UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS
INDUSTRIALES

**Nuevas Técnicas para Ampliar el Paradigma
Metodológico en el Contexto del Control
Borroso**

Tesis Doctoral

Autor:

José Miguel ADÁNEZ GARCÍA-VILLARACO
Máster en Automática y Robótica

2019

DEPARTAMENTO DE AUTOMÁTICA, INGENIERÍA ELÉCTRICA
Y ELECTRÓNICA E INFORMÁTICA INDUSTRIAL
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS
INDUSTRIALES

**Nuevas Técnicas para Ampliar el Paradigma
Metodológico en el Contexto del Control
Borroso**

Autor:

José Miguel ADÁNEZ GARCÍA-VILLARACO
Máster en Automática y Robótica

Directores de Tesis:

Basil Mohammed AL-HADITHI
Doctor Ingeniero Industrial

Agustín JIMÉNEZ
Doctor Ingeniero Industrial

2019

RESUMEN

Este trabajo es un proceso de investigación en el contexto del control borroso basado en los modelos de Takagi-Sugeno (T-S). Se han detectado varios cánones firmemente establecidos en la metodología de este tipo de control que al traspasarlos, permiten obtener una serie importante de ventajas con respecto a la metodología básica del control borroso basado en modelos de T-S.

La metodología estándar del control borroso para la identificación y control de sistemas multivariantes no lineales consiste en: diseñar varios conjuntos de funciones de pertenencia, realizar la inferencia borrosa, identificar el sistema mediante el método de T-S, obtener modelos de estado para cada regla borrosa y diseñar reguladores mediante el mismo método en todas las reglas borrosas.

Se proponen cambios en los modelos de estado empleados para obtener diferentes propiedades en el control. El modelo de estado incremental produce una acción de control que cancela los errores en régimen permanente, resuelve el problema del cálculo del estado de referencia y elimina los términos independientes. Se presenta, además, un controlador incremental borroso paso a paso basado en control predictivo.

Para la identificación y control de sistemas que presenten dos o más variables borrosas, se propone el uso de funciones de pertenencia multidimensionales (MDMF) en lugar de la estandarizada inferencia borrosa de funciones de pertenencia monodimensionales (1DMF). Se comprueba que la inferencia borrosa de 1DMF puede colocar las reglas borrosas en puntos inapropiados para una identificación y control óptimo, incluso fuera del rango de trabajo del sistema. Por otro lado, mediante las MDMF, se pueden obtener mejores resultados de identificación mediante un menor número de reglas borrosas.

Además, se enfrenta el problema de la identificación y control de sistemas afectados por ruido coloreado. A pesar de que el ruido siempre está presente en cualquier sistema real, este asunto suele ser evitado en la mayoría de trabajos por que conlleva un alto nivel de complejidad y las ventajas obtenidas son difíciles de observar. Se desarrolla un control óptimo basado en una nueva formulación del modelo de estado incremental para sistemas afectados por ruido coloreado.

Finalmente, este trabajo pretende romper con la metodología extendida de emplear el mismo método de control en todas las reglas borrosas. Se ha desarrollado un nuevo método de control borroso basado en la combinación de diferentes estrategias de control que sea capaz de aprovechar las ventajas de cada una y atenuar sus inconvenientes.

ABSTRACT

This work is a research process within the context of fuzzy control based on Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy models. It has been transgressed several firmly established standards within this control methodology which would allow the obtention of various important advantages with respect to the basic methodology of fuzzy control based on T-S fuzzy models.

The standard methodology of fuzzy control for identification and control of non-linear multivariable systems consists of: designing several sets of membership functions, performing a fuzzy inference, identifying the non-linear system using the T-S method, obtaining state models for each fuzzy rule and designing the controllers by the same method for each fuzzy rule.

Changes are proposed to the state models to obtain different properties in the control. Incremental state model produces a control action which allows the obtention of zero steady state errors, solves the problem of the reference state calculation and removes the independent terms. An incremental fuzzy control based on predictive control is also presented.

For identification and control of systems with two or more fuzzy variables, the use of multidimensional membership functions (MDMF) is proposed, instead of the standardized fuzzy inference of one-dimensional membership functions (1DMF). It is verified that the fuzzy inference of 1DMF can place fuzzy rules at inappropriate locations for optimal identification and control, even outside of the operating range of the system. On the other hand, through the MDMF, better identification results can be obtained through a smaller number of fuzzy rules.

Moreover, the problem of identification and control of coloured noise affected systems is faced. Although noise is always present in any real system, the issue is usually avoided in most works since it carries a high level of complexity and the obtained advantages are difficult to observe. An optimal control method based on a new formulation of incremental state model is developed for coloured noise affected systems.

Finally, this work aims to break with the extended methodology of using the same control method for each fuzzy rule. A new fuzzy control method has been developed based on the combination of different control strategies. This new proposed control can achieve the advantages of each strategy while mitigating its drawbacks.

ÍNDICE DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS	IX
LISTA DE TABLAS	XV
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Motivación y Justificación del Proyecto de Investigación	2
1.2. Objetivos del Proyecto de Investigación	2
1.3. Trabajos de Publicación	3
1.4. Estructura de la Memoria	3
2. ESTADO DEL ARTE	7
2.1. Lógica Borrosa	7
2.2. Control Borroso y Control Inteligente	8
2.3. Modelos Borrosos de T-S	11
2.4. Conjuntos Borrosos Multidimensionales	14
2.5. Control Borroso Multiestrategia	15
2.6. Control de Sistemas Afectados por Ruido	16
3. CONTROL ÓPTIMO BASADO EN EL MODELO BORROSO INCREMENTAL DE T-S	19
3.1. Control Óptimo Multivariable Lineal Basado en el Modelo Incremental	19
3.1.1. Modelo de Estado Discreto Multivariable	20
3.1.2. Controlador y Observador de Estado Discreto	21
3.1.3. Modelo de Estado Incremental	23
3.1.4. Controlador y Observador para Estado Incremental	25
3.1.5. Caso de Estudio: Modelo del Aerogenerador	26
3.2. Control No Lineal Óptimo Multivariable Basado en el Modelo Incremental Borroso de T-S	37
3.2.1. Modelo Borroso de T-S	37
3.2.2. Método de Identificación de T-S	38

3.2.3.	Diseño del Controlador Óptimo y Observador Óptimo Borrosos	40
3.2.4.	Modelo de Estado Reducido e Identificación a Trozos del Aerogenerador	41
3.2.5.	Caso de Estudio: Modelo del Aerogenerador	43
3.3.	Controlador Borroso Predictivo Basado en el Modelo Incremental .	52
3.3.1.	Control Predictivo Empleando Modelos Multivariantes de Estado Incremental de T-S	53
3.3.2.	Caso de Estudio: Modelo del Aerogenerador	54
3.4.	Conclusión	58
4.	FUNCIONES DE PERTENENCIA MULTIDIMENSIONALES EN MODELOS BORROSOS DE T-S	61
4.1.	Modelo de T-S Basado en MDMF	61
4.2.	Diseño de las MDMF Basado en GA	64
4.3.	Control Borroso Mediante MDMF y Modelo de Estado Incremental	67
4.3.1.	Modelo Borroso Incremental de T-S Basado en MDMF . .	67
4.3.2.	Diseño del Controlador Óptimo y Observador Óptimo Borrosos Basados en MDMF y Modelo de Estado Incremental	68
4.4.	Caso de Estudio: Sistema de Tanques Acoplados	69
4.4.1.	Sistema de Tanques Acoplados	69
4.4.2.	Identificación del Sistema de Tanques Acoplados Mediante el Método Basado en la Inferencia Borrosa de 1DMF	71
4.4.3.	Modelado e Identificación del Sistema de Tanques Acoplados Mediante el Método Basado en MDMF Ajustadas Utilizando un GA	75
4.4.4.	Control Borroso Mediante MDMF Aplicado al Sistema de Tanques Acoplados	82
4.5.	Conclusión	83
5.	IDENTIFICACIÓN, MODELADO Y CONTROL ÓPTIMO DE SISTEMAS AFECTADOS POR RUIDO COLOREADO	87
5.1.	Modelo Discreto del Sistema Lineal Afectado por Ruido Coloreado	88
5.1.1.	Teorema de Descomposición de Wold	89
5.1.2.	Algoritmo de Factorización Espectral	89
5.2.	Modelo de Sistemas Multivariantes Lineales Afectados por Ruido Coloreado Mediante Modelos de Estado Discreto	92
5.3.	Modelado de Sistemas Multivariantes Lineales Afectados por Ruido Coloreado Mediante Modelos de Estado Incremental	95
5.4.	Algoritmo de Control Basado en el Modelo de Estado Incremental para Sistemas Multivariantes Lineales Afectados por Ruido Coloreado	98

5.5.	Extensión del Método Propuesto al Modelo Borroso de T-S Para Sistemas Multivariantes No Lineales con Ruido Coloreado	101
5.6.	Caso de Estudio: Tanque de Mezcla Térmico	103
5.6.1.	Sistema de Tanque de Mezcla Térmico	103
5.6.2.	Identificación, Modelado y Control Borroso Óptimo para Sistemas Afectados por Ruido Coloreado Basado en el Mo- delo de Estado Incremental	104
5.6.3.	Análisis de Resultados	111
5.7.	Conclusión	115
6.	CONTROL BORROSO MULTIESTRATEGIA BASADO EN EL MODELO DE T-S	117
6.1.	Control Borroso Multiestrategia	117
6.1.1.	Caso de Estudio: Tanque de Mezcla Térmico	120
6.2.	Mejoras Desarrolladas para el Control Borroso Multiestrategia . . .	133
6.2.1.	Supervisor para Cambios en la Señal de Referencia	133
6.2.2.	Funciones de Pertenencia Trapezoidales	135
6.2.3.	Caso de Estudio: Tanque de Mezcla Térmico	135
6.3.	Control Multiestrategia para Sistemas Afectados por Ruido Colo- reado	149
6.3.1.	Caso de Estudio: Tanque de Mezcla Térmico	152
6.4.	Conclusión	162
7.	CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS	169
7.1.	Conclusiones	169
7.2.	Trabajos Futuros	170
8.	Bibliografía	173

LISTA DE FIGURAS

3.1. Diagrama del aerogenerador.	27
3.2. Coeficientes que modelan la aerodinámica de las palas. a) Coeficiente de potencia C_p . b) Coeficiente mecánico C_q	28
3.3. Respuestas del sistema del aerogenerador ante cambios en las señales de referencia. a) Velocidad angular del rotor ω_r . b) Potencia generada P_g	34
3.4. Respuestas del sistema del aerogenerador ante cambios en las señales de referencia y perturbaciones. a) Velocidad angular del rotor ω_r . b) Potencia generada P_g	35
3.5. Errores de observación. a) Velocidad angular del rotor ω_r . b) Potencia generada P_g	36
3.6. Curva de potencia del aerogenerador.	44
3.7. Funciones de pertenencia para el caso de estudio del aerogenerador. a) Velocidad de rotación del rotor ω_r . b) Velocidad de viento v_w	45
3.8. Funciones de pertenencia para el caso de estudio del aerogenerador. a) Ángulo de las palas β . b) Intensidad de campo I_f	46
3.9. Respuestas dinámicas del sistema del aerogenerador ante cambios excesivos en las señales de referencia y perturbaciones. a) Velocidad angular del rotor ω_r . b) Potencia generada P_g	50
3.10. Respuestas dinámicas del sistema del aerogenerador ante cambios en la señal de velocidad de viento v_w acotada para la zona de operación nominal. a) Velocidad angular del rotor ω_r . b) Potencia generada P_g . c) Señal de velocidad de viento v_w	51
3.11. Respuestas dinámicas del sistema del aerogenerador ante cambios en la señal de velocidad de viento v_w en todo el rango de operación del aerogenerador. a) Velocidad angular del rotor ω_r . b) Potencia generada P_g . c) Señal de velocidad de viento v_w	52
3.12. Respuestas dinámicas del sistema del aerogenerador ante cambios excesivos en las señales de referencia y perturbaciones. a) Velocidad angular del rotor ω_r . b) Potencia generada P_g	55

3.13. Respuestas dinámicas del sistema del aerogenerador ante cambios en la señal de velocidad de viento v_w acotada para la zona de operación nominal. a) Velocidad angular del rotor ω_r . b) Potencia generada P_g . c) Señal de velocidad de viento v_w	56
3.14. Respuestas dinámicas del sistema del aerogenerador ante cambios en la señal de velocidad de viento v_w en todo el rango de operación del aerogenerador. a) Velocidad angular del rotor ω_r . b) Potencia generada P_g . c) Señal de velocidad de viento v_w	57
4.1. MDMF propuesta.	63
4.2. GA para el ajuste de las MDMF.	65
4.3. Sistema de tanques acoplados.	70
4.4. Histogramas de los datos del sistema. a) Histograma de Q_1 . b) Histograma de Q_2	71
4.5. 1DMF definidas para el sistema de tanques acoplados. a) 1DMF para Q_1 . b) 1DMF para Q_2	72
4.6. Inferencia borrosa de 1DMF.	73
4.7. Puntos centrales de las reglas borrosas obtenidas mediante inferencia borrosa de 1DMF, proyectados sobre el espacio de datos del sistema.	74
4.8. Centros de las MDMF del ganador en cada generación.	78
4.9. Datos del sistema y centros de las MDMF obtenidas, proyectados sobre el espacio de los datos del sistema.	79
4.10. MDMF obtenidas con el algoritmo propuesto.	80
4.11. Error de identificación de T-S utilizando MDMF durante las generaciones del GA. Línea continua: media de las 100 pruebas. Línea discontinua: máximo y mínimo de las 100 pruebas. Línea punteada: percentiles 10 y 90 de las 100 pruebas. Línea continua gruesa: prueba mostrada previamente.	81
4.12. Respuesta del sistema de tanques acoplados, controlado mediante el método propuesto basado en MDMF, ante cambios excesivos en las referencias. a) Respuesta dinámica de Q_1 . b) Respuesta dinámica de Q_2	84
5.1. Tanque de mezcla térmico.	103
5.2. Reglas borrosas para el sistema de tanque de mezcla térmico. a) Reglas borrosas para el caudal Q_m . b) Reglas borrosas para la temperatura T_s	106
5.3. Respuestas dinámicas del sistema de tanque de mezcla térmico ante cambios en las señales de referencia. a) Respuesta de caudal Q_m . b) Respuesta de la temperatura T_s	112

5.4.	Respuestas dinámicas del sistema de tanque de mezcla térmico ante cambios excesivos en las señales de referencia. a) Respuesta de caudal Q_m . b) Respuesta de la temperatura T_s	113
5.5.	Respuestas del sistema de tanque de mezcla térmico al ser controlado en el punto de operación nominal. a) Respuesta de caudal Q_m . b) Respuesta de la temperatura T_s	114
6.1.	Estructura de las estrategias de control. Control LQR basado en el modelo de estado discreto tradicional (LQR). Control LQR basado en el modelo de estado incremental (INC). Control de entrada constante (EC).	118
6.2.	Reglas borrosas para el control multiestrategia del sistema de tanque de mezcla térmico. a) Reglas borrosas para el caudal Q_m . b) Reglas borrosas para la temperatura T_s	122
6.3.	Estructura del control multiestrategia para el control del tanque de mezcla térmico. Control LQR basado en el modelo de estado discreto tradicional (LQR). Control LQR basado en el modelo de estado incremental (INC). Control de entrada constante (EC). . .	123
6.4.	Peso de la regla asociada al control LQR basado en el modelo de estado incremental.	124
6.5.	Peso de las reglas asociadas al control LQR basado en el modelo de estado discreto tradicional.	125
6.6.	Peso de las reglas asociadas al control de entrada constante.	126
6.7.	Respuesta transitoria del sistema de tanque de mezcla térmico controlado mediante control LQR basado en el modelo de estado discreto tradicional, control LQR basado en el modelo de estado incremental y control multiestrategia. a) Respuesta del caudal de salida Q_m . b) Respuesta de la temperatura de salida T_s	131
6.8.	Diagrama de fase del sistema de tanque de mezcla térmico controlado mediante control multiestrategia.	132
6.9.	Estructura de las estrategias de control ajustadas para una referencia (Ref). Control LQR basado en el modelo de estado discreto tradicional (LQR). Control LQR basado en el modelo de estado incremental (INC). Control de entrada constante (EC).	134
6.10.	Reglas borrosas trapezoidales para el control multiestrategia, con supervisor para la referencia, del sistema de tanque de mezcla térmico. a) Reglas borrosas para el caudal Q_m . b) Reglas borrosas para la temperatura T_s	136

6.11. Estructura ajustada por el supervisor del control multiestrategia para el control del tanque de mezcla térmico para una referencia (Ref). Control LQR basado en el modelo de estado discreto tradicional (LQR). Control LQR basado en el modelo de estado incremental (INC). Control de entrada constante (EC).	138
6.12. Peso de las reglas asociadas al control LQR basado en el modelo de estado incremental para una referencia concreta.	139
6.13. Peso de las reglas asociadas al control LQR basado en el modelo de estado discreto tradicional para una referencia concreta.	140
6.14. Peso de las reglas asociadas al control de entrada constante para una referencia concreta.	141
6.15. Respuesta transitoria ante cambios de referencia del sistema de tanque de mezcla térmico controlado mediante control LQR basado en el modelo de estado discreto tradicional, control LQR basado en el modelo de estado incremental y control multiestrategia. a) Respuesta del caudal de salida Q_m . b) Respuesta de la temperatura de salida T_s	145
6.16. Diagrama de fase del sistema controlado mediante control multiestrategia ante cambios de referencia.	146
6.17. Respuesta transitoria ante cambios simultáneos de referencia y perturbaciones, del sistema de tanque de mezcla térmico controlado mediante control LQR basado en el modelo de estado discreto tradicional, control LQR basado en el modelo de estado incremental y control multiestrategia. a) Respuesta del caudal de salida Q_m . b) Respuesta de la temperatura de salida T_s	147
6.18. Diagrama de fase del sistema controlado mediante control multiestrategia ante cambios simultáneos de referencia y perturbaciones.	148
6.19. Estructura de las estrategias de control óptimo de sistemas afectados por ruido coloreado para una referencia definida en el punto de operación nominal. Control óptimo contra ruido basado en el modelo de estado discreto (LQR Kalman). Control óptimo para sistemas afectados por ruido coloreado basado en el modelo de estado incremental (INC RC). Control de entrada constante (EC).	150
6.20. Reglas borrosas trapezoidales para el control multiestrategia para sistemas afectados por ruido coloreado, con supervisor para la referencia, del sistema de tanque de mezcla térmico. a) Reglas borrosas para el caudal Q_m . b) Reglas borrosas para la temperatura T_s	154

6.21. Estructura ajustada por el supervisor del control multiestrategia de sistemas afectados por ruido coloreado para el control del tanque de mezcla térmico ante una referencia en el punto de operación nominal. Control óptimo contra ruido basado en el modelo de estado discreto (LQR Kalman). Control óptimo para sistemas afectados por ruido coloreado basado en el modelo de estado incremental (INC RC). Control de entrada constante (EC).	156
6.22. Respuesta transitoria ante cambios de referencia, del sistema de tanque de mezcla térmico controlado mediante control óptimo para sistemas afectados por ruido coloreado basado en el modelo de estado discreto, control óptimo para sistemas afectados por ruido coloreado basado en el modelo de estado incremental y control multiestrategia para sistemas afectados por ruido coloreado. a) Respuesta del caudal de salida Q_m . b) Respuesta de la temperatura de salida T_s	163
6.23. Diagrama de fase del sistema controlado mediante control multiestrategia para sistemas afectados por ruido coloreado ante cambios de referencia.	164
6.24. Respuesta transitoria ante cambios simultáneos de referencia y perturbaciones, del sistema de tanque de mezcla térmico controlado mediante control óptimo para sistemas afectados por ruido coloreado basado en el modelo de estado discreto, control óptimo para sistemas afectados por ruido coloreado basado en el modelo de estado incremental y control multiestrategia para sistemas afectados por ruido coloreado. a) Respuesta del caudal de salida Q_m . b) Respuesta de la temperatura de salida T_s	165
6.25. Diagrama de fase del sistema controlado mediante control multiestrategia para sistemas afectados por ruido coloreado ante cambios simultáneos de referencia y perturbaciones.	166

LISTA DE TABLAS

3.1. Ecuaciones del modelo no lineal del aerogenerador.	27
3.2. Parámetros del aerogenerador.	30
3.3. Punto de operación del aerogenerador.	30
4.1. Parámetros del sistema de tanques acoplados.	70
4.2. Probabilidad de ocurrencia de los operadores genéticos asignados a cada individuo.	84
5.1. Parámetros del sistema de tanque de mezcla térmico.	105
5.2. Punto de operación del sistema de tanque de mezcla térmico. . . .	105

LISTA DE ABREVIATURAS

<i>T-S</i>	Takagi-Sugeno
<i>MDMF</i>	Multidimensional Membership Function
<i>1DMF</i>	One-dimensional Membership Function
<i>GA</i>	Genetic Algorithm
<i>PID</i>	Proportional Integral Derivative
<i>KF</i>	Kalman Filter
<i>SVM</i>	Support Vector Machine
<i>LMI</i>	Linear Matrix Inequalitie
<i>LQR</i>	Linear Quadratic Regulator
<i>EKF</i>	Extended Kalman Filter
<i>PDC</i>	Parallel Distributed Compensation
<i>MPC</i>	Model based Predictive Control
<i>GPC</i>	Generalized Predictive Control
<i>LQG</i>	Linear Quadratic Gaussian regulator
<i>PI</i>	Proportional Integral

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

El control borroso basado en modelos de T-S es un método ampliamente extendido para el control de sistemas no lineales. Como en todo método extendido, se ha desarrollado una metodología estándar que permite obtener unos resultados satisfactorios en la mayoría de casos.

La metodología estándar del control borroso basada en los modelos de T-S es aproximadamente la siguiente:

- Diseñar las funciones de pertenencia y obtener las reglas mediante la inferencia borrosa.
- Identificar el sistema no lineal mediante el método de T-S.
- Obtener modelos de estado para cada regla borrosa.
- Diseñar reguladores para cada regla borrosa mediante una estrategia y parámetros de diseño comunes a todas ellas.

En este trabajo se han detectado varios elementos en la metodología que, aunque estén lejos de ser incorrectos, pueden ser mejorables.

- Se han observado ventajas importantes para sistemas de más de una variable borrosa al emplear MDMF en lugar de la inferencia borrosa de 1DMF.
- El método de identificación de T-S puede ser mejorado mediante una ponderación de parámetros del sistema linealizado.
- El modelo de estado no es algo rígido. Se pueden obtener varias ventajas mediante el uso de modelos de estado incremental.
- Se pueden emplear diferentes estrategias de control en las diferentes reglas borrosas y esto permite aprovechar mejor las ventajas de cada estrategia.

Por otro lado, también se busca tratar el problema de la identificación y control de sistemas afectados por ruido coloreado ya que suele ser evitado o simplificado en la mayoría de trabajos.

1.1. Motivación y Justificación del Proyecto de Investigación

Este proyecto no es el típico en el que se trabaja continuamente sobre el mismo tema hasta llegar a unas conclusiones completamente certeras y unos resultados completamente cerrados. En lugar de eso, se pretende romper los estándares y recuperar la creatividad que debe poseer todo nuevo trabajo de investigación.

Este trabajo comenzó como cualquier otro, tratando de resolver un problema concreto. No obstante, en el camino han sucedido demasiadas cosas maravillosas que ha sido imposible ignorar. Una vez descubres lo fantástico que es trabajar con algo nuevo no quieres volver al problema inicial, y resolver ese problema específico se vuelve una de tus últimas motivaciones.

Si es necesario que se justifique el porqué llevar a cabo este proyecto, la justificación más acertada sería: ¿Por qué no? Este proyecto defiende que no hay nada absoluto, que todo se puede mejorar y que la belleza de la investigación está precisamente en darse cuenta de ello.

1.2. Objetivos del Proyecto de Investigación

El objetivo fundamental de este proyecto es romper con los cánones estandarizados en el contexto del control borroso basado en modelos de T-S, y ofrecer alternativas que presenten ventajas sobre estos. Este objetivo fundamental se ha separado en una serie de subobjetivos:

- Demostrar las ventajas del modelo de estado incremental con respecto al modelo de estado tradicional.
- Demostrar las ventajas de utilizar MDMP con respecto a la inferencia borrosa de 1DMF.
- Demostrar las ventajas de controlar en base a modelos que incluyan ruido coloreado con respecto al control mediante modelos que evitan este problema.
- Demostrar las ventajas del control borroso que mezcla diferentes estrategias de control con respecto a los controladores borrosos que emplean la misma estrategia de control en todas las reglas borrosas.

1.3. Trabajos de Publicación

Con el fin de informar de los resultados más relevantes obtenidos durante el desarrollo del trabajo de tesis, se han redactado varios artículos que han sido publicados en revistas impactadas del *JCR* o presentados en congresos internacionales. Dichos artículos son:

Artículos Publicados:

- Adáñez, José Miguel; Al-Hadithi, Basil Mohammed; Jiménez, Agustín. *Wind turbine multivariable optimal control based on incremental state model. Asian Journal of Control*, 2018, vol. 20, no 6, p. 2075-2087.
- Adáñez, José Miguel; Al-Hadithi, Basil Mohammed; Jiménez, Agustín. *Multidimensional membership functions in T-S fuzzy models for modelling and identification of nonlinear multivariable systems using genetic algorithms. Applied Soft Computing*, 2019, vol. 75, p. 607-615.

Congresos:

- Adáñez, José Miguel, et al. *Optimal control of a ball and beam nonlinear model based on Takagi-Sugeno fuzzy model. En Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017. Springer, Cham, 2017. p. 1-11.*
- Al-Hadithi, Basil Mohammed; Adáñez, José Miguel; Jiménez, Agustín. *Takagi-Sugeno Fuzzy Incremental State Model for Optimal Control of a Ball and Beam Nonlinear Model. En International Workshop on Soft Computing Models in Industrial and Environmental Applications. Springer, Cham, 2019. p. 533-543.*

1.4. Estructura de la Memoria

Para describir los análisis realizados y los resultados obtenidos en este proyecto de investigación, la memoria está organizada como sigue:

El capítulo 2 contiene el estado del arte, donde se presenta una breve historia de los trabajos más relevantes relacionados con la lógica borrosa, el control borroso, los modelos de T-S y el control óptimo.

El capítulo 3 presenta el método estándar basado en los modelos borrosos de T-S para identificar, modelar y finalmente controlar sistemas no lineales. Este capítulo surge de mi trabajo fin de máster y se centra en el modelado y control mediante modelos de estado incremental. El modelo de estado incremental permite, de forma sencilla y natural, obtener error nulo en régimen permanente, eliminar los términos independientes del modelo y solucionar el problema del cálculo del estado de referencia. Además, en la tesis se han realizado varios avances, relacionados con el modelo de estado incremental, sobre los desarrollados en

el trabajo fin de máster. Se ha desarrollado un modelo de estado reducido para el problema del control borroso del aerogenerador. Además, se ha incluido un nuevo controlador borroso óptimo paso a paso basado en el modelo de estado incremental.

En el capítulo 4 se propone una nueva forma de modelado e identificación de T-S basada en el uso de MDMF. Se comprueba que en el caso de sistemas no lineales con más de una variable borrosa, el método basado en la inferencia borrosa de 1DMF consigue unas reglas borrosas que no son óptimas para la identificación de T-S e incluso a veces no corresponden con los datos del sistema no lineal. Mediante el uso de MDMF, ajustadas mediante un algoritmo genético (GA) basado en el modelo de T-S, se obtienen unas reglas borrosas óptimas para la identificación de sistemas no lineales.

En el capítulo 5 se enfrenta el problema del control de sistemas no lineales afectados por ruido coloreado. Se desarrolla un método de control óptimo mediante un modelo de estado incremental para sistemas afectados por ruido coloreado.

El capítulo 6 presenta el control borroso multiestrategia basado en los modelos de T-S. Este nuevo controlador realiza una mezcla de diferentes métodos de control mediante una interpolación borrosa. Este nuevo método permite aprovechar las ventajas de cada estrategia de control empleada y atenuar sus desventajas. Los métodos de control empleados son: el control mediante modelos de estado incremental para obtener error en régimen permanente nulo, el control por realimentación óptima de estado para obtener un régimen transitorio óptimo, y un control de entrada constante para obtener robustez en el sistema global de control. También se desarrolla un supervisor para que el controlador funcione adecuadamente ante distintas referencias. Finalmente, se realiza un control multiestrategia para sistemas afectados por ruido coloreado combinando distintas estrategias de control óptimo para el caso de sistemas afectados por ruido coloreado.

El capítulo 7 presenta las conclusiones generales y las propuestas de trabajos futuros que se derivan de este proyecto de investigación.

CAPÍTULO 2

ESTADO DEL ARTE

Capítulo 2

ESTADO DEL ARTE

Este capítulo presenta el estado del arte relacionado con la lógica borrosa, el control borroso, los modelos de T-S y el control óptimo. Se presenta así una breve historia de los trabajos relacionados con la lógica borrosa y una serie de estudios relacionados con las técnicas empleadas en esta tesis doctoral.

2.1. Lógica Borrosa

En 1965, L.A. Zadeh publicó su famoso artículo “*Fuzzy Sets*” [139]. En este trabajo se presentó la idea de los conjuntos borrosos y, por extensión, la lógica borrosa. La lógica borrosa es una matemática alternativa que permite expresar el conocimiento humano de forma distinta a las distribuciones de probabilidad y formalizar el razonamiento con incertidumbre. De esta forma, en un breve espacio de tiempo la lógica borrosa ha conseguido revolucionar la tecnología e impulsar la inteligencia artificial mediante la conjunción de los fundamentos matemáticos, la lógica y el razonamiento con incertidumbre.

En la primera década de desarrollo de la lógica borrosa se fueron incorporando al campo borroso las estructuras matemáticas típicas y formalizando su desarrollo: relaciones, funciones, grafos, grupos, gramáticas, lenguajes, algoritmos y programas. En [25] se trabajó en sistemas de toma de decisión en entornos borrosos. En [81] se estudió el problema borroso desde un punto de vista lingüístico. En [53] se investigó sobre metodologías para la caracterización de estructuras matemáticas borrosas. En [27, 48, 102] se trabajó en la recuperación de información borrosa. En [144] se estudió la optimización borrosa.

Una de las características más importantes de la lógica borrosa es que permite la utilización del lenguaje natural para representar el conocimiento de un sistema mediante las denominadas variables lingüísticas. Estas variables toman valores definidos mediante conjuntos borrosos, caracterizados por una etiqueta lingüística. Así, el significado de una variable lingüística puede ser interpretado

como un valor dotado de imprecisión. Esta característica permite la realización de modelos cualitativos en diferentes campos de conocimiento, debido fundamentalmente a su capacidad de reflejar de forma fácilmente interpretable fenómenos muy complejos y difícilmente modelables de forma analítica [14, 20, 57, 71].

2.2. Control Borroso y Control Inteligente

Desde el punto de vista del control, en 1974, E. Mamdani y S. Assilian realizaron la primera aplicación industrial de la lógica borrosa, desarrollando el primer controlador borroso basado en reglas lingüísticas para el control de un generador de vapor [95]. Este sistema de control borroso supuso uno de los grandes impulsos iniciales que recibió la lógica borrosa, permitiendo que pasara de un marco teórico a aplicaciones industriales.

Desde el momento en el que la lógica borrosa se hizo popular a nivel industrial, se comprobó que el desarrollo de un controlador borroso con un buen rendimiento no era una tarea sencilla. La búsqueda de las funciones de pertenencia y las reglas adecuadas son un largo proceso de prueba y error, y más aún en sistemas complejos. Además, era necesario poseer algún mecanismo de adaptación o aprendizaje que reajustase los controladores a las lentas modificaciones de los sistemas reales. Así, en [64] se desarrolló el primer algoritmo que empleó una red neuronal para diseñar las funciones de pertenencia de un modelo borroso, creando el primer sistema neuro-borroso. Los sistemas neuro-borrosos [26, 68, 69, 70, 91, 131] han permitido combinar la capacidad de adaptabilidad de las redes neuronales con la interpretabilidad de los sistemas borrosos.

En [34], se propone un sistema neuro-borroso que implementa redes neuronales diferenciales a partir de las reglas de inferencia borrosa de T-S. Las redes neuronales diferenciales sustituyen a los sistemas lineales locales que se utilizan en el método de T-S. De esta forma, las redes neuronales diferenciales se utilizan para tratar la identificación de un sistema incierto no lineal, mientras que las reglas borrosas se utilizan para proporcionar el marco de los conocimientos previos del sistema. La implementación de las redes neuronales diferenciales dan como resultado un sistema de T-S que varía en el tiempo para realizar la identificación en línea de un sistema incierto no lineal con el objetivo de diseñar un controlador.

Además de la combinación de los sistemas borrosos con las redes neuronales, también se han integrado con GA, con técnicas probabilísticas y con las herramientas tanto clásicas como el control proporcional, integral, derivativo (PID) [100, 128, 138, 142], como modernas de la teoría de control [3], convirtiéndose en una de las herramientas principales del denominado Control Inteligente [51]. Los sistemas borrosos híbridos [17] permiten suplir algunas de las carencias de la lógica borrosa o mejorar su desempeño mediante la aplicación de otras técnicas. Estos sistemas han demostrado su utilidad en una amplia variedad de problemas

reales [113].

Se suele entender por control inteligente a aquellas aplicaciones de control que emplean alguna de las técnicas propias de inteligencia artificial, fundamentalmente: redes neuronales, lógica borrosa y GA. El uso de técnicas de inteligencia artificial en el modelado, monitorización y control de procesos ha sido consecuencia de que las técnicas clásicas no han producido los resultados deseados. Además, el rendimiento de los reguladores clásicos se deteriora considerablemente en presencia de incertidumbres y no linealidades. Cuando es conocido el modelo matemático de una planta no lineal, existen muchas técnicas de control que garantizan la estabilidad. Sin embargo, si el modelo es desconocido, demasiado complejo o está sometido a incertidumbres, el control inteligente y especialmente el control borroso, se presenta como una de las mejores herramientas para afrontar el diseño del controlador no lineal [13, 35].

Los GA [54, 55] son métodos de optimización que utilizan los principios de la selección natural y la genética para encontrar la solución óptima a un problema. La principal ventaja de los GA es la inclusión de cambios aleatorios en las soluciones, lo que evita que el algoritmo caiga en un mínimo local de forma permanente. Como principal inconveniente, los GA no aseguran la solución óptima en un tiempo finito, pero con un número suficiente de generaciones (las iteraciones de los GA), generalmente dan buenos resultados con un coste computacional razonable. Muchos trabajos presentan diferentes aplicaciones de GA, por ejemplo [74, 99, 123].

Los GA se han utilizado con métodos basados en lógica borrosa en algunos trabajos [42, 115, 141]. El más destacado es el sistema genético basado en reglas borrosas que ajusta diferentes componentes de un sistema borroso [43, 44, 79]. Por ejemplo, en [46] se obtiene el modelo de T-S en el espacio de estados de un sistema no lineal multivariable. La ecuación de espacio de estado del sistema se expresa como la suma borrosa de las variables de estado, la perturbación y la entrada de control. Para obtener un modelo de alta precisión se aplica un GA que busca el modelo óptimo. La técnica propuesta puede modificar las reglas borrosas de modo que el modelo obtenido tenga la estructura más simple sin disminuir la precisión del diseño. Otro enfoque puede consistir en que los GA se utilicen para ajustar los parámetros de un controlador borroso [137].

En [45] se presenta un aprendizaje basado en un GA para un tipo de red neuronal borrosa. El aprendizaje propuesto consiste en tres etapas. En la primera etapa las funciones de pertenencia se inicializan mediante un algoritmo de auto-organización. La segunda etapa emplea el algoritmo de aprendizaje mediante GA para identificar las reglas borrosas. La etapa final realiza un ajuste fino utilizando un algoritmo de aprendizaje de regresión.

Aunque el control inteligente no implique necesariamente el uso de lógica borrosa, su capacidad para el tratamiento de sistemas complejos y con incertidum-

bres ha hecho de la lógica borrosa una de las herramientas más utilizadas. Esto es fundamentalmente porque la lógica borrosa se ha combinado con las técnicas propias de la teoría de control en todos sus ámbitos: modelado, análisis y control. Respecto al modelado de sistemas, además de las técnicas neuro-borrosas y las combinaciones con GA, se han desarrollado algoritmos de modelado borroso basados en el filtro de Kalman (KF) [24, 117] que permiten tratar sistemas afectados por ruido, algoritmos de agrupamiento (*clustering*) borroso [28, 121, 136], incluso técnicas de *Support Vector Machine* (SVM) basadas en lógica borrosa [92].

Aunque el control borroso nació como una metodología heurística [96, 140], que sigue empleándose por su utilidad [15], se ha realizado un gran esfuerzo de formalización desde el punto de vista del análisis y el control. Esto ha permitido dar al control borroso de una base formal centrada en la teoría de control no lineal [4]. Inicialmente se incorporaron los métodos clásicos: el criterio de hiperestabilidad de Popov [88, 132], las técnicas de análisis en el plano de fase [94], y el método de la función descriptiva [19]. Posteriormente se han incorporado otras técnicas inspiradas en las herramientas del control no lineal [7], métodos basados en índices de estabilidad y robustez de sistemas [18], métodos basados en la teoría de estabilidad de Lyapunov [12, 16, 49, 103, 125], y soluciones en base a *Linear Matrix Inequalities* (LMI) [112, 126, 127, 133], entre otros.

Recientemente, se ha prestado mucha atención al control borroso para manipuladores robóticos [107]. Las leyes de control diseñadas en [122] consistían en un controlador borroso estándar y un término de control de supervisión, que garantizaba la estabilidad del sistema en lazo cerrado. En [80], se derivaron dos esquemas de control borroso para una clase de sistemas dinámicos multivariables no lineales continuos e inciertos.

En [63], se presenta un controlador basado en modelos borrosos de valores de intervalo para manejar los efectos de la incertidumbre en un sistema complejo. Teóricamente, los controladores basados en modelos pueden ser la opción ideal, sin embargo, son muy sensibles a las incertidumbres del modelo y carecen de robustez. También son computacionalmente costosos, siendo inutilizables para muchas aplicaciones reales. El controlador propuesto está desarrollado para un robot paralelo y su objetivo es manejar las incertidumbres en el modelo. El controlador diseñado también satisface las restricciones de complejidad computacional para la implementación en tiempo real.

En [120], se supone que un manipulador robótico con incertidumbre estructurada e incertidumbre no estructurada puede separarse como dos subsistemas: uno nominal con un conocimiento dinámico preciso y uno incierto con un conocimiento dinámico desconocido. El controlador borroso actúa como compensador.

Es bien sabido que el retraso puro de tiempo es a menudo inherente a los sistemas dinámicos, lo que puede ser una fuente importante de inestabilidad y de degradación en el rendimiento del control. La existencia de retrasos puros

generalmente trae efectos negativos al rendimiento estático y dinámico de los sistemas borrosos. Además, los retrasos puros hacen que sea muy difícil analizar el rendimiento del sistema.

Se desarrolló un controlador adaptativo borroso para sistemas no lineales con retrasos puros y dirección de control desconocida en [65]. Inicialmente, se construye un observador de orden completo con las ganancias calculadas mediante una LMI. Luego, el controlador se diseña de tal manera que el sistema en lazo cerrado sea asintóticamente estable. Además, cuando las funciones vinculadas a las incertidumbres no están disponibles, el sistema adaptativo de lógica borrosa se emplea para aproximar la función incierta, y se diseña el controlador correspondiente.

Se obtuvo un control borroso adaptativo para teleoperadores no lineales con retrasos de tiempo en [90], para asegurar la sincronización de posiciones y velocidades de los manipuladores maestro y esclavo. Mediante la linealización por realimentación, la dinámica no lineal del sistema de teleoperación se transforma en dos subsistemas: control de posición maestro-esclavo local con dinámica sin modelar y sincronización de movimiento retardado. Luego, basándose en los sistemas lineales de salto de LMI y Markov, se desarrollaron estrategias de control borroso adaptativo para los teleoperadores no lineales con incertidumbres de modelado y perturbaciones externas mediante el uso de la propiedad de aproximación de los sistemas de lógica borrosa.

El problema del control borroso adaptativo para una clase de sistemas no lineales sin forma estricta de realimentación se analiza en [36]. Se propone un esquema de control borroso adaptativo para sistemas no lineales con retrasos y con una no linealidad desconocida de zona muerta. El controlador borroso adaptativo propuesto garantiza que todas las señales en lazo cerrado se limiten de manera semiglobalmente uniforme y que el error en régimen permanente converja cerca del origen.

En definitiva, la diversidad de tecnologías que pueden combinarse con la lógica borrosa, junto con su potencia y flexibilidad, hacen que esta técnica de modelado y control posea múltiples campos de aplicación en muy diversos ámbitos, y que a nivel de investigación sigan produciéndose avances y nuevas propuestas constantemente.

2.3. Modelos Borrosos de T-S

Es bien sabido que un controlador eficaz y robusto requiere un modelo preciso y eficiente. En 1993, T. Takagi y M. Sugeno desarrollaron un método interesante para identificar sistemas no lineales utilizando datos de entrada-salida basado en lógica borrosa [124]. Los sistemas de control no lineal basados en el modelo borroso de T-S han atraído bastante atención, por ejemplo en [38, 50, 76, 87, 97, 129, 134]. El método de T-S permite la identificación global de un sistema no lineal

como un conjunto de sistemas linealizados mediante una interpolación borrosa, y proporciona una solución potente para el desarrollo de la función de aproximación, técnicas sistemáticas de análisis de estabilidad y diseño de controladores borrosos mediante técnicas que surgen de la teoría de control lineal.

En [72], se ha presentado un enfoque para mejorar la estimación de los modelos de T-S. El problema es que el método de identificación original de T-S no se puede aplicar cuando las funciones de pertenencia son triangulares y superpuestas por pares. Esto restringe el uso de este tipo de funciones de pertenencia que han sido muy utilizadas en el diseño de controladores y son populares para aplicaciones industriales. Para buscar una solución óptima exacta, se utiliza el método de norma mínima, aunque se aumenta la complejidad y el coste computacional. Otro enfoque diferente fue desarrollado en [5], que puede considerarse como una versión generalizada del método de T-S. Este método simple con poco coste computacional añadido se basa en una ponderación de parámetros. En [10], este método de identificación T-S se ha extendido al caso multivariable. Estos métodos se caracterizan por la alta precisión obtenida para modelar sistemas no lineales en comparación con el método original de T-S.

Para diseñar un control borroso se pueden aplicar varias metodologías de diseño de control basadas en la realimentación de estado. Al utilizar el método de asignación de polos, por ejemplo, se pueden lograr las características deseadas y la coincidencia de la dinámica de todos los subsistemas, asegurando la estabilidad del sistema realimentado resultante. Sin embargo, esta metodología puede llevar a sistemas donde la acción de control excede los límites permitidos. Si la selección de los polos de lazo cerrado saturan las señales de control, el comportamiento dinámico del sistema no será el mismo que el comportamiento deseado, incluso puede volverse inestable. Por otro lado, la selección óptima de polos en lazo cerrado conducirá a un equilibrio entre la velocidad de respuesta dinámica y el esfuerzo de control. El método del Regulador Lineal Óptimo (LQR) podría ser una elección adecuada. Con este método no se podría garantizar la estabilidad, que debe analizarse a posteriori, obteniendo a cambio un equilibrio entre el comportamiento estático y dinámico del sistema con acciones de control admisibles. La selección óptima de las matrices de diseño Q y R determina la velocidad dinámica del controlador, así como las amplitudes de las variables de estado y las señales de control. Por ejemplo, si R se selecciona pequeño mientras que Q se selecciona grande, se logrará más estabilidad con grandes esfuerzos de control [6, 8, 73].

En [6] se propone un método mediante un algoritmo iterativo al aplicar el filtro de Kalman extendido (EKF), basado en la misma idea de ponderación de parámetros. Se muestra que el EKF es una herramienta efectiva en la identificación del modelo borroso de T-S. Se propone un control borroso LQR para mostrar la efectividad del método de estimación y el controlador desarrollado.

En [73], se utiliza un método de control por realimentación borrosa para controlar los sistemas no lineales descritos por los sistemas borrosos de T-S. Se diseña un controlador óptimo utilizando LQR y los resultados indican la robustez del algoritmo de control propuesto.

Se presentan varios algoritmos de control borroso LQR en [8]. El controlador propuesto se basa en el cálculo de la acción de control en cada punto del espacio de estado de acuerdo con las propiedades dinámicas del sistema no lineal en ese punto. Esta metodología de control ofrece una respuesta dinámica robusta, bien amortiguada y error en régimen permanente nulo. Se elige un sistema de robot de dos grados de libertad para evaluar la superioridad de los algoritmos de controlador propuestos en comparación con otros enfoques.

En [82], se presenta el control borroso de una clase de sistemas multivariables no lineales sujetos a incertidumbres en los parámetros. La planta no lineal es de orden nueve con n entradas. Si la matriz de entrada del modelo borroso es invertible, se puede diseñar un control borroso de tal manera que los estados del sistema en lazo cerrado sigan los de un modelo de referencia estable definido por el usuario a pesar de la presencia de incertidumbres.

En [37] se presenta un diseño de control robusto borroso que combina H_∞ con control borroso de T-S para el control de sistemas no lineales con retrasos puros afectados por perturbaciones externas. Se diseña un control borroso no lineal basado en esquemas de compensación distribuida en paralelo (PDC). El diseño del controlador se reformula como un problema de LMI. Este método robusto está diseñado para superar el error de modelado de sistemas no lineales con retrasos mediante modelos borrosos de T-S.

El control borroso del movimiento longitudinal de un avión mediante el modelo de T-S se presenta en [67]. El modelo de Takagi-Sugeno se utiliza para el diseño de un controlador PDC en el espacio de estado, y se garantiza la estabilidad del lazo cerrado y el seguimiento de la señal de referencia.

Se examinan los problemas de control robusto para sistemas borrosos de T-S inciertos con retrasos distribuidos y retrasos de entrada en [89]. El propósito es diseñar un control borroso por realimentación de estado de manera que el sistema en lazo cerrado sea robusto. Se obtienen condiciones suficientes en forma de LMI para resolver el problema utilizando una función de Lyapunov adecuada junto con algunas técnicas de transformación matricial.

En [66] se presenta un control borroso de T-S con retrasos y términos afines, que se pueden aplicar a algunos sistemas no lineales. En primer lugar se derivan condiciones de estabilidad suficientes para los modelos de T-S propuestos. Se realiza el análisis de estabilidad y la síntesis de PDC a través de LMI y sus técnicas asociadas.

El diseño de la ley de control con un observador se presentó en [61] para modelos borrosos de T-S donde las no linealidades y las variables involucradas no

son medibles. Los resultados proporcionan condiciones de estabilización suficientes para el bucle global, es decir, el modelo de T-S se estabiliza mediante una realimentación de estado y un observador borroso. Las condiciones de estabilidad se formulan mediante LMI.

En [2] se presenta un diseño de control borroso de seguimiento para sistemas no lineales. La metodología de diseño es una síntesis de la teoría de control de seguimiento multivariable lineal y el modelo borroso de T-S. Se utiliza un observador de estado, ya que no todos los estados del sistema son medibles, mientras que el modelo borroso de T-S se usa para representar la dinámica del sistema no lineal.

El problema de estimar simultáneamente el estado y las entradas desconocidas en los sistemas de T-S se consideró en [84]. El observador propuesto está diseñado en base a la parte conocida del modelo borroso. Se presentan las condiciones en la convergencia asintótica del observador y el diseño garantiza un límite definitivo en la señal de error.

El enfoque del modelo borroso de T-S en [33] se extiende al análisis de estabilidad y diseño de control para sistemas no lineales en tiempo continuo y discreto con retrasos de tiempo. Las condiciones de estabilidad se derivan utilizando el enfoque Lyapunov-Krasovskii. Se presenta un enfoque de estabilización para sistemas no lineales con retraso temporal a través de la realimentación borrosa de estado mediante un observador borroso.

En [108], se considera el control en red de sistemas no lineales. Para este propósito, la metodología de control selectivo variable se extiende a los sistemas no lineales. Esta extensión no lineal se basa en la descomposición del sistema no lineal en un conjunto de subsistemas linealizados localmente de conjuntos borrosos mediante el modelo de T-S, y la aplicación adicional de la metodología de control selectivo variable a cada subsistema.

2.4. Conjuntos Borrosos Multidimensionales

Uno de los problemas de los métodos tradicionales basados en lógica borrosa, para un espacio borroso multidimensional, es la inferencia automática de las 1DMF. La inferencia borrosa es un método fácil para obtener las reglas borrosas, pero las reglas generadas pueden colocarse en ubicaciones que generalmente no son óptimas y, en ocasiones, incluso no corresponden con los datos del sistema.

Para resolver este problema, se pueden aplicar las MDMF [118]. La idea principal es generar las funciones de pertenencia directamente en el espacio multidimensional, en lugar de generar las 1DMF para combinarlas mediante inferencia borrosa. Estas MDMF pueden ubicarse donde decida el diseñador, aunque se han desarrollado algunos algoritmos para facilitar esta tarea [1]. En [78], se utiliza un algoritmo de agrupamiento borroso (*fuzzy C-means* [29]) para el diseño de las

MDMF.

Existen algunas variaciones de los algoritmos de agrupamiento borroso que obtienen las reglas borrosas para la mejor separación de datos en problemas de agrupamiento. Algunos ejemplos de estos algoritmos son: *fuzzy C-means* [22, 77, 116, 143], Gustafson-Kessel [62, 114, 119], Gath-Geva [52], y otros enfoques [58]. En lugar de estos métodos de agrupación, en este trabajo se propone un enfoque basado en el diseño de las MDMF mediante un GA. Una ventaja importante del método que se describe en este trabajo, basado en el GA, con respecto a los enfoques deterministas de agrupamiento borroso es que la función objetivo propuesta para el GA está diseñada para encontrar los parámetros de las MDMF que minimicen directamente el error de identificación de T-S.

Se ha intentado otro enfoque para el ajuste óptimo de las MDMF a través de una variación de un algoritmo desarrollado en [6, 24]. El algoritmo realiza un ajuste recursivo de los antecedentes de T-S a través de un EKF [21]. Sin embargo, al utilizar este método, la convergencia de las MDMF no está garantizada. Otro enfoque intentado se basa en el método del gradiente, pero es más lento que los GA y es fácil caer en un mínimo local. Una aplicación del método del gradiente para optimizar un modelo borroso de T-S se puede encontrar en [60].

2.5. Control Borroso Multiestrategia

Hay pocos trabajos realizados sobre controladores multiestrategia y ninguno con el mismo enfoque sobre combinar diferentes estrategias de control mediante un sistema borroso. Los trabajos más similares se basan en emplear un sistema borroso para modificar las ganancias de un mismo regulador PID, haciendo nulos algunos parámetros del regulador en algunas reglas para conseguir así, por ejemplo, un control que sea puramente proporcional en las zonas más alejadas, e introduciendo las componentes integral y derivativa en la zona más cercana al punto de operación [47]. No obstante, es importante remarcar que en realidad están empleando la misma estrategia de control PID en todas las reglas, introduciendo solamente una anulación de parámetros para modificar las estrategias. En este trabajo, en cambio, lo que se propone es emplear diferentes metodologías de control, con diferentes algoritmos y diferentes modelos de estado.

El tipo más básico de control multiestrategia es el que se presenta en [106]. Este método se basa en variar las diferentes señales a controlar según las etapas del proceso. Es el mismo caso que se encuentra en el control industrial de los aerogeneradores [30]. En el control industrial de los aerogeneradores, según su zona de funcionamiento se cierran unos u otros lazos de control, manteniendo algunos en lazo abierto a través de tablas de optimización basadas en los modelos aerodinámicos.

Por otro lado, en [109] se propone la combinación de varios controladores,

ambos proporcional-integral (PI) pero con diferente parametrización, en función de las frecuencias a las que opera un sistema. De esta forma, se produce una separación de las frecuencias mediante ambos filtros paso bajo y paso alto, posteriormente se aplican los diferentes controladores a ambas señales, y finalmente se combinan de nuevo para obtener una única señal de control.

2.6. Control de Sistemas Afectados por Ruido

Hoy en día el control predictivo basado en modelo (MPC) se formula generalmente en el espacio de estados. En la mayoría de los problemas prácticos, los estados del sistema no son directamente accesibles y deben ser estimados. La calidad de los estados estimados está muy relacionado con el rendimiento general de un MPC. Además, el uso de modelos de espacio de estados para el control predictivo generalizado (GPC) se propuso en [105].

La interpretación del MPC mediante modelos de espacio de estado [83] permite una generalización adecuada para casos más complejos, como sistemas multivariantes en presencia de ruido de medición. Los autores en [86, 101] mostraron cómo aplicar el modelo de respuesta a escalón en forma de espacio de estado y cómo desarrollar un algoritmo de MPC mediante la teoría del control estocástico óptimo. En [111], se muestra cómo se desarrolla un algoritmo tradicional de MPC mediante espacio de estados.

En [39, 40] se ha desarrollado una teoría de GPC, basada en un modelo que incluye un término integral en el modelo de ruido. Los observadores polinomiales se han incluido en el algoritmo de GPC [41] y la ponderación y restricción de los futuros incrementos de entrada.

La aplicación de la evaluación del rendimiento del bucle de control y las técnicas de evaluación comparativa para los bucles de control en procesos industriales se consideran en [130]. Un enfoque mediante espacio de estado se utiliza como descripción de los sistemas, proporcionando un método uniforme para manejar sistemas monovariantes, multivariantes y retrasos puros. La principal contribución es extender la idea del punto de referencia multivariable para incluir un GPC como referencia, mientras se mantiene la simplicidad y la facilidad para evaluar las variaciones de las entradas y salidas del sistema.

El análisis de las propiedades estocásticas del algoritmo de GPC se ha considerado en [32, 104]. Este análisis incluyó el cálculo de la varianza óptima de la salida del proceso y la salida de control obtenida mediante el uso de un GPC.

El diseño de los sistemas óptimos de control estocásticos del control lineal gaussiano (LQG) se considera en [59] para sistemas con diferentes retardos de tiempo. Los controladores basados en la ecuación de estado para los sistemas de control incluyen un KF y la realimentación del estado estimado. Una forma del principio de separación es válida para sistemas lineales que contienen retrasos

puros en entradas y salidas. Los términos de ruido del sistema y de la medición podrían estar correlacionados y ser coloreados o blancos.

En [98], se propuso un algoritmo para el autoajuste, suavizado o filtrado óptimo de retraso fijo para procesos multivariantes en tiempo discreto. La solución implica la factorización espectral de matrices polinomiales y supone el conocimiento de los parámetros del sistema y las estadísticas del ruido. Asumiendo que el sistema y las estadísticas de ruido son desconocidos, los parámetros del modelo del sistema se pueden estimar utilizando un EKF o mínimos cuadrados recursivos.

En cuanto al modelado de ruido coloreado, un enfoque importante se basa en el teorema de Wold [135]. Este teorema permite modelar el comportamiento estadístico de un ruido coloreado estacionario como la salida de un sistema discreto lineal alimentado con ruido blanco.

Si bien la formulación de espacio de estado mínimo del diseño de control es un enfoque más natural y conveniente para su uso con ordenadores, sobretodo para los sistemas multivariantes, tiene una limitación importante, el vector de estado no suele estar disponible para la medición directa. Como resultado, se ha aplicado mucho esfuerzo de investigación para el desarrollo de técnicas de observación de estado, especialmente el KF [93]. El observador de estado se emplea para generar una estimación que sustituya el vector de estado y que converja asintóticamente al vector de estado real y, por lo tanto, se pueda utilizar para el control mediante realimentación de estado. Desafortunadamente, esto no solo agrega complejidad al diseño, sino que el controlador se vuelve más dependiente del modelo del sistema, con la desventaja asociada de la disminución de robustez [31].

En [9], se ha propuesto un nuevo enfoque basado en modelos de estado incrementales para el modelado de sistemas multivariantes no lineales con retrasos puros descritos mediante un modelo borroso de T-S. Una de las características clave del enfoque es que el modelo de estado incremental propuesto en comparación con el modelo de estado discreto tradicional, resuelve de forma natural el problema de calcular el estado de referencia, ya que para un vector de salida deseado, se puede escoger como referencia un estado incremental nulo. Además, la acción de control en forma incremental es equivalente a introducir una acción integral, cancelando así los errores en régimen permanente. Por otro lado está la desaparición de los términos afines. Además, se desarrolla un nuevo observador de estado óptimo para sistemas borrosos multivariantes.

CAPÍTULO 3

CONTROL ÓPTIMO BASADO EN EL MODELO BORROSO INCREMENTAL DE T-S

Capítulo 3

CONTROL ÓPTIMO BASADO EN EL MODELO BORROSO INCREMENTAL DE T-S

Este capítulo parte de mi trabajo fin de máster y se centra en el modelo de estado incremental, uno de los fundamentos más importantes sobre el que se trabaja en esta tesis doctoral. Primero se describe el modelo de estado incremental y se desarrolla el control sobre un sistema linealizado. Después, se amplían los resultados sobre el sistema no lineal mediante el modelo borroso de T-S. Se detallan además algunos avances desarrollados en esta tesis doctoral, un modelo de estado reducido para el modelo borroso del aerogenerador y un controlador incremental paso a paso basado en control predictivo.

3.1. Control Óptimo Multivariable Lineal Basado en el Modelo Incremental

En esta sección se detalla el control óptimo multivariable basado en el modelo de estado incremental. Las ventajas del modelo de estado incremental en comparación con el modelo de estado discreto tradicional son que mediante el modelo de estado incremental la acción de control cancela el error en régimen permanente, se soluciona el problema de calcular el estado de referencia eligiendo cero como estado objetivo y se eliminan los términos independientes. Se aplican el LQR y el observador de estado óptimo para obtener una realimentación de estado óptima. La efectividad del método de control basado en el modelo de estado incremental, sobre el modelo de estado tradicional, se comprueba mediante la aplicación de los

controladores lineales sobre el modelo no lineal de un aerogenerador. Los resultados muestran que el control propuesto presenta una buena respuesta transitoria y error nulo en régimen permanente incluso en presencia de perturbaciones, no linealidades y errores de modelado.

3.1.1. Modelo de Estado Discreto Multivariable

Dado un sistema discreto multivariable con p entradas manipulables $u \in \mathfrak{R}^p$, r entradas no manipulables (perturbaciones medibles) $d \in \mathfrak{R}^r$ y q salidas $y \in \mathfrak{R}^q$, donde $q \leq p$, su modelo de ecuaciones en diferencias se puede obtener mediante el método de identificación entrada-salida de mínimos cuadrados. Se pueden utilizar los términos afines para evitar utilizar valores como incrementos sobre el punto de operación nominal:

$$\begin{aligned}
 y_i(k+1) = & a_{i0} + a_{i1}y_i(k) + a_{i2}y_i(k-1) + \cdots + a_{in_i}y_i(k-n_i+1) + \\
 & \sum_{j=1}^p (b_{ij1}u_j(k) + b_{ij2}u_j(k-1) + \cdots + b_{ijn_i}u_j(k-n_i+1)) + \\
 & \sum_{l=1}^r (b_{dil1}d_l(k) + b_{dil2}d_l(k-1) + \cdots + b_{diln_i}d_l(k-n_i+1))
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Para cada salida, la ecuación en diferencias se puede transformar en un modelo de estado discreto con términos afines

$$\begin{aligned}
 x_i(k) & \in \mathfrak{R}^{n_i} \\
 x_i(k+1) = & \begin{bmatrix} a_{i0} \cdot a_{i1} \\ a_{i0} \cdot a_{i2} \\ \vdots \\ a_{i0} \cdot a_{in_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{i1} & 1 & \cdots & 0 \\ a_{i2} & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ a_{in_i} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x_i(k) + \\
 & \begin{bmatrix} b_{i11} & b_{i21} & \cdots & b_{ip1} \\ b_{i12} & b_{i22} & \cdots & b_{ip2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1n_i} & b_{i2n_i} & \cdots & b_{ipn_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_p(k) \end{bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} b_{di11} & b_{di21} & \cdots & b_{dir1} \\ b_{di12} & b_{di22} & \cdots & b_{dir2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{di1n_i} & b_{di2n_i} & \cdots & b_{dirn_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1(k) \\ d_2(k) \\ \vdots \\ d_r(k) \end{bmatrix} \\
 y_i(k) = & a_{i0} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x_i(k)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

en notación matricial:

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= a_{xi} + A_i x_i(k) + B_i u(k) + B_{di} d(k) \\ y_i(k) &= a_{i0} + C_i x_i(k) \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde $a_{xi} \in \Re^{(n_i \times 1)}$, $A_i \in \Re^{(n_i \times n_i)}$, $B_i \in \Re^{(n_i \times p)}$, $B_{di} \in \Re^{(n_i \times r)}$ y $C_i \in \Re^{(1 \times n_i)}$.

Agrupando el sistema multivariable completo en un único modelo, se obtiene:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_q(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{x1} \\ a_{x2} \\ \vdots \\ a_{xq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_q(k) \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_p(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{d1} \\ B_{d2} \\ \vdots \\ B_{dq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1(k) \\ d_2(k) \\ \vdots \\ d_r(k) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_q(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{q0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_q(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

el cual puede ser representado como sigue:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= a_x + Ax(k) + Bu(k) + B_d d(k) \\ y(k) &= a_y + Cx(k) \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_q$, $a_x \in \Re^{(n \times 1)}$, $A \in \Re^{(n \times n)}$, $B \in \Re^{(n \times p)}$, $B_d \in \Re^{(n \times r)}$, $a_y \in \Re^{(q \times 1)}$, $C \in \Re^{(q \times n)}$ y algunos de los parámetros $a_{in_i}, b_{i1n_i}, \dots, b_{ipn_i}, b_{di1n_i}, \dots, b_{dirn_i}$ no son nulos. Como el modelo de estado se ha construido a partir de la identificación entrada-salida, entonces el modelo de estado será controlable y observable.

Las entradas no manipulables d no pueden usarse para la realimentación, pero esas entradas y la matriz B_d se pueden considerar en el observador de estado, mejorando así la estimación de estado.

3.1.2. Controlador y Observador de Estado Discreto

Para el cálculo de los parámetros del regulador por realimentación del estado se escoge el método del LQR discreto [21, 85] ya que permite un control óptimo ponderando la respuesta transitoria y la acción de control.

En el método LQR, ya que la referencia objetivo no es nula, el objetivo es

minimizar el índice de costo J , siendo necesarias las matrices de ponderación del estado Q y de la salida R , y conocer el estado y entrada de referencia, x_r y u_r .

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [(x(k) - x_r)^T Q (x(k) - x_r) + (u(k) - u_r)^T R (u(k) - u_r)] \quad (3.6)$$

Sin embargo, para las aplicaciones reales el objetivo es alcanzar una salida de referencia y_r , así que se propone un método sistemático cuyo objetivo es obtener las referencias de estado x_r y entrada u_r para una salida de referencia y_r .

Siendo la ecuación de estado discreto descrita en (3.5), el objetivo es alcanzar y_r . Entonces, las variables $x(k)$, $u(k)$ y $y(k)$ se consideran en régimen permanente (x_r , u_r y y_r). Entonces se debe cumplir:

$$\begin{aligned} x_r &= a_x + Ax_r + Bu_r + B_d d(k) \\ y_r &= a_y + Cx_r \end{aligned} \quad (3.7)$$

Reordenando:

$$\begin{aligned} (A - I)x_r + Bu_r &= -a_x - B_d d(k) \\ Cx_r &= y_r - a_y \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} (A - I) & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ u_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_x - B_d d(k) \\ y_r - a_y \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Despejando para x_r y u_r :

$$\begin{bmatrix} x_r \\ u_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - I) & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -a_x - B_d d(k) \\ y_r - a_y \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

y la acción de control entonces:

$$u(k) = K(x_r - x(k)) + u_r \quad (3.10)$$

Este método permite calcular la referencia de estado x_r y de entrada u_r de una forma sistemática. Sin embargo, la efectividad del método depende de la precisión del modelo estimado, así que las perturbaciones no modeladas y los errores de identificación producen errores en régimen permanente.

Por otra parte, ya que el estado $x(k)$ no es accesible directamente, es necesario emplear un observador de estado. Se ha escogido un observador de estado óptimo [9].

Siendo el sistema descrito en la ecuación (3.5), el observador se formula como:

$$x_e(k+1) = a_x + Ax_e(k) + Bu(k) + B_d d(k) + H(y(k) - (a_y + Cx_e(k))) \quad (3.11)$$

donde $H \in \Re^{(n \times q)}$.

El error de estimación es:

$$\begin{aligned} \varepsilon(k+1) = x(k+1) - x_e(k+1) = & (a_x + Ax(k) + Bu(k) + B_d d(k)) - \\ & (a_x + Ax_e(k) + Bu(k) + B_d d(k) + H(y(k) - (a_y + Cx_e(k)))) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Operando:

$$\varepsilon(k+1) = (A - HC)\varepsilon(k) \quad (3.13)$$

El observador óptimo [9] resuelve el problema de calcular una matriz H que minimice el índice de costo J :

$$J(H) = \alpha^T (A - HC)(A - HC)^T \alpha \quad (3.14)$$

$$\forall \alpha \in \Re^n$$

Se verifica en [9] que para cualquier valor de α se obtiene:

$$H = AC^T(CC^T)^{-1} \quad (3.15)$$

Tal como se define la matriz C en la representación de estado empleada, se cumple que:

$$CC^T = I \quad (3.16)$$

así que:

$$H = AC^T \quad (3.17)$$

3.1.3. Modelo de Estado Incremental

Como se ha comentado antes, el método propuesto para obtener el estado y entrada de referencia puede producir errores en régimen permanente. Este problema se puede resolver mediante el modelo de estado incremental [9].

Aplicando el modelo de estado discreto descrito en (3.5) para la muestra anterior $(k-1)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} x(k) &= a_x + Ax(k-1) + Bu(k-1) + B_d d(k-1) \\ y(k-1) &= a_y + Cx(k-1) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Restando (3.18) de (3.5), se consigue:

$$\begin{aligned} x(k+1) - x(k) &= A(x(k) - x(k-1)) + \\ &\quad B(u(k) - u(k-1)) + B_d(d(k) - d(k-1)) \\ y(k) - y(k-1) &= C(x(k) - x(k-1)) \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde se cancelan los términos independientes. Definiendo el estado incremental Δx , la entrada manipulable incremental Δu y la entrada no manipulable incremental Δd como sigue:

$$\begin{aligned} \Delta x(k) &= x(k) - x(k-1) \\ \Delta u(k) &= u(k) - u(k-1) \\ \Delta d(k) &= d(k) - d(k-1) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Sustituyendo (3.20) en (3.19), se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta x(k+1) &= A\Delta x(k) + B\Delta u(k) + B_d\Delta d(k) \\ y(k) &= y(k-1) + C\Delta x(k) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Se introducen p nuevos estados para completar la formulación, verificándose que:

$$y(k+1) = y(k) + C\Delta x(k+1) = y(k) + C(A\Delta x(k) + B\Delta u(k) + B_d\Delta d(k)) \quad (3.22)$$

Se define un nuevo vector de estado incremental extendido $x_a \in \Re^{(q+n)}$, obteniéndose el nuevo modelo de estado incremental como sigue:

$$\begin{aligned} x_a(k) &= \begin{bmatrix} y(k) \\ \Delta x(k) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y(k+1) \\ \Delta x(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & CA \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ \Delta x(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} CB \\ B \end{bmatrix} \Delta u(k) + \begin{bmatrix} CB_d \\ B_d \end{bmatrix} \Delta d(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ \Delta x(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.23)$$

En notación matricial, el modelo de estado extendido es:

$$\begin{aligned} x_a(k+1) &= A_a x_a(k) + B_a \Delta u(k) + B_{da} \Delta d(k) \\ y(k) &= C_a x_a(k) \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.1.4. Controlador y Observador para Estado Incremental

Para el control mediante el modelo de estado incremental se propone el método de LQR discreto [21, 85].

Si el objetivo de control es alcanzar la salida y_r en régimen permanente, en el modelo incremental es equivalente a alcanzar el estado extendido de referencia en el modelo incremental [9]:

$$x_{ar} = \begin{bmatrix} y_r \\ \Delta x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_r \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

La referencia de estado para el modelo incremental aparece de forma natural sin la necesidad de ningún cálculo, al ser el régimen permanente equivalente a un estado incremental nulo. Entonces la acción de control se describe como:

$$\Delta u(k) = K(x_{ar} - x_a(k)) = \begin{bmatrix} K_y & K_x \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} y_r \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y(k) \\ \Delta x(k) \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} K_y & K_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_r - y(k) \\ -\Delta x(k) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k) \quad (3.27)$$

$$K \in \Re^{(p \times (q+n))}, K_y \in \Re^{(p \times q)}, K_x \in \Re^{(p \times n)}$$

Si el sistema realimentado es estable y se alcanza el régimen permanente, se cumplen las siguientes condiciones:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta u(k) = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta x(k) = 0$$

y entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K_y (y_r - y(k)) = 0$$

Así que, si K_y es de rango q , se verifica que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = y_r$$

Entonces, el sistema controlado tiene error nulo en régimen permanente. La acción de control (3.27) es calculada en forma incremental (3.26), lo que es equivalente a aplicar una acción de control integral.

Por otra parte, se supone que la salida $y(k)$ es medible, pero el estado incremental $\Delta x(k)$ no es accesible directamente, así que se requiere un observador de estado.

La estimación de estado incremental puede obtenerse mediante el observador de estado descrito previamente:

$$\Delta x_e(k) = x_e(k) - x_e(k-1) \quad (3.28)$$

o directamente mediante un observador de estado incremental [9], el cual se formula como sigue:

$$\Delta x_e(k+1) = A\Delta x_e(k) + B\Delta u(k) + B_d\Delta d(k) + H(y(k) - y(k-1) - C\Delta x_e(k)) \quad (3.29)$$

donde los coeficientes de la matriz $H \in \Re^{(n \times q)}$ se obtienen mediante el observador de estado óptimo [9] descrito en (3.17).

Finalmente, el modelo de estado extendido es obtenido:

$$x_{ae}(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ \Delta x_e(k) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

3.1.5. Caso de Estudio: Modelo del Aerogenerador

En este apartado, se muestra mediante un ejemplo ilustrativo, un sistema de aerogenerador, la aplicación del método propuesto de control mediante el modelo de estado incremental en comparación con el control mediante modelo de estado tradicional. El sistema del aerogenerador elegido es un sistema multivariable y fuertemente no lineal.

3.1.5.1. Modelo del Aerogenerador

El diagrama de bloques de la figura 3.1 representa el comportamiento multivariable de un aerogenerador. Las entradas manipulables son el ángulo de referencia de las palas β_r y la referencia de la corriente de campo I_{f_r} . Las entradas no manipulables son la velocidad de viento v_w y la resistencia eléctrica R_L . Las salidas del sistema son la velocidad angular del rotor ω_r y la potencia generada P_g .

Las ecuaciones del modelo del aerogenerador están resumidas en la Tabla 3.1 [56]:

Se utilizan como coeficiente de potencia y mecánico, que modelan el comportamiento de la aerodinámica de las palas, los mostrados en la figura 3.2.

El modelo del aerogenerador incluye las funciones de transferencia que representan la dinámica del ángulo de las palas β y de la corriente de campo I_f con respecto a sus señales de referencia:

$$\beta(s) = \frac{1}{(1 + T_\beta s)^2} \beta_r(s) \quad (3.31)$$

$$I_f(s) = \frac{1}{1 + T_f s} I_{f_r}(s) \quad (3.32)$$

Teniendo en cuenta el orden de la dinámica de los subsistemas del aerogenerador: la dinámica del mecanismo de transmisión de orden 1, la dinámica del ángulo

Figura 3.1: Diagrama del aerogenerador.

Tabla 3.1: Ecuaciones del modelo no lineal del aerogenerador.

Elemento del aerogenerador	Variable	Ecuación
Aerodinámica	Ratio λ Coeficiente de potencia Par mecánico	$\lambda = \frac{R\omega_r}{v_w}$ $C_p = \lambda C_q(\lambda, \beta)$ $\tau_m = 0,5\rho\pi R^3 v_w^2 C_q$
Mecanismo de transmisión	Dinámica del eje de baja velocidad Velocidad de rotación del eje de alta velocidad Par electromagnético	$J_t \dot{\omega}_r = \tau_m - B_t \omega_r - \tau_g$ $\omega_g = N \omega_r$ $\tau_g = \frac{N}{\eta_g \eta_m} \tau_{em}$
Generador eléctrico	Potencia generada Par electromecánico Reactancia del generador	$P_g = \tau_{em} \omega_g$ $\tau_{em} = K^2 \frac{R_L}{R_L^2 + X_g^2} I_f^2 \omega_g$ $X_g = \alpha N \omega_r$

Figura 3.2: Coeficientes que modelan la aerodinámica de las palas. a) Coeficiente de potencia C_p . b) Coeficiente mecánico C_q .

de las palas de orden 2, y la dinámica de la intensidad de campo de orden 1; se puede concluir que la dinámica global del sistema para ambas salidas, velocidad de rotación del rotor y potencia generada, es de cuarto orden.

La tabla 3.2 resume los parámetros del aerogenerador y la tabla 3.3 describe uno de los posibles puntos de operación que se propone para la operación nominal del aerogenerador, sobre el que se linealiza el sistema para obtener el control lineal propuesto.

El modelo del aerogenerador funciona en tiempo continuo, pero los controladores propuestos se han desarrollado en tiempo discreto, así que se ha añadido al modelo un muestreador y un bloqueador de orden cero, eligiendo el tiempo de muestreo como $T = 0,05s$.

3.1.5.2. Controlador Basado en el Modelo de Estado Discreto Tradicional

Para obtener los controladores lineales propuestos, se ha identificado, mediante el método de mínimos cuadrados, el siguiente sistema linealizado, sobre el punto de operación nominal definido en la tabla 3.3:

$$\begin{aligned}\omega_r(k+1) = & 0,0012 + 2,7318\omega_r(k) - 2,4152\omega_r(k-1) + 0,6228\omega_r(k-2) + \\ & 0,0604\omega_r(k-3) + 0,4094v_w(k) - 0,7407v_w(k-1) + 0,3054v_w(k-2) + \\ & 0,0268v_w(k-3) - 0,00005\beta_r(k) - 0,0002\beta_r(k-1) - 0,0001\beta_r(k-2) - \\ & 0,000007\beta_r(k-3) - 0,0363I_{f_r}(k) - 0,0013I_{f_r}(k-1) + \\ & 0,0336I_{f_r}(k-2) + 0,0025I_{f_r}(k-3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_g(k+1) = & -0,7204 + 2,1484P_g(k) - 0,7796P_g(k-1) - 0,9047P_g(k-2) + \\ & 0,5357P_g(k-3) + 13,0373v_w(k) - 15,9819v_w(k-1) - 4,5794v_w(k-2) + \\ & 7,5706v_w(k-3) - 0,0014\beta_r(k) - 0,0065\beta_r(k-1) - 0,0051\beta_r(k-2) - \\ & 0,0011\beta_r(k-3) + 169,3539I_{f_r}(k) - 212,753I_{f_r}(k-1) - \\ & 57,8343I_{f_r}(k-2) + 101,6462I_{f_r}(k-3)\end{aligned}$$

Mediante el modelo obtenido con la identificación de mínimos cuadrados y siguiendo la metodología descrita en el apartado 3.1.1, se obtiene el modelo de estado discreto de la ecuación 3.5:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= a_x + Ax(k) + Bu(k) + B_d d(k) \\ y(k) &= a_y + Cx(k)\end{aligned}$$

donde:

$$x(k) \in \mathfrak{R}^8$$

Tabla 3.2: Parámetros del aerogenerador.

Parámetro	Símbolo	Valor
Radio del rotor	R	$4(m)$
Densidad del viento	ρ	$1,225(kg/m^3)$
Relación del engranaje	N	11
Momento de inercia	J_t	$15(m^2kg)$
Coefficiente de fricción viscosa	B_t	$0,2(Nms/rad)$
Constante del generador	K	$0,223(\Omega s/rad)$
Inductancia	α	$0,0178(\Omega s/rad)$
Eficiencia del generador	η_g	$0,6$
Eficiencia mecánica	η_m	$0,4$
Constante de tiempo del ángulo de las palas	T_β	1
Constante de tiempo de la intensidad de campo	T_f	$0,5$

Tabla 3.3: Punto de operación del aerogenerador.

Variable	Valor
Velocidad de viento v_w	$10,55(m/s)$
Resistencia eléctrica R_L	$4(\Omega)$
Intensidad de campo I_f	$2(A)$
Ángulo de las palas β	$7(^{\circ})$
Velocidad angular del rotor ω_r	$32,24(rad/s)$
Potencia generada P_g	$1791,8(W)$

$$y(k) = \begin{bmatrix} \omega_r(k) \\ P_g(k) \end{bmatrix}, u(k) = \begin{bmatrix} \beta_r(k) \\ I_{f_r}(k) \end{bmatrix}, d(k) = v_w(k)$$

$$a_x = \begin{bmatrix} 0,0034 \\ -0,0030 \\ 0,0008 \\ 0,0001 \\ -1,5478 \\ 0,5617 \\ 0,6518 \\ -0,3859 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 0,4094 \\ -0,7407 \\ 0,3054 \\ 0,0268 \\ 13,0373 \\ -15,9819 \\ -4,5794 \\ 7,5706 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -0,00005 & -0,0363 \\ -0,0002 & -0,0013 \\ -0,0001 & 0,0336 \\ -0,000007 & 0,0025 \\ -0,0014 & 169,3539 \\ -0,0065 & -212,7530 \\ -0,0051 & -57,8343 \\ -0,0011 & 101,6462 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2,7318 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2,4152 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6228 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0604 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,1484 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,7796 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,9047 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5357 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_y = \begin{bmatrix} 0,0012 \\ -0,7204 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La velocidad de viento v_w es una entrada no manipulable por lo que no puede ser utilizada para la realimentación de estado. No obstante, la entrada v_w y la matriz B_d pueden ser consideradas como perturbaciones medibles para mejorar el rendimiento del observador de estado.

La matriz de realimentación de estado es diseñada mediante el método del LQR discreto, utilizando las siguientes matrices de ponderación:

$$Q = \text{diag}([1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1])$$

$$R = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Se obtienen las referencias de estado y referencia como se detalla en la ecuación (3.9):

$$\begin{bmatrix} x_r \\ u_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - I) & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -a_x - B_d d(k) \\ y_r - a_y \end{bmatrix}$$

Como se describe en la ecuación (3.10), la acción de control es:

$$u(k) = K (x_r - x(k)) + u_r$$

con:

$$K = \begin{bmatrix} -79,5628 & -77,8970 & -76,0858 & -74,136 \\ -0,0002 & -0,0001 & -0,00004 & 0,00005 \\ \cdots & -2,9806 & -2,9068 & -2,8207 & -2,7252 \\ & 0,0073 & 0,0020 & -0,0024 & -0,0006 \end{bmatrix}$$

El observador de estado, definido en la ecuación (3.11) es:

$$x_e(k+1) = a_x + Ax_e(k) + Bu(k) + B_d d(k) + H (y(k) - a_y - Cx_e(k))$$

con:

$$H = \begin{bmatrix} 2,7318 & 0 \\ -2,4152 & 0 \\ 0,6228 & 0 \\ 0,0604 & 0 \\ 0 & 2,1484 \\ 0 & -0,7796 \\ 0 & -0,9047 \\ 0 & 0,5357 \end{bmatrix}$$

3.1.5.3. Controlador Basado en el Modelo de Estado Incremental

El modelo incremental es descrito en la ecuación (3.24):

$$\begin{aligned} x_a(k+1) &= A_a x_a(k) + B_a \Delta u(k) + B_{da} \Delta d(k) \\ y(k) &= C_a x_a(k) \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} x_a(k) &= \begin{bmatrix} y(k) \\ \Delta x(k) \end{bmatrix}, y(k) = \begin{bmatrix} \omega_r(k) \\ P_g(k) \end{bmatrix}, \\ u(k) &= \begin{bmatrix} \beta_r(k) \\ I_{f_r}(k) \end{bmatrix}, d(k) = v_w(k) \end{aligned}$$

$$\Delta x(k) \in \Re^8, A_a \in \Re^{10 \times 10},$$

$$B_a \in \Re^{10 \times 2}, B_{da} \in \Re^{10 \times 1}, C_a \in \Re^{2 \times 10}$$

La matriz de realimentación de estado incremental es diseñada mediante el método del LQR discreto, utilizando las siguientes matrices de ponderación:

$$Q = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$R = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Como se describe en las ecuaciones (3.26) y (3.27), la acción de control es:

$$\Delta u(k) = K (x_{ar} - x_a(k))$$

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k)$$

con:

$$K = \begin{bmatrix} -0,9048 & -0,0209 & -721,0133 & -666,949 \\ -0,0001 & 0,0025 & -0,0636 & -0,0590 \\ \cdots & -613,4391 & -561,5192 & -0,7790 \\ & -0,0545 & -0,0501 & 0,0141 \\ \cdots & -0,5897 & -0,3961 & -0,2050 \\ & 0,0075 & 0,0018 & 0,0020 \end{bmatrix}$$

El observador de estado, descrito en las ecuaciones (3.29) y (3.30), es:

$$\Delta x_e(k+1) = A \Delta x_e(k) + B \Delta u(k) + B_d \Delta d(k) + H (y(k) - y(k-1) - C \Delta x_e(k))$$

$$x_{ae}(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ \Delta x_e(k) \end{bmatrix}$$

con la misma matriz de observación H obtenida en el apartado 3.1.5.2.

3.1.5.4. Análisis de Resultados

En todas las gráficas presentadas en este apartado, la respuesta del control mediante modelo de estado incremental se representa en línea continua y la respuesta del control mediante modelo discreto tradicional se representa en línea punteada. La señal de referencia se representa en línea rayada.

La figura 3.3 muestra el comportamiento dinámico del modelo del aerogenerador controlado mediante el método LQR y los modelos discreto tradicional e incremental, sujeto a cambios en la señales de referencia de la velocidad angular del rotor ω_r y la potencia generada P_g . Se puede ver que ambos controladores presentan una respuesta dinámica similar. Sin embargo, incluso con el método

Figura 3.3: Respuestas del sistema del aerogenerador ante cambios en las señales de referencia. a) Velocidad angular del rotor ω_r . b) Potencia generada P_g .

Figura 3.4: Respuestas del sistema del aerogenerador ante cambios en las señales de referencia y perturbaciones. a) Velocidad angular del rotor ω_r . b) Potencia generada P_g .

de ajuste de la referencia de estado x_r y entrada u_r , el sistema controlado mediante el LQR discreto presenta ligeros errores en régimen permanente, debido a los errores de modelado, que no aparecen en el sistema controlado mediante el modelo de estado incremental.

Para comparar el rendimiento de los controladores en presencia de perturbaciones, se aplican cambios en la velocidad de viento v_w y la resistencia de línea R_l . La figura 3.4 muestra el comportamiento dinámico del modelo del aerogenerador, controlado mediante el método LQR y los modelos discreto tradicional e incremental, ante cambios en la señales de referencia de la velocidad angular del rotor ω_r y la potencia generada P_g . Además, está sujeto a perturbaciones escalón en la velocidad de viento de $v_w = 10,55 \text{ m/s}$ a $v_w = 10,50 \text{ m/s}$ en $t = 10 \text{ s}$ y en la resistencia de línea de $R_l = 4,00 \Omega$ a $R_l = 4,01 \Omega$ en $t = 35 \text{ s}$. La figura 3.5 muestra el error de observación.

Se puede ver que el sistema controlado mediante el LQR discreto presenta error en régimen permanente, mientras que el control mediante modelo de estado incremental produce error nulo en régimen permanente incluso en presencia de

Figura 3.5: Errores de observación. a) Velocidad angular del rotor ω_r . b) Potencia generada P_g .

errores de modelado, no linealidades, y perturbaciones no modeladas.

Se puede ver que el observador de estado óptimo produce una rápida convergencia al error de observación nulo y mediante la consideración de la entrada v_w y la matriz B_d en la formulación del observador de estado, el error de observación producido por la perturbación de la velocidad del viento en $t = 10s$ tiene baja amplitud.

3.2. Control No Lineal Óptimo Multivariable Basado en el Modelo Incremental Borroso de T-S

En esta sección se detalla el control no lineal óptimo multivariable basado en el modelo de estado incremental de T-S. Mediante el modelo y la identificación de T-S se obtiene un modelo linealizado del sistema en cada regla borrosa que, mediante la interpolación borrosa, obtiene un modelo global óptimo para el sistema no lineal. Para obtener un controlador borroso se puede diseñar un controlador y observador para cada regla borrosa mediante cualquier metodología de control y de diseño de observadores, como los presentados en la sección 3.1. Las ventajas del modelo lineal de estado incremental se mantienen al emplearse en su extensión no lineal basada en el modelo borroso de T-S.

3.2.1. Modelo Borroso de T-S

Los sistemas no lineales pueden ser tratados mediante el modelo borroso de T-S, conocido un conjunto de variables medibles no lineales $[z_1(k), z_2(k), \dots, z_m(k)]$ del sistema, llamadas variables borrosas. Escogiendo un numero $[r_1, r_2, \dots, r_m]$ de conjuntos borrosos para esas variables, el sistema multivariable no lineal de orden n , s salidas, p entradas manipulables y r perturbaciones medibles, puede ser definido mediante reglas SI-ENTONCES como sigue:

$$\begin{aligned}
 &S^{(i_1 \dots i_m)}: \text{ Si } z_1(k) \text{ es } M_1^{i_1} \text{ y } \dots \text{ y } z_m(k) \text{ es } M_m^{i_m} \text{ entonces:} \\
 &y_i(k+1) = \\
 &a_{i0}^{(i_1 \dots i_m)} + a_{i1}^{(i_1 \dots i_m)} y_i(k) + a_{i2}^{(i_1 \dots i_m)} y_i(k-1) + \dots + a_{in_i}^{(i_1 \dots i_m)} y_i(k-n_i+1) + \\
 &\sum_{j=1}^p (b_{ij1}^{(i_1 \dots i_m)} u_j(k) + b_{ij2}^{(i_1 \dots i_m)} u_j(k-1) + \dots + b_{ijn_i}^{(i_1 \dots i_m)} u_j(k-n_i+1)) + \\
 &\sum_{l=1}^r (b_{dil1}^{(i_1 \dots i_m)} d_l(k) + b_{dil2}^{(i_1 \dots i_m)} d_l(k-1) + \dots + b_{dilin_i}^{(i_1 \dots i_m)} d_l(k-n_i+1))
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

En esta notación borrosa, j es el índice de la variable borrosa e i_j es el índice de la regla borrosa asociada con esa variable borrosa.

En cada regla, se puede transformar la ecuación en diferencias (3.33) en modelo de estado multivariable con términos independientes como se ha mostrado en el apartado 3.1.1:

$$S^{(i_1 \dots i_m)}: \text{ Si } z_1(k) \text{ es } M_1^{i_1} \text{ y } \dots \text{ y } z_m(k) \text{ es } M_m^{i_m} \text{ entonces:}$$

$$\begin{aligned} x(k+1) &= a_x^{(i_1 \dots i_m)} + A^{(i_1 \dots i_m)} x(k) + B^{(i_1 \dots i_m)} u(k) + B_d^{(i_1 \dots i_m)} d(k) \\ y(k) &= a_y^{(i_1 \dots i_m)} + Cx(k) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Además, se puede obtener el modelo expandido de estado incremental en cada regla borrosa mediante el método descrito en el apartado 3.1.3:

$$S^{(i_1 \dots i_m)}: \text{ Si } z_1(k) \text{ es } M_1^{i_1} \text{ y } \dots \text{ y } z_m(k) \text{ es } M_m^{i_m} \text{ entonces:}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y(k+1) \\ \Delta x(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & C^{(i_1 \dots i_m)} A^{(i_1 \dots i_m)} \\ 0 & A^{(i_1 \dots i_m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ \Delta x(k) \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} C^{(i_1 \dots i_m)} B^{(i_1 \dots i_m)} \\ B^{(i_1 \dots i_m)} \end{bmatrix} \Delta u(k) + \begin{bmatrix} C^{(i_1 \dots i_m)} B_d^{(i_1 \dots i_m)} \\ B_d^{(i_1 \dots i_m)} \end{bmatrix} \Delta d(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ \Delta x(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.35)$$

3.2.2. Método de Identificación de T-S

El método de identificación de T-S se basa en estimar los parámetros de un sistema no lineal minimizando un índice de coste cuadrático [124]. El método tradicional falla si las funciones de pertenencia de las reglas borrosas se definen triangulares y solapadas a pares, ya que la matriz de T-S no resulta de rango completo y entonces no es invertible [5]. Así que en [5, 10] se propone una identificación generalizada de T-S, utilizando un método de ponderación de parámetros.

Partiendo de la ecuación 3.33, la estimación borrosa de cada salida es:

$$\begin{aligned} \hat{y}_i(k+1) &= \sum_{i_1=1}^{r_1} \dots \sum_{i_m=1}^{r_m} \beta^{(i_1 \dots i_m)} (z_{(i_1 \dots i_m)}(k)) \left[a_{i_0}^{(i_1 \dots i_m)} + a_{i_1}^{(i_1 \dots i_m)} y_i(k) + \dots + \right. \\ &\quad \left. a_{i_{n_i}}^{(i_1 \dots i_m)} y_i(k - n_i + 1) + \sum_{j=1}^p b_{ij1}^{(i_1 \dots i_m)} u_j(k) + \dots + b_{ijn_i}^{(i_1 \dots i_m)} u_j(k - n_i + 1) + \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\sum_{l=1}^r b_{d_{il1}}^{(i_1 \dots i_m)} d_l(k) + \dots + b_{d_{iln_i}}^{(i_1 \dots i_m)} d_l(k - n_i + 1) \Big]$$

donde

$$\beta^{(i_1 \dots i_m)}(z_{(i_1 \dots i_m)}(k)) = \frac{\prod_{j=1}^m (\mu_{ji_j}(z_j(k)))}{\sum_{i_1=1}^{r_1} \dots \sum_{i_m=1}^{r_m} \left(\prod_{j=1}^m (\mu_{ji_j}(z_j(k))) \right)} \quad (3.37)$$

con $\mu_{ji_j}(z_j)$ siendo la función de pertenencia correspondiente al conjunto borroso $M_j^{i_j}$. Para el método de ponderación de parámetros, se supone conocido un modelo estimado de forma lineal mediante los siguientes parámetros:

$$P_0 = \begin{bmatrix} a_{i0}^0 & \dots & a_{in_i}^0 & b_{i11}^0 & \dots & b_{i1n_i}^0 & \dots & b_{ip1}^0 & \dots & b_{ipn_i}^0 \end{bmatrix}$$

Para obtener la estimación lineal, se puede aplicar el método de mínimos cuadrados al conjunto de datos del sistema. Esta estimación puede ser utilizada como parámetros de referencia para todos los subsistemas de T-S

$$p_0 = \underbrace{\begin{bmatrix} P_0 & P_0 & \dots & P_0 \end{bmatrix}^t}_{r_1 \cdot r_2 \dots r_m}$$

Entonces, los parámetros del modelo borroso se obtienen minimizando

$$J = \sum_{k=1}^{n_s} (y(k) - \hat{y}(k))^2 + \gamma^2 \sum_{i_1=1}^{r_1} \dots \sum_{i_m=1}^{r_m} \sum_{j=0}^n \left(p_j^0 - p_j^{(i_1 \dots i_m)} \right)^2 =$$

$$\|Y - XP\|^2 + \gamma^2 \|p_0 - P\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} Y \\ \gamma p_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X \\ \gamma I \end{bmatrix} P \right\|^2 = \|Y_a - X_a P\|^2$$

donde Y son los datos de salida, X son los datos borrosos entrada/salida y P son los parámetros del modelo borroso.

El factor γ representa el grado de confianza de los parámetros estimados inicialmente [5, 10]. Mediante este método, la matriz X_a es de rango completo, incluso si las funciones de pertenencia se definen como triangulares y solapadas a pares. Esto resuelve el problema en el que fallaba el método original de T-S. Finalmente, el vector P se puede calcular como:

$$P = (X_a^t X_a)^{-1} X_a^t Y_a \quad (3.38)$$

3.2.3. Diseño del Controlador Óptimo y Observador Óptimo Borrosos

Para calcular los coeficientes del controlador, se puede emplear cualquier metodología basada en la realimentación de estado. Se propone minimizar una función de coste definida en cada subsistema borroso en lugar de minimizar un coste global. La solución es subóptima pero con la ventaja de que es muy fácil de calcular. Para obtener el controlador borroso se propone el cálculo de una matriz de realimentación de estado en cada regla borrosa mediante el método del LQR discreto [85]. Mediante este método no se garantiza la estabilidad del sistema borroso global, que tendrá que ser comprobada posteriormente, aunque se realiza una compensación subóptima entre el comportamiento dinámico del sistema y la acción de control.

En el método LQR discreto para el estado incremental borroso, en cada regla se minimiza el siguiente índice de coste basado en las matrices borrosas de estado incremental de la ecuación 3.35:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x_a(k) - x_{ar})^t Q (x_a(k) - x_{ar}) + \Delta u(k)^t R \Delta u(k) \quad (3.39)$$

donde $Q \in \Re^{((q+n) \times (q+n))}$ y $R \in \Re^{(p \times p)}$ son matrices simétricas positivas. Se emplean las mismas matrices Q y R para el cálculo del LQR discreto en todos los subsistemas borrosos.

Entonces el controlador se define como:

$$S^{(i_1 \dots i_m)}: \text{ Si } z_1(k) \text{ es } M_1^{i_1} \text{ y } \dots \text{ y } z_m(k) \text{ es } M_m^{i_m} \text{ entonces:} \quad (3.40)$$

$$\Delta u(k) = K^{(i_1 \dots i_m)} (x_{ar} - x_a(k))$$

y la acción de control:

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k) \quad (3.41)$$

Como en general el estado $\Delta x(k)$ no es accesible, se necesita un observador de estado borroso formulado como:

$$S^{(i_1 \dots i_m)}: \text{ Si } z_1(k) \text{ es } M_1^{i_1} \text{ y } \dots \text{ y } z_m(k) \text{ es } M_m^{i_m} \text{ entonces:} \quad (3.42)$$

$$x_e(k+1) = a_x^{(i_1 \dots i_m)} + A^{(i_1 \dots i_m)} x_e(k) + B^{(i_1 \dots i_m)} u(k) + B_d^{(i_1 \dots i_m)} d(k) +$$

$$H^{(i_1 \dots i_m)} \left(y(k) - \left(a_y^{(i_1 \dots i_m)} + C^{(i_1 \dots i_m)} x_e(k) \right) \right)$$

La estimación de estado incremental podría obtenerse mediante este observador de estado como en la ecuación 3.28:

$$\Delta x_e(k) = x_e(k) - x_e(k-1)$$

o mediante una formulación borrosa de la ecuación 3.29.

Se propone el cálculo de la matriz de observación H para cada regla borrosa mediante el observador óptimo propuesto en el apartado 3.1.2 mediante la ecuación 3.17:

$$\begin{aligned} S^{(i_1 \dots i_m)}: & \text{ Si } z_1(k) \text{ es } M_1^{i_1} \text{ y } \dots \text{ y } z_m(k) \text{ es } M_m^{i_m} \text{ entonces:} \\ H^{(i_1 \dots i_m)} &= A^{(i_1 \dots i_m)} C^{(i_1 \dots i_m)T} \end{aligned} \quad (3.43)$$

3.2.4. Modelo de Estado Reducido e Identificación a Trozos del Aerogenerador

La representación de estado multivariable empleada en las secciones anteriores, basada en la identificación entrada/salida, es muy generalizada y es adecuada para la mayoría de problemas de control multivariable no lineal, sin embargo, como se detallará en el siguiente apartado, para el caso de estudio del aerogenerador plantea graves problemas de coste computacional, fundamentalmente en la identificación borrosa de T-S. En el método descrito de identificación se hace necesario estimar la enorme cantidad de parámetros que aparecen en las ecuaciones lineales, multiplicados por el número de reglas borrosas, que debido a la alta no linealidad del caso del aerogenerador, son muchas.

Para solucionar este problema, se plantea el uso de modelos de estado reducido y la identificación a trozos, que se basan en considerar un mayor número de salidas y entradas medibles pero de orden mucho menor que corresponderían a los subsistemas medibles del sistema, y considerar solamente las relaciones existentes entre dichos subsistemas. Este método requiere un análisis más detallado del sistema a controlar.

Partiendo de la figura 3.1, las ecuaciones de la tabla 3.1, y las ecuaciones 3.31 y 3.32, se puede observar que hay varios subsistemas separados, con relaciones marcadas entre ellos y con variables internas medibles (β y I_f). Así que en lugar de suponer dos salidas (ω_r y P_g) relacionadas con las tres entradas medibles (v_w , β_r y I_{f_r}) mediante subsistemas de orden 4, como se ha realizado en el apartado 3.1.5, se proponen las siguientes relaciones entrada/salida:

Mediante las ecuaciones no lineales de la tabla 3.1 se relaciona la salida ω_r con la entrada v_w y las variables internas β y I_f , mediante un subsistema no lineal de orden 1.

$$\dot{\omega}_r = f(\omega_r, v_w, \beta, I_f)$$

Mediante las ecuaciones no lineales de la tabla 3.1 se relaciona la salida P_g con la salida ω_r y la variable interna I_f , mediante un subsistema no lineal de transferencia directa (orden 0).

$$P_g = f(\omega_r, I_f)$$

Mediante la ecuación lineal 3.31 se relaciona la variable interna β con la entrada β_r mediante un subsistema lineal de orden 2.

$$\beta(s) = \frac{1}{(1 + T_\beta s)^2} \beta_r(s)$$

Mediante la ecuación lineal 3.32 se relaciona la variable interna I_f con la entrada I_{f_r} mediante un subsistema lineal de orden 1.

$$I_f(s) = \frac{1}{1 + T_f s} I_{f_r}(s)$$

De esta forma, el modelo no lineal del aerogenerador puede plantearse mediante las siguientes ecuaciones en diferencias, borrosas y lineales:

$$\begin{aligned} S^{(i_1 \dots i_m)}: \text{ Si } z_1(k-1) \text{ es } M_1^{i_1} \text{ y } \dots \text{ y } z_m(k-1) \text{ es } M_m^{i_m} \text{ entonces:} \\ \omega_r(k) = a^{(i_1 \dots i_m)} + b^{(i_1 \dots i_m)} \omega_r(k-1) + c^{(i_1 \dots i_m)} I_f(k-1) + \\ + d^{(i_1 \dots i_m)} \beta(k-1) + e^{(i_1 \dots i_m)} v_w(k-1) \\ P_g(k) = f^{(i_1 \dots i_m)} + g^{(i_1 \dots i_m)} \omega_r(k) + h^{(i_1 \dots i_m)} I_f(k) \\ \vdots \\ \beta(k) = i + j\beta(k-1) + k\beta(k-2) + l\beta_r(k-1) + m\beta_r(k-2) \\ I_f(k) = n + \tilde{n}I_f(k-1) + oI_{f_r}(k-1) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Construyendo el modelo de estado multivariable queda:

$$\begin{aligned} S^{(i_1 \dots i_m)}: \text{ Si } z_1(k-1) \text{ es } M_1^{i_1} \text{ y } \dots \text{ y } z_m(k-1) \text{ es } M_m^{i_m} \text{ entonces:} \\ \begin{bmatrix} I_f(k+1) \\ \beta(k+1) \\ x_\beta(k+1) \\ \omega_r(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ i \\ 0 \\ a^{(i_1 \dots i_m)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ c^{(i_1 \dots i_m)} & d^{(i_1 \dots i_m)} & 0 & b^{(i_1 \dots i_m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_f(k) \\ \beta(k) \\ x_\beta(k) \\ \omega_r(k) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} o & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & e^{(i_1 \dots i_m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{f_r}(k) \\ \beta_r(k) \\ v_w(k) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \omega_r(k) \\ P_g(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f^{(i_1 \dots i_m)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ h^{(i_1 \dots i_m)} & 0 & 0 & g^{(i_1 \dots i_m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_f(k) \\ \beta(k) \\ x_\beta(k) \\ \omega_r(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.45)$$

En la ecuación 3.44 se puede ver que, aunque hay que identificar más salidas, el número de parámetros a estimar es mucho menor. Además, la mitad de los subsistemas son lineales y no hacen necesaria una identificación de T-S. La identificación se ha simplificado significativamente y el coste computacional es mucho menor.

En el modelo de estado de la ecuación 3.45 se puede ver que la mayoría de estados son medibles y sólo es necesario el observador de estado para estimar la variable x_β . Además, el subsistema que necesita observador es lineal, por lo que no es necesario el uso de observadores de estado borrosos.

Aunque el cálculo de este nuevo modelo es más complejo y se ha perdido la generalidad, mediante este nuevo modelo de estado se han obtenido importantes ventajas:

- Algunos de los subsistemas son lineales, por lo que se simplifica significativamente su identificación.
- Se ha reducido el número de parámetros a identificar.
- Se ha reducido el tamaño de las matrices de estado.
- Muchos de los estados son variables medibles y se ha reducido la complejidad del observador de estado.

Es importante remarcar que estas ventajas dependen fundamentalmente del sistema de estudio, para otros sistemas podrían no cumplirse todas las ventajas simultáneamente e incluso ninguna. El modelo de estado reducido y la identificación a trozos solamente son ventajosos dependiendo del sistema en cuestión, hay casos en los que es adecuado y casos en los que no.

Por último, es necesario añadir que mediante este modelo de estado es posible calcular el modelo extendido incremental y emplear las estrategias de control y observación óptimas mediante los métodos descritos y desarrollados previamente, manteniendo las ventajas de todos ellos.

3.2.5. Caso de Estudio: Modelo del Aerogenerador

En este apartado se muestran los resultados obtenidos al aplicar los métodos de identificación y control borroso, detallados en la sección 3.2, al sistema no lineal del aerogenerador en su zona completa de operación.

Al contrario que en el apartado 3.1.5 donde se aplicaba un controlador lineal sobre el modelo del aerogenerador funcionando cerca de su punto de operación nominal, en este apartado se aplica un control no lineal sobre el modelo del aerogenerador trabajando en su rango de operación completo.

Para poder trabajar en el rango completo del aerogenerador, es necesario cumplir la denominada curva de potencia de la figura 3.6. Esta curva marca las

Figura 3.6: Curva de potencia del aerogenerador.

diferentes zonas de operación de un aerogenerador en función de la velocidad de viento y mediante esta curva de operación se van a definir las referencias de potencia generada P_{gr} .

3.2.5.1. Modelo Borroso de T-S

Para el modelo borroso de T-S del aerogenerador, se establecen como variables borrosas el mínimo número de variables que intervienen en las no linealidades del sistema. En este caso son: la velocidad de rotación del rotor ω_r , la velocidad de viento v_w , el ángulo de las palas β y la intensidad de campo I_f . Se escogen mediante un proceso de prueba y error las funciones de pertenencia de las figuras 3.7 y 3.8, asociadas a cada variable borrosa. El número de reglas borrosas viene determinado por la combinación de todos los conjuntos borrosos asociados a las funciones de pertenencia establecidas (figuras 3.7 y 3.8), en este caso $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 320$ reglas borrosas.

Si se emplea la identificación de T-S para el modelo de estado empleado en el apartado 3.1.5, para cada salida el número de columnas de la matriz de T-S obtenida sería $n^\circ \text{ parámetros} \cdot n^\circ \text{ reglas} = 17 \cdot 320 = 5440$.

Este enorme tamaño en la matriz de T-S hace que calcular su inversa sea muy

Figura 3.7: Funciones de pertenencia para el caso de estudio del aerogenerador.
 a) Velocidad de rotación del rotor ω_r . b) Velocidad de viento v_w .

Figura 3.8: Funciones de pertenencia para el caso de estudio del aerogenerador.
 a) Ángulo de las palas β . b) Intensidad de campo I_f .

pesado para un ordenador, además el enorme número de parámetros a estimar produce una mala identificación del sistema y finalmente un control que no resulta suficientemente robusto para el caso de estudio. Para solucionar este problema se recurre a los modelos de estado reducido y la identificación a trozos presentados en el apartado 3.2.3.

3.2.5.2. Modelo Borroso de Estado Reducido Incremental

Para obtener el controlador borroso propuesto para el modelo no lineal del aerogenerador, se ha identificado el sistema borroso mediante el método generalizado de T-S descrito en el apartado 3.2.2. Se han empleado las funciones de pertenencia establecidas previamente en las figuras 3.7 y 3.8, un factor de ponderación $\gamma = 10^{-6}$ y se ha empleado como primera estimación lineal para todos los subsistemas borrosos una primera identificación lineal mediante el método de mínimos cuadrados. Se han obtenido así la siguiente identificación borrosa a trozos de los subsistemas del aerogenerador:

$$\begin{aligned}
 S^{(1,1,1,1)}: & \text{ Si } \omega_r(k-1) \text{ es } M_{\omega_r}^1 \text{ y } v_w(k-1) \text{ es } M_{V_w}^1 \text{ y} \\
 & \text{ y } \beta(k-1) \text{ es } M_{\beta}^1 \text{ y } I_f(k-1) \text{ es } M_{I_f}^1 \text{ entonces:} \\
 \omega_r(k) &= 0,3305 + 0,9245\omega_r(k-1) - 0,5107I_f(k-1) - \\
 & 0,0707\beta(k-1) + 0,3106v_w(k-1) \\
 P_g(k) &= -1852,1820 + 51,3642\omega_r(k) + 1455,6191I_f(k) \\
 & \vdots \\
 \beta(k) &= 0 + 1,9025\beta(k-1) - 0,9048\beta(k-2) + 0,0012\beta_r(k-1) + 0,0012\beta_r(k-2) \\
 I_f(k) &= 0 + 0,9048I_f(k-1) + 0,0952I_{f_r}(k-1)
 \end{aligned}$$

Mediante el modelo borroso obtenido mediante la identificación de T-S y siguiendo la metodología descrita en el apartado 3.2.4, se obtiene el modelo de estado reducido discreto de la ecuación 3.45:

$$\begin{aligned}
 S^{(1,1,1,1)}: & \text{ Si } \omega_r(k-1) \text{ es } M_{\omega_r}^1 \text{ y } v_w(k-1) \text{ es } M_{V_w}^1 \text{ y} \\
 & \text{ y } \beta(k-1) \text{ es } M_{\beta}^1 \text{ y } I_f(k-1) \text{ es } M_{I_f}^1 \text{ entonces:} \\
 \begin{bmatrix} I_f(k+1) \\ \beta(k+1) \\ x_{\beta}(k+1) \\ \omega_r(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,3305 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,9048 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,9025 & 1 & 0 \\ 0 & -0,9048 & 0 & 0 \\ -0,5107 & -0,0707 & 0 & 0,9245 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_f(k) \\ \beta(k) \\ x_{\beta}(k) \\ \omega_r(k) \end{bmatrix} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0,0952 & 0 \\ 0 & 0,0012 \\ 0 & 0,0012 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{f_r}(k) \\ \beta_r(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,3106 \end{bmatrix} v_w(k) \\
 \begin{bmatrix} \omega_r(k) \\ P_g(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1852,1820 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1455,6191 & 0 & 0 & 51,3642 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_f(k) \\ \beta(k) \\ x_\beta(k) \\ \omega_r(k) \end{bmatrix} \\
 \vdots$$

Mediante esta representación de estado, la velocidad de viento v_w que es una entrada no manipulable, no puede ser utilizada para la realimentación de estado. Además en el único estado en que influye es ω_r , el cual es directamente medible, por lo que tampoco será necesario emplear la variable v_w para el observador de estado.

Las matrices de estado incremental, necesarias para el diseño del controlador, se obtienen empleando las matrices de cada regla del modelo de estado discreto como base y el método descrito en el apartado 3.1.3:

$$\begin{aligned}
 S^{(1,1,1,1)}: & \text{ Si } \omega_r(k-1) \text{ es } M_{\omega_r}^1 \text{ y } v_w(k-1) \text{ es } M_{V_w}^1 \text{ y} \\
 & \text{ y } \beta(k-1) \text{ es } M_\beta^1 \text{ y } I_f(k-1) \text{ es } M_{I_f}^1 \text{ entonces:} \\
 \begin{bmatrix} \omega_r(k+1) \\ P_g(k+1) \\ \Delta I_f(k+1) \\ \Delta \beta(k+1) \\ \Delta x_\beta(k+1) \\ \Delta \omega_r(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,5106 & -0,0707 & 0 & 0,9244 \\ 0 & 1 & 1290,8680 & -3,6334 & 0 & 47,4858 \\ 0 & 0 & 0,9048 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,9025 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,9048 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5107 & -0,0707 & 0 & 0,9245 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_r(k) \\ P_g(k) \\ \Delta I_f(k) \\ \Delta \beta(k) \\ \Delta x_\beta(k) \\ \Delta \omega_r(k) \end{bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 138,5204 & 0 \\ 0,0952 & 0 \\ 0 & 0,0012 \\ 0 & 0,0012 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta I_{f_r}(k) \\ \Delta \beta_r(k) \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \omega_r(k) \\ P_g(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_r(k) \\ P_g(k) \\ \Delta I_f(k) \\ \Delta \beta(k) \\ \Delta x_\beta(k) \\ \Delta \omega_r(k) \end{bmatrix} \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

El controlador borroso se obtiene mediante la aplicación del método del LQR discreto en cada regla borrosa, utilizando las siguientes matrices de ponderación:

$$Q = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} 1000 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$R = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

se obtienen las siguientes matrices de control borrosas:

$S^{(1,1,1,1)}$: Si $\omega_r(k-1)$ es $M_{\omega_r}^1$ y $v_w(k-1)$ es $M_{V_w}^1$ y $\beta(k-1)$ es M_{β}^1 y $I_f(k-1)$ es $M_{I_f}^1$ entonces:

$$K^{(1,1,1,1)} = \begin{bmatrix} -0,0166 & 0,0072 & 9,3567 & 0,0108 & 0,0213 & 0,2737 \\ -23,6706 & -0,0599 & 94,2739 & 267,3583 & 208,0579 & -170,6654 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

Una de las ventajas de emplear el método propuesto basado en el modelo de estado reducido y la identificación a trozos, es que la mayoría de estados son directamente medibles. En este caso el único estado no medible es $x_{\beta}(k)$. Además, este estado se relaciona con los demás mediante un subsistema estrictamente lineal, por lo que el observador de estado propuesto es un observador lineal, calculando la matriz H mediante el método del observador óptimo de la ecuación 3.17:

$$\begin{bmatrix} \beta_e(k+1) \\ x_{\beta_e}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,9025 & 1 \\ -0,9048 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_e(k) \\ x_{\beta_e}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0012 \\ 0,0012 \end{bmatrix} \beta_r(k) +$$

$$\begin{bmatrix} 1,9025 \\ -0,9048 \end{bmatrix} \left(\beta - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_e(k) \\ x_{\beta_e}(k) \end{bmatrix} \right)$$

$$\Delta x_{\beta_e}(k) = x_{\beta_e}(k) - x_{\beta_e}(k-1)$$
(3.46)

3.2.5.3. Análisis de Resultados

En las gráficas presentadas en este apartado, la respuesta del control propuesto se representa en línea continua y la señal de referencia se representa en línea rayada.

Para comprobar el rendimiento del controlador no lineal en presencia de perturbaciones y no linealidades, se aplican cambios excesivos en la velocidad de viento v_w y la resistencia de línea R_l . La figura 3.9 muestra el comportamiento dinámico del control del aerogenerador, ante cambios excesivos en la señales de referencia de la velocidad angular del rotor ω_r y la potencia generada P_g . Además, está sujeto a perturbaciones escalón en la velocidad de viento de $v_w = 10,55m/s$ a $v_w = 11,50m/s$ en $t = 10s$ y en la resistencia de línea de $R_l = 4,00\Omega$ a $R_l = 5,00\Omega$

Figura 3.9: Respuestas dinámicas del sistema del aerogenerador ante cambios excesivos en las señales de referencia y perturbaciones. a) Velocidad angular del rotor ω_r . b) Potencia generada P_g

en $t = 35s$.

Se puede ver que el sistema controlado mediante el controlador borroso propuesto presenta error nulo en régimen permanente incluso en presencia de errores de modelado, no linealidades, y perturbaciones no modeladas.

La operación nominal de un aerogenerador trata de mantener la velocidad angular del rotor ω_r y la potencia generada P_g a un valor constante definido por el máximo de la curva de potencia (figura 3.6). En la figura 3.10 se observa el comportamiento dinámico del aerogenerador controlado ante variaciones bruscas de velocidad de viento acotado en la zona de operación nominal.

Se puede ver que el sistema controlado mediante el controlador borroso propuesto presenta error nulo en régimen permanente y buena respuesta transitoria en el rango de operación nominal del aerogenerador.

En la operación de rango completo de un aerogenerador, las referencias de velocidad angular del rotor ω_r y potencia generada P_g varían en función de la velocidad de viento a través de la curva de potencia de la figura 3.6. En la figura 3.11 se observa el comportamiento dinámico del aerogenerador controlado

Figura 3.10: Respuestas dinámicas del sistema del aerogenerador ante cambios en la señal de velocidad de viento v_w acotada para la zona de operación nominal. a) Velocidad angular del rotor ω_r . b) Potencia generada P_g . c) Señal de velocidad de viento v_w .

Figura 3.11: Respuestas dinámicas del sistema del aerogenerador ante cambios en la señal de velocidad de viento v_w en todo el rango de operación del aerogenerador. a) Velocidad angular del rotor ω_r . b) Potencia generada P_g . c) Señal de velocidad de viento v_w .

ante variaciones aleatorias de velocidad de viento en todo el rango completo de funcionamiento del aerogenerador.

Se puede ver que el sistema controlado mediante el controlador borroso propuesto presenta error nulo en régimen permanente en la señal de potencia generada P_g y buena respuesta transitoria en el rango completo de operación del aerogenerador. La velocidad angular del rotor ω_r no puede llegar a la referencia nominal con velocidades de viento bajas, ya que no se ha diseñado una curva de velocidad de rotación en función del viento. En estos casos las señales del controlador quedan saturadas y solo se ajusta la potencia generada.

3.3. Controlador Borroso Predictivo Basado en el Modelo Incremental

En esta sección se detalla uno de los avances realizados en la tesis doctoral, el desarrollo de un nuevo controlador predictivo borroso basado en el modelo de

estado incremental. El desarrollo es similar al disponible en un artículo previo del grupo de investigación [8], pero realizado sobre el modelo de estado incremental descrito en la sección 3.1.

Al contrario que el controlador borroso propuesto en la sección 3.2, basado en la interpolación borrosa de los controladores lineales diseñados mediante el método del LQR discreto en cada regla borrosa, en este nuevo controlador se propone un método basado en el control predictivo paso a paso. De esta forma, en cada paso del control primero se obtiene el modelo incremental del sistema borroso interpolado, y sobre este se aplica el algoritmo de LQR discreto a un número de pasos determinado, equivalente al horizonte de predicción en los controladores predictivos tradicionales.

3.3.1. Control Predictivo Empleando Modelos Multivariables de Estado Incremental de T-S

Como es conocido, el control predictivo se basa en el conocimiento del modelo multivariable de la planta:

$$\begin{aligned} y(k+1) &= f(x(k_0), u(j)) \quad \forall \quad k_0 \leq j \leq k \\ y(k+1) &\in \mathfrak{R}^q \quad x(k_0) \in \mathfrak{R}^n \quad u(j) \in \mathfrak{R}^q \end{aligned} \quad (3.47)$$

Dado entonces un horizonte de predicción h , en el instante k_o , y una secuencia de salidas deseada

$$\{ y_r(j) \quad \forall \quad k_0 \leq j \leq k_o + h \}$$

se busca encontrar una secuencia

$$\{ u(j) \quad \forall \quad k_0 \leq j < k_o + h \}$$

que minimize un cierto índice

$$J = \sum_{j=k_0}^{k_o+h} g(y_r(j), y(j), u(j)) \quad (3.48)$$

aplicar la acción de control $u(k_0)$ y repetir el procedimiento para los valores de k sucesivos.

En los modelos de estado incremental, si se pretende obtener la referencia de salida y_r , el objetivo es alcanzar el estado de referencia

$$x_r = \begin{bmatrix} y_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

En el controlador propuesto el objetivo es encontrar la acción de control $\Delta u(k)$

que minimize el índice:

$$J = \sum_{j=0}^N (x_r - x_a(k+j))^T Q (x_r - x_a(k+j)) + \Delta u(k+j)^T R \Delta u(k+j) \quad (3.49)$$

donde N es el horizonte de predicción que debe ser mayor que el máximo retraso puro del sistema. Se supone que las matrices en la muestra k pueden ser razonablemente válidas para los próximos pasos. La acción de control $\Delta u(k)$ es calculada y las matrices son actualizadas para el próximo paso.

El controlador propuesto para resolver el índice de coste de la ecuación 3.49 es el algoritmo LQR a N pasos cuya solución es aplicar el siguiente algoritmo iterativo N veces.

$$\begin{aligned} K(i) &= [R + B_a^T(k)P(i+1)B_a(k)]^{-1} B_a^T(k)P(i+1)A_a(k) \\ P(i) &= Q + K^T(i)RK(i) + [A_a(k) - B_a(k)K(i)]^T P(i+1) [A_a(k) - B_a(k)K(i)] \end{aligned} \quad (3.50)$$

Comenzando el algoritmo con:

$$\begin{aligned} K(k+N) &= 0 \\ P(k+N) &= Q \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \Delta u(k) &= K(k) (x_r - x_a(k)) \\ u(k) &= u(k-1) + \Delta u(k) \end{aligned} \quad (3.51)$$

3.3.2. Caso de Estudio: Modelo del Aerogenerador

En este apartado se muestran los resultados obtenidos al aplicar el controlador predictivo incremental propuesto en esta sección 3.3 al sistema no lineal del aerogenerador en su zona completa de operación. Los métodos de identificación, modelado y diseño de observación de estado son los mismos detallados en la sección 3.2, ya que el único elemento reemplazado en el método es el controlador. Además, en este apartado se ha tratado de mantener toda la parametrización posible y las condiciones de simulación del apartado 3.2.5, a fin de validar el nuevo controlador propuesto contrastando con un controlador ya validado previamente.

Los parámetros de ajuste del controlador LQR a N pasos (Q y R), se han mantenido iguales al del controlador LQR discreto del apartado 3.2.5:

$$\begin{aligned} Q &= \text{diag} \left(\begin{bmatrix} 1000 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ R &= \text{diag} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Figura 3.12: Respuestas dinámicas del sistema del aerogenerador ante cambios excesivos en las señales de referencia y perturbaciones. a) Velocidad angular del rotor ω_r . b) Potencia generada P_g .

mientras que el nuevo parámetro de diseño, el horizonte de predicción, se ha establecido en el doble del número de estados del modelo incremental propuesto, entonces $N = 12$.

3.3.2.1. Análisis de Resultados

En las gráficas presentadas en este apartado, la respuesta del control propuesto se representa en línea continua y la señal de referencia se representa en línea rayada.

Las figuras 3.12, 3.13 y 3.14 muestran el rendimiento del controlador no lineal aplicado al aerogenerador en los casos de cambios excesivos en las referencias y perturbaciones, variaciones bruscas de velocidad de viento en la zona de operación nominal, y variaciones aleatorias de velocidad de viento en todo el rango completo de funcionamiento del aerogenerador, respectivamente. De esta forma se simulan las mismas condiciones que en el apartado 3.2.5.3.

Se puede ver que el sistema controlado mediante el controlador predictivo incremental propuesto presenta error nulo en presencia de errores de modelado,

Figura 3.13: Respuestas dinámicas del sistema del aerogenerador ante cambios en la señal de velocidad de viento v_w acotada para la zona de operación nominal. a) Velocidad angular del rotor ω_r . b) Potencia generada P_g . c) Señal de velocidad de viento v_w .

Figura 3.14: Respuestas dinámicas del sistema del aerogenerador ante cambios en la señal de velocidad de viento v_w en todo el rango de operación del aerogenerador. a) Velocidad angular del rotor ω_r . b) Potencia generada P_g . c) Señal de velocidad de viento v_w .

no linealidades, y perturbaciones no modeladas. El sistema presenta una buena respuesta transitoria en todo el rango de operación y un rendimiento muy similar al controlador previamente validado.

3.4. Conclusión

En este capítulo, se han mostrado las ventajas del modelo de estado incremental sobre el modelo de estado tradicional. Primero, se eliminan los términos afines. Segundo, se soluciona el problema del cálculo del estado de referencia. Tercero, se obtiene un control con errores nulos en régimen permanente. Por otro lado, se ha desarrollado un modelo de estado reducido mucho más adecuado para el modelo borroso del aerogenerador. Además, se ha diseñado un nuevo método de control predictivo óptimo borroso basado en el modelo de estado incremental.

CAPÍTULO 4

FUNCIONES DE PERTENENCIA MULTIDIMENSIONALES EN MODELOS BORROSOS DE T-S

Capítulo 4

FUNCIONES DE PERTENENCIA MULTIDIMENSIONALES EN MODELOS BORROSOS DE T-S

En este capítulo se propone un nuevo método para la identificación, modelado y control de T-S basado en MDMF. Se comprueba mediante un ejemplo, consistente en un caso de estudio de tanques acoplados, cómo el método tradicional basado en la inferencia borrosa de 1DMF puede generar reglas borrosas inapropiadas para el modelado y control de sistemas multivariables no lineales. Por otro lado, la aplicación de las MDMF permiten una mejor identificación mediante un menor número de reglas borrosas. Para el ajuste de estas MDMF se propone un GA y el método de T-S para la identificación del sistema no lineal.

4.1. Modelo de T-S Basado en MDMF

En la sección posterior 4.4 se comprobará mediante un ejemplo multivariable cómo la inferencia borrosa de 1DMF, incluso aunque estas sean correctamente diseñadas, puede generar reglas borrosas que no son óptimas para el modelo multivariable no lineal, e incluso las reglas generadas pueden no corresponder con los datos del sistema, lo que produce una pérdida de optimalidad y un coste computacional innecesario.

En lugar de ese método tradicional, se pueden emplear MDMF cuya principal ventaja es que están directamente diseñadas en el espacio multidimensional. Al-

gunos algoritmos, como los métodos de agrupamiento [78, 118], permiten el ajuste automático de las MDMF. Estas funciones de pertenencia pueden ser diseñadas con formas diferentes, como por ejemplo pirámides multidimensionales [1].

El enfoque propuesto en este trabajo para los conjuntos borrosos multidimensionales M^i es como sigue. La variable borrosa se define como:

$$z = [z_1 \quad z_2 \quad \cdots \quad z_f]^t$$

$$z \in \mathbb{R}^f$$

y la MDMF $\mu_i(z)$.

Para cada conjunto borroso multidimensional M^i se diseña un punto central $z_i \in \mathbb{R}^f$ y para cada muestra de la variable borrosa $z(k) \in \mathbb{R}^f$ se define una distancia cuadrática como:

$$d_i(z(k)) = \sum_{j=1}^f p_{ij} (z_j(k) - z_{ij})^2 \quad p_{ij} \geq 0 \quad (4.1)$$

donde $p_i \in \mathbb{R}^f$ es un parámetro vectorial de diseño que pondera las distancias.

La MDMF, mostrada en la figura 4.1, se define como:

$$\mu_i(z(k)) = \frac{1}{1 + d_i(z(k))} \quad (4.2)$$

que presenta la ventaja de ser 1 para el punto central y entre 0 y 1 para el resto del espacio. La función decrece según la variable se aleja del punto central. Además, la función es derivable respecto de cualquiera de los parámetros z_i y p_i .

Esta función propuesta es una aproximación de una función gaussiana de base radial con menor coste computacional. Esto es importante porque las mismas reglas borrosas empleadas para las etapas de modelado e identificación deben ser aplicadas también en la etapa de control, la cual es en línea y por tanto el tiempo de computación puede volverse crucial.

El modelo borroso del sistema con n_r reglas es:

$$S^i: \text{ Si } z(k) \text{ es } M^i \text{ entonces:}$$

$$y_1(k+1) = a_{10}^i + a_{11}^i y_1(k) + \cdots + a_{1n_1}^i y_1(k - n_1 + 1) +$$

$$\sum_{j=1}^p b_{1j1}^i u_j(k) + \cdots + b_{1jn_1}^i u_j(k - n_1 + 1) \quad (4.3)$$

Figura 4.1: MDMF propuesta.

Y entonces el sistema:

$$\begin{aligned} \hat{y}_1(k+1) = & \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i(z(k)) [a_{10}^i + a_{11}^i y_i(k) + \dots + a_{1n_1}^i y_i(k - n_1 + 1) + \\ & \sum_{j=1}^p b_{1j1}^i u_j(k) + \dots + b_{1jn_1}^i u_j(k - n_1 + 1)] \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde

$$\alpha_i(z(k)) = \frac{\mu_i(z(k))}{\sum_{i=1}^{n_r} \mu_i(z(k))} \quad (4.5)$$

En caso de que las variables de estado del sistema fueran directamente medibles, el modelo de la ecuación 4.3 puede ser tratado también mediante un modelo de estado discreto como:

$$\begin{aligned} S^i: \text{ Si } z(k) \text{ es } M^i \text{ entonces:} \\ x(k+1) = a_0^i + A^i x(k) + B^i u(k) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Entonces, la identificación borrosa de T-S puede ser realizada directamente con modelos de estado como se describe en [10], siguiendo una formulación muy similar a la tratada en la sección 3.2.

4.2. Diseño de las MDMF Basado en GA

En la sección previa se definen las MDMF, pero los parámetros de las funciones (z_i y p_i) deben ser calculados para una identificación de T-S óptima. Para obtener los parámetros de las MDMF (antecedentes) y los parámetros del modelo de T-S (consecuentes), se han probado varios métodos aplicando diferentes algoritmos de ajuste.

El primer algoritmo se basa en el ajuste óptimo de las MDMF mediante una variación del algoritmo desarrollado en [6, 24]. El algoritmo lleva a cabo un ajuste recursivo de los antecedentes de T-S mediante un EKF [21]. Sin embargo, con este método no se garantiza la convergencia de las MDMF. Un segundo método ha consistido en aplicar un algoritmo de optimización basado en el método del gradiente [60], aunque este algoritmo ha resultado demasiado lento y los antecedentes obtenidos podrían corresponder a un mínimo local.

Finalmente, se ha aplicado un método basado en GA [54, 55]. Los antecedentes de T-S son ajustados mediante el GA, mientras que los consecuentes son obtenidos mediante el método de identificación de T-S [124].

El GA propuesto sigue los siguientes pasos, mostrados en la figura 4.2:

1. Se define una población inicial, compuesta por un conjunto de individuos. Cada individuo de la población está formado por un sistema borroso, compuesto por n_r reglas borrosas. En cada regla borrosa se determina un conjunto de antecedentes $\{z_i\} \in \mathbb{R}^f$ and $\{p_i\} \in \mathbb{R}^f$ que definen una MDMF. Se especifican los antecedentes de cada individuo con diferentes valores. Entonces, lo primero es determinar el número de reglas borrosas y un conjunto inicial de MDMF para cada individuo.
2. Para cada individuo de la población en la generación actual, se realiza una identificación de T-S, obteniendo los consecuentes de T-S para cada regla borrosa como se muestra en la sección 4.1.
3. Los resultados de la identificación en cada individuo son evaluados respecto a una función de coste E , definida como la media ponderada, para cada salida, de la raíz del error cuadrático medio (RMSE) del error de identificación.

$$E = \sum_{i=1}^s \frac{RMSE(y_i(k) - \hat{y}_i(k))}{s \cdot RMSE(y_i(k))} \quad (4.7)$$

El objetivo del GA es minimizar la función de coste E , minimizando así el error de identificación, a través del ajuste óptimo de los parámetros de las MDMF (z_i y p_i).

4. Se ordena la población de individuos en la generación actual de acuerdo a su valor obtenido en la función de coste E , de menor a mayor. El individuo

Figura 4.2: GA para el ajuste de las MDMF.

con el menor valor en E se convierte en el ganador de la población en la generación actual.

5. Se comprueba el criterio de término. Si se alcanza el máximo número de generaciones o si el valor en E obtenido por el ganador es menor que un valor predeterminado, entonces el algoritmo termina y los antecedentes y consecuentes de T-S se guardan. En caso de que el criterio de término no sea cumplido, el algoritmo continúa.
6. A la población ordenada de individuos en la generación actual se le aplican los operadores genéticos (selección, recombinación cruzada y mutación) para obtener una nueva población de individuos para la siguiente generación. Los operadores genéticos se aplican solamente a los antecedentes de T-S para ajustar los parámetros de las MDMF (z_i y p_i).
 - Selección: el ganador se escoge para la siguiente generación. Este operador asegura que un individuo óptimo se pueda preservar en posteriores generaciones.
 - Recombinación cruzada: algunos descendientes para la siguiente generación son generados mediante la combinación de los mejores individuos. Estos operadores permiten la búsqueda de individuos óptimos cerca de los mejores, permitiendo una búsqueda de bajo alcance pero muy profunda.
 - Mutación: algunas características (o todas) de algunos individuos son modificadas aleatoriamente para la siguiente generación. Estos operadores son necesarios para evitar que el algoritmo caiga en mínimos locales de forma indefinida, ya que la búsqueda aleatoria se puede realizar con alcance completo.
7. Entonces el algoritmo continúa en el paso 2, actualizando la población de individuos para la próxima generación.

Se obtiene una convergencia más rápida y fiable al fijar el punto central (z_i) de una MDMF como el centro de gravedad de los datos del sistema, ya que es el punto más representativo. De esta forma, el punto central para una MDMF central se mantiene constante a través de las generaciones, facilitando la convergencia del resto de MDMF a sus lugares óptimos.

La función de coste objetivo del GA está diseñada para minimizar el error de identificación de T-S. En otras palabras, se aplica el GA para encontrar los mejores parámetros de las MDMF (z_i y p_i) que minimicen el error de identificación de T-S.

El método propuesto no presenta restricciones en los parámetros del GA, los operadores o su implementación. Sin perder la generalidad perseguida, en la

sección posterior 4.4 se presentan más detalles sobre cómo se puede aplicar el método propuesto y cómo pueden ser definidos los operadores genéticos.

Debe remarcarse que en cada individuo de la población se ha definido un sistema borroso completo. Este sistema borroso está formado por un conjunto de reglas borrosas, que presentan un conjunto de antecedentes de T-S, que definen las MDMF, y consecuentes de T-S, que modelan la dinámica del sistema. Entonces, el método propuesto trabaja con un conjunto inmenso de parámetros que se tratan como sigue: el GA ajusta los antecedentes, mientras que el método de identificación de T-S obtiene los consecuentes para cada regla borrosa.

Es importante señalar que el enfoque propuesto lleva a cabo una identificación de un sistema multivariable en una etapa fuera de línea, y entonces el tiempo de computación no es un factor determinante para el ajuste de los parámetros de las MDMF y la identificación de T-S. Por otro lado, como se ha comentado en la sección 4.1 reducir el tiempo de computación en el propio cálculo de la MDMF es necesario ya que esa función debe ser implementada también en el controlador borroso, que funciona en línea.

4.3. Control Borroso Mediante MDMF y Modelo de Estado Incremental

En esta sección se detalla el método de control borroso basado en MDMF y modelo incremental de T-S. Mediante el método de modelado e identificación descrito en la sección previa 4.1 se obtiene un modelo linealizado del sistema en cada regla borrosa definida mediante MDMF que, mediante la interpolación borrosa, obtiene un modelo global óptimo para un sistema no lineal. Para obtener el controlador borroso basado en MDMF, es posible diseñar un controlador y observador para cada regla borrosa mediante cualquier metodología de diseño de controladores y observadores, como el método de LQR discreto y el observador óptimo de estado definidos en el capítulo 3. Es posible además emplear el modelo de estado incremental, ya que sus ventajas se mantienen aún al emplearse en un control borroso de T-S basado en MDMF.

4.3.1. Modelo Borroso Incremental de T-S Basado en MDMF

Los sistemas no lineales se pueden tratar mediante el modelo borroso de T-S basado en MDMF, conocida la variable borrosa multidimensional $z = [z_1, z_2, \dots, z_f]^t$. Retomando la ecuación 4.3:

$$S^i: \text{Si } z(k) \text{ es } M^i \text{ entonces:}$$

$$y_1(k+1) = a_{10}^i + a_{11}^i y_1(k) + \dots + a_{1n_1}^i y_1(k - n_1 + 1) +$$

$$\sum_{j=1}^p b_{1j1}^i u_j(k) + \cdots + b_{1jn_1}^i u_j(k - n_1 + 1)$$

En cada regla, se puede transformar la ecuación en diferencias en modelo de estado multivariable con términos independientes como se ha mostrado en el capítulo 3:

$$\begin{aligned} S^i: \text{ Si } z(k) \text{ es } M^i \text{ entonces:} \\ x(k+1) &= a_x^i + A^i x(k) + B^i u(k) \\ y(k) &= a_y^i + C^i x(k) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Además, se puede obtener el modelo expandido de estado incremental en cada regla borrosa:

$$\begin{aligned} S^i: \text{ Si } z(k) \text{ es } M^i \text{ entonces:} \\ \begin{bmatrix} y(k+1) \\ \Delta x(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & C^i A^i \\ 0 & A^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ \Delta x(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^i B^i \\ B^i \end{bmatrix} \Delta u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ \Delta x(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.9)$$

4.3.2. Diseño del Controlador Óptimo y Observador Óptimo Borrosos Basados en MDMF y Modelo de Estado Incremental

Para calcular los coeficientes del controlador de estado incremental en cada regla borrosa definida mediante una MDMF, se puede emplear cualquier metodología basada en la realimentación de estado incremental. Se propone, como se ha realizado en el capítulo 3, minimizar una función de coste definida en cada subsistema borroso en lugar de minimizar un coste global. Para obtener el controlador borroso se propone el método del LQR discreto [85].

En el método LQR discreto para estado incremental borroso basado en MDMF, en cada regla se minimiza el siguiente índice de coste basado en las matrices borrosas de estado incremental:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x_a(k) - x_{ar})^t Q (x_a(k) - x_{ar}) + \Delta u(k)^t R \Delta u(k) \quad (4.10)$$

donde $Q \in \Re^{((q+n) \times (q+n))}$ y $R \in \Re^{(p \times p)}$ son matrices simétricas positivas. Se emplean las mismas matrices Q y R para el cálculo del LQR discreto en todos los subsistemas borrosos definidos mediante MDMF.

Entonces el controlador borroso basado en MDMF se define como:

$$\begin{aligned} S^i: \text{ Si } z(k) \text{ es } M^i \text{ entonces:} \\ \Delta u(k) = K^i (x_{ar} - x_a(k)) \end{aligned} \quad (4.11)$$

y la acción de control:

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k)$$

Como en general el estado $\Delta x(k)$ no es accesible, se necesita un observador de estado borroso basado en MDMF formulado como:

$$\begin{aligned} S^i: \text{ Si } z(k) \text{ es } M^i \text{ entonces:} \\ x_e(k+1) = a_x^i + A^i x_e(k) + B^i u(k) + H^i (y(k) - (a_y^i + C^i x_e(k))) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Se propone el cálculo de la matriz de observación H para cada regla borrosa definida mediante una MDMF mediante el observador óptimo propuesto en el capítulo 3:

$$\begin{aligned} S^i: \text{ Si } z(k) \text{ es } M^i \text{ entonces:} \\ H^i = A^i C^{iT} \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.4. Caso de Estudio: Sistema de Tanques Acoplados

En esta sección, se muestra mediante un ejemplo ilustrativo, un sistema de tanques acoplados, las ventajas del método propuesto basado en el uso de MDMF ajustadas mediante GA, en comparación con el método tradicional de T-S basado en la inferencia borrosa de 1DMF. El sistema de tanques acoplados elegido es un sistema multivariable y no lineal en el que participan exactamente dos variables no lineales, por lo que permite mostrar las ventajas del método descrito de forma gráfica. Aún así, el método propuesto puede ser aplicado a cualquier sistema no lineal con cualquier número de variables no lineales.

4.4.1. Sistema de Tanques Acoplados

Un sistema de tanques acoplados [75] consiste en dos tanques verticales conectados por una tubería, como se muestra en la figura 4.3, lo que causa que los niveles de ambos tanques interaccionen entre sí, mediante un flujo Q_3 en la tubería que los conecta. Cada tanque tiene una válvula independiente de fluido de entrada (u_1, u_2) y un flujo de líquido de salida (Q_1, Q_2).

Considerando el balance de masas, la ecuación dinámica de cada tanque es la

Figura 4.3: Sistema de tanques acoplados.

siguiente:

$$\begin{aligned} u_1 - Q_1 - Q_3 &= A_1 \frac{dh_1}{dt} \\ u_2 - Q_2 + Q_3 &= A_2 \frac{dh_2}{dt} \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde h_1 y h_2 son las alturas del líquido en cada tanque. A_1 y A_2 son las áreas de corte horizontal de cada tanque.

Aplicando la ecuación de Bernuilli para un fluido incompresible y no viscoso en flujo permanente:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \alpha_1 \sqrt{2gh_1} \\ Q_2 &= \alpha_2 \sqrt{2gh_2} \\ Q_3 &= \text{signo}(h_1 - h_2) \alpha_3 \sqrt{2g|h_1 - h_2|} \end{aligned} \quad (4.15)$$

donde α_1 , α_2 y α_3 son constantes que dependen del coeficiente de descarga. El flujo de conexión Q_3 se asume positivo si h_1 es mayor que h_2 .

Se suponen los siguientes valores de la tabla 4.1 para los parámetros del sistema.

Tabla 4.1: Parámetros del sistema de tanques acoplados.

Parámetro	Símbolo	Valor
Área del corte horizontal del primer tanque	A_1	$1(m^2)$
Área del corte horizontal del segundo tanque	A_2	$1(m^2)$
Constante del coeficiente de descarga del caudal Q_1	α_1	$0,1(m^2)$
Constante del coeficiente de descarga del caudal Q_2	α_2	$0,1(m^2)$
Constante del coeficiente de descarga del caudal Q_3	α_3	$0,1(m^2)$
Gravedad	g	$9,8(m/s^2)$

Figura 4.4: Histogramas de los datos del sistema. a) Histograma de Q_1 . b) Histograma de Q_2 .

4.4.2. Identificación del Sistema de Tanques Acoplados Mediante el Método Basado en la Inferencia Borrosa de 1DMF

En este apartado se muestra mediante el caso de estudio de tanques acoplados como el método tradicional de T-S basado en la inferencia borrosa de 1DMF, descrito detalladamente en la sección 3.2, coloca las reglas borrosas en lugares inapropiados para una identificación óptima, e incluso en zonas donde no existen datos del sistema.

El sistema de tanques acoplados se modela tomando los flujos de salida Q_1 y Q_2 como variables de estado, con dos entradas u_1 y u_2 . El tiempo de muestreo para el sistema discreto se toma como $T = 1\text{s}$.

La figura 4.4 muestra los histogramas de los datos del sistema. Tomando como variables borrosas las propias variables de estado (Q_1 y Q_2), basado en los histogramas de los datos del sistema, se definen las 1DMF como tres funciones triangulares solapadas a pares, como se muestra en la figura 4.5.

Entonces, para el modelo de T-S [5, 124] se obtienen las reglas borrosas de la

Figura 4.5: 1DMF definidas para el sistema de tanques acoplados. a) 1DMF para Q_1 . b) 1DMF para Q_2 .

Figura 4.6: Inferencia borrosa de 1DMF.

figura 4.6 mediante el método de la inferencia borrosa de 1DMF:

$$\begin{aligned} S^{(i_1, i_2)}: \text{ Si } Q_1(k) \text{ es } M_1^{i_1} \text{ y } Q_2(k) \text{ es } M_2^{i_2} \text{ entonces:} \\ w^{(i_1, i_2)}(Q_1(k), Q_2(k)) = \mu_{1i_1}(Q_1(k)) \cdot \mu_{2i_2}(Q_2(k)) \end{aligned} \quad (4.16)$$

La figura 4.7 representa los puntos centrales de las reglas borrosas obtenidas mediante inferencia borrosa de 1DMF, proyectadas sobre el espacio bidimensional de los datos del sistema.

Los parámetros del modelo linealizado P_0 se calculan empleando el método clásico de mínimos cuadrados sobre los datos del sistema, obteniendo un error de identificación de 0,0101.

$$\begin{bmatrix} Q_1(k+1) \\ Q_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1(k) \\ Q_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}^t$$

Figura 4.7: Puntos centrales de las reglas borrosas obtenidas mediante inferencia borrosa de 1DMF, proyectados sobre el espacio de datos del sistema.

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0,0014 & 0,6066 & 0,2064 & 0,1262 & 0,0585 \\ 0,0005 & 0,1918 & 0,6238 & 0,0584 & 0,1246 \end{bmatrix}^t$$

Con los parámetros del sistema linealizado P_0 , las 1DMF de la figura 4.5 y escogiendo un factor de ponderación $\gamma = 10^{-6}$, se obtiene un error de identificación de 0,0043 empleando el método de identificación de T-S desarrollado en [5, 10]. El modelo de T-S resultante es:

$$\begin{aligned} S^{(i_1, i_2)}: \text{ Si } Q_1(k) \text{ es } M_1^{i_1} \text{ y } Q_2(k) \text{ es } M_2^{i_2} \text{ entonces:} \\ \begin{bmatrix} Q_1(k+1) \\ Q_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10}^{(i_1, i_2)} \\ a_{20}^{(i_1, i_2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}^{(i_1, i_2)} & a_{12}^{(i_1, i_2)} \\ a_{21}^{(i_1, i_2)} & a_{22}^{(i_1, i_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1(k) \\ Q_2(k) \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} b_{11}^{(i_1, i_2)} & b_{12}^{(i_1, i_2)} \\ b_{21}^{(i_1, i_2)} & b_{22}^{(i_1, i_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.17)$$

En la figura 4.7 se puede ver claramente como la inferencia borrosa de 1DMF produce reglas borrosas lejos de los datos del sistema, como las reglas de arriba a la izquierda y de abajo a la derecha, que no tienen ninguna relevancia para la identificación del sistema. Estas reglas borrosas introducen un coste computacional innecesario, no solo para la etapa de identificación y modelado, sino también en la etapa de control, ya que el controlador borroso considera más reglas de las que esta usando en realidad.

Debe remarcarse que estas reglas lejanas a los datos del sistema han sido producidas por el proceso de inferencia borrosa y no por un error de diseño, ya que las 1DMF de la figura 4.5 han sido correctamente diseñadas al contrastarlas con los histogramas de los datos del sistema de la figura 4.4.

4.4.3. Modelado e Identificación del Sistema de Tanques Acoplados Mediante el Método Basado en MDMF Ajustadas Utilizando un GA

Como se ha descrito, el sistema de tanques acoplados se modela tomando como variables de estado las propias salidas de caudal Q_1 y Q_2 , con dos entradas u_1 y u_2 . Entonces, el modelo de T-S basado en MDMF es:

$$\begin{aligned} S^i: \text{ Si } z(k) \text{ es } M^i \text{ entonces:} \\ \begin{bmatrix} Q_1(k+1) \\ Q_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10}^i \\ a_{20}^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i \\ a_{21}^i & a_{22}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1(k) \\ Q_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i \\ b_{21}^i & b_{22}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde las variables borrosas son las propias variables de estado:

$$z = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}^t$$

Se emplean cinco reglas borrosas para definir el sistema de T-S mediante MDMF. El número de reglas ha sido definido mediante un proceso de prueba y error sobre el sistema de tanques acoplados. Se ha comprobado que cinco reglas borrosas son un buen compromiso entre el coste computacional y el error de identificación.

En el GA, la población se ha formado mediante quince individuos. El GA termina cuando se alcanzan cien generaciones. En cada generación, para obtener la próxima generación de individuos, se aplican los siguientes operadores genéticos en la población ordenada de individuos actuales:

- Para el individuo 1: Selección. El ganador es actualizado para la siguiente generación sin aplicar ningún cambio.
- Para los individuos 2, 3, 4 y 5: Recombinación cruzada. Estos individuos son combinados con el ganador para la siguiente generación.
 - Individuos 2 y 3: Los parámetros se obtienen del ganador, pero los parámetros de una de las MDMF se obtienen haciendo la media entre el ganador y los individuos 2 y 3 respectivamente.
 - Individuos 4 y 5: Los parámetros se obtienen de los individuos 2 y 3 respectivamente, pero los parámetros de una de las MDMF se obtienen haciendo la media entre el ganador y los individuos 2 y 3.
- Para los individuos 6, 7, 8, 9, 10 y 11: Pequeña mutación. Se aplican pequeños cambios aleatorios sobre los individuos 1 y 2.
 - Individuo 6: Los parámetros se obtienen del ganador, pero se aplican incrementos aleatorios sobre los parámetros de una de las MDMF.
 - Individuo 7: Los parámetros se obtienen del ganador, pero se aplica un incremento aleatorio sobre el parámetro de posición z_i de una de las MDMF.
 - Individuo 8: Los parámetros se obtienen del ganador, pero se aplica un incremento aleatorio sobre el parámetro de ponderación de distancia p_i de una de las MDMF.
 - Individuo 9: Los parámetros se obtienen del individuo 2, pero se aplican incrementos aleatorios sobre los parámetros de una de las MDMF.
 - Individuo 10: Los parámetros se obtienen del individuo 2, pero se aplica un incremento aleatorio sobre el parámetro de posición z_i de una de las MDMF.
 - Individuo 11: Los parámetros se obtienen del individuo 2, pero se aplica un incremento aleatorio sobre el parámetro de ponderación de distancia p_i de una de las MDMF.

- Para los individuos 12 y 13: Gran mutación. Se aplican grandes cambios aleatorios sobre el ganador. Los parámetros se obtienen del ganador, pero los parámetros de una de las MDMF son generados aleatoriamente.
- Para los individuos 14 y 15: Mutación completa. Se generan nuevos individuos aleatorios para la siguiente generación.

En el algoritmo completo, hay quince individuos en la población del GA. Cada individuo tiene cinco reglas borrosas. Cada regla borrosa tiene como antecedentes de T-S los parámetros de las MDMF, el punto central $z_i \in \mathbb{R}^2$ y la ponderación de la distancia $p_i \in \mathbb{R}^2$. Además, cada regla borrosa tiene como consecuentes de T-S, diez parámetros del modelo de estado. Entonces, el algoritmo trabaja con 1050 parámetros ($15 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 2 + 10)$).

En consecuencia, el algoritmo propuesto trabaja como sigue:

- El GA maneja los antecedentes de T-S de cada individuo para todas las reglas borrosas (20 parámetros ($5 \cdot 2 \cdot 2$) por individuo).
- Con las reglas borrosas definidas, los consecuentes de T-S de cada individuo son obtenidos mediante el método de identificación de T-S [124] (50 parámetros ($5 \cdot 10$) por individuo).

Aplicando el GA para el diseño de las MDMF, con las características descritas previamente, se obtienen los siguientes resultados:

La figura 4.8 muestra los centros (z_i) de las MDMF del ganador en cada generación. Hay que señalar que el centro de la MDMF central permanece estático a través de las generaciones, ya que es definido como el centro de gravedad de los datos del sistema.

La figura 4.9 muestra, sobre los datos del sistema, los centros de las MDMF obtenidas al finalizar el GA, proyectados sobre el espacio de los datos del sistema. Además, en la figura 4.10, se muestran las propias MDMF obtenidas.

Ya que el GA tiene un importante componente aleatorio, se han realizado cien pruebas. En la figura 4.11, se muestran los resultados del error de identificación de T-S, utilizando MDMF, durante las generaciones del GA. La media de las pruebas se representa en línea continua. El máximo y el mínimo se representa en línea discontinua. Los percentiles 10 y 90 se muestran en línea punteada. Finalmente, el error de identificación de T-S de la prueba mostrada previamente, se representa en línea continua gruesa.

Se puede ver en la figura 4.9, que las reglas borrosas no están restringidas a la combinación de los elementos monodimensionales, como al emplear el método de la inferencia borrosa (Figura 4.7). El uso de MDMF permite que las reglas borrosas sean colocadas en cualquier punto del espacio multidimensional. De esta forma, se puede obtener un mejor ajuste sobre los datos del sistema, mejorando los resultados de identificación mediante el uso de menos reglas borrosas.

Figura 4.8: Centros de las MDMF del ganador en cada generación.

Figura 4.9: Datos del sistema y centros de las MDMF obtenidas, proyectados sobre el espacio de los datos del sistema.

Figura 4.10: MDMF obtenidas con el algoritmo propuesto.

Figura 4.11: Error de identificación de T-S utilizando MDMF durante las generaciones del GA. Línea continua: media de las 100 pruebas. Línea discontinua: máximo y mínimo de las 100 pruebas. Línea punteada: percentiles 10 y 90 de las 100 pruebas. Línea continua gruesa: prueba mostrada previamente.

Finalmente se ha obtenido un error de identificación de 0,0035. Además, los resultados obtenidos en el apartado 4.4.3 mediante 1DMF [5, 10] se han llevado a cabo utilizando 9 reglas borrosas, mientras que en el método propuesto solo se han empleado 5 reglas borrosas. Entonces, no sólo se han obtenido mejores resultados en la identificación, sino que se ha reducido el número de reglas borrosas.

Se puede ver en la figura 4.11 como el error de identificación se reduce a través de las generaciones del GA. Todas las pruebas dan resultados similares, obteniéndose menor error que con el método tradicional con menos reglas borrosas. En la tabla 4.2 se muestra la probabilidad de ocurrencia de los operadores genéticos aplicados definidos previamente, obtenida de las 100 pruebas realizadas.

4.4.4. Control Borroso Mediante MDMF Aplicado al Sistema de Tanques Acoplados

Mediante el método descrito en la sección previa, se ha obtenido la siguiente identificación borrosa de T-S del modelo de estado [10]:

$$\begin{aligned}
 & S^1: \text{ Si } z(k) \text{ es } M^1 \text{ entonces:} \\
 & \begin{bmatrix} Q_1(k+1) \\ Q_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,6048 \\ -0,3949 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5,7172 & -4,4419 \\ -4,1783 & 4,9366 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1(k) \\ Q_2(k) \end{bmatrix} + \\
 & \quad \begin{bmatrix} -1,4986 & 2,0462 \\ 1,9813 & -1,5644 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} Q_1(k) \\ Q_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1(k) \\ Q_2(k) \end{bmatrix} \\
 & \quad \vdots
 \end{aligned}$$

En este caso la regla borrosa 1 es la que corresponde a la regla borrosa central.

Las matrices de estado incremental, necesarias para el diseño del controlador, se obtienen empleando el método descrito en el capítulo 3 en cada regla borrosa:

$$\begin{aligned}
 & S^1: \text{ Si } z(k) \text{ es } M^1 \text{ entonces:} \\
 & \begin{bmatrix} Q_1(k+1) \\ Q_2(k+1) \\ \Delta Q_1(k+1) \\ \Delta Q_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5,7172 & -4,4419 \\ 0 & 1 & -4,1783 & 4,9366 \\ 0 & 0 & 5,7172 & -4,4419 \\ 0 & 0 & -4,1783 & 4,9366 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1(k) \\ Q_2(k) \\ \Delta Q_1(k) \\ \Delta Q_2(k) \end{bmatrix} + \\
 & \quad \begin{bmatrix} -1,4986 & 2,0462 \\ 1,9813 & -1,5644 \\ -1,4986 & 2,0462 \\ 1,9813 & -1,5644 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1(k) \\ \Delta u_2(k) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} Q_1(k) \\ Q_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1(k) \\ Q_2(k) \\ \Delta Q_1(k) \\ \Delta Q_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

El controlador borroso para el modelo de estado incremental basado en MDMF se obtiene al aplicar el método del LQR discreto a las matrices de estado incremental en cada regla borrosa, utilizando las siguientes matrices de ponderación:

$$Q = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$R = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

y obteniéndose las siguientes matrices de control borrosas:

S^1 : Si $z(k)$ es M^1 entonces:

$$K = \begin{bmatrix} 0,1897 & 0,3882 & -0,3040 & 1,6357 \\ 0,2639 & 0,2984 & 2,4544 & -0,9961 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

Al emplearse salidas medibles del sistema como variables de estado $x(k) = [Q_1(k), Q_2(k), \Delta Q_1(k), \Delta Q_2(k)]^t$, no es necesario el uso de observador de estado para el control por realimentación de estado incremental de este sistema de tanques acoplados.

La figura 4.12 muestra el comportamiento dinámico sistema de tanques acoplados, controlado mediante el método LQR basado en el modelo de estado incremental de T-S utilizando MDMF, ante cambios excesivos en la señales de referencia de los caudales de salida Q_1 y Q_2 .

Se puede ver que el sistema controlado mediante el controlador borroso propuesto presenta error nulo en régimen permanente y buena respuesta transitoria.

4.5. Conclusión

En este capítulo, se ha mostrado que la inferencia borrosa de 1DMF puede generar reglas borrosas que no correspondan a los datos del sistema. En su lugar, se ha propuesto utilizar MDMF y para su ajuste, se ha propuesto un GA combinado con el método de T-S. Finalmente, se ha comprobado mediante un ejemplo basado en un sistema de tanque doble, que el método propuesto con MDMF permite una identificación más precisa mediante un menor número de reglas borrosas.

Tabla 4.2: Probabilidad de ocurrencia de los operadores genéticos asignados a cada individuo.

Individuo	Ocurrencia (%)
1	61.95
2	6.09
3	5.94
4	1.72
5	0.97
6	2.75
7	2.45
8	7.70
9	1.73
10	1.61
11	5.24
12	0.88
13	0.87
14	0.03
15	0.07

Figura 4.12: Respuesta del sistema de tanques acoplados, controlado mediante el método propuesto basado en MDMF, ante cambios excesivos en las referencias. a) Respuesta dinámica de Q_1 . b) Respuesta dinámica de Q_2 .

CAPÍTULO 5

IDENTIFICACIÓN, MODELADO Y CONTROL ÓPTIMO DE SISTEMAS AFECTADOS POR RUIDO COLOREADO

Capítulo 5

IDENTIFICACIÓN, MODELADO Y CONTROL ÓPTIMO DE SISTEMAS AFECTADOS POR RUIDO COLOREADO

En este capítulo se detalla el modelo para sistemas afectados por ruido coloreado y el método empleado para su identificación. Se propone un nuevo modelo de estado incremental para el modelado y el control de sistemas multivariables, con retrasos puros y afectados por ruido coloreado. El nuevo modelo de estado incremental, comparado con el modelo de estado discreto, resuelve el problema del cálculo del estado de referencia de forma natural, ya que para una salida deseada, el objetivo es un estado incremental nulo. Además, la acción de control calculada en forma incremental es equivalente a introducir una acción integral, cancelando de esta forma los errores en régimen permanente incluso en presencia de errores de modelado y perturbaciones. Se propone un control óptimo LQR basado en el modelo de estado incremental y se emplea un KF para obtener el estado estimado. Entonces, otra ventaja añadida del método propuesto es que minimiza la varianza de salida. El método desarrollado de control óptimo para sistemas afectados por ruido coloreado se extiende para el control de sistemas no lineales mediante el modelo de T-S. Como ejemplo para evaluar la efectividad del método propuesto, se propone un modelo no lineal de tanque de mezcla.

5.1. Modelo Discreto del Sistema Lineal Afectado por Ruido Coloreado

Los modelos discretos, empleando ecuaciones en diferencias, permiten el modelado de sistemas con múltiples retrasos puros. Se considera un sistema multivariable discreto, con retrasos y en presencia de ruido coloreado, con p entradas y q salidas, donde $q \leq p$. Entonces, mediante el método de mínimos cuadrados, para cada salida se identifica el sistema:

$$y_i(k+1) = a_{i0} + a_{i1}y_i(k) + a_{i2}y_i(k-1) + \cdots + a_{in_i}y_i(k-n_i+1) + \sum_{j=1}^p (b_{ij1}u_j(k) + b_{ij2}u_j(k-1) + \cdots + b_{ijn_i}u_j(k-n_i+1)) + \varepsilon_i(k) \quad (5.1)$$

donde algunos de los parámetros a_{in_i} , b_{i1n_i} , ..., b_{ipn_i} no son nulos. Si hay un retraso puro de d_{ij} muestras entre la entrada j y la salida i , se verifica que $b_{ij1} = b_{ij2} = \cdots = b_{ijd_{ij}} = 0$. La variable ε_i agrupa el ruido y los errores de modelado como la diferencia entre la salida real del sistema y la salida modelada:

$$\varepsilon_i(k) = y_{i\text{real}}(k) - y_{i\text{modelada}}(k) \quad (5.2)$$

Así, en el caso de sistemas afectados por ruido coloreado, lo que se obtiene con el método de mínimos cuadrados es un modelo de la parte determinista. Lo que no pertenece a la parte determinista, es decir, la diferencia entre la salida real y la salida modelada, es el ruido que afecta al sistema, su parte estocástica. Este ruido puede ser modelado, de acuerdo al teorema de Wold [11, 135], como la salida de un sistema lineal cuya función de transferencia puede ser estimada mediante el método de factorización espectral [98, 130] y cuya entrada es un ruido blanco $w_i(k)$ con varianza $\sigma^2(w_i)$ como sigue:

$$\varepsilon_i(k) = \frac{C_i(q^{-1})}{D_i(q^{-1})} w_i(k) \quad (5.3)$$

cumpléndose que $C_i(q^{-1})$ y $D_i(q^{-1})$ son polinomios mónicos del mismo orden m_i .

Nótese que, ya que el ruido coloreado se modela de acuerdo al teorema de Wold [11, 135], se ha añadido una variable de ruido blanco $w_i(k)$ al modelo, pero es una variable virtual necesaria para las formulaciones con ruido coloreado. Esta variable no es una señal accesible o manipulable, así que no puede ser medida ni controlada.

5.1.1. Teorema de Descomposición de Wold

Para todo proceso estocástico $x(k)$ estacionario de segundo orden que no tenga parte determinista, existe un sistema lineal estable $H(z)$ tal que, alimentado con ruido blanco $N(0, 1)$, da como salida un proceso estocástico cuyos momentos son los del proceso $x(k)$ [11, 135].

$$C_x(z) = H(z^{-1})H(z)C_u(z) = H(z^{-1})H(z) \quad (5.4)$$

Donde C_x es la covarianza de salida y C_u es la covarianza de entrada.

Las condiciones para aplicar el teorema de Wold parten de que el ruido que se pretende modelar sea estacionario de segundo orden y que no tenga parte determinista.

- Proceso estocástico estacionario: Uno de los requisitos es que el proceso esté en régimen permanente.
- Proceso estocástico de segundo orden: Un proceso estocástico de segundo orden es el que tiene sus momentos de primer y segundo orden acotados, esto es, su media, varianza y covarianza.
- Proceso estocástico que no tenga parte determinista: Se impone que la media del proceso estocástico sea nula.

Este teorema permite modelar una señal estocástica como un sistema lineal alimentado por un ruido blanco $w(k)$:

$$x(k) = \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}w(k) \quad (5.5)$$

5.1.2. Algoritmo de Factorización Espectral

Para identificar los parámetros del sistema lineal que modela el ruido coloreado, mediante el teorema de Wold, se emplea el algoritmo de factorización espectral [98, 130].

El espectro de potencia $S(\omega)$ de un proceso de 2^0 orden estacionario es la transformada de Fourier de su covarianza:

$$S_x(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} C_x(i)e^{-ji\omega T} \Leftrightarrow C_x(i) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} S_x(\omega)e^{ji\omega T}d\omega \quad (5.6)$$

De esta forma, las covarianzas se transforman en espectros de potencia:

$$\begin{aligned} S_u(\omega) &= C_u(e^{j\omega T}) \\ S_y(\omega) &= H(e^{-j\omega T})H(e^{j\omega T})C_u(e^{j\omega T}) = |H(e^{j\omega T})|^2 C_u(e^{j\omega T}) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Partiendo de la definición

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k) e^{-j\omega kT} = [C(z)]_{z=e^{j\omega T}}$$

y de la formulación del teorema de Wold

$$C_x(z) = H(z^{-1})H(z)C_u(z) = H(z^{-1})H(z)$$

se concluye que

$$S_x(\omega) = [C_x(z)]_{z=e^{j\omega T}} = [H(z^{-1})H(z)]_{z=e^{j\omega T}} \quad (5.8)$$

Si se supone el mismo número de polos y ceros

$$\begin{aligned} H(z) &= K \frac{\prod_n (z - c_i)}{\prod_n (z - p_i)} \\ H(z^{-1}) &= K \frac{\prod_n (z^{-1} - c_i)}{\prod_n (z^{-1} - p_i)} = K \frac{\prod_n c_i}{\prod_n p_i} \frac{\prod_n \left(z - \frac{1}{c_i}\right)}{\prod_n \left(z - \frac{1}{p_i}\right)} \end{aligned} \quad (5.9)$$

sustituyendo

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \left[K^2 \frac{\prod_n (z - c_i) (z^{-1} - c_i)}{\prod_n (z - p_i) (z^{-1} - p_i)} \right]_{z=e^{j\omega T}} = \\ &= \left[K^2 \frac{\prod_n c_i}{\prod_n p_i} \frac{\prod_n (z - c_i)}{\prod_n (z - p_i)} \frac{\prod_n \left(z - \frac{1}{c_i}\right)}{\prod_n \left(z - \frac{1}{p_i}\right)} \right]_{z=e^{j\omega T}} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Además

$$\begin{aligned} [(z - p_i) (z^{-1} - p_i)]_{z=e^{j\omega T}} &= [1 + p_i^2 - p_i (z + z^{-1})]_{z=e^{j\omega T}} = \\ &= 1 + p_i^2 - p_i (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) = 1 + p_i^2 - 2p_i \cos(\omega T) \end{aligned} \quad (5.11)$$

por lo que será una función racional en cosenos

$$S(\omega) = K^2 \frac{\prod_n (1 + c_i^2 - 2c_i \cos(\omega T))}{\prod_n (1 + p_i^2 - 2p_i \cos(\omega T))} = \frac{\sum_{k=0}^n b_k \cos(k\omega T)}{\sum_{k=0}^n a_k \cos(k\omega T)} \quad (5.12)$$

Finalmente en el algoritmo se parte de una realización de un proceso $x(k)$ ergódico, estacionario de segundo orden. El algoritmo de factorización espectral es como sigue:

1. Calcular la covarianza $C(i) = E[(x(k) - \bar{x})(x(k+i) - \bar{x})]$

2. Calcular el espectro de potencia $S(\omega) = C(0) + 2 \sum_{k=1}^{n_c} C(k) \cos(k\omega T)$
3. Aproximar el espectro por una función racional en cosenos

$$S(\omega) = \frac{b_0 + b_1 \cos(1\omega T) + b_2 \cos(2\omega T) + \cdots + b_n \cos(n\omega T)}{1 + a_1 \cos(1\omega T) + a_2 \cos(2\omega T) + \cdots + a_n \cos(n\omega T)}$$

Los parámetros $b_0, b_1, \dots, b_n, a_1, \dots, a_n$ se estiman mediante el método de mínimos cuadrados.

4. Desarrollar los cosenos en exponenciales

$$S(\omega) = \frac{b_0 + b_1 \cos(1\omega T) + b_2 \cos(2\omega T) + \cdots + b_n \cos(n\omega T)}{1 + a_1 \cos(1\omega T) + a_2 \cos(2\omega T) + \cdots + a_n \cos(n\omega T)} =$$

$$\frac{b_0 + b_1 \frac{e^{1\omega T} + e^{-1\omega T}}{2} + b_2 \frac{e^{2\omega T} + e^{-2\omega T}}{2} + \cdots + b_n \frac{e^{n\omega T} + e^{-n\omega T}}{2}}{1 + a_1 \cos \frac{e^{1\omega T} + e^{-1\omega T}}{2} + a_2 \frac{e^{2\omega T} + e^{-2\omega T}}{2} + \cdots + a_n \frac{e^{n\omega T} + e^{-n\omega T}}{2}}$$

5. Sustituir $z = e^{j\omega T}$

$$S(\omega) = \frac{b_0 + b_1 \frac{e^{1\omega T} + e^{-1\omega T}}{2} + b_2 \frac{e^{2\omega T} + e^{-2\omega T}}{2} + \cdots + b_n \frac{e^{n\omega T} + e^{-n\omega T}}{2}}{1 + a_1 \frac{e^{1\omega T} + e^{-1\omega T}}{2} + a_2 \frac{e^{2\omega T} + e^{-2\omega T}}{2} + \cdots + a_n \frac{e^{n\omega T} + e^{-n\omega T}}{2}} =$$

$$\frac{b_0 + b_1 \frac{z + z^{-1}}{2} + b_2 \frac{z^2 + z^{-2}}{2} + \cdots + b_n \frac{z^n + z^{-n}}{2}}{1 + a_1 \frac{z + z^{-1}}{2} + a_2 \frac{z^2 + z^{-2}}{2} + \cdots + a_n \frac{z^n + z^{-n}}{2}} =$$

$$\frac{\frac{b_n}{2} z^{2n} + \frac{b_{(n-1)}}{2} z^{(2n-1)} + \cdots + \frac{b_1}{2} z^{(n+1)} + b_0 z^n + \frac{b_1}{2} z^{(n-1)} + \cdots + \frac{b_{(n-1)}}{2} z + \frac{b_n}{2}}{\frac{a_n}{2} z^{2n} + \frac{a_{(n-1)}}{2} z^{(2n-1)} + \cdots + \frac{a_1}{2} z^{(n+1)} + z^n + \frac{a_1}{2} z^{(n-1)} + \cdots + \frac{a_{(n-1)}}{2} z + \frac{a_n}{2}} =$$

$$\frac{b_n z^{2n} + \frac{b_{(n-1)}}{b_n} z^{(2n-1)} + \cdots + \frac{b_1}{b_n} z^{(n+1)} + \frac{2b_0}{b_n} z^n + \frac{b_1}{b_n} z^{(n-1)} + \cdots + \frac{b_{(n-1)}}{b_n} z + 1}{a_n z^{2n} + \frac{a_{(n-1)}}{a_n} z^{(2n-1)} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} z^{(n+1)} + \frac{2}{a_n} z^n + \frac{a_1}{a_n} z^{(n-1)} + \cdots + \frac{a_{(n-1)}}{a_n} z + 1}$$

6. Factorizar los polinomios. Estos polinomios cumplen la propiedad de que si r_i es raíz, también lo será $\frac{1}{r_i}$.
7. De cada par de raíces $r_i \rightleftharpoons \frac{1}{r_i}$ se seleccionan para $H(z)$ las que tengan menor módulo, y por tanto tengan módulo menor o igual a 1. Esto se debe a que si el proceso es estacionario, los polos deben estar necesariamente dentro del círculo unidad. Puede haber ceros sobre la circunferencia unidad, pero deben ser dobles, con lo que habría que quedarse solo con un juego de ellos.
8. A partir de las raíces seleccionadas se forma

$$H(z) = K \frac{\prod_n (z - c_i)}{\prod_n (z - p_i)}$$

$$H(z^{-1}) = K \frac{\prod_n c_i \prod_n (z - c_i^{-1})}{\prod_n p_i \prod_n (z - p_i^{-1})} \quad (5.13)$$

y el factor de ganancia se calcula como:

$$K^2 \frac{\prod_n c_i}{\prod_n p_i} = \frac{b_n}{a_n} \Rightarrow K = \sqrt{\frac{b_n}{a_n} \frac{\prod_n p_i}{\prod_n c_i}} \quad (5.14)$$

Además, si se supone como entrada ruido blanco de varianza no unitaria $N(0, \sigma^2)$, entonces se debería cumplir

$$\begin{aligned} C_x(z) &= H(z^{-1})H(z)C_u(z) = H(z^{-1})H(z)\sigma^2 \\ S_x(\omega) &= [C_x(z)]_{z=e^{j\omega T}} = [H(z^{-1})H(z)]_{z=e^{j\omega T}} \sigma^2 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Afectaría únicamente al cálculo del factor de ganancia

$$K^2 \frac{\prod_n c_i}{\prod_n p_i} \sigma^2 = \frac{b_n}{a_n} \quad (5.16)$$

Si se fija $K = 1$, entonces se calcula la varianza del ruido blanco como:

$$\sigma = \sqrt{\frac{b_n}{a_n} \frac{\prod_n p_i}{\prod_n c_i}} \quad (5.17)$$

5.2. Modelo de Sistemas Multivariabiles Lineales Afectados por Ruido Coloreado Mediante Modelos de Estado Discreto

A partir de los parámetros identificados, mediante el método de mínimos cuadrados, de la ecuación en diferencias (5.1):

$$\begin{aligned} y_i(k+1) &= a_{i0} + a_{i1}y_i(k) + a_{i2}y_i(k-1) + \dots + a_{in_i}y_i(k-n_i+1) + \\ &\sum_{j=1}^p (b_{ij1}u_j(k) + b_{ij2}u_j(k-1) + \dots + b_{ijn_i}u_j(k-n_i+1)) + \varepsilon_i(k) \end{aligned}$$

se puede obtener la siguiente representación de la parte determinista mediante modelo de estado discreto con términos independientes:

$$\begin{aligned} x_{ui}(k) &\in \mathfrak{R}_i^n \\ x_{ui}(k+1) &= \begin{bmatrix} a_{i0} \cdot a_{i1} \\ a_{i0} \cdot a_{i2} \\ \vdots \\ a_{i0} \cdot a_{in_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{i1} & 1 & \dots & 0 \\ a_{i2} & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ a_{in_i} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x_{ui}(k) + \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$y_{ui}(k) = a_{i0} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x_{ui}(k)$$

$$\begin{bmatrix} b_{i11} & b_{i21} & \cdots & b_{ip1} \\ b_{i12} & b_{i22} & \cdots & b_{ip2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1n_i} & b_{i2n_i} & \cdots & b_{ipn_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_p(k) \end{bmatrix}$$

que puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} x_{ui}(k+1) &= a_{xui} + A_{ui}x_{ui}(k) + B_{ui}u(k) \\ y_{ui}(k) &= a_{i0} + C_{ui}x_{ui}(k) \end{aligned} \quad (5.19)$$

donde

$$\begin{aligned} A_{ui} &\in \mathfrak{R}^{n_i \times n_i} & B_{ui} &\in \mathfrak{R}^{n_i \times p} \\ C_{ui} &\in \mathfrak{R}^{1 \times n_i} & a_{xui} &\in \mathfrak{R}^{(n_i \times 1)} \end{aligned}$$

Agrupando variables, la parte determinista del sistema multivariable puede ser modelada como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{u1}(k+1) \\ x_{u2}(k+1) \\ \vdots \\ x_{uq}(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{xu1} \\ a_{xu2} \\ \vdots \\ a_{xuq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{u1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{u2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{uq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{u1}(k) \\ x_{u2}(k) \\ \vdots \\ x_{uq}(k) \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} B_{u1} \\ B_{u2} \\ \vdots \\ B_{uq} \end{bmatrix} u(k) \\ y_u(k) &= \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{q0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{u1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_{u2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_{uq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{u1}(k) \\ x_{u2}(k) \\ \vdots \\ x_{uq}(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.20)$$

que puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned} x_u(k+1) &= a_{xu} + A_u x_u(k) + B_u u(k) \\ y_u(k) &= a_{yu} + C_u x_u(k) \end{aligned} \quad (5.21)$$

donde

$$n = \sum_{i=1}^q n_i$$

$$\begin{aligned} A_u &\in \Re^{n \times n} & B_u &\in \Re^{n \times p} \\ C_u &\in \Re^{q \times n} & a_{x_u} &\in \Re^{(n \times 1)} \\ a_{y_u} &\in \Re^{(q \times 1)} & x_u &\in \Re^n \end{aligned}$$

Retomando la ecuación de la parte estocástica (5.3):

$$\varepsilon_i(k) = \frac{C_i(q^{-1})}{D_i(q^{-1})} w_i(k)$$

y como C_i y D_i son polinomios mónicos del mismo grado, se divide:

$$\frac{C_i(q^{-1})}{D_i(q^{-1})} = 1 + \frac{E_i(q^{-1})}{D_i(q^{-1})} \quad (5.22)$$

y se toma:

$$y_{wi}(k) = \frac{E_i(q^{-1})}{D_i(q^{-1})} w_i(k) \quad (5.23)$$

Obteniendo la parte estocástica multivariable, de forma equivalente a la parte determinista multivariable:

$$\begin{aligned} x_w(k+1) &= A_w x_w(k) + B_w w(k) \\ y_w(k) &= C_w x_w(k) \end{aligned} \quad (5.24)$$

donde

$$\begin{aligned} m &= \sum_{i=1}^q m_i \\ A_w &\in \Re^{m \times m} & B_w &\in \Re^{m \times q} \\ C_w &\in \Re^{q \times m} & x_w &\in \Re^m \end{aligned}$$

Nótese que no aparecen términos independientes en el modelo de estado de la parte estocástica, ya que se asume que el ruido es de media nula.

El sistema multivariable completo puede ser modelado como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_u(k+1) \\ x_w(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{x_u} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_u & 0 \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u(k) \\ x_w(k) \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_w \end{bmatrix} w(k) \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$y(k) = y_u(k) + y_w(k) + w(k) = a_{y_u} + \begin{bmatrix} C_u & C_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u(k) \\ x_w(k) \end{bmatrix} + w(k)$$

lo que se convierte en el sistema discreto básico para sistemas afectados por ruido

coloreado:

$$\begin{aligned} x_b(k+1) &= a_{xb} + A_b x_b(k) + B_b u(k) + v_b(k) \\ y(k) &= a_{yb} + C_b x_b(k) + w(k) \end{aligned} \quad (5.26)$$

donde

$$\begin{aligned} x_b &\in \mathfrak{R}^{n+m} & v_b &\in \mathfrak{R}^{n+m} \\ A_b &\in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (n+m)} & B_b &\in \mathfrak{R}^{(n+m) \times p} \\ C_b &\in \mathfrak{R}^{q \times (n+m)} & a_{xb} &\in \mathfrak{R}^{((n+m) \times 1)} \\ a_{yb} &\in \mathfrak{R}^{(q \times 1)} & w &\in \mathfrak{R}^q \end{aligned}$$

Los parámetros del subsistema determinista ($A_u, B_u, C_u, a_{xu}, a_{yu}$) son obtenidos a partir de una identificación entrada-salida, así que, si los órdenes n_i del sistema no están sobredimensionados, el subsistema determinista será controlable y observable. Por otro lado, los parámetros del subsistema estocástico (A_w, B_w, C_w) son obtenidos mediante el método de factorización espectral, así que, si los órdenes m_i no están sobredimensionados, el subsistema estocástico será observable pero no controlable, ya que está desconectado de las entradas $u_j(k)$.

5.3. Modelado de Sistemas Multivariables Lineales Afectados por Ruido Coloreado Mediante Modelos de Estado Incremental

Se propone una nueva formulación de modelo de estado incremental para sistemas afectados por ruido coloreado.

Aplicando el modelo de estado determinista (5.21) en una muestra anterior, se cumple que:

$$\begin{aligned} x_u(k) &= a_{xu} + A_u x_u(k-1) + B_u u(k-1) \\ y_u(k-1) &= a_{yu} + C_u x_u(k-1) \end{aligned} \quad (5.27)$$

Restando (5.27) de (5.21), se consigue:

$$\begin{aligned} x_u(k+1) - x_u(k) &= a_{xu} + A_u x_u(k) + B_u u(k) - \\ &\quad (a_{xu} + A_u x_u(k-1) + B_u u(k-1)) = \\ &\quad A_u (x_u(k) - x_u(k-1)) + B_u (u(k) - u(k-1)) \\ y_u(k) - y_u(k-1) &= a_{yu} + C_u x_u(k) - (a_{yu} + C_u x_u(k-1)) = \\ &\quad C_u (x_u(k) - x_u(k-1)) \end{aligned} \quad (5.28)$$

donde los términos independientes del modelo de estado (a_{xu}, a_{yu}) han desaparecido, al ser restados, de forma natural. Definiendo:

$$\begin{aligned}\Delta x_u(k) &= x_u(k) - x_u(k-1) \\ \Delta y_u(k) &= y_u(k) - y_u(k-1) \\ \Delta u(k) &= u(k) - u(k-1)\end{aligned}\tag{5.29}$$

Sustituyendo (5.29) en (5.28):

$$\begin{aligned}\Delta x_u(k+1) &= A_u \Delta x_u(k) + B_u \Delta u(k) \\ \Delta y_u(k) &= C_u \Delta x_u(k)\end{aligned}\tag{5.30}$$

De la misma forma, se transforma el subsistema estocástico descrito en la ecuación 5.24 a:

$$\begin{aligned}\Delta x_w(k+1) &= A_w \Delta x_w(k) + B_w \Delta w(k) \\ \Delta y_w(k) &= C_w \Delta x_w(k)\end{aligned}\tag{5.31}$$

donde

$$\begin{aligned}\Delta x_w(k) &= x_w(k) - x_w(k-1) \\ \Delta y_w(k) &= y_w(k) - y_w(k-1) \\ \Delta w(k) &= w(k) - w(k-1)\end{aligned}\tag{5.32}$$

Para formular el modelo incremental (5.31) en función de $w(k)$, se considera $\Delta w(k)$ como la salida de un sistema dinámico de primer orden. Entonces, para modelarlo se define una nueva variable de estado $s_w(k) \in \mathfrak{R}^q$ que cumple:

$$\begin{aligned}s_w(k+1) &= -w(k) \\ \Delta w(k) &= s_w(k) + w(k)\end{aligned}\tag{5.33}$$

En estas formulaciones (5.30) y (5.31), es necesario relacionar la salida $y(k)$ y la nueva variable de estado $s_w(k)$. Para hacerlo, se define una nueva variable de estado $s_y(k) \in \mathfrak{R}^q$ como sigue:

$$s_y(k) = y(k) - w(k) = y_u(k) + y_w(k)\tag{5.34}$$

La ecuación 5.34 en una muestra previa es:

$$s_y(k-1) = y_u(k-1) + y_w(k-1)\tag{5.35}$$

Restando (5.35) de (5.34), se consigue:

$$s_y(k) - s_y(k-1) = y_u(k) - y_u(k-1) + y_w(k) - y_w(k-1) = \Delta y_u(k) + \Delta y_w(k)$$

Y entonces:

$$\begin{aligned} s_y(k+1) &= s_y(k) + \Delta y_u(k+1) + \Delta y_w(k+1) = \\ &= s_y(k) + C_u \Delta x_u(k+1) + C_w \Delta x_w(k+1) = \\ &= s_y(k) + C_u A_u \Delta x_u(k) + C_u B_u \Delta u(k) + \\ &+ C_w A_w \Delta x_w(k) + C_w B_w s_w(k) + C_w B_w w(k) \end{aligned} \quad (5.36)$$

Finalmente, el modelo de estado incremental para sistemas afectados por ruido coloreado es:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} s_y(k+1) \\ \Delta x_u(k+1) \\ \Delta x_w(k+1) \\ s_w(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & C_u A_u & C_w A_w & C_w B_w \\ 0 & A_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_w & B_w \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_y(k) \\ \Delta x_u(k) \\ \Delta x_w(k) \\ s_w(k) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} C_u B_u \\ B_u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u(k) + \begin{bmatrix} C_w B_w \\ 0 \\ B_w \\ -I \end{bmatrix} w(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_y(k) \\ \Delta x_u(k) \\ \Delta x_w(k) \\ s_w(k) \end{bmatrix} + w(k) \end{aligned} \quad (5.37)$$

En forma matricial:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B\Delta u(k) + v(k) \\ y(k) &= Cx(k) + w(k) \end{aligned} \quad (5.38)$$

donde

$$\begin{aligned} x &\in \Re^{n+m+2q} & v &\in \Re^{n+m+2q} \\ A &\in \Re^{(n+m+2q) \times (n+m+2q)} & B &\in \Re^{(n+m+2q) \times p} \\ C &\in \Re^{q \times (n+m+2q)} \end{aligned}$$

En este sistema, los subsistemas definidos por $s_y(k)$ y $\Delta x_u(k)$ son controlables, pero podrían no ser observables. El incremento de la parte estocástica $\Delta x_w(k)$ es observable pero no controlable. Sin embargo, $s_w(k)$ no es ni controlable ni

observable y por lo tanto, el sistema completo no es observable. De esta forma, este modelo de estado incremental es apropiado para el control del sistema, pero no para observar el estado.

5.4. Algoritmo de Control Basado en el Modelo de Estado Incremental para Sistemas Multivariables Lineales Afectados por Ruido Coloreado

Para obtener una estimación óptima del estado, no se puede utilizar el KF en el estado incremental, ya que no es observable, sin embargo se puede emplear el KF en el modelo discreto básico dado por la ecuación 5.26:

$$\begin{aligned} x_b(k+1) &= a_{xb} + A_b x_b(k) + B_b u(k) + v_b(k) \\ y(k) &= a_{yb} + C_b x_b(k) + w(k) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que si $R_2 = E \{w(k) \cdot w^T(k)\}$ entonces:

$$R_1 = E \{v_b(k) \cdot v_b^T(k)\} = E \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ B_w \end{bmatrix} w(k) \cdot w^T(k) \begin{bmatrix} 0 & B_w^T \end{bmatrix} \right\} = \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 \\ B_w \end{bmatrix} R_2 \begin{bmatrix} 0 & B_w^T \end{bmatrix} \\ R_{12} &= E \{v_b(k) \cdot w^T(k)\} = E \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ B_w \end{bmatrix} w(k) \cdot w^T(k) \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_w \end{bmatrix} R_2 \end{aligned}$$

Utilizando el algoritmo del KF, se obtienen las matrices del observador $L \in \Re^{(n+m) \times q}$ y del filtro $M \in \Re^{(n+m) \times q}$. En cada muestra, el error de observación es calculado como sigue:

$$\varepsilon_o(k) = y(k) - (a_{yb} + C_b x_b(k|k-1)) \quad (5.40)$$

Así que, la estimación del estado actual es:

$$x_b(k|k) = x_b(k|k-1) + M \varepsilon(k) \quad (5.41)$$

Finalmente, la estimación del nuevo estado es como sigue:

$$x_b(k+1|k) = a_{xb} + A_b x_b(k|k-1) + B_b u(k) + L \varepsilon(k) \quad (5.42)$$

De la estimación de:

$$x_b(k|k) = \begin{bmatrix} x_u(k|k) \\ x_w(k|k) \end{bmatrix}$$

se puede estimar:

$$\begin{aligned}\Delta x_u(k|k) &= x_u(k|k) - x_u(k-1|k-1) \\ \Delta x_w(k|k) &= x_w(k|k) - x_w(k-1|k-1)\end{aligned}\tag{5.43}$$

Y teniendo en cuenta que $w(k)$ es un ruido blanco de media nula y no es una señal medible, la mejor estimación para $s_y(k) = y(k) - w(k)$ será $y(k)$. Finalmente, considerando $s_w(k) = -w(k-1)$ y que además no es observable, la mejor estimación es su valor medio $E\{s_w(k)\} = E\{-w(k-1)\} = 0$. Así que, se obtiene una estimación de estado óptima:

$$x(k|k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ \Delta x_u(k|k) \\ \Delta x_w(k|k) \\ 0 \end{bmatrix}\tag{5.44}$$

Si el objetivo es alcanzar y_r , el estado de referencia incremental será:

$$x_r = \begin{bmatrix} s_{y_r} \\ \Delta x_{ur} \\ \Delta x_{wr} \\ s_{w_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Debe notarse que el estado de referencia se obtiene de forma natural, sin necesidad de realizar ningún tipo de cálculo.

Para un control óptimo del sistema, la función de coste que debe ser minimizada, se define como:

$$J = E \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} [(x_r - x(k))^T Q (x_r - x(k)) + \Delta u^T(k) R \Delta u(k)] \right\}\tag{5.45}$$

donde $Q \in \Re^{(n+m+2q) \times (n+m+2q)}$ es una matriz semidefinida positiva y $R \in \Re^{p \times p}$ es una matriz definida positiva. La solución conocida que minimiza este índice de coste es el algoritmo del LQR discreto. La realimentación de estado se obtiene como:

$$\begin{aligned}\Delta u(k) &= K(x_r - x(k|k)) \\ K &\in \Re^{p \times (n+m+2q)}\end{aligned}\tag{5.46}$$

y entonces

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k)\tag{5.47}$$

Teniendo en cuenta que el subsistema controlable es el definido por

$$\begin{bmatrix} s_y(k) \\ \Delta x_u(k) \end{bmatrix}$$

es razonable definir la matriz Q ponderando sólo ese subsistema

$$Q = \begin{bmatrix} Q_c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $Q_c \in \Re^{(n+q) \times (n+q)}$ sea una matriz definida positiva.

Es interesante observar que en régimen permanente el valor medio de la acción de control es:

$$E\{\Delta u(k)\} = K(x_r - E\{x(k|k)\}) = \begin{bmatrix} K_{s_y} & K_u & K_w & K_{s_w} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} y_r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E\{y(k)\} \\ E\{\Delta x_u(k|k)\} \\ E\{\Delta x_w(k|k)\} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (5.48)$$

Cumpléndose que en régimen permanente

$$\begin{aligned} E\{\Delta u(k)\} &= 0 \\ E\{\Delta x_u(k|k)\} &= 0 \\ E\{\Delta x_w(k|k)\} &= 0 \end{aligned}$$

ya que representan estimaciones de valores incrementales en régimen permanente. Sustituyendo,

$$0 = \begin{bmatrix} K_{s_y} & K_u & K_w & K_{s_w} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} y_r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E\{y(k)\} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

se cumple que si K_{s_y} es una matriz de rango completo, entonces:

$$E\{y(k)\} = y_r$$

Esto significa que el sistema controlado tiene error medio nulo en régimen permanente. Debe notarse que si las matrices Q_c y R del algoritmo LQR son positivas definidas y, como la parte determinista del sistema $s_y(k)$ y $\Delta x_u(k)$ es controlable, entonces K_{s_y} es una matriz de rango completo.

Debe observarse que, el algoritmo propuesto tiene dos fases. La primera fase es offline. En esta fase, los pasos principales son los siguientes:

- Del sistema identificado (5.1), obtener las matrices del sistema del modelo básico (5.25) y el modelo incremental propuesto (5.37).
- Calcular las matrices de observación L y del filtro M mediante el algoritmo del KF, utilizando las matrices del modelo básico (5.25).
- Calcular la matriz de control K mediante el algoritmo del LQR discreto utilizando las matrices del modelo incremental propuesto (5.37).

La segunda fase es online. En esta fase, los pasos principales son los siguientes:

- Calcular el estado filtrado $x_b(k|k)$ utilizando la matriz M y las ecuaciones (5.40) y (5.41).
- Calcular el estado incremental $x(k|k)$ utilizando las ecuaciones (5.43) y (5.44).
- Calcular la acción de control $\Delta u(k)$ y $u(k)$ utilizando la matriz K y las ecuaciones (5.46) y (5.47).
- Calcular la predicción de estado $x_b(k+1|k)$ utilizando la matriz L y la ecuación (5.42).

Resumiendo, este algoritmo es óptimo en términos de estado estimado, ya que se emplea el KF, y es óptimo en términos de la acción de control, ya que se utiliza el algoritmo del LQR discreto. Se obtiene la acción de control en forma incremental, lo que es equivalente a introducir una acción integral, así que, el sistema resultante tiene error medio nulo en régimen permanente en presencia de variaciones en la señal de referencia, errores de modelado y perturbaciones.

5.5. Extensión del Método Propuesto al Modelo Borroso de T-S Para Sistemas MultivARIABLES No Lineales con Ruido Coloreado

Se extienden el modelo y el control propuesto en el apartado anterior al caso de los sistemas no lineales identificados mediante el método de T-S, como se ha descrito en el capítulo 3. Es necesario definir las funciones de pertenencia para definir las reglas mediante el método de la inferencia borrosa. Se realiza la identificación generalizada de T-S de la parte determinista del sistema no lineal y se realiza la identificación del ruido coloreado mediante el algoritmo de factorización espectral y el teorema de Wold, suponiendo que el modelo de ruido coloreado es lineal.

De esta forma, siguiendo en cada regla el proceso propuesto en el apartado previo, el sistema multivariable completo puede ser modelado como:

$$\begin{aligned}
 & S^{(i_1 \dots i_m)}: \text{ Si } z_1(k) \text{ es } M_1^{i_1} \text{ y } \dots \text{ y } z_m(k) \text{ es } M_m^{i_m} \text{ entonces:} \\
 & \begin{bmatrix} x_u(k+1) \\ x_w(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xu}^{(i_1 \dots i_m)} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_u^{(i_1 \dots i_m)} & 0 \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u(k) \\ x_w(k) \end{bmatrix} + \\
 & \quad \begin{bmatrix} B_u^{(i_1 \dots i_m)} \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_w \end{bmatrix} w(k) \\
 & y(k) = y_u(k) + y_w(k) + w(k) = \\
 & \quad a_{y_u}^{(i_1 \dots i_m)} + \begin{bmatrix} C_u^{(i_1 \dots i_m)} & C_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u(k) \\ x_w(k) \end{bmatrix} + w(k)
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

Y el modelo de estado incremental en cada regla sería:

$$\begin{aligned}
 & S^{(i_1 \dots i_m)}: \text{ Si } z_1(k) \text{ es } M_1^{i_1} \text{ y } \dots \text{ y } z_m(k) \text{ es } M_m^{i_m} \text{ entonces:} \\
 & \begin{bmatrix} s_y(k+1) \\ \Delta x_u(k+1) \\ \Delta x_w(k+1) \\ s_w(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & C_u^{(i_1 \dots i_m)} A_u^{(i_1 \dots i_m)} & C_w A_w & C_w B_w \\ 0 & A_u^{(i_1 \dots i_m)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_w & B_w \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_y(k) \\ \Delta x_u(k) \\ \Delta x_w(k) \\ s_w(k) \end{bmatrix} + \\
 & \quad \begin{bmatrix} C_u^{(i_1 \dots i_m)} B_u^{(i_1 \dots i_m)} \\ B_u^{(i_1 \dots i_m)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u(k) + \begin{bmatrix} C_w B_w \\ 0 \\ B_w \\ -I \end{bmatrix} w(k) \\
 & y(k) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_y(k) \\ \Delta x_u(k) \\ \Delta x_w(k) \\ s_w(k) \end{bmatrix} + w(k)
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

Nótese que en cada regla se han definido las matrices de estado a partir de los subsistemas determinista no lineal y del subsistema estocástico lineal. De esta forma, las submatrices asociadas al estado determinista varían en las diferentes reglas según la identificación de T-S, mientras las submatrices asociadas a los estados estocásticos se mantienen iguales en todas las reglas.

Finalmente, se emplean en cada regla las mismas matrices $R1$, $R2$ y $R12$ con el modelo de estado discreto borroso de la ecuación 5.49 para obtener, mediante el algoritmo del KF, el observador de estado borroso óptimo para ruido. Por otro lado, se utilizan las mismas matrices Q y R y el modelo de estado incremental borroso de la ecuación 5.50 para obtener en cada regla una matriz de realimentación

Figura 5.1: Tanque de mezcla térmico.

de estado incremental mediante el algoritmo LQR.

5.6. Caso de Estudio: Tanque de Mezcla Térmico

En este apartado, se muestra mediante un ejemplo ilustrativo, un sistema de tanque de mezcla térmico, la aplicación del método propuesto de control borroso óptimo para sistemas afectados por ruido coloreado mediante el modelo de estado incremental de T-S. El sistema de tanque de mezcla térmico elegido es un sistema multivariable, no lineal y en el que intervienen retrasos puros. Además, se le ha añadido ruido coloreado.

5.6.1. Sistema de Tanque de Mezcla Térmico

Se considera el sistema de tanque de mezcla térmico [23, 110] de la figura 5.1. El sistema de tanque de mezcla térmico consiste en un tanque de mezcla, válvulas de entrada de fluido caliente y frío, y un orificio de salida.

El objetivo es mantener las salidas de caudal Q_s y temperatura T_s en los valores deseados. El sistema se supone con un fluido caliente de temperatura T_1 constante y un fluido frío de temperatura T_2 constante. Los dos caudales de entrada Q_1 y Q_2 actúan como variables manipulables mediante dos válvulas motorizadas cuyo modelo dinámico es simplificado como sigue:

$$\begin{aligned} Q_1(s) &= \frac{K_1}{s + p_1} e^{-\tau_1 s} U_1(s) \\ Q_2(s) &= \frac{K_2}{s + p_2} e^{-\tau_2 s} U_2(s) \end{aligned} \tag{5.51}$$

Se suponen disponibles dos medidas, la medida de temperatura T_s de salida no está afectada por retrasos, pero debido a la localización y tecnología del caudalímetro, la medida de caudal de salida está afectada por un retraso:

$$Q_m(s) = Q_s(t - \tau_s)$$

Además, se modelan pérdidas térmicas proporcionales a la diferencia de temperatura entre el interior T_s y el exterior T_e del tanque de mezcla, lo que actúa como perturbación del sistema. El modelo dinámico es:

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 - Q_s &= A \frac{dh}{dt} \\ T_1 Q_1 + T_2 Q_2 - T_s Q_s + k_p(T_s - T_e) &= A \frac{dT_h}{dt} \\ Q_s &= \alpha \sqrt{h} \end{aligned}$$

La tabla 5.1 resume los parámetros del sistema de tanque de mezcla térmico y la tabla 5.2 describe uno de los posibles puntos de operación que se propone para la operación nominal del tanque de mezcla térmico.

El tiempo de muestreo para el sistema discreto se elige como $T = 0,5s$.

Al modelo del sistema se le ha incluido un ruido coloreado modelado mediante el teorema de Wold como:

$$\begin{aligned} r_Q(k) &= \frac{1 - 0,5z^{-1}}{1 - 0,6z^{-1}} w_Q(k) \\ r_T(k) &= \frac{1 - 0,6z^{-1}}{1 - 0,9z^{-1}} w_T(k) \end{aligned}$$

donde w_Q y w_T son ruidos blancos de media nula y varianzas $\sigma_{w_Q}^2 = 0,01$ y $\sigma_{w_T}^2 = 0,1$, respectivamente. La covarianza entre ambas señales de ruido blanco es nula.

5.6.2. Identificación, Modelado y Control Borroso Óptimo para Sistemas Afectados por Ruido Coloreado Basado en el Modelo de Estado Incremental

La identificación lineal del sistema sobre su punto de operación nominal, mediante el método de mínimos cuadrados, es la siguiente:

$$\begin{aligned} Q_m(k) &= 0,0020 + 1,8769Q_m(k-1) - 0,8824Q_m(k-2) + \\ &\quad 0,0051U_1(k-5) - 0,0003U_1(k-6) + 0,0063U_2(k-4) - 0,0012U_2(k-5) \\ T_s(k) &= 0,2984 + 2,4049T_s(k-1) - 1,9350T_s(k-2) + 0,5243T_s(k-3) + \\ &\quad 0,1238U_1(k-3) - 0,0614U_1(k-4) - 0,1696U_2(k-2) + 0,1030U_2(k-3) \end{aligned}$$

Tabla 5.1: Parámetros del sistema de tanque de mezcla térmico.

Parámetro	Símbolo	Valor
Ganancia del sistema dinámico del caudal de entrada Q_1	K_1	$1(m^3/s)$
Polo del sistema dinámico del caudal de entrada Q_1	$-p_1$	$-0,2$
Retraso puro del caudal de entrada Q_1	τ_1	$1(s)$
Ganancia del sistema dinámico del caudal de entrada Q_2	K_2	$1(m^3/s)$
Polo del sistema dinámico del caudal de entrada Q_2	$-p_2$	$-0,25$
Retraso puro del caudal de entrada Q_2	τ_2	$0,5(s)$
Retraso puro de la medida del caudal de salida Q_m	τ_s	$1(s)$
Área del corte horizontal del tanque de mezcla	A	$1(m^2)$
Temperatura del caudal de entrada Q_1	T_1	$90(^{\circ}C)$
Temperatura del caudal de entrada Q_2	T_2	$10(^{\circ}C)$
Coefficiente de pérdidas térmicas	k_p	$0,01(m^3/s)$
Coefficiente de descarga del caudal de salida Q_s	α	$1(m^{2,5}/s)$

Tabla 5.2: Punto de operación del sistema de tanque de mezcla térmico.

Variable	Valor
Señal de entrada de la válvula motorizada U_1	2
Señal de entrada de la válvula motorizada U_2	2
Temperatura exterior del tanque de mezcla T_e	$15(^{\circ}C)$
Caudal de salida Q_s	$4(m^3/s)$
Temperatura de salida T_s	$50(^{\circ}C)$

Figura 5.2: Reglas borrosas para el sistema de tanque de mezcla térmico. a) Reglas borrosas para el caudal Q_m . b) Reglas borrosas para la temperatura T_s .

Nótese que entre la entrada U_1 y el caudal medido de salida Q_m hay un retraso de 5 muestras. Entre la entrada U_2 y el caudal medido de salida Q_m hay un retraso de 4 muestras. Entre la entrada U_1 y la temperatura de salida T_s hay un retraso de 3 muestras. Entre la entrada U_2 y la temperatura de salida T_s hay un retraso de 2 muestras.

Entonces, se realiza la identificación del modelo borroso de T-S empleando datos de entrada-salida del sistema. Se utilizan tres reglas triangulares entre $1m/s^2$ y $7m/s^2$ para el caudal y tres reglas triangulares entre $20^\circ C$ y $80^\circ C$ para la temperatura (Ver figura 5.2). Entonces el modelo borroso se realiza con un conjunto de 9 reglas:

$S^{(1,1)}$: Si $Q_m(k)$ es $M_{Q_m}^1$ y $T_s(k)$ es $M_{T_s}^1$ entonces:

$$Q_m(k) = 0,0017 + 1,8731Q_m(k-1) - 0,8792Q_m(k-2) + \\ 0,0058U_1(k-5) - 0,0001U_1(k-6) + 0,0066U_2(k-4) - 0,0007U_2(k-5)$$

CAPÍTULO 5: Control Óptimo para Sistemas Afectados por Ruido Coloreado

$$\begin{aligned}
 T_s(k) &= 0,2642 + 2,4191T_s(k-1) - 1,9521T_s(k-2) + 0,5273T_s(k-3) + \\
 &\quad 0,1209U_1(k-3) - 0,0656U_1(k-4) - 0,1456U_2(k-2) + 0,0876U_2(k-3) \\
 &\quad \vdots
 \end{aligned}$$

La identificación del ruido coloreado se realiza mediante el algoritmo de factorización espectral, mediante datos de salida del sistema obtenidos manteniendo las entradas en su punto de operación. El sistema de ruido identificado queda:

$$\begin{aligned}
 r_Q(k) &= \frac{1 - 0,4709z^{-1}}{1 - 0,5700z^{-1}} w_Q(k) \\
 r_T(k) &= \frac{1 - 0,5749z^{-1}}{1 - 0,8885z^{-1}} w_T(k)
 \end{aligned}$$

con varianzas del ruido blanco $\sigma_{w_Q}^2 = 0,0100$ y $\sigma_{w_T}^2 = 0,1007$. Los resultados obtenidos mediante el método de factorización espectral son muy similares a los impuestos al sistema. Para obtener el modelo de estado estocástico, primero hay que calcular:

$$\begin{aligned}
 \frac{1 - 0,4709q^{-1}}{1 - 0,5700q^{-1}} &= 1 + \frac{0,0991q^{-1}}{1 - 0,5700q^{-1}} \\
 \frac{1 - 0,5749q^{-1}}{1 - 0,8885q^{-1}} &= 1 + \frac{0,3135q^{-1}}{1 - 0,8885q^{-1}}
 \end{aligned}$$

Entonces, mediante la identificación realizada, el modelo discreto básico con ruido coloreado para las reglas borrosas queda:

$S^{(1,1)}$: Si $Q_m(k)$ es $M_{Q_m}^1$ y $T_s(k)$ es $M_{T_s}^1$ entonces:

$$\begin{bmatrix} x_u(k+1) \\ x_w(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,8731 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,8792 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,4191 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,9521 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5273 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5700 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8885 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u(k) \\ x_w(k) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,0066 \\ 0,0058 & -0,0007 \\ -0,0000 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0,1456 \\ 0,1209 & 0,0876 \\ -0,0656 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0991 & 0 \\ 0 & 0,3135 \end{bmatrix} w(k) + \begin{bmatrix} 0,0032 \\ -0,0015 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,6390 \\ -0,5157 \\ 0,1393 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 y(k) &= \begin{bmatrix} 0,0017 \\ 0,2641 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u(k) \\ x_w(k) \end{bmatrix} + w(k) \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

El ruido se ha modelado de forma lineal, por lo que en las matrices de estado para cada regla borrosa, los parámetros asociados al ruido serán los mismos en todas las reglas borrosas.

Este sistema es observable. El subsistema determinista $x_u(k)$ es controlable, pero el subsistema estocástico $x_w(k)$ no lo es, ya que está desconectado de las entradas manipulables.

Mediante este modelo, el estado estimado es obtenido mediante el KF, donde se utilizan:

$$\begin{aligned}
 R_2 &= \begin{bmatrix} 0,0100 & 0 \\ 0 & 0,1007 \end{bmatrix} \\
 R_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0099 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$R_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0010 & 0 \\ 0 & 0,0316 \end{bmatrix}$$

Entonces las ganancias del observador y del filtro, calculadas en cada regla borrosa mediante el algoritmo del KF discreto, son:

$S^{(1,1)}$: Si $Q_m(k)$ es $M_{Q_m}^1$ y $T_s(k)$ es $M_{T_s}^1$ entonces:

$$L^{(1,1)} = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 \\ -0,0000 & -0,0000 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0000 & 0,0000 \\ -0,0000 & -0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 \\ 0 & 0 \\ 0,0991 & -0,0000 \\ -0,0000 & 0,3135 \end{bmatrix}$$

$$M^{(1,1)} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0,2963 & 0,0038 \\ -0,3229 & -0,0041 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,2683 & 0,0034 \\ -0,4010 & -0,0051 \\ 0,1530 & 0,0020 \\ 0 & 0 \\ -0,0830 & -0,0011 \\ -0,2407 & -0,0031 \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO 5: Control Óptimo para Sistemas Afectados por Ruido Coloreado

Construyendo el modelo de estado incremental con ruido coloreado para las reglas borrosas:

$S^{(1,1)}$: Si $Q_m(k)$ es $M_{Q_m}^1$ y $T_s(k)$ es $M_{T_s}^1$ entonces:

$$\begin{bmatrix} s_y(k+1) \\ \Delta x_u(k+1) \\ \Delta x_w(k+1) \\ s_w(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1,8731 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,57 & 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,4191 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,8885 & 0 & 0,3135 \\ 0 & 0 & 1,8731 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,8792 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,4191 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,9521 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5273 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,57 & 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8885 & 0 & 0,3135 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,0066 \\ 0,0058 \\ -0,0007 \\ -0,0000 \\ 0 \\ 0 \\ -0,1456 \\ 0,1209 \\ 0,0876 \\ -0,0656 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \Delta u(k) + \begin{bmatrix} 0,0991 & 0 \\ 0 & 0,3135 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0991 & 0 \\ 0 & 0,3135 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} w(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_y(k) \\ \Delta x_u(k) \\ \Delta x_w(k) \\ s_w(k) \end{bmatrix} + w(k)$$

$$\vdots$$

CAPÍTULO 5: Control Óptimo para Sistemas Afectados por Ruido Coloreado

Utilizando las siguientes matrices de ponderación del controlador para el algoritmo del LQR discreto:

$$Q = 0,01 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces las matrices del controlador de estado, calculadas en cada regla borrosa, mediante el algoritmo del LQR discreto son:

$S^{(1,1)}$: Si $Q_m(k)$ es $M_{Q_m}^1$ y $T_s(k)$ es $M_{T_s}^1$ entonces:

$$K^{(1,1)} = \begin{bmatrix} 0,1203 & 0,0089 & 12,3582 & 11,9708 & 11,4478 & 10,9109 & 10,3617 & 9,8027 \\ 0,1105 & -0,0096 & 10,7575 & 10,3827 & 9,8849 & 9,3762 & 8,8589 & 8,3346 \\ \dots & 1,3373 & 1,2786 & 1,1966 & 1,1003 & 0,1593 & 0,0606 & 0,0277 & 0,0214 \\ & -1,3588 & -1,2732 & -1,1610 & -1,0337 & 0,1463 & -0,0639 & 0,0254 & -0,0225 \end{bmatrix}$$

5.6.3. Análisis de Resultados

La figura 5.3 muestra la respuesta del sistema controlado mediante el método propuesto en este capítulo, basado en el modelo de estado incremental borroso para sistemas afectados por ruido coloreado, cuando el sistema está sujeto a cambios en las señales de referencia del caudal y temperatura. Se puede comprobar que el sistema controlado tiene error medio nulo en régimen permanente y buena respuesta transitoria.

Para comprobar la robustez del sistema de control propuesto ante las no linealidades, en la figura 5.4 se muestra la respuesta del sistema controlado ante cambios bruscos y excesivos en las señales de referencia. Se puede comprobar que el controlador borroso actúa correctamente en zonas alejadas del punto de operación nominal.

En la figura 5.5 se muestran las señales de ruido resultante al mantener el sistema estable en su punto de operación nominal. La varianza del sistema, sin

Figura 5.3: Respuestas dinámicas del sistema de tanque de mezcla térmico ante cambios en las señales de referencia. a) Respuesta de caudal Q_m . b) Respuesta de la temperatura T_s .

Figura 5.4: Respuestas dinámicas del sistema de tanque de mezcla térmico ante cambios excesivos en las señales de referencia. a) Respuesta de caudal Q_m . b) Respuesta de la temperatura T_s .

Figura 5.5: Respuestas del sistema de tanque de mezcla térmico al ser controlado en el punto de operación nominal. a) Respuesta de caudal Q_m . b) Respuesta de la temperatura T_s .

CAPÍTULO 5: Control Óptimo para Sistemas Afectados por Ruido Coloreado

control y manteniendo la señal de entrada en su punto de operación, es:

$$\begin{aligned}\sigma_{Q_m}^2 &= 0,0100 \\ \sigma_{T_s}^2 &= 0,1526\end{aligned}$$

mientras que la varianza del sistema controlado, cuando la referencia es el punto de operación nominal:

$$\begin{aligned}\sigma_{Q_m}^2 &= 0,0105 \\ \sigma_{T_s}^2 &= 0,1571\end{aligned}$$

La varianza del sistema controlado no ha reducido el ruido, aunque el aumento es insignificante.

Por otro lado, si se emplea el método de control descrito en el capítulo 3 mediante el modelo de estado incremental que no incluye el modelo de ruido desarrollado en este capítulo, se obtienen las siguientes varianzas en las señales de salida, al mantener la referencia en el punto de operación nominal:

$$\begin{aligned}\sigma_{Q_m}^2 &= 0,0450 \\ \sigma_{T_s}^2 &= 3,5720\end{aligned}$$

Mediante el modelo de estado incremental se introducen incrementos en los estados, por lo que el ruido en los estados de este controlador se amplifica. Por este motivo, cuando el sistema que se pretende controlar está afectado por ruido coloreado, es especialmente necesario tener este ruido en cuenta en el modelo de estado para poder hacer un control eficaz.

5.7. Conclusión

En este capítulo se ha desarrollado la formulación del modelo de estado incremental para sistemas afectados por ruido coloreado. Esta formulación permite un control óptimo contra el ruido mediante, la estimación óptima de estado mediante un KF y el control óptimo por realimentación de estado empleando el método del LQR discreto. Utilizar un modelo de estado incremental, en lugar del modelo discreto tradicional, permite obtener un error medio en régimen permanente nulo, resolver el problema del cálculo de referencia y eliminar de forma natural los términos independientes.

CAPÍTULO 6

CONTROL BORROSO MULTIESTRATEGIA BASADO EN EL MODELO DE T-S

Capítulo 6

CONTROL BORROSO MULTIESTRATEGIA BASADO EN EL MODELO DE T-S

En este capítulo se ha desarrollado un nuevo método de control no lineal, utilizando el modelo borroso de T-S, basado en la combinación de distintas estrategias de control según el punto de funcionamiento del sistema. Este controlador es capaz de aprovechar las ventajas de los distintos métodos de control minimizando sus inconvenientes. Las estrategias de control empleadas son el control óptimo mediante modelo de estado incremental, el control óptimo basado en el modelo de estado discreto tradicional y un control de entrada constante. Se proponen varias mejoras para el control multiestrategia más básico y finalmente, se desarrolla un control multiestrategia para sistemas afectados por ruido coloreado.

6.1. Control Borroso Multiestrategia

En esta sección se detalla el controlador borroso de T-S basado en la combinación de diferentes métodos de control según el punto de funcionamiento del sistema. Los distintos métodos de control empleados son los siguientes:

- Control LQR basado en el modelo de estado discreto tradicional.
 - Ventaja: Respuesta transitoria rápida y óptima.
 - Desventaja: Error en régimen permanente.
- Control LQR basado en el modelo de estado incremental.

EC	EC	EC	EC	EC
EC	LQR	LQR	LQR	EC
EC	LQR	INC	LQR	EC
EC	LQR	LQR	LQR	EC
EC	EC	EC	EC	EC

Figura 6.1: Estructura de las estrategias de control. Control LQR basado en el modelo de estado discreto tradicional (LQR). Control LQR basado en el modelo de estado incremental (INC). Control de entrada constante (EC).

- Ventaja: Error en régimen permanente nulo.
- Desventaja: Respuesta transitoria relativamente lenta.
- Control de entrada constante.
 - Ventaja: Robusto. No inestabiliza sistemas estables.
 - Desventaja: No rechaza perturbaciones.

La estructura para combinar las diferentes estrategias de control puede variar según la aplicación y los distintos objetivos a alcanzar. En este trabajo se propone la siguiente configuración (figura 6.1):

- Control LQR basado en el modelo de estado incremental: Se emplea en la regla central ajustada al punto de operación nominal del sistema. De esta forma se pretende aprovechar su ventaja de error en régimen permanente nulo.
- Control LQR basado en el modelo de estado discreto tradicional: Se emplea en las reglas intermedias, fuera del punto de operación nominal pero no las exteriores. Esta estrategia de control óptimo se emplea para llevar el sistema de forma óptima desde el punto de funcionamiento hasta una zona donde el control mediante modelo incremental adquiera mayor importancia.
- Control de entrada constante: Se emplea en las reglas exteriores. En esta estrategia se pretende utilizar una señal de control predefinida que sea la máxima permitida por el actuador, con el objetivo de que este método

actúe como barrera de seguridad. En caso de que ocurra alguna perturbación suficiente para alcanzar esta zona, esta estrategia deberá producir una actuación para devolver al sistema a zonas más centrales, donde actúe otro controlador.

La metodología de control multiestrategia parte de una identificación de T-S descrita en el capítulo 3, empleando funciones de pertenencia triangulares. En las reglas se obtienen los modelos de estado incremental o discreto, siguiendo la estructura descrita previamente, y se obtienen las matrices de realimentación de estado en cada regla mediante el algoritmo LQR.

Para diseñar el control multiestrategia, ya que hay varias metodologías de control que necesitan varios ajustes diferentes, es necesario emplear diferentes matrices Q y R para los algoritmos LQR basados en el estado discreto tradicional y el estado incremental. Además, en las diferentes reglas en las que se emplea el control de entrada constante, es necesario escoger acciones de control diferentes, siempre enfocadas en dirigir al sistema hacia el punto de operación nominal.

De esta forma, cada una de las distintas estrategias de control, descritas en mayor detalle en el capítulo 3, producirá las siguientes señales de control:

- Control LQR basado en el modelo de estado incremental. En la regla central:

$$\begin{aligned}
 &S^{(i_1 \dots i_m)}: \text{ Si } z_1(k) \text{ es } M_1^{i_1} \text{ y } \dots \text{ y } z_m(k) \text{ es } M_m^{i_m} \text{ entonces:} \\
 &\Delta u(k)_{(i_1 \dots i_m)} = K_{INC}^{(i_1 \dots i_m)} \left(\begin{bmatrix} y_r \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y(k) \\ x_e(k) - x_e(k-1) \end{bmatrix} \right) \\
 &u(k)_{(i_1 \dots i_m)} = u(k-1) + \Delta u(k)_{(i_1 \dots i_m)} \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

- Control LQR basado en el modelo de estado discreto tradicional. En las reglas intermedias:

$$\begin{aligned}
 &S^{(i_1 \dots i_m)}: \text{ Si } z_1(k) \text{ es } M_1^{i_1} \text{ y } \dots \text{ y } z_m(k) \text{ es } M_m^{i_m} \text{ entonces:} \\
 &\begin{bmatrix} x_r(i_1 \dots i_m) \\ u_r(i_1 \dots i_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A^{(i_1 \dots i_m)} - I) & B^{(i_1 \dots i_m)} \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -a_x^{(i_1 \dots i_m)} \\ y_r - a_y^{(i_1 \dots i_m)} \end{bmatrix} \\
 &u(k)_{(i_1 \dots i_m)} = K_{LQR}^{(i_1 \dots i_m)} (x_r(i_1 \dots i_m) - x_e(k)) + u_r(i_1 \dots i_m) \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

- Control de entrada constante. En las reglas exteriores:

$$\begin{aligned}
 &S^{(i_1 \dots i_m)}: \text{ Si } z_1(k) \text{ es } M_1^{i_1} \text{ y } \dots \text{ y } z_m(k) \text{ es } M_m^{i_m} \text{ entonces:} \\
 &u(k)_{(i_1 \dots i_m)} = cte_{EC}^{(i_1 \dots i_m)}
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

En el controlador borroso multiestrategia se desborrosifican las distintas señales de control producidas, calculadas en todas las reglas borrosas, para obtener una única señal de control.

$$u(k) = \frac{\sum_{i_1=1}^{r_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{r_m} w(z(k))_{(i_1 \dots i_m)} u(k)_{(i_1 \dots i_m)}}{\sum_{i_1=1}^{r_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{r_m} w(z(k))_{(i_1 \dots i_m)}} \quad (6.4)$$

donde $w_{(i_1 \dots i_m)}$ es el peso que corresponde a la regla $S^{(i_1 \dots i_m)}$:

$$w(z(k))_{(i_1 \dots i_m)} = \prod_{j=1}^m \mu_j^{i_j}(z_j(k)) \quad (6.5)$$

Ya que los estados no son directamente accesibles, se emplea un observador de estado borroso. Este observador de estado puede ser único para todas las estrategias de control, empleando para ello la estimación del estado discreto tradicional como sigue:

$$\begin{aligned} S^{(i_1 \dots i_m)}: & \text{ Si } z_1(k) \text{ es } M_1^{i_1} \text{ y } \dots \text{ y } z_m(k) \text{ es } M_m^{i_m} \text{ entonces:} \\ x_e(k+1)_{(i_1 \dots i_m)} &= a_x^{(i_1 \dots i_m)} + A^{(i_1 \dots i_m)} x_e(k) + B^{(i_1 \dots i_m)} u(k) + \\ & H^{(i_1 \dots i_m)} \left(y(k) - \left(a_y^{(i_1 \dots i_m)} + C x_e(k) \right) \right) \\ & \vdots \\ x_e(k+1) &= \frac{\sum_{i_1=1}^{r_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{r_m} w(z(k))_{(i_1 \dots i_m)} x_e(k+1)_{(i_1 \dots i_m)}}{\sum_{i_1=1}^{r_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{r_m} w(z(k))_{(i_1 \dots i_m)}} \end{aligned} \quad (6.6)$$

6.1.1. Caso de Estudio: Tanque de Mezcla Térmico

En este apartado se muestra mediante el ejemplo del tanque de mezcla térmico cómo el método de control multiestrategia propuesto presenta grandes ventajas en régimen transitorio y permanente con respecto a los controladores óptimos tratados previamente basados en el modelo de estado discreto tradicional e incremental.

Se considera el sistema de tanque de mezcla térmico de la sección 5.6 pero obviando la inclusión de ruido coloreado.

6.1.1.1. Identificación, Modelado y Control Multiestrategia del Sistema de Tanque de Mezcla Térmico

La identificación lineal del sistema sobre su punto de operación nominal, mediante el método de mínimos cuadrados, es la siguiente:

$$\begin{aligned} Q_m(k) &= 0,0020 + 1,8769Q_m(k-1) - 0,8824Q_m(k-2) + \\ &\quad 0,0051U_1(k-5) - 0,0003U_1(k-6) + 0,0063U_2(k-4) - 0,0012U_2(k-5) \\ T_s(k) &= 0,2984 + 2,4049T_s(k-1) - 1,9350T_s(k-2) + 0,5243T_s(k-3) + \\ &\quad 0,1238U_1(k-3) - 0,0614U_1(k-4) - 0,1696U_2(k-2) + 0,1030U_2(k-3) \end{aligned}$$

Nótese que entre la entrada U_1 y el caudal medido de salida Q_m hay un retraso de 5 muestras. Entre la entrada U_2 y el caudal medido de salida Q_m hay un retraso de 4 muestras. Entre la entrada U_1 y la temperatura de salida T_s hay un retraso de 3 muestras. Entre la entrada U_2 y la temperatura de salida T_s hay un retraso de 2 muestras.

Entonces, se realiza la identificación del modelo borroso de T-S empleando datos de entrada-salida del sistema. Se utilizan cinco reglas triangulares entre $0m/s^2$ y $8m/s^2$ para el caudal y cinco reglas triangulares entre $10^\circ C$ y $90^\circ C$ para la temperatura (Ver figura 6.2). Entonces el modelo borroso se realiza con un conjunto de 25 reglas:

$$\begin{aligned} S^{(1,1)}: \text{ Si } Q_m(k) \text{ es } M_{Q_m}^1 \text{ y } T_s(k) \text{ es } M_{T_s}^1 \text{ entonces:} \\ Q_m(k) &= 0,0020 + 1,8769Q_m(k-1) - 0,8824Q_m(k-2) + \\ &\quad 0,0051U_1(k-5) - 0,0003U_1(k-6) + 0,0063U_2(k-4) - 0,0012U_2(k-5) \\ T_s(k) &= 0,2984 + 2,4049T_s(k-1) - 1,9350T_s(k-2) + 0,5243T_s(k-3) + \\ &\quad 0,1238U_1(k-3) - 0,0614U_1(k-4) - 0,1696U_2(k-2) + 0,1030U_2(k-3) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nótese que se han empleado 25 reglas porque es el mínimo número de reglas necesario para poder diseñar un control multiestrategia con la configuración propuesta en esta sección. Para una identificación y control borroso estándar de este sistema se podrían emplear 9 reglas como se ha realizado en el capítulo 5.

El control multiestrategia con estas reglas borrosas se define como se muestra en la figura 6.3, donde se indica la metodología seleccionada para cada regla borrosa correspondiente a la inferencia borrosa de las funciones de pertenencia de la figura 6.2. De esta forma se obtiene la estructura definida en esta sección, maximizando las ventajas de cada método de control y minimizando sus inconvenientes.

Así, en las figuras 6.4, 6.5 y 6.6 se muestran los pesos de las reglas para cada método de control sobre el espacio de trabajo del controlador multiestrategia.

Figura 6.2: Reglas borrosas para el control multiestrategia del sistema de tanque de mezcla térmico. a) Reglas borrosas para el caudal Q_m . b) Reglas borrosas para la temperatura T_s .

		$Q_m \text{ (m}^3/\text{s)}$				
		0	1	4	7	8
$T_s \text{ (}^\circ\text{C)}$	90	EC	EC	EC	EC	EC
	80	EC	LQR	LQR	LQR	EC
	50	EC	LQR	INC	LQR	EC
	20	EC	LQR	LQR	LQR	EC
	10	EC	EC	EC	EC	EC

Figura 6.3: Estructura del control multiestrategia para el control del tanque de mezcla térmico. Control LQR basado en el modelo de estado discreto tradicional (LQR). Control LQR basado en el modelo de estado incremental (INC). Control de entrada constante (EC).

Entonces, mediante la identificación realizada, el modelo discreto tradicional para las reglas borrosas $S^{2,2}$, $S^{2,3}$, $S^{2,4}$, $S^{3,2}$, $S^{3,4}$, $S^{4,2}$, $S^{4,3}$ y $S^{4,4}$ queda:

$S^{(2,2)}$: Si $Q_m(k)$ es $M_{Q_m}^2$ y $T_s(k)$ es $M_{T_s}^2$ entonces:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1,8765 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,8827 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,4052 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,9348 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5245 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) +$$

Figura 6.4: Peso de la regla asociada al control LQR basado en el modelo de estado incremental.

Figura 6.5: Peso de las reglas asociadas al control LQR basado en el modelo de estado discreto tradicional.

Figura 6.6: Peso de las reglas asociadas al control de entrada constante.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,0071 \\ 0,0060 & -0,0011 \\ -0,0002 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0,1697 \\ 0,1259 & 0,1030 \\ -0,0607 & 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0,0039 \\ -0,0018 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,7177 \\ -0,5773 \\ 0,1565 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 y(k) &= \begin{bmatrix} 0,0021 \\ 0,2984 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

Utilizando las siguientes matrices de ponderación:

$$\begin{aligned}
 Q &= \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix} \\
 R &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Las matrices del controlador de estado, calculadas en cada regla borrosa asociada al método de control óptimo basado en el modelo de estado discreto tradicional mediante el algoritmo del LQR discreto son:

$$\begin{aligned}
 S^{(2,2)}: & \text{ Si } Q_m(k) \text{ es } M_{Q_m}^2 \text{ y } T_s(k) \text{ es } M_{T_s}^2 \text{ entonces:} \\
 K^{(2,2)} &= \begin{bmatrix} 16,4227 & 16,1948 & 15,8227 & 15,2897 & 14,5865 \\ 12,5438 & 12,2301 & 11,7885 & 11,2054 & 10,5741 \\ \dots & 13,8092 & 2,1187 & 1,9970 & 1,8103 & 1,5596 \\ & 9,3985 & -2,5102 & -2,2137 & -1,8204 & -1,3494 \end{bmatrix} \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

Por otro lado, el modelo incremental para la regla borrosas $S^{3,3}$ es:

$S^{(3,3)}$: Si $Q_m(k)$ es $M_{Q_m}^3$ y $T_s(k)$ es $M_{T_s}^3$ entonces:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} y(k+1) \\ \Delta x(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1,8765 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,4052 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,8765 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,8827 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,4052 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,9348 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5245 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} y(k) \\ \Delta x(k) \end{bmatrix} &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,0071 \\ 0,0060 & -0,0011 \\ -0,0002 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0,1697 \\ 0,1259 & 0,1030 \\ -0,0607 & 0 \end{bmatrix} \Delta u(k) \\
y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ \Delta x(k) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Utilizando las siguientes matrices de ponderación del controlador LQR para el control mediante modelo de estado incremental:

$$Q = \begin{bmatrix} 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz del controlador de estado, calculada en la regla borrosa asociada al método de control óptimo basado en el modelo de estado incremental mediante el algoritmo del LQR discreto:

$$S^{(3,3)}: \text{ Si } Q_m(k) \text{ es } M_{Q_m}^3 \text{ y } T_s(k) \text{ es } M_{T_s}^3 \text{ entonces:}$$

$$K^{(3,3)} = \begin{bmatrix} 0,8612 & 0,0366 & 49,5943 & 45,6629 & 40,8877 & 36,1659 \\ 0,5312 & -0,0601 & 27,2775 & 24,8636 & 21,9541 & 19,1053 \\ \dots & 31,5383 & 27,0539 & 4,1583 & 3,6476 & 3,0124 & 2,3132 \\ 16,3494 & 13,6992 & -5,4153 & -4,2898 & -2,9728 & -1,6190 \end{bmatrix}$$

Y finalmente, en las reglas borrosas $S^{1,1}$, $S^{1,2}$, $S^{1,3}$, $S^{1,4}$, $S^{1,5}$, $S^{1,2}$, $S^{5,2}$, $S^{1,3}$, $S^{5,3}$, $S^{1,4}$, $S^{5,4}$, $S^{5,1}$, $S^{5,2}$, $S^{5,3}$, $S^{5,4}$, y $S^{5,5}$ no es necesario obtener los modelos de estado, pero sí elegir cuales serán las señales de control constantes asociadas a cada regla borrosa.

Para diseñar las señales de control del control de entrada constante, el método que se ha propuesto es el siguiente:

- Seleccionar las reglas asociadas a los comportamientos más extremos del sistema. En este caso, las reglas que produzcan los caudales de salida máximos y mínimos, y las temperaturas de salida máximas y mínimas.
- En esas reglas, se selecciona una acción de control saturada, al nivel máximo del actuador, que sea contraria al comportamiento del sistema, para que devuelva el sistema a un punto menos extremo. En este caso, por ejemplo en la regla que corresponde a que el caudal de salida es mínimo, las señales

de control escogidas para ambas entradas U_1, U_2 sería la máxima permitida. Si por el contrario, el caudal de salida fuese máximo, las señales de control serían las mínimas permitidas.

- En el resto de reglas, las señales se definirían mediante una interpolación lineal.

De esta forma, las señales de control asociadas a las reglas que aplican el control de entrada constante son:

$$reglas(Q_m, T_s) = \begin{bmatrix} S^{(1,1)} & S^{(1,2)} & S^{(1,3)} & S^{(1,4)} & S^{(1,5)} \\ S^{(2,1)} & S^{(2,2)} & S^{(2,3)} & S^{(2,4)} & S^{(2,5)} \\ S^{(3,1)} & S^{(3,2)} & S^{(3,3)} & S^{(3,4)} & S^{(3,5)} \\ S^{(4,1)} & S^{(4,2)} & S^{(4,3)} & S^{(4,4)} & S^{(4,5)} \\ S^{(5,1)} & S^{(5,2)} & S^{(5,3)} & S^{(5,4)} & S^{(5,5)} \end{bmatrix}$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & & & & 1 \\ 4 & & & & 0 \\ 3 & & & & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & & & & 4 \\ 0 & & & & 4 \\ 0 & & & & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

6.1.1.2. Análisis de Resultados

En la figura 6.7 se muestran las respuestas transitorias de caudal de salida Q_m y de temperatura de salida T_s cuando al sistema de tanque de mezcla térmico se le añaden a la salida perturbaciones excesivas de tipo escalón de Q_m : $4m/s^2$ en $t = 10s$ y T_s : $40^\circ C$ en $t = 50s$. Se muestran las respuestas transitorias empleando las diferentes metodologías de control que se han comentado en este capítulo: El control LQR mediante modelo de estado tradicional, el control LQR mediante modelo de estado incremental y el control multiestrategia propuesto en este capítulo. En la respuesta del control multiestrategia se han utilizado varios colores para marcar las distintas metodologías que están funcionando en ese instante: Azul para el control mediante modelo de estado incremental, rojo para el control mediante modelo de estado tradicional y verde para el control de entrada constante. En la figura 6.8 se muestra el diagrama de fase de temperatura de salida T_s frente a caudal de salida Q_m .

Se puede observar que el control multiestrategia tiene una respuesta transitoria muy similar al control LQR basado en el modelo de estado tradicional, más

Figura 6.7: Respuesta transitoria del sistema de tanque de mezcla térmico controlado mediante control LQR basado en el modelo de estado discreto tradicional, control LQR basado en el modelo de estado incremental y control multiestrategia. a) Respuesta del caudal de salida Q_m . b) Respuesta de la temperatura de salida T_s .

Figura 6.8: Diagrama de fase del sistema de tanque de mezcla térmico controlado mediante control multiestrategia.

rápida que la obtenida con el control mediante modelo incremental, y además, presenta error nulo en régimen permanente. De esta forma, el control multiestrategia aprovecha las ventajas de las metodologías de control empleadas minimizando sus inconvenientes.

No obstante, este método de control multiestrategia plantea un par de inconvenientes importantes que deben ser solucionados:

- No se puede modificar la señal de referencia del controlador. Los métodos de control asociados a las distintas reglas borrosas están configurados para funcionar alrededor de un punto de operación nominal fijo. Si se escogiera otra referencia, suficientemente lejana del punto de operación nominal, se podrían utilizar las estrategias de control de forma inadecuada, obteniendo todos los inconvenientes de las metodologías de control sin aprovechar sus ventajas.
- Realizando simulaciones se han dado casos en los que el sistema realimentado llegaba a un régimen permanente lejos del punto de operación nominal y la acción de control incremental borrosa no tenía suficiente peso para sacar el sistema de ese equilibrio indeseado. De esta forma, se podrían obtener errores en régimen permanente.

6.2. Mejoras Desarrolladas para el Control Borroso Multiestrategia

En esta sección se proponen varias mejoras para el método de control borroso multiestrategia desarrollado previamente.

6.2.1. Supervisor para Cambios en la Señal de Referencia

Ya que uno de los principales problemas del control multiestrategia es que no permite realizar cambios en la señal de referencia, sin destrozar el uso correcto de la configuración de metodologías diseñada, en este apartado se propone el uso de un supervisor que decida que métodos de control se utilicen en las diferentes reglas según el punto de referencia marcado.

La idea principal, es ajustar los métodos de control alrededor del punto de referencia como se muestra en la figura 6.9. De esta forma:

- Control LQR basado en el modelo de estado incremental: Se emplea en las reglas alrededor del punto de referencia.
- Control LQR basado en el modelo de estado discreto tradicional: Se emplea en las reglas intermedias, fuera del punto de referencia pero no las exteriores.

EC	EC	EC	EC	EC	EC	EC
EC	LQR	LQR	LQR	LQR	LQR	EC
EC	LQR	LQR	INC	INC	LQR	EC
EC	LQR	LQR	INC	INC	LQR	EC
EC	LQR	LQR	LQR	LQR	LQR	EC
EC	LQR	LQR	LQR	LQR	LQR	EC
EC	EC	EC	EC	EC	EC	EC

Figura 6.9: Estructura de las estrategias de control ajustadas para una referencia (Ref). Control LQR basado en el modelo de estado discreto tradicional (LQR). Control LQR basado en el modelo de estado incremental (INC). Control de entrada constante (EC).

- Control de entrada constante: Se emplea en las reglas exteriores.

La estructura del supervisor propuesto para el ajuste de las estrategias según la referencia es la siguiente:

1. Borrosificación e inferencia borrosa de las variables borrosas de referencia $z_{rj}(k)$. Si no están disponibles directamente, es necesario calcularlas.

$$w_r(z_r(k))_{(i_1 \dots i_m)} = \prod_{j=1}^m \mu_j^{i_j}(z_{rj}(k)) \quad (6.7)$$

2. Selección de reglas asociadas al control LQR mediante modelo de estado incremental. Se escogen las reglas cuyo peso de referencia $w_r(z_r(k))_{(i_1 \dots i_m)}$ sea superior a un cierto umbral. Es recomendable que el umbral l_r esté asociado al número de variables borrosas m de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Reglas_{INC} &= Reglas(w_r(z_r(k))_{(i_1 \dots i_m)} \geq l_r) \\ l_r &= 0,8 * 0,5^m \end{aligned} \quad (6.8)$$

3. Selección de las reglas asociadas al control de entrada constante. Se escogen

las reglas exteriores.

$$Reglas_{EC} = Reglas((i_1 || i_2 || \dots || i_m) == (1 || (r_1, r_2, \dots, r_m))) \quad (6.9)$$

4. Selección de las reglas asociadas al control LQR basado en el modelo de estado tradicional. El resto de reglas.

$$Reglas_{LQR} = Reglas(Reglas \neq (Reglas_{INC} \cup Reglas_{EC})) \quad (6.10)$$

Se ha decidido dar mayor prioridad al control de entrada constante para que las reglas exteriores siempre actúen como barrera de seguridad, aunque para los distintos problemas y según el diseñador, esto podría ser diferente.

6.2.2. Funciones de Pertenencia Trapezoidales

Para solucionar, o al menos mitigar, el problema de el sistema realimentado llegue a un equilibrio fuera del punto de referencia, se propone el uso de funciones de pertenencia trapezoidales en lugar de las triangulares empleadas anteriormente.

Este problema surge cuando el control LQR basado en modelo de estado tradicional llega a un equilibrio en un punto de funcionamiento en el que el control basado en modelo de estado incremental no tiene suficiente peso.

Las funciones de pertenencia trapezoidales permiten ampliar la zona en la que los distintos métodos de control trabajan, incluso dejando zonas en las que no hay interpolación entre ellos y pueden funcionar de forma independiente.

Este simple cambio de funciones de pertenencia triangulares a funciones de pertenencia trapezoidales produce una gran mejora en el desempeño global del controlador borroso multiestrategia.

6.2.3. Caso de Estudio: Tanque de Mezcla Térmico

En este apartado se muestra mediante el caso de estudio del tanque de mezcla térmico las mejoras realizadas sobre el método del control multiestrategia con respecto a la sección anterior.

6.2.3.1. Mejoras en la Identificación y Modelado para el Control Multiestrategia Aplicados al Tanque de Mezcla Térmico

Para la identificación del modelo borroso de T-S empleando datos de entrada-salida del sistema. Se utilizan siete reglas trapezoidales entre $0m/s^2$ y $8m/s^2$ para el caudal y siete reglas trapezoidales entre $10^\circ C$ y $90^\circ C$ para la temperatura (Ver figura 6.10). Entonces el modelo borroso se realiza con un conjunto de 49 reglas:

Figura 6.10: Reglas borrosas trapezoidales para el control multiestrategia, con supervisor para la referencia, del sistema de tanque de mezcla térmico. a) Reglas borrosas para el caudal Q_m . b) Reglas borrosas para la temperatura T_s .

$S^{(1,1)}$: Si $Q_m(k)$ es $M_{Q_m}^1$ y $T_s(k)$ es $M_{T_s}^1$ entonces:

$$\begin{aligned} Q_m(k) &= 0,0020 + 1,8769Q_m(k-1) - 0,8824Q_m(k-2) + \\ &\quad 0,0051U_1(k-5) - 0,0003U_1(k-6) + 0,0063U_2(k-4) - 0,0012U_2(k-5) \\ T_s(k) &= 0,2984 + 2,4049T_s(k-1) - 1,9350T_s(k-2) + 0,5243T_s(k-3) + \\ &\quad 0,1238U_1(k-3) - 0,0614U_1(k-4) - 0,1696U_2(k-2) + 0,1030U_2(k-3) \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

Se han empleado 49 reglas para dejar un cierto margen para que el supervisor de ajuste de referencia pueda mover los métodos asociados a las reglas.

El supervisor para el control multiestrategia con ajuste de referencia se realiza como se ha comentado previamente, definiendo un umbral para el control mediante modelo de estado incremental de $l_r = 0,8 * 0,5^2 = 0,2$. De esta forma, en las reglas en las que la variable borrosa de referencia $z_r = [Q_{mr}, T_{sr}]$ produzca un peso superior a 0,2, se empleará la estrategia del control LQR mediante modelo de estado incremental.

Entonces, para una referencia concreta de $z_r = [4,5, 55]$ el control multiestrategia quedaría estructurado como se muestra en la figura 6.11, donde se indica la metodología que el supervisor asignaría a cada regla borrosa ante una referencia dada.

Así, en las figuras 6.12, 6.13 y 6.14 se muestran los pesos que tendrían las reglas de cada método de control sobre el espacio de trabajo del controlador multiestrategia generado para esa referencia concreta. Como estas reglas se han generado mediante la inferencia borrosa de funciones de pertenencia trapezoidales, se pueden ver las zonas generadas de peso $w(z(k))_{(i_1 \dots i_m)} = 1$.

Entonces, de cara a que el supervisor pueda ajustar la estructura de los métodos en cada muestra, es necesario construir previamente los modelos de estado discreto tradicional e incremental para todas las reglas borrosas:

$S^{(1,1)}$: Si $Q_m(k)$ es $M_{Q_m}^1$ y $T_s(k)$ es $M_{T_s}^1$ entonces:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1,8769 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,8824 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,4049 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,9350 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5243 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) +$$

		Q _m (m ³ /s)						
		0	1	3	4	5	7	8
T _s (°C)	90	EC	EC	EC	EC	EC	EC	EC
	80	EC	LQR	LQR	LQR	LQR	LQR	EC
	60	EC	LQR	LQR	INC	INC	LQR	EC
	50	EC	LQR	LQR	INC	INC	LQR	EC
	40	EC	LQR	LQR	LQR	LQR	LQR	EC
	20	EC	LQR	LQR	LQR	LQR	LQR	EC
	10	EC	EC	EC	EC	EC	EC	EC

Figura 6.11: Estructura ajustada por el supervisor del control multiestrategia para el control del tanque de mezcla térmico para una referencia (Ref). Control LQR basado en el modelo de estado discreto tradicional (LQR). Control LQR basado en el modelo de estado incremental (INC). Control de entrada constante (EC).

Figura 6.12: Peso de las reglas asociadas al control LQR basado en el modelo de estado incremental para una referencia concreta.

Figura 6.13: Peso de las reglas asociadas al control LQR basado en el modelo de estado discreto tradicional para una referencia concreta.

Figura 6.14: Peso de las reglas asociadas al control de entrada constante para una referencia concreta.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,0063 \\ 0,0051 & -0,0012 \\ -0,0003 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0,1696 \\ 0,1238 & 0,1030 \\ -0,0614 & 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0,0038 \\ -0,0018 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,7175 \\ -0,5773 \\ 0,1564 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 y(k) &= \begin{bmatrix} 0,0020 \\ 0,2984 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

$S^{(1,1)}$: Si $Q_m(k)$ es $M_{Q_m}^1$ y $T_s(k)$ es $M_{T_s}^1$ entonces:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} y(k+1) \\ \Delta x(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1,8769 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,4049 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,8769 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,8824 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,4049 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,9350 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5243 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} y(k) \\ \Delta x(k) \end{bmatrix} &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,0063 \\ 0,0051 & -0,0012 \\ -0,0003 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0,1696 \\ 0,1238 & 0,1030 \\ -0,0614 & 0 \end{bmatrix} \Delta u(k)
 \end{aligned}$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ \Delta x(k) \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

Y generar las matrices de control de estado mediante el algoritmo LQR discreto, empleando para ello las siguientes matrices de ponderación:

$$Q_{LQR} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{LQR} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_{INC} = \begin{bmatrix} 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{INC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obteniéndose las siguientes matrices del controlador de estado discreto y de estado incremental, calculadas en cada regla borrosa mediante el algoritmo del LQR

discreto:

$S^{(1,1)}$: Si $Q_m(k)$ es $M_{Q_m}^1$ y $T_s(k)$ es $M_{T_s}^1$ entonces:

$$\begin{aligned}
 K_{LQR}^{(1,1)} &= \begin{bmatrix} 17,0353 & 16,8199 & 16,4714 & 15,9743 & 15,3197 \\ 12,5408 & 12,2535 & 11,8519 & 11,3232 & 10,7503 \\ \dots & 14,5876 & 2,0513 & 1,9404 & 1,7653 & 1,5269 \\ & 9,6848 & -2,5418 & -2,2463 & -1,8505 & -1,3738 \end{bmatrix} \\
 K_{INC}^{(1,1)} &= \begin{bmatrix} 0,8810 & 0,0359 & 54,0687 & 49,9386 & 44,9480 & 40,0115 \\ 0,5233 & -0,0611 & 28,7099 & 26,2704 & 23,3426 & 20,4727 \\ \dots & 35,1676 & 30,4619 & 4,0638 & 3,5776 & 2,9682 & 2,2952 \\ & 17,6898 & 15,0056 & -5,4846 & -4,3508 & -3,0193 & -1,6476 \end{bmatrix} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Ya que la estrategia de control de entrada constante solamente se emplea en las reglas exteriores, las señales de control asociadas a estas reglas se obtienen mediante el mismo método descrito en la sección anterior:

$$\begin{aligned}
 reglas(Q_m, T_s) &= \begin{bmatrix} S^{(1,1)} & S^{(1,2)} & S^{(1,3)} & S^{(1,4)} & S^{(1,5)} & S^{(1,6)} & S^{(1,7)} \\ S^{(2,1)} & S^{(2,2)} & S^{(2,3)} & S^{(2,4)} & S^{(2,5)} & S^{(2,6)} & S^{(2,7)} \\ S^{(3,1)} & S^{(3,2)} & S^{(3,3)} & S^{(3,4)} & S^{(3,5)} & S^{(3,6)} & S^{(3,7)} \\ S^{(4,1)} & S^{(4,2)} & S^{(4,3)} & S^{(4,4)} & S^{(4,5)} & S^{(4,6)} & S^{(4,7)} \\ S^{(5,1)} & S^{(5,2)} & S^{(5,3)} & S^{(5,4)} & S^{(5,5)} & S^{(5,6)} & S^{(5,7)} \\ S^{(6,1)} & S^{(6,2)} & S^{(6,3)} & S^{(6,4)} & S^{(6,5)} & S^{(6,6)} & S^{(6,7)} \\ S^{(7,1)} & S^{(7,2)} & S^{(7,3)} & S^{(7,4)} & S^{(7,5)} & S^{(7,6)} & S^{(7,7)} \end{bmatrix} \\
 U_1 &= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 3,3333 & 2,6667 & 2 \\ 4 & & & & & & 1,3333 \\ 4 & & & & & & 0,6667 \\ 4 & & & & & & 0 \\ 3,3333 & & & & & & 0 \\ 2,6667 & & & & & & 0 \\ 2 & 1,3333 & 0,6667 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 U_2 &= \begin{bmatrix} 2 & 2,6667 & 3,3333 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1,3333 & & & & & & 4 \\ 0,6667 & & & & & & 4 \\ 0 & & & & & & 4 \\ 0 & & & & & & 3,3333 \\ 0 & & & & & & 2,6667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6667 & 1,3333 & 2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Figura 6.15: Respuesta transitoria ante cambios de referencia del sistema de tanque de mezcla térmico controlado mediante control LQR basado en el modelo de estado discreto tradicional, control LQR basado en el modelo de estado incremental y control multiestrategia. a) Respuesta del caudal de salida Q_m . b) Respuesta de la temperatura de salida T_s .

6.2.3.2. Análisis de Resultados

En la figura 6.15 se muestran las respuestas transitorias de caudal de salida Q_m y de temperatura de salida T_s ante cambios de referencia de tipo escalón. Se muestran las respuestas transitorias empleando las diferentes metodologías de control: El control LQR mediante modelo de estado tradicional, el control LQR mediante modelo de estado incremental y el control multiestrategia propuesto en este capítulo. En la respuesta del control multiestrategia se han utilizado varios colores para marcar las distintas metodologías que están funcionando en esa muestra: Azul para el control mediante modelo de estado incremental, rojo para el control mediante modelo de estado tradicional y verde para el control de entrada constante. En la figura 6.16 se muestra el diagrama de fase de temperatura de salida T_s frente a caudal de salida Q_m .

En la figura 6.17 se muestran las respuestas transitorias de caudal de salida Q_m y de temperatura de salida T_s cuando al sistema se le aplican cambios simultáneos

Figura 6.16: Diagrama de fase del sistema controlado mediante control multiestrategia ante cambios de referencia.

Figura 6.17: Respuesta transitoria ante cambios simultáneos de referencia y perturbaciones, del sistema de tanque de mezcla térmico controlado mediante control LQR basado en el modelo de estado discreto tradicional, control LQR basado en el modelo de estado incremental y control multiestrategia. a) Respuesta del caudal de salida Q_m . b) Respuesta de la temperatura de salida T_s .

en la referencia y además se le añaden a la salida perturbaciones excesivas de tipo escalón de Q_m : $-5\text{m}/\text{s}^2$ en $t = 50\text{s}$ y T_s : 50°C en $t = 100\text{s}$. En la figura 6.18 se muestra el diagrama de fase de temperatura de salida T_s frente a caudal de salida Q_m .

Se puede observar que aún cambiando la referencia el sistema controlado tiene error nulo en régimen permanente y que alrededor de la señal de referencia predomina el color azul, correspondiente al control mediante modelo de estado incremental. De esta forma se puede concluir que el método del supervisor para el ajuste de referencia funciona correctamente y produce buenos resultados.

Figura 6.18: Diagrama de fase del sistema controlado mediante control multiestrategia ante cambios simultáneos de referencia y perturbaciones.

6.3. Control Multiestrategia para Sistemas Afectados por Ruido Coloreado

Es posible diseñar un control multiestrategia empleando diferentes estrategias de control a las mostradas previamente. En esta sección se propone realizar un control borroso multiestrategia para sistemas afectados por ruido coloreado empleando varias metodologías de control óptimo contra ruido con una estructura similar a la descrita previamente.

Las distintas estrategias de control empleadas son (figura 6.19):

- Control óptimo para sistemas afectados por ruido coloreado basado en el modelo de estado discreto. Empleando los algoritmos de control LQR y KF sobre el modelo de estado discreto ampliado para sistemas con ruido coloreado.
 - Ventaja: Respuesta transitoria rápida. Óptimo contra ruido.
 - Desventaja: Error en régimen permanente.
- Control óptimo para sistemas afectados por ruido coloreado basado en el modelo de estado incremental. Empleando los algoritmos de control LQR y KF sobre el modelo de estado incremental ampliado para sistemas con ruido coloreado descrito en el capítulo 5.
 - Ventaja: Error en régimen permanente nulo. Óptimo contra ruido.
 - Desventaja: Respuesta transitoria relativamente lenta.
- Control de entrada constante.
 - Ventaja: Robusto. No inestabiliza sistemas estables.
 - Desventaja: No rechaza perturbaciones.

Se empleará el supervisor para el ajuste de las estrategias de control en función de la señal de referencia con una estructura similar a la descrita en la sección anterior: El control óptimo para sistemas con ruido coloreado mediante modelo de estado incremental se empleará en las reglas que rodeen el punto de referencia, el control de entrada constante se empleará en las reglas exteriores, y finalmente el control óptimo para sistemas afectados por ruido coloreado basado en el modelo de estado discreto se empleará en el resto de reglas.

Se parte de una identificación del sistema no lineal mediante el método generalizado de T-S, descrito en el capítulo 3, empleando funciones de pertenencia trapezoidales, como se ha recomendado en la sección previa. Se supone un ruido coloreado, identificado mediante el método de factorización espectral descrito en el capítulo 5.

EC	EC	EC	EC	EC	EC	EC
EC	LQR Kalman	LQR Kalman	LQR Kalman	LQR Kalman	LQR Kalman	EC
EC	LQR Kalman	LQR Kalman	LQR Kalman	LQR Kalman	LQR Kalman	EC
EC	LQR Kalman	LQR Kalman	INC RC	LQR Kalman	LQR Kalman	EC
EC	LQR Kalman	LQR Kalman	LQR Kalman	LQR Kalman	LQR Kalman	EC
EC	LQR Kalman	LQR Kalman	LQR Kalman	LQR Kalman	LQR Kalman	EC
EC	EC	EC	EC	EC	EC	EC

Figura 6.19: Estructura de las estrategias de control óptimo de sistemas afectados por ruido coloreado para una referencia definida en el punto de operación nominal. Control óptimo contra ruido basado en el modelo de estado discreto (LQR Kalman). Control óptimo para sistemas afectados por ruido coloreado basado en el modelo de estado incremental (INC RC). Control de entrada constante (EC).

En todas las reglas borrosas es necesario construir los modelos de estado y de estado incremental para sistemas afectados por ruido coloreado, como se ha descrito en el capítulo 5. Se calculan las matrices del observador de estado y de realimentación de estado mediante los algoritmos del KF y LQR, respectivamente. Para ajustar el control multiestrategia, es necesario utilizar diferentes matrices Q y R para los algoritmos LQR basados en los modelos de estado discreto y de estado incremental con ruido coloreado. Además, en las reglas en las que se emplea el control de entrada constante se ajustan las acciones de control utilizadas.

Finalmente, las señales de control producidas por las diferentes estrategias de control óptimo para sistemas afectados por ruido coloreado, descritas en mayor detalle en el capítulo 5, serían las siguientes:

- Control óptimo para sistemas afectados por ruido coloreado basado en el modelo de estado incremental. En las reglas cercanas a la referencia:

$$\begin{aligned}
 & S^{(i_1 \dots i_m)}: \text{ Si } z_1(k) \text{ es } M_1^{i_1} \text{ y } \dots \text{ y } z_m(k) \text{ es } M_m^{i_m} \text{ entonces:} \\
 & \Delta u(k)_{(i_1 \dots i_m)} = K_{INC}^{(i_1 \dots i_m)} \left(\begin{bmatrix} y_r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y(k) \\ x_u(k|k) - x_u(k-1|k-1) \\ x_w(k|k) - x_w(k-1|k-1) \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
 & u(k)_{(i_1 \dots i_m)} = u(k-1) + \Delta u(k)_{(i_1 \dots i_m)} \\
 & \vdots
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

- Control óptimo para sistemas afectados por ruido coloreado basado en el modelo de estado discreto. En las reglas intermedias:

$$\begin{aligned}
 & S^{(i_1 \dots i_m)}: \text{ Si } z_1(k) \text{ es } M_1^{i_1} \text{ y } \dots \text{ y } z_m(k) \text{ es } M_m^{i_m} \text{ entonces:} \\
 & \begin{bmatrix} x_{ur}(i_1 \dots i_m) \\ x_{wr}(i_1 \dots i_m) \\ u_r(i_1 \dots i_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A^{(i_1 \dots i_m)} - I) & B^{(i_1 \dots i_m)} \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -a_x^{(i_1 \dots i_m)} \\ y_r - a_y^{(i_1 \dots i_m)} \end{bmatrix} \\
 & u(k)_{(i_1 \dots i_m)} = K_{LQR}^{(i_1 \dots i_m)} \left(\begin{bmatrix} x_{ur}(i_1 \dots i_m) \\ x_{wr}(i_1 \dots i_m) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_u(k|k) \\ x_w(k|k) \end{bmatrix} \right) + u_r(i_1 \dots i_m) \\
 & \vdots
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

- Control de entrada constante. En las reglas exteriores:

$$\begin{aligned}
 &S^{(i_1 \dots i_m)}: \text{ Si } z_1(k) \text{ es } M_1^{i_1} \text{ y } \dots \text{ y } z_m(k) \text{ es } M_m^{i_m} \text{ entonces:} \\
 &u(k)_{(i_1 \dots i_m)} = cte_{EC}^{(i_1 \dots i_m)} \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Finalmente, se desborrosifican las distintas señales de control producidas, calculadas según el punto de funcionamiento, para obtener una única señal de control:

$$u(k) = \frac{\sum_{i_1=1}^{r_1} \dots \sum_{i_m=1}^{r_m} w(z(k))_{(i_1 \dots i_m)} u(k)_{(i_1 \dots i_m)}}{\sum_{i_1=1}^{r_1} \dots \sum_{i_m=1}^{r_m} w(z(k))_{(i_1 \dots i_m)}}$$

donde $w(z(k))_{(i_1 \dots i_m)}$ es el peso que corresponde a la regla $S^{(i_1 \dots i_m)}$:

$$w(z(k))_{(i_1 \dots i_m)} = \prod_{j=1}^m \mu_j^{i_j}(z_j(k))$$

Para obtener los estados estimados óptimos contra ruido, se utiliza un observador de estado borroso mediante el KF. Este observador de estado es único para todas las estrategias de control.

$$\begin{aligned}
 &S^{(i_1 \dots i_m)}: \text{ Si } z_1(k) \text{ es } M_1^{i_1} \text{ y } \dots \text{ y } z_m(k) \text{ es } M_m^{i_m} \text{ entonces:} \\
 &\begin{bmatrix} x_u(k|k)_{(i_1 \dots i_m)} \\ x_w(k|k)_{(i_1 \dots i_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u(k|k-1) \\ x_w(k|k-1) \end{bmatrix} + \\
 &M^{(i_1 \dots i_m)} \left(y(k) - \left(a_y^{(i_1 \dots i_m)} + C \begin{bmatrix} x_u(k|k-1) \\ x_w(k|k-1) \end{bmatrix} \right) \right) \\
 &\begin{bmatrix} x_u(k+1|k)_{(i_1 \dots i_m)} \\ x_w(k+1|k)_{(i_1 \dots i_m)} \end{bmatrix} = a_x^{(i_1 \dots i_m)} + A^{(i_1 \dots i_m)} \begin{bmatrix} x_u(k|k-1) \\ x_w(k|k-1) \end{bmatrix} + \tag{6.14} \\
 &B^{(i_1 \dots i_m)} u(k) + L \left(y(k) - \left(a_y^{(i_1 \dots i_m)} + C \begin{bmatrix} x_u(k|k-1) \\ x_w(k|k-1) \end{bmatrix} \right) \right) \\
 &\vdots \\
 &x = \frac{\sum_{i_1=1}^{r_1} \dots \sum_{i_m=1}^{r_m} w(z(k))_{(i_1 \dots i_m)} x_{(i_1 \dots i_m)}}{\sum_{i_1=1}^{r_1} \dots \sum_{i_m=1}^{r_m} w(z(k))_{(i_1 \dots i_m)}}
 \end{aligned}$$

6.3.1. Caso de Estudio: Tanque de Mezcla Térmico

En este apartado se muestra mediante el ejemplo del tanque de mezcla térmico cómo el método de control multiestrategia para sistemas afectados por ruido coloreado presenta grandes ventajas en régimen transitorio y permanente con

respecto a los controladores óptimos para sistemas afectados por ruido coloreado basados en el modelo de estado tradicional e incremental.

Se considera el sistema de tanque de mezcla térmico de la sección 5.6, al que se le ha incluido ruido coloreado modelado mediante el teorema de Wold como:

$$r_Q(k) = \frac{1 - 0,5z^{-1}}{1 - 0,6z^{-1}}w_Q(k)$$

$$r_T(k) = \frac{1 - 0,6z^{-1}}{1 - 0,9z^{-1}}w_T(k)$$

donde w_Q y w_T son ruidos blancos de media nula y varianzas $\sigma_{w_Q}^2 = 0,01$ y $\sigma_{w_T}^2 = 0,1$, respectivamente. La covarianza entre ambas señales de ruido blanco es nula.

6.3.1.1. Identificación, Modelado y Control Multiestrategia Óptimo para Sistemas Afectados por Ruido Coloreado Aplicado al Sistema de Tanque de Mezcla Térmico

La identificación del ruido coloreado se realiza mediante el algoritmo de factorización espectral, mediante datos de salida del sistema obtenidos manteniendo las entradas invariantes. El sistema de ruido identificado queda:

$$r_Q(k) = \frac{1 - 0,4709z^{-1}}{1 - 0,5700z^{-1}}w_Q(k)$$

$$r_T(k) = \frac{1 - 0,5749z^{-1}}{1 - 0,8885z^{-1}}w_T(k)$$

con varianzas del ruido blanco $\sigma_{w_Q}^2 = 0,0100$ y $\sigma_{w_T}^2 = 0,1007$. Los resultados obtenidos mediante el método de factorización espectral son muy similares a los impuestos al sistema. Para obtener el modelo de estado estocástico, primero hay que calcular:

$$\frac{1 - 0,4709q^{-1}}{1 - 0,5700q^{-1}} = 1 + \frac{0,0991q^{-1}}{1 - 0,5700q^{-1}}$$

$$\frac{1 - 0,5749q^{-1}}{1 - 0,8885q^{-1}} = 1 + \frac{0,3135q^{-1}}{1 - 0,8885q^{-1}}$$

Para la identificación del modelo borroso de T-S, empleando datos de entrada-salida del sistema, se utilizan siete reglas trapezoidales entre $0m/s^2$ y $8m/s^2$ para el caudal y siete reglas trapezoidales entre $10^\circ C$ y $90^\circ C$ para la temperatura (Ver figura 6.20). Entonces el modelo borroso se realiza con un conjunto de 49 reglas:

Figura 6.20: Reglas borrosas trapezoidales para el control multiestrategia para sistemas afectados por ruido coloreado, con supervisor para la referencia, del sistema de tanque de mezcla térmico. a) Reglas borrosas para el caudal Q_m . b) Reglas borrosas para la temperatura T_s .

$S^{(1,1)}$: Si $Q_m(k)$ es $M_{Q_m}^1$ y $T_s(k)$ es $M_{T_s}^1$ entonces:

$$\begin{aligned} Q_m(k) &= 0,0017 + 1,8735Q_m(k-1) - 0,8789Q_m(k-2) + \\ &\quad + 0,0052U_1(k-5) - 0,0003U_1(k-6) + 0,0061U_2(k-4) - 0,0010U_2(k-5) \\ T_s(k) &= 0,2642 + 2,4193T_s(k-1) - 1,9519T_s(k-2) + 0,5275T_s(k-3) + \\ &\quad + 0,1200U_1(k-3) - 0,0659U_1(k-4) - 0,1456U_2(k-2) + 0,0876U_2(k-3) \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

Se han empleado 49 reglas para que el supervisor de cambios de referencia pueda ajustar los métodos asociados a las reglas.

El supervisor para el control multiestrategia con ajuste de referencia se realiza como se ha comentado previamente, definiendo un umbral para el control mediante modelo de estado incremental de $l_r = 0,8 * 0,5^2 = 0,2$. De esta forma, en las reglas en las que la variable borrosa de referencia $z_r = [Q_{mr}, T_{sr}]$ produzca un peso superior a 0,2, se utilizará la estrategia del control óptimo para sistemas afectados por ruido coloreado basado en el modelo de estado incremental.

Entonces, para una referencia en el punto de operación nominal, el control multiestrategia para sistemas afectados por ruido coloreado quedaría estructurado como se muestra en la figura 6.21, donde se indica la metodología que el supervisor asignaría a cada regla borrosa ante la referencia dada.

De cara a que el supervisor pueda ajustar los métodos asociados a las reglas borrosas en cada muestra, es necesario construir previamente los modelos de estado discreto e incremental considerando el ruido coloreado, para todas las reglas borrosas:

$S^{(1,1)}$: Si $Q_m(k)$ es $M_{Q_m}^1$ y $T_s(k)$ es $M_{T_s}^1$ entonces:

$$\begin{bmatrix} x_u(k+1) \\ x_w(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,8735 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,8789 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,4193 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,9519 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5275 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5700 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8885 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u(k) \\ x_w(k) \end{bmatrix} +$$

		Q _m (m ³ /s)						
		0	1	3	4	5	7	8
T _s (°C)	90	EC	EC	EC	EC	EC	EC	EC
	80	EC	LQR Kalman	LQR Kalman	LQR Kalman	LQR Kalman	LQR Kalman	EC
	60	EC	LQR Kalman	LQR Kalman	LQR Kalman	LQR Kalman	LQR Kalman	EC
	50	EC	LQR Kalman	LQR Kalman	INC RC	LQR Kalman	LQR Kalman	EC
	40	EC	LQR Kalman	LQR Kalman	LQR Kalman	LQR Kalman	LQR Kalman	EC
	20	EC	LQR Kalman	LQR Kalman	LQR Kalman	LQR Kalman	LQR Kalman	EC
	10	EC	EC	EC	EC	EC	EC	EC

Figura 6.21: Estructura ajustada por el supervisor del control multiestrategia de sistemas afectados por ruido coloreado para el control del tanque de mezcla térmico ante una referencia en el punto de operación nominal. Control óptimo contra ruido basado en el modelo de estado discreto (LQR Kalman). Control óptimo para sistemas afectados por ruido coloreado basado en el modelo de estado incremental (INC RC). Control de entrada constante (EC).

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,0061 \\ 0,0052 & -0,0010 \\ -0,0003 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0,1456 \\ 0,1200 & 0,0876 \\ -0,0659 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0991 & 0 \\ 0 & 0,3135 \end{bmatrix} w(k) + \begin{bmatrix} 0,0031 \\ -0,0015 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,6391 \\ -0,5156 \\ 0,1393 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 y(k) &= \begin{bmatrix} 0,0017 \\ 0,2642 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u(k) \\ x_w(k) \end{bmatrix} + w(k) \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

$S^{(1,1)}$: Si $Q_m(k)$ es $M_{Q_m}^1$ y $T_s(k)$ es $M_{T_s}^1$ entonces:

$$\begin{bmatrix} s_y(k+1) \\ \Delta x_u(k+1) \\ \Delta x_w(k+1) \\ s_w(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1,8735 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,57 & 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,4193 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,8885 & 0 & 0,3135 \\ 0 & 0 & 1,8735 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,8789 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,4193 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,952 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5275 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,57 & 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8885 & 0 & 0,3135 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} s_y(k) \\ \Delta x_u(k) \\ \Delta x_w(k) \\ s_w(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,0061 \\ 0,0052 & -0,0010 \\ -0,0003 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0,1456 \\ 0,1200 & 0,0876 \\ -0,0659 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta u(k) + \begin{bmatrix} 0,0991 & 0 \\ 0 & 0,3135 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0991 & 0 \\ 0 & 0,3135 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} w(k) \\
 y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_y(k) \\ \Delta x_u(k) \\ \Delta x_w(k) \\ s_w(k) \end{bmatrix} + w(k) \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

Se generan las matrices de control de estado discreto y estado incremental mediante el algoritmo LQR discreto, utilizando para ello las siguientes matrices de ponderación:

$$\begin{aligned}
 Q_{LQR} &= \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 R_{LQR} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$Q_{INC} = 0,1 \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$R_{INC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se obtienen así las siguientes matrices del controlador de estado discreto y de estado incremental, calculadas en cada regla borrosa mediante el algoritmo del LQR discreto:

$$S^{(1,1)}: \text{ Si } Q_m(k) \text{ es } M_{Q_m}^1 \text{ y } T_s(k) \text{ es } M_{T_s}^1 \text{ entonces:}$$

$$K_{LQR}^{(1,1)} = \begin{bmatrix} 16,4494 & 16,2465 & 15,9158 & 15,4416 & 14,8144 & 14,1174 \\ 12,8312 & 12,5526 & 12,1584 & 11,6351 & 11,0632 & 10,0051 \\ \dots & 2,2977 & 2,1559 & 1,9487 & 1,6786 & 0 & 0 \\ -2,6979 & -2,3931 & -1,9957 & -1,5236 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{INC}^{(1,1)} = \begin{bmatrix} 0,8617 & 0,0389 & 52,1536 & 48,1885 & 43,3804 & 38,6232 \\ 0,5643 & -0,0607 & 30,8286 & 28,2445 & 25,1304 & 22,0746 \\ \dots & 33,9537 & 29,4160 & 4,6233 & 4,0280 & 3,3067 \\ 19,1076 & 16,2428 & -5,8029 & -4,6247 & -3,2674 \\ \dots & 2,5265 & 1,1381 & 0,2377 & 0,1979 & 0,0839 \\ -1,8806 & 0,7433 & -0,3503 & 0,1292 & -0,1236 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

Ya que la estrategia de control de entrada constante solamente se emplea en las reglas exteriores, las señales de control asociadas a estas reglas se obtienen

mediante el mismo método descrito en la sección anterior:

$$\begin{aligned}
 reglas(Q_m, T_s) &= \begin{bmatrix} S^{(1,1)} & S^{(1,2)} & S^{(1,3)} & S^{(1,4)} & S^{(1,5)} & S^{(1,6)} & S^{(1,7)} \\ S^{(2,1)} & S^{(2,2)} & S^{(2,3)} & S^{(2,4)} & S^{(2,5)} & S^{(2,6)} & S^{(2,7)} \\ S^{(3,1)} & S^{(3,2)} & S^{(3,3)} & S^{(3,4)} & S^{(3,5)} & S^{(3,6)} & S^{(3,7)} \\ S^{(4,1)} & S^{(4,2)} & S^{(4,3)} & S^{(4,4)} & S^{(4,5)} & S^{(4,6)} & S^{(4,7)} \\ S^{(5,1)} & S^{(5,2)} & S^{(5,3)} & S^{(5,4)} & S^{(5,5)} & S^{(5,6)} & S^{(5,7)} \\ S^{(6,1)} & S^{(6,2)} & S^{(6,3)} & S^{(6,4)} & S^{(6,5)} & S^{(6,6)} & S^{(6,7)} \\ S^{(7,1)} & S^{(7,2)} & S^{(7,3)} & S^{(7,4)} & S^{(7,5)} & S^{(7,6)} & S^{(7,7)} \end{bmatrix} \\
 U_1 &= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 3,3333 & 2,6667 & 2 \\ 4 & & & & & & 1,3333 \\ 4 & & & & & & 0,6667 \\ 4 & & & & & & 0 \\ 3,3333 & & & & & & 0 \\ 2,6667 & & & & & & 0 \\ 2 & 1,3333 & 0,6667 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 U_2 &= \begin{bmatrix} 2 & 2,6667 & 3,3333 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1,3333 & & & & & & 4 \\ 0,6667 & & & & & & 4 \\ 0 & & & & & & 4 \\ 0 & & & & & & 3,3333 \\ 0 & & & & & & 2,6667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6667 & 1,3333 & 2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

El estado estimado es obtenido mediante el KF aplicado sobre el modelo de estado discreto con ruido coloreado. Las matrices de ponderación empleadas son:

$$\begin{aligned}
 R_2 &= \begin{bmatrix} 0,0100 & 0 \\ 0 & 0,1007 \end{bmatrix} \\
 R_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0099 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$R_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0010 & 0 \\ 0 & 0,0316 \end{bmatrix}$$

Las ganancias del observador y del filtro, calculadas en cada regla borrosa mediante el algoritmo del KF discreto, son:

$S^{(1,1)}$: Si $Q_m(k)$ es $M_{Q_m}^1$ y $T_s(k)$ es $M_{T_s}^1$ entonces:

$$L^{(1,1)} = \begin{bmatrix} 0,0001 & 0,0000 \\ -0,0001 & -0,0000 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0000 & 0,0000 \\ -0,0001 & -0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 \\ 0 & 0 \\ 0,0991 & -0,0000 \\ -0,0000 & 0,3135 \end{bmatrix}$$

$$M^{(1,1)} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0,5877 & 0,0080 \\ -0,5880 & -0,0080 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,4597 & 0,0062 \\ -0,6816 & -0,0092 \\ 0,2589 & 0,0035 \\ 0 & 0 \\ -0,1412 & -0,0019 \\ -0,3986 & -0,0054 \end{bmatrix}$$

6.3.1.2. Análisis de Resultados

En la figura 6.22 se muestran las respuestas transitorias de caudal de salida Q_m y de temperatura de salida T_s ante cambios de referencia de tipo escalón. Se muestran las respuestas transitorias empleando las diferentes metodologías de control: El control óptimo contra ruido mediante modelo de estado tradicional, el control óptimo para sistemas afectados por ruido coloreado mediante modelo de estado incremental y el control multiestrategia para sistemas afectados por ruido coloreado propuesto en esta sección. En la respuesta del control multiestrategia se han utilizado varios colores para marcar las distintas metodologías que están activas en cada muestra: Azul para el control óptimo para sistemas afectados por ruido coloreado mediante modelo de estado incremental, rojo para el control óptimo contra ruido mediante modelo de estado tradicional y verde para el control de entrada constante. En la figura 6.23 se muestra el diagrama de fase de temperatura de salida T_s frente a caudal de salida Q_m .

En la figura 6.24 se muestran las respuestas transitorias de caudal de salida Q_m y de temperatura de salida T_s cuando al sistema se le aplican cambios simultáneos en la referencia y además se le añaden a la salida perturbaciones excesivas de tipo escalón de Q_m : $-3m/s^2$ en $t = 50s$ y T_s : $30^\circ C$ en $t = 100s$. En la figura 6.25 se muestra el diagrama de fase de temperatura de salida T_s frente a caudal de salida Q_m .

En cuanto a la minimización de ruido, cuando se mide la varianza de una señal controlada sobre un punto de referencia, este control multiestrategia para sistemas afectados por ruido coloreado se comporta como el control óptimo para sistemas afectados por ruido coloreado basado en el modelo de estado incremental, por lo que sus resultados en este caso son equivalentes a los mostrados en el capítulo 5.

6.4. Conclusión

En este capítulo se ha desarrollado un control borroso multiestrategia que combina diferentes métodos de control mediante una interpolación borrosa. Se ha propuesto la combinación de las estrategias de control óptimo basado en el modelo de estado incremental, control óptimo basado en el modelo de estado tradicional y control de entrada constante. Se ha mostrado cómo este control multiestrategia combina las ventajas de las metodologías utilizadas, minimizando sus inconvenientes. Por otro lado, se ha descrito un supervisor para solucionar el problema que surge en este control al cambiar la señal de referencia. También, se ha comprobado que es ventajoso, para este control borroso multiestrategia, el utilizar funciones de pertenencia trapezoidales en lugar de triangulares. Finalmente, se ha diseñado un control multiestrategia para sistemas afectados por ruido coloreado combinando distintas estrategias de control óptimo para sistemas afectados por ruido coloreado.

Figura 6.22: Respuesta transitoria ante cambios de referencia, del sistema de tanque de mezcla térmico controlado mediante control óptimo para sistemas afectados por ruido coloreado basado en el modelo de estado discreto, control óptimo para sistemas afectados por ruido coloreado basado en el modelo de estado incremental y control multiestrategia para sistemas afectados por ruido coloreado. a) Respuesta del caudal de salida Q_m . b) Respuesta de la temperatura de salida T_s .

Figura 6.23: Diagrama de fase del sistema controlado mediante control multiestrategia para sistemas afectados por ruido coloreado ante cambios de referencia.

Figura 6.24: Respuesta transitoria ante cambios simultáneos de referencia y perturbaciones, del sistema de tanque de mezcla térmico controlado mediante control óptimo para sistemas afectados por ruido coloreado basado en el modelo de estado discreto, control óptimo para sistemas afectados por ruido coloreado basado en el modelo de estado incremental y control multiestrategia para sistemas afectados por ruido coloreado. a) Respuesta del caudal de salida Q_m . b) Respuesta de la temperatura de salida T_s .

Figura 6.25: Diagrama de fase del sistema controlado mediante control multiestrategia para sistemas afectados por ruido coloreado ante cambios simultáneos de referencia y perturbaciones.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

Capítulo 7

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En este trabajo sobre control borroso no se ha buscado ofrecer soluciones cerradas ni un método completamente superior. En lugar de eso, se ha observado que la metodología estandarizada de control borroso basada en el modelo de T-S aún puede ser mejorada y se han propuesto diferentes formas para obtener ventajas sobre esta metodología estandarizada. Así, en este capítulo se resumen las conclusiones obtenidas y, más importante aún, se describen algunos proyectos pendientes que quedan por resolver.

7.1. Conclusiones

En cuanto al modelo de estado incremental, se ha demostrado que posee varias ventajas sobre el modelo de estado tradicional y que estas ventajas aparecen de forma natural en este modelo de estado. Se eliminan los términos afines, se soluciona el problema del cálculo del estado de referencia y la formulación incluye un integrador en el sistema de control por lo que se obtienen errores nulos en régimen permanente. Por otro lado, se ha desarrollado un modelo de estado reducido, mucho más adecuado para el caso de estudio del aerogenerador, que permite realizar para este sistema la identificación y el control borroso basado en el modelo de estado incremental. Además, se ha diseñado un nuevo método de control predictivo óptimo borroso basado en el modelo de estado incremental.

Sobre las funciones de pertenencia, se ha mostrado como la inferencia borrosa de 1DMF puede generar reglas borrosas que no sean óptimas o incluso que no correspondan a los datos del sistema. Se ha propuesto utilizar MDMF generadas directamente en el espacio borroso multidimensional para solucionar este problema. Para el ajuste de MDMF se ha propuesto un GA y para la identificación del sistema no lineal, el método de T-S. Finalmente, se ha comprobado que el

método propuesto basado en el uso de MDMF permite una identificación más precisa mediante un menor número de reglas borrosas.

Con respecto al tema del ruido coloreado, se han descrito los métodos empleados para el modelado, identificación y control de sistemas afectados por ruido coloreado. Se ha desarrollado un nuevo modelo de estado incremental para este tipo de sistemas y se han comprobado sus ventajas sobre el modelo de estado discreto. Se ha desarrollado un algoritmo de control óptimo, mediante el uso del LQR y del KF, para sistemas afectados por ruido coloreado basado en el modelo de estado incremental.

Finalmente, se ha desarrollado un control borroso multiestrategia que combina diferentes estrategias de control mediante una interpolación borrosa. Se ha propuesto la combinación de las estrategias de control óptimo basado en el modelo de estado incremental, el control óptimo basado en el modelo de estado tradicional y el control de entrada constante. Se ha mostrado que este control multiestrategia combina las ventajas de las metodologías utilizadas y minimiza sus inconvenientes. Además, se ha desarrollado un supervisor que soluciona el problema del cambio de referencia para este controlador y se ha comprobado que utilizar funciones de pertenencia trapezoidales, en lugar de las clásicas funciones triangulares, puede suponer una gran ventaja para este método. Finalmente, se ha diseñado un control multiestrategia para sistemas afectados por ruido coloreado combinando distintas estrategias de control óptimo para sistemas afectados por ruido coloreado.

7.2. Trabajos Futuros

El trabajo futuro más importante que surge de esta tesis, que ha propuesto diferentes métodos alternativos con diferentes ventajas sobre la metodología estándar del control borroso, consiste en la síntesis de todos los elementos propuestos y comprobar si todas estas metodologías pueden combinarse para diseñar un nuevo método de control borroso superior. Además, es muy importante incluir análisis matemáticos detallados que traten y aseguren características importantes de los lazos cerrados de control propuestos, como análisis y márgenes de estabilidad. Por otro lado, también han surgido ampliaciones y cuestiones para los métodos tratados de forma específica.

El control mediante modelo de estado incremental se ha realizado exclusivamente mediante el método del regulador lineal óptimo, sin embargo, de momento no hay ninguna razón que impida emplear otras técnicas de control por realimentación de estado. Se pretende pues, probar otras técnicas de realimentación de estado para comprobar su funcionamiento en este modelo de estado incremental.

Las MDMF pueden ser ajustadas por otros métodos diferentes a los comentados y al GA. Se pretende utilizar algoritmos de agrupamiento borroso no super-

visados para definir un método de ajuste rápido y determinista para las MDMF.

El ruido coloreado se ha considerado con un comportamiento lineal y esto no siempre representa a los sistemas reales. La identificación de ruido coloreado no lineal mediante métodos borrosos es un tema complicado ya que la extensión de los algoritmos de factorización espectral no son directamente aplicables al problema. Se propone como trabajo futuro el encontrar una metodología eficaz para poder identificar el ruido coloreado no lineal mediante formulación borrosa y así poder ampliar los controladores propuestos para el caso de sistemas no lineales con ruido coloreado no lineal.

La estructura de control multiestrategia propuesta es solo una de las prácticamente infinitas combinaciones posibles, mediante las innumerables técnicas de control desarrolladas en la historia del control de sistemas dinámicos. Lo que pretende este método es maximizar las ventajas de los controladores empleados y minimizar sus inconvenientes, ajustando los distintos métodos en las zonas donde más útiles sean, por lo que el control borroso multiestrategia está abierto para probar nuevas técnicas y combinaciones.

Capítulo 8

Bibliografía

- [1] Abonyi, Janos; Babuska, Robert; Szeifert, Ferenc. Fuzzy modeling with multivariate membership functions: Gray-box identification and control design. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 2001, vol. 31, no 5, p. 755-767.
- [2] Agustinah, Trihastuti, et al. Fuzzy tracking control design using observer-based stabilizing compensator for nonlinear systems. En *2010 International Conference on System Science and Engineering*. IEEE, 2010. p. 275-280.
- [3] Albertos, Pedro; Sala, Antonio. El control borroso: una metodología integradora. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 2010, vol. 1, no 2, p. 22-31.
- [4] Al-Hadithi, Basil M.; Matía, Fernando; Jiménez, Agustín. Análisis de estabilidad de sistemas borrosos. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 2007, vol. 4, no 2, p. 7-25.
- [5] Al-Hadithi, Basil M.; JIMÉNEZ, Agustín; MATÍA, Fernando. A new approach to fuzzy estimation of Takagi–Sugeno model and its applications to optimal control for nonlinear systems. *Applied Soft Computing*, 2012, vol. 12, no 1, p. 280-290.
- [6] Al-Hadithi, Basil M.; JIMÉNEZ, Agustín; MATÍA, Fernando. New methods for the estimation of Takagi–Sugeno model based extended Kalman filter and its applications to optimal control for nonlinear systems. *Optimal Control Applications and Methods*, 2012, vol. 33, no 5, p. 552-575.
- [7] Al-Hadithi, Basil Mohammed, et al. Variable Structure Control with chattering elimination and guaranteed stability for a generalized TS model. *Applied soft computing*, 2013, vol. 13, no 12, p. 4802-4812.

- [8] Al-Hadithi, Basil Mohammed; Jiménez, Agustín; López, Ramón Galán. Fuzzy optimal control using generalized Takagi–Sugeno model for multivariable nonlinear systems. *Applied Soft Computing*, 2015, vol. 30, p. 205-213.
- [9] Al-Hadithi, Basil Mohammed; Jiménez, Agustín; Pérez-Oria, Juan. New incremental Takagi–Sugeno state model for optimal control of multivariable nonlinear time delay systems. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2015, vol. 45, p. 259-268.
- [10] Al-Hadithi, Basil Mohammed, et al. Chattering-free fuzzy variable structure control for multivariable nonlinear systems. *Applied Soft Computing*, 2016, vol. 39, p. 165-187.
- [11] Anderson, Theodore W. *The statistical analysis of time series*. John Wiley & Sons, 2011.
- [12] Andújar, José M.; Barragán, Antonio J. A methodology to design stable nonlinear fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 2005, vol. 154, no 2, p. 157-181.
- [13] Andújar, José M.; Bravo, José M. Multivariable fuzzy control applied to the physical–chemical treatment facility of a cellulose factory. *Fuzzy Sets and Systems*, 2005, vol. 150, no 3, p. 475-492.
- [14] Andújar, J. M., et al. Contrast of evolution models for agricultural contaminants in ground waters by means of fuzzy logic and data mining. *Environmental Geology*, 2006, vol. 49, no 3, p. 458-466.
- [15] Andújar, J. M., et al. Control borroso multivariable basado en heurística. Un caso práctico: grúa porta contenedores. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 2007, vol. 4, no 2, p. 81-89.
- [16] Andújar, J. M.; Barragán, A. J.; Gegúndez, M. E. A general and formal methodology to design stable nonlinear fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2009, vol. 17, no 5, p. 1081-1091.
- [17] Andújar, José Manuel; Barragán, Antonio Javier. Hibridación de sistemas borrosos para el modelado y control. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 2014, vol. 11, no 2, p. 127-141.
- [18] Aracil, Javier; Ollero, Anibal; García-Cerezo, Alfonso. Stability indices for the global analysis of expert control systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1989, vol. 19, no 5, p. 998-1007.
- [19] Aracil, Javier; Gordillo, Francisco. *Stability issues in fuzzy control*. Springer-Verlag New York, Inc., 2000.

- [20] Aroba, J., et al. Application of fuzzy logic and data mining techniques as tools for qualitative interpretation of acid mine drainage processes. *Environmental Geology*, 2007, vol. 53, no 1, p. 135-145.
- [21] Åström, Karl J.; Wittenmark, Björn. *Computer-controlled systems: theory and design*. Courier Corporation, 2013.
- [22] Bai, Chunguang; Dhavale, Dileep; Sarkis, Joseph. Complex investment decisions using rough set and fuzzy c-means: An example of investment in green supply chains. *European journal of operational research*, 2016, vol. 248, no 2, p. 507-521.
- [23] Barbieri, Enrique; Richter, Hanz; Figueroa, Fernando. Small signal point-to-point tracking of a propellant mixer. En *Proceedings of the 2003 American Control Conference*, 2003. IEEE, 2003. p. 2845-2850.
- [24] Barragán, Antonio Javier, et al. A general methodology for online TS fuzzy modeling by the extended Kalman filter. *Applied Soft Computing*, 2014, vol. 18, p. 277-289.
- [25] Bellman, Richard E.; Zadeh, Lotfi Asker. Decision-making in a fuzzy environment. *Management science*, 1970, vol. 17, no 4, p. B-141-B-164.
- [26] Berenji, Hamid R.; Khedkar, Pratap. Learning and tuning fuzzy logic controllers through reinforcements. *IEEE Transactions on neural networks*, 1992, vol. 3, no 5, p. 724-740.
- [27] Bezdek, James C.. ; Dunn, Joseph C.. . Optimal fuzzy partitions: A heuristic for estimating the parameters in a mixture of normal distributions. *IEEE Transactions on Computers*, 1975, vol. 100, no 8, p. 835-838.
- [28] Bezdek, James C.; Ehrlich, Robert; Full, William. FCM: The fuzzy c-means clustering algorithm. *Computers & Geosciences*, 1984, vol. 10, no 2-3, p. 191-203.
- [29] Bezdek, James C. *Pattern recognition with fuzzy objective function algorithms*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [30] Bianchi, Fernando D.; De Battista, Hernan; Mantz, Ricardo J. *Wind turbine control systems: principles, modelling and gain scheduling design*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [31] Bitmead, Robert R.; Gevers, Michel; Wertz, Vincent. *Adaptive optimal control: The thinking man's GPC*. Prentice Hall, 1990.
- [32] Blachuta, Marian; Ordys, Andrzej. Optimal and asymptotically optimal linear regulators resulting from a one-stage performance index. *International journal of systems science*, 1987, vol. 18, no 7, p. 1377-1385.

- [33] Cao, Yong-Yan; Frank, Paul M. Analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via fuzzy control approach. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 2000, vol. 8, no 2, p. 200-211.
- [34] Cervantes, Jorge, et al. Takagi–Sugeno dynamic neuro-fuzzy controller of uncertain nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2016, vol. 25, no 6, p. 1601-1615.
- [35] Chen, Bing; Liu, Xiaoping; Tong, Shaocheng. Adaptive fuzzy output tracking control of MIMO nonlinear uncertain systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2007, vol. 15, no 2, p. 287-300.
- [36] Chen, Bing, et al. Fuzzy approximation-based adaptive control of nonlinear delayed systems with unknown dead zone. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2014, vol. 22, no 2, p. 237-248.
- [37] Chen, Cheng-Wu. Application of fuzzy-model-based control to nonlinear structural systems with time delay: an LMI method. *Journal of Vibration and Control*, 2010, vol. 16, no 11, p. 1651-1672.
- [38] Cheng, Long, et al. An adaptive Takagi–Sugeno fuzzy model-based predictive controller for piezoelectric actuators. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, vol. 64, no 4, p. 3048-3058.
- [39] Clarke, David W.; Mohtadi, Coorous; Tuffs, P. S. Generalized predictive control—Part I. The basic algorithm. *Automatica*, 1987, vol. 23, no 2, p. 137-148.
- [40] Clarke, David W.; Mohtadi, Coorous; Tuffs, P. S. Generalized predictive control—part II extensions and interpretations. *Automatica*, 1987, vol. 23, no 2, p. 149-160.
- [41] Clarke, D. W. Adaptive generalized predictive control. 1991.
- [42] Clougheley, Martin; Muttaqi, Kashem M.; DU, Haiping. Damping of low-inertia machine oscillations using Takagi-Sugeno fuzzy stabiliser tuned by genetic algorithm optimisation to improve system stability. *IET Generation, Transmission & Distribution*, 2014, vol. 8, no 2, p. 339-352.
- [43] Cordon, Oscar, et al. Genetic fuzzy systems: evolutionary tuning and learning of fuzzy knowledge bases. *World Scientific*, 2001.
- [44] Cordon, Oscar, et al. Ten years of genetic fuzzy systems: current framework and new trends. *Fuzzy sets and systems*, 2004, vol. 141, no 1, p. 5-31.
- [45] Dahal, Keshav, et al. GA-based learning for rule identification in fuzzy neural networks. *Applied Soft Computing*, 2015, vol. 35, p. 605-617.
- [46] Du, Haiping; Zhang, N. Takagi-Sugeno fuzzy modelling of multivariable nonlinear system via genetic algorithms. *En International Conference on Intelligent Technologies*. University of Technology, Sydney, 2007.

- [47] Du, Qingfu, et al. Design and implementation of reactor temperature controller based on partitioning multi-strategy. En Proceeding of the 11th World Congress on Intelligent Control and Automation. IEEE, 2014. p. 4344-4349.
- [48] Dunn, Joseph C. A fuzzy relative of the ISODATA process and its use in detecting compact well-separated clusters. 1973.
- [49] Feng, Gang; Cao, Shu-Guang; Rees, Neville W. Stable adaptive control of fuzzy dynamic systems. Fuzzy Sets and Systems, 2002, vol. 131, no 2, p. 217-224.
- [50] Feng, Gang. A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. IEEE Transactions on Fuzzy systems, 2006, vol. 14, no 5, p. 676-697.
- [51] Galán, Ramón, et al. Control inteligente. Inteligencia Artificial. Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial, 2000, vol. 4, no 10.
- [52] Gath, Isak; Geva, Amir B.. . Unsupervised optimal fuzzy clustering. IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence, 1989, no 7, p. 773-780.
- [53] Goguen, Joseph A. The logic of inexact concepts. Synthese, 1969, vol. 19, no 3-4, p. 325-373.
- [54] Goldberg, D. E. Genetic Learning in optimization, search and machine learning. Addison Wesley, 1994.
- [55] Goldberg, D. E. The Design of Competent Genetic Algorithms: Steps Toward a Computational Theory of Innovation. 2002.
- [56] González, Miguel E., et al. Multivariable centralized control with decoupling and feedforward compensation for residential wind turbine. IFAC Proceedings Volumes, 2011, vol. 44, no 1, p. 557-562.
- [57] Grande, J. A., et al. Precipitation, pH and metal load in AMD river basins: an application of fuzzy clustering algorithms to the process characterization. Journal of Environmental Monitoring, 2005, vol. 7, no 4, p. 325-334.
- [58] Graves, Daniel; Pedrycz, Witold. Fuzzy c-means, gustafson-kessel fcm, and kernel-based fcm: A comparative study. En Analysis and Design of Intelligent Systems using Soft Computing Techniques. Springer, Berlin, Heidelberg, 2007. p. 140-149.
- [59] Grimble, M. J.; Hearn, G. LQG controllers for state-space systems with pure transport delays: Application to hot strip mills. Automatica, 1998, vol. 34, no 10, p. 1169-1184.

- [60] Guély, François; Siarry, Patrick. Gradient descent method for optimizing various fuzzy rule bases. En [Proceedings 1993] Second IEEE International Conference on Fuzzy Systems. IEEE, 1993. p. 1241-1246.
- [61] Guerra, Thierry-Marie, et al. Conditions of output stabilization for nonlinear models in the Takagi–Sugeno’s form. *Fuzzy Sets and Systems*, 2006, vol. 157, no 9, p. 1248-1259.
- [62] Gustafson, Donald E.; Kessel, William C. Fuzzy clustering with a fuzzy covariance matrix. En 1978 IEEE conference on decision and control including the 17th symposium on adaptive processes. IEEE, 1979. p. 761-766.
- [63] Hassanzadeh, Hamid Reza, et al. An interval-valued fuzzy controller for complex dynamical systems with application to a 3-PSP parallel robot. *Fuzzy sets and systems*, 2014, vol. 235, p. 83-100.
- [64] Hayashi, Isao; Takagi, H. Formulation of fuzzy reasoning by neural network. En 4th Fuzzy System Symposium of IFSA Japan. 1988. p. 55-60.
- [65] Hua, Chang-Chun; Wang, Qing-Guo; Guan, Xin-Ping. Adaptive fuzzy output-feedback controller design for nonlinear time-delay systems with unknown control direction. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 2009, vol. 39, no 2, p. 363-374.
- [66] Huang, Chih-Peng. Model based fuzzy control with affine TS delayed models applied to nonlinear systems. *Int. J. Innov. Comput. Inf. Control*, 2012, vol. 8, no 5, p. 2979-2993.
- [67] Husek, Petr; Narenathreyas, Kashyapa. Aircraft longitudinal motion control based on Takagi–Sugeno fuzzy model. *Applied Soft Computing*, 2016, vol. 49, p. 269-278.
- [68] Jang, Jyh-Shing Roger, et al. Fuzzy Modeling Using Generalized Neural Networks and Kalman Filter Algorithm. En *AAAI*. 1991. p. 762-767.
- [69] Jang, Jyh-Shing. *Neuro-fuzzy modeling: architectures, analyses, and applications*. University of California, Berkeley, 1992.
- [70] Jang, J.-SR. ANFIS: adaptive-network-based fuzzy inference system. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, 1993, vol. 23, no 3, p. 665-685.
- [71] Jiménez, A., et al. Model of behaviour of conductivity versus pH in acid mine drainage water, based on fuzzy logic and data mining techniques. *Journal of Hydroinformatics*, 2009, vol. 11, no 2, p. 147-153.
- [72] Jiménez, Agustín, et al. Improvement of Takagi-Sugeno fuzzy model for the estimation of nonlinear functions. *Asian Journal of Control*, 2012, vol. 14, no 2, p. 320-334.

- [73] Jiménez, Agustín, et al. Optimal control using feedback linearization for a generalized TS model. En IFIP International Conference on Artificial Intelligence Applications and Innovations. Springer, Berlin, Heidelberg, 2014. p. 466-475.
- [74] Johnson, Eric G., et al. Advantages of genetic algorithm optimization methods in diffractive optic design. En *Diffractive and Miniaturized Optics: A Critical Review*. International Society for Optics and Photonics, 1993. p. 1027105.
- [75] Khalid, Muhammad Usman; Kadri, Muhammad Bilal. Liquid level control of nonlinear coupled tanks system using linear model predictive control. En 2012 International conference on emerging technologies. IEEE, 2012. p. 1-5.
- [76] Khooban, Mohammad Hassan, et al. Model-predictive control based on Takagi-Sugeno fuzzy model for electrical vehicles delayed model. *IET Electric Power Applications*, 2017, vol. 11, no 5, p. 918-934.
- [77] Krishnapuram, Raghuram; Keller, James M. A possibilistic approach to clustering. *IEEE transactions on fuzzy systems*, 1993, vol. 1, no 2, p. 98-110.
- [78] Kroll, Andreas. Identification of functional fuzzy models using multidimensional reference fuzzy sets. *Fuzzy sets and systems*, 1996, vol. 80, no 2, p. 149-158.
- [79] Kumaresan, N.; Ratnavelu, Kuru. Optimal control for stochastic linear quadratic singular neuro Takagi-Sugeno fuzzy system with singular cost using genetic programming. *Applied Soft Computing*, 2014, vol. 24, p. 1136-1144.
- [80] Labiod, Salim; Boucherit, Mohamed Seghir; Guerra, Thierry Marie. Adaptive fuzzy control of a class of MIMO nonlinear systems. *Fuzzy sets and systems*, 2005, vol. 151, no 1, p. 59-77.
- [81] Lakoff, George. Hedges: A study in meaning criteria and the logic of fuzzy concepts. En *contemporary Research in Philosophical Logic and Linguistic semantics*. Springer, Dordrecht, 1975. p. 221-271.
- [82] Lam, H. K.; Leung, F. Frank; Tam, Peter Kwong-Shun. Fuzzy control of a class of multivariable nonlinear systems subject to parameter uncertainties: model reference approach. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2001, vol. 26, no 2, p. 129-144.
- [83] Lee, Jay H.; Morari, Manfred; García, Carlos E. State-space interpretation of model predictive control. *Automatica*, 1994, vol. 30, no 4, p. 707-717.
- [84] Lendek, Zs, et al. Adaptive observers for TS fuzzy systems with unknown polynomial inputs. *Fuzzy Sets and Systems*, 2010, vol. 161, no 15, p. 2043-2065.

- [85] Lewis, Frank L.; Xie, Lihua; Popa, Dan. Optimal and robust estimation: with an introduction to stochastic control theory. CRC press, 2017.
- [86] Li, Sifu; Lim, Kian Y.; Fisher, D. Grant. A state space formulation for model predictive control. *AIChE journal*, 1989, vol. 35, no 2, p. 241-249.
- [87] Li, Tzuu-Hseng S.; Tsai, Shun-Hung. T-S fuzzy bilinear model and fuzzy controller design for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 2007, vol. 15, no 3, p. 494-506.
- [88] Li, Y.; Yonezawa, Y. Stability analysis of a fuzzy control system by the hyperstability theorem. *Japanese journal of fuzzy theory and systems*, 1991, vol. 3, no 2, p. 209-214.
- [89] Li, Yongmin, et al. Robust control for uncertain fuzzy systems with both distributed delays and input delays. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2009, vol. 52, no 5, p. 673-686.
- [90] Li, Zhijun; Cao, Xiaoqing; Ding, Nan. Adaptive fuzzy control for synchronization of nonlinear teleoperators with stochastic time-varying communication delays. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2011, vol. 19, no 4, p. 745-757.
- [91] Lin, Ching-Teng.; LEE, C. S. George . Neural-network-based fuzzy logic control and decision system. *IEEE Transactions on computers*, 1991, vol. 40, no 12, p. 1320-1336.
- [92] Lin, Chun-Fu; Wang, Sheng-De. Fuzzy support vector machines. *IEEE transactions on neural networks*, 2002, vol. 13, no 2, p. 464-471.
- [93] Luenberger, David. An introduction to observers. *IEEE Transactions on automatic control*, 1971, vol. 16, no 6, p. 596-602.
- [94] Maeda, M.; Murakami, S. Stability analysis of fuzzy control systems using phase planes. *Japanese journal of fuzzy theory and systems*, 1991, vol. 3, no 2, p. 149-160.
- [95] Mamdani, Ebrahim H.; Assilian, Sedrak. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International journal of man-machine studies*, 1975, vol. 7, no 1, p. 1-13.
- [96] Mamdani, Ebrahim H. Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic synthesis. *En Proceedings of the sixth international symposium on Multiple-valued logic*. IEEE Computer Society Press, 1976. p. 196-202.
- [97] Matía, Fernando, et al. An affine fuzzy model with local and global interpretations. *Applied Soft Computing*, 2011, vol. 11, no 6, p. 4226-4235.

- [98] Moir, T.; Grimble, M. Optimal self-tuning filtering, prediction, and smoothing for discrete multivariable processes. *IEEE Transactions on Automatic control*, 1984, vol. 29, no 2, p. 128-137.
- [99] Montazeri, Allahyar, et al. Dynamic modelling and parameter estimation of a hydraulic robot manipulator using a multi-objective genetic algorithm. *International Journal of Control*, 2017, vol. 90, no 4, p. 661-683.
- [100] Mudi, Rajani K.; Pal, Nikhil R. A robust self-tuning scheme for PI-and PD-type fuzzy controllers. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 1999, vol. 7, no 1, p. 2-16.
- [101] Navratil, J. P.; Lim, K. Y.; Fisher, D. G. Disturbance feedback in model predictive control systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 1988, vol. 21, no 4, p. 63-68.
- [102] Negoita, C. V.; Ralescu, D. A. Fuzzy systems and artificial intelligence. *Kybernetes*, 1974, vol. 3, no 3, p. 173-178.
- [103] Nguyen, Hung T., et al. Theoretical aspects of fuzzy control. John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [104] Ordys, Andrzej W. Model-system parameter mismatch in GPC control. *International journal of adaptive control and signal processing*, 1993, vol. 7, no 4, p. 239-253.
- [105] Ordys, Andrzej W.; Clarke, David W. A state-space description for GPC controllers. *International Journal of Systems Science*, 1993, vol. 24, no 9, p. 1727-1744.
- [106] Pomerleau, Yves; Bourque, Denis; Groleau, Denis. Multivariable multi-strategy control of a fed-batch fermentation process for the production of poly-/spl beta/-hydroxybutyric acid (PHB). En *Proceedings of IEEE International Conference on Control and Applications*. IEEE, 1993. p. 475-479.
- [107] Purwar, Shubhi; Kar, Indra Narayan; Jha, Amar Nath. Adaptive control of robot manipulators using fuzzy logic systems under actuator constraints. *Fuzzy sets and systems*, 2005, vol. 152, no 3, p. 651-664.
- [108] Rahmani, Behrooz; Markazi, Amir HD. A new method for control of nonlinear networked systems. *Applied Soft Computing*, 2016, vol. 45, p. 197-206.
- [109] Ren, Xiao; Fang, Yongchun. Frequency Based Combination Control Strategy for AFMs. *IFAC Proceedings Volumes*, 2013, vol. 46, no 5, p. 600-605.
- [110] Richler, H.; Barbieri, E.; Figuero, F. Nonlinear modeling and control of B propellant mixer. En *American Control Conference*. 2003. p. 2814-2839.

- [111] Ricker, N. Lawrence. Model predictive control with state estimation. *Industrial & engineering chemistry research*, 1990, vol. 29, no 3, p. 374-382.
- [112] Sala, Antonio; Arino, Carlos V. Reduciendo distancias entre el control borroso y el control no lineal: luces y sombras. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 2009, vol. 6, no 2, p. 26-35.
- [113] Santos, M. Un enfoque aplicado del control inteligente. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 2011, vol. 8, no 4, p. 283-296.
- [114] Shankar, A. S.; Asokan, A.; Sivakumar, D. Brain tumor classification using Gustafson–Kessel (GK) fuzzy clustering algorithm. *Brain*, 2016, vol. 1, no 05, p. 68-72.
- [115] Shill, Pintu Chandra, et al. Optimization of fuzzy logic controllers with rule base size reduction using genetic algorithms. *International Journal of Information Technology & Decision Making*, 2015, vol. 14, no 05, p. 1063-1092.
- [116] Silva Filho, Telmo M., et al. Hybrid methods for fuzzy clustering based on fuzzy c-means and improved particle swarm optimization. *Expert Systems with Applications*, 2015, vol. 42, no 17-18, p. 6315-6328.
- [117] Simon, Daniel J. Training fuzzy systems with the extended Kalman filter. *Fuzzy sets and systems*, 2002, vol. 132, no 2, p. 189.
- [118] Sin, S. K.; De Figueiredo, Rui JP. Fuzzy system design through fuzzy clustering and optimal defuzzification. En [Proceedings 1993] Second IEEE International Conference on Fuzzy Systems. IEEE, 1993. p. 190-195.
- [119] Škrjanc, Igor; Dovzan, Dejan. Evolving gustafson-kessel possibilistic c-means clustering. *Procedia Computer Science*, 2015, vol. 53, p. 191-198.
- [120] Song, Zuoshi, et al. A computed torque controller for uncertain robotic manipulator systems: Fuzzy approach. *fuzzy Sets and Systems*, 2005, vol. 154, no 2, p. 208-226.
- [121] Sugeno, Michio; Yasukawa, Takahiro. A fuzzy-logic-based approach to qualitative modeling. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 1993, vol. 1, no 1, p. 7.
- [122] Sun, F. C.; Sun, Z. Q.; Feng, Gang. An adaptive fuzzy controller based on sliding mode for robot manipulators. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 1999, vol. 29, no 5, p. 661-667.
- [123] Syahputra, Ramadoni. Distribution network optimization based on genetic algorithm. *Journal of Electrical Technology UMY*, 2017, vol. 1, no 1, p. 1-9.

- [124] Takagi, Tomohiro; Sugeno, Michio. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. En Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems. Morgan Kaufmann, 1993. p. 387-403.
- [125] Tanaka, Kazuo; Sugeno, Michio. Stability analysis and design of fuzzy control systems. Fuzzy sets and systems, 1992, vol. 45, no 2, p. 135-156.
- [126] Tanaka, Kazuo; Ikeda, Takayuki; Wang, Hua O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs. IEEE Transactions on fuzzy systems, 1998, vol. 6, no 2, p. 250-265.
- [127] Tanaka, Kazuo; Wang, Hua O. Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach. John Wiley & Sons, 2004.
- [128] Tang, Kit-Sang, et al. An optimal fuzzy PID controller. IEEE transactions on industrial electronics, 2001, vol. 48, no 4, p. 757-765.
- [129] Tang, Xin, et al. Takagi–Sugeno fuzzy control for semi-active vehicle suspension with a magnetorheological damper and experimental validation. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2017, vol. 22, no 1, p. 291-300.
- [130] Udehi, D.; Ordys, A.; Grimble, M. J. A generalized predictive control benchmark index for MIMO systems. En Proceedings of the International Conference on Control Applications. IEEE, 2002. p. 1213-1218.
- [131] Vélez, Miguel Ángel, et al. A new methodology to improve interpretability in neuro-fuzzy TSK models. Applied Soft Computing, 2010, vol. 10, no 2, p. 578-591.
- [132] Wang, Liang; Langari, Reza. Fuzzy controller design via hyperstability approach. En Fuzzy Systems, 1994. IEEE World Congress on Computational Intelligence., Proceedings of the Third IEEE Conference on. IEEE, 1994. p. 178-182.
- [133] Wang, Hua O.; Tanaka, Kazuo; Griffin, Michael F. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues. IEEE transactions on fuzzy systems, 1996, vol. 4, no 1, p. 14-23.
- [134] Wang, Shun-Yuan; Tseng, Chwan-Lu; Chiu, Chun-Jung. Design of a novel adaptive TSK-fuzzy speed controller for use in direct torque control induction motor drives. Applied Soft Computing, 2015, vol. 31, p. 396-404.
- [135] Wold, Herman. A study in the analysis of stationary time series. 1938. Tesis Doctoral. Almqvist & Wiksell.
- [136] Xie, Xuanli Lisa ; Beni, Gerardo. A validity measure for fuzzy clustering. IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence, 1991, no 8, p. 841-847.

- [137] Yazid, Edwar; Garrat, Matthew; Santoso, Fendy. Position control of a quadcopter drone using evolutionary algorithms-based self-tuning for first-order Takagi–Sugeno–Kang fuzzy logic autopilots. *Applied Soft Computing*, 2019, vol. 78, p. 373-392.
- [138] Ying, Hao, et al. Fuzzy control theory: A nonlinear case. *Automatica*, 1990, vol. 26, no 3, p. 513-520.
- [139] Zadeh, Lotfi A., et al. Fuzzy sets. *Information and control*, 1965, vol. 8, no 3, p. 338-353.
- [140] Zadeh, Lotfi A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Transactions on systems, Man, and Cybernetics*, 1973, no 1, p. 28-44.
- [141] Zhang, Ridong; Tao, Jili; Gao, Furong. A New Approach of Takagi–Sugeno Fuzzy Modeling Using an Improved Genetic Algorithm Optimization for Oxygen Content in a Coke Furnace. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2016, vol. 55, no 22, p. 6465-6474.
- [142] Zhao, Zhen-Yu; Tomizuka, Masayoshi; ISAKA, Satoru. Fuzzy gain scheduling of PID controllers. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, 1993, vol. 23, no 5, p. 1392-1398.
- [143] Zheng, Yuhui, et al. Image segmentation by generalized hierarchical fuzzy C-means algorithm. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 2015, vol. 28, no 2, p. 961-973.
- [144] Zimmermann, Hans-J. Description and optimization of fuzzy systems. *International Journal of General System*, 1975, vol. 2, no 1, p. 209-215.