhang et al., 2012; Ureña et al., 2016). También en un modelo de preferencias aditivas, en (Meng y Chen, 2015) se propone un índice de acuerdo del experto k con la solución colectiva dado por,

$$GCOI(P^k, P^c) = 1 - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n |p_{ij}^k - p_{ij}^c|, \quad i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m, \quad (3.45)$$

siendo P^c una matriz que agrega las relaciones de preferencia individuales P^k , con $k = 1, \dots, m$. Los autores proponen la media ponderada de estos índices como índice de consenso del grupo:

$$GCOI = \sum_{k=1}^m \alpha_k GCOI(P^k, P^c) \quad (3.46)$$

siendo α_k el peso del experto k , $k = 1, \dots, m$.

Un procedimiento análogo al anterior es considerado en (Xu et al., 2013a) para el modelo multiplicativo de preferencias. En ese mismo contexto, en (Xia et al., 2013; Zhang, 2016) se propone una medida del grado de consenso entre los expertos E_k y E_l , dada por:

$$GCCI(P^k, P^l) = 1 - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n (\ln p_{ij}^k - \ln p_{ji}^k - \ln p_{ij}^l + \ln p_{ji}^l), \quad (3.47)$$

con $k, l = 1, \dots, m$, y un índice de consenso y consistencia colectivo tomando como referencia una matriz de preferencias construida mediante un operador de agregación media geométrica.

Cabrerizo et al. (2015) señalan la necesidad de contar con herramientas de visualización del consenso debido a las nuevas técnicas de colaboración e información fruto del reciente auge de las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC). Ureña et al. (2016) proponen un marco de código abierto desarrollado en R para apoyar a los expertos en procesos de decisión de grupo basados en relaciones de preferencia fuzzy. El módulo de representación gráfica propuesto proporciona información visual acerca del estado del proceso de decisión. En el citado trabajo, se emplean como medidas de consenso las propuestas por Chiclana et al. (2008b).

Las medidas consideradas en los trabajos anteriores se aplican al caso de relaciones de preferencia fuzzy completas, no pudiéndose aplicar directamente al caso de información incompleta. En (Herrera-Viedma et al., 2007a), se aplican a un caso de información incompleta, donde se ha articulado previamente un proceso de completación y rellenado de las matrices de preferencia. Por otra parte, en la mayoría de los trabajos se contempla un paso intermedio de construcción de una matriz del grupo P^c como agregación (media aritmética o media geométrica según modelo) de las relaciones de preferencias dadas por los expertos. Sin embargo, debido a ese proceso de agregación la matriz P^c no se ha creado directamente como una relación de preferencia fuzzy y podría ser altamente inconsistente. En cualquiera de los casos mencionados, se procesan los datos de los expertos y se trabaja con información de preferencias no aportada directamente por los expertos. Además, en las medidas anteriores no se contempla la posibilidad de asignar distintos pesos a los expertos, de interés en situaciones heterogéneas, donde atendiendo a la información aportada, al conocimiento del tema a tratar, etc. puede ser de gran interés.

El modelo analítico integrado de ajuste de datos propuesto en este trabajo proporciona de forma natural medidas de análisis de la solución a partir de los datos aportados por los expertos, aplicable por tanto al caso de información incompleta para los modelos aditivo y multiplicativo de preferencias. Las medidas que se presentan a continuación se derivan directamente (sin pasos intermedios de completación u otros) a partir de los datos dados por

los expertos. Estas medidas se construyen a través de los errores residuales locales $\delta_{ij}^k(v)$, (3.17), para el modelo aditivo, o (3.18), para el modelo multiplicativo de preferencias, para los casos en los que $p_{ij}^k \neq \star$, $i, j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$. La agregación de estos errores residuales utilizando métricas convenientes proporciona, entre otras, las medidas de análisis que se proponen a continuación.

• **Medida del desacuerdo medio del experto k** con la solución v , $k = 1, \dots, m$. Se denota por Δ_1^k (Grado medio de desacuerdo del experto k) y viene dado por:

$$\Delta_1^k = \frac{1}{n_k} \sum_{\substack{i,j=1 \\ p_{ij}^k \neq \star}}^n \delta_{ij}^k(v), \quad (3.48)$$

donde $n_k := \#\{(i, j) : p_{ij}^k \neq \star\}$ indica el número de datos proporcionado por el experto k . Δ_1^k expresa la media de los errores residuales respecto de los datos de preferencia dados por el experto E_k (relativo al número de datos aportados por E_k).

• **Medida del desacuerdo cuadrático medio del experto k** con la solución v , $k = 1, \dots, m$. Se denota por Δ_2^k (Grado cuadrático medio de desacuerdo), y viene dada por:

$$\Delta_2^k = \frac{1}{n_k} \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ p_{ij}^k \neq \star}}^n (\delta_{ij}^k(v))^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.49)$$

Esta medida corresponde a utilizar la norma matricial de Frobenius o la norma vectorial l_2 aplicada al vector de errores residuales locales del experto k .

• **Medida del máximo desacuerdo del experto k** con la solución v , $k = 1, \dots, m$. Se denota por Δ_∞^k y viene dada por:

$$\Delta_\infty^k = \max_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ \{p_{ij}^k \neq \star\}}} \{\delta_{ij}^k(v)\} \quad (3.50)$$

Indica la máxima desviación de la solución con respecto a los datos aportados por el experto k . Se corresponde con el uso de la norma vectorial infinito aplicada al vector que contiene los errores residuales locales del experto E_k . Esta medida, es de interés para detectar posibles valores locales extremos.

• **Medida del desacuerdo a nivel de alternativas del experto k** con la solución v , $k = 1, \dots, m$. Se denota por Δ_a^k (Medida del Máximo Desacuerdo a nivel de alternativas del experto k), definida como:

$$\Delta_a^k = \max_{i=1,\dots,n} \frac{1}{n_{ik}} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ p_{ij}^k \neq \star}}^n \delta_{ij}^k(v) \right) \quad (3.51)$$

donde $n_{ik} = \#\{j : p_{ij}^k \neq \star\}$ indica el número de datos directamente proporcionados por el experto E_k respecto a la alternativa x_i . Esta medida resulta de aplicar la norma matricial infinito y mide la desviación relativa de la solución con respecto a las preferencias del

experto a nivel de las alternativas. Esta medida es de especial interés para identificar las alternativas más controvertidas.

Las medidas o indicadores definidos anteriormente permiten analizar la solución y medir los grados de acuerdo de cada experto con la misma a distintos niveles. Adicionalmente, pueden ser de interés para construir un peso del experto k atendiendo al grado de acuerdo del grupo con la información de preferencias aportada por el experto k (Dopazo et al., 2014). De esta forma, se podrá definir el peso α_k del experto E_k empleando el grado de desacuerdo medio como:

$$\alpha_k = 1 - \frac{\Delta_1^k}{\sum_{k=1}^m \Delta_1^k} \quad (3.52)$$

O empleando el grado de desacuerdo cuadrático, como:

$$\alpha_k = 1 - \frac{\Delta_2^k}{\sum_{k=1}^m \Delta_2^k} \quad (3.53)$$

De esta forma el peso del experto en la decisión se incrementa con el grado de acuerdo del grupo con las preferencias de dicho experto.

Además de las medidas cuantitativas proporcionadas anteriormente, es de interés considerar medidas basadas en desviaciones booleanas (preferido/no preferido). Así se consideran las desviaciones relativas de la solución colectiva respecto de las preferencias aportadas por el experto k de la siguiente forma:

$$\Delta_{bool}^k = \frac{1}{n_k} \sum_{\substack{i,j=1 \\ p_{ij}^k \neq \star}}^n l_{ij}^k, \quad \text{con} \quad l_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i > v_j \text{ y } p_{ij} > \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } v_i = v_j \text{ y } p_{ij} = \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (3.54)$$

Una vez proporcionada una relación de indicadores del grado de desacuerdo de un experto respecto de la solución colectiva, nos centramos en el estudio de medidas de satisfacción global del grupo (como ente colectivo) con la solución v .

• **Medida del desacuerdo medio del grupo con la solución**, calculada como el promedio de las medidas medias de los expertos:

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \Delta_1^k. \quad (3.55)$$

• **Medida cuadrática de desacuerdo del grupo con la solución**, calculada como la media de las medidas de desacuerdo cuadrático de los expertos:

$$\frac{1}{m} \left(\sum_{k=1}^m (\Delta_1^k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.56)$$

• **Medida del experto más discrepante con la solución**, indica la desviación del experto más discrepante con la solución colectiva.

$$\max_{k=1, \dots, m} \Delta_1^k. \quad (3.57)$$

De interés para detectar posibles expertos “outliers”.

• **Medida de desacuerdo del grupo sobre las alternativas**, indica la máxima desviación a nivel de alternativas:

$$\max_{i=1,\dots,n} \left\{ \sum_{k=1}^m \frac{1}{n_{ik}} \sum_{\substack{j=1 \\ p_{ij}^k \neq \star}}^n \delta_{ij}^k(v) \right\}. \quad (3.58)$$

De interés para detectar las alternativas que producen una mayor controversia en el proceso colectivo de búsqueda de la solución.

La relación de medidas del grado de acuerdo con la solución colectiva propuestas anteriormente, proporcionan a los expertos o al moderador del grupo (en caso de existir), un catálogo de medidas para analizar y valorar la solución del grupo desde varias perspectivas. Si estas medidas alcanzan valores mayores que una tolerancia prefijada, podría ser necesario estudiar un proceso de revisión de los datos de preferencia de partida. En problemas complejos reales de decisión de grupo, suele ser usual obtener la solución en un proceso iterativo de consenso, donde los expertos matizan sus preferencias si es requerido hasta encontrar una solución de consenso que satisfaga al grupo. En muchos casos existe un moderador del grupo que dirige el proceso de consenso (Cabrerizo et al., 2015). En las aplicaciones del mundo real, y especialmente con el auge en la última década de los entornos web 2.0 y superiores (web X.0), no siempre existe la posibilidad de llevar a cabo un proceso iterativo, y no se suele contar con un moderador. En estos escenarios podría ser de gran la aplicación del modelo propuesto, basado en técnicas de ajuste de datos y medidas de análisis.

A continuación se ilustra la aplicación del modelo propuesto a través del ejemplo numérico estudiado por Xu (2004b).

Ejemplo numérico. Se considera el problema de decisión de grupo propuesto en Xu (2004b), donde tres expertos proporcionan sus preferencias sobre el conjunto de alternativas $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, a través de las siguientes relaciones de preferencia fuzzy:

$$P^1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & \star & 0.7 \\ 0.4 & 0.5 & 0.2 & 0.8 \\ \star & 0.8 & 0.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.6 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad P^2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.8 & 0.4 & \star \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0.6 \\ 0.6 & 0.7 & 0.5 & 0.3 \\ \star & 0.4 & 0.7 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad P^3 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.4 & 0.6 \\ 0.7 & 0.5 & \star & 0.5 \\ 0.6 & \star & 0.5 & 0.7 \\ 0.4 & 0.5 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Se observa que las relaciones de preferencia proporcionadas por los expertos son recíprocas e incompletas. Se supone que todos los expertos tienen el mismo peso ($\alpha_k = \frac{1}{3}, \forall k$) en la decisión final.

En primer lugar se aplica el modelo propuesto para el caso de consistencia aditiva. Se trata de obtener un vector de prioridad de las alternativas que ajuste los datos de preferencia dados por los expertos. Esto conduce al sistema lineal sobredeterminado escrito

matricialmente $Av = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.7 \\ 0.2 \\ 0.8 \\ 0.4 \\ 0.8 \\ 0.4 \\ 0.3 \\ 0.6 \\ 0.3 \\ 0.3 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.5 \\ 0.7 \end{pmatrix}.$$

Para ilustrar la aplicación, se consideran los métodos derivados del modelo para las métricas l_p más usuales en la agregación de los vectores residuales de los expertos, que se corresponden con los Métodos 1, 2 y 3 de la Tabla 3.1. De esta forma, el Método 1 es el método que minimiza la suma de los residuos (3.26), que trabaja con la métrica $p = 1$ en la agregación de los errores residuales locales y en la agregación de las desviaciones de los expertos. El vector de prioridad se calcula aplicando el método del simplex al problema de programación lineal resultante (3.29-3.30). El Método 2 (3.25) se refiere al uso de la norma de Frobenious en la agregación de los errores residuales locales y de la métrica $p = 2$ en la agregación de las desviaciones de los expertos. El vector de prioridad se obtiene resolviendo el problema mínimos cuadrados resultante (3.25). Finalmente, el Método 3 (3.32) se corresponde con el uso de la métrica $p = \infty$ en la agregación de los residuos de los expertos y l_1 en la agregación de los errores residuales locales, que conduce al problema de programación lineal (3.33-3.30). Los problemas de programación lineal y cuadrática resultantes se han resuelto implementando los algoritmos en Python (lenguaje de programación de código abierto) y se ha hecho uso del conjunto de librerías Scipy, Numpy y Matplotlib (www.scipy.org), también se ha contrastado con su implementación en Matlab®. En la Tabla 3.2 se muestran los vectores de prioridad (con la condición de normalización $\min_{i=1,\dots,n} \{v_i\} = 0$), los rankings asociados de las alternativas y las normas de los vectores de residuos para cada método.

Atendiendo a los resultados mostrados en la Tabla 3.2, se confirma la alternativa x_3 como la mejor opción, seguida de la alternativa x_1 . Las alternativas x_2 y x_4 son las peores opciones. Para el caso de $p = 1$ hay un empate entre x_2 y x_4 , a medida que el valor de p crece, este empate se resuelve a favor de x_2 . No obstante se puede apreciar que los valores de prioridad colectivos de estas alternativas están muy próximos en todos los casos y difieren a lo sumo en un 2% de su valor. Como era de esperar, se observa que el vector de prioridad obtenido en el Método 1 es el que produce un menor valor de $\|\delta(v)\|_1$, el vector resultante del Método 2 minimiza $\|\delta(v)\|_2$, y análogamente la solución del Método 3 es la que da un mejor resultado para $\|\delta(v)\|_\infty$. Se hace notar que Xu (2004b) aplica un

Tabla 3.2: Modelo aditivo. Vectores de Prioridad y Rankings.

Método	Vector de prioridad. Ranking	$\ \delta(v)\ _1$	$\ \delta(v)\ _2$	$\max_k \{\sum \delta_{ij}^k(v)\}$
Mét. de Xu (2004b)	(0.0770, 0.0260, 0.1010, 0) $x_3 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4$	4.6720	1.3715	1.8720
Método 1, $p = 1$	(0.2000, 0, 0.4000, 0.0) $x_3 \succ x_1 \succ x_2 = x_4$	3.6	1.4142	1.6000
Método 2, $p = 2$	(0.0981, 0.0298, 0.1371, 0.0) $x_3 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4$	4.5665	1.3538	1.8335
Método 3, $p = \infty$	(0.41803, 0.2000, 0.6000, 0.0) $x_3 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4$	4.0	1.5860	1.4080

método basado en el uso de la métrica $p = 1$ para derivar el vector de prioridad de las alternativas con la condición de normalización $\sum_{i=1}^n (v_i) = 0$. Si se compara el resultado propuesto por Xu (2004b) con el obtenido en nuestro caso para esa métrica, se observa que el valor de la función objetivo es menor en nuestro caso $\delta_1(v_{Xu}) > \delta_1(v)$.

Figura 3.3: Desacuerdo de los expertos con la solución. Modelo Aditivo.

A continuación se calculan los grados de desacuerdo de los expertos con la solución, Δ_1^k , $k = 1, 2, 3$ (3.55), para cada método y se representan gráficamente en la Figura (3.3). De éstos resultados se desprende que E_3 es el experto cuyo grado de acuerdo con la solución es mayor para todos los casos considerados. E_1 es el experto mas discrepante con la solución y a medida que p crece disminuye su desacuerdo con la solución.

Procediendo de forma análoga se aplica el modelo propuesto para el caso de preferencias

multiplicativas. Esto conduce al sistema lineal sobredeterminado escrito matricialmente $Av = b$

$$\begin{pmatrix} -0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ -0.3 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0 & -0.8 & 0.2 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & -0.6 & 0.4 \\ -0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ -0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & -0.7 & 0.3 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & -0.7 & 0.3 \\ -0.7 & 0.3 & 0 & 0 \\ -0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ -0.4 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & -0.3 & 0.7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se consideran los métodos que se derivan del modelo para el uso de las métricas $p = 1, p = 2$ y $p = \infty$ en la agregación de las desviaciones de los expertos. Se resuelven los correspondientes formulaciones computacionales (3.29-3.31), (3.25-3.31) y (3.33-3.31) y los resultados se muestran en la Tabla 3.3.

Tabla 3.3: Vectores de Prioridad y Rankings. Modelo multiplicativo.

Método	Vector de prioridad. Ranking	$\ \delta(v)\ _1$	$\ \delta(v)\ _2$	$\max_k \{\sum \delta_{ij}^k(v)\}$
Mét. de Xu (2004b)	(0.265, 0.236, 0.276, 0.223) $x_3 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4$	1.1568	0.3389	0.4553
Mét. 1 ($p = 1$)	(0.2642, 0.1698, 0.3962, 0.1698) $x_3 \succ x_1 \succ x_2 = x_4$	0.8528	0.3482	0.3717
Mét. 1 ($p = 2$)	(0.2822, 0.1968, 0.3202, 0.2009) $x_3 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_2$	1.0112	0.3229	0.3877
Mét. 1 ($p = \infty$)	(0.2738, 0.1760, 0.4108, 0.1394) $x_3 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4$	1.0186	0.3671	0.3450

Atendiendo a los resultados mostrados en la Tabla 3.3, se confirma x_3 como la mejor la alternativa, seguida de x_1 (como en el modelo aditivo de preferencias). Se observa que hay empate entre x_2 y x_3 para $p = 1$ y éste se deshace a medida que aumenta el valor de p . Se hace notar que la solución proporcionada por Xu 2004b produce un peor resultado para la función objetivo $\delta_1(v_{Xu}) > \delta_1(v)$ que la solución que se propone en este trabajo para la métrica correspondiente.

En la Figura (3.4) se recogen los grados de desacuerdo de los expertos con la solución, Δ_1^k , $k = 1, 2, 3$ (3.55), para cada método, de donde se concluye que E_3 es el experto cuyo

acuerdo con la solución es mayor y E_1 el experto más discrepante.

Figura 3.4: Desacuerdo de los expertos con la solución. Modelo Multiplicativo.

Capítulo 4

Problemas de decisión de grupo a partir de relaciones de preferencia fuzzy intervalares

You can use all the quantitative data you can get, but you still have to distrust it and use your own intelligence and judgment.

Alvin Toffler (1928-2016)

En el capítulo anterior se ha abordado el problema de decisión de grupo a partir de preferencias expresadas mediante relaciones binarias fuzzy con valores numéricos puntuales. En aplicaciones reales de decisión, atendiendo a la complejidad e incertidumbre presentes, al manejo de información difícilmente cuantificable, al uso de escalas numéricas para representar preferencias formuladas lingüísticamente, etc., puede resultar difícil expresar la información de preferencias en términos de valores numéricos precisos. Por ello parece natural extender el modelo y métodos presentados anteriormente para que sean capaces de trabajar con información posiblemente vaga e imprecisa. En este capítulo se considerarán las relaciones de preferencia fuzzy intervalares como una herramienta flexible para recoger y describir este tipo de información. Se presentan métodos y algoritmos para obtener un ranking colectivo de las alternativas a partir de un vector de prioridad colectivo (con valores numéricos precisos) que refleje lo mejor posible la información posiblemente vaga e imprecisa expresada por los expertos mediante relaciones de preferencia fuzzy intervalares. El modelo general aborda simultáneamente los problemas subyacentes de consistencia (aditiva y multiplicativa) y de posible conflicto, vaguedad e incertidumbre en los juicios de preferencias.

4.1. Introducción

Se considera un problema de decisión de grupo donde un conjunto $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ de alternativas tienen que ser ordenadas atendiendo a las preferencias expresadas por un conjunto de expertos mediante relaciones de preferencia fuzzy individuales. En aplicaciones reales, debido a la complejidad del problema, se plantean situaciones de falta de datos, información vaga y difícilmente cuantificable, expresada en términos lingüísticos, etc., difícil de representar mediante estimaciones numéricas precisas (puntuales). Un modelo para acomodar este tipo de información es el uso de datos intervalares (rango de valores). Por ello, en este capítulo se considerará el uso de relaciones de preferencia fuzzy con datos intervalares como una herramienta flexible para recoger información de preferencias posiblemente incompleta, vaga o imprecisa. Adicionalmente, el uso de estimaciones intervalares de preferencias por parte de los expertos proporciona al grupo una mayor flexibilidad en la búsqueda de una solución colectiva a partir de preferencias individuales.

Se toma como punto de partida el concepto de conjunto fuzzy intervalar (Klir y Folger, 1988). Un conjunto fuzzy intervalar $\bar{A}$ sobre X está caracterizado por una función de pertenencia $\mu_{\bar{A}} : X \rightarrow INT([0, 1])$, siendo $INT([0, 1])$ el conjunto de todos los subintervalos cerrados contenidos en el intervalo $[0, 1]$. De esta forma,

$$\bar{A} = \{(x, \mu_{\bar{A}}(x)) : \mu_{\bar{A}}(x) \in INT([0, 1]), x \in X\}.$$

A partir de este concepto, Xu (2001, 2004a) introdujo la siguiente definición de relación de preferencia fuzzy intervalar recíproca.

Definición 4.1 Una relación de preferencia fuzzy intervalar recíproca $\bar{P} = (\bar{p}_{ij})$ sobre el conjunto X es una relación binaria sobre $X \times X$ caracterizada por la función de pertenencia intervalar $\mu_{\bar{P}} : X \times X \rightarrow INT[0, 1]$ donde $\mu_{\bar{P}}(x_i, x_j) = \bar{p}_{ij} = [p_{ij}^L, p_{ij}^U]$, $0 \leq p_{ij}^L \leq p_{ij}^U \leq 1$, verificando $\bar{p}_{ij} = 1 \ominus \bar{p}_{ji}$, $i, j = 1, \dots, n$.

El símbolo $\ominus$ indica la operación resta usando aritmética intervalar. De esta forma,

$$\bar{p}_{ij} = 1 \ominus \bar{p}_{ji} = [1 - p_{ji}^U, 1 - p_{ji}^L], \quad \forall i, j \in 1, \dots, n. \quad (4.1)$$

El elemento $\bar{p}_{ij} = [p_{ij}^L, p_{ij}^U]$, donde p_{ij}^L y p_{ij}^U denotan los extremos inferior y superior del intervalo, representa la intensidad o grado de preferencia de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j . De ésta forma el grado de preferencia de x_i sobre x_j se encuentra entre p_{ij}^L y p_{ij}^U , asumiéndose una distribución uniforme de los valores de preferencia en el intervalo.

En adelante nos referiremos a las relaciones de preferencia fuzzy recíprocas intervalares, simplemente como relaciones de preferencia fuzzy intervalares. Una relación de preferencia fuzzy intervalar $\bar{P}$ sobre el conjunto finito X de alternativas se puede representar matricialmente como

$$\bar{P} = (\bar{p}_{ij}) = \begin{pmatrix} [0.5, 0.5] & [p_{12}^L, p_{12}^U] & \cdots & [p_{1n}^L, p_{1n}^U] \\ [p_{21}^L, p_{21}^U] & [0.5, 0.5] & \cdots & [p_{2n}^L, p_{2n}^U] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [p_{n1}^L, p_{n1}^U] & [p_{n2}^L, p_{n2}^U] & \cdots & [0.5, 0.5] \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

donde $\bar{p}_{ij} = [p_{ij}^L, p_{ij}^U] \subseteq [0, 1]$ y $\bar{p}_{ii} = [0.5, 0.5] = 0.5$, $i, j = 1, \dots, n$. Una relación de preferencia fuzzy $P = (p_{ij})$ con $p_{ij} \in \mathbb{R}$ - datos puntuales - (Definición 2.1), es un caso particular de una relación de preferencia fuzzy intervalar. En este caso, el valor numérico puntual p_{ij} se correspondería con el valor intervalar $\bar{p}_{ij}$ en el que los extremos del intervalo coinciden con dicho valor $p_{ij}^L = p_{ij}^U = p_{ij}$.

En los últimos años una gran cantidad de trabajos relacionados con relaciones de preferencia fuzzy intervalares han sido publicados. La mayoría de ellos abordan la extensión del concepto de consistencia de Tanino (1984) al caso intervalar y el problema de información incompleta. Como se comentó en el Capítulo 3, el concepto de consistencia de una relación de preferencia fuzzy es de gran importancia para modelar la racionalidad y coherencia de los juicios de preferencias y desarrollar resultados de decisión razonables. En esta línea, son de señalar en primer lugar las definiciones de consistencia intervalar aditiva y multiplicativa planteadas por Xu y Chen (2008b).

Definición 4.2 (Xu y Chen 2008b) Sea $\bar{P} = (\bar{p}_{ij})$ una relación de preferencia fuzzy intervalar sobre el conjunto X , donde $\bar{p}_{ij} = [p_{ij}^L, p_{ij}^U]$, $0 \leq p_{ij}^L \leq p_{ij}^U \leq 1$, $i, j = 1, \dots, n$. Se dice que $\bar{P}$ es una relación de preferencia fuzzy intervalar consistente aditivamente si existe un vector $v = (v_1, \dots, v_n)$ no negativo tal que

$$p_{ij}^L \leq \frac{1}{2}(v_i - v_j + 1) \leq p_{ij}^U, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (4.3)$$

sujeto a la condición de normalización $\sum_{i=1}^n v_i = 1$.

Definición 4.3 (Xu y Chen 2008b) Sea $\bar{P} = (\bar{p}_{ij})$ una relación de preferencia fuzzy intervalar sobre el conjunto X , donde $\bar{p}_{ij} = [p_{ij}^L, p_{ij}^U]$, $0 < p_{ij}^L \leq p_{ij}^U \leq 1$, $i, j = 1, \dots, n$. Se dice que $\bar{P}$ es una relación de preferencia fuzzy intervalar consistente multiplicativamente si existe un vector $v = (v_1, \dots, v_n)$ positivo tal que

$$p_{ij}^L \leq \frac{v_i}{v_i + v_j} \leq p_{ij}^U, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (4.4)$$

sujeto a la condición de normalización $\sum_{i=1}^n v_i = 1$.

Si las definiciones anteriores de consistencia aditiva (Definición 4.2) y de consistencia multiplicativa (Definición 4.3) se aplican al caso particular en el que $\bar{P} = (\bar{p}_{ij})$ es una relación de preferencia fuzzy con datos puntuales, ésto es $p_{ij}^L = p_{ij}^U$, entonces las expresiones (4.3) y (4.4) se reducen a las expresiones (2.11) y (2.13) respectivamente.

Utilizando las definiciones anteriores, Xu y Chen (2008b) proponen métodos de programación lineal para construir vectores de prioridad intervalares de las alternativas a partir

de una relación de preferencia fuzzy intervalar. Al ser los vectores intervalares, éstos no proporcionan automáticamente un ranking de las alternativas. Para ello los autores aplican un método de comparación de datos intervalares (grado de posibilidad definido por Xu y Da (2002)). Para abordar el problema de grupo, los autores construyen una matriz promedio a partir de las relaciones de preferencia fuzzy individuales. Xu (2011) adopta las definiciones de consistencia y métodos de Xu y Chen (2008b) para derivar vectores de prioridad intervalares, que convierte en puntuales mediante el valor medio de los extremos de cada intervalo. Análogamente proceden Xia y Xu (2014) para el caso de un experto ($m = 1$), pero considerando las siguientes condiciones de normalización (Sugihara et al., 2004) para el vector $\bar{v} = ([v_i^L, v_i^U])$ de prioridad

$$\sum_{i \neq j} v_i^L + v_j^U \geq 1 \text{ y } \sum_{i \neq j} v_i^U + v_j^L \leq 1, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.5)$$

Para obtener el ranking final de las alternativas los autores aplican la medida de comparación de intervalos propuesta en (Wang et al., 2005b) al vector de prioridad intervalar. El método utilizado se orienta al caso de información incompleta para un experto. Este mismo método y condiciones de normalización se consideran en (Jiang et al., 2010) para el caso particular de un experto y el modelo aditivo de preferencias.

En (Xu et al., 2014b,c; Hu et al., 2014) se plantean objeciones a considerar la condición de normalización $\sum_{i=1}^n v_i = 1$ en el modelo de consistencia aditivo de Xu y Chen (2008b). Los autores proponen introducir un nuevo parámetro en la definición para hacerlas compatibles. Esta misma cuestión es señalada en (Krejčí, 2017). En este caso la autora hace un estudio exhaustivo de la extensión del concepto de consistencia aditiva al caso intervalar y considera la condición de normalización $|v_i - v_j| \leq 1$, $i, j = 1, \dots, n$.

La definición de consistencia multiplicativa intervalar propuesta por Xu y Chen (2008b) se ha considerado en Genç et al. (2010) para completar relaciones de preferencia fuzzy intervalares incompletas.

Otro enfoque planteado en la literatura aborda la consistencia intervalar a partir de la consistencia de las matrices $S = (s_{ij})$ y $T = (t_{ij})$ de valores puntuales, con

$$s_{ij} = \begin{cases} p_{ij}^L & i < j \\ 0.5 & i = j \\ p_{ij}^U & i > j \end{cases}, \quad t_{ij} = \begin{cases} p_{ij}^U & i < j \\ 0.5 & i = j \\ p_{ij}^L & i > j \end{cases},$$

para $i, j = 1, \dots, n$. Este enfoque se ha considerado en (Xia y Xu, 2011), para definir la consistencia multiplicativa perfecta, y en (Liu et al., 2012a), para el modelo aditivo de preferencias. En (Wang y Li, 2015; Krejčí, 2017; Meng et al., 2017a) se señalan las limitaciones de este enfoque, al ser la condición de consistencia dependiente de las etiquetas de las alternativas, esto es, no es invariante respecto a permutaciones de las alternativas.

Otra importante línea de investigación consiste en extender las condiciones de consistencia de Tanino (1984) al caso intervalar empleando aritmética intervalar. Siguiendo este enfoque, Wan y Li (2012) proponen las siguientes definiciones de consistencia intervalar aditiva y multiplicativa.

Definición 4.4 (Wang y Li, 2012) Una relación de preferencia fuzzy intervalar $\bar{P} = (\bar{p}_{ij})$ es consistente aditivamente si satisface la siguiente propiedad,

$$\bar{p}_{ij} \oplus \bar{p}_{jk} \oplus \bar{p}_{ki} = \bar{p}_{kj} \oplus \bar{p}_{ji} \oplus \bar{p}_{ik}, \quad i, j, k = 1, \dots, n. \quad (4.6)$$

El operador $\oplus$ indica la operación suma usando aritmética intervalar. Esto es, si $\bar{a} = [a^L, a^U]$ y $\bar{b} = [b^L, b^U]$ son dos intervalos definidos en $\mathbb{R}$, $\bar{a} \oplus \bar{b} = [a^L + b^L, a^U + b^U]$.

Definición 4.5 (Wang y Li, 2012) Sea $\bar{P} = (\bar{p}_{ij}) = ([p_{ij}^L, p_{ij}^U])$, con $0 < p_{ij}^L \leq p_{ij}^U \leq 1$, una relación de preferencia fuzzy intervalar. Se dice que $\bar{P}$ es consistente multiplicativamente si satisface la siguiente propiedad

$$\frac{\bar{p}_{ji}}{\bar{p}_{ij}} \otimes \frac{\bar{p}_{kj}}{\bar{p}_{jk}} \otimes \frac{\bar{p}_{ik}}{\bar{p}_{ki}} = \frac{\bar{p}_{jk}}{\bar{p}_{kj}} \otimes \frac{\bar{p}_{ij}}{\bar{p}_{ji}} \otimes \frac{\bar{p}_{ki}}{\bar{p}_{ik}}, \quad i, j, k = 1, \dots, n. \quad (4.7)$$

El operador $\otimes$ denota la operación producto en aritmética intervalar. Esto es, si $\bar{a} = [a^L, a^U]$ y $\bar{b} = [b^L, b^U]$ son dos intervalos positivos ($a^L, b^L > 0$), entonces $\bar{a} \otimes \bar{b} = [a^L b^L, a^U b^U]$ y $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = [\frac{a^L}{b^U}, \frac{a^U}{b^L}]$.

Basándose en las definiciones anteriores, Wang y Li (2012) desarrollan dos modelos de programación por metas (GP) para obtener vectores de prioridad intervalares, con las condiciones de normalización (4.5), para los modelos aditivo y multiplicativo de preferencias. El ranking final de las alternativas se deriva utilizando la medida de comparación de intervalos propuesta en (Wang et al., 2005b). Wu y Chiclana (2014) adoptan el concepto de consistencia multiplicativa de Wang y Li (2012) y definen medidas de consistencia y similitud en un problema de decisión de grupo. Estas son utilizadas para desarrollar una metodología que guíe a los expertos en la búsqueda de soluciones con alto grado de consenso y consistencia, a través de los pesos de los expertos. En Wang y Li (2015) se estudian las propiedades de consistencia multiplicativa intervalar definidas por Wang y Li (2012) y se aplican al problema de información incompleta y al problema de grupo. Se propone un método de varios pasos, en la primera etapa se estiman los valores desconocidos en las relaciones de preferencia fuzzy individuales mediante un procedimiento GP logarítmico. En segundo lugar, se construye una matriz colectiva intervalar como media geométrica de las relaciones de preferencia fuzzy individuales. A partir de esta matriz colectiva se deriva un vector de prioridad intervalar de las alternativas mediante un método de programación por metas logarítmico. Por último, se aplica una medida de comparación de intervalos (Wang et al., 2005b) para obtener el ranking final de las alternativas.

Por otra parte, Wang y Chen (2014) proponen la siguiente definición de consistencia multiplicativa para relaciones de preferencia intervalares, denominada consistencia geométrica.

Definición 4.6 (Wang y Chen, 2014) Sea $\bar{P} = (\bar{p}_{ij}) = ([p_{ij}^L, p_{ij}^U])$, con $0 < p_{ij}^L \leq p_{ij}^U \leq 1$, una relación de preferencia fuzzy intervalar. Se dice que $\bar{P}$ es consistente geométricamente si satisface la siguiente propiedad:

$$\sqrt{\frac{p_{ik}^L p_{ik}^U}{p_{ki}^U p_{ki}^L}} = \sqrt{\frac{p_{ij}^L p_{ij}^U}{p_{ji}^U p_{ji}^L}} \sqrt{\frac{p_{jk}^L p_{jk}^U}{p_{kj}^U p_{kj}^L}}, \quad \forall i, j, k = 1, \dots, n. \quad (4.8)$$

Basándose en esta definición, los autores proponen un método mínimos cuadrados logarítmico para rectificar la consistencia de una relación de preferencias intervalar y para completarla si fuera incompleta, no abordan el problema de grupo. Para comparar datos intervalares emplean el concepto de comparabilidad propuesto por Xu y Da (2003). En esta línea, Wan et al. (2018a) proponen un índice de consistencia geométrica y un modelo GP para construir una relación de preferencia fuzzy intervalar geoméricamente consistente a partir de una que no lo es.

Meng et al. (2017a) proponen una definición de consistencia aditiva aplicando el concepto de cuasi intervalo. A partir de ella proporcionan un modelo de programación lineal para construir una relación consistente a partir de una relación de preferencias fuzzy intervalar. Paralelamente en (Meng et al., 2017b) se propone una definición de consistencia multiplicativa.

Durante la última década el problema de información incompleta ha atraído mucha atención. Xu (2006, 2007) introdujo el concepto de relación de preferencia fuzzy intervalar incompleta. Desde entonces, muchas de las referencias señaladas anteriormente abordan el problema de información incompleta, centrándose en métodos de completación, para estimar los datos no facilitados por los expertos (Genç et al., 2010; Wang y Li, 2012; Liu et al., 2012b; Xu et al., 2014c; Xia y Xu, 2014; Wang y Li, 2015; Meng et al., 2016, 2017a, 2017b).

En este contexto, en este capítulo se aborda el problema de decisión de grupo donde los expertos $E_1, \dots, E_m$ expresan individualmente sus preferencias mediante relaciones de preferencia fuzzy intervalares $\bar{P}^1 = ([p_{ij}^{1L}, p_{ij}^{1U}]), \dots, \bar{P}^m = ([p_{ij}^{mL}, p_{ij}^{mU}])$ sobre X , posiblemente incompletas, inconsistentes y diversas. El objetivo es proporcionar un modelo general y métodos que exploten, sintetizen y analicen la información aportada por los expertos para producir un ranking final de las alternativas. Para ello se presentará un modelo analítico general de ajuste de datos para buscar un vector de prioridad colectivo de las alternativas que refleje “lo mejor posible” la información de preferencias directamente aportada por los expertos, y que aborde simultáneamente los problemas subyacentes. Paralelamente se propondrán métodos computacionales de cálculo efectivo de la solución y medidas de análisis de la misma. A continuación se señalan algunas contribuciones del modelo y métodos que se proponen:

- **Información incompleta.** Como ya se ha comentado, en muchas situaciones reales de decisión se plantea el problema de falta de datos o información incompleta. Los trabajos en la literatura que abordan el problema articulan procedimientos de rellenado de datos, trabajando con datos no aportados directamente por los expertos. En capítulos anteriores ya se definió nuestra posición de procesar sólo los datos aportados directamente por los expertos. Se mantiene este enfoque, que se enfatiza en el caso de manejo de datos intervalares que cubren implícitamente este caso, resultando innecesario articular un procedimiento indirecto de rellenado. Adicionalmente, trabajar con datos directamente aportados por los expertos y no rellenar los datos desconocidos, añade flexibilidad para acomodar preferencias diversas en la búsqueda de una solución colectiva en un problema de grupo.
- **Consistencia.** Se presenta un marco general para abordar los modelos de consis-

cia aditiva y multiplicativa. Como se ha señalado, gran cantidad de trabajos en la literatura se centran en estudiar la extensión de los conceptos de consistencia aditiva y multiplicativa de Tanino (1984) al caso intervalar. El enfoque que se adopta en este trabajo atiende al objetivo final que se persigue. Esto es, ordenar las alternativas atendiendo a su relevancia, más aún buscar un vector de prioridad puntual v de las alternativas a partir del cual se obtenga directamente un ranking de las mismas. Este enfoque está en consonancia con los conceptos de consistencia intervalar definidos por Xu y Chen (2008b). Se hace notar, que al ser los pesos de prioridad valores puntuales, no es necesario emplear ningún método o medida discriminante adicional para ordenar los valores, como sería el caso si v fuese un vector intervalar. Gran parte de los trabajos en la literatura que se orientan en la búsqueda de un vector de prioridad, producen valores intervalares. Al no estar los números intervalares ordenados, es necesario implementar un procedimiento adicional para ordenar las alternativas.

- **Problema de grupo o de información heterogénea.** La complejidad de los problemas de decisión reales requiere en general la participación de múltiples expertos que expresan sus preferencias atendiendo a distintas perspectivas, campos de conocimiento, etc. Esto enriquece la información sobre el problema de decisión, pero a su vez complica la búsqueda de una solución colectiva a partir de información diversa y posiblemente en conflicto. La mayoría de los métodos en la literatura que abordan el problema de grupo proponen métodos articulados en varios pasos, siendo uno de ellos la construcción de una matriz promedio de las relaciones de preferencia fuzzy previamente completadas de los expertos. Esta matriz promedio es considerada como matriz de preferencias del grupo que, al no ser directamente construida como tal, podría tener niveles de inconsistencia elevados. Adicionalmente, en muchas ocasiones, se proponen métodos heurísticos de construcción sin fundamentación teórica. El enfoque que se propone:
 - Trabaja directa y exclusivamente con los datos aportados por los expertos, considerados como muestras de la información de preferencias del fenómeno de decisión a estudiar.
 - Asume que el grupo tiene un interés común, pese a la diversidad de opiniones, en encontrar una solución colectiva al problema en forma de vector de prioridad de las alternativas.
- **Modelo general de ajuste de datos.** Continuando con la argumentación del punto anterior, el problema se plantea en un marco general de ajuste de los datos dados por los expertos. Se busca un vector de prioridad colectivo v que refleje lo mejor posible los datos siguiendo el modelo aditivo o multiplicativo de preferencias, según corresponda. El modelo general que se plantea aborda simultáneamente los problemas de información diversa, posiblemente imprecisa, incompleta e inconsistente. Al ser un modelo de ajuste de datos se construye utilizando métricas ponderadas a distintos niveles, que proporcionan gran flexibilidad y permiten implementar diferentes estrategias de actuación del grupo. Adicionalmente, el modelo proporciona medidas de análisis de la información de partida y de los resultados.

- **Modelo computacional.** Paralelamente al modelo analítico se proponen métodos y algoritmos para el cálculo efectivo de las soluciones, que extienden los principales métodos presentados en la literatura.

El resto del capítulo se organiza como se indica a continuación. En la Sección 4.2 se presenta un modelo analítico general para obtener un vector de prioridad colectivo de las alternativas a partir de las relaciones de preferencia fuzzy intervalares proporcionadas por los expertos. Una vez presentado el modelo general, en la Sección 4.3 se desarrollan métodos computacionales y algoritmos efectivos de resolución de los problemas planteados. Por último, la aplicación de los métodos presentados se ilustra mediante un ejemplo numérico.

4.2. Modelo analítico de ajuste de datos

Se considera un problema de decisión donde el grupo de expertos $E_1, \dots, E_m$ proporcionan sus preferencias individuales sobre el conjunto de alternativas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, ($n \geq 2$), mediante relaciones de preferencia fuzzy intervalares $\bar{P}^k = (\bar{p}_{ij}^k)$, donde $\bar{p}_{ij}^k = [p_{ij}^{kL}, p_{ij}^{kU}]$, $i, j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$. Ésto es, el grado de preferencia de la alternativa x_i respecto la alternativa x_j se encuentra entre p_{ij}^{kL} y p_{ij}^{kU} , $0 \leq p_{ij}^{kL} \leq p_{ij}^{kU} \leq 1$, $i, j = 1, \dots, n$, para el experto E_k , $k = 1, \dots, m$. Cada experto expresa sus preferencias sobre pares de alternativas mediante intervalos numéricos, rangos de valores, como un modo de recoger información imprecisa, vaga o incompleta. Se hace notar, que el uso de relaciones de preferencia fuzzy intervalares cubre de forma implícita el problema de información incompleta. Es decir, en ausencia de información o preferencia sobre el par de alternativas x_i y x_j del experto k , $\bar{p}_{ij}^k = [0, 1]$. Se contempla también la situación en la que el experto proporciona sólo el extremo inferior p_{ij}^{kL} ($[p_{ij}^{kL}, 1]$) o superior p_{ij}^{kU} ($[0, p_{ij}^{kU}]$) de preferencia.

En este escenario, el objetivo es proporcionar métodos que exploten y sintetizen la información diversa y posiblemente inconsistente, incompleta o imprecisa proporcionada por los expertos para obtener un ranking colectivo de las alternativas. Paralelamente al enfoque seguido en el Capítulo 3, se plantea un modelo consistente en buscar un vector de prioridad colectivo $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de las alternativas que refleje “lo mejor posible”, en un sentido que se precisará, la información de preferencias dada por los expertos, a través de las relaciones de preferencia fuzzy intervalares $\bar{P}^k$, $k = 1, \dots, m$. A partir del vector de prioridad v , donde v_i indica el peso de la alternativa x_i , se ordenarán las alternativas de forma que un mayor valor de v_i indicará una mejor posición de la alternativa x_i , $i = 1, \dots, n$, en el ranking final de grupo. Así se propone un modelo general de ajuste de los datos proporcionados por los expertos mediante un vector de prioridad v atendiendo a las propiedades fundamentales del modelo de preferencias subyacente, aditivo o multiplicativo según corresponda. Para ello se toma como punto de partida el caso ideal, en el que la información de preferencias es consistente (Xu y Chen, 2008b) y no discrepante.

Si consideramos en primer lugar el caso ideal en el modelo aditivo de preferencias, en el que $\bar{P}^k$, $k = 1, \dots, m$, son consistentes (Definición 4.2) y hay unanimidad entre los expertos, entonces existe un vector de prioridad $v = (v_1, \dots, v_n)$, con $v_i \geq 0$, tal que se

verifican las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} p_{ij}^{kL} \leq \frac{1}{2}(v_i - v_j + 1) \leq p_{ij}^{kU}, \\ i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (4.9)$$

En (Xu y Chen, 2008b) se considera la condición de normaización $\sum_{i=1}^n v_i = 1$. Se ha señalado que esta condición no es adecuada para el modelo aditivo, por lo que se adoptará la condición de normalización $|v_i - v_j| \leq 1, i, j = 1, \dots, n$.

En paralelo, para el modelo multiplicativo de preferencias, se considera el caso ideal de acuerdo entre los expertos y las matrices $\bar{P}^k, k = 1, \dots, m$, son consistentes (Definición 4.3), entonces existe un vector de prioridad colectivo, $v = (v_1, \dots, v_n)$, con $v_i > 0, i = 1, \dots, n$, tal que las siguientes relaciones se verifican:

$$\begin{cases} p_{ij}^{kL} \leq \frac{v_i}{v_i + v_j} \leq p_{ij}^{kU}, \\ i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^n v_i = 1. \end{cases} \quad (4.10)$$

En general, en problemas reales debido a su complejidad, diferentes puntos de vista de los expertos, etc., puede no existir un vector v que verifique simultáneamente las relaciones (4.9) para el caso aditivo o las inecuaciones (4.10) para el caso multiplicativo. Por ello, se consideran las desviaciones que se producen respecto de los datos dados por los expertos. Para dar sentido a este enfoque donde los datos disponibles son intervalares, primero se define la desviación local $\delta_{ij}^k(v)$ respecto del elemento $\bar{p}_{ij}^k = [p_{ij}^{kL}, p_{ij}^{kU}]$, que es el intervalo objetivo para el experto E_k y las alternativas (x_i, x_j) . En el caso del modelo aditivo de preferencias:

$$\begin{aligned} \delta_{ij}^k(v) &= \text{dist}\left(\frac{1}{2}(v_i - v_j + 1), \bar{p}_{ij}^k\right) = \text{dist}\left(\frac{1}{2}(v_i - v_j + 1), [p_{ij}^{kL}, p_{ij}^{kU}]\right), \\ &= \min_{x \in \bar{p}_{ij}^k} \left| \frac{1}{2}(v_i - v_j + 1) - x \right|, \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde dist denota la distancia usual de un punto de la recta real a un intervalo (Figura 4.1).

Figura 4.1: Desviaciones respecto posición de $0.5(v_i - v_j + 1)$.

Se prueba que estas desviaciones locales admiten la siguiente expresión respecto de los extremos del intervalo:

$$\delta_{ij}^k(v) = \begin{cases} p_{ij}^{kL} - 0.5(v_i - v_j + 1) & \text{si } 0.5(v_i - v_j + 1) \leq p_{ij}^{kL}, \\ 0 & \text{si } p_{ij}^{kL} \leq 0.5(v_i - v_j + 1) \leq p_{ij}^{kU}, \\ 0.5(v_i - v_j + 1) - p_{ij}^{kU} & \text{si } 0.5(v_i - v_j + 1) \geq p_{ij}^{kU}, \end{cases} \quad (4.12)$$

para $i, j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$. Se observa que si $0.5(v_i - v_j + 1) \in [p_{ij}^{kL}, p_{ij}^{kU}]$ se encuentra en el rango de preferencias dado por el experto E_k , entonces $\delta_{ij}^k(v) = 0$. En otro caso $\delta_{ij}^k(v)$ aumenta de valor a medida que nos alejamos del rango de preferencias del experto E_k . Otra forma compacta de expresar $\delta_{ij}^k(v)$ es la siguiente:

$$\delta_{ij}^k(v) = \max \left\{ p_{ij}^{kL} - \frac{1}{2}(v_i - v_j + 1), 0, \frac{1}{2}(v_i - v_j + 1) - p_{ij}^{kU} \right\}, \quad i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m. \quad (4.13)$$

Nos centramos ahora en el modelo multiplicativo de preferencias. Siguiendo la argumentación anterior, la desviación local $\delta_{ij}^k(v)$ (se empleará la misma notación que en el caso aditivo salvo posible confusión) de $\frac{v_i}{v_i + v_j}$ respecto del intervalo $[p_{ij}^{kL}, p_{ij}^{kU}]$ dado por el experto E_k para las alternativas x_i y x_j vendrá dada por:

$$\delta_{ij}^k(v) = \text{dist} \left(\frac{v_i}{v_i + v_j}, \bar{p}_{ij}^k \right) = \begin{cases} p_{ij}^{kL} - \frac{v_i}{v_i + v_j} & \text{si } \frac{v_i}{v_i + v_j} \leq p_{ij}^{kL}, \\ 0 & \text{si } p_{ij}^{kL} \leq \frac{v_i}{v_i + v_j} \leq p_{ij}^{kU}, \\ \frac{v_i}{v_i + v_j} - p_{ij}^{kU} & \text{si } \frac{v_i}{v_i + v_j} \geq p_{ij}^{kU}, \end{cases} \quad (4.14)$$

para $i, j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$. Otra expresión de las desviaciones locales para el modelo multiplicativo de preferencias es la siguiente:

$$\delta_{ij}^k(v) = \max \left\{ p_{ij}^{kL} - \frac{v_i}{v_i + v_j}, 0, \frac{v_i}{v_i + v_j} - p_{ij}^{kU} \right\}, \quad i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m. \quad (4.15)$$

Se denota por $\delta^k(v) = (\delta_{ij}^k(v))$ la matriz de desviaciones locales o errores residuales respecto de los datos del experto E_k , con $\delta_{ij}^k(v)$ como en (4.13) para el modelo aditivo o como en (4.15) para el modelo multiplicativo, para $k = 1, \dots, m$.

Una vez estudiadas las expresiones que tienen las desviaciones $\delta_{ij}^k(v)$ para el caso de datos intervalares, se aborda el problema general (información en conflicto, inconsistente, etc.) buscando un vector de prioridad colectivo v que ajuste los datos, ésto es que minimice, en un sentido preciso, las desviaciones $\delta_{ij}^k(v)$, (4.13) ó (4.15) según el modelo de preferencias subyacente. Siguiendo el enfoque planteado en el Capítulo 3, los errores residuales $\delta_{ij}^k(v)$ se pueden considerar relativos a varios niveles: El señalado por el índice k , indicador referente al experto, y el relativo a los índices (i, j) , que hace referencia al par de alternativas en consideración y que denominaremos índices “locales” para cada experto k . Ésta observación nos facilitará el uso de diferentes métricas en distintos niveles de ajuste de datos. Ésto le conferirá al modelo gran flexibilidad y permitirá simular distintas estrategias de actuación del grupo. De esta forma se podrá emplear una norma matricial o vectorial $\|\cdot\|$ para medir los errores locales en (i, j) atendiendo a la consistencia, que generará $\|(\delta_{ij}^k(v))\|$, $k = 1, \dots, m$. Por otro lado se considerará una norma vectorial, típicamente la métrica l_p que tiene una interpretación específica en este campo (Yu, 1973), para dirigir la agregación en k , esto es la agregación del vector $(\|\delta^1(v)\|, \dots, \|\delta^m(v)\|)$ de errores provenientes de los datos de cada experto. La elección de las funciones distancia en el modelo de ajuste de datos, se debe adaptar a las características particulares del problema de decisión de grupo en cuestión y modelar las distintas formas de actuar del grupo al sintetizar las preferencias individuales en un vector de prioridad colectivo v . La

posibilidad de uso de distintas métricas para ajustar los datos a nivel de grupo (problema de consenso, índice k) y a nivel local (problema de consistencia, índices (i, j)) permitirá simular la forma de actuar del grupo a través de la agregación de los errores residuales.

Así el modelo general que se propone consiste en encontrar un vector colectivo de prioridad $v = (v_1, \dots, v_n)$, sujeto a las correspondientes condiciones de normalización y positividad, que ajuste lo mejor posible los datos proporcionadas por los expertos. Ésto es, que minimice la agregación de los errores residuales de los expertos empleando la métrica l_p y una norma matricial o vectorial $\|\cdot\|$ como sigue:

$$\min \left\{ \sum_{k=1}^m \alpha_k^p \|\delta^k(v)\|^p \right\}, \quad \text{si} \quad 1 \leq p < \infty, \quad (4.16)$$

$$\min \left\{ \max_{k=1, \dots, m} \{ \alpha_k \|\delta^k(v)\| \} \right\}, \quad \text{si} \quad p = \infty, \quad (4.17)$$

con $\delta^k(v) = (\delta_{ij}^k(v))$ como en (4.13) ó (4.15), según se adopte el modelo aditivo o multiplicativo de preferencias, y $\|\cdot\|$ es una norma matricial o vectorial.

En el modelo general planteado (4.16 - 4.17) se contempla la posibilidad, de que los expertos tengan distinto peso en la decisión atendiendo a un vector positivo de pesos $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, con $\sum_{k=1}^m \alpha_k = 1$. El parámetro $\alpha_k > 0$ indica el peso asignado al experto E_k , $k = 1, \dots, m$, de acuerdo con su grado de influencia, grado de conocimiento en el campo del tema a tratar, etc. Esto aporta flexibilidad al modelo, permitiendo trabajar en situaciones de decisión heterogéneas.

La formulación (4.16 - 4.17) plantea la estrategia del grupo actuando como un todo para encontrar un vector de prioridad colectivo. Las preferencias individuales se entienden como muestras de las preferencias del grupo que se ajustan de acuerdo con el modelo subyacente (aditivo o multiplicativo de preferencias) considerando diferentes funciones distancia. La métrica l_p determina diferentes estrategias de actuación del grupo según el valor de p (Yu, 1973). El caso $p = 1$ se corresponde con la solución que minimiza la suma de los errores residuales de los expertos. A medida que el valor de p aumenta, más importancia se da al experto más discrepante. El caso $p = \infty$ se corresponde con el objetivo de minimizar la desviación del experto más discrepante y puede emplearse para identificar al experto más discrepante (experto “outlier”). De esta forma si

$$\delta_{max} = \max_{k=1, \dots, m} \left\{ \|\delta^1(v)\|, \dots, \|\delta^m(v)\| \right\},$$

el experto E_{k_0} tal que $\|\delta^{k_0}(v)\| = \delta_{max}$ es candidato a ser un “outlier”. Por tanto, el parámetro p es un factor de balance, entre el principio de la mayoría ($p = 1$) y el principio de la minoría ($p = \infty$) (González-Pachón y Romero, 2011; 2016). Para el modelo multiplicativo, en (Wan et al., 2018a) se hace uso de la métrica l_p para construir un vector de prioridad intervalar a partir de vectores individuales intervalares $\bar{v}^k$, tratados como puntos de $\mathbb{R}^2$ (definidos por los extremos del intervalo). Los $\bar{v}^k$ han sido previamente contruidos mediante un método de programación fuzzy logarítmica.

El modelo general (4.16 - 4.17) cubre un amplio catálogo de modos de actuar del grupo en la búsqueda de una solución colectiva, a través de los parámetros y métricas que lo

definen y que le confieren una gran flexibilidad, para los modelos aditivo y multiplicativo de preferencias. Paralelamente a cómo se hizo en el Capítulo 3 para datos puntuales, del modelo general se deriva una relación de métodos para el cálculo de un vector de prioridad colectivo. Los métodos que se incluyen en la Tabla (4.1) resultan del uso de diferentes métricas a distintos niveles. Para la agregación de los residuos de los expertos se utilizan las normas vectoriales l_p más usuales, $p = 1, 2, \infty$. Para agregar los errores locales $\delta_{ij}^k(v)$ para los pares de alternativas (x_i, x_j) , $i, j = 1, \dots, n$, para cada experto se considerarán la norma matricial de Frobenius $\|\cdot\|_{Fr}$ la norma vectorial l_1 y la norma matricial infinito $\|\cdot\|_{m\infty}$, con $\delta_{ij}^k(v)$ como en (4.13) para el modelo aditivo o como en (4.15) para el caso multiplicativo. Estos métodos proporcionan un catálogo de actuaciones en el contexto del problema de decisión de grupo, cuya resolución computacional se abordará en la siguiente sección.

Tabla 4.1: Relación de métodos para métricas particulares.

Métricas ($l_p, \ \cdot\ $)	Función Objetivo	Comentario
$p = 2, \ \cdot\ _{Fr}$	$\sum_k \alpha_k^2 \sum_{ij} (\delta_{ij}^k(v))^2$	Mínimos cuadrados
$p = 1, l_1$	$\sum_k \alpha_k \sum_{ij} \delta_{ij}^k(v)$	Minimiza suma errores residuales locales
$p = \infty, l_1$	$\max_k \{\alpha_k \sum_{ij} \delta_{ij}^k(v)\}$	Minimiza experto más discrepante
$p = \infty, l_\infty$	$\max_k \{\alpha_k \max_{ij} \{\delta_{ij}^k(v)\}\}$	Detección datos puntuales extremos
$p = 1, \ \cdot\ _{m\infty}$	$\sum_k \alpha_k \max_i \{\sum_j \delta_{ij}^k(v)\}$	Minimiza suma errores extremos de expertos a nivel alternativas
$p = \infty, \ \cdot\ _{m\infty}$	$\max_k \{\alpha_k \max_i \{\sum_j \delta_{ij}^k(v)\}\}$	Minimiza desviación del experto más discrepante a nivel de alternativas

El primer método de la tabla, se corresponde con el método mínimos cuadrados, relativo al uso de la métrica vectorial l_2 y la norma matricial de Frobenius. Un método de priorización mínimos cuadrados logarítmico se ha propuesto en (Wang y Chen, 2014) para el caso particular de un experto ($m = 1$) y el modelo multiplicativo de preferencias.

El segundo método de la tabla, se corresponde con la búsqueda de soluciones puntuales que minimizan la suma de los errores residuales locales, sujetas a condiciones apropiadas de normalización. En este caso la solución es más robusta en el sentido que es menos sensible a datos extremos. Para el caso particular de un experto ($m = 1$), Xu y Chen

(2008b) proponen un método de priorización usando esta métrica, que deriva pesos de prioridad intervalares. En el caso del modelo aditivo de preferencias (Jiang et al., 2010; Hu et al., 2014; Xu et al., 2014b) trabajan con el método de Xu y Chen (2008b) revisando la condición de normalización $\sum_{i=1}^n v_i = 1$ considerada por Xu y Chen. En todos estos casos es necesario aplicar una técnica adicional para comparar los valores intervalares resultantes.

Se concluye que, el modelo general planteado en (4.16 - 4.17) con $\delta_{ij}^k(v)$ como en (4.13) para el modelo de preferencias aditivo o como en (4.15) para el modelo de preferencias multiplicativo, proporciona un marco teórico analítico para abordar y analizar simultáneamente los problemas subyacentes: i) Problema de consistencia (aditiva y multiplicativa) ii) Problema de consenso o de síntesis de datos imprecisos (en forma de datos intervalares) procedentes de distintas fuentes. El modelo cubre un amplio catálogo de modos de actuar del grupo en la búsqueda de una solución colectiva a través de los parámetros y métricas que definen el mismo. Una vez calculada la solución v , los valores de las funciones objetivo proporcionan automáticamente medidas para analizar la solución. iii) Problema de información incompleta, dado que las relaciones de preferencia fuzzy intervalares ya contemplan de forma implícita esta situación. Por tanto, el modelo planteado no precisa una etapa previa de rellenado de datos, como la mayoría de los métodos en la literatura (Genç et al., 2010; Liu et al., 2012b; Xu y Da, 2014a; Meng et al., 2017a; Herrera-Viedma et al., 2007b), considerándose sólo los datos aportados por los expertos.

Por otra parte, el modelo general planteado (4.16 - 4.17) deriva un vector de prioridad puntual que produce automáticamente un ranking de las alternativas, no siendo necesario aplicar ninguna medida discriminante adicional. La mayoría de los métodos propuestos en la literatura calculan vectores de prioridad intervalares y requieren un procedimiento adicional para derivar el orden de preferencia final de las alternativas.

4.3. Modelo computacional

Una vez planteado el marco teórico general (4.16 - 4.17) para los modelos aditivo y multiplicativo de preferencias, nos centramos en el cálculo efectivo de un vector de prioridad colectivo $v = (v_1, \dots, v_n)$ a partir de las relaciones de preferencia fuzzy intervalares $\bar{P}^k = (\bar{p}_{ij}^k)$, $k = 1, \dots, m$, posiblemente incompletas e inconsistentes proporcionadas por los expertos. A continuación, se describen las formulaciones computacionales para el catálogo de métodos planteados en la Tabla (4.1) correspondientes al uso de métricas usuales, que representan un amplio espectro de estrategias de resolución del problema de decisión de grupo.

Previo a las formulaciones computacionales de los métodos, retomamos el error local $\delta_{ij}^k(v)$ que representa la desviación que produce el vector v respecto del dato intervalar $[p_{ij}^{kL}, p_{ij}^{kU}]$. En el caso del modelo aditivo de preferencias, $\delta_{ij}^k(v)$ admite la siguiente expresión

en términos de los extremos del intervalo:

$$\delta_{ij}^k(v) = \begin{cases} p_{ij}^{kL} - 0.5(v_i - v_j + 1) & \text{si } 0.5(v_i - v_j + 1) \leq p_{ij}^{kL}, \\ 0 & \text{si } p_{ij}^{kL} \leq 0.5(v_i - v_j + 1) \leq p_{ij}^{kU}, \\ 0.5(v_i - v_j + 1) - p_{ij}^{kU} & \text{si } 0.5(v_i - v_j + 1) \geq p_{ij}^{kU}. \end{cases} \quad (4.18)$$

De la fórmula anterior de $\delta_{ij}^k(v)$, en función de los extremos del intervalo, se desprende que estos errores locales a penalizar se pueden expresar en términos de las variables de desviación no negativas ν_{ij}^k y π_{ij}^k , que cuantifican la desviación por defecto (si $0.5(v_i - v_j + 1) \leq p_{ij}^{kL}$) y por exceso (si $0.5(v_i - v_j + 1) \geq p_{ij}^{kU}$) respecto del intervalo objetivo (Figura 4.2).

Figura 4.2: Variables de desviación respecto del intervalo.

En el modelo multiplicativo de preferencias las desviaciones $\delta_{ij}^k(v)$ adoptan la siguiente expresión

$$\delta_{ij}^k(v) = \begin{cases} p_{ij}^{kL} - \frac{v_i}{v_i + v_j} & \text{si } \frac{v_i}{v_i + v_j} \leq p_{ij}^{kL}, \\ 0 & \text{si } p_{ij}^{kL} \leq \frac{v_i}{v_i + v_j} \leq p_{ij}^{kU}, \\ \frac{v_i}{v_i + v_j} - p_{ij}^{kU} & \text{si } \frac{v_i}{v_i + v_j} \geq p_{ij}^{kU}. \end{cases} \quad (4.19)$$

Para evitar la no linealidad en los términos anteriores trabajaremos con los errores ponderados (multiplicados por $v_i + v_j$) que denominaremos también $\delta_{ij}^k(v)$ (por simplicidad en la notación) dados por :

$$\delta_{ij}^k(v) = \begin{cases} (p_{ij}^{kL} - 1)v_i + p_{ij}^{kL}v_j & \text{si } \frac{v_i}{v_i + v_j} \leq p_{ij}^{kL}, \\ 0 & \text{si } p_{ij}^{kL} \leq \frac{v_i}{v_i + v_j} \leq p_{ij}^{kU}, \\ (1 - p_{ij}^{kU})v_i - p_{ij}^{kU}v_j & \text{si } \frac{v_i}{v_i + v_j} \geq p_{ij}^{kU}. \end{cases} \quad (4.20)$$

En este caso, los errores locales a penalizar se pueden expresar en términos de las variables de desviación no negativas por defecto (si $\frac{v_i}{v_i + v_j} \leq p_{ij}^{kL}$) y por exceso (si $\frac{v_i}{v_i + v_j} \geq p_{ij}^{kU}$),

que denominaremos ν_{ij}^k y π_{ij}^k , respectivamente. Por simplicidad en la notación, en ambos modelos, aditivo y multiplicativo, se empleará la misma notación ν_{ij}^k y π_{ij}^k para representar la desviación por defecto y por exceso, respectivamente. Se hace notar que en ambos casos $\delta_{ij}^k(v) = \nu_{ij}^k + \pi_{ij}^k$, $\nu_{ij}^k, \pi_{ij}^k \geq 0$ y $\nu_{ij}^k \pi_{ij}^k = 0$, $i, j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$.

De esta forma, se trata de minimizar la agregación de estas desviaciones locales $\delta_{ij}^k(v) = \nu_{ij}^k + \pi_{ij}^k$, $i, j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$, tales que:

- Caso aditivo:

$$\begin{aligned} 0.5(v_i - v_j + 1) + \nu_{ij}^k &\in [p_{ij}^{kL}, p_{ij}^{kU}] \\ 0.5(v_i - v_j + 1) - \pi_{ij}^k &\in [p_{ij}^{kL}, p_{ij}^{kU}]; \end{aligned} \quad (4.21)$$

- Caso multiplicativo:

$$\begin{aligned} v_i + \nu_{ij}^k &\in (v_i + v_j)[p_{ij}^{kL}, p_{ij}^{kU}] \\ v_i - \pi_{ij}^k &\in (v_i + v_j)[p_{ij}^{kL}, p_{ij}^{kU}]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Método Mínimos Cuadrados. El caso más usual, se corresponde con la aplicación de la métrica l_2 y la norma matricial de Frobenius para la agregación de las desviaciones de los expertos y las desviaciones locales de cada experto, respectivamente. Ésto resulta en el siguiente problema mínimos cuadrados ponderado:

$$\min \left\{ \sum_{k=1}^m \alpha_k^2 \sum_{i,j=1}^n \left((\nu_{ij}^k)^2 + (\pi_{ij}^k)^2 \right) \right\}, \quad (4.23)$$

sujeto a las restricciones derivadas de (4.21) para el caso aditivo y (4.22) para el caso multiplicativo y las correspondientes condiciones de normalización:

- Modelo aditivo:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(v_i - v_j + 1) - p_{ij}^{kL} + \nu_{ij}^k \geq 0, & i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m, \\ \frac{1}{2}(v_i - v_j + 1) - p_{ij}^{kU} - \pi_{ij}^k \leq 0, & \text{para } i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m, \\ \nu_{ij}^k, \pi_{ij}^k \geq 0, & i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m, \\ v_i \geq 0, |v_i - v_j| \leq 1, & i, j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (4.24)$$

- Modelo multiplicativo:

$$\begin{cases} (1 - p_{ij}^{kL})v_i - p_{ij}^{kL}v_j + \nu_{ij}^k \geq 0, & i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m, \\ (1 - p_{ij}^{kU})v_i - p_{ij}^{kU}v_j - \pi_{ij}^k \leq 0, & i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m, \\ \nu_{ij}^k, \pi_{ij}^k \geq 0, & \text{para } i, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m, \\ v_i > 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n v_i = 1. \end{cases} \quad (4.25)$$

Para estos problemas existe una gran cantidad de procedimientos numéricos de resolución (Ueberhuber, 2012; Stoer and Bulirsch, 2013; Press, 2007).

Método Suma de los Residuos. Consideraremos ahora el uso de la métrica l_1 en la agregación de los errores residuales locales para cada experto y en la agregación de las desviaciones de cada experto, resultando el siguiente problema de optimización:

$$\min \left\{ \sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij}^k(v) \right\} = \min \sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{i,j=1}^n (\nu_{ij}^k + \pi_{ij}^k). \quad (4.26)$$

sujeto a las restricciones (4.24) o (4.25) según se trate de un modelo aditivo o multiplicativo de preferencias, respectivamente.

Los problemas (4.26-4.24) y (4.26-4.25) responden a problemas de programación lineal que pueden ser resueltos aplicando el método simplex.

Método para la detección de expertos “outliers” Consideraremos ahora el caso en el que se busca un vector colectivo que minimice la desviación del experto más discrepante, de interés adicional para detectar posibles expertos “outlier”. En este caso se considera la métrica $p = \infty$ en la agregación de los residuos de los expertos y la métrica l_1 para la agregación de los errores locales de cada experto, resultando el problema de optimización

$$\min \left\{ \max_k \left\{ \alpha_k \sum_{i,j} \delta_{ij}^k(v) \right\} \right\} \quad (4.27)$$

con $\delta_{ij}^k(v)$ como en (4.13) ó (4.15), según se trate de un modelo aditivo o multiplicativo de preferencias respectivamente y sujeto a las correspondientes condiciones de normalización.

Se escribe el problema anterior en términos de las variables de desviación ν_{ij}^k y π_{ij}^k y una nueva variable D no negativa, que se corresponde con la desviación máxima. Entonces, el problema (4.27) se formula en términos de estas nuevas variables como:

$$\begin{aligned} & \min D \\ & \text{sujeto a: } \alpha_k \sum_{i,j=1}^n (\nu_{ij}^{kL} + \pi_{ij}^{kU}) \leq D, \quad k = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (4.28)$$

y sujeto a las condiciones (4.24) para el modelo aditivo o (4.25) para el modelo multiplicativo de preferencias. Los problemas (4.28-4.24) y (4.28-4.25) resultan problemas de programación lineal que pueden ser resueltos aplicando el método del simplex.

Método λ -extendido. A partir de las funciones objetivo en los problemas de optimización (4.26) y (4.27) se puede construir una función objetivo como combinación lineal de dichas funciones introduciendo un parámetro de control $\lambda \in [0, 1]$ (Carrizosa y Romero-Morales, 2001), resultando

$$\min \left\{ (1 - \lambda) \left\{ \sum_{k=1}^m \alpha_k \sum_{i,j=1}^n (\nu_{ij}^{kL} + \pi_{ij}^{kU}) \right\} + \lambda \max_{k=1, \dots, m} \left\{ \alpha_k \sum_{i,j=1}^n (\nu_{ij}^{kL} + \pi_{ij}^{kU}) \right\} \right\} \quad (4.29)$$

sujeto a las restricciones (4.24) ó (4.25), según se trate del modelo aditivo o multiplicativo de preferencias respectivamente. Estos son problemas de programación lineal, que pueden ser resueltos por el método simplex.

El parámetro λ en la función objetivo (4.29) permite proporcionar una solución compromiso entre los dos extremos opuestos, minimizar la suma de las desviaciones ponderadas de los expertos ($\lambda = 0$, principio de la mayoría) y minimizar la mayor desviación ponderada de expertos ($\lambda = 1$, principio de la minoría) (González-Pachón y Romero, 2016). A medida que el valor de λ aumenta se da más peso a las preferencias de los expertos más discrepantes.

Método para la detección de alternativas “outliers”. Se considera ahora la métrica $p = 1$ en la agregación de los residuos de los expertos y la norma matricial infinito $\|\cdot\|_{m\infty}$ en la agregación de los errores residuales locales de cada experto, resultando el siguiente problema de optimización:

$$\min \left\{ \sum_{k=1}^m \alpha_k \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \sum_{j=1}^n \delta_{ij}^k(v) \right\} \right\} = \min \left\{ \sum_{k=1}^m \alpha_k \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \sum_{j=1}^n (\nu_{ij}^{kL} + \pi_{ij}^U) \right\} \right\}. \quad (4.30)$$

sujeto a las restricciones (4.24) ó (4.25), según se trate del modelo aditivo o multiplicativo de preferencias respectivamente. Este problema se puede formular como un problema de programación lineal en las variables de desviación ν_{ij}^k y π_{ij}^k y una nueva variable no negativa D_k , resultando:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{k=1}^m \alpha_k D_k \\ & \text{subjeta a:} \quad \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \sum_{j=1}^n (\nu_{ij}^{kL} + \pi_{ij}^{kU}) \right\} \leq D_k, \quad k = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (4.31)$$

y sujeto a las restricciones (4.24) para el caso aditivo ó (4.25) para el multiplicativo.

Anteriormente se han presentado algunos métodos que se derivan del modelo general y que plantean distintas estrategias en la búsqueda de una solución colectiva, destacándose que todas las formulaciones computacionales propuestas se reducen a problemas de programación lineal o cuadrática que se resuelven mediante métodos del tipo del simplex o técnicas mínimos cuadrados. Una vez que el vector de prioridad colectivo $v = (v_1, \dots, v_n)$ ha sido calculado por alguno de los métodos propuestos, es de gran interés proporcionar medidas que permitan analizar la solución v y estudiar el grado de acuerdo de cada experto y del grupo (como ente colaborativo) con la solución final. Esta cuestión se estudió en detalle en el Capítulo 3 para el caso de datos puntuales. En el contexto en el que los expertos expresan sus preferencias mediante relaciones de preferencia fuzzy intervalares, las medidas de análisis del consenso propuestas en la literatura son escasas. En Wan et al. (2018a) se propone un índice de consistencia geométrica para medir el nivel de consistencia de una relación de preferencia fuzzy intervalar. En (Meng et al., 2017b) y en (Meng et al., 2017a) se definen índices de consenso de grupo para relaciones de preferencia fuzzy cuasi-intervalares para el modelo multiplicativo y aditivo de preferencias, respectivamente.

El modelo de ajuste de datos propuesto en este capítulo proporciona de forma natural medidas de análisis de la solución a partir de los datos intervalares aportados por los expertos, para los modelos aditivo y multiplicativo de preferencias simultáneamente. Una vez calculada la solución, los errores residuales considerados permiten expresar las discrepancias a distintos niveles entre la solución obtenida y la información de preferencias proporcionada por los expertos. Estas medidas se construyen a través de los errores locales $\delta_{ij}^k(v)$ dados por (4.13), para el modelo aditivo, o por (4.15), para el modelo multiplicativo, siguiendo los mismos procedimientos planteados en la Sección 3.4. Las medidas definidas en dicha sección son directamente aplicables al caso intervalar, salvo las que hacen referencia a las desviaciones booleanas. En este caso se consideraría el número de desacuerdos del experto k con la solución:

$$\Delta_{bool}^k = \sum_{i,j=1}^n l_{ij}^k, \quad (4.32)$$

donde

- Modelo aditivo:

$$l_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } 0.5(v_i - v_j + 1) \notin [p_{ij}^{kL}, p_{ij}^{kU}], \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (4.33)$$

- Modelo multiplicativo:

$$l_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{v_i}{v_i + v_j} \notin [p_{ij}^{kL}, p_{ij}^{kU}], \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (4.34)$$

A continuación se ilustra el enfoque propuesto a lo largo del capítulo.

Ejemplo numérico. Se considera el ejemplo presentado en Wang y Li (2012), donde un comité de expertos universitarios busca generar un vector de pesos para los criterios a tener en cuenta en los procesos de asignación de becas para estancias en el extranjero a alumnos de doctorado. Los criterios considerados son los siguientes:

- x_1 : Competencia académica, logros y potencialidades reflejadas en las referencias de publicaciones arbitradas y otros resultados de investigación.
- x_2 : Perfil académico y prestigio de la institución de acogida extranjera propuesta.
- x_3 : Habilidades de comunicación y conocimientos de idiomas extranjeros.
- x_4 : Antecedentes y experiencia académica en el área propuesta de estudio.

Estos criterios serán la base para que una agencia de asignación de becas de doctorado seleccione a los candidatos. El comité de expertos lo constituyen 4 miembros, todos ellos con el mismo peso en la decisión, ($\alpha_k = 1, \forall k$). Cada experto formula sus juicios de preferencias sobre $\{x_i, x_j\}$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, a través de las siguientes relaciones de preferencia fuzzy intervalares:

$$\bar{P}^1 = \begin{pmatrix} [0.50, 0.50] & [0.35, 0.45] & [0.40, 0.55] & [0.52, 0.65] \\ [0.55, 0.65] & [0.50, 0.50] & [0.70, 0.90] & [0.65, 0.75] \\ [0.45, 0.60] & [0.10, 0.30] & [0.50, 0.50] & [0.55, 0.65] \\ [0.35, 0.48] & [0.25, 0.35] & [0.35, 0.45] & [0.50, 0.50] \end{pmatrix},$$

$$\bar{P}^2 = \begin{pmatrix} [0.50, 0.50] & [0.75, 0.85] & [0.65, 0.75] & [0.35, 0.45] \\ [0.15, 0.25] & [0.50, 0.50] & [0.50, 0.65] & [0.50, 0.65] \\ [0.25, 0.35] & [0.30, 0.40] & [0.50, 0.50] & [0.62, 0.75] \\ [0.55, 0.65] & [0.35, 0.50] & [0.25, 0.38] & [0.50, 0.50] \end{pmatrix},$$

$$\bar{P}^3 = \begin{pmatrix} [0.50, 0.50] & [0.60, 0.70] & [0.75, 0.85] & [0.60, 0.72] \\ [0.30, 0.45] & [0.50, 0.50] & [0.50, 0.70] & [0.55, 0.70] \\ [0.15, 0.25] & [0.30, 0.50] & [0.50, 0.50] & [0.45, 0.55] \\ [0.28, 0.40] & [0.30, 0.45] & [0.45, 0.55] & [0.50, 0.50] \end{pmatrix},$$

$$\bar{P}^4 = \begin{pmatrix} [0.50, 0.50] & [0.30, 0.40] & [0.45, 0.65] & [0.63, 0.75] \\ [0.60, 0.70] & [0.50, 0.50] & [0.50, 0.70] & [0.68, 0.76] \\ [0.35, 0.55] & [0.33, 0.50] & [0.50, 0.50] & [0.65, 0.74] \\ [0.25, 0.37] & [0.24, 0.32] & [0.26, 0.35] & [0.50, 0.50] \end{pmatrix}.$$

Respecto de los datos de partida, se observa que los datos son recíprocos (4.1), pero inconsistentes. Esto se manifiesta por ejemplo en la matriz P^2 que contiene la información de preferencias del experto E_2 , que es manifiestamente inconsistente. Para ilustrarlo nos fijamos en primer lugar en los datos de la primera fila de P^2 . De donde se concluye directamente que el criterio x_1 debe ser más relevante que los criterios x_2 (notablemente) y x_3 , sin embargo lo es menos que el criterio x_4 . Por otra parte, de los datos en la segunda fila se deduce que el criterio x_2 es más importante o al menos tan importante como x_3 y x_4 . Adicionalmente el dato p_{34}^2 indica directamente relevancia del criterio x_3 respecto de x_4 . De todo ello se concluye una clara inconsistencia en la relación por ejemplo de los criterios x_1 y x_4 .

Los autores del ejemplo (Wang y Li, 2012) aplican un método GP intervalar usando la métrica l_1 para el modelo aditivo de consistencia y proporcionan el siguiente vector de pesos intervalar de los criterios:

$$\bar{v} = ([0.3583, 0.5333], [0.3333, 0.4301], [0.1333, 0.2333], [0.0001, 0.1433]).$$

De este vector intervalar se deduce que los criterios más relevantes son los criterios x_1 y x_2 y los menos relevantes están en el conjunto $\{x_3, x_4\}$. Pero no se concluye un peso preciso para cada criterio, ni se determina el criterio más relevante y menos relevante a considerar. Se hace notar que el vector v anterior ha sido calculado considerando la condición de normalización $\sum_{i=1}^n v_i = 1$, que es incompatible con la ecuación (2.11) del modelo aditivo (Fedrizzi y Brunelli, 2009).

Para dar una panorámica de la aplicación del modelo de ajuste de datos propuesto, se consideraran las métricas más usuales para el modelo aditivo de preferencias. De esta

forma en primer lugar, se aplica el método denominado suma de los residuos (4.26-4.24), que considera el uso de la métrica $p = 1$ en la agregación de los errores residuales locales de cada experto y en la agregación de las desviaciones de los expertos. En segundo lugar, se calcula v resolviendo el problema mínimos cuadrados (4.23-4.13) correspondiente al uso de la norma matricial de Frobenius a nivel de cada experto y la métrica $p = 2$ en la agregación de los errores de los expertos. Finalmente, se aplica el método (4.28-4.24) que considera el uso de $p = 1$ en la agregación de los errores residuales locales de cada experto y minimiza el error debido al experto más discrepante (uso de métrica $p = \infty$ en este nivel). Los rankings que se derivan de los vectores de pesos obtenidos al aplicar dichos métodos se muestran en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2: Rankings obtenidos.

Método	Ranking
Mét. de Wang y Li (2012)	$([0.3583, 0.5333], [0.3333, 0.4301], [0.1333, 0.2333], [0.0001, 0.1433])$
Mét. 1 ($p = 1$)	$x_2 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_4$
Mét. 2 ($p = 2$)	$x_2 \sim x_1 \succ x_3 \succ x_4$
Mét. 3 ($p = \infty$)	$x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4$

De dichos resultados se concluye que x_4 es el criterio menos relevante, seguido de x_3 . El criterio x_2 resulta con mayor peso que el criterio x_1 cuando se aplica el primer método, que usa la métrica $p = 1$ en la agregación de los errores de los expertos. Este resultado está apoyado por las preferencias de los expertos E_4 y E_1 . A medida que el valor de p crece (en el uso como métrica en la agregación de las desviaciones de los expertos), el criterio x_2 pierde peso y se incrementa la relevancia del criterio x_1 . De esta forma para $p = 2$ prácticamente tienen el mismo peso (con ligeras diferencias) y para $p = \infty$ el criterio x_1 resulta más relevante que x_2 , apoyado por las preferencias de los expertos E_2 y E_3 . Paralelamente, si se mide el grado de desacuerdo de los expertos con la solución para los métodos aplicados, resulta $\Delta_1^2 > \Delta_1^3 > \Delta_1^1 > \Delta_1^4$ para los casos de $p = 1$ y $p = 2$. Se observa que el experto E_2 es el más discrepante, seguido de E_3 , con las soluciones proporcionadas por los métodos para $p = 1$ y $p = 2$. Por otra parte E_4 y E_1 son los que muestran un grado mayor de acuerdo con estas soluciones. Sin embargo a medida que el valor de p crece, el desacuerdo de E_2 con la solución decrece y aumenta Δ_1^4 . De forma que las preferencias del experto E_2 (el experto más discrepante) tiene una influencia mayor en la solución para el caso de $p = \infty$.

Capítulo 5

Problema de agregación de rankings imprecisos

Los datos son algo precioso y durarán más que los propios sistemas.

Tim Berners-Lee (1955)

En los Capítulos 3 y 4 se ha estudiado el problema de decisión de grupo “cardinal”, donde los expertos expresan sus preferencias mediante relaciones de preferencia fuzzy, con información cuantitativa sobre el grado de preferencia entre pares de alternativas. En este capítulo se aborda el problema de decisión de grupo “ordinal”, en el sentido que la información de partida está recogida en listas ordenadas o rankings de las alternativas que representan el orden o posición de preferencias de las mismas. El problema que se plantea es el de construir un ranking colectivo de las alternativas que sintetice las preferencias de los expertos. Es el denominado problema de ranking de grupo o ranking de consenso.

El objetivo que nos planteamos es determinar un vector de prioridad colectivo de las alternativas a partir de los rankings ordinales proporcionados por los expertos, que pueden ser incompletos, imprecisos y diversos. A partir del vector de prioridad se derivará un ranking colectivo de las alternativas. Se presentan métodos de resolución del problema basados en relaciones de preferencia fuzzy y en técnicas inspiradas en el autovalor dominante. El problema para el caso de listas parciales o rankings incompletos se estudia en la Sección 5.2. La situación en la que los datos de preferencia son ordinales imprecisos se aborda en la Sección 5.3. La aplicación de los métodos que se proponen se ilustra con varios ejemplos numéricos.

5.1. Introducción

El problema de ranking de grupo, también conocido como de agregación de rankings, consiste en generar un ranking colectivo o de consenso que represente la diversidad de

información contenida en varias listas ordenadas o rankings de un conjunto de alternativas, provenientes de varias fuentes (expertos, agentes, criterios, etc.). En un problema tipo de agregación de rankings ordinales se considera un conjunto de alternativas $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ($n \geq 2$) que tienen que ser ordenadas de mejor a peor, atendiendo a la información procedente de distintas fuentes, expertos, criterios, agentes, etc. En adelante se empleará el término experto para referirse a cualesquiera de ellos en general. De este modo, dado un conjunto X de alternativas y un grupo de expertos $\{E_1, \dots, E_m\}$, $m \geq 2$, el problema consiste en determinar un ranking colectivo o de consenso de las alternativas, que sintetice “lo mejor posible” la información de preferencias proporcionada por el grupo de expertos. En este caso, se considera que cada experto expresa sus preferencias mediante una lista ordenada o ranking R sobre los elementos de X . R indica una ordenación o permutación de los elementos de X . Es decir, $R = \{x_{i_1} \succeq x_{i_2} \succeq \dots \succeq x_{i_n}\}$, donde $x_{i_k} \in X$ y $\succeq$ indica una relación de orden sobre X . R se puede representar por el vector de números enteros $(r_1, r_2, \dots, r_n)$, donde $r_i \in \{1, \dots, n\}$ denota la posición de la alternativa x_i en el ranking R . Supondremos que un menor valor ordinal r_i de la alternativa x_i indica una mayor preferencia o mejor posición en el ranking de x_i . Sin pérdida de generalidad nos referiremos a R como el vector ranking $R = (r_i)$. Esto es, R es una secuencia de números ordinales. Por $|R|$ se denota la longitud o número de elementos del vector R .

En definitiva, en un problema de agregación de rankings un grupo de m expertos $\{E_1, \dots, E_m\}$, que expresan sus juicios individuales de preferencias sobre X a través de m listas ordenadas o rankings, $R^1, R^2, \dots, R^m$, a partir de las cuales hay que construir un ranking R de consenso o colectivo.

Figura 5.1: Problema de agregación de rankings.

El problema de agregación de rankings tiene aplicaciones en numerosos campos como la toma de decisiones multicriterio, buscadores web, sistemas de búsqueda y recuperación de información (information retrieval), sistemas de recomendación, teoría de elección social, bioinformática, etc. Por ejemplo, un metabuscador de páginas web es una aplicación en

el contexto de la Web (World Wide Web) donde la consulta de un usuario se reenvía a varios buscadores. El metabuscador produce automáticamente un ranking agregado a partir de los rankings de elementos relevantes relativos a la consulta dados por los diferentes motores de búsqueda. Una situación análoga ocurre en el contexto de sistemas de búsqueda y recuperación de la información, donde se trata de construir un ranking de los documentos relevantes ante los términos de una consulta, a partir de la información proporcionada por diferentes sistemas de búsqueda y recuperación de la información de acuerdo con varios criterios. Ni qué decir tiene que la agregación de rankings juega un papel fundamental en los sistemas de recomendación, donde una lista de recomendación agregada se genera a partir de listas parciales derivadas de evaluaciones de los usuarios acerca de determinados productos. En (Fagin, 1999; Desarkar et al., 2016) se refieren aplicaciones en el campo de sistemas inteligentes en los que el problema de ranking de grupo juega un importante papel.

Los métodos de construcción de un ranking agregado a partir de rankings individuales no son algo nuevo (Tavana et al., 2007) y se han estudiado extensamente desde el Siglo XVIII, cuando Borda y Condorcet (Borda, 1781; McLean, 1990) publicaron su trabajo sobre Teoría de la Elección Social. El método de Borda consiste en construir un ranking final de las alternativas a partir de las sumas de las posiciones de éstas a lo largo de los rankings de partida. A cada alternativa se le asocia el vector con las posiciones que ocupa a lo largo de los rankings. Las alternativas se ordenan por la norma l_1 de dichos vectores ordinales. En el campo de los sistemas de votación (Arrow y Raynaud; 1986) probó el teorema de imposibilidad, que describe las limitaciones inherentes a cualquier sistema de votación. Atendiendo a los problemas planteados por Arrow, Kemeny y Snell (1962) presentaron un método alternativo al de la suma o promedio de Borda. El modelo se basa en buscar un ranking de consenso que minimice la suma de las desviaciones de los rankings individuales, considerando la distancia τ de Kendall (Langville y Meyer, 2012), basada en el grado de correlación o número de pares discordantes entre dos rankings. El problema de optimización resultante es de complejidad NP (Bartholdi y Trick, 1989; Dwork et al., 2001). En (Hochbaum y Levin, 2006, Cook et al., 2007) se proponen técnicas de Branch and Bound (ramificación y poda) para resolver aproximadamente el problema de optimización. El modelo de Kemeny-Snell, diseñado inicialmente para rankings ordinales completos y órdenes débiles, no contemplaba situaciones de igual preferencia (empates) y fue extendido por Bogart (Bogart, 1973, 1975). Otros autores proponen métodos basados en distancias l_p que se aplican a los rankings de posiciones ordinales tratados como vectores de valores reales (Cook and Seiford, 1978; Cook y Seiford, 1982; Cook et al., 1996). En este contexto, González-Pachón y Romero (1999) presentan un modelo GP extendido para calcular una solución compromiso. En Contreras (2011) se propone incorporar factores de peso a las desviaciones atendiendo a las posiciones ordinales de las alternativas.

Gran parte de la literatura hace referencia a modelos que asumen rankings ordinales completos y precisos (Wang et al., 2005a). No obstante, la información de preferencias disponible en aplicaciones del mundo real puede ser limitada e imprecisa debido a la complejidad del problema (Fan y Liu, 2010; Wu y Chiclana, 2014). Por ello, un desafío en este contexto reside en desarrollar un modelo teórico y métodos que permitan generar rankings de consenso o colectivos a partir de información posiblemente incompleta e

imprecisa procedente de diferentes fuentes. Algunos estudios en la literatura abordan el problema de información incompleta en campos específicos de aplicación (Dwork et al., 2001; Hochbaum y Levin, 2006; Renda y Straccia, 2003; Farah y Vanderpooten, 2007; Dopazo y Martínez-Céspedes, 2015). En ellos se trabaja con rankings o listas parciales como información de partida.

Por otra parte, la información disponible de partida puede ser limitada, incierta e imprecisa. En este contexto los números ordinales intervalares nos proporcionan una forma de representar información de preferencias ordinal imprecisa. Existen algunos estudios en la literatura que trabajen con datos ordinales intervalares (González-Pachón y Romero, 2001; Fan et al., 2010; Fan y Liu, 2010; Dopazo y Martínez-Céspedes, 2017). González-Pachón y Romero (2001) proponen un modelo de programación entera por metas para construir un ranking de consenso a partir de rankings intervalares. La función objetivo se construye directamente en términos de las posiciones ordinales de las alternativas. Wang et al. (2005a) critican el uso directo de las posiciones ordinales de las como valores numéricos y desarrollan un método de dos pasos para obtener un ranking global a partir de un conjunto de rankings ordinales puntuales. En el primer paso, se estiman intervalos de utilidad a partir de las posiciones ordinales de las alternativas siguiendo una técnica de programación lineal. Posteriormente éstos se agregan mediante un procedimiento de suma ponderada. En segundo lugar, se utiliza una medida de comparación de números intervalares para generar un ranking de las alternativas a partir de los intervalos de utilidad agregados. Este método (Wang et al., 2005a) se centra en la agregación de rankings ordinales puntuales y no puede ser empleado directamente con datos ordinales imprecisos. Alternativamente, en (Fan et al., 2010) los datos ordinales imprecisos se representan por medio de vectores de probabilidad. Los autores construyen un vector de probabilidad colectivo como suma ponderada de los vectores de probabilidad que expresan las preferencias imprecisas de los expertos sobre las alternativas. Finalmente, las posiciones de las alternativas en el ranking se determinan resolviendo un problema de programación lineal entera binaria. En el caso de que haya un gran número de alternativas, la resolución del problema de programación entera resultante puede ser una tarea computacionalmente intensiva. Fan y Liu (2010) destacan que los números ordinales intervalares son intervalos discretos diferentes en su naturaleza de los intervalos clásicos de números reales. En consecuencia, señalan que los enfoques tradicionales que trabajan con números intervalares no deben usarse directamente para comparar números ordinales intervalares. Por ello definen el concepto de grado de posibilidad para comparar números ordinales intervalares. Empleando este concepto, generan una matriz colectiva de grados de posibilidad a partir de múltiples rankings intervalares ordinales. Posteriormente derivan un ranking colectivo mediante un método mínimos cuadrados y proponen un algoritmo de resolución. La implementación directa del algoritmo propuesto no supone una ventaja computacional, al expresar la solución explícitamente en términos de la inversa de una matriz dada.

En este escenario, nuestro objetivo principal es proporcionar un marco teórico y métodos computacionales para abordar el problema de agregación de rankings ordinales posiblemente incompletos e imprecisos que eviten los inconvenientes anteriormente planteados. En la sección 5.2 se aborda el caso de información incompleta (rankings parciales). En la sección 5.3 se considera el problema de agregación de rankings imprecisos con datos ordinales intervalares. En ambos casos, los modelos proporcionan un ranking colectivo

de las alternativas a partir de la construcción de un vector de prioridad que refleja lo mejor posible (en un sentido preciso) la información aportada por los expertos sobre las alternativas. El vector de prioridad se obtiene en cada caso mediante un método de dos pasos. En la primera etapa se construye una matriz de agregación de preferencias, con técnicas adecuadas a cada caso, a partir de los datos de los expertos. En esta etapa, se considera la posibilidad de que los expertos tengan distintos pesos en la decisión. En la segunda etapa se proponen dos enfoques, uno basado en relaciones de preferencia fuzzy y los métodos desarrollados en el Capítulo 3 y otro basado en técnicas de cálculo del autovector asociado al autovalor dominante (o autovector de Perron). La aplicación de los métodos propuestos se ilustra con ejemplos numéricos.

Por último, se señalan algunas de las aportaciones del modelo propuesto. Éste permite trabajar con rankings parciales que pueden contener situaciones de empate y datos imprecisos. Adicionalmente se contempla la posibilidad de que los expertos tengan diferente peso en la decisión. El modelo sólo se alimenta de las preferencias directamente aportadas por los expertos y estos datos ordinales, relativos a las posiciones de preferencia de las alternativas, no son tratados como valores numéricos. Los problemas matemáticos resultantes se resuelven mediante algoritmos numéricos eficientes.

5.2. Métodos y algoritmos de agregación de rankings incompletos

Sea $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ($n \geq 2$) un conjunto finito de alternativas que tienen que ser ordenadas atendiendo a la información de preferencias dada individualmente por un conjunto m de expertos $E_1, E_2, \dots, E_m$, con pesos $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ($\alpha_k > 0$, $\sum_{k=1}^m \alpha_k = 1$) en la decisión final. Se considera que cada experto E_k formula sus preferencias sobre X mediante una lista ordenada o ranking $R^k = (r_i^k)$, donde r_i^k denota la posición ordinal de la alternativa x_i proporcionado por el experto k , con $k = 1, \dots, m$.

Una situación común en problemas del mundo real es que los rankings proporcionados por los expertos pueden no contener información sobre todas las alternativas a considerar. En términos generales, si R es un ranking o lista ordenada con respecto al conjunto X , dependiendo de la información que contiene R se pueden presentar varias situaciones (Dopazo and Martínez-Céspedes, 2015; Farah and Vanderpooten, 2007):

1. R es una **lista completa**, si R se refiere a todos los elementos de X .
2. R es una **ranking parcial o lista incompleta** si se refiere sólo a los elementos de un subconjunto propio de X , dándose la desigualdad estricta $|R| < |X|$. Es una situación común en aplicaciones donde hay una gran cantidad de alternativas, o no se posee información de todas las alternativas.
3. Un caso especial de listas parciales aparece cuando sólo se clasifican los k mejores elementos del conjunto X . Los elementos no incluidos en esta lista, se considera que ocupan posiciones peores que el que ocupa la posición k -ésima, siendo k el tamaño

de la lista. Este tipo de listas parciales se denominan **listas o rankings $top-k$** . Un ejemplo es la lista “The IMDb Top 250” que contiene las 250 mejores películas basándose en la calificación proporcionada por los usuarios.

Para referir todas estas situaciones de manera uniforme (lista completa, lista parcial y lista $top-k$), representaremos un ranking proporcionado por el experto k como $R^k = (r_i^k)$, donde $r_i^k \in \mathbb{Z}$ es un número ordinal indicador de la posición del elemento x_i en la lista, si es un dato conocido, y $r_i^k = \star$ denota que x_i no está presente en la lista (no hay información sobre esa alternativa).

Como se ha mencionado en la introducción del capítulo, gran parte de la literatura hace referencia a métodos que trabajan con rankings completos y no pueden aplicarse directamente en contextos con falta de datos. En este escenario, el objetivo es proporcionar métodos y algoritmos que sintetizen la información ordinal proporcionada por un grupo de expertos que puede ser incompleta (listas parciales) y diversa. Se plantea un modelo que proporciona un vector de prioridad colectivo de las alternativas a partir del cual se deriva un ranking colectivo o de consenso de las alternativas que sintetiza la información proporcionada por los expertos. El modelo se articula en dos etapas:

1. En primer lugar, se genera una matriz de preferencias del grupo a partir de la información contenida en los rankings $R^k = (r_i^k)$, $k = 1, \dots, m$. Esta estructura permite recoger datos de preferencias a partir de los datos ordinales y en los casos en los que no hay comparación directa entre las alternativas (rankings parciales).
2. A partir de la matriz de preferencias colectiva del paso anterior, se calcula un vector de prioridad de las alternativas siguiendo dos enfoques. El primero basado en relaciones de preferencia fuzzy, siguiendo el modelo desarrollado en el Capítulo 3. El segundo enfoque sigue métodos basados en el cálculo de autovectores principales (o de Perron), de gran actualidad por su uso en el algoritmo PageRank de posicionamiento de páginas web.

Figura 5.2: Métodos de agregación de rankings.

Con el objeto de manejar la información disponible en el ranking $R^k = (r_i^k)$ se construye la matriz de dominancia $X_k = (x_{ij}^k)$ asociada al experto k , como sigue:

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } r_i^k \neq \star, \quad r_j^k \neq \star \text{ y } r_i^k < r_j^k, \\ 1/2 & \text{si } r_i^k \neq \star, \quad r_j^k \neq \star \text{ y } r_i^k = r_j^k, \\ 0 & \text{si } r_i^k \neq \star, \quad r_j^k \neq \star \text{ y } r_i^k > r_j^k, \\ \star & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (5.1)$$

con $i, j = 1, \dots, n$ y $k = 1, \dots, m$. Donde $x_{ij}^k = \star$ significa que no hay información disponible sobre la posición relativa entre las alternativas x_i y x_j , atendiendo a la información aportada por el experto o criterio k . Se considera que $x_{ii}^k = 1/2$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$. Se observa, que para el caso especial en el que R^k es una *lista top d* ($d < n$), se tiene:

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } r_i^k \neq \star \text{ y } r_j^k = \star, \\ 0 & \text{si } r_i^k = \star \text{ y } r_j^k \neq \star, \\ \star & \text{si } r_i^k \neq \star \text{ y } r_j^k \neq \star. \end{cases} \quad (5.2)$$

A partir de las matrices $X_k = (x_{ij}^k)$, $k = 1, \dots, m$, se define la matriz $n \times n$ de preferencias colectiva que denotaremos por $P = (p_{ij})$,

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{\sum_{k: x_{ij}^k > 0} \alpha_k x_{ij}^k}{\sum_{k: x_{ij}^k \geq 0} \alpha_k} & \text{si } \exists k : x_{ij}^k \neq \star, \\ \star & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (5.3)$$

con $i, j = 1, \dots, n$. El dato p_{ij} proporciona el grado de preferencia de la alternativa x_i respecto de x_j , $i, j = 1, \dots, n$. De esta forma, la matriz P recoge la información de preferencias colectiva a lo largo de los rankings parciales R^k , $k = 1, \dots, m$, de partida. Una matriz similar ha sido considerada en (Munda y Nardo, 2003; Munda, 2005) para listas completas.

Nos centramos ahora en el problema de derivar un vector de prioridad de las alternativas a partir de la información colectiva de preferencias recogida en P . Es fácil verificar que $p_{ij} \in [0, 1]$ si $p_{ij} \neq \star$, e indica el grado de preferencia de la alternativa x_i con respecto a x_j de acuerdo con la información contenida en R^k , $\forall k = 1, \dots, m$. Por otra parte, $p_{ij} = \star$ significa que no hay información directa sobre la comparación de x_i sobre x_j a través de los criterios considerados (de las listas parciales de partida). Además, la relación binaria definida en P satisface la propiedad de reciprocidad para los valores conocidos, $p_{ij} + p_{ji} = 1$ si $p_{ij} \neq \star$. De esta forma se puede considerar que P describe una relación de preferencia fuzzy posiblemente incompleta sobre el conjunto X de alternativas. La matriz P se puede interpretar como un grafo G , donde el conjunto X de alternativas es el conjunto de vértices y p_{ij} representa el valor del arco del vértice x_i al vértice x_j si $p_{ij} \neq \star$. G que representa los pares de alternativas para las que al menos un experto ha expresado un valor de preferencia. Se asume que G es un grafo conexo, en el sentido que para cualquier par de alternativas (x_i, x_j) , con $x_i, x_j \in X$, $i \neq j$, existe al menos una secuencia de arcos $(i, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_k, j)$ en el grafo G . Lo que significa, que para cada par de alternativas distintas se dispone de al menos una estimación de preferencias pareada dada de forma directa por un experto o indirectamente a través de caminos de arcos en G . En caso contrario, el conjunto de alternativas se podría dividir en al menos dos subconjuntos disjuntos de alternativas, de modo que la información de preferencias se podría descomponer en “bloques” separados, lo que resultaría en al menos dos problemas independientes de preferencia, que no es el caso de estudio de este trabajo. En estas condiciones se pueden aplicar los métodos y algoritmos desarrollados en las secciones 3.2 y 3.3 para obtener un vector $v = (v_i)$ de prioridad de las alternativas a partir de P . Un ranking colectivo $R = (r_i)$, donde r_i indica la posición de la alternativa x_i , se deriva directamente de v atendiendo a los valores v_i , $i = 1, \dots, n$. Se pueden dar situaciones de empate en el ranking si dos o más alternativas tienen el mismo valor de prioridad.

El segundo enfoque que se plantea para obtener un vector de prioridad colectivo de las alternativas se basa en el método de Keener (Keener, 1993; Langville y Meyer, 2012), que es también utilizado en el algoritmo PageRank propuesto por Brin y Page (1998) en el contexto de buscadores web. Para ello, primero se construye la matriz $A = (a_{ij})$ que recoge las fortalezas relativas de las alternativas de la siguiente forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{\sum_{k: x_{ij}^k > 0} \alpha_k x_{ij}^k}{\sum_{l=1}^n \sum_{k: x_{lj}^k > 0} \alpha_k x_{lj}^k} & \text{si } \exists k: x_{ij}^k \neq \star, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad (5.4)$$

donde x_{ij}^k como en (5.1), $i, j = 1, \dots, n$. a_{ij} expresa la fortaleza relativa de la alternativa x_i respecto de x_j atendiendo a la información de los rankings de partida. Se hace notar que A es una matriz sub-estocástica: $a_{ij} \geq 0$ y $\sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1$, y esta suma es igual 1, salvo que $a_{ij} = 0$, $\forall j \neq i$. Este caso ($a_{ij} = 0$, $\forall j \neq i$) se corresponde con la situación en la que x_i ocupa posiciones de orden peores o está dominado por x_j $\forall j \neq i$ a lo largo de todos los criterios.

A partir de la información de dominancia de la matriz A , se busca un vector colectivo no negativo $s = (s_1, \dots, s_n)^t$, con $\sum_{i=1}^n s_i = 1$, donde s_i indique la dominancia o fortaleza de la alternativa x_i . Siguiendo las ideas del método de Keener y del algoritmo PageRank (Keener, 1993; Langville y Meyer, 2012; Brin y Page, 1998), la valoración o puntuación s_i de la alternativa x_i se puede definir como:

$$s_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} s_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.5)$$

Estas ecuaciones se pueden escribir matricialmente como:

$$As = s. \quad (5.6)$$

Por lo tanto el vector de prioridad s es el autovector positivo normalizado ($\sum_{i=1}^n s_i = 1$) asociado al autovalor dominante (o de Perron) de la matriz A (Keener, 1993). El vector s se puede calcular mediante el método de la potencia (Ueberhuber, 2012). Se trata de un algoritmo numérico iterativo, básicamente:

$$\begin{aligned} & s^0, \quad \text{vector arbitrario no nulo,} \\ & s^{l+1} = As^l, \quad l = 1, \dots, \\ & \|s^l\|_1 = 1, \end{aligned} \quad (5.7)$$

de aplicación para el cálculo de autovalores dominantes y autovectores asociados.

5.2.1. Ejemplos ilustrativos

Derivar un ranking de ciudades de acuerdo a su naturaleza “Smart City” (ciudad inteligente) puede clasificarse como un problema multicriterio, debido al carácter multidimensional del concepto “Smart City” (Munda y Nardo, 2003; Munda, 2005; Dopazo y

Martínez-Céspedes, 2015). El objetivo principal consiste en agregar y explotar información sobre ciudades presentada en forma de rankings o listas ordenadas para derivar un ranking sintético. La proliferación de este tipo de rankings es un claro síntoma de su importancia a nivel político y de su relevancia operacional en la gestión de toma de decisiones.

Las medidas “Smart City” se obtienen a través de indicadores cuidadosamente seleccionados y permiten a las ciudades reorganizarse a través de una comprensión de sus fortalezas y debilidades. En estudios comparativos, las ciudades se evalúan y clasifican según los diferentes criterios de evaluación económica, social, ambiental y geográfica, entre otros, para revelar las mejores ciudades para ciertas actividades (Munda y Nardo, 2003; Munda, 2005). El número de rankings “Smart City” existentes en todo el mundo aumenta año tras año.

En la última década se ha estudiado extensamente la selección de métricas apropiadas para medir una “Smart City” así como su estructura de metadatos. Sin embargo, en lo que, a los métodos adoptados para la agregación de la información se refiere, no existe un modelo establecido y consensuado. Además, gran parte de la literatura hace referencia a métodos que asumen listas completas, situación poco común, debido a que los datos para cada criterio se dan para un subconjunto de ciudades que no suele ser el mismo para todos los criterios. Por tanto, un desafío en este contexto reside en proporcionar métodos y algoritmos para derivar un ranking agregado de ciudades de acuerdo con información limitada, en conflicto y heterogénea proveniente de distintas fuentes.

Para ilustrar los métodos y algoritmos propuestos en esta sección, se consideran a continuación dos ejemplos ilustrativos en el marco de aplicación de las “smart cities”. En este contexto los métodos y algoritmos propuestos abordan ciertos problemas que aparecen en el contexto de las ciudades inteligentes como las listas parciales. El enfoque propuesto sólo tiene en cuenta los datos disponibles, lo que mejora la calidad de la información agregada en el sentido en que las soluciones reflejarán más fielmente la información de partida.

Ejemplo numérico 1. Se ilustra a continuación la aplicación de los métodos propuestos utilizando los datos proporcionados en el informe *Cities in motion index 2016* (CIMI 2016) (Berrone et al., 2016), proporcionado por el Centro de Globalización y Estrategia del Centro de Investigación IESE. El prestigioso informe *Business of Cities 2015* de JLL (Jones Lang Lasalle, Moonen et al., 2015) consideró la edición CIMI 2014 como el mejor índice de ciudades del mundo en las áreas de planificación, estrategia e innovación de ciudades. La edición CIMI 2016 (Berrone et al., 2016) involucra a 181 ciudades que representan a más de 80 países. Evalúa el nivel de desarrollo de las ciudades en relación a diez criterios o dimensiones clave, $C_1, \dots, C_{10}$, con un peso asociado a cada uno de ellos. CIMI 2016 proporciona el vector de pesos $w = (w_i)$ de los criterios que se muestra en la Tabla 5.1 y que ha sido normalizado de acuerdo a la norma l_∞ ($\|w\|_\infty = \max_{i=1, \dots, 10} \{w_i\} = 1$).

Tabla 5.1: Pesos de los criterios, CIMI 2016.

Id	Criterio	Peso
C^1	Economía	1,0000
C^2	Capital humano	0,4814
C^3	Cohesión social	0,5941
C^4	Medioambiente	0,6215
C^5	Gestión pública	0,5710
C^6	Gobernanza	0,4070
C^7	Planificación urbana	0,8410
C^8	Alcance internacional	0,6212
C^9	Tecnología	0,3763
C^{10}	Movilidad y Transporte	0,4707

Para asegurar que los valores de la matriz de agregación de dominancias (preferencias) se encuentran en el intervalo $[0, 1]$, se normaliza el vector de pesos w usando la norma vectorial l_1 , de forma que, $\|w\|_1 = \sum_{i=1}^{10} |w_i| = 1$, generándose el siguiente vector de pesos de los criterios:

$$\alpha = (0.1671, 0.0804, 0.0993, 0.1039, 0.0954, 0.068, 0.1405, 0.1038, 0.0629, 0.0787). \quad (5.8)$$

En la Figura 5.3 se ilustran los pesos de los criterios. Se hace notar, que esta condición de normalización no afecta al ranking final de las alternativas.

Figura 5.3: Pesos criterios CIMI 2016.

Para ilustrar la aplicación de los métodos propuestos se considera la muestra de ciudades estudiadas en el *Cities in Motion Index 2016* (Berrone et al., 2016) clasificadas

como ciudades de alto rendimiento por el estudio CIMI, es decir, ciudades cuyo valor de rendimiento CIMI es mayor o igual a 90. Resultando $X = \{x_1, x_2, \dots, x_7\}$, donde $x_1 =$ Nueva York, $x_2 =$ Londres, $x_3 =$ París, $x_4 =$ San Francisco, $x_5 =$ Boston, $x_6 =$ Amsterdam, y $x_7 =$ Chicago.

Se consideran los rankings ordinales $R^k = (r_i^k)$, $i = 1, \dots, 7$, $k = 1, \dots, 10$, de las ciudades en la Tabla 5.2 derivados del estudio CIMI2016 para los criterios considerados.

Tabla 5.2: Rankings parciales de acuerdo a los criterios considerados (CIMI 2016).

Ciudad	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
Nueva York	1	3	6	6	1	1	6	3	1	2
Londres	3	1	6	6	1	1	6	2	3	1
París	6	4	4	2	5	5	3	1	7	3
San Francisco	2	6	3	5	4	3	4	6	5	7
Boston	5	2	1	3	2	1	5	7	6	4
Amsterdam	7	7	2	1	6	4	1	4	2	6
Chicago	4	5	5	4	3	1	2	5	4	5

En primer lugar, para aplicar los métodos propuestos se calculan las matrices de dominancia $X_k = (x_{ij}^k)$ (5.1) de acuerdo con la información contenida en los rankings de partida $R^k = (r_i^k)$, $i = 1, \dots, 7$, $k = 1, \dots, 10$, Tabla 5.2. A continuación se construye la matriz $P = (p_{ij})$ de agregación, de acuerdo con (5.3):

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4835 & 0.5525 & 0.6563 & 0.5418 & 0.6563 & 0.6223 \\ 0.5165 & 0.5 & 0.5525 & 0.4892 & 0.6223 & 0.59344 & 0.6223 \\ 0.4475 & 0.4475 & 0.5 & 0.5073 & 0.4268 & 0.5254 & 0.4660 \\ 0.3437 & 0.5107 & 0.4928 & 0.5 & 0.4743 & 0.4109 & 0.2664 \\ 0.4581 & 0.3776 & 0.5731 & 0.5256 & 0.5 & 0.5889 & 0.4916 \\ 0.3436 & 0.4065 & 0.4745 & 0.5890 & 0.4111 & 0.5 & 0.510 \\ 0.3776 & 0.3776 & 0.5339 & 0.7336 & 0.5083 & 0.4896 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Nótese que P describe una relación de preferencia fuzzy, donde $p_{ij} \in [0, 1]$ indica el grado de dominancia de la alternativa x_i sobre x_j y además la matriz P satisface la propiedad de reciprocidad $p_{ij} + p_{ji} = 1$, $i, j = 1, \dots, 7$. Por tanto, siguiendo el primer enfoque propuesto se puede derivar un vector de prioridad agregado de las ciudades mediante los métodos definidos en el Capítulo 3. Si consideramos la norma Euclídea l_2 , el problema se reduce a resolver el problema mínimos cuadrados (3.20) sujeto a las condiciones (3.17). Empleando software numérico Python se obtiene el vector de prioridad

$$v = (0.1896, 0.1792, 0.1306, 0.1038, 0.1422, 0.1199, 0.1347)$$

a partir de la relación de preferencia fuzzy P , que produce el siguiente ranking colectivo:

New York $\succ$ London $\succ$ Boston $\succ$ Chicago $\succ$ Paris $\succ$ Amsterdam $\succ$ San Francisco.

Se considera ahora el enfoque presentado basado en el método propuesto por Keener (1993). Para ello, a partir de la matriz P se construye la siguiente matriz A (5.4) de columnas normalizadas siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 0.1674 & 0.1558 & 0.1502 & 0.1640 & 0.1555 & 0.1743 & 0.1789 \\ 0.1729 & 0.1611 & 0.1502 & 0.1223 & 0.1786 & 0.1576 & 0.1789 \\ 0.1498 & 0.1442 & 0.1359 & 0.1268 & 0.1225 & 0.1396 & 0.1340 \\ 0.1151 & 0.1646 & 0.1339 & 0.1250 & 0.1361 & 0.1092 & 0.0766 \\ 0.1534 & 0.1217 & 0.1558 & 0.1314 & 0.1435 & 0.1564 & 0.1413 \\ 0.1151 & 0.1310 & 0.1290 & 0.1472 & 0.1180 & 0.1328 & 0.1467 \\ 0.1264 & 0.1217 & 0.1451 & 0.1834 & 0.1459 & 0.1301 & 0.1437 \end{pmatrix}.$$

Se puede comprobar que A es una matriz estocástica. Se calcula ahora el vector de prioridad $s = (s_1, \dots, s_7)^t$ con $s_i \geq 0$, que es el autovector positivo normalizado asociado al autovalor dominante ($\lambda = 1$) de la matriz A . Empleando software numérico Python se obtiene el vector de prioridad

$$s = (0.1636, 0.1613, 0.1367, 0.1237, 0.1432, 0.1307, 0.1410)^t,$$

que produce el siguiente ranking:

New York $\succ$ London $\succ$ Boston $\succ$ Chicago $\succ$ Paris $\succ$ Amsterdam $\succ$ San Francisco.

Los problemas de mínimos cuadrados y aplicación del método de la potencia resultantes se han resuelto implementando los algoritmos en Python (lenguaje de programación de código abierto) y se ha hecho uso del conjunto de librerías Scipy y Numpy (www.scipy.org), también se ha contrastado con su implementación en Matlab®. Los resultados obtenidos de la aplicación de los enfoques propuestos para la obtención de un ranking colectivo para las top-7 ciudades CIMI se muestran en la tabla 5.3.

Se observa que todos los métodos confirman que Nueva York es la mejor alternativa, seguida de Londres como la segunda opción. Además, estas ciudades tenían las mejores posiciones para la mayoría de los indicadores considerados.

Se produce un “rank reversal” que involucra a las ciudades de París, Boston y Chicago con respecto al índice CIMI. Se observa fácilmente que los valores de prioridad derivados de los métodos propuestos son muy cercanos y además los valores de preferencia en la matriz S para estas ciudades se encuentran muy próximos al valor 0.5 lo que indica que se encuentran casi empatados. Se observa que Boston se clasifica en la tercera posición y París en la quinta posición según los valores de prioridad calculados $v_5 = 0.1422$ y

Tabla 5.3: Rankings.

Ranking	CIMI 2016	Method 1	Method 2
1	New York	New York	New York
2	London	London	London
3	Paris	Boston	Boston
4	San Francisco	Chicago	Chicago
5	Boston	Paris	Paris
6	Amsterdam	Amsterdam	Amsterdam
7	Chicago	San Francisco	San Francisco

$v_3 = 0.1306$, atendiendo al primer método, y $s_5 = 0.1432$ y $s_3 = 0.1367$, atendiendo al segundo método. Ambos casos revelan desviaciones de menos de un 8 %. Procediendo de la misma manera, las desviaciones de los valores de prioridad de Chicago y París (cuarta y quinta posición, respectivamente en el ranking propuesto) son como máximo de un 3 %.

Boston es mejor que San Francisco de acuerdo con los métodos propuestos, sin embargo, San Francisco y Boston ocupan los puestos cuarto y quinto en el ranking CIMI2016. Los valores de prioridad de estas ciudades $v_4 = 0.0593$ y $v_5 = 0.0704$ atendiendo al primer método, y $s_4 = 0.1026$ y $s_5 = 0.1125$ atendiendo al segundo método, muestran desviaciones de menos de un 2 %. Además, se hace notar a partir de los datos en la Tabla 5.2 y la matriz S , que Boston domina San Francisco de acuerdo con cinco criterios y que San Francisco nunca es considerado como la mejor opción según los criterios como lo son las otras ciudades.

Ejemplo numérico 2. En este ejemplo ilustrativo (Dopazo y Martínez-Céspedes, 2015) se consideran cinco ciudades $X = \{\text{Amsterdam, Barcelona, Berlín, Copenague, Oslo}\}$, que deben ser ordenadas en base a un indicador “smart city” compuesto respecto a tres dimensiones (Abdoullaev, 2011), la ciudad digital, la ciudad sostenible y la ciudad del conocimiento. Todas ellas con el mismo peso, esto es, $\alpha_k = 1/3, k = 1, 2, 3$. Se consideran los rankings $R^k = (r_i^k), i = 1, \dots, 6, k = 1, 2, 3$, (Tabla 5.4) de estas ciudades respecto de dichos criterios. La información de partida que describe las dimensiones consideradas de una ciudad inteligente se ha derivado de datos públicos obtenidos a partir de los siguientes indicadores:

1. Dimensión digital. Se basa en el “Technology Score Indicator” propuesto por Martin et al. (2013), y que se corresponde con uno de los indicadores del Índice de Ciudades Globales 2013 desarrollado por la consultora Martin Prosperity Institute, que proporciona un ranking sobre las ciudades mejor preparadas para competir en el mundo globalizado de nuestros días.
2. Dimensión de sostenibilidad. Se basa en el índice “Green City Index” definido y proporcionado por Economist Intelligence Unit y Siemens (2009) y compara las principales ciudades de Europa en términos de su desempeño y políticas ambientales con el objeto de comprender las fortalezas y debilidades de cada ciudad y fomentar el intercambio de mejores prácticas.

3. Dimensión de conocimiento. Se corresponde con el indicador “Talent Score” propuesto por Martin et al. (2013).

Tabla 5.4: Muestra de rankings de ciudades inteligentes para tres dimensiones.

Ciudades	Digital	Sostenibilidad	Conocimiento
Amsterdam	2	3	2
Barcelona	3	★	3
Berlín	★	4	★
Copenhague	1	1	2
Oslo	1	2	1

En la Figura 5.4 se representa una visualización en forma de diagrama de barras de los rankings de partida para cada ciudad.

Figura 5.4: Ranking ciudades para los criterios seleccionados.

De acuerdo con la información de partida $R^k = (r_i^k)$, con $k = 1, 2, 3$, se calculan las matrices de dominancia $X_k = (x_{ij}^k)$ asociadas a cada experto k :

$$X^1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 1. & \star & 0. & 0. \\ 0. & 0.5 & \star & 0. & 0. \\ \star & \star & 0.5 & \star & \star \\ 1. & 1. & \star & 0.5 & 0.5. \\ 1. & 1. & \star & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad X^2 = \begin{pmatrix} 0.5 & \star & 1. & 0. & 0. \\ \star & 0.5 & \star & \star & \star \\ 0. & \star & 0.5 & 0. & 0. \\ 1. & \star & 1. & 0.5 & 1. \\ 1. & \star & 1. & 0. & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$X^3 = \begin{pmatrix} 0.5 & 1. & \star & 0.5 & 0. \\ 0. & 0.5 & \star & 0. & 0. \\ \star & \star & 0.5 & \star & \star \\ 0.5 & 1. & \star & 0.5 & 0. \\ 1. & 1. & \star & 1. & 0.5 \end{pmatrix},$$

donde el valor 1 indica que la ciudad i domina a la ciudad j , 0.5 significa que ambas ciudades son igualmente preferidas, 0 indica que la ciudad j domina a la ciudad i , y $\star$ significa que no se posee información disponible para ese par de ciudades a lo largo del indicador considerado.

Siguiendo el enfoque basado en relaciones de preferencia fuzzy presentado anteriormente, primero se construye una matriz de agregación de preferencias P (5.3) a partir de las matrices de dominancia anteriores X_1 , X_2 y X_3 :

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 1. & 1. & 0.1667 & 0. \\ 0. & 0.5 & \star & 0. & 0. \\ 0. & \star & 0.5 & 0. & 0. \\ 0.8333 & 1. & 1. & 0.5 & 0.5 \\ 1. & 1. & 1. & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

P representa una relación de preferencia fuzzy incompleta, donde $p_{ij} \in [0, 1]$ indica la preferencia relativa de la ciudad x_i sobre x_j , en caso contrario $p_{ij} = \star$ indica que no existe información directa de comparación de ese par de ciudades a lo largo de la dimensión considerada. La relación definida en P satisface la propiedad de reciprocidad para los valores conocidos: $p_{ij} + p_{ji} = 1$ si $p_{ij} \neq \star \wedge p_{ji} \neq \star$, $i, j = 1, \dots, 5$.

Siguiendo el primer enfoque propuesto se aplican los métodos presentados en el Capítulo 3 para obtener un vector de prioridad colectivo o de consenso. Si consideramos la norma Euclídea l_2 , el problema se reduce a resolver un problema de mínimos cuadrados (3.20). Empleando software numérico MATLAB se obtiene el vector de prioridad

$$v = (0.6667, 0., 0., 1.1333, 1.2000)$$

a partir de la relación de preferencia fuzzy P , que produce el siguiente ranking:

$$\text{Oslo} \succ \text{Copenague} \succ \text{Amsterdam} \succ \text{Barcelona} = \text{Berlín}.$$

Consideremos ahora el enfoque presentado basado en el método de cálculo de un autovector asociado al autovalor dominante (Keener, 1993). Para ello primero se construye la siguiente matriz A (5.4) de columnas normalizadas:

$$A = \begin{pmatrix} 0.2143 & 0.2667 & 0.2222 & 0.1429 & 0 \\ 0 & 0.2000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3333 & 0 & 0 \\ 0.3571 & 0.2667 & 0.2222 & 0.4286 & 0.5000 \\ 0.4286 & 0.2667 & 0.2222 & 0.4286 & 0.5000 \end{pmatrix}.$$

Se puede comprobar que A es una matriz estocástica. Entonces el vector de prioridad $s = (s_1, \dots, s_5)^t$ con $s_i \geq 0$, es el autovector positivo normalizado asociado al autovalor dominante ($\lambda = 1$) de la matriz A . Empleando software numérico MATLAB se obtiene el vector de prioridad $s = (0.0828, 0., 0., 0.4556, 0.4615)^t$, que produce el siguiente ranking:

$$\text{Oslo} \succ \text{Copenhague} \succ \text{Amsterdam} \succ \text{Barcelona} = \text{Berlín}.$$

Por tanto se puede concluir que ambos métodos proporcionan el mismo ranking, del que se desprende que Oslo es la mejor alternativa de entre las ciudades consideradas. Se observa que las dos primeras alternativas, Oslo y Copenhague, ocupan la primera posición de acuerdo con las dimensiones de conocimiento y sostenibilidad, respectivamente, y se encuentran empatadas en la primera posición respecto de la dimensión de tecnología. Este aparente empate se rompe en el resultado final al tener en cuenta, no sólo los valores ordinales de entrada, sino también las relaciones de dominancia entre pares de alternativas a lo largo de los indicadores considerados. Por otro lado, Barcelona y Berlín se confirman como las peores alternativas entre la muestra de las ciudades estudiadas.

5.3. Métodos de agregación de rankings con información ordinal imprecisa

Se considera un conjunto de alternativas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, ($n \geq 2$), y un grupo de expertos $E_1, \dots, E_m$, $m \geq 2$, que expresan sus preferencias sobre las alternativas mediante rankings ordinales. En muchos problemas reales, atendiendo a la complejidad del problema, falta de datos, información imprecisa, etc. las valoraciones proporcionadas por los expertos pueden ser imprecisas. Esta sección aborda el problema de construcción de un ranking colectivo o de consenso de X a partir de la información de preferencias ordinal posiblemente imprecisa y diversa dada por los expertos. Para recoger la naturaleza imprecisa de los juicios proporcionados por los expertos trabajaremos con números ordinales intervalares. A continuación, se introducen algunas definiciones y notación básica. En primer lugar se define el concepto de número ordinal intervalar (Fan and Liu, 2010; Fan et al., 2010).

Definición 5.1 *Un número ordinal intervalar $\bar{r}$, $\bar{r} = [r^L, r^U]$, con $r^L, r^U \in \mathbb{Z}^+$, $r^L \leq r^U$, viene dado por el conjunto discreto de números ordinales $r \in \mathbb{Z}^+$ tales que $r^L \leq r \leq r^U$. r^L y r^U son los extremos inferior y superior del número intervalar ordinal respectivamente. En particular, si $r^L = r^U$, entonces el número ordinal intervalar se reduce a un número ordinal.*

De esta forma, si $R = (\bar{r}_i) = ([r_i^L, r_i^U])$ es un ranking ordinal intervalar, $\bar{r}_i$ indica que la alternativa x_i puede ocupar las posiciones ordinales entre r_i^L y r_i^U (ambas inclusive), esto es, puede estar en las posiciones $r_i^L, r_i^L + 1, \dots, r_i^U - 1, r_i^U$ para $i = 1, \dots, n$. Nótese, que esta representación matemática permite abordar el caso de información incompleta (listas parciales) asignando el número ordinal intervalar $[1, n]$, ó $[k + 1, n]$ para una *top-k* lista, a los datos desconocidos siendo n es el número total de alternativas.

Dados dos números ordinales intervalares $\bar{a} = [a^L, a^U]$ y $\bar{b} = [b^L, b^U]$, a continuación se define el grado de posibilidad propuesto por Fan and Liu (2010) como un modo de expresar una relación de orden entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$. Sea $Y = \{(i, j) \in [a^L, a^U] \times [b^L, b^U] : i, j \in \mathbb{Z}^+\}$ el conjunto de todos los pares ordinales en $[a^L, a^U] \times [b^L, b^U]$ y sea $t = |Y|$ la cardinalidad de Y , es decir, el número de todos los elementos del conjunto Y . Ahora se consideran los subconjuntos $Y_{\bar{a} \succ \bar{b}} = \{(i, j) \in Y : i > j\}$ y $Y_{\bar{a} = \bar{b}} = \{(i, i) \in Y\}$, con cardinalidades $d = |Y_{\bar{a} \succ \bar{b}}|$ y $e = |Y_{\bar{a} = \bar{b}}|$. Entonces, el grado de posibilidad de que $\bar{a} = [a^L, a^U]$ sea mayor que $\bar{b} = [b^L, b^U]$, denotado por $P(\bar{a} \succeq \bar{b})$, se define como:

$$P(\bar{a} \succeq \bar{b}) = (d + \frac{1}{2}e)/t. \quad (5.9)$$

En consecuencia, el grado de posibilidad de que $\bar{b}$ sea mayor que $\bar{a}$ viene dado por $P(\bar{b} \succeq \bar{a}) = 1 - P(\bar{a} \succeq \bar{b})$. Fan y Liu, (2010) proponen una fórmula explícita para calcular $P(\bar{a} \succeq \bar{b})$ en términos de los extremos inferiores y superiores de $\bar{a}$ y $\bar{b}$.

En el caso que los dos números ordinales intervalares $\bar{a}$ y $\bar{b}$ se reduzcan a números ordinales clásicos, es decir, $a^L = a^U = a$ y $b^L = b^U = b$, $P(\bar{a} \succeq \bar{b})$ viene dado por

$$P(\bar{a} \succeq \bar{b}) = \begin{cases} 1 & \text{si } a > b \\ 1/2 & \text{si } a = b \\ 0 & \text{si } a < b. \end{cases}$$

Sea $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, ($n \geq 2$), el conjunto de alternativas que tienen que ser ordenadas a partir de las preferencias proporcionadas por los expertos $E_1, \dots, E_m$, ($m \geq 2$), con pesos $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ respectivamente ($\alpha_k > 0$, $\sum_{k=1}^m \alpha_k = 1$) en la decisión. Suponemos que cada experto k proporciona sus preferencias sobre las alternativas mediante un ranking ordinal intervalar $R^k = (\bar{r}_{ki}) = ([r_{ki}^L, r_{ki}^U])$, donde $\bar{r}_{ki}$ indica que la alternativa x_i tiene la misma posibilidad de encontrarse clasificada en cualquiera de las posiciones $r_{ki}^L, r_{ki}^L + 1, \dots, r_{ki}^U - 1, r_{ki}^U$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$. El objetivo es calcular un ranking colectivo o de consenso $R = (r_i)$ a partir de la información posiblemente diversa e imprecisa contenida en R^k , $k = 1, \dots, m$. Para ello se presenta un modelo para obtener un vector de prioridad colectivo v de las alternativas a partir del cual se derivará automáticamente R siguiendo pautas análogas a las desarrolladas en la sección 5.2. El modelo se articula en dos etapas, siendo la primera de construcción de una matriz colectiva $P = (p_{ij})$ de preferencias. Esta matriz se genera empleando el grado de posibilidad (5.9) de la siguiente forma:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^m \alpha_k P(\bar{r}_{kj} \succeq \bar{r}_{ki}) \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (5.10)$$

donde $P(\bar{r}_{kj} \succ \bar{r}_{ki})$ se define cómo en (5.9). Una matriz similar ha sido empleada por (Fan y Liu, 2010; Dopazo y Martínez-Céspedes, 2017). El valor p_{ij} representa el grado de preferencia de la alternativa x_i respecto de la alternativa x_j a partir de los rankings ordinales intervalares R^k , $k = 1, \dots, m$. Nótese que $p_{ij} \in [0, 1]$ y $p_{ij} + p_{ji} = 1$. Por lo tanto, se puede considerar que P describe una relación de preferencia fuzzy sobre X .

Por lo tanto, aplicando directamente los métodos y algoritmos desarrollados en las secciones 3.2 y 3.3 se puede obtener un vector de prioridad de las alternativas a partir del cual se deriva directamente un ranking colectivo de las alternativas.

Nos centramos ahora en el segundo enfoque basado en el autovector de Perron (o autovector asociado al autovalor dominante) (Keener, 1993; Langville y Meyer, 2012; Brin y Page, 1998). Para ello, se considera la matriz de preferencias $P = (p_{ij})$ definida en (5.10), donde p_{ij} refleja la preferencia de la alternativa x_i sobre la alternativa x_j . A partir de P se construye la matriz $A = (a_{ij})$ de agregación de dominancias que recoge las fortalezas relativas de las alternativas como sigue:

$$a_{ij} = \frac{p_{ij}}{\sum_{k=1}^n p_{kj}}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (5.11)$$

La matriz $A = (a_{ij})$ describe un grafo dirigido ponderado, donde el conjunto de nodos se corresponde con el conjunto X de alternativas y a_{ij} es el peso asociado al arco dirigido (x_i, x_j) y representa comparaciones pareadas relativas de las fortalezas de las alternativas. Se puede interpretar como la probabilidad o fortaleza relativa de la alternativa x_i dominando a la alternativa x_j , y a la matriz A (de columnas normalizadas) como la matriz de transición del grafo dirigido. En consecuencia, la columna j representa la probabilidad del vector de dominancia sobre la alternativa x_j .

A partir de la información de dominancias recogida en la matriz A , se busca un vector no negativo de consenso $r = (r_1, \dots, r_n)^t$, con $\sum_{i=1}^n r_i = 1$, donde r_i indique la dominancia o fortaleza de la alternativa x_i a partir de las comparaciones pareadas recogidas en la matriz A . Siguiendo las ideas de los métodos de rating de Keener y del algoritmo PageRank (Keener, 1993; Langville y Meyer, 2012; Brin y Page, 1998) la dominancia r_i de la alternativa x_i se estima a partir de sus interacciones con las otras alternativas $(r_j, j = 1, \dots, n)$. Así, la dominancia relativa de la alternativa x_i respecto a la alternativa x_j se define como

$$w_{ij} = s_{ij}r_j.$$

Ahora, se considera que el valor de prioridad o dominancia general r_i de x_i es la suma de las fortalezas relativas de la alternativa x_i con respecto a todas las demás alternativas:

$$r_i = \sum_{j=1}^n w_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij}r_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.12)$$

Escrito matricialmente:

$$r = Ar. \quad (5.13)$$

Esto es equivalente a decir que r es el autovector no negativo asociado al autovalor dominante 1 (autovalor de Perron) de la matriz A (Keener, 1993), sujeto a la condición de normalización $\|r\|_1 = 1$. El vector r se puede calcular mediante método de la potencia (Ueberhuber, 2012), algoritmo para el cálculo de autovalores dominantes y autovectores asociados como se indica en (5.7).

5.3.1. Ejemplos ilustrativos.

A continuación se ilustra la aplicación de los enfoques propuestos a través de tres ejemplos estudiados por Fan y Liu (2010), González-Pachón y Romero (2001) y Fan et al. (2010).

Ejemplo numérico 1. Se considera el problema de ranking de grupo propuesto en Fan y Liu (2010), donde una empresa de software líder en China planea establecer una alianza estratégica con cuatro empresas multinacionales: HP (x_1), Philips (x_2), EMC (x_3) y SAP (x_4). Para seleccionar la mejor alternativa, en este caso una de las empresas multinacionales, cinco expertos E_1, E_2, E_3, E_4 , y E_5 de diferentes departamentos participan en el análisis de la decisión y expresan sus preferencias sobre las alternativas mediante los rankings ordinales intervalares incluidos en la Tabla 5.5. El gerente de la empresa determina que todos los expertos tienen el mismo peso en la decisión ($\alpha_k = 0.2, \forall k$). A

Tabla 5.5: Preferencias de los expertos.

Experto	x_1	x_2	x_3	x_4
E_1	[2,3]	[1,1]	[2,4]	[3,4]
E_2	[3,4]	[1,2]	[1,2]	[3,4]
E_3	[4,4]	[2,3]	[2,3]	[1,2]
E_4	[1,1]	[2,3]	[4,4]	[2,3]
E_5	[2,3]	[1,3]	[1,2]	[4,4]

partir de los datos ordinales intervalares de los rankings en la Tabla 5.5, se calcula la matriz de agregación de preferencias P como en (5.10), empleando el grado de posibilidad (5.9):

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2666 & 0.3584 & 0.675 \\ 0.7334 & 0.5 & 0.6666 & 0.725 \\ 0.6416 & 0.3333 & 0.5 & 0.5584 \\ 0.325 & 0.275 & 0.4416 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Se observa que P representa una relación de preferencia fuzzy, donde $p_{ij} \in [0, 1]$ indica el grado de preferencia de la alternativa x_i sobre la laternativa x_j . Además, la matriz P satisface la propiedad de reciprocidad $p_{ij} + p_{ji} = 1, i, j = 1, \dots, 4$.

En primer lugar se sigue el enfoque basado en relaciones de preferencia fuzzy y se aplican métodos descritos en el Capítulo 3 para buscar un vector de prioridad colectivo v de las alternativas que ajuste los datos de la matriz P . Para ilustrar la aplicación se consideran los métodos derivados del modelo multiplicativo para las métricas l_p más usuales $p = 2$, $p = 1$ y $p = \infty$ en la agregación de los residuos de los expertos. Haciendo uso de software numérico científico (MATLAB®) se resuelven los problemas resultantes: el problema de mínimos cuadrados (3.25) y los problemas de programación lineal (3.21) y (3.22). Los vectores de prioridad resultantes se presentan en la Tabla 5.6.

Se observa que Philips (x_2) es la alternativa preferida en todos los métodos. Los vectores de prioridad resultantes producen el orden de preferencias $x_2 \succ x_3 \succ x_1 \succ x_4$ de las alternativas en casi todos los casos, salvo para $p = 1$ que intercambia las posiciones de las últimas alternativas $x_4 \succ x_1$, cuyos valores de prioridad difieren en muy poco. Este enfoque proporciona además medidas de valoración de la solución, a través del vector de desviación $\delta(v)$ de componentes $\delta_{ij}(v) = |(1 - p_{ij})v_i - p_{ij}v_j|, 1 \leq i < j \leq n$. En la Tabla 5.6 se muestran las normas de este vector de desviación en cada caso. Se confirma que

Tabla 5.6: Vectores de prioridad y desviaciones.

Método	Vetor de prioridad v	$\ \delta(v)\ _1$	$\ \delta(v)\ _2$	$\ \delta(v)\ _\infty$
$p = 1$	(0.1621, 0.4458, 0.2229, 0.1691)	0.0896	0.0661	0.0614
$p = 2$	(0.1682, 0.4536, 0.2327, 0.1454)	0.1152	0.0579	0.0435
Método de Fan-Liu	(0.1679, 0.4853, 0.2016, 0.1452)	0.1487	0.0692	0.0434
$p = \infty$	(0.1784, 0.4560, 0.2345, 0.131)	0.1353	0.0617	0.0304
Autovector de Perron	(0.2139, 0.3375, 0.2529, 0.1957)	0.2837	0.1269	0.0669

la solución derivada empleando la métrica l_p produce el menor error (norma del vector desviación) medido en la norma p . Se observa que $\|\delta(v)\|_1$ aumenta en las soluciones obtenidas al considerar valores mayores del parámetro p , mientras que lo contrario se aplica para la medida $\|\delta(v)\|_\infty$. Por ejemplo, la desviación máxima en el caso de la solución obtenida para $p = 1$, que afecta al valor p_{14} , se hace menor a medida que p aumenta.

El método propuesto por Fan y Liu (2010) es un caso particular del enfoque de ajuste de datos l_p (3.23), donde $p = 2$. Se observa que el vector de prioridad dado en (Fan and Liu, 2010) tiene ligeras diferencias con respecto a nuestro resultado para $p = 2$ y no produce el valor mínimo de $\|\delta(v)\|_2$, como era de esperar. Esto puede deberse a errores menores en algunos elementos de la matriz colectiva utilizada por Fan y Liu (2010).

Para aplicar el segundo enfoque propuesto, primero se construye la matriz A de columnas normalizadas de acuerdo con (5.11):

$$A = \begin{pmatrix} 0.2273 & 0.1939 & 0.1822 & 0.2746 \\ 0.3334 & 0.3637 & 0.3390 & 0.2949 \\ 0.2916 & 0.2424 & 0.2542 & 0.2271 \\ 0.1477 & 0.2000 & 0.2245 & 0.2034 \end{pmatrix}.$$

Se observa que la matriz A es estocástica ($a_{ij} \geq 0$ y $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$). A continuación se calcula el vector de prioridad $s = (s_1, \dots, s_4)^t$ como el vector propio positivo normalizado de la matriz A asociado con el autovalor dominante (que es 1). Usando software numérico, se obtiene $s = (0.2139, 0.3375, 0.2529, 0.1957)^t$. Este vector proporciona el ranking $x_2 \succ x_3 \succ x_1 \succ x_4$ de las alternativas que es:

$$\text{Philips} \succ \text{EMC} \succ \text{HP} \succ \text{SAP}$$

En conclusión, se propone Philips como el socio más deseable para una alianza estratégica y la clasificación final de las alternativas a partir de la información proporcionada por los expertos.

Ejemplo numérico 2. Se considera el problema de ranking de grupo propuesto en González-Pachón y Romero (2001) y estudiado también en Fan y Liu (2010), donde un grupo de expertos E_1, E_2, E_3 y E_4 expresan sus preferencias sobre el conjunto $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ de alternativas mediante los rankings ordinales intervalares en Tabla 5.7. Se asume que todos los expertos tienen el mismo peso en la decisión, esto es $\alpha_k = 0.25, k = 1, \dots, 4$.

Tabla 5.7: Preferencias de los expertos.

Experto	x_1	x_2	x_3	x_4
E_1	[1,2]	[1,4]	[3,4]	[2,3]
E_2	[4,4]	[2,3]	[1,2]	[1,3]
E_3	[2,4]	[1,3]	[2,4]	[1,3]
E_4	[2,4]	[2,4]	[2,4]	[2,4]

A partir de los datos de la Tabla 5.7 se construye la matriz de preferencias agregadas P , de acuerdo con (5.9):

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.368 & 0.5 & 0.3993 \\ 0.632 & 0.5 & 0.5382 & 0.4582 \\ 0.5 & 0.4618 & 0.5 & 0.3785 \\ 0.6007 & 0.5418 & 0.6215 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Procediendo como en el ejemplo anterior, se aplica el modelo de ajuste de datos (l_p) descrito en el Capítulo 3 para las métricas más usuales $p = 1$ (3.21), $p = 2$ (3.25) y $p = \infty$ (3.22). Se resuelven los problemas resultantes de programación lineal y cuadrática resultantes y los vectores de prioridad obtenidos se muestran en la Tabla 5.8.

Para aplicar el segundo enfoque propuesto, se calcula la matriz A de columnas normalizadas A aplicando (5.11):

$$A = \begin{pmatrix} 0.2239 & 0.1966 & 0.2315 & 0.2300 \\ 0.2831 & 0.2672 & 0.2492 & 0.2639 \\ 0.2239 & 0.2467 & 0.2315 & 0.2180 \\ 0.2690 & 0.2895 & 0.2878 & 0.2880 \end{pmatrix}.$$

A continuación se calcula el autovector positivo normalizado de la matriz A asociado al autovalor dominante $\lambda = 1$, el resultado se muestra en la Tabla 5.8. En dicha tabla se incluyen también los resultados reportados por González-Pachón y Romero (2001), Fan et al. (2010) y Fan y Liu (2010).

De los resultados en Tabla 5.8, se concluye que la mejor alternativa identificada por todos los métodos aplicados se encuentra en el conjunto $\{x_2, x_4\}$. x_4 es la mejor opción resultante en todos los métodos, excepto en el método propuesto en (González-Pachón y Romero, 2001). Se hace notar que las posiciones intervalares de las alternativas x_2 y x_4 son casi las mismas: [2, 3], [1, 3], y [2, 4], atendiendo a las preferencias dadas por los expertos. Sólo difieren en una posición intervalar: [1, 4] para la alternativa x_2 y [1, 3] para la alternativa x_4 . Se señala que en (González-Pachón y Romero, 2001) se resuelve un problema de programación lineal entera para obtener un ranking de consenso, con varias soluciones optimales. Además, se emplea una función de utilidad donde las posiciones ordinales se procesan como valores numéricos, que no es el caso en nuestro enfoque. Por otro lado, Fan et al. (2010) emplean vectores de probabilidad para trabajar con ordinales imprecisos y derivan un ranking de consenso resolviendo un problema de programación

Tabla 5.8: Vectores de prioridad, rankings y normas vectoriales de $\delta(v)$.

Método	Vector de prioridad. Ranking	$\ \delta(v)\ _1$	$\ \delta(v)\ _2$	$\ \delta(v)\ _\infty$
Método de González et al.	$x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_1$			
Método de Fan et al.	$x_4 \succ x_2 = x_3 \succ x_1$			
$p = 1$	(0.1987, 0.2760, 0.1987, 0.3264)	0.055462	0.055462	0.024048
	$x_4 \succ x_2 \succ x_3 = x_1$			
$p = 2$	(0.1927, 0.2765, 0.2090, 0.3217)	0.030534	0.066596	0.020031
	$x_4 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_1$			
$p = \infty$	(0.1861, 0.2780, 0.2024, 0.3335)	0.033779	0.066914	0.021376
	$x_4 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_1$			
Autovector de Perron	(0.2201, 0.2656, 0.2300, 0.28417)	0.1154	0.059448	0.041391
	$x_4 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_1$			
Método de Fan-Liu	(0.1866, 0.2817, 0.2151, 0.3165)	0.03319	0.08222	0.014279
	$x_4 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_1$			

lineal entera binaria. Ésta es una tarea computacionalmente intensiva si hay una gran cantidad de alternativas. Además, el método podría proporcionar más de una solución optimal y no permite empates en los dtos de partida. El ranking final propuesto por Fan y Liu (2010) es la combinación de dos soluciones optimales.

El método de Fan y Liu (2010) es un caso particular del primer enfoque planteado en este trabajo para el caso $p = 2$, por lo tanto, debería producir la misma solución que nuestro método con $p = 2$. Si comparamos los vectores obtenidos en la Tabla 5.8 se aprecian ligeras diferencias que se comentan a continuación. Si calculamos la norma $\|\delta(v)\|_2$ del vector residual respecto de los datos en P , es decir, la función objetivo del problema mínimos cuadrados, se obtiene el valor 0.033779 para la solución dada por Fan y Liu (2010) y un valor menor 0.030534 para nuestro resultado con $p = 2$.

El enfoque que se propone proporciona medidas de las desviaciones a través del vector residual $\delta(v)$. En la Tabla 5.8 se muestran las medidas de las desviaciones que producen los vectores de prioridad respecto de los datos en P . Se observa que la mayor desviación $\|\delta(v)\|_\infty = 0.024048$ se produce para la solución con $p = 1$, que se alcanza en el valor de preferencia p_{12} , y se reduce a 0.014279, para $p = \infty$. La suma de las desviaciones $\|\delta(v)\|_1$ aumenta desde 0.55462, para $p = 1$, hasta 0.078651, para $p = \infty$.

Ejemplo numérico 3. Se considera el problema de ranking de grupo propuesto por Fan et al. (2010), donde cinco expertos E_1, E_2, E_3, E_4 y E_5 proporcionan sus preferencias sobre un conjunto de seis alternativas mediante los rankings ordinales intervalares dados en la Tabla 5.9. Se asume que todos los expertos tienen el mismo peso en la decisión.

Tabla 5.9: Preferencias de los expertos.

Experto	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
E_1	[2,4]	[3,4]	[6,6]	[3,4]	[1,2]	[1,2]
E_2	[4,5]	[2,3]	[5,6]	[3,5]	[3,4]	[1,6]
E_3	[4,4]	[1,2]	[6,6]	[5,5]	[3,3]	[2,2]
E_4	[4,6]	[2,3]	[5,6]	[4,6]	[3,4]	[1,2]
E_5	[5,5]	[2,3]	[6,6]	[4,5]	[2,3]	[1,3]

Procediendo como en los ejemplos anteriores se construyen la matriz P de preferencias agregadas (5.9) y la matriz A (5.11) de agregación de dominancias (con columnas normalizadas) a partir de las datos ordinales intervalares dados por los expertos, que se recogen en la Tabla 5.9:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1333 & 0.9083 & 0.55 & 0.0583 & 0.0833 \\ 0.8666 & 0.5 & 1. & 0.8833 & 0.65 & 0.375 \\ 0.09166667 & 0. & 0.5 & 0.08333333 & 0. & 0.0333 \\ 0.45 & 0.1166 & 0.9166 & 0.5 & 0.0833 & 0.0833 \\ 0.9416 & 0.35 & 1. & 0.9166 & 0.5 & 0.2666 \\ 0.9166 & 0.625 & 0.9666 & 0.9166 & 0.7333 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.13274 & 0.077295 & 0.17165 & 0.14286 & 0.028807 & 0.062112 \\ 0.23009 & 0.28986 & 0.18898 & 0.22944 & 0.32099 & 0.2795 \\ 0.024336 & 0 & 0.094488 & 0.021645 & 0 & 0.024845 \\ 0.11947 & 0.067633 & 0.17323 & 0.12987 & 0.041152 & 0.062112 \\ 0.25 & 0.2029 & 0.18898 & 0.2381 & 0.24691 & 0.19876 \\ 0.24336 & 0.36232 & 0.18268 & 0.2381 & 0.36214 & 0.37267 \end{pmatrix}.$$

Procediendo como en los ejemplos anteriores se aplican métodos derivados de nuestro enfoque considerando diferentes valores del parámetro p . Los vectores de prioridad y las normas de los vectores residuales $\delta(v)$ resultantes se recogen en la Tabla 5.10. Se incluyen también los resultados reportados en (Fan et al., 2010).

Tabla 5.10: Vectores de prioridad y normas vectoriales de $\delta(v)$.

Métrica (p)	Vector de prioridad. Ranking	$\ \delta(v)\ _1$	$\ \delta(v)\ _2$	$\ \delta(v)\ _\infty$
$p = 1$	(0.0424, 0.2802, 0.0033, 0.0370, 0.1698, 0.4670)	0.0888	0.0406	0.0300
$p = 2$	(0.0328, 0.2892, 0.0047, 0.0319, 0.1686, 0.4725)	0.1119	0.0356	0.0211
$p = \infty$	(0.02651, 0.2829, 0.0147, 0.0320, 0.1750, 0.4686)	0.1511	0.0438	0.0147
Autovector de Perron	(0.0712, 0.2832, 0.01307, 0.0693, 0.2166, 0.3464)	0.4235	0.1333	0.0664
Método de Fan et al.	$x_6 \succ x_2 \succ x_5 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_3$			

Se concluye que todos los métodos confirman x_6 como la mejor alternativa, seguida de x_2 y x_5 como segunda y tercera opción, respectivamente. x_3 se confirma como la peor alternativa en todos los casos. Se señala que el enfoque propuesto de ajuste de datos proporciona medidas para analizar cómo de bien los valores de prioridad reflejan los datos en la matriz P , a través de las normas de los vectores residuales que se incluyen en la Tabla 5.10. Se observa que la solución obtenida para $p = 1$ proporciona el mejor resultado para la suma de los errores locales, mientras que la solución para el caso $p = 2$ minimiza la suma de las desviaciones cuadráticas, y la solución para $p = \infty$ minimiza la mayor desviación, como era de esperar.

Capítulo 6

Conclusiones y líneas futuras de investigación.

En este capítulo se presentan las principales conclusiones de este trabajo y algunas líneas futuras de investigación en el campo de estudio.

En el trabajo se ha abordado el problema de decisión de grupo, en el que un conjunto discreto de alternativas tiene que ser ordenado a partir de la información de preferencias proporcionada individualmente por un grupo de expertos según sus campos de conocimiento, puntos de vista, etc. Atendiendo a la complejidad de los problemas de decisión reales, la información proporcionada por los expertos puede ser cuantitativa o cualitativa, imprecisa y presentar situaciones de falta de datos o información incompleta. En este trabajo se ha considerado que los expertos formulan sus preferencias mediante relaciones de preferencia fuzzy (datos cuantitativos) o rankings ordinales (datos cualitativos), que pueden ser incompletos y/o intervalares como una forma de representar la vaguedad e imprecisión de los juicios. Un problema adicional al que nos enfrentamos al trabajar con relaciones de preferencia fuzzy es el de la consistencia de los juicios de preferencias, como un modo de reflejar la racionalidad o coherencia de los juicios. Adicionalmente la información proporcionada por los expertos desde distintos puntos de vista, campos de conocimiento, etc. es generalmente diversa y en conflicto, atendiendo a la complejidad y la naturaleza multicriterio de los problemas reales. En este contexto, se ha presentado un modelo analítico y métodos que abordan simultáneamente los problemas planteados, mediante la búsqueda de un vector de prioridad colectivo de las alternativas que ajuste lo mejor posible los datos proporcionados por los expertos. Este modelo establece el marco teórico para analizar el problema y construir soluciones colectivas, con un significado preciso de la estrategia colaborativa o de cooperación del grupo. A continuación se señalan las principales contribuciones del modelo presentado para el caso en el que la información de los expertos se formula mediante relaciones de preferencia fuzzy, posiblemente incompletas y/o imprecisas (Capítulos 3 y 4):

- El modelo permite trabajar con juicios de preferencias vagos o imprecisos y abordar el caso de información incompleta. La mayoría de los métodos propuestos en la literatura no son aplicables directamente a estos casos. Los estudios que abordan

el problema de información incompleta o falta de datos contemplan implementar procesos previos, siendo uno de ellos de compleción de datos. El modelo presentado trabaja solamente con los datos de preferencia directamente aportados por los expertos, no requiriendo una etapa previa de compleción de datos. Se asume una condición de conectividad sobre la estructura de los datos del grupo, que garantiza que se dispone de información suficiente para obtener un vector de prioridad, evitando así soluciones erróneas, poco fundadas. Esta condición relaja situaciones consideradas en la literatura, como es la denominada situación de ignorancia. Adicionalmente, trabajar con los datos directamente aportados por los expertos, no rellenar los datos desconocidos o transformar en puntuales datos intervalares, añade flexibilidad para acomodar preferencias diversas en la búsqueda de una solución colectiva en un problema de grupo.

Se hace notar que en el caso de juicios de preferencia imprecisos modelados por datos intervalares, los métodos propuestos proporcionan un vector de prioridad puntual a partir del cual se deriva directamente el ranking de las alternativas. Gran parte de los métodos propuestos en la literatura producen valores de prioridad intervalares, en caso de solapamiento es necesario implementar un procedimiento o medida discriminante adicional para ordenar las alternativas.

- Se aborda el problema de consistencia de los juicios de preferencia, incluyendo los modelos aditivo y multiplicativo.
- Se aborda el problema de grupo, de síntesis de información diversa y en conflicto dada por diferentes expertos, con diferentes puntos de vista, intereses, etc. El modelo define teóricamente la estrategia colaborativa del grupo en la búsqueda de un vector de prioridad común que ajuste los datos, mediante el uso de métricas ponderadas a distintos niveles. De esta forma, el modelo general cubre un amplio catálogo de modos de actuar del grupo en la búsqueda de una solución colectiva y proporciona métodos que extienden técnicas estudiadas en la literatura. Se contempla la posibilidad de que los expertos tengan distinto peso en la decisión atendiendo a distintos criterios. Esto aporta flexibilidad al modelo, permitiendo trabajar en problemas de decisión de grupo heterogéneos, donde las opiniones de los expertos pueden no ser igualmente importantes.
- El modelo analítico presentado se hace operativo mediante formulaciones computacionales que permiten calcular eficientemente las soluciones del problema planteado. Los métodos y algoritmos resultantes se basan en técnicas de programación lineal y mínimos cuadrados que se han implementado haciendo uso de MATLAB®, herramienta de software matemático que ofrece un entorno de desarrollo integrado, y de Python, lenguaje de programación de código abierto interpretado, y librerías numéricas asociadas.
- El modelo presentado proporciona automáticamente medidas de consistencia y de análisis de la solución. Éstas permiten evaluar el grado de satisfacción de los expertos con la solución y el nivel de acuerdo del grupo con la misma. Se hace notar que algunos de los métodos y medidas planteados permiten la detección de expertos muy discrepantes (“outliers”) o de datos muy extremos proporcionados por los expertos.

- La aplicación de los métodos propuestos se ha ilustrado con ejemplos numéricos.

Por otra parte, las principales ventajas del modelo y métodos presentados para el problema de decisión ordinal, en el que los expertos formulan sus preferencias mediante rankings ordinales que pueden ser incompletos e imprecisos (Capítulos 5), se señalan a continuación. Éstas se derivan de las dos etapas en las que se articula el modelo:

- En la primera etapa se construye (mediante técnicas adecuadas) una matriz de preferencias del grupo a partir de los datos de los expertos. Esta construcción permite trabajar con listas parciales que pueden contener situaciones de empate y datos vagos o imprecisos, de gran interés en aplicaciones. Admite información vaga o imprecisa expresada en forma de datos ordinales intervalares, para los que existen pocos estudios en la literatura. Adicionalmente, se contempla la posibilidad de que los expertos tengan diferente peso en la decisión. El modelo sólo se alimenta de las preferencias aportadas directamente por los expertos y estos datos ordinales, relativos a las posiciones de preferencia de las alternativas, no son tratados como valores numéricos cuantitativos, como en algunos trabajos en la literatura.
- En la segunda etapa, se busca un ranking de las alternativas a través del cálculo de un vector de prioridad colectivo siguiendo distintas estrategias. Por un lado, se emplean métodos basados en relaciones de preferencia fuzzy. Por otro lado, se propone un método inspirado en técnicas de cálculo del autovalor dominante, de gran actualidad por su aplicación en algoritmos de posicionamiento web. La estrategia de dos pasos seguida (matriz de preferencias colectiva cuantitativa y búsqueda de valores de prioridad de las alternativas) además de proporcionar un modelo matemático riguroso, evita trabajar con problemas de programación entera. Las formulaciones computacionales de los métodos propuestos se resuelven mediante algoritmos numéricos eficientes (método simplex, procedimiento mínimos cuadrados y método de la potencia), frente a otros métodos en la literatura que requieren un gran esfuerzo computacional. Los algoritmos resultantes se han implementado haciendo uso del lenguaje de programación Python y librerías numéricas de código abierto.
- La aplicación de los métodos propuestos se ha ilustrado con ejemplos numéricos.

Parte de los resultados que se incluyen en este trabajo se han publicado en (Dopazo y Martínez-Céspedes, 2017), revista incluida en el JCR (primer cuartil de las categorías “Computer Science, Artificial Intelligence” y “Operations Research and Management”), y en (Dopazo y Martínez-Céspedes, 2015), artículo publicado en Proceedings 2015 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE) del congreso internacional referido (categoría A del “CORE Computer Science Conference Rankings”). Adicionalmente, la autora de este trabajo ha presentado ponencias sobre el tema abordado en los congresos internacionales: “20th Conference of the International Federation of Operational Research Societies, IFORS2014” (Barcelona, España, Julio - 2014), en la sesión “Fuzzy Systems and Soft-Computing. Fuzzy Decision Support Systems, Soft Computing, Neural Network”; “24th International Conference on Multiple Criteria Decision Making” (Ottawa, Canadá,

Julio-2017), en la sesión “Decision Aiding/Making in the World of Today”; y “29th European Conference on Operational Research (EURO 2018)” (Valencia, España, Julio-2018), en la sesión “Multiobjective Fuzzy Optimization”.

Tomando como punto de partida el trabajo presentado, varias son las líneas de investigación que se espera desarrollar en el futuro:

- Una línea natural consiste en extender los modelos presentados para que trabajen con preferencias imprecisas formuladas mediante otro tipo de estructuras. Por un lado, en el caso de preferencias cuantitativas, una ampliación natural sería considerar relaciones de preferencia fuzzy intuicionistas (Wan et al., 2018b; Wu et al., 2018). De especial interés son las preferencias expresadas en términos lingüísticos, modeladas mediante números fuzzy (Xu et al., 2019; Wu et al., 2015). Por otro lado, en el caso de información cualitativa, un objetivo futuro es extender el modelo presentado para que trabaje con información ordinal representada en términos de números fuzzy discretos (Massanet et al., 2014).
- En muchos problemas reales se buscan decisiones estratégicas que requieren cierto grado de consenso de los expertos que intervienen en el proceso. En estos casos, la solución final se puede obtener aplicando un proceso iterativo de consenso, donde los expertos pueden modificar sus preferencias, hasta encontrar una solución colectiva que satisfaga al grupo. En tales situaciones suele ser útil la existencia de un moderador del grupo que dirige el proceso de consenso. En las aplicaciones del mundo real, y especialmente con el auge en las últimas décadas de los entornos web 2.0 y superiores (recientemente web X.0), no siempre existe la posibilidad de llevar a cabo un proceso iterativo de consenso y de contar con un moderador. Sería deseable desarrollar sistemas de soporte a la decisión que implementen un proceso dinámico de interacción entre los expertos, cuyas preferencias podrían actualizarse dinámicamente, para alcanzar una solución de consenso (Dong et al., 2018; Ureña et al., 2019). En este caso sería especialmente interesante desarrollar técnicas de visualización y medidas de análisis de los resultados que faciliten el proceso.

Una cuestión a desarrollar en el proceso de consenso es el estudio de los parámetros que definen los pesos de los expertos atendiendo a criterios de interés, tales como el grado de consistencia de las preferencias, el contenido de información, el grado de acuerdo de los expertos, etc.

- Otra importante línea a estudiar es la sensibilidad de los resultados proporcionados por los métodos respecto diversos factores: pequeñas perturbaciones en los datos de partida, eliminar alternativas que ocupan las últimas posiciones, etc.
- Atendiendo a que los datos de partida recogen cierta imprecisión en los juicios de preferencia, será interesante estudiar, métodos que incorporen el grado de imprecisión de los datos, como por ejemplo en (Dopazo et al., 2007) en el contexto del AHP.
- Finalmente, sería de gran interés realizar un estudio experimental de aplicación de los modelos propuestos en un dominio de aplicación específico.

Referencias

- A. Abdoullaev. Keynote: A smart world: A development model for intelligent cities. In *The 11th IEEE International Conference on Computer and Information Technology (CIT)*, 2011.
- S. Alonso, F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J. Alcalá-Fdez, and C. Porcel. A consistency-based procedure to estimate missing pairwise preference values. *International Journal of Intelligent Systems*, 23(2):155–175, 2008.
- S. Alonso, E. Herrera-Viedma, F. Chiclana, and F. Herrera. Individual and social strategies to deal with ignorance situations in multi-person decision making. *International Journal of Information Technology & Decision Making*, 8(02):313–333, 2009.
- S. Alonso, E. Herrera-Viedma, F. Chiclana, and F. Herrera. A web based consensus support system for group decision making problems and incomplete preferences. *Information Sciences*, 180(23):4477–4495, 2010.
- K. J. Arrow and H. Raynaud. Social choice and multicriterion decision-making. *MIT Press Books*, 1, 1986.
- J. J. Bartholdi, C. Tovey, and M. Trick. The computational difficulty of manipulating an election. *Social Choice and Welfare*, 6(3):227–241, 1989.
- R. E. Bellman and L. A. Zadeh. Decision-making in a fuzzy environment. *Management Science*, 17(4):B–141, 1970.
- P. Berrone, J. E. Ricart, C. Carraso, and R. Ricart. Cities in motion index 2016. Technical report, 2016.
- J. C. Bezdek, B. Spillman, and R. Spillman. A fuzzy relation space for group decision theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 1(4):255–268, 1978.
- K. P. Bogart. Preference structures I: Distances between transitive preference relations. *Journal of Mathematical Sociology*, 3(1):49–67, 1973.
- K. P. Bogart. Preference structures. II: Distances between asymmetric relations. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 29(2):254–262, 1975.
- J. C. de Borda. Mémoire sur les élections au scrutin. 172:369–385, 1781.

- B. Bouchon-Meunier, J. Gutiérrez-Ríos, L. Magdalena, and R. R. Yager. *Technologies for Constructing Intelligent Systems 1: Tasks*, volume 89. Springer, 2013.
- S. Brin and L. Page. The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine. *Computer Networks and ISDN Systems*, 30(1-7):107–117, 1998.
- F. J. Cabrerizo, J. M. Moreno, I. J. Pérez, and E. Herrera-Viedma. Analyzing consensus approaches in fuzzy group decision making: advantages and drawbacks. *Soft Computing*, 14(5):451–463, 2010.
- F. J. Cabrerizo, F. Chiclana, R. Al-Hmouz, , A. Morfeq, A. S. Balamash, and E. Herrera-Viedma. Fuzzy decision making and consensus: challenges. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 29(3):1109–1118, 2015.
- J. A. Cadzow. *Foundations of Digital Signal Processing and Time Series Analysis*. Prentice Hall PTR, 1987.
- E. Carrizosa and D. Romero-Morales. Combining minsum and minmax: A goal programming approach. *Operations Research*, 49(1):169–174, 2001.
- A. Charnes and W. W. Cooper. Goal programming and multiple objective optimizations: Part 1. *European Journal of Operational Research*, 1(1):39–54, 1977.
- S. M. Chen, T. E. Lin, and L. W. Lee. Group decision making using incomplete fuzzy preference relations based on the additive consistency and the order consistency. *Information Sciences*, 259:1–15, 2014.
- F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and M. C. Poyatos. A classification method of alternatives for multiple preference ordering criteria based on fuzzy majority. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 4:801–814, 1996.
- F. Chiclana, F. Herrera, and E. Herrera-Viedma. Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision making based on fuzzy preference relations. *Fuzzy Sets and Systems*, 97(1):33–48, 1998.
- F. Chiclana, F. Herrera, and E. Herrera-Viedma. Integrating multiplicative preference relations in a multipurpose decision-making model based on fuzzy preference relations. *Fuzzy Sets and Systems*, 122(2):277–291, 2001.
- F. Chiclana, F. Herrera, and E. Herrera-Viedma. A note on the internal consistency of various preference representations. *Fuzzy Sets and Systems*, 131(1):75–78, 2002.
- F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and L. Martínez. A note on the reciprocity in the aggregation of fuzzy preference relations using OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 137(1):71–83, 2003.
- F. Chiclana, E. Herrera-Viedma, F. Herrera, and S. Alonso. Induced ordered weighted geometric operators and their use in the aggregation of multiplicative preference relations. *International Journal of Intelligent Systems*, 19(3):233–255, 2004.

- F. Chiclana, E. Herrera-Viedma, F. Herrera, and S. Alonso. Some induced ordered weighted averaging operators and their use for solving group decision-making problems based on fuzzy preference relations. *European Journal of Operational Research*, 182(1): 383–399, 2007.
- F. Chiclana, E. Herrera-Viedma, S. Alonso, R. Alberto, and M. Pereira. Preferences and consistency issues in group decision making. In *Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, Aggregation and Models*, pages 219–237. Springer, 2008a.
- F. Chiclana, E. Herrera-Viedma, S. Alonso, and F. Herrera. A note on the estimation of missing pairwise preference values: a uninorm consistency based method. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 16(supp02):19–32, 2008b.
- F. Chiclana, F. Mata, L. Martínez, E. Herrera-Viedma, and S. Alonso. Integration of a consistency control module within a consensus model. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 16(supp01):35–53, 2008c.
- F. Chiclana, E. Herrera-Viedma, S. Alonso, and F. Herrera. Cardinal consistency of reciprocal preference relations: A characterization of multiplicative transitivity. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 17(1):14–23, 2009.
- I. Contreras. Emphasizing the rank positions in a distance-based aggregation procedure. *Decision Support Systems*, 51(1):240–245, 2011.
- W. D. Cook and L. M. Seiford. Priority ranking and consensus formation. *Management Science*, 24(16):1721–1732, 1978.
- W. D. Cook and L. M. Seiford. On the Borda-Kendall consensus method for priority ranking problems. *Management Science*, 28(6):621–637, 1982.
- W. D. Cook, M. Kress, and L. M. Seiford. Data envelopment analysis in the presence of both quantitative and qualitative factors. *Journal of the Operational Research Society*, 47(7):945–953, 1996.
- W. D. Cook, B. Golany, M. Penn, and T. Raviv. Creating a consensus ranking of proposals from reviewers partial ordinal rankings. *Computers & Operations Research*, 34(4):954–965, 2007.
- M. S. Desarkar, S.a Sarkar, and P. Mitra. Preference relations based unsupervised rank aggregation for metasearch. *Expert Systems with Applications*, 49:86–98, 2016.
- Y. Dong, Q. Zha, H. Zhang, G. Kou, H. Fujita, F. Chiclana, and E. Herrera-Viedma. Consensus reaching in social network group decision making: Research paradigms and challenges. *Knowledge-Based Systems*, 162:3–13, 2018.
- E. Dopazo and M. L. Martínez-Céspedes. Rank aggregation methods dealing with incomplete information applied to smart cities, in: A. Yazici et al. (Eds.), *Proc. 2015 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE 2015)*, pages 1–7, 2015.

- E. Dopazo and M. L. Martínez-Céspedes. Rank aggregation methods dealing with ordinal uncertain preferences. *Expert Systems with Applications*, 78:103–109, 2017.
- E. Dopazo and M. Ruiz-Tagle. A parametric GP model dealing with incomplete information for group decision-making. *Applied Mathematics and Computation*, 218(2):514–519, 2011.
- E. Dopazo, J. González-Pachón, and J. Robles. A distance-based method for preference information retrieval in paired comparisons. In *International Symposium on Intelligent Data Analysis*, pages 66–73. Springer, 2005.
- E. Dopazo, M. Ruiz-Tagle, and J. Robles. Preference learning from interval pairwise data. a distance-based approach. In *International Conference on Intelligent Data Engineering and Automated Learning*, pages 240–247. Springer, 2007.
- E. Dopazo, K. Lui, S. Chouinard, and J. Guisse. A parametric model for determining consensus priority vectors from fuzzy comparison matrices. *Fuzzy Sets and Systems*, 246:49–61, 2014.
- C. Dwork, R. Kumar, M. Naor, and D. Sivakumar. Rank aggregation methods for the web. In *Proceedings of the 10th international conference on World Wide Web*, pages 613–622. ACM, 2001.
- R. Fagin. Combining fuzzy information from multiple systems. *Journal of Computer and System Sciences*, 58(1):83–99, 1999.
- Z. P. Fan and Y. Liu. An approach to solve group-decision-making problems with ordinal interval numbers. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 40(5):1413–1423, 2010.
- Z. P. Fan, Q. Yue, B. Feng, and Y. Liu. An approach to group decision-making with uncertain preference ordinals. *Computers & Industrial Engineering*, 58(1):51–57, 2010.
- M. Farah and D. Vanderpooten. An outranking approach for rank aggregation in information retrieval. In *Proceedings of the 30th annual international ACM SIGIR conference on Research and development in information retrieval*, pages 591–598. ACM, 2007.
- M. Fedrizzi and M. Brunelli. On the normalisation of a priority vector associated with a reciprocal relation. *International Journal of General Systems*, 38(5):579–586, 2009.
- M. Fedrizzi and M. Brunelli. On the priority vector associated with a reciprocal relation and a pairwise comparison matrix. *Soft Computing*, 14(6):639–645, 2010.
- M. Fedrizzi and S. Giove. Incomplete pairwise comparison and consistency optimization. *European Journal of Operational Research*, 183(1):303–313, 2007.
- M. Fedrizzi, M. Fedrizzi, and R. A. M. Pereira. On the issue of consistency in dynamical consensual aggregation. In *Technologies for Constructing Intelligent Systems 1*, pages 129–137. Springer, 2002.

- P. C. Fishburn. Utility theory for decision making. Technical report, DTIC Document, 1970.
- J. C. Fodor and M. R. Roubens. *Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support*, volume 14. Springer Science & Business Media, 1994.
- J. L. García-Lapresta and L. C. Meneses. An empirical analysis of transitivity with four scaled preferential judgment modalities. *Review of Economic Design*, 8(3):335–346, 2003.
- J. L. García-Lapresta and L. C. Meneses. Individual-valued preferences and their aggregation: consistency analysis in a real case. *Fuzzy Sets and Systems*, 151(2):269–284, 2005.
- S. Genç, F. Emre Boran, D. Akay, and Z. Xu. Interval multiplicative transitivity for consistency, missing values and priority weights of interval fuzzy preference relations. *Information Sciences*, 180(24):4877–4891, 2010.
- Z. W. Gong. Least-square method to priority of the fuzzy preference relations with incomplete information. *International Journal of Approximate Reasoning*, 47(2):258–264, 2008.
- J. González-Pachón and C. Romero. Distance-based consensus methods: a goal programming approach. *Omega*, 27(3):341–347, 1999.
- J. González-Pachón and C. Romero. Aggregation of partial ordinal rankings: an interval goal programming approach. *Computers & Operations Research*, 28(8):827–834, 2001.
- J. González-Pachón and C. Romero. The design of socially optimal decisions in a consensus scenario. *Omega*, 39(2):179–185, 2011.
- J. González-Pachón and C. Romero. Bentham, Marx and Rawls ethical principles: In search for a compromise. *Omega*, 62:47–51, 2016.
- F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and F. Chiclana. Multiperson decision-making based on multiplicative preference relations. *European Journal of Operational Research*, 129(2):372–385, 2001.
- E. Herrera-Viedma, F. Herrera, and F. Chiclana. A consensus model for multiperson decision making with different preference structures. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, 32(3):394–402, 2002.
- E. Herrera-Viedma, F. Herrera, F. Chiclana, and M. Luque. Some issues on consistency of fuzzy preference relations. *European Journal of Operational Research*, 154(1):98–109, 2004.
- E. Herrera-Viedma, S. Alonso, F. Chiclana, and F. Herrera. A consensus model for group decision making with incomplete fuzzy preference relations. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 15(5):863–877, 2007a.

- E. Herrera-Viedma, F. Chiclana, F. Herrera, and S. Alonso. Group decision-making model with incomplete fuzzy preference relations based on additive consistency. *Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, IEEE Transactions on*, 37(1):176–189, 2007b.
- E. Herrera-Viedma, F. J. Cabrerizo, J. Kacprzyk, and W. Pedrycz. A review of soft consensus models in a fuzzy environment. *Information Fusion*, 17:4–13, 2014.
- D. S. Hochbaum and A. Levin. Methodologies and algorithms for group-rankings decision. *Management Science*, pages 1394–1408, 2006.
- M. Hu, P. Ren, J. Lan, J. Wang, and W. Zheng. Note on “Some models for deriving the priority weights from interval fuzzy preference relations”. *European Journal of Operational Research*, 237(2):771–773, 2014.
- H. Jiang, M. M. Xia, and C. P. Wei. The priority method of interval fuzzy preference relation. *Applied Mathematical Sciences*, 4:1681–1690, 2010.
- D. Jones and M. Tamiz. *Practical goal programming*, volume 141. Springer, 2010.
- J. Kacprzyk. Group decision making with a fuzzy linguistic majority. *Fuzzy sets and systems*, 18(2):105–118, 1986.
- J. Kacprzyk, M. Fedrizzi, and H. Nurmi. Group decision making and consensus under fuzzy preferences and fuzzy majority. *Fuzzy Sets and Systems*, 49(1):21–31, 1992.
- J. P. Keener. The Perron-Frobenius theorem and the ranking of football teams. *SIAM Review*, 35(1):80–93, 1993.
- J. G. Kemeny and L. J. Snell. Preference ranking: an axiomatic approach. *Mathematical models in the social sciences*, pages 9–23, 1962.
- G. J. Klir and T. A. Folger. *Fuzzy sets, uncertainty, and information*, volume 448. Prentice Hall Englewood Cliffs, 1988.
- J. Krejčí. On additive consistency of interval fuzzy preference relations. *Computers & Industrial Engineering*, 107:128–140, 2017.
- A. N. Langville and C. D. Meyer. *Who’s# 1?: The science of rating and ranking*. Princeton University Press, 2012.
- L. W. Lee. Group decision making with incomplete fuzzy preference relations based on the additive consistency and the order consistency. *Expert Systems with Applications*, 39(14):11666–11676, 2012.
- F. Liu, W. G. Zhang, and J. H. Fu. A new method of obtaining the priority weights from an interval fuzzy preference relation. *Information Sciences*, 185(1):32–42, 2012a.
- F. Liu, W. G. Zhang, and Z. X. Wang. A goal programming model for incomplete interval multiplicative preference relations and its application in group decision-making. *European Journal of Operational Research*, 218(3):747–754, 2012b.

- X. Liu, Y. Pan, Y. Xu, and S. Yu. Least square completion and inconsistency repair methods for additively consistent fuzzy preference relations. *Fuzzy Sets and Systems*, 198:1–19, 2012c.
- R. Martin, R. Florida, and D. Tapscott. Martin Prosperity Institute. *Ranking Global Cities*, 2013.
- S. Massanet, J. V. Riera, J. Torrens, and E. Herrera-Viedma. A new linguistic computational model based on discrete fuzzy numbers for computing with words. *Information Sciences*, 258:277–290, 2014.
- I. McLean. The Borda and Condorcet principles: three medieval applications. *Social Choice and Welfare*, 7(2):99–108, 1990.
- F. Meng and X. Chen. A new method for group decision making with incomplete fuzzy preference relations. *Knowledge-Based Systems*, 73:111–123, 2015.
- F. Meng, X. Chen, and Y. Zhang. Consistency-based linear programming models for generating the priority vector from interval fuzzy preference relations. *Applied Soft Computing*, 41:247–264, 2016.
- F. Meng, Q. X. An, C. Tan, and X. Chen. An approach for group decision making with interval fuzzy preference relations based on additive consistency and consensus analysis. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 47(8):2069–2082, 2017a.
- F. Meng, C. Tan, and X. Chen. Multiplicative consistency analysis for interval fuzzy preference relations: A comparative study. *Omega*, 68:17–38, 2017b.
- T. Moonen, Greg. Clark, and J. Couturier. The business of cities 2015. Technical report, 2015.
- J. A. Morente-Molinera, I. J. Pérez, M. R. Ureña, and E. Herrera-Viedma. Creating knowledge databases for storing and sharing people knowledge automatically using group decision making and fuzzy ontologies. *Information Sciences*, 328:418–434, 2016.
- G. Munda. Measuring sustainability: a multi-criterion framework. *Environment, Development and Sustainability*, 7(1):117–134, 2005.
- G. Munda and M. Nardo. On the methodological foundations of composite indicators used for ranking countries. *Ispira, Italy: Joint Research Centre of the European Communities*, 2003.
- S. A. Orlovsky. Decision-making with a fuzzy preference relation. *Fuzzy Sets and Systems*, 1(3):155–167, 1978.
- W. H. Press. *Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing*. Cambridge University Press, 2007.
- J. Ramík and M. Vlach. Measuring consistency and inconsistency of pair comparison systems. *Kybernetika*, 49(3):465–486, 2013.

- M. E. Renda and U. Straccia. Web metasearch: rank vs. score based rank aggregation methods. In *Proceedings of the 2003 ACM symposium on Applied computing*, pages 841–846. ACM, 2003.
- C. Romero. *Handbook of critical issues in goal programming*. Elsevier, 2014.
- T. L. Saaty. How to make a decision: the analytic hierarchy process. *European Journal of Operational Research*, 48(1):9–26, 1990.
- J. Stoer and R. Bulirsch. *Introduction to numerical analysis*, volume 12. Springer Science & Business Media, 2013.
- K. Sugihara, H. Ishii, and H. Tanaka. Interval priorities in AHP by interval regression analysis. *European Journal of Operational Research*, 158(3):745–754, 2004.
- T. Tanino. Fuzzy preference orderings in group decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 12(2):117–131, 1984.
- T. Tanino. Fuzzy preference relations in group decision making. In *Non-Conventional Preference Relations in Decision Making*, pages 54–71. Springer, 1988.
- T. Tanino. On group decision making under fuzzy preferences. In *Multiperson Decision Making Models using Fuzzy Sets and Possibility Theory*, pages 172–185. Springer, 1990.
- M. Tavana, F. LoPinto, and J. W. Smither. A hybrid distance-based ideal-seeking consensus ranking model. *Advances in Decision Sciences*, 2007, 2007.
- C. W. Ueberhuber. *Numerical computation 1: Methods, software, and analysis*. Springer Science & Business Media, 2012.
- Economist Intelligence Unit and AG Siemens. European green city index. *Munich: Siemens AG*, 51, 2009.
- R. Ureña, F. Chiclana, and E. Herrera-Viedma. Consistency based completion approaches of incomplete preference relations in uncertain decision contexts. In *Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), 2015 IEEE International Conference on*, pages 1–6. IEEE, 2015a.
- R. Ureña, F. Chiclana, J. A. Morente-Molinera, and E. Herrera-Viedma. Managing incomplete preference relations in decision making: A review and future trends. *Information Sciences*, 302:14–32, 2015b.
- R. Ureña, F. J. Cabrerizo, J. A. Morente-Molinera, and E. Herrera-Viedma. Gdm-r: A new framework in R to support fuzzy group decision making processes. *Information Sciences*, 357:161–181, 2016.
- R. Ureña, F. Chiclana, G. Melancon, and E. Herrera-Viedma. A social network based approach for consensus achievement in multiperson decision making. *Information Fusion*, 47:72–87, 2019.

- S. Wan, F. Wang, and J. Dong. A group decision making method with interval valued fuzzy preference relations based on the geometric consistency. *Information Fusion*, 40: 87–100, 2018a.
- S. Wan, F. Wang, and J. Dong. A three-phase method for group decision making with interval-valued intuitionistic fuzzy preference relations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 26(2):998–1010, 2018b.
- Y. M. Wang and Z. P. Fan. Group decision analysis based on fuzzy preference relations: Logarithmic and geometric least squares methods. *Applied Mathematics and Computation*, 194(1):108–119, 2007.
- Y. M. Wang, J. B. Yang, and D. L. Xu. A preference aggregation method through the estimation of utility intervals. *Computers & Operations Research*, 32(8):2027–2049, 2005a.
- Y. M. Wang, J. B. Yang, and D. L. Xu. A two-stage logarithmic goal programming method for generating weights from interval comparison matrices. *Fuzzy Sets and Systems*, 152(3):475–498, 2005b.
- Z. J. Wang and Y. G. Chen. Logarithmic least squares prioritization and completion methods for interval fuzzy preference relations based on geometric transitivity. *Information Sciences*, 289:59–75, 2014.
- Z. J. Wang and K. W. Li. Goal programming approaches to deriving interval weights based on interval fuzzy preference relations. *Information Sciences*, 193:180–198, 2012.
- Z. J. Wang and K. W. Li. A multi-step goal programming approach for group decision making with incomplete interval additive reciprocal comparison matrices. *European Journal of Operational Research*, 242(3):890–900, 2015.
- G. A. Watson. *Approximation Theory and Numerical Methods*. John Wiley & Sons Ltd, 1980.
- J. Wu and F. Chiclana. A social network analysis trust–consensus based approach to group decision-making problems with interval-valued fuzzy reciprocal preference relations. *Knowledge-Based Systems*, 59:97–107, 2014.
- J. Wu, F. Chiclana, and E. Herrera-Viedma. Trust based consensus model for social network in an incomplete linguistic information context. *Applied Soft Computing*, 35: 827–839, 2015.
- J. Wu, F. Chiclana, and H. Liao. Isomorphic multiplicative transitivity for intuitionistic and interval-valued fuzzy preference relations and its application in deriving their priority vectors. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 26(1):193–202, 2018.
- M. Xia and Z. S. Xu. On consensus in group decision making based on fuzzy preference relations. In *Consensual Processes*, pages 263–287. Springer, 2011.
- M. Xia and Z. S. Xu. Interval weight generation approaches for reciprocal relations. *Applied Mathematical Modelling*, 38(3):828–838, 2014.

- M. Xia, Z. S. Xu, and J. Chen. Algorithms for improving consistency or consensus of reciprocal $[0, 1]$ -valued preference relations. *Fuzzy Sets and Systems*, 216:108–133, 2013.
- Y. Xu, K. W. Li, and H. Wang. Distance-based consensus models for fuzzy and multiplicative preference relations. *Information Sciences*, 253:56–73, 2013a.
- Y. Xu, P. Ravi, and H. Wang. Logarithmic least squares method to priority for group decision making with incomplete fuzzy preference relations. *Applied Mathematical Modelling*, 37(4):2139–2152, 2013b.
- Y. Xu, J. N. D. Gupta, and H. Wang. The ordinal consistency of an incomplete reciprocal preference relation. *Fuzzy Sets and Systems*, 246:62–77, 2014a.
- Y. Xu, K. W. Li, and H. Wang. Consistency test and weight generation for additive interval fuzzy preference relations. *Soft Computing*, 18(8):1499–1513, 2014b.
- Y. Xu, K. W. Li, and H. Wang. Incomplete interval fuzzy preference relations and their applications. *Computers & Industrial Engineering*, 67:93–103, 2014c.
- Y. Xu, Z. Zhang, and H. Wang. A consensus-based method for group decision making with incomplete uncertain linguistic preference relations. *Soft Computing*, 23(2):669–682, 2019.
- Z. S. Xu. A practical method for priority of interval number complementary judgment matrix. *Operations Research and Management Science*, 10(1):16–19, 2001.
- Z. S. Xu. On compatibility of interval fuzzy preference relations. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 3(3):217–225, 2004a.
- Z. S. Xu. Goal programming models for obtaining the priority vector of incomplete fuzzy preference relation. *International Journal of Approximate Reasoning*, 36(3):261–270, 2004b.
- Z. S. Xu. A procedure for decision making based on incomplete fuzzy preference relation. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 4(3):175–189, 2005.
- Z. S. Xu. Method for group decision making with various types of incomplete judgment matrices. *Control and Decision*, 21:28–33, 2006.
- Z. S. Xu. A survey of preference relations. *International Journal of General Systems*, 36(2):179–203, 2007.
- Z. S. Xu. Consistency of interval fuzzy preference relations in group decision making. *Applied Soft Computing*, 11(5):3898–3909, 2011.
- Z. S. Xu and X. Cai. Group consensus algorithms based on preference relations. *Information Sciences*, 181(1):150–162, 2011.
- Z. S. Xu and J. Chen. Group decision-making procedure based on incomplete reciprocal relations. *Soft Computing*, 12(6):515–521, 2008a.

- Z. S. Xu and J. Chen. Some models for deriving the priority weights from interval fuzzy preference relations. *European Journal of Operational Research*, 184(1):266–280, 2008b.
- Z. S. Xu and Q. L. Da. The uncertain OWA operator. *International Journal of Intelligent Systems*, 17(6):569–575, 2002.
- Z. S. Xu and Q. L. Da. A likelihood-based method for priorities of interval judgment matrices. *Chinese Journal of Management Science*, 11(1):63–65, 2003.
- R. R. Yager. On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making, in *ieee transactions on systems, man and cybernetics* 18, pp. 183–190. *Families of OWA operators, Fuzzy Sets and Systems*, 59(125448):49–73, 1988.
- R. R. Yager. Induced aggregation operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 137(1):59–69, 2003.
- P. L. Yu. A class of solutions for group decision problems. *Management Science*, 19(8):936–946, 1973.
- L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338–353, 1965.
- L. A. Zadeh. Similarity relations and fuzzy orderings. *Information Sciences*, 3(2):177–200, 1971.
- G. Zhang, Y. Dong, and Y. Xu. Linear optimization modeling of consistency issues in group decision making based on fuzzy preference relations. *Expert Systems with Applications*, 39(3):2415–2420, 2012.
- H. Zhang. Group decision making based on multiplicative consistent reciprocal preference relations. *Fuzzy Sets and Systems*, 282:31–46, 2016.
- X. Zhang, B. Ge, J. Jiang, and Y. Tan. Consensus building in group decision making based on multiplicative consistency with incomplete reciprocal preference relations. *Knowledge-Based Systems*, 106:96–104, 2016.
- Y. Zhang, H. Ma, Q. Li, B. Liu, and J. Liu. Conditions of two methods for estimating missing preference information. *Information Sciences*, 279:186–198, 2014.
- H. J. Zimmermann. Fuzzy control. In *Fuzzy Set Theory and Its Applications*, pages 203–240. Springer, 1996.