UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE
INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

Métodos computacionales de elastoplasticidad anisótropa en grandes deformaciones

Tesis Doctoral

Miguel Ángel Sanz Gómez

Ingeniero de Materiales

2019

Departamento de Aeronaves y Vehículos Espaciales
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio
Universidad Politécnica de Madrid

Métodos computacionales de elastoplasticidad anisótropa en grandes deformaciones

Tesis Doctoral

Miguel Ángel Sanz Gómez

Ingeniero de Materiales

Directores de la Tesis

Marcos Latorre Ferrús

Dr. Ingeniero Aeronáutico

Francisco Javier Montáns Leal

Dr. Ingeniero Industrial

2019

POLITÉCNICA

Tribunal nombrado por el Sr. Rector Magfco. de la Universidad Politécnica de Madrid, el día de de 2019

Presidente:

Vocal:

Vocal:

Vocal:

Secretario:

Suplente:

Suplente:

Realizado el acto de defensa y lectura de la Tesis el día de de 2019 en la E.T.S.I. Aeronáutica y del Espacio.

Calificación

EL PRESIDENTE

LOS VOCALES

EL SECRETARIO

Agradecimientos

Los agradecimientos en un trabajo como es una tesis doctoral son siempre obligados, y en mi caso, por mis circunstancias y por mi personalidad prefiero ser breve, se que son muchos compañeros, amigos, y por supuesto mi familia, los que me han apoyado en este camino.

Tengo que recordar particularmente a mi Padre, porque siempre se sentía orgulloso del progreso de sus hijos, fuera cuál fuera la meta si era más elevada que la anterior, seguro que se alegraría más que yo de ver esta tesis finalizada y de verme defenderla. También tengo que mencionar a mis directores de tesis y compañeros de trabajo estos últimos años, a Marcos Latorre, un joven y estupendo profesor que en el futuro seguirá dando brillantes aportaciones a la Universidad y a la Ciencia, y a Francisco Montans, profesor tan ecléptico como brillante, gracias a su incondicional apoyo moral e intelectual he podido completar este trabajo tan interesante y audaz, como debe ser toda tesis doctoral que se precie.

A todos los demás que me habeis ayudado de una forma u otra, aunque no os cite uno a uno por un cierto pudor personal, ya sabeis como soy a veces, también os guardo el aprecio y la valía por vuestros gestos, y espero saber estar a la altura cuando me corresponda, aunque ahora mis palabras sean parcas. Gracias a todos.

Índice general

Agradecimientos

Índice general	I
----------------	---

Índice de Figuras	IV
-------------------	----

Índice de Tablas	XII
------------------	-----

Resumen	XV
---------	----

<i>Abstract</i>	XVII
-----------------	------

1. Introducción	1
------------------------	----------

1.1. Motivación	1
---------------------------	---

1.2. Objetivos	4
--------------------------	---

1.3. Estado del arte	7
--------------------------------	---

1.4. Contenidos de la tesis	12
---------------------------------------	----

1.5. Contribuciones originales	14
--	----

2. Conceptos de la mecánica de los medios continuos	17
--	-----------

2.1. Introducción	17
-----------------------------	----

2.2. Fundamentos termodinámicos	17
---	----

2.2.1. Primera ley de la termodinámica	18
--	----

2.2.2. Segunda ley de la termodinámica	19
--	----

2.2.3. Energía libre de Helmholtz	20
---	----

2.2.4. Desigualdad de Clausius-Duhem	24
--	----

2.3. Introducción a la cinemática del medio continuo	25
--	----

2.3.1. Descomposición multiplicativa de Lee	31
---	----

2.4. Medida de la deformación	33
---	----

2.4.1. Deformación finita logarítmica	37
---	----

2.5. Medida de la tensión	38
-------------------------------------	----

2.5.1. Objetividad	40
------------------------------	----

2.5.2. Tensiones generalizadas de Kirchhoff	42
---	----

2.5.3. Tensiones en configuración intermedia	44
--	----

3. Introducción a la plasticidad computacional	47
3.1. Modelos fenomenológicos y micromecánicos	47
3.2. Introducción a la plasticidad	51
3.2.1. Variables internas del problema elastoplástico	52
3.3. Anisotropía en plasticidad	64
3.4. Función de plastificación	69
3.4.1. Funciones de plastificación en isotropía	70
3.4.2. Funciones de plastificación en anisotropía	76
3.5. Ley de evolución del flujo plástico	83
3.6. Integración de la ecuación de evolución	85
3.6.1. Integración de las variables internas	87
4. Modelo teórico basado en el corrector elástico	91
4.1. Descripción en deformaciones infinitesimales	92
4.1.1. Evolución de la variable interna elástica	94
4.1.2. Descripción del predictor y el corrector elásticos	96
4.1.3. Módulo elastoplástico continuo infinitesimal	99
4.2. Descripción en deformaciones finitas	100
4.2.1. Descomposición multiplicativa elastoplástica	101
4.2.2. Disipación en términos del corrector elástico	101
4.2.3. Disipación en términos del corrector de deformación logarítmica	104
4.2.4. La función de plastificación	108
4.2.5. Relación entre predictor y corrector elásticos	112
4.2.6. Módulo elastoplástico tangente continuo	113
5. Modelo computacional	115
5.1. Elastoplasticidad infinitesimal: motivación computacional	116
5.1.1. Modelo reológico de endurecimiento	116
5.1.2. Modelo elastoplástico continuo en teoría infinitesimal	121
5.1.3. Modelo incremental en teoría infinitesimal	125
5.2. Elastoplasticidad finita multiplicativa en deformaciones logarítmicas	127
5.2.1. Tensores de deformación logarítmica	127
5.2.2. Disipación en deformación elástica logarítmica	128
5.2.3. Ley de evolución en deformaciones elásticas logarítmicas	130
5.2.4. Función de plastificación en anisotropía	131
5.3. Linealización del modelo continuo en deformaciones finitas	132
5.3.1. Relación entre el predictor y el corrector elástico logarítmico	134
5.3.2. Relación entre la deformación logarítmica total y elástica <i>trial</i>	135
5.3.3. Módulo tangente elastoplástico continuo	135
5.4. Linealización del modelo algorítmico	137
5.4.1. Algoritmo de integración de tensiones	138
5.4.2. Flujo plástico isócoro	144
5.4.3. El caso particular de isotropía	144
5.4.4. Módulo tangente elastoplástico algorítmico consistente	145

6. Determinación de parámetros del modelo	151
6.1. Material elastoplástico isotrópico compresible	151
6.2. Material ortotrópico e incompresible	159
6.2.1. Caso (a): se conoce un límite de fluencia y ambos módulos elastoplásticos	165
6.2.2. Caso (b): se conoce un módulo elastoplástico y ambos límites de fluencia	166
6.2.3. Caso (c): plasticidad perfecta	166
7. Ejemplos de aplicación numérica	167
7.1. Aplicación sobre el código DULCINEA	167
7.1.1. Ejemplo de material compresible isotrópico con comportamiento elastoplástico	168
7.1.2. Ejemplo de material ortotrópico incompresible con comportamiento elastoplástico	172
7.1.3. Ensayo virtual de tracción sobre probeta cilíndrica	176
7.1.4. Ejemplo de materiales blandos en la placa con agujero	180
7.2. Aplicación sobre el código ADINA	187
7.2.1. Ejemplos de comparación ADINA-DULCINEA	188
7.2.2. Ejemplos de conformado elastoplástico	199
8. Conclusiones	231
8.1. Trabajo futuro	233
Contribuciones académicas	235
Bibliografía	237

Índice de figuras

2.1. Configuración lagrangiana o material y configuración euleriana o espacial: empuje desde configuración inicial a configuración deformada.	26
2.2. Descomposición polar del gradiente de deformaciones ($X = RU = VR$).	28
2.3. Descomposición multiplicativa de Lee: configuración intermedia entre $\mathbf{X}_p$ y $\mathbf{X}_e$.	31
2.4. Descomposición de Lee. Cinemática plástica desde una escala atómica (dislocaciones en un volumen representativo de la red cristalina): interpretación física de $\mathbf{X}_p$ y $\mathbf{X}_e$.	32
2.5. Medidas de deformación de Seth-Hill obtenidas a partir del mismo alargamiento instantáneo $^t\lambda$.	35
2.6. Transformación del área de referencia entre configuraciones lagrangiana o material y euleriana o espacial.	39
3.1. Jerarquía dimensional en la observación en un sólido deformable elastoplásticamente: de la nanoescala a la macroescala.	48
3.2. Escala en la observación del material en un sólido anisótropo: de la plasticidad de cristales a la homogeneización macroscópica.	50
3.3. Elemento prismático sometido a carga axial: evolución elastoplástica.	52
3.4. Dispositivo reológico de Prandtl de plasticidad: relación de las variables externa e internas de deformación.	53
3.5. Modelo unidimensional de plasticidad perfecta.	54
3.6. Endurecimiento isótropo: el dominio elástico crece igual en todas las direcciones.	56
3.7. Endurecimiento isótropo no lineal de Voce sobre la curva plástica del ensayo uniaxial de carga: saturación.	59
3.8. Endurecimiento cinemático: el dominio elástico se desplaza en una determinada dirección, pero mantiene su tamaño.	60
3.9. Dispositivo reológico de endurecimiento cinemático: a la izquierda modelo clásico, a la derecha modelo según la regla de Armstrong-Frederik.	62
3.10. Endurecimiento combinado o mixto: el dominio elástico crece en tamaño y se desplaza en una determinada dirección simultáneamente.	63
3.11. Textura cristalina: orientación preferente de los granos metálicos (derecha), y orientación al azar (izquierda).	65
3.12. Laminación de materiales metálicos: formación de textura en los granos metálicos.	66

3.13. Textura del material laminado: morfología de los granos metálicos en aleación Al7075 T651. <i>Tensile yield strength</i> : 515 MPa en L , 510 MPa en T , y 460 MPa en S [113].	67
3.14. Copas de estampación con preformas circulares: material con diferente textura y orientación cristalográfica. Reproducción extraída de [144]. . .	68
3.15. Espacio de Haigh-Westergaard - Dominio elástico $\mathbb{E}$ alrededor del eje hidrostático.	71
3.16. Espacio de Haig-Westergaard - Dominio elástico de Von Mises y Tresca sobre el plano de tensiones principales I y II	75
3.17. Representación esquemática de la transformación lineal de tensiones de las funciones de plastificación de Barlat.	80
3.18. Espacio elástico normalizado en el plano principal de tensión: función de plastificación en un problema de tensión plana con aleación de aluminio 6022: resultados de la función de Hill y la función de Barlat. Reproducción extraída de [23].	82
3.19. Espacio elástico normalizado en el plano principal de tensión: función de plastificación en un problema de tensión plana con acero DP500: resultados de la función de Von Mises/Hill vs la función de Barlat, y resultados experimentales. Reproducción extraída de [84].	82
3.20. Esquema de flujo computacional del problema elastoplástico entre el modelo de elementos finitos y el modelo elastoplástico.	87
3.21. Esquema del mecanismo de computación predictor-corrector: acción del retorno radial para cumplir la consistencia plástica $f = 0$	88
4.1. Dispositivo reológico de Prandtl: modelo unidimensional de plasticidad perfecta ($k = cte$).	92
5.1. Modelo elastoplástico con endurecimiento cinemático: dispositivo reológico unidimensional [145].	117
6.1. Representación de un ensayo uniaxial de carga-descarga para un material isótropo elastoplástico lineal, en términos de $\boldsymbol{\tau}$ y $\boldsymbol{E}$. Caso particular de endurecimiento combinado isótropo-cinemático, con los parámetros internos $k' > 0$ y $2\mu_{kin} > 0$	152
7.1. Ensayo uniaxial de carga-descarga. Caso con endurecimiento combinado isotropo y cinemático: $k' > 0$ y $2\mu_{kin} > 0$. Izquierda (a): tensión axial de Kirchhoff vs deformación logarítmica $\tau_1(E_1)$. Derecha (b): deformaciones transversales $E_2(E_1)$	171
7.2. Ensayo de carga: (a) elemento finito sometido a extensión en el eje X. (b) Ensayo uniaxial de carga-descarga - caso con endurecimiento combinado isótropo y cinemático: $k' > 0$ y $2\mu_{kin} > 0$. Tensión axial de Cauchy $\sigma_1(E_1)$. 172	
7.3. Ensayo uniaxial de carga. Caso con endurecimiento isótropo solamente, $k' > 0$ y $2\mu_{kin} = 0$. Izquierda (a): tensión axial de Kirchhoff $\tau_1(E_1)$. Derecha (b): relación de deformaciones transversales $E_2(E_1)$	173

7.4. Ensayo uniaxial de carga. Caso con endurecimiento cinemático solamente, $k' = 0$ y $2\mu_{kin} > 0$. Izquierda (a): tensión axial de Kirchhoff $\tau_1(E_1)$. Derecha (b): relación de deformaciones transversales $E_2(E_1)$. . .	173
7.5. Ensayo uniaxial de carga, caso de plasticidad perfecta sin endurecimiento, $k' = 0$ y $2\mu_{kin} = 0$. Izquierda (a): tensión axial de Kirchhoff $\tau_1(E_1)$. Derecha (b): relación de deformaciones transversales $E_2(E_1)$	173
7.6. Ensayo uniaxial de carga-descarga sobre direcciones preferentes de ortotropía del material. Se representa $\sigma_i^{(i)}$ tensión uniaxial de Cauchy en dirección i en eje de carga (i) , y $E_j^{(i)}$ componente de deformación logarítmica transversal j en el eje de carga (i) . Caso con endurecimiento con $k' = 0$ y $2\mu_i^{kin} > 0$, $i = 1, 2, 3$	177
7.7. Probeta cilíndrica de tracción. A la izquierda la malla tridimensional de elementos finitos (simetría de una octava parte de la geometría completa). Condiciones elastoplásticas de isotropía. Longitud total original = 53.34 mm; radio de la sección = 6.4135 mm. Derecha: configuración deformada y distribución de γ para la probeta sometida a un incremento de longitud de 14 mm.	180
7.8. Ensayo de carga en probeta cilíndrica. Curva $F - u$ en tracción con estricción. Resultados experimentales en máquina de ensayos, y resultados numéricos del modelo elastoplástico de este trabajo y de otros autores [106], [130],[70],[98],[35], y [21]. Fuerza registrada en extremos $\mathbf{f}$ [kN] <i>vs</i> desplazamiento aplicado $\mathbf{u}$ [mm].	181
7.9. Ejemplo de placa con un agujero circular en materiales blandos. Malla sin deformar de elementos finitos bidimensionales bajo condiciones de deformación plana. Longitud = 32 mm; Alto = 16 mm; Diámetro del agujero = 8 mm. El ángulo α define la orientación de los ejes preferentes de material tomando de referencia el eje 1 (dirección a_1) con respecto del eje horizontal X	182
7.10. Ejemplo de placa con agujero circular central, con materiales blandos e incompresibles. Problema elastoplástico resuelto en DULCINEA con endurecimiento cinemático. Configuración deformada y distribuciones de γ para diferentes orientaciones: $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 15^\circ$, $\alpha = 30^\circ$ y $\alpha = 45^\circ$. Los resultados que se muestran en el espectro de colores están interpolados desde los puntos de integración.	184
7.11. Placa con discontinuidad circular y con material incompresible elastoplástico resuelta en ADINA. Caso con endurecimiento combinado cinemático e isotrópico. Configuración deformada y distribución de resultados en términos de γ para diferentes orientaciones de material, $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 15^\circ$, $\alpha = 30^\circ$ y $\alpha = 45^\circ$. Resultados interpolados desde puntos de integración.	186
7.12. Ensayo de tracción uniaxial en el sólido ortótropo e incompresible. Ejemplo del apartado 7.1.2,. (a) carga impuesta en dirección $\mathbf{x}$; (b) carga impuesta dirección $\mathbf{y}$; (c) carga impuesta en dirección $\mathbf{z}$. Gráficos de comportamiento obtenidos directamente de ADINA.	189

7.13. Probeta cilíndrica de tracción. (a) mallas original y deformada después de aplicar un desplazamiento de $7.4mm$; se identifican los resultados de deformación plástica acumulada en modelo con elementos de 8 nodos sobre una malla de 3024 elementos. Abajo los mismos resultados en (b) modelo con elementos de 8 nodos sobre una malla de 6048 elementos, y en (c) modelo con elementos de 27 nodos sobre una malla de 3024 elementos.	191
7.14. Diagrama fuerza-desplazamiento sobre probeta cilíndrica de tracción. Resultados obtenidos en los modelos de DULCINEA y ADINA (con 8, 27 nodos y con 8 nodos y el número de elementos duplicado). Curva $F - u$: fuerza equivalente registrada en extremos F [kN] <i>vs</i> desplazamiento aplicado u [mm].	192
7.15. Estricción de la sección recta: máxima contracción en la localización de la deformación plástica. Resultado en ADINA comparado con el obtenido de la referencia [98]: desplazamiento radial u_r [mm] <i>vs</i> desplazamiento de carga aplicado u_x [mm].	193
7.16. Placa con discontinuidad circular y con material incompresible elastoplástico resuelta en ADINA. Caso con endurecimiento cinemático. Configuración deformada y distribuciones de γ para diferentes orientaciones: $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 15^\circ$, $\alpha = 30^\circ$ y $\alpha = 45^\circ$. Resultados extrapolados desde los puntos de integración.	195
7.17. Placa con discontinuidad circular y con material incompresible elastoplástico resuelta en ADINA. Caso con endurecimiento combinado cinemático e isótropo. Configuración deformada y distribuciones de γ para diferentes orientaciones: $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 15^\circ$, $\alpha = 30^\circ$ y $\alpha = 45^\circ$. Resultados extrapolados desde los puntos de integración.	196
7.18. Resultados de fuerza (arriba) y deformación plástica (abajo) obtenidos según el desplazamiento aplicado en el problema con endurecimiento combinado, resuelto en ADINA. Resultados para diferentes orientaciones de direcciones preferentes de material respecto de la dirección de carga (ángulo α).	197
7.19. Resultados de fuerza (arriba) y deformación plástica (abajo) obtenidos según el desplazamiento aplicado en el problema con endurecimiento cinemático, resuelto en ADINA. Resultados para diferentes orientaciones de direcciones preferentes de material respecto de la dirección de carga (ángulo α).	198
7.20. Performa circular para el ensayo de previo de embutición en el plano. A la izquierda las dimensiones y desplazamientos impuestos. A la derecha modelo de elementos finitos hexaédricos.	200

7.21. (a) Placa circular con agujero, resultados comparados con [21]; malla deformada con la de deformación plástica equivalente en diferentes momentos del desplazamiento impuesto: 25 mm, 50 mm, 75 mm. Izquierda: modelo de anisotropía plástica utilizando la subrutina de usuario en ADINA con 768 elementos de 8 nodos. Derecha: modelo [21]. (b) Malla deformada y deformación plástica equivalente final ($u = 75mm$): izquierda: modelo utilizado en ADINA con elementos de 8 nodos (1536 elementos); derecha: modelo elementos de 27 nodos (768 elementos).	202
7.22. Placa circular con agujero. Malla deformada y deformación plástica equivalente final ($u = 75mm$). Se contraponen los resultados obtenidos con el modelo de ADINA (izquierda), frente al modelo de [110]. (a) material A - coeficiente de plastificación en cortante superior al valor de isotropía, (b) material B - coeficiente de plastificación en cortante inferior al valor de isotropía.	204
7.23. Placa circular con agujero. Malla deformada y deformación plástica equivalente final ($u = 75mm$). En la parte superior de la imagen se reproducen los resultados del modelo elastoplástico resuelto en ADINA, y debajo los resultados extraídos de la referencia [98], para ambos casos de material A-(a) y B-(b).	205
7.24. Placa circular con agujero: fuerzas nodales en los puntos nodales P y Q , casos (a) y (b) con diferente configuración de material y comparados con los resultados equivalentes contenidos en la referencia [98].	206
7.25. Comportamiento unidimensional en tracción: acero DP600 con los tres endurecimientos y datos experimentales extraídos de [148]. Los parámetros de material han sido determinados según el procedimiento descrito en el capítulo 6.	208
7.26. Comportamiento unidimensional en tracción: acero DP600 con diversos endurecimientos comparados con [148]. (izquierda) isótropo no lineal (centro) cinemático lineal (derecha) combinado isótropo-cinemático. Los parámetros de material han sido determinados según el procedimiento descrito en el capítulo 6.	208
7.27. Placa circular con agujero. Malla deformada y deformación plástica equivalente final ($u = 75mm$). Acero DP600 con diferentes endurecimientos: (a) isótropo no lineal; (b) cinemático lineal; (c) combinado isótropo-cinemático. A la izquierda se representan los resultados de desplazamiento radial en el modelo F.E., a la derecha se representan los resultados de deformación plástica equivalente.	210
7.28. Placa circular con agujero en acero DP600, fuerzas nodales en los puntos P y Q . Se han configurado diferentes endurecimientos: isótropo, cinemático y combinado.	212

7.29. Placa circular con agujero: modelo de partida en acero DP600. Se representa la deformación plástica equivalente sobre la malla deformada final ($u = 75mm$), con un endurecimiento isótropo no lineal en material (a) elásticamente isótropo; material (b) elásticamente anisótropo con módulos de elasticidad dispersos; material (c) elásticamente anisótropo con módulo cortante desacoplado -caso 1-; material (d) elásticamente anisótropo con con módulo cortante desacoplado -caso 2-.	214
7.30. Resultado de fuerzas nodales equivalente vs desplazamiento nodal en los puntos P y Q de la figura 7.20, se comparan los resultados del caso isótropo elástico y el anisótropo elástico, con endurecimiento isótropo no lineal en ambos casos.	215
7.31. Modelo de elementos finitos en ADINA: malla de elementos de la configuración mecánica realizada para la simulación de embutición. (a) punzón- <i>punch</i> , (b) pisador- <i>blankholder</i> , (c) material- <i>blank</i> , (d) matriz- <i>die</i>	217
7.32. Modelo de elementos finitos en ADINA: malla de elementos de la configuración mecánica realizada para la simulación de embutición profunda. (a) punzón- <i>punch</i> , (b) pisador- <i>blankholder</i> , (c) material- <i>blank</i> , (d) matriz- <i>die</i>	217
7.33. Elemento de carga-descarga para calibración de coeficientes de Lankford	219
7.34. Curva de carga descarga en tensión-deformación según el ángulo entre la carga y la dirección preferente de material con términos de tensión de Cauchy vs deformación logarítmica. Desplazamiento relativo máximo impuesto: 0.05/1	220
7.35. (a) Arriba: tensión equivalente de fluencia plástica frente al ángulo de test respecto de la dirección de laminación. (b) Abajo: coeficiente de Lankford medido en ensayo frente a la dirección de preferente de material. Resultados comparativos del modelo actual y el de la referencia [149].	221
7.36. Deformación plástica acumulada en ensayo de embutición profunda en aluminio $Al - 5Mg$ plásticamente isótropo. Desplazamiento total último de 42 mm.	222
7.37. Deformación plástica acumulada en ensayo de embutición profunda en aluminio $Al - 5Mg$ con ortotropía plástica. Resultados en diferentes pasos de desplazamiento: 7.5 mm, 22 mm, 36 mm y desplazamiento final de 42 mm.	223
7.38. (a) Arriba: altura de la copa de embutición frente al ángulo de orientación respecto de la dirección principal de laminación. (b) Abajo: fuerza equivalente aplicada sobre el punzón móvil frente al desplazamiento impuesto. Resultados comparativos del modelo actual y el de la referencia [149].	225
7.39. Modelo E.F. en chapa cuadrada NUMISHEET93 <i>blank</i>	226
7.40. Modelo E.F. de embutición en chapa cuadrada NUMISHEET93.	226
7.41. Embutición en chapa cuadrada NUMISHEET93: comparación de la tensión de Von Mises final entre los modelos de esta tesis	229
7.42. Embutición en chapa cuadrada: comparación de la deformación plástica acumulada final entre los modelos de esta tesis y la referencia [149]	229

7.43. Desplazamientos verticales (mm) frente a la malla original sin deformar en modelo NUMISHEET93.	230
7.44. Desplazamientos absolutos (mm) frente a la malla original sin deformar en modelo NUMISHEET93. Imagen replicada con la doble simetría para mostrar la deformada con mejor perspectiva.	230

Índice de tablas

3.1. Funciones de plastificación en anisotropía plástica: clasificación de tipos/familias.	76
5.1. Modelo de elastoplasticidad multiplicativa con endurecimiento anisotrópo formulado en deformaciones finitas logarítmicas.	133
5.2. Algoritmo de integración implícita de tensiones.	149
5.3. Módulo tangente elastoplástico consistente algorítmicamente.	150
7.1. Convergencia cuadrática: residuo de fuerzas y energías usando un esquema de Newton-Raphson.	171
7.2. Casos con endurecimiento cinemático (Figura 7.10). Residuo de fuerzas y energías durante un paso hiperelástico y otro elastoplástico.	183
7.3. Caso con endurecimiento combinado cinemático-isótropo (Figura 7.11). Residuo de fuerzas y de energías durante un paso elastoplástico típico. .	185
7.4. Propiedades de material en placa circular con agujero, datos extraídos de [21].	201
7.5. Propiedades de material DP600 con endurecimiento isótropo	209
7.6. Propiedades de material de la aelación Al-5 wt % Mg	218
7.7. Parámetros de material para el ensayo Numisheet93	226
7.8. Desplazamientos absolutos (mm) en bordes de placa en el ensayo NUMISHEET93	227

Resumen

El cálculo elastoplástico y la simulación del comportamiento de los materiales han formado parte de la mecánica de los medios continuos desde su origen como rama de la ciencia y la ingeniería, desde que a mediados del siglo XIX ingenieros y científicos de la época le dedicaran su atención a este área de conocimiento. Los primeros postulados sobre el comportamiento y la deformación plástica de los materiales se enunciaron de forma rigurosa con la llegada de la Revolución Industrial, uno de los pioneros fue Henri Tresca, padre del metro como unidad de medida universal, que en 1864 elaboró la primera teoría de fallo plástico por tensión cortante máxima, teoría tan sencilla y eficaz que aún sigue en uso ingenieril de forma amplia.

Casí a la par que Tresca, Cauchy había postulado la teoría de tensiones que lleva su nombre, y que hoy en día forman parte fundamental de la mecánica de los medios continuos. Desde entonces las ecuaciones de comportamiento elástico y elastoplástico han evolucionado en gran manera, no solo en el conocimiento físico de la naturaleza de los materiales que provoca esos comportamientos, sino también en la matemática que da soporte a la física del problema. Si la teoría elaborada por Tresca se reducía a una sencilla expresión de apenas un par de términos, hoy en día se utilizan formulaciones más refinadas, donde el uso de variables de magnitud tensorial y funciones en derivadas parciales han permitido la mejora del rendimiento predictivo de simulación, y han ampliado el campo de aplicación de la mecánica computacional de los sólidos.

La plasticidad es de forma innata un problema no lineal debido a la naturaleza constitutiva de la deformación plástica permanente. Adicionalmente, el uso de grandes deformaciones obliga a formular el comportamiento del sólido con deformaciones finitas, donde las ecuaciones cinemáticas de compatibilidad no lineales causan una relación desplazamiento-deformación también no lineal. Así pues, la resolución del problema elastoplástico generalizado incorpora ambas fuentes de no linealidad, lo que lleva a que las ecuaciones resultantes en el cálculo elastoplástico actual sean resueltas numéricamente con algoritmos iterativos de naturaleza incremental, que suponen un coste computacional muy importante.

El objetivo de este trabajo de tesis doctoral es el desarrollo y aplicación de un modelo computacional de cálculo elastoplástico capaz de simular el comportamiento de un sólido en presencia de grandes deformaciones y considerando el material anisótropo, tanto desde el punto de vista elástico como plástico, y sin dejar de lado como objetivo la eficiencia de cálculo. El modelo computacional que se presenta contiene la formulación matemática adecuada de acuerdo a la mecánica de los medios continuos, y se desarrolla en base a los siguientes ingredientes para cumplir con el objetivo propuesto:

- * La aplicación de una formulación del problema elastoplástico válida para grandes deformaciones y que reproduce el endurecimiento plástico del material,

tanto endurecimiento isótropo como cinemático, a través de una cinemática multiplicativa con la descomposición de Lee como base.

- * El uso de una formulación descrita en grandes deformaciones, a través de una medida de deformaciones finitas logarítmicas o naturales, y el uso de una descripción de tensiones coherente con estas deformaciones que cumplen con los requisitos cinemáticos del problema. Ambas variables de tensión y deformación añaden como principal virtud el uso de los mismos esquemas de cálculo tanto para deformaciones finitas como para deformaciones infinitesimales, ya que describen el problema con la misma sencillez en grandes y en pequeñas deformaciones, en beneficio de la eficiencia computacional.
- * La consideración de ecuaciones constitutivas de acuerdo a la naturaleza anisótropa del material en el comportamiento elástico y plástico, que se ha resuelto a través de funciones hiperelásticas de energía libre de Helmholtz que recogen esta anisotropía, así como una función de plastificación de tipo Hill válida para materiales con anisotropía ortótropa.
- * El uso de un procedimiento de integración de la ley de evolución de flujo plástico descrito con variables internas de naturaleza elástica, en lugar de las clásicas variables internas plásticas, resolviendo el problema no lineal mediante un algoritmo implícito del tipo predictor-corrector, descrito enteramente con variables tensoriales elásticas y simétricas.
- * Por último, el trabajo computacional se ha resuelto mediante la implementación del modelo elastoplástico en un código de cálculo de elementos finitos. En este trabajo de tesis la formulación propuesta se ha implementado primero en el código de cálculo DULCINEA, desarrollado en el grupo de trabajo donde se ha llevado a cabo este trabajo doctoral, y después se ha implementado el código en el programa comercial ADINA en forma de subrutina de usuario, para verificar el funcionamiento generalizado del problema, y para abordar posibles aplicaciones del cálculo elastoplástico con la formulación que se propone, como es el campo de la simulación de procesos industriales de conformado.

Abstract

The elastoplastic computation and simulation of the behaviour of materials have been part of continuum mechanics since its origin as a branch of Science and Engineering, since at the nineteenth century contemporary engineers and scientists devoted their attention to this field.

The first theories about the behaviour and the plastic deformation of the materials were written upon arrival of the Industrial Revolution. One of the pioneers was Henri Tresca, father of the meter as an universal unit of measure, who in 1864 developed the first theory of plastic failure due to the maximum shear stress, a simple and effective theory that remains still in use today in engineering.

Almost at the same time, Augustin Cauchy wrote the stress tensor theory that nowadays is a fundamental basis of continuum mechanics. Since then, the equations of elastic and plastic behaviour have evolved, not only regarding the physical knowledge of the nature of materials, but also regarding the mathematics that gives support to the physics of the elastoplastic problem. If the theory written by Tresca was a simple expression of just a couple of terms, nowadays more refined formulations are employed and the use of tensor variables and functions in partial derivatives have improved the predictions, and have expanded the applications of computational solid mechanics.

Plasticity is by its nature a nonlinear problem due to the material constitutive relations of permanent plastic deformation. In addition, the use of large displacements requires the use of finite strains to formulate the solid behaviour, where the kinematic and compatibility equations are nonlinear, which causes the displacement-strain relationship to be nonlinear. Thus, the solution of a generalized elastoplastic problem incorporates the two sources of nonlinearity, the material one and the geometric one. The resulting equations of the elastoplastic problem are solved with iterative algorithms of incremental nature, which are computationally expensive.

The goal of this doctoral thesis is the development and application of a computational framework capable of simulating the behavior of an elastoplastic solid at large displacements and strains, and considering the anisotropic nature of the material, both in elastic and plastic contributions, also without sacrificing the overall computational efficiency. The computational model presents a mathematical formulation according to continuum mechanics, and later it has been implemented into a code of finite elements to solve the problem. The model contains the following ingredients to meet the proposed goal:

- * The application of an elastoplastic formulation valid for large strains, that reproduces the hardening of the material during plastic regime, both isotropic and kinematic hardening, through the use of a multiplicative kinematic rule based on the Lee decomposition.*

- * *The use of a formulation written for large displacements, through a measure of finite logarithmic strains and the use of a measure of stress consistent with these logarithmic strains, satisfying work conjugacy requirements in the most general cases. Both stress and strains variables have, as main asset, the use of the same computational schemes in both finite and infinitesimal strains, since they describe the problem with the same simplicity for large strains than for small strains, in benefit of computational efficiency.*
- * *The consideration of constitutive equations according to the anisotropic nature of the material in both elastic and plastic behavior, which has been solved through hyperelastic functions in terms of the Helmholtz free energy that describes this anisotropy, as well as a plastification function of Hill type valid for orthotropic materials.*
- * *The use of an integration procedure over the evolution plastic flow rule described with the use of internal variables of full elastic nature, instead of the classical internal plastic variables, used commonly. The nonlinear algorithm is an implicit predictor-corrector scheme described with fully elastic and symmetric tensor variables.*
- * *Finally, the computational work has been resolved by the implementation of the elastoplastic model into a finite element code. In this thesis the proposed formulation has been implemented first in the code DULCINEA, developed in the working group where this doctoral work has performed, and then into the commercial program ADINA, in the form of a user subroutine, to verify the usefulness of the approach to solve complex problems typical in industry. In this respect, several examples of sheet metal forming processes are included in this thesis.*

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

El comportamiento mecánico de muchos materiales metálicos y poliméricos que hoy en día utilizamos tecnológicamente está sujeto a múltiples condiciones de trabajo que causan en el material deformaciones elásticas no permanentes, pero también deformaciones plásticas permanentes. El efecto que estos comportamientos tienen los materiales se puede observar con ángulos de visión diferentes: en su producción, en su manufactura, en su funcionalidad o como consecuencia del uso que hacemos de ellos diariamente. La deformación plástica es un comportamiento bien conocido, y popular incluso, ya que cotidianamente aparece en todos tipo de elementos, objetos y utensilios que nos rodean en cualquier ámbito de la vida diaria. Desde un punto de vista científico y tecnológico, también se puede afirmar que la deformación plástica ha sido caracterizada ampliamente, tanto por su naturaleza física, desde que se empezó a ser objeto de estudio en el siglo XIX, como por sus aplicaciones tecnológicas, cuyos inicios se pierden en la Historia, desde el descubrimiento de los primeros metales prehistóricos, y la observación del fenómeno plástico que con toda certeza realizarían los primeros artesanos de la Metalurgia. Desde entonces el fenómeno plástico ha sido utilizado con provecho para el desarrollo humano en incontables ocasiones.

El interés en el mundo científico radica en el avance y progreso de conocimiento sobre el mundo que nos rodea, tanto en el ámbito de la ciencia y la mecánica de los materiales, como por la importancia que para la industria ha adquirido su conocimiento, por importancia económica y por impacto tecnológico. Todo ello motiva progresar en el entendimiento del fenómeno plástico, para racionalizar su aplicación, para un mayor beneficio o para mejorar la eficiencia de un sinnúmero de procesos.

El presente trabajo en forma de tesis doctoral pretende realizar aportaciones novedosas sobre el cálculo en elastoplasticidad, a través del uso de las grandes deformaciones y de la consideración de materiales cada vez más cercanos a la realidad al aceptar su anisotropía. El trabajo se sitúa sobre la base de conocimientos científicos de la mecánica del medio continuo o la mecánica de materiales, áreas casi miméticas que comparten conocimientos y técnicas de aplicación, donde la teoría de la plasticidad se ha convertido en una de las ramas más exigentes para llevar a cabo una simulación donde interpretar la realidad más allá de la experiencia. Debido a las características no lineales del fenómeno elastoplástico y a la complejidad de las variables que intervienen,

las simulaciones actuales se realizan computacionalmente, ya que una solución analítica es en la mayor parte de los casos insuficiente, cuando no inexistente. El interés en los últimos años por la modelización y el cálculo computacional de materiales ha conseguido desplazar el foco de atención de la comunidad científica y expandiendo las fronteras pasadas, y aunque el problema plástico no ha sido resuelto de forma definitiva, actualmente además comparte atención con otros focos, como la simulación de materiales blandos, la mecánica de fractura o la mecánica del daño.

En otro punto de interés cabe citar el potencial que resulta la aplicación del cálculo plástico industrialmente, donde múltiples procesos fabriles involucran a la deformación plástica, y donde el uso de los ordenadores como herramienta cotidiana es ya ineludible. Procesos industriales que hacen uso del conformado plástico en todas sus variantes como la producción de materiales laminados, extruidos, estampados, forjados, de embutición profunda, etc., todos ellos de impacto económico no desdeñable.

Estas aplicaciones ingenieriles de la plasticidad en los procesos de producción de materiales metálicos, han sido durante siglos una parte fundamental de la tecnología empleada por el hombre para la fabricación de todo tipo de elementos, estructuras y utensilios usados en la vida diaria, han sido foco de atracción industrial. Desde el descubrimiento de los primeros metales como el cobre, el oro o el hierro, o la invención de las primeras aleaciones de bronce o acero, que incluso han dado nombre a algunas edades de la Historia, estos procesos han estado basados en gran medida en el uso de la deformación plástica para conformar el utensilio en su forma final. Antiguamente estos procesos se realizaban manualmente con la experiencia del artesano, que conocía la forma adecuada de manipular el metal. Los maestros forjadores, caldereros y cuchilleros transmitían este conocimiento tecnológico de como deformar los metales hasta conseguir la forma final deseada, y ese conocimiento se transmitía oralmente a través de los aprendices del oficio. Ellos fueron los primeros *científicos y tecnólogos* de la mecánica del medio continuo.

Más tarde, durante la Revolución Industrial, los procedimientos de manipulación se fueron sistematizando y se crearon máquinas capaces de reproducir la deformación de un material de manera repetitiva, con el objetivo de aumentar la producción y al mismo tiempo obtener piezas y utensilios con mayor calidad, y de una forma estándar y regular. Esta revolución se realizó a partir de la experiencia acumulada durante años por aquellos primeros artesanos en el oficio de los metales. Hoy en día, la tecnología alrededor de estos procesos de deformación ya no se aplica solo en metales, si no también en polímeros y composites. Así, desde finales del siglo XIX y principios del siglo XX, se han venido redactando de forma creciente normas de uso que han permitido sistematizar correctamente estos procesos industriales, y de forma paralela los artículos y publicaciones científicas que han dado una interpretación racional a todo este progreso, desde los primeros escritos de Tresca, pasando por los postulados de Prager o Hencky, o la intensa y prolífica actividad del ingeniero y científico español Juan Carlos Simó, y autor de aportaciones trascendentes en la plasticidad computacional moderna.

El ejemplo más importante para comprender correctamente los fenómenos de plasticidad y su aplicación actual lo encontramos en la industria manufacturera, donde en algún momento de la cadena de fabricación de los metales, todos ellos ha sufren algún proceso de deformación plástica, ya sea en frío o en caliente, en etapas de

forja, extrusión o laminación, casi siempre a continuación o en combinación de los procesos de obtención primaria del metal de colada o fundición, y que tienen como objetivo la homogeneización o la reducción de defectos metalúrgicos en la aleación. Al mismo tiempo, hay otros procesos secundarios donde el material ya en su estado final, es sometido a un conformado plástico, como es el caso de los subproductos de chapa metálica porcesada por laminación, plegado y/o doblado, acabado por estampación superficial o embutición. En todos ellos la deformación plástica forma parte fundamental de la producción industrial, y tiene una influencia determinante sobre el material, ya que simultáneamente causan la textura, una preferencia en la distribución, orientación y tamaño del grano metálico, que en muchas ocasiones ya no se elimina y permanece en el material mientras éste conserve su estado sólido. Una consecuencia severa y determinante de la textura sobre el material es la anisotropía, que puede afectar tanto al comportamiento elástico como al plástico, pero muy especialmente a este último.

Siempre existe anisotropía, pero en las hipótesis iniciales sobre cualquier problema, la valoración de su influencia llevaba a ser considerada una propiedad ignorada en el cálculo en aras de una mayor sencillez. Hoy en día esto ya no es así, y todo el conocimiento de la mecánica del sólido crece con la anisotropía del material presente, no ignorada. Los efectos de la anisotropía en la deformación aparecen en metales que previamente eran ya anisótropos (por su naturaleza cristalina y granular), pero donde un efecto de dispersión sobre la interpretación macroscópica de su comportamiento lleva a convertirlos estadísticamente en materiales isótropos o cuasi-isótropos. Hoy en día está aceptado que en la deformación plástica este planteamiento es inapropiado, y cuando hablamos de anisotropía plástica se suele hacer referencia a fenómenos donde la anisotropía es debida a la textura, a la existencia de una orientación preferente del grano metálico, más que a la propia naturaleza intrínsecamente cristalina del metal, que microscópicamente es anisótropa sin discusión.

También se debe mencionar el interés de la ingeniería por la plasticidad por su aplicación en el cálculo de estructuras, ya que una de las limitaciones del uso estructural de los materiales proviene de esta deformación plástica, no siempre deseable, pero que es necesario conocer por el valor de la propia estructura. Sin embargo, aunque los ingenieros siempre tratan de evitar que cualquier estructura llegue a trabajar en régimen plástico de deformación, algunas de las consideraciones que se van a realizar, como incluir la anisotropía del material en el fenómeno plástico, o aceptar la existencia de grandes deformaciones en su comportamiento, deben encontrar cabida si el objetivo del ingeniero es mejorar los resultados y la exactitud de sus cálculos. Gran parte de las estructuras trabajan en el campo de pequeñas deformaciones y tienen muy limitada la capacidad de deformación por necesidades funcionales, y aunque en estos casos la mejora cuantitativa de los resultados no es tan visible, cualitativamente esta mejora es evidente.

Además de los ejemplos tecnológicos mencionados, también la ciencia de los materiales evoluciona hacia la consideración de usar las deformaciones finitas de manera habitual, ya que la calidad de los resultados que se obtienen permite entender comportamientos antes ignorados. Por ejemplo, se puede citar el comportamiento que experimentan muchos polímeros técnicos y biológicos, que cuando experimentan movimiento de deformación en las cadenas moleculares, simultáneamente pueden

experimentar cambios de isotropía/anisotropía. Con la consideración de pequeñas deformaciones, estos cambios no pueden ser ni entendidos ni modelados correctamente. La simulación de materiales blandos, conformados con fases materiales de naturaleza polimérica, es un área hacia donde se dirigen muchos de los recursos científicos actuales, y cuyo progreso depende por completo de estos conocimientos, no usados hasta época reciente.

Por otro lado tenemos que citar la herramienta de cálculo que se va a utilizar para llevar a cabo la computación elastoplástica: la técnica de cálculo de los elementos finitos. Esta técnica nacida en los años 50 se ha desarrollado enormemente desde entonces, y ha permitido resolver complejos problemas matemáticos en muchos ámbitos científicos, y particularmente en el área de la mecánica de los materiales y las estructuras donde vió la luz. En esta línea, como motivación de esta tesis, es necesario poner en valor el desarrollo tecnológico experimentado en los últimos años gracias a la incorporación de la informática como herramienta científica fundamental, que no solo se ha convertido en un protagonista científico, sino de cualquier ámbito industrial y social en la realidad actual.

Los primeros algoritmos de computación elastoplástica fueron creados en los años 60, si bien no es hasta la década de los 80 cuando adquieren popularidad y atención entre la comunidad científica. Este paso trascendente tuvo lugar gracias a la popularización de los ordenadores y los lenguajes informáticos y de cálculo, que empezaron a ser accesibles para toda la sociedad, más allá de la propia comunidad científica. Las técnicas de computación que hoy en día utilizamos empezaron a desarrollarse en los años 40 y 50 gracias a la aparición de aquellos ordenadores de válvulas y transistores, con los que se crearon muchos de los conocimientos elementales que hoy usamos, pero actualmente, donde los ordenadores contienen complejos microchips que pueden llegar a disponer de varios millones de transistores integrados, la capacidad de computación alcanza cifras de cálculo que parecen no tener límite. En esta misma base las técnicas de cálculo numérico y el método de los elementos finitos realizan un uso intensivo de dicha capacidad. Si el llamado *big data* no podrá ser entendible sin estas tecnologías de computación, nuestras herramientas de cálculo estructural tampoco.

Toda la tecnología necesita de un lenguaje adecuado que permita sacar partido de dicho potencial, y con este espíritu los contenidos de esta tesis pretenden aportar en el uso de ese lenguaje, y aunque es un lenguaje de alto nivel el que aquí usamos, es un soporte de comunicación con la máquina de cálculo, el ordenador, que pretende hacerlo de una forma eficiente. Este ánimo inspira el modelo de cálculo elastoplástico que propongo: utilizar los recursos para resolver el problema plástico de la forma más óptima posible, y que sea aplicable a materiales de naturaleza diversa, metálica o polimérica, materiales duros o blandos. Como primer paso de este objetivo ambicioso, planteo el uso de este algoritmo en la simulación del conformado elastoplástico de metales.

1.2. Objetivos

Es objetivo de la tesis demostrar la validez de modelo de elastoplasticidad computacional que se presenta, descrito en deformaciones finitas y considerando la anisotropía elastoplástica del material y el endurecimiento plástico. Es un modelo

de tipo fenomenológico que se desarrolla analizando el comportamiento del material desde un punto de vista macroscópico, y tomando las variables del problema sobre la naturaleza continua del sólido, no teniendo en cuenta por tanto detalles sobre la naturaleza microscópica del material, ni identificando sus constituyentes del mismo como tales, ya que el sólido se considera de homogéneo en la escala de aplicación de este trabajo.

El modelo se plantea como una herramienta para el modelado de sólidos elastoplásticos en aplicaciones y usos donde lo que se pretenda conocer se una respuesta mecánico-estructural del problema que se analiza. Algunos de estos casos pueden ser: la modelización de procesos industriales de conformado, el análisis mecánico de materiales funcionales blandos y de naturaleza biológica, o el estudio de fenómenos de springback en estructuras esbeltas.

En el trabajo se expone un modelo formulado en el continuo elastoplástico y una formulación algorítmica implícita de computación, que se resuelve mediante el método de los elementos finitos y haciendo uso de un mecanismo predictor-corrector. Ambas formulaciones, continua y algorítmica, se describen en deformaciones finitas logarítmicas sobre la base de una descomposición multiplicativa de Lee, consistente con el algoritmo de cálculo, y una formulación energética hiperelástica para interpretar el comportamiento constitutivo del material.

La aportación más original es la aplicación en el modelo elastoplástico de una descripción donde todas las variables internas son elásticas, incluyendo la la regla de flujo plástico resuelta en términos de un corrector tensorial de deformaciones elásticas logarítmicas completamente simétrico [75], y utilizando su tensión conjugada de trabajo o de potencia, la tensión de Kirchhoff generalizada, representada mediante un tensor de tensiones también simétrico. Ambas variables internas tensoriales se describen en la etapa correctora en configuración intermedia, de forma consistente con una descomposición multiplicativa de Lee [81].

Otro aspecto importante y determinante para las virtudes del modelo por su trascendencia en la eficiencia computacional, es que la regla evolutiva de flujo plástico se resuelve incremental mediante una integración explícita del tipo “backward-Euler” de primer orden, y con deformaciones logarítmicas. Esto permite la aplicación de un mecanismo convencional de retorno radial (o *return mapping*) completamente aditivo y de carácter tensorial, que preserva la simplicidad y la estructura de los esquemas computacionales clásicos y originales de la elastoplasticidad infinitesimal en tres dimensiones, resolviendo el denominado problema de descripción de la tasa de deformación [131], de forma sencilla y con un reducido número de incógnitas internas de integración; solo intervienen 7 incógnitas en esta solución numérica, cuando habitualmente son necesarias muchas más, lo cuál está provocado por el uso de un término corrector tensorial no simétrico.

La formulación del problema en deformaciones logarítmicas de naturaleza elástica es la razón que permite la mencionada aditividad, simplificando el algoritmo de forma eficaz, mientras que el algoritmo integrador “backward-Euler” evita el uso de otros métodos de integración, como el denominado “exponential mapping”, que resulta en una implementación más compleja y claramente distinta de lo que se hace en pequeñas deformaciones,

El trabajo que se ha llevado a cabo en esta tesis es la primera aplicación

computacional práctica en elastoplasticidad del concepto de corrector elástico disipativo. Los aspectos formales de este corrector elástico han sido descritos recientemente en la referencia [79], y ya habían sido aplicados con éxito en la computación del problema viscoelástico [76]. Para dotar de mayor versatilidad al modelo teórico de referencia, se han ampliado las capacidades del modelo considerando el endurecimiento del material durante la plastificación, e incorporando un endurecimiento isótropo no lineal, y un endurecimiento cinemático lineal en deformaciones finitas logarítmicas, en ambos casos realizando la extensión a deformaciones finitas de modelos conocidos y de probada eficacia en el campo de las deformaciones infinitesimales.

El endurecimiento cinemático que se incorpora utiliza un planteamiento poco frecuente en modelos de endurecimiento en deformaciones finitas, ya que se utiliza una interpretación reológica-hiperelástica puramente macroscópica, que permite evitar la definición de las clásicas variables internas de tensión *backstress*, evitando la participación de incógnitas adicionales en el problema plástico. Esta idea ya fue propuesta en el campo unidimensional e infinitesimal en la referencia [145], y ahora de forma novedosa se ha llevado a cabo su extensión hacia el espacio de las grandes deformaciones, considerando la naturaleza tensorial de las variables que participan en el modelo continuo a través de una interpretación hiperelástica, eludiendo las variables internas adicionales que clásicamente hay que considerar para identificar el endurecimiento. Aunque estas variables ya no son incógnitas del problema, si es posible su determinación a posteriori, a través de otras variables macroscópicas calculadas previamente, y reintrepretando el modelo reológico inicial.

Volviendo al concepto de comportamiento hiperelástico del material, se ha hecho uso en el cálculo de tensiones de la definición hiperelástica de la energía libre almacenada, con el fin de reproducir el comportamiento constitutivo del material. Se ha realizado la descomposición de la energía libre almacenada, separando las partes hidrostática y desviadora a través de funciones cuadráticas sobre la deformación logarítmica, lo que permite preservar la conservación del volumen durante la deformación plástica sin introducir errores numéricos por incumplimiento de la condición física de isocoricidad. Esto permite utilizar consistentemente un criterio de plastificación insensible a las tensiones hidrostáticas, a través de una función de plastificación de naturaleza desviadora capaz de interpretar la anisotropía plástica del material, para lo que se ha hecho uso de una función de plastificación clásica de tipo Hill. Esta definición hiperelástica sobre la energía almacenada también permite al modelo la capacidad de reproducir de forma fiel un comportamiento elástico anisótropo, una cuestión importante para algunas aleaciones particulares que poseen diferencias sensibles en las constantes de rigidez elástica en diferentes direcciones, como por ejemplo algunas aleaciones ligeras Al-Li de uso aeroespacial, sin embargo este efecto es normalmente ignorado por ser de muy pequeña magnitud en la mayoría de metales, aunque si es una cuestión trascendente en composites, y en materiales blandos y de origen biológico.

Para finalizar la descripción de objetivos, la ecuación de flujo escrita directamente en términos de un corrector elástico logarítmico de deformaciones, completamente simétrico, y por ello compatible con su aplicación sobre una formulación de elementos finitos, pretende ser una generalización del problema de Simó y Miehe [136], que estaba

restringido al uso de materiales isótropos, y que era un resultado del trabajo pionero de Argyris [3], uno de los padres de la mecánica computacional que hoy conocemos. Es obligado citar también el trabajo en solitario de Simó [134], donde planteaba un esquema integrador de la ecuación de flujo plástico que se resolvía en direcciones principales coaxiales de tensión-deformación, y que por ello no era generalizable al uso de materiales anisótropos.

1.3. Estado del arte

El desarrollo de modelos computacionales de elastoplasticidad anisótropa en deformaciones finitas y su implementación en algoritmos de cálculo eficientes es un paso importante en la tecnología industrial de hoy en día, donde se ponen de manifiesto las actuales tendencias de la llamada sociedad del conocimiento, esto se refleja en el creciente número de publicaciones que tratan el conocimiento de la mecánica de los medios continuos, desde un punto de vista científico y tecnológico, recopilando los contenidos de la producción científica actual [11],[73],[114],[5].

Desde un punto de vista más concreto es posible encontrar gran cantidad de trabajos que tratan el problema elastoplástico desde muy diversos puntos de vista, aportando soluciones a los aspectos destacados que afectan al problema elastoplástico en la mecánica de sólidos. Todos los procedimientos que se utilizan están matemáticamente fundamentados, por lo que presentan muchos puntos en común, según los autores, y en especial porque hacen uso de técnicas de cálculo que no son exclusivas del problema elastoplástico, ni aún solo de la mecánica de los sólidos, o de forma más amplia en los medios continuos.

Algunas de las técnicas de cálculo que se emplean son comunes con otras ramas científicas y tecnológicas, donde por ejemplo también encontramos los algoritmos de tipo predictor-corrector, empleados para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias en problemas de valor inicial. Estos algoritmos en el problema elastoplástico se utilizan para lograr la consistencia plástica a través del mecanismo de retorno radial de Wilkins [155], que se aplica cuando en el sólido aparece una tensión superior a la admisible plásticamente. Este algoritmo fue desarrollado en un momento en el que los ordenadores estaban al alcance de muy pocos científicos, y además tenían una capacidad de computación muy limitada, de manera que la concepción teórica era en esencia robusta, así. Los primeros modelos constitutivos propuestos tienen como referencia el uso de algoritmos de elastoplasticidad infinitesimal, y donde otros autores, Sacks [88] y Krieg & Key [117], realizaron aportaciones que permitieron evolucionar el método. Hoy en día estas ideas gozan de gran aceptación por su eficiencia y su aceptable exactitud [73],[135],[87], así pues el modelo de predictor-corrector inicial de Wilkins es una cita obligada, aunque solamente sea por razones históricas.

Los primeros esquemas de cálculo elastoplástico se basaron en una descomposición aditiva de las deformaciones, y la aplicación de relaciones constitutivas hipoeelásticas, derivadas de la elasticidad lineal, para realizar el cálculo de las tensiones [143]. Estas teorías trasladadas a un concepto incremental de la tensión adolecen de falta de objetividad, y llevan a resultados erróneos bajo cargas cíclicas, como la disipación espúrea de energía supuestamente elástica [138],[74]. Algunas de estas propuestas hipoeelásticas se pueden encontrar todavía en códigos comerciales de cálculo [122],[19],

pero ya conocida la debilidad, el atractivo para su utilización es menor.

Los esquemas hipoeásticos clásicos han sido desplazados por modelos hiperelásticos basados en la energía potencial almacenada (la energía libre de Helmholtz), descrita en función de la deformación del material. Estas propuestas se han demostrado eficaces a la hora de eludir los problemas de objetividad [4],[137], pero obligan a un esfuerzo extra para construir una formulación que de respuesta al cálculo de las tensiones. El resultado es un procedimiento que es indiscutiblemente objetivo [51], pero donde la expresión analítica de la energía libre ha de ser descrita en función de la deformación total del material.

Si antes mencionábamos la aditividad en el problema elastoplástico entre la contribución elástica y la plástica, derivada de la aditividad de las deformaciones infinitesimales, al pasar a deformaciones finitas, han sido muchos los autores que han seguido realizando esta hipótesis en su propuestas. La ventaja principal es la simplicidad en la formulación [137], [97],[109], y acepta la independencia entre los procesos elásticos y plásticos, sin interacciones mutuas. Esta ventaja se refleja en una fácil incorporación de la anisotropía elastoplástica al problema [110],[98],[124]. Sin embargo, es claro que ambas deformaciones elástica y plástica ocurren en el material de forma espontánea y simultánea, de manera que alguna interacción si existe, fundamentalmente durante la pérdida de la coaxialidad entre sus direcciones principales y la eliminación de interacciones energéticas mutuas entre el campo elástico y el plástico. Una consecuencia es por ejemplo la dificultad de estudiar correctamente fenómenos tan importantes en el conformado elastoplástico como el springback, un ejemplo inmediato de las interacciones mutuas entre ambas deformaciones.

La alternativa a las deformaciones aditivas es la separación multiplicativa de la deformación, a través del gradiente de deformaciones. Esta propuesta originaria de Lee [82], se motivaba físicamente en una interpretación micromecánica de la plasticidad de cristales, donde el gradiente plástico y el gradiente elástico de deformaciones reproducen de forma fidedigna el comportamiento de la red cristalina elemental. Sin embargo estos modelos se han utilizado con éxito y de forma extensiva en problemas fenomenológicos muy diversos, de plasticidad [36],[123],[98], de daño [94],[93],[126], o de viscosidad [76].

Muchos de los modelos computacionales que emplean descripciones hiperelásticas de la energía libre almacenada en el material, utilizan funciones descritas en términos invariantes del tensor gradiente de deformaciones [137], o sobre el tensor de deformaciones de Green Lagrange, o del tensor diestro de Cauchy [132], [149], calculados con el apoyo de los llamados tensores estructurales [98],[35],[123],[118], otros en cambio proponen expresiones cuadráticas sobre el tensor de deformaciones, que han demostrado una gran efectividad, particularmente en el caso de emplear deformaciones logarítmicas en su descripción [1],[138],[2],[36],[21].

Otro aspecto a considerar es la medida de la deformación empleada en el problema en deformaciones finitas. Por un lado están las deformaciones de Green-Lagrange, usadas habitualmente en el método de los elementos finitos, pero que presentan problemas en la integración de la ley evolutiva del flujo plástico cuando se lleva a cabo la integración. Estas deformaciones no tienen carácter aditivo, y además pueden llevar a perder la conservación de volumen durante el flujo plástico. En otro lado están las deformaciones logarítmicas, como extensión natural de las deformaciones infinitesimales hacia el campo de las grandes deformaciones [75], ya que preservan

la aditividad en direcciones principales, esta propiedad ha hecho que su uso se haya popularizado con el paso de los años [2],[1],[36],[134],[98],[21], ya que además de la corrección en sus predicciones, la métrica del problema se conserva, y los esquemas de cálculo permiten conservar una parte de la simplicidad de las deformaciones infinitesimales, particularmente en las correcciones del retorno radial, permitiendo un marco de programación menos complejo que las deformaciones cuadráticas, aunque su implementación en elementos finitos obliga a un cambio en la medida de deformación y tensión entre el problema de contorno, puramente dicho, y el problema elastoplástico [78], por lo que no siempre gozan de popularidad.

Hay modelos que se han formulado en términos diferentes para la medida de tensión y de deformación [133],[44],[154],[36], [111],[27],[134], o que emplean diferentes variables internas para resolver el cálculo [34], [15], [83],[121]. Al respecto de las tensiones y el uso de las deformaciones logarítmicas, no son numerosos los casos donde las tensiones se resuelven con la medida conjugada de trabajo o potencia de las deformaciones logarítmicas deformaciones [36],[98],[21], debido a las dificultades para interpretar esta medida de tensión y relacionarla con resultados experimentales, siendo más común el uso de la tensión de Piola-Kirchhoff, por estar presente en la formulación de muchos códigos de elementos finitos, o la tradicional tensión de Cauchy. Estas tensiones, sin embargo, presentan la gran ventaja de aprovechar la simplicidad de los esquemas operativos de las deformaciones finitas logarítmicas, preservando al mismo tiempo la no linealidad geométrica propia de las deformaciones finitas.

Actualmente gran parte del esfuerzo se dirige hacia la extensión de estos planteamientos infinitesimales sobre el campo de las deformaciones finitas [129], siempre intentando preservar en lo posible la simplicidad inicial de la formulación infinitesimal, a través de algoritmos que trabajan con el concepto de la proyección más cercana (o *closest point projection*) desde la tensión de prueba o *trial* que aparece en el retorno radial, cuando se ejecuta el control de retorno hacia el dominio elástico del material como una proyección sobre la superficie de plástificación, y donde el retorno radial se reinterpreta ahora a través del uso de una interpretación física consistente con la formulación algorítmica [134], y que dota al problema de cálculo de un soporte teórico adicional.

Respecto de la ecuación de evolución del flujo plástico, su formulación específica y su integración posterior para poder determinar las variables internas del problema, el camino más seguido en los últimos años es una ley de evolución descrita en términos del gradiente de velocidades de deformación plástica, que desde el planteamiento del trabajo de Eterovic y Bathe [36] por un lado, y el de Weber y Anand [154] por otro, es la vía que se ha convertido en habitual para resolver la fase conocida como corrector plástico. Sin embargo, la solución del problema acerca de la ley de evolución, ya fue planteada y denominada como "*rate issue*" por Simó [134], sobre la base de otras variables internas alternativas en la mencionada ley de evolución, como el uso de la tasa correctora de un tensor *rate* elástico [79], o en los procedimientos de integración numérica aplicados sobre dicha ecuación de evolución plástica [20] ofrecen nuevos caminos a las soluciones clásicas. Esta diferente propuesta del problema plástico, se puede ya encontrar en las ideas de los trabajos de precursores como Eckart [34], Besseling [15] y Leonov [83], que sugerían el uso de deformaciones elásticas como variables internas de las que derivar directamente las tensiones que operan en el

problema plástico, y que debían determinar también la disipación interna [121]. Desde un punto de vista puramente numérico, esta es una propiedad ya presente en algunos de los algoritmos clásicos de integración de la ecuación de evolución, donde el retorno disipativo del corrector está gobernado por deformaciones elásticas.

En la referencia [79] se presentan las bases para una formulación de la regla de flujo válida para elastoplasticidad en grandes deformaciones que hace uso del corrector elástico disipativo propuesto por Simó, ahora con la incorporación de la anisotropía plástica del material, y con la aplicación consistente de la descomposición multiplicativa de Lee y de las deformaciones logarítmicas lagrangianas. En esta referencia se hace un uso generalizado de variables internas elásticas como variables básicas en la descripción de la ecuación de flujo, y aunque existen sustanciales diferencias con la formulación de Simó [134], en esencia preserva la simplicidad de los esquemas de la elastoplasticidad infinitesimal, y preserva también la expresión del módulo tangente continuo y del módulo tangente consistente tal y como se contempla en el trabajo de Simó, por lo que se puede considerar como una extensión de sus tesis hacia la elasticidad anisótropa en este aspecto.

Otro punto interesante al respecto de la integración de la ley de evolución del flujo plástico, donde resulta habitual el uso de esquemas de integración de Euler implícitos y explícitos, siendo los primeros los más empleados por las cualidades que convergencia que ofrecen sobre los segundos, aunque también obligan a una mayor atención en el desarrollo de la formulación de cada caso [39],[30],[147],[45]. En el caso de los métodos implícitos o tipo backward Euler, es habitual también el uso de la aproximación exponencial, conocida como “exponential mapping”, [36],[96],[97],[35],[149],[21], este método permite resolver de forma eficaz la integración de la ecuación de flujo preservando el volumen durante la deformación plástica, pero por contra limita su eficacia al uso de deformaciones finitas elásticas moderadas. En el caso de la plasticidad de metales es habitual encontrar deformaciones elásticas mucho menores que las plásticas, y éstas a su vez no suelen entrar en el campo de las deformaciones finitas grandes, aunque es obvio que esta afirmación es cada día menos explícita en el campo actual de la simulación. Aún son pocos los modelos que explican la integración de la ecuación de flujo plástico de forma implícita sin utilizar la mencionada aproximación exponencial [79].

Los modelos computacionales que se han propuesto han seguido caminos diversos para formular y resolver el problema elastoplástico. Si bien al principio adolecían de la restricción de isotropía del material (isotropía en el comportamiento elastoplástico), fueron progresivamente añadiendo la influencia de la anisotropía en la formulación, y así los primeros modelos que lo hicieron eran de naturaleza hipoelástica y estaban basados en relaciones de constantes entre tensión y deformación [55],[91],[68], [140],[138],[74], posteriormente han dado paso a formulaciones más actuales de naturaleza hiperelástica, que si bien al principio utilizaban comúnmente métricas plásticas aditivas [43],[97],[109],[125],[65],[41], ahora también se utilizan descomposiciones multiplicativas sobre el gradiente de deformaciones [81],[90],[138],[137],[95],[35],[24],[48],[93],[123],[103],[149],[21], y han elevado el listón de calidad en los resultados numéricos que se validan.

El punto más debatido en el estado del arte de la plasticidad computacional se presenta al plantear la solución de la ecuación de evolución, el desarrollo y la resolución

de la formulación en deformaciones finitas considerando la anisotropía en el material es un momento álgido, ya que en el problema plástico, al contrario que en el elástico, no hay una solución única ni inmediata. La dificultad que presenta la incorporación de la anisotropía en la evolución del flujo plástico no aparece cuando se opera en deformaciones infinitesimales. Para afrontar este problema, Simó & Miehe plantearon un modelo continuo con una regla de flujo expresada en términos de la derivada de Lie sobre el tensor de deformación elástica de Cauchy-Green por la izquierda [136], y que más tarde fue también resuelto por el propio Simó en términos de la deformación elástica logarítmica [134]. Con ello se abrió un nuevo marco computacional que pretendía preservar la simplicidad de los esquemas clásicos del retorno radial en el marco de las deformaciones infinitesimales, buscando la eficiencia computacional y la facilidad de implementación en los códigos de cálculo. La importancia de estas aportaciones citadas es que se basan en una formulación explícita del problema elastoplástico en términos de un corrector elástico disipativo en deformaciones finitas, como alternativa a los clásicos esquemas de corrector plástico disipativo que ya se habían planteado anteriormente. Sin embargo esta formulación estaba restringida a problemas de isotropía plástica, y la extensión del problema al contexto de la plasticidad anisótropa había quedado aún sin formular, dado que J.C. Simó falleció poco tiempo después, y ningún otro autor ha continuado esta línea de trabajo, por lo que la elastoplasticidad finita se ha seguido resolviendo en términos de un corrector disipativo plástico.

Para desarrollar esta formulación plenamente se hace uso de una serie de herramientas computacionales de la mecánica de los medios continuos, que resultan fundamentales para lograr unos resultados exitosos. Se utilizan los conceptos de variables dependientes con su diferenciación en derivadas parciales y el uso sistemático de tensores de transformación punto a punto o *mapping tensors* [78], que maneja el problema cinemático de forma computacionalmente eficaz, ya que esta formulación realiza una descripción del problema elastoplástico en diferentes configuraciones, tanto en términos de medida tensión como de deformación. Por razones de eficiencia, el planteamiento final se ha resuelto haciendo uso de las deformaciones logarítmicas en configuración lagrangiana, descritas sobre la base de funciones hiperelásticas para la energía libre almacenada, así como de las variables internas asociadas de tensión de Kirchhoff generalizada en descripciones material o intermedia, aprovechando las virtudes de este tipo de medidas de deformación [75].

Si hemos mencionado el dominio que ejerce el corrector plástico disipativo en la resolución numérica del problema elastoplástico, es necesario también hacer referencia al tensor de tensiones no simétrico de Mandel [89], que como conjugado de trabajo del gradiente de velocidades de deformación plástica en configuración intermedia puede estar presente en la formulación de la ecuación de la disipación del flujo plástico, es así que aparece en gran parte de las propuestas computacionales que se han realizado hasta la fecha [86],[35],[29],[123],[49],[53],[149],[21]. Aparte de la dificultad para interpretar físicamente y calcular esta tensión de Mandel, de inspiración más matemática o algorítmica, está el hecho de ser una variable interna asociada de naturaleza tensorial no simétrica con nueve componentes de tensión, lo que eleva el coste computacional al resolver la integración de la ecuación de flujo.

En este trabajo de tesis se utiliza como variable interna asociada un tensor de

tensiones simétrico conjugado de trabajo de la variable tensor corrector elástico, también simétrico, que gobierna el proceso disipativo en la configuración elegida para resolver la ecuación de flujo, la configuración intermedia. Además esta elección es consistente con el principio de máxima disipación, que se cumple de forma rigurosa. En definitiva, la ecuación que representa la regla de flujo que se utiliza en este trabajo se puede considerar en cierto modo como convencional, ya que adopta la misma estructura que las formulaciones en deformaciones infinitesimales donde las variables internas tensoriales son siempre simétricas, y donde se resuelve una regla de flujo de seis componentes como se describe en la referencia [79]. Por otro lado, este uso de variables simétricas constituye también un aspecto innovador, por cuanto no es habitual en las formulaciones actuales en deformaciones finitas, evitando con ello la presencia de la velocidad de rotación plástica (o *spin* plástico) en la formulación, hecho consistente con el uso de un corrector elástico que carece de dicho giro, y ahorrando la necesidad de formular hipótesis adicionales sobre la influencia de este término en la ecuación de la disipación o en el principio de máxima disipación, de forma consistente con la referencia [86].

1.4. Contenidos de la tesis

El contenido de la tesis se ha estructurado en tres partes fundamentales. La primera parte es una introducción sobre los conocimientos generales que en la tesis se van a utilizar en el campo de la computación elastoplástica, y se relatan los aspectos más importantes que servirán para desarrollar la formulación elastoplástica.

En el segundo capítulo se hace un repaso sobre los conceptos de la mecánica de los medios continuos que permiten una interpretación física del problema, y su traslado a una formulación matemática adecuada. También se realizan simultáneamente las consideraciones oportunas que han de permitir llevar a cabo la aplicación de estos conceptos sobre la formulación que se desarrollará posteriormente. Se expondrá la teoría cinemática necesaria para el cálculo en deformaciones finitas y grandes desplazamientos, ya que el problema elastoplástico está formulado completamente en forma tensorial, forma que se deriva de las magnitudes vectoriales fundamentales de fuerza y desplazamiento. Inicialmente se plantearán las bases del problema termodinámico, y posteriormente se expondrá el entorno cinemático en el que se formulan las diferentes medidas de deformación en el campo finito, y se darán las razones que han motivado el uso de deformaciones finitas logarítmicas como base del modelo propuesto. Finalmente se tratará la cuestión de la medida de tensión, en paralelo con la medida de deformación según las ligaduras termodinámicas que existen entre ambas magnitudes.

El tercer capítulo expone las ecuaciones constitutivas y de evolución necesarias para formular el problema elastoplástico, y que han de adaptarse a las medidas de deformación y de tensión elegidas. Se expone también el criterio de plastificación que se ha de formular en forma tensorial para hacerlo compatible con la medida de tensión y su naturaleza física. Finalmente se plantea una introducción breve de la computación algorítmica en plasticidad, basada en el mecanismo predictor-corrector, un binomio que en este trabajo teórico/computacional es de especial relevancia.

El cuarto capítulo expone el modelo teórico en el que se fundamenta la tesis. En este capítulo se expone el esquema de computación compatible y consistente con el modelo

continuo de naturaleza fenomenológica, y que está basado en una interpretación del algoritmo predictor-corrector a través del planteamiento incremental del problema en términos de derivadas parciales. Esta particular visión permite el uso de un innovador término de *corrector elástico* en sustitución del clásico *corrector plástico*, que es el habitual en la mayoría de los programas comerciales actuales, así como en los artículos científicos publicados. Se mostrará como el planteamiento de este corrector elástico es capaz de interpretar con igual eficacia y sencillez el fenómeno elastoplástico continuo tanto en deformaciones infinitesimales como en deformaciones finitas, y como se adapta fácilmente a la anisotropía del material, algo que es posible únicamente de forma muy compleja en otros modelos.

En el quinto capítulo se expone el modelo computacional algorítmico que implementa el modelo teórico anterior, ahora ya integrando el endurecimiento plástico del material, con un endurecimiento combinado isótropo-cinemático, y considerando este material anisótropo tanto elástica como plásticamente. Se utilizará un criterio de plastificación anisótropo clásico en estos materiales, el criterio de Hill, por su versatilidad y facilidad de aplicación. Toda la formulación interna está soportada en deformaciones logarítmicas y sus tensiones conjugadas de trabajo, por lo que no solo las variables internas, sino también las ecuaciones constitutivas están escritas en esta medida de deformación. Las no linealidades que se presentan localmente en este cálculo se resuelven mediante procedimientos iterativos de Newton-Raphson.

El resultado de las variables internas del cálculo elastoplástico que se obtienen en este capítulo (deformaciones, tensiones y módulo tangente), son las que hay que trasladar al un código de elementos finitos propiamente dicho, que será quien de solución numérica al problema global, al problema de contorno, lo que ya tiene en cuenta tanto la naturaleza del material como la cinemática del problema. Los resultados obtenidos de esta parte se explican en el capítulo séptimo y último.

Se ha redactado también un sexto capítulo explicando las directrices necesarias para determinar numéricamente los parámetros de material que exige el modelo de cálculo. Estos parámetros se determinan a partir de ensayos estándar de tracción/compresión llevados a cabo sobre máquina universal de ensayos, siempre de acuerdo a la naturaleza anisótropa elástica y plástica que se pretende cuantificar, lo que exige tomar los parámetros adecuados para reproducir el comportamiento del material.

En el último capítulo se exponen los resultados numéricos obtenidos de la aplicación del modelo de cálculo sobre varios ejemplos, con diferentes materiales y geometrías para demostrar el correcto funcionamiento del modelo, así como la validez de los resultados obtenidos, para lo que se han utilizado referencias las bibliográficas habituales en este campo. En este capítulo, los ensayos virtuales se han llevado a cabo con dos programas de elementos finitos, que han de verificar la formulación desarrollada. También se propondrá la aplicación práctica del modelo elastoplástico sobre un caso ingenieril, se ha elegido un problema común de la industria del conformado, por las exigencias técnicas que involucra su simulación.

El primero de los códigos de elementos finitos utilizado es DULCINEA, programa del grupo de trabajo en el que se desarrolla esta tesis, y que permite aplicar de forma flexible modelos de cálculo propios, con un control preciso por parte del usuario de las operaciones que se llevan a cabo. El segundo programa es ADINA®, un código comercial de cálculo por elementos finitos, que por tanto está disponible para ser

operado por cualquier persona (con un mínimo de conocimientos del área de la mecánica de materiales y la computación), y que dispone de herramientas específicas adicionales con las que afrontar problemas de simulación de mayor envergadura que las capacidades de DULCINEA, aunque por otro lado no permite un control tan detallado del proceso de cálculo, puesto que las herramientas que ofrece están en su mayor parte preconfiguradas para el usuario final. Los resultados que de forma conjunta aportan ambos programas en este capítulo, permiten validar la eficiencia y la eficacia del modelo de cálculo elastoplástico que se propone en este trabajo de tesis.

La tesis finaliza con un capítulo de conclusiones, y con un apartado de trabajos futuros sobre los que seguir evolucionando el contenido de este trabajo.

1.5. Contribuciones originales

Las aportaciones originales de este trabajo de tesis se pueden sintetizar en estos tres puntos fundamentales:

- La primera aportación de esta tesis doctoral es la aplicación de un algoritmo integrador de la ecuación del flujo plástico descrito con variables internas de naturaleza completamente elástica. La formulación elastoplástica clásica se ha resuelto tradicionalmente con variables internas plásticas en la resolución de la ley de evolución del flujo plástico. Si bien estas variables en pequeñas deformaciones han permitido resolver el problema elastoplástico perfectamente, sin embargo en el campo de las grandes deformaciones no es así, y no hay una teoría unificada sobre como plantear el problema elastoplástico en grandes deformaciones, sino que existen muchas propuestas diferentes. Las restricciones que impone el uso de las variables internas plásticas van desde la formulación constitutiva a la dificultad matemática para resolver el sistema de ecuaciones generado, y exigen un coste computacional muy importante.
- La segunda aportación es la aplicación de una formulación en deformaciones finitas que acepta de forma natural la anisotropía del material en su comportamiento elastoplástico completo, tanto en la parte elástica como en la parte plástica. En este sentido la naturaleza anisótropa de la elasticidad de los materiales está resuelta a través del uso de una formulación hiperelástica basada en la energía libre de Helmholtz almacenada en el material. La formulación desarrollada con variables de naturaleza elástica permite describir las ecuaciones constitutivas plásticas con el mismo principio que en el comportamiento elástico, sin más que cumplir con las condiciones que impone la resolución de la ecuación de flujo plástico, que como es habitual en materiales cristalinos y semicristalinos, admite un planteamiento asociativo. Este camino en la formulación elude la aparición del giro o *spin* plástico dentro del algoritmo en la parte simétrica, característico de la plasticidad en grandes deformaciones, y que es una de las grandes dificultades a la hora de formular y resolver el problema elastoplástico convencional. Este giro o *spin* está ausente en la formulación clásica de la plasticidad en pequeñas deformaciones.

- La tercera aportación es la aplicación de la formulación con deformaciones finitas logarítmicas en configuración lagrangiana, que por sus cualidades, especialmente aditividad natural común con las deformaciones infinitesimales, permite una implementación sencilla y eficaz de las ecuaciones implicadas, sin obligar a realizar hipótesis simplificadoras adicionales por las exigencias que matemáticamente imponen el uso de otras medidas de deformaciones finitas, como la aproximación exponencial o la aditividad del flujo plástico de forma incompatible con la descomposición multiplicativa de Lee. Este uso de deformaciones logarítmicas obliga a utilizar como tensión conjugada de trabajo una medida de tensión poco habitual, como es la tensión de Kirchhoff generalizada en configuración lagrangiana, que se aleja de la medida habitual de tensión de Cauchy. El empleo de las deformaciones logarítmicas y sus tensiones conjugadas de trabajo permite desarrollar toda la formulación de forma intuitiva y siguiendo los mismos esquemas computacionales de la formulación clásica en deformaciones infinitesimales, virtud que permite conservar una eficiencia computacional semejante.

Capítulo 2

Conceptos de la mecánica de los medios continuos

2.1. Introducción

Este capítulo introduce los conceptos de mecánica de sólidos que tienen el objetivo de servir como introducción a la formulación del problema elastoplástico en el campo de las grandes deformaciones, que van a ser objeto de uso en esta tesis. Se expondrán esencialmente los conceptos que permiten interpretar la deformación logarítmica o de Hencky, y la formulación adicional que permite trabajar en términos de tensión-deformación, así como construir sus relaciones constitutivas.

El estudio de la deformación de los sólidos fuera del ámbito académico se ha venido realizando tradicionalmente en el campo de las pequeñas deformaciones, las deformaciones infinitesimales, descritas sobre la base de que los desplazamientos experimentados por el sólido en su deformación son inferiores en varios órdenes de magnitud a sus dimensiones, lo que permite ignorar la interacción del desplazamiento con las fuerzas aplicadas. ¿Pero que pasa cuando no es así y el desplazamiento del sólido se acerca al orden de magnitud de sus propias dimensiones? este es el caso de muchos fenómenos de deformación plástica sobre los que es conveniente realizar la pregunta, y lógicamente atender la respuesta.

Basta con pensar en un proceso como la embutición, donde una preforma metálica, habitualmente plana, se somete a un estiramiento con incrementos de longitud del 100 % o del 200 % antes de obtener el recipiente en su forma final, y que tras un pequeño acabado posterior se convierte, por ejemplo, en una lata de refrescos. Este caso permite justificar la necesidad de estudiar el proceso de deformación plástica en el campo de las deformaciones finitas, comúnmente grandes deformaciones, ya que la matemática de las deformaciones infinitesimales o ingenieriles es incapaz de reproducir numéricamente la física de este problema.

2.2. Fundamentos termodinámicos

La plasticidad de los materiales es un fenómeno físico que disipa energía mecánica, de manera que el trabajo invertido en deformación al aplicar una fuerza no se recupera elásticamente cuando cesa la fuerza deformadora, y la parte de energía mecánica

no recuperada elásticamente se gasta termodinámicamente, o queda congelada en el material a través de un cambio o alteración de su estado sólido, en cuyo caso esta energía no se puede volver a utilizar tecnológicamente, y en la práctica se pierde. En el caso de los materiales cristalinos (mayoría entre los de interés ingenieril), en su deformación plástica experimentan desplazamientos atómicos irreversibles a través de deslizamientos entre sus planos cristalinos; este proceso consiste básicamente en romper los enlaces originales entre algunos átomos y volverlos a reconstruir durante el movimiento con otros átomos vecinos, y en esto consiste en esencia el movimiento de las dislocaciones. Este fenómeno es característico de materiales con enlaces primarios de carácter metálico (fundamentalmente), pero también de materiales de carácter iónico y de materiales con enlaces secundarios fuertes.

Esta interpretación de la deformación plástica encierra un significado más profundo, ya que lo que se ha producido es una liberación de entropía, irreversible en términos termodinámicos, por cuanto no es recuperable sin gasto de trabajo adicional, de manera que aunque aparentemente el material pueda estar intacto, incluso porque se haya dado la aniquilación de los defectos cristalinos ocasionados durante el proceso, en ese movimiento plástico se produce fricción y nuevos defectos de red, con apilamiento e interacción de dislocaciones, emisión de vacantes en la red atómica, etc, que son todos fenómenos no isentrópicos que consumen trabajo mecánico, e incluso pueden causar daño en el material. Esto obliga a considerar las leyes fundamentales de la termodinámica, la conservación de la energía y el cambio de la entropía.

2.2.1. Primera ley de la termodinámica

De forma clásica, la primera ley de la termodinámica contempla la conservación de la energía desarrollada en un sistema termodinámico. En términos de energía absoluta se escribiría como

$$dU + dK = dW + dQ \quad (2.1)$$

donde U es la energía interna del sistema, K es la energía cinética, W es el trabajo mecánico producido y Q es el trabajo térmico desarrollado. La participación de la energía cinética en plasticidad no se tiene habitualmente en cuenta por el carácter cuasiestático del proceso y que siempre opera en condiciones de equilibrio de fuerzas, y en este trabajo esta hipótesis se da por supuesta. Además, en mecánica del medio continuo la ec. (2.1) se puede reformular a través del teorema de Gauss de la divergencia en términos de energía específica, por unidad tiempo y masa o volumen (según se requiera)

$$\rho \dot{u} = \mathcal{P} + \rho h - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (2.2)$$

donde $\dot{u}$ representa la energía interna específica por unidad de masa, $\mathcal{P}$ es la potencia mecánica de deformación específica o por unidad de volumen, h es la energía calorífica generada por unidad de masa, $\mathbf{q}$ es el vector de flujo térmico que queda derivado por el operador divergencia, y ρ la densidad del material.

El cálculo de potencia mecánica $\mathcal{P}$ se realiza a través de la energía que se desarrolla con la tensión aplicada y la velocidad de deformación resultante, por tanto en su cálculo se han de utilizar las medidas de tensión y deformación adecuadas que conserven la consistencia en la expresión del trabajo, y por ello diremos que estas variables han de

ser términos conjugados de trabajo/conjugados de potencia; algunas de las expresiones consistentes de potencia mecánica que se pueden usar son

$$\mathcal{P} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.3)$$

$$\equiv \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{A}} = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} \quad (2.4)$$

siendo $\boldsymbol{\sigma}$ y $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ las correspondientes magnitudes de tensión y deformación en deformaciones infinitesimales, donde son medidas únicas. En deformaciones finitas son varias las formas de expresar la correspondiente tensión y deformación, y donde la potencia total de deformación se obtiene por integración en el volumen de la ec. (2.3)

$$\mathcal{P} = \int (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}) dv = \int (\boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}) \frac{1}{J} dv = \int (\mathbf{S} : \dot{\mathbf{A}}) dV = \int (\mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}}) dV \quad (2.5)$$

y así $\boldsymbol{\sigma}$ es la tensión de Cauchy, y $\boldsymbol{\tau}$ la tensión de Kirchhoff que tiene por deformación conjugada de trabajo $\mathbf{d}$ (velocidad de deformación euleriana), $\mathbf{T}$ la tensión generalizada de Kirchhoff que es conjugada de $\dot{\mathbf{E}}$, la velocidad de deformación logarítmica lagrangiana, o que la tensión $\mathbf{S}$ o segundo tensor de tensiones de Piola-Korchhoff es conjugada de $\dot{\mathbf{A}}$, la velocidad de deformación de Green-Lagrange.

2.2.2. Segunda ley de la termodinámica

La segunda ley de la termodinámica dice que en un proceso termodinámico la producción de entropía nunca es negativa ($\rho \gamma_s$), sino que siempre crece, y si disminuye es porque se ha aplicado un trabajo para ello. Si la entropía se puede interpretar como una variable que mide el desorden de la materia en la Naturaleza, esta ley evalúa cualitativamente este desorden a través de la transformación de la energía desde un estado de calidad inicial a otro de calidad diferente cuando se produce una transformación termodinámica, y que la calidad final siempre es inferior a la inicial, representando la emisión de entropía hacia el exterior del sistema ese cambio de calidad energética. Desde un punto de vista energético ese cambio de entropía supone un trabajo que no se va a recuperar.

En el fenómeno de la deformación plástica el trabajo disipado es de naturaleza mecánica y se corresponde con el trabajo de plastificación, y se explica en la liberación espontánea de entropía que se produce durante las transformaciones de estado sólido involucradas en el proceso de deformación plástica, es decir que la generación y movimiento de dislocaciones en la estructura cristalina, desde el punto de vista de la Naturaleza del material, supone que romper enlaces atómicos y reconstruirlos consume trabajo. Solo el trabajo mecánico invertido en deformación elástica podrá ser recuperado al final del proceso.

La ley se puede enunciar en varias formas según su campo de aplicación, en el caso de la mecánica del medio continuo, para el dominio de un cuerpo $\mathcal{B}$, es habitual la forma

$$\rho \Gamma = \rho \dot{s} - \frac{\rho h}{\theta} + \frac{\nabla \cdot \mathbf{q}}{\theta} \geq 0 \quad (2.6)$$

donde Γ es la producción total de entropía específica por unidad de masa y tiempo, y $\dot{s}$ es la entropía específica por unidad de masa y tiempo que se transforma dentro del sistema, y θ la temperatura. El término $\frac{\nabla \cdot \mathbf{q}}{\theta}$ se identifica con el flujo térmico que se produce en la frontera $\partial \mathcal{B}$ (del cuerpo $\mathcal{B}$).

2.2.3. Energía libre de Helmholtz

Es una función de estado que mide la energía interna disponible en un sistema termodinámico cerrado, el sólido elástico de frontera $\partial\mathcal{B}$. Se distingue la energía del sistema en dos partes: la parte de energía interna que es aprovechable para realizar un trabajo, y la parte que espontáneamente se puede invertir en un cambio de entropía

$$\Psi = u - \theta s \quad (2.7)$$

En mecánica de sólidos, el primer término es la energía disponible para obtener un trabajo, es la energía elástica disponible en el sólido, mientras que el segundo término representa la parte de energía interna del sólido que no es reutilizable mecánicamente, puesto que ese trabajo se invierte en la liberación de entropía. La ec (2.7) expresada en términos *rate* o de unidad de tiempo sería

$$\dot{\Psi} = \dot{u} - (\theta \dot{s} + \dot{\theta} s) \quad (2.8)$$

y en caso de no considerarse la participación de cambios de entropía en el problema de deformación, quedaría

$$\dot{\Psi} = \dot{u} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}_e) \quad (2.9)$$

siendo $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}_e)$ la densidad de energía libre de deformación almacenada en el material, en términos específicos de volumen. Es una magnitud que representa en la mecánica del medio continuo el trabajo elástico empleado en deformar de manera no permanente el sólido, con una naturaleza termodinámica reversible [138], [80].

En el caso de la hiperelasticidad, donde la mecánica del medio continuo estudia las deformaciones finitas de naturaleza elástica reversible, las tensiones conjugadas de trabajo de la deformación se obtienen a partir de esta energía hiperelástica Ψ , citada por algunos autores también como energía potencial libre [137]. Si interpretamos Ψ como una función de estado descrita con las deformaciones como variable de estado, se puede construir analítica o numéricamente esta función a través de una variable externa mensurable del problema mecánico, solo se requiere determinar los desplazamientos y de forma consecutiva las deformaciones. Si se puede definir la función energética $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon})$, entonces en base a la naturaleza elástica y no disipativa de las tensiones en el sólido, y teniendo en cuenta la ec. (2.4) se llega a

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{d\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}_e)}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}_e)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_e} : \frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_e}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \bigg|_{\mathcal{D}=0} = \frac{\partial\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}_e)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_e} : \mathbb{I}^S \quad (2.10)$$

donde $\mathbb{I}^S$ es el tensor proyector simétrico de cuarto orden con simetría menores y mayores, obtenido al derivar un tensor simétrico $(\boldsymbol{\varepsilon}_e)$ respecto de otro tensor también simétrico $(\boldsymbol{\varepsilon})$, tensor que reconoce la naturaleza simétrica de las tensiones. Indicialmente

$$(\mathbb{I}^S)_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (2.11)$$

esta simetría es necesaria y consistente con la conservación del momento angular en el equilibrio interno del sólido [47].

La ec. (2.10) permite obtener las tensiones en el problema elástico incluso cuando el material se comporta de forma no lineal, lo que ocurre cuando se trabaja en grandes deformaciones, o sea en deformaciones finitas. Esta no linealidad no se reproduce adecuadamente si se usa la forma clásica ingenieril de obtener las tensiones a través de las ecuaciones y las constantes elásticas características de la elasticidad lineal.

Uno de los primeros en proponer el uso de estas funciones de energía en plasticidad fue Simó en sendas publicaciones coetáneas [138], [132] [137], y desde entonces ha venido siendo habitual el uso de este tipo de formulación para aplicaciones elastoplásticas, ya que su principal cualidad es que permiten preservar la objetividad de las tensiones que intervienen en la integración de la ley de evolución de flujo plástico. Siguiendo esta tendencia, en esta tesis, las tensiones que aparecen se obtienen por este procedimiento a través de Ψ . En el apartado 5 se describe como construir esta función para materiales elastoplásticos convencionales a partir de los ensayos mecánicos de tracción realizados en máquina universal de ensayos, y como el uso de esta función proporciona la tensión de cualquier estado de deformación elástica, siempre que ésta sea conocida. Esta energía se construirá segregando la parte de energía almacenada de carácter hidrostático (o de cambio de volumen), designada como $\mathcal{U}$, y la parte de energía de distorsión (o de cambio de forma), designada como $\mathcal{W}$, y relacionando adecuadamente ambos términos con las deformaciones registradas por el material durante los ensayos.

El ejemplo más sencillo de la función Ψ en un material hiperelástico es el modelo de Saint Venant-Kirchhoff [108] como generalización del problema elástico lineal. En este modelo se utilizan los parámetros clásicos de la elasticidad lineal Λ y μ , las constantes de Lamé, donde las deformaciones infinitesimales $\boldsymbol{\varepsilon}$ se sustituyen por las deformaciones finitas cuadráticas de Green-Lagrange ($\mathbf{A}$). Usando esta descripción cuadrática se obtiene

$$\Psi(\mathbf{A}) = \frac{\Lambda}{2} (\mathbf{A} : \mathbf{I})^2 + \mu \mathbf{A} : \mathbf{A} \quad (2.12)$$

y que conduce a la solución

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = \Lambda \operatorname{tr}(\mathbf{A}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{A} \quad (2.13)$$

donde $\mathbf{S}$ es la tensión segunda de Piola Kirchhoff conjugada de trabajo de la deformación $\mathbf{A}$ -ec. (2.3)-. La ec. (2.13) equivalente a la ya conocida ecuación de Hooke de la elasticidad lineal en el caso isótropo

$$\boldsymbol{\sigma} = \Lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.14)$$

donde la primera constante Λ se interpreta como el módulo hidrostático isótropo, la segunda constante 2μ se interpreta como el módulo desviador isótropo, e $\mathbf{I}$ el tensor identidad de segundo orden. Cabe recalcar, que mientras que las ecuaciones generalizadas de Hooke ec.(2.14) son lineales en términos de tensión-deformación, también lo son en términos de fuerza-desplazamiento, en cambio las ecuaciones de Saint Venant-Kirchhoff solo son lineales en términos de tensión-deformación, y no lineales en términos de fuerza-desplazamiento. Esto no evita que precisamente la ec. (2.13) presente errores importantes respecto de la realidad física cuando la deformación empieza a ser grande, y también en estados de compresión, por lo que su uso es limitado. Estas expresiones válidas para deformaciones finitas pequeñas se conocen también como

ecuaciones hipoelásticas, por hallarse a mitad de camino de la elasticidad lineal y de la hiperelasticidad, y su uso en modelos elastoplásticos ha ido decayendo frente las hiperelásticas por presentar mayores limitaciones [19].

De forma estricta las ecuaciones (2.14) y (2.13) de la hipoelasticidad y la elasticidad lineal se pueden interpretar a través de funciones hiperelásticas cuadráticas, de forma simplificada

$$\Psi(\varepsilon_e) = \frac{1}{2} Y_e (\varepsilon_e)^2 \quad \text{donde} \quad \sigma = \frac{\partial \Psi(\varepsilon_e)}{\partial \varepsilon_e} \equiv Y_e \varepsilon_e \quad (2.15)$$

y generalizando en términos tensoriales

$$\Psi(\varepsilon_e) = \frac{1}{2} (\varepsilon_e : \mathbb{C} : \varepsilon_e) \quad \text{donde} \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi(\varepsilon_e)}{\partial \varepsilon_e} \equiv \mathbb{C} : \varepsilon_e \quad (2.16)$$

donde si Y_e es el módulo de elasticidad ingenieril o de Young, y $\mathbb{C}$ es el tensor constitutivo de rigidez elástica de cuarto orden que contiene los coeficientes característicos del material en deformaciones infinitesimales. Contrariamente a lo que pudiera parecer, la relación entre el módulo de Young Y_e y el tensor constitutivo elástico $\mathbb{C}$ no es inmediata, si se analiza la ec. (2.16), resulta fácil deducir que

$$Y_e = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_e} = \frac{\partial^2 \Psi(\varepsilon_e)}{\partial \varepsilon_e^2} \quad \text{y} \quad \mathbb{C} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \varepsilon_e} = \frac{\partial^2 \Psi(\varepsilon_e)}{\partial \varepsilon_e^2} \quad / \quad C_{ijkl} = \frac{\partial \Psi(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \quad (2.17)$$

con lo que se llega a [138]

$$\mathbb{C} = C_{ijkl} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \quad (2.18)$$

Esta interpretación termodinámica de las constantes elásticas en las ecuaciones (2.17) proporciona un soporte para el cálculo de las tensiones numéricamente más eficaz, ya que resultan expresiones fáciles de manipular incluso sobre los ensayos de tracción, lo que se refuta en que la tensión es una magnitud interna difícil de medir experimentalmente, y que casi nunca se mide de forma directa. Existen muy pocos instrumentos de medida para cuantificar experimentalmente la tensión de forma directa, mientras que el instrumento comúnmente utilizado en laboratorios de ensayo, la célula de carga, realmente mide la deformación con extensómetros adheridos en la superficie de un sólido elástico calibrado, por el que pasa la fuerza de carga. Esta deformación medida electrónicamente, se traduce a fuerza o tensión a través de las funciones matemáticas adecuadas, de carácter hiperelástico o hipoelástico, por tanto con una transducción validada por el fabricante de la célula.

En la mecánica del medio continuo resulta frecuente encontrar funciones hiperelásticas que no son necesariamente de naturaleza cuadrática. Estas funciones se construyen en base a los invariantes del tensor de deformación: el invariante primero o lineal I_1 , el invariante segundo cuadrático I_2 , y el invariante tercero o cúbico I_3 , recordando la descripción infinitesimal

$$I_1 = \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{I} \quad I_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}) \quad I_3 = \det(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2.19)$$

Son funciones descritas con invariantes las de Mooney-Rivlin, Neo Hookean, de Ogden, de Yeop, existe un largo catálogo de funciones elaboradas *ad-hoc* descritas en la literatura científica [108],[47].

Anisotropía elástica Recuperando la ec. (2.17) y con el uso de una función hiperelástica adecuada es posible obtener los coeficientes elásticos del problema elástico en anisotropía, al tiempo se pone de manifiesto la naturaleza tensorial de $\mathbb{C}$, esto permite representar la anisotropía más allá de las ecuaciones tradicionales -ec. (2.14)-.

De acuerdo a la matemática de $\mathbb{C}$ y a la física del problema, se identifican simetrías mayores y menores que reducen los 91 términos del tensor de la ec. (2.18) a no más de 21 términos independientes en el caso de un material completamente anisótropo. Estas simetrías se relacionan con la simetría de los tensores $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$ ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ y $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$) a través de las simetrías menores de $\mathbb{C}$: $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{jilk} = C_{ijlk}$. Por otro lado la energía elástica almacenada Ψ ha de ser siempre positiva e independiente del camino de carga, o del orden de las deformaciones ocasionadas en el sólido, y esto lleva a la existencia de simetrías mayores: $C_{ijkl} = C_{klij}$ [138]. Estas simetrías se comprueban también a través de la expresión indicial

$$\frac{\partial C_{ijkl}}{\partial C_{ij}} = \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial C_{kl}} \quad (2.20)$$

Adicionalmente se pueden aplicar las simetrías características del ordenamiento atómico de cada material, y así tomando un cristal metálico con estructura atómica FCC o BCC, ambos poseen 3 direcciones de simetría ortogonales e iguales entre sí (simetría cúbica), resultando un tensor constitutivo con solo 3 coeficientes elásticos independientes: C_{1111} , C_{1122} , C_{4444} . Utilizando la notación de Voigt sobre el tensor $\mathbb{C}$, por facilidad de interpretación se puede expresar a través de una matriz diagonal de dimensiones 6×6 donde se recogen las mencionadas simetrías, y resultando en la forma

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1122} & C_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{4444} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{4444} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{4444} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

tomando estos coeficientes y se comprueba que

$$C_{1111} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{11} \partial \varepsilon_{11}} \quad C_{1122} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{11} \partial \varepsilon_{22}} \quad C_{4444} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{44} \partial \varepsilon_{44}} \quad (2.22)$$

En el caso de un material isótropo, donde cualquier dirección es igual a las demás, se cumple adicionalmente una relación entre C_{4444} y los otros dos coeficientes, C_{1111} y C_{1122} , según la cuál $C_{4444} = \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122})$. En el lado opuesto está el tensor constitutivo de flexibilidad $\mathbb{S}$, tensor inverso de $\mathbb{C}$ cuando se utiliza una representación matricial de Voigt. En esta expresión inversa es donde se halla la determinación del módulo de Young en mecánica de materiales, pues se obtiene a partir de la inversa de los coeficientes del tensor de flexibilidad $\mathbb{S}$. De esta manera los módulos de Young, de Poisson y de cortadura se determinan según

$$Y_e = \frac{1}{S_{1111}} \quad -\nu_e = \frac{1}{S_{1122}} = \frac{1}{S_{2211}} \quad G = \frac{1}{S_{4444}} \quad (2.23)$$

de donde se comprueba en isotropía la dependencia entre el módulo de cortadura y los módulos de Young Y_e y de Poisson ν_e

$$G = \frac{1}{2} \frac{Y_e}{1 + \nu_e} \quad (2.24)$$

Las constantes de Lamé (ecuaciones (2.14) y (2.13)) resultan así relacionadas con las constantes de la ec. (2.23)

$$\Lambda = \frac{Y_e \nu_e}{(1 + \nu_e)(1 - 2\nu_e)} \quad \mu = G = \frac{1}{2} \frac{Y_e}{1 + \nu_e} \quad (2.25)$$

Por tanto, las constantes elásticas del material pueden obtenerse hiperelásticamente a partir de la energía libre de Helmholtz. Esta interpretación hiperelástica del medio continuo resulta conveniente, por ser más versátil y eficaz en deformaciones finitas que la interpretación a través las ecuaciones constitutivas de constantes elásticas, aunque en el mundo de la ingeniería sea más frecuente el uso de formulaciones más clásicas.

2.2.4. Desigualdad de Clausius-Duhem

Esta ecuación resulta de combinar la primera ley de la termodinámica (ec. (2.1)) con la segunda (ec. (2.6)), considerando además la ec. (2.7), con ello se llega a

$$\mathcal{P} - \rho(\dot{\Psi} + \theta\dot{s} + \dot{\theta}s) - \frac{q}{\theta} \cdot \nabla\theta \geq 0 \quad (2.26)$$

que si se aplica al proceso de deformación plástica y se considera que el proceso tiene lugar isotérmicamente, a temperatura constante ($\dot{\theta} = 0$) y homogénea ($\nabla\theta = 0$), se obtiene la desigualdad de Clausius-Dunhem en la forma

$$\mathcal{P} - \rho(\dot{\Psi} + \theta\dot{s}) \geq 0 \quad (2.27)$$

Si se reinterpreta el término $\rho \dot{\Psi}$ como potencia elástica específica desarrollada dentro del sistema, resulta equivalente a la energía hiperelástica almacenada por unidad de tiempo, designada como $\dot{\Psi}$. La ec. (2.26) representa la reversibilidad del proceso cuando se cumple el equilibrio ($= 0$), y representa la irreversibilidad cuando se cumple la inecuación (≥ 0). Reinterpretando la ec. (2.27) se obtiene la expresión de la disipación

$$\mathcal{D} = \mathcal{P} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad (2.28)$$

que equivale a identificar $\mathcal{D}$ con la producción o liberación espontánea de entropía al realizar un trabajo mecánico de deformación no reversible, a través del término de potencia $\theta\dot{s}$. Este término de disipación siempre es positivo o nulo, por la propia naturaleza de la entropía.

Teniendo en cuenta la ec. (2.3) y que $\Psi = \Psi(\varepsilon_e)$, la ec. (2.28) se puede reescribir de la forma

$$\mathcal{D} = \left(\boldsymbol{\sigma}(\varepsilon) - \frac{\partial \Psi(\varepsilon_e)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \geq 0 \quad (2.29)$$

Si ahora sobre la ec. (2.29) se impone el principio de disipación nula ($\mathcal{D} = 0$), en régimen elástico ($\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e$), se obtiene que durante el proceso mecánico y mientras el sólido desarrolla deformación ($\dot{\epsilon} \neq 0$), necesariamente se ha de cumplir que

$$\sigma(\epsilon) - \frac{\partial \Psi(\epsilon_e)}{\partial \epsilon} = 0 \quad (2.30)$$

resultado que es consistente con ec. (2.10), y que refuta la naturaleza hiperelástica de las tensiones.

La ec. (2.28) también recibe el nombre de principio de máxima disipación plástica, o máximo trabajo plástico [131], ya que el término $\theta \dot{s}$ ha sido eliminado con la hipótesis de potencia disipada en condiciones isotérmicas (ec. (2.27)). En este caso se interpreta $\mathcal{D}$ como una disipación puramente mecánica.

La hipótesis de que el proceso plástico es isotérmico es aceptada comúnmente en materiales metálicos [82], pero en otros materiales esta condición isotérmica no se cumple necesariamente; por ejemplo durante la deformación plástica de polímeros termoplásticos semicristalinos y amorfos *rubber-like*, siempre en función del grado de cristalinidad, se produce también un calentamiento provocado por la fricción de las cadenas moleculares, y es un calentamiento perceptible durante la caracterización de muchos termoplásticos técnicos de uso común [104],[42]. En este caso se puede interpretar también la existencia de una disipación de naturaleza térmica, debido a la emisión de una entropía mensurable a través de la temperatura.

Este trabajo de tesis se centra en la simulación de procesos elastoplásticos isoterms, donde la disipación es puramente mecánica, y no hay acoplamiento entre la deformación plástica y la temperatura. Por tanto, aquellos procesos industriales que hacen uso de la deformación plástica, y que tienen lugar en presencia de la temperatura como variable del problema, como la forja o la laminación en caliente, no se deben simular con este tipo de algoritmos como el que aquí se mostrará, que utilizan el principio de máxima disipación.

2.3. Introducción a la cinemática del medio continuo

La cinemática en la mecánica de los medios continuos trata el comportamiento en deformación de los sólidos en todo el rango de deformaciones, considerando a las deformaciones infinitesimales como un caso particular inicial dentro de las deformaciones finitas, por ello la cinemática de los sólidos precisa de una definición más rigurosa del movimiento de deformación que el caso común de las deformaciones infinitesimales.

Para afrontar el estudio del movimiento completo de deformación es necesario partir del momento inicial en el que un punto comienza a desplazarse durante el movimiento de deformación, y diferenciarlo claramente del momento actual en el que se está observando el sólido. La posición inicial normalmente utiliza coordenadas referidas a una configuración inicial de referencia (o sin deformar), que en este trabajo se definen con el vector 0x , que representa la posición a tiempo inicial o de referencia 0t , esta configuración de referencia también recibe el nombre de material

Figura 2.1: Configuración lagrangiana o material y configuración euleriana o espacial: empuje desde configuración inicial a configuración deformada.

o lagrangiana (*reference*). Tras la deformación, el punto se habrá desplazado a una nueva posición espacial, y las nuevas coordenadas actuales permiten conformar una nueva configuración deformada o actual, con lo que el nuevo vector de posición del punto en el estado deformado puede referir con base a esta nueva referencia, ${}^t x$, que se da en el tiempo t , esta configuración de referencia actualizada recibe el nombre de configuración espacial o euleriana (*current*).

Entre ambas configuraciones, lagrangiana y euleriana, o material y espacial, existe una función de relación cinemática para cada instante de tiempo t

$${}^t x := \phi^*({}^0 x, t) \quad \Leftrightarrow \quad {}^0 x := \phi_*({}^t x, t) \quad (2.31)$$

siendo ϕ esta relación biunívoca que se da punto a punto en el movimiento de deformación, ϕ^* es la relación en coordenadas espaciales a partir de ${}^0 x$, y ϕ_* en la relación en coordenadas materiales, a partir de ${}^t x$. El uso de esta notación puede causar confusión al aplicarlo sobre otras magnitudes, por lo que esta notación es sobre todo una idea que permite representar la relación cinemática punto a punto (figura 2.1). El vector de desplazamiento entre dos estados del punto se define entre ambos vectores de la posición inicial y la posición deformada como ${}^t \mathbf{u} = {}^t \mathbf{x} - {}^0 \mathbf{x}$. Cuando se utiliza como referencia la posición inicial sin deformar ${}^t x({}^0 x)$

$${}^t \mathbf{u}({}^0 x) = {}^t \mathbf{x}({}^0 x) - {}^0 \mathbf{x} \quad (2.32)$$

y cuando se utiliza como referencia la posición deformada o actual ${}^0 x({}^t x)$

$${}^t \mathbf{u}({}^t x) = {}^t \mathbf{x} - {}^0 \mathbf{x}({}^t x) \quad (2.33)$$

El cambio de configuración inicial a configuración final ${}^t x({}^0 x)$ se denomina operación de empuje o *push-forward*, y el cambio en sentido contrario, pasando de configuración

final a configuración inicial ${}^0x(t)$, es la operación denominada de tiro o *pull-back*. Esta terminología de empuje y tiro se emplea en deformaciones finitas para identificar también este tipo de cambios si se consideran configuraciones intermedias durante el proceso de cálculo.

Para poder utilizar de forma más eficiente estas operaciones relacionadas con el desplazamiento se define el gradiente de deformaciones que caracteriza este movimiento ϕ entre tx y 0x

$${}^t_0\mathbf{X} = \frac{\partial {}^tx({}^0x)}{\partial {}^0x} \quad (2.34)$$

este término gradiente se representa como tensor de orden dos, resultado de derivar de un vector respecto de otro, tiene como característica fundamental no ser por defecto simétrico por defecto entre las configuraciones inicial y final. Este tensor también se puede interpretar como una operación de cambio o de *mapeo* punto a punto, ya que transforma en el punto una configuración en otra (figura 2.1)

$$d^t\mathbf{x} = {}^t_0\mathbf{X} d^0\mathbf{x} \quad (2.35)$$

aplicando la operación sobre un vector desplazamiento

$${}^t\mathbf{u}({}^tx) = {}^t_0\mathbf{X} {}^t\mathbf{u}({}^0x) \quad (2.36)$$

y operando sobre la ec. (2.36) se puede obtener una expresión equivalente

$${}^t_0\mathbf{X} = \frac{\partial ({}^0\mathbf{x} + {}^t\mathbf{u}({}^0x))}{\partial {}^0\mathbf{x}} = \mathbf{I} + \frac{\partial {}^t\mathbf{u}({}^0x)}{\partial {}^0\mathbf{x}} = \mathbf{I} + \nabla {}^t\mathbf{u}({}^0x) \quad (2.37)$$

donde aparece el término $\nabla {}^t\mathbf{u}({}^0x)$ en el que tanto las deformaciones innatas del material con movimientos de sólido rígido quedan recogidas, y tienen un reflejo directo sobre $\mathbf{X}$, tensor que por defecto no presenta simetría. Interpretando la ec. (2.37), si se considera el tiempo inicial $t = t_0$, entonces $\mathbf{X} = \mathbf{I}$ y el gradiente de deformaciones es el tensor identidad de segundo orden, lo que implica que el gradiente de desplazamientos es nulo $\nabla {}^t\mathbf{u}({}^0x) = 0$, o que la partícula no se ha movido. Esta expresión de un movimiento rígido sin deformación, lleva a que el tensor de deformaciones $\mathbf{X}$ solo sea capaz identificar movimientos si existe deformación en el material, y por tanto no es sensible a movimientos de sólido rígido de naturaleza traslacional (Mecánica del sólido rígido), aunque si a rotaciones como las presentes durante la deformación de flexión o cortadura.

Si se aplica la acción de $\mathbf{X}$ sobre una magnitud representada por un tensor material ${}^0\mathbf{B}$ de segundo orden de naturaleza covariante [156],[14], la transformación de empuje hacia su descripción espacial ${}^t\mathbf{b}$ es del tipo

$${}^t\mathbf{b} = \mathbf{X}^{-T} {}^0\mathbf{B} \mathbf{X}^{-1} \quad (2.38)$$

y la misma operación de empuje entre tensores de naturaleza contravariante

$${}^t\mathbf{b} = \mathbf{X} {}^0\mathbf{B} \mathbf{X}^T \quad (2.39)$$

ejecutándose las operaciones de tiro, de descripción espacial a material, con la inversión de la fórmula del empuje.

 Figura 2.2: Descomposición polar del gradiente de deformaciones ($X = RU = VR$).

Por otro lado, la descomposición Polar del tensor gradiente de deformaciones $\mathbf{X}$ permite separar la parte de deformación pura de la parte de rotación de sólido rígido. Esta descomposición se puede llevar a cabo por dos caminos

$${}^t_0\mathbf{X} = {}^t_0\mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} {}^t_0\mathbf{R} \quad (2.40)$$

donde la primera parte de la ec. (2.40) contiene al tensor diestro de alargamientos $\mathbf{U}$ (por la derecha) y a la rotación $\mathbf{R}$ por la izquierda, mientras que la segunda parte contiene al tensor siniestro de alargamientos $\mathbf{V}$ (o por la izquierda) y al tensor de rotaciones $\mathbf{R}$ por la derecha. Ambos tensores de alargamiento son en realidad el mismo, pero $\mathbf{U}$ está expresado en configuración de referencia material, mientras que $\mathbf{V}$ está en configuración deformada espacial, siendo el tensor de rotaciones $\mathbf{R}$ el mismo. En la figura 2.2 se expresa gráficamente esta descomposición

Para identificar el comportamiento cinemático de $\mathbf{X}$ de forma más explícita se utiliza el alargamiento unitario instantáneo λ , que en la forma escalar es

$${}^t_0\lambda := \frac{{}^tl}{{}_0l} = \frac{{}_0l + {}^t\Delta l}{{}_0l} \quad (2.41)$$

esta interpretación de la deformación permite una descomposición de alargamientos intermedios de forma multiplicativa, de manera que si se aplica la deformación en intervalos sucesivos con un intermedio τ tal que $0 < \tau < t$, entonces

$${}^t_0\lambda = \frac{{}^tl}{{}_0l} = \frac{{}^tl}{{}_\tau l} \frac{{}_\tau l}{{}_0l} = {}^t_\tau \lambda {}^\tau_0 \lambda \quad (2.42)$$

A partir de aquí, por claridad en la exposición los subíndices y superíndices innecesarios serán obviados para manejar expresiones más limpias. Además este alargamiento unitario escalar, cuando se extiende a una interpretación en tres dimensiones permite conformar los tensores de alargamiento $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ en la forma

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i {}^0\mathbf{n}_i \otimes {}^0\mathbf{n}_i \quad \text{y} \quad \mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i {}^t\mathbf{n}_i \otimes {}^t\mathbf{n}_i \quad (2.43)$$

donde aparecen los alargamientos principales λ_i como autovalores del tensor $\mathbf{U}/\mathbf{V}$, y las direcciones principales de alargamiento como autovectores (${}^0\mathbf{n}_i/{}^t\mathbf{n}_i$), esta expresión

se conoce como representación espectral. Ambos tensores $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ presentan los mismos autovalores pero diferentes autovectores, según la configuración utilizada. Esta diferencia entre direcciones es debida al tensor de rotación $\mathbf{R}$, que actúa por detrás de la deformación en el caso de $\mathbf{U}$, o por delante en el caso de $\mathbf{V}$. Tal y como se identifica en la figura 2.2 la rotación $\mathbf{R}$ es un movimiento de sólido rígido: cuando se empuja el sólido desde configuración inicial material hacia configuración deformada espacial los valores principales de alargamiento son los mismos pero las direcciones principales de cada configuración no coinciden en orientación. Entre ambos tensores $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ se puede identificar la rotación detrás la deformación, o delante, de manera que

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T = \mathbf{X}\mathbf{R}^T \quad \text{y} \quad \mathbf{U} = \mathbf{R}^T\mathbf{V}\mathbf{R} = \mathbf{R}^T\mathbf{X} \quad (2.44)$$

expresión consistente con la ec. (2.40). Ambos tensores proporcionan la deformación del sólido, pero con diferentes expresiones, el tensor de alargamiento $\mathbf{U}$ proporciona el tensor $\mathbf{C}$ o deformaciones de Cauchy por la derecha en descripción material, mientras que $\mathbf{V}$ proporciona el tensor $\mathbf{b}$ o deformaciones de Cauchy por la izquierda en descripción espacial

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{X}^T\mathbf{X} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{X}\mathbf{X}^T \quad (2.45)$$

también es común el uso de estos tensores en su representación espectral, a través de los autovalores y autovectores de alargamiento

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 ({}^0\mathbf{n}_i \otimes {}^0\mathbf{n}_i), \quad \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 ({}^t\mathbf{n}_i \otimes {}^t\mathbf{n}_i) \quad \text{y} \quad \mathbf{X} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i ({}^0\mathbf{n}_i \otimes {}^t\mathbf{n}_i) \quad (2.46)$$

donde el ángulo entre las direcciones principales ${}^0\mathbf{n}_i$ y ${}^t\mathbf{n}_i$ está provocado por la rotación $\mathbf{R}$ de la descomposición polar. Los tensores de Cauchy-Green proporcionan las medidas de deformación cuadrática: en configuración material la deformación de Green-Lagrange ($\mathbf{A}$) a través de $\mathbf{C}$, y en configuración espacial el tensor de Almansi ($\mathbf{a}$) a través de $\mathbf{b}$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad \text{y} \quad \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}) \quad (2.47)$$

donde $\mathbf{I}$ es el tensor identidad de segundo orden.

En mecánica del medio continuo es necesario analizar también el comportamiento de la deformación y el desplazamiento a través de la variable tiempo por consistencia cinemática durante las operaciones matemáticas, ya que se manipulan y resuelven de forma separada variables del problema que suceden de forma simultánea, aunque el problema sea independiente de la magnitud tiempo desde un punto de vista físico, como ocurre en la hiperelasticidad o en la plasticidad. Así se define el gradiente de velocidades como la derivada temporal de $\mathbf{X}$, que en configuración material sin deformar es

$${}_0\nabla ({}^t\mathbf{v}) = \frac{d}{d{}^0\mathbf{x}} ({}^t\mathbf{v}) = \frac{d}{d{}^0\mathbf{x}} \left(\frac{d{}^t\mathbf{x}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d{}^t\mathbf{x}}{d{}^0\mathbf{x}} \right) = \frac{d}{dt} [\mathbf{X}] = \dot{\mathbf{X}} \quad (2.48)$$

mientras que en la configuración espacial deformada se obtiene el gradiente espacial de velocidades de deformación ($\mathbf{l}$)

$${}^t\nabla ({}^t\mathbf{v}) = \frac{d}{d{}^t\mathbf{x}} ({}^t\mathbf{v}) = \frac{\partial ({}^t\mathbf{v})}{\partial {}^0\mathbf{x}} \frac{\partial {}^0\mathbf{x}}{\partial {}^t\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{X}} \mathbf{X}^{-1} = \mathbf{l} \quad (2.49)$$

aplicando la separación polar

$$\dot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{U} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}} \quad (2.50)$$

y por ello el gradiente de velocidades espaciales $\mathbf{l}$ también admite su propia descomposición polar

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{X}}\mathbf{X}^{-1} = (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{U} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}})\mathbf{X}^{-1} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \mathbf{R}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U})\mathbf{R}^T \quad (2.51)$$

resultando $\mathbf{l}$ en forma de un tensor no simétrico, que admite la descomposición en una parte simétrica y otra antisimétrica

$$\mathbf{l} = \text{sym}(\mathbf{l}) + \text{skw}(\mathbf{l}) = \mathbf{d} + \mathbf{w} \quad (2.52)$$

siendo $\mathbf{d} = \dot{\mathbf{a}}$ el tensor gradiente espacial simétrico de deformaciones por unidad de tiempo (*spatial rate*), y $\mathbf{w}$ el tensor de velocidad de giro o de vorticidad (*spin rate*) de naturaleza antisimétrica

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) = \mathbf{R} \text{sym}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U})\mathbf{R}^T \quad (2.53)$$

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{l} - \mathbf{l}^T) = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \mathbf{R} \text{skw}(\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U})\mathbf{R}^T \quad (2.54)$$

expresiones que permiten ver como $\mathbf{d}$ contiene toda la deformación en configuración espacial, mientras que $\mathbf{w}$ no contribuye a la deformación pero es responsable del movimiento de rotación de las direcciones principales.

Por último habría que mencionar también la deformación por cambio de volumen que se produce en los sólidos en grandes deformaciones. El cambio de volumen viene definido diferencialmente punto a punto por el jacobiano del tensor gradiente de deformaciones a través de la expresión

$$d^t V = {}^t_0 J d^0 V \quad (2.55)$$

Asimismo, la descomposición multiplicativa de Flory identifica y separa el gradiente de la deformación de volumen $\mathbf{X}^V$, la parte hidrostática, y el gradiente de la deformación de distorsión o de cambio de forma $\mathbf{X}^D$, la parte isócara o de volumen constante.

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^V \mathbf{X}^D \quad \begin{cases} \mathbf{X}^V = J_0^{1/3} \mathbf{I} & \det(\mathbf{X}^V) = \det(\mathbf{X}) = J \\ \mathbf{X}^D = J^{-1/3} \mathbf{X} & \det(\mathbf{X}^D) = 1 \end{cases} \quad (2.56)$$

En plasticidad esta separación es importante, ya que es común que los materiales cristalinos experimenten una deformación plástica isócara, a volumen constante, basada en el hecho de que el movimiento de dislocaciones en la red cristalina preserva el volumen específico de la red, sin embargo es también cierto que otros tipos de defectos también presentes en la red y que interacción con el movimiento de las dislocaciones no cumplen esta propiedad, como vacantes o átomos intersticiales y sustitucionales, y son por tanto capaces de inducir un movimiento plástico no isocórico, y a veces también anisótropo. Sin embargo, las teorías comunes usadas en plasticidad aceptan que la influencia de estos defectos de la red es de menor alcance que la influencia de las dislocaciones, y por tanto los materiales cristalinos experimentan deformación plástica isócara, a diferencia de otros materiales no cristalinos, como muchos materiales granulares, agregados y porosos, que si pueden presentar esta deformación volumétrica plástica [26].

Figura 2.3: Descomposición multiplicativa de Lee: configuración intermedia entre $\mathbf{X}_p$ y $\mathbf{X}_e$.

2.3.1. Descomposición multiplicativa de Lee

La descomposición de Lee [81] propone que el movimiento continuo de deformaciones finitas se puede descomponer multiplicativamente en deformaciones intermedias a través del gradiente de deformación $\mathbf{X}$. Esta descomposición en el caso de la elastoplasticidad permite identificar la acción de un término gradiente elástico $\mathbf{X}_e$ y de otro término gradiente plástico $\mathbf{X}_p$ o de deformaciones permanentes en la forma

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_e \mathbf{X}_p \quad (2.57)$$

expresión que gráficamente se representa mediante el diagrama de flujo expuesto en la figura 2.3. Esta separación es físicamente abstracta ya que ocurre en un plano matemático, y como tal no se da en el continuo físico del sólido ya que ambos tensores realmente actúan de forma simultánea y no de forma sucesiva como el diagrama de la figura 2.3 sugiere.

La descomposición de Lee es puramente cinemática pero permite enunciar la existencia de una configuración intermedia entre la configuración inicial y la actual/final, que representa la acumulación de efectos permanentes del movimiento, matemáticamente empujados por $\mathbf{X}_p$ desde configuración inicial, y que permite suponer un estado libre de tensiones (dado que la deformación plástica no introduce tensión en el material de forma directa), y que tampoco recoge cambios de volumen [52] si se acepta una plasticidad isócara. Esto supone que la responsabilidad de movimiento entre la configuración intermedia y la actual es una acción de empuje de $\mathbf{X}_e$, y por ello una acumulación de las deformaciones elásticas, y de forma asociada todos los cambios de volumen y la aparición de las tensiones relacionadas con las deformaciones elásticas -ec. (2.10)-. Asimismo se podría decir que $\mathbf{X}_p$ es un registro de la historia de deformación plástica, mientras que $\mathbf{X}_e$ no.

Las características de $\mathbf{X}_p$ se motivan en una interpretación de la naturaleza de la plasticidad de cristales, donde el movimiento de dislocaciones en el cristal causa distorsión en la forma (desde un punto de vista cinemático), sin alterar el volumen original de la red. En la figura 2.4 se muestra un esquema idealizado de este comportamiento superatómico. También desde un punto de vista ideal se acepta que

Figura 2.4: Descomposición de Lee. Cinemática plástica desde una escala atómica (dislocaciones en un volumen representativo de la red cristalina): interpretación física de $\mathbf{X}_p$ y $\mathbf{X}_e$.

este movimiento no ocasiona tensiones adicionales sobre el cristal cuando el movimiento de una dislocación se completa en un volumen representativo elemental, si recorre la red cristalina sin interacciones, y siempre desde un punto de vista microscópico.

Por otro lado, se puede realizar un sencillo ejercicio sobre la ec. (2.57) añadiendo artificialmente un movimiento de sólido rígido de rotación a través de un tensor arbitrario $\mathbf{Q}$ (unitario y ortogonal)

$$\mathbf{X}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{X} = (\mathbf{Q}\mathbf{X}_e) \mathbf{X}_p = \mathbf{X}_e^+ \mathbf{X}_p \quad (2.58)$$

donde se comprueba como el movimiento solo causa efecto sobre $\mathbf{X}_e$, quedando $\mathbf{X}_p$ sin alterar, fuera del grupo $\mathbf{Q}\mathbf{X}_e$, donde $(\circ)^+$ se interpreta como un movimiento de sólido rígido sobre $(\circ)$. Esta cinemática se presenta gráficamente en la figura 2.4. Hay que hacer notar que el tensor $\mathbf{X}$ es un tensor con connotaciones particulares, no siempre reconocido como un tensor al uso común, ya que opera punto a punto entre dos configuraciones diferentes, sin hallarse claramente en una u otra. Esta particularidad hace que se opere bajo una rotación $\mathbf{Q}$ como si fuera un vector ($\mathbf{u}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{u}$), aunque el resto de tensores se operan de la forma convencional ($\mathbf{A}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T$). Por ello se puede afirmar que la configuración intermedia conserva la misma orientación que la inicial, con las mismas direcciones principales, aunque los valores de las magnitudes tensoriales afectadas de esta descomposición si tendrán valores diferentes. Esta observación es importante en elastoplasticidad anisótropa, donde es necesario identificar las direcciones preferentes de material, ya que esto permitirá aceptar la coaxialidad de las configuraciones inicial e intermedia, no así con la final.

Es también habitual expresar $\mathbf{X}_p$ en función de $\mathbf{X}_e$ o viceversa, según interese

$$\mathbf{X}_p = \mathbf{X}_e^{-1} \mathbf{X} \quad \text{o} \quad \mathbf{X}_e := \mathbf{X} \mathbf{X}_p^{-1} \quad (2.59)$$

Trasladando esta descomposición al gradiente espacial de velocidades $\mathbf{l}$, y teniendo en cuenta que $\dot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{X}}_e \mathbf{X}_p + \mathbf{X}_e \dot{\mathbf{X}}_p$ resulta una expresión alternativa a la ec. (2.51)

$$\mathbf{l} := \dot{\mathbf{X}} \mathbf{X}^{-1} = \dot{\mathbf{X}}_e \mathbf{X}_e^{-1} + \mathbf{X}_e \dot{\mathbf{X}}_p \mathbf{X}_p^{-1} \mathbf{X}_e^{-1} = \mathbf{l}_e + \mathbf{X}_e \mathbf{l}_p \mathbf{X}_e^{-1} \quad (2.60)$$

en donde se definen las partes elástica y plástica del gradiente espacial de velocidades

$$\mathbf{l}_e := \dot{\mathbf{X}}_e \mathbf{X}_e^{-1} \quad \text{y} \quad \mathbf{l}_p := \dot{\mathbf{X}}_p \mathbf{X}_p^{-1} \quad (2.61)$$

y donde $\mathbf{l}_e$ comparte configuración con $\mathbf{l}$, ya que ahora también $\mathbf{l}_e$ se sitúa en configuración espacial final, mientras que $\mathbf{l}_p$ opera desde la configuración intermedia, puesto que la operación proyectiva de $\mathbf{X}_e$ en la ec. (2.60) se puede interpretar como una operación de empuje hacia la configuración final deformada. Esta apreciación será muy útil más adelante en el apartado 2.5.3. Además, estos tensores admiten ahora su propia descomposición simétrica-antisimétrica, generando sus tensores de deformación y de vorticidad propios

$$\mathbf{l}_e = \mathbf{d}_e + \mathbf{w}_e = \text{sym}(\mathbf{l}_e) + \text{skw}(\mathbf{l}_e) \quad (2.62)$$

$$\mathbf{l}_p = \mathbf{d}_p + \mathbf{w}_p = \text{sym}(\mathbf{l}_p) + \text{skw}(\mathbf{l}_p) \quad (2.63)$$

por tanto, recuperando la ec. (2.60) se obtiene

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_e + \text{sym}(\mathbf{X}_e \mathbf{l}_p \mathbf{X}_e^{-1}) = \mathbf{d}_e + \text{sym}(\mathbf{X}_e \mathbf{d}_p \mathbf{X}_e^{-1}) + \text{sym}(\mathbf{X}_e \mathbf{w}_p \mathbf{X}_e^{-1}) \quad (2.64)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_e + \text{skw}(\mathbf{X}_e \mathbf{l}_p \mathbf{X}_e^{-1}) = \mathbf{w}_e + \text{skw}(\mathbf{X}_e \mathbf{d}_p \mathbf{X}_e^{-1}) + \text{skw}(\mathbf{X}_e \mathbf{w}_p \mathbf{X}_e^{-1}) \quad (2.65)$$

donde es frecuente en plasticidad aceptar que la vorticidad plástica o giro plástico es nulo $\mathbf{w}_p = 0$, o más correctamente que no participa, aunque existe una cierta controversia respecto de este postulado. En general, considerando la ec. (2.64) es posible interpretar el tensor espacial de velocidad de deformación elástica, $\mathbf{d}_e$, como una función de las variables tensor de velocidad de deformación $\mathbf{d}$ y tensor plástico de velocidad $\mathbf{l}_p$, y se puede comprobar como afecta el giro plástico

$$\mathbf{d}_e(\mathbf{d}, \mathbf{l}_p) = \mathbf{d} - \text{sym}(\mathbf{X}_e \mathbf{l}_p \mathbf{X}_e^{-1}) = \mathbf{d} - \text{sym}(\mathbf{X}_e \mathbf{d}_p \mathbf{X}_e^{-1}) - \text{sym}(\mathbf{X}_e \mathbf{w}_p \mathbf{X}_e^{-1}) \quad (2.66)$$

Esta ec. (2.66) permite comprobar la inexactitud de plantear una ecuación aditiva del tipo $\mathbf{d} = \mathbf{d}_e - \mathbf{d}_p$, aditividad que es frecuentemente empleada en la literatura elastoplástica [110], [109], [98], pero que solo se cumple rigurosamente en el caso de una vorticidad plástica nula $\mathbf{w}_p = 0$. Asimismo esta descomposición se puede trasladar a otras operaciones, p.e. con los tensores de deformaciones de Cauchy, obteniéndose

$$\mathbf{C} = \mathbf{X}^T \mathbf{X} = (\mathbf{X}_e \mathbf{X}_p)^T \mathbf{X}_e \mathbf{X}_p = \mathbf{X}_p^T (\mathbf{X}_e^T \mathbf{X}_e) \mathbf{X}_p = \mathbf{X}_p^T \mathbf{C}_e \mathbf{X}_p \quad (2.67)$$

$$\Rightarrow \mathbf{X}_p^{-T} \mathbf{C} \mathbf{X}_p^{-1} = \mathbf{C}_e \quad (2.68)$$

donde es fácil identificar la presencia de $\mathbf{C}_e = \mathbf{X}_e^T \mathbf{X}_e$, obtenido como un empuje de $\mathbf{C}$ llevado a cabo por $\mathbf{X}_p$ hacia configuración intermedia desde la inicial. De la ec. (2.68) se deduce que los tensores $\mathbf{C}$ y $\mathbf{C}_e$ comparten las mismas direcciones principales pero diferentes autovalores.

2.4. Medida de la deformación

La medida de deformación en el rango de las grandes deformaciones crea la necesidad de identificar que tipo de deformación se va a emplear en el cálculo, ya

que al trabajar en el campo de los grandes desplazamientos la deformación finita deja de ser una función lineal con el desplazamiento, no teniendo configuración única dicha función. Existen diferentes medidas de la deformación finita y cada medida proporciona valores diferentes, y también las operaciones de cálculo que requieren son diferentes.

Para identificar el problema, se puede llevar a cabo un simple ejercicio de cálculo en términos escalares para comprobar la existencia de estas diferentes medidas. Tomando un simple segmento unidimensional deformado uniformemente (igual deformación unitaria en toda su longitud), la medida de deformación ingenieril tradicional ${}^t_0\varepsilon$ se obtiene utilizando como referencia la longitud inicial 0l , por lo tanto ésta es una medida en configuración lagrangiana o material

$${}^t_0\varepsilon = \frac{{}^tl - {}^0l}{{}^0l} = {}^t_0\lambda - 1 \quad \Leftrightarrow \quad {}^t_0\lambda = \frac{{}^tl}{{}^0l} = 1 + {}^t_0\varepsilon \quad (2.69)$$

y donde λ es el alargamiento. Si ahora se cambia la formulación para utilizar como referencia la longitud actual o deformada se obtiene la deformación t_0e en configuración euleriana o espacial

$${}^t_0e = \frac{{}^tl - {}^0l}{{}^tl} = \frac{{}^t_0\lambda - 1}{{}^t_0\lambda} \quad (2.70)$$

y relacionando ambas ecuaciones (2.69) y (2.70) se obtiene

$${}^t_0e = \frac{{}^t_0\varepsilon}{1 + {}^t_0\varepsilon} \quad (2.71)$$

donde es fácil comprobar que la relación es no lineal entre las representaciones espacial (t_0e) y material (${}^t_0\varepsilon$) de la deformación.

Seth propuso una expresión generalizada para estas medidas de deformación, conocidas como deformaciones de Seth-Hill [128], en términos unidimensionales

$${}^t_0E^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{n} \frac{{}^tl^n - {}^0l^n}{{}^0l^n} = \frac{1}{n} ({}^t_0\lambda^n - 1) & \text{si } n \neq 0 \\ \ln(\lambda) & \text{si } n = 0 \end{cases} \quad (2.72)$$

$${}^t_0e^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{n} \frac{{}^tl^n - {}^0l^n}{{}^tl^n} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{{}^t_0\lambda^n} \right) & \text{si } n \neq 0 \\ \ln(\lambda) & \text{si } n = 0 \end{cases} \quad (2.73)$$

donde el exponente n permite particularizar la deformación a la medida que se quiera. Estas medidas, aún siendo numéricamente diferentes, son todas ellas expresión del mismo estado de deformación, determinado únicamente por la longitud final tl o por el alargamiento ${}^t\lambda$. Considerando la ec. (2.72), la medida de deformación infinitesimal puede también expresarse como ${}^t_0\varepsilon = {}^t_0E^{(1)}$, y las deformaciones cuadráticas de Green-Lagrange o de Almansi-Euler resultan de aplicar el exponente $n = 2$, mientras que las deformaciones Logarítmicas de Hencky se corresponden con el valor $n = 0$. Es posible obtener entonces cualquier medida de deformación, y a partir de una de ellas se pueden obtener las demás automáticamente (figura 2.5).

Si estas expresiones se aplican cada una de ellas para el caso de una deformación infinitesimal, se comprueba que todas los resultados convergen al mismo valor en el problema unidimensional. Observando la figura 2.5 se observa como la recta tangente a todas las medidas es única y corresponde a los valores $|{}^t_0\varepsilon| \ll 1$, osea a la medida de las deformaciones ingenieriles.

Figura 2.5: Medidas de deformación de Seth-Hill obtenidas a partir del mismo alargamiento instantáneo ${}^t\lambda$.

Desde un punto de vista numérico este mismo resultado se obtiene si se desarrollan en series de Taylor estas expresiones de las diferentes medidas de deformación, y se desprecian los términos no lineales, usando solo el término de primer orden resulta que este término es precisamente la deformación ingenieril, quedando

$$\begin{aligned} {}^t_0E &= {}^t_0E^{(0)} = \ln {}^t_0\lambda = \ln(1 + {}^t_0\varepsilon) = {}^t_0\varepsilon - \frac{1}{2} {}^t_0\varepsilon^2 + \frac{1}{3} {}^t_0\varepsilon^3 + \dots \\ {}^t_0A &= {}^t_0E^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{{}^t_0l^2 - {}^0l^2}{{}^0l^2} = \frac{1}{2} ({}^t_0\lambda^2 - 1) = {}^t_0\varepsilon + \frac{1}{2} {}^t_0\varepsilon^2 \\ {}^t_0E^{(n)} &= \frac{1}{n} \frac{{}^t_0l^n - {}^0l^n}{{}^0l^n} = \frac{1}{n} ({}^t_0\lambda^n - 1) = {}^t_0\varepsilon + \frac{1}{2} (n-1) {}^t_0\varepsilon^2 + \dots \end{aligned}$$

y en medidas espaciales

$$\begin{aligned} {}^t_0e &\equiv {}^t_0e^{(0)} = \int_0^t \frac{dl}{l} = \ln \frac{{}^t_0l}{{}^0l} = {}^t_0\varepsilon - \frac{1}{2} {}^t_0\varepsilon^2 + \frac{1}{3} {}^t_0\varepsilon^3 + \dots \\ {}^t_0e^{(n)} &= \frac{1}{n} \frac{{}^t_0l^n - {}^0l^n}{{}^0l^n} = \frac{1}{n} (1 - {}^t_0\lambda^{-n}) = {}^t_0\varepsilon - \frac{1}{2} (n+1) {}^t_0\varepsilon^2 + \dots \end{aligned}$$

Se puede afirmar que en el campo de las pequeñas deformaciones infinitesimales o ingenieriles todas las expresiones dan el mismo resultado numérico, y por tanto en este ámbito la medida de deformación es única e independiente de la configuración inicial o final del sólido.

Las ecuaciones (2.72) permiten definir los tensores generalizados de deformación de Seth-Hill, en descripción lagrangiana o material

$$\mathbf{E}^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{n} (\mathbf{U}^n - \mathbf{I}) & \text{si } n \neq 0 \\ \ln(\mathbf{U}) & \text{si } n = 0 \end{cases} \quad (2.74)$$

donde n es un número real y entero, $\mathbf{U}$ es el ya citado tensor de alargamientos. Si se particulariza la ec. (2.74) para la descripción espacial con n positivo y el tensor $\mathbf{V}$

$$\mathbf{e}^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{n} (\mathbf{I} - \mathbf{V}^n) & \text{si } n \neq 0 \\ \ln(\mathbf{V}) & \text{si } n = 0 \end{cases} \quad (2.75)$$

De acuerdo a esto se pueden clasificar las siguientes medidas de deformación tensorial:

- tensor lagrangiano de Green ($\mathbf{A}$) $n = 2$
- tensor lagrangiano de Biot ($\mathbf{B}$) $n = 1$
- tensor logarítmico de Hencky ($\mathbf{E}$) $n = 0$
- tensor euleriano de Swainger ($\mathbf{b}$) $n = -1$
- tensor euleriano de Almansi ($\mathbf{a}$) $n = -2$
- no deformación: $n = \infty$ ($\pm$ según el caso)

Estas medidas de deformación se pueden representar en forma espectral en configuración material

$$\mathbf{E}^{(n)} = \begin{cases} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{n} (\lambda_i^n - 1) {}^0\mathbf{n}_i \otimes {}^0\mathbf{n}_i & \text{si } n \neq 0 \\ \sum_{i=1}^3 \ln(\lambda_i) {}^0\mathbf{n}_i \otimes {}^0\mathbf{n}_i & \text{si } n = 0 \end{cases} \quad (2.76)$$

siendo λ_i los autovalores principales ($i = 1, 2, 3$), y ${}^0\mathbf{n}_i$ los autovectores correspondientes con la operación diádica ${}^0\mathbf{n}_i \otimes {}^0\mathbf{n}_i$ característica de cada autovalor. En configuración espacial esta expresión queda

$$\mathbf{e}^{(n)} = \begin{cases} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{n} (1 - \lambda_i^n) {}^t\mathbf{n}_i \otimes {}^t\mathbf{n}_i & \text{si } n \neq 0 \\ \sum_{i=1}^3 \ln(\lambda_i) {}^t\mathbf{n}_i \otimes {}^t\mathbf{n}_i & \text{si } n = 0 \end{cases} \quad (2.77)$$

En ambas ecuaciones (2.76) y (2.77) el alargamiento del autovalor es independientemente de la configuración elegida, aunque el autovalor final sea particular de cada medida de deformación lagrangiana $\mathbf{E}^{(n)}$ y euleriana $\mathbf{e}^{(n)}$, excepto en el caso $n = 0$. También cambia el autovector de deformaciones, la dirección principal, aspecto fundamental a la hora de considerar la Anisotropía del material, ya que el tensor de deformaciones no tiene la misma representación entre configuraciones lagrangiana y euleriana, lo que afecta al tratamiento de las ecuaciones constitutivas del material.

El paso de una configuración a otra se puede realizar con una operación de tiro o empuje a través del tensor $\mathbf{X}$. Así por ejemplo al usar deformaciones cuadráticas, las deformaciones materiales de Green-Lagrange $\mathbf{E}^{(2)}$ (en adelante $\mathbf{A}$) se operan con una proyección de empuje o *push-forward* si se quiere obtener el equivalente espacial en deformaciones de Almansi $\mathbf{e}^{(2)}$ (en adelante $\mathbf{a}$), o en una operación de tiro o *pull-back* en el caso inverso.

2.4.1. Deformación finita logarítmica

Este trabajo de tesis presenta una formulación basada en las deformaciones logarítmicas o de Hencky [54], pues ofrecen interesantes virtudes que ayudan a simplificar la resolución del problema elastoplástico. Se reserva el uso de la notación $\mathbf{E}$ para identificar esta deformación de ahora en adelante, y se utilizará la descripción en configuración material o lagrangiana.

$$\mathbf{E}^{(0)} = \sum_{i=1}^3 \ln(\lambda_i) {}^0\mathbf{n}_i \otimes {}^0\mathbf{n}_i \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{e}^{(0)} = \sum_{i=1}^3 \ln(\lambda_i) {}^t\mathbf{n}_i \otimes {}^t\mathbf{n}_i \quad (2.78)$$

La principal virtud de la deformación logarítmica es su forma natural de aplicación, pues preservan muchos de los esquemas operativos que son habituales en las deformaciones infinitesimales, por lo que su uso resulta más intuitivo que otras medidas de deformaciones finitas. Algunas de las cualidades más notorias son:

- La medida de deformación logarítmica es aditiva. En pequeñas deformaciones, si se tiene una deformación unitaria descompuesta en deformaciones sucesivas (donde un estado intermedio τ cumple $0 < \tau < t$), la deformación total es aditiva por su carácter lineal o de primer orden, de forma que ${}_0^t\varepsilon = {}_0^\tau\varepsilon + {}_\tau^t\varepsilon$. La operativa de las deformaciones finitas logarítmicas también es de carácter aditivo, pues si se tiene un alargamiento unitario descompuesto en alargamientos sucesivos: ${}_0^t\lambda = {}_\tau^t\lambda {}_0^\tau\lambda$, entonces la descomposición logarítmica es

$${}_0^tE = \ln {}_0^t\lambda = \ln ({}__\tau^t\lambda {}_0^\tau\lambda) = \ln {}_\tau^t\lambda + \ln {}_0^\tau\lambda = {}_\tau^tE + {}_0^\tau E \quad (2.79)$$

Esta aditividad no se puede aplicar en el caso del resto de medidas de deformaciones finitas, por la presencia de términos de orden superior al lineal que obligan a operaciones más complejas para llevar a cabo la superposición de estados sucesivos de deformación. Esta aditividad también se conserva en el caso de la descomposición volumétrica-desviadora. Por esta propiedad, se puede afirmar que el tensor de deformaciones logarítmicas es la extensión natural del tensor de deformaciones infinitesimales hacia las deformaciones finitas.

- Si se adoptan las deformaciones logarítmicas para expresar a través de ellas la deformación infinitesimal, resulta fácil comprobar que

$${}_0^tE := {}_0^tE^{(0)} = \lim_{n \rightarrow 0} {}_0^tE^{(n)} = \ln {}_0^t\lambda = \lim_{n \rightarrow 0} {}_0^t e^{(n)} = {}_0^t e^{(0)} := {}_0^t e \quad (2.80)$$

la igualdad de las deformaciones infinitesimales entre una configuración deformada y otra sin deformar se preserva si se interpretan a través de la medida

logarítmica, sin necesidad de realizar ninguna consideración adicional, y no se comete ningún error cuando se operan la medida de deformación logarítmica en magnitudes que corresponden a las deformaciones infinitesimales.

- Preservan los autovalores independientemente de la descripción, y pasan a ser invariantes de la configuración, y por tanto no cambia la métrica al cambiar la configuración de trabajo, conservando en todo momento la dimensión unitaria de los vectores directores de la base de referencia. Tradicionalmente en grandes deformaciones se ha venido trabajando con el tensor de deformaciones cuadráticas de Green-Lagrange (A) en configuración material, o el tensor de Almansi en configuración espacial (a), que tienen métrica diferente según la descripción de uso (diferentes vectores directores en la base de referencia de los autovalores).
- Se conserva la métrica de la base tensorial entre las configuraciones lagrangiana y euleriana, por lo que sus operaciones de empuje o tiro se realizan a través de una simple de rotación por medio de un tensor ortogonal $\mathbf{R}$, de igual forma que se realizan los cambios de base en la cinemática de pequeñas deformaciones. Esto se interpreta también a través de las direcciones principales que están simplemente rotadas entre sí, por lo que la rotación $\mathbf{R}$ se aplica según la regla convencional

$${}^t\mathbf{n}_i = \mathbf{R}^0 \mathbf{n}_i \Rightarrow \mathbf{e}^{(0)} = \mathbf{R} \mathbf{E}^{(0)} \mathbf{R}^T \quad (2.81)$$

El resto de medidas de deformación la operación se realiza por medio de un empuje o un tiro del tensor $\mathbf{X}$, donde se produce el cambio de métrica en la base de los tensores en diferentes configuraciones. La operación a través de $\mathbf{R}$ es más fácil de interpretar que la proyección de $\mathbf{X}$, ya que es una sencilla operación geométrica de rotación donde $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$.

Como aspecto adverso de las deformaciones logarítmicas cabe mencionar la dificultad de tener que trabajar frecuentemente con la forma espectral de $\mathbf{E}$ a partir de los autovalores del tensor de alargamientos $\mathbf{U}$, lo cuál obliga a realizar operaciones intermedias con autovalores y autovectores que no siempre gozan de popularidad, y que en ocasiones entorpecen la dinámica de cálculo. Un ejemplo es el cambio de descripción que siempre se ha de realizar sobre las direcciones principales y autovalores de $\mathbf{E}$, que por tanto han de ser previamente determinados. En este trabajo estas operaciones se llevan a cabo a través de tensores de mapeo de cuarto orden ($\mathbb{M}_E^A - \mathbb{M}_A^E$) que realizan el cambio geométrico punto a punto [78], por ejemplo para operar con la descripción cuadrática $\mathbf{A}$ entre el algoritmo interno integrador de la ecuación de flujo plástico y el cálculo externo con elementos finitos del problema de contorno.

2.5. Medida de la tensión

La tensión es otra magnitud fundamental de la mecánica del medio continuo que en el campo de las grandes deformaciones presenta diferentes medidas de operación. Matemáticamente es una cuantificación de la fuerza interna del sólido por unidad de área, y la elección de la medida de tensión está relacionada con la elección del área que se va a considerar, según sea el área inicial o el área deformada. En pequeñas

Figura 2.6: Transformación del área de referencia entre configuraciones lagrangiana o material y euleriana o espacial.

deformaciones el área de acción de las tensiones se considera invariante, de modo que el área inicial y final son casi-iguales, por lo que todas las medidas de tensión darán el mismo resultado.

En ingeniería el término de tensión utilizado comúnmente es la tensión de Cauchy en medida infinitesimal, representada por el tensor de segundo orden σ , que expresa la fuerza por unidad de superficie actual o instantánea, y desde un punto de vista estricto es una medida espacial de representación de la tensión en configuración deformada, sin embargo desde un punto de vista práctico, la medida infinitesimal es indiferente de la referencia, ya que no se distinguen el área inicial de la actual, y la tensión de Cauchy es por tanto también ingenieril. Termodinámicamente el tensor σ es tensión conjugada de potencia de la velocidad espacial $\mathbf{d}$, o conjugada de trabajo de la deformación de Almansi $\mathbf{a}$.

El tensor de Cauchy es un tensor simétrico, $\sigma = \sigma^T$, tanto en pequeñas como en grandes deformaciones, condición necesaria para cumplir la conservación del momento angular. Este tensor de tensiones σ se obtiene como transformación lineal el vector interno de tensión $\mathbf{t}$ sobre el área actual o superficie en configuración espacial. Este vector $\mathbf{t}$ es de forma estricta la fuerza interna neta por unidad de área, y a partir del vector director característico de la superficie $\mathbf{n}$, se obtiene

$${}^t\mathbf{t} = \sigma {}^t\mathbf{n} \quad (2.82)$$

esta medida $\mathbf{t}$ de la tensión es poco usada ingenierilmente, pero desde un punto de vista conceptual permite interpretar operaciones fundamentales de la ecánica del sólido.

Otra medida de la tensión utilizada en configuración espacial es el tensor de tensiones de Kirchhoff

$$\tau = J \sigma \quad (2.83)$$

donde el determinante J opera sobre la tensión espacial de Cauchy como una corrección por los cambios de volumen ocasionados en el sólido, y al igual que σ , τ es un tensor de tensiones simétrico. Cuando el sólido se deforma isócoramente, $J = 1$, coinciden numéricamente ambos tensores de Cauchy y de Kirchhoff.

La medida de la tensión en configuración lagrangiana o material ofrece también expresiones alternativas. El primer tensor a considerar es la tensión de Piola-Kirchhoff

$\mathbf{P}$, conocido comúnmente como primer tensor de Piola-Kirchhoff, y se obtiene por proyección hacia la configuración espacial de la fuerza neta aplicada sobre el área deformada (a), es equivalente a la tensión de contacto $\mathbf{t}$ que se halla en configuración espacial, pero referido a un área sin deformar (A) en configuración material (figura 2.6). La transformación matemática de áreas inicial y deformada está gobernada por la ecuación de Nanson

$${}^t\mathbf{n} da = {}^0\mathbf{n} \mathbf{X}^{-1} J dA \quad (2.84)$$

El tensor $\mathbf{P}$ no tiene una interpretación física clara, ya que es un tensor de tensiones no simétrico por defecto, a semejanza del tensor gradiente de deformaciones, $\mathbf{X}$, ambos tensores son conjugados de trabajo mutuos. Se podría decir que $\mathbf{P}$ es un tensor de transformación punto a punto, que proporciona las fuerzas por unidad de área de contacto en configuración material (equivalencia estática de fuerzas), con esta definición se obtiene fácilmente a partir del tensor de Cauchy, $\boldsymbol{\sigma}$ (también relacionado con $\mathbf{t}$)

$${}^0\mathbf{t} = \mathbf{P} {}^0\mathbf{n} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{X}^{-T} = \boldsymbol{\tau} \mathbf{X}^{-T} \quad (2.85)$$

El segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff, $\mathbf{S}$, es una representación de la tensión en configuración material, que se obtiene por tiro contravariante o *pullback* del tensor espacial de Kirchhoff ($\boldsymbol{\tau}$) a través del tensor $\mathbf{X}$, y que a su vez está relacionado con $\mathbf{P}$

$$\mathbf{S} = \mathbf{X}^{-1} \boldsymbol{\tau} \mathbf{X}^{-T} = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{P} \quad (2.86)$$

de igual manera que $\boldsymbol{\tau}$ es un tensor simétrico, $\mathbf{S}$ también lo es.

Estas medidas del tensor de tensiones se relacionan con las medidas de deformaciones a través del trabajo o energía interna de deformación, siendo ambos conjugados de trabajo mutuos. También se puede afirmar que estos tensores conmutan en la misma configuración cuando se utilizan simultáneamente para obtener la potencia elástica de deformación del material. Así se llega a que una misma potencia se puede expresar con diferentes términos conjugados de tensión-deformación rate:

$$\dot{\Psi} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{A}} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{T}^{(0)} : \dot{\mathbf{E}}^{(0)} = \boldsymbol{\Xi} : \mathbf{l}_p \quad (2.87)$$

y entonces $\mathbf{S}$ es conjugado de potencia de $\dot{\mathbf{A}}$, $\boldsymbol{\sigma}$ lo es con $\mathbf{d}$, $\mathbf{P}$ con $\dot{\mathbf{X}}$, y así sucesivamente si se consideran otras medidas. Además, teniendo en cuenta las ecuaciones (2.45) y (2.47) se obtiene

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{d\mathbf{C}} \frac{d\mathbf{C}}{dt} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} \quad (2.88)$$

entonces $\mathbf{S}$ es también conjugado de potencia de $\frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}}$ (y de trabajo con $\frac{1}{2} \mathbf{C}$).

2.5.1. Objetividad

Una propiedad fundamental de las magnitudes empleadas en grandes deformaciones es la objetividad o independencia de la magnitud física respecto del observador. Cuando se aplica a una magnitud tensorial una rotación de sólido rígido, la magnitud debe permanecer constante sin alterar su valor, de manera que solamente afecte la operación de rotación a sus componentes. En configuración lagrangiana todos los tensores son

objetivos por naturaleza, pues la referencia es fija, pero en configuración euleriana no es así pues la referencia se mueve con la deformación. Un tensor objetivo euleriano cualquiera Λ debe cumplir

$$\Lambda^+(t) = \mathbf{Q}(t) \Lambda(t) \mathbf{Q}^T(t) \quad (2.89)$$

pero al cambiar la posición del observador con la rotación en un intervalo de tiempo dt puede pasar

$$\dot{\Lambda}^+(t) = \dot{\mathbf{Q}} \Lambda \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \dot{\Lambda} \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \Lambda \dot{\mathbf{Q}}^T \neq \mathbf{Q} \dot{\Lambda} \mathbf{Q}^T \quad (2.90)$$

donde se ha perdido la objetividad porque el tensor resultante no es una simple rotación de sólido rígido -ec. (2.89)-. Son tensores objetivos $\mathbf{V}$, $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{l}$ o $\mathbf{d}$, y no son tensores objetivos $\mathbf{P}$, $\mathbf{w}$, ó $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$.

En el caso de las tensiones y deformaciones involucradas en la ecuaciones constitutivas del material, la falta de objetividad causa la aparición de deformaciones sin causa de las tensiones cuando se aplica el movimiento de sólido rígido, lo que no es admisible físicamente. Todos los términos que se utilicen en las ecuaciones constitutivas de deformaciones finitas deben cumplir con la condición de objetividad.

La objetividad en plasticidad es fundamental en modelos hipoeelásticos y particularmente cuando se formulan en configuración euleriana. Los modelos hipoeelásticos utilizan tensiones obtenidas a partir de las deformaciones mediante ecuaciones con constantes elásticas, que son susceptibles de no ser objetivas, bien la propia medida de tensión o bien su derivada temporal. Así, cuando la formulación hace uso del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ que si es objetivo, su forma *rate* $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ no lo es, y así ocurriría en un modelo constitutivo de Saint Venant-Kirchhoff del tipo $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} : \mathbf{d}_e$. En el caso de utilizar el tensor $\boldsymbol{\tau}$ ocurriría lo mismo, pues $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J} \boldsymbol{\sigma}$.

Para evitar este conflicto cuando se emplea $\boldsymbol{\sigma}$, se define un tensor objetivo sustituto de $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, que en esencia consiste en llevar $\boldsymbol{\sigma}$ a configuración de referencia mediante una operación de tiro, ahí el tensor es derivado temporalmente, y finalmente se aplica sobre la tasa resultante la operación de empuje en retorno a configuración espacial, formalmente este procedimiento se conoce como derivación de Lie (*Lie*)

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{L}ie(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{X} \frac{d}{dt} (\mathbf{X}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{X}^{-T}) \mathbf{X}^T \quad (2.91)$$

Aplicando este concepto para obtener un *stress rate* objetivo $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^\nabla$, se han propuesto diversas variantes para reescribir la ecuación constitutiva objetivamente. Sin entrar en detalles, por no formar parte del trabajo utilizada en esta tesis, algunos de los operadores objetivos más usados en formulación hipoeelástica son: el corrotacional de Zaremba-Jaumann ($\boldsymbol{\sigma}^{\nabla ZJ} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{w} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{w}^T$), el corrotacional de Green-Naghdi ($\boldsymbol{\sigma}^{\nabla GN} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T$), el convectivo de Truesdell ($\boldsymbol{\sigma}^{\nabla T} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \text{tr}(\mathbf{l}) \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{l} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{l}^T$), o el convectivo de Olroyd ($\boldsymbol{\sigma}^{\nabla O} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{l} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{l}^T$ -ec. (2.91)-)

Los modelos que usan un tensor de tensiones de naturaleza hiperelástica -ec. (2.10)- no adolecen de problemas de objetividad, ya que el tensor de tensiones o su forma de tasa son siempre objetivos al derivarse directamente de la energía hiperelástica que no depende de ninguna referencia, pues la energía es una magnitud escalar invariante del sistema de representación. Al elegir en este trabajo de tesis la medida de tensiones generalizadas de Kirchhoff -ec. (2.92)- derivadas de una función hiperelástica de energía, se cumple automáticamente esta condición.

2.5.2. Tensiones generalizadas de Kirchhoff

El tensor de tensiones generalizadas de Kirchhoff, $\mathbf{T}^{(0)}$, es la medida de tensión conjugada de trabajo de la deformación logarítmica lagrangiana, $\mathbf{E}^{(0)}$. Por su naturaleza material es un tensor objetivo, y también lo es su forma incremental o tasa de tensiones. Esta medida de la tensión se obtiene a partir de la energía libre hiperelástica Ψ descrita en deformaciones logarítmicas lagrangianas $\mathbf{E}^{(0)}$, por lo que esta tensión se sitúa también en configuración material. Teniendo en cuenta la ec. (2.10), la tensión de Kirchhoff generalizada en configuración material se obtiene en la forma

$$\mathbf{T}^{(0)} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{E}_e)}{\partial \mathbf{E}^{(0)}} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{E}_e)}{\partial \mathbf{E}_e^{(0)}} : \frac{\partial \mathbf{E}_e^{(0)}}{\partial \mathbf{E}^{(0)}} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{E}_e)}{\partial \mathbf{E}_e^{(0)}} : \mathbb{I}^S \quad (2.92)$$

donde $\mathbb{I}^S$ es el tensor proyector simétrico de cuarto orden resultante de $\partial \mathbf{E}_e^{(0)} / \partial \mathbf{E}^{(0)}$, al segregar la variable plástica $\mathbf{E}_p$, es por tanto quien que pone de manifiesto la naturaleza simétrica del tensor de tensiones, a partir de su origen respecto de la deformación elástica y la energía libre. Si se expresa $\mathbf{T}^{(0)}$ en forma espectral resulta

$$\mathbf{T}^{(0)} = \sum_{i=1}^3 T_{ii}^{(0)} ({}^0 \mathbf{n}_i \otimes {}^0 \mathbf{n}_i) \quad (2.93)$$

donde $T_{ii}^{(0)}$ es la tensión de Kirchhoff generalizada principal (autovalor), y ${}^0 \mathbf{n}_i$ el vector director de direcciones principales (autovector).

Existen pocas referencias a este término de tensión y se ha hecho poco uso de él en la mecánica de los medios continuos, por la dificultad de interpretarlo y relacionarlo con las medidas experimentales de laboratorio. Ha sido empleado por Eterovic y Bathe [36] para describir el problema elastoplástico isótropo en deformaciones logarítmicas materiales, por Miehe [98] y Caminero [21] en el problema elastoplástico anisótropo, en los tres casos utilizando una definición hiperelástica a partir de la energía libre en deformaciones logarítmicas. Otros autores han descrito su relación con la tensión de Kirchhoff espacial, $\boldsymbol{\tau}$, por ser una descripción de tensión conjugada de trabajo de las deformaciones logarítmicas espaciales $\mathbf{e}^{(0)}$ [2],[17], lo que permite aplicar una operación de tiro desde configuración de referencia a configuración material por semejanza con la operación entre las deformaciones logarítmicas, $\mathbf{e}^{(0)} = \mathbf{R} \mathbf{E}^{(0)} \mathbf{R}^T$, siempre que se conserven las direcciones principales de tensión-deformación, coaxialidad que solo ocurre en isotropía, pero no en anisotropía.

Los tensores de tensiones $\mathbf{T}$ y $\boldsymbol{\tau}$, ambos en diferente descripción, cuando son coaxiales y tienen las mismas direcciones principales (autovectores), y aprovechando las propiedades de las deformaciones logarítmicas en el cambio de configuración, permiten utilizar la tensión rotada de Kirchhoff en configuración material como $\bar{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{R} \boldsymbol{\tau} \mathbf{R}^T$, y entonces se cumple

$$\mathbf{T}^{(0)} \equiv \bar{\boldsymbol{\tau}} \quad (2.94)$$

igualdad que será utilizada más adelante, en el apartado 6.1 para calcular los parámetros característicos de material sobre ensayos experimentales. La ec. (2.94) permite además establecer una relación con la tensión espacial de Cauchy ($\boldsymbol{\sigma}$), y así según [60] es válida la relación

$$\mathbf{T}^{(0)} = I_3^\lambda \mathbf{R} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R}^T \quad (2.95)$$

donde I_3^λ es el invariante tercero o cúbico del tensor de alargamientos $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$ y $\mathbf{R}$ es el tensor ortogonal de rotación. Esta ec. (2.95) solo se cumple cuando el alargamiento es isótropo ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$), sin distorsión angular, donde las direcciones principales no cambian durante la deformación, y por tanto en condiciones de coaxialidad. En el caso de que la coaxialidad no se cumpla, será necesario una operación adicional para completar el cambio de configuración.

Atendiendo a la ec. (2.3) de las potencias/trabajos conjugados, y utilizando las expresiones de la deformación de Seth-Hill - ecuaciones (2.74) y (2.75)-, se podría concluir

$$\mathbf{T}^{(n)} : \dot{\mathbf{E}}^{(n)} = \mathbf{T}^{(m)} : \dot{\mathbf{E}}^{(m)} \quad m \neq n \quad (2.96)$$

siendo m y n los coeficientes de las deformaciones de Seth -ec. (2.72)-, y que en el caso de $n = 0$ y $m \neq 0$ se obtendrían expresiones consistentes con las ecuaciones (2.94) y (2.95).

La validez de las deformaciones logarítmicas y sus tensiones conjugadas de trabajo como medida de tensión ya fue demostrada por Anand [1, 2], que utilizando datos experimentales de diferentes autores para comprobar su operatividad, reprodujo el comportamiento del material mediante funciones hiperelásticas de energía libre. Utilizando datos de diferentes ensayos obtenidos en diferentes materiales y condiciones de carga, simuló su comportamiento en grandes deformaciones con las medidas de deformación y tensión obtenidas de sencillas funciones cuadráticas de energía libre. Estas expresiones demostraron ser eficaces para reproducir las curvas de deformación de los ensayos originales en todos los casos. La tensión descrita en [1, 2] responde en origen a una forma

$$\boldsymbol{\tau}^{(0)} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}^{(0)}} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{e}_e)}{\partial \mathbf{e}_e^{(0)}} : \mathbb{I}^S \quad (2.97)$$

En todos los casos analizados en [1] y [2], los resultados experimentales reproducidos numéricamente a través de las deformaciones logarítmicas y sus tensiones conjugadas mostraron la mejor aproximación con los resultados experimentales de los ensayos originales, comprobándose que en todos los casos el ajuste contenía errores inferiores al 1 % siempre que el alargamiento estuviera dentro del rango $0.7 < \lambda < 1.3$, es decir, siempre que las deformaciones fueran moderadamente grandes, y que además para rangos de deformación superior, aunque el error era mayor al 1 %, los resultados eran los que menos error presetaban respecto a otras relaciones hiperelásticas de los pares conjugados de deformación-tensión. También comprobó que incluso otros modelos hiperelásticos convencionales proporcionaban resultados con peores ajustes a los datos experimentales. En el caso de aplicar alargamientos de mayor magnitud, Anand concluyó que sólo habría sido necesario utilizar expresiones más complejas en $\Psi(\mathbf{E}^{(0)})$ para mejorar el ajuste.

Anand utilizó deformaciones y tensiones en descripción espacial, cuando el modelo que aquí se propone utiliza una descripción material, pero en ambos casos el nexo común está en las virtudes de las deformaciones logarítmicas, como la naturaleza aditiva de ambas descripciones o la facilidad de cambiar de una a la otra. Si se utilizara una descripción de la energía hiperelástica a través de una forma cuadrática, y aplicando un modelo material convencional de Saint Venant-Kirchhoff en deformaciones

logarítmicas se llegaría a la expresión

$$\Psi(\mathbf{E}) = \frac{\Lambda}{2} (\mathbf{E} : \mathbf{I})^2 + \mu (\mathbf{E} : \mathbf{E}) \quad (2.98)$$

$$= \frac{\Lambda}{2} (E_I + E_{II} + E_{III})^2 + \mu (E_I^2 + E_{II}^2 + E_{III}^2) \quad (2.99)$$

donde E_I , E_{II} y E_{III} son los autovalores principales de deformación logarítmica, y μ y Λ las constantes de Lamé del material, y se obtiene

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = \Lambda (\mathbf{E} : \mathbf{I}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} \quad (2.100)$$

donde la ec. (2.100) en deformaciones finitas logarítmicas reproduce correctamente un comportamiento fuerza-desplazamiento no lineal en un rango de deformaciones importante [1],[2].

Aplicando estas conclusiones a las deformaciones plásticas de metales y de muchos polímeros, el rango de deformaciones plásticas admisibles suele ser inferior al límite observado por Anand, ya que valores de alargamiento de 1.3 comportan en la mayoría de las ocasiones niveles de deformación superiores a los máximos de fallo del material, cuando sucede el colapso plástico. Se puede aceptar por tanto, que esta forma de tensión obtenida de la energía hiperelástica "logarítmica" es suficientemente correcta para ser usada en la elastoplasticidad convencional en grandes deformaciones. En una licencia para reproducir las palabras de Anand: "... should be of wide applicability not only for the analysis of problems involving second-order elastic effects in solid state physics, but also for the analysis of general engineering problems involving moderately large strains".

2.5.3. Tensiones en configuración intermedia: tensor de Mandel y tensor $\mathbf{T}$

El tensor de Mandel es una medida objetiva de tensión equivalente [89] que se obtiene por interpretación termodinámica de la potencia mecánica descrita en configuración intermedia entre la tensión de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$ y el gradiente espacial de velocidades $\mathbf{l}$ -aditivo según la ec. (2.60)-, resultando el término de potencia disipada

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\tau} \mathbf{l} = \boldsymbol{\tau} \mathbf{l}_e + \boldsymbol{\tau} (\mathbf{X}_e \mathbf{l}_p \mathbf{X}_e^{-1}) \equiv \boldsymbol{\tau} \mathbf{l}_e + \boldsymbol{\Xi}^{|e} \mathbf{l}_p \quad (2.101)$$

donde aparece $\boldsymbol{\Xi}$ como el tensor de tensiones de Mandel que disipa potencia plásticamente con $\mathbf{l}_p$. Este tensor es un resultado puramente matemático que se puede interpretar físicamente como una tensión.

Aunque la descomposición multiplicativa no se ha aplicado en el caso mostrado en la ec. 2.101, en semejanza a esta descomposición en la ec. (2.102), se puede interpretar que el tensor $\mathbf{l}_p$ del segundo sumando se halla en configuración intermedia, al ser operado en tiro por $\mathbf{X}_e$ desde la configuración espacial de origen, y por ello se interpreta que el tensor $\boldsymbol{\Xi}$ también ha de estar en configuración intermedia como conjugado de trabajo, por tanto como variable interna asociada, por lo que la operación se puede reescribir en la forma

$$\boldsymbol{\Xi}^{|e} := \mathbf{X}_e^T \boldsymbol{\tau}^{|e} \mathbf{X}_e^{-T} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}^{|e} : (\mathbf{X}_e \odot \mathbf{X}_e^{-T} + \mathbf{X}_e^{-T} \boxdot \mathbf{X}_e) = -\boldsymbol{\tau}^{|e} : \mathbb{M}_{\mathbf{l}_p}^{d_e} \Big|_{d=0} \quad (2.102)$$

donde $\mathbb{M}_{l_p}^{de}$ es un tensor cambio de configuración de cuarto orden o *mapping tensor* [78] que transforma linealmente $\boldsymbol{\tau}^{le}$ (tensión espacial de Kirchhoff conjugada de trabajo de la deformación elástica) hacia configuración intermedia desde la configuración espacial de origen, y equivalente al tiro que ejerce $\mathbf{X}_e$ en las ecuaciones (2.101) y (2.102). El superíndice $(\circ)^{le}$ se interpreta aquí como un indicador de la configuración intermedia en la que el tensor halla, como más adelante se explicará.

La razón fundamental de citar la existencia de este tensor Ξ es que al hallarse en configuración intermedia no está afectado por el giro plástico $\mathbf{w}_p$, y por tanto preserva la orientación de las direcciones principales de tensiones de la configuración inicial (se dice que es coaxial con $\mathbf{S}$ por compartir las direcciones principales), por lo que en plasticidad esta cualidad permite operar el problema elastoplástico ignorando $\mathbf{w}_p$ cuando la anisotropía del material está presente [132]. Esta hipótesis no es admisible si se trabaja en configuración espacial de forma convencional, ya que las direcciones principales están afectadas por el giro plástico, y el problema de la anisotropía no se puede resolver directamente en las ecuaciones constitutivas de tensión deformación, ya que las direcciones principales de deformación y de tensión no van a coincidir.

La desventaja que comporta este tensor Ξ utilizado comúnmente en plasticidad, es que no es simétrico por defecto y por tanto contiene nueve términos independientes (a semejanza de $\mathbf{l}_p$), lo que causa la aparición un mayor número de incógnitas al resolver las ecuaciones de evolución plástica de cada punto de integración [149].

El interés de este trabajo sobre este tensor Ξ es que también aquí se va a resolver la ecuación de evolución plástica en la configuración intermedia, dando por válida la hipótesis inicial de la ec. (2.102), donde que se preservan las direcciones principales del tensor de tensiones $\mathbf{T}$ (tensiones de Kirchhoff generalizadas en configuración material), de igual manera que ocurre en Ξ . La diferencia fundamental radica en que el término de tensiones $\mathbf{T}^{le}$ que aparece en lugar de Ξ^{le} , es un tensor simétrico, con menos componentes a manipular por lo que la resolución del problema elastoplástico va resultar computacionalmente más eficiente, y además va a ser posible dotar a este tensor $\mathbf{T}^{le}$ de un significado físico más concreto que el caso de Ξ^{le} , como se verá más adelante en el apartado 5.1.1.

Este aspecto es fundamental dentro de la formulación se va a proponer, ya que evita la presencia del spin plástico $\mathbf{w}_p$ en el cálculo, y simplifica en gran medida el procedimiento, pues ésta es una de las problemáticas más restrictivas que en deformaciones finitas aparecen cuando se utiliza la anisotropía del material en el cálculo elastoplástico.

Capítulo 3

Introducción a la plasticidad computacional

En este capítulo se exponen e interpretan físicamente las ecuaciones presentes en el problema elastoplástico, y en particular las ecuaciones de evolución del flujo plástico necesarias para llevar a cabo la simulación numérica. En primer lugar se motiva el uso de un el modelo *fenomenológico o macroscópico* con el que resolver el comportamiento plástico del material.

En una segunda parte se analizan las variables de estado del problema elastoplástico que desde el punto de vista fenomenológico intervienen en el cálculo. Después se expone la naturaleza anisótropa de la plasticidad, que va a ser considerada parte fundamental en el modelo computacional, y posteriormente se exponen los criterios a tener en cuenta en la función de plastificación, considerando las restricciones que impone la anisotropía plástica.

Ya en los apartados finales se expondrá la ley de evolución del flujo plástico, así como las herramientas necesarios para afrontar su resolución.

3.1. Modelos fenomenológicos y micromecánicos

El estudio de los modelos fenomenológicos o macromecánicos frente a los modelos micromecánicos suscita interés desde la perspectiva de los resultados que ofrecen uno y otro, y también acerca de la naturaleza de las ecuaciones que cada tipo de enfoque requiere. Para ambos enfoques se encuentran razones a favor y en contra que justifican su aplicación computacional en el cálculo elastoplástico y en el comportamiento de los sólidos en general, a veces mostrando una competencia entre ambos, y en otras ocasiones ofreciendo una interesante complementariedad.

El primer debate entre ambos modelos se centra en la escala que sirve de referencia para determinar el alcance de la física que describen, que es diferente en la mayor parte de las ocasiones. Para ilustrar este aspecto podemos tomar como referencia la figura 3.1 donde se muestra la escala dimensional física del material, desde el tamaño atómico hasta las dimensiones comunes que manipulamos cotidianamente, un espectro dimensional completo en el que la plasticidad está presente de una forma u otra. Quedan fuera de la figura aquellas escalas que por sus dimensiones superan el orden de este trabajo, como puede ser el caso de la plasticidad en la naturaleza geológica, que por las

Figura 3.1: Jerarquía dimensional en la observación en un sólido deformable elastoplásticamente: de la nanoescala a la macroescala.

dimensiones de varios centenares de metros o de kilómetros, y por la magnitud de las fuerzas implicadas y los tiempos de actuación, exceden los objetivos del cálculo plástico que la ciencia de los materiales trata, y que corresponden ya a las ciencias geológicas, aunque la mecánica geológica es matemáticamente semejante al resto de la mecánica del medio continuo.

En la figura 3.1, extraída de [6], se muestra un recorrido ideográfico sobre las dimensiones observables en el material, de izquierda a derecha, en el primer cuadro es posible detectar por microscopía electrónica de transmisión (*TEM*) la presencia de la plasticidad en el ordenamiento atómico elemental, cuando la generación y movimiento de defectos en la red cristalina, como las dislocaciones, tienen lugar entre los átomos de las celdas cristalinas, y donde la escala dimensional es del orden de los nanómetros (10^{-9} m).

Aumentando la escala de observación, la distancia permite identificar el agrupamiento de dislocaciones en nubes que son capaces de mostrar interacciones mutuas o con otros defectos de la red, como vacantes o átomos intersticiales, y donde las dimensiones se sitúan ahora en el tamaño de los cristales que conforman la materia, siendo posible identificar algunas fases sólidas presentes en el material, en forma de partículas precipitadas, impurezas, inclusiones, bordes de grano, maclas, e incluso diferenciar el tamaño y forma de los cristales que conforman el grano, es decir, identificar los constituyentes propios del material en su escala microscópica (10^{-6} m). En este nivel todavía es necesario identificar por microscopía electrónica imágenes acerca de la interacción de las nubes o redes de dislocaciones con estos constituyentes, aunque ya en la frontera de la microscopía de barrido *SEM* y la de transmisión.

En la frontera de la escala microscópica, ya es posible la observación óptica, pero no es posible identificar de forma directa las interacciones en la red cristalina, y lo que se aprecia es el rastro del movimiento plástico localizado a través de las fases sólidas, observable sobre los granos como entidad elemental, que son discernibles si no se supera la escala de los $10^{-5} - 10^{-4} \text{ m}$. A partir de esta dimensión el problema se sitúa claramente en la macroescala, donde ninguno o casi ningún constituyente de la materia es discernible del resto de forma directa sin usar dispositivos de realce óptico, por tanto el material pasa a ser un sólido homogéneo, o si se prefiere homogeneizado,

y su deformación plástica también.

La frontera entre la interpretación de la plasticidad a través de los modelos de plasticidad de cristales y los modelos fenomenológicos o macroscópicos se sitúa en ese punto en el que los constituyentes de la materia dejan de ser discernibles claramente, y el material se interpreta como un todo homogéneo. En las escalas más pequeñas la plasticidad de cristales predice y justifica las ecuaciones constitutivas del problema plástico a partir de una interpretación del material según su conformación con sus constituyentes: las fases sólidas cristalinas en la forma y tamaño del grano cristalino, las cadenas moleculares o las lamelas poliméricas, o los constituyentes matriz y los constituyentes refuerzo de los materiales compuestos.

En la escala de interés en esta tesis, la macroscópica, la materia ya no se puede interpretar con ecuaciones según sus constituyentes o fases sólidas, y la plasticidad se construye en base a las observaciones experimentales y los ensayos apropiados que permiten caracterizar al material como un sólido continuo y homogéneo, pero no necesariamente isótropo, pues el tamaño de la observación si que permite diferenciar los comportamientos del material según las direcciones en que se observan, y por tanto identificar el comportamiento anisótropo.

La plasticidad de cristales por otro lado puede trabajar en escalas diferentes. En el extremo dimensional de la nanoescala puede plantear las ecuaciones cinemáticas del movimiento de átomos y dislocaciones, y como éstas interactúan en el cristal y con otros constituyentes, lo que a veces se conoce como dinámica atómica y molecular. Por el lado dimensional microscópico puede trabajar planteando a su vez una homogeneización sobre el propio cristal definiendo un volumen representativo equivalente (*RVE*), como en [28],[72],[112], sobre el que paramétricamente se define la influencia de los constituyentes de menor tamaño que pueden no se identificados explícitamente, y teniendo al grano cristalino como una de sus unidades fundamentales (figura 3.2). El primero de los casos es un tipo de modelo que es más propio de la ciencia de materiales propiamente dicha, mientras que el segundo de los planteamientos construye un modelo mecánico que estaría más cerca de la mecánica de sólidos, pero en ambos casos utilizando ecuaciones de la mecánica del medio continuo que guardan gran similitud en su formulación, incluso usando explícitamente ecuaciones que se utilizan comúnmente en los modelos fenomenológicos o macroscópicos, dado que al fin y al cabo la base físico-matemática es la misma [25].

En base a este rango de posibilidades que se presenta en el cálculo mecánico de los sólidos, el modelado multiescala se convierte en otro procedimiento alternativo de simulación que permite llevar a cabo la resolución del problema adaptando las ecuaciones a la escala de observación, según los parámetros del modelo el grado de detalle o la profundidad del análisis, es decir que el modelo se adecúa al material considerado. Se puede configurar en diferentes fases del cálculo un modelo micromecánico del material estructurado de acuerdo a los constituyentes del material, o un modelo macromecánico homogeneizado que permita la adaptación a geometrías de diferente orden, y determinando *sobre la marcha* las ecuaciones pertinentes según la escala del problema que se trata, es evidente que este tipo de análisis multiescala también queda fuera del objetivo de este trabajo, pero existen múltiples referencias que así tratan el problema plástico [114],[127],[116]. Las dificultades de este tipo de modelado son por un lado el esfuerzo necesario para construir una formulación

Figura 3.2: Escala en la observación del material en un sólido anisótropo: de la plasticidad de cristales a la homogeneización macroscópica.

consistente que se adapte en un extremo a la escala microscópica, y en el otro a la macroscópica, o el grado de aproximación entre ambas, y por último el coste computacional que hay que realizar para llevar a cabo la computación de estos modelos tan grandes y complejos.

Finalmente, los modelos fenomenológicos buscan estudiar el comportamiento del material desde una aproximación puramente macroscópica, utilizando una descripción homogeneizada del material, de manera que no se distinguen constituyentes o fases sólidas del material. Esta descripción elude una relación intrínseca entre la microestructura y las propiedades del material, de manera que su comportamiento se constituye con ecuaciones que evitan su presencia de forma explícita en la formulación, aunque extrínsecamente esta relación si existe a través de las leyes generales del material, cuyos parámetros se ajustan de acuerdo a los ensayos experimentales de caracterización y/o validación llevados a cabo unos en máquinas de ensayo clásicas, o virtualizados a través de simulaciones numéricas. En base a esta caracterización del material y los parámetros del modelo de cálculo, este trabajo contiene los apartados necesarios para llevar adelante el ajuste fiel del modelo fenomenológico con la realidad física del problema elastoplástico.

Los modelos fenomenológicos no cuantifican de forma directa la influencia de los distintos componentes, aunque permiten predecir el comportamiento mecánico macroscópico de una forma más amplia y versátil, y son fundamentales para el cálculo ingenieril, ya que sin modelos fenomenológicos sería imposible, por ejemplo, llevar a cabo el cálculo de estructuras o la simulación de los procesos industriales de forma eficaz.

3.2. Introducción a la plasticidad

Los primeros modelos matemáticos que se utilizaron para explicar el fenómeno físico de la plastificación de los materiales fueron modelos fenomenológicos basados en la observación de muy simples ensayos mecánicos de tracción, casi podríamos decir mecanismos muy elementales con los que los primeros científicos establecieron las bases de la ciencia actual. Podríamos citar el modelo o mecanismo propuesto por R. Hooke en el siglo XVII con el que enunció el primer postulado de la mecánica de sólidos, que hoy conocemos como Ley constitutiva de Hooke, base fundamental de la elasticidad lineal, y que desde luego no fue descrita por el propio Hooke en la forma tensorial con la que hoy trabajamos -ec. (2.14)-, pero que lleva su nombre en honor a esas primeras observaciones metódicas sobre la mecánica y el comportamiento del material.

Las primeras medidas sobre simples barras de material permitían poner atención en la medida de la fuerza aplicada y del alargamiento causado, dejando en un segundo plano otros aspectos de detalle. Así el mencionado y precursor criterio de plastificación de Henri Tresca (apartado 3.4.1.1) usaba datos experimentales muy sencillos para su postulado. La validez del método de observación se mantiene, si bien hoy en día son muchos más los parámetros que se tienen en cuenta para caracterizar el comportamiento elastoplástico, son muchos los tipos de ensayos disponibles y están todos ellos normalizados. Los ensayos y procedimientos de caracterización de mayor uso son los descritos en la norma ASTM (*American Society for Testing and Materials*), que contempla una amplia variedad de casos y métodos de ensayo.

Si se toma como referencia el elemento barra sometido a tracción, o a compresión, o ambos en un ensayo cíclico de carga, se puede representar la relación tensión-deformación que permitirá describir los parámetros y ecuaciones con los que desarrollar el cálculo elastoplástico elemental. En la figura 3.3 se muestra el comportamiento de la barra como elemento unidimensional en una relación tensión-deformación, con una representación bilineal simplificada.

La primera parte de la curva está definida por la relación elástica tensión-deformación, donde la pendiente corresponde a su rigidez elástica representada a través del módulo de elasticidad o de Young $-Y_e$ por evitar confusiones con la deformación logarítmica E -, en un sólido sustituido por el tensor de constantes elásticas $\mathbb{C}$, a veces también $\mathbb{C}_e$. Una vez sobrepasado el límite elástico o de fluencia plástica del material (σ_y) se identifica un cambio de pendiente asociado a la pérdida de rigidez con la plastificación. Esta nueva rigidez viene definida por el módulo tangente plástico Y_{ep} (en un sólido será el tensor tangente plástico $\mathbb{C}_p$). Este módulo puede mostrar una con pendiente positiva si el material experimenta endurecimiento, pendiente negativa si experimenta ablandamiento, o ser perfectamente plástico cuando σ_y es constante. El espacio o dominio elástico $\mathbb{E}$ está determinado por σ_y en un espacio de tensiones, y si el endurecimiento es isótropo (igual endurecimiento en tracción que en compresión) se define este espacio como el intervalo cerrado

$$\mathbb{E} = \{\sigma \in \mathbb{R} \mid -\sigma_y < \sigma < \sigma_y\} \quad (3.1)$$

donde el límite del dominio elástico es $\partial\mathbb{E}$, que más adelante será interpretado como la superficie de plastificación.

Figura 3.3: Elemento prismático sometido a carga axial: evolución elastoplástica.

3.2.1. Variables internas del problema elastoplástico

La deformación total de un sólido en deformaciones infinitesimales se puede descomponer aditivamente en una parte de deformación elástica y otra plástica

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (3.2)$$

La ec. (3.2) se debe interpretar como una expresión de la variable externa ε , gobernable y mensurable desde el exterior del sólido, en cuyo seno se relacionan las variables internas ε_e y ε_p , que aparecen como respuesta espontánea del material a la tensión soportada, y cuyos valores intrínsecos no son gobernables ni mensurables de forma directa desde el exterior del sólido. Ambas deformaciones ε_e y ε_p se desarrollan en el material de forma simultánea, por lo tanto no son separables exteriormente la una de la otra. Para identificar ambas variables internas entre sí es necesario completar una descarga elástica ($\varepsilon_e = 0$) en el sólido para exponer de forma explícita la presencia de la variable ε_p , como esta variable interna es una deformación permanente se convierte en una variable independiente, y ahora la variable ε_e se obtendrá por diferencia entre ε , medida antes de iniciar la descarga elástica, y ε_p , medida al finalizar la descarga. Así pues el resultado es

$$\varepsilon_e(\varepsilon, \varepsilon_p) = \varepsilon - \varepsilon_p \quad (3.3)$$

donde la deformación total ε es la variable externa de estado, y la deformación plástica ε_p es la variable interna de estado del problema elastoplástico. El dispositivo macroscópico de Prandtl de la figura 3.4, conformado por un muelle hookeano en serie con un disipador de fricción de límite k (equivalente a σ_y del material) reproduce las dependencias de la ec. (3.3). La deformación plástica ε_p depende de parámetros internos del proceso plástico que tienen que ver con el material y con la historia de carga previa (*path dependent behavior*), ambos aspectos configuran la naturaleza no lineal del problema elastoplástico.

Figura 3.4: Dispositivo reológico de Prandtl de plasticidad: relación de las variables externa e internas de deformación.

Si ahora tenemos en cuenta la naturaleza no disipativa de la deformación elástica a través de la ec. (2.10), la tensión pasa a ser una variable interna asociada a la deformación elástica. En el elemento unidimensional anterior, según la ec. (2.15) la tensión está determinada por ϵ_e , y de forma indirecta por ϵ y ϵ_p

$$\sigma = \sigma(\epsilon_e) = Y_e \epsilon_e(\epsilon, \epsilon_p) = Y_e(\epsilon - \epsilon_p) \quad (3.4)$$

donde Y_e es el módulo de Young de elasticidad lineal, en el caso tridimensional generalizado es sustituido por el tensor constitutivo elástico $\mathbb{C}_e$. Esta tensión del material no puede ser nunca superior al límite elástico característico del material, aunque este límite no sea constante (endurecimiento o ablandamiento de la figura 3.3), ya que la tensión siempre queda determinada por la deformación elástica presente.

Desde el punto de vista microscópico de la plasticidad, alcanzar la tensión de plastificación del material genera movimientos permanentes en el ordenamiento atómico del material. A priori estos movimientos de la red, dislocaciones, deben ocurrir a tensión constante, y cuando se producen las interacciones entre dislocaciones y otros defectos de la red es cuando la tensión de plastificación cambia, poniéndose de manifiesto un endurecimiento o un ablandamiento del material. La densidad o acumulación de defectos existentes en la red también influye en la magnitud de estas interacciones, y esto causa un comportamiento plástico dependiente la presencia de defectos previos, y no solo de los defectos instantáneos generados, es lo que se denomina *dependencia del camino de deformación previo* o *path dependent*. Esta dependencia impide que el endurecimiento sea correctamente caracterizado hasta haber identificado cada una de las variables internas, ϵ_e y ϵ_p , cuando se completa un ciclo de carga/descarga. Este endurecimiento resulta dependiente de la evolución de la variable interna ϵ_p .

Si el material no muestra endurecimiento la plasticidad es perfecta, y entonces la deformación total externa crece de forma continua sin necesidad de aplicar carga adicional (figura 3.3). Ya que el punto de fluencia sería constante, la tensión del material en este camino elastoplástico también lo es.

El inicio de comportamiento plástico se define a través de la función de plastificación $f(\sigma, \sigma_{yield})$, que determina cuando la tensión interna alcanza el límite plástico de fluencia del material, al tiempo que limita el valor de la tensión, que no podrá ser superior dicho límite elástico. La función para el caso de plasticidad perfecta se representaría reológicamente con un dispositivo de Prandtl con un disipador de fricción

Figura 3.5: Modelo unidimensional de plasticidad perfecta.

de límite elástico k constante (figura 3.5), resultando una función acotada del tipo

$$f(\sigma, \sigma_y) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0 \quad (3.5)$$

En un caso de tensiones generalizadas, en un tensor, el módulo o norma de la tensión se sustituye por un potencial plástico de tensiones $\phi(\sigma)$, que complementa la naturaleza escalar de la ec. (3.5). Este potencial hace referencia al resultado escalar que representa la capacidad de las tensiones generalizadas para ocasionar deformación plástica, es decir potencialmente. Tomando en cuenta el carácter acotado de la ec. (3.5), el dominio elástico $\mathbb{E}$ está definido por el espacio cerrado

$$\mathbb{E} = \{\sigma \in \mathbb{R} \mid f(\sigma, \sigma_y) < 0\} \quad (3.6)$$

En este trabajo se va a considerar una plasticidad independiente del tiempo, más concretamente de la velocidad de deformación (*rate independent plasticity*), esto se traduce en que las variables internas ε_e y ε_p , de naturaleza espontánea, tendrán un comportamiento evolutivo independiente de la variable tiempo. Sin embargo el comportamiento evolutivo no constante/no lineal del problema elastoplástico obliga a que la evolución simultánea de ambas variables internas esté sincronizada de acuerdo a su naturaleza física, y dado que el problema elastoplástico no lineal se va a resolver de forma incremental discretizada, esto obliga a considerar también una discretización en el tiempo que garantice la consistencia del cálculo. Para preservar esta consistencia del proceso de cálculo en el marco continuo y también en el algorítmico se describen las velocidades, tasas o flujos de deformación (*strain rate*)

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta t} \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (3.7)$$

y de forma aditiva en las deformaciones infinitesimales la tasa se puede aplicar la misma métrica de la ec. (3.2)

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_p \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_p \quad (3.8)$$

3.2. Introducción a la plasticidad

Con este planteamiento la existencia de plasticidad se representa con una condición de flujo plástico no nulo independientemente de su signo (que es un simple convenio)

$$|\dot{\epsilon}_p| > 0 \quad (3.9)$$

En una generalización elastoplástica existirá también una velocidad o tasa de tensión (*stress rate* o *flow stress*), ya que desde la ec. (2.10) la tensión es variable interna dependiente asociada a la variable interna elástica en la forma

$$\dot{\sigma}(\epsilon_e) = \frac{d\sigma(\epsilon_e)}{dt} = \frac{\partial\sigma(\epsilon_e)}{\partial\epsilon_e} : \frac{\partial\epsilon_e}{\partial\epsilon} : \frac{\partial\epsilon}{\partial t} = \begin{cases} \mathbb{C}_e \dot{\epsilon} & \text{si } |\dot{\epsilon}_p| = 0 \\ \mathbb{C}_{ep} \dot{\epsilon} & \text{si } |\dot{\epsilon}_p| > 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

donde se reconoce la presencia del tensor proyector simétrico $\partial\epsilon_e/\partial\epsilon = \mathbb{I}^S$, y siendo $\mathbb{C}_e$ el módulo tangente elástico (unidimensionalmente el módulo de Young), y $\mathbb{C}_{ep}$ el módulo tangente elastoplástico. Dado que $\mathbb{C}_{ep}$ es dependiente del camino de deformación (*path dependent*), y no solo una característica del material, a partir de esta interpretación de velocidad la relación entre tensiones y deformaciones se debe plantear claramente también como una relación incremental discretizada en el tiempo, y así los módulos de la ec. (3.10) no son necesariamente constantes, y han de evolucionar durante el problema elastoplástico de acuerdo al flujo plástico $\dot{\epsilon}_p$.

3.2.1.1. Endurecimiento Isótropo

El endurecimiento por deformación plástica de un material, también conocido como endurecimiento por acritud, se debe a los fenómenos de interacción de defectos de la red atómica cuando la deformación plástica progresa en el material. El límite de fluencia plástica (*yield stress*) crece de forma proporcional a la densidad de estas interacciones en el material.

La ciencia de los materiales ha caracterizado estos defectos y sus interacciones [31],[63], de manera que existen modelos físicos que representan con bastante éxito este comportamiento, son modelos que se observan a muy corta escala, de carácter microscópico y submicroscópico, y no son por ello objeto de este trabajo. Estos modelos explican como se produce la deformación plástica en base a la movilidad de los defectos de la red, las dislocaciones, que en su movimiento interactúan con otros defectos, como vacantes, átomos intersticiales, bordes de grano o partículas localizadas en el interior del cristal, como las fases secundarias precipitadas o las impurezas. Del resultado de estas interacciones, el endurecimiento causado se clasifica en isótropo, cinemático o combinado.

En el caso de un endurecimiento isótropo, el incremento del punto de fluencia del material se da por igual con independencia del signo de las tensiones que se aplique, y ocasionando un incremento en el dominio elástico del material en todas las direcciones, de ahí el nombre de isótropo. Si se toma como referencia el dominio elástico que se genera con una función de plastificación de Von Mises en el plano desviador, una circunferencia, el endurecimiento isótropo causa un incremento de dicha circunferencia en todas las direcciones, como se observa en la figura 3.6

La presencia de endurecimiento en el problema elastoplástico se refleja en la existencia de un dominio elástico variable, lo que significa una relación directa entre la

$$\dot{\sigma}_y(\varepsilon_p) = K(\varepsilon_p) \dot{\varepsilon}_p \quad (3.11)$$

donde K es un módulo material de endurecimiento. Tras integrar la ec. (3.11) se obtendrá la ley de endurecimiento con una expresión general del tipo

El endurecimiento del material tiene lugar de forma espontánea (como la deformación plástica) y de forma simultánea al incremento de tensión (como la deformación elástica), y solo es cuantificable cuando se produce una descarga del ciclo elastoplástico, ya que es necesario determinar el valor de la variable interna ε_p para ser correctamente cuantificado, lo que exige que las variables de deformación sean distinguibles, por tanto tras la descarga elástica cuando $\varepsilon_e = 0$.

$$\dot{\xi} = |\dot{\epsilon}_p| \quad \Rightarrow \quad \dot{\alpha} = K \dot{\xi} \quad (3.13)$$
$$f(\sigma, \sigma_y, \varepsilon_p) = |\sigma| - (\sigma_y + \alpha) \leq 0 \quad (3.14)$$

56

manera independiente a la tensión σ aplicada. La presencia del módulo K se describe relacionado con las variables ξ y α .

Si ahora se toman en consideración las ecuaciones (3.3) y (3.10) sobre la tensión total se llegará a una expresión unidimensional del tipo

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_e} : \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial \varepsilon} : \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \begin{cases} = Y_e \dot{\varepsilon} & \text{si } |\dot{\varepsilon}_p| = 0 \\ = Y_e \left(1 - \frac{Y_e}{Y_e + K}\right) \dot{\varepsilon} & \text{si } |\dot{\varepsilon}_p| > 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

que pone de manifiesto el efecto del endurecimiento sobre la tensión cuando se resuelva el problema elastoplástico. Asimismo en la ec. (3.15) descrita en términos unidimensionales de deformación, se identifica la presencia del módulo tangente elástico a través del módulo de Young, y también del módulo tangente elastoplástico, que en este caso además pone de manifiesto la dependencia explícita respecto del endurecimiento $K(\varepsilon_p)$.

Reglas de endurecimiento isótropo El endurecimiento isótropo se representaría reológica y macroscópicamente con un dispositivo de Prandtl (figura 3.4), conformado ahora con un disipador de fricción de límite elástico k variable y dependiente de la deformación plástica acumulada $k = k(\varepsilon_p)$, que reproduce el endurecimiento. La interpretación de este endurecimiento sobre el parámetro plástico k se expresa matemáticamente de diversas formas. En la forma más sencilla el endurecimiento isótropo sigue una ley lineal, y entonces

$$\sigma_y = \sigma_y^0 + K \bar{\varepsilon}_p \quad (3.16)$$

Un modelo de endurecimiento más refinado, no lineal, se propone con la ley de Ramberg-Osgood [115], descrita en términos de deformaciones internas elástica y plástica, y que reproduce la curva tensión deformación de un material en su ensayo en carga uniaxial, esta ley considera el endurecimiento en una expresión de carácter potencial que interpreta la deformación total ε a partir de la tensión actual σ .

$$\varepsilon(\varepsilon_e, \varepsilon_p) = \frac{\sigma}{Y_e} + K' \left(\frac{\sigma}{Y_e} \right)^m \quad (3.17)$$

donde el exponente m y la constante K' son características de cada material, y donde K' se puede interpretar como un módulo de endurecimiento en flexibilidad, a diferencia de la ec. (3.16) donde K es un módulo de rigidez.

La interpretación de la ley de Ramberg-Osgood en términos de rigidez tiene su equivalencia en la ley de Hollomon [61], que considera también un endurecimiento del material de tipo potencial, pero ahora únicamente sobre la variable interna deformación plástica, y ya segregando el comportamiento elástico, no hay participación de ε_e en el cálculo del endurecimiento

$$\sigma_{yield} = K(\varepsilon_p)^n \quad (3.18)$$

donde las constantes de material, n y K , tienen valores diferentes a las constantes de la ley de Ramberg-Osgood. Tanto la ec. (3.17) como la ec. (3.18) permiten interpretar los exponentes como parámetros de endurecimiento isótropo no lineal, por lo que los exponentes m y n reciben el calificativo de exponentes de endurecimiento.

La Ley de Swift [139] también propone un modelo potencial sobre la deformación plástica acumulada, $\bar{\varepsilon}_p$, según la forma

$$\sigma_{yield} = K(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}_p)^n \quad (3.19)$$

y donde ε_0 , K y n , son parámetros característicos del material, de valor diferente a los términos de la ley de Hollomon. De acuerdo a lo descrito en la ec. (3.13), se intuye la equivalencia de las variables adicionales $\bar{\varepsilon}_p \equiv \xi$.

El modelo más utilizado es la ley de Voce [151], que propone una ley exponencial sobre la variable de deformación plástica acumulada de la forma

$$\sigma_{yield} = \sigma_y^0 + \sigma_\infty (1 - e^{-\delta \bar{\varepsilon}_p}) \quad (3.20)$$

donde los parámetros del material se introducen a través del límite elástico inicial o de referencia (σ_y^0), añadiendo un término de tensión límite de saturación σ_∞ gobernado por una función exponencial, cuyo exponente contiene a la deformación plástica acumulada $\bar{\varepsilon}_p$ modulada por un parámetro de material δ . Esta ley es muy utilizada para materiales donde se identifica un *plateau* o meseta de tensión cuasiconstante en la curva de plastificación del ensayo de tracción.

La eficacia de la ley de Voce ha llevado a combinaciones con otros modelos, recibiendo a veces la designación *Voce like* ó *Voce type*. Una combinación frecuente de la ley de Voce se realiza con la ley de endurecimiento lineal [131], es decir entre las ecuaciones (3.16) y (3.20), y la fórmula resultante es

$$\sigma_{yield} = \sigma_y^0 + \bar{H} \bar{\varepsilon}_p + (\sigma_\infty - \sigma_y^0) (1 - e^{-\delta \bar{\varepsilon}_p}) \quad (3.21)$$

donde el plató de saturación aparece diferenciado de la función lineal a través de la pendiente o módulo efectivo $\bar{H}$, a veces también referido en la literatura técnica como $\bar{K}$. Si $\bar{H} = 0$, se recupera la ley de Voce original, donde la meseta de saturación carece de pendiente, y es horizontal respecto del diagrama tensión-deformación. Este modelo será utilizado en esta tesis en el apartado 7. Una interpretación gráfica de la ec. (3.21) se puede encontrar en la figura 3.7

Otro ejemplo de ley combinada es el modelo de Voce-Swift

$$\sigma_{yield} = \beta [\sigma_y^0 + (\sigma_\infty - \sigma_y^0) (1 - e^{-\delta \bar{\varepsilon}_p})] + (1 - \alpha) [K(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}_p)^n] \quad (3.22)$$

donde β sería el coeficiente de peso proporcional entre ambas leyes, de forma que cuando $\beta = 1$ se recupera la ley de Voce ec. (3.20), y con $\beta = 0$ se recupera la ley de Swift ec. (3.19).

3.2.1.2. Endurecimiento Cinemático

El endurecimiento cinemático también causa el incremento del límite de plastificación del material, aunque a diferencia del endurecimiento isótropo, el tamaño del dominio elástico no cambia sino que experimenta un desplazamiento d dicho espacio, con movimiento de su centroide. En este caso el cambio que experimenta el límite de fluencia plástica es selectivo, de forma que la tensión que causa endurecimiento en un sentido de acción, aplicada sucesivamente en sentido contrario provoca un

Figura 3.7: Endurecimiento isótropo no lineal de Voce sobre la curva plástica del ensayo uniaxial de carga: saturación.

ablandamiento por disminución del punto de fluencia inicial, efecto conocido como de Bauschinger [31].

En el efecto Bauschinger cuando se invierte la tensión aplicada se causa una disminución del límite de fluencia plástica, en la misma cantidad que el exceso de tensión desarrollado durante el endurecimiento anterior, al inicio del ciclo. Aún sin llegar a invertir la tensión, este exceso de tensión (*overstress*) en el intervalo de carga se convierte en una nueva variable interna asociada del problema elastoplástico, comúnmente conocida como tensión de *backstress*.

Si el endurecimiento es cinemático puro, este ablandamiento se identifica por la presencia de un dominio elástico de tamaño constante, $\mathbb{E} = 2\sigma_y^0$, con lo cuál la tensión de backstress que se aplica monótonicamente al inicio del ciclo se resta sobre el límite de fluencia plástica actualizado al invertir la tensión.

Tomando como ejemplo de dominio elástico, la circunferencia del plano desviador que ocasiona la función de plastificación de Von Mises, el dominio no cambia su tamaño, sino que cambia su posición, desplazándose fuera del polo original, como se muestra en la figura 3.8.

Siguiendo el mismo esquema de formulación que la empleada para el endurecimiento isótropo, se define un módulo de endurecimiento cinemático H , tal que las variables internas adicionales creadas a partir de la deformación plástica serán

$$\dot{\xi} = |\dot{\epsilon}_p| \quad \rightarrow \quad \dot{\alpha} = H |\dot{\epsilon}_p| * \text{sign}(\sigma) \quad (3.23)$$

y ahora integradas, y aplicadas en la función de plastificación, darían una expresión tipo

$$f(\sigma, \alpha, \sigma_y^0) = |\sigma - \alpha| - \sigma_y^0 \leq 0 \quad (3.24)$$

donde el término de variable interna asociada de tensiones, α , es la tensión de backstress. Como se observa en la ec. (3.24), ahora la variable backstress opera directamente sobre la tensión aplicada, no sobre el límite de fluencia plástica como en la ec. (3.14), aunque ambos casos están gobernados por la deformación plástica causada

Figura 3.8: Endurecimiento cinemático: el dominio elástico se deslaza en una determinada dirección, pero mantiene su tamaño.

monotónicamente. El término $|\sigma - \alpha| = \eta$ también es tratado como una variable interna asociada de tensión, y recibe el nombre de tensión relativa o *shifted stress* η .

En este trabajo de tesis el uso de este endurecimiento cinemático no se lleva a cabo a través de variables internas adicionales, sino a través de un modelo reológico que interpreta hiperelásticamente este endurecimiento, de manera que no aparecen estos términos en la formulación que se propondrá. Como mera referencia, en la literatura podemos encontrar gran número de modelos que describen el endurecimiento cinemático, la mayoría se basan en leyes de evolución sobre la tensión backstress y la variable interna de deformación plástica, ya sea en su forma rate incremental $\dot{\xi}$ o en forma acumulativa $\bar{\varepsilon}$.

El modelo de Prager propone una evolución lineal entre las variables internas adicionales de deformación y tensión backstress *rate* incrementales en la forma

$$\dot{\alpha} = H \dot{\xi} \quad (3.25)$$

donde H es el módulo de endurecimiento característico del material. El modelo de Ziegler propone una evolución no lineal entre la tensión tasa del backstress y la tensión shiftedstress a través de la variable interna adicional de deformación en la forma

$$\dot{\alpha} = H \eta \bar{\varepsilon}' \quad (3.26)$$

donde H es un módulo de endurecimiento característico del material, de valor diferente al de la ec. (3.25) de Prager.

El modelo de Armstrong-Frederik [38] propone una evolución no lineal de la tensión de backstress con la deformación plástica, introduciendo una ley adicional que corrige el modelo de Prager, con un término dependiente de la variable plástica adicional ($\dot{\xi}$) y otro sobre la variable plástica acumulada en forma tasa $\bar{\varepsilon}'$, una velocidad de plastificación. La expresión final de la variable interna adicional queda en la forma

$$\dot{\alpha} = c \dot{\xi} - b \alpha \bar{\varepsilon}' \quad (3.27)$$

donde c y b son parámetros característicos del material, siendo $c \equiv H$. Esta corrección "dinámica" sobre la variable rate plástica acumulada está pensada para modular el endurecimiento en carga cíclica, ya que el modelo de Prager solo reproduce el endurecimiento de forma correcta en algunos materiales cuando el caso de carga es monótonico, pero no cuando es cíclico.

Este modelo de Armstrong-Frederik es muy utilizado para reproducir de forma sencilla los efectos de *ratcheting* durante el endurecimiento cíclico, fenómeno hace crecer de forma continua la deformación plástica acumulada a lo largo de los ciclos acumulados, pero mostrando un incremento de deformación que es variable de un ciclo a otro, de ahí la expresión de corrección dinámica utilizada frecuentemente, pues realmente el problema de plasticidad cíclica es cuasiestático en equilibrio, y no dinámico de una forma estricta.

Otros modelos se han propuesto para simular el endurecimiento cinemático del material, pero el mayor interés por ellos se ha centrado en la modelización de la plasticidad en carga cíclica y en pequeñas deformaciones, por lo que en la práctica se han aplicado escasamente en plasticidad computacional con deformaciones finitas. Tal es el caso sobre todo del modelo de Chaboche (y en menor medida de los de Ohno y Wang, Guo... etc), por lo que no ha sido objeto de atención para el presente trabajo de tesis, centrado en otros aspectos computacionales en deformaciones finitas.

El caso del modelo de Armstrong-Frederik es el más atractivo, ya que este modelo de endurecimiento, a pesar de haber sido creado para plasticidad cíclica, ha sido posteriormente aplicado con éxito en modelos elastoplásticos en deformaciones finitas, particularmente en los trabajos de [149] y [46], trabajos que son de interés, pues algunos de los ejemplos de aplicación descritos van a servir de comparación para validar los resultados obtenidos en esta tesis, como se expondrá en el apartado 7.2.2.

El modelo de endurecimiento de Armstrong-Frederik propuesto en [149] se basa en una interpretación reológica del problema elastoplástico según el esquema descrito en la figura 3.9. Si motivamos el modelo en pequeñas deformaciones, es posible aplicar una descomposición cinemática aditiva que facilite su entendimiento, y así se tienen las variables

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad \text{y} \quad \varepsilon_p = \varepsilon_{pe} + \varepsilon_{pi} \quad (3.28)$$

donde llama la atención la descomposición adicional aplicada sobre la deformación plástica, en una parte ε_{pe} que representa la deformación elástica añadida durante el endurecimiento (es decir el incremento del espacio elástico $\mathbb{E}$), y que se representa con el muelle de rigidez elástica c , mientras que ε_{pi} reproduce el efecto no lineal del endurecimiento a través del pseudoamortiguador cuya deformación responde a una rigidez variable según la regla $c/\dot{\gamma} b$, de carácter no lineal por su dependencia respecto de la variable interna $\dot{\gamma}$, siendo $\dot{\gamma}$ la deformación o *slip* del disipador de fricción. Con esta propuesta la rigidez del dispositivo es variable a lo largo del cálculo elastoplástico, con dependencia de la deformación plástica incremental.

En las referencias [30] y [149] el modelo de Armstrong-Frederik está desarrollado en grandes deformaciones a través de deformaciones finitas cuadráticas. El modelo reológico que se propone en este trabajo guarda algunas semejanzas con ambas referencias, [30] y [149], al inspirar una descripción de la tensión a través de funciones hiperelásticas en deformaciones finitas, pero el modelo que en este trabajo se propone usa deformaciones finitas logarítmicas, y el dispositivo reológico motivador también

Figura 3.9: Dispositivo reológico de endurecimiento cinemático: a la izquierda modelo clásico, a la derecha modelo según la regla de Armstrong-Frederik.

difiere en la configuración del dispositivo, estos detalles se mostrarán en el capítulo 5.

3.2.1.3. Endurecimiento Combinado

Existen materiales que en su comportamiento elastoplástico exhiben un efecto Bauschinger parcial, donde el ablandamiento sobre la tensión de fluencia al invertir las tensiones en el ciclo no proporciona el mismo valor que la tensión de backstress, este comportamiento se interpreta como un endurecimiento con una parte isótropa (K) y otra cinemática (H), y se dice entonces que el endurecimiento es combinado. Se podría interpretar con el dispositivo reológico de la figura 3.9, por ejemplo, empleando un disipador variable $k = k(\varepsilon_p)$. En este caso la función de plastificación queda definida como

$$f(\sigma, \alpha, \sigma_y^0) = |\sigma - \alpha_1| - (\sigma_y^0 + \alpha_2) \leq 0 \quad (3.29)$$

y donde las variables internas asociadas adicionales de tensión han de diferenciarse según la naturaleza endurecedora a la que corresponden. Cuando se produce este endurecimiento mixto y se observa la evolución del dominio elástico con la deformación plástica, el dominio crece en tamaño y de forma simultánea se mueve con un desplazamiento de su centro polar, como se muestra en la figura 3.10 .

Se puede construir una ley de endurecimiento mixto a través de una función lineal con una fracción o coeficiente de reparto normalizado β ($0 \leq \beta \leq 1$), que afectará a las variables internas del problema elastoplástico ([102]), tomando el valor $\beta = 1$ se identifica un endurecimiento isótropo puro, y tomando el valor $\beta = 0$ se identifica un endurecimiento cinemático puro. Entonces las variables internas adicionales se pueden expresar en la forma

$$\dot{\alpha}_1 = \beta K |\dot{\varepsilon}_p|; \quad \dot{\alpha}_2 = (1 - \beta) H |\dot{\varepsilon}_p| \text{sign}(\sigma - \alpha_2) \quad (3.30)$$

El uso de estas variables internas adicionales en la descripción del problema y en la ecuación de flujo plástico que se expone en el apartado 3.5, lleva a tener que manejar un número adicional de incógnitas respecto del problema inicial, y ya que estas variables son de naturaleza tensorial, cada una de ellas incrementa sensiblemente las incógnitas finales del problema.

Figura 3.10: Endurecimiento combinado o mixto: el dominio elástico crece en tamaño y se desplaza en una determinada dirección simultáneamente.

Un modelo elastoplástico unidimensional infinitesimal simplificado permite entender el efecto del endurecimiento combinado sobre la tensión interna y el módulo tangente elastoplástico, a semejanza de la ec. (3.15)

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon_e} : \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial \varepsilon} : \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \begin{cases} = Y_e \dot{\varepsilon} & \text{si } |\dot{\varepsilon}_p| = 0 \\ = Y_e \left(1 - \frac{Y_e(K+H)}{Y_e+(K+H)} \right) \dot{\varepsilon} & \text{si } |\dot{\varepsilon}_p| > 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

donde la única diferencia radica en la presencia de un módulo elastoplástico de endurecimiento combinado en el término del módulo tangente.

3.2.1.4. Interpretación termodinámica de las variables de endurecimiento

Las variables internas que aparecen con el endurecimiento tienen influencia sobre la energía libre del sólido, ya que la modificación del dominio elástico causa la aparición de una energía libre adicional. Físicamente el endurecimiento incrementa la capacidad de almacenamiento de energía elástica. Si bien esta energía libre es teóricamente reversible, en la práctica no siempre es recuperable; por diversas causas internas del mecanismo endurecedor de los materiales, una parte de esta energía puede quedar congelada elásticamente en la red cristalina del material, debido a la interacción de las dislocaciones y los defectos de la red. Esta energía no se recupera enteramente por medios mecánicos cuando cesan las fuerzas deformadoras, pero termodinámicamente tampoco se ha disipado pues no se ha liberado entropía.

La expresión matemática de esta energía libre nueva se lleva a cabo a través de las nuevas variables internas adicionales, normalmente descritas en deformación (*like strain variables*) por homogeneidad con el protagonismo anterior de la deformación elástica. Siguiendo este planteamiento, la forma *rate* de la energía hiperelástica adopta ahora una expresión

$$\dot{\Psi} = \frac{d\Psi(\varepsilon_e)}{dt} = \frac{\partial \Psi(\varepsilon_e)}{\partial \varepsilon} : \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \Psi'(\xi)}{\partial \xi} : \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{V}(\varepsilon_e)}{\partial \varepsilon} : \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{H}(\xi)}{\partial \xi} : \dot{\xi} \quad (3.32)$$

donde aparece $\mathcal{H}$ como función de energía libre del endurecimiento, mientras que $\mathcal{V}$ es la función hiperelástica sin endurecimiento, que simplemente adopta otra notación para diferenciarla de la función completa $\Psi(\varepsilon) = \mathcal{V}(\varepsilon) + \mathcal{H}(\xi)$. Si ahora se toma en consideración el principio de máxima disipación de las ecuaciones (2.28) y (2.29), aplicadas sobre la ec. (2.30), se puede obtener

$$\mathcal{D} = \left(\boldsymbol{\sigma}(\varepsilon) - \frac{\partial \mathcal{V}(\varepsilon_e)}{\partial \varepsilon} \right) : \dot{\varepsilon} - \frac{\partial \mathcal{H}(\xi)}{\partial \xi} : \dot{\xi} \geq 0 \quad (3.33)$$

El razonamiento hiperelástico permite buscar una función $\mathcal{H}(\xi)$ que exprese la energía espontáneamente almacenada en el material por causa del endurecimiento a través de la variable ξ , interpretando el endurecimiento como la capacidad adicional que el material adquiere para almacenar energía elástica, pero de acuerdo a una evolución de la deformación plástica. De esta manera, si $\varepsilon_e(\varepsilon, \varepsilon_p)$, así también $\xi(\varepsilon, \varepsilon_p)$, y si $\mathbb{C}_e = \partial^2 \Psi(\varepsilon_e) / (\partial \varepsilon_e \partial \varepsilon_e)$, también se puede encontrar una expresión

$$\mathbb{H} := \frac{\partial^2 \mathcal{H}(\xi)}{\partial \xi \partial \xi} \quad (3.34)$$

donde $\mathbb{H}$ es ahora el tensor constitutivo de endurecimiento plástico de cuarto orden, interpretado a través de la naturaleza hiperelástica del sólido. Por lo tanto la variable interna asociada de tensiones de endurecimiento α , se puede expresar en forma incremental a través de

$$\dot{\alpha} = \mathbb{H} : \dot{\xi} \quad (3.35)$$

ecuación que es equivalente a la ec. (3.30).

Matemáticamente, si por ejemplo se utiliza una función energética hiperelástica de tipo cuadrático respecto de las deformaciones elásticas, es fácil llegar también a una representación equivalente para esta energía elástica adicional al producirse el comportamiento elastoplástico, entonces resultaría una expresión de la forma

$$\Psi(\varepsilon, \xi) = \frac{1}{2} \varepsilon_e : \mathbb{C}_e : \varepsilon_e + \frac{1}{2} \xi : \mathbb{H} : \xi \quad (3.36)$$

3.3. Anisotropía en plasticidad

La plasticidad de los materiales puede presentar fenómenos de anisotropía, al igual que ocurre con su comportamiento elástico. En esencia las causas del fenómeno son las mismas que en el comportamiento elástico: la naturaleza constitutiva del material, y especialmente el ordenamiento atómico-cristalino. Básicamente se pueden diferenciar dos caracteres de anisotropía plástica de acuerdo a la escala de observación (figura 3.2), y si bien ambos tienen el mismo origen uno de ellos es intrínseco y el otro extrínseco.

En la primera escala de observación se aplica una interpretación microscópica del material a través de la plasticidad de cristales según su unidad cristalina fundamental: el grano metálico. La distinción de los constituyentes que conforman el material, permite tener en cuenta la propia anisotropía de los cristales a través de los planos cristalográficos y el ordenamiento atómico de su red cristalina. La disposición de los átomos en la red del cristal principal que conforma el grano muestra diferentes

Figura 3.11: Textura cristalina: orientación preferente de los granos metálicos (derecha), y orientación al azar (izquierda).

comportamientos de acuerdo al tipo de red, y la orientación del mismo respecto de la carga aplicada, que dependen de como se disponen los planos principales por los que las dislocaciones se mueven con preferencia respecto de otros. Esta anisotropía cristalina es de tipo intrínseco en el material, y resulta difícil de manipular, de manera que los tratamientos térmicos aplicados durante la fabricación no suelen afectar a esta parte del carácter anisótropo de la plasticidad. Sin embargo, por el planteamiento fenomenológico de este trabajo, los efectos de este comportamiento anisótropo quedan enmascarados con la siguiente causa de anisotropía, la textura.

En la segunda escala de observación se utiliza una visión macroscópica del material, y no se distinguen los constituyentes del material, ni los granos, ni otras fases sólidas secundarias, pero donde la disposición de los granos metálicos y sus orientaciones preferentes en el material generan un sólido homogeneizado con direcciones preferentes de diferente comportamiento plástico, por tanto con anisotropía. En la figura 3.11 se muestra esquemáticamente una interpretación de la textura cristalina en los granos metálicos que conforman el material, frente a una distribución de granos sin orientación preferente, lo que se podría denominar orientación al azar. Este fenómeno se da también en polímeros, donde los cristales se pueden encontrar en un apilamiento ordenado de las cadenas moleculares, y por ello también son susceptibles de una destacable anisotropía plástica, si bien en estos materiales el comportamiento va asociado a un inevitable comportamiento viscoso, por lo que se trataría de una plasticidad viscosa dependiente del tiempo o *rate dependent*.

La anisotropía macroscópica está asociada en gran medida a la textura ocasionada por los tratamientos termomecánicos aplicados al material durante la fabricación, es decir a la forma, tamaño y orientación cristalina de los granos resultantes en el material. El comportamiento debido a la textura es de carácter extrínseco, pues estas propiedades pueden ser modificadas en el material desde el exterior. Especialmente importante es el caso de los productos obtenidos por laminación u otras técnicas de conformado por deformación plástica, donde la disposición de los granos y la manera en como se deforman cuando poseen una red cristalina distorsionada mecánicamente determina el grado de anisotropía final (figura 3.12). Los procesos de laminación en caliente tienen como resultado texturizaciones menos intensas que los procesos de deformación en frío,

Figura 3.12: Laminación de materiales metálicos: formación de textura en los granos metálicos.

ya que la difusión térmica promueve la aniquilación de defectos de la red cristalina y suaviza o dulcifica la acritud, y como consecuencia una homogeneización del material que reduce su anisotropía.

La observación de este comportamiento se realiza a través de la medida de la deformación plástica en diferentes orientaciones geométricas cuando el material se somete a deformación. El ensayo para la medida de estas deformaciones plásticas se realiza en orientaciones diferentes respecto a las direcciones preferentes de material resultantes de la fabricación, que son la dirección de laminación también denominada dirección longitudinal larga o de *rolling* ($L - RD$), la dirección transversal larga ($T - TD$), ambas contenidas en el plano principal de laminación, y la dirección transversal corta ($S - SD$) que se sitúa a través del espesor de chapa (figura 3.12).

Probetas de material cortadas a diferentes ángulos de la dirección de laminación proporcionan los valores de deformación plástica. A partir de estas medidas se definen los coeficientes de anisotropía o parámetros de Lankford (r_θ), que son los más utilizados ingenierilmente. Se obtienen como cociente entre las deformaciones plásticas que experimenta un material en distintas direcciones cuando se le aplica una carga uniaxial de tracción o compresión. Si se considera un elemento inicial prismático de longitud l , ancho w y canto d , y utilizando las deformaciones ingenieriles referidas a las direcciones principales de carga, de acuerdo a la norma ASTM E517 [37], se obtiene la relación

$$r_\theta = \frac{\ln \frac{t_w}{o_w}}{\ln \frac{t_d}{o_d}} \quad (3.37)$$

y aceptando la condición isócara de la deformación plástica, la conservación del volumen lleva a

$$r_\theta = \frac{\ln \frac{t_w}{o_w}}{\ln \frac{o_{l,0} w}{t_l t_w}} \quad (3.38)$$

Es común la estandarización de estos coeficientes para las componentes de deformación en placas o chapas de laminación, y la ec. (3.38) se suele utilizar en funcion

Figura 3.13: Textura del material laminado: morfología de los granos metálicos en aleación Al7075 T651. *Tensile yield strength*: 515 MPa en L, 510 MPa en T, y 460 MPa en S [113].

de las deformaciones plásticas ocasionadas en el material plano, usándose la forma

$$r_\theta = \frac{\varepsilon_{\theta+90}}{\varepsilon_{33}}, \quad \theta_{RD} = 0 \quad \rightarrow \quad r_\theta = \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{33}} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}} \quad (3.39)$$

donde los índices 11, 22 y 33 hacen referencia a las direcciones longitudinal, transversal larga y transversal corta respectivamente, una vez reducido el problema al plano de la placa. Si $r_\theta > 1$, las deformaciones en la dirección trasversal larga son dominantes, y cuando $r_\theta < 1$ las deformaciones a través del espesor son las dominantes. Este último caso puede conducir a la chapa a un fallo con rotura por un excesivo adelgazamiento ocasionado en la pieza durante la manufactura.

A partir de los valores de r_θ referidos a las direcciones 0° , 45° y 90° respecto de la dirección de laminación (figura 3.12), se define el coeficiente normalizado de anisotropía

$$r_n = \frac{r_0 + 2r_{45} + r_{90}}{4} \quad (3.40)$$

que da un indicativo de la resistencia del material al adelgazamiento, útil en el caso de chapas delgadas. También se define el coeficiente de anisotropía planar, Δr , como relación de los valores de r_θ empleados en la ec. (3.40) como

$$\Delta r = \frac{r_0 - 2r_{45} + r_{90}}{2} \quad (3.41)$$

El comportamiento de los materiales frente a un caso biaxial de carga también es utilizado para evaluar su anisotropía plástica, aunque su aplicación esté menos extendida. El ensayo del disco de compresión de [9], o el ensayo plano de tensión uniaxial de Pöhlandt-Banabic [5] son procedimientos alternativos para el estudio de la anisotropía en carga biaxial, empleados para determinar el ratio biaxial

$$r_b = \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \quad (3.42)$$

Figura 3.14: Copas de estampación con preformas circulares: material con diferente textura y orientación cristalográfica. Reproducción extraída de [144].

Al aplicar estos coeficientes para comprender el comportamiento anisótropo del material, es fácil deducir que un mayor índice de anisotropía planar se identifica con una mayor presencia de fenómenos de anisotropía plástica, así cuando los índices r_θ presentan valores muy diferentes en diferentes direcciones, el material muestra una tendencia a la formación de las orejas de anisotropía o *earing* en procesos de elevada deformación, como ocurre en los procesos industriales de estampación por embutición profunda. Estos coeficientes se pueden relacionar con las propiedades de los metales y aleaciones ensayados, y comprobar la gran dependencia que tienen de la cristalografía base del material y de la textura que resulta de su manufactura.

En el trabajo de G. Tucker [144] podemos encontrar una referencia interesante que explica los fenómenos de *earing* durante la deformación plástica y su relación con la orientación cristalográfica del metal original y su textura, usando para ello ensayos de probetas de aluminio comercial puro sometidas a embutición, comprobó experimentalmente la relación entre los índices de Miller característicos de dichos planos cristalográficos y la formación de estas orejas en número y profundidad sobre el perímetro de la copa de estampación. El número de estas orejas oscila entre 4 y 8 según la orientación preferente del material. Una imagen de la citada referencia se reproduce en la figura 3.14.

El trabajo [144] pone de manifiesto la relación entre los planos cristalográficos de deslizamiento preferente de los cristales metálicos y la deformación plástica, incluso aún cuando la escala de análisis se sitúe en el nivel macroscópico, por ello en el caso de los materiales policristalinos este fenómeno también está presente, y en estos materiales el *earing* o formación de orejas se ocasiona por la textura heredada de su fabricación,

de procesos de laminación, de forja o de estampación. Así. Este comportamiento del material se debe tanto a la orientación cristalina del metal base, como a los efectos de la textura extrínseca, reflejados en la morfología del grano metálico de la aleación.

La evidencia de la anisotropía plástica a través de estos fenómenos se puede encontrar en todo tipo de aleaciones metálicas, que van desde muchas aleaciones ligeras, particularmente de titanio, hasta aleaciones de aluminio y de magnesio, o un gran número de aceros aleados y de baja aleación, todos ellos, presentan índices de anisotropía observables a través de los índices de Lankford. Estas aleaciones son poco apropiadas para la manufactura por deformación plástica. También en estos casos la frecuencia o número de orejas en el perímetro de las copas estampadas es muy variable, así como su profundidad. En aquellos materiales con simetría ortótropa el número de orejas suele ser 4, y a veces 8 en casos más complejos. En cambio muchos aceros de baja aleación, algunas aleaciones comunes de aluminio, de cobre y latones, presentan índices normales más cercanos a la unidad, y permiten procesos de embutición sin presencia apreciable de este fenómeno de *earring*.

Algunos de los estudios de la anisotropía plástica se llevan a cabo a través de ensayos de embutición profunda, tanto ensayos físicos como ensayos virtuales de simulación numérica. Uno de los ejemplos de validación del modelo de cálculo que se expone en esta tesis se lleva a cabo con uno de estos ensayos de embutición. Como este comportamiento está intrínsecamente relacionado con la deformación plástica del material, la evaluación del límite elástico o límite de fluencia plástica sobre materiales con anisotropía se convierte en un aspecto fundamental para entender este comportamiento, por tanto la elección de la función de plastificación en el modelo de cálculo también modula los resultados que se pueden obtener.

3.4. Función de plastificación

Si la plasticidad ocurre cuando la tensión del material supera un valor característico, la función de plastificación tiene por objeto detectar cuando se cumple esa condición, ya que el concepto moderno de tensor de tensiones plantea la cuestión de que valor de tensión utilizar, si en el tensor de tensiones tenemos seis componentes. En un problema unidimensional la respuesta es sencilla: si la tensión es superior al límite elástico hay plastificación, pero cuando el sólido y la tensión que soporta no son unidimensionales es preciso definir de forma concreta esta función equivalente a la expresión simple del caso uniaxial, y esto involucra al tensor de tensiones σ con sus seis componentes.

La mayor parte de las formulaciones propuestas se basan en una función de plastificación $f(\sigma)$ que realiza la comparación entre una representación del estado tensional y un parámetro de plastificación del material k . El estado tensional se representa con una función escalar $\phi(\sigma)$ conocida comúnmente como potencial plástico, y el parámetro de plastificación es normalmente la tensión de fluencia plástica obtenida de un ensayo de tracción uniaxial (σ_{yield}), y ocasionalmente de un ensayo de cortadura (τ_{yield}). De forma genérica la expresión de esta función f es

$$f(\sigma, k) := \phi(\sigma) - k = \phi(\sigma, \mathbb{N}) - k \quad (3.43)$$

y en casos unidimensionales es común reducir la expresión a una expresión escalar del

tipo

$$f(\sigma, k) = \bar{\sigma} - k \quad (3.44)$$

donde $\bar{\sigma}$ es la tensión equivalente y el parámetro de material sería $k = \sigma_{yield}$. Al considerar las tensiones en su forma tensorial, en las expresiones aparece como el operador el término $\mathbb{N}$ tensor de cuarto orden de naturaleza proyectora, que contiene parámetros característicos de plastificación del material según sus simetrías, y que proyectado sobre el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ proporciona un valor escalar, que por comparación con k , permite dar una forma matemática escalar a la condición de plastificación, y es que habrá plastificación cuando se cumpla que $f(\sigma, k) = 0$.

La representación tridimensional de esta función en el espacio dimensional de tensiones principales se conoce también como superficie de plastificación, ya que encierra al dominio elástico admisible del material $\partial\mathbb{E}$. Vista desde el exterior esta superficie, se conforma como un volumen sobre el que se proyecta matemáticamente el cálculo plástico. El dominio elástico $\mathbb{E}$ queda entonces definido por la condición

$$f(\sigma, k) \leq 0 \quad (3.45)$$

En el proceso de cálculo la condición $f(\sigma, k) > 0$ implica una tensión superior a la de plastificación, que es físicamente imposible. Durante el cálculo algorítmico este espacio exterior puede ser ocupado transitoriamente por la etapa de predicción, pero siempre le sucederá otra segunda de corrección, y la tensión volverá a $\partial\mathbb{E}$.

La función $f(\phi, \sigma_y)$ se representa geoméricamente en un espacio cartesiano con ejes de referencia en tensiones principales, conocido como espacio de Haigh-Westergaard (figura 3.15), donde se usa como base de referencia la formada por las direcciones principales del tensor de tensiones $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$, generando el volumen que representa al dominio elástico $\mathbb{E}$ y su superficie exterior $\partial\mathbb{E}$. En esta base se representa también el eje hidrostático, que contiene de forma genérica a la tensión hidrostática, y queda equidistante de los ejes coordenados, ya que la tensión hidrostática no tiene dirección de acción, pues opera por igual en todas las direcciones. Los materiales de carácter cristalino suelen presentar un comportamiento de plastificación independiente de la componente de tensión hidrostática, por lo que la función de plastificación se sitúa por simetría alrededor de dicho eje, preservando su independencia con esta componente de tensión. La tensión hidrostática que se refleja en eje hidrostático tendrá el valor

$$\sigma^h = \frac{1}{3}I_1 = \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (3.46)$$

siendo I_1 el invariante primero o traza del tensor de tensiones. Al plano perpendicular al eje hidrostático se le denomina plano de Nadai o plano π , la intersección de este plano con el espacio $\mathbb{E}$ permite identificar una forma plana con la estudiar la evolución de la plastificación con el endurecimiento. Este modo de representar el dominio elástico es válido para plasticidad isotropa y anisótropa, si bien su forma será diferente en cada caso, según el criterio de plastificación.

3.4.1. Funciones de plastificación en isotropía

Un material plásticamente isotrópico tiene un comportamiento que no depende de direcciones preferentes en el sólido, tendrá por tanto una función de plastificación que

Figura 3.15: Espacio de Haigh-Westergaard - Dominio elástico $\mathbb{E}$ alrededor del eje hidrostático.

no depende de ninguna dirección en el material. Sin embargo esta función si depende de las componentes del tensor de tensiones, y estas componentes son diferentes para cada dirección, esto hace que la función de plastificación pueda adoptar diferentes formulaciones según la base de direcciones con la que se exprese el tensor, lo que puede inducir a confusión, pues habrá una expresión general para una base de referencia cualquiera y otra para las direcciones principales de tensión. Por esta razón, las funciones de plastificación se suelen describir en términos invariantes del tensor, y así obtener una expresión compacta, que además no induce ninguna confusión.

Los invariantes del tensor de tensiones se suelen describir a través de sus componentes principales de tensión $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$, aunque también haya una expresión en componentes en cualquier dirección $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23})$, estos invariantes son el ya mencionado invariante lineal I_1

$$I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I} = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \quad (3.47)$$

donde $\mathbf{I}$ es el tensor identidad de orden 2; el invariante cuadrático I_2

$$I_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2) = \frac{1}{2} (I_1^2 - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{6} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2] \quad (3.48)$$

y el invariante cúbico I_3

$$I_3 = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^3) = \det \boldsymbol{\sigma} = \sigma_I \sigma_{II} \sigma_{III} \quad (3.49)$$

En materiales cristalinos, donde es común ignorar la participación de la componente hidrostática de tensión en la plastificación, también se manifiesta la presencia de estos

invariantes en el cálculo de la tensión desviadora:

$$\boldsymbol{\sigma}^d = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} = \mathbb{P}^S : \boldsymbol{\sigma} \quad (3.50)$$

donde $\mathbb{P}^S$ es el tensor proyector desviador simétrico de orden 4 que proyecta un tensor de orden 2 cualquiera hacia su parte desviadora-simétrica.

3.4.1.1. Criterio de plastificación de Tresca

También conocido como criterio de tensión cortante máxima, fue enunciado por Henry Tresca hacia 1860, y es el criterio de plastificación más antiguo utilizado en ingeniería. Tresca describió este criterio cuando todavía no existía la definición de tensor de tensiones, o cuando no se usaba aún, pues este concepto fue introducido por Cauchy muy pocos años después, y las reglas del cálculo tensorial de Levi-Civita aún no se habían escrito, aunque los conceptos de tensión normal y cortante ya eran de uso común.

El criterio compara la tensión cortante máxima del estado tensional con la tensión cortante máxima en el estado uniaxial de carga al alcanzar la plastificación

$$\tau_{\text{máx}} \leq \tau_{\text{máx}}^{\text{uniaxial}} \quad \Leftrightarrow \quad \tau_{\text{máx}}^{\text{uniaxial}} = \frac{1}{2} \sigma^{\text{yield}} \quad (3.51)$$

Añadiendo la interpretación tensorial, se podría conformar un potencial plástico del tipo

$$\phi = \frac{1}{2} \max\{|\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_{II} - \sigma_{III}|, |\sigma_I - \sigma_{III}|\} \quad (3.52)$$

donde la diferencia de tensiones principales representa la tensión cortante máxima existente en el punto, cuya expresión se puede obtener por interpretación del tensor de tensiones a través de los círculos de Mohr, donde las tensiones principales configuran los diámetros de los tres círculos. Asimismo, el parámetro plástico del criterio de Tresca sería

$$k = \frac{1}{2} \sigma_y \quad (3.53)$$

con lo que la función de plastificación correspondiente se escribiría

$$f(\sigma, k) = \max\{|\sigma_I - \sigma_{II}|, |\sigma_{II} - \sigma_{III}|, |\sigma_I - \sigma_{III}|\} - k \quad (3.54)$$

En el espacio de Haig-Westergaard este criterio genera como dominio elástico un prisma de base hexagonal sobre el plano de Nadai, que contiene al eje hidrostático en el eje principal de simetría, y las superficies de plastificación son las caras de un prisma de base hexagonal regular, con las paralelas al eje hidrostático. Es una función de plastificación que no es suave, pues no es continua en su primera derivada en las aristas del prisma al cambiar de una cara a otra, pero cumple con el criterio de convexidad que se exige para garantizar la unicidad de la solución en la fase del *closest point projection* y obtener convergencia en el cálculo.

3.4.1.2. Función de plastificación-criterio de Von Mises o del J_2

Esta función de plastificación deriva del criterio de la energía de distorsión máxima admisible por el material, o más científicamente conocido como criterio del J_2 (invariante segundo de $\boldsymbol{\sigma}^{dev}$). Es el criterio más utilizado en ingeniería, por sus virtudes de eficacia y sencillez. Su enunciado se atribuye a varios autores que lo han descrito de forma más o menos semejante (Huber, Levi, Hencky), aunque el autor más popular que le ha dado nombre es Von Mises ([152]), si bien se debe a Hencky la formulación que hoy utilizamos [54]. El criterio compara la energía de distorsión ($\mathcal{W}$) de las tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ con la energía de distorsión característica del material, obtenida en el ensayo uniaxial cuando se inicia la plastificación ($\mathcal{W}_y$), resultando la expresión

$$f(\boldsymbol{\sigma}, k) = \mathcal{W} - \mathcal{W}_y \quad (3.55)$$

sin embargo esta expresión hoy en día no se usa en forma energética, sino que ha evolucionado hacia formas explícitamente tensionales. Aquí es donde aparece el concepto de tensión equivalente de Von Mises ($\bar{\sigma}$), como aquella tensión que uniaxialmente provocaría en el material la misma energía de distorsión que el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$. Tras llevar a cabo la aplicación matemática de esta definición, la expresión que se obtiene para la tensión equivalente es

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2]} \quad (3.56)$$

si interpretamos tensorialmente la energía de distorsión para un material isótropo, ésta quedaría descrita por la expresión

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2\mu} \frac{\boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d}{2} \quad (3.57)$$

donde μ es el módulo elástico desviador, y se reconoce la presencia del invariante segundo desviador en la parte

$$J_2 = \frac{(\boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d)}{2} \quad (3.58)$$

que también se puede expresar en tensiones principales como

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2] \quad (3.59)$$

donde se reconoce la presencia de la ec. (3.56), y por tanto $\bar{\sigma} = \sqrt{3J_2}$.

El parámetro plástico de este criterio estaría relacionado con la energía de distorsión al comienzo de la plastificación ($\mathcal{W}_{yield}$), que en un ensayo uniaxial de tracción sería

$$\mathcal{W}_y = \frac{1}{2\mu} J_{2y} = \frac{1}{6\mu} (\sigma_y)^2 \quad (3.60)$$

de manera que eliminando la presencia del módulo desviador 2μ , y definiendo el parámetro plástico como $k = \sigma_y$, la función de plastificación se puede escribir

$$f(\boldsymbol{\sigma}, k) = J_2 - J_{2y} = \frac{1}{3} \bar{\sigma}^2 - \frac{1}{3} k^2 \quad (3.61)$$

$$\equiv \bar{\sigma}^2 - k^2 \quad (3.62)$$

$$\equiv \bar{\sigma} - k \quad (3.63)$$

ahora la ec. (3.62), que es la forma ingenieril convencional de utilizar el criterio de Von Mises, mientras que la ec. (3.61) sería la forma más común en computación. Operando en toda la expresión (lo que no afecta al resultado de f , pues la condición es $f \leq 0$), e introducimos el concepto de potencial plástico ϕ según

$$\phi = \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d = 2J_2 \quad (3.64)$$

la función de plastificación de Von Mises se puede escribir

$$f(\sigma, k) = \frac{1}{2}\phi(\sigma) - \frac{1}{3}k^2 \quad (3.65)$$

o bien en la forma equivalente

$$f(\sigma, k) = \phi(\sigma) - \frac{2}{3}k^2 \quad (3.66)$$

donde vemos la presencia del factor numérico desviador característico $\frac{2}{3}$ sobre el parámetro plástico del material, que aparece cuando se llevan a cabo las operaciones desviadoras. Es común en algunos autores considerar el parámetro plástico ya corregido por este factor en la forma $\kappa \equiv \sqrt{\frac{2}{3}}k$, quedando la expresión equivalente

$$f(\sigma, k) = \phi(\sigma) - \kappa^2 \quad (3.67)$$

Por otro lado, si se aplica el álgebra tensorial y se utiliza el proyector simétrico desviador $\mathbb{P}^S$, se obtiene la expresión del potencial

$$\phi = \boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d = (\mathbb{P}^S : \boldsymbol{\sigma}) : (\mathbb{P}^S : \boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{N}^S : \boldsymbol{\sigma} \quad (3.68)$$

que permite emplear el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ directamente en la formulación, y donde $\mathbb{N}^S$ es un tensor proyector desviador simétrico de cuarto orden que más adelante se usará extensivamente, ya que permite recuperar este criterio como una particularización del criterio de plastificación en anisotropía.

En el espacio de Haig-Westergaard el criterio de Von Mises genera un dominio elástico cilíndrico alrededor del eje hidrostático, que queda circunscrito alrededor del dominio hexagonal-prismático de Tresca. Analizando este dominio elástico sobre el plano de Nadai se conforma un círculo alrededor del polo, forma que revela el carácter de isotropía de modelo de plastificación, y cuyo diámetro es el parámetro $\sqrt{\frac{2}{3}}k$, el parámetro plástico reducido por el número desviador característico. Tomando ahora en observación cualquiera de los planos principales que conforman las tensiones (σ_I, σ_{II}) , $(\sigma_{II}, \sigma_{III})$ y (σ_I, σ_{III}) , el dominio elástico proyectado en estos planos sería una elipse, que es la representación gráfica habitual que aparece en la literatura de la función de plastificación de Von Mises, en el plano de tensiones principales (figura 3.16).

Una de las características más interesantes de esta función es que la superficie de plastificación que representa el criterio de Von Mises es siempre continua y convexa, razón por la cuál numéricamente es tan empleado, aunque no sea el criterio más conservativo ni el que reproduce de forma más fidedigna la física del problema elastoplástico.

Figura 3.16: Espacio de Haig-Westergaard - Dominio elástico de Von Mises y Tresca sobre el plano de tensiones principales I y II .

3.4.1.3. Criterio de Drucker

Este criterio descrito por Drucker en 1949 devuelve resultados intermedios a los criterios de Tresca y Von Mises, y genera un dominio elástico comprendido entre los citados. La función de plastificación propone un potencial plástico con un invariante adicional, el invariante cúbico desviador J_3 , donde se considera un ajuste experimental a través de ensayos del material. El potencial plástico es

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}) = J_2^3 - c J_3^2 \quad (3.69)$$

donde c es un parámetro característico del material de ajuste experimental. Como parámetro plástico del material k se utiliza la tensión uniaxial de fluencia del material (σ^{yield}) a través de la relación

$$k^2 = \tau_y^6 = \frac{\sigma_y^6}{27} \quad (3.70)$$

Adicionalmente, para garantizar la convexidad de la función de plastificación el parámetro c ha de estar limitado al subespacio $[-27/8, 9/4]$.

3.4.1.4. Función de Hershey-Hosford

Este criterio fue enunciado primero por Hershey para isotropía (1954), y posteriormente complementado por Hosford para anisotropía (1970). El criterio propone una función de plastificación inspirada originalmente en la de Von Mises, modificando el exponente cuadrado que aparece en la ec. (3.56) cuando se expresa en direcciones principales, y cambiándolo por una exponente de otro valor, con lo que la función de plastificación deja de ser cuadrática. El potencial plástico resultante sería

$$\phi = \left[\frac{1}{2} [(\sigma_I - \sigma_{II})^a + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^a + (\sigma_I - \sigma_{III})^a] \right]^{\frac{1}{a}} \quad (3.71)$$

donde a es un parámetro característico del material, relacionado con su red cristalográfica principal. Cuando este exponente es $a = 2$ la ec. (3.71) reproduce el criterio de Von Mises, y cuando es $a = 1$ resulta en el criterio de Tresca. Cualquier valor comprendido $[4, \infty]$ produce un dominio elástico comprendido entre el dominio del criterio de Tresca y el de Von Mises. En el intervalo $[2, 4]$ la fórmula produce dominios elásticos exteriores al de Von Mises. Este criterio se utiliza en plasticidad de cristales desde que Hosford propuso para el exponente a el valor de 6 en cristales BCC y 8 en cristales FCC.

3.4.2. Funciones de plastificación en anisotropía

La dependencia de la función de plastificación con las direcciones del material y la dirección de la carga aplicada lleva a construir funciones espaciales de plastificación donde las componentes de tensión de plastificación resultan no ser iguales en todas las direcciones. En términos equivalentes dependerá de cada combinación de material-carga en el espacio. En este sentido, la introducción del tensor $\mathbb{N}$ característico de cada material, va a permitir operar fácilmente la anisotropía del material sobre la función de plastificación y el tensor de tensiones soportado. Si las funciones de isotropía clásicas que se han presentado no incorporaban esta forma tensorial, es ahora cuando se justifica su uso ya que la isotropía plástica es susceptible también de ser formulada en estos términos tensoriales, sin más que particularizar las expresiones generales de anisotropía.

La literatura acerca de las funciones de plastificación anisótropa es muy amplia, y existen formulaciones que van desde las más generales, como la primera función de Hill, a funciones más específicas como la *Yld2000*-2D de Barlat para elementos planos. Sin querer generar una taxonomía de funciones de plastificación, podemos agruparlas en tres tipos fundamentales según el carácter del tensor $\mathbb{N}$ que opera en cada una de ellas. En la tabla 3.1 se recogen algunas de las más usadas o referenciadas, agrupadas de forma resumida según la formulación que actúa sobre el tensor de tensiones para construir el potencial plástico.

Tabla 3.1: Funciones de plastificación en anisotropía plástica: clasificación de tipos/familias.

familia de Hill	familia de Hosford-Barlat	Otros
Hill 1948	Hosford 1979	Bassani 1977
Hill 19	Barlat 1989	Zhou 1990
Hill 1948	Barlat 1991	Zhou 1994
Hill 1948	Karafillis-Boyce	Banabic 2000 (<i>BBC2000</i>)
Chu 1995	Barlat 1994 (<i>Yld94-Yld96</i>)	Cazacu-Barlat 2001
Lin 1995	Barlat 2000 (<i>Yld2000</i>)	Cazacu-Barlat 2004
	Barlat 2005 (<i>Yld2004</i>)	Cazacu 2006 (<i>CPB06</i>)
	Barlat 2011 (<i>Yld2011</i>)	

3.4.2.1. Funciones de plastificación de tipo Hill. Criterio Hill-1948

La primera función de plastificación que considera la anisotropía del material fue propuesta por Hill en 1948 [56], y está inspirada en el potencial plástico de energía de distorsión máxima de Von Mises aplicado a monocristales [101]. Originalmente se utilizó en cristales de estructura cúbica, por tanto con simetría ortótropa, y posteriormete se ha extendido a todo tipo de materiales anisótropos, policristalinos con textura o materiales compuestos, siempre que respete la simetría ortótropa, pues los resultados suelen ser óptimos. En su formulación original, la función de plastificación de Hill se expresa

$$f(\boldsymbol{\sigma}, k) = \frac{1}{2} [F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\tau_{23}^2 + 2M\tau_{13}^2 + 2N\tau_{12}^2 - 1] \quad (3.72)$$

donde los coeficientes F, G, H, L, M y N son parámetros de anisotropía característicos del material que se determinan en ensayos. Esta ec. (3.72) se suele escribir en forma tensorial, que es la forma actual de aplicación como

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{N} : \boldsymbol{\sigma} - 1 = \boldsymbol{\sigma}^d : \mathbb{N} : \boldsymbol{\sigma}^d - 1 \quad (3.73)$$

donde aparece el tensor $\mathbb{N}$ de cuarto orden que contiene los parámetros de anisotropía plásticas característicos de cada material. Esta expresión guarda una estrecha relación con la ec. (3.68), ya que aparece la misma operación de doble contracción del tensor $\mathbb{N}$ sobre $\boldsymbol{\sigma}$. Este tensor de parámetros plásticos del material genera el mismo resultado que la función de Hill original, ec. (3.72), lo que pone de manifiesto el carácter desviador y simétrico de $\mathbb{N}$, pues $\mathbb{N} = \mathbb{P}^S : \mathbb{N} : \mathbb{P}^S$ (a saber: $\boldsymbol{\sigma}^d : \mathbb{N} : \boldsymbol{\sigma}^d = (\mathbb{P}^S : \boldsymbol{\sigma}) : \mathbb{N} : (\mathbb{P}^S : \boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{N} : \boldsymbol{\sigma}$).

Para facilitar la comprensión de la ec. (3.72), podemos recurrir a la notación pseudovectorial de Voigt (a veces también llamada notación de Mandel), aprovechando las simetrías de los tensores implicados, $\boldsymbol{\sigma}$ es un tensor simétrico de orden dos y $\mathbb{N}$ un tensor de orden cuatro con simetrías mayores y menores. Es posible reproducir la ec. (3.73) a un vector de dimensiones 6×1 y una matriz simétrica de dimensiones 6×6 , y después de aplicar las correspondientes simetrías, la operación matricial da la forma pseudovectorial [73]

$$\phi = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbb{N} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3.74)$$

donde

$$\boldsymbol{\sigma} := \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12}\sqrt{2} \\ \sigma_{13}\sqrt{2} \\ \sigma_{23}\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \mathbb{N} := \begin{bmatrix} G+H & -H & -G & 0 & 0 & 0 \\ -H & F+H & -F & 0 & 0 & 0 \\ -G & -F & G+F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2L \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

e interpretando la operación $(\cdot)$ como un producto contraído simple entre vector y matriz, y con la presencia de los coeficientes plásticos de la función original propuesta por Hill -ec. (3.72)-. Esta expresión recuerda a la de ley de Hooke de la elasticidad lineal

en su configuración, pues la operación algebraica es de la misma naturaleza, aunque cada tensor tenga su propia interpretación física.

La determinación de los 6 parámetros de anisotropía plástica se realiza mediante ensayos del material con diferentes orientaciones, que han de coincidir con las direcciones preferentes de ortotropía del material, las direcciones de laminación o de forja. Usando como referencia la dirección de ortotropía principal, y empleando la nomenclatura según normas ASTM, los coeficientes de $\mathbb{N}$ son

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \left[-\left(\frac{1}{\sigma_L}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma_T}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma_S}\right)^2 \right] \\ G &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\sigma_L}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sigma_T}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma_S}\right)^2 \right] \\ H &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\sigma_L}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma_T}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sigma_S}\right)^2 \right] \\ L &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau_{TS}}\right)^2 \quad M = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau_{LS}}\right)^2 \quad N = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau_{LT}}\right)^2 \end{aligned} \quad (3.76)$$

donde σ_L , σ_T y σ_S son las tensiones normales de plastificación en las direcciones principales de anisotropía, L longitudinal de laminación o estirado (*RD rolling direction*), T transversal larga (*TD*), y S transversal corta a través del espesor (*ND*); τ_{LT} , τ_{LS} y τ_{TS} son las tensiones de plastificación en cortadura pura en los planos de direcciones principales de anisotropía. Para determinar estos parámetros característicos del material se necesitan pues 6 ensayos.

Los coeficientes de la ec. (3.76) suelen utilizarse en forma normalizada con respecto a una tensión de plastificación de referencia, k , comúnmente la dirección preferente de material L donde se cumple que $k = \sigma_L$, quedando los nuevos coeficientes como

$$\hat{f} = F \frac{2}{3} k^2 \quad \hat{g} = G \frac{2}{3} k^2 \quad \hat{h} = H \frac{2}{3} k^2 \quad \hat{l} = L \frac{2}{3} k^2 \quad \hat{m} = M \frac{2}{3} k^2 \quad \hat{n} = N \frac{2}{3} k^2 \quad (3.77)$$

los términos expresados en letra minúscula sustituyen a sus equivalentes originales en letra mayúscula ($\hat{f} \Leftrightarrow F$, $\hat{g} \Leftrightarrow G$...), y conformando el nuevo tensor $\hat{\mathbb{N}}$ de coeficientes normalizados. Ahora, la formulación de la función de Hill de la ec. (3.73) se puede reinterpretar a través de un potencial ϕ equivalente a la ec. (3.66), y obteniendo la forma

$$f(\sigma, k) = \boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbb{N}} : \boldsymbol{\sigma} - \frac{2}{3} k^2 \quad (3.78)$$

$$= \boldsymbol{\sigma}^{dev} : \hat{\mathbb{N}} : \boldsymbol{\sigma}^{dev} - \frac{2}{3} k^2 \quad (3.79)$$

$$= \phi(\sigma, \hat{\mathbb{N}}) - \frac{2}{3} k^2 \quad (3.80)$$

y donde $\hat{\mathbb{N}}$ es el tensor de coeficientes plásticos del material ortótropo normalizado a la tensión plástica de referencia de la dirección preferente 1. La aplicación del criterio de Hill sobre materiales plásticamente isótropos donde $\sigma_{yield} = \sigma_L = \sigma_T = \sigma_S = \sqrt{3} \tau_{TS} =$

$\sqrt{3}\tau_{LS} = \sqrt{3}\tau_{LT}$, proporciona los valores $\hat{f} = \hat{g} = \hat{h} = 0.5$, y $\hat{l} = \hat{m} = \hat{n} = 1.5$, este resultado que coincide con el que se obtiene directamente de la función de plastificación isotropa de Von Mises -ec. 3.66-, poniendo en evidencia el paralelismo entre ambas funciones. Desde un punto de vista matemático también sería posible obtener una tensión equivalente

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbb{N}} : \boldsymbol{\sigma}}$$

Aunque las últimas comparaciones pudieran hacer pensar que la función de Hill es equivalente a la función de Von Mises en anisotropía, la realidad no es así, ya que hay algunas diferencias destacables entre ambos criterios de Hill y Von Mises. El propio Hill observó que si el criterio de Von Mises genera un dominio elástico independiente de la tensión hidrostática y solo depende de la energía desviadora o de distorsión, su criterio no cumple esta condición, ya que un material anisótropo puede presentar distorsiones de cortadura ante la presencia de tensiones hidrostáticas, por lo que no es generalizable la denominación de criterio de energía de distorsión máxima en anisotropía.

Por otro lado, si ahora se tienen en cuenta los parámetros de Lankford descritos en el apartado 3.3, se pueden encontrar relaciones con las que se determinan los coeficientes de $\hat{\mathbb{N}}$ numéricamente. Así por ejemplo el resultado en la condición de tensión plana, característica de elementos laminados de pared delgada es [58] [59]

$$F = \frac{1}{k^2} \frac{r_0}{r_{90}(1+r_0)}, \quad G = \frac{1}{k^2} \frac{1}{1+r_0} \quad \text{y} \quad L = \frac{1}{k^2} \frac{(r_0 + r_{90})(1 + 2r_{45})}{2r_{90}(1+r_0)}$$

Por otro lado, si se aplican simetrías adicionales al material, el número de parámetros también se reduce. Así para un material transversalmente isotrópico alrededor del eje transversal corto S (ó z), como el caso de una preforma circular de embutición modelizada con elementos planos, entonces $F = G$, y $L = G + 2H$.

Una virtud interesante de la función de Hill es su naturaleza cuadrática sobre las tensiones, lo que garantiza la convexidad de la función en cualquier punto de la superficie de plastificación, así como la unicidad de la solución numérica al aplicar el mecanismo de retorno radial durante el proceso algorítmico del predictor-corrector.

La limitación más importante de la función de Hill-1948 es que solo reproduce de forma fidedigna el comportamiento plástico anisótropo de materiales con simetría ortótropa, dando resultados imperfectos en aquellos materiales con simetrías más complejas, como algunas aleaciones metálicas de Al , y muchas de Mg o Ti , que presentan texturas con simetría no ortótropa. En estos casos la función de Hill-1948 muestra algunas deficiencias en la simulación del comportamiento elastoplástico, ya que sería necesario un número de coeficientes de anisotropía superior a los 6 recogidos en la ec. (3.77). Esta limitación afecta a los problemas de embutición profunda, donde la función cuadrática de Hill sólo es capaz de reproducir casos de *earing* con formación de cuatro orejas ortogonales de anisotropía.

Hill propuso más tarde variantes de esta formulación [58][59], que presentan cambios en el exponente de la función para mejorar sus predicciones en diferentes materiales y casos de carga diferentes, pero conservando la forma de la función original -ec. (3.72)-.

Figura 3.17: Representación esquemática de la transformación lineal de tensiones de las funciones de plastificación de Barlat.

3.4.2.2. Funciones de plastificación de tipo Barlat

La segunda gran familia de funciones de plastificación anisótropa la componen las funciones de Barlat y su derivadas, que si bien poseen coeficientes diferentes, todas ellas tienen en común un planteamiento proyectivo. El nexo común es el uso de una transformación lineal del tensor de tensiones a través de una matriz-tensor de coeficientes de plastificación, por tanto semejante a la aplicación que hoy en día se realiza en computación con la función de Hill en forma tensorial. El resultado de la proyección es un tensor equivalente con el que se determina la superficie de plastificación. En la figura 3.17 se muestra esquemáticamente una representación del concepto de transformación lineal que se ejecuta en esta familia de funciones de plastificación [8], la transformación se opera desde el tensor de tensiones original hacia un tensor de tensión equivalente de naturaleza desviadora, en la figura 3.17 la transformación se representa sobre un tensor genérico plano por simplicidad.

Esta familia de funciones se clasifica como una generalización de la función de Hershey-Hosford (3.4.1.4) aplicado en cristales ortótropos FCC y BCC, y exige una densa campaña de ensayos. La primera función tipo Barlat es la *Yld91* [10], y es una extensión para anisotropía de la fórmula de Hershey, descrita en tensiones equivalentes, y es válida para elementos sólidos. Estas funciones son de la forma

$$f(\sigma, k) = \left[\frac{1}{2} [|\tilde{s}_1 - \tilde{s}_2|^a + |\tilde{s}_1 - \tilde{s}_3|^a + |\tilde{s}_2 - \tilde{s}_3|^a] \right]^{\frac{1}{a}} - k \quad (3.81)$$

donde las tensiones equivalentes $\tilde{\mathbf{s}} \equiv \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^d$ se obtienen de la operación proyectiva lineal

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^d = \tilde{\mathbb{L}} : \boldsymbol{\sigma}^d = \tilde{\mathbb{L}} : \mathbb{P}^S : \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{L} : \boldsymbol{\sigma} \quad (3.82)$$

y donde $\mathbb{L}$ es un tensor proyector simétrico desviador de cuarto orden que contiene los coeficientes plásticos de anisotropía del material, expresión que recuerda a la ec. (3.73). Las simetrías del tensor $\mathbb{L}$, mayores y menores como en $\mathbb{N}$, permiten que sea descrito en forma matricial con notación de Voigt. Así para la función de plastificación *Yld91*

son 6 componentes en total expresadas en la forma

$$\mathbb{L} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} c_2 + c_3 & -c_3 & -c_2 & 0 & 0 & 0 \\ -c_3 & c_1 + c_3 & -c_1 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & -c_1 & c_1 + c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3c_6 \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

y añadiendo la condición de $L_{ijkk} = 0$ para garantizar que la componente hidrostática de $\tilde{\sigma}^d$ siempre sea cero.

Es fácil observar un cierto paralelismo con la función de Hill, pero las tensiones operadas son ahora *equivalentes* y no las reales del problema elastoplástico. La función preserva la convexidad siempre que el exponente a heredado de la función de Hershey sea mayor de 1. Sin embargo no todas las funciones de la familia de Barlat garantizan la convexidad en todo su dominio, razón por la cuál su aplicación no se ha generalizado en mayor medida.

Esta idea de la transformación de un espacio de tensiones reales a otro equivalente fue utilizado también por Karafilis y Boyce [67] con una estructura parecida y la misma operativa práctica, pero con 8 componentes de anisotropía.

Otras funciones de Barlat para elementos sólidos siguen este principio de la transformación lineal del espacio de tensiones, si bien los sucesivos modelos derivados de esta función han ido aumentando el número de parámetros de anisotropía, y se han adaptado a diferentes materiales y condiciones de contorno, donde la función *Yld91* presentaba errores en la simulación respecto de los resultados experimentales. La función *Yld2000-2D* contiene 9 coeficientes pero solo es válida para sólidos planos en deformación plana, la función *Yld2004* contiene 13 coeficientes, la función *Yld2011-18p* que contiene 18 coeficientes y la *Yld2011-27p* contiene 27 coeficientes [5], [7].

Como comparación de los resultados que pueden ofrecer la función de plastificación de Hill y la función de plastificación de Barlat se muestran las figuras 3.18 y 3.19, donde se representa el espacio elástico inicial sobre una chapa metálica plana al aplicar condiciones de plastificación. En el primer caso se trata de una aleación de aluminio AA6022 tomada de la referencia [23], y en el segundo un acero DP500 tomado de la referencia [84]. En ambas referencias se compara el dominio elástico en un espacio de tensión plana sobre la función de Hill-1948/Von Mises y la función *Yld2000-2D* de Barlat, con las tensiones de plastificación normalizadas a la tensión de fluencia plástica de la dirección de laminación ($k = \sigma_0$). El espacio definido por ambas funciones es semejante en tamaño y en forma, y presenta las diferencias típicas de una función de naturaleza cuadrática y convexa como es la función de Hill, y una de las funciones de Barlat más usadas, que siendo más precisas en sus resultados respecto de los valores experimentales, no garantiza la convexidad en todo el dominio. Desde un punto de vista práctico, esta tesis persigue demostrar la validez computacional del modelo elastoplástico usando una función de Hill que garantiza la convexidad de todo el dominio, aún a riesgo de no reproducir con precisión el comportamiento de cualquier material ortótropo. Sin embargo, gracias a esa convexidad sigue siendo una función ampliamente usada y válida computacionalmente para un gran número de materiales.

Figura 3.18: Espacio elástico normalizado en el plano principal de tensión: función de plastificación en un problema de tensión plana con aleación de aluminio 6022: resultados de la función de Hill y la función de Barlat. Reproducción extraída de [23].

Figura 3.19: Espacio elástico normalizado en el plano principal de tensión: función de plastificación en un problema de tensión plana con acero DP500: resultados de la función de Von Mises/Hill vs la función de Barlat, y resultados experimentales. Reproducción extraída de [84].

3.5. Ley de evolución o regla de flujo plástico

La deformación plástica ϵ_p , y por extensión el flujo plástico $\dot{\epsilon}_p$ en el problema computacional, son las variables internas fundamentales del problema plástico. Ambas están relacionadas con otras variables externas del problema, como la deformación total ϵ o la temperatura θ , que se pueden manipular desde el exterior del sólido. En cambio $\dot{\epsilon}_p$ es una variable interna que en el sólido aparece de forma espontánea con el comportamiento del material, y no se puede gobernar exteriormente, lo que la convierte en la incógnita del cálculo plástico que es necesario determinar con una ley de evolución que actúa como ley constitutiva.

En materiales de naturaleza cristalina la ley de evolución del flujo plástico se plantea comúnmente mediante una asociación entre la variable $\dot{\epsilon}_p$ y la función de plastificación f , propiedad conocida como asociatividad [40],[57],[16], y que en la práctica ha demostrado ser una ley muy efectiva. La ley se plantea en la forma

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\gamma} \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} \quad (3.84)$$

donde γ es el parámetro plástico asociativo entre la tasa de deformación plástica $\dot{\epsilon}_p$, y el gradiente de la función de plastificación en un espacio de tensiones Haig-Westergaard, contraído en la forma $\partial \sigma f$. La interpretación de la ec. (3.84) en el espacio de tensiones representa la proyección sobre la superficie de plastificación que se realiza desde un estado tensional *trial* elástico o de prueba, el predictor elástico. Cuando la tensión excede el dominio elástico y es necesario recuperar de nuevo un estado de tensiones físicamente posible en el sólido, esta acción de retorno al dominio elástico se acepta como una proyección por el camino más corto posible entre un punto y una superficie, entonces esa es proyección según la normal a dicha superficie que se representa con el término $\partial \sigma f$, y que se denomina como corrector plástico. Este sencillo mecanismo se conoce como retorno radial o *return mapping* [155], y las acciones de retorno para llevar a cabo la solución del problema plástico son las que en esta tesis se ejecutan novedosamente con un corrector elástico disipativo, en lugar del mencionado corrector plástico. En la figura 3.21 se muestra una interpretación gráfica de este esquema corrector plástico de retorno radial sobre la superficie de plastificación.

Si en la ec. (3.84) se tiene en cuenta la naturaleza tensorial de las variables internas implicadas, $\dot{\epsilon}_p$ y σ , entonces se comprueba la naturaleza escalar de γ , ya que el gradiente de la función de plastificación se puede interpretar como un tensor proyector [131], que proyecta las tensiones elásticas predictoras o *trial* sobre $\partial \mathbb{E}$, la superficie del dominio elástico $\mathbb{E}$.

En materiales cristalinos la plastificación es independiente de la componente hidrostática de tensión, y el flujo plástico $\dot{\epsilon}_p$ queda así asociado con el espacio de Haig-Westergaard a través del gradiente de la función de plastificación ($\partial_\sigma f$). Dada la naturaleza desviadora de la solución, el flujo plástico ha de ser simétrico y también desviador: $tr(\epsilon_p) = 0$, lo que preserva una plasticidad isocóra o a volumen constante. Resulta habitual encontrar la expresión

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\gamma} \text{sign}(\sigma) \quad \leftarrow \quad \partial \sigma f(\sigma) \equiv \text{sign}(\sigma) \quad (3.85)$$

que refleja de nuevo la equivalencia intrínseca entre $\dot{\gamma}$ y $\dot{\epsilon}_p$. Esta consideración permite

interpretar el parámetro escalar γ como una deformación plástica equivalente del problema elastoplástico, aceptación común en las publicaciones científicas.

La calificación de γ como multiplicador plástico asociativo nace de la aplicación del principio de máxima disipación plástica, interpretado como una optimización del problema elastoplástico a través de un funcional lagrangiano $\mathcal{L}$ sobre la disipación, ec. (2.29). La solución se maximiza imponiendo la condición de plastificación como restricción del problema, y así disipación $\mathcal{D}$ y condición de flujo plástico quedan asociadas linealmente mediante el multiplicador de Lagrange $\dot{\gamma}$. Por elegancia matemática, la maximización se obtiene en el mínimo de $\mathcal{L}$ cuando se emplea la disipación $\mathcal{D}$ con signo negativo

$$\mathcal{L} = -\mathcal{D} + \dot{\gamma} f(\boldsymbol{\sigma}, k) = -(\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \Psi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}_e) + \dot{\gamma} f(\boldsymbol{\sigma}, k) \quad (3.86)$$

y al imponer la minimización resulta el sistema

$$\begin{aligned} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \mathcal{L} = 0 & \implies \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\gamma} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f \\ \partial_{\dot{\gamma}} \mathcal{L} = 0 & \implies f(\boldsymbol{\sigma}, k) = 0 \end{aligned} \quad (3.87)$$

donde la primera ecuación es la ley de asociatividad y la segunda, a la condición de plastificación. Si se impone ahora la condición de que $\boldsymbol{\sigma}$ pertenezca al espacio $\mathbb{E}$, o lo que es igual, que $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y) \leq 0$, y la condición de flujo plástico no nulo ($\dot{\gamma} > 0$), ambas de forma simultánea conforman las condiciones de Kuhn-Tucker

$$\left. \begin{aligned} f(\boldsymbol{\sigma}, k) < 0 & \implies \dot{\gamma} = 0 \\ \dot{\gamma} > 0 & \implies f(\boldsymbol{\sigma}, k) = 0 \end{aligned} \right\} \implies \dot{\gamma} \times f(\boldsymbol{\sigma}, k) = 0 \quad (3.88)$$

si además estas condiciones se aplican en teoría incremental como cumplimiento en el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$, se llega a

$$\dot{\gamma} \times \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, k) = 0 \quad (3.89)$$

conocida como condición de consistencia plástica, donde el material se halla en un punto neutro de equilibrio en la superficie de fluencia, y donde la condición flujo plástico $\dot{\gamma} > 0$ obliga a $\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, k) = 0$. Así el parámetro γ recibe también el nombre de parámetro de consistencia plástica.

Estas condiciones obligan a que el espacio $\mathbb{E}$ tenga una superficie exterior $\partial\mathbb{E}$ definida por $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$, que ha de ser convexa y permitir la existencia de solución en el retorno radial única [131],[18], condición necesaria para llevar a cabo un cálculo robusto, y cumplir con el postulado de Drucker [33, 32].

Si introducimos el endurecimiento en la ley de evolución, también asociativamente a través de la variable interna adicional plástica $\dot{\boldsymbol{\xi}}$, y si se toma la ec. (3.33), el funcional lagrangiano a minimizar quedará condicionado por la presencia de la energía libre asociada al endurecimiento en la forma

$$\mathcal{L} = -\mathcal{D} + \dot{\gamma} f(\boldsymbol{\sigma}, k) = -\left(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \frac{\partial \mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}_e)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e}\right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} : \dot{\boldsymbol{\xi}} + \dot{\gamma} f(\boldsymbol{\sigma}, k) \quad (3.90)$$

donde la minimización de la formulación asociativa de la ec. (3.87) añadiría la condición de la nueva variable

$$\partial_{\boldsymbol{\alpha}} \mathcal{L} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\xi}} = \dot{\gamma} \partial_{\boldsymbol{\alpha}} f \quad (3.91)$$

y así las variables internas adicionales de deformación ξ y de tensión α pasan a formar parte de las incógnitas que hay que resolver al integrar la ley de evolución. En esta formulación el número de incógnitas cuando se operan variables tensoriales pasaría de 7 para el caso plástico perfecto (las seis del tensor de flujo plástico y el parámetro γ), a no menos de 13 cuando se añaden las variables tensoriales adicionales del endurecimiento.

3.6. Integración de la ecuación de evolución

La solución del problema elastoplástico se lleva a cabo a través del método de los elementos finitos, como muchos problemas de contorno de la mecánica de los medios continuos (*boundary value problem*). El problema elastoplástico en deformaciones finitas es no lineal desde el punto de vista del material y también desde el punto de vista geométrico, y por ello se resuelve iterativamente a través de un procedimiento incremental fuerza-desplazamiento, que garantiza el equilibrio estático y la compatibilidad de deformación del problema.

En este contexto, la formulación de la mecánica de sólidos se describe en el marco continuo del tiempo, expresando las variables internas en su forma de tasa temporal. Esta formulación ha de ser resuelta en forma incremental, con pasos de tiempo finitos donde secuencialmente se resuelva el problema, esto se debe a que las variables internas que se operan en forma incremental han de estar sincronizadas en todas las fases del cálculo, ya que aún siendo calculada cada variable en un momento diferente del algoritmo, en el plano físico han de suceder todas ellas de forma simultánea o consistente. Por lo tanto el proceso de integración de las ecuaciones constitutivas obliga a reinterpretar estas ecuaciones en el marco algorítmico donde los tiempos modulan la forma incremental del cálculo [11]. En este marco es donde se integran simultáneamente las variables internas del problema plástico y las variables externas solución del problema de contorno, por tanto donde los elementos finitos se han de relacionar con las ecuaciones del problema elastoplástico de forma secuencial.

El problema de contorno de los elementos finitos en el cálculo no lineal implícito se resuelve con el método iterativo de Newton-Raphson, donde las ecuaciones están linealizadas en cada iteración, al tiempo que se busca la solución al sistema de ecuaciones. La solución en el problema de contorno se plantea a partir de la ecuación de equilibrio $\mathbf{f}^{ext} - \mathbf{f}^{int} = 0$, donde el vector $\mathbf{f}^{ext}$ contiene las fuerzas externas aplicadas, y el vector $\mathbf{f}^{int}$ contiene las fuerzas internas que se relacionan a su vez con el campo de tensiones/deformaciones de los elementos. Este paso recibe comúnmente el nombre de iteraciones globales, por desarrollarse sobre el conjunto del problema en el modelo discretizado de elementos finitos. La ecuación residuo de fuerzas en equilibrio adopta la forma

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}(\mathbf{u}) = {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}^{ext} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}^{int} \Rightarrow \mathbf{R}(\mathbf{u}) \equiv 0 \quad (3.92)$$

y la expresión linealizada del residuo en cada una de las iteraciones, se obtiene derivando respecto de los desplazamientos $\mathbf{u}$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}({}^{k+1}\mathbf{u}) = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}({}^k\mathbf{u}) + \left. \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{{}^k\mathbf{u}} {}^{k+1}\Delta \mathbf{u} \quad (\equiv 0) \quad (3.93)$$

$${}^{k+1}\mathbf{u} = {}^k\mathbf{u} + {}^{k+1}\Delta \mathbf{u} \quad (3.94)$$

donde el término $\partial \mathbf{R}(\mathbf{u}) / \partial \mathbf{u}|_{\mathbf{u}}$ es la matriz jacobiana o módulo tangente del problema de contorno. Este módulo linealizado se puede descomponer en dos términos de rigidez [13],[12], ambos también lineales, que se expresan de forma simplificada como

$${}^t_0 \mathbf{K}_M = \int_{\mathcal{B}} {}^t_0 \mathbf{B}_L^T {}^t_0 \mathbb{D}^* {}^t_0 \mathbf{B}_L dv \quad \text{y} \quad {}^t_0 \mathbf{K}_G = \int_{\mathcal{B}} {}^t_0 \mathbf{B}_{NL}^T {}^t_0 \mathbf{S} {}^t_0 \mathbf{B}_{NL} dv \quad (3.95)$$

donde $\mathbf{K}_M$ es la matriz de rigidez de material actualizada, querecoge los efectos linealizados de las no linealidades del material y dependiente del módulo tangente del material $\mathbb{D}^*$, en este caso el módulo elastoplástico $\mathbb{C}_{ep}$. Por el otro lado $\mathbf{K}_G$ es la matriz de rigidez geométrica, donde se recogen los efectos linealizados de las deformaciones finitas, y donde $\mathbf{S}$ es la tensión expresada según el segundo tensor de Piola-Kirchhoff, por ser conjugado de trabajo de las deformaciones cuadráticas de Green-Lagrange $\mathbf{A}$ en descripción lagrangiana, deformación finita habitual en el cálculo no lineal de elementos finitos.

El uso de una descripción material en estas magnitudes internas de tensión/deformación y módulo material lleva a la formulación *Total Lagrangean-TL*. Por contra, la descripción espacial en las variables internas lleva a la formulación *Updated Lagrangean-UL*. Ambas formulaciones, *TL* y *UL*, son comunes en el cálculo elastoplástico, si bien será la formulación *TL* la utilizada en esta tesis.

El punto de interés en esta sección es mostrar que la función del algoritmo elastoplástico va a ser el cálculo de las variables de tensión y módulo de material que el método de los elementos finitos necesita. Así pues las iteraciones globales de los elementos finitos, ec. 3.94, se han de comunicar con el algoritmo elastoplástico para recibir el resultado de $\mathbb{C}_{ep}$ y $\mathbf{S}$, que es el momento en él que se inicia el cálculo elastoplástico propiamente dicho mediante el mecanismo predictor-corrector [131], es cuando se lleva a cabo la integración numérica de la ecuación evolutiva del flujo plástico. Ambos términos, tensión $\mathbf{S}$ y módulo material $\mathbb{C}_{ep}$ se calculan en los puntos de integración de cada elemento. También se calculan las variables internas del problema elastoplástico que se almacenan para su utilización en operaciones posteriores, pero no intervienen en la solución del problema de elementos finitos de forma directa.

El algoritmo de integración con el que se calculan las variables internas del problema, por ser también de naturaleza no lineal y de solución iterativa, recibe el nombre de algoritmo de *iteraciones locales*, para marcar la diferencia con las *iteraciones globales* del problema de contorno. Esta es la función de la subrutina de material que implementada dentro del código de elementos finito, ejecuta el modelo elastoplástico (figura 3.20), de esta manera, si las iteraciones locales trabajan en el algoritmo elastoplástico sobre cada punto de integración de los elementos, las globales resuelven sobre los nodos de los elementos finitos para calcular la variable externa $\mathbf{u}$ del modelo.

Para finalizar la conformación de la ec. 3.95, el término $\mathbf{B}$ es la matriz cinemática de compatibilidad entre el vector desplazamientos $\mathbf{u}$ y las deformaciones $\mathbf{A}$. A su vez $\mathbf{B}_L$ representa la parte lineal en la relación cinemática $\mathbf{u} - \mathbf{A}$, mientras que $\mathbf{B}_{NL}$ representa los efectos no lineales de la relación cinemática entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{A}$. Este término $\mathbf{B}_{NL}$ es característico de las deformaciones finitas, y en la formulación del problema en deformaciones infinitesimales no está presente.

Figura 3.20: Esquema de flujo computacional del problema elastoplástico entre el modelo de elementos finitos y el modelo elastoplástico.

3.6.1. Integración de las variables internas

La integración de las ecuaciones constitutivas que conforman la ley de evolución del flujo plástico tiene como objetivo la determinación de la variable interna ε_p en la etapa correctora. De forma complementaria se calculan el resto de incógnitas del problema elastoplástico que son necesarias para completar el cálculo del problema de contorno, como $\mathbb{C}_{ep}$ o $\mathbf{S}$. Esta integración se realiza sobre cada punto de integración del elemento finito, como discretización finita del problema desde el marco continuo.

En el caso elastoplástico, siendo ε la variable externa gobernada por las condiciones de contorno del sólido, la variable interna tensorial ε_p se obtiene junto a la nueva variable interna escalar $\dot{\gamma}$, por medio de la asociatividad con el gradiente de la función de plastificación, y siguiendo la interpretación del retorno radial, se impone el cumplimiento de la consistencia plástica ($\dot{f} = 0$). Esto obliga a que la tensión resultante permanezca dentro del dominio elástico $\mathbb{E}$ cuando se alcanza la solución.

La integración de la ec. (3.84) definida en el marco continuo, se va a llevar a cabo en un marco algorítmico de dos etapas que se ejecutan en el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$: el *predictor elástico* y el *corrector plástico*. Ambas etapas se calculan de forma secuencial en el algoritmo, pero en la física original del problema plástico ambas ocurren de forma simultánea. La resolución de la ec. (3.84) se lleva a cabo durante la etapa del corrector plástico, mientras que en la etapa del predictor se determinan las condiciones iniciales o estado de prueba *trial* imponiendo un desplazamiento/deformación total inicial (predictor), estado desde el que se lleva a cabo la corrección plástica (corrector). Un esquema básico del mecanismo predictor-corrector se muestra esquemáticamente en la figura 3.21.

El predictor elástico presupone un estado tensional de prueba o *trial*, ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{tr}$ en forma incremental, a partir de un estado inicial de tensión ${}^t\boldsymbol{\sigma}$ y de la rigidez elástica del material, $\mathbb{C}_e$, para lo que se utiliza el incremento de deformación total ${}^{t+\Delta t}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$, que define a esta variable como externa e independiente. Esta deformación se obtiene a partir del desplazamiento impuesto exteriormente desde el problema global de contorno o de elementos finitos. El desplazamiento impuesto viene descrito por el incremento de las iteraciones globales del problema ${}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{u}$ (ec. (3.93)). Durante las operaciones en la etapa de predictor las demás variables quedan definidas como internas, ya que están congeladas en el valor de la iteración última (tiempo t). De forma genérica

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u}^{sym} \quad \Rightarrow \quad {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{tr} = {}^t\boldsymbol{\sigma} + \underbrace{\mathbb{C}_e {}^{t+\Delta t}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{predictor}} \quad (3.96)$$

Figura 3.21: Esquema del mecanismo de computación predictor-corrector: acción del retorno radial para cumplir la consistencia plástica $f = 0$

En este paso hay que tener en cuenta que la aditividad de las deformaciones en la forma ${}^{t+\Delta t}\epsilon = {}^t\epsilon + {}^{t+\Delta t}\Delta\epsilon$ solo se cumple estrictamente en deformaciones infinitesimales. La aditividad también se cumple en el caso de las deformaciones logarítmicas y esto hace atractivo el uso de esta descripción en cálculo elastoplástico. El resultado *trial* del predictor se compara con la condición de plastificación:

- si $f({}^{t+\Delta t}\sigma^{tr}, k) < 0$ entonces finaliza la iteración local hasta que se aplica un nuevo incremento de desplazamiento desde el problema de contorno.
- si $f({}^{t+\Delta t}\sigma^{tr}, k) > 0$ se activa el corrector plástico para obligar a la tensión a retornar al dominio elástico $\mathbb{E}$, operación de *return mapping* en el marco de la teoría del medio continuo (figura 3.21).

En el corrector plástico se lleva a cabo la solución de la ecuación de flujo plástico en el intervalo temporal $(t, t + \Delta t)$, este paso se realiza comúnmente mediante una integración de tipo Euler de primer orden. Según el planteamiento de las variables internas del problema resulta el procedimiento integrador explícito *forward* Euler, o el implícito *backward* Euler

$$\dot{\epsilon} = g[\epsilon(t)] \quad \Rightarrow \quad \int_t^{t+\Delta t} () dt \Rightarrow \begin{cases} \frac{{}^{t+\Delta t}\epsilon - {}^t\epsilon}{\Delta t} = g[\epsilon(t)] & \text{forward} \\ \frac{{}^{t+\Delta t}\epsilon - {}^t\epsilon}{\Delta t} = g[\epsilon(t + \Delta t)] & \text{backward} \end{cases} \quad (3.97)$$

Sin intención de entrar en demasiados detalles sobre uno u otro, la diferencia principal entre ambos se encuentra en la actualización de las variables que operan

en la integración. En el caso de este trabajo de tesis se ha elegido el uso de una integración implícita *backward Euler*, por presentar algunas ventajas computacionales, ya que es un algoritmo en general más estable y robusto, que proporciona velocidades de convergencia superiores a la opción explícita. Por contra, el método implícito exige un mayor esfuerzo en el desarrollo de la formulación, ya que habitualmente resultan ecuaciones no lineales que requieren una solución iterativa para cada intervalo $t + \Delta t$. Esquemáticamente la solución implícita en un caso general de la regla de flujo plástico -ec. (3.84)- conduce a

$${}^{t+\Delta t}\dot{\epsilon}_p = \dot{\gamma} \partial_{\sigma} f^{t+\Delta t} \quad \Rightarrow \quad (3.98)$$

$${}^{t+\Delta t}\Delta \epsilon_p - {}^t\Delta \epsilon_p = {}^{t+\Delta t}\Delta \gamma \partial_{\sigma} f^{t+\Delta t} - {}^t\Delta \gamma \partial_{\sigma} f^{t+\Delta t} \quad (3.99)$$

Un efecto secundario de este método implícito en plasticidad, es que no se garantiza de forma automática un resultado isócoro en deformaciones plásticas resultantes, cuestión que causó problemas computacionales en los primeros algoritmos desarrollados a principios de los años setenta, por lo que este aspecto se ha de vigilar en el uso de este método en plasticidad. Existen múltiples referencias en la literatura que detallan el uso y características de estos procedimientos de integración en los problemas inelásticos [11],[64],[73],[105],[45].

Un caso particular aplicado en cálculo elastoplástico es la integración implícita con aproximación exponencial, procedimiento conocido como *exponential mapping* y que es ampliamente utilizado para resolver la integración de la ley de evolución en grandes deformaciones, cuando se utiliza la integración implícita *backward Euler*. Este procedimiento es una herramienta eficaz numéricamente, que además permite preservar la isocoricidad del problema plástico de forma automática, pero que presenta algunas limitaciones en su aplicación ya que es un método de aproximación, por lo que los resultados adolecen de no ser una solución exacta, y esta exactitud disminuye según crece la deformación del problema. Un análisis detallado de esta herramienta se puede encontrar en las referencias [36] y [96].

Capítulo 4

Modelo teórico basado en el corrector elástico

En este capítulo se presenta el modelo elastoplástico en deformaciones finitas dentro del marco teórico continuo, y describe la mecánica que opera para llegar a la solución del problema elastoplástico. Se plantea la descripción de la ecuación de flujo plástico o ley evolutiva en términos de un corrector elástico disipativo, en lugar del habitual término corrector plástico, y se expone como se genera este operador disipativo a partir del mecanismo algorítmico predictor-corrector.

La integración de las ecuaciones en el marco temporal se realiza a través de un procedimiento implícito de Euler (conocido como *backward Euler*) sobre el término de corrector descrito en velocidad de deformaciones logarítmicas, es decir en forma *rate* temporal, que elude la aplicación de la aproximación exponencial, más conocida como *exponential mapping*. Además se mostrará que no es necesario considerar el término de vorticidad o giro plástico en las hipótesis de disipación, ya que la formulación usada permanece desacoplada de este giro. La formulación resultante en deformaciones finitas resulta así más simple que otras propuestas descritas en la bibliografía, y permite incorporar la anisotropía del material durante la integración del problema. El modelo demostrará ser igual de válido en deformaciones infinitesimales que en deformaciones finitas.

El capítulo se organiza de la siguiente manera: en el primer epígrafe se presentan el desarrollo en elastoplasticidad infinitesimal, con el fin de motivar y presentar el paralelismo con las deformaciones finitas, describiendo el proceso predictor elástico-corrector elástico a partir de las tasas parciales de deformación, y su influencia en la inecuación de la disipación. En la siguiente sección se presenta la formulación en grandes deformaciones, primeramente en configuración intermedia, y posteriormente se comparan los resultados del modelo continuo con su equivalente en configuración espacial, verificando la relación fácilmente entre las deformaciones cuadráticas y las logarítmicas. Se vera como la formulación, capaz de considerar en todo momento la anisotropía del problema, permite recuperar el caso de isotropía como caso particular.

Figura 4.1: Dispositivo reológico de Prandtl: modelo unidimensional de plasticidad perfecta ($k = cte$).

4.1. Descripción en deformaciones infinitesimales

El propósito de esta sección es motivar físicamente los conceptos fundamentales del modelo elastoplástico de integración en su descripción infinitesimal, y sentar las bases de la descripción que se llevará a cabo en deformaciones finitas, y que será la base de los cálculos finales que se realizarán en este trabajo. Se pretende poner de manifiesto el paralelismo existente entre ambas descripciones, y la sencillez de entender y operar con el modelo elastoplástico propuesto, sin tener que cambiar los esquemas operativos entre ambas descripciones.

Como punto de partida para describir el modelo teórico de integración sobre la ley de evolución, se considera de forma inicial un dispositivo reológico de Prandtl de plasticidad perfecta, compuesto de un muelle en serie con un disipador de fricción descrito en deformaciones infinitesimales, donde ϵ es la magnitud externa mensurable (deformación infinitesimal) y donde ϵ_e y ϵ_p son las variables internas que no son distinguibles aún, y que describen el comportamiento elástico y plástico, y si se conoce una de las variables internas, es entonces posible conocer la otra de manera dependiente. σ es la variable interna tensión ingenieril asociada a la deformación elástica. Estas deformaciones son de carácter aditivo

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p \quad (4.1)$$

considerando ϵ y ϵ_p las variables independientes del modelo disipativo, y ϵ_e la variable dependiente. Esta elección se debe a que ϵ_p es quien describe el comportamiento plástico y posee su propia ecuación constitutiva, la ley de evolución 3.84, y la variable deformación elástica al ser dependiente de la total y la plástica, no se describe aún como en la elasticidad lineal

$$\epsilon_e(\epsilon, \epsilon_p) = \epsilon - \epsilon_p \quad (4.2)$$

la siguiente relación es la velocidad de deformación (se usará la notación $\partial(\cdot)/\partial(\circ)$ para la diferenciación en derivadas parciales):

$$\dot{\epsilon}_e = \frac{\partial \epsilon_e}{\partial t} = \left. \frac{\partial \epsilon_e}{\partial \epsilon} \right|_{\dot{\epsilon}_p=0} : \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \left. \frac{\partial \epsilon_e}{\partial \epsilon_p} \right|_{\dot{\epsilon}=0} : \frac{\partial \epsilon_p}{\partial t} \quad (4.3)$$

expresión aditiva en forma de tasa que permite identificar la contribución al flujo elástico de las derivadas parciales de las variables independientes, y que en adelante se expresará de acuerdo a las identidades

$$\dot{\epsilon}_e|_{\dot{\epsilon}_p=0} = \left. \frac{\partial \epsilon_e}{\partial \epsilon} \right|_{\dot{\epsilon}_p=0} : \dot{\epsilon} = \mathbb{I}^S : \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon} \quad (4.4)$$

$$\dot{\epsilon}_e|_{\dot{\epsilon}=0} = \left. \frac{\partial \epsilon_e}{\partial \epsilon_p} \right|_{\dot{\epsilon}=0} : \dot{\epsilon}_p = -\mathbb{I}^S : \dot{\epsilon}_p = -\dot{\epsilon}_p \quad (4.5)$$

donde $\mathbb{I}^S$ es el tensor proyector simétrico de cuarto orden, reflejo de la naturaleza simétrica de las variables tensoriales involucradas.

La energía libre almacenada en el dispositivo de la figura 4.1 viene ahora dada en términos de energía elástica de deformación: $\Psi = \Psi(\epsilon_e)$, de manera que se puede expresar con la dependencia

$$\Psi(\epsilon_e) = \Psi(\epsilon_e(\epsilon, \epsilon_p)) = \Psi(\epsilon, \epsilon_p) \quad (4.6)$$

Recuperando el principio de máxima disipación, ahora se reescribe utilizando estas derivadas parciales en función de las variables independientes

$$\mathcal{D} = \mathcal{P} - \dot{\Psi}(\epsilon_e) = \sigma : \dot{\epsilon} - \sigma^{le} : \dot{\epsilon}_e \geq 0 \quad (4.7)$$

donde se ha introducido un nuevo término en la nomenclatura: la tensión σ^{le} definida explícitamente como variable interna asociada a la deformación elástica, que con rigor es la conjugada de trabajo de la deformación elástica, y desde un punto de vista termodinámico

$$\sigma^{le} := \frac{d\Psi(\epsilon_e)}{d\epsilon_e} \quad (4.8)$$

(se reserva el uso de la notación $d(\cdot)/d(\circ)$ solo para expresar la diferenciación en derivadas totales). La ec. (4.8) es en esencia igual a la ec. (2.30), pero los matices en esta notación serán de gran importancia en desarrollos posteriores, cuando se aplique el mismo esquema a las deformaciones finitas.

De acuerdo a la ausencia de disipación durante la deformación elástica, la variable interna independiente de tasa será $\dot{\epsilon}_p = 0$, y la variable externa independiente será $\dot{\epsilon} \neq 0$, con lo que usando la ec. (4.3): $\dot{\epsilon}_e = \dot{\epsilon}_e|_{\dot{\epsilon}_p=0} = \dot{\epsilon}$, se puede reformular la ec. (4.7) como

$$\mathcal{D} = \sigma : \dot{\epsilon} - \sigma^{le} : \dot{\epsilon}_e|_{\dot{\epsilon}_p=0} = \left(\sigma - \sigma^{le} : \left. \frac{\partial \epsilon_e}{\partial \epsilon} \right|_{\dot{\epsilon}_p=0} \right) : \dot{\epsilon} = 0 \quad \text{si} \quad \dot{\epsilon}_p = 0 \quad (4.9)$$

donde se comprueba la tensión conjugada de la variable elástica

$$\sigma = \sigma^{le} : \left. \frac{\partial \epsilon_e}{\partial \epsilon} \right|_{\dot{\epsilon}_p=0} = \sigma^{le} : \mathbb{I}^S = \sigma^{le} \quad (4.10)$$

y donde la naturaleza simétrica de las tensiones se recoge con la presencia del tensor $\mathbb{I}^S$, al tiempo causa de la identidad de las tensiones en ambos extremos de la igualdad

en la ec. (4.10), característica propia de la descripción de deformaciones infinitesimales, pero que no se dará cuando se aplique sobre deformaciones finitas.

Ahora, usando la regla de la cadena en la diferenciación parcial, se llega a

$$\sigma = \frac{\partial \Psi(\epsilon, \epsilon_p)}{\partial \epsilon} = \frac{d\Psi(\epsilon_e)}{d\epsilon_e} : \frac{\partial \epsilon_e(\epsilon, \epsilon_p)}{\partial \epsilon} = \frac{d\Psi(\epsilon_e)}{d\epsilon_e} : \frac{\partial \epsilon_e}{\partial \epsilon} \Big|_{\dot{\epsilon}_p=0} \quad (4.11)$$

$$= \sigma^{le} : \frac{\partial \epsilon_e}{\partial \epsilon} \Big|_{\dot{\epsilon}_p=0} \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} \Big|_{\dot{\epsilon}_p=0} \quad (4.12)$$

que confirma la naturaleza del término de tensión conjugada de la deformación elástica σ^{le} , como variable interna asociada no medible externamente, y que matemáticamente se representa mediante una derivada parcial sobre la energía libre, $\Psi(\epsilon)$, pero en la ec. (4.11) se hace uso de una variable externa independiente (ϵ) que si es medible, y que se cumplirá rigurosamente cuando $\dot{\epsilon}_p = 0$.

Si ahora se considera la operación de las variables internas de forma independiente, si $\dot{\epsilon} = 0$ y $\dot{\epsilon}_p \neq 0$ se obtiene el caso puramente disipativo, y se puede reescribir la disipación en términos de estas variables. Teniendo en cuenta la ec.(4.3), tendríamos $\dot{\epsilon}_e = \dot{\epsilon}_e|_{\dot{\epsilon}=0}$, y la disipación referida en la ec. (4.7) se reescribe ahora en términos de la variable interna elástica, que ha de ser necesariamente positiva

$$\mathcal{D} = -\sigma^{le} : \dot{\epsilon}_e|_{\dot{\epsilon}=0} > 0 \quad \text{si} \quad \dot{\epsilon}_p \neq 0 \quad (4.13)$$

Ahora se puede obtener una expresión equivalente si se utilizan las ecuaciones (4.10) y (4.5), con el resultado en términos de la variable interna plástica

$$\mathcal{D} = \sigma : \dot{\epsilon}_p > 0 \quad \text{si} \quad \dot{\epsilon}_p \neq 0 \quad (4.14)$$

Las ecuaciones (4.13) y (4.14) demuestran la dualidad de expresar la disipación usando la contribución de la variable interna plástica independiente o usando la variable interna elástica dependiente, cuando se aplica una interpretación en derivadas parciales. Se puede afirmar que este resultado de la disipación con un término interno de tasa elástica disipativa será válido tanto si $\dot{\epsilon} = 0$ o si $\dot{\epsilon} \neq 0$ (la condición es $\dot{\epsilon}_p \neq 0$).

4.1.1. Evolución local en términos de la variable interna elástica $\dot{\epsilon}_e|_{\dot{\epsilon}=0}$

La disipación expresada en la ec. (4.13) se cumple automáticamente si se escoge una ley evolutiva plástica asociativa, desarrollada sobre el flujo plástico en términos de la variable interna elástica ϵ_e . Usando la ec. (4.5) y considerando un criterio de plastificación anisótropo de tipo Hill según la ec.(3.73) se llega a la expresión asociativa

$$\dot{\epsilon}_p = -\dot{\epsilon}_e|_{\dot{\epsilon}=0} = \dot{\gamma} \frac{\partial \sigma}{\partial k} = \dot{\gamma} \frac{1}{k} \mathbb{N} : \sigma^{le} \quad (4.15)$$

que con la ec. (4.14) conduce a la disipación

$$\mathcal{D} = \frac{\sigma^{le} : \mathbb{N} : \sigma^{le}}{k^2} k \dot{\gamma} > 0 \quad \text{si} \quad \dot{\epsilon}_p \neq 0 \quad (4.16)$$

donde el parámetro k es el límite de fluencia del material, el interpretado a través del disipador de fricción reológico en el problema unidimensional (figura 4.1). Si este parámetro k es constante, el modelo se corresponderá con el caso de plasticidad perfecta, y si $k = k(\gamma)$ se interpretará como un endurecimiento del material en función de la deformación plástica acumulada (γ) , entonces

$$\frac{dk(\gamma)}{d\gamma} = k'(\gamma) > 0$$

para el caso de un modelo de endurecimiento isótropo solamente. Reescribiendo la ecuación de disipación con la regla de flujo de la ec. (4.15)

$$\mathcal{D} = \frac{1}{k^2} (\boldsymbol{\sigma}^{\text{le}} : \mathbb{N} : \boldsymbol{\sigma}^{\text{le}} - k^2) k\dot{\gamma} + k\dot{\gamma} > 0 \quad \text{si} \quad \dot{\gamma} > 0 \quad (4.17)$$

se puede reconocer la función de plastificación, $f(\boldsymbol{\sigma}^{\text{le}}, k)$, descrita en función de la tensión interna asociada del campo elástico $\boldsymbol{\sigma}^{\text{le}}$ y la condición de flujo plástico $\dot{\gamma} > 0$

$$f(\boldsymbol{\sigma}^{\text{le}}, k) = \boldsymbol{\sigma}^{\text{le}} : \mathbb{N} : \boldsymbol{\sigma}^{\text{le}} - k^2 = 0 \quad \text{si} \quad \dot{\gamma} > 0 \quad (4.18)$$

con lo que se comprueba que la disipación en deformaciones infinitesimales es siempre positiva en presencia de flujo plástico

$$\mathcal{D} = k\dot{\gamma} \geq 0 \quad \text{si} \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad (4.19)$$

Retomando otra vez la condición de flujo plástico, y considerando una respuesta puramente elástica en el sistema reológico, la disipación será nula si $\dot{\gamma} = 0$, y entonces

$$f(\boldsymbol{\sigma}^{\text{le}}, k) = \boldsymbol{\sigma}^{\text{le}} : \mathbb{N} : \boldsymbol{\sigma}^{\text{le}} - k^2 < 0 \quad (4.20)$$

que es la condición por la cuál las tensiones internas están contenidas siempre dentro del dominio elástico $\mathbb{E}$.

Finalmente, la ec.(4.15) se puede reinterpretar con el concepto de potencial plástico $\phi(\boldsymbol{\sigma}^{\text{le}})$ dentro de la función de plastificación $f(\boldsymbol{\sigma}^{\text{le}}, k)$. Para simplificar la notación en este capítulo, se redefine la función de plastificación como

$$f(\boldsymbol{\sigma}^{\text{le}}, k) = 2\phi(\boldsymbol{\sigma}^{\text{le}}) - k^2 = 0$$

dándose la igualdad entre los términos gradientes $\nabla f = 2\nabla\phi$, y conservando la naturaleza cuadrática de la función de plastificación con las tensiones, así el potencial plástico queda

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}^{\text{le}}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^{\text{le}} : \mathbb{N} : \boldsymbol{\sigma}^{\text{le}} \quad (4.21)$$

lo que permite obtener una forma de la regla de flujo interpretada con la variable interna elástica asociada directamente con el potencial plástico en la forma

$$-\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e|_{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}=0} = \dot{\gamma} \frac{\nabla\phi}{\sqrt{\boldsymbol{\sigma}^{\text{le}} : \mathbb{N} : \boldsymbol{\sigma}^{\text{le}}}} \quad (4.22)$$

ecuación asociativa facilitará una extensión inmediata de la regla de flujo desde las deformaciones infinitesimales a las deformaciones finitas.

Cabe hacer notar que la ec. (4.22) se utiliza tradicionalmente en asociación con la variable interna plástica, y que esta asociación con la variable interna de tasa elástica constituye un aspecto novedoso, que anteriormente solo había sido considerado de forma puntual por Simó [134].

Por último, observando algunos aspectos referidos a la función de plastificación, al aplicar el criterio de Hill encontramos que unidimensionalmente es equivalente al criterio de Von Mises (unidimensionalmente no hay diferencias entre isotropía y anisotropía), y la plastificación resultante quedaría descrita con los términos $\sigma_y = \sqrt{3/2}k$, y $\dot{\epsilon}_p = \sqrt{3/2}\dot{\gamma}$, sin embargo la ausencia/presencia del número desviador $\sqrt{3/2}$ no habría alterado el postulado final ni la disipación descrita en términos de las variables internas, $\dot{\epsilon}_e$ ó $\dot{\epsilon}_p$, ya que de igual manera se cumple que $\mathcal{D} \geq 0$.

4.1.2. Descripción en términos del predictor y el corrector elásticos de deformación

En esta sección vamos a volver sobre el desarrollo del problema elastoplástico, ahora añadiendo al planteamiento un punto de vista computacional, explicando la relación de las ecuaciones ya descritas con los términos de predictor elástico, y corrector elástico disipativo o simplemente corrector. La parte innovadora en esta formulación es que ambos términos aquí son de carácter elástico (*strain rates* en realidad), a diferencia de la computación elastoplástica clásica donde el *trial* si es elástico, pero el corrector es plástico, diferencias que se deben a la elección de las variables internas que se computan.

En primer lugar, puede comprobarse de la ec. (4.3) la ortogonalidad de ambos términos, pues ambos son independientes entre si, están desacoplados, y que ambos ocurren o tienen lugar de forma simultánea en el marco continuo, aunque algorítmicamente se van a computar por separado y en intervalos de cálculo consecutivos en el marco numérico.-algorítmico. Es importante tener en cuenta esta dualidad marco continuo-marco algorítmico, que siempre está presente en los problemas de computación o de simulación numérica.

En primer lugar se calculará el camino predictor o *trial* con la restricción $\dot{\epsilon}_p = \mathbf{0}$, donde no se dará ningún fenómeno de disipación energética, y será un camino de carga puramente elástico. En segundo lugar se calculará el camino corrector restringido ahora por la condición $\dot{\epsilon} = \mathbf{0}$, donde se congelará la deformación total y se producirá la disipación mecánica (equivalente en el marco continuo y macroscópico a la creación y movimiento de dislocaciones y defectos en la red cristalina del material). De acuerdo a este planteamiento, y en un marco continuo se define la relación

$$\dot{\epsilon}_e = \dot{\epsilon}_e|_{\dot{\epsilon}_p=\mathbf{0}} + \dot{\epsilon}_e|_{\dot{\epsilon}=\mathbf{0}} =: {}^{tr}\dot{\epsilon}_e + {}^{ct}\dot{\epsilon}_e \quad (4.23)$$

donde los superíndices *tr* y *ct* se identifican por *trial* y *corrector* respectivamente -figura 3.21-. Retomando las ecuaciones (4.4) y (4.5) se comprueba que

$${}^{tr}\dot{\epsilon}_e = \dot{\epsilon}_e|_{\dot{\epsilon}_p=\mathbf{0}} = \frac{\partial \epsilon_e}{\partial \epsilon} \bigg|_{\dot{\epsilon}_p=\mathbf{0}} : \dot{\epsilon} = \mathbb{I}^S : \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon} \quad (4.24)$$

y

$${}^{ct}\dot{\epsilon}_e = \dot{\epsilon}_e|_{\dot{\epsilon}=\mathbf{0}} = \frac{\partial \epsilon_e}{\partial \epsilon_p} \bigg|_{\dot{\epsilon}=\mathbf{0}} : \dot{\epsilon}_p = -\mathbb{I}^S : \dot{\epsilon}_p = -\dot{\epsilon}_p \quad (4.25)$$

4.1. Descripción en deformaciones infinitesimales

Estas expresiones en derivadas parciales permiten interpretar que, si en un instante dado $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$, la contribución predictora ${}^{tr}\dot{\varepsilon}_e$ de la deformación interna $\dot{\varepsilon}_e$ depende solo de la variable externa $\dot{\varepsilon}$ (ε_p está congelada). Por contra, el corrector ${}^{ct}\dot{\varepsilon}_e$ en la deformación interna $\dot{\varepsilon}_e$ depende solo de la variable interna $\dot{\varepsilon}_p$ (ε está congelada). Recuperando esta notación, se pueden reescribir las ecuaciones aludidas en términos de ${}^{ct}\dot{\varepsilon}_e$, y la ec. (4.22) del flujo plástico queda

$${}^{ct}\dot{\varepsilon}_e = -\dot{\gamma} \frac{1}{k} \nabla \phi \quad (4.26)$$

donde $\phi(\boldsymbol{\sigma}^{|e}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^{|e} : \mathbb{N} : \boldsymbol{\sigma}^{|e}$ y $k = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{N} : \boldsymbol{\sigma}}$. Ahora el corrector elástico definido en la ec. (4.26) juega el papel equivalente de proyector sobre el contorno del dominio elástico $\partial\mathbb{E}$ en el marco continuo, es decir la normal a superficie del espacio tensional de Haig-Westergaard descrito en el capítulo 3.

Llevando esta operación sobre la disipación, la ec. (4.13) queda

$$\mathcal{D} = -\boldsymbol{\sigma}^{|e} : {}^{ct}\dot{\varepsilon}_e > 0 \quad \text{si} \quad \dot{\gamma} > 0 \quad (4.27)$$

y en términos de la energía libre hiperelástica a través del corrector, se releería con la presencia de términos elásticos (ya que $\Psi(\varepsilon) = \Psi(\varepsilon_e)$)

$$-\mathcal{D} = \boldsymbol{\sigma}^{|e} : {}^{ct}\dot{\varepsilon}_e = \frac{d\Psi(\varepsilon_e)}{d\varepsilon_e} : {}^{ct}\dot{\varepsilon}_e = {}^{ct}\dot{\Psi} = \dot{\Psi} \Big|_{\dot{\varepsilon}=0} < 0 \quad \text{si} \quad \dot{\gamma} > 0 \quad (4.28)$$

4.1.2.1. Relación entre el predictor y el corrector elásticos durante el flujo plástico

Computacionalmente es necesario considerar la condición de persistencia o consistencia plástica $\dot{f} = 0$, sobre la función de plástificación $f(\boldsymbol{\sigma}^{|e}, k) = 0$, cuando está presente el flujo plástico ($\dot{\gamma} > 0$).

En primer lugar el tensor de tensión interna $\boldsymbol{\sigma}^{|e}$ depende de las mismas variables que ε_e , osea de ε y ε_p , y también de la variable interna γ que opera en el paraámetro $k = k(\gamma)$ y que representa el endurecimiento. Por tanto la función de plástificación dada en la ec. (4.18) puede someterse a la condición de consistencia aplicando la regla de la cadena

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_p} \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t} = \dot{f} \Big|_{\dot{\varepsilon}_p=0} + \dot{f} \Big|_{\dot{\varepsilon}=0} := {}^{tr}\dot{f} + {}^{ct}\dot{f} \quad (4.29)$$

usando la terminología equivalente ${}^{tr}\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{|e} := \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{|e} \Big|_{\dot{\varepsilon}_p=0}$ y ${}^{tr}\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{|e} = \mathbb{C}^{|e} : {}^{tr}\dot{\varepsilon}_e$, en el primer término *trial* encontramos

$$\frac{1}{2} {}^{tr}\dot{f} = \boldsymbol{\sigma}^{|e} : \mathbb{N} : {}^{tr}\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{|e} = \nabla \phi : \mathbb{C}^{|e} : {}^{tr}\dot{\varepsilon}_e \quad (4.30)$$

donde $\mathbb{C}^{|e}$ es el tensor constitutivo elástico obtenido a partir de $\boldsymbol{\sigma}^{|e}(\varepsilon_e)$, y según la ec. (2.17) sería

$$\mathbb{C}^{|e} := \frac{d\boldsymbol{\sigma}^{|e}(\varepsilon_e)}{d\varepsilon_e} = \frac{d^2\Psi(\varepsilon_e)}{d\varepsilon_e d\varepsilon_e} \quad (4.31)$$

con la identidad ${}^{ct}\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{|e} := \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{|e}|_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}=0}$. De forma semejante para el segundo término corrector de la ec. (4.29) se obtiene

$$\frac{1}{2} {}^{ct}\dot{f} = \boldsymbol{\sigma}^{|e} : \mathbb{N} : {}^{ct}\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{|e} - k k' \dot{\gamma} = \nabla \phi : \mathbb{C}^{|e} : {}^{ct}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - k k' \dot{\gamma} \quad (4.32)$$

donde $k' = dk/d\gamma$ sería el módulo de endurecimiento. Usando ahora la ec. (4.26) se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{1}{2} {}^{ct}\dot{f} = -\dot{\gamma} \frac{1}{k} (\nabla \phi : \mathbb{C}^{|e} : \nabla \phi + k^2 k') \quad (4.33)$$

La condición de consistencia $\dot{f} = 0$, aplicada sobre la ec. (4.29) cuando $\dot{\gamma} > 0$, proporciona una actualización del valor de la variable interna $\dot{\gamma}$ en cada instante t , con lo que

$$\dot{\gamma} \frac{1}{k} = \left(\frac{\mathbb{C}^{|e} : \nabla \phi}{\nabla \phi : \mathbb{C}^{|e} : \nabla \phi + k^2 k'} \right) : {}^{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \quad \text{si } \dot{\gamma} > 0 \quad (4.34)$$

esta expresión en la bibliografía de plasticidad clásica se puede encontrar reescrita en el marco infinitesimal con ${}^{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, resultando

$$\dot{\gamma} \frac{1}{k} = \left(\frac{\mathbb{C}^{|e} : \nabla \phi}{\nabla \phi : \mathbb{C}^{|e} : \nabla \phi + k^2 k'} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{si } \dot{\gamma} > 0 \quad (4.35)$$

Finalmente, retomando la ley de evolución, la introducción de la ec. (4.34) en la ec. (4.26) dará como resultado

$${}^{ct}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = - \left[\frac{\nabla \phi \otimes (\mathbb{C}^{|e} : \nabla \phi)}{\nabla \phi : \mathbb{C}^{|e} : \nabla \phi + k^2 k'} \right] : {}^{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \quad \text{si } \dot{\gamma} > 0 \quad (4.36)$$

La interpretación de esta ecuación (4.36) proporciona la relación de acoplamiento entre las dos variables independientes, la deformación total $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ a través de ${}^{ct}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$ -la ec. (4.24)-, y la deformación plástica $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ a través de ${}^{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$ -ec. (4.25)-, de manera que la tensión $\boldsymbol{\sigma}^{|e}(\boldsymbol{\varepsilon}_e)$ pueda permanecer sobre la superficie de plastificación $f(\boldsymbol{\sigma}^{|e}, k) = 0$ durante el flujo plástico (restricción de la condición de consistencia).

4.1.2.2. Relación entre la deformación total y el predictor elástico durante el flujo plástico

Ahora se reescribe la ec. (4.23) usando la ec. (4.36) y se obtiene

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = {}^{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + {}^{ct}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = \left[\mathbb{I}^S - \frac{\nabla \phi \otimes (\mathbb{C}^{|e} : \nabla \phi)}{\nabla \phi : \mathbb{C}^{|e} : \nabla \phi + k^2 k'} \right] : {}^{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \quad \text{si } \dot{\gamma} > 0 \quad (4.37)$$

ecuación que relaciona el tensor tasa de deformación elástica $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$ con sus parciales, y en definitiva con el tensor trial de deformación elástica ${}^{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$ cuando el flujo plástico tiene lugar. Esta operación da como resultado una relación lineal y consistente en el marco continuo en pequeñas deformaciones, característica de cada ciclo predictor-corrector.

4.1.3. Módulo elastoplástico continuo infinitesimal

El módulo tangente elastoplástico $\mathbb{C}_{ep}$ relaciona la variable interna de tensión $\boldsymbol{\sigma}$ con las variable de deformación total $\boldsymbol{\varepsilon}$ en el instante de cálculo de forma semejante a la ec. (3.10), por lo que en la práctica solo opera en la etapa del corrector, y no en la del predictor dentro del algoritmo. Sin embargo, teniendo en cuenta que el tensor conjugado interno $\boldsymbol{\sigma}^{|e}$ es obtenido directamente de la variable interna de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ con la función hiperelástica, $\boldsymbol{\sigma}^{|e}(\boldsymbol{\varepsilon}_e) = d\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}_e)/d\boldsymbol{\varepsilon}_e$, el núcleo del módulo tangente en forma tensorial se deriva entonces de ambas variables internas en la forma incremental

$$\text{en el predictor} \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{|e} = \mathbb{C}^{|e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e, \quad \text{y en el corrector} \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{|e} = \mathbb{C}_{ep}^{|e} : {}^{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \quad (4.38)$$

al considerar ambas etapas simultáneamente

$$\mathbb{C}_{ep}^{|e} := {}^{tr}\mathbb{C}_{ep}^{|e} + {}^{ct}\mathbb{C}_{ep}^{|e} = \mathbb{C}^{|e} - \frac{(\mathbb{C}^{|e} : \nabla\phi) \otimes (\mathbb{C}^{|e} : \nabla\phi)}{\nabla\phi : \mathbb{C}^{|e} : \nabla\phi + k^2k'} \quad (4.39)$$

para lo que se han recuperado las ecs. (4.31) y (4.37).

En un primer análisis, la ec. (4.39) refleja la pérdida de rigidez que la plastificación del material produce sobre el módulo elástico inicial, y como esta pérdida se reduce si el endurecimiento del material crece, expresado en la variable interna k' ; esta interpretación *trial-corrector* es consistente con las ecuaciones unidimensionales (3.15) y (3.31). En este sentido, resulta interesante observar como el segundo término de la expresión ec. (4.39) ejecuta la operación de *corrección* sobre el término elástico *trial* que se sitúa en el primer sumando, y que representa al módulo elástico del material en su forma tensorial de cuarto orden $\mathbb{C}^{|e}$. El resultado de acción del término corrector, ${}^{ct}\mathbb{C}_{ep}^{|e}$, es conseguir una evolución continua del tensor conjugado de tensiones $\boldsymbol{\sigma}^{|e}$ sobre la superficie de plastificación, $f(\boldsymbol{\sigma}^{|e}, k) = 0$, lo que se logra desde una forma linealizada del problema, pero también de una forma consistente con el planteamiento teórico en el marco continuo.

Este segundo término, ${}^{ct}\mathbb{C}_{ep}^{|e}$, es el módulo tangente elastoplástico interno, característica señalada por la presencia del superíndice ($^{|e}$), que tiene un importante protagonismo en el escenario de las deformaciones finitas, donde coexisten de forma simultánea diferentes configuraciones del mismo tensor. La presencia del superíndice ($^{|e}$) que aparece en las fórmulas no tiene un significado especial en deformaciones infinitesimales, es sólo un recordatorio de que el tensor ha sido obtenido a partir de la variable interna elástica, en este caso a partir de la integración del término corrector elástico.

Otra característica de la ec. (4.39) es que $\mathbb{C}_{ep}^{|e}$ es un tensor de naturaleza simétrica de acuerdo a la asociatividad de la regla de flujo y el principio de máxima disipación [131].

Finalmente, recuperando la ec. (4.10) en la que se proyectaban entre si los tensores de tensiones conjugadas $\boldsymbol{\sigma}^{|e}$ y totales $\boldsymbol{\sigma}$ a través del tensor proyector simétrico de cuarto orden se verifica la identidad entre las tensiones

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{|e} : \left. \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p=0} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{|e} : \mathbb{I}^S = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{|e} \quad (4.40)$$

expresión válida sólo en deformaciones infinitesimales. Y usando también las ecs. (4.24) y (4.38), se obtiene la expresión del módulo elastoplástico tangente consistente y externo

$\mathbb{C}_{ep}$ (sin presencia del subíndice e), que relaciona directamente $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ con $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ durante el flujo plástico

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \bigg|_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p=0}^T : \mathbb{C}_{ep}^e : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \bigg|_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p=0} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbb{C}_{ep} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.41)$$

comprobandose que

$$\mathbb{C}_{ep} := \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \bigg|_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p=0}^T : \mathbb{C}_{ep}^e : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \bigg|_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p=0} = \mathbb{I}^S : \mathbb{C}_{ep}^e : \mathbb{I}^S = \mathbb{C}_{ep}^e \quad (4.42)$$

analíticamente $\mathbb{C}_{ep}$ es consistente con $\mathbb{C}_{ep}^e$, ec. (4.39), y donde la presencia de $\mathbb{I}^S$ permite concluir que $\mathbb{C}_{ep}$ hereda las virtudes de simetría de $\mathbb{C}_{ep}^e$. También esta relación es sólo válida en deformaciones infinitesimales.

Para finalizar, la ec. (4.42) puede ser interpretada como

$$\mathbb{C}_{ep}^e = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^e}{\partial {}^{tr}\boldsymbol{\varepsilon}_e} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \bigg|_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p=0} \right)^{-T} : \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} : \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \bigg|_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p=0} \right)^{-1} = \mathbb{I}^S : \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbb{I}^S = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbb{C}_{ep} \quad (4.43)$$

donde ${}^{tr}\boldsymbol{\varepsilon}_e$ es la variable interna independiente que gobierna en forma incremental el flujo plástico.

Teniendo en cuenta lo descrito en las secciones anteriores, podría parecer indiferente la selección de la variable interna de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ o $\boldsymbol{\varepsilon}_p$, o de la tensión en términos de $\boldsymbol{\sigma}^e$ o $\boldsymbol{\sigma}$, ya que infinitesimalmente son iguales, pero al mantener estas expresiones, fáciles de comprender y de seguir, al trasladarlas al campo de las deformaciones finitas es donde se entenderá la importancia conceptual de haber formulado el problema correctamente, ya que se utilizarán las mismas dependencias funcionales $\boldsymbol{\varepsilon}_e(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p) = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p$ y $\boldsymbol{\sigma}^e(\boldsymbol{\varepsilon}_e) = d\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}_e)/d\boldsymbol{\varepsilon}_e$.

Por otro lado, la plasticidad clásica está formulada en términos de variables internas $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ y $\boldsymbol{\sigma}$, que como se ha comprobado no se altera al introducir la nueva perspectiva del corrector elástico disipativo, ya que simplemente se realiza un cambio de las variables internas que gobiernan el problema, no de las ecuaciones.

4.2. Descripción en deformaciones finitas

Los resultados obtenidos en formulación de deformaciones infinitesimales se trasladan ahora al marco de las deformaciones finitas utilizando los mismos esquemas. Se lleva a cabo la misma separación predictor-corrector haciendo uso de los conceptos de diferenciación parcial para identificar las variables del problema y sus dependencias.

Al aplicar las deformaciones finitas al cálculo elastoplástico, que ya no son aditivas por defecto y a pesar de que algunos autores emplean esta aditividad como hipótesis de partida en el cálculo en grandes deformaciones [109],[110],[98], es necesario emplear la descomposición multiplicativa de Lee -ec. (2.57)- para obtener las relaciones cinemáticas entre las variables internas de deformación plástica y elástica, utilizando medidas de deformación lagrangiana en todo momento. Para introducir el modelo en deformaciones logarítmicas, se va a utilizar en primer lugar la descripción en deformaciones cuadráticas de Green-Lagrange, para posteriormente utilizar una correlación a las variables

logarítmicas, para lo que se hace uso de la proyectividad que permiten realizar los tensores de cambio de configuración punto a punto, o de *mapeo*, entre ambas descripciones de deformación [78], lo que permite una fácil transformación entre las medidas de deformación en ambos sentidos, es decir, de la deformación desde la descripción cuadrática a la logarítmica y viceversa.

Se comprobará que los esquemas resultantes entre la formulación en deformaciones infinitesimales y finitas son los mismos, y que no interfiere en ello la naturaleza aditiva de las primeras y la naturaleza multiplicativa de las segundas.

4.2.1. Descomposición multiplicativa elastoplástica

La descomposición multiplicativa de Lee [81] es una de las herramientas más utilizadas actualmente para formular el problema elastoplástico en deformaciones finitas, como alternativa a la descomposición aditiva característica de las deformaciones infinitesimales. La operativa aplica una descomposición del gradiente de deformaciones $\mathbf{X}$ según el producto de un término elástico $\mathbf{X}_e$ y un término plástico $\mathbf{X}_p$ en la forma

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_e \mathbf{X}_p \quad (4.44)$$

expresión cuya interpretación gráfica se podría observar en la figura 2.3. Al plantear esta descomposición, si sobre dicho gradiente se aplica un movimiento de sólido rígido a través del tensor de rotación $\mathbf{Q}$ resulta la operación

$$\mathbf{X}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{X} = (\mathbf{Q}\mathbf{X}_e)(\mathbf{X}_p) = \mathbf{X}_e^+ \mathbf{X}_p^+ \quad (4.45)$$

donde el movimiento de sólido rígido se concentra teóricamente sobre el término elástico (figura 2.4), mientras que el término plástico queda intacto respecto de la configuración inicial ($\mathbf{X}_p = \mathbf{X}_p^+$), generando una configuración intermedia que es única e invariante. Sin embargo, como la naturaleza del proceso de plastificación es dependiente de la historia de carga (*path dependent*), entonces $\mathbf{X}_p$ también es cambiante por la misma naturaleza y por tanto no será único en el problema elastoplástico. Esta cuestión se elude en base a que el cálculo de $\mathbf{X}_p$ se resuelve constantemente en el problema a lo largo del cálculo incremental, es decir: $\mathbf{X}_p$ se recalcula en cada paso y por tanto se actualiza constantemente. Se podría considerar en cierto modo que $\mathbf{X}_p$ es único en cada paso del cálculo incremental. La formulación desarrollada trata $\mathbf{X}_p$ constante dentro de cada intervalo incremental Δt , y solo se actualiza al final del mismo. En realidad es el propio gradiente $\mathbf{X}$ quien se actualiza constantemente a lo largo del cálculo.

De acuerdo a este planteamiento, en la configuración intermedia es donde va a tener lugar el cálculo elastoplástico sobre la ley de evolución del flujo plástico, en cada punto de integración del elemento finito, y esa configuración será fija dentro de cada intervalo incremental.

4.2.2. Disipación y regla de flujo en términos del corrector elástico ${}^{ct}\dot{\mathbf{A}}_e$

Teniendo en cuenta la descomposición de Lee de la ec. (4.44), los tensores de deformación de Green–Lagrange en configuración material, en términos de las

deformaciones total y elástica quedan definidos a través de los gradientes de deformación correspondientes

$$\mathbf{A} := \frac{1}{2}(\mathbf{X}^T \mathbf{X} - \mathbf{I}) \quad \text{y} \quad \mathbf{A}_e := \frac{1}{2}(\mathbf{X}_e^T \mathbf{X}_e - \mathbf{I}) \quad (4.46)$$

mientras que la deformación plástica de Green–Lagrange definida en configuración de referencia como función del gradiente plástico

$$\mathbf{A}_p := \frac{1}{2}(\mathbf{X}_p^T \mathbf{X}_p - \mathbf{I}) \quad (4.47)$$

Aplicando la idea desarrollada en pequeñas deformaciones se puede escribir la dependencia del tensor de deformaciones elásticas como variable interna dependiente de la deformación total $\mathbf{A}$ como variable externa, y del gradiente plástico $\mathbf{X}_p$ como variable interna

$$\mathbf{A}_e(\mathbf{A}, \mathbf{X}_p) = \mathbf{X}_p^{-T} (\mathbf{A} - \mathbf{A}_p) \mathbf{X}_p^{-1} = \mathbf{X}_p^{-T} \odot \mathbf{X}_p^{-T} : (\mathbf{A} - \mathbf{A}_p) \quad (4.48)$$

donde aparece la operación tensorial del tipo $\mathbf{BCB}^T = \mathbf{B} \odot \mathbf{B} : \mathbf{C} = \mathbb{B} : \mathbf{C}$, que identifica una operación en la que el tensor $\mathbb{B}$ de cuarto orden ejecuta un cambio de configuración hacia otra diferente de la inicial, mediante una doble contracción sobre $\mathbf{C}$. En este caso la operación lleva el tensor de deformación elástica $\mathbf{A}_e$ hacia la configuración intermedia descrita en la descomposición de Lee (figura 2.3).

Aplicando la diferenciación total y la regla de la cadena sobre $\mathbf{A}_e$ se obtiene la función tensorial $\mathbf{A}_e(\mathbf{A}, \mathbf{X}_p)$ con los tensores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{X}_p$ como variables independientes

$$\dot{\mathbf{A}}_e = \frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial \mathbf{A}} \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial \mathbf{X}_p} \frac{d\mathbf{X}_p}{dt} = \left. \frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial \mathbf{A}} \right|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} : \dot{\mathbf{A}} + \left. \frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial \mathbf{X}_p} \right|_{\dot{\mathbf{A}}=0} : \dot{\mathbf{X}}_p \quad (4.49)$$

donde aparece la derivada parcial entre tensores de segundo orden que se interpreta como un tensor gradiente de cuarto orden equivalente a la operación descrita en la ec. (4.48). Esta operación es equiparable a la descrita en la ec. (4.24), donde aparece el tensor identidad de cuarto orden como proyector en deformaciones infinitesimales, allí de naturaleza identidad ya que en deformaciones infinitesimales la medida de deformación es única. Aplicando con rigor esta equivalencia

$$\frac{\partial \mathbf{A}_e(\mathbf{A}, \mathbf{X}_p)}{\partial \mathbf{A}} \equiv \left. \frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial \mathbf{A}} \right|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} = \mathbf{X}_p^{-T} \odot \mathbf{X}_p^{-T} \equiv \mathbb{M}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\dot{\mathbf{A}}_e} \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} \quad (4.50)$$

se define $\mathbb{M}_{\dot{\mathbf{A}}}^{\dot{\mathbf{A}}_e}$ como el tensor de cambio de cuarto orden que nos relaciona el tensor de deformación con su parte puramente elástica, y que es un tensor geométrico punto a punto entre la configuración deformada inicial y la configuración final.

La misma interpretación que en la ec.(4.23), permite ver el tensor $\mathbf{A}_e$ como la adición de dos variables tensoriales independientes: el predictor o *trial* y el *corrector*

$$\dot{\mathbf{A}}_e = \dot{\mathbf{A}}_e \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} + \dot{\mathbf{A}}_e \Big|_{\dot{\mathbf{A}}=0} = {}^{tr} \dot{\mathbf{A}}_e + {}^{ct} \dot{\mathbf{A}}_e \quad (4.51)$$

Por tanto, el tensor proyector de cuarto orden de la ec. (4.50) ejecuta una operación de *empuje* sobre $\dot{\mathbf{A}}$ desde la configuración inicial, para proporcionar ${}^{tr} \dot{\mathbf{A}}_e$ ($\dot{\mathbf{A}}_e$ con

$\dot{\mathbf{X}}_p = \mathbf{0}$), que se encuentra en la configuración intermedia de la deformación, que es el estado *trial*. Conviene advertir la diferente naturaleza de la expresión anterior -ec. (4.51)-, descrita en términos *rate* o tasa de deformación, respecto de la expresión de aditividad de las deformaciones elásticas y plásticas -ec. (4.1)-, que siendo válida en deformaciones infinitesimales, por defecto no lo es en deformaciones finitas.

La energía almacenada en la configuración intermedia puede ser descrita con cualquier medida de deformación lagrangiana [138], por lo que siguiendo con las deformaciones de Green: $\Psi_A = \Psi(\mathbf{A}_e)$, ahora la disipación se escribe

$$\mathcal{D} = \mathcal{P} - \dot{\Psi}_A = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{S}^{|e} : \dot{\mathbf{A}}_e \geq 0 \quad (4.52)$$

donde vuelve a aparecer el término de la tensión conjugada de la variable elástica, pero sobre la medida de tensión, que en este caso es el segundo tensor de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}$, por tanto

$$\mathbf{S}^{|e} = \frac{d\Psi_A(\mathbf{A}_e)}{d\mathbf{A}_e} \quad (4.53)$$

Considerando primero el caso no disipativo $\dot{\mathbf{A}} \neq \mathbf{0}$ y $\dot{\mathbf{X}}_p = \mathbf{0}$, entonces $\dot{\mathbf{A}}_e \equiv \dot{\mathbf{A}}_e|_{\dot{\mathbf{X}}_p=\mathbf{0}} = {}^{tr}\dot{\mathbf{A}}_e$, una deformación puramente elástica, entonces el principio de máxima disipación nos lleva a

$$\mathcal{D} = \left(\mathbf{S} - \mathbf{S}^{|e} : \frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial \mathbf{A}} \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p=\mathbf{0}} \right) : \dot{\mathbf{A}} = 0 \quad \text{si} \quad \dot{\mathbf{X}}_p = \mathbf{0} \quad (4.54)$$

donde normalmente ocurrirá que $\mathbf{S} \neq \mathbf{S}^{|e}$, por hallarse ambos tensores de tensión en diferente configuración. Por tanto, ejecutando el tiro contravariante de configuración intermedia a configuración inicial sobre $\mathbf{S}^{|e}$, y aplicando la inversión sobre la ec. (2.39) a través de $\mathbf{X}_p$, resulta

$$\mathbf{S} := \mathbf{X}_p^{-1} \mathbf{S}^{|e} \mathbf{X}_p^{-T} = \mathbf{S}^{|e} : \mathbf{X}_p^{-T} \odot \mathbf{X}_p^{-T} = \frac{d\Psi_A(\mathbf{A}_e)}{d\mathbf{A}_e} : \frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial \mathbf{A}} \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p=\mathbf{0}} = \frac{\partial \Psi_A}{\partial \mathbf{A}} \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p=\mathbf{0}} \quad (4.55)$$

El tensor $\partial \mathbf{A}_e / \partial \mathbf{A}|_{\dot{\mathbf{X}}_p=\mathbf{0}}$ en la ec. (4.55) conduce la operación de tiro sobre $\mathbf{S}^{|e}$ en la configuración intermedia hacia $\mathbf{S}$ en la configuración inicial. Recordando las ecuaciones (4.49) y (4.51) se obtiene la siguiente equivalencia de las potencias elásticas no disipativas

$$\dot{\Psi}_A \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p=\mathbf{0}} = {}^{tr}\dot{\Psi}_A = \mathbf{S}^{|e} : {}^{tr}\dot{\mathbf{A}}_e = \mathbf{S}^{|e} : \frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial \mathbf{A}} \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p=\mathbf{0}} : \dot{\mathbf{A}}_e = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{A}} \quad (4.56)$$

lo que asegura la consistencia en las funciones hiperelásticas empleadas.

Si ahora se considera aisladamente la parte puramente disipativa donde $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$ y $\dot{\mathbf{X}}_p \neq \mathbf{0}$, entonces en la parte correctora donde $\dot{\mathbf{A}}_e = \dot{\mathbf{A}}_e|_{\dot{\mathbf{A}}=\mathbf{0}} = {}^{ct}\dot{\mathbf{A}}_e$, llevándolo a la ec. (4.52) se obtiene la expresión simplificada de la disipación

$$\mathcal{D} = -\mathbf{S}^{|e} : {}^{ct}\dot{\mathbf{A}}_e > 0 \quad \text{si} \quad \dot{\mathbf{X}}_p \neq \mathbf{0} \quad (4.57)$$

que como se puede comprobar es equivalente a la ec. (4.13) descrita en medidas infinitesimales.

Ahora la disipación queda descrita con la contribución *parcial* del corrector $\dot{\mathbf{A}}_e|_{\dot{\mathbf{A}}=\mathbf{0}}$, pero usando como variable interna *dependiente* la parte elástica de la deformación $\mathbf{A}_e(\mathbf{A}, \mathbf{X}_p)$ en lugar de emplear el término plástico como variable interna. En otras formulaciones de la literatura, donde aparece como variable independiente el término $\dot{\mathbf{X}}_p$, término que puede verse en el segundo sumando de la ec. (4.49), y que conduciría de forma alternativa a la ecuación

$$\mathcal{D} = -\mathbf{S}^{le} : \left. \frac{\partial \mathbf{A}_e}{\partial \mathbf{X}_p} \right|_{\dot{\mathbf{A}}=\mathbf{0}} : \dot{\mathbf{X}}_p > 0 \quad \text{si} \quad \dot{\mathbf{X}}_p \neq \mathbf{0} \quad (4.58)$$

Como reflexión particular, trabajar con cualquiera de las ecs. (4.13) o. (4.14) es irrelevante en el campo de las pequeñas deformaciones, pero esto no ocurre de igual manera en las grandes deformaciones, pues aquí es mucho más fácil trabajar con la deformación elástica $\mathbf{A}_e$ como variable independiente, que obligar a cumplir la condición de disipación cuando se trabaja con el término de gradiente plástico $\mathbf{X}_p$ como variable independiente.

Es fácil relacionar lo ya descrito acerca de la función de flujo plástico en la etapa del corrector, cuando la disipación es no nula, pues de manera inmediata, recordando la ec. (4.26), se obtiene

$${}^{ct}\dot{\mathbf{A}}_e = -\dot{\gamma} \frac{1}{k} \nabla \phi_S \quad (4.59)$$

donde está definido el potencia plástico ϕ según la tensión conjuga de trabajo. En este caso el tensor $\mathbf{S}$ y según el criterio de tipo Hill adoptaría una expresión $\phi_S = \frac{1}{2} \mathbf{S}^{le} : \mathbb{N}_S : \mathbf{S}^{le}$, donde $\mathbb{N}_S$ es el tensor de cuarto orden de coeficientes plastificación -recordar la ec. (3.73)-, que debe estar descrito en la misma configuración que $\mathbf{A}_e$ y $\mathbf{S}^{le}$.

Aplicando la regla de flujo a la disipación, es fácil comprobar como siempre queda garantizado el cumplimiento de la misma:

$$\mathcal{D} = \dot{\gamma} \frac{1}{k} (\mathbf{S}^{le} : \mathbb{N}_S : \mathbf{S}^{le}) > 0 \quad \text{si} \quad \dot{\gamma} > 0 \quad (4.60)$$

4.2.3. Disipación y regla de flujo en términos del corrector elástico de deformación logarítmica

Se ha escogido la descripción logarítmica de las deformaciones para llevar a cabo la integración de la ecuación de flujo plástico, ya que las propiedades de esta descripción de deformaciones resultan de particular interés a la hora de simplificar el problema elastoplástico [1], [2], [119], [120], [75], [41], [79], y esta elección es particularmente atractiva de cara a la actualización de deformaciones durante la solución algorítmica.

Por otro lado, si bien los códigos de elementos finitos trabajan con deformaciones cuadráticas de Green-Lagrange, y no con deformaciones logarítmicas, este problema se va a resolver mediante el uso de los tensores de cambio de configuración punto a punto, o de mapeo (*mapping tensors*), entre ambas descripciones [78]. Esta herramienta será usada de forma intensiva cuando se ejecute la solución algorítmica del modelo elastoplástico que se describe en este trabajo. El resultado cinemático del cambio de configuración entre las deformaciones de cuadráticas y las logarítmicas llevan a un relación directa $\mathbf{A}_e = \mathbf{A}_e(\mathbf{E}_e)$ y $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{E})$.

Centrando el planteamiento en las deformaciones logarítmicas, a saber $\mathbf{E}_e = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{X}_e^T \mathbf{X}_e)$ y $\mathbf{E} = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{X}^T \mathbf{X})$, y de forma análoga a la dependencia analítica de $\mathbf{A}_e(\mathbf{A}, \mathbf{X}_p)$ de la ec. (4.48), se llega a una dependencia implícita de la variable logarítmica $\mathbf{E}_e(\mathbf{E}, \mathbf{X}_p)$. Por tanto, recordando la ec. (4.49), se puede descomponer la variable interna logarítmica $\dot{\mathbf{E}}_e$ utilizando las contribuciones parciales de las variables independientes $\mathbf{E}$ y $\mathbf{X}_p$, usando la ec. (4.3)

$$\dot{\mathbf{E}}_e = \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} \frac{d\mathbf{E}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{X}_p} \frac{d\mathbf{X}_p}{dt} = \left. \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} \right|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} : \dot{\mathbf{E}} + \left. \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{X}_p} \right|_{\dot{\mathbf{E}}=0} : \dot{\mathbf{X}}_p \quad (4.61)$$

expresión simplificada como

$$\dot{\mathbf{E}}_e = \dot{\mathbf{E}}_e \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} + \dot{\mathbf{E}}_e \Big|_{\dot{\mathbf{E}}=0} \quad (4.62)$$

Si se recuerdan las semejanzas existentes entre las deformaciones logarítmicas e infinitesimales, la ec. (4.62) muestra la independencia de los términos parciales de derivada temporal o tasa dentro del marco continuo y ya descritas en la ec. (4.3), y muestra como ambas partes tienen lugar de forma instantánea y simultánea.

En detalle, si se restringe el camino de deformación a $\dot{\mathbf{X}}_p = \mathbf{0}$ se desarrollará una potencia sin presencia de disipación interna, y si se restringe el camino de deformación con la condición $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$ se producirá la disipación sin potencia externa adicional. Esta descomposición en la ec. (4.62) es típicamente empleada para las variables internas en el marco algorítmico, y permite identificar la presencia de los pasos fundamentales del algoritmo elastoplástico: el paso *predictor elástico o trial* cuando $\mathbf{X}_p$ se congela, y el paso *corrector elástico* cuando se congela $\mathbf{E}$. Todo ello se interpreta en un contexto o marco continuo del material, en el que ambos pasos suceden simultáneamente, aunque algorítmicamente se resuelvan de forma separada.

Reescribiendo la ec. (4.62) en estos términos algorítmicos

$$\dot{\mathbf{E}}_e = \dot{\mathbf{E}}_e \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} + \dot{\mathbf{E}}_e \Big|_{\dot{\mathbf{E}}=0} =: {}^{tr} \dot{\mathbf{E}}_e + {}^{ct} \dot{\mathbf{E}}_e \quad (4.63)$$

donde

$${}^{tr} \dot{\mathbf{E}}_e = \dot{\mathbf{E}}_e \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} = \left. \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} \right|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} : \dot{\mathbf{E}} \quad (4.64)$$

$${}^{ct} \dot{\mathbf{E}}_e = \dot{\mathbf{E}}_e \Big|_{\dot{\mathbf{E}}=0} = \left. \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{X}_p} \right|_{\dot{\mathbf{E}}=0} : \dot{\mathbf{X}}_p \quad (4.65)$$

y reinterpretando los pasos para un estado de deformación en el que se conoce $\mathbf{X} = \mathbf{X}_e \mathbf{X}_p$ en un instante dado, la contribución trial elástica ${}^{tr} \dot{\mathbf{E}}_e$ depende solo de la deformación logarítmica externa $\dot{\mathbf{E}}$ ($\mathbf{X}_p$ está congelado), y la contribución del corrector elástico ${}^{ct} \dot{\mathbf{E}}_e$ depende solo del gradiente plástico $\dot{\mathbf{X}}_p$ ($\mathbf{E}$ está congelado).

Antes de continuar el desarrollo del modelo formal, conviene llamar la atención sobre la ec. (4.62)₁ que se puede particularizar en la forma métrica aditiva elastoplástica

$$\dot{\mathbf{E}}_e = \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}}_p \quad (4.66)$$

forma que solo es válida solo en algunos casos particulares, por ejemplo en carga axial sobre ejes principales de material o direcciones preferentes de material. El comentario tiene su razón en el uso extensivo que de estas particularizaciones se llevan a cabo a partir de la descomposición aditiva $\mathbf{E}_e = \mathbf{E} - \mathbf{E}_p$ que inmediatamente se obtiene por integración de la ec. (4.66), y que es una regla generalmente no consistente con la formulación cinemática del medio continuo que se obtiene de la descomposición de Lee -ec. (4.62)-. Si se es consistente con dicha descomposición multiplicativa, no debe confundirse este caso con aquellos casos particulares, a pesar de que son muchos los autores que utilizan modelos con esa métrica elastoplástica aditiva, como por ejemplo [109], [98], [124], [146], [125].

Retomando la discusión sobre la ecuación de disipación, ésta debe describirse ahora en deformaciones logarítmicas, para lo que se pueden utilizar las expresiones obtenidas en términos de Green-Lagrange de la sección anterior. Si se plantea la reformulación mediante un cambio en la medida de deformación, se puede resolver fácilmente a través de las correspondientes operaciones de mapeo [78], así el tensor de deformaciones logarítmicas puede relacionarse con el tensor de deformaciones de Green-Lagrange a través de las expresiones

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{d\mathbf{E}}{d\mathbf{A}} : \dot{\mathbf{A}} =: \mathbb{M}_{\mathbf{A}}^{\dot{\mathbf{E}}} : \dot{\mathbf{A}} \quad \text{o bien} \quad \dot{\mathbf{A}} = \frac{d\mathbf{A}}{d\mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} =: \mathbb{M}_{\mathbf{E}}^{\dot{\mathbf{A}}} : \dot{\mathbf{E}} \quad (4.67)$$

donde $\mathbb{M}_{(\cdot)}^{(\cdot)}$ es un tensor geométrico de cuarto orden que realiza la operación punto a punto. Es necesario utilizar ambos tensores en su forma espectral por la naturaleza de las deformaciones logarítmicas -ec. (2.76)-. Por tanto, partiendo de la ecuación de la disipación en términos de deformación de Green -ec. (4.52)-, se justifica la expresión

$$\mathcal{D} = \mathcal{P} - \dot{\Psi}_E = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} - \mathbf{T}^{\text{le}} : \dot{\mathbf{E}}_e \geq 0 \quad (4.68)$$

donde aparecen los términos de la tensión de Kirchhoff generalizada $\mathbf{T}$ y la tensión conjugada de trabajo elástico $\mathbf{T}^{\text{le}}$. A continuación haciendo uso de las mismas operaciones proyectivas descritas en la ec. (4.67) se puede obtener el cambio de medida para las tensiones correspondientes

$$\mathbf{T} = \mathbf{S} : \mathbb{M}_{\mathbf{E}}^{\dot{\mathbf{A}}} = \left. \frac{\partial \Psi_A(\mathbf{A}_e)}{\partial \mathbf{A}} \right|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} : \frac{d\mathbf{A}}{d\mathbf{E}} = \left. \frac{\partial \Psi_E(\mathbf{E}_e)}{\partial \mathbf{E}} \right|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} \quad (4.69)$$

cambio que es consistente con la naturaleza hiperelástica de la tensiones y la invarianza de la energía libre de Helmholtz Ψ , y donde el tensor $\mathbf{T}$ se halla en configuración inicial. Además

$$\mathbf{T}^{\text{le}} = \mathbf{S}^{\text{le}} : \mathbb{M}_{\mathbf{E}_e}^{\dot{\mathbf{A}}_e} = \frac{d\Psi_A(\mathbf{A}_e)}{d\mathbf{A}_e} : \frac{d\mathbf{A}_e}{d\mathbf{E}_e} = \frac{d\Psi_E(\mathbf{E}_e)}{d\mathbf{E}_e} \quad (4.70)$$

que se halla en configuración intermedia, y donde $\mathbf{T}^{\text{le}}$ deriva directamente de $\Psi_E(\mathbf{E}_e)$ como tensión conjugada del tensor $\mathbf{E}_e$, expresándose Ψ_E como la función de energía libre expresada en deformaciones elásticas logarítmicas. En estas expresiones cabe observar el paralelismo con las expresiones descritas con el segundo tensor de Piola-Kirchhoff en las ecuaciones (4.55) y (4.53).

Finalmente, teniendo en cuenta los argumentos expuestos anteriormente, si durante la etapa de predictor elástico o *trial* ocurre que $\dot{\mathbf{X}}_p = \mathbf{0}$, entonces $\dot{\mathbf{E}}_e \equiv \dot{\mathbf{E}}_e|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} =$

${}^{tr}\dot{\mathbf{E}}_e$ y no habrá disipación

$$\mathcal{D} = \mathcal{P} - \dot{\Psi}_E = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} - \mathbf{T}^{le} : {}^{tr}\dot{\mathbf{E}}_e = 0 \quad \text{si} \quad \dot{\mathbf{X}}_p = \mathbf{0} \quad (4.71)$$

con lo que se recupera la expresión

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^{le} : \left. \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} \right|_{\dot{\mathbf{X}}_p = \mathbf{0}} = \left. \frac{d\Psi_E(\mathbf{E}_e)}{d\mathbf{E}} \right|_{\dot{\mathbf{X}}_p = \mathbf{0}} \quad (4.72)$$

semejante a la ec. (4.10) de deformaciones infinitesimales, pero donde aparece el tensor de cuarto orden $\partial \mathbf{E}_e / \partial \mathbf{E} |_{\dot{\mathbf{X}}_p = \mathbf{0}}$, presente también en la ec. (4.62), y que opera un cambio de configuración entre los tensores de deformación $\dot{\mathbf{E}}$ y ${}^{tr}\dot{\mathbf{E}}_e$, y ahora también entre los de tensión $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}^{le}$, ya que $\mathbf{T}^{le}$ se halla en una configuración intermedia, diferente a la de $\mathbf{T}$, válido cuando la configuración intermedia permanece fija.

Con ello se demuestra que toda la potencia mecánica se comunica al material en la etapa predictor o de *trial*, como se verifica en la expresión

$$\dot{\Psi}_E \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p = \mathbf{0}} = {}^{tr}\dot{\Psi}_E = \mathbf{T}^{le} : {}^{tr}\dot{\mathbf{E}}_e = \mathbf{T}^{le} : \left. \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} \right|_{\dot{\mathbf{X}}_p = \mathbf{0}} : \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} \quad (4.73)$$

en la segunda parte del análisis se observa como en la fase de corrector elástico se produce toda la disipación del proceso, cuando se aplica la condición $\dot{\mathbf{X}}_p \neq \mathbf{0}$ y se genera deformación plástica de forma efectiva, de manera que

$$\mathcal{D} = -\mathbf{T}^{le} : {}^{ct}\dot{\mathbf{E}}_e > 0 \quad \text{si} \quad \dot{\gamma} > 0 \quad (4.74)$$

expresión semejante a la ec. (4.27). Si en este punto se recupera la regla de flujo plástico con la deformación del corrector, en semejanza a la ec. (4.26), se obtiene

$${}^{ct}\dot{\mathbf{E}}_e = -\dot{\gamma} \frac{1}{k} \nabla \phi_T \quad (4.75)$$

donde $\phi_T(\mathbf{T}^{le})$ es el correspondiente potencial interno plástico expresado con las tensiones de Kirchhoff generalizadas en configuración intermedia

$$\phi_T(\mathbf{T}^{le}) = \frac{1}{2} \mathbf{T}^{le} : \mathbb{N}_T : \mathbf{T}^{le} \quad (4.76)$$

donde $\mathbb{N}_T$ es el correspondiente tensor de cuarto orden de tipo Hill, con los coeficientes de plástificación del material particularizado para la tensión $\mathbf{T}$ -recordar la ec. (3.73)-. Es fácil comprobar como automáticamente se cumple la condición de disipación, ya que todos los términos de la expresión son positivos

$$\mathcal{D} = \dot{\gamma} \frac{1}{k} \mathbf{T}^{le} : \mathbb{N}_T : \mathbf{T}^{le} > 0 \quad \text{si} \quad \dot{\gamma} > 0 \quad (4.77)$$

Recuperando la ec. (4.75), es fácil comprobar como se gobierna directamente el cambio del estado tensional trial sobre el dominio elástico $\mathbb{E}$, dentro del espacio de las tensiones conjugadas de la deformación logarítmica.

La sencillez de la ec. (4.75) pone de manifiesto un aspecto muy importante de esta formulación: la ausencia del giro plástico ω_p (plastic spin rate) en la relación corrector-gradiente de tensiones, ya que la relación entre ambos términos a ambos lados de la igualdad es inmediata, de forma semejante a como se da en deformaciones infinitesimales. Se puede afirmar que simplemente no existe giro plástico cuando se resuelve en términos de corrector elástico.

4.2.3.1. El giro plástico y el corrector elástico

En el modelo que se va a resolver en esta tesis incorpora una ecuación de flujo plástico puede integrarse de forma inmediata para obtener las incógnitas del problema de forma independiente al mencionado giro plástico. En cierto modo, se podría interpretar el giro elástico como una ruta alternativa en la descomposición multiplicativa que ahorra pasar utilizar el giro plástico, por hallarse este giro en el otro camino, el que se toma cuando se utiliza el corrector plástico, por la vía de $\mathbf{X}_p$.

El giro plástico en plasticidad anisótropa es importante pues introduce cambios en las direcciones principales de las variables tensoriales, estos cambios interfieren en la aplicación de las ecuaciones constitutivas del problema, complicando la formulación y elevando el coste computacional.

La presencia del giro plástico es inevitable en grandes deformaciones, aparece en la configuración intermedia al operar $\mathbf{X}_p$. Como la integración de las variables internas no se realiza con el corrector plástico propiamente, sino con el corrector elástico, no es hasta el final de cada paso iterativo de carga cuando se alcanza la convergencia en las iteraciones globales y se completa la actualización de todas las variables del cálculo, entonces aflora una rotación finita físicamente equivalente a este giro ($\mathbf{R}_e$). El mismo esquema se reproduce cuando en Viscoelasticidad se lleva a cabo la descomposición multiplicativa de Sidoroff y se opera con el corrector elástico en lugar de operar con el corrector viscoso [76].

Por otro lado, un análisis sobre la regla de flujo de la ec. (4.75), el corrector elástico utilizado se recoge dentro de tensor simétrico de seis componentes, en cambio el tensor corrector plástico no es necesariamente un tensor simétrico, puede tener hasta nueve componentes por tanto. Tal es el caso de utilizar una expresión de la disipación en función del tensor no simétrico de Mandel Ξ^e [89], [90], conjugado de trabajo del tensor de velocidad de deformación espacial $\mathbf{l}_p$ -ec. (2.51)-, que tampoco es simétrico.

Así pues, el uso de la ec. (4.75) optimiza la computación de los parámetros internos, y en el caso de utilizar plasticidad anisótropa es posible emplear los esquemas de la plasticidad de deformaciones infinitesimales sin modificar los esquemas algorítmicos. En el caso de la plasticidad isótropa en deformaciones finitas este problema ya habían sido resuelto [134]. La base de esta importante característica está en la elección de la variable interna $\dot{\mathbf{E}}_e$ como variable de integración en la configuración intermedia, de manera que su participación en la ec. 4.74 de la disipación queda ahora descrita como

$$\mathcal{D} = -\mathbf{T}^{|e} : {}^{ct}\dot{\mathbf{E}}_e = \frac{d\Psi_E(\mathbf{E}_e)}{d\mathbf{E}_e} : {}^{ct}\dot{\mathbf{E}}_e = -{}^{ct}\dot{\Psi}_E > 0 \quad \text{si} \quad \dot{\gamma} > 0 \quad (4.78)$$

donde la configuración intermedia está en ambos tensores conjugados $\mathbf{T}^{|e}$ y ${}^{ct}\dot{\mathbf{E}}_e$.

4.2.4. La función de plastificación

En las secciones anteriores se ha puesto de manifiesto como la ecuación de disipación expresada según el corrector elástico posee una importante flexibilidad, que puede ser expresada en diferentes configuraciones, y que la única observación a tener en cuenta es que tensiones y deformaciones involucradas en su expresión tensorial han de emplear la misma medida, para que sean conjugadas de trabajo la una de la otra. Esta elección es una cuestión que afecta a la definición de la función hiperelástica de energía libre,

y también a la función de plastificación que se utilice, por la necesidad de conocer los coeficientes del tensor $\mathbb{N}$ de tipo Hill, y saber cuando o en que configuración este tensor no cambia. Esta sección pretende aportar algunas consideraciones al respecto.

Por un lado, es evidente la necesidad de escribir las ecuaciones constitutivas en la configuración intermedia, que resulta de aplicar la fase predictora *trial* y antes de iniciar la fase correctora, donde se acepta que $\mathbb{N}$ no cambia y no es dependiente de las deformaciones. Por otro lado, en el caso de usar un tensor $\mathbb{N}_S$ referido a las tensiones segundas de Piola-Kirchhoff ($\mathbf{S}$), si el tensor no cambia en configuración intermedia, si lo haría en la configuración actual, ahora descrita en términos de $\boldsymbol{\tau}^{\text{le}}$ (tensiones de Kirchhoff espaciales) donde las direcciones preferentes de material ya no serían ortogonales, y dependerían de la deformación elástica; este estado se puede interpretar a partir de la expresión del potencial plástico con variables eulerianas

$$\phi(\boldsymbol{\tau}^{\text{le}}, \mathbf{X}_e) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}^{\text{le}} : \mathbb{N}_\tau(\mathbf{X}_e) : \boldsymbol{\tau}^{\text{le}} \quad (4.79)$$

donde $\mathbb{N}_\tau(\mathbf{X}_e)$ se halla en la misma configuración que $\boldsymbol{\tau}^{\text{le}}$ y $\mathbf{d}_e$ ($\mathbf{d}_e$ tasa de deformación elástica en configuración espacial).

Si hemos aceptado las deformaciones logarítmicas como la evolución natural de generalizar las deformaciones pequeñas -[75]-, la preferencia por este marco es la deformación logarítmica elástica, $\mathbf{E}_e$, como variable interna en la configuración intermedia, y por ello el uso de las tensiones generalizadas de Kirchhoff $\mathbf{T}^{\text{le}}$ en las ecuaciones de la disipación -ecs. (4.74) y (4.78)-, y lo consistente es elegir $\mathbb{N}_T$ como tensor de coeficientes de plastificación del material. De igual manera que las deformaciones, $\mathbb{N}_T$ se encuentra en esa configuración intermedia, la función de plastificación ha de ser consistente, lo que exige una formulación en los mismos términos de tensión, $f_T(\mathbf{T}^{\text{le}}, k)$.

La tensión $\mathbf{T}^{\text{le}}$, que aunque se halla en configuración intermedia, se puede tirar hacia configuración inicial o material de forma simple con una simple rotación elástica $\mathbf{R}_e$ por las virtudes de las deformaciones logarítmicas. Este tiro permite a la función de plastificación preservar la ortogonalidad de las direcciones preferentes de material en el tensor $\mathbb{N}_T$, ya que a diferencia de $\mathbf{X}_e$, $\mathbf{R}_e$ es ortogonal y permite a $\mathbb{N}_T$ permanecer constante en el marco rotado sin perder la propiedad de ortogonalidad. En este sentido, cabe hacer notar que en direcciones principales de material en elasticidad isótropa, la tensión de Kirchhoff generalizada interna $\mathbf{T}^{\text{le}}$ es la tensión interna espacial rotada de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}^{\text{le}}$ [78], ambas de origen elástico por su asociación con las variables internas elásticas.

Procediendo de forma igual que en el caso de las deformaciones pequeñas, pero ahora en el marco de las deformaciones finitas, podemos identificar en la ec. (4.77) la presencia de la función de plastificación $f_T(\mathbf{T}^{\text{le}}, k)$, y en las condiciones de carga plástica

$$f_T(\mathbf{T}^{\text{le}}, k) = 2\phi_T(\mathbf{T}^{\text{le}}) - k^2 = \mathbf{T}^{\text{le}} : \mathbb{N}_T : \mathbf{T}^{\text{le}} - k^2 = 0 \quad \text{si} \quad \dot{\gamma} > 0 \quad (4.80)$$

y de descarga elástica

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \text{si} \quad f_T(\mathbf{T}^{\text{le}}, k) = 2\phi_T(\mathbf{T}^{\text{le}}) - k^2 = \mathbf{T}^{\text{le}} : \mathbb{N}_T : \mathbf{T}^{\text{le}} - k^2 < 0 \quad (4.81)$$

tras lo cuál, interpretando estas ecuaciones con las condiciones de Khun-Tucker se obtiene la disipación en términos de la tensión interna de fluencia plástica característica del material $k > 0$ y de la tasa de deformación plástica equivalente $\dot{\gamma} \geq 0$, como

$$\mathcal{D} = k\dot{\gamma} \geq 0 \quad \text{si} \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad (4.82)$$

4.2.4.1. La medida de la Tensión en la función de plastificación

La función de plastificación puede ser escrita en cualquier configuración, ya que debe generar un resultado escalar e invariante respecto de la descripción utilizada. Lo mismo ocurre con el potencial plástico ϕ_T que puede ser escrito en cualquier medida de tensión, y si además se utiliza una herramienta de mapeo para convertir las diferentes medidas de tensión entre si, se entiende que es una cuestión casi trivial, sólo operar.

Para seguir utilizando las tensiones de Kirchhoff generalizadas, hay que describir el potencial plástico en estos términos

$$\phi_T(\mathbf{T}^{|e}) = \frac{1}{2} \mathbf{T}^{|e} : \mathbb{N}_T : \mathbf{T}^{|e} \quad (4.83)$$

y que será la configuración aplicada en el modelo computacional de este trabajo.

Si se formulase el problema en términos del segundo tensor de Piola-Kirchhoff stresses de la ec. (4.53), aplicando las operaciones de mapeo con el tensor de cuarto orden $\mathbb{M}_{\dot{\mathbf{E}}_e}^{\dot{\mathbf{A}}_e}$ [78] (un tensor con simetrías mayores que solo depende de los autovalores del tensor diestro de alargamientos $\mathbf{U}_e$ -ec. 2.43-), resulta una operación donde las direcciones principales no cambian, aunque el tensor $\mathbb{N}$ adquiere nuevos valores en sus coeficientes, no cambia la posición de la base de referencia. De forma consistente con la ec. (4.69), y aplicando la misma operación que entre $\dot{\mathbf{A}}_e$ y $\dot{\mathbf{E}}_e$, por invarianza de sus potencias conjugadas

$$\mathbf{T}^{|e} = \mathbf{S}^{|e} : \frac{d\mathbf{A}_e}{d\mathbf{E}_e} = \mathbf{S}^{|e} : \mathbb{M}_{\dot{\mathbf{E}}_e}^{\dot{\mathbf{A}}_e} \quad (4.84)$$

y ya que $\mathbf{T}^{|e}$ y $\mathbf{S}^{|e}$ están en la misma configuración

$$\phi_T(\mathbf{T}^{|e}) = \frac{1}{2} \mathbf{T}^{|e} : \mathbb{N}_T : \mathbf{T}^{|e} = \frac{1}{2} \mathbf{S}^{|e} : \mathbb{N}_S(\mathbf{U}_e) : \mathbf{S}^{|e} = \phi_S(\mathbf{S}^{|e}, \mathbf{U}_e) \quad (4.85)$$

en donde el nuevo tensor de coeficientes plásticos es consistente con la configuración intermedia, y ahora queda definido como

$$\mathbb{N}_S(\mathbf{U}_e) := \mathbb{M}_{\dot{\mathbf{E}}_e}^{\dot{\mathbf{A}}_e} : \mathbb{N}_T : \mathbb{M}_{\dot{\mathbf{E}}_e}^{\dot{\mathbf{A}}_e} \quad (4.86)$$

pero donde los coeficientes de $\mathbb{N}_S(\mathbf{U}_e)$ pueden cambiar con las deformaciones elásticas respecto de $\mathbb{N}_T$, si bien en plasticidad de metales donde las formaciones elásticas son de menor magnitud a las deformaciones plásticas, los cambios introducidos por la presencia de $\mathbf{U}_e$ serían en general pequeños.

De forma semejante, si se operase con las tensiones en configuración espacial, se aplicaría el mismo procedimiento de mapeo, ahora hacia configuración de referencia desde la configuración intermedia ($\dot{\mathbf{E}}_e \rightarrow \mathbf{d}_e$ y $\mathbf{T}^{|e} \rightarrow \boldsymbol{\tau}^{|e}$).

$$f_\tau(\boldsymbol{\tau}^{|e}, k; \mathbf{X}_e) = \boldsymbol{\tau}^{|e} : \mathbb{N}_\tau(\mathbf{X}_e) : \boldsymbol{\tau}^{|e} - k^2 = 0 \quad \text{si} \quad \dot{\gamma} > 0 \quad (4.87)$$

$$\mathbb{N}_\tau(\mathbf{X}_e) = \mathbb{M}_{\dot{\mathbf{E}}_e}^{\mathbf{d}_e}(\mathbf{X}_e) : \mathbb{N}_T : \mathbb{M}_{\dot{\mathbf{E}}_e}^{\mathbf{d}_e}(\mathbf{X}_e) \quad (4.88)$$

con la diferencia relevante respecto de la ec. (4.86) es la intervención del gradiente elástico $\mathbf{X}_e$ desde configuración intermedia, que éste si introduce cambios en las direcciones principales de tensión, y por tanto el tensor de coeficientes de plastificación ve su configuración también alterada.

4.2.4.2. Parámetros internos de la función de plastificación

Los parámetros internos de plastificación se encuentran considerando la ec. (4.80), por lo que es necesario determinar los coeficientes de la función de plastificación de tipo Hill en el tensor $\mathbb{N}_T$, y el parámetro interno plástico k desde ensayos experimentales. Al mismo tiempo, en todas la expresiones utilizadas hasta ahora con la función de plastificación muestran como el parámetro plástico interno k permanece invariante independientemente de la configuración o de la medida de tensión elegida, como igualmente lo es la disipación $\mathcal{D} = k\dot{\gamma}$.

Por otro lado, en la misma ec. (4.80), la tensión $\mathbf{T}^{\text{le}}$ viene dada por la ec. (4.70), y al hallarse en configuración intermedia resulta ser una variable no mensurable exteriormente, mientras que el tensor de tensiones mensurable se obtiene a partir de la ec. (4.72). Esto pudiera parecer un contrasentido, pues la función de plastificación ha de ser ejecutada con la tensión $\mathbf{T}^{\text{le}}$, pero partiendo de los ensayos uniaxiales sobre las direcciones preferentes de un material ortótropo (simetría a la que está ligada el criterio de Hill), en todos estos ensayos se cumple la identidad

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^{\text{le}} \quad (4.89)$$

ya que en el caso uniaxial están ausentes las rotaciones y se cumple la relación particular

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} = \mathbf{U}_e \mathbf{U}_p \quad \implies \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_p \quad (4.90)$$

con lo que el tensor de cambio de configuración presente en la ec. (4.72) se particulariza desde un punto de vista cinemático como un tensor identidad de cuarto orden

$$\left. \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} \right|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} = \left. \frac{\partial (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p)}{\partial \mathbf{E}} \right|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{E}} = \mathbb{I}^S \quad (4.91)$$

por tanto, durante el ensayo uniaxial la plastificación se da según

$$f_T(\mathbf{T}^{\text{le}}, k) \equiv f_T(\mathbf{T}, k) = \mathbf{T} : \mathbb{N}_T : \mathbf{T} - k^2 \quad (4.92)$$

Recordando que el tensor $\mathbf{T}$ es conjugado de trabajo de la deformación total $\mathbf{E}$, y a su vez es coincidente con el tensor de tensiones espaciales de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$ cuando la carga se aplica en direcciones principales, se puede entonces llegar a la identidad

$$f_T(\mathbf{T}^{\text{le}}, k) \equiv f_T(\mathbf{T}, k) \equiv f_T(\boldsymbol{\tau}, k) = \boldsymbol{\tau} : \mathbb{N}_T : \boldsymbol{\tau} - k^2 \quad (4.93)$$

con lo que ahora si tenemos la función de plastificación descrita con valores de la variable tensión que si son mensurables, ya que a su vez $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$, y la tensión de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ es la medida de tensión que normalmente se obtiene en máquinas universales de ensayo. Por último queda establecer que la plastificación uniaxial tiene lugar cuando

$$\tau = \tau_y \quad \implies \quad f_T(\boldsymbol{\tau}, k) = 0 \quad (4.94)$$

Es fácil deducir como expresiones similares se obtendrán cuando se lleve a cabo un ensayo de cortadura en lugar de ensayos uniaxiales, siempre que se utilicen los planos de direcciones preferentes de material, lo que permite cumplir la expresión puramente cinemática de la ec. (4.91), y preservar la identidad entre las variables de tensión antes descritas.

Por todo ello, tanto el tensor de cuarto orden $\mathbb{N}_T$ como el parámetro interno plástico k , pueden ser completamente determinados mediante el número apropiado de ensayos experimentales en máquina universal. Este procedimiento será detallado más adelante en el capítulo 6.

Finalmente estos resultados pueden ser extrapolados a un caso general con estado de deformación tridimensional, ya que tras determinar $\mathbf{X}_p$ en la descarga elástica del sólido, siempre puede ser conocida la variable interna $\mathbf{E}_e$ a través de la descomposición de Lee, como también se hará en los ensayos numéricos de validación que se llevarán a cabo en el capítulo 7.

4.2.5. Relación entre los términos predictor y corrector elásticos durante el flujo plástico

La condición de consistencia enunciada en las condiciones de Kuhn-Tucker -ec. (3.89)- contempla que la función de plástificación de la ec.(4.80) no solo se ha de cumplir instantáneamente, sino también de forma continua mientras $\dot{\gamma} > 0$. Si se aplica la regla de la cadena en la diferenciación se obtiene la tasa de dicha función en tensiones

$$\dot{f}_T = \dot{f}_T \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} + \dot{f}_T \Big|_{\dot{\mathbf{E}}=0} = {}^{tr}\dot{f}_T + {}^{ct}\dot{f}_T \quad (4.95)$$

En el primero de los sumandos tenemos la relación del término trial sobre $\dot{f}$

$${}^{tr}\dot{f}_T = 2 \nabla \phi_T : {}^{tr}\dot{\mathbf{T}}^{|e} = \nabla \phi_T : \mathbb{A}^{|e} : {}^{tr}\dot{\mathbf{E}}_e \quad (4.96)$$

donde aparece la relación constitutiva elástica entre tensión y deformación en términos logarítmicos, representado por el tensor constitutivo elástico en configuración intermedia

$$\mathbb{A}^{|e} := \frac{d\mathbf{T}^{|e}}{d\mathbf{E}_e} = \frac{d^2\Psi_E(\mathbf{E}_e)}{d\mathbf{E}_e d\mathbf{E}_e} \quad (4.97)$$

El segundo sumando en la ec. (4.95) permite obtener la relación

$${}^{ct}\dot{f}_T = 2 \nabla \phi_T : {}^{ct}\dot{\mathbf{T}}^{|e} - k k' \dot{\gamma} = \nabla \phi_T : \mathbb{A}^{|e} : {}^{ct}\dot{\mathbf{E}}_e - k k' \dot{\gamma} \quad (4.98)$$

donde $k' = dk/d\gamma$ es módulo de endurecimiento/derivada de la función de endurecimiento $k(\gamma)$, concretamente el del caso de endurecimiento isótropo -ec. (3.11)-. Recuperando la ec. (4.75) se obtiene la expresión del término corrector sobre $\dot{f}$

$$\frac{1}{2} {}^{ct}\dot{f}_T = -\dot{\gamma} \frac{1}{k} (\nabla \phi_T : \mathbb{A}^{|e} : \nabla \phi_T + k^2 k') \quad (4.99)$$

Si condición de consistencia es $\dot{f}_T = 0$ sobre la ec. (4.95), y en presencia de flujo plástico ($\dot{\gamma} > 0$) para cualquier tiempo t , se obtiene que

$$\left(\frac{\mathbb{A}^{|e} : \nabla \phi_T}{\nabla \phi_T : \mathbb{A}^{|e} : \nabla \phi_T + k^2 k'} \right) : {}^{tr}\dot{\mathbf{E}}_e = \dot{\gamma} \frac{1}{k} \quad \text{si } \dot{\gamma} > 0 \quad (4.100)$$

donde ${}^{tr}\dot{\mathbf{E}}_e$ es la contribución trial sobre $\dot{\mathbf{E}}_e$ en el marco de la formulación continua.

Si se recupera la ec. (4.64), donde aparece el tensor proyector $\partial \mathbf{E}_e / \partial \mathbf{E} |_{\dot{\mathbf{X}}_p=0}$, la ec. (4.64) se puede reinterpretar como un empuje del término de velocidad de deformación total $\dot{\mathbf{E}}$ desde la configuración inicial de referencia hacia la configuración intermedia, donde va a tener lugar el flujo plástico $\dot{\gamma}$.

$$\left(\frac{\mathbb{A}^{|e} : \nabla \phi_T}{\nabla \phi_T : \mathbb{A}^{|e} : \nabla \phi_T + k^2 k'} \right) : \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} : \dot{\mathbf{E}} = \dot{\gamma} \frac{1}{k} \quad \text{si } \dot{\gamma} > 0 \quad (4.101)$$

y donde ahora se incluyen también los términos de no linealidad geométrica que caracterizan a las deformaciones finitas, y que es un aspecto que no está presente en la ec. (4.35), equivalente en deformaciones infinitesimales. Sin embargo, los esquemas de la formulación infinitesimal siguen siendo los mismos, y se puede comprobar como la ec. (4.100) mimetiza a la ec. (4.34) de las deformaciones infinitesimales.

Finalmente, la combinación de la ec. (4.100) y ec. (4.75) conduce a

$$- \left[\frac{\nabla \phi_T \otimes (\mathbb{A}^{|e} : \nabla \phi_T)}{\nabla \phi_T : \mathbb{A}^{|e} : \nabla \phi_T + k^2 k'} \right] : {}^{tr}\dot{\mathbf{E}}_e = {}^{ct}\dot{\mathbf{E}}_e \quad \text{si } \dot{\gamma} > 0 \quad (4.102)$$

donde aparecen la relación entre los dos términos de variables independientes: el predictor y el corrector, ahora ambos elásticos. Para ello se ha interpretado sobre el predictor una proyección del tensor de deformaciones logarítmicas $\mathbf{E}$ -ec. (4.64)-, mientras que sobre el corrector se ha interpretado la proyección del tensor gradiente plástico $\mathbf{X}_p$ -ec. (4.65)-.

Esto sucede mientras en el marco continuo la tensión conjugada elástica $\mathbf{T}^{|e}$ permanece sobre la superficie de plastificación $f_T(\mathbf{T}^{|e}, k) = 0$ durante el flujo plástico.

4.2.5.1. Relación entre los términos predictor elástico y deformación total en el flujo plástico

Rescribiendo ahora la ec. (4.63) usando la ec. (4.102) se obtiene

$$\dot{\mathbf{E}}_e = {}^{tr}\dot{\mathbf{E}}_e + {}^{ct}\dot{\mathbf{E}}_e = \left[\mathbb{I}^S - \frac{\nabla \phi_T \otimes (\mathbb{A}^{|e} : \nabla \phi_T)}{\nabla \phi_T : \mathbb{A}^{|e} : \nabla \phi_T + k^2 k'} \right] : {}^{tr}\dot{\mathbf{E}}_e \quad \text{si } \dot{\gamma} > 0 \quad (4.103)$$

esta ecuación va a facilitar la linealización consistente de la teoría continua en deformaciones finitas logarítmicas (en configuración intermedia).

4.2.6. Módulo elastoplástico tangente continuo

El módulo elastoplástico tangente para este modelo se ha de plantear en términos de deformaciones logarítmicas y sus conjugada de tensiones de Kirchhoff generalizadas, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{T}$, que operan ambas en descripción lagrangiana o material. Sin embargo, que las tensiones que operan internamente son $\mathbf{T}^{|e} = d\Psi_E(\mathbf{E}_e) / d\mathbf{E}_e$, que a su vez forman parte de $\mathbf{T}$, pero que están descritas en la configuración intermedia -ec. (4.72)-.

Por otro lado, también las deformaciones $\dot{\mathbf{E}}$ y ${}^{tr}\dot{\mathbf{E}}_e$ se relacionan de a través de una cambio de configuraciones inicial a intermedia -ec. (4.64)-. En definitiva, el módulo tangente en configuración intermedia será

$$\dot{\mathbf{T}}^{|e} = \mathbb{A}^{|e} : \dot{\mathbf{E}}_e = \mathbb{A}_{ep}^{|e} : {}^{tr}\dot{\mathbf{E}}_e \quad (4.104)$$

donde $\mathbb{A}_{ep}^{|e}$ se identifica con el módulo elastoplástico continuo interno en configuración intermedia, pero si se hace uso de las ecuaciones (4.97) y (4.103), resulta

$$\mathbb{A}_{ep}^{|e} := \mathbb{A}^{|e} - \frac{(\mathbb{A}^{|e} : \nabla \phi_T) \otimes (\mathbb{A}^{|e} : \nabla \phi_T)}{\nabla \phi_T : \mathbb{A}^{|e} : \nabla \phi_T + k^2 k'} = {}^{tr} \mathbb{A}_{ep}^{|e} + {}^{ct} \mathbb{A}_{ep}^{|e} \quad (4.105)$$

expresión que tiene la misma estructura que el obtenido en deformaciones infinitesimales -ec. (4.39)- o incluso en el caso unidimensional ec. (3.31), donde se observa como el tensor constitutivo elástico inicial es corregido por el módulo tangente constitutivo de la fase correctora plástica, si bien en este modelo está calculado con el término corrector elástico característico de este trabajo.

Es evidente que las diferencias con el caso infinitesimal están en que ambos tensores de tensión total $\boldsymbol{\sigma}$ y de tensión conjugada interna elástica $\boldsymbol{\sigma}^{|e}$ son numéricamente equivalentes, ya que ambos tensores se encuentran en la misma configuración como se observa en la ec. (4.10), y lo mismo ocurre con $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ y $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{|e}$, por lo que la expresión obtenida para el módulo elastoplástico infinitesimal no precisa de operaciones adicionales. Sin embargo, en el caso de las deformaciones finitas no es así, y el tensor elastoplástico tal y como se muestra en la ec. (4.105) en configuración intermedia, tiene que ser proyectado a configuración inicial para poder ser utilizado.

La transformación de $\mathbf{T}$, tensor definido en configuración de referencia, y $\mathbf{T}^{|e}$ definido en configuración intermedia, se realiza a través de una simple operación de cambio punto a punto, como se ve en la ec. (4.72), sin embargo este proceder no se puede llevar a cabo entre $\dot{\mathbf{T}}$ y $\dot{\mathbf{T}}^{|e}$ en el marco continuo por la relación existente en términos de tasa parcial (derivadas temporales)

$$\dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}}^{|e} : \left. \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} \right|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} + \mathbf{T}^{|e} : \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} \right|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} \quad (4.106)$$

buscando la consistencia cinemática, si se combina el primer sumando de la ec. (4.106) y la ec. (4.64) y se introducen en la ec. (4.104), se obtiene la expresión

$$\dot{\mathbf{T}} \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} = \left(\left. \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} \right|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0}^T : \mathbb{A}_{ep}^{|e} : \left. \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} \right|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} \right) : \dot{\mathbf{E}} = \mathbb{A}_{ep} : \dot{\mathbf{E}} \quad (4.107)$$

donde el resultado es una expresión que está en configuración de referencia, cambio que ejecuta el mismo tensor de cuarto orden que aparece en las ecuaciones (4.64), (4.101) o (4.72), pudiéndose identificar el módulo elastoplástico en configuración material como

$$\mathbb{A}_{ep} := \left. \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} \right|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0}^T : \mathbb{A}_{ep}^{|e} : \left. \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} \right|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} \quad (4.108)$$

El resultado de la ec. (4.108) no presenta ya la semejanza estructural anterior con la ec. (4.10) de las deformaciones infinitesimales, como si ocurría con la ec. (4.105), pero ya es cinemáticamente consistente para el problema de deformaciones finitas en la configuración de referencia material.

Capítulo 5

Modelo computacional

En este capítulo se presenta el modelo computacional desarrollado y utilizado en esta tesis, empleando la formulación en deformaciones finitas con una descripción en deformaciones logarítmicas y sus tensiones conjugadas de trabajo, las tensiones de Kirchhoff generalizadas en configuración lagrangiana o material.

En este capítulo se añaden todos los ingredientes del modelo de cálculo elastoplástico, incluyendo los efectos de endurecimiento plástico característicos de estos problemas, con un endurecimiento combinado isótropo y cinemático. El modelo pretende ser válido para materiales anisótropos, tanto en el comportamiento elástico como en el plástico. Para ello, el fenómeno de plastificación se describe utilizando un criterio de tipo Hill para materiales anisótropos, adaptado a su aplicación algorítmica en el modelo de cálculo.

El problema numérico se desarrolla mediante y un algoritmo local clásico del tipo predictor-corrector, ahora enteramente descrito con variables internas elásticas, con el que se realizan las operaciones de retorno radial (*return mapping*), con un procedimiento de integración implícita sobre la ecuación de evolución del flujo plástico.

Todo ello se comprobará funcionalmente en capítulos posteriores, donde se implementará el modelo en un código de elementos finitos implícito de cálculo no lineal, capaz de reproducir las no linealidades geométricas y materiales. También se aplicará sobre problemas con no linealidad de las condiciones de contorno, como es el problema de contacto. Será ahí donde se presentarán los ejemplos y casos adecuados para la verificación numérica del modelo, con objeto de demostrar la validez del mismo.

Para describir la formulación, en primer lugar se presentará un modelo macroscópico de naturaleza fenomenológica que servirá de soporte para la motivación física del problema, y sobre el que se inspira la formulación matemática.

Primeramente se llevará a cabo una introducción a través de una motivación infinitesimal del problema elastoplástico, y posteriormente se expondrá la formulación en deformaciones finitas logarítmicas. Se expondrá el algoritmo de cálculo con sus variables y también se definirán los parámetros de material característicos y necesarios para la resolución del problema. La obtención de estos parámetros a partir de datos experimentales con ensayos físicos en máquina universal de ensayos mecánicos será ya objetivo de otro capítulo.

5.1. Elastoplasticidad infinitesimal: motivación computacional

Esta sección tiene por objeto establecer una motivación para la interpretación física del problema elastoplástico con endurecimiento, ya que en el capítulo anterior no se había analizado el papel de este fenómeno, sino que solo se habían mostrado las virtudes del mecanismo corrector elástico disipativo, sin añadir variables internas de endurecimiento. Esta motivación se llevará a cabo sobre un modelo teórico continuo, y posteriormente este modelo se desarrollará dentro de un marco algorítmico-incremental.

El modelo continuo pretende poner en evidencia las virtudes y bondades del modelo mediante la formulación en deformaciones infinitesimales y trasladado a las deformaciones finitas, para poder comprobar el paralelismo entre ambas en la interpretación clásica del esquema del retorno radial, descrito por Simó en [131], y que constituye hoy en día una referencia fundamental de los modelos computacionales elastoplásticos actuales. El final de esta sección servirá de trampolín hacia la formulación algorítmica.

5.1.1. Modelo reológico de endurecimiento

El modelo que se propone se basa en una interpretación reológica del fenómeno de endurecimiento, desde un punto de vista macroscópico, y motivada en un sencillo dispositivo unidimensional sobre el que se interpretará el endurecimiento en base a las variables internas del problema. La novedad se halla en la interpretación del endurecimiento cinemático con variables externas, en lugar de las variables internas clásicas, que permite reducir el número de incógnitas que serán necesarias para la resolución del problema elastoplástico.

Se considera un modelo unidimensional compuesto por un muelle elástico de Hooke en paralelo con un dispositivo elastoplástico de tipo Prandtl, éste formado a su vez de un segundo muelle elástico hookeano y un disipador plástico de fricción dispuestos en serie, tal y como se muestra en la figura 5.1.

La primera rama hookeana del dispositivo, la que posee el muelle elástico solitario, posee la particularidad de desarrollar sobre la segunda rama de Prandtl un efecto de endurecimiento cinemático, modificando la tensión total con la que se produce la plástificación en el dispositivo; de esta manera recibirá el nombre de *kinematic* o *kin*, aunque podría haber recibido el nombre de *external* o *ext* por estar operado directamente sobre las variables externas del problema.

A la rama de Prandtl la llamaremos *internal* o *int*, ya que aquí es donde se registran las variables internas de estado que gobiernan el problema elastoplástico principal, a través de la deformación elástica y la deformación plástica [79]. La elección de la designación *kin* para la rama cinemática, e *int* para la rama elastoplástica hace pues referencia a la naturaleza de las variables del problema que están involucradas.

Un sencillo análisis mecánico permite comprobar las relaciones de tensiones y deformaciones que se van a desarrollar entre los elementos del dispositivo, tanto en régimen elástico como plástico, y que determinan el punto de partida de la física detrás de la formulación propuesta. En un primer análisis se comprueba como la tensión total

Figura 5.1: Modelo elastoplástico con endurecimiento cinemático: dispositivo reológico unidimensional [145].

que opera sobre el sistema es la suma de las tensiones de cada una de las ramas

$$\sigma = \sigma_{kin} + \sigma_{int} \quad (5.1)$$

donde se pone en evidencia que solo una parte de la tensión total aplicada va a ser responsable directa de la deformación plástica, la rama *int*, mientras que la rama *kin* registra una tensión que macroscópicamente opera solo sobre el endurecimiento cinemático, en la práctica sería equivalente a la tensión de *back-stress*, si bien ésta es una variable interna asociada [131] presente en formulaciones clásicas del problema elastoplástico, y no una variable externa.

Por otro lado, como la deformación total del sistema está obligada a ser igual en ambas ramas por necesidad de la compatibilidad cinemática de deformación, ocurrirá que

$$\varepsilon = \varepsilon_{kin} = \varepsilon_{int} \quad (5.2)$$

cuando el dispositivo trabaja en régimen elástico se cumple la igualdad anterior, pero cuando el mecanismo trabaja elastoplásticamente y el disipador registra deformación plástica ocurrirá

$$\varepsilon = \varepsilon_{kin}^e = \varepsilon_{int}^e + \varepsilon_{int}^p \quad (5.3)$$

donde se comprueba como la deformación del muelle *kin* es igual a la deformación total del sistema (única variable observable externamente), mientras que la rama *int* es quien sufre las deformaciones internas: deformación elástica y deformación plástica (variables no observables directamente desde el exterior). Esta es la parte que permite dar forma a la importante relación

$$\varepsilon_e(\varepsilon, \varepsilon_p) = \varepsilon - \varepsilon_p = \varepsilon_{kin}^e - \varepsilon_{int}^p = \varepsilon_{int}^e \quad (5.4)$$

donde la variable interna de deformación elástica ε_e queda expresada como variable dependiente a través de las variables independientes de deformación total ε y de

deformación plástica ε_p , la primera como variable externa y la segunda como variable interna del problema elastoplástico.

Por otro lado, dado que las tensiones encuentran su origen en el campo elástico de deformación, y no puede causar tensión adicional en el campo plástico, si se interpreta Y_{int} como el módulo de rigidez elástica de la rama *int*, y Y_{kin} como el módulo de rigidez elástica de la rama *kin*, se puede comprobar que

$$\sigma_{int} = \varepsilon_{int}^e Y_{int} = (\varepsilon - \varepsilon_{int}^p) Y_{int} \quad \text{y} \quad \sigma_{kin} = \varepsilon Y_{kin} \quad (5.5)$$

donde se identifican claramente ambas variables de tensión *int* y *kin*, pero que a diferencia de lo que ocurre con las deformaciones, van a tener otro protagonismo en el dispositivo. Es importante entender la componente de tensión *int* como responsable directa del comportamiento plástico cuando se supere el valor de tensión límite k en el disipador, asumiendo así la existencia de una tensión de plastificación submacroscópica, mientras que la componente denominada *kin* es una tensión que sólo tiene una función moduladora sobre la primera.

Conviene explicar el uso del término tensión de plastificación submacroscópica, en base al carácter fenomenológico del dispositivo, y donde no se llega a usar la escala de observación microscópica, ya que no se realiza ningún análisis micromecánico sobre la identidad de las fases de material que operan en el interior durante la plastificación, y que es el aspecto que permitiría usar el término microscópico correctamente.

La plastificación tendrá lugar cuando $\sigma_{int} = k$, y teniendo en cuenta la compatibilidad de deformación entre ambas ramas, la tensión total macroscópica responsable de la plastificación será

$$\sigma|_{\sigma_{int}=k} = \left(\frac{Y_{kin}}{Y_{int}} + 1 \right) k \quad (5.6)$$

donde se comprueba el efecto endurecedor de la rama *kin* sobre el comportamiento en plastificación del dispositivo, y como su supresión efectivamente llevaría el modelo a convertirse en un dispositivo de Prandtl convencional. El coeficiente $(Y_{kin}/Y_{int} + 1)$ es un factor de conversión macroscópico-submacroscópico, que permite pasar de una observación exterior a otra interior en las variables del sistema.

Para tratar ambas componentes de tensión, *int* y *kin*, resulta interesante utilizar una descripción a través de la energía elástica almacenada en el dispositivo, de esta forma la energía libre pasa a ser la energía elástica presente en cada parte hookeana del dispositivo: $\Psi(\varepsilon, \varepsilon_e) = \Psi_{kin}(\varepsilon) + \Psi_{int}(\varepsilon_e)$. Se pueden identificar los términos de tensión interna a partir de estas energías elásticas

$$\sigma_{kin} := \frac{d\Psi_{kin}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \quad \text{y} \quad \sigma_{int} = \sigma_{int}^e := \frac{d\Psi_{int}(\varepsilon_e)}{d\varepsilon_e} \quad (5.7)$$

Ahora resulta de interés recuperar para la tensión interna de la rama *int* la designación σ_{int}^e , introducida en la ec. (4.8), ya que transmite de forma muy intuitiva y clara la idea de que está parte de la tensión es debida a la variable elástica interna del problema. De manera semejante se puede inferir como los módulos de rigidez elástica de los muelles se pueden interpretar en cada instante como

$$Y_{kin} = \frac{d^2\Psi_{kin}(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \quad \text{y} \quad Y_{int} = Y_{int}^e := \frac{d^2\Psi_{int}(\varepsilon_e)}{d\varepsilon_e^2} \quad (5.8)$$

Si prestamos atención al comportamiento plástico del dispositivo en su plano energético, cuando la rama interna se carga por encima del límite del disipador y la deformación plástica tiene lugar, la energía mecánica desarrollada se repartirá de manera que una porción se disipará plásticamente y otra se almacenará elásticamente a través del muelle *kin*. El dispositivo permite comprobar como aunque esta energía elástica es termodinámicamente reversible, en la práctica no es inmediato. De los dos almacenes de energía elástica, los muelles Y_{kin} y Y_{int} , y cuando se produzca deformación plástica en el disipador, en ellos siempre quedará una porción de la energía elástica retenida por la compatibilidad de deformación obligada en el dispositivo, es una porción de energía que queda congelada, pues aunque se elimine la carga total σ , la tensión interna σ_{int} no desaparece entre ambas ramas, esto se debe a la interacción entre las variables internas de deformación que no se eliminan cuando cesa la tensión total exterior σ . Esta energía congelada se almacena a escala microscópicamente en el interior del material, y no es recuperable desde el exterior por medios mecánicos de forma inmediata.

Si el disipador de fricción experimenta un deslizamiento γ_{int} durante la plastificación (*plastic slip*), el muelle de la rama *kin* quedará también deformado por compatibilidad, y esta deformación elástica solo desaparecería si se eliminase la deformación γ_{int} del disipador. Esta deformación elástica retenida es observada desde el exterior del problema como una deformación permanente, y tras una descarga elástica ($\sigma = 0$ y $\varepsilon_e = 0$) quedará

$$\varepsilon_{kin}|_{\sigma=0} = \frac{Y_{int}}{Y_{int} + Y_{kin}} \gamma_{int} = \varepsilon_p|_{\sigma=0} = \varepsilon_p|_{\varepsilon_e=0} \quad (5.9)$$

Al mismo tiempo, por la naturaleza elástica de la rama *kin*, su deformación, que res la total externa remanente, tendrá un carácter residual, ya que al ser de naturaleza elástica causa una tensión interna no solo sobre la rama *kin*, sino también sobre la rama *int* según la ec. (5.1). Esta tensión es de naturaleza elástica residual existe aunque externamente el dispositivo esté descargado. Ambas tensiones internas *kin* y *int* por equilibrio interno son iguales y contrarias ($\sigma = 0$), y el valor de esta tensión residual interna resulta ser

$$\sigma_{kin}^{res} = -\sigma_{int}^{res} = \frac{Y_{kin}Y_{int}}{Y_{int} + Y_{kin}} \gamma_{int} \quad (5.10)$$

La tensión interna σ_{kin}^{res} de la ec. (5.10) se da a nivel microscópico, pero en la práctica se comporta como una tensión macroscópica que causa endurecimiento de carácter cinemático. Solo aparece cuando se aplican ciclos de plastificación con inversión de carga posterior, y se manifiesta a través del efecto Bausschinger.

Desde una observación macroscópica, las tensiones residuales de ambas ramas están siempre anuladas por equilibrio interno, pero en la práctica, cuando se alcance el punto de plastificación del disipador y por tanto ocurra que $\sigma_{int} = k$, por aplicación de la ec. (5.1) en la tensión total ocurrirá que

$$\sigma|_{\sigma_{int}=k} > k \quad (5.11)$$

de manera que, aunque el valor del parámetro k sea constante en el disipador, la cantidad de carga externa necesaria para la plastificación, $\sigma|_{\sigma_{int}=k}$, será creciente con el valor de la tensión residual acumulada, σ_{kin}^{res} , heredada de ciclos de carga anteriores. Este endurecimiento espontáneo lleva a que el problema elastoplástico sea

dependiente del camino de plastificación previo (*path dependent*), lo que impide resolver el problema elastoplástico con un único camino de carga-descarga, o con una única curva constitutiva tensión-deformación, como en cambio si ocurre en los problemas hiperelásticos.

Un observador exterior verá como la deformación permanente del dispositivo será

$$\varepsilon_p|_{\sigma=0} = \gamma_{int} + \frac{\sigma_{int}^{res}}{Y_{int}} = \gamma_{int} + \epsilon_{int} = \varepsilon_{kin}|_{\sigma=0} \quad \Leftarrow \quad \epsilon_{int} := -\frac{Y_{kin}}{Y_{int}}\varepsilon_p \quad (5.12)$$

donde aparece el término de deformación elástica residual o congelada, ϵ_{int} , resultante de la interacción entre ambas ramas. En la práctica, teniendo en cuenta la ec. (3.23) se podría establecer la identidad $\epsilon_{int} = \xi$, interpretando una variable interna adicional de endurecimiento, sobre la que se asocia la tensión backstress.

La interpretación del modelo de la figura 5.1 muestre la plastificación del material en una escala macroscópica, fenomenológica, que ayuda a interpretar aspectos del comportamiento microscópico de las variables internas de deformación en el material. Llevando el dispositivo al plano de la ciencia de materiales, la plasticidad en un sólido convencional se da en presencia de diferentes fases sólidas de material y con defectos de diferente naturaleza, y con una distribución microscópicamente heterogénea. Cada una de esas fases y defectos pueden comportarse como una rama *,kin* o como una rama *,int*, con lo que al aparecer la deformación plástica se dará de forma que coexistirán ramas/partes que han plastificado con otras que no lo han hecho, y su interacción elástica, al igual que el dispositivo de la figura 5.1, ocasionará deformaciones internas/tensiones residuales, y por tanto energía elástica congelada por este efecto cinemático. Teniendo en cuenta las ecuaciones (5.2) y (5.2), las fases de material que no han plastificado permanecerán deformadas elásticamente con tensiones residuales de carácter elástico, y las que han plastificado también estarán tensionadas elásticamente con la misma tensión residual.

Volviendo al modelo rehológico, ahora a través de la interpretación energética, el residuo de energía congelada en el material tras una descarga elástica es

$$\Psi^{res}(\varepsilon) = \frac{1}{2} \frac{Y_{kin}}{Y_{int}} (Y_{int} + Y_{kin}) \left(\varepsilon_p|_{\sigma=0} \right)^2 \quad (5.13)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Y_{kin}}{Y_{int}} (Y_{int} + Y_{kin}) (\varepsilon_{kin}|_{\sigma=0})^2 = \Psi_{kin}(\varepsilon) \quad (5.14)$$

Atendiendo a esta interpretación energética, se reconoce la presencia de un módulo de endurecimiento cinemático equivalente que se puede describir como

$$H = \frac{d\sigma_{kin}}{d\varepsilon_p} = \frac{d}{d\varepsilon_p} \left(\frac{\partial \Psi_{kin}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) = \frac{Y_{int}}{Y_{kin}} (Y_{int} + Y_{kin}) \quad (5.15)$$

Esta energía residual es parcialmente reversible en algunos casos por aplicación de tratamientos térmicos, pero no por medios mecánicos simples, salvo que se aplique una carga que obligue a eliminar la deformación total acumulada mediante una imposición o control de desplazamiento, que es lo que ocurre al aplicar un ciclo completo de carga con inversión, como el que se ilustra en la figura 3.8, el ciclo de endurecimiento cinemático y el efecto Bauschinger.

Una parte de este endurecimiento se puede desactivar térmicamente por medio de tratamientos de recocido de alivio de tensiones o *stress relief annealing* [31], pero son pocas las veces donde el proceso ocurre de forma espontánea. Un caso particular es el de algunas aleaciones de aluminio de la familia 5000 (AlMg), donde la recombinación de dislocaciones parciales disociadas puede darse espontáneamente a temperatura ambiente tras una deformación plástica ocasionada por medios mecánicos, experimentando un efecto de ablandamiento o *softening* en la tensión de fluencia.

Si finalmente recuperamos las tensiones en el dispositivo durante la plastificación, cuando $\sigma_{int}^{|e} = k$, la función plastificación queda en la forma:

$$f(\sigma, k) = \left| \sigma_{int}^{|e} \right| - k \leq 0 = |(\sigma - \sigma_{kin})| - k \leq 0 \quad (5.16)$$

donde se reconoce la presencia de la tensión interna de *back stress* σ_{kin} como variable interna asociada de endurecimiento, y que ahora puede también interpretada energéticamente a través de la deformación total ε y de la energía $\Psi_{kin}(\varepsilon)$, y no a través de una variable interna adicional ξ , como es habitual en otras propuesta de la plasticidad clásica.

Como comentario final, este modelo reológico también refuerza la introducción del término $\sigma_{int}^{|e}$ en la formulación, ya que ahora se evidencia como la tensión que actúa directamente sobre el disipador plástico, y justifica su obtención a partir de la energía hiperelástica, Ψ_{int} de la rama *int* de Prandtl, e identificándose claramente como la variable de tensión interna responsable directa del fenómeno de plastificación.

5.1.2. Modelo elastoplástico continuo en teoría infinitesimal

En esta sección se formula el modelo elastoplástico continuo infinitesimal de acuerdo al dispositivo reológico que se muestra en la figura 5.1, por tanto, a diferencia de lo desarrollado en el capítulo 4 ahora se tendrá en cuenta el endurecimiento plástico y las variables que de forma particular intervienen. Estas expresiones servirán de base en la posterior descripción en deformaciones finitas.

Las variables principales identificadas siguen siendo como variable externa la deformación total ε y la tensión total asociada σ , siendo ε_e y ε_p las variables internas no mensurables exteriormente que describen el comportamiento elastoplástico. De acuerdo con lo ya expuesto, si conocemos la variable externa (ε) y una de las variables internas (ε_p), la tercera variable queda descrita en función de las anteriores

$$\varepsilon_e(\varepsilon, \varepsilon_p) = \varepsilon - \varepsilon_p \quad (5.17)$$

que proporciona soporte a las correspondientes velocidades de deformación o tasa (*strain rate*), y que da paso a la interpretación en derivadas parciales de la variable interna $\dot{\varepsilon}_e$, cuyas contribuciones parciales siguen siendo válidas en el dispositivo reológico considerado

$$\dot{\varepsilon}_e = \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial \varepsilon} \bigg|_{\dot{\varepsilon}_p=0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial \varepsilon_p} \bigg|_{\dot{\varepsilon}=0} \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t} = \dot{\varepsilon}_e|_{\dot{\varepsilon}_p=0} + \dot{\varepsilon}_e|_{\dot{\varepsilon}=0} \quad (5.18)$$

$$\dot{\varepsilon}_e|_{\dot{\varepsilon}_p=0} := \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial \varepsilon} \bigg|_{\dot{\varepsilon}_p=0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 1 \times \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon} \quad (5.19)$$

$$\dot{\varepsilon}_e|_{\dot{\varepsilon}=0} := \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_p} \right|_{\dot{\varepsilon}=0} \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t} = -1 \times \dot{\varepsilon}_p = -\dot{\varepsilon}_p \quad (5.20)$$

Esta interpretación en derivadas parciales de la velocidad de deformación es coherente con la energía hiperelástica del modelo propuesto en la figura 5.1, descrita también con las variables de deformación en términos de ε y ε_e

$$\Psi(\varepsilon, \varepsilon_e) = \Psi_{kin}(\varepsilon) + \Psi_{int}(\varepsilon_e) \quad (5.21)$$

donde se generan los términos de energía hiperelástica de acuerdo a cada una de las ramas elásticas activas del modelo, el término $\Psi_{kin}(\varepsilon)$ para la rama interna *cinemática* dependiente de la variable externa ε , y el término $\Psi_{int}(\varepsilon_e)$ para la rama *interna* plástica dependiente de la variable interna ε_e . Esta interpretación, además, permite expresar la disipación en forma *rate* a través de la potencia externa aplicada, $\mathcal{P} = \sigma \dot{\varepsilon}$, y de la energía hiperelástica total con sus correspondientes componentes en forma *rate* $\dot{\Psi}$ de manera que

$$\mathcal{D} = \mathcal{P} - \dot{\Psi} = \mathcal{P} - \dot{\Psi}_{kin} - \dot{\Psi}_{int} \geq 0 \quad (5.22)$$

que puede ser reescrita teniendo en cuenta la formulación hiperelástica de las tensiones en cada rama

$$\dot{\Psi}_{kin} := \frac{d\Psi_{kin}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} \quad \text{y} \quad \dot{\Psi}_{int} := \frac{d\Psi_{int}(\varepsilon_e)}{d\varepsilon_e} \frac{d\varepsilon_e}{dt} \quad (5.23)$$

lo que lleva a la expresión

$$\mathcal{D} = \sigma \dot{\varepsilon} - \sigma_{kin} \dot{\varepsilon} - \sigma_{int}^e \dot{\varepsilon}_e \geq 0 \quad (5.24)$$

donde no se produce disipación si se considera de forma aislada la evolución de la variable externa independiente $\dot{\varepsilon} \neq 0$, ya que la variable interna independiente estaría congelada, $\dot{\varepsilon}_p = 0$. En este caso resulta la variable interna dependiente, $\dot{\varepsilon}_e \equiv \dot{\varepsilon}_e|_{\dot{\varepsilon}_p=0}$, y donde la disipación de la ec. (5.24) queda

$$\mathcal{D} = \sigma \dot{\varepsilon} - \sigma_{kin} \dot{\varepsilon} - \sigma_{int}^e \dot{\varepsilon}_e|_{\dot{\varepsilon}_p=0} = \left(\sigma - \sigma_{kin} - \sigma_{int}^e \left. \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial \varepsilon} \right|_{\dot{\varepsilon}_p=0} \right) \dot{\varepsilon} = 0 \quad \text{si} \quad \dot{\varepsilon}_p = 0 \quad (5.25)$$

lo que lleva a que una tensión resultante

$$\sigma = \sigma_{kin} + \sigma_{int}^e \left. \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial \varepsilon} \right|_{\dot{\varepsilon}_p=0} = \sigma_{kin} + \sigma_{int}^e = \sigma_{kin} + \sigma_{int} \quad (5.26)$$

y que se confirma mediante la aplicación de $\Psi_{int}(\varepsilon_e) = \Psi_{int}(\varepsilon_e(\varepsilon, \varepsilon_p)) = \Psi_{int}(\varepsilon, \varepsilon_p)$, según

$$\begin{aligned} \sigma_{int} &:= \frac{d\Psi_{int}}{d\varepsilon_e} \left. \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial \varepsilon} \right|_{\dot{\varepsilon}_p=0} = \sigma_{int}^e \left. \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial \varepsilon} \right|_{\dot{\varepsilon}_p=0} \\ &= \frac{d\Psi_{int}(\varepsilon_e)}{d\varepsilon_e} \frac{\partial \varepsilon_e(\varepsilon, \varepsilon_p)}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \Psi_{int}(\varepsilon, \varepsilon_p)}{\partial \varepsilon} = \left. \frac{\partial \Psi_{int}}{\partial \varepsilon} \right|_{\dot{\varepsilon}_p=0} \end{aligned} \quad (5.27)$$

demostrándose la validez de la interpretación hiperelástica de las tensiones a partir de la introducción de la tasa de deformación en el modelo

$$\sigma = \sigma_{kin} + \sigma_{int} = \frac{d\Psi_{kin}}{d\varepsilon} + \left. \frac{\partial \Psi_{int}}{\partial \varepsilon} \right|_{\dot{\varepsilon}_p=0} = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \right|_{\dot{\varepsilon}_p=0} \quad (5.28)$$

La interpretación física de la tensión interna σ_{int}^{le} como variable mensurable es solo aparente, pues en realidad este término de tensión no es medible si se observa el dispositivo exteriormente. Además, este término está representado matemáticamente a través de la derivación *parcial* de $\Psi_{int}(\varepsilon_e)$ con respecto a ε cuando está congelada la variable interna $\dot{\varepsilon}_p = 0$. En el caso infinitesimal, ambas tensiones, σ_{int} y σ_{int}^{le} son matemáticamente coincidentes, $\sigma_{int} = \sigma_{int}^{le}$, pero esto no ocurrirá así en el caso de las deformaciones finitas, que es donde esta definición conceptual de las tensiones demostrará su valor y permitirá entender ambas tensiones de forma diferenciada, como ocurre cuando los cambios de configuración en el punto de vista del observador intervienen en el problema, entonces es necesario tratar estos dos términos de tensión de forma diferenciada [76][77][79].

En el paso siguiente hay que considerar la evolución aislada de la segunda variable independiente, $\dot{\varepsilon}_p$, y así mientras la variable externa está congelada, $\dot{\varepsilon} = 0$, la variable interna activa es $\dot{\varepsilon}_p \neq 0$, entonces la variable elástica será $\dot{\varepsilon}_e \equiv \dot{\varepsilon}_e|_{\dot{\varepsilon}=0}$. Trasladando este estado a la disipación en la ec. (5.24), ésta debe ser positiva cuando la deformación plástica tenga lugar en la rama *interna* plástica, osea

$$\mathcal{D} = -\sigma_{int}^{le} \dot{\varepsilon}_e|_{\dot{\varepsilon}=0} > 0 \quad \text{si} \quad \dot{\varepsilon}_p \neq 0 \quad (5.29)$$

como $\dot{\varepsilon}_e|_{\dot{\varepsilon}=0} = -\dot{\varepsilon}_p$ y $\sigma_{int}^{le} = \sigma_{int}$, haciendo uso de la ec. (5.20), la ec. (5.29) quedará en la forma clásica usual

$$\mathcal{D} = \sigma_{int} \dot{\varepsilon}_p > 0 \quad \text{si} \quad \dot{\varepsilon}_p \neq 0 \quad (5.30)$$

Ambas ecuaciones (5.29) y (5.30) representan el mismo concepto físico, aunque los términos con que se escriban provengan de interpretaciones diferentes de la disipación, la primera es una contribución de ambas variables en términos de derivadas parciales, y la segunda es una interpretación del caso general en el que ambas variables independientes actúan de forma simultánea, esto es $\dot{\varepsilon} \neq 0$ y $\dot{\varepsilon}_p \neq 0$.

La desigualdad matemática de la ec. (5.29) se cumple si se añade una restricción de tipo asociativo con la función de plastificación con la tensión de fluencia del material (k), con la hipótesis de una ley de evolución sobre la variable interna $\dot{\varepsilon}_e$, de forma simplificada

$$-\dot{\varepsilon}_e|_{\dot{\varepsilon}=0} = \dot{\gamma} \frac{\sigma_{int}^{le}}{k} \quad (5.31)$$

que conduce de forma eficaz a la expresión

$$\mathcal{D} = \left(\frac{\sigma_{int}^{le}}{k} \right)^2 k \dot{\gamma} > 0 \quad \text{si} \quad \dot{\varepsilon}_p \neq 0 \quad (5.32)$$

donde aparece la tensión interna σ_{int}^{le} de la rama *int* sobre el parámetro k ($k > 0$), que representa la tensión de fluencia del disipador plástico de fricción. Además aparece $\dot{\gamma}$ como la velocidad o tasa de γ , la deformación plástica característica (*slip*) del dispositivo de la figura 5.1, variable que también actúa como parámetro o multiplicador asociativo en la ley de evolución del flujo plástico.

Por otro lado, al tener un material con endurecimiento plástico, la tensión de fluencia puede ser una función del tipo $k = k(\gamma)$, función de la deformación plástica acumulada representada en la variable $\gamma [= \int_0^t \dot{\gamma} dt]$. Esta consideración matemática

permite introducir un endurecimiento isótropo, que se combinaría con el endurecimiento cinemático presente ya con la rama *kin* del dispositivo reológico. En el caso de ser k constante sólo estará presente el endurecimiento cinemático.

Se puede reescribir la ec. (5.32) sumando $+1 - 1$, y se reemplaza la condición de flujo plástico $\dot{\epsilon}_p \neq 0$ por $\dot{\gamma} > 0$

$$\mathcal{D} = \left[\left(\frac{\sigma_{int}^{|e|}}{k} \right)^2 - 1 \right] k\dot{\gamma} + k\dot{\gamma} > 0 \quad \text{si} \quad \dot{\gamma} > 0 \quad (5.33)$$

lo que permite reconocer en el interior del paréntesis la función de plastificación del modelo unidimensional

$$f \left(\frac{\sigma_{int}^{|e|}}{k} \right) = \left(\frac{\sigma_{int}^{|e|}}{k} \right)^2 - 1 = 0 \quad (5.34)$$

o de forma más clásica

$$f(\sigma_{int}^{|e|}, k) = (\sigma_{int}^{|e|})^2 - k^2 = 0 \quad (5.35)$$

con lo cuál la disipación plástica de las ecuaciones (5.29) y (5.30) se cumplirá según

$$\mathcal{D} = k\dot{\gamma} \geq 0 \quad \text{para} \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad (5.36)$$

Inmediatamente se comprueba el cumplimiento de las condiciones de plastificación de Kuhn-Tucker (optimización del principio de máxima disipación) de la ec (5.33)

$$\dot{\gamma} > 0 \quad \Rightarrow \quad f(\sigma_{int}^{|e|}, k) = (\sigma_{int}^{|e|})^2 - k^2 = 0 \quad (\text{carga de plastificación}) \quad (5.37)$$

y

$$f(\sigma_{int}^{|e|}, k) = (\sigma_{int}^{|e|})^2 - k^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\gamma} = 0 \quad (\text{carga elástica y descarga}) \quad (5.38)$$

Estas condiciones aplicadas sobre el modelo propuesto se resumen en

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad f(\sigma_{int}^{|e|}, k) \leq 0 \quad \text{y} \quad \dot{\gamma} f(\sigma_{int}^{|e|}, k) = 0 \quad (5.39)$$

y aplicando el requerimiento de consistencia plástica

$$f(\sigma_{int}^{|e|}, k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\gamma} \dot{f}(\sigma_{int}^{|e|}, k) = 0 \quad (5.40)$$

Una combinación de las ecuaciones (5.20) y (5.37), permite reformular la ecuación de flujo (5.31), que ahora adopta la expresión usual de la literatura en términos de la tasa de deformación plástica [131], aquí descrita con el término de la variable de tensión interna $\sigma_{int}^{|e|}$ que se ha introducido en el modelo reológico

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\gamma} \text{sign}(\sigma_{int}^{|e|}) \quad (5.41)$$

donde explícitamente se haría uso de la deformación plástica $\dot{\epsilon}_p$ como variable en lugar de el término elástico de derivada parcial $\dot{\epsilon}_e|_{\dot{\epsilon}=0}$. Sin embargo la interpretación de la ec. (5.31) es más interesante, pues permite extender esta formulación de manera sencilla hacia al contexto de las deformaciones finitas siguiendo los mismos pasos de la teoría infinitesimal [79].

5.1.3. Modelo incremental en teoría infinitesimal

Se afronta ahora la integración de las ecuaciones presentadas en la sección anterior en base al modelo reológico del dispositivo de la figura 5.1, ecuaciones planteadas según un modelo continuo con las variables de deformación en forma *rate* ($\dot{\varepsilon}$). La integración de estas ecuaciones en el dominio del tiempo algorítmico (t) se va a llevar a cabo usando el procedimiento predictor/corrector para computar en un tiempo $t + \Delta t$, de forma que el valor de las variables internas ${}^{t+\Delta t}_0 \varepsilon_e$ y ${}^{t+\Delta t}_0 \varepsilon_p$ se pretende obtener desde un estado inicial en el tiempo t ($t_0 = t$), donde de partida se conocen los valores de la variable externa inicial ${}_0^t \varepsilon = {}_0^t \varepsilon_e + {}_0^t \varepsilon_p$ y final ${}^{t+\Delta t}_0 \varepsilon$ (aquí ya no se conocen las variables internas), de manera que el problema se podría definir como controlado en deformación o desplazamiento". En todo el desarrollo se seguirá la notación de la referencia [11] para describir la formulación incremental a lo largo del intervalo temporal Δt .

La primera parte del algoritmo, en la fase predictor, se asume que la deformación incremental que va a ser protagonista, es completamente elástica en el intervalo de tiempo entre t y $t + \Delta t$. De acuerdo a ello se define la variable de deformación elástica de prueba o *trial* ${}^{tr} \varepsilon_e$, que está asociada al instante $t + \Delta t$ y obtenida a través de la hipótesis algorítmica según la cuál la variable de deformación plástica en este intervalo es constante, osea que la deformación plástica *trial* será ${}^{tr} \varepsilon_p = {}_0^t \varepsilon_p$, y con ello la variable dependiente será

$${}^{tr} \varepsilon_e = {}^{t+\Delta t}_0 \varepsilon - {}_0^t \varepsilon_p \quad (5.42)$$

podemos recalcar que ${}_0^t \varepsilon_p$ permanece congelada durante el presente paso, y entonces la ec. (5.42) establece una relación uno a uno entre ${}^{t+\Delta t}_0 \varepsilon$ y ${}^{tr} \varepsilon_e$. Por tanto, por convenciencia algorítmica, se puede llevar a cabo un cambio de la variable independiente ${}^{t+\Delta t}_0 \varepsilon$ por la variable local ${}^{tr} \varepsilon_e$ en la ec. (4.2), con lo que

$${}^{t+\Delta t}_0 \varepsilon_e({}^{t+\Delta t}_0 \varepsilon, {}^{t+\Delta t}_0 \varepsilon_p) \rightarrow {}^{t+\Delta t}_0 \varepsilon_e({}^{tr} \varepsilon_e, {}^{t+\Delta t}_0 \varepsilon_p) \quad (5.43)$$

de esta forma al aparece el término de la derivada parcial respecto de ${}^{t+\Delta t}_0 \varepsilon$, este lo será ahora respecto de la nueva variable independiente de *trial* ${}^{tr} \varepsilon_e$. Se puede comparar con la derivada parcial presente en la ec. (5.19), y unidimensionalmente ocurrirá que

$$\left. \frac{\partial {}^{t+\Delta t}_0 \varepsilon_e}{\partial {}^{t+\Delta t}_0 \varepsilon} \right|_{\dot{\varepsilon}_p=0} = \left. \frac{\partial {}^{t+\Delta t}_0 \varepsilon_e}{\partial {}^{tr} \varepsilon_e} \right|_{\dot{\varepsilon}_p=0} = 1 \quad (5.44)$$

Esta igualdad ya no será obvia cuando la expresión se traslade a las deformaciones finitas en tres dimensiones.

Con objeto de determinar hasta donde el paso es realmente elástico, la función de plastificación debe verificarse con el nuevo estado de *trial* generado a través de la tensión ${}^{tr} \sigma_{int}^e$, y con la función hiperelástica de energía se obtiene

$${}^{tr} \sigma_{int}^e = \left. \frac{d\Psi_{int}(\varepsilon_e)}{d\varepsilon_e} \right|_{tr} \quad (5.45)$$

por lo que la función de plastificación en términos *trial* se formula en este paso predictor según

$${}^{tr} f = f({}^{tr} \sigma_{int}^e, {}^{tr} k) = ({}^{tr} \sigma_{int}^e)^2 - {}^{tr} k^2 \quad (5.46)$$

donde también la variable interna plástica ${}_0^t \gamma$ ha de ser considerada ${}^{tr} k = k({}^{tr} \gamma) = k({}_0^t \gamma) = {}_0^t k$.

- Si el resultado es ${}^{tr}f \leq 0$, la predicción elástica es correcta, entonces ${}^{t+\Delta t}_0\varepsilon_p = {}^{tr}\varepsilon_p$, ${}^{t+\Delta t}_0\varepsilon_e = {}^{tr}\varepsilon_e$ y en términos de tensión ${}^{t+\Delta t}\sigma_{int}^{|e} = {}^{tr}\sigma_{int}^{|e}$. En este caso el paso corrector ya no se ejecuta, y el cálculo retorna a un nuevo estado inicial de carga, se inicia un nuevo intervalo de tiempo inicial $t_0 = t$.
- Si el resultado es ${}^{tr}f > 0$, entonces la solución no es admisible, y la corrección plástica (paso corrector) debe ser aplicada para retornar al punto en el que ${}^{t+\Delta t}f = 0$. La corrección se realiza por medio de la ley evolutiva del flujo plástico, donde la variable externa de deformación ${}^{t+\Delta t}_0\varepsilon$, se mantiene constante durante el paso corrector. La integración en el tiempo de la ecuación de flujo plástico (5.31) se realiza siguiendo un esquema implícito de primer orden tipo backward-Euler, donde el valor de las variables se obtiene después de la integración, siguiendo el esquema

$${}^{t+\Delta t}_0\varepsilon_e - {}^{tr}\varepsilon_e = \int_t^{t+\Delta t} d\varepsilon_e|_{\dot{\varepsilon}=0} = - \int_t^{t+\Delta t} \frac{\sigma_{int}^{|e}}{k} d\gamma = - \frac{{}^{t+\Delta t}\sigma_{int}^{|e}}{{}^{t+\Delta t}k} \Delta\gamma \quad (5.47)$$

como las variables internas no son conocidas en el inicio de la integración (tiempo t), se obtiene una ecuación no lineal que ha de resolverse en forma de residuo. En esta solución la tasa de deformación plástica $\dot{\varepsilon}_p$ no está presente de forma directa, ya que la ley de evolución fue descrita con el término tasa elástica $-\dot{\varepsilon}_e|_{\dot{\varepsilon}=0}$, que es quien actúa como variable correctora

$${}^{t+\Delta t}\rho_e = {}^{t+\Delta t}_0\varepsilon_e + \frac{{}^{t+\Delta t}\sigma_{int}^{|e}}{{}^{t+\Delta t}k} \Delta\gamma - {}^{tr}\varepsilon_e \longrightarrow 0 \quad (5.48)$$

La ecuación resultante es comúnmente no lineal, debido a la no linealidad de las ecuaciones precedentes: ${}^{t+\Delta t}k = k({}^{t+\Delta t}_0\gamma)$ y ${}^{t+\Delta t}\sigma_{int}^{|e} = \left. \frac{d\Psi_{int}(\varepsilon_e)}{d\varepsilon_e} \right|_{t+\Delta t}$.

El incremento de deformación plástica resultante queda así implícitamente descrito mediante el parámetro asociativo plástico en su forma incremental $\Delta\gamma := {}^{t+\Delta t}_0\gamma - {}^{tr}\gamma = {}^{t+\Delta t}_0\gamma - {}^t_0\gamma$, y junto a la deformación elástica ${}^{t+\Delta t}_0\varepsilon_e$, actúan como variables internas locales de la etapa correctora. El resultado final está condicionado al cumplimiento de la condición de consistencia plástica ${}^{t+\Delta t}f \longrightarrow 0$, lo que genera una segunda ecuación complementaria que se debe incorporar en la formulación residual no lineal

$${}^{t+\Delta t}f = ({}^{t+\Delta t}\sigma_{int}^{|e})^2 - {}^{t+\Delta t}k^2 \longrightarrow 0 \quad (5.49)$$

Ambas ecuaciones residuales, (5.48) y (5.49), deben ser resueltas mediante un procedimiento de linealización incremental de Newton-Raphson dentro del intervalo temporal ca cálculo Δt , y cuya solución proporciona el estado elastoplástico final en el tiempo $t + \Delta t$. Las variables internas que hay que determinar durante esta fase, actúan como incógnitas en este mecanismo corrector, y por la forma implícita del proceso elegido son por ello ${}^{t+\Delta t}_0\varepsilon_e$ y ${}^{t+\Delta t}_0\gamma$.

Finalmente, una vez resuelto el sistema no lineal de ecuaciones se puede obtener ya el valor de la variable interna ${}^{t+\Delta t}_0\varepsilon_p$, y es posible también la actualización de la tensión final ${}^{t+\Delta t}_0\sigma$.

Este mecanismo corrector ha sido planteado en esta sección con un modelo unidimensional, donde cada variable genera una única incógnita y ecuación, pero en el caso tridimensional, el uso de variables tensoriales de deformación y tensión, obligará a tratar un número de incógnitas y ecuaciones mayor, según los términos de la variable tensorial utilizada.

5.2. Elastoplasticidad finita multiplicativa en deformaciones logarítmicas

Aquí se desarrollan los elementos característicos de las deformaciones finitas que se emplean en la elastoplasticidad, y que se aplicarán siguiendo la motivación del modelo reológico de la figura 5.1. La principal aportación de esta sección se encuentra en la configuración de la ecuación constitutiva de flujo plástico o ley evolutiva, que será desarrollada en términos de un corrector elástico logarítmica en forma de tasa o velocidad de deformación, en lugar del clásico corrector plástico. Esta ley de evolución es válida para casos de grandes deformaciones en materiales anisótropos, y debido al uso de deformaciones logarítmicas resulta una formulación de carácter aditivo simple y de fácil actualización durante el cálculo.

Desde el punto de vista de la ley de evolución planteada y su solución, se puede considerar esta formulación una generalización de la regla de flujo clásico para Isotropía derivada por Simó y Miehe en la referencia [136], ahora válida para el comportamiento anisótropo del material y en el espacio de las deformaciones finitas. En uno de sus últimos artículos Simó ya propuso la utilización de una formulación semejante en base a una descripción en deformaciones principales logarítmicas e isotropía [134], pero quedó sin resolver el problema de la anisotropía y su integración en la ley evolutiva, pero manifestando la posibilidad de llevar a cabo la computación en deformaciones finitas con los mismos principios de sencillez y reproduciendo los mismos esquemas computacionales de la elastoplasticidad clásica en deformaciones infinitesimales.

5.2.1. Tensores de deformación logarítmica

En el caso de las deformaciones logarítmicas la descomposición multiplicativa parece natural, dado el comportamiento aditivo de los términos logarítmicos en las operaciones multiplicativas, de manera que partiendo de la variable externa tensorial de deformación total

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \quad (5.50)$$

se puede identificar la participación de la variable interna elástica $\mathbf{E}_e = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{X}_e^T \mathbf{X}_e)$, y de la variable interna plástica directamente a partir del propio gradiente plástico $\mathbf{X}_p$, sin necesidad de definir el término $\mathbf{E}_p$, ya que al interpretar la variable elástica como dependiente de las otras dos, es fácil obtener multiplicativamente la dependencia $\mathbf{E}_e(\mathbf{E}, \mathbf{X}_p)$ en lugar de $\mathbf{E}_e(\mathbf{E}, \mathbf{E}_p)$. Esta acción permite generalizar la ec. (5.17) para el espacio de deformaciones logarítmicas, de manera que cuando conocemos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{X}_p$ queda automáticamente definida $\mathbf{E}_e$. Trasladando este principio a la velocidad de deformación, característica de las formulaciones incrementales, se puede obtener una

ecuación para $\dot{\mathbf{E}}_e$ análoga a la ec. (4.3) por la simple adición de las contribuciones parciales de cada una de las variables independientes, ya referida en la sección 4.2.3, a saber

$$\dot{\mathbf{E}}_e = \left. \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} \right|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} : \dot{\mathbf{E}} + \left. \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{X}_p} \right|_{\dot{\mathbf{E}}=0} : \dot{\mathbf{X}}_p = \dot{\mathbf{E}}_e \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} + \dot{\mathbf{E}}_e \Big|_{\dot{\mathbf{E}}=0} \quad (5.51)$$

La ecuación (5.51) se interpreta con las variables independientes en el marco continuo, donde ambas ocurren en el sólido de forma simultánea, aunque no son físicamente separables. Esta descomposición trasladada al marco algorítmico e incremental en forma de tasa conduce hacia el principio de un predictor elástico, donde la variable $\mathbf{X}_p$ permanece congelada, y a un corrector plástico donde la variable $\mathbf{E}$ permanece congelada algorítmicamente. Ambas partes del problema suceden al mismo tiempo en el problema físico, es decir de forma simultánea, pero su ejecución numérica en el cálculo incremental es secuencial, y se resuelven en fases del cálculo diferentes.

Al mismo tiempo, la ecuación (5.51) es consistente con la formulación del modelo cinemático continuo que se deriva de la descomposición multiplicativa de Lee, y permite obviar la definición de una métrica plástica particular, problema que se ha de resolver en otros modelos. Este aspecto particular del problema matemático es el que permite identificar el modelo en el marco continuo por un lado, y en el marco algorítmico por otro. La parte gobernada por $\dot{\mathbf{X}}_p = \mathbf{0}$ es donde tiene lugar sin disipación interna de la potencia mecánica suministrada, y la parte gobernada por $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$ es donde se lleva a cabo el proceso de disipación sin intercambio de potencia con el exterior.

5.2.2. Disipación en términos de la deformación *rate* elástica logarítmica

La disipación del modelo propuesto se puede escribir en diferentes configuraciones empleando las relaciones cinemáticas de cada caso, dado que la potencia es una magnitud escalar admite su expresión en múltiples configuraciones, así la potencia podría ser descrita como

$$\mathcal{P} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{A}} = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} \quad (5.52)$$

donde $\mathbf{S}$ es el segundo tensor de tensiones de Piola–Kirchhoff, y como conjugada de trabajo $\mathbf{A}$, deformación de Green-Lagrange; y donde $\mathbf{T}$ es el llamado tensor de tensiones de Kirchhoff generalizadas en representación material, y su conjugada de trabajo $\mathbf{E}$ la deformación logarítmica.

La energía almacenada también es una magnitud escalar, se puede describir igualmente en diferentes configuraciones. La descripción en deformaciones logarítmicas y descripción material lagrangiana para el modelo reológico del dispositivo de la figura 5.1, se motiva desde la descripción en deformaciones infinitesimales, y de forma semejante a la ec.5.21 queda

$$\Psi(\mathbf{E}, \mathbf{E}_e) = \Psi_{kin}(\mathbf{E}, \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_2) + \Psi_{int}(\mathbf{E}_e, \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_2) \quad (5.53)$$

En esta expresión ec. (5.53) se ha concretado explícitamente la dependencia del tensor de deformaciones $\mathbf{E}$ respecto de las direcciones de anisotropía del material, definida por sus direcciones preferentes $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, y $\mathbf{a}_3$ (esta última simepre está definida

automáticamente a partir de $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$). Se acepta que estas direcciones preferentes, que dependen de la textura del material, permanecen invariantes durante el proceso de plastificación, ya que lo contrario obligaría a una definición de las ecuaciones que gobiernan la evolución de textura [103], y a una ecuación constitutiva motivada experimentalmente [69]. La presencia de un giro plástico $\mathbf{w}_p$ capaz de alterar estas direcciones preferentes de material ha sido descartada, como ya sido explicado en el capítulo 4, hipótesis basada en la ausencia de esta variable interna en la formulación utilizada se interpreta como $\mathbf{w}_p = 0$.

Se puede concluir que como ocurre en la formulación de pequeñas deformaciones, y como debiera ser en deformaciones finitas [86], los efectos del giro plástico no participan explícitamente en la ecuación de la disipación, y esto lleva a una integración de las ecuaciones de evolución de flujo plástico completamente desacopladas del giro $\mathbf{w}_p$. Por tanto, la disipación en forma *rate* en descripción lagrangiana queda

$$\mathcal{D} = \mathcal{P} - \dot{\Psi} = \mathcal{P} - \dot{\Psi}_{kin} - \dot{\Psi}_{int} \geq 0 \quad (5.54)$$

que puede escribirse a partir de las variables del problema como

$$\mathcal{D} = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} - \mathbf{T}_{kin} : \dot{\mathbf{E}} - \mathbf{T}_{int}^{le} : \dot{\mathbf{E}}_e \geq 0 \quad (5.55)$$

donde se introducen las variables internas del tensor de tensiones como derivadas totales sobre la energía hiperelástica

$$\mathbf{T}_{kin} := \frac{d\Psi_{kin}(\mathbf{E})}{d\mathbf{E}} \quad \text{y} \quad \mathbf{T}_{int}^{le} := \frac{d\Psi_{int}(\mathbf{E}_e)}{d\mathbf{E}_e} \quad (5.56)$$

En las ecs. (5.56) aparece el tensor $\mathbf{T}_{kin}$ asociado a la deformación total $\mathbf{E}$, esta descrito en la misma configuración de referencia por coherencia con la propia descripción de $\mathbf{E}$. Sin embargo el tensor $\mathbf{T}_{int}^{le}$ se halla en configuración intermedia, al igual que su tensor conjugado $\mathbf{E}_e$. Esta configuración se obtiene de la descomposición multiplicativa, observable en la figura 2.3, y se deduce fácilmente a partir de la descomposición multiplicativa de la ec. (4.44). Esta diferencia de configuración en la que se hallan $\mathbf{T}_{kin}$ y $\mathbf{T}_{int}^{le}$ en deformaciones finitas impide su aditividad de forma inmediata, a diferencia de lo que ocurre en pequeñas deformaciones -ec. (5.1) -, donde esa aditividad si era inmediata.

Por tanto, considerando el caso donde $\dot{\mathbf{X}}_p = \mathbf{0}$ (término rate plástico congelado) en el modelo reológico de la figura 5.1, queda

$$\dot{\mathbf{E}}_e \equiv \dot{\mathbf{E}}_e|_{\dot{\mathbf{X}}_p=\mathbf{0}} = \left. \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} \right|_{\dot{\mathbf{X}}_p=\mathbf{0}} : \dot{\mathbf{E}} \quad (5.57)$$

y para la disipación

$$\mathcal{D} = \mathbf{T} : \dot{\mathbf{E}} - \mathbf{T}_{kin} : \dot{\mathbf{E}} - \mathbf{T}_{int}^{le} : \dot{\mathbf{E}}_e|_{\dot{\mathbf{X}}_p=\mathbf{0}} = 0 \quad \text{si} \quad \dot{\mathbf{X}}_p = \mathbf{0} \quad (5.58)$$

cuyo resultado en tensiones se puede comparar con la ec. (5.26), pues se resuelve la aditividad de las tensiones que operan en el problema en deformaciones finitas a través de la expresión

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{kin} + \mathbf{T}_{int}^{le} : \left. \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} \right|_{\dot{\mathbf{X}}_p=\mathbf{0}} = \mathbf{T}_{kin} + \mathbf{T}_{int} \quad (5.59)$$

donde ahora $\mathbf{T}_{int}$ se halla en configuración de referencia, y donde la derivada parcial particularizada en $\dot{\mathbf{X}}_p = \mathbf{0}$ se operaría como

$$\mathbf{T}_{int} := \mathbf{T}_{int}^{|e} : \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p = \mathbf{0}} = \frac{d\Psi_{int}}{d\mathbf{E}_e} : \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p = \mathbf{0}} = \frac{\partial \Psi_{int}}{\partial \mathbf{E}} \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p = \mathbf{0}} \quad (5.60)$$

expresión donde se lleva a cabo una operación de tiro o *pull-back* sobre el tensor $\mathbf{T}_{int}^{|e}$ desde la configuración intermedia a la configuración de referencia para obtener $\mathbf{T}_{int}$.

Es notable comprobar como en el caso general de deformaciones finitas $\mathbf{T}_{int} \neq \mathbf{T}_{int}^{|e}$, a diferencia de la ec. (5.26) que describe el caso de las deformaciones infinitesimales, y donde no hay distinción entre configuraciones. Por esta razón se llevo a cabo la introducción del término $\sigma_{int}^{|e}$ en el modelo reológico, al inicio de este capítulo, con objeto de contextualizar este término con la terminología usada cuando las deformaciones finitas se diferencian de las deformaciones infinitesimales.

Por otro lado, la disipación del modelo cuando se aplicará parcialmente el *rate* $\dot{\mathbf{X}}_p \neq \mathbf{0}$ resulta en la expresión —

$$\mathcal{D} = -\mathbf{T}_{int}^{|e} : \dot{\mathbf{E}}_e \Big|_{\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0}} > 0 \quad \text{si} \quad \dot{\mathbf{X}}_p \neq \mathbf{0} \quad (5.61)$$

comparable con la ec. (5.29), donde queda definida la disipación empleando términos tensoriales *símetricos* de naturaleza puramente elástica, que se encuentran de forma particular en configuración intermedia.

Este carácter elástico del término disipador resulta interesante y original de este trabajo, pues en otros modelos elastoplásticos de la literatura, la disipación se describe con términos de naturaleza plástica. Es trascendente la contribución disipativa del término elástico logarítmico $\dot{\mathbf{E}}_e$ y de su conjugado de trabajo/potencia, el tensor generalizado de Kirchhoff $\mathbf{T}_{int}^{|e}$, ya que son los protagonistas del mecanismo corrector en el algoritmo multipaso.

Por otro lado, cabe destacar en la ec. (5.61) la ausencia del tradicional tensor *no simétrico* de tensiones internas asociadas de Mandel, como conjugado de trabajo del *no simétrico* tensor gradiente plástico de deformaciones [89].

Estos aspectos acerca de la capacidad de interpretar la disipación mediante términos elásticos explícitos pone de manifiesto la validez de utilizar como motivación un modelo reológico clásico extendido al campo de las deformaciones finitas.

5.2.3. Ley de evolución en deformaciones elásticas logarítmicas

La desigualdad de la disipación en la ec. (5.61) debe ser siempre positiva, de acuerdo al principio de máxima disipación, y de acuerdo a una interpretación como funcional lagrangiano, la forma asociativa de la ley de evolución garantiza este cumplimiento. La ley escogida es un corrector elástico en forma de tasa respecto potencial plástico -esta forma es equivalente a la función de plastificación, pues comparten el gradiente de tensiones-, no cambia con su aplicación en el modelo reológico de la figura , por lo que de acuerdo a lo expuesto en la sección 4.2.3 , la ley sigue la expresión

$$- \dot{\mathbf{E}}_e \Big|_{\dot{\mathbf{E}}=0} = \dot{\gamma} \frac{1}{\frac{2}{3}k} \nabla \phi_T \quad (5.62)$$

donde $\dot{\gamma}$ es el conocido parámetro asociativo plástico, o multiplicador de consistencia plástica, k es el parámetro de tensión de fluencia del material que incluye el factor desviador uniaxial $2/3$ por conveniencia numérica en operaciones posteriores (permite recuperar el criterio isótropo de Hill de forma automática), y $\phi_T(\mathbf{T}^{|e})$ es el potencial plástico de tensiones internas asociado a la función de plastificación que tiene lugar en el disipador. En este modelo se ha escogido una función de plastificación de tipo Hill, por ser una función convexa que garantiza la solución positiva en el corrector algorítmico [131], ya que está descrita en forma cuadrática pura sobre las tensiones $\mathbf{T}$

$$\phi_T(\mathbf{T}^{|e}) = \frac{1}{2} \mathbf{T}^{|e} : \mathbb{N}_T : \mathbf{T}^{|e} \quad (5.63)$$

donde $\mathbb{N}_T$ es el tensor de cuarto orden, simétrico, y definido positivo -ec. (3.77)-, que recoge los parámetros de plastificación del material particularizado para el uso de tensiones generalizadas de Kirchhoff en descripción lagrangiana. En este punto de la discusión, aunque $\mathbf{T}^{|e}$ se halla en configuración intermedia, la coaxialidad de las direcciones principales en los ensayos experimentales con la tensión espacial de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$, permite eludir la dificultad de su caracterización (sección 4.2.4.2). Con ello la ecuación de flujo resultante queda -comparar con ec. (5.31)-

$$- \dot{\mathbf{E}}_e \Big|_{\dot{\mathbf{E}}=0} = \dot{\gamma} \frac{1}{\frac{2}{3}k} (\mathbb{N}_T : \mathbf{T}_{int}^{|e}) \quad (5.64)$$

y automáticamente se comprueba el cumplimiento del requisito de disipación

$$\mathcal{D} = \dot{\gamma} \frac{1}{\frac{2}{3}k} \mathbf{T}^{|e} : \mathbb{N}_T : \mathbf{T}^{|e} > 0 \quad \text{si} \quad \dot{\gamma} > 0 \quad (5.65)$$

5.2.4. Función de plastificación en anisotropía

La función de plastificación, al igual que la ecuación de disipación, pueden expresarse con términos de las variables tensoriales en cualquier configuración, la única condición es respetar que el par de tensiones y deformaciones sean medidas conjugadas de trabajo [78]. La función de plastificación propuesta en este modelo elastoplástico es una función de tipo cuadrático sobre las tensiones, elegida con objeto de respetar la convexidad del dominio elástico en todo momento, y dado que la única condición a cumplir es admitir anisotropía plástica, la función escogida ha de ser una función de tipo *Hill-1948* [56]. Algunos criterios de anisotropía plástica propuestos en la literatura científica, presentan el inconveniente de no garantizar la convexidad de la función en todo momento, lo que puede llevar a momento en el cálculo donde la solución de tensiones no sea única, con los consiguientes problemas numéricos de convergencia.

De manera semejante a la ecuación de disipación, al utilizar las deformaciones logarítmicas en el contorno del dominio elástico situadas en configuración intermedia, la componente $\mathbf{E}_e$, la función de plastificación ha de usar su conjugada de trabajo en tensiones generalizadas de Kirchhoff $\mathbf{T}_{int}^{|e}$, también en dicha configuración, tal y como

se desarrolla en [103],[21], y de forma consistente es necesario configurar un tensor de coeficientes de plastificación $\mathbb{N}_T$ asociado a las direcciones preferentes de material, y que esté descrito o sea consistente con la configuración intermedia, tal y como se expone en la sección 4.2.4. Aunque $\mathbf{T}^{|e}$ se encuentre en configuración intermedia, la coaxialidad de las direcciones principales en los ensayos experimentales con la tensión espacial de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$, permite eludir la dificultad de caracterizar correctamente este tensor de coeficientes de plastificación $\mathbb{N}_T$.

Así pues, reconsiderando la ec. (5.65), y sumando $+1 - 1$ se llega a

$$\mathcal{D} = \dot{\gamma} \frac{1}{\frac{2}{3}k} \left(\mathbf{T}_{int}^{|e} : \mathbb{N}_T : \mathbf{T}_{int}^{|e} - \frac{2}{3}k^2 \right) + k\dot{\gamma} > 0 \quad \text{si} \quad \dot{\gamma} > 0 \quad (5.66)$$

donde se puede reconocer la presencia de la función de plastificación $f_T(\mathbf{T}_{int}^{|e}, k)$, descrita en configuración intermedia con el tensor de tensiones generalizadas de Kirchhoff $\mathbf{T}_{int}^{|e}$, y donde se observa como condición de plastificación

$$f_T(\mathbf{T}_{int}^{|e}, k) := \mathbf{T}_{int}^{|e} : \mathbb{N}_T : \mathbf{T}_{int}^{|e} - \frac{2}{3}k^2 = 0 \quad \text{si} \quad \dot{\gamma} > 0 \quad (5.67)$$

de manera que la desigualdad de disipación se cumple en términos de la tensión interna cuando el parámetro plástico $k > 0$, y donde su propio conjugado de potencia es la deformación plástica acumulada en forma de tasa $\dot{\gamma} > 0$, condición de flujo plástico que se observa como $\mathcal{D} = k\dot{\gamma} > 0$. Aplicando la condición de carga puramente elástica sobre la función de plastificación a través de $\dot{\gamma} = 0$, entonces

$$f_T(\mathbf{T}_{int}^{|e}, k) = \mathbf{T}_{int}^{|e} : \mathbb{N}_T : \mathbf{T}_{int}^{|e} - \frac{2}{3}k^2 < 0 \quad (5.68)$$

donde se reconoce la presencia del potencial plástico de tensiones en la forma $2\phi = \mathbf{T}_{int}^{|e} : \mathbb{N}_T : \mathbf{T}_{int}^{|e}$, y demostrándose la condición de consistencia de la función con la restricción de disipación en la forma $\mathcal{D} = k\dot{\gamma} \geq 0 \quad \text{si} \quad \dot{\gamma} \geq 0$.

Asimismo, la ec. (5.67) posee un evidente carácter desviador, pues es posible reconocer la presencia del invariante segundo desviador del estado tensional cuando se cumplen las condiciones de consistencia plástica, donde $J_2^{yield} = \frac{1}{3}k^2$. Esta observación es consistente con el hecho de que la función de plastificación propuesta reproduce fidedignamente el criterio de Von Mises para sólidos de plasticidad isótropa. Este carácter desviador estaba ya contenido en la característica desviadora del tensor de cuarto orden $\mathbb{N}_T$ en la ec. (5.67), que simultáneamente es proyector desviador simétrico sobre las tensiones con las que opera.

Finalmente, un resumen del modelo de material desarrollado para la computación de la plasticación se muestra esquemáticamente en la tabla 5.1.

5.3. Linealización del modelo continuo en deformaciones finitas

La tensión total, tal como se expone en la ec. (5.59) incluye dos contribuciones parciales, que si en el modelo unidimensional son dos términos de tensión aditivos, en el caso tridimensional son dos tensores de tensiones diferenciados, que se encuentran en

Tabla 5.1: Modelo de elastoplasticidad multiplicativa con endurecimiento anisotrópico formulado en deformaciones finitas logarítmicas.

(i) Descomposición multiplicativa sobre el gradiente de deformaciones: $X = X_e X_p$
(ii) Variable tensorial simétrica de deformaciones elásticas $E_e = \frac{1}{2} \ln(X_e^T X_e)$
(iii) Cinemática en forma rate aditiva $E_e(E, X_p)$
$\dot{E}_e = \dot{E}_e \Big _{\dot{X}_p=0} + \dot{E}_e \Big _{\dot{E}=0} \neq \dot{E} - \dot{E}_p$
(iv) Tensiones simétricas derivadas de la energía libre almacenada $\Psi(E, E_e)$
$T = \frac{\partial \Psi(E, E_e)}{\partial E} = \frac{d\Psi_{kin}(E)}{dE} + \underbrace{\frac{d\Psi_{int}(E_e)}{dE_e}}_{T_{int}^{ e }} : \frac{\partial E_e}{\partial E} = T_{kin} + T_{int}$
(v) Ley de evolución asociativa con flujo plástico simétrico
$- \dot{E}_e \Big _{\dot{E}=0} = \dot{\gamma} \frac{1}{\frac{2}{3}k} \nabla \phi_T(T_{int}^{ e }) \neq \dot{E}_p$
$\dot{\gamma} \geq 0, \quad f_T(T_{int}^{ e }, k) = 2\phi_T(T_{int}^{ e }) - \frac{2}{3}k^2 \leq 0, \quad \dot{\gamma} f_T(T_{int}^{ e }, k) = 0$
(vi) Ecuación de evolución adicional para el flujo plástico desviador spin w_p
Nota: Potenciales Ψ_{kin} , Ψ_{int} y función f_T son anisótropos, en general.

diferente configuración. La tensión $\mathbf{T}_{kin}$ depende exclusivamente de la deformación total exterior, $\mathbf{E}$, y se obtiene directamente a partir de la función de energía hiperelástica $\Psi_{kin}(\mathbf{E})$, una vez que la deformación logarítmica $\mathbf{E} = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{X}^T \mathbf{X})$ se obtiene del gradiente de deformaciones $\mathbf{X}$, tal y como describe la ec. (5.56)₁. La función de energía hiperelástica $\Psi_{kin}(\mathbf{E})$ puede ser determinada experimentalmente como se expondrá en la sección 6, y está asociada con el endurecimiento cinemático del material, como se ha comprobado en el modelo reológico y como más tarde se mostrará. Otros caminos para incorporar este tipo de endurecimiento en grandes deformaciones se describen en la literatura científica, los más destacados tal vez sean el modelo de Armstrong–Frederick ([147]), el trabajo de Lion [85], o el de Wallin [153].

Con el modelo reológico de la figura 5.1, la linealización de $\mathbf{T}_{kin}(\mathbf{E})$ en configuración de referencia es trivial, y queda definida por un tensor constitutivo de cuarto orden $\mathbb{A}_{kin}$, de naturaleza logarítmica (obtenido de deformaciones finitas logarítmicas), en configuración de referencia, y definido hiperelásticamente en la forma

$$\mathbb{A}_{kin} := \frac{d\mathbf{T}_{kin}}{d\mathbf{E}} = \frac{d^2 \Psi_{kin}(\mathbf{E})}{d\mathbf{E} d\mathbf{E}} \quad (5.69)$$

Con esta sencilla premisa, la parte de mayor protagonismo en la linealización

consistente elastoplástica dentro del marco continuo radica en la contribución en la disipación del término $\mathbf{T}_{int}$, de igual manera que en la sección 5.1.1.

La próxima sección se dedica a obtener este término de tensiones descrito en deformaciones finitas, y como se comprobará sigue un esquema procedimental paralelo a la linealización consistente elastoplástica de la teoría continua en deformaciones infinitesimales.

5.3.1. Relación entre el predictor *trial* y el corrector elástico logarítmico durante el flujo plástico

En primer lugar conviene destacar que el tensor de tensiones internas $\mathbf{T}_{int}^{le}$ depende de las mismas variables independientes que $\mathbf{E}_e$, fundamentalmente $\mathbf{E}$ y $\mathbf{X}_p$, y además de $k = k(\gamma)$, por tanto, asumiendo la ec. (5.67), una interpretación en forma de tasa de esta ecuación puede ser escrita en términos semejantes a la variable $\mathbf{E}_e$ en la ec. (5.51), es decir, aplicando la regla de la cadena sobre la diferenciación en el tiempo

$$\dot{f}_T = \left. \frac{\partial f_T}{\partial \mathbf{E}} \right|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} : \dot{\mathbf{E}} + \left. \frac{\partial f_T}{\partial \mathbf{X}_p} \right|_{\dot{\mathbf{E}}=0} : \dot{\mathbf{X}}_p = \dot{f}_T \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} + \dot{f}_T \Big|_{\dot{\mathbf{E}}=0} \quad (5.70)$$

Con esta diferenciación se obtienen dos términos que han de tener lugar de manera simultánea de acuerdo a la teoría continua, igual que ocurre en la ec. (5.51)- El primer término se relaciona con la evolución del trial elástico en la teoría continua, con el resultado

$$\dot{f}_T \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} = 2 \nabla \phi_T : \dot{\mathbf{T}}_{int}^{le} \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} = 2 \nabla \phi_T : \mathbb{A}_{int}^{le} : \dot{\mathbf{E}}_e \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} \quad (5.71)$$

donde aparece el tensor de cuarto orden constitutivo $\mathbb{A}_{int}^{le}$, tensor en configuración intermedia, de naturaleza logarítmica, que está definido hiperelásticamente como

$$\mathbb{A}_{int}^{le} := \frac{d\mathbf{T}_{int}^{le}}{d\mathbf{E}_e} = \frac{d^2 \Psi_{int}(\mathbf{E}_e)}{d\mathbf{E}_e d\mathbf{E}_e} \quad (5.72)$$

El segundo término, que se relaciona con la evolución del corrector elástico en la teoría continua, de igual manera que en la ec. (5.70), se obtiene

$$\dot{f}_T \Big|_{\dot{\mathbf{E}}=0} = 2 \nabla \phi_T : \dot{\mathbf{T}}_{int}^{le} \Big|_{\dot{\mathbf{E}}=0} - \frac{2}{3} k k' \dot{\gamma} = 2 \nabla \phi_T : \mathbb{A}_{int}^{le} : \dot{\mathbf{E}}_e \Big|_{\dot{\mathbf{E}}=0} - \frac{2}{3} k k' \dot{\gamma} \quad (5.73)$$

donde $k' = dk/d\gamma$ es la derivada de la función que representa la tensión de plastificación $k(\gamma)$, que será considerada para el caso de un material con endurecimiento isótropo.

Usando la ec. (5.62) se obtiene la expresión

$$\frac{1}{2} \dot{f}_T \Big|_{\dot{\mathbf{E}}=0} = -\dot{\gamma} \frac{1}{\frac{2}{3}k} (\nabla \phi_T : \mathbb{A}_{int}^{le} : \nabla \phi_T + \frac{4}{9} k^2 k') \quad (5.74)$$

La condición de consistencia $\dot{f}_T = 0$ cuando $\dot{\gamma} > 0$ aplicada sobre la ec. (5.70), lleva a que la condición de consistencia se cumpla en cualquier tiempo t , de manera que

$$\dot{\gamma} \frac{1}{\frac{2}{3}k} = \left(\frac{\mathbb{A}_{int}^{le} : \nabla \phi_T}{\nabla \phi_T : \mathbb{A}_{int}^{le} : \nabla \phi_T + \frac{4}{9} k^2 k'} \right) : \dot{\mathbf{E}}_e \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} \quad \text{si } \dot{\gamma} > 0 \quad (5.75)$$

Finalmente, combinando la ec. (5.75) y la ec. (5.62) se obtiene la relación

$$\dot{\mathbf{E}}_e \Big|_{\dot{\mathbf{E}}=0} = - \left(\frac{\nabla \phi_T \otimes (\mathbb{A}_{int}^{|e} : \nabla \phi_T)}{\nabla \phi_T : \mathbb{A}_{int}^{|e} : \nabla \phi_T + \frac{4}{9} k^2 k'} \right) : \dot{\mathbf{E}}_e \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} \quad \text{si } \dot{\gamma} > 0 \quad (5.76)$$

ecuación que establece el acoplamiento entre las formas de velocidad o tasa de las dos variables independientes que participan en la tensión interna $\mathbf{T}_{int}^{|e}(\mathbf{E}_e)$; las dos variables son el tensor de deformaciones logarítmicas $\mathbf{E}$ -a través de $\dot{\mathbf{E}}_e \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0}$ en la ec. (5.51)- y el tensor gradiente plástico de deformaciones $\mathbf{X}_p$ -a través de $\dot{\mathbf{E}}_e \Big|_{\dot{\mathbf{E}}=0}$ en la ec. (5.51)-, de manera que la tensión $\mathbf{T}_{int}^{|e}$ permanece de forma consistente sobre la superficie de plastificación $f_T(\mathbf{T}_{int}^{|e}, k) = 0$ durante el flujo plástico. Ambas variables $\mathbf{E}$ y $\mathbf{X}_p$ quedan a partir de aquí relacionadas entre sí de forma *consistente* con la teoría continua. Cabe destacar la similitud de la ec. 5.76 con la ec. 4.102, ya que ambas ecuaciones solo se diferencian en la presencia del tensor de cuarto orden, interno y en configuración intermedia en el primer caso, y total el segundo donde no está presente la motivación reológica de la figura 5.1.

5.3.2. Relación entre la deformación logarítmica total y elástica o *trial* durante el flujo plástico

Reescribiendo la ec. (5.51) a través de la ec. (5.76) se obtiene la expresión

$$\dot{\mathbf{E}}_e = \left(\mathbb{I}^S - \frac{\nabla \phi_T \otimes (\mathbb{A}_{int}^{|e} : \nabla \phi_T)}{\nabla \phi_T : \mathbb{A}_{int}^{|e} : \nabla \phi_T + \frac{4}{9} k^2 k'} \right) : \dot{\mathbf{E}}_e \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} \quad \text{si } \dot{\gamma} > 0 \quad (5.77)$$

que facilita la linealización elastoplásticamente consistente de la teoría continua de deformaciones finitas en términos de deformación logarítmica, y en configuración intermedia.

5.3.3. Módulo tangente elastoplástico continuo

La contribución de la rama *interna* de tipo Prandtl en el modelo reológico de referencia, tiene una participación en el módulo tangente elastoplástico continuo que determina las variaciones que experimenta el tensor $\mathbf{T}_{int}$ asociado a la variable de deformación total logarítmica $\mathbf{E}$, ambos en configuración de referencia. Dado que la tensión $\mathbf{T}_{kin}$ solo opera de forma directa sobre la rama *kinematic*, este término no participa directamente en este módulo tangente. Es necesario resolver la dificultad del cambio de configuración en las variables implicadas entre la configuración de referencia y la configuración intermedia, dado que el tensor $\mathbf{T}_{int}^{|e}$ está en intermedia, pero el tensor $\mathbf{T}_{int}$ está en referencia -ver. ec. (5.59)-.

Haciendo uso de la relación entre los tensores $\dot{\mathbf{E}}$ y $\dot{\mathbf{E}}_e \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0}$, que se interpreta como una operación de empuje, o *push-forward*, de configuración inicial a intermedia, y reflejada a través del primer término de la ec. (5.51), se obtiene la expresión empujada

$$\dot{\mathbf{T}}_{int}^{|e} = \mathbb{A}_{int}^{|e} : \dot{\mathbf{E}}_e = \mathbb{A}_{ep}^{|e} : \dot{\mathbf{E}}_e \Big|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} \quad (5.78)$$

y de forma consecutiva se llega a

$$\mathbb{A}_{ep}^{|e} := \mathbb{A}_{int}^{|e} - \frac{(\mathbb{A}_{int}^{|e} : \nabla \phi_T) \otimes (\mathbb{A}_{int}^{|e} : \nabla \phi_T)}{\nabla \phi_T : \mathbb{A}_{int}^{|e} : \nabla \phi_T + \frac{4}{9}k^2k'} \quad (5.79)$$

donde se han relacionado las ecuaciones (5.72) y (5.77), y se interpreta $\mathbb{A}_{ep}^{|e}$ como el módulo tangente elastoplástico interno y continuo, que se sitúa en configuración intermedia, y que conserva exactamente la misma estructura que el módulo equivalente resultante en deformaciones infinitesimales con endurecimiento combinado cinemático e isótropo de la plasticidad clásica [131].

La diferencia más importante entre las deformaciones infinitesimales y las finitas es que al presentar éstas últimas la posibilidad de experimentar cambios de configuración durante el proceso elastoplástico, la formulación resultante obliga a un cambio configuración por tiro o *pull back* desde la configuración intermedia a la configuración de referencia en la ecuación (5.79). Como los tensores de tensiones internas $\mathbf{T}_{int}^{|e}$ y $\mathbf{T}_{int}$ se relacionan entre sí a través de un tensor proyectivo de cuarto orden, ec. (5.59), que en este caso está impulsado por la relación de dependencia de las variables de deformación, se obtiene la expresión

$$\dot{\mathbf{T}}_{int} = \dot{\mathbf{T}}_{int}^{|e} : \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} \Big|_{\dot{\mathbf{x}}_p=0} + \mathbf{T}_{int}^{|e} : \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} \Big|_{\dot{\mathbf{x}}_p=0} \right) \quad (5.80)$$

que recoge una relación punto a punto entre las tensiones en forma de tasa $\dot{\mathbf{T}}_{int}$ y $\dot{\mathbf{T}}_{int}^{|e}$, esta característica de relaci punto a punto no permite extraer una relación aplicable en el marco continuo para estos cambios de configuración. Sin embargo, haciendo uso de la ecuación (5.78) es posible obtener una expresión válida para el cambio de configuraciones en el módulo tangente elastoplástico interno, desde la configuración intermedia a la configuración de referencia. Para ello introduciendo primero la ec. (5.78)₂ en el primer sumando a la derecha de la ec. (5.80), y luego considerando el primer sumando de la izquierda de la ec. (5.51), se obtiene

$$\dot{\mathbf{T}}_{int} \Big|_{\dot{\mathbf{x}}_p=0} := \dot{\mathbf{T}}_{int}^{|e} : \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} \Big|_{\dot{\mathbf{x}}_p=0} = \dot{\mathbf{E}}_e \Big|_{\dot{\mathbf{x}}_p=0} : \mathbb{A}_{ep}^{|e} : \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} \Big|_{\dot{\mathbf{x}}_p=0} = \mathbb{A}_{ep} : \dot{\mathbf{E}} \quad (5.81)$$

donde se identifica y define el módulo tangente elastoplástico continuo en configuración de referencia $\mathbb{A}_{ep}$, que no se interpreta como la operación de tiro o *pull-back* sobre su contraparte interna en configuración intermedia $\mathbb{A}_{ep}^{|e}$. Básicamente, el concepto que se muestra en la ec. (5.81) es el de una aplicación de la derivada de Lie [131], herramienta que se aplica con los pasos consecutivos de "tiro-derivación-empuje", y ahora resumidos en una única expresión. Por tanto se obtiene

$$\mathbb{A}_{ep} := \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} \Big|_{\dot{\mathbf{x}}_p=0}^T : \mathbb{A}_{ep}^{|e} : \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} \Big|_{\dot{\mathbf{x}}_p=0} \quad (5.82)$$

y donde $\mathbb{A}_{ep}$ preserva la simetría original de $\mathbb{A}_{ep}^{|e}$ -ver ec. (5.79)-, una característica debida a asociatividad de la regla de evolución utilizada, que preserva el carácter simétrico de los tensores utilizados.

Es importante destacar que la ecuación (5.81) surge dentro del marco computacional, obtenido al utilizar el procedimiento algorítmico predictor/corrector. Como más adelante se verá, dentro del marco algorítmico el gradiente plástico de deformación *trial*, ${}^{tr}\mathbf{X}_p$, permanece constante en los puntos de integración al aplicar la solución al problema de contorno a través del método de los elementos finitos, concretamente durante las iteraciones globales donde no está involucrado el algoritmo predictor/corrector, por ser una fase del cálculo externa al problema de integración de la ecuación de evolución, de forma sencilla: ambas partes computacionales del problema están desacopladas cuando los cálculos tienen lugar. Teniendo en cuenta este aspecto, la configuración intermedia y los tensores proyectores que resultan entre $\mathbf{T}_{int}$ y $\mathbf{T}_{int}^{le}$ permanecen congelados en los puntos de integración cuando se ejecutan las iteraciones globales del método de elementos finitos, esto es, el segundo sumando de la ec. (5.80) es de facto nulo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} \bigg|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} \right) = 0 \quad (5.83)$$

La expresión del tensor $\partial \mathbf{E}_e / \partial \mathbf{E} |_{\dot{\mathbf{X}}_p=0}$, presente en la ec. (5.82) es de naturaleza puramente geométrica, una operación punto a punto, y no es necesario su uso si la linealización algorítmica se desarrolla completamente en la configuración intermedia de *trial*. Esta cuestión se ha demostrado ya válida anteriormente en el contexto de la viscosidad multiplicativa anisótropa en deformaciones logarítmicas, cuando el problema se resuelve en la configuración intermedia [76].

5.4. Linealización del modelo algorítmico

El siguiente desarrollo del modelo es describir la formulación algorítmica derivada de la formulación continua en deformaciones finitas descrita anteriormente. El objetivo es mostrar el funcionamiento del proceso de linealización según la teoría incremental, y al tiempo consistente con la integración implícita de la ecuación de flujo plástico, de acuerdo a los postulados de problema elastoplástico.

El cómputo de $\mathbf{T}_{kin}$ y su correspondiente módulo tangente se realiza de una forma sencilla y directa a partir de la ley hiperelástica $\Psi_{kin}(\mathbf{E})$, una vez que el tensor de deformaciones totales $\mathbf{E}$ es conocido en cada paso iterativo, tras la descomposición polar del gradiente total de deformaciones $\mathbf{X}$. Estas variables se obtienen al final de los pasos de iteraciones globales que realiza el problema de contorno por el método de los elementos finitos [76].

Así pues, en esta sección el protagonismo corresponde al procedimiento para obtener la contribución disipativa de la tensión, $\mathbf{T}_{int}$, y su módulo tangente elastoplástico consistente dentro del marco algorítmico computacional.

El procedimiento se conduce a través de una estructura que preserva la simpleza y la aditividad de los esquemas de la teoría de deformaciones infinitesimales, el clásico *return mapping* descrito en deformaciones infinitesimales. La principal característica de esta formulación es que se obtiene una linealización algorítmica completamente simétrica en los tensores que intervienen. Todo ello siendo al mismo tiempo consistente con la descomposición multiplicativa sobre el gradiente de deformaciones.

5.4.1. Algoritmo de integración de tensiones

Se detalla aquí el procedimiento para obtener las tensiones en los puntos de integración y el módulo tangente algorítmico consistente en el espacio de las deformaciones logarítmicas, necesarios para el cálculo por elementos finitos. Este marco computacional es relevante para poder aplicar la medida de deformación logarítmica en el todo el proceso elastoplástico, el problema cinemático se escalona a través de un preprocesador geométrico con los datos de entrada necesarios, y de un posprocesador geométrico de salida para adaptar las variables tensoriales a la configuración adecuada en el cómputo global de elementos finitos.

5.4.1.1. Pre y posprocesador geométricos y el predictor elástico *trial*

En los datos de partida se acepta que el gradiente total de deformaciones ${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{X}$ es conocido en cada paso de cálculo, $t + \Delta t$, desde el programa de elementos finitos, y que el gradiente plástico al inicio ${}^t_0 \mathbf{X}_p$ es también conocido, pues está almacenado desde la integración del paso anterior (resulta obvio que también se conoce el gradiente elástico ${}^t_0 \mathbf{X}_e$, puesto que si es conocida una variable interna, la otra también lo es). En primer lugar se define el tensor trial elástico sobre el gradiente de deformaciones en $t + \Delta t$, que viene conocido desde la descomposición de Lee con el gradiente plástico congelado ($\dot{\mathbf{X}}_p = 0$), con lo que ${}^{tr} \mathbf{X}_p = {}^t_0 \mathbf{X}_p$, y por tanto

$${}^{tr} \mathbf{X}_e = {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{X} {}^t_0 \mathbf{X}_p^{-1} \quad (5.84)$$

con lo que la deformación elástica logarítmica asociada a ${}^{tr} \mathbf{X}_e$ es

$${}^{tr} \mathbf{E}_e = \frac{1}{2} \ln({}^{tr} \mathbf{X}_e^T {}^{tr} \mathbf{X}_e) \quad (5.85)$$

La deformación ${}^{tr} \mathbf{E}_e$ ya reside algorítmicamente en configuración intermedia desde la aplicación de la ec. (5.84) en $t + \Delta t$, al reproducir la transformación de Lee correspondiente. Este resultado es el mismo que se obtiene tras la integración del tensor rate elástico trial del primer sumando en la ec. (5.51) en la teoría continua.

El siguiente paso es determinar si la carga añadida es elástica o no, verificando las tensiones sobre la función de plastificación de la ec. (5.67), lo que se hará con la tensión *trial* de prueba, también en configuración intermedia y obtenida hiperelásticamente a través de la energía libre

$${}^{tr} \mathbf{T}_{int}^{|e} := \left. \frac{d\Psi_{int}(\mathbf{E}_e)}{d\mathbf{E}_e} \right|_{tr} = \frac{d\Psi_{int}({}^{tr} \mathbf{E}_e)}{d{}^{tr} \mathbf{E}_e} \quad (5.86)$$

La función plástica trial o de prueba será

$${}^{tr} f_T = f_T({}^{tr} \mathbf{E}_e, {}^{tr} k) = {}^{tr} \mathbf{T}_{int}^{|e} : \mathbb{N}_T : {}^{tr} \mathbf{T}_{int}^{|e} - \frac{2}{3} {}^{tr} k^2 \quad (5.87)$$

donde el parámetro interno plástico *trial* será ${}^{tr} k = k({}^{tr} \gamma) = k({}^t_0 \gamma) = {}^t k$, y tendrá los valores actualizados al inicio del paso de cálculo en el tiempo $t = t_0$. En el caso de obtener ${}^{tr} f_T \leq 0$, el paso de cálculo será elástico y los valores de prueba o trial serán la solución en el tiempo $t + \Delta t$. En el caso de obtener ${}^{tr} f_T > 0$, la solución elástica *trial* no será admisible y el corrector plástico realizará la corrección de tensiones.

5.4.1.2. Cálculo iterativo del corrector plástico en deformaciones elásticas

En el caso de que ${}^{tr}f_T > 0$, la deformación total externa quedará congelada ($\dot{\mathbf{E}} = 0$) y se procederá a realizar la corrección interna sobre $\mathbf{E}_e$. Clásicamente esta corrección se realiza directamente sobre las variables plásticas del problema, sin embargo aquí vamos a integrar la evolución de la deformación elástica -ec. (5.64) -, y no la variable de deformación plástica, si bien hay que recordar que ambas están internamente conectadas y no son independientes entre sí. En otras palabras, vamos a integrar el tensor *corrector elástico* de deformaciones en forma de tasa, de facto es el segundo sumando de la ec. (5.51). Esta es la clave del presente esquema clásico de *return mapping* que lo hace atractivo desde un punto de vista algorítmico y que marca la diferencia con los modelos clásicos de elastoplasticidad multiplicativa anisótropa, basados en leyes de evolución descritas con variables internas de deformación *plástica*, osea explícitas en la formulación del corrector plástico.

El paso de integración de la ley de evolución se lleva a cabo con el mencionado algoritmo de Euler implícito de tipo backward, conocido también en plasticidad clásica [131]. Este algoritmo se puede implementar con diferentes opciones en función del tipo de endurecimiento aplicado, como se describe en la cita [100]. La opción aquí utilizada se basa en el cálculo de la ecuación residuo no lineal que se genera entre las deformaciones elásticas obtenidas en el backward-Euler y la función de plástificación que garantiza la consistencia. Las variables obtenidas en esta solución son el tensor de deformaciones elásticas ${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{E}_e$ y el parámetro de consistencia plástica ${}^{t+\Delta t}_0 \gamma$.

La primera parte del residuo total se obtiene por integración directa de la ec. (5.62) empleando el esquema backward-Euler y que produce una actualización aditiva natural -como ocurre en deformaciones infinitesimales, ec. (5.47)-. Este esquema evita el uso de la aproximación exponencial en la integración de las deformaciones, que puede restringir el uso del algoritmo a casos de pequeñas y moderadas deformaciones dentro del campo de las deformaciones finitas [36], [96]. Esta cualidad aditiva del mecanismo utilizado sin necesidad de recurrir al *exponential mapping* se debe al uso intrínseco de las deformaciones logarítmicas o naturales en el modelo [75]. El planteamiento se desarrolla según el procedimiento

$$\int_t^{t+\Delta t} d\mathbf{E}_e|_{\dot{\mathbf{E}}=0} = - \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{\frac{2}{3}k} \nabla \phi_T d\gamma \quad (5.88)$$

integración inmediata que arroja la expresión

$${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{E}_e - {}^{tr} \mathbf{E}_e = - \frac{\Delta \gamma}{\frac{2}{3} {}^{t+\Delta t}_0 k} \nabla \phi_T \quad (5.89)$$

donde el parámetro interno plástico está actualizado según ${}^{t+\Delta t} k = k({}^{t+\Delta t}_0 \gamma)$, y donde además el potencial actualizado es

$${}^{t+\Delta t} \nabla \phi_T = \mathbb{N}_T : {}^{t+\Delta t} \mathbf{T}_{int}^e \quad (5.90)$$

y también las tensiones internas

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{T}_{int}^e = \left. \frac{d\Psi_{int}(\mathbf{E}_e)}{d\mathbf{E}_e} \right|_{t+\Delta t} \quad (5.91)$$

donde cabe observar como este tensor de tensiones está en configuración intermedia aún en el tiempo $t + \Delta t$.

El resultado final es una ecuación tensorial simétrica de seis componentes y de naturaleza no lineal, que se ha a resolver como una ecuación residuo ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\rho}_e$ sobre la que se aplicará un cálculo iterivo del tipo Newton-Raphson

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\rho}_e \left({}^{t+\Delta t}_0\mathbf{E}_e, \Delta\gamma \right) = {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{E}_e + \frac{\Delta\gamma}{\frac{2}{3}{}^{t+\Delta t}k} {}^{t+\Delta t}\nabla\phi_T - {}^{tr}\mathbf{E}_e \longrightarrow \mathbf{0} \quad (5.92)$$

Finalmente queda cumplir la condición de consistencia plástica ${}^{t+\Delta t}f_T \longrightarrow 0$, que condiona los valores del incremento del parámetro de consistencia ($\Delta\gamma := {}^{t+\Delta t}_0\gamma - {}^{tr}\gamma = {}^{t+\Delta t}_0\gamma - {}^t_0\gamma$) y del tensor de deformaciones elásticas ${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{E}_e$, y que deben guardar el cumplimiento de la condición.

$${}^{t+\Delta t}f_T = {}^{t+\Delta t}\mathbf{T}_{int}^{|e} : {}^{t+\Delta t}\nabla\phi_T - \frac{2}{3}{}^{t+\Delta t}k^2 \longrightarrow 0 \quad (5.93)$$

esta relación adicional genera una segunda ecuación no lineal que habrá que considerar también como parte de la ecuación residuo en el cálculo iterativo. Ahora el residuo final ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$ que es necesario resolver iterativamente es

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(j)} \left({}^{t+\Delta t}_0\mathbf{E}^{(j)} \right) := \left\{ \begin{array}{c} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\rho}_e^{(j)} \\ {}^{t+\Delta t}f_T^{(j)} \end{array} \right\}_{2 \times 1} \longrightarrow \mathbf{0} \quad \text{con} \quad {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{E}^{(j)} := \left\{ \begin{array}{c} {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{E}_e^{(j)} \\ {}^{t+\Delta t}_0\gamma^{(j)} \end{array} \right\}_{7 \times 1} \quad (5.94)$$

donde (j) es el superíndice que actúa como contador de las iteraciones locales. Estas iteraciones se diferencian así de las iteraciones globales que se ejecutan en el problema de contorno por el método de los elementos finitos, además se ejecutan en los puntos de integración de los elementos, a diferencia de las iteraciones globales que tienen lugar sobre los nodos de los elementos (figura 3.20). El vector de incógnitas internas ${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{E}$ se calcula de forma incremental mediante el correspondiente procedimiento de Newton-Raphson

$${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{E}^{(j+1)} = {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{E}^{(j)} - \left[\nabla {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(j)} \right]^{-1} {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(j)} \quad (5.95)$$

y la condición de tolerancia que da por válido el vector actualizado es

$$\left\| {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(j+1)} \left({}^{t+\Delta t}_0\mathbf{E}^{(j+1)} \right) \right\| < \text{tolerancia} \quad (5.96)$$

y donde los valores iterativos iniciales $j = 0$ de las variables incógnita son los valores de *trial*, concretamente ${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{E}_e^{(0)} = {}^{tr}\mathbf{E}_e$, y para el parámetro de consistencia ${}^{t+\Delta t}_0\gamma^{(0)} = {}^t\gamma$, es decir el último valor almacenado del paso anterior. Además la solución aceptable ha de cumplir con la condición plástica $\Delta\gamma > 0$, es decir que la solución no sea la trivial.

El gradiente del vector residuo $\mathbf{R}$ respecto de las incógnitas se conforma con la matriz jacobiana de dimensión 7×7

$$\nabla \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(j)} \right) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_e}{\partial \mathbf{E}_e} & \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_e}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial f_T}{\partial \mathbf{E}_e} & \frac{\partial f_T}{\partial \gamma} \end{array} \right]_{t+\Delta t}^{(j)} \quad (5.97)$$

que contiene los siguientes términos de derivadas evaluados en el paso de tiempo $t + \Delta t$ y en las iteraciones locales (j)

- $\partial \boldsymbol{\rho}_e / \partial \mathbf{E}_e$ se obtiene de la ec. (5.92), que en notación de Voigt es una matriz de dimensiones 6×6 .

$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_e}{\partial \mathbf{E}_e} = \mathbb{I}^S + \frac{\Delta \gamma}{\frac{2}{3}k} \nabla \nabla \phi_T : \frac{d\mathbf{T}_{int}^{le}}{d\mathbf{E}_e} = \mathbb{I}^S + \frac{\Delta \gamma}{\frac{2}{3}k} \mathbb{N}_T : \mathbb{A}_{int}^{le} \quad (5.98)$$

donde $\mathbb{A}_{int}^{le}$ es el tensor constitutivo hiperelástico dado en la ec. (5.72).

- $\partial \boldsymbol{\rho}_e / \partial \gamma$ se obtiene inmediatamente de la ec. (5.92), es una matriz-vector de dimensiones 6×1 .

$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_e}{\partial \gamma} = \frac{k - \Delta \gamma k'}{\frac{2}{3}k^2} \nabla \phi_T = \frac{k - \Delta \gamma k'}{\frac{2}{3}k^2} \mathbb{N}_T : \mathbf{T}_{int}^{le} \quad (5.99)$$

- $\partial f_T / \partial \mathbf{E}_e$ se obtiene de la ec. (5.67), es una matriz-vector de dimensiones 1×6 .

$$\frac{\partial f_T}{\partial \mathbf{E}_e} = 2 \nabla \phi_T : \frac{d\mathbf{T}_{int}^{le}}{d\mathbf{E}_e} = 2 \mathbf{T}_{int}^{le} : \mathbb{N}_T : \mathbb{A}_{int}^{le} \quad (5.100)$$

- $\partial f_T / \partial \gamma$ es un escalar, dimensiones 1×1 , que simplemente contiene

$$\frac{\partial f_T}{\partial \gamma} = -\frac{4}{3} k k' \quad (5.101)$$

El resultado de este algoritmo para deformaciones finitas en anisotropía con endurecimiento mixto tiene una dimensión final de siete incógnitas, seis de la variable deformación elástica del tensor $\mathbf{E}_e$ y la séptima variable es el parámetro de consistencia plástica γ , y presenta la cualidad de no requerir variables plásticas adicionales para obtener la solución [131], [100].

5.4.1.3. Pos-procesado geométrico: actualización de variables

Una vez que el algoritmo local ha alcanzado la convergencia en las ecuaciones de la integración implícita de Euler, y se conoce el valor de las variables internas ${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{E}_e$ y ${}^{t+\Delta t}_0 \gamma$, ya es posible proceder a calcular el valor de las tensiones internas, ${}^{t+\Delta t} \mathbf{T}_{int}^{le}$, en la configuración intermedia ya actualizada en el tiempo algorítmico $t + \Delta t$ a través de la ec. (5.91). Esta tensión ha de ser llevada a la configuración de referencia con la correspondiente operación de tiro o *pull-back*, pero además, por razones algorítmicas es también adecuado llevar a cabo esta operación sobre las demás variables internas que se hallan en la configuración intermedia actualizada [76], para agilizar los cálculos posteriores.

La configuración intermedia ha permanecido constante o fija durante todas las iteraciones locales, y por ello se podrían interpretar también con una configuración de referencia *modificada*. Es por ello que estando ${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{E}$ en configuración de referencia, y ${}^{tr} \mathbf{E}_e$ en configuración intermedia trial, existe entre ambos tensores una relación biunívoca que permite el siguiente cambio en las variables independientes cuando se llama a la ec.(5.43)

$${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{E}_e({}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{E}, {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{X}_p) \rightarrow {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{E}_e({}^{tr} \mathbf{E}_e, {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{X}_p) \quad (5.102)$$

quedando el tensor elástico ${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{E}_e$ directamente en función del tensor *trial* ${}^{tr} \mathbf{E}_e$ como variable independiente *modificada*

En el mismo sentido de la afirmación anterior, ${}^{t+\Delta t} \mathbf{T}_{int}$ se obtiene como operación de pull-back sobre ${}^{t+\Delta t} \mathbf{T}_{int}^{|e|}$, que también se halla en configuración intermedia, y se puede definir el tensor de tensiones en configuración *trial* ${}^{t+\Delta t} \mathbf{T}_{int}^{|tr|}$ obtenido en operación de pull-back desde ${}^{t+\Delta t} \mathbf{T}_{int}^{|e|}$ de manera semejante a la ec. (5.60), es decir

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \mathbf{T}_{int}^{|tr|} &= \left. \frac{\partial \Psi_{int}({}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{E}_e)}{\partial {}^{tr} \mathbf{E}_e} \right|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} \\ &= \left. \frac{d \Psi_{int}(\mathbf{E}_e)}{d \mathbf{E}_e} \right|_{t+\Delta t} : \left. \frac{\partial {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{E}_e}{\partial {}^{tr} \mathbf{E}_e} \right|_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} \\ &\simeq {}^{t+\Delta t} \mathbf{T}_{int}^{|e|} : \mathbb{I}^S = {}^{t+\Delta t} \mathbf{T}_{int}^{|e|} \end{aligned} \quad (5.103)$$

donde el tensor proyector de cuarto orden resultante en derivadas parciales conduce a

$$\partial {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{E}_e / \partial {}^{tr} \mathbf{E}_e |_{\dot{\mathbf{X}}_p=0} \approx \mathbb{I}^S \quad (5.104)$$

La ec. (5.104) se cumple para pequeños incrementos de la variable actualizada $\Delta \gamma$, pero es exactamente el tensor proyector simétrico $\mathbb{I}^S$ en los casos de carga puramente axial, cuando no hay rotaciones de sólido rígido, gracias a las propiedades de coaxialidad de las deformaciones logarítmicas [75]. Por ello, aproximaciones de este tipo son usuales en el contexto de la elastoplasticidad anisótropa, como se puede ver en [21].

Por otro lado, conviene aclarar que el tensor de tensiones ${}^{t+\Delta t} \mathbf{T}_{int}^{|tr|}$ es numérica y conceptualmente diferente al tensor de tensiones ${}^{tr} \mathbf{T}_{int}^{|e|}$, ya que el primero es la tensión actualizada por el algoritmo de integración después de la convergencia final, mientras que el segundo es la tensión de inicio en las iteraciones locales, en la primera iteración (0) obtenida directamente en configuración *trial* con ${}^{tr} \mathbf{E}_e$, ver ec. (5.86). Además ambas tensiones se encuentran en configuraciones diferentes. actualizada el primero, e intermedia el segundo. El cálculo algorítmico, el tensor ${}^{t+\Delta t} \mathbf{T}_{int}^{|tr|}$ es un artificio de la computación para facilitar la obtención de la tensión incógnita, que es la tensión actualizada por el algoritmo integrador.

El siguiente paso es la obtención del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en la configuración *trial* actualizada, operación fácil de desarrollar con el cambio o mapeo que ejecuta el tensor geométrico de cuarto orden correspondiente, que se obtiene de $d {}^{tr} \mathbf{E}_e / d {}^{tr} \mathbf{A}_e$ [78], y que se aplica sobre el tensor de tensiones generalizadas de Kirchhoff en configuración *trial* actualizada. Este tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff es conjugado de trabajo de las deformaciones cuadráticas ($\mathbf{A}$)

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_{int}^{|tr|} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{T}_{int}^{|tr|} : \frac{d {}^{tr} \mathbf{E}_e}{d {}^{tr} \mathbf{A}_e} \quad (5.105)$$

y que ahora va a ser transformado a la configuración de referencia mediante un segundo tensor de cambio geométrico de cuarto orden, obtenido de $d {}^{tr} \mathbf{A}_e / d {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{A}$ [76]

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_{int} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_{int}^{|tr|} : \frac{d {}^{tr} \mathbf{A}_e}{d {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{A}} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_{int}^{|tr|} : {}^{tr} \mathbf{X}_p^{-T} \odot {}^{tr} \mathbf{X}_p^{-T} = {}^t_0 \mathbf{X}_p^{-1} \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_{int}^{|tr|} \cdot {}^t_0 \mathbf{X}_p^{-T} \quad (5.106)$$

donde ya tenemos el segundo tensor de Piola-Kirchhoff de tensiones *internas* en configuración lagrangiana, y que podemos exportar ya a la rutina global de elementos finitos para cada punto de integración, y que tomará parte de la matriz de rigidez geométrica de la formulación Total Lagrangian -ec. (3.95)-, común en los códigos de elementos finitos comerciales, y necesaria para continuar con los cálculos externos del modelo integrador elastoplástico.

De una forma más sencilla será posible obtener el segundo tensor de Piola-Kirchhoff de tensiones *kinematic* para la rama puramente elástica a partir del tensor de tensiones *kin* generalizadas de Kirchhoff

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}_{kin} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{T}_{kin} : \frac{d {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{E}}{d {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{A}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{T}_{kin} : {}^{tr}\mathbf{X}_p^{-T} \odot {}^{tr}\mathbf{X}_p^{-T} \quad (5.107)$$

Por otro lado cabe retomar el cálculo del gradiente plástico ${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{X}_p$, que aún permanece indeterminado, y que se va a obtener por una simple rotación ${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{R}_e$ de actualización en el instante $t + \Delta t$ [133], pero que ya no será utilizado hasta en el próximo paso incremental de carga, en el inicio de el predictor, donde será de nuevo ${}^t_0\mathbf{X}_p$. En primer lugar se obtiene la variable $\mathbf{X}_e$

$${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{X}_e = {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{R}_e \cdot {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{U}_e = {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{R}_e \cdot \exp({}^{t+\Delta t}_0\mathbf{E}_e) \quad (5.108)$$

asumiendo que el tensor de rotación elástica no cambia durante el flujo plástico, lo que permite utilizar la identidad ${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{R}_e = {}^{tr}\mathbf{R}_e$. Esta hipótesis es la misma que la realizada en [36], [21], salvo que en este modelo es una consecuencia de un tensor de flujo integrador simétrico, sin parte antisimétrica, y por tanto sin rotaciones adicionales de sólido rígido en la integración, esta suposición en tensores no simétricos no sería admisible y obligaría a hipótesis adicionales. La recuperación del gradiente plástico actualizado de esta manera será

$${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{X}_p = {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{X}_e^{-1} \cdot {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{X} \quad (5.109)$$

En este punto donde han sido obtenidas las tensiones que operan internamente en la plasticidad del material, resulta destacable que el uso de esta ley de evolución asociativa con un tensor rate de evolución simétrico de seis componentes, ha permitido integrar el algoritmo sin participación del spin plástico de evolución [86], [79], que es uno de los aspectos más destacados del presente modelo elastoplástico, y razón fundamental por la que conserva el mismo esquema que los modelos de la teoría infinitesimal en cuanto a simplicidad computacional.

Otra cualidad del modelo propuesto a este respecto, es que al trabajar en configuración intermedia sin presencia de giro plástico, se puede aceptar la idea de que la configuración intermedia está rotacionalmente congelada, lo que permite que la integración del tensor de flujo interno simétrico sea inmediata y que el algoritmo consistente de linealización resultante sea más sencillo en sus esquemas de cálculo. Continuando con esta discusión, si se quisiera añadir algún tipo de acomodo para considerar el spin plástico y la evolución de la textura del material [103], esto sería completamente posible en un paso posterior a la integración del flujo plástico, y por tanto al margen del algoritmo propuesto.

Integración del *spin* plástico

Tomando los tensores de rotación elástica ${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{R}_e$, ${}^{tr} \mathbf{R}_e$ y el giro plástico ${}^{t+\Delta t} \mathbf{w}_p = \text{skw}({}^{t+\Delta t} \mathbf{l}_p)$, con $\mathbf{l}_p = \dot{\mathbf{X}}_p \mathbf{X}_p^{-1}$ -ec. (2.60)- como gradiente plástico de velocidades en configuración intermedia, la relación que se establece entre estos tensores de giro se puede encontrar en la ecuación (28) de la referencia [103], según la cuál

$${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{R}_e \simeq {}^{tr} \mathbf{R}_e {}^{t+\Delta t}_t \mathbf{R}_w^T \quad (5.110)$$

donde ${}^{t+\Delta t}_t \mathbf{R}_w$ es la rotación plástica incremental de la ecuación (17) de la misma referencia

$${}^{t+\Delta t}_t \mathbf{R}_w = \exp(\Delta t {}^{t+\Delta t} \mathbf{w}_p) \quad (5.111)$$

Por tanto, la suposición de que ${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{R}_e = {}^{tr} \mathbf{R}_e$ viene a ser equivalente a la hipótesis aceptada en otros modelos de elastoplasticidad anisótropa computacional donde ${}^{t+\Delta t} \mathbf{w}_p = \mathbf{0}$, y en efecto ignorar de la participación del giro plástico en la configuración intermedia.

En todo caso, si un spin plástico $\mathbf{w}_p$ se prescribe adicionalmente en la ecuación de evolución, entonces se conoce ${}^{t+\Delta t}_t \mathbf{R}_w$ a través de la ec. (5.111), y entonces se considerará en la actualización del tensor gradiente de deformaciones plásticas ${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{X}_e$, pero siempre después de haber resuelto la integración del flujo plástico, lo que no modifica el algoritmo propuesto, lo que supone una importante virtud respecto de la conservación de los esquemas computacionales del algoritmo.

5.4.2. Flujo plástico isócoro

El comportamiento plástico en materiales cristalinos posee la característica de producirse a volumen constante en el material, de ser una plasticidad isócora, al mismo tiempo que es insensible a tensión hidrostática (o presión hidrostática), debido a una naturaleza tensional desviadora.

Si se utiliza un criterio de plasticidad insensible a la tensión hidrostática, entonces el potencial plástico tendrá la cualidad tensorial $\text{tr}(\nabla \phi_T) = \nabla \phi_T : \mathbf{I} = 0$, entonces el uso de la ec. (5.89) nos lleva a

$$\ln({}^{t+\Delta t}_0 J_e) = \text{tr}({}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{E}_e) = \text{tr}({}^{tr} \mathbf{E}_e) = \ln({}^{tr} J_e) \quad (5.112)$$

y en efecto ${}^{t+\Delta t}_0 J_e = {}^{tr} J_e$, donde $J_e := \det(\mathbf{X}_e)$. Usando las ecuaciones (5.84) y (5.109), inmediatamente se obtiene

$${}^{t+\Delta t}_0 J_p = \det({}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{X}_p) = \det({}_0^t \mathbf{X}_p) = {}_0^t J_p \quad (5.113)$$

ya que $\mathbf{X}_p$ es constante durante todo el intervalo de integración $t + \Delta t$, comprobándose como en el proceso de integración los jacobianos se conservan en la transformación cinemática, y por tanto el volumen plástico en el algoritmo de integración no cambia, por lo que se puede afirmar que el flujo plástico es isócoro.

5.4.3. El caso particular de isotropía

En el caso general de elastoplasticidad anisótropa, tanto en la parte elástica como la plástica, el gradiente del potencial plástico ${}^{t+\Delta t} \nabla \phi_T$ de la ec. (5.90) no conmuta

con las tensiones ${}^{t+\Delta t}\mathbf{T}_{int}^{|e}$ o con las deformaciones ${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{E}_e$, pues no poseen las mismas direcciones principales y por tanto los términos de la ec. (5.89) no son coaxiales, y la ec. (5.89) tiene efectivamente seis componentes dimensionales como caso general. Sigue cumpliéndose la simetría de las variables tensoriales, y por ello de las nueve componentes, solo seis son independientes entre sí.

En el caso particular de la elasticidad isótropa con respuesta plástica anisótropa, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{T}_{int}^{|e}$ y ${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{E}_e$ conmutan pues poseen las mismas direcciones principales, pero la presencia del tensor $\mathbb{N}_T$ en el tensor ${}^{t+\Delta t}\nabla\phi_T$ conlleva una rotación de las direcciones principales de tensión/deformación (desde la configuración *trial* a la *actualizada*) en la ec. (5.89), que sigue provocando un flujo plástico de seis componentes.

Para una respuesta elastoplástica completamente isótropa, todos los términos de la ec. (5.89) conmutan, y por eso la operación de integración o del retorno radial tiene lugar en una configuración fija respecto de las direcciones principales, y no cambiando su orientación en la configuración *trial*. Este es el lugar donde se recupera la actualización aditiva con deformaciones logarítmicas en direcciones principales de la conocida referencia de Simó [134], trabajo desarrollado enteramente para el caso de isotropía elástica y plástica, en direcciones principales coaxiales, si bien en este caso la formulación propuesta por Simó consideraba el uso de variables internas adicionales de tensión-deformación para tratar el problema del endurecimiento plástico.

5.4.4. Módulo tangente elastoplástico algorítmico consistente

En esta sección se determina el módulo tangente elastoplástico que opera en el algoritmo de cálculo, y que relaciona de forma consistente la teoría incremental de linealización del medio continuo y el procedimiento de integración plástica de la ley de evolución. El objetivo fundamental es preservar la convergencia cuadrática que caracteriza al método de linealización de Newton-Raphson, y que sirve para verificar cualitativamente la bondad del algoritmo no lineal del problema elastoplástico [62], [132], [96]. Este módulo tangente es la contraparte algorítmica del módulo tangente continuo $\mathbb{A}_{ep}^{|e}$ obtenido en la ec. (5.78), módulo que quedaba definido en la configuración intermedia, ya actualizada tras resolver las variables internas del problema. En cambio, el módulo algorítmico exige ser calculado numéricamente en cada iteración local $t + \Delta t$, ya que cambia numéricamente según evolucionan las variables internas del problema elastoplástico, y según se suceden los pasos de carga de las iteraciones globales.

El punto fundamental que determina el cálculo de este módulo tangente, se encuentra en el paso corrector del algoritmo, por tanto en la configuración intermedia o de *trial*, y que como ya hemos visto anteriormente permanece fija durante la integración de la ley de evolución. Para el cálculo de este módulo consistente se parte de la configuración *trial*, cuya definición matemática como módulo tangente lleva a

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\mathbb{A}_{ep}^{|tr} &: = \frac{d {}^{t+\Delta t}\mathbf{T}_{int}^{|tr}}{d {}^{tr}\mathbf{E}_e} \simeq \frac{d {}^{t+\Delta t}\mathbf{T}_{int}^{|e}}{d {}^{tr}\mathbf{E}_e} = \\ &= \left. \frac{d \mathbf{T}_{int}^{|e}(\mathbf{E}_e)}{d \mathbf{E}_e} \right|_{t+\Delta t} : \frac{d {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{E}_e}{d {}^{tr}\mathbf{E}_e} = {}^{t+\Delta t}\mathbb{A}_{int}^{|e} : \frac{d {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{E}_e}{d {}^{tr}\mathbf{E}_e} \end{aligned} \quad (5.114)$$

este módulo se puede interpretar como una linealización de la ecuación (5.103), que ha de ser consistente con las variables de integración de la ecuación de flujo plástico en

el retorno radial, por lo que es necesario utilizar las ecuaciones residuales generadas en la resolución del sistema de ecuaciones no lineales que aparecen en la integración implícita y el condición de consistencia plástica.

En este planteamiento algorítmico, por otro lado, se puede observar como en las ecuaciones (5.103) y (5.114) aparecen dos términos tensoriales de cuarto orden que pudieran parecer semejantes: $\partial^{t+\Delta t}_0 \mathbf{E}_e / \partial^{tr} \mathbf{E}_e |_{\dot{\mathbf{X}}_p=0}$ y $d^{t+\Delta t}_0 \mathbf{E}_e / d^{tr} \mathbf{E}_e$, pero que no lo son. El primero de ellos $-\partial^{t+\Delta t}_0 \mathbf{E}_e / \partial^{tr} \mathbf{E}_e |_{\dot{\mathbf{X}}_p=0}$ expresa en derivadas parciales la relación del tensor de deformaciones elásticas en sus configuraciones anterior y posterior a la actualización de variables, considerando el rate plástico congelado ${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{X}}_p = \mathbf{0}$, que como ya se mencionó converge hacia un tensor proyector simétrico de cuarto orden $\mathbb{I}^S$, y que se puede interpretar mediante la teoría continua como un término equivalente a situarnos en el límite infinitesimal cuando $\Delta\gamma \rightarrow 0$ (en la práctica no habría plastificación aún).

En cambio, el segundo término ($d^{t+\Delta t}_0 \mathbf{E}_e / d^{tr} \mathbf{E}_e$) es un tensor obtenido por diferenciación total que opera todo el intervalo $t + \Delta t$, y por tanto acepta ya la existencia de un flujo plástico finito en evolución, es decir que ${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{X}}_p \neq \mathbf{0}$; si se toma como referencia la teoría continua, este tensor debe converger hacia el tensor de cuarto orden de la ecuación (5.77) como se mostrará a continuación, y será usado para computar las derivadas de la tensión durante el flujo plástico, cuando se incluya la contribución de la corrección plástica sobre el mecanismo de retorno radial.

El tensor de cuarto orden para los incrementos finitos del algoritmo, $d^{t+\Delta t}_0 \mathbf{E}_e / d^{tr} \mathbf{E}_e$, debe obtenerse del mecanismo de integración implícito del flujo plástico descrito anteriormente. El primer residuo aparece en la ecuación (5.92) y conduce a la siguiente ecuación residual de naturaleza tensorial de cuarto orden

$$\mathbb{O} = \frac{d^{t+\Delta t} \boldsymbol{\rho}_e}{d^{tr} \mathbf{E}_e} \quad (5.115)$$

dado que el residuo tensorial ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\rho}_e = \mathbf{0}$ se ha de cumplir en las iteraciones globales del MEF, al final de cada paso $t + \Delta t$, se llega a

$$\mathbb{O} = \frac{\partial^{t+\Delta t} \boldsymbol{\rho}_e}{\partial^{t+\Delta t}_0 \mathbf{E}_e} : \frac{d^{t+\Delta t}_0 \mathbf{E}_e}{d^{tr} \mathbf{E}_e} + {}^{t+\Delta t} \nabla \phi_T \otimes \frac{d\Gamma}{d^{tr} \mathbf{E}_e} - \mathbb{I}^S \quad (5.116)$$

donde se aplica el cambio de variable $\Gamma(\gamma) := \frac{3}{2} \Delta\gamma / k(\gamma)$, por claridad en la ecuación. Despejando el término tensorial deseado se obtiene

$$\frac{d^{t+\Delta t}_0 \mathbf{E}_e}{d^{tr} \mathbf{E}_e} = {}^{t+\Delta t} \mathbb{K}^{-1} : \left(\mathbb{I}^S - {}^{t+\Delta t} \nabla \phi_T \otimes \frac{d^{t+\Delta t} \Gamma}{d^{tr} \mathbf{E}_e} \right) \quad (5.117)$$

donde aparece el tensor de cuarto orden

$${}^{t+\Delta t} \mathbb{K} := \frac{\partial^{t+\Delta t} \boldsymbol{\rho}_e}{\partial^{t+\Delta t}_0 \mathbf{E}_e} = \left(\mathbb{I}^S + \frac{\Delta\gamma}{\frac{2}{3} {}^{t+\Delta t} k} {}^{t+\Delta t} \nabla \nabla \phi_T : \frac{d^{t+\Delta t} \mathbf{T}_{int}^e}{d^{t+\Delta t}_0 \mathbf{E}_e} \right) \quad (5.118)$$

que se resuelve desde la ecuación (5.98), una vez que se alcanza la convergencia al final de cada iteración $t + \Delta t$. El tensor $\mathbb{K}$ es equivalente al tensor de cuarto orden $\partial^{t+\Delta t} \boldsymbol{\rho}_e / \partial^{t+\Delta t}_0 \mathbf{E}_e$ de la ecuación del residuo $\mathbb{O}$, y permite llegar a la expresión

$${}^{t+\Delta t} \mathbb{D} := {}^{t+\Delta t} \mathbb{A}_{int}^e : {}^{t+\Delta t} \mathbb{K}^{-1} \quad (5.119)$$

donde ${}^{t+\Delta t}\mathbb{D}$ es el tensor elástico algorítmico de cuarto orden. Se puede interpretar ${}^{t+\Delta t}\mathbb{K}$ como un tensor proyector simétrico algorítmico de carácter elástico (ver las variables elásticas implicadas en la ec. (5.118)), de manera que cuando $\Delta\gamma \rightarrow 0$ se comporta como un tensor proyector simétrico puro: ${}^{t+\Delta t}\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{I}^S$. El tensor de cuarto orden $\mathbb{D}$ posee simetría mayores, como lo tiene $\mathbb{C}$, ya que ambos operan sobre semejantes magnitudes.

Queda por resolver el término $d^{t+\Delta t}\Gamma/d^{tr}\mathbf{E}_e$, para lo que se hace uso de la segunda ecuación residual que proviene de la condición de de plastificación, ${}^{t+\Delta t}f_T = 0$, ecuación (5.93), y que debe cumplirse en todas las iteraciones globales, de manera que

$$\mathbf{0} = \frac{1}{2} \frac{d^{t+\Delta t}f_T}{d^{tr}\mathbf{E}_e} = {}^{t+\Delta t}\nabla\phi_T : \frac{d^{t+\Delta t}\mathbf{T}_{int}^{|e}}{d^{t+\Delta t}\mathbf{E}_e} : \frac{d^{t+\Delta t}\mathbf{E}_e}{d^{tr}\mathbf{E}_e} - \frac{2}{3}kk' \frac{d\Delta\gamma}{d^{tr}\mathbf{E}_e} \quad (5.120)$$

con lo que usando la ecuación. (5.117)

$$\mathbf{0} = {}^{t+\Delta t}\nabla\phi_T : {}^{t+\Delta t}\mathbb{D} - ({}^{t+\Delta t}\nabla\phi_T : {}^{t+\Delta t}\mathbb{D} : {}^{t+\Delta t}\nabla\phi_T) \frac{d^{t+\Delta t}\Gamma}{d^{tr}\mathbf{E}_e} - \frac{4}{3} \frac{k^2k'}{3-2\Gamma k'} \frac{d^{t+\Delta t}\Gamma}{d^{tr}\mathbf{E}_e}$$

de esta manera se puede resolver que

$$\frac{d^{t+\Delta t}\Gamma}{d^{tr}\mathbf{E}_e} = \frac{{}^{t+\Delta t}\mathbb{D} : {}^{t+\Delta t}\nabla\phi_T}{{}^{t+\Delta t}\nabla\phi_T : {}^{t+\Delta t}\mathbb{D} : {}^{t+\Delta t}\nabla\phi_T + \frac{4}{3} \frac{k^2k'}{3-2\Gamma k'}} \quad (5.121)$$

y así la ecuación (5.117) se reescribe como

$$\frac{d^{t+\Delta t}\mathbf{E}_e}{d^{tr}\mathbf{E}_e} = {}^{t+\Delta t}\mathbb{K}^{-1} : \left[\mathbb{I}^S - \frac{{}^{t+\Delta t}\nabla\phi_T \otimes ({}^{t+\Delta t}\mathbb{D} : {}^{t+\Delta t}\nabla\phi_T)}{{}^{t+\Delta t}\nabla\phi_T : {}^{t+\Delta t}\mathbb{D} : {}^{t+\Delta t}\nabla\phi_T + \frac{4}{3} \frac{k^2k'}{3-2\Gamma k'}} \right] \quad (5.122)$$

y que efectivamente permite la comparación con el tensor de cuarto orden presente en la ecuación.(5.77) de la teoría continua, en el límite cuando $\Gamma \rightarrow 0$, osea cuando $\Delta\gamma \rightarrow 0$. Finalmente la introducción de esta expresión en la ecuación (5.114) lleva a

$${}^{t+\Delta t}\mathbb{A}_{ep}^{|tr} = \frac{d^{t+\Delta t}\mathbf{T}_{int}^{|tr}}{d^{tr}\mathbf{E}_e} = {}^{t+\Delta t}\mathbb{D} - \frac{({}^{t+\Delta t}\mathbb{D} : {}^{t+\Delta t}\nabla\phi_T) \otimes ({}^{t+\Delta t}\mathbb{D} : {}^{t+\Delta t}\nabla\phi_T)}{{}^{t+\Delta t}\nabla\phi_T : {}^{t+\Delta t}\mathbb{D} : {}^{t+\Delta t}\nabla\phi_T + \frac{4}{3} \frac{k^2k'}{3-2\Gamma k'}} \quad (5.123)$$

y que representa el módulo elastoplástico tangente algorítmico y consistente, equivalente al módulo elastoplástico continuo $\mathbb{A}_{ep}^{|e}$ dado en la ecuación (5.79), y donde se sustituye el módulo hiperelástico *continuo* $\mathbb{A}_{int}^{|e}$ por el módulo elástico *algorítmico* ${}^{t+\Delta t}\mathbb{D}$, y que verifica que $\Gamma = 0$. Al mismo tiempo se entiende la aproximación entre ambos módulos elásticos en el límite continuo-algorítmico.

La expresión de la ecuación (5.123) adopta una forma análoga a la obtenida por modelo elastoplástico inifinitesimal clásico de Simó [131]. Es fácilmente observable como el módulo elastoplástico algorítmico tangente ${}^{t+\Delta t}\mathbb{A}_{ep}^{|tr}$ es completamente simétrico de acuerdo a la naturaleza asociativa de la ley de evolución elastoplástica adoptada, y es compatible con el principio de máxima disipación plástica, siguiendo los predicamentos del modelo infitesimal clásico.

Ahora que está descrito el módulo elastoplástico algorítmico en configuración intermedia para deformaciones logarítmicas y tensiones generalizadas de Kirchhoff,

es posible su conversión a las medidas de tensión y deformación que son habituales en los códigos de elementos finitos. La conversión a la configuración de cálculo *Total Lagrangian* (*TL*) habitual en la mayoría de los códigos, se puede mapear a su descripción habitual utilizando las herramientas descritas en la referencia [76], con el uso de tensores de cambio de configuración. Así por ejemplo, se obtiene la expresión del módulo elastoplástico algorítmico para deformaciones cuadráticas de Green Lagrange y tensiones segundas de Piola-Kirchhoff en configuración material

$${}^{t+\Delta t}\mathbb{A}_{ep}^{|tr} = \frac{d^{t+\Delta t}\mathbf{T}_{int}^{|tr}}{d^{tr}\mathbf{E}_e} \Rightarrow {}^{t+\Delta t}\mathbb{C}_{ep}^{|tr} = \frac{d^{t+\Delta t}\mathbf{S}_{int}^{|tr}}{d^{tr}\mathbf{A}_e} \Rightarrow {}^{t+\Delta t}\mathbb{C}_{ep} = \frac{d^{t+\Delta t}\mathbf{S}_{int}}{d^{t+\Delta t}_0\mathbf{A}} \quad (5.124)$$

este operación de cambio entre las configuraciones de tensión y deformación se aprovecha del hecho de que la configuración intermedia permanece fija durante las iteraciones globales externas en el paso $t + \Delta t$, por lo que la operación de tiro o *pullback* sobre ${}^{t+\Delta t}\mathbb{C}_{ep}^{|tr}$, desde configuración intermedia para obtener ${}^{t+\Delta t}\mathbb{C}_{ep}$ en configuración material, resulta particularmente sencilla y eficaz desde un punto de vista computacional -ec. (102) en la Ref. [76]-.

El algoritmo numérico de actualización sobre la tensión y el módulo tangente consistente se presentan de forma resumida en el diagrama de flujo de las tablas 5.2 y 5.3. Estas variables son suministradas al código de elementos finitos para la resolución del problema de contorno global (figura 3.20).

Tabla 5.2: Algoritmo de integración implícita de tensiones.

Conocidas las variables tX_p , ${}^{t+\Delta t}{}_0X$ y ${}^t{}_0\gamma$:
1. Deformación elástica logarítmica del estado trial ${}^{tr}E_e = \frac{1}{2} \ln({}^{tr}X_e^T \cdot {}^{tr}X_e)$ con ${}^{tr}X_e = {}^{t+\Delta t}{}_0X \cdot {}^tX_p^{-1}$
2. Tensión asociada de trial en la configuración intermedia ${}^{tr}T_{int}^{le} := \frac{d\Psi_{int}(E_e)}{dE_e} \Big _{tr}$ (fija en $t + \Delta t$)
3. Consistencia: en el caso ${}^{tr}f_T = {}^{tr}T_{int}^{le} : N_T : {}^{tr}T_{int}^{le} - \frac{2}{3} {}^{tr}k^2 > 0$, operar la corrección plástica:
$\text{Solución no lineal iterativa } \left\{ \begin{array}{l} {}^{t+\Delta t}\rho_e = {}^{t+\Delta t}{}_0E_e + \frac{{}^{t+\Delta t}\gamma - \frac{t}{0}\gamma}{\frac{2}{3} {}^{t+\Delta t}k} N_T : {}^{t+\Delta t}T_{int}^{le} - {}^{tr}E_e = 0 \\ {}^{t+\Delta t}f_T = {}^{t+\Delta t}T_{int}^{le} : N_T : {}^{t+\Delta t}T_{int}^{le} - \frac{2}{3} {}^{t+\Delta t}k^2 = 0 \end{array} \right\}$
con ${}^{t+\Delta t}k = k({}^{t+\Delta t}{}_0\gamma)$ y los valores iniciales ${}^{t+\Delta t}{}_0E_e^{(0)} = {}^{tr}E_e$ y ${}^{t+\Delta t}{}_0\gamma^{(0)} = {}^t\gamma$.
4. Tensión interna en configuración intermedia fija: ${}^{t+\Delta t}T_{int}^{tr} \simeq {}^{t+\Delta t}T_{int}^{le} = \frac{d\Psi_{int}(E_e)}{dE_e} \Big _{t+\Delta t}$
5. Proyección de la tensión ${}^{t+\Delta t}T_{int}^{tr}$ hacia el segundo tensor de Piola-Kirchhoff: ${}^{t+\Delta t}S_{int}^{tr} = {}^{t+\Delta t}T_{int}^{tr} : \frac{d{}^{tr}E_e}{d{}^{tr}A_e}$
6. Proyección de tiro de ${}^{t+\Delta t}S_{int}^{tr}$ hacia configuración de referencia: ${}^{t+\Delta t}S_{int} = {}^tX_p^{-1} \cdot {}^{t+\Delta t}S_{int}^{tr} \cdot {}^tX_p^{-T}$
7. Durante la fase de iteraciones locales, computar el módulo tangente elastoplástico ${}^{t+\Delta t}C_{ep}$, -ver Tabla 5.3
8. Durante la fase de convergencia, actualizar la variable interna ${}^{t+\Delta t}{}_0X_e = {}^{tr}R_e \cdot \exp({}^{t+\Delta t}{}_0E_e)$
Nota: Estas ecuaciones implican ${}^{t+\Delta t}w_p = 0$, el giro plástico posee una evolución desacoplada.

Tabla 5.3: Módulo tangente elastoplástico consistente algorítmicamente.

Conocidas las variables internas ${}^{t+\Delta t}_0 E_e$ y ${}^{t+\Delta t}_0 \gamma$:	
1. Módulo tangente hipereelástico en configuración actualizada	${}^{t+\Delta t} A_{int}^e = \left. \frac{d\mathcal{T}_{int}^e(E_e)}{dE_e} \right _{t+\Delta t}$
2. Módulo tangente elastoplástico consistente logarítmico en configuración <i>trail</i> (corrección plástica)	${}^{t+\Delta t} A_{ep}^{[tr]} = \frac{d^{t+\Delta t} \mathcal{T}_{int}^{[tr]}}{d^{tr} E_e} = {}^{t+\Delta t} D - \frac{({}^{t+\Delta t} D : {}^{t+\Delta t} \nabla \phi_T) \otimes ({}^{t+\Delta t} D : {}^{t+\Delta t} \nabla \phi_T)}{{}^{t+\Delta t} \nabla \phi_T : {}^{t+\Delta t} D : {}^{t+\Delta t} \nabla \phi_T + \frac{4}{3} \frac{k^2 k'}{3-2\Gamma k'}}$ <p>con ${}^{t+\Delta t} D := {}^{t+\Delta t} A_{int}^e : {}^{t+\Delta t} K^{-1}$ y ${}^{t+\Delta t} K := \frac{\partial {}^{t+\Delta t} \rho_e}{\partial {}^{t+\Delta t}_0 E_e}$ (obtenidos de las iteraciones locales)</p>
3. Proyección ${}^{t+\Delta t} A_{ep}^{[tr]} = \frac{d^{t+\Delta t} \mathcal{T}_{int}^{[tr]}}{d^{tr} E_e}$ hacia medida cuadrática	
${}^{t+\Delta t} C_{ep}^{[tr]} = \frac{d^{t+\Delta t} \mathcal{S}_{int}^{[tr]}}{d^{tr} A_e}$ (Ref. [76])	
4. Proyección de tiro ${}^{t+\Delta t} C_{ep}^{[tr]}$ hacia configuración de referencia	${}^{t+\Delta t} C_{ep} = {}^t X_p^{-1} \odot {}^t X_p^{-1} : {}^{t+\Delta t} C_{ep}^{[tr]} : {}^t X_p^{-T} \odot {}^t X_p^{-T}$

Capítulo 6

Determinación de los parámetros de material

En este capítulo expone como determinar los parámetros de material que permitan el ajuste del comportamiento elastoplástico en deformaciones finitas en el modelo expuesto en capítulos anteriores. Se utiliza para ello ensayos convencionales llevados a cabo sobre máquinas universales de ensayos, con el objetivo de ser ensayos estándares. Se consideraran algunos de los casos más comunes de materiales isótropos, y también otros más específicos de materiales anisótropos, tanto en el comportamiento elástico como en el plástico.

Los parámetros elastoplásticos del material serán identificados a partir de ensayos mecánicos convencionales, de tracción, compresión o cortadura, y se hará hincapié sobre el número de datos experimentales que son necesarios para determinar todos los parámetros requeridos por el modelo. Igualmente se harán las consideraciones oportunas que permitan, con la interpretación de esos datos, determinar la función de energía hiperelástica de cada caso con el objeto de poder calcular las tensiones en la medida de las deformaciones finitas logarítmicas.

6.1. Aplicación de un material compresible e isótropo con comportamiento elastoplástico en términos de $\bar{\tau}$ y E

Como primer ejemplo de aplicación, se considera el uso de un material isótropo y compresible a partir de un ensayo de tracción uniaxial con plastificación, llevado a cabo en máquina universal de ensayos, y considerando además los efectos asociados a una descarga elástica para caracterizar adecuadamente el comportamiento elastoplástico.

Este planteamiento es igual de válido para un material anisótropo con simetrías y ensayado en las direcciones principales o preferentes de material, sin más que particularizar la dirección pretendida para determinar sus parámetros característicos.

Aplicando el modelo descrito en capítulos anteriores se obtienen las siguientes relaciones tensión-deformación en términos de la deformación logarítmica E y la tensión unidimensional generaliza de Kirchhoff τ , como su tensión conjugada de trabajo (expresada en letra minúscula cuando se refiere a una de las componentes del tensor).

Figura 6.1: Representación de un ensayo uniaxial de carga-descarga para un material isótropo elastoplástico lineal, en términos de τ y $\mathbf{E}$. Caso particular de endurecimiento combinado isótropo-cinemático, con los parámetros internos $k' > 0$ y $2\mu_{kin} > 0$.

De un ensayo de tracción en carga-descarga uniaxial llevado a cabo en la dirección 1 del material, se obtienen los siguientes parámetros recogidos en la gráfica de comportamiento representado en la figura 6.1.

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \Delta\tau_1 = Y_e \Delta E_1 = Y_e E_1 \\ E_2 &= \Delta E_2 = -\nu_e \Delta E_1 = -\nu_e E_1 \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq \tau \leq \tau_{yt} \quad \text{carga elástica} \quad (6.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta\tau_1 &= Y_{ep} \Delta E_1 \\ \Delta E_2 &= -\nu_{ep} \Delta E_1 \end{aligned} \right\} \quad \tau_{yt} \leq \tau \leq \tau_{ur} \quad \text{carga elastoplástica} \quad (6.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta\tau_1 &= Y_e \Delta E_1 \\ \Delta E_2 &= -\nu_e \Delta E_1 \end{aligned} \right\} \quad \tau_{yc} \leq \tau \leq \tau_{ur} \quad \text{descarga elástica} \quad (6.3)$$

donde τ_1 , E_1 y E_2 se refieren a la medida de tensión y de deformación descritas.

La respuesta elástica de carga está gobernada por el módulo de elasticidad de Young, Y_e (se emplea el símbolo Y con el objeto de evitar confusiones con la deformación logarítmica de símbolo E), y por el módulo de Poisson ν_e , donde el subíndice $(\cdot)_e$ en ambos casos se refiere a la propiedad elástica macroscópica del material. La respuesta elastoplástica tiene lugar cuando se alcanza el límite de fluencia plástica, o *tensile yield stress*, $\tau_1 = \tau_{yt} > 0$, y se caracteriza por exhibir un módulo elastoplástico Y_{ep} y un módulo de Poisson axil-transversal ν_{ep} , donde el subíndice $(\cdot)_{ep}$ se refiere a la propiedad elastoplástica macroscópica del material, en ambos casos también.

La respuesta elástica en descarga aparece ahora comprendida en el intervalo entre la tensión máxima alcanzada τ_{ur} y la tensión de plastificación en compresión, $\tau_1 = \tau_{yc} < 0$,

que ahora es ya dependiente del camino de carga anterior, y el comportamiento ya es *path dependent*, por tanto ya se evidencian los efectos del endurecimiento del material.

Este comportamiento elastoplástico del modelo se plantea para materiales con una plasticidad perfectamente isócara sin cambios de volumen, t solo hay cambios de volumen en el comportamiento elástico. De acuerdo a esta premisa, usamos la descomposición de Flory sobre el gradiente de deformaciones de manera que

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^v \mathbf{X}^d = (J^{1/3} \mathbf{I}) (J^{-1/3} \mathbf{X}) \quad (6.4)$$

donde $J = \det \mathbf{X}$ es el cambio relativo de volumen de la deformación del sólido, expresado a través del jacobiano del tensor gradiente de deformación, y donde los superíndices $(\cdot)^d$ y $(\cdot)^v$ representan la parte desviadora y la parte volumétrica de la deformación asociada a la variable tensorial correspondiente $(\cdot)$. Posteriormente se aplica la descomposición multiplicativa de Lee sobre la parte desviadora

$$\mathbf{X}^d = \mathbf{X}_e^d \mathbf{X}_p^d \equiv \mathbf{X}_e \mathbf{X}_p \quad (6.5)$$

$$\mathbf{X}^v \equiv \mathbf{X}_e^v \quad (6.6)$$

no siendo necesario aplicarla sobre la parte volumétrica o esférica por ser de carácter completamente elástico, lo que hace innecesaria la descomposición.

Esta descomposición se traslada también a la energía libre hiperelástica almacenada en el sólido Ψ , obteniendo su parte volumétrica $\mathcal{U}$ y su parte desviadora $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{kin} + \mathcal{W}_{int}$, esta última ya influenciada por los efectos elastoplásticos a través de la presencia explícita de $\mathcal{W}_{kin}$. Considerando la intervención de las variables de deformación en los términos hidrostático y desviador, se obtiene la expresión energética

$$\Psi(\mathbf{E}, \mathbf{E}_e) = \mathcal{U}(\mathbf{E}^v) + \mathcal{W}(\mathbf{E}^d, \mathbf{E}_e^d) = \mathcal{U}(\mathbf{E}^v) + \mathcal{W}_{kin}(\mathbf{E}^d) + \mathcal{W}_{int}(\mathbf{E}_e^d) \quad (6.7)$$

Este planteamiento sobre la energía libre ya ha sido llevado a cabo con éxito en la resolución del problema viscoelástico [76], y ha demostrado sus virtudes para interpretar los resultados experimentales del sólido en un comportamiento de naturaleza constitutiva no lineal.

Por la condición de isotropía del material, sabemos que la tensión generalizada de Kirchhoff $\mathbf{T}$, coincide en direcciones principales con la tensión rotada de Kirchhoff $\bar{\boldsymbol{\tau}}$, son coaxiales, por lo que no se requiere de ningún cálculo adicional para pasar de la una a la otra, ya que se cumple la identidad de las medidas conjugadas de trabajo descritas en términos de tensión-deformación $\{\bar{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{E}\} \equiv \{\mathbf{T}, \mathbf{E}\}$ [78]. Utilizando una descripción cuadrática en términos de deformación elástica, y considerando las expresiones de la energía hiperelástica previamente referidas se obtiene

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{E}, \mathbf{E}_e) &= \frac{1}{2} \kappa (\text{tr } \mathbf{E}^v)^2 + \mu_{kin} \|\mathbf{E}^d\|^2 + \mu_{int} \|\mathbf{E}_e^d\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \kappa (\ln J)^2 + \mu_{kin} \mathbf{E}^d : \mathbf{E}^d + \mu_{int} \mathbf{E}_e^d : \mathbf{E}_e^d \end{aligned} \quad (6.8)$$

donde κ es el módulo hidrostático (más conocido como *bulk modulus*), y μ_{kin} y μ_{int} son los módulos elásticos de rigidez en medida desviadora (conocidos también como segunda constante de Lamé), siendo todos ellos propiedades características del material.

De acuerdo a la definición termodinámica de la tensión hiperelástica, ésta se ha de obtener derivando directamente la ec. (6.8) y teniendo en cuenta la ec. (4.72). Dada la

necesidad de emplear la parte puramente desviadora separada de la parte hidrostática, se ha de manejar la siguiente formulación para obtener ambas identidades, y se obtiene la componente hidrostática de tensión

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^v = \mathbf{T}^v = \frac{d\mathcal{U}(\mathbf{E}^v)}{d\mathbf{E}} = \frac{d\mathcal{U}(\mathbf{E}^v)}{d\mathbf{E}^v} \frac{d\mathbf{E}^v}{d\mathbf{E}} = \kappa \ln J \mathbf{I} \quad (6.9)$$

donde aparece el tensor identidad de segundo orden $\mathbf{I} = d(\ln J)/d\mathbf{E}$. Mientras, para obtener la parte desviadora, se opera de forma semejante

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^d = \frac{d\mathcal{W}_{kin}(\mathbf{E}^d)}{d\mathbf{E}} + \frac{d\mathcal{W}_{int}(\mathbf{E}_e^d)}{d\mathbf{E}_e} = \frac{d\mathcal{W}_{kin}(\mathbf{E}^d)}{d\mathbf{E}^d} \frac{d\mathbf{E}^d}{d\mathbf{E}} + \frac{d\mathcal{W}_{int}(\mathbf{E}_e^d)}{d\mathbf{E}_e^d} \frac{d\mathbf{E}_e^d}{d\mathbf{E}_e} \frac{d\mathbf{E}_e}{d\mathbf{E}} \quad (6.10)$$

y donde reaparecen los tensores proyectores de cuarto orden: el proyector simétrico $\mathbb{I}^S$, y el proyector desviador simétrico $\mathbb{P}^S$, resultando

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^d = 2\mu_{kin}\mathbf{E}^d : \mathbb{P}^S + 2\mu_{int}\mathbf{E}_e^d : \mathbb{P}^S : \mathbb{I}^S \quad (6.11)$$

Para llegar a este resultado se ha tenido que tener en cuenta que el proyector desviador de cuarto orden aparece también asociado a

$$\frac{d\mathbf{E}_e^d}{d\mathbf{E}_e} = \frac{d\mathbf{E}^d}{d\mathbf{E}} = \mathbb{P}^S$$

ya que el tensor gradiente de cuarto orden resultante de la expresión $\partial\mathbf{E}_e/\partial\mathbf{E}|_{\dot{\mathbf{x}}_p=0}$, en el caso de una tracción uniaxial y sin rotaciones por movimiento de sólido rígido, se puede particularizar como si fuera un tensor proyector simétrico de cuarto orden ($\mathbb{I}^S$), pues la descomposición aditiva logarítmica $\mathbf{E}^d = \mathbf{E}_p^d + \mathbf{E}_e^d$ se cumple de forma exacta y admite esta operación [79], lo que lleva a la identidad

$$\left. \frac{\partial\mathbf{E}_e}{\partial\mathbf{E}} \right|_{\dot{\mathbf{x}}_p=0} = \left. \frac{\partial\mathbf{E}_e^d}{\partial\mathbf{E}^d} \right|_{\dot{\mathbf{x}}_p=0} = \left. \frac{\partial(\mathbf{E}^d - \mathbf{E}_p^d)}{\partial\mathbf{E}^d} \right|_{\dot{\mathbf{x}}_p=0} = \frac{d\mathbf{E}^d}{d\mathbf{E}^d} = \mathbb{I}^S \quad (6.12)$$

dado que los cambios de volumen, recogidos en la separación $\mathbf{E} = \mathbf{E}^v + \mathbf{E}^d$, no afectan a la identidad descrita sobre la variable interna elástica $\mathbf{E}_e^d \equiv \mathbf{E}_e$.

Con todo ello, la tensión total hiperelástica queda expresada en la forma

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \kappa \ln J \mathbf{I} + 2\mu_{kin}\mathbf{E}^d + 2\mu_{int}\mathbf{E}_e^d \quad (6.13)$$

$$= \bar{\boldsymbol{\tau}}^v + \bar{\boldsymbol{\tau}}_{kin}^d + \bar{\boldsymbol{\tau}}_{int}^d \quad (6.14)$$

Otra visión paralela a este planteamiento, es que las direcciones principales de tensión y de deformación de un caso uniaxial coinciden debido a la isotropía del material y preservándose la ya mencionada irrotacionalidad, algo que no ocurrirá en anisotropía. De esta manera es posible que $\boldsymbol{\tau} = \bar{\boldsymbol{\tau}}$, osea que la tensión de Kirchhoff sea igual a su rotada (en este caso).

Trasladando la visión de este caso uniaxial de cara a un planteamiento linealizado del problema, la tensión desde un punto de vista incremental se expresaría como un tensor de tensiones de Kirchhoff en direcciones principales según la forma

$$\Delta\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta\tau_1 \quad (6.15)$$

lo que a su vez dará las componentes desviadora y volumétrica en la forma

$$\Delta \boldsymbol{\tau}^d = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Delta \tau_1 \quad \text{y} \quad \Delta \boldsymbol{\tau}^v = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta \tau_1 \quad (6.16)$$

donde el escalar de tensión $\Delta \tau_1 = Y_{\#} \Delta E_1$. La utilización del subíndice $(\cdot)_{\#}$ es un comodín válido para los casos elástico $(\cdot)_e$ y elastoplástico $(\cdot)_{ep}$ según corresponda.

Por otro lado, el tensor de deformaciones incrementales logarítmicas con tensión uniaxial, tendría la forma

$$\Delta \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_{\#} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_{\#} \end{bmatrix} \Delta E_1 \quad (6.17)$$

donde ΔE_1 es la deformación en dirección axial principal, y sus componentes esférica y desviadora serían

$$\Delta \mathbf{E}^d = \frac{(1 + \nu_{\#})}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Delta E_1 \quad \text{y} \quad \Delta \mathbf{E}^v = \frac{(1 - 2\nu_{\#})}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta E_1 \quad (6.18)$$

por tanto, la componente axial principal (eje 1, subíndice 11) de la ec. (6.13), daría lugar a la siguiente expresión escalar en forma incremental para las componentes desviadora y volumétrica

$$\Delta \tau_1^d = \frac{2}{3} \Delta \tau_1 = \frac{2}{3} Y_{\#} \Delta E_1 = 2\mu_{kin} \Delta E_1^d + 2\mu_{int} \Delta E_{e1}^d \quad (6.19)$$

$$\Delta \tau_1^v = \frac{1}{3} \Delta \tau_1 = \frac{1}{3} Y_{\#} \Delta E_1 = \kappa \Delta \ln J = \kappa (1 - 2\nu_{\#}) \Delta E_1 \quad (6.20)$$

poniendo en evidencia como las componentes de tensiones volumétrica y desviadora están desacopladas entre si (para este caso).

Utilizando primeramente la ec. (6.20) se encuentra el módulo hidrostático o *bulk modulus* "logarítmico" del material (entendiendo por logarítmico que relaciona magnitudes de tensión-deformación en esta medida)

$$\kappa = \frac{Y_{\#}}{3(1 - 2\nu_{\#})} \quad (6.21)$$

La particularización de la ec. (6.21) entre ambos comportamientos elástico y elastoplástico proporciona una relación entre las cuatro constantes de material, Y_e , ν_e , Y_{ep} y ν_{ep} , que ha de cumplirse en todas las componentes elásticas por el comportamiento isócoro de la deformación plástica

$$\kappa = \frac{Y_e}{3(1 - 2\nu_e)} = \frac{Y_{ep}}{3(1 - 2\nu_{ep})}$$

esta relación permite que tres de estos términos puedan ser independientes y un cuarto no. Por tanto, si en una etapa de carga elastoplástica conocemos los módulos elástico

Y_e y elastoplástico Y_{ep} , y el módulo de Poisson ν_e , el módulo de Poisson elastoplástico algorítmico macroscópico se obtendrá como resultado de

$$\nu_{ep} = \frac{1}{2} - \frac{Y_{ep}}{Y_e} \frac{1 - 2\nu_e}{2} \quad (6.22)$$

Finalmente, sobre el módulo desviador macroscópico de un material isótropo, ya sea en régimen elástico o elastoplástico, se puede utilizar la conocida identidad de isotropía elástica

$$\mu_{\#} = \frac{Y_{\#}}{2(1 + \nu_{\#})} \quad (6.23)$$

donde los módulos $2\mu_e$ y $2\mu_{ep}$, pueden ser obtenidos con los valores de Y_e , ν_e , Y_{ep} y ν_{ep} .

De esta última expresión, se puede observar que los resultados macroscópicos esperados están correctamente reproducidos con la formulación obtenida de la separación en la ec. (6.13). Por ejemplo, si $Y_{ep}/Y_e \ll 1$, como es usual en la plasticidad de metales, el coeficiente ν_{ep} tiende al valor $1/2$ sin importar el valor de ν_e ($\nu_e < 1/2$), y efectivamente el comportamiento elástico puede ser compresible pero la respuesta elastoplástica tiende a ser isócara en su conjunto. Para el caso de plasticidad perfecta, donde $Y_{ep} = 0$, entonces $\nu_{ep} = 1/2$, y así el comportamiento elastoplástico resultante es perfectamente isócara. Otro aspecto destacado es que cuando el comportamiento elástico es cuasi-incompresible, o sea $\nu_e \rightarrow 1/2$, la respuesta elastoplástica tiende también a ser incompresible, $\nu_{ep} \rightarrow 1/2$, incluso cuando $Y_{ep}/Y_e \sim 1$. En el límite de la incompresibilidad elástica, la respuesta elastoplástica es también incompresible: $\nu_e = 1/2$ y $\nu_{ep} = 1/2$.

Si ahora prestamos atención a la formulación desviadora, ec. (6.19) en la dirección 1, y consideramos el uso de la identidad $\Delta E_1^d = \frac{2}{3}(1 + \nu_{\#}) \Delta E_1$ (ambos módulos desviadores, $2\mu_e$ y $2\mu_{ep}$ son conocidos experimentalmente a través de Y_e , ν_e , Y_{ep} y el cuarto término ν_{ep}) se obtiene la relación

$$2\mu_{\#} \Delta E_1^d = 2\mu_{kin} \Delta E_1^d + 2\mu_{int} \Delta E_{e1}^d \quad (6.24)$$

donde para el caso de carga en cuestión, inicialmente en régimen elástico como se describe en las ec. (6.1) cuando $\Delta \mathbf{E}_p^d = \mathbf{0}$ y por ello $\Delta \mathbf{E}_e^d \equiv \Delta \mathbf{E}^d$, en la ec. (6.24) se obtiene

$$\frac{Y_e}{1 + \nu_e} =: 2\mu_e = 2\mu_{kin} + 2\mu_{int} \quad (6.25)$$

tomando la ec. (6.24) particularizada en el límite elástico del material desde el punto de visto macroscópico, cuando se alcanza la tensión límite de valor τ_{yt} , se obtiene en deformaciones el resultado $E_1^d = E_{e1}^d = E_{yt}^d = \frac{2}{3}(1 + \nu_e) E_{yt}$, y donde la tensión desviadora límite macroscópica, τ_{yt}^d , queda recogida en la izquierda de la ec. (6.24), se llega $2\mu_e E_1^d = 2\mu_e E_{yt}^d = \tau_{yt}^d = \frac{2}{3}\tau_{yt}$. Al mismo tiempo, la tensión desviadora límite interna (derecha de la igualdad de la ec. (6.24)) será $2\mu_{int} E_{e1}^d = 2\mu_{int} E_{yt}^d = k_0^d = \frac{2}{3}k_0$, de manera que combinándolas -en este caso se acepta la simplificación de notación $\Delta(\cdot) \equiv (\cdot)$ -

$$\frac{2}{3}\tau_{yt} = 2\mu_{kin} E_{yt}^d + \frac{2}{3}k_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{2}{3}\tau_{yt}}{\frac{2}{3}k_0} = \frac{2\mu_{kin} E_{yt}^d}{2\mu_{int} E_{yt}^d} + 1 \quad (6.26)$$

Ahora consideremos el parámetro interno plastificación, $k_0 = k(\gamma = 0)$, este parámetro que está asociado al disipador de fricción de la rama de Prandtl del

dispositivo de la figura 5.1, y que está presenten en la ec. (6.26), permite establecer una relación con el parámetro macroscópico τ_{yt} (límite de fluencia plástica o *yield stress*) a través de la expresión

$$\frac{\tau_{yt}}{k_0} = \frac{\mu_{kin} + \mu_{int}}{\mu_{int}} \quad (6.27)$$

esta ec. (6.27) es semejante a la ec. (5.6) obtenida en el dispositivo reológico de la figura 5.1, en este caso particular descrita en términos del módulo desviador logarítmico. Ambas ecuaciones representan la relación entre las interpretaciones en escala macroscópica por un lado y en escala submacroscópica por otro, es decir, lo que un observador ve desde fuera del dispositivo y lo que se vería dentro del dispositivo. Hay que matizar a esta comparación de lo que el observador vería dentro del dispositivo es algo de carácter fenomenológico, y por eso no llega a recibir la calificación de observación microscópica, ya que no se realiza ningún análisis micromecánico sobre la identidad de las fases de material que operan durante la plastificación.

Considerando ahora el caso de carga elastoplástica descrito en la ec. (6.2), cuando $\Delta \mathbf{E}_p^d \neq \mathbf{0}$ y $\Delta \mathbf{E}_e^d \equiv \Delta \mathbf{E}_e^d|_{\dot{\gamma}>0}$, y con la referencia de la ec. (6.24) se obtiene el módulo desviador elastoplástico

$$\frac{Y_{ep}}{2(1 + \nu_{ep})} = \mu_{ep} = \mu_{kin} + \mu_{int} \left. \frac{\Delta E_{e1}^d}{\Delta E_1^d} \right|_{\dot{\gamma}>0} \quad (6.28)$$

que ya participa en el problema sobre la formulación incremental (recordemos que la solución del problema plástico es de esta naturaleza), donde la relación de deformaciones incrementales de la ec. 6.28 se obtiene de

$$\Delta E_1^d|_{\dot{\gamma}>0} = \frac{1}{2\mu_{ep}} (\tau_{ur}^d - \tau_{yt}^d) = \frac{2}{3} \frac{1 + \nu_{ep}}{Y_{ep}} (\tau_{ur} - \tau_{yt}) \quad (6.29)$$

$$\Delta E_{e1}^d|_{\dot{\gamma}>0} = \frac{1}{2\mu_e} \left(\frac{\tau_{ur}^d - \tau_{yc}^d}{2} - \tau_{yt}^d \right) = \frac{2}{3} \frac{1 + \nu_e}{Y_e} \left(\frac{\tau_{ur} - \tau_{yc}}{2} - \tau_{yt} \right) \quad (6.30)$$

términos desacoplados que se pueden calcular por separado a partir de los valores experimentales de las tensiones τ_{yt} , τ_{ur} y τ_{yc} , obtenidos de la Figura 6.1. Cabe destacar que la ec. (6.30) representa el incremento del dominio elástico-desviador ocasionado durante el proceso de plastificación, dominio expresado en la ec. (6.2).

Por otro lado, la condición de consistencia de la respuesta elastoplástica es $2\mu_{int}E_{e1}^d = \frac{2}{3}k(\gamma)$, y si es expresada en forma incremental $2\mu_{int}\Delta E_{e1}^d|_{\dot{\gamma}>0} = \frac{2}{3}k'\Delta\gamma$, que permite una interpretación matemática descrita por la ley de endurecimiento $k(\gamma) = k_0 + k'\gamma$ (con $\gamma_0 = 0$ y $\dot{\gamma} \geq 0$), donde el endurecimiento interno es lineal en la relación incremental tensión de Kirchhoff-deformación logarítmica, si bien esta linealidad se puede alterar cuando se traduzca a términos incrementales de fuerza-desplazamiento.

Analizando en un caso uniaxial el parámetro de consistencia plástica incremental tendríamos $\Delta\gamma = \Delta E_{p1}^d = \Delta E_1^d|_{\dot{\gamma}>0} - \Delta E_{e1}^d|_{\dot{\gamma}>0}$ (caso particular obtenido de la ec. (5.64), donde aparecen los tensores de deformación $-\dot{\mathbf{E}}_e|_{\dot{\mathbf{E}}=0} = \dot{\mathbf{E}}_p$, y el tensor proyector $\mathbb{P}$), de esta manera la condición de consistencia plástica lleva a la aparición de un parámetro interno expresado a través de la relación o *ratio* de deformaciones desviadoras incrementales

$$\left. \frac{\Delta E_{e1}^d}{\Delta E_1^d} \right|_{\dot{\gamma}>0} = \frac{\frac{2}{3}k'}{2\mu_{int} + \frac{2}{3}k'} \quad (6.31)$$

La presencia de este término en la ec. (6.28) permite una interpretación linealizada y consistente de la respuesta elastoplástica cuando tiene lugar el flujo plástico, ya que si esta ecuación se compara con la ec. (6.25), se identifica el carácter algorítmico de la expresión a través de la formulación incremental como modo de linealización, que se lleva a cabo con el uso de este término *ratio* de deformación, término que ejerce un efecto modulador sobre el módulo desviador del material cuya base física se motiva con el fenómeno del endurecimiento.

Volviendo a la ec. (6.28), podemos distinguir dos términos en la expresión del módulo elastoplástico consistente $2\mu_{ep}$. El primer término de la ec. (6.28), el módulo desviador $2\mu_{kin}$ de la rama hookeana en el dispositivo reológico de la figura 5.1, es el responsable del endurecimiento cinemático, ya que como se puede comprobar como el dominio elástico que genera es constante en tamaño en una observación macroscópica (esto ocurrirá en el caso de $k' = 0$, y por tanto el *yield stress* interno k es constante), y así el módulo $2\mu_{kin}$ solo cambia la posición del dominio elástico en el plano desviador.

El segundo término de la ecuación. (6.28), $2\mu_{int} \times \frac{2}{3}k'/(2\mu_{int} + \frac{2}{3}k')$, será no nulo durante el flujo plástico cuando el parámetro interno k no sea constante, $k' \neq 0$. El efecto en el dominio elástico será un cambio de tamaño, y revelará la presencia de un endurecimiento por deformación de tipo combinado (isótropo-cinemático). En el caso de no existir la rama *kin* en el dispositivo reológico de la figura 5.1, el problema elastoplástico tendría solamente endurecimiento isótropo puro. Si se interpreta este término de otra manera, si este término es nulo durante el flujo plástico, será porque el *yield stress* interno k es constante y $k' = 0$, esto será equivalente a anular la intervención de μ_{int} y solo existiría $2\mu_{ep}$, y por tanto el dominio elástico no cambiará de tamaño, sólo habrá un endurecimiento cinemático puro, únicamente el primer término de la ecuación participaría del módulo $2\mu_{ep}$.

Finalmente, si $k' = 0$ y $\mu_{kin} = 0$, y la rama *kin* no estaría presente en el dispositivo, y entonces no habría endurecimiento por deformación en el modelo, lo que se traduce en un modelo general de plasticidad perfecta.

En resumen, con objeto de determinar los parámetros de un material isótropo y compresible desde un ensayo de tracción en términos tensión-deformación $\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{E}\}$, es necesario determinar: el módulo hidrostático κ , los módulos desviadores $2\mu_{kin}$ y $2\mu_{int}$, el parámetro de plastificación interno k_0 (como término de la tensión de plastificación independiente del endurecimiento), y la derivada primera de la tensión de plastificación expresada a través de la constante k' (que representaría el término de la tensión de plastificación dependiente del endurecimiento). Estos parámetros están recogidos en las ecuaciones (6.21), (6.25) y (6.27)-(6.31).

Para resolver estas ecuaciones con las incógnitas de material descritas, es necesario disponer de un ensayo de tracción, tanto su curva de tensión y deformación axiales, como también la curva entre deformaciones axiales y transversales, para poder determinar las tres constantes elásticas-elastoplásticas Y_e , ν_e y Y_{ep} (de ellas se obtiene como cuarto resultado la constante ν_{ep}). Además es necesario disponer de la medida de tensión límite elástico macroscópico o *tensile yield stress* τ_{yt} , así como los valores de tensión τ_{ur} y τ_{yc} que se hayan alcanzado en el ensayo. Estos dos últimos parámetros, debido al carácter *path dependent* del fenómeno elastoplástico, son ya particulares de cada ensayo, pero que ejercen una influencia no ignorable sobre algunos de los parámetros elastoplásticos que se pretende determinar para reproducir el problema elastoplástico en su conjunto.

La extensión de estos resultados hacia un material con simetría ortótropa es ahora inmediata, no hay más que realizar los correspondientes ensayos de tracción en cada una de las direcciones preferentes dle material para determinar los comportamientos característicos en cada una, designadas estas direcciones preferentes como $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, y obteniéndose los parámetros independientes $Y_{e.ai}$, $\nu_{e.ai}$ y $Y_{ep.ai}$ (el cuarto es dependiente $\nu_{ep.ai}$). El número de parámetros de material se multiplica por cada dirección de simetría existente, y así en ortotropía tridimensional este número será de nueve términos independientes y otros tres dependientes, reduciéndose en el caso de la isotropía transversal a cinco independientes y otros dos dependientes.

6.2. Aplicación de un material incompresible y ortotrópo con comportamiento elastoplástico en términos de T y E

Este apartado considera el caso de un material ortótropo, con direcciones preferentes de material perpendiculares entre si, y con la característica añadida de tener un comportamiento incompresible, no solo en el rango plástico de deformación, sino también en el elástico. Complementando lo expuesto en el apartado anterior, se aborda ahora la particularización del problema elastoplástico de forma tridimensiional sobre un modelo de material capaz de trabajar en una configuración general.

La particularidad de la incompresibilidad se añade como característica de comportamiento no solo en el régimen plástico de deformación, como ocurre en los materiales cristalinos convencionales (metales y sus aleaciones), sino tambien en régimen de deformación elástico isócoro, característica que es común encontrar en muchos materiales blandos y biológicos, así como en algunos materiales tecnológicos de naturaleza polimérica (elastómeros especialmente). Este comportamiento se debe a la naturaleza intrínseca del material, provocado por la configuración y conformación de las cadenas poliméricas y sus enlaces, que lleva a este tipo de materiales a exhibir módulos de Poisson con valores superiores a 0.4 o 0.45, y en muchos casos muy cercanos a 0.5, lo que lleva a módulos de elasticidad hidrostática κ (*bulk modulus*) muy elevados, lo que causa el bloqueo de la deformación volumétrica del material. Este comportamiento provoca problemas numéricos en la simulación y son problemas que no tienen una solución trivial.

Al considerar el material ortótropo, las tres direcciones de simetría del material se aceptan triperpendiculares, y los coeficientes elásticos son fáciles de obtener en este tipo de materiales, pero la condición de incompresibilidad exige determinar parámetros elastoplásticos con restricciones adicionales para responder a las restricciones de deformación volumétrica. En la práctica, para un caso de incompresibilidad perfecta, el *bulk modulus* tiende a un valor infinito ($\kappa \rightarrow \infty$), y obliga a realizar ciertas consideraciones sobre la energía almacenada en el material para evitar conflictos posteriores. La forma habitual de introducir esta restricción es a través de una formulación mixta en deformaciones internas desviadoras y presiones hidrostáticas, donde se condiciona la solución numérica por medio de un multiplicador de Lagrange: la tensión hidrostática p , que se convierte en una variable interna adicional en el problema de incompresibilidad y que no se deriva del caompo de desplazamientos.

Conviene enfatizar, por comparación con los materiales compresibles, el hecho de que en la formulación compresible esta variable interna adicional p no aparece, por no ser necesaria su participación para formular la expresión de la energía almacenada por el material, ya que solo vendría determinada por términos de las variables internas de tensión o deformación.

Para construir la energía elástica volumétrica almacenada se expresa la función por medio de las deformaciones volumétricas $\mathbf{E}^v$ y de la tensión hidrostática p a través de la energía volumétrica complementaria, por conveniencia matemática.

$$\mathcal{U}(\mathbf{E}^v; p) = p E^v - \mathcal{U}^*(\mathbf{E}^v; p) = p E^v - \frac{1}{2} \frac{p^2}{\kappa} \quad (6.32)$$

La ec. (6.32) permite expresar la variable interna p desconectada o desacoplada del caso particular de incompresibilidad en el que numéricamente $E^v = 0$ (este es el objetivo), esta nueva variable se interpreta como un multiplicador de Lagrange restrictor sobre las ecuaciones originales. El resultado es una expresión de la energía de deformación almacenada en el sólido en la forma

$$\Psi(\mathbf{E}, \mathbf{E}_e; p) = \mathcal{U}(\mathbf{E}^v; p) + \mathcal{W}_{kin}(\mathbf{E}^d) + \mathcal{W}_{int}(\mathbf{E}_e^d) \quad (6.33)$$

$$= \left(p E^v - \frac{1}{2} \frac{p^2}{\kappa} \right) + \sum_{i,j=1}^3 \mu_{ij}^{kin} (E_{ij}^d)^2 + \sum_{i,j=1}^3 \mu_{ij}^{int} (E_{eij}^d)^2 \quad (6.34)$$

donde μ_{ij}^{kin} y μ_{ij}^{int} son los módulos desviadores respectivos para las direcciones de ortotropía definidas en los ejes de preferencia de material, $X_{pr} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, y donde p es ahora un multiplicador de Lagrange *pressure-like* asociado a la restricción de incompresibilidad $E^v = \text{tr} \mathbf{E} = E_{11} + E_{22} + E_{33} = 0$ [11]. Este parámetro interno reconvertido a variable interna, debe ser determinado desde la aplicación de las condiciones de contorno naturales y esenciales del problema, y no puede obtenerse a través de una relación constitutiva con la deformación volumétrica E^v , como resulta habitual en otros problemas de la mecánica de los medios continuos. La razón de este desacoplamiento es que si $E^v = 0$, entonces la relación constitutiva no permitiría nunca calcular p , como es habitual en la elasticidad convencional.

Considerando los casos uniaxiales de carga en las direcciones preferentes del material, se definen un total de seis módulos desviadores característicos μ_{11}^{kin} , μ_{22}^{kin} , μ_{33}^{kin} , μ_{11}^{int} , μ_{22}^{int} y μ_{33}^{int} , que deben ser determinados experimentalmente para participar en las relaciones constitutivas.

La tensión generalizada de Kirchhoff $\mathbf{T}$, en este caso de configuración material, coincide con la tensión de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ debido a la respuesta incompresible, donde $J = 1$, ya que las medidas de tensión de Cauchy de Kirchhoff son iguales. Esta tensión $\mathbf{T}$ se obtiene de la ecuación (4.72), al mismo tiempo que el término volumétrico $\boldsymbol{\sigma}^v = \mathbf{T}^v = d\mathcal{U}(\mathbf{E}^v; p)/d\mathbf{E}$, resultando

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{d\mathcal{U}(E^v; p)}{dE^v} : \frac{d\mathbf{E}^v}{d\mathbf{E}} + \frac{d\mathcal{W}_{kin}(\mathbf{E}^d)}{d\mathbf{E}^d} : \frac{d\mathbf{E}^d}{d\mathbf{E}} + \frac{d\mathcal{W}_{int}(\mathbf{E}_e^d)}{d\mathbf{E}_e^d} : \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial \mathbf{E}} \bigg|_{\dot{\mathbf{x}}_p=0} \\ &= p\mathbf{I} + \left(\sum_{i=1}^3 2\mu_i^{kin} E_i^d \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i \right) : \mathbb{P} + \left(\sum_{i=1}^3 2\mu_i^{int} E_{ei}^d \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i \right) : \mathbb{P} : \mathbb{I}^S \\ &= \mathbf{T}^v + \mathbf{T}_{kin}^d + \mathbf{T}_{int}^d \end{aligned} \quad (6.35)$$

donde se usa la contracción de subíndices iguales $(ii) \rightarrow (i)$, $i = 1, 2, 3$, por simplicidad de la notación, y donde se ha hecho uso de la ecuación (6.12) para representar el resultado final en forma tensorial. También se observa en el interior de los paréntesis la presencia del tensor deformaciones logarítmicas expresado en forma pseudoespectral, como si fueran autovalores y autovectores, pero usando como referencia los tensores asociados a la base vectorial de direcciones preferentes del material $(\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_i)$.

Para interpretar el criterio de plastificación a través del tensor de coeficientes plásticos de tipo Hill ($\mathbb{N}$), expresado en la base preferente de material, y semejante al tensor presente en la ecuación (4.80), ambos de carácter desviador, debemos tener en cuenta que el tensor de tensiones que opera de forma asociada, $\mathbf{T}_{int}^{|e}$, es también un tensor de naturaleza desviadora, de manera que se cumple

$$\mathbf{T}_{int}^{|e} = \frac{d\mathcal{W}_{int}}{d\mathbf{E}_e} = \frac{d\mathcal{W}_{int}}{d\mathbf{E}_e^d} : \frac{d\mathbf{E}_e^d}{d\mathbf{E}_e} = \frac{d\mathcal{W}_{int}}{d\mathbf{E}_e^d} : \mathbb{P}^S \quad (6.36)$$

donde el tensor proyector desviador $\mathbb{P}^S$ opera directamente sobre el término de tensión hiperelástica y pone de manifiesto la naturaleza desviadora.

Los tensores de tipo Hill, de naturaleza proyectiva desviadora, operan por igual sobre las componentes desviadoras o sobre las componentes totales de la tensión ([73]), por lo que la función de plastificación de la ec. (4.80) se puede reescribir igualmente en la forma

$$f_T(\mathcal{W}_{int}, \mathbf{E}_e^d, k) = \frac{d\mathcal{W}_{int}}{d\mathbf{E}_e^d} : \mathbb{N}_T : \frac{d\mathcal{W}_{int}}{d\mathbf{E}_e^d} - \frac{2}{3}k^2 = 0 \quad \text{si } \dot{\gamma} > 0 \quad (6.37)$$

donde expresamente ya se hace uso de la naturaleza hiperelástica de las tensiones derivadas de la energía almacenada en el sólido, ec. (6.36). Ahora, como también se puede reescribir la función de plastificación de la ec. (4.80) en otras formas alternativas sin perder el carácter desviado, a partir de la ec. (6.37) es posible adoptar la forma ya familiar

$$f_T(\mathbf{T}_{int}^{|e}, k) = \mathbf{T}_{int}^{|e} : \bar{\mathbb{N}} : \mathbf{T}_{int}^{|e} - \frac{2}{3}k^2 = 0 \quad \text{si } \dot{\gamma} > 0 \quad (6.38)$$

donde el nuevo tensor $\bar{\mathbb{N}}$, es un tensor de cuarto orden también de tipo Hill que se obtiene por interpretación de la operación proyectiva

$$\mathbb{P}^S : \mathbb{N}_T : \mathbb{P}^S = \bar{\mathbb{N}}_T = \mathbb{P}^S : \bar{\mathbb{N}} : \mathbb{P}^S \quad (\neq \bar{\mathbb{N}}) \quad (6.39)$$

La aplicación de estas operaciones tensoriales se realiza a través de una representación matricial en notación de Voigt según las direcciones preferentes de material, de manera que la participación de cada dirección de material (X_{pr}) en la función de plastificación queda recogida por un coeficiente numérico característico, donde la aplicación de la ec. (6.39) conduce al tensor $\bar{\mathbb{N}}$ a una forma diagonal en su representación matricial, a diferencia del tensor de Hill original -ec. (3.75)-, tensores que siendo equivalentes, sin embargo contienen coeficientes diferentes dentro de la matriz representativa para cumplimentar la condición de anisotropía plástica, ya que el tensor de Hill original de la ec. (3.75) no es diagonal en su representación matricial, cuando $\bar{\mathbb{N}}$ si lo es.

Para aclarar esta interpretación del tensor de anisotropía de tipo Hill empleado, $\bar{\mathbb{N}}$, si solo se consideran las componente axiales/normales de tensiones, donde el tensor de Hill original $\mathbb{N}$ sería una matriz de 3×3 (6×6 en el caso general de representar todas

las componentes de tensión con simetrías menores), entonces el tensor plástico $\bar{\mathbf{N}}$ axial equivalente adopta la forma de una matriz diagonal del tipo

$$[\bar{\mathbf{N}}]_{X_{pr}} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 6A & 0 & 0 \\ 0 & 6B & 0 \\ 0 & 0 & 6C \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6b & 0 \\ 0 & 0 & 6c \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

donde las componentes de la diagonal principal $6a$, $6b$ y $6c$, son los coeficientes proporcionales de cada dirección de material (el factor numérico 6 se ha introducido por conveniencia numérica del ejemplo operativo). Si esta matriz ahora se normaliza respecto de la dirección 1 y respecto de su coeficiente 11, y se particulariza para el caso isótropo, se recupera el criterio del J_2 (o de Von Mises) en la función de plastificación, y se daría la identidad tensorial $\bar{\mathbf{N}} = \mathbb{I}^S$, es decir que $\bar{\mathbf{N}}$ es directamente el tensor proyector desviador que opera sobre las tensiones, poniendo de manifiesto que este tensor de tipo Hill es un proyector de naturaleza desviadora, es al mismo tiempo tensor proyector simétrico y desviador ($\mathbb{P}^S$)

$$\mathbf{N}_T = \mathbb{P} : \mathbb{I}^S : \mathbb{P} = \mathbb{P}^S \quad (6.41)$$

Consideremos en primer lugar un test uniaxial sobre la dirección preferente de material $\mathbf{a}_1$ en el instante en el que la carga elástica alcanza el punto de fluencia o *yield point*, $\mathbf{T}_{y1} = \boldsymbol{\sigma}_{y1} = \text{diag}\{\sigma_{y1}, 0, 0\}$, donde por tanto $\mathbf{E}_p = \mathbf{0}$ y $\mathbf{E}_e = \mathbf{E}$. En ese instante se puede descomponer la tensión total σ_{y1} en sus contribuciones *kinematic-type* e *internal-type*, de acuerdo al modelo reológico del apartado 5.1.1 y a la ec. (5.59), y expresar ambos términos de acuerdo a las constantes elásticas del material, esto es, en términos de los módulos elásticos desviadores en las direcciones de material, μ_1^e , μ_2^e y μ_3^e , y de los módulos de Poisson asociados, ν_{12}^e y ν_{13}^e , a la deformación logarítmica, y utilizando las relaciones ya deducidas en la referencia [76] para la medida de deformación logarítmica, obteniendo

$$\begin{aligned} \sigma_{y1} &= Y_1^e E_{y1} = (2\mu_1^e + \mu_2^e \nu_{12}^e + \mu_3^e \nu_{13}^e) E_{y1} \\ &= [2(\mu_1^{kin} + \mu_1^{int}) + (\mu_2^{kin} + \mu_2^{int}) \nu_{12}^e + (\mu_3^{kin} + \mu_3^{int}) \nu_{13}^e] E_{y1} \\ &= (2\mu_1^{kin} + \mu_2^{kin} \nu_{12}^e + \mu_3^{kin} \nu_{13}^e) E_{y1} + (2\mu_1^{int} + \mu_2^{int} \nu_{12}^e + \mu_3^{int} \nu_{13}^e) E_{y1} \\ &= Y_1^{kin} E_{y1} + Y_1^{int} E_{y1} = \sigma_{y1}^{kin} + \sigma_{y1}^{int} \end{aligned} \quad (6.42)$$

resultado coincidente con los del modelo reológico del apartado 5.1.1. Para su uso posterior, definimos las siguientes relaciones de tensión interna plástica como una constante adimensional ρ_i , y por simplicidad en la exposición con los subíndices $i \neq j \neq k \neq i = \{1, 2, 3\}$

$$\rho_i := \frac{\sigma_{yi}^{int}}{\sigma_{yi}} = \frac{Y_i^{int}}{Y_i^e} = \frac{2\mu_i^{int} + \mu_j^{int} \nu_{ij}^e + \mu_k^{int} \nu_{ik}^e}{2\mu_i^e + \mu_j^e \nu_{ij}^e + \mu_k^e \nu_{ik}^e} = \frac{2\mu_i^{int} \mu_j^e + 2\mu_i^{int} \mu_k^e + \mu_j^{int} \mu_k^e + \mu_k^{int} \mu_j^e}{2\mu_1^e \mu_2^e + 2\mu_2^e \mu_3^e + 2\mu_3^e \mu_1^e} \quad (6.43)$$

donde se ha hecho uso de la relación descrita para hiperelasticidad lineal en ortotropía

$$\nu_{ij}^e = \frac{\mu_k^e}{\mu_j^e + \mu_k^e} \quad (6.44)$$

ya mencionada anteriormente y desarrollada en la cita [76]. Para el caso de un material isótropo donde $\mu^{int} \equiv \mu_1^{int} = \mu_2^{int} = \mu_3^{int}$ y $\mu^e \equiv \mu_1^e = \mu_2^e = \mu_3^e$, y si además por incompresibilidad $\nu_{ij}^e \equiv \nu^e = 1/2$, se obtiene la relación

$$\rho = \frac{\mu^{int}}{\mu^e} = \frac{\mu^{int}}{\mu^{int} + \mu^{kin}} \quad (6.45)$$

Asimismo las componentes axiales de la tensión desviadora $\mathbf{T}_{int}^{le}$ de la ec. (6.36) se obtienen en las direcciones preferentes de material de la expresión

$$\left[\mathbf{T}_{int}^{le} \right]_{X_{pr}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\mu_1^{int} \\ -2\mu_2^{int}\nu_{12}^e \\ -2\mu_3^{int}\nu_{13}^e \end{bmatrix} E_{y1} \quad (6.46)$$

para lo que la deformación responde a la forma

$$\mathbf{E}_e^d = \mathbf{E}_e = \mathbf{E}_{y1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_{12}^e & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_{13}^e \end{bmatrix} E_{y1} \quad (6.47)$$

Considerando ahora que la componente interna de tensión responde a $\sigma_{y1}^{int} = Y_1^{int} E$, la tensión axial queda descrita en representación de Voigt en la forma

$$\left[\mathbf{T}_{int}^{le} \right]_{X_{pr}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}m_1 \\ -\frac{1}{3}(2-m_1) \end{bmatrix} \sigma_{y1}^{int} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}m_1 \\ -\frac{1}{3}(2-m_1) \end{bmatrix} \rho_1 \sigma_{y1} \quad (6.48)$$

y donde aparecen las relaciones de constantes de material, m_i , con los subíndices $i \neq j \neq k = \{1, 2, 3\}$

$$m_i := \frac{2\mu_i^{int} + 4\mu_j^{int}\nu_{ij}^e - 2\mu_k^{int}\nu_{ik}^e}{2\mu_i^{int} + \mu_j^{int}\nu_{ij}^e + \mu_k^{int}\nu_{ik}^e} = \frac{2\mu_i^{int}\mu_j^e + 2\mu_i^{int}\mu_k^e + 4\mu_j^{int}\mu_k^e - 2\mu_k^{int}\mu_j^e}{2\mu_i^{int}\mu_j^e + 2\mu_i^{int}\mu_k^e + \mu_j^{int}\mu_k^e + \mu_k^{int}\mu_j^e} \quad (6.49)$$

Para un comportamiento isótropo se obtiene un único valor de estas relaciones: $m = 1$, y en el punto de fluencia la componente interna de tensión queda reducido a

$$\mathbf{T}_{int}^{le} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \sigma_y^{int} \quad (6.50)$$

La función de plastificación en este punto de fluencia debe anularse o hacerse cero, y así ocurre con la ec. (6.38) cuando $\dot{\gamma} > 0$. Así se llega a la expresión

$$f(\mathbf{T}_{int}^{le}, k) = \rho_1^2 \sigma_{y1}^2 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}m_1 \\ -\frac{1}{3}(2-m_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 6a & 0 & 0 \\ 0 & 6b & 0 \\ 0 & 0 & 6c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}m_1 \\ -\frac{1}{3}(2-m_1) \end{bmatrix} - \frac{2}{3}k^2 = 0 \quad (6.51)$$

que proporciona una ecuación relacionada con el módulo desviador a través de m_1 y ρ_1 , con los parámetros del tensor axial de fluencia, b y c , la tensión interna de fluencia k y la tensión de fluencia σ_{y1} determinada en el eje 1, que proporciona la relación

$$4a + m_1^2 b + (2 - m_1)^2 c = \frac{k^2}{(\sigma_{y1}^{int})^2} = \frac{k^2}{\rho_1^2 \sigma_{y1}^2} \quad (6.52)$$

donde como cabría esperar, la particularización al caso isótropo nos lleva a $6a = 1 = k^2/(\sigma_y^{int})^2$, y en efecto a $k^2 = (\sigma_y^{int})^2$.

Como no se ha considerado el caso de endurecimiento isótropo, entonces $k = k_0$ y por tanto el término $(\sigma_{y1}^{int})^2$ permanece constante cuando $\dot{\gamma} > 0$. Como resultado, la tensión interna de la ec. (6.48) también permanece constante durante cada proceso elastoplástico uniaxial de carga, con $\sigma_{y1}^{int} > 0$ para la fase de carga en tracción, y $\sigma_{y1}^{int} < 0$ para la fase de carga en compresión. También la deformación elástica $\mathbf{E}_e = \mathbf{E}_{y1}$ permanece constante, con lo que el *rate* elástico es nulo, $\dot{\mathbf{E}}_e = 0$, cuando $\dot{\gamma} > 0$. Por todo ello, se puede considerar que $\dot{\mathbf{E}}|_{\dot{\gamma}>0} = \dot{\mathbf{E}}_p$, es quien gobierna el problema completamente durante el flujo plástico. Esto se deduce del modelo reológico considerado en el capítulo anterior, y mostrado en la figura 5.1.

Resulta inmediato obtener las expresiones homólogas a la ec. (6.52) y asociadas al test de carga uniaxial sobre los ejes 2 y 3, a saber

$$(2 - m_2)^2 a + 4b + m_2^2 c = \frac{k^2}{(\sigma_{y2}^{int})^2} = \frac{k^2}{\rho_2^2 \sigma_{y2}^2} \quad (6.53)$$

$$m_3^2 a + (2 - m_3)^2 b + 4c = \frac{k^2}{(\sigma_{y3}^{int})^2} = \frac{k^2}{\rho_3^2 \sigma_{y3}^2} \quad (6.54)$$

donde σ_{y2} y σ_{y3} son las reespectivas tensiones uniaxiales de fluencia, y ρ_i y m_i , los coeficientes ya definidos en las ecuaciones (6.43) y (6.49), respectivamente.

Si ahora se considera la regla de flujo de la ec. (5.64), particularizada para el caso uniaxial en la dirección $\mathbf{a}_1$, también con $-\dot{\mathbf{E}}_e|_{\dot{\mathbf{E}}=0} = \dot{\mathbf{E}}_p$, se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} [\dot{\mathbf{E}}_p]_{X_{pr}} &= \dot{\gamma} \frac{1}{\frac{2}{3}k} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6a & 0 & 0 \\ 0 & 6b & 0 \\ 0 & 0 & 6c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}m_1 \\ -\frac{1}{3}(2 - m_1) \end{bmatrix} \sigma_{y1}^{int} \\ &= \dot{\gamma} \frac{\sigma_{y1}^{int}}{k} \begin{bmatrix} 4a + m_1b + (2 - m_1)c \\ -2a - 2m_1b + (2 - m_1)c \\ -2a + m_1b - 2(2 - m_1)c \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.55)$$

y cuando se genera deformación plástica y la tasa plástica no sea nula, $\dot{\mathbf{E}}|_{\dot{\gamma}>0} = \dot{\mathbf{E}}_p$, el módulo de Poisson asociado a la deformación logarítmica durante el flujo plástico, ν_{12}^{ep} , valdrá

$$\nu_{12}^{ep} = - \frac{\dot{E}_2}{\dot{E}_1} \Big|_{\dot{\gamma}>0} = \frac{2a + 2m_1b - (2 - m_1)c}{4a + m_1b + (2 - m_1)c} = \frac{\mu_3^{ep}}{\mu_2^{ep} + \mu_3^{ep}} \quad (6.56)$$

Debido al hecho de que la tasa elástica será nula cuando $\dot{\gamma} > 0$, $\dot{\mathbf{E}}_e = \mathbf{0}$, solo el módulo desviador externo gobernará la respuesta elastoplástica a través de las ec. (6.35), ya que sin respuesta isótropa plástica se cumplirá que $\mu_1^{ep} = \mu_1^{kin}$, $\mu_2^{ep} = \mu_2^{kin}$ y $\mu_3^{ep} = \mu_3^{kin}$, identidades que se corresponden con un caso puramente cinemático en el endurecimiento, como ya ha sido justificado en el epígrafe anterior. Por todo ello, se obtiene una ecuación adicional de compatibilidad de flujo en el eje 1 relacionando el módulo desviador y el tensor axil de parámetros plásticos de tipo Hill, a , b y c , generando la relación

$$2(\mu_2^{kin} - \mu_3^{kin})a + (2\mu_2^{kin} + \mu_3^{kin})m_1b - (\mu_2^{kin} + 2\mu_3^{kin})(2 - m_1)c = 0 \quad (6.57)$$

esta compatibilidad adicional se cumple de forma automática en el caso isótropo, por lo que no fue considerada en la sección anterior, por no ser necesaria, al poderse expresar cada dirección con sus correspondientes variables en el problema isócoro. Incluso la ec. (6.55) particularizada para el caso de isotropía se simplifica en la forma

$$\left[\dot{\mathbf{E}}_p \right] = \frac{\sigma_y^{int}}{k} \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma}/2 \\ \dot{\gamma}/2 \end{bmatrix} \rightarrow |\Delta E_{p1}| = \Delta \gamma \quad (6.58)$$

Sin embargo, la ec. (6.57) introduce una restricción sobre las ecuaciones (6.52) y (6.54), de manera que la desigualdad de disipación en la ec. (4.74) se satisface correctamente en el caso de materiales ortótropos. Este aspecto es importante, puesto que la regla de flujo plástico, ec. (5.64), ha sido derivada de esta expresion.

Repitiendo los test de carga uniaxiales en las direcciones 2 y 3, se pueden obtener las ecuaciones homólogas a la ec. (6.57), y se llega a

$$-(\mu_3^{kin} + 2\mu_1^{kin})(2 - m_2)a + 2(\mu_3^{kin} - \mu_1^{kin})b + (2\mu_3^{kin} + \mu_1^{kin})m_2c = 0 \quad (6.59)$$

$$(2\mu_1^{kin} + \mu_2^{kin})m_3a - (\mu_1^{kin} + 2\mu_2^{kin})(2 - m_3)b + 2(\mu_1^{kin} - \mu_2^{kin})c = 0 \quad (6.60)$$

De esta forma, el conjunto de las ecuaciones (6.57), (6.59) y (6.60) forman un sistema lineal de ecuaciones en términos de b y c (a es el valor de referencia para homogeneizar el tensor axil plástico), así pues es fácil observar su dependencia lineal, y como solo dos de ellos son independientes. Desde el momento que se ha tomado el valor de $a = 1/6$, las ecuaciones (6.57) y (6.59) determinan los valores de b y c presentes en el tensor $\bar{\mathbf{N}}$, si los módulos desviadores, internos y externos, son conocidos.

Las tres ecuaciones (6.52), (6.53) y (6.54), además de las dos restricciones de compatibilidad sobre la regla de flujo plástico, ecuaciones (6.57) y (6.59), definen el número de datos experimentales que son necesarios para caracterizar el modelo elastoplástico ortótropo bajo carga axial, y en las direcciones preferentes de material. En los siguientes apartados se discuten tres diferentes posibilidades, pero evidentemente existen más posibles casos, puesto que la combinatoria sobre los parámetros y sus interrelaciones es la que ha de utilizarse adecuadamente en cada caso para obtener la caracterización del material que exige el modelo computacional.

6.2.1. Caso (a): se conoce un limite de fluencia y ambos módulos elastoplásticos

Se acepta que son conocidos los tres módulos de Young Y_1^e , Y_2^e y Y_3^e (o de forma equivalente dos módulos de Young Y_1^e y Y_2^e , y un módulo de Poisson, ν_{12}^e), los tres módulos elastoplásticos Y_1^{ep} , Y_2^{ep} y Y_3^{ep} (o Y_1^{ep} , Y_2^{ep} y ν_{12}^{ep}), y también el tensión de fluencia uniaxial σ_{y1} en dirección $\mathbf{a}_1$. Entonces, se tiene (considerando $i \neq j \neq k = \{1, 2, 3\}$)

$$Y_i^e = 2\mu_i^e + \mu_j^e \nu_{ij}^e + \mu_k^e \nu_{ik}^e = \frac{2\mu_1^e \mu_2^e + 2\mu_2^e \mu_3^e + 2\mu_3^e \mu_1^e}{\mu_j^e + \mu_k^e} \quad (6.61)$$

$$Y_i^{ep} = 2\mu_i^{ep} + \mu_j^{ep} \nu_{ij}^{ep} + \mu_k^{ep} \nu_{ik}^{ep} = \frac{2\mu_1^{ep} \mu_2^{ep} + 2\mu_2^{ep} \mu_3^{ep} + 2\mu_3^{ep} \mu_1^{ep}}{\mu_j^{ep} + \mu_k^{ep}} \quad (6.62)$$

Se pueden obtener adicionalmente, los tres módulos elásticos desviadores μ_i^e y los tres módulos elastoplásticos desviadores μ_i^{ep} en cualquier caso. Se utiliza la referencia [66] para los valores admisibles de módulos macroscópicos $Y_i^\#$ (elásticos o elastoplásticos). Además, teniendo en cuenta que los módulos desviadores han de cumplir: $\mu_i^e = \mu_i^{kin} + \mu_i^{int}$ y $\mu_i^{ep} = \mu_i^{kin}$, tenemos los seis módulos axiales μ_i^{kin} y μ_i^{int} que están presentes en el cálculo de tensiones de la ec. (6.35).

También son conocidos los ratios ρ_i y m_i ($i = \{1, 2, 3\}$) definidos en las ecuaciones (6.43) y (6.49), y es posible resolver las dos ecuaciones de compatibilidad que afectan a la regla de flujo plástico en las ecuaciones (6.57) y (6.59), que son necesarias cumplir para obtener los coeficientes del tensor de plastificación del material, b y c , de la ec. (6.40).

Finalmente, es necesario conocer el parámetro interno de fluencia k , que directamente se obtiene de la ec. (6.52), y usando la medida de tensión de fluencia o yield stress de la dirección principal, σ_{y1} .

6.2.2. Caso (b): se conoce un módulo elastoplástico y ambos límites de fluencia

En este caso se conocen los tres módulos elásticos en las tres direcciones preferentes de material, obtenidos mediante ensayos convencionales uniaxiales de carga, Y_1^e , Y_2^e y Y_3^e (o Y_1^e , Y_2^e y ν_{12}^e), además de las tres tensiones uniaxiales de fluencia σ_{y1} , σ_{y2} y σ_{y3} , y también el módulo elastoplástico de la dirección principal 1, Y_1^{ep} . A diferencia del caso (a), se pueden obtener los tres módulos desviadores elásticos, μ_i^e ($= \mu_i^{kin} + \mu_i^{int}$), pero no se pueden obtener ninguno de los tres módulos desviadores elastoplásticos, μ_i^{ep} ($= \mu_i^{kin}$), o las relaciones ρ_i y m_i .

En este caso, es necesario resolver el sistema completo de las cinco ecuaciones no lineales que se ha detallado en esta sección, ecuaciones (6.52), (6.53), (6.54), (6.57) y (6.59), además de la ec. (6.62) para $i = 1$ con el módulo elastoplástico Y_1^{ep} , que es conocido también previamente.

Del sistema completo con seis ecuaciones, con las relaciones ρ_i y m_i definidas en las ecuaciones (6.43) y (6.49), es posible determinar los parámetros necesarios para completar la definición del modelo, fundamentalmente el parámetro interno de fluencia k , los coeficientes del tensor de plastificación del material b y c , y los módulos desviadores μ_1^{kin} , μ_2^{kin} y μ_3^{kin} . Finalmente, los restantes módulos internos desviadores son calculados por medio de la obligada relación $\mu_i^{int} = \mu_i^e - \mu_i^{kin}$.

6.2.3. Caso (c): plasticidad perfecta

En este caso con ausencia de endurecimiento plástico, por tanto con $Y_i^{ep} = 0$ y simultáneamente $\mu_i^{kin} = 0$, las dos restricciones de compatibilidad sobre la regla de flujo plástico, ecuaciones (6.57) y (6.59) se cumplen automáticamente. Se pueden obtener los parámetros elásticos desviadores $\mu_i^{int} = \mu_i^e$ de los tres módulos elásticos de Young Y_i^e , y los parámetros plásticos restantes k , b y c de las tres ecuaciones (6.52)-(6.54), con $m_i = \rho_i = 1$ para este caso particular. La ec. (6.56), y sus ecuaciones homólogas asociadas a las otras direcciones preferentes de material, proporcionan los módulos de Poisson elastoplásticos.

Capítulo 7

Ejemplos de aplicación numérica

En este capítulo se lleva a cabo la aplicación numérica del modelo elastoplástico presentados en capítulos precedentes. Se han utilizado diferentes herramientas de simulación por elementos finitos, en una primera fase los cálculos han sido programados sobre la herramienta de elementos finitos DULCINEA, código propio del grupo de trabajo donde se ha desarrollado esta tesis, y donde se ha programado el código fundamental de cálculo implementado en forma de subrutina de material, en este entorno se han realizado las primeras verificaciones de funcionamiento y se han validado los resultados del modelo elastoplástico. En una segunda fase se ha creado un segundo código que ha sido adaptado para el programa comercial de elementos finitos ADINA[®], con objeto completar la validación del modelo y su aplicabilidad general en cualquier programa de cálculo por elementos finitos de uso común.

Los ejemplos que se han llevado a cabo con ambas herramientas son en algunos casos los mismos, con el objetivo de comparar los resultados obtenidos entre ambos códigos de cálculo. En otros casos los ejemplos han sido diferentes, en parte porque las capacidades de simulación de ambos códigos, DULCINEA y ADINA, no son iguales.

Aprovechando las mayores capacidades del código comercial ADINA, en la segunda parte se ha llevado a cabo una simulación elastoplástica completa y real sobre un ejemplo de conformado plástico en embutición profunda de un problema ingenieril real, donde al problema elastoplástico anisótropo en grandes desplazamientos se suma el problema de contacto no lineal, lo que convierte a este ejemplo en uno de los más completos sobre la simulación con elementos finitos, al estar presentes los tres tipos de no linealidades de la mecánica del medio continuo: no linealidad material por el comportamiento constitutivo plástico, no linealidad geométrica por el problema de deformaciones finitas, y no linealidad de las condiciones de contorno por el problema de contacto.

7.1. Aplicación sobre el código DULCINEA

La primera aplicación realizada es la verificación de los parámetros internos característicos de material, que han sido determinados a partir de los ensayos experimentales descritos en el capítulo anterior. Se busca demostrar la consistencia del modelo en su comportamiento macroscópico con casos elementales, considerando en el modelo con materiales isótropos y anisótropos, siempre en deformaciones finitas.

7.1.1. Ejemplo de material compresible isótropo con comportamiento elastoplástico en términos $\bar{\tau}$ y E

Como se ha expuesto en la sección 6.1, donde se caracteriza un material isótropo compresible que presenta comportamiento elastoplástico, en una primera aproximación se puede tratar este problema con una relación lineal en términos conjugados de trabajo de el par de deformaciones finitas logarítmicas y tensiones rotadas de Kirchhoff, tal y como demostró Anand en [1] y [2], donde se demuestra que la sencillez del problema no limita la capacidad de este par de magnitudes conjugadas de trabajo para la representación de comportamientos no lineales en términos de fuerza-desplazamiento, al tiempo que preservan una interesante fidelidad con la física del problema, si se toman como referencia los datos experimentales.

Los parámetros que se han de determinado previamente para el cálculo elastoplástico son, por un lado el módulo hidrostático o *bulk modulus* κ , y los módulos elásticos desviadores $2\mu_{kin}$ and $2\mu_{int}$, necesarios para definir la función de energía libre almacenada que se recoge en la ecuación (6.8), y de otro lado el parámetro límite de fluencia interno k_0 (característico del disipador plástico de la rama *int*), así como su primera derivada k' necesaria para definir la evolución interna del disipador, es decir su endurecimiento que se representa a través de la función $k = k_0 + k'\gamma$. Todos estos parámetros se obtienen de la curva experimental de carga-descarga de un ensayo uniaxial convencional, donde además se determinan otros parámetros del material, como son el módulo de elasticidad o de Young Y_e , el módulo de Poisson ν_e , y ya en la parte elastoplástica la tensión macroscópica de límite elástico ingenieril τ_{yt} (o *tensile yield stress*), el módulo plástico tangente Y_{ep} y la tensión máxima del ensayo en carga plástica τ_{ur} .

Finalmente en la fase de descarga elástica y compresión del ensayo se determina el límite elástico en compresión τ_{yc} , que será utilizado para caracterizar de forma completa el comportamiento en descarga del material y el carácter del endurecimiento (si es isótropo o cinemático).

Como ejemplo de aplicación en el cálculo de los parámetros de un material isótropo compresible blando (un polímero técnico por ejemplo), aceptando los valores experimentales de un ensayo convencional de tracción-compresión sobre dicho material, y teniendo en cuenta las ecuaciones (6.1)-(6.3) y la gráfica de datos contenida en la figura 6.1, se obtendrían los siguientes valores

$$Y_e = 24 \text{ MPa} , \quad \nu_e = 0.2 , \quad Y_{ep} = 24/5 = 4.8 \text{ MPa}$$

$$\tau_{yt} = 12 \text{ MPa} , \quad \tau_{ur} = 15 \text{ MPa} , \quad \tau_{yc} = -12 \text{ MPa}$$

El módulo de Poisson elastoplástico asociado, como está definido en la ec. (6.2), se obtiene de la ec. (6.22), y toma el valor $\nu_{ep} = 0.44$. El módulo hidrostático-*bulk modulus* en la ec. (6.8) se obtiene de la ec. (6.21), tomando el valor

$$\kappa = \frac{Y_e}{3(1 - 2\nu_e)} = \frac{Y_{ep}}{3(1 - 2\nu_{ep})} = 40/3 = 13.33 \text{ MPa}$$

La evaluación de las ecuaciones (6.29) y (6.30) proporciona los incrementos desviadores de las deformaciones totales y elásticas, $\Delta E_1^d|_{\dot{\gamma}>0} = 0.6$ y $\Delta E_{e1}^d|_{\dot{\gamma}>0} = 0.05$.

De aquí se obtienen ambos módulos internos desviadores, $2\mu_{kin}$ y $2\mu_{int}$ resolviendo las ecuaciones (6.25) y (6.28), lo que proporciona los valores

$$2\mu_{kin} = 20/11 = 1.818 \text{ MPa} \quad \text{y} \quad 2\mu_{int} = 200/11 = 18.18 \text{ MPa}$$

Asimismo de las ecuaciones (6.27) y (6.31) se obtienen los valores de los parámetros internos plásticos correspondientes

$$k_0 = 120/11 = 10.91 \text{ MPa} \quad k' = 300/121 = 2.479 \text{ MPa}$$

Estos valores de los parámetros de material obtenidos en las ecs. (7.1.1)-(7.1.1) se incorporan al modelo de elementos finitos programado en el código DULCINEA, donde el la formulación algorítmica general descrita en la sección 5.4 ya se ha implementado con el resto del programa.

El criterio de plastificación en este primer ensayo es el criterio de Von Mises como caso particular del criterio anisótropo de Hill, aplicando la ecuación (4.80) a través de la siguiente identidad tensorial

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{int}^{le} : \mathbb{N}_T : \mathbf{T}_{int}^{le} &= \mathbf{T}_{int}^{le} : \bar{\mathbb{N}} : \mathbf{T}_{int}^{le} = \mathbf{T}_{int}^{le} : \mathbb{I}^S : \mathbf{T}_{int}^{le} = \mathbf{T}_{int}^{le} : \mathbf{T}_{int}^{le} \\ &= \|\mathbf{T}_{int}^{le}\|^2 = \|\boldsymbol{\tau}_{int}^{le}\|^2 \end{aligned} \quad (7.1)$$

donde $\mathbb{N}_T$ y $\bar{\mathbb{N}}$ son los tensores de tipo Hill de anisotropía plástica, el primero en la forma desviadora común y el segundo en la forma normalizada y diagonalizada, y con los que se explica como el espacio desviador del criterio de Hill se particulariza en el criterio de Von Mises para un material con isotropía.

La tensión equivalente queda definida a través de las tensiones desviadoras principales, en este caso a través de una tensión rotada de Kirchhoff en la dirección principal de carga. La operación del tensor anisótropo general $\mathbb{N}_T$ de Hill en el espacio desviador, y del tensor diagonal equivalente $\bar{\mathbb{N}}$, se lleva a cabo comunmente en notación de Voigt por medio de una matriz diagonal de 6×6 , por cuestiones de simplicidad de cálculo, sin embargo su manipulación tensorial suele resultar más eficaz, porque no se pierde el sentido físico de las magnitudes y la operación resulta menos confusa operativamente que a través de matrices y la notación de Voigt.

Se ha simulado un ensayo axial de carga-descarga mediante la imposición de desplazamientos, con objeto de verificar el módulo macroscópico de comportamiento y la tensión generada. Como el desplazamiento impuesto causa una deformación homogénea en cada paso de carga, y el comportamiento elastoplástico es levemente compresible (cabe recordar el valor del parámetro $\nu_{ep} = 0.44$), se ha utilizado un único elemento hexaédrico de 8 nodos con las mínimas condiciones de contorno para garantizar el equilibrio estático, por lo que el bloqueo no aparece provocado por condiciones de contorno ni de material, y no es necesario usar una formulación mixta en el elemento finito.

El tamaño del elemento es de dimensiones unitarias, $1 \times 1 \times 1$, y el desplazamiento impuesto es tal que el valor de deformación logarítmica ocasionada es de valor 1.125 (superior al 10 % de la dimensión inicial), valor que puede ser aceptado como grande, con lo que las deformaciones causadas también lo son, así este problema elemental muestra no linealidad geométrica, además de no linealidad material por la naturaleza elastoplástica.

Los resultados del ensayo virtual se muestran en la figura 7.1. En la figura 7.1.a de la izquierda se observa un módulo de elasticidad en la respuesta de $Y_e = 24$ MPa, mientras que el módulo de la respuesta elastoplástica es $Y_{ep} = 4.8$ MPa y el primer punto de fluencia o *yield stress* aparece a una tensión de $\tau_{yt} = 12$ MPa, con una tensión máxima de valor $\tau_{ur} = 15$ MPa en el primer paso de carga con respuesta elastoplástica. Como la deformación impuesta inicialmente fue $E_{ur} = 1.125$, este valor es consistente con la expresión $E_{ur} = \tau_{yt}/Y_e + (\tau_{ur} - \tau_{yt})/Y_{ep}$.

Se ha aplicado un segundo paso de carga en compresión y se observa ahora una tensión de fluencia $\tau_{yc} = -12$ MPa, pero como el endurecimiento plástico ha causado una modificación del dominio elástico macroscópico, el tamaño de la superficie de fluencia que se representa con la función de plastificación, ha pasado de un valor inicial $\varsigma_0 := \tau_{yt} = 12$ MPa sobre la dirección principal 1 al comienzo del primer paso, a un valor $\varsigma_1 = \frac{1}{2}(\tau_{ur} - \tau_{yc}) = 13.5$ MPa al final del primer paso, y que tiene un reflejo sobre la tensión de fluencia del segundo paso. Este incremento del dominio elástico macroscópico significa también un cambio en la superficie interna de Von Mises (en el plano π desviador del espacio de Haigh-Westergaard se observaría con un crecimiento de la circunferencia característica de fluencia, de acuerdo a los valores ς_0 y ς_1 corregidos numéricamente por el factor desviador $\frac{2}{3}$). Con estos datos y a través de la ec. (6.27) sobre el parámetro interno de fluencia se obtiene

$$k_1 = \varsigma_1 \times \frac{2\mu_{int}}{2\mu_{kin} + 2\mu_{int}} = 12.27 \text{ MPa}$$

que es un valor consistente con la ley de endurecimiento isótropo interno a partir de los datos del ensayo

$$k_{yc} = k_0 + k'\Delta\gamma = k_0 + k'\Delta E_{p1}^d|_{\dot{\gamma}>0} = k_0 + k'(\Delta E_1^d - \Delta E_{e1}^d)_{\dot{\gamma}>0} = 12.27 \text{ MPa}$$

Tras completar el primer paso elastoplástico de carga, el nuevo centro del dominio elástico se sitúa en $c_1 = \frac{1}{2}(\tau_{ur} + \tau_{yc}) = 1.5$ MPa. Efectivamente se comprueba como el endurecimiento ocasionado es de tipo combinado de un endurecimiento isótropo (a través de k') y otro cinemático (a través de $2\mu_{kin}$), con cambio simultáneo en el tamaño y en la posición del dominio elástico $\mathbb{E}$.

También se puede observar en el diagrama de la derecha (figura 7.1.b), interpretando las pendientes que relacionan las deformaciones E_1 y E_2 , como el módulo de Poisson en carga elástica, $\nu_e = 0.2$, se corresponde con el valor esperado. Se puede comprobar el módulo de Poisson en régimen elastoplástico que se obtiene de la ec. (6.22), $\nu_{ep} = 0.44$, que es consistentemente reproducido durante la simulación elastoplástica. Ninguno de estos valores han sido introducidos explícitamente como parámetros de material en el código de elementos finitos, sino que han sido obtenidos por interpretación de los resultados numéricos del modelo.

En la figura 7.2 se representa la respuesta uniaxial en términos de la tensión rotada de Cauchy (tensión específica de volumen actualizado, y conjugada de trabajo de las deformaciones logarítmicas naturales para sólidos isótropos), con objetivo de poner en evidencia la naturaleza no lineal del problema en términos tensión-deformación en descripción espacial. Las diferencias entre la tensión de Cauchy y la de Kirchhoff se deben a la relación de volumen deformado (J), ya que $\tau_1 = J\sigma_1$, las diferencias

Figura 7.1: Ensayo uniaxial de carga-descarga. Caso con endurecimiento combinado isotropo y cinemático: $k' > 0$ y $2\mu_{kin} > 0$. Izquierda (a): tensión axial de Kirchhoff *vs* deformación logarítmica $\tau_1(E_1)$. Derecha (b): deformaciones transversales $E_2(E_1)$.

Tabla 7.1: Convergencia cuadrática: residuo de fuerzas y energías usando un esquema de Newton-Raphson.

Iteraciones	Fuerzas	Energías
1	1.000E+00	1.000E+00
2	1.239E-02	1.499E-04
3	1.849E-06	3.336E-12
4	1.100E-12	2.440E-24

observables entre ambas gráficas indican que se están produciendo sensibles cambios en el volumen de material durante el ensayo elastoplástico.

Por otro lado, los errores relativos de convergencia de la solución no lineal se muestran en la tabla 7.1, se presentan el residuo en fuerzas y en energías durante un paso elastoplástico típico, exhibiendo la convergencia cuadrática propia de las iteraciones globales de Newton Raphson en el elemento finito. Resultados similares se obtienen en las iteraciones locales de Newton Rapson sobre los puntos de integración.

Finalmente, se presentan los resultados como ejemplos representativos de los casos con endurecimiento isótropo únicamente, endurecimiento cinemático y sin endurecimiento, en las figuras 7.3, 7.4 y 7.5. Las curvas de respuesta uniaxial de estos modelos de material modificados son $k' > 0$ y $2\mu_{kin} = 0$; $k' = 0$ y $2\mu_{kin} > 0$; y $k' = 0$ y $2\mu_{kin} = 0$, dejando el resto de parámetros no citados sin modificar en cada caso. Se comprueba como la respuesta macroscópica en el comportamiento elástico y plástico que se obtiene es acorde a lo esperado. Se puede comprobar como en el caso con $k' > 0$ y $2\mu_{kin} = 0$, figura 7.3, el centro del dominio elástico $\mathbb{E}$ en el espacio $\{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{E}\}$ permanece en el origen, y como el tamaño ς del dominio crece con cada paso elastoplástico que se

Figura 7.2: Ensayo de carga: (a) elemento finito sometido a extensión en el eje X. (b) Ensayo uniaxial de carga-descarga - caso con endurecimiento combinado isótropo y cinemático: $k' > 0$ y $2\mu_{kin} > 0$. Tensión axial de Cauchy $\sigma_1(E_1)$.

aplica, como se espera de un caso de endurecimiento isótropo aislado.

Para el otro caso representativo con $k' = 0$ y $2\mu_{kin} > 0$, figura 7.4, el centro del dominio elástico $\mathbb{E}$ cambia de posición en paralelo con el incremento de tensión aplicado elastoplásticamente, y así se puede interpretar con la pendiente del módulo interno $2\mu_{kin}$ en el espacio $\{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{E}\}$, y como el tamaño del espacio elástico permanece constante, $\varsigma = \varsigma_0$, después de cada paso elastoplástico. Las respuestas en tensión-deformación y en deformación transversal-deformación axial se cierran con retorno al origen tras completar un ciclo elastoplástico, tal y como se espera de un caso de endurecimiento cinemático con presencia de efecto Bauschinger, donde la energía residual congelada característica se recupera al final del ensayo.

En el último caso con $k' = 0$ y $2\mu_{kin} = 0$, figura 7.5, se observa una respuesta plástica perfecta en términos de ambas tensiones de Kirchhoff y de Cauchy. La respuesta de tensión en ambas medidas es igual en los pasos plásticos, ya que $\nu_{ep} = 0.5$ e $Y_{ep} = 0$, si recordamos la ec. (6.22), preservándose el volumen durante la deformación plástica, por lo que $\Delta J|_{\dot{\gamma} > 0} = 0$, y J permanece constante durante cada paso plástico, y por tanto $\Delta \sigma_1|_{\dot{\gamma} > 0} = \frac{1}{J} \Delta \tau_1|_{\dot{\gamma} > 0} = 0$.

7.1.2. Ejemplo de material ortótropo incompresible con comportamiento elastoplástico en términos de $\boldsymbol{T}$ y $\boldsymbol{E}$

En este ejemplo se aborda el problema de un material incompresible, que como se ha visto en el apartado 6.2, introduce una restricción al estado de deformación que tiene severas consecuencias sobre el resto de la formulación necesaria para determinar los parámetros característicos del material a partir de los datos experimentales. En

Figura 7.3: Ensayo uniaxial de carga. Caso con endurecimiento isótopo solamente, $k' > 0$ y $2\mu_{kin} = 0$. Izquierda (a): tensión axial de Kirchhoff $\tau_1(E_1)$. Derecha (b): relación de deformaciones transversales $E_2(E_1)$.

Figura 7.4: Ensayo uniaxial de carga. Caso con endurecimiento cinemático solamente, $k' = 0$ y $2\mu_{kin} > 0$. Izquierda (a): tensión axial de Kirchhoff $\tau_1(E_1)$. Derecha (b): relación de deformaciones transversales $E_2(E_1)$.

Figura 7.5: Ensayo uniaxial de carga, caso de plasticidad perfecta sin endurecimiento, $k' = 0$ y $2\mu_{kin} = 0$. Izquierda (a): tensión axial de Kirchhoff $\tau_1(E_1)$. Derecha (b): relación de deformaciones transversales $E_2(E_1)$.

este ejemplo se van a considerar las condiciones particulares descritas en el apartado 6.2.2. Empleando los elementos finitos se realizan tres ensayos virtuales de carga axil, cada ensayo aplicando la carga en cada una de las direcciones preferentes de material por separado, con el objeto de verificar y validar los resultados numéricos del modelo y su correspondencia con los datos prescritos inicialmente. Las simulaciones también reproducen el comportamiento elastoplástico a partir de estos parámetros, no solo el comportamiento isócoro. En primer lugar aceptamos disponer de las medidas experimentales que proporcionan los valores necesarios a partir de los ensayos reales de carga en cada una de las direcciones preferentes $X_{pr} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, se ha considerado un material blando ortótropo con respuesta linealizada en términos de las medidas de tensión y deformación, $\mathbf{T}$ y $\mathbf{E}$, por tanto en deformaciones finitas.

- Los valores conocidos a partir de las medidas experimentales:

1. los módulos de Young

$$Y_1^e = 18.86 \text{ MPa}, \quad Y_2^e = 13.2 \text{ MPa}, \quad Y_3^e = 10.15 \text{ MPa}$$

2. las tensiones de fluencia plástica

$$\tau_1^{yt} = 4.889 \text{ MPa}, \quad \tau_2^{yt} = 4.334 \text{ MPa}, \quad \tau_3^{yt} = 3.933 \text{ MPa}$$

3. el módulo tangente elastoplástico

$$Y_1^{ep} = 7.333 \text{ MPa}$$

donde los valores de Y_i^e , τ_i^{yt} y Y_i^{ep} , se corresponden con las direcciones los ejes- i de ensayo.

- Los valores a calcular:

1. los módulos elásticos desviadores se obtienen desde las ecuaciones (6.61) a partir de los módulos de Young, Y_1^e , Y_2^e e Y_3^e ,

$$\mu_1^e = 8 \text{ MPa}, \quad \mu_2^e = 5 \text{ MPa}, \quad \mu_3^e = 2 \text{ MPa}$$

2. los módulos desviadores de la rama *kin* de endurecimiento cinemático, los coeficientes del tensor de plastificación y el parámetro interno de fluencia plástica. Con la ec. (6.62) usando los valores $Y_1^{ep} = 7.333 \text{ MPa}$ y $\mu_i^{ep} = \mu_i^{kin}$ (caso de endurecimiento cinemático), y usando también las ecuaciones (6.52), (6.53), (6.54), (6.57) y (6.59), con las relaciones axiles ρ_i y m_i definidas en las ecuaciones (6.43) y (6.49), se realiza la simplificación que permite las simetrías de material (uso de un tensor plástico axil *modificado* tipo Hill $\hat{a} = a/k^2$, $\hat{b} = b/k^2$, $\hat{c} = c/k^2$, y posteriormente la normalización del tensor al valor $6a = 1$), para poder resolver el sistema de ecuaciones no lineales resultante. Los valores de las incógnitas de material que se han obtenido son:

$$\mu_1^{kin} = 3 \text{ MPa}, \quad \mu_2^{kin} = 2 \text{ MPa}, \quad \mu_3^{kin} = 1 \text{ MPa}$$

$$N_{22} = 6b = 2.324, \quad N_{33} = 6c = 3.647$$

$$k = k_0 = 3.850 \text{ MPa}$$

3. Los módulos desviadores de la rama *int* de Prandtl. Teniendo en cuenta el cumplimiento de las tres relaciones internas $\mu_i^{int} = \mu_i^e - \mu_i^{kin}$ se llega a

$$\mu_1^{int} = 5 \text{ MPa}, \quad \mu_2^{int} = 3 \text{ MPa}, \quad \mu_3^{int} = 1 \text{ MPa}$$

Es posible verificar que la ec. (6.60) queda automáticamente satisfecha con estos valores y con el cumplimiento de las restricciones de compatibilidad de deformación sobre las ecuaciones de flujo.

El módulo elástico desviador en las ecuaciones (2) y (3), las componentes del tensor de plastificación $\tilde{N}$ *axial type* dado en la ecuación (2) y el parámetro de flujo interno de las ec. (2), definen el modelo de un material ortótropo plástico en las direcciones preferentes 1, 2 y 3. Estos valores numéricos se han utilizado para definir el modelo computacional de forma completa, pero después se ha llevado a cabo de forma separada cada uno de los ensayos virtuales de carga axial sobre las direcciones preferentes de material, con objeto de verificar que se cumple la correlación con los resultados experimentales y los datos de las ecuaciones (1)-(3), al tiempo que se comprueba la consistencia con los procedimientos descritos en la sección 6.2 .

Para llevar a cabo la simulación con este material de cálculo se ha utilizado un único elemento finito hexaédrico con formulación mixta, el conocido elemento Q1/P0 *u/p* de 8 nodos [156], con integración exacta en desplazamientos e integración reducida en presiones (8 puntos de integración en desplazamientos y uno solo en presiones - 8/1), ya que la isocoricidad elástica de este material puede producir un efecto numérico de bloqueo volumétrico. Este elemento experimenta una deformación homogénea, y las condiciones de contorno son las mínimas necesarias para garantizar el equilibrio estático sin introducir restricciones adicionales o innecesarias a la deformación. El elemento tiene dimensiones unitarias, y se le ha impuesto un desplazamiento equivalente para obtener una deformación principal logarítmica de valor unidad, lo que equivale a un desplazamiento de valor 1.718 respecto de la dimensión unidad (1), de acuerdo a un ciclo de carga completo en expansión-contracción (tracción-compresión).

Como en otros ejemplos, la función de energía hiperelástica almacenada de tipo volumétrico que se usa es $\mathcal{U}(J) = \frac{1}{2}\kappa (\ln J)^2$, pero en este caso de material incompresible se ha empleado una función de penalización para forzar la incompresibilidad durante el cálculo, empleando para ello un bulk modulus de valor $\kappa = 10^4 \text{ MPa}$ (esto es, $\mathcal{U}(J)$ reemplaza la función de energía volumétrica inicialmente propuesta en la ec. (6.34) por conveniencia computacional).

En la figura 7.6 se representa las curvas de respuesta obtenidas en el cálculo para el caso uniaxial de carga, en las relaciones tensión-deformación y la deformación transversal-axial en las tres direcciones analizadas ($i = 1, 2, 3$). Se ha llevado a cabo el ensayo virtual aplicando un control de desplazamiento con extensión hasta una deformación logarítmica máxima $E_i = 1$ y una mínima $E_i = -1$ (compresión). Como se puede observar en las respuestas en términos de tensión-deformación, las tres respuestas elásticas obtenidas por el elemento en módulo de Young Y_i^e , las tres tensiones de fluencia σ_{yi} , y el módulo elastoplástico Y_1^{ep} , están en acuerdo con los valores prescritos en las ecuaciones (1)-(3), y que han sido usados para determinar los parámetros de material de las ecuaciones (2)-(3). Adicionalmente, se puede observar que los otros dos módulos elastoplásticos predichos en la simulación, Y_2^{ep} e Y_3^{ep} , también muestran resultados en

acuerdo a los valores analíticos obtenidos de la ec. (6.62), así en ambos casos se obtiene el resultado

$$Y_2^{ep} = 5.5 \text{ MPa} \quad \text{y} \quad Y_3^{ep} = 4.4 \text{ MPa}$$

Los valores obtenidos de la computación para los módulos de Poisson elásticos y elastoplásticos de carácter logarítmico, $\nu_{ij} = -E_j/E_i$, y que se pueden determinar sobre las curvas de respuesta de deformación transversal-axial, también son coincidentes con los valores obtenidos analíticamente y que resultan de la ec. (6.44) y su ecuación homóloga elastoplástica (6.56). En ambos casos los módulos de Poisson obtenidos son

$$\begin{aligned} \nu_{12}^e &= 0.286 = \frac{2}{7}, & \nu_{23}^e &= 0.8 = \frac{4}{5}, & \nu_{31}^e &= 0.385 = \frac{5}{13} \\ \nu_{12}^{ep} &= 0.333 = \frac{1}{3}, & \nu_{23}^{ep} &= 0.75 = \frac{3}{4}, & \nu_{31}^{ep} &= 0.4 = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Finalmente, cabe llamar la atención sobre las curvas de respuesta, tanto la respuesta tensión-deformación, como la de deformación transversal-axial, ambas en la figura 7.6, son ciclos cerrados característicos de haber considerado un parámetro interno plástico constante $k = k_0$, es decir ausencia de un endurecimiento isótropo, ya que el endurecimiento empleado en la configuración del modelo es cinemático puro, y así la respuesta gobernada por el módulo externo desviador dado por la ec. (2), conduce a la igualdad $\mu_i^{ep} = \mu_i^{kin}$. De esta razón el tamaño del dominio elástico macroscópico $\mathbb{E}$ se preserva en cada curva y es igual a $\varsigma_i = 2\sigma_{yi}$, donde el subíndice i indica la dirección preferente de material, y que revela como el dominio elástico es diferente en cada dirección, resultando un volumen elipsoidal en términos de las componente de $\mathbf{T}_{int}^e$, como muestra la ec. (4.80), con tensiones diferentes en los ejes principales del elipsoide.

La consideración adicional de utilizar una ley interna de endurecimiento isótropo, $k(\gamma)$, donde se da $k'(\gamma) > 0$, daría como resultado una superficie de plastificación cuadrática tipo Hill de tamaño variable, cuyo dominio elástico $\mathbb{E}$ es un elipsoide en términos de las componente de $\mathbf{T}_{int}^e$, y donde sus tres ejes estarían reescalados por la proporción variable $k(\gamma)/k_0$. Esto se correspondería con una formulación elastoplástica ortótropa de endurecimiento combinado o mixto que aquí no ha sido analizada con más profundidad, pero que será empleada en otro ejemplo de cálculo que más adelante se expondrán en este capítulo, incluyendo entonces un comportamiento tanto elástico como plástico no homogéneo en deformaciones finitas, y que será el culmen del funcionamiento operativo del modelo computacional propuesto.

7.1.3. Ensayo virtual de tracción sobre probeta cilíndrica con estricción

En este ejemplo se realiza un ensayo virtual de tracción con una probeta cilíndrica de tamaño normalizado, este caso reproduce numéricamente el resultado de un ensayo de tracción convencional en máquina universal de ensayos. El modelo somete a carga de tracción la probeta cilíndrica descrita en normas, y se lleva hasta la aparición de estricción en la misma. El material considerado es un acero policristalino con endurecimiento isótropo, de la aleación A-533 Grade B Class 1, una aleación habitualmente tratada térmicamente con temple y revenido, normalizado en las normas

Figura 7.6: Ensayo uniaxial de carga-descarga sobre direcciones preferentes de ortotropía del material. Se representa $\sigma_i^{(i)}$ tensión uniaxial de Cauchy en dirección i en eje de carga (i), y $E_j^{(i)}$ componente de deformación logarítmica transversal j en el eje de carga (i). Caso con endurecimiento con $k' = 0$ y $2\mu_i^{kin} > 0$, $i = 1, 2, 3$.

ASTM *Standard Specification for Pressure Vessel Plates, Alloy Steel*. Se valida con este ensayo la formulación elastoplástica en términos de deformaciones finitas y su conjugada de trabajo, las tensiones de Kirchhoff generalizadas en descripción lagrangiana, combinando la plasticidad finita con un estado de deformaciones elásticas moderadas y endurecimiento del material, en este caso isótropo. Como referencia de este ensayo virtual, se toman los datos del trabajo original de Norris [106], que es habitual en la literatura científica para este tipo de verificaciones numéricas.

La probeta del ensayo real tiene unas dimensiones en longitud de 53.3 mm, y con una sección circular de 6.41 mm de radio (6.35 mm en la sección de estricción), dimensiones que se corresponden con las convencionales de ensayos de tracción. La longitud normalizada para la medida instrumental de deformación es de 50 mm, quedando el resto de longitud de probeta destinada a la transición con la superficie de de contacto para anclaje de mordazas, y que tiene el objetivo de evitar interferencias con la zona de medida, permitiendo que en esta zona la deformación sea lo más homogénea posible, si bien este supuesto se deja de cumplir cuando se localiza la deformación plástica, osea en la estricción. Siguiendo este principio, solo se modeliza la parte cilíndrica de la probeta, ya que la zona de mordazas carece de interés en el ensayo virtual.

La probeta virtual utilizada se ha modelizado tridimensionalmente teniendo en cuenta las simetrías elásticas existentes (una simetría horizontal y dos simetrías verticales), por lo que solo una octava parte de la misma ha sido considerada para el modelo de elementos finitos, y aplicando las condiciones de contorno oportunas para reproducir dichas simetrías, por lo que se ha sometido el modelo final a un alargamiento a través de una prescripción de desplazamiento de 7 mm en el extremo de mordazas, quedando fijo el centro de la probeta, como se muestra en la figura 7.7. Esto equivale a un desplazamiento total 14 mm sobre el conjunto, es decir entre mordazas.

El acero considerado posee un módulo de Young $Y_e = 206.9$ GPa, y un módulo de Poisson $\nu_e = 0.29$, un límite elástico de 458 GPa (*yield strength*) y una tensión última (*ultimate tensile strength*) que debe estar comprendida entre 550 – 680 MPa, con una reducción de área máxima del 65 %, y un alargamiento máximo en tracción del 25 %. Algunas de estas cifras en los ensayos reales son sensibles al tratamiento térmico el acero haya recibido, y por eso pueden variar en las especificaciones de la norma. Desde el punto de vista de la simulación numérica, estos tratamientos harían cambiar los parámetros internos del material, en este caso los parámetros están de acuerdo a los ensayos realizados por Norris para tal efecto.

Los parámetros elásticos macroscópicos del material, módulo de Young y módulo de Poisson, permiten determinar los parámetros internos de este modelo asociados al comportamiento elastoplástico; en este caso es fácil deducir que $\mu_{kin} = 0$ por ser este material de endurecimiento isótropo, de manera que los parámetros correspondientes son

$$2\mu_e = 2\mu_{int} = \frac{Y_e}{1 + \nu_e} = 160.4 \text{ GPa} \quad \text{y} \quad \kappa = \frac{Y_e}{3(1 - 2\nu_e)} = 164.2 \text{ GPa}$$

el ajuste del endurecimiento isótropo no lineal se realiza a través de una función de tipo Voice [151] acoplada sobre el parámetro de fluencia plástica interno k , con una función que combina un comportamiento lineal con otro no lineal de saturación de tipo

exponencial.

$$k = k_0 + \bar{H} \bar{\varepsilon}_p + (k_\infty - k_0) (1 - e^{-\delta \bar{\varepsilon}_p}) \quad (7.2)$$

donde $\bar{\varepsilon}_p$ es la deformación plástica efectiva acumulada, a partir de la identidad $\bar{\varepsilon}_p \equiv \gamma$ si tomamos como referencia la ec. (6.58), $\bar{H}$ es el módulo de endurecimiento lineal, k_0 es la tensión de fluencia de referencia, y k_∞ y δ son los parámetros de la ley de saturación plástica del material, donde se puede reconocer la identidad $\bar{\varepsilon}_p \equiv \gamma$, si tomamos como referencia la ec. (6.58). Así los parámetros para este material son

$$k_0 = 450 \text{MPa}, \quad \bar{H} = 129.24 \text{MPa}, \quad k_\infty = 715 \text{MPa} \quad \text{y} \quad \delta = 16.93$$

El criterio de plastificación para un material isótropo se convierte en el criterio del J_2 al aplicar el criterio de Hill, ya que se recupera la función de plastificación de Von Mises cuando se toma el tensor de coeficientes plásticos $\bar{\mathbf{N}} = \mathbb{I}^S$ en la ec. (6.38).

$$\bar{N}_1 = \bar{N}_2 = \bar{N}_3 = 1, \quad \bar{N}_4 = \bar{N}_5 = \bar{N}_6 = 0.5$$

donde se hace uso de la notación de Voigt con índices contraídos desde la forma tensorial original: (11) $\rightarrow$ (1), (22) $\rightarrow$ (2), (33) $\rightarrow$ (3), (12) $\rightarrow$ (4), (13) $\rightarrow$ (5), (23) $\rightarrow$ (6).

En el modelo de elementos finitos se ha empleado una malla de elementos sólidos hexaédricos de 27 nodos con integración completa en desplazamientos ($3 \times 3 \times 3$ en integración gaussiana), y para prevenir el bloqueo durante el flujo plástico provocado por la plasticidad isócora se ha empleado una formulación mixta u/p con 4 puntos de integración en presión. El problema se ha resuelto en elementos finitos con formulación no lineal según un esquema incremental clásico de Newton–Raphson con control de desplazamientos, esta operación se han llevado a cabo en el código de cálculo DULCINEA.

Los resultados se presentan gráficamente en la figura 7.7, donde se observa la malla original y la deformada, ésta última ha sido procesada según la distribución de deformación plástica equivalente (parámetro de consistencia plástica γ) con el resultado en el paso final de cálculo con el máximo desplazamiento aplicado. Este resultado se puede comparar con la solución contenida en la referencia [21], trabajo en el que se empleó el mismo código de cálculo de elementos finitos, si bien los modelos teórico y de computación elastoplásticos son diferentes al que aquí se propone.

Asimismo, en la figura 7.8 se recoge el resultado de la relación Fuerza/Desplazamiento obtenido en la simulación, donde se observa como los resultados están en perfecto acuerdo a los obtenidos por las referencias consideradas, incluyendo también los resultados experimentales originales de Norris [106]. Los otros modelos elastoplásticos originales de la literatura cinética son el modelo elastoplástico isótropo de Klinkel de la referencia [70], el modelo de Eidel-Gruttman [35], o el modelo de Simó-Armero [130], o en el de Miehe-Apel-Lambrech [98]. Todos ellos muestran también resultados muy parecidos, y manifiestan una gran coherencia con los resultados del modelo elastoplástico de esta tesis.

Según norma de este material normalizado, debe que tener una tensión máxima última (*ultimate tensile strength*) de valor medio 620 MPa sobre el diagrama de tracción y en términos ingenieriles. De acuerdo con la carga máxima de 77.1 kN obtenida en este cálculo, con referencia la sección inicial/nominal de la probeta, la tensión máxima resulta de valor 610 MPa.

Figura 7.7: Probeta cilíndrica de tracción. A la izquierda la malla tridimensional de elementos finitos (simetría de una octava parte de la geometría completa). Condiciones elastoplásticas de isotropía. Longitud total original = 53.34 mm; radio de la sección = 6.4135 mm. Derecha: configuración deformada y distribución de γ para la probeta sometida a un incremento de longitud de 14 mm.

7.1.4. Aplicación de materiales blandos en el problema de la placa con agujero

Este ejemplo de aplicación se lleva a cabo para demostrar la validez computacional del modelo elastoplástico sobre otros tipos de materiales menos habituales en ingeniería, como son los materiales blandos, donde estarían materiales biológicos y polímeros técnicos blandos en general, y que también son susceptibles de experimentar deformación permanente de carácter plástico, incluso con endurecimiento. Para resolver el modelo se configura el problema sobre una placa con agujero central y sometida a extensión en sus extremos. Un aspecto fundamental en estos materiales es la capacidad de deformación hiperelástica que poseen, es decir, elasticidad no lineal, una capacidad superior al resto de materiales de uso ingenieril, lo que obliga a considerar el uso de deformaciones finitas desde el origen del problema.

La importancia de este ejemplo, es que estos materiales experimentan un gran deformación elástica incluso antes de llegar a la zona plástica del material, mostrando

Figura 7.8: Ensayo de carga en probeta cilíndrica. Curva $F - u$ en tracción con estricción. Resultados experimentales en máquina de ensayos, y resultados numéricos del modelo elastoplástico de este trabajo y de otros autores [106], [130],[70],[98],[35], y [21]. Fuerza registrada en extremos f [kN] vs desplazamiento aplicado u [mm].

un comportamiento no lineal ya antes de la plastificación. Esta configuración de material es la más completa simulación que se puede llevar a cabo con el presente modelo elastoplástico, y pretende poner en evidencia las virtudes computacionales del mismo. Se han considerado las siguientes características en el material: anisotropía elástica y plástica con simetría de material de naturaleza ortótropa, considerando un endurecimiento combinado isótropo-cinemático, todo ello en deformaciones finitas.

El modelo preparado para el ensayo virtual es una placa plana con unas dimensiones de 32 mm en longitud, 16 mm de alto, y un agujero central con un diámetro de 8 mm. El espesor se puede considerar unitario al realizarse el ensayo en condiciones de deformación plana, ya que con estas condiciones de contorno las variables internas dentro del plano principal van a ser constantes e independientes del espesor. En la figura 7.9 se muestra la malla sin deformar que se ha empleado en las simulaciones, sobre el plano principal y configurada con elementos *2Dsolid* bidimensionales. En este caso se ha definido una malla con elementos cuadriláteros de 9 nodos, con integración completa en desplazamientos (3×3 *exact Gauss integration*), y con formulación mixta u/p , con 3 puntos de integración en presiones.

La placa se somete a un alargamiento de 6.4 mm en dirección longitudinal X , hasta alcanzar una elongación total del 20 %. Se imponen las mínimas condiciones de contorno necesarias para garantizar el equilibrio estático del problema y su solución

Figura 7.9: Ejemplo de placa con un agujero circular en materiales blandos. Malla sin deformar de elementos finitos bidimensionales bajo condiciones de deformación plana. Longitud = 32 mm; Alto = 16 mm; Diámetro del agujero = 8 mm. El ángulo α define la orientación de los ejes preferentes de material tomando de referencia el eje 1 (dirección a_1) con respecto del eje horizontal X .

numérica, y para cumplir con las condiciones de deformación plana en el modelo. Las direcciones XY marcan la referencia de ejes globales, mientras que las direcciones 12 sirven para definir las direcciones preferentes del material ortótropo, con un ángulo de fase variable α con el que se analizará el comportamiento anisótropo del material.

El primer conjunto de simulaciones aplicadas considera un material cuasi-imcompresible y una respuesta elastoplástica con endurecimiento cinemático, donde los parámetros de material han sido elegidos teniendo en cuenta el orden de magnitud correspondiente a este tipo de materiales blandos. Se han utilizado los siguientes valores para los módulos elásticos desviadores característicos del material, necesarios para la configuración de la función de energía desviadora de la ec. (6.34)

$$\begin{aligned} \mu_1^{int} &= 8 \text{ MPa}, & \mu_2^{int} &= 5 \text{ MPa}, & \mu_3^{int} &= 2 \text{ MPa}, & \mu_4^{int} &= 4 \text{ MPa} \\ \mu_1^{kin} &= 3 \text{ MPa}, & \mu_2^{kin} &= 2 \text{ MPa}, & \mu_3^{kin} &= 1 \text{ MPa}, & \mu_4^{kin} &= 1.5 \text{ MPa} \end{aligned}$$

el comportamiento de plastificación del material se describe a través del tensor de coeficientes de plastificación tipo Hill según la ec. (6.38) y del parámetro interno de fluencia plástica, cuyos valores son

$$k = k_0 = 4.4 \text{ MPa}, \quad \bar{N}_1 = 1, \quad \bar{N}_2 = 2.125, \quad \bar{N}_3 = 3.25, \quad \bar{N}_4 = 1$$

se hace uso de la notación matricial de Voigt, y por simplicidad hace uso de índices contraídos desde la forma tensorial original: $(11) \rightarrow (1)$, $(22) \rightarrow (2)$, $(33) \rightarrow (3)$ y $(12) \rightarrow (4)$. La función de energía volumétrica almacenada con penalización que se ha empleado en este ejemplo es [50]

$$\mathcal{U}(J) = \kappa(1 + J(\ln J - 1)) \quad (7.3)$$

Tabla 7.2: Casos con endurecimiento cinemático (Figura 7.10). Residuo de fuerzas y energías durante un paso hiperelástico y otro elastoplástico.

Paso/Iteración	Fuerza	Energía
4/1	1.000E+00	1.000E+00
4/2	1.753E−03	3.929E−06
4/3	1.584E−06	1.597E−12
4/4	3.613E−12	2.237E−25
15/1	1.000E+00	1.000E+00
15/2	1.326E−02	1.822E−04
15/3	1.218E−03	2.409E−07
15/4	4.342E−06	2.507E−12
15/5	1.355E−11	2.196E−22

con $\kappa = 10^4 \text{MPa}$, valor equivalente a un material que tuviera un módulo de Young del orden de 60 MPa, y un módulo de Poisson de 0.499.

A continuación se muestran los resultados del cálculo, identificando el parámetro de consistencia plástica γ (en la práctica deformación plástica acumulada), representado en bandas de colores sobre la malla de elementos finitos deformada bajo desplazamiento máximo. En la figura 7.10 se presentan los resultados de las cuatro diferentes orientaciones de ejes preferentes de material que se han aplicado en la placa, con el objetivo de poner de manifiesto los efectos de la ortotropía según diferentes orientaciones. La distorsión angular que muestra la placa ortótropa es consistente con la respuesta esperada en todos los casos, como se relata en la referencia [79].

Se pueden comprobar los efectos de la reducción de sección en el entorno del agujero (fenómeno de estricción o *necking*), y como estos efectos se acentúan para los casos concretos con las orientaciones $\alpha = 0^\circ$ y $\alpha = 15^\circ$. La deformación plástica presente en la placa está acompañada de deformaciones elásticas del mismo orden o magnitud en las diferentes zonas de la placa, y estas deformaciones elásticas se encuentran a su vez asociadas a la presencia de las tensiones correspondientes.

La carga de desplazamiento impuesta en el modelo se ha aplicado en todos los casos de forma progresiva a lo largo de 16 pasos intermedios (0.4 mm/paso), de manera que los primeros 4 o 5 pasos (dependiendo del caso computado) han resultado ser puramente hiperelásticos, con ausencia de plastificación, pero en deformaciones finitas y con presencia de la no linealidad geométrica correspondiente. Este aspecto pone de manifiesto la operatividad del modelo en grandes deformaciones, con o sin plasticidad resultante.

Para reforzar este argumento último, podemos observar los ratios de convergencia resultante en términos de fuerza residual y energía, que se muestran en la tabla 7.2, se observa como la convergencia cuadrática se alcanza con muy pocas iteraciones, durante la fase de comportamiento hiperelástico del material el modelo converge con 4 pasos iterativos, mientras que en la fase de comportamiento elastoplástico son necesarios 5 pasos de iteración para alcanzar la convergencia, que también es cuadrática, ambos resultados pueden calificarse de excelentes.

Figura 7.10: Ejemplo de placa con agujero circular central, con materiales blandos e incompresibles. Problema elastoplástico resuelto en DULCINEA con endurecimiento cinemático. Configuración deformada y distribuciones de γ para diferentes orientaciones: $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 15^\circ$, $\alpha = 30^\circ$ y $\alpha = 45^\circ$. Los resultados que se muestran en el espectro de colores están interpolados desde los puntos de integración.

Tabla 7.3: Caso con endurecimiento combinado cinemático-isótropo (Figura 7.11). Residuo de fuerzas y de energías durante un paso elastoplástico típico.

Paso/Iteración	Fuerza	Energía
15/1	1.000E+00	1.000E+00
15/2	2.620E-03	1.822E-05
15/3	1.219E-03	2.409E-06
15/4	1.806E-05	2.507E-10
15/5	6.958E-09	2.196E-18

Un segundo conjunto de simulaciones se han llevado a cabo posteriormente, para lo que se ha configurado el material con endurecimiento isótropo y conservando los valores del resto de parámetros definidos anteriormente. La función de endurecimiento isótropo considerada adicionalmente sobre la deformación plástica acumulada γ es del tipo lineal

$$k = k_0 + \bar{H}\gamma \quad (7.4)$$

tomando los valores $k_0 = \bar{H} = 4.4$ MPa, lo que implica que el parámetro k se duplica cuando γ alcanza el valor 1.

Los resultados que se obtienen en este caso de endurecimiento mixto se muestran en la figura 7.11, se presentan los resultados para diferentes orientaciones de los ejes preferentes de material respecto de la dirección de carga, que permanece invariante. Es fácil comprobar que la deformación plástica acumulada se ha reducido más o menos a la mitad con respecto a los valores obtenidos para el endurecimiento cinemático del caso anterior, mostrado en la figura 7.10, a pesar de aplicar las mismas condiciones de ensayo.

Los efectos de distorsión en la zona del taladro con sección reducida también se han atenuado, hay menos efecto de estricción. De forma simultánea, las deformaciones elásticas (y las tensiones asociadas) son mayores que las obtenidas en el grupo de simulaciones anteriores, consecuencia de una capacidad de endurecimiento mayor, y por ello una deformación plástica acumulada menor a igualdad de carga (desplazamiento).

Finalmente, la convergencia del modelo ha seguido siendo cuadrática durante los pasos de carga elastoplástica, y se ha alcanzado con muy pocos pasos de iteración, como se puede comprobar en la tabla 7.3. Los recursos computacionales que este caso de endurecimiento ha necesitado tampoco han diferido de forma significativa respecto del caso anterior, y el tiempo de computación requerido ha sido del mismo orden.

La excelente convergencia obtenida en este ejemplo pone de manifiesto la eficiencia computacional del modelo, cualidad derivada precisamente de haber desarrollado una formulación completamente simétrica sobre las deformaciones finitas empleadas en el algoritmo elastoplástico de cálculo, además de otras cualidades que han permitido un cálculo eficiente.

Figura 7.11: Placa con discontinuidad circular y con material incompresible elastoplástico resuelta en ADINA. Caso con endurecimiento combinado cinemático e isótropo. Configuración deformada y distribución de resultados en términos de γ para diferentes orientaciones de material, $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 15^\circ$, $\alpha = 30^\circ$ y $\alpha = 45^\circ$. Resultados interpolados desde puntos de integración.

7.2. Aplicación sobre el código ADINA

El modelo elastoplástico se ha aplicado con el soporte del paquete comercial de cálculo por elementos finitos ADINA. Se ha implementado una subrutina específica de material via UCMAT3 en formato *dll* compatible con el código de cálculo de ADINA. El código de la subrutina de usuario se deriva del desarrollado para su aplicación sobre DULCINEA, para ello se han llevado a cabo las adaptaciones oportunas y se ha compilado para su integración con el módulo de cálculo de estructuras de ADINA, de manera que la solución global del problema no lineal en la malla de elementos finitos la realiza ADINA con su código propio, y la solución local del problema elastoplástico en los puntos de integración también la realiza ADINA, pero con el código contenidos en la subrutina de usuario. El esquema elemental de comunicación entre ADINA y subrutina de material reproduce el esquema clásico de la formulación Total Lagrangian [13] y que relaciona el problema elastoplástico con el problema de contorno del método de los elementos finitos (figura 3.20).

En primer lugar ADINA proporciona los valores de las variables externas del problema a la subrutina, a partir de los desplazamientos impuestos traslada la deformación total a través de gradiente de deformaciones ${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{X}$, de acuerdo al *step* o paso de carga correspondiente, y también los valores de las variables internas del problema computadas y almacenadas en el *step* de carga anterior, que ahora son valores iniciales ${}^t_0(\circ)$. Con la subrutina de ADINA se calcula en cada punto de integración de cada elemento las variables internas correspondientes al mecanismo predictor-corrector según el código de usuario, y de estas variables ADINA recoge las necesarias para su uso en el problema de contorno, fundamentalmente la tensión $\mathbf{S}$ y el módulo elastoplástico $\mathbb{D}$, y almacena las demás variables para usos posteriores. Con estos valores actualizados ADINA puede calcular ya las matrices de rigidez de los elementos, y completar la solución final de cada *step* o paso de carga, todo ello en términos de desplazamientos nodales del modelo.

La ejecución de los ejemplos de cálculo se ha desarrollado en dos fases. En una primera fase el esquema de cálculo seguido pretende verificar algunos de los ejemplos resueltos previamente en DULCINEA, con el objetivo de comprobar el funcionamiento de la subrutina dentro de ADINA. Se ha aplicado el ejemplo de un único elemento operando elastoplásticamente en tracción uniaxial, y posteriormente se ha resuelto el problema de la probeta de tracción de acero aleado para comprobar todas las operaciones en un caso estándar. Finalmente se ha aplicado el ejemplo de la placa con agujero sobre un material blando hiperelastoplástico incompresible y anisótropo.

En una segunda fase se ha aplicado el cálculo sobre otros ejemplos elastoplásticos que no habían sido resueltos con DULCINEA. Estos ejemplos han tenido como objetivo la solución de un problema de conformado plástico anisótropo, donde es necesario un código de cálculo con un soporte robusto al problema de contacto entre sólidos deformables, problema que exige herramientas de computación específicas no implementadas aún en DULCINEA, pero si disponibles en ADINA. Se ha escogido el problema del conformado por embutición profunda por ser un ejemplo clásico de la literatura técnica y cinética donde se aplican las deformaciones finitas con anisotropía, y por ser el resumen perfecto de las capacidades computacionales del modelo elastoplástico propuesto.

7.2.1. Ejemplos de comparación ADINA-DULCINEA

7.2.1.1. Ejemplo de ADINA con material incompresible ortótropo

El primer ejemplo utilizado para comparar los resultados entre la subrutina de ADINA y el código en DULCINEA ha sido el contemplado en el apartado 7.1.2, con el objetivo de validar la programación llevada a ADINA con diferentes direcciones de ortotropía y al mismo tiempo un comportamiento incompresible.

Se ha conformado el modelo con un único elemento de 8 nodos con formulación mixta u/p $8 - 1$, con dimensiones unitarias en todos sus lados. Se han reproducido las mismas condiciones que las descritas en el apartado 7.1.2, tanto en carga como en condiciones de contorno, un desplazamiento máximo equivalente a obtener una deformación principal logarítmica de valor unidad en un ciclo de carga completo con reversa de la cara en expansión-contracción (tracción-compresión).

En la figura (7.12) se muestra el ciclo de carga aplicado en tensiones rotadas de Kirchhoff y deformaciones principales logarítmicas. En la subfigura (a) se representa el caso de carga en dirección $\mathbf{x}$, coincidente con la dirección preferente 1 de material, así la imagen de la izquierda muestra el comportamiento tensión-deformación, y en la imagen de la derecha la relación entre la deformación de carga E_1 y otra de las deformaciones en direcciones principales, en este caso la 2. En las subfiguras (b) y (c) se muestra el mismo comportamiento con la misma carga en las otras direcciones de material, 2 y 3.

Si se comparan estos resultados con los obtenidos en la figura 7.6 que contiene los resultados de DULCINEA, no se aprecian diferencias, mostrando la corrección de la subrutina de usuario programada para ADINA.

7.2.1.2. Ensayo virtual de tracción sobre probeta cilíndrica con estricción en ADINA

El ensayo virtual de tracción elastoplástica se ha llevado a cabo en ADINA utilizando diferentes configuraciones de elementos finitos, con objeto de comprobar la sensibilidad que la malla podría representar en los resultados.

En un primer lugar se han empleado modelos con elementos finitos de 8 nodos, donde el problema del bloqueo se ha solventado utilizando formulación de desplazamientos a través del uso de funciones enriquecidas o incompatibles o de Wilson, y posteriormente a través del uso de formulación mixta de desplazamientos y tensiones hidrostáticas, conocida como formulación u/p , esta opción es necesaria para evitar el problema de bloqueo numérico de la solución, que pudiera surgir por la isocoricidad del proceso de deformación plástica. La configuración de ambos modelos ha sido exactamente la misma, ya que las diferencias solo se hallan en la técnica con que se construyen matemáticamente las matrices de rigidez de los elementos finitos. Se ha utilizado como referencia el ensayo virtual del trabajo [130], donde se proponían diferentes soluciones en la malla aplicada al modelo para comprobar la eficiencia del cálculo.

Los primeros resultados obtenidos no se aprecian diferencias remarcables en el campo de deformaciones plásticas resultante entre ambas opciones: modos incompatibles y formulación mixta, pero si se observan diferencias en el resultado numérico obtenido en la curva $F - u$ representativa del ensayo de tracción, mostrando el mejor ajuste a las referencias utilizadas el resultado proporcionado por el modelo

7.2. Aplicación sobre el código ADINA

Figura 7.12: Ensayo de tracción uniaxial en el sólido ortótropo e incompresible. Ejemplo del apartado 7.1.2., (a) carga impuesta en dirección x ; (b) carga impuesta dirección y ; (c) carga impuesta en dirección z . Gráficos de comportamiento obtenidos directamente de ADINA.

con formulación mixta u/p , tal y como cabía esperar pues esta formulación es más adecuada para problemas elastoplásticos, por lo que es este caso el que se ha tomado en consideración, pues en problemas con condiciones de contorno de restricción a la deformación están recomendados. Estos resultados comparativos finalmente no se ha incorporado a los resultados de la tesis, con el objetivo de preservar la claridad en la exposición de los resultados finales.

Para tratar el problema de la convergencia de malla en el modelo, y comprobar la independencia de resultados con respecto al número de elementos utilizados y la calidad de los mismos, se ha aplicado sobre este problema diferentes mallas sobre la misma geometría. En el modelo original de DULCINEA, de la figura 7.7, se habían empleado elementos de 27 nodos con formulación u/p 27 – 4 (27 puntos de integración en desplazamientos y 4 puntos de integración en presiones), obteniéndose resultados óptimos. En el modelo resuelto con ADINA se ha utilizado una malla con el conocido elemento lineal de 8 nodos Q1/P0 de formulación mixta u/p 8 – 1 (8 puntos de integración en desplazamientos y 1 punto de integración en presiones).

Con objeto de analizar la sensibilidad de los resultados con la malla de elementos utilizada en el modelo, se han llevado a cabo ensayos adicionales sobre la probeta anterior, el primero con el mismo tipo de elementos pero con una malla refinada de mayor densidad, mientras que en el segundo ensayo se ha utilizado la misma malla inicial, pero utilizando elementos de alto orden, utilizando elementos de 27 nodos del tipo u/p 27 – 4 de semejante naturaleza a los empleados en DULCINEA.

En primer lugar se ha analizado la deformación plástica acumulada, representada a través de la variable interna γ (multiplicador plástico asociativo interpretado como deformación plástica equivalente). En los casos analizados se comprueba como esta deformación plástica acumulada en la zona de estricción una localización con un valor máximo de entre 1.8 y 1.9, independientemente de la configuración de elementos aplicada, por lo que se puede concluir que la malla no tiene efectos sensibles sobre el resultado. En la figura 7.13(a) se exponen los resultados para el modelo con elementos de 8 nodos, que contiene un total de 3024 elementos, y como en todos los casos de la literatura, para ahorrar coste computacional solo está refinada la malla de aquellos elementos afectados por la localización de la deformación plástica, la estricción.

En la figura 7.13(b) se representan los resultados para el modelo con una malla más refinada en el conjunto, y especialmente en la zona de localización de la deformación plástica, en el que se han utilizado un total de 6048 elementos, configurados con los mismos elementos originales de 8 nodos. En la figura 7.13 (c) se representan los resultados para un modelo con la misma malla original de elementos, con un total de 3024 elementos, pero empleando elementos de 27 nodos, también con formulación u/p .

Se han interpretado los resultados a través de la fuerza desarrollada, representando al diagrama $F - u$ del ensayo de tracción en la figura 7.14. Se muestran los resultados con la subrutina en ADINA, así como los anteriores de DULCINEA del apartado 7.1.3. Todas las curvas $F - u$ muestran resultados consistentes, únicamente la fuerza máxima permite apreciar alguna diferencia, ya que con DULCINEA la fuerza máxima era de 77.2 kN, y con ADINA es 77.8 kN, diferencia por debajo del 1 %. La fuerza máxima está por debajo de 78 kN, cifra que aparece en las referencias utilizadas, la fuerza máxima obtenida en ADINA daría una tensión ingenieril última de 615 MPa, frente a los 610 MPa obtenidos con DULCINEA.

Figura 7.13: Probeta cilíndrica de tracción. (a) mallas original y deformada después de aplicar un desplazamiento de $7.4mm$; se identifican los resultados de deformación plástica acumulada en modelo con elementos de 8 nodos sobre una malla de 3024 elementos. Abajo los mismos resultados en (b) modelo con elementos de 8 nodos sobre una malla de 6048 elementos, y en (c) modelo con elementos de 27 nodos sobre una malla de 3024 elementos.

Figura 7.14: Diagrama fuerza-desplazamiento sobre probeta cilíndrica de tracción. Resultados obtenidos en los modelos de DULCINEA y ADINA (con 8, 27 nodos y con 8 nodos y el número de elementos duplicado). Curva $F - u$: fuerza equivalente registrada en extremos F [kN] vs desplazamiento aplicado u [mm].

Asimismo, de la referencia [98] se ha tomado en comparación el dato de estricción máxima, representado en la reducción del radio registrado en la sección recta durante la plastificación, este resultado se ha representado frente al desplazamiento de carga aplicado en la figura 7.15. El ajuste de resultados entre el modelo presentado y la referencia no presenta ninguna discrepancia. Comparando los gráficos de las figuras 7.15 y 7.14 se observa como el cambio de tendencia en la reducción de sección por localización de la deformación plástica coincide con el máximo de tensión ingenieril, cuando los efectos de la deformación finita se hacen más obvios.

De la observación de resultados entre modelos con diferentes mallas sobre el mismo problema se comprueba como los resultados son consistentes, no se aprecian diferencias significativas, ni en las variables internas del problemas (deformaciones plásticas o elásticas), ni en las variables externas (fuerza-desplazamiento). La consistencia se observa entre modelos con elementos de diferente orden, 8 nodos en ADINA y de 27, y los resultados son fieles a los obtenidos previamente con DULCINEA, si tomamos como referencia la figura 7.7.

7.2.1.3. Aplicación de materiales blandos en el problema de la placa con agujero en ADINA

El ensayo virtual de la placa con agujero con material blando incompresible se ha llevado a cabo en ADINA utilizando elementos sólidos 3D, este ejemplo había sido

Figura 7.15: Estricción de la sección recta: máxima contracción en la localización de la deformación plástica. Resultado en ADINA comparado con el obtenido de la referencia [98]: desplazamiento radial u_r [mm] vs desplazamiento de carga aplicado u_x [mm].

resuelto en DULCINEA utilizando elementos sólidos bidimensionales con ecuaciones constitutivas en deformación plana, ya descritas en la formulación del elemento finito. Esta decisión tenía por objetivo proporcionar un estado tensional plano independiente del espesor de material.

En el caso del ejemplo en ADINA, este estado de deformación plana se ha conseguido a través de la imposición de condiciones de contorno, impidiendo los desplazamientos en las caras frontales de los elementos de la placa. Esta modificación de la configuración del ensayo afecta además de a las condiciones de contorno, a algunas propiedades del material que han de ser definidas para su manipulación matemática en un tensor tridimensional, concretamente el tensor de plastificación de Hill, que al incorporar la tercera dimensión, obliga a añadir dos grados de libertad más, concretamente los parámetros de cortante $\bar{N}_5$ y $\bar{N}_6$, que ahora han sido definidos como los de un material isótropo en esas dos direcciones acopladas, quedando así el tensor $\bar{N}$ como

$$\bar{N}_1 = 1, \quad \bar{N}_2 = 2.125, \quad \bar{N}_3 = 3.25, \quad \bar{N}_4 = 1, \quad \bar{N}_5 = 0.5, \quad \bar{N}_6 = 0.5$$

La diferencia más notable entre ambos modelos está en el coste computacional, mayor en el caso tridimensional al utilizar un modelo con un mayor número de grados de libertad. Por otro lado esta acción evita tener que redefinir la subrutina de Adina para resolver el problema en 2 dimensiones.

Los resultados obtenidos entre el modelo plano de DULCINEA y el tridimensional de ADINA son consistentes, y las diferencias se deben más a las particularidades de cada código de elementos finitos, que no a la formulación del problema elastoplástico respecto de las dimensiones del mismo.

En el problema de ADINA se han aplicado los mismos pasos de carga que en DULCINEA, en total 16, para completar la solución de un desplazamiento impuesto de

6.4mm. Los resultados obtenidos son muy semejantes entre ambos ejemplos, como se observa en una comparación entre los resultados de ADINA mostrados en las figuras 7.16 y 7.17, y los de DULCINEA mostrados en las figuras 7.10 y 7.11, se comprueba entre ambos casos como la deformación plástica acumulada resultante en las diferentes configuraciones analizadas es muy parecida, y solo se hallan muy leves diferencias en los valores máximo mostrados, que son valores interpolados desde los puntos de integración en los elementos de ambos modelos.

Si se comparan los pasos o *steps* intermedios, los parámetros de convergencia no son comparables entre ambos códigos, pues cada código emplea procedimientos iterativos diferentes para la resolución del problema de contorno no lineal (las iteraciones globales) , pero si se comprueba como los 5 u 8 primeros *steps* de carga suceden en régimen hiperelástico incompresible y con una convergencia muy rápida (con muy pocas iteraciones, nunca más de 5 en ADINA), antes de que en el siguiente paso el problema sea completamente elastoplástico, momento en el que crece el número de iteraciones necesario para la convergencia, y que lógicamente cambia al darse la pérdida de rigidez del material.

En las figuras 7.19 y 7.18 se muestran los resultados de fuerza desplazamiento de los casos analizados, agrupados según el endurecimiento aplicado, de tipo cinemático (figura 7.19) o combinado (figura 7.18). También se ha representado la deformación plástica acumulada según el desplazamiento impuesto en cada *step* de carga, pudiéndose observar como los primeros pasos del problema no lineal registran deformación plástica nula en todos los casos, y simultáneamente el modelo empieza a mostrar un incipiente comportamiento hiperelástico no lineal en esos primeros pasos previos a la plastificación, especialmente observable en el caso de material orientado a 45° respecto de la carga, ejemplo donde la rigidez del modelo es menor que en los demás.

La fuerza representada es sumatorio de la fuerza medida en los nodos que tenían impuestas las condiciones de contorno de equilibrio estático, y sobre la componente de dirección del desplazamiento de carga impuesto. La deformación representada en los gráficos corresponde al valor promediado por elemento respecto de sus puntos de integración, y se han seleccionado para ello el elemento más deformado situado en el perímetro del taladro circular, donde se produce la concentración de tensiones más relevante.

De la observación de las figuras 7.18 y 7.19 se comprueba como la orientación preferente de material a 0° respecto de la dirección de carga, es la configuración donde la deformación plástica aparece antes, cuando dirección principal de tensión y dirección preferente de material coinciden.

En el caso del material con endurecimiento combinado isótropo-cinemático, se observa como a elevadas deformaciones aparece un incremento de deformación plástica que sale de la monotonía que registran el resto de casos, es evidente que este comportamiento se debe a una particularidad numérica con el endurecimiento isótropo lineal, pues este comportamiento no está presente en el otro caso de endurecimiento cinemático.

Figura 7.16: Placa con discontinuidad circular y con material incompresible elastoplástico resuelta en ADINA. Caso con endurecimiento cinemático. Configuración deformada y distribuciones de γ para diferentes orientaciones: $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 15^\circ$, $\alpha = 30^\circ$ y $\alpha = 45^\circ$. Resultados extrapolados desde los puntos de integración.

Figura 7.17: Placa con discontinuidad circular y con material incompresible elastoplástico resuelta en ADINA. Caso con endurecimiento combinado cinemático e isotrópico. Configuración deformada y distribuciones de γ para diferentes orientaciones: $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 15^\circ$, $\alpha = 30^\circ$ y $\alpha = 45^\circ$. Resultados extrapolados desde los puntos de integración.

Figura 7.18: Resultados de fuerza (arriba) y deformación plástica (abajo) obtenidos según el desplazamiento aplicado en el problema con endurecimiento combinado, resuelto en ADINA. Resultados para diferentes orientaciones de direcciones preferentes de material respecto de la dirección de carga (ángulo α).

Figura 7.19: Resultados de fuerza (arriba) y deformación plástica (abajo) obtenidos según el desplazamiento aplicado en el problema con endurecimiento cinemático, resuelto en ADINA. Resultados para diferentes orientaciones de direcciones preferentes de material respecto de la dirección de carga (ángulo α).

7.2.2. Ejemplos de conformado elastoplástico con anisotropía en deformaciones finitas

El problema del conformado plástico en simulación es una de las aplicaciones prácticas más interesantes de la computación elastoplástica, pero es también un aplicación compleja, por la dificultad de definir correctamente los parámetros del problema y por la cantidad de recursos de computación que se consumen, ya que aparecen serias dificultades de convergencia, y se precisan tiempos de cálculo elevados para alcanzar una solución válida. En la modelización de este problema en elementos finitos es necesario el uso de herramientas adicionales para modelizar el contacto entre los cuerpos deformables y rígidos que normalmente intervienen. Estas herramientas de apoyo necesarias para resolver eficazmente el problema de contacto, no están disponibles en el código DULCINEA para afrontar con éxito este tipo de problemas, por lo que su puesta en práctica solo se ha llevado a cabo tras la integración de la subrutina de material en ADINA.

El problema que se ha escogido para comprobar el funcionamiento de la subrutina y el modelo de material de este trabajo de tesis, es el de el conformado por embutición profunda de una pieza metálica de chapa plana, procedimiento con el que se fabrican recipientes metálicos y plásticos. El material de partida que se ha considerado es una preforma de chapa metálica.

7.2.2.1. Problema de la placa circular plana en ADINA

Como primer paso o aproximación a la resolución del problema de conformado elastoplástico, que incluye las condiciones de contacto de los útiles de embutición, es común llevar a cabo ensayos previos en el plano donde se simula el comportamiento cinemático del material de forma individual, es decir: sin intervenir el problema de contactos, así se comprueba el comportamiento del modelo de cálculo desde un punto de vista puramente elastoplástico del material. Este ensayo numérico previo también va a poner de manifiesto el comportamiento anisótropo plástico. Este ejemplo se puede encontrar numerosas referencias, para la validación de este modelo se han considerado las referencias [110],[98],[99],[71],[149],[21].

Este ensayo emplea una preforma circular con un agujero central, sobre el que se impone un desplazamiento radial plano. Los efectos de estirado que provoca el útil de carga o punzón del problema de embutición se visualizan en la preforma circular con un desplazamiento sobre el perímetro exterior, causando una deformación del borde libre que revela los efectos de la anisotropía plástica. Por otro lado la preforma es sometida a las condiciones de contorno necesarias para garantizar el equilibrio estático en todo momento, y evitar el comportamiento de sólido rígido.

En la figura 7.20 se muestra un croquis de la preforma de ensayo. Las dimensiones de la placa circular descrita en las referencias citadas son un radio exterior de 400mm, un radio interior de 200mm, y un espesor de 10mm.

Los ensayos se han llevado a cabo sobre un modelo completo de la placa original, aunque se podría haber hecho uso de las simetrías geométricas y de ortotropía del material, ya que los efectos simétricos se reproducen con periodicidad de 90°, pero en este caso el coste computacional de no aplicar la mencionada reducción es asumible, algo que no ocurre en el ejemplo de la embutición profunda, de un coste de computación

muy importante.

Caso 1. El primer ensayo se ha realizado sobre la referencia [21], ya que utiliza un modelo elastoplástico que comparte muchas similitudes con el modelo que se propone en esta tesis, como el uso de una descripción cinemática en deformaciones logarítmicas lagrangianas y tensiones generalizadas de Kirchhoff, un criterio de plastificación de tipo Hill, o el haber sido resuelto con el código DULCINEA, por tanto con parámetros comunes a otros ejemplos anteriores. Como diferencias encontramos el uso de una ley de evolución basada en el tensor de Mandel y su integración con aproximación exponencial, ambos ingredientes ausentes en el modelo de esta tesis.

El material empleado es un acero aleado con anisotropía plástica y endurecimiento isótropo, cuyos parámetros característicos se citan en la tabla 7.4. La única adaptación al modelo presente de estos datos, es el de los coeficientes de plastificación de la función de Hill, normalizados a la formulación del modelo según la ec. (6.38) y son

$$\bar{N}_1 = \bar{N}_2 = \bar{N}_3 = 1, \quad \bar{N}_4 = \bar{N}_5 = \bar{N}_6 = 2.666$$

estos parámetros aparentemente iguales, axiales de un lado y cortantes de otro, pueden hacer pensar en un material isótropo, pero realmente corresponden al caso de un material anisótropo con simetría ortótropa cúbica, donde la tensión de plastificación en cortante no se corresponde con la tensión característica del caso isótropo, sino que en este material es de mayor valor.

En la preforma circular de material se le ha usado una malla de elementos semejante al trabajo de referencia, con los elementos de 8 nodos con formulación mixta u/p de ADINA. Se han definido 12 elementos en dirección radial y 64 elementos circunferencialmente, y 1 elemento único en el espesor, resultando un total de 768 elementos. Se han definido condiciones de contorno que garantizan un resultado independiente del espesor de material, y se ha impuesto un desplazamiento radial de $75mm$, que es realmente grande para las dimensiones de la preforma.

Los resultados obtenidos se presentan en la figura 7.21(a), se representa la deformación plástica acumulada comparada con los resultados de la referencia [21]. La comparación de estos resultados en términos de la deformación plástica acumulada permite comprobar la afinidad de los mismos, solo los colores de las escalas son

Figura 7.20: Performa circular para el ensayo de previo de embutición en el plano. A la izquierda las dimensiones y desplazamientos impuestos. A la derecha modelo de elementos finitos hexaédricos.

Tabla 7.4: Propiedades de material en placa circular con agujero, datos extraídos de [21].

Módulo de compresibilidad hidrostática	$\kappa = 164.2 \text{ GPa}$
Módulo desviador interno	$2\mu_{int} = 160 \text{ GPa}$
Módulo desviador externo	$2\mu_{kin} = 0 \text{ GPa}$
Parámetros de endurecimiento isótropo - Ley de Voce	
Tensión de fluencia plástica	$k_0 = 450 \text{ MPa}$
Parámetro límite de tensión	$k_\infty = 450 \text{ MPa}$
Módulo de endurecimiento lineal	$\bar{H} = 100 \text{ MPa}$
Parámetro de endurecimiento exponencial	$\delta = 0$
Parámetros plásticos de anisotropía de Hill	
$f = g = h =$	0.333
$l = m = n =$	8

diferentes por haberse procesado con herramientas diferentes, pero los valores obtenidos son semejantes en todo el sólido.

La presencia de la anisotropía del material se aprecia en la distorsión de la forma circular original, los coeficientes del tensor plástico de Hill determinan como la plastificación se desarrolla de manera diferente en el material según la dirección, y aunque todo el material este gobernado por la misma ley evolutiva, la dependencia direccional provoca también un endurecimiento diferente y la aparición de las orejas clásicas de anisotropía en el perímetro exterior.

Para comprobar la influencia de la malla de elementos definida en la preforma, se ha llevado a cabo este mismo ensayo empleando otras configuraciones. En el primer caso se ha empleado una malla más refinada utilizando los mismos elementos de 8 nodos de formulación mixta usados anteriormente, mientras que en un segundo caso se ha utilizado la misma densidad inicial de elementos, pero definiendo elementos de mayor orden, elementos de 27 nodos con formulación mixta u/p .

Los resultados obtenidos con ADINA se presentan en la figura 7.21(b). Como se puede comprobar apenas hay diferencias en los resultados respecto de la malla original de 8 nodos de la figura 7.21(a), ni tampoco con los de la referencia [21]. Se puede concluir por tanto que la calidad de la malla empleada es adecuada para reproducir este problema elastoplástico de la placa circular con agujero correctamente.

Caso 2. En un segundo ensayo de validación se ha considerado el trabajo original de la referencia [110], que además de ser un ejemplo ya clásico en este tipo de casos, el modelo de cálculo que contiene presenta importantes diferencias respecto del modelo que aquí se defiende. La diferencia más importante entre ambos trabajos es la naturaleza aditiva de las deformaciones finitas que se emplean en la formulación del trabajo [110], donde se acepta que las deformaciones internas elásticas y plásticas se relacionan con la deformación finita total de forma aditiva, semejante a las deformaciones infinitesimales (ec. 4.1), en cambio en este trabajo de tesis esa relación de deformaciones como variables internas es multiplicativa (ec. 4.44). Desde un punto de vista cinemático del problema, el modelo de [110] utiliza una descripción en

Figura 7.21: (a) Placa circular con agujero, resultados comparados con [21]; malla deformada con la de deformación plástica equivalente en diferentes momentos del desplazamiento impuesto: 25 mm, 50 mm, 75 mm. Izquierda: modelo de anisotropía plástica utilizando la subrutina de usuario en ADINA con 768 elementos de 8 nodos. Derecha: modelo [21]. (b) Malla deformada y deformación plástica equivalente final ($u = 75 \text{ mm}$): izquierda: modelo utilizado en ADINA con elementos de 8 nodos (1536 elementos); derecha: modelo elementos de 27 nodos (768 elementos).

deformaciones de Green-Lagrange y tensiones segundas de Piola-Kirchhoff, siendo este otro aspecto diferenciador importante.

Como puntos en común entre ambos modelos podemos citar la utilización de una función de plastificación sobre tensiones desviadores de la familia de Hill, particularizada para el uso de tensiones y deformaciones finitas, y una definición hiperlástica de la energía libre almacenada de tipo cuadrático, aunque se aplique sobre deformaciones que estén consideradas aditivas. Los ensayos de [110] también han sido reproducidos en la referencia [98], por lo que también estos resultados serán considerados más adelante.

La preforma circular de material que se utiliza en [110] es geoméricamente igual a la usada en el ejemplo anterior, y el material posee la misma simetría ortótropa, por lo que se ha reutilizado la misma malla de elementos mostrada en la figura 7.21. Esta decisión se ha tomado a pesar de que en el trabajo original de [110] contiene una malla con menos elementos, tanto en dirección radial como en dirección circunferencial, sin embargo de acuerdo a los resultados presentados en la figura 7.21(b), la malla empleada garantiza un comportamiento del modelo independiente del número de elementos utilizados.

El material también es un acero de baja aleación con plastificación anisótropa y endurecimiento isótropo lineal, común en la industria del conformado, con los mismos parámetros elastoplásticos descritos en la tabla 7.4. En este tipo de aceros, los coeficientes de Hill dependen en gran medida del tratamiento térmico aplicado al material metálico, por lo que en [110] se consideran dos casos deferentes de plastificación, el caso (A) y el caso (B); tomando los datos de la referencia, en ambos casos los coeficientes de Hill descritos en [110] han sido normalizados según la ec. (6.38), son ahora

$$\begin{array}{ll} \text{caso A} & \bar{N}_1 = \bar{N}_2 = \bar{N}_3 = 1, \quad \bar{N}_4 = \bar{N}_5 = \bar{N}_6 = 2.666 \\ \text{caso B} & \bar{N}_1 = \bar{N}_2 = \bar{N}_3 = 1, \quad \bar{N}_4 = \bar{N}_5 = \bar{N}_6 = 0.166 \end{array}$$

Los resultados que se obtienen se muestran en la figura 7.22. Entre ambos casos (A) y (B) se aprecian las diferencias en el comportamiento elastoplástico a través de la posición de las orejas de plastificación características de la anisotropía plástica. En los resultados de la figura 7.22 se observa como cuando el coeficiente de Hill normalizado de cortante es superior a 0.5 (1.5 en la formulación original de la ec. (3.75)), domina la plastificación en tensiones cortantes máximas en el plano, que se dan en direcciones a 45° respecto de las principales, y así en el caso (a) son esas las direcciones sobre las que aparece el fenómeno de *earring*, las clásicas orejas de anisotropía, ya que las direcciones principales normales de tensión dominante resultan ser paralelas respecto de la orientación base.

En el caso (b), donde el coeficiente de Hill normalizado de cortante es inferior a 0.5, domina la plastificación en tensiones principales desviadoras, y ocurre preferentemente en las direcciones a 0° y 90°; este comportamiento se debe a que las tensiones principales dominantes en este problema resultan también ser paralelas respecto de la orientación base, y ahora es ahí donde está presente mayor cantidad de deformación plástica y donde aparecen las clásicas orejas de anisotropía plástica.

Los resultados de plastificación acumulada en la figura 7.22 son coherentes con los resultados que aparecen en la referencia [110]. El caso (a) presenta una deformación

Figura 7.22: Placa circular con agujero. Malla deformada y deformación plástica equivalente final ($u = 75mm$). Se contraponen los resultados obtenidos con el modelo de ADINA (izquierda), frente al modelo de [110]. (a) material A - coeficiente de plastificación en cortante superior al valor de isotropía, (b) material B - coeficiente de plastificación en cortante inferior al valor de isotropía.

plástica acumulada máxima de 0.435 en el trabajo de Papadopoulos, mientras que el modelo de esta tesis muestra un valor máximo de 0.470; el caso (b) presenta una deformación plástica acumulada máxima de 1.070 en el trabajo de Papadopoulos, mientras que el modelo de esta tesis muestra un valor máximo de 1.055. Entre ambos casos, este valor de deformación aparece sobre elementos con diferente localización, pero estas pequeñas discrepancias que se dan en el mapa de deformación plástica acumulada, se pueden explicar en las diferencias de configuración del problema de elementos finitos, tanto desde el punto de vista de la formulación, como de la malla de elementos empleada, que en el trabajo de referencia [110] la malla es más tosca, ya que posee 320 elementos, y se puede considerar poco detallada para los estándares de cálculo utilizados hoy en día, cuando la malla de este modelo, como se ve en la figura 7.22, posee 768 elementos. Actualmente la potencia de computación ha crecido respecto a la fecha de publicación del trabajo [110], y hoy es común utilizar mallas con un mayor número de elementos. No obstante la consistencia de resultados entre ambos modelos es buena.

Caso 3. En este caso se han tomado como referencia los resultados de [98] que reproduce los mismos ensayos de [110], utilizando el mismo material con un modelo

Figura 7.23: Placa circular con agujero. Malla deformada y deformación plástica equivalente final ($u = 75mm$). En la parte superior de la imagen se reproducen los resultados del modelo elastoplástico resuelto en ADINA, y debajo los resultados extraídos de la referencia [98], para ambos casos de material A-(a) y B-(b).

elastoplástico diferente, con deformaciones logarítmicas pero con una métrica plástica aditiva en las deformaciones, empleando tensores punto a punto para operar el cambio de configuración intermedia a referencia, y con una integración exponencial clásica en el corrector plástico.

Para este caso se ha empleado una malla de elementos igual a la contenida en [98]. El número de elementos es el mismo, y la tipología son elementos hexaédricos de 8 nodos con formulación híbrida de Abaqus. Los resultados de esta comparación se muestran en la figura 7.23, donde los resultados en deformación plástica acumulada son incluso más cercanos que el caso comparativo anterior con [110].

En la misma referencia [98] se encuentra también presentado el resultado de fuerza nodal en los nodos de carga, sobre los que se ha impuesto el desplazamiento radial de 70 mm, y que se interpretarían como una fuerza de embutición equivalente. Estos datos se han obtenido también en el modelo de ADINA y se han representado en la figura 7.24. Los puntos considerados se han designado como P y Q , y su posición se ubica en

Figura 7.24: Placa circular con agujero: fuerzas nodales en los puntos nodales P y Q , casos (a) y (b) con diferente configuración de material y comparados con los resultados equivalentes contenidos en la referencia [98].

la figura 7.20, el punto P situado en la dirección principal de material, mientras que Q está situado en la dirección a 45° de la principal de material.

Los resultados muestran como la fuerza nodal desarrollada es mayor en la dirección con menor presencia de plastificación, donde menos efecto de ablandamiento o relajación de tensiones ha tenido lugar; en el caso (a) esta circunstancia se presenta en el punto P , mientras que en el caso (b) este comportamiento aparece sobre el punto Q .

Los resultados de esta fuerza nodal entre el presente modelo de ADINA y la referencia [98] muestran una relación estrecha con leves diferencias, que se explican en que ambos casos se resuelven con modelos de cálculo diferentes y programas diferentes. Las diferencias más notables se hallan en el mecanismo predictor-corrector, completamente elástico en el presente modelo, frente al clásico elástico-plástico en [98], o en deformaciones, descritas en el modelo de esta tesis con una métrica multiplicativa, mientras que en [98] se emplea una métrica aditiva.

Caso 4. Este caso se llevan a cabo ensayos numéricos que no se encuentran reproducidos en otras referencias bibliográficas. Se ha recurrido a un acero típico de estampación, el DP600, del que la bibliografía hace uso extensivo en ensayos de embutición, pero donde se usan parámetros de material con valores muy dispersos y dependientes del estado de tratamiento del lote empleado. Estos parámetros van desde el endurecimiento isótropo al endurecimiento combinado, o un módulo de elasticidad de Young con cifras que varían más de un 15 %.

En primer lugar se ha llevado a cabo un ajuste de los parámetros de material utilizando los datos de [148]. Se han considerado tres casos de endurecimiento: isótropo puro, cinemático puro y combinado isótropo-cinemático. El conjunto de parámetros de material utilizados se recogen en la tabla 7.5, y se han completado aplicando los procedimientos y ecuaciones descritos en el capítulo 6.

En primer lugar se ha llevado a cabo un procedimiento de calibración con ensayos de tracción contenidos en [148]. Se han desarrollado un ensayo cíclico de carga sobre un único elemento tridimensional de dimensiones unitarias, con una imposición de desplazamiento cíclico completo en carga y descarga, con un alargamiento máximo λ de valor 1.175, y se ha ejecutado sobre los materiales de la tabla 7.5. En la figura 7.25 se muestra el resultado de estos ensayos con diferente endurecimiento y se compara con los resultados experimentales disponibles.

Los resultados individuales de cada ensayo con su endurecimiento particular se muestran en la figura 7.26, enfrentados a los datos extraídos de [148]. El ensayo con endurecimiento isótropo (gráfico de la izquierda) muestra un ajuste muy preciso con el modelo de referencia, se observa como el grado de deformación aplicado prácticamente ha saturado el endurecimiento isótropo simulado con la ley de Voce, y así en la fase de inversión de carga prácticamente no aparecer endurecimiento adicional al producido en la fase inicial de carga.

El ensayo con endurecimiento cinemático (gráfico central) muestra un ajuste muy correcto en valores límite, pero evidencia que el endurecimiento cinemático del modelo de esta tesis es de carácter lineal, y no puede reproducir un endurecimiento no lineal, sin embargo los resultados del modelo de [148], donde se utiliza un endurecimiento no lineal de tipo Armstrong-Frederick, tampoco son óptimos, pues muestra como al completar un ciclo completo de carga no se recupera la energía elástica congelada cinemáticamente

Figura 7.25: Comportamiento unidimensional en tracción: acero DP600 con los tres endurecimientos y datos experimentales extraídos de [148]. Los parámetros de material han sido determinados según el procedimiento descrito en el capítulo 6.

Figura 7.26: Comportamiento unidimensional en tracción: acero DP600 con diversos endurecimientos comparados con [148]. (izquierda) isótropo no lineal (centro) cinemático lineal (derecha) combinado isótropo-cinemático. Los parámetros de material han sido determinados según el procedimiento descrito en el capítulo 6.

Tabla 7.5: Propiedades de material DP600 con endurecimiento isótopo

<u>DP600 con endurecimiento isótopo</u>	
Módulo de compresibilidad hidrostática	$\kappa = 147.2 \text{ GPa}$
Módulo desviador interno	$2\mu_{int} = 155 \text{ GPa}$
Módulo desviador externo	$2\mu_{kin} = 0 \text{ GPa}$
Tensión de fluencia plástica	$k_0 = 325 \text{ MPa}$
Parámetro límite de tensión	$k_\infty = 745 \text{ MPa}$
Módulo de endurecimiento lineal	$\bar{H} = 0 \text{ MPa}$
Parámetro de endurecimiento exponencial	$\delta = 20$
$\bar{N}_1 = \bar{N}_2 = \bar{N}_3 = 1$	
$\bar{N}_4 = 0.125$, $\bar{N}_5 = \bar{N}_6 = 0.5$	
<u>DP600 con endurecimiento cinemático</u>	
Módulo de compresibilidad hidrostática	$\kappa = 147.2 \text{ GPa}$
Módulo desviador interno	$2\mu_{int} = 150.7 \text{ GPa}$
Módulo desviador externo	$2\mu_{kin} = 1.650 \text{ GPa}$
Tensión de fluencia plástica	$k_0 = 325 \text{ MPa}$
Parámetro límite de tensión	$k_\infty = 745 \text{ MPa}$
Módulo de endurecimiento lineal	$\bar{H} = 0 \text{ MPa}$
Parámetro de endurecimiento exponencial	$\delta = 0$
$\bar{N}_1 = \bar{N}_2 = \bar{N}_3 = 1$	
$\bar{N}_4 = 0.125$, $\bar{N}_5 = \bar{N}_6 = 0.5$	
<u>DP600 con endurecimiento combinado</u>	
Módulo de compresibilidad hidrostática	$\kappa = 147.2 \text{ GPa}$
Módulo desviador interno	$2\mu_{int} = 151.3 \text{ GPa}$
Módulo desviador externo	$2\mu_{kin} = 1.050 \text{ GPa}$
Tensión de fluencia plástica	$k_0 = 325 \text{ MPa}$
Parámetro límite de tensión	$k_\infty = 500 \text{ MPa}$
Módulo de endurecimiento lineal	$\bar{H} = 40 \text{ MPa}$
Parámetro de endurecimiento exponencial	$\delta = 9$
$\bar{N}_1 = \bar{N}_2 = \bar{N}_3 = 1$	
$\bar{N}_4 = 0.125$, $\bar{N}_5 = \bar{N}_6 = 0.5$	

en la fase de carga, efecto semejante al del endurecimiento isótopo, en cambio se comprueba como el modelo de esta tesis si recupera esta energía del endurecimiento cinemático, y el ciclo completo de carga se completa casi sobre el mismo punto donde tuvo lugar el inicio de la plastificación.

Finalmente, el ensayo con endurecimiento combinado (gráfico de la derecha) muestra un ajuste muy correcto en valores límite y ajusta relativamente bien con los datos experimentales, aunque obivamente hereda los mismos defectos y virtudes que el modelo en su comportamiento cinemático de carácter lineal, ya que para conseguir un ajuste preciso a los datos experimentales sería necesario utilizar un modelo de endurecimiento cinemático no lineal.

En la figura 7.27 se detellan los resultados comparativos del acero DP600 analizado con los citados endurecimientos: isótopo, cinemático y combinado isótopo-cinemático. Se comparan los resultados en deformación plástica acumulada, mostrando que la

Figura 7.27: Placa circular con agujero. Malla deformada y deformación plástica equivalente final ($u = 75mm$). Acero DP600 con diferentes endurecimientos: (a) isótropo no lineal; (b) cinemático lineal; (c) combinado isótropo-cinemático. A la izquierda se representan los resultados de desplazamiento radial en el modelo F.E., a la derecha se representan los resultados de deformación plástica equivalente.

distribución resultante es bastante dependiente del tipo de endurecimiento, si bien los valores máximos alcanzados varían muy levemente: de 0.86 en el caso iótropo a 0.94-0.96 en los casos combinado y cinemático respectivamente.

También en la figura 7.27 se puede apreciar un desplazamiento perimetral diferente en cada caso, a pesar de que el desplazamiento interior impuesto ha sido el mismo, mostrando las consecuencias del endurecimiento sobre la anisotropía. Respecto de esta última frase, conviene matizar que no se ha utilizado un endurecimiento de carácter anisótropo, sino que solo es anisótropa la función de plastificación. Para facilitar la comprensión de la forma final y el desplazamiento, en la figura 7.27 se incorpora la representación gráfica del campo de desplazamientos totales resultante de los tres casos analizados, comprobándose como el desplazamiento exterior es muy dependiente del tipo de endurecimiento: sobre las direcciones preferentes de material el desplazamiento perimetral máximo se obtiene en el modelo cinemático, apenas superando los 20mm, y menos de 18mm en el endurecimiento isótropo; sin embargo sobre las direcciones a 45° de las preferentes es el modelo con endurecimiento isótropo quien muestra claramente un mayor desplazamiento perimetral, por encima de los 63mm, cuando el caso cinemático no supera los 45mm.

Como conclusión: el endurecimiento isótropo parece acentuar los efectos de la anisotropía en la forma final, lo que sin duda tiene que ver con que le material ya haya alcanzado el plató o meseta de saturación. Este comportamiento no se percibe de esta forma en los resultados en valor de la deformación plástica absoluta, donde el endurecimiento cinemático muestra mayor deformación plástica final.

Para los casos mostrados en la figura 7.27, se han analizado también las fuerzas nodales equivalentes en los puntos nodales P y Q , estos resultados fuerza-desplazamiento se muestran en la figura 7.28. Un análisis conjunto de ambas figuras de resultados permite realizar dos apreciaciones fundamentales:

- La primera es que el desplazamiento impuesto provoca una saturación del endurecimiento isótropo no lineal, que no es homogénea, así en la zona del punto P la saturación se logra cuando el desplazamiento vale 20mm, mientras que en la zona del punto Q la saturación ocurre a los 40mm. Conviene recordar que este acero posee un coeficiente de Hill con tensión de fluencia en cortante inferior a la correspondiente de un material de isotropía plástica ($\bar{N}_4 = \frac{1}{4}$), lo que adelanta la plastificación en esa dirección principal de ortotropía, apareciendo la relajación de tensiones (asociadas a la deformación elástica), mientras que en el punto Q situado fuera de las direcciones preferentes de material, la plastificación aparece más tarde y con una tensión más elevada, como se observa en las imágenes de la figura 7.28, lo que reduce también la deformación plástica acumulada al final del ensayo.
- La segunda apreciación es que los endurecimientos cinemático y combinado no saturan, y muestran un crecimiento monótono y continuo, mostrando que es el carácter del endurecimiento cinemático quien domina en el caso combinado. Este crecimiento monótono del endurecimiento se aprecia particularmente en el punto P sobre las direcciones preferentes de material, donde la deformación plástica es de mayor magnitud y parece inducir una relajación inicial en las tensiones sobre el punto Q , al contrario que el caso isótropo.

Figura 7.28: Placa circular con agujero en acero DP600, fuerzas nodales en los puntos P y Q . Se han configurado diferentes endurecimientos: isótopo, cinemático y combinado.

Los resultados mostrados ponen de manifiesto la importancia de realizar una correcta identificación del modo de endurecimiento. Esta cuestión no está completamente resuelta por las dificultades que plantean los ensayos de caracterización, ya que la reversión de la carga para revelar la presencia del efecto Bauschinger suelen mostrar resultados espúreos por la inestabilidad de las probetas en la fase de compresión [22], que conduce al fallo de pandeo en el ensayo. Por otro lado, el mismo material, con el mismo tratamiento, pero con diferente espesor en las muestras de ensayo utilizadas, es susceptible de presentar parámetros de endurecimiento suficientemente diferentes [148], que conviene tener en cuenta. Para aportar solución a esta confusión aparente, el trabajo de [148] se apoya en un ensayo complementario de drawbending con springback, que permite identificar la naturaleza del endurecimiento, sin embargo pero este procedimiento no está estandarizado, y también plantea dificultades de ejecución que limitan su uso.

El último ejemplo ejecutado con este caso 4, analiza el efecto de la anisotropía elástica en el endurecimiento. Para ello se han considerado diferentes valores en las direcciones ortogonales preferentes del material, tomando como referencia los valores de dispersión en los módulos de elasticidad de Young del material que se pueden encontrar en las referencias de suministradores de material y literatura técnica, donde este módulo toma valores entre 215GPa y 185GPa para el acero DP600. De acuerdo a estos valores se han considerado tres casos: el primero donde el módulo de rigidez cortante está acoplado al módulo de elasticidad desviador, y otros dos casos donde ambos parámetros están desacoplados. En estos casos se ha considerado un módulo cortante con el valor del módulo desviador dividido por 2, y en el segundo caso además el módulo desviador anisótropo también ha sido dividido por 2 respecto del correspondiente de isotropía. Los valores de los parámetros de material y los resultados de los ejemplos se muestran resumidos en la figura 7.29.

Analizando los resultados de la figura 7.29 se comprueba la poca influencia que la anisotropía elástica tiene en el comportamiento elastoplástico, ya que apenas influyen más allá del segundo decimal de la deformación plástica acumulada final. Existen pocas referencias bibliográficas al respecto de la la anisotropía elástica, ya que en la mayoría de los metales no tiene trascendencia apreciable o sensible sobre su comportamiento elastoplástico final, por ser las deformaciones plásticas de mayor magnitud que las elásticas. En la referencia [100] se analiza brevemente este efecto de la anisotropía elástica, pero para revelar alguna influencia en el comportamiento elastoplástico los autores tuvieron que utilizar constantes de elasticidad anisótropa con relaciones superiores a 2, dando al material metálico valores que en la realidad no se presentan, salvo en algunas aleaciones metálicas en configuración monocristalina, y en esos casos las cifras de anisotropía rara vez superan esa relación de 2 entre sus constantes elásticas. Para poner de manifiesto estos efectos serían necesarias relaciones de 10, o aún mayor, entre sus constantes elásticas, cifras que en la realidad solo se alcanzan en materiales compuestos y materiales blandos, como los biológicos; precisamente el ejemplo de la sección 7.2.1.1 contiene parámetros de material con valores inspirados en los mencionados materiales biológicos, y ahí se justifica plenamente el uso de anisotropía elástica y plástica.

Finalmente, para comprobar la influencia de la anisotropía elástica sobre las fuerzas desarrolladas en el problema plástico, en la figura 7.30 se representa un diagrama de

Figura 7.29: Placa circular con agujero: modelo de partida en acero DP600. Se representa la deformación plástica equivalente sobre la malla deformada final ($u = 75\text{mm}$), con un endurecimiento isótropo no lineal en material (a) elásticamente isótropo; material (b) elásticamente anisótropo con módulos de elasticidad dispersos; material (c) elásticamente anisótropo con módulo cortante desacoplado -caso 1-; material (d) elásticamente anisótropo con con módulo cortante desacoplado -caso 2-.

Figura 7.30: Resultado de fuerzas nodales equivalente vs desplazamiento nodal en los puntos P y Q de la figura 7.20, se comparan los resultados del caso isotrópico elástico y el anisótropo elástico, con endurecimiento isotrópico no lineal en ambos casos.

fuerzas equivalentes vs desplazamientos nodales en los puntos P y Q mencionados anteriormente. Se muestran los resultados del ejemplo con isotropía elástica y el ejemplo anisótropo desacoplado número 2, contenido de la figura 7.29. Se comprueba que el resultado está muy poco afectado por la presencia de anisotropía elástica en el material, y que las diferencias son poco relevantes, refutando los resultados ya obtenidos con la deformación plástica de la figura 7.29.

7.2.2.2. Conformado elastoplástico con ADINA: embutición profunda de un recipiente cilíndrico

Este problema de cálculo es un clásico de la simulación numérica por la variedad de recursos necesarios para su operativa, y al tiempo porque requiere en el modelo la participación de todos los elementos que forman parte del proceso mecánico del taller, desde el material de chapa metálica sometido a conformado (*blank*) o, hasta los elementos útiles de taller, como son la matriz de embutición (*die*), el punzón de carga (*punch*) que aplica la fuerza de estampación y provoca la deformación plástica de la chapa, y el elemento de retención o pisador (*blankholder*), que ejerce una fuerza normal de compresión sobre la chapa, y que durante el proceso de conformado permite conducir de forma controlada el flujo plástico del material sobre la matriz, evitando fenómenos de arrugamiento o *wrinkling* en la pared del recipiente final. Estos elementos se han de modelizar como elementos sólidos rígidos indeformables, a través de los que se imponen las condiciones de contorno del problema de contacto. En la figura 7.32 se representa un dibujo esquemático de la configuración del problema.

Entre cada uno de estos elementos y la chapa de material se generan las fuerzas de contacto que son determinantes en este problema de elementos finitos, y que constituye la mayor dificultad desde el punto de vista numérico para alcanzar la convergencia. Es aquí donde las herramientas disponibles en ADINA ayudan a encontrar una solución eficazmente. En el problema de contacto está, además presentes las fuerzas de fricción entre los elementos en contacto durante el flujo plástico. En el problema de taller esta fricción se suele minimizar mediante el uso de lubricantes y acabados superficiales adecuados en las herramientas de embutición, también ha sido considerada en el modelo numérico de elementos finitos, con el fin de reproducir lo más fielmente posible la realidad física, se utilizará un coeficiente de fricción adecuado, obtenido de la bibliografía habitual.

La simetría de revolución del modelo, tanto en su geometría, en condiciones de contorno, así como la simetría del material, en este caso de ortotropía, permiten aplicar una reducción de tamaño, usando solo una parte representativa del mismo, por ello solo se ha modelizado sólo una cuarta parte de la geometría completa del problema, la mínima parte que permite reproducir de forma precisa los efectos de la anisotropía plástica, las orejas de conformado. El modelo reproduce el problema completo, pero computacionalmente contiene solo una cuarta parte de los grados de libertad totales, con un importante ahorro en tiempo de ejecución y reducción de dificultades numéricas.

En la figura 7.31 se expone la geometría y configuración de malla de elemento, en la imagen superior (a) se representa el punzón empujador de carga *punch*, en la imagen (b) se representa el útil pisador o de retención de la preforma *holder*, en la imagen (c) la preforma de material *blank*, y en la imagen (d) el molde matriz *die*.

Para validar este ejemplo de embutición profunda existen en la bibliografía múltiples referencias a considerar: [92], [99], [157], [141], [142], [149], [19]. Finalmente los trabajos elegidos para validar los resultados son los de las referencias [149] y [150]. Esta elección se ha hecho teniendo en cuenta las similitudes computacionales entre el modelo de las citadas referencias y el que en esta tesis se presenta, así como por la cantidad de datos disponibles para reproducir sus cálculos de una forma fidedigna. Asimismo el trabajo de [149] recurre también a los datos y los ensayos experimentales y numéricos contenidos en el trabajo original de la referencia [157].

Figura 7.31: Modelo de elementos finitos en ADINA: malla de elementos de la configuración mecánica realizada para la simulación de embutición. (a) punzón-*punch*, (b) pisador-*blankholder*, (c) material-*blank*, (d) matriz-*die*.

Figura 7.32: Modelo de elementos finitos en ADINA: malla de elementos de la configuración mecánica realizada para la simulación de embutición profunda. (a) punzón-*punch*, (b) pisador-*blankholder*, (c) material-*blank*, (d) matriz-*die*.

El modelo de cálculo que se ha elaborado emplea una preforma circular de dimensiones $100mm$ de diámetro y $1.0mm$ de espesor, con un material metálico de aleación binaria de aluminio $Al - 5Mg$ proveniente de laminación en frío y tratado térmicamente, que posee una importante texturización de laminación y por ello un comportamiento plástico anisótropo, pero que conserva un endurecimiento de tipo isótropo por sus particularidades micromorfológicas. Este material en otras condiciones de entrega podría ser susceptible de mostrar un endurecimiento combinado isótropo-cinemático.

Embutición profunda de un recipiente cilíndrico: parámetros de material.

Los parámetros elastoplásticos del material se han extraído de las referencias citadas, y han sido utilizados con la conveniente adaptación al presente modelo. En [157] se determinan experimentalmente las características mecánicas del material (tabla 7.6).

Tabla 7.6: Propiedades de material de la aleación Al-5 wt % Mg

Módulo de compresibilidad hidrostática	$\kappa = 68.6 \text{ GPa}$
Módulo desviador interno	$2\mu_{int} = 52.6 \text{ GPa}$
Módulo desviador externo	$2\mu_{kin} = 0 \text{ GPa}$
Parámetros de endurecimiento isótropo - Ley de Voce	
Tensión de fluencia plástica	$k_0 = 85.4 \text{ MPa}$
Parámetro límite de tensión	$k_\infty = 336.2 \text{ MPa}$
Módulo de endurecimiento lineal	$\bar{H} = 0 \text{ MPa}$
Parámetro de endurecimiento exponencial	$\delta = 6.242$
Parámetros plásticos de anisotropía de Hill	
$f = 0.534$	$\bar{N}_1 = 1$
$g = 0.634$	$\bar{N}_2 = 0.809$
$h = 0.418$	$\bar{N}_3 = 1.221$
$l = 1.97$	$\bar{N}_4 = 1.313$
$m = n = 1.5$	$\bar{N}_5 = \bar{N}_6 = 1$

En [157] también se lleva a cabo un ensayo de embutición, sometiendo estos resultados experimentales a comparación con sus propios resultados numéricos de simulación, donde los autores utilizaron un modelo de elementos bidimensionales, y comprobaron el ajuste de los parámetros de la función de plastificación 2D de Barlat para elementos planos, algunos de estos datos por tanto, no serán útiles en este trabajo, ya que el modelo que se ha implementado utiliza elementos 3D. En la tabla 7.6 se muestran los coeficientes de Hill para el caso tridimensional, se puede comprobar como los datos de la tercera dimensión se ha incorporado aceptando un comportamiento isótropo del material a través del espesor, hecho que viene reflejado en el valor 1.5 de los parámetros m y n (3.4.2.1), ya que este parámetro apenas tiene influencia sobre los resultados numéricos, si lo tendrá en otros casos de conformado elastoplástico donde el elemento de partida no sea plano.

Para ajustar los datos de [157] al ensayo 3D, en [149] se realiza previamente un reajuste numérico para adaptar algunos de estos valores a un ensayo 3D. Este ajuste de los datos originales se lleva a cabo con un ensayo de elementos sólidos,

Figura 7.33: Elemento de carga-descarga para calibración de coeficientes de Lankford

utilizando un elemento hexaédrico *C3D8R* de Abaqus, de 8 nodos de desplazamiento y con integración reducida a 1 punto en desplazamientos. También en esta tesis se han reproducido algunos de estos ensayos previos para comprobar el ajuste de los parámetros descritos en el modelo. Para ello se ha dispuesto un único elemento tridimensional hexaédrico Q1/P0 de ADINA, sometido a un estiramiento bajo carga mediante desplazamiento impuesto con un alargamiento máximo del 5 %, seguido de un proceso inverso de descarga elatoplástica. Este ensayo se ha llevado a cabo sobre diferentes direcciones preferentes de material (direcciones de laminación) respecto de la carga, aplicando ángulos sucesivos entre 0° y 90° . En la figura (7.33) se muestra una representación gráfica del ensayo en el plano *XY*, y en la figura (7.34) se reproducen los resultados numéricos de comportamiento del material en las curvas de tensión-deformación, correspondientes a cada ensayo según el ángulo aplicado entre la carga y la dirección preferente de material, mostrando la influencia de la anisotropía plástica, ya que de ser el material isótropo todas las curvas serán iguales.

Otros resultados del ensayo numérico de carga-descarga se presentan en la figura (7.35). En la gráfica superior (a) se recoge la evolución de la tensión equivalente de fluencia plástica, según el ángulo θ entre en los ejes preferentes de material y la carga. En la imagen inferior se muestra el coeficiente de Lankford (r_θ) obtenido a partir de las deformaciones permanentes en direcciones transversales del elemento después de aplicar la descarga elástica ($\sigma = 0$). Los resultados de ambas gráficas se comparan con los contenidos en la referencia [149], y muestran un ajuste correcto en ambos casos.

Embutición profunda de recipiente cilíndrico: modelo EF. Los ensayos de embutición han sido reproducidos en ADINA utilizando los mismos parámetros y condiciones de [149], y procurando una distribución de elementos semejante, pero usando el elemento hexaédrico de 8 nodos tipo Q1/P0 de ADINA con formulación mixta u/p , un elemento que a priori resulta de mayor calidad que el *C3D8Ri* de ABAQUS, que tiene integración reducida en desplazamientos, mientras que el de ADINA tiene integración completa, por tanto a igualdad de número de elementos, los resultados de

Figura 7.34: Curva de carga descarga en tensión-deformación según el ángulo entre la carga y la dirección preferente de material con términos de tensión de Cauchy vs deformación logarítmica. Desplazamiento relativo máximo impuesto: 0.05/1

ADINA son cualitativamente más exactos que los de ABAQUS.

Se ha definido uno de los bordes del cuadrante de material, concretamente el borde paralelo a la dirección X , como dirección preferente 1 de material que representa la dirección de laminación de la aleación en la fase de manufactura (dirección longitudinal L), y la dirección 2 como dirección transversal larga T , quedando la dirección a través del espesor como dirección transversal corta S , esta dirección es la que posee coeficientes de Hill isotropos para buscar la afinidad con los ensayos bidimensionales de la referencia [157].

Los ensayos se han realizado con un desplazamiento impuesto de 42 mm en el punzón, ocasionando la embutición completa de la preforma metálica y revelando el comportamiento plástico anisotrópico con la formación de las *orejas* plásticas laterales, desfasadas 90 grados entre sí, como consecuencia de la ortotropía de la función de plastificación de Hill. Asimismo, sobre el útil pisador se ha aplicado una fuerza de compresión de 1500 N, y entre todas las superficies de contacto se ha indicado un coeficiente de fricción de 0.20.

Un primer ensayo de comprobación se ha realizado con las mismas condiciones de contorno y con los mismos datos de material, excepto una configuración de plasticidad isotropa, con una tensión de plastificación igual en todas las direcciones, y tomando como referencia la tensión de plastificación longitudinal o de *rolling*, lo que conduce a un tensor $\bar{N}_i$ de coeficientes plásticos en la tabla (7.6) donde todos los términos son unitarios: $\bar{N}_i = 1$. Los resultados de este ensayo preliminar se muestran en la figura 7.36. La deformación plástica máxima alcanzada en este ensayo ha sido de 0.711.

El segundo ensayo de embutición profunda se ha llevado a cabo sobre el material

Figura 7.35: **(a)** Arriba: tensión equivalente de fluencia plástica frente al ángulo de test respecto de la dirección de laminación. **(b)** Abajo: coeficiente de Lankford medido en ensayo frente a la dirección de preferente de material. Resultados comparativos del modelo actual y el de la referencia [149].

Figura 7.36: Deformación plástica acumulada en ensayo de embutición profunda en aluminio $Al - 5Mg$ plásticamente isotrópico. Desplazamiento total último de 42 mm.

anisótropo original - tabla (7.6)-. Los resultados que se han obtenido se recogen en la figura 7.37, donde se muestra la deformada del material en sucesivos *steps* del ensayo: en la primera imagen se presenta el momento de desplazamiento con 7.5 mm, en la segunda imagen cuando el desplazamiento es de 22 mm, en la tercera imagen cuando se alcanzan los 36 mm, y la última imagen cuando se finaliza el ensayo con un desplazamiento de 42 mm. Sobre dicha deformada se ha reflejado el valor instantáneo de la deformación plástica acumulada, representado en el parámetro asociativo plástico γ . Se comprueba su evolución hasta alcanzar un valor máximo de 0.877, que en los pasos intermedios tenía valores de 0.155, 0.474 y 0.762. Comparando estos resultados con el ensayo de embutición con material isotrópico, el valor máximo de deformación plástica acumulada al final difiere en más de un 20 %, favorable este aumento al caso anisótropo, y que evidencia el efecto de la anisotropía plástica.

Lo más destacable entre ambos ensayos es como en el caso isotrópico la oreja característica de anisotropía está ausente, a diferencia del caso anisótropo, donde además este es un parámetro cuantitativo importante, cuyo resultado se muestra en la figura 7.38(a).

Si se comparan estos resultados con los originales de [149], se aprecia una similitud clara en la deformación plástica acumulada en los cuatro pasos de cálculo mencionados, y si bien los resultados no son idénticos en todo el modelo, los valores de deformaciones máximas son muy semejantes, así en el resultado final del ensayo se obtiene el máximo de 0.877 que se enfrenta a un valor de 0.861 en el modelo de [149], una diferencia inferior al 2 %.

La evolución de la deformada en el ensayo anisótropo permite comprobar los efectos de anisotropía con la aparición de las orejas de plastificación, que son perceptibles ya desde el segundo paso de carga cuando el desplazamiento impuesto es 22 mm, visible bien a través de la distribución de deformación plástica y del desplazamiento en el borde de las orejas que ha dejado de ser circular (esta apreciación es visualmente es menos perceptible por la escala de la imagen en el papel). En el paso de 36 mm de desplazamiento la presencia de las *orejas* es ya muy evidente.

Figura 7.37: Deformación plástica acumulada en ensayo de embutición profunda en aluminio $Al - 5Mg$ con ortotropía plástica. Resultados en diferentes pasos de desplazamiento: 7.5 mm, 22 mm, 36 mm y desplazamiento final de 42 mm.

Para interpretar estos efectos de la anisotropía se han recogido los resultados de desplazamiento en el borde de la preforma de material al final del cálculo, representándose según la orientación angular respecto de la dirección principal de laminación del material, el perfil final se muestra en la figura 7.38 (a). Asimismo, en la figura se muestran otros resultados de ensayos experimentales y numéricos contenidos en las referencias [157] y [149]. Se puede comprobar el excelente ajuste de los resultados de este modelo, tanto con los resultados de [157] como con de [149]. Los resultados del modelo presentado muestran un ajuste respecto a los resultados experimentales incluso mejor que los citados modelos numéricos de referencia, y además el ajuste en el máximo de desplazamiento en el centro de la copa (45° de orientación) es completo. Solo se aprecian algunas discrepancias con los resultados experimentales si se analizan las posiciones angulares intermedias, donde los mencionados modelos tampoco muestran un ajuste mejor, por lo que son diferencias se pueden considerar irrelevantes, el error absoluto es cercano a 1 mm de magnitud, pero estas diferencias en valor relativo frente a un desplazamiento medio de 37 mm dan un error relativo máximo inferior al 3 %. Si se observan los laterales del cuarto de copa (0° y 90° de orientación), la diferente altura entre ambos laterales también evidencia la anisotropía ortótropa del material en la plastificación.

Otro parámetro interesante para analizar es la fuerza equivalente de deformación que se registra en el punzón sobre el que se había aplicado el control de desplazamientos, y determinada sobre las reacciones resultantes en los nodos de este elemento. Los resultados de esta fuerza equivalente se exponen en la figura 7.38 (b), donde se muestran de forma comparada los resultados con los de la referencia [149], comprobándose un perfil de carga semejante, y mostrando un acuerdo cualitativo, si bien los valores absolutos de fuerza de reacción calculados entre ambos modelos difieren en un 15 %. No hay datos disponibles de la referencia [157] al respecto de la fuerza equivalente desarrollada durante el proceso de conformado profundo para este material, por lo que no es posible realizar la comparación de resultados con un tercer modelo de iguales condiciones de cálculo o ensayo.

Estas diferencias en la figura 7.38 (b) se pueden atribuir a diversas causas que influyen en la fuerza equivalente calculada, causas que se pueden encontrar en la diferente formulación de cálculo elastoplástico que se emplea en ambos casos, así como en el uso de herramientas de cálculo diferentes: ABAQUS frente a ADINA, que emplean diferentes elementos y recursos computacionales para alcanzar la solución.

7.2.2.3. Conformado elastoplástico con ADINA: embutición de recipiente prismático

En este ejemplo se muestran los resultados del proceso de conformado por embutición sobre un espécimen estándar extraído del ensayo NUMISHEET93 [107] para aleaciones de aluminio. En este caso se parte de una plancha cuadrada de aleación de aluminio, de dimensiones $150 \times 150 \times 0.81$ mm, con embutición incompleta de un punzón también cuadrado. En la figura 7.40 se presenta el modelo de elementos finitos empleado, donde también se ha aplicado una reducción a un cuarto gracias a las condiciones de simetría, tanto en geometría como en ortotropía del material.

Los parámetros de material se han extraído de la referencia [149] para llevar a cabo la comparación, estos datos se recogen en la tabla 7.7.

Figura 7.38: (a) Arriba: altura de la copa de embutición frente al ángulo de orientación respecto de la dirección principal de laminación. (b) Abajo: fuerza equivalente aplicada sobre el punzón móvil frente al desplazamiento impuesto. Resultados comparativos del modelo actual y el de la referencia [149].

Figura 7.39: Modelo E.F. en chapa cuadrada NUMISHEET93 *blank*

Figura 7.40: Modelo E.F. de embutición en chapa cuadrada NUMISHEET93.

Tabla 7.7: Parámetros de material para el ensayo Numisheet93

Módulo de compresibilidad hidrostática	$\kappa = 68.6 \text{ GPa}$
Módulo desviador interno	$2\mu_{int} = 52.7 \text{ GPa}$
Módulo desviador externo	$2\mu_{kin} = 0 \text{ GPa}$
Parámetros de endurecimiento isótropo - Ley de Voce	
Tensión de fluencia plástica	$k_0 = 137.5 \text{ MPa}$
Parámetro límite de tensión	$k_\infty = 351.5 \text{ MPa}$
Módulo de endurecimiento lineal	$\bar{H} = 0 \text{ MPa}$
Parámetro de endurecimiento exponencial	$\delta = 9.75$
Parámetros plásticos de anisotropía de Hill	
$f = 0.52$	$\bar{N}_1 = 1$
$g = 0.51$	$\bar{N}_2 = 1.02$
$h = 0.508$	$\bar{N}_3 = 1.024$
$l = 1.64$	$\bar{N}_4 = 1.093$
$m = n = 1.5$	$\bar{N}_5 = \bar{N}_6 = 1$

Se ha utilizado el mismo tipo de elemento que en ejemplos anteriores, el elemento hexaédrico de 8 nodos Q1/P0 *u/p* de formulación mixta. Se han analizado los efectos de la deformación de conformado sobre dos modelos de elementos finitos, uno con un

elemento en el espesor de chapa (NS1) y otro con dos elementos (NS2). Se ha aplicado un desplazamiento impuesto de 15mm en el punzón, y una fuerza de contacto en el pisador de 4.9kN.

En las figuras 7.41 y 7.42 se muestran los resultados del ensayo comparados con los resultados de la referencia [149]. En la figura 7.41 se compara el resultado en tensiones equivalentes cuando el punzón no ha sido aún retirado del material, es decir que aún no ha experimentado springback y se han relajado las tensiones de contacto con las herramientas de conformado. Los resultados en valores máximos son muy cercanos en ambos casos, la citada referencia y el modelo de esta tesis. La deformación plástica acumulada al final de la embutición se muestra comparativamente en la figura 7.42. La cercanía de estos valores máximos entre ambos modelos, así como la afinidad general de estos resultados de deformaciones y tensiones en el modelo completo entre este trabajo y el de [149], permiten validar los resultados obtenidos en este modelo.

También se ha analizado el desplazamiento en bordes de la chapa ocasionado al final del conformado elastoplástico y en tres direcciones diferentes: las dos direcciones principales ortogonales DX (*rolling direction*) y DY (*transverse direction*), y la dirección diagonal DD (*diagonal direction*), y se han comparado los resultados con los obtenidos experimentalmente de la referencia [158], así como los numéricos de la referencia [149]. Estos resultados comparativos respecto de las referencias citadas se muestra en la tabla 7.8, comprobándose la cercanía de los resultados obtenidos, con desviaciones por debajo del 10 % en todos los casos. La mejor aproximación con los resultados experimentales se obtiene en el modelo con mayor número de elementos, el NS2, como era de esperar. En la figura 7.44 se presenta el campo de desplazamientos resultante en vista cenital para el caso NUMISHEET93 con 2 elementos en el espesor (NS2).

Tabla 7.8: Desplazamientos absolutos (mm) en bordes de placa en el ensayo NUMISHEET93

Desplazamiento	Experimental en referencia [158]	F.E. en referencia [149]	Modelo NS1	Modelo NS2
DX	5.3	5.01	5.63	5.66
DY	5.4	5.05	5.67	5.69
DD	3.0	2.59	2.76	2.78

Comentarios finales de los ejemplos de embutición. Los dos últimos ejemplos mostrados han utilizado como referencia el trabajo de [149], si bien la mayoría de resultados presentaban congruencia, no todos los valores obtenidos presentaban las mismas desviaciones relativas, así unos valores se han mostrado más cercanos a la referencia utilizada, y otros mostraban más diferencias. Estas diferencias en los resultados de los casos analizados se pueden atribuir a las diferencias existentes entre ambos modelos computacionales, y en el tipo de elementos finitos utilizados

En las diferencias entre ambos modelos podemos destacar, en primer lugar que el modelo de la referencia [149] utiliza un término corrector plástico no simétrico según el tensor de Mandel, y con tasas de deformación de Cauchy-Lagrange, mientras que el modelo de este trabajo utiliza un corrector elástico descrito según variables tensoriales simétricas en deformaciones logarítmicas, de descripción de naturaleza aditiva que la

descripción de deformaciones de Cauchy no posee. Por otro lado, el modelo citado emplea una integración de la ecuación de evolución del flujo plástico resuelta mediante la aproximación exponencial al llevar a cabo la integración implícita de Euler, esta aproximación puede limitar los resultados finales y obligar a que las deformaciones finitas integradas sean moderadas [36] para no transgredir los límites admisibles de la aproximación. En el modelo de esta tesis, esa limitación no está presente al utilizar una integración implícita de Euler que no tiene consecuencias sobre la magnitud de las deformaciones internas que se integran.

En los puntos comunes entre ambos modelos elastoplásticos, el de esta tesis y el de [149], podemos citar la naturaleza hiperelástica de las tensiones en ambos modelos, también ambos hacen uso de una cinemática basada en la descomposición multiplicativa de Lee, realizan la integración de la ley evolutiva en la configuración intermedia, y utilizan un criterio de plastificación anisótropa equivalente de la familia de Hill, aunque ambos modelos lo implementan de forma diferente.

Por otro lado, respecto del problema en elementos finitos, el modelo de la referencia [149] utiliza una configuración de elementos finitos hexaédricos de 8 nodos con integración reducida y sin formulación mixta para tratar la parte hidrostática del problema plástico, mientras que el modelo actual de ADINA utiliza elementos de 8 nodos con integración completa y con formulación mixta para evitar los efectos del bloqueo volumétrico, que se puede producir al simular numéricamente el problema plástico de naturaleza isócora. En Abaqus el elemento elegido para el ensayo de embutición por [149] tiene la opción de utilizar una formulación híbrida para mejorar el comportamiento isócoro, y aunque no es una formulación mixta si tiene un fin último semejante, sin embargo los autores no han referenciado si utilizan esta opción, por lo que existe la incertidumbre sobre como interpretar ese silencio, lo que impide una comparación cualitativa más precisa sobre los resultados que aportan y los que se presentan en este trabajo.

El mencionado elemento C3D8Ri de ABAQUS por un lado, y el Q1/P0 Hexaédrico *bmixed u/p* de 8 nodos de ADINA Standard por otro, a priori da ventaja a los resultados obtenidos con los elementos de ADINA en base a la mayor calidad respecto de los elementos de ABAQUS.

Como conclusión final de estos ejercicios de verificación resueltos con ADINA, se ha podido verificar la validez de los resultados proporcionados por la subrutina de usuario implementada, y como los resultados de este modelo de cálculo elastoplástico son consistentes con otros ensayos semejantes contenidos en la literatura científica o que se resuelvan con otros códigos de cálculo por el método de los elementos finitos.

Figura 7.41: Embutición en chapa cuadrada NUMISHEET93: comparación de la tensión de Von Mises final entre los modelos de esta tesis

Figura 7.42: Embutición en chapa cuadrada: comparación de la deformación plástica acumulada final entre los modelos de esta tesis y la referencia [149]

Figura 7.43: Desplazamientos verticales (mm) frente a la malla original sin deformar en modelo NUMISHEET93.

Figura 7.44: Desplazamientos absolutos (mm) frente a la malla original sin deformar en modelo NUMISHEET93. Imagen replicada con la doble simetría para mostrar la deformada con mejor perspectiva.

Capítulo 8

Conclusiones

En esta tesis se ha elaborado un modelo de cálculo elastoplástico basado en un esquema clásico de retorno radial con una descripción de variables internas de naturaleza completamente elástica, mediante la aplicación de un mecanismo predictor-corrector, con una fase predictora elástica y una novedosa fase correctora también elástica, todo ello formulado con variables tensoriales de naturaleza simétrica.

El modelo elastoplástico que se ha propuesto ha sido descrito en deformaciones finitas logarítmicas y sus correspondientes tensiones conjugadas de trabajo, las tensiones generalizadas de Kirchhoff en descripción material. Se ha pretendido en todo momento la consecución de un esquema computacional que preservara en lo posible la simplicidad de la formulación en deformaciones infinitesimales, con un doble objetivo: por un lado conseguir una interpretación del problema elastoplástico sencilla, fácil de entender y de operar, y por otro preservar en la medida de lo posible un coste computacional lo más eficiente posible, dado que la no linealidad de los problemas a resolver ya supone un gasto de computación muy importante, tanto en recursos como en tiempo de cálculo.

Adicionalmente se ha incorporado en el modelo un comportamiento plástico anisótropo de ortotropía en el material, a través de una formulación de tipo Hill, con endurecimiento plástico isótropo y cinemático motivado con un dispositivo reológico unidimensional de fácil comprensión. También se han establecido los criterios para determinar los parámetros de material necesarios para configurar el problema y su obtención a partir de ensayos experimentales convencionales, obtenidos en máquina universal de ensayos.

Todo el modelo ha sido implementado en un código de elementos finitos, por un lado un código de uso propio como DULCINEA, y por otro lado un código comercial como ADINA, y se han ejecutado los casos de validación y análisis necesarios para comprobar el funcionamiento operativo y la confianza de la formulación presentada.

De los objetivos propuestos, las acciones llevadas a cabo, y los resultados obtenidos en este trabajo de tesis se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- El modelo elastoplástico propuesto resulta válido para el cálculo de problemas elastoplásticos en grandes deformaciones, con un comportamiento no lineal, tanto desde el punto de vista hiperelástico como desde el punto de vista plástico, recogiendo correctamente el efecto de la no linealidad del material y de la no linealidad geométrica intrínseca a las deformaciones finitas. La

aplicación de deformaciones finitas logarítmicas ha permitido una descomposición multiplicativa natural y eficaz, así como una actualización aditiva de las variables de deformación durante los ciclos incrementales del algoritmo de cálculo.

- El mecanismo aplicado del tipo predictor-corrector enteramente elástico y tensorialmente simétrico es perfectamente válido para la computación elastoplástica, completando anteriores trabajos que habían demostrado ya su validez en la computación viscoelástica. Esta contribución es relevante en el nuevo marco algorítmico no lineal, pues no emplea tensiones-deformaciones de naturaleza plástica, ni necesita de la definición de una métrica plástica específica, por lo que la naturaleza elástica de la etapa de corrección resulta completamente aditiva y con solo seis componentes en el tensor resultante, con ausencia del tensor de tensiones de Mandel y del giro plástico en la integración de la ecuación de flujo plástico, ya que éste giro se encuentra desacoplado de la variable interna elástica. Este mecanismo ha demostrado ser computacionalmente eficiente y fácil de interpretar, por lo que sus resultados siguiendo los esquemas clásicos de las deformaciones infinitesimales se pueden considerar óptimos. Este punto es particularmente original por ser una de las aportaciones más interesantes en el ámbito de la mecánica de medios continuos, y por tanto una opción muy atractiva para la simulación en la ciencia de materiales.

A partir de esta conclusión, se puede considerar que la formulación contenida en este trabajo es una extensión natural de la formulación propuesta por Simó [134] para materiales isótropos, hacia las aplicaciones elastoplásticas en materiales anisótropos. Adicionalmente, es notable la semejanza de la formulación utilizada con los esquemas computacionales elastoplásticos en deformaciones infinitesimales, lo que pone de manifiesto su simplicidad respecto de otros muchos modelos elastoplásticos en deformaciones finitas válidos para anisotropía.

- Para simplificar la formulación, los ejemplos llevados a cabo se han descrito usando funciones de energía libre de naturaleza cuadrática en base a deformaciones logarítmicas, sin embargo, la formulación general no está restringida a la linealidad resultante con las tensiones de la descripción cuadrática, y puede acomodar correctamente los efectos de endurecimiento cinemático evitando el uso de variables internas adicionales, que no solo obstaculizan desarrollar la formulación, sino que también elevan el coste de computación final.
- En los ejemplos numéricos ejecutados se comprueba también una gran eficiencia numérica del algoritmo, obteniéndose en los pasos elastoplásticos una convergencia cuadrática, con tasas de convergencia muy parecidas a las que se obtienen en los casos puramente hiperelásticos. El único caso de esta tesis donde esta convergencia cuadrática no es posible comprobar es en el caso de embutición profunda, donde las dificultades de convergencia debido al problema de contacto se ponen de manifiesto. Este tipo de problemas presentan dificultades de convergencia de forma innata, y está ampliamente documentada la alta exigencia computacional de los problemas de contacto en elementos finitos por las dificultades de convergencia numérica de la solución, por tanto es éste es un problema extrínseco a la formulación elastoplástica aquí desarrollada.

- Los ejemplos numéricos ejecutados han permitido comprobar el correcto funcionamiento de la formulación propuesta. En todos los casos los resultados numéricos han sido satisfactorios con un correcto ajuste respecto de las referencias científico-técnicas utilizadas para la validación. Se han ejecutado casos de plasticidad isótropa y anisótropa, con endurecimiento isótropo, cinemático y combinado, con deformaciones finitas moderadas y grandes, y no se han observado desviaciones respecto de los valores esperados o contenidos en las referencias consideradas. Además se ha resuelto un ejemplo real de aplicación ingenieril, como es el problema de conformado por embutición profunda, donde se añadía la dificultad extra de resolver el problema de contacto sumado al problema elastoplástico, y también en este caso los resultados han demostrado ser también correctos y válidos.

8.1. Trabajo futuro

Todo trabajo de naturaleza investigadora realiza propuestas científicas y técnicas que se resuelven en una dirección concreta, pero que plantean alternativas sobre la evolución o las posibles interpretaciones que ofrece el tema tratado, de forma que siempre queda abierto algún camino sin recorrer por cuestiones de un tiempo y un espacio finitos. Esta tesis, que plantea propuestas innovadoras al estado del arte actual, también deja alternativas por recorrer o desarrollar. Algunos de los trabajos futuros a tener en cuenta a partir de las propuestas de esta tesis son:

- La aplicación del modelo elastoplástico en otros casos tecnológicos que no han sido mencionados en esta tesis, como es el caso del comportamiento de *springback* en elementos estampados de chapa y plancha metálicas, donde el estudio de las tensiones residuales y las deformaciones finales del producto manufacturado respecto de las tolerancias finales de fabricación, constituyen un problema fundamental dentro de la industria metalúrgica del conformado, y por tanto una aplicación muy interesante de las técnicas de simulación numérica que se han propuesto.
- Otro aspecto interesante es la evolución del modelo de endurecimiento cinemático, hasta ahora de naturaleza lineal, hacia un modelo de endurecimiento no lineal que permitiría describir con mayor precisión el comportamiento de algunos materiales metálicos. Aunque la formulación actual puede simular correctamente el efecto Bauschinger, la formulación no contiene una tensión de backstress explícita, por lo tanto, la implementación de la regla de Armstrong y Frederick y la comparación del comportamiento multiaxial resultante sigue siendo un tema para trabajo futuro, particularmente en lo referente al llamado efecto de “ratcheting”.
- Otra propuesta en esta línea es la implementación en el modelo de otras formulaciones en la función de plastificación, como las funciones de la familia de Barlat o de Cazacu, más específicas que las funciones de tipo Hill, y que permiten modelizar con mayor rigor la anisotropía no ortótropa de muchos materiales metálicos y no metálicos. Esta alternativa propuesta permitiría la simulación de materiales con simetrías de mayor complejidad, pudiendo reproducir en el caso

de embutición profunda el caso del *earring* con 6 u 8 orejas de anisotropía, y que las funciones de tipo Hill no permiten.

- La implementación en el modelo elastoplástico actual de un comportamiento viscoso del material, evolucionando el modelo hacia la elastoviscoplasticidad, o técnicamente *rate dependent plasticity*, y que es otra parte del problema elastoplástico importante en el caso de algunos materiales, tanto metálicos como no metálicos, y que sería su vez un paso previo para la introducción en el problema del parámetro interno de temperatura.
- Por último, y en la misma línea que la propuesta anterior, se puede implementar en el modelo un comportamiento de daño que evalúe la pérdida de propiedades mecánicas que el material experimenta al producirse la deformación plástica, que en definitiva es una evaluación macroscópica homogeneizada de como las dislocaciones y otros defectos de la red cristalina afectan al deterioro del material, un aspecto micromecánico que sería tratado desde un punto de vista completamente fenomenológico dentro del modelo computacional.

Contribuciones académicas

Artículos en revistas del JCR

- M. A. Sanz, F. J. Montáns, M. Latorre. Computational anisotropic hardening multiplicative elastoplasticity based on the corrector elastic logarithmic strain rate. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol320, 82-121 (2017). Impact factor (2017-18): 4.441.
- M. A. Sanz, K. Nguyen, M. Rodríguez, M. Latorre, F. J. Montáns. Sheet metal forming analysis using a large strain anisotropic multiplicative plasticity formulation, based on elastic correctors, wich preserves the structure of the infinitesimal theory. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol164, 1-17 (2019). Impact factor (2017-18): 2.253.

Contribuciones en congresos

- M. A. Sanz, F. J. Montáns, M. Latorre. Método computacional para elastoplasticidad anisótropa en deformaciones logarítmicas. Congress on Numerical Methods in Engineering - CMN 2017 Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería CMN2017. Valencia, España, julio 2017.
- M. A. Sanz, F. J. Montáns, M. Latorre. Computational procedure for anisotropic elastoplasticity at finite strains. XIV International Conference on Computational Plasticity - COMPLAS2017. (Fundamentals and Applications). Barcelona, España, septiembre 2017.
- R. Díaz, M. A. Sanz, K. Nguyen. On modelling the finite strain anisotropic elastoplasticity with application to the prediction of springback in sheet metal forming - EUCASS2019. Madrid, España, julio 2019.

Trabajos dirigidos

- Cálculo estructural en plastificación mediante el método de los elementos finitos. Alumno: Manuel Rodríguez Ramírez (ETSIAE, UPM). Trabajo Fin de Grado, curso 2017/18.

- Application of a new computational procedure for anisotropic elastoplasticity on the prediction of springback in sheet metal forming. Alumno: Raúl Díaz González (ETSIAE, UPM). Trabajo Fin de Grado, curso 2018/19.

Bibliografia

- [1] L. Anand. On H. Hencky's Approximate Strain-Energy Function for Moderate Deformations. *Journal of Applied Mechanics*, 46(1):78, mar 1979.
- [2] L. Anand. Moderate deformations in extension-torsion of incompressible isotropic elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 34(3):293–304, jan 1986.
- [3] J.H. Argyris, B. Boni, U. Hindenlang, and M. Kleiber. Finite element analysis of two- and three-dimensional elasto-plastic frames—the natural approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 35(2):221–248, nov 1982.
- [4] J.H. Argyris and J.St. Doltsinis. On the large strain inelastic analysis in natural formulation part I: Quasistatic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 20(2):213–251, nov 1979.
- [5] D. Banabic. *Sheet metal forming processes : constitutive modelling and numerical simulation*. Springer, 2010.
- [6] D. Banabic. *Multiscale modelling in sheet metal forming*. Springer-Verlag, 2011.
- [7] D. Banabic, F. Barlat, O. Cazacu, and T. Kuwabara. Advances in anisotropy and formability. *International Journal of Material Forming*, 3(3):165–189, sep 2010.
- [8] F. Barlat, H. Aretz, J.W. Yoon, M.E. Karabin, J.C. Brem, and R.E. Dick. Linear transformation-based anisotropic yield functions. *International Journal of Plasticity*, 21(5):1009–1039, may 2005.
- [9] F. Barlat, J.C. Brem, J.W. Yoon, K. Chung, R.E. Dick, D.J. Lege, F. Pourboghrat, S.-H. Choi, and E. Chu. Plane stress yield function for aluminum alloy sheets—part 1: theory. *International Journal of Plasticity*, 19(9):1297–1319, sep 2003.
- [10] F. Barlat, D. Lege, and J.C. Brem. A six-component yield function for anisotropic materials. *International Journal of Plasticity*, 7(7):693 – 712, 1991.
- [11] K.J. Bathe. *Finite element procedures*. [Bathe, K.J.], 2014.

-
- [12] K.J. Bathe and S. Bolourchi. Large displacement analysis of three-dimensional beam structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14(7):961–986, 1979.
 - [13] K.J. Bathe, E. Ramm, and E.L. Wilson. Finite element formulations for large deformation dynamic analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 9(2):353–386, jan 1975.
 - [14] T. Belytschko, W. K. Liu, and B. Moran. *Nonlinear finite elements for continua and structures*. Wiley, 2000.
 - [15] J. F. Besseling. A Thermodynamic Approach to Rheology. In *Irreversible Aspects of Continuum Mechanics and Transfer of Physical Characteristics in Moving Fluids*, pages 16–53. Springer Vienna, Vienna, 1968.
 - [16] D.R. Bland. The associated flow rule of plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 6(1):71–78, jan 1957.
 - [17] J. Bonet and R D. Wood. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
 - [18] R.I. Borja. *Plasticity : modeling & computation*. Springer, 2013.
 - [19] T. Brepols, I. N. Vladimirov, and S. Reese. Numerical comparison of isotropic hypo- and hyperelastic-based plasticity models with application to industrial forming processes. *International Journal of Plasticity*, 63:18–48, dec 2014.
 - [20] O.T. Bruhns. *The Multiplicative Decomposition of the Deformation Gradient in Plasticity—Origin and Limitations*, pages 37–66. Springer International Publishing, Cham, 2015.
 - [21] M.A. Caminero, F.J. Montans, and K.J. Bathe. Modeling large strain anisotropic elasto-plasticity with logarithmic strain and stress measures. *Computers & Structures*, 89(11-12):826–843, jun 2011.
 - [22] W.D Carden, L.M Geng, D. Matlock, and R.H Wagoner. Measurement of springback. *International Journal of Mechanical Sciences*, 44:79–101, 01 2002.
 - [23] R.P.R. Cardoso and O.B. Adetoro. A generalisation of the Hill’s quadratic yield function for planar plastic anisotropy to consider loading direction. *International Journal of Mechanical Sciences*, 128-129:253–268, aug 2017.
 - [24] S. Chatti, A. Dogui, h. Dubujet, and F. Sidoroff. An objective incremental formulation for the solution of anisotropic elastoplastic problems at finite strain. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 17(12):845–862, oct 2001.
 - [25] J. D. Clayton and P.W. Chung. An atomistic-to-continuum framework for nonlinear crystal mechanics based on asymptotic homogenization. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54(8):1604–1639, aug 2006.
 - [26] J.D. Clayton. *Nonlinear mechanics of crystals*. Springer, 2012.

- [27] A. Cuitiño and M. Ortiz. A material-independent method for extending stress update algorithms from small-strain plasticity to finite plasticity with multiplicative kinematics. *Engineering Computations*, 9(4):437–451, apr 1992.
- [28] L. Delannay, P. J. Jacques, and S. R. Kalidindi. Finite element modeling of crystal plasticity with grains shaped as truncated octahedrons. *International Journal of Plasticity*, 22(10):1879–1898, oct 2006.
- [29] W. Dettmer and S. Reese. On the theoretical and numerical modelling of Armstrong-Frederick kinematic hardening in the finite strain regime. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(1-2):87–116, jan 2004.
- [30] W. Dettmer and S. Reese. On the theoretical and numerical modelling of Armstrong-Frederick kinematic hardening in the finite strain regime. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(1-2):87–116, jan 2004.
- [31] G. Dieter. *Mechanical Metallurgy*. Mc Graw-Hill Book Co., New York, 1986.
- [32] D.C. Drucker. A definition of a stable inelastic material. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 263:101–195, 1959.
- [33] D.C. Drucker. On the postulate of stability of material in the mechanics of continua. *Mekhanika. Period. Sbornik Perevodov Invsts Statei*, 3:115–128, 1964.
- [34] C. Eckart. The Thermodynamics of Irreversible Processes. IV. The Theory of Elasticity and Anelasticity. *Physical Review*, 73(4):373–382, feb 1948.
- [35] B. Eidel and F. Gruttmann. Elastoplastic orthotropy at finite strains: multiplicative formulation and numerical implementation. *Computational Materials Science*, 28(3-4):732–742, nov 2003.
- [36] A.L. Eterovic and K.J. Bathe. A hyperelastic-based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30(6):1099–1114, oct 1990.
- [37] American Society for Testing and Materials. Standard test method for plastic strain ratio r for sheet metal. *ASTM-E28.02*, 03.01(E28.02):1–286, apr 200.
- [38] C. O. Frederick and P. J. Armstrong. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. *Material at high temperatures*, 24(1):1–26, 1966.
- [39] G. Gabriel and K.J. Bathe. Some computational issues in large strain elasto-plastic analysis. *Computers & Structures*, 56(2-3):249–267, jul 1995.
- [40] H. Geiringer and W. Prager. Mechanik isotroper Körper im plastischen Zustand. In *Ergebnisse der Exakten Naturwissenschaften*, pages 310–363. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1934.
- [41] I. Ghiba, P. Neff, and R.J. Martin. Loss of ellipticity in additive logarithmic finite strain plasticity and related results on Hencky-type energies. *PAMM*, 16(1):341–342, oct 2016.

-
- [42] E. Ghorbel, I. Hadriche, G. Casalino, N. Masmoudi, E. Ghorbel, I. Hadriche, G. Casalino, and N. Masmoudi. Characterization of Thermo-Mechanical and Fracture Behaviors of Thermoplastic Polymers. *Materials*, 7(1):375–398, jan 2014.
 - [43] A. E. Green and P. M. Naghdi. A general theory of an elastic-plastic continuum. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 18(4):251–281, jan 1965.
 - [44] A.E. Green and P.M. Naghdi. Some remarks on elastic-plastic deformation at finite strain. *International Journal of Engineering Science*, 9(12):1219–1229, dec 1971.
 - [45] T. J. Grilo, R. A. F. Valente, and R. J. Alves de Sousa. Modelling non-quadratic anisotropic yield criteria and mixed isotropic-nonlinear kinematic hardening: analysis of forward- and backward-Euler formulations. *International Journal of Material Forming*, 8(4):533–547, sep 2015.
 - [46] T.J. Grilo, I.N. Vladimirov, R.A.F. Valente, and S. Reese. On the modelling of complex kinematic hardening and nonquadratic anisotropic yield criteria at finite strains: application to sheet metal forming. *Computational Mechanics*, 57(6):931–946, jun 2016.
 - [47] M.E. Gurtin, E. Fried, and Lallit Anand. *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
 - [48] C.S. Han, K. Chung, R.H. Wagoner, and S.I. Oh. A multiplicative finite elasto-plastic formulation with anisotropic yield functions. *International Journal of Plasticity*, 19(2):197–211, feb 2003.
 - [49] C.S. Han, A. Ma, F. Roters, and D. Raabe. A Finite Element approach with patch projection for strain gradient plasticity formulations. *International Journal of Plasticity*, 23(4):690–710, apr 2007.
 - [50] S. Hartmann and P. Neff. Polyconvexity of generalized polynomial-type hyperelastic strain energy functions for near-incompressibility. *International Journal of Solids and Structures*, 40(11):2767–2791, jun 2003.
 - [51] K. Hashiguchi. Multiplicative hyperelastic-based plasticity for finite elastoplastic deformation/sliding: A comprehensive review. *Archives of Computational Methods in Engineering*, May 2018.
 - [52] P. Haupt. On the concept of an intermediate configuration and its application to a representation of viscoelastic-plastic material behavior. *International Journal of Plasticity*, 1(4):303–316, jan 1985.
 - [53] D. L. Henann and L. Anand. A large deformation theory for rate-dependent elastic-plastic materials with combined isotropic and kinematic hardening. *International Journal of Plasticity*, 25(10):1833–1878, oct 2009.

- [54] H. Hencky. Über Einige Statisch Bestimmte Fälle Des Gleichgewichts In Plastischen Körpern. *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 3(4):241–251, jan 1923.
- [55] H.D. Hibbitt, P.V. Marcal, and J.R. Rice. A finite element formulation for problems of large strain and large displacement. *International Journal of Solids and Structures*, 6(8):1069–1086, aug 1970.
- [56] R. Hill. A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 193(1033):281–297, may 1948.
- [57] R. Hill. *The mathematical theory of plasticity*. Oxford University Press, 1950.
- [58] R. Hill. Constitutive modelling of orthotropic plasticity in sheet metals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 38(3):405–417, jan 1990.
- [59] R. Hill. A user-friendly theory of orthotropic plasticity in sheet metals. *International Journal of Mechanical Sciences*, 35(1):19–25, jan 1993.
- [60] A. Hoger. The stress conjugate to logarithmic strain. *International Journal of Solids and Structures*, 23(12):1645–1656, jan 1987.
- [61] J. H. Hollomon. Tensile Deformation. *Transactions Metal Society AIME*, 162:268–290, february 1945.
- [62] T.J.R. Hughes and K.S. Pister. Consistent linearization in mechanics of solids and structures. *Computers & Structures*, 8(3-4):391–397, may 1978.
- [63] D. Hull and D. J. Bacon. *Introduction to dislocations*. Butterworth-Heinemann, 2011.
- [64] A. Ibrahimbegovic. *Nonlinear solid mechanics : theoretical formulations and finite element solution methods*. Springer, 2009.
- [65] M. Itskov. On the application of the additive decomposition of generalized strain measures in large strain plasticity. *Mechanics Research Communications*, 31(5):507–517, sep 2004.
- [66] M. Itskov and N. Aksel. Elastic constants and their admissible values for incompressible and slightly compressible anisotropic materials. *Acta Mechanica*, 157(1-4):81–96, mar 2002.
- [67] A.P. Karafillis and M.C. Boyce. A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(12):1859–1886, dec 1993.
- [68] S. W. Key and R. D. Krieg. On the numerical implementation of inelastic time dependent and time independent, finite strain constitutive equations in structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 33(1-3):439–452, sep 1982.

-
- [69] D. Kim, F. Javier Montáns, and K.J. Bathe. Insight into a model for large strain anisotropic elasto-plasticity. *Computational Mechanics*, 44(5):651–668, oct 2009.
- [70] S. Klinkel. *Theorie und Numerik eines Volumen-Schalen-Elementes bei finiten elastischen und plastischen Veraerrugen*. PhD thesis, Universitat Karlsruhe, 2000.
- [71] S. Klinkel, C. Sansour, and W. Wagner. An anisotropic fibre-matrix material model at finite elastic-plastic strains. *Computational Mechanics*, 35(6):409–417, may 2005.
- [72] M. Knezevic, B. Drach, M. Ardeljan, and I.J. Beyerlein. Three dimensional predictions of grain scale plasticity and grain boundaries using crystal plasticity finite element models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 277:239–259, aug 2014.
- [73] M. Kojic and K.-J. Bathe. *Inelastic analysis of solids and structures*. Springer, 2010.
- [74] M. Kojić and K.J. Bathe. Studies of finite element procedures—Stress solution of a closed elastic strain path with stretching and shearing using the updated Lagrangian Jaumann formulation. *Computers & Structures*, 26(1-2):175–179, jan 1987.
- [75] M. Latorre and F. J. Montáns. On the interpretation of the logarithmic strain tensor in an arbitrary system of representation. *International Journal of Solids and Structures*, 51(7-8):1507–1515, apr 2014.
- [76] M. Latorre and F.J. Montáns. Anisotropic finite strain viscoelasticity based on the Sidoroff multiplicative decomposition and logarithmic strains. *Computational Mechanics*, 56(3):503–531, sep 2015.
- [77] M. Latorre and F.J. Montáns. Fully anisotropic finite strain viscoelasticity based on a reverse multiplicative decomposition and logarithmic strains. *Computers & Structures*, 163:56–70, jan 2016.
- [78] M. Latorre and F.J. Montáns. Stress and strain mapping tensors and general work-conjugacy in large strain continuum mechanics. *Applied Mathematical Modelling*, 40(5-6):3938–3950, mar 2016.
- [79] M. Latorre and F.J. Montáns. A new class of plastic flow evolution equations for anisotropic multiplicative elastoplasticity based on the notion of a corrector elastic strain rate. *Applied Mathematical Modelling*, 55:716–740, mar 2018.
- [80] M. Latorre, E. Rosa, and F.J. Montáns. Understanding the need of the compression branch to characterize hyperelastic materials. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 89:14–24, mar 2017.
- [81] E. H. Lee. Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains. *Journal of Applied Mechanics*, 36(1):1, mar 1969.

- [82] E.H. Lee and D.T. Liu. Finite Strain Elastic-Plastic Theory. In *Irreversible Aspects of Continuum Mechanics and Transfer of Physical Characteristics in Moving Fluids*, pages 213–222. Springer Vienna, Vienna, 1968.
- [83] A.I. Leonov. Nonequilibrium thermodynamics and rheology of viscoelastic polymer media. *Rheologica Acta*, 15(2):85–98, feb 1976.
- [84] J. Liao, Xin Xue, Myoung-Gyu Lee, F. Barlat, G. Vincze, and A. B. Pereira. Constitutive modeling for path-dependent behavior and its influence on twist springback. *International Journal of Plasticity*, 93:64 – 88, 2017. Special Issue on Constitutive Descriptions of Plasticity at Various Scales in memory of Prof. José J. Grácio.
- [85] A. Lion. Constitutive modelling in finite thermoviscoplasticity: a physical approach based on nonlinear rheological models. *International Journal of Plasticity*, 16(5):469–494, apr 2000.
- [86] J. Lubliner. Normality rules in large-deformation plasticity. *Mechanics of Materials*, 5(1):29–34, mar 1986.
- [87] J. Lubliner. *Plasticity theory*. Dover Publications, 2008.
- [88] G. Maenchen and S. Sacks. *The tensor code*. University of California Lawrence Radiation Laboratory, 1963.
- [89] J. Mandel. *Plasticité Classique et Viscoplasticité*. Springer, New York, course held at the department of mechanics of solids edition, 1972.
- [90] J. Mandel. Thermodynamics and Plasticity. In *Foundations of Continuum Thermodynamics*, pages 283–304. Macmillan Education UK, London, 1973.
- [91] R.M. McMeeking and J.R. Rice. Finite-element formulations for problems of large elastic-plastic deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 11(5):601–616, may 1975.
- [92] L.F. Menezes and C. Teodosiu. Three-dimensional numerical simulation of the deep-drawing process using solid finite elements. *Journal of Materials Processing Technology*, 97(1-3):100–106, jan 2000.
- [93] A. Menzel, M. Ekh, K. Runesson, and P. Steinmann. A framework for multiplicative elastoplasticity with kinematic hardening coupled to anisotropic damage. *International Journal of Plasticity*, 21(3):397–434, mar 2005.
- [94] M. Miñano and F.J. Montans. A new approach to modeling isotropic damage for mullins effect in hyperelastic materials. *International Journal of Solids and Structures*, 67-68:272 – 282, 2015.
- [95] C. Miehe. On the representation of Prandtl-Reuss tensors within the framework of multiplicative elastoplasticity. *International Journal of Plasticity*, 10(6):609–621, jan 1994.

-
- [96] C. Miehe. Exponential Map Algorithm for Stress Updates in Anisotropic Elastoplasticity at Large Strains for Single Crystals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(19):3367–3390, oct 1996.
- [97] C. Miehe. A formulation of finite elastoplasticity based on dual co- and contra-variant eigenvector triads normalized with respect to a plastic metric. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 159(3-4):223–260, jul 1998.
- [98] C. Miehe, N. Apel, and M. Lambrecht. Anisotropic additive plasticity in the logarithmic strain space: modular kinematic formulation and implementation based on incremental minimization principles for standard materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(47-48):5383–5425, nov 2002.
- [99] C. Miehe and J. Schotte. Anisotropic finite elastoplastic analysis of shells: simulation of earing in deep-drawing of single- and polycrystalline sheets by Taylor-type micro-to-macro transitions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(1-2):25–57, jan 2004.
- [100] M. Miñano, M.A. Caminero, and F.J. Montáns. On the numerical implementation of the Closest Point Projection algorithm in anisotropic elasto-plasticity with nonlinear mixed hardening. *Finite Elements in Analysis and Design*, 121:1–17, nov 2016.
- [101] R. V. Mises. Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen. *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 8(3):161–185, 1928.
- [102] F.J. Montáns and K.J. Bathe. Computational issues in large strain elasto-plasticity: an algorithm for mixed hardening and plastic spin. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63(2):159–196, may 2005.
- [103] F.J. Montáns and K.J. Bathe. *Towards a Model for Large Strain Anisotropic Elasto-Plasticity*, pages 13–36. Springer Netherlands, Dordrecht, 2007.
- [104] L. Muller, J.M. Roche, A. Hurmane, D. Pacou, V. Bonnard, C. Peyrac, and L. Gornet. Experimental monitoring of the self-heating properties of thermoplastic composite materials. *Procedia Engineering*, 213:183–191, jan 2018.
- [105] E. A. de Souza Neto and D.R.J. Perić, D. and Owen. *Computational methods for plasticity : theory and applications*. Wiley, 2008.
- [106] D.M. Norris, B. Moran, J.K. Scudder, and D.F. Quiñones. A computer simulation of the tension test. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 26(1):1–19, feb 1978.
- [107] NUMISHEET93. Benchmark Problem. In A. Makinouchi, E. Nakamachi, E. Onate, and R.H. Wagoner, editors, *Proceedings of the 2nd International Conference on Numerical Simulation of Sheet Metal Forming Processes*, Iseharay, Japan, 1993.

- [108] R. W. Ogden. *Non-linear elastic deformations*. Dover Publications, 1997.
- [109] P. Papadopoulos and J. Lu. A general framework for the numerical solution of problems in finite elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 159(1-2):1–18, jul 1998.
- [110] P. Papadopoulos and J. Lu. On the formulation and numerical solution of problems in anisotropic finite plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(37-38):4889–4910, jun 2001.
- [111] D. Perić, D.R.J. Owen, and M.E. Honnor. A model for finite strain elasto-plasticity based on logarithmic strains: Computational issues. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 94(1):35–61, jan 1992.
- [112] V. Péron-Lühers, A. Jérusalem, F. Sansoz, L. Stainier, and L. Noels. A two-scale model predicting the mechanical behavior of nanocrystalline solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 61(9):1895–1914, sep 2013.
- [113] I.J. Polmear, D. StJohn, J.F. Nie, and M.a Qian. *Light alloys : metallurgy of the light metals*. Butterworth-Heinemann, 2017.
- [114] D. Raabe. *Continuum scale simulation of engineering materials : fundamentals, microstructures, process applications*. John Wiley & Sons. Wiley-VCH, 2004.
- [115] W. Ramberg and W. R Osgood. Description of stress-strain curves by three parameters. *United States. National Advisory Committee for Aeronautics.*, jul 1943.
- [116] M A Ramírez, R Schouwenaars, P Eyckens, J Gawad, L Kestens, A Van Bael, and P Van Houtte. Experimental validation and effect of modelling assumptions in the hierarchical multi-scale simulation of the cup drawing of AA6016 sheets. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 25(1):015002, jan 2017.
- [117] R.D. Krieg and S. Key. Implementation of a time dependent plasticity theory into structural programs — Request PDF. *American Society of Mechanical Engineers, Applied Mechanics Division.*, 20:125–137, 1976.
- [118] S. Reese, P. Pietryga, and I. Vladimirov. Anisotropic finite plasticity based on structural tensors—different strategies and application to forming simulations. *International Journal of Material Forming*, 2:459–462, 08 2009.
- [119] J Rice. *Continuum mechanics and thermodynamics of plasticity in relation to microscale deformation mechanisms*. Division of Engineering Brown University, Providence R.I., 1974.
- [120] W.D. Rolph and K.J. Bathe. On a large strain finite element formulation for elasto-plastic analysis. *KJ Willam (ed.), Constitutive equations: macro and computational aspects, ASME*, pages 131–147, 1984.

-
- [121] M. B. Rubin, O. Vorobiev, and E. Vitali. A thermomechanical anisotropic model for shock loading of elastic-plastic and elastic-viscoplastic materials with application to jointed rock. *Computational Mechanics*, 58(1):107–128, jul 2016.
- [122] R. Rubinstein and S.N. Atluri. Objectivity of incremental constitutive relations over finite time steps in computational finite deformation analyses. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 36(3):277–290, mar 1983.
- [123] C. Sansour, I. Karšaj, and J. Sorić. A formulation of anisotropic continuum elastoplasticity at finite strains. Part I: Modelling. *International Journal of Plasticity*, 22(12):2346–2365, dec 2006.
- [124] C. Sansour and W. Wagner. Viscoplasticity based on additive decomposition of logarithmic strain and unified constitutive equations. *Computers & Structures*, 81(15):1583–1594, jul 2003.
- [125] I. Schmidt. Some comments on formulations of anisotropic plasticity. *Computational Materials Science*, 32(3-4):518–523, mar 2005.
- [126] M. Schwarze, S. Reese, and I. Vladimirov. Sheet metal forming and springback simulation by means of a new reduced integration solid-shell finite element technology. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(5):454 – 476, 2011.
- [127] J. Segurado, R.A. Lebensohn, J. LLorca, and C.N. Tomé. Multiscale modeling of plasticity based on embedding the viscoplastic self-consistent formulation in implicit finite elements. *International Journal of Plasticity*, 28(1):124–140, jan 2012.
- [128] B.R. Seth. Generalized strain measure with applications to physical problems. Technical Summary Report 248, Wisconsin University - Madison Mathematics Research Center, 1961.
- [129] A.V. Shutov and J. Ihlemann. Analysis of some basic approaches to finite strain elasto-plasticity in view of reference change. *International Journal of Plasticity*, 63:183–197, dec 2014.
- [130] J. C. Simo and F. Armero. Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7):1413–1449, may 1992.
- [131] J. C. Simo and T. J. R. Hughes. *Computational inelasticity*. Springer-Verlag New York, 1998.
- [132] J.C. Simo. On the computational significance of the intermediate configuration and hyperelastic stress relations in finite deformation elastoplasticity. *Mechanics of Materials*, 4(3-4):439–451, dec 1985.
- [133] J.C. Simo. A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part I. Continuum

- formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66(2):199–219, feb 1988.
- [134] J.C. Simo. Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 99(1):61–112, aug 1992.
- [135] J.C. Simo. Numerical analysis and simulation of plasticity. *Handbook of Numerical Analysis*, 6:183–499, jan 1998.
- [136] J.C. Simo and C. Miehe. Associative coupled thermoplasticity at finite strains: Formulation, numerical analysis and implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 98(1):41–104, jul 1992.
- [137] J.C. Simo and M. Ortiz. A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49(2):221–245, jun 1985.
- [138] J.C. Simo and K.S. Pister. Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems: computational implications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 46(2):201–215, oct 1984.
- [139] H.W. Swift and H. W. Plastic instability under plane stress. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1(1):1–18, oct 1952.
- [140] L.M. Taylor and E.B. Becker. Some computational aspects of large deformation, rate-dependent plasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 41(3):251–277, dec 1983.
- [141] I. Tikhovskiy, D. Raabe, and F. Roters. Simulation of earing during deep drawing of an Al–3 % Mg alloy (AA 5754) using a texture component crystal plasticity FEM. *Journal of Materials Processing Technology*, 183(2-3):169–175, mar 2007.
- [142] I. Tikhovskiy, D. Raabe, and F. Roters. Simulation of earing of a 17 % Cr stainless steel considering texture gradients. *Materials Science and Engineering: A*, 488(1-2):482–490, aug 2008.
- [143] C. Truesdell and W. Noll. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. In *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, pages 1–579. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [144] G.E.G Tucker. Texture and earing in deep drawing of aluminium. *Acta Metallurgica*, 9(4):275–286, apr 1961.
- [145] F.J. Ulm and O. Coussy. *Mechanics and durability of solids*. Prentice Hall, 2003.
- [146] M.H. Ulz. A Green–Naghdi approach to finite anisotropic rate-independent and rate-dependent thermo-plasticity in logarithmic Lagrangean strain–entropy space. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(41-44):3262–3277, sep 2009.

-
- [147] I.N. Vladimirov, M.P. Pietryga, and S. Reese. On the modelling of non-linear kinematic hardening at finite strains with application to springback—Comparison of time integration algorithms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75(1):1–28, jul 2008.
- [148] I.N. Vladimirov, M.P. Pietryga, and S. Reese. Prediction of springback in sheet forming by a new finite strain model with nonlinear kinematic and isotropic hardening. *Journal of Materials Processing Technology*, 209(8):4062 – 4075, 2009.
- [149] I.N. Vladimirov, M.P. Pietryga, and S. Reese. Anisotropic finite elastoplasticity with nonlinear kinematic and isotropic hardening and application to sheet metal forming. *International Journal of Plasticity*, 26(5):659–687, may 2010.
- [150] I.N. Vladimirov, M.P. Pietryga, and S. Reese. On the influence of kinematic hardening on plastic anisotropy in the context of finite strain plasticity. *International Journal of Material Forming*, 4(2):255–267, jun 2011.
- [151] E. Voce. The relationship between stress and strain for homogeneous deformations. *J. Inst. Metals*, 74:537–562, 1948.
- [152] R.V. Von Mises. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften. *Göttingen Mathematisch-Physikalische Klasse*, 4:582–592, 1913.
- [153] M. Wallin, M. Ristinmaa, and N.S. Ottosen. Kinematic hardening in large strain plasticity. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 22(3):341–356, may 2003.
- [154] G. Weber and L. Anand. Finite deformation constitutive equations and a time integration procedure for isotropic, hyperelastic-viscoplastic solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 79(2):173–202, mar 1990.
- [155] M.L. Wilkins. Calculation of elastic-plastic flow. *University of California, Ernest L. Lawrence Radiation Laboratory*, UCRL 7322:1–68, 1963.
- [156] P. Wriggers. *Nonlinear finite element methods*. Springer, 2008.
- [157] J. W. Yoon, F. Barlat, Robert E. Dick, K. Chung, and T. J. Kang. Plane stress yield function for aluminum alloy sheets—part II: FE formulation and its implementation. *International Journal of Plasticity*, 20(3):495–522, mar 2004.
- [158] J. W. Yoon, D. Y. Yang, K. Chung, and F. Barlat. General elasto-plastic finite element formulation based on incremental deformation theory for planar anisotropy and its application to sheet metal forming. *International journal of plasticity*, 15(1):35–67, 1999.