UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE MONTES, FORESTAL Y DEL
MEDIO NATURAL**

**APLICACIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO EN LA CUANTIFICACIÓN DE LA
SOSTENIBILIDAD Y EL RENDIMIENTO EN LA GESTIÓN DE POBLACIONES DE FAUNA
SILVESTRE**

TESIS DOCTORAL

ÁLVARO MARTÍNEZ HERNÁNDEZ
Ingeniero de Montes

2020

DOCTORADO EN INVESTIGACIÓN FORESTAL AVANZADA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE MONTES, FORESTAL Y DEL
MEDIO NATURAL

APLICACIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO EN LA CUANTIFICACIÓN DE LA
SOSTENIBILIDAD Y EL RENDIMIENTO EN LA GESTIÓN DE POBLACIONES DE
FAUNA SILVESTRE

AUTOR:

ÁLVARO MARTÍNEZ HERNÁNDEZ
INGENIERO DE MONTES

DIRECTOR:

ÁNGEL JULIÁN MARTÍN FERNANDEZ
DOCTOR INGENIERO DE MONTES

COORDIRECTOR:

SIGFREDO FRANCISCO ORTUÑO PEREZ
DOCTOR INGENIERO DE MONTES

AÑO 2020

POLITÉCNICA

Tribunal nombrado por el Excmo. Sr. Rector de la Universidad Politécnica de Madrid, el día.....de.....de 202....

Presidente D/Dña.

Vocal D D/Dña.

Vocal D D/Dña.

Vocal D D/Dña.

Secretario D/Dña.

Realizado del acto de defensa y lectura de la Tesis el día.....

de..... de 202.... en Madrid.

Calificación.....

EL PRESIDENTE

LOS VOCALES

EL SECRETARIO

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, agradecer a Ángel Julián Martín su inestimable ayuda a lo largo de este largo camino, sin la cual habría sido imposible llevar este trabajo a buen término.

En segundo lugar, a mis padres sin los cuales no habría podido llegar nunca a ser quien soy hoy en día.

A Natalia, por estar a mi lado en todo momento, apoyándome cuando más lo he necesitado.

Por último, a Luís por su completa disposición a ayudarme siempre que lo he necesitado sin importar el momento.

Índice General

ÍNDICE GENERAL.....	1
RESUMEN/ABSTRACT	5
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	7
CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES.....	12
2.1 Modelo exponencial	14
2.2 Modelo logístico	16
2.3 Modelo matricial de Leslie	19
2.3.1 Fundamentos teóricos del modelo.....	19
2.3.2 Comportamiento en el límite	28
2.3.3 Método iterativo para el cálculo de autovectores y autovalores.....	34
2.3.4 Modelo de Leftkovitch.....	37
2.3.5 Extracción de individuos en modelos matriciales.....	39
2.3.5.1 Extracción uniforme	44
2.3.6 Cálculo de la Sensibilidad y elasticidad de los valores.....	45
2.3.6.1 Sensibilidad del autovalor	45
2.3.6.2 Análisis de la elasticidad	47
2.4 Modelo de Jensen	48
2.5 La modelización de poblaciones cinegéticas en España	51
2.6 Vacíos detectados	60
CAPÍTULO 3. OBJETIVOS	61
CAPÍTULO 4. SÍNTESIS METODOLÓGICA.....	63
CAPÍTULO 5. EL MODELO Y SU PARAMETRIZACIÓN	64
5.1 Parametrización de la capacidad de carga y carga óptima	64
5.1.1 Cálculo de la capacidad óptima	64
5.1.2 Cálculo de la capacidad de carga	68
5.2 Desarrollo del modelo	68
5.2.1 Matriz de Leslie: Crecimiento exponencial por clases de edad de la parte femenina.	69
5.2.1.1 Teoría del modelo.....	69
5.2.1.2 Parametrización y aplicación del modelo	72
5.2.2 Primera aproximación: Crecimiento exponencial por clases de edad y sexo.....	94
5.2.2.1 Teoría del modelo.....	94
5.2.2.2 Parametrización y aplicación del modelo	103

5.2.3 Comparación y valoración de los modelos de Leslie	128
5.2.3.1 Comparación entre el modelo inicial y su modificación 1	128
5.3 Modelo final: Modelo densodependiente con clases de calidad	136
5.3.1 Clases de Calidad	137
5.3.1.1 Hembras:	139
5.3.1.2 Machos:	140
5.3.2 Nueva matriz de transiciones A	142
5.3.3 Tabla de vida y parametrización de la matriz	143
5.3.4 Densodependencia, Capacidad de carga y Capacidad óptima de una población.....	145
5.3.5 Población después de la reproducción y después de las extracciones	151
5.3.6 Extracciones por la derecha o por la izquierda.....	153
5.3.7 Cálculo matemático de los parámetros de gestión y de las extracciones	156
5.3.7.1 Parámetros y extracciones del producto por la izquierda.....	157
5.3.7.2 Parámetros y extracciones del producto por la derecha.....	163
5.4 Alternativas de gestión: Matrices de gestión	168
5.4.1 Montería comercial	173
5.4.2 Montería de trofeos	180
5.4.3 Trofeos Medallables	188
CAPÍTULO 6. APLICACIÓN DEL MODELO Y RESULTADOS.....	198
6.1 Objetivos.....	198
6.2 Valores de capacidad óptima y capacidad de carga.....	198
6.3 Convergencia por debajo de la capacidad óptima	201
6.4 Convergencia por encima de la capacidad óptima.....	214
6.5 Aplicación de las matrices de gestión.....	230
6.5.1 Montería comercial	232
6.5.2 Montería de trofeos	239
6.5.3 Trofeos Medallables	247
6.6 Comparativa de extracciones	256
6.7 Errores comunes en el cálculo de ratios de extracción	259
6.8 Comparación con otros modelos.....	266
CAPÍTULO 7. APLICACIÓN INFORMÁTICA.....	271
7.1 Entrada de datos.....	271
7.2 Resultados	277
CAPÍTULO 8. CONCLUSIONES.....	282
ANEXOS	284

Anexo 1: Especie objeto de estudio: El ciervo rojo (<i>Cervus elaphus</i>)	284
Taxonomía y origen	284
Distribución	284
Distribución mundial	284
Distribución en España	285
Descripción	286
Hábitat	287
Condiciones climáticas	288
Condiciones edáficas y topográficas.....	288
Vegetación.....	289
Biología y comportamiento	292
Alimentación	292
Horarios y desplazamientos	293
Comportamiento social	294
Dinámica de poblaciones.....	296
Longevidad	296
Proporción de sexos	297
Mortalidad.....	298
Depredación	298
Enfermedades y parásitos	298
Enfermedades	299
Parásitos	300
Reproducción y natalidad	301
Anexo 2: Área de estudio.....	304
Descripción del medio	304
Estado Legal.....	304
Situación Administrativa.....	304
Pertenencia	305
Límites	306
Enclavados.....	306
Viarios y accesos.....	307
Servidumbres de paso	307
Servidumbres de uso. Ocupaciones	308
Usos y costumbres vecinales	308
Figuras de planificación territorial o de protección.....	308
Normativa aplicable.....	308
Estado natural	309
Historia natural y geología.....	309
Situación geográfica	314
Orografía y configuración del terreno	314
Caracterización climática.....	316
Posición hidrográfica y procesos erosivos.....	318
Litología y edafología.....	319
Vegetación.....	321
Fauna	337
Estado fitosanitario de las masas forestales	344
Riesgo de incendio.....	345
Ecosistemas, paisajes y valores naturales más sobresalientes.....	346
BIBLIOGRAFÍA	347

Resumen/Abstract

Durante las últimas décadas los ungulados han aumentado sus poblaciones y áreas de distribución provocando la aparición de daños en el hábitat, conflictos con las poblaciones humanas y situaciones de riesgo ecológico. Por esta razón, el desarrollo de un control ecológicamente sostenible mediante el empleo de herramientas útiles es necesario para evitar manejos ineficientes que puedan amenazar la persistencia de la población o del ecosistema.

Este estudio, presenta un modelo matemático para gestionar poblaciones de ungulados salvajes, empleando un sistema matricial densodependiente y un método cuantitativo asociado para alcanzar densidades óptimas, reduciendo los conflictos con las sociedades humanas y el deterioro del medio ambiente. Los pasos completos del proceso de gestión son explicados y nuevas distribuciones estables son estudiadas empleando las novedosas matrices de gestión. El modelo, puede ser fácilmente adaptado a cualquier población y especie conociendo algunos parámetros biológicos básicos, organizándose por clases de calidad, fundamentadas en características físicas de los animales y su comportamiento biológico, resultando como una notable mejora para los gestores sobre los modelos matriciales anteriores.

La información arrojada por el modelo, es esencial para la gestión, evolución de la densidad de la población a lo largo del tiempo por clases de calidad y en dos momentos del año: después del periodo reproductivo y después del periodo de extracciones, ratio de crecimiento de la población, distribución estable de la población y ratios de extracción que garantizan una extracción cuantitativamente sostenible y una población sana. Por último, el modelo es implementado dentro de una aplicación informática para ser fácilmente utilizado por cualquier gestor o usuario.

During last decades ungulates have increased their populations and distribution areas, this widespread has made habitat damage appear and some conflicts with human interests and situations of environmental concern, for these reasons the development of an ecological sustainable control is necessary. In many cases, those populations are managed inefficiently or management does not even exist due to the absence of useful tools.

This study introduces a mathematical model for managing wild ungulate populations using a density dependent matrix system model and an associated quantitative method to reach a stable Optimum Capacity, reducing conflicts with human societies and environment deterioration. The steps for the complete managing process are described and new stable distributions through the new management matrices are studied. The model can be easily adapted to every population and species by knowing some basic biological parameters and it is organized by quality classes, based on physical characteristics and biological behavior, it results in an improvement for wildlife managers than previous matrix methods.

The output provides essential information for the management, as the population density evolution by quality classes twice a year: after the reproductive season and the extraction season, population growth rate, stable population distribution and extraction rate to guarantee a healthy and sustainable population. Finally the model is shown as a computer software to be easily used by any wildlife manager or user.

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

La biodiversidad biológica de España es enorme, dentro del continente europeo es el país que cuenta con mayor biodiversidad a causa de su posición estratégica entre el océano atlántico, el mar mediterráneo y entre África y Eurasia. Además, hay que añadirle la amplia diferencia altitudinal que presenta la península ibérica desde el nivel del mar a los 3.479 metros del Mulhacén. España es después de Suiza el país más montañoso de Europa presentando un variadísimo mosaico de hábitats y biotopos con una variedad amplia de climas y regiones bien diferenciadas. Por lo que en pocos kilómetros es posible pasar de un área con clima de alta montaña a otra totalmente desértica.

La península ibérica cuenta con el mayor número de endemismos del continente, más de 38.000 especies de insectos y varios miles de arácnidos y ácaros, en total unas 45.000 especies de artrópodos donde no se incluyen otros invertebrados.

En cuanto a los vertebrados, hay descritas 70 especies de peces continentales (Doadrio 2001) entre autóctonas y alóctonas, destacando el gran número de endemismos a causa del aislamiento de los peces de agua dulce con el resto del continente, aunque algunas de ellas como el esturión, alosas, salmón y lampreas son migratorias. Hay 28 especies de anfibios y 47 de reptiles de las cuales 14 son especies exóticas invasoras (Pleguezuelos, Márquez et al. 2002). Con respecto a las aves, encontramos un gran número de aves no solo por su situación geográfica y diversidad, sino porque muchas especies propias del norte europeo o de África eligen la península para la cría o la invernada o simplemente la utilizan como paso en sus migraciones (Madroño, González et al. 2004).

Por último, las especies de mamíferos en este territorio son amplias y diversas, destacando grandes mamíferos carnívoros como el oso pardo (*Ursus arctos*), el lobo ibérico (*Canis lupus signatus*) el lince ibérico (*Lynx pardinus*) o ungulados: jabalí (*Sus scrofa*), ciervo ibérico (*Cervus elaphus*), gamo (*Dama dama*) ... entre otros. Además podemos encontrar una gran cantidad de micro mamíferos incluidos importantes endemismos (Palomo, Gisbert et al. 2007).

Pero toda esta biodiversidad está fuertemente influenciada por el ser humano, que en algunos casos es favorecedor y en otros es amenaza de esta. España cuenta con

una población en 2018 de 46.733.038 habitantes (Instituto Nacional de Estadística 2019) con una densidad 92.04 hab/km².

Los ungulados, son uno de los animales de tamaño medio-grande más extendidos en el planeta, entre ellos, los ciervos con sus variadas especies han incrementado el tamaño de sus poblaciones en muchas áreas de Europa y Norte América (Ueno, Kaji et al. 2010, Skonhoft, Veiberg et al. 2013), donde habitualmente comparten hábitat con el ser humano, viendo fragmentado su hábitat debido a sus actividades (Zuberogitia, Real et al. 2014). Esta coexistencia en ocasiones causa problemas y conflictos, tales como: daños forestales y agrícolas (Putman, Moore 1998, Renaud, Verheyden-Tixier et al. 2003), dispersión de enfermedades y accidentes de tráfico, siendo este último el más extendido y persistente conflicto entre humanos y animales en el mundo desarrollado (Snow, Porter et al. 2015). En Europa, se producen aproximadamente 507.000 colisiones al año con animales, causando unos 30.000 heridos y unos costes de 800 millones de euros al año. En España, se estiman 14.000 accidentes de tráfico anuales por esta causa, pero resulta llamativo que al menos el 50% de los conductores reconocer haber sufrido una situación de riesgo a causa de un animal a lo largo de un año, el 6% estuvo implicado en un accidente y el 94% de los conductores vio animales en la vía (DGT 2011). Durante el año 2017, se produjeron en España 363 accidentes con víctimas, en los cuales fallecieron dos personas (DGT 2019) como consecuencia del atropello de animales.

La alta densidad de algunas poblaciones de ciervo amenaza en algunos casos la conservación del ecosistema natural, al dañar y alimentarse de la vegetación natural (Trdan, Vidrih 2008, Carpio, Castro-Lopez et al. 2014). La protección del ecosistema, el impacto humano sobre el medio ambiente y la necesaria explotación de los recursos naturales, demanda una gestión razonable de la fauna salvaje (Gordon, Hester et al. 2004). Los gestores deben integrar los procesos ecológicos, sociales, culturales y políticos así como la rentabilidad económica (Tremblay, Hester et al. 2004) buscando una sostenibilidad global, reduciendo en lo particular conflictos y enfermedades relacionadas con altas densidades de animales. Estas acciones de manejo son necesarias y tendrán un significativo impacto positivo en la cobertura vegetal, en las comunidades animales y en la biodiversidad (Zipkin, Andrew Royle et al. 2010).

A pesar de ello, en muchas partes del mundo los grandes herbívoros son gestionados de una manera ineficiente (Austin, Raffaelli et al. 2013), errores en la planificación de la gestión tales como la aplicación de ratios de extracción irracionales

son comunes. Uno de estos errores que se repite con frecuencia es la tendencia de favorecer solamente las extracciones de grandes trofeos, causando una selección antinatural de los individuos reproductores, desviaciones en la proporción de sexos (Hard, Mills et al. 2006, Torres-Porras, Carranza et al. 2009b, Martínez-Jauregui, Herruzo 2014) y el crecimiento incontrolado de la población (Mysterud 2010). Otras situaciones completamente distintas serían la sobreexplotación o la ausencia de explotación, ambos casos opuestos, pero igualmente indeseables. El primero de ellos conducirá a la población hacia la extinción (Johnson, Mills et al. 2010, Lwin, Linkie et al. 2016) mientras que el segundo de ellos, unido a la ausencia de depredadores naturales, el abandono humano de las zonas rurales y los campos de cultivo actuando como una fuente de alimentos no natural, permiten que algunas poblaciones de animales salvajes aumenten exponencialmente, causando entonces, los citados conflictos con los humanos (Macmillan, Phillip 2008) y con su propio hábitat (Smart, White et al. 2008, Mysterud 2010).

Estos conflictos constantes con la fauna, principalmente las de mayor tamaño como jabalíes y ciervos, obliga a la gestión de sus poblaciones por parte de técnicos cualificados. Estos últimos deberán contar con el conocimiento y las herramientas (Jennings, Bowman et al. 2014) necesarias para estimar las densidades óptimas y cómo mantenerlas calculando los cupos de una manera sostenible para que en ningún caso se ponga en peligro la persistencia de la población a lo largo del tiempo.

Estos cupos de gestión pueden ejecutarse mediante la caza deportiva tan arraigada y tradicional en España como por profesionales contratados para el sacrificio de los animales o la extracción en vivo. Lejos de cualquier discusión queda que una intervención humana para controlar y mantener estables las poblaciones cinegéticas, es inevitable.

En este trabajo se va a desarrollar un nuevo modelo con su metodología y un sistema para gestionar poblaciones silvestres empleando un modelo matemático que puede ser fácilmente utilizable por cualquier gestor a través de su aplicación informática.

La historia de la modelización de poblaciones se inicia entre los siglos XVIII y XIX con el clérigo anglicano y erudito británico Thomas Robert Malthus (1766-1834), el cual está considerado como uno de los primeros demógrafos (Wikipedia 2019c). Su trabajo más destacado fue el “Ensayo sobre el principio de la población” (Malthus

1846), publicando en el año 1798 la primera y la última de las seis ediciones que lo componen en 1826. En este trabajo Malthus afirmaba que la población humana tiende a crecer en una progresión geométrica, mientras que sus alimentos lo hacen en una progresión aritmética, por lo que esta, encontrará límites a su subsistencia.

Malthus afirma que la población humana, cuando no lo impide ningún obstáculo “se va doblando cada 25 años, creciendo de período en período, en una progresión geométrica”. “Los medios de subsistencia, en las circunstancias más favorables, no se aumentan sino en una progresión aritmética” (Malthus 1846).

Como ejemplo de esta afirmación toma la población de Estados Unidos durante el siglo XVIII, donde debido a la abundancia de los recursos alimenticios, no hay restricciones naturales a la expansión de la población.

A partir de este modelo del crecimiento exponencial, hacia 1840 (Nagle 1992), el matemático belga Pierre-François Verhulst (1804-1849) desarrolló la función logística (Wikipedia 2019b). La ecuación de Verhulst se publicó por primera vez por el propio Pierre-François Verhulst en el año 1838 tras haber leído el tratado de Malthus “Ensayo sobre el principio de población”, derivando su ecuación logística para describir un crecimiento auto limitado de una población biológica. Ocasionalmente esta ecuación puede ser denominada también como “ecuación de Verhulst-Pearl” ya que en 1920 fue redescubierta, Alfred J. Lotka la obtuvo de nuevo en 1925 y llamó “ley del crecimiento poblacional” (Wikipedia 2019a).

Este crecimiento, relacionado con el de la ecuación exponencial presenta similitudes a este para pequeños valores de población, sin embargo, el crecimiento se ralentiza progresivamente. Según este tipo de crecimiento, la tasa de reproducción es proporcional a la población existente y a la cantidad de recursos disponibles.

Por lo tanto, cualquier población que siga el modelo del crecimiento logístico permanecerá acotada por una asíntota horizontal.

Tomando como ejemplo la población humana de Estados Unidos entre los años 1790 y 1980, se puede comparar el censo real de población frente a las simulaciones Maltusianas y Logísticas del proceso (Tabla 1.1 y Figura 1.1). Analizando los resultados se comprueba que el crecimiento exponencial o Maltusiano cumple perfectamente con lo establecido en los primeros años (1790-1860), mientras que a partir de este punto difiere progresivamente de la realidad. Por su parte, el crecimiento logístico mantiene unos valores más cercanos a la realidad durante todo el proceso.

Tabla 1.1. Comparación entre el censo real de población de EE.UU (millones) entre los años 1790 y 1980 con los modelos Malthusiano y Logísticos (Neagle 1992).

Año	Censo de EE.UU	Malthusiano	Logístico
1790	3,93	3,93	3,93
1800	5,31	5,31	5,30
1810	7,24	7,18	7,13
1820	9,64	9,70	9,58
1830	12,87	13,10	12,82
1840	17,07	17,70	17,07
1850	23,19	23,92	22,60
1860	31,44	32,32	29,70
1870	39,83	43,67	38,65
1880	50,16	59,01	49,69
1890	62,95	79,73	62,95
1900	75,99	107,73	78,37
1910	91,97	145,57	95,64
1920	105,71	196,69	114,21
1930	122,78	265,77	133,28
1940	131,67	359,11	152,00
1950	151,33	485,24	169,56
1960	179,32	655,66	185,35
1970	203,21	885,93	199,01
1980	226,50	1197,08	210,46

Figura 1.1. Comparación entre el censo real de población de EE.UU (millones) entre los años 1790 y 1980 con los modelos Malthusiano y Logísticos (Nagle 1992).

CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES

Consideramos que una población es un grupo de seres vivos de la misma especie, que habitan en el mismo lugar, utilizando unos recursos y reproduciéndose.

Actualmente en algunas áreas científicas se está tratando de conocer el desarrollo de fenómenos reales, en este caso hablaremos de poblaciones, estudiando el comportamiento, sus consecuencias y fines según los factores que intervienen en ella. En muchos casos, estos fenómenos se pueden estudiar sin necesidad de que se produzcan, utilizando simulaciones para recrearlo. Esas simulaciones pueden ser fácilmente manipuladas para estudiar los efectos que producen cada factor sobre la población, si esto se representa mediante estructuras matemáticas estas simulaciones se conocen como Modelos matemáticos buscando los siguientes objetivos:

- Desarrollar herramientas con garantías que permitan predecir o decidir sobre futuras situaciones poblacionales.
- Comprender los mecanismos de actuación de las poblaciones.
- Entender mejor la realidad del proceso que se ha presentado y su evolución.
- Determinar la prevalencia (importancia del proceso) e incidencia (velocidad de propagación).
- Encontrar un sistema de gestión adecuado.

Para ello es necesario cumplir unos condicionantes que harán que el modelo sea válido y útil para explicar la evolución de la población:

- Conocer e incluir todos los factores que influirán en la evolución, mediante una exhaustiva evaluación de los mismos.
- Presentar sensibilidad a los parámetros importantes e insensibilidad a los irrelevantes.

A grandes rasgos desde un punto de vista matemático se puede hablar de dos tipos de modelos:

Deterministas: En los cuales no se tiene en cuenta el azar. Ante unos datos iniciales idénticos siempre se obtendrá el mismo resultado.

Estocásticos: El azar influye en el proceso. Ante los mismos datos iniciales se pueden obtener diferentes resultados.

Para completar el desarrollo de un modelo fiable se deberían realizar las siguientes fases:

- Formulación del modelo: diseño a nivel teórico, utilizando la información conocida de la población. En este punto hay que decidir que se quiere modelar y por qué. Definiendo los elementos que lo integran y sus relaciones.
- Verificación del modelo: Comprobación de que el modelo cumple su cometido. Mediante pruebas sobre casos teóricos bien conocidos.
- Validación del modelo: Aplicación sobre un caso real conocido.
- Análisis de sensibilidad de los parámetros: conocer como repercuten los factores importantes sobre el resultado del modelo.
- Aplicación del modelo: Sobre la situación real que queremos predecir y analizar los resultados.

Es de vital importancia conocer la dinámica poblacional para entender el desarrollo temporal y espacial de los animales que habitan distintas áreas. El empleo de modelos de poblaciones puede predecir y cuantificar los procesos, permitiendo así un sistema de gestión más seguro y verificable de los recursos. Para ello, es importante conocer las propiedades que le son propias a cada población, como puede ser su natalidad, mortalidad, tasa de crecimiento, densidad, distribuciones por sexos, edades, etc.

Podemos considerar los parámetros básicos para poder estudiar una población: el número de individuos presentes en el momento inicial del estudio, la natalidad y la mortalidad característica de esa población, entendiendo natalidad como el número de individuos que se incorporan por unidad de tiempo y mortalidad como el número de individuos que abandonan la población por unidad de tiempo. El conocimiento de estas dos variables puede ya dar valiosa información y ser utilizada para formular modelos sencillos.

2.1 Modelo exponencial

Este modelo matemático llamado ley malthusiana o exponencial del crecimiento de la población ha sido utilizado para estudiar colonias de bacterias y el crecimiento de poblaciones de pequeños mamíferos durante intervalos cortos de tiempo, e incluso como ya se ha visto se ha aplicado en algunos estudios sobre poblaciones humanas (Nagle 1992).

Estudia el crecimiento de la población conociendo únicamente la natalidad y la mortalidad de esta, sin tener en cuenta otros elementos que pueden influir en ella. El objetivo de este modelo es simular el comportamiento del número total de individuos para así conocer el número total de animales que se espera formen la población en un instante futuro $t+1$.

Se puede afirmar que el número de individuos que hay en el instante $t+1$ es igual a los individuos totales en el instante t más los que han nacido menos los que han muerto en ese periodo de tiempo. Esta afirmación representada matemáticamente sería de la siguiente manera:

$$N_{t+\Delta t} = N_t + f \cdot N_t \cdot \Delta t - m \cdot N_t \cdot \Delta t$$

$$N_{t+\Delta t} = N_t + F - M$$

$N_{t+\Delta t}$: Es el número de individuos al finalizar el periodo.

N_t : Es el número de individuos al iniciar el periodo.

f : tasa de natalidad

m : tasa de mortalidad

F : Número de individuos nacidos en ese periodo.

M : Número de individuos muertos durante el periodo.

Para continuar desarrollando el crecimiento exponencial vamos a estudiar su comportamiento en el límite cuando Δt tiende a cero:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} N_{t+\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} N_t + f \cdot N_t \cdot \Delta t - m \cdot N_t \cdot \Delta t$$

Que puede también ser expresado de una forma equivalente como:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{t+\Delta t} - N_t}{\Delta t} = f \cdot N_t - m \cdot N_t$$

Concluyendo que el crecimiento instantáneo es igual a la primera derivada del sistema:

$$\frac{dN}{dt} = (f - m) \cdot N_t$$

El número de individuos es la solución de una ecuación diferencial ordinaria de tipo lineal. Esta ecuación está condicionada inicialmente por el tamaño de la población en el instante inicial $t=0$ representado como N_0 . La ecuación x junto con la población inicial forman el modelo completo que se puede escribir como:

$$(M1) \begin{cases} N_{t+1} = (f - m) \cdot N_t \\ N_0 \end{cases}$$

Matemáticamente se trata de un problema de Cauchy, donde la ecuación del sistema es una ecuación diferencial ordinaria de orden uno de tipo lineal homogénea. Después de introducir la condición inicial tiene una única solución:

$$N_{t+1} = N_0 e^{(f-m)t}$$

$$N_{t+1} = N_0 e^{rt}$$

Donde:

r : tasa de crecimiento

Este modelo exponencial es una buena solución para obtener aproximaciones cuando los valores de Δt son pequeños si los valores de natalidad y mortalidad no varían y no existen otros condicionantes externos. Como bien podemos suponer (Figura 2.1):

- $f > m$, la población crece.
- $f < m$, la población decrece.
- $f = m$, la población se mantienen constante.
- $r > 1$, la población crece.
- $r < 1$, la población decrece.
- $r = 1$, la población es estable.

Figura 2.1. Diferentes curvas del modelo exponencial

Como ya se ha comentado anteriormente, este es un modelo aplicable en pocos casos y de tipo más teórico, ya que este crecimiento no es muy frecuente en mamíferos en la naturaleza.

2.2 Modelo logístico

Buscando una situación más realista para la simulación de los fenómenos poblacionales naturales nos encontramos con el modelo logístico (Williams, Nichols et al. 2002). Este tipo de modelo asume que el propio aumento de la densidad de la población ejercerá algún tipo de efecto sobre el crecimiento de la misma, causado por ejemplo por la competencia entre individuos de la misma población por los recursos que les ofrece su ecosistema.

Este modelo logístico, relaciona la tasa intrínseca de crecimiento con el número de individuos N de forma lineal. En este caso, partimos de la premisa de que cuando el número de individuos de la población es bajo estos tienen a su disposición todos los recursos presentes, llevando a tasas intrínsecas de crecimiento máximas. Cuando la densidad de la población aumenta los individuos encuentran mayor competencia entre sus propios congéneres y los recursos empiezan a disminuir proporcionalmente ya que cada nuevo componente resta una proporción de alimento y espacio al hábitat.

La teoría del modelo logístico, asume que, en algún momento del crecimiento de la población la natalidad y la mortalidad estarán compensadas, formando una asíntota en la curva del crecimiento y manteniendo a la población estabilizada desde ese momento. Cuando la tasa intrínseca de crecimiento es cero, el valor de N pasa a denominarse capacidad de carga y se simboliza por K . Esta teoría asume que este es el momento donde los recursos son explotados de manera óptima y la población se mantendrá en equilibrio. Estas últimas afirmaciones, son aplicables a pocas poblaciones reales, ya que raramente de una manera natural se estabilizan completamente. Por otra parte, la afirmación de que K es el momento óptimo de una población no es compartida desde este trabajo, ya que para darse esta situación la mortalidad ha sufrido un incremento y la natalidad se ha visto frenada, algo nada deseable, que indica un mal estado de salud de los individuos, lo que puede conducir en cualquier momento al colapso y reducción drástica de la población forzada por enfermedades, escasez de recursos etc.

Para el modelo logístico tenemos que:

$$N_{t+\Delta t} = N_t + r \cdot N_t \cdot \Delta t - \text{Efectos del medio} \cdot N_t \cdot \Delta t$$

Para estimar los efectos del medio habrá que tener en cuenta que:

- Cuando N_t (Número total de animales en el instante t) se aproxima a K (capacidad de carga del medio) el crecimiento se reduce progresivamente hasta anularse por completo en $N_t = K$.
- Cuando N_t es muy pequeño con respecto a K , la población se comporta según el crecimiento exponencial ya que a estos niveles los recursos no se ven limitados por la densidad.

Determinando la evolución de la población como:

$$N_{t+\Delta t} = N_t + r \cdot N_t \cdot \Delta t - r \cdot \frac{N_t}{K} \cdot N_t \cdot \Delta t$$

Estudiando su comportamiento en el límite cuando Δt tiende a cero se obtiene:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} N_{t+\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} N_t + r \cdot N_t \cdot \Delta t - r \cdot \frac{N_t}{K} \cdot N_t \cdot \Delta t$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{t+\Delta t} - N_t}{\Delta t} = r \cdot N_t - r \cdot \frac{N_t}{K} \cdot N_t$$

De donde se deduce que el crecimiento instantáneo es igual a la primera derivada de la ecuación N_t en función del tiempo:

$$\frac{dN}{dt} = r \cdot N_t \cdot \left(1 - \frac{N_t}{K}\right)$$

El número total de individuos de la población es la solución de una ecuación diferencial ordinaria de tipo lineal. Al igual que en el caso del crecimiento exponencial esta ecuación se complementa con la condición inicial del número de individuos al comienzo del estudio es decir en N_0 , formando el modelo:

$$(M2) \begin{cases} N_{t+1} = r \cdot N_t \cdot \left(1 - \frac{N_t}{K}\right) \\ N_0 \end{cases}$$

Para estudiar los puntos de equilibrio del sistema, es decir aquellos donde el crecimiento es nulo, igualamos la primera derivada a cero:

$$r \cdot N_t \cdot \left(1 - \frac{N_t}{K}\right) = 0$$

Obteniendo crecimiento nulo en $N_t = 0$, y $N_t = K$.

Según la curva del crecimiento logístico la población ha de estar siempre entre los valores 0 y K, ya que si es igual o menor a cero no hay población y no puede ser mayor que K ya que no hay recursos disponibles para más animales. Este razonamiento se obtiene de la representación de la primera derivada, la cual es una parábola positiva (Figura 2.2) entre los valores 0 y K. De donde se obtiene de igual forma que el crecimiento es máximo en el punto de inflexión de esta parábola, es decir, cuando $N = K/2$.

En la curva logística el valor de equilibrio K se obtiene siempre, independientemente de la población inicial, la única diferencia es el tiempo empleado para alcanzarlo.

Figura 2.2. Curva típica del crecimiento logístico

2.3 Modelo matricial de Leslie

2.3.1 Fundamentos teóricos del modelo

Los modelos matriciales para la proyección de poblaciones fueron introducidas por el fisiólogo Patrick Holt Leslie (Leslie 1945). Este modelo ha sido ampliamente utilizado (Caswell 2000) para estudiar los cambios numéricos que sufren las poblaciones, determinar sus causas, predecir su comportamiento y analizar sus consecuencias ecológicas. Proyectando la población desde un instante t a otro $t+1$ y asumiendo que este intervalo de tiempo es igual a la duración de la clase de edad.

Este modelo, estudia el crecimiento solamente de la parte femenina de la población, por clases de edad en intervalos iguales al número de años totales, aplicando natalidades y mortalidades diferentes para cada una de estas clases.

La tasa de mortalidad depende de la edad del individuo, generalmente individuos muy jóvenes o muy viejos tienen mayores probabilidades de morir que uno en edad adulta. La fecundidad también es asumida como dependiente de la edad ya que serán los animales maduros completamente los que generalmente tengan capacidades reproductivas más altas.

Por otra parte, el modelo de Leslie da por hecho que la parte masculina y femenina de la población estudiada son siempre similares en cuanto a número total de efectivos, extrapolando los resultados obtenidos en la población femenina a la masculina.

Teniendo en cuenta esto, el modelo de Leslie agrupa a los individuos en clases homogéneas en cuanto a la reproducción y la supervivencia. Al ser estos factores dependientes de la edad, los agrupa según clases de edad.

Otra de las premisas de este modelo, es que siempre es independientemente de la densidad poblacional, es decir, los recursos son ilimitados, viéndose afectado solamente por: nacimientos y migraciones que hacen aumentar la población y por las muertes y emigraciones que la disminuyen.

Todo esto, limita el empleo de este modelo a situaciones muy específicas y sencillas.

En este caso tendremos que dividir la variable continua edad (n) en un número discreto de clases de edad (i), de tal manera que cada clase tendrá n/i años de duración.

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow \left[0, \frac{n}{i} \right) \\ 2 &\rightarrow \left[\frac{n}{i}, \frac{2n}{i} \right) \\ &\vdots \\ n-1 &\rightarrow \left[\frac{(i-2)n}{i}, \frac{(i-1)n}{i} \right) \\ n &\rightarrow \left[\frac{(i-1)n}{i}, n \right] \end{aligned}$$

Suponemos que el intervalo de proyección es de un año y los individuos están clasificados en x clases de edad. El estado de la población está definido por el vector X_t cuyas entradas x_{it} proporcionan en número de individuos dentro de cada clase.

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

Este vector en el momento $t=0$ se conoce como el vector de la distribución inicial de la población. Con el paso del tiempo, nacimientos, envejecimientos y muertes, el número de hembras en cada clase del vector se van modificando. Los individuos en las clases $i=2,3,\dots, n$ en el intervalo de tiempo $t+1$ son los supervivientes de la clase de edad previa durante el intervalo de tiempo t .

$$\begin{aligned}
 x_2(t+1) &= P_1 x_1(t) \\
 x_3(t+1) &= P_2 x_2(t) \\
 &\vdots \\
 x_n(t+1) &= P_n x_n(t)
 \end{aligned}$$

Siendo P_i la probabilidad de que un individuo en la clase i en el instante t sobreviva y llegue a la clase $i+1$ en el instante $t+1$. Los nuevos miembros, es decir, los que se incorporan a la clase $i=1$ no pueden ser supervivientes de ninguna otra clase, sino que todos ellos son originarios de la reproducción.

$$x_1(t+1) = F_1 x_1(t) + F_2 x_2(t) \cdots F_n x_n(t)$$

Donde F_i es la tasa de reproducción o fertilidad de cada clase i . Es decir, es el número de individuos de la clase $i=1$ en el intervalo $t+1$ que nacerán por individuo de cada clase i en el intervalo de tiempo t . Para obtener todos estos parámetros es común emplear las conocidas como tablas de vida.

Las tablas de vida, son unas tablas estadísticas que contienen la información necesaria sobre la estructura de una población y sus parámetros demográficos. Estas tablas son en ocasiones utilizadas para poder obtener los coeficientes de la Matriz de Leslie, aunque no es el único método.

Generalmente, estas tablas incluirán datos como: clases de edad, número de individuos pertenecientes a cada clase, probabilidades de supervivencia, mortalidad y natalidad. Como sabemos, estas tablas para el modelo de Leslie recogerán solamente datos de la parte femenina de la población, extrapolarlos directamente los datos a la masculina ya que una de las premisas de este modelo era que las dos partes son iguales.

La supervivencia, representará la fracción de individuos de la clase de edad i que han sobrevivido al comenzar un nuevo período t , este valor estará contenido dentro del intervalo $(0,1)$.

La representación gráfica de la probabilidad de supervivencia en función de la clase de edad i ($l(i)$), da lugar a la conocida como curva de supervivencia, representadas habitualmente en escala logarítmica.

$$l(i) = \frac{x_i}{x_1}$$

Siendo x_i el número total de hembra en la clase i y x_1 el número total de hembras en la clase de edad inicial.

En la naturaleza, suelen encontrarse tres tipos generales de curvas según el comportamiento biológico de las especies (Figura 2.3).

- Poblaciones en las que la mayor proporción de muertes se producen en las clases de edad superiores, típica curva de los grandes mamíferos que siguen la conocida como estrategia de la K. Curva roja de la Figura 2.3.
- Poblaciones en las que la proporción de muertes no depende de la edad. Curva azul de la Figura 2.3.
- Poblaciones que producen un gran número de descendientes con escasas posibilidades de supervivencia, la gran mayoría de las muertes se producen en las primeras clases de edad (Curva verde Figura 2.3). Típica curva de estrategias de la r, como pueden ser algunas especies de peces.

Fuente: Elaboración propia

Siguiendo el procedimiento de la tabla de vida se puede obtener a continuación la probabilidad de supervivencia de un individuo de la clase i a la clase inmediatamente superior $i+1$ a la cual nombramos como P_i .

$$P_i = \frac{l_{i+1}}{l_i}$$

Por otra parte, la natalidad será el número medio de crías hembra producidas por cada hembra de una clase i al finalizar el periodo reproductivo, siendo este valor

siempre positivo. Utilizando los datos incluidos en la tabla de vida, podemos obtener igualmente la denominada como Tasa Neta de Reproducción (R) que se conoce como la media del número total de crías hembra que produce una hembra de la población a lo largo de toda su vida.

$$R = l_1 F_1 + l_2 F_2 + \dots + l_n F_n = \sum_{i=1}^n l_i F_i$$

El significado y la utilidad de esta Tasa Neta de Reproducción serán explicados con profundidad en posteriores apartados de este documento. En la Tabla 2.1 se representa a modo de ejemplo de una Tabla de vida de la parte femenina de una hipotética población de ciervo.

Tabla 2.1. Ejemplo de tabla de vida para una hipotética población de ciervo

Clase de edad (Hi)	Sexo	Edad(años)	Número de individuos (xi)	Sup. al inicio de la clase (li)	Tasa de mortalidad (Di)	Tasa de Supervivencia (Pi)	Tasa de reproducción (Fi)	Crías Hembra producidas
1	Hembra	0	133	1	0,25	0,75	0	0
2	Hembra	1	100	0,75	0,19	0,81	0,282	28
3	Hembra	2	81	0,61	0,17	0,83	0,282	23
4	Hembra	3	67	0,50	0,16	0,84	0,282	19
5	Hembra	4	56	0,42	0,16	0,84	0,282	16
6	Hembra	5	47	0,35	0,17	0,83	0,282	13
7	Hembra	6	39	0,29	0,18	0,82	0,282	11
8	Hembra	7	32	0,24	0,13	0,88	0,282	9
9	Hembra	8	28	0,21	0,04	0,96	0,282	8
10	Hembra	9	27	0,20	0,04	0,96	0,282	8
11	Hembra	10	26	0,20	0,04	0,96	0,282	7
12	Hembra	11	25	0,19	0,04	0,96	0,282	7
13	Hembra	12	24	0,18	0,04	0,96	0,282	7
14	Hembra	13	23	0,17	0,04	0,96	0,282	6
15	Hembra	14	22	0,17	0,05	0,95	0,282	6
16	Hembra	15	21	0,16	0,05	0,95	0,282	6
17	Hembra	16	20	0,15	0,05	0,95	0,282	6
18	Hembra	17	19	0,14	0,05	0,95	0,282	5
19	Hembra	18	18	0,14	1,00	0,00	0,282	5
20	Hembra	19	0	0	1,00	0,00	0	0

Fuente: Elaboración propia

Las ecuaciones de proyecciones anteriores, pueden ser representadas de forma matricial por un sistema estándar de ecuaciones lineales diferenciales finitas de la siguiente forma:

$$\vec{X}_{t+1} = A\vec{X}_t$$

Donde X_t y X_{t+1} son vectores columna que contienen el número de hembras dentro de cada clase de edad entre el periodo t y el periodo $t+1$. Mientras tanto A , es la matriz cuadrada primitiva donde F_i es la fecundidad del grupo de edad i , es decir, la media de crías hembras producidas por una hembra de esa clase y P_i es la supervivencia de la edad $i-1$ en el instante t a la edad i en el instante $t+1$. Esta matriz es conocida como matriz de Leslie (Leslie 1945). Incluye entradas positivas solamente en la primera fila (fertilidades) y en la subdiagonal (probabilidades de supervivencia).

$$A = \begin{pmatrix} F_0 & F_1 & F_2 & \cdots & F_{n-1} & F_n \\ P_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & P_{n-1} & P_n \end{pmatrix}$$

Escribiendo la ecuación completa de forma matricial para 3 clases de edad el resultado es:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}_{(t+1)} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}_{(t)}$$

En este tipo de modelos, el caso más simple se da cuando la matriz A , es constante a pesar de que en la naturaleza la supervivencia y la natalidad no lo son. Estos factores que pueden afectar a la matriz A pueden ser: externos, independientes de la población como el clima en ese período de tiempo, disponibilidad de alimento etc., o también factores internos de la población, como puede ser, por ejemplo, la competencia intraespecíficas por los recursos debido a densidades elevadas.

Esta constancia en el tiempo de la matriz de Leslie hace que esta se comporte como un modelo exponencial del tipo:

$$\begin{aligned}
 X_{t+1} &= X_t + B - D \\
 \frac{X_{t+1}}{X_t} &= 1 + \frac{B}{X_t} - \frac{D}{X_t} = 1 + b - d \\
 \frac{X_{t+1}}{X_t} &= 1 + (b - d) = 1 + R \\
 X_{t+1} &= (1 + R) X_t = \lambda X_t
 \end{aligned}$$

Donde:

B = Nacimientos.

D = Muertes.

b = tasa per cápita de fertilidad.

d = tasa per cápita de mortalidad.

R = tasa neta discreta de incremento per cápita.

r = tasa intrínseca de incremento per cápita

λ = tasa anual de crecimiento poblacional.

Otra aproximación:

$$\begin{aligned}
 X_{t+1} &= X_t + R X_t \\
 X_{t+1} &= (1 + R) X_t = \lambda X_t
 \end{aligned}$$

Considerando periodos de tiempo mayores:

$$\begin{aligned}
 X_{t+2} &= \lambda X_{t+1} = \lambda \lambda X_t = \lambda^2 X_t \\
 X_t &= \lambda^t X_0
 \end{aligned}$$

Al tener una población con reproducción continua:

$$\frac{dX}{dt} = rX$$

Después de integrar podemos ver que la población total de individuos en el instante t está relacionado con la población inicial en el instante t=0, de una forma exponencial:

$$X_t = X_0 e^{rt}$$

Donde:

$$\lambda = e^r; \ln \lambda = r$$

También es posible calcular el valor de r a través de datos conocidos de la población como la Probabilidad de supervivencia al inicio de la clase de edad l_i y la tasa de reproducción F_i media de crías por hembra de la clase de edad i . Para ello se necesita calcular primero el tiempo de generación t , es decir la media de edad de todos los hijos producidos por la población:

$$t = \frac{\sum_{i=0}^n l_i F_i}{\sum_{i=0}^n l_i F_i}$$

Puesto que estamos suponiendo que la población crece de una forma exponencial:

$$N_t = N_0 e^{rt} \rightarrow \frac{N_t}{N_0} = e^{rt}$$

Considerando N_t / N_0 aproximadamente igual a la Tasa neta de reproducción (R), número medio de crías producidas por una hembra a lo largo de toda su vida:

$$R = e^{rt} \rightarrow r \approx \frac{\ln R}{t} \text{ (Ecuación 2.1)}$$

Siendo este valor de r calculado, una aproximación que nunca difiere en más de un 10% del valor real (Stearns 1992). Para obtener un valor exacto de r es necesario resolver la siguiente ecuación:

$$1 = \sum_{i=0}^n e^{-ri} l_i F_i \text{ (Ecuación 2.2)}$$

Siendo la ecuación 2.2 una adaptación de la ecuación de Euler con una alta dificultad de resolución. La metodología más utilizada es emplear la ecuación 2.1 para obtener un valor aproximado y sustituirlo en la ecuación 2.2 para según su aproximación a 1, ir ajustando el valor para acercarnos a la solución exacta.

Si $\lambda > 1$ o $r > 0$, la población aumenta. En general, en la naturaleza no encontramos poblaciones con crecimientos ilimitados como asume este modelo exponencial (figura 2.4). En la gran parte de los casos, su crecimiento es denso-dependiente, lo que se

refleja en una tendencia a disminuir la tasa de crecimiento per cápita al mismo tiempo que aumenta la densidad.

Figura 2.4. Representación de un crecimiento exponencial

Esto es una gran limitación del modelo básico de Leslie, solucionable con la introducción de una A variable en el tiempo dando lugar entonces a un modelo de variación lineal en el tiempo.

$$\vec{X}_{t+1} = A_t \vec{X}_t$$

Esta variación puede ser determinista o estocástica. Si es determinista puede ser periódica o aperiódica. Las variaciones debido a la población, producen modelos no lineales, donde cada entrada en A_x puede ser función del vector de población X .

$$\vec{X}_{t+1} = A_x \vec{X}_t$$

Una unión de ambos casos, es decir, variaciones medioambientales y denso dependientes o dependientes de una frecuencia forman sistemas no homogéneos e ecuaciones no lineales.

$$\vec{X}_{t+1} = A_{x,t} \vec{X}_t$$

Este tipo de modelos son mucho más precisos, aunque es mucho más complicado su análisis.

De vuelta a la fórmula del modelo básico de Leslie, la matriz A como ya hemos dicho se mantiene constante en el tiempo, y por lo tanto se deduce que:

$$\begin{aligned}\vec{X}_1 &= A\vec{X}_0 \\ \vec{X}_2 &= A\vec{X}_1 = A^2 \vec{X}_0 \\ \vec{X}_3 &= A\vec{X}_2 = A^3 \vec{X}_0 \\ &\vdots \\ \vec{X}_{t+1} &= A\vec{X}_t = A^{t+1} \vec{X}_0\end{aligned}$$

De esta forma, conociendo la distribución inicial X_0 y la matriz A, se puede determinar la distribución de la población de hembras en cualquier momento del futuro.

2.3.2 Comportamiento en el límite

La ecuación $\vec{X}_{t+1} = A\vec{X}_t = A^t \vec{X}_0$, no facilita de una manera rápida una visión general de la dinámica de la evolución de la población. Para ello es necesario estudiar lo que ocurre con los autovalores y los autovectores de la matriz de Leslie.

Al ser la matriz de Leslie una matriz cuadrada nxn aparece de forma natural el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A\vec{X}_t = \lambda\vec{X}_t \Leftrightarrow A\vec{X}_t - \lambda\vec{X}_t = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)\vec{X}_t = 0$$

Los autovalores de una matriz son las raíces de la ecuación característica, así todos los autovalores de la matriz cuadrada A, son los valores de λ para los cuales:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Es decir son las raíces de la ecuación característica (Rorres, Anton 1979):

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Si la matriz A es nxn, tendrá n autovalores, estos pueden estar repetidos o ser números complejos. Desarrollando el polinomio característico se obtiene:

$$\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2b_1\lambda^{n-2} - a_3b_1b_2\lambda^{n-3} - \cdots - a_nb_1b_2\cdots b_{n-1} = 0$$

Equivalente a:

$$\lambda^n = a_1 \lambda^{n-1} + a_2 b_1 \lambda^{n-2} + a_3 b_1 b_2 \lambda^{n-3} + \dots + a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}$$

Dividiendo toda la ecuación entre λ^n se obtiene:

$$1 = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2 b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3 b_1 b_2}{\lambda^3} + \dots + \frac{a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda^n}$$

Se nombrará como $q(\lambda)$ a una nueva ecuación:

$$q(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2 b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3 b_1 b_2}{\lambda^3} + \dots + \frac{a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda^n}$$

Después de analizar estas ecuaciones, se pudo ver que $P(\lambda)=0$ es equivalente a la $q(\lambda)=1$, por lo tanto, las soluciones de esta última también serán los autovalores de la matriz A de Leslie. La función $q(\lambda)$:

- $q(\lambda)$ decrece monótonamente para los valores de $\lambda > 0$, ya que:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow q(\lambda_2) < q(\lambda_1)$$

- $\lim_{\lambda \rightarrow 0} q(\lambda) = +\infty$
- $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} q(\lambda) = 0$

Con todo esto, se concluye que existe un único valor λ_1 positivo para el que $q(\lambda_1) = 1$. Cumpléndose que para la matriz de Leslie A hay un único autovalor λ_1 positivo para el que $q(\lambda_1) = 1$. También λ_1 es simple, esto es, su grado de multiplicidad es 1 puesto que una ecuación algebraica no tiene una raíz doble cuando la raíz no hace cero la primera derivada. Por lo tanto, λ_1 es una raíz simple de $P(\lambda)$ si se cumple:

$$\begin{aligned} P(\lambda_1) &= 0 \\ P'(\lambda_1) &\neq 0 \end{aligned}$$

Por otra parte, sea λ_1 un autovalor de la matriz cuadrada A, entonces un autovector de esta matriz asociado al autovalor es cualquier solución del vector X del sistema:

$$(A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

También sabemos que el autovalor λ_1 es el valor no nulo que cumple la siguiente ecuación:

$$A\vec{X}_1 = \lambda_1 \vec{X}_1$$

Siendo X_1 el autovector asociado al autovalor λ_1 . Por lo tanto, es una solución distinta de cero de la ecuación anterior.

$$\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 - \lambda_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & -\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -\lambda_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & -\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollando el sistema:

$$(a_1 - \lambda_1)x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

$$b_1x_1 - \lambda_1x_2 = 0$$

$$b_2x_2 - \lambda_1x_3 = 0$$

$$\vdots$$

$$b_{n-2}x_{n-2} - \lambda_1x_{n-1} = 0$$

$$b_{n-1}x_{n-1} - \lambda_1x_n = 0$$

Se trata este de un sistema compatible determinado por lo que admitirá infinitas soluciones. Nosotros vamos a calcular una de estas soluciones fijando el valor:

$$x_1 = 1$$

A continuación, según este valor fijado a x_1 se obtiene:

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \frac{b_1}{\lambda_1} \\
 x_3 &= \frac{b_2 x_2}{\lambda_1} = \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} \\
 &\vdots \\
 x_n &= \frac{b_1 b_2 \cdots b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}}
 \end{aligned}$$

Finalmente, este proceso finaliza obteniéndose el vector propio, autovector asociado al autovalor λ_1 , esto indica la proporción estable de individuos dentro de cada clase de edad en la población a largo plazo. Este vector es:

$$\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} \\ \frac{b_1 b_2 b_3}{\lambda_1^3} \\ \vdots \\ \frac{b_1 b_2 b_3 \cdots b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} \end{pmatrix}$$

Al tratarse de un valor propio único λ_1 , el subespacio S_1 de vectores propios asociados, tendrá un carácter unidimensional, significando que cualquier otro vector propio asociado a λ_1 será múltiplo de X_1 .

Resumiendo, concluimos que: Una matriz de Leslie A , tiene un autovalor positivo único λ_1 . Este valor propio es simple y tiene un autovector asociado X_1 cuyas coordenadas son todas positivas.

Por otra parte, como ya se ha avanzado anteriormente, el comportamiento a largo plazo de la población y su distribución por edades es dependiente del valor propio λ_1 que en este caso es el valor propio dominante y de su vector propio asociado X_1 .

Según esto, siendo λ_1 el único autovalor positivo de una matriz de Leslie A , y siendo λ_i otro autovalor real o complejo de A entonces:

$$|\lambda_i| \leq \lambda_1$$

Cuando $|\lambda_i| < \lambda_1$ para todos los valores propios de A, estamos hablando de que λ_1 es un valor propio dominante de A. No siempre está garantizado que exista un valor propio dominante para una matriz de Leslie, sin embargo, si dos entradas consecutivas a_i, a_{i+1} de la primera fila de la matriz de Leslie no son iguales a cero el autovalor positivo de A es dominante. Traducido a términos poblacionales, quiere decir que si una población femenina tiene dos clases de edad fértiles de manera consecutiva su matriz de Leslie correspondiente tiene un autovalor positivo dominante, cosa bastante normal si los intervalos de tiempo entre clases de edad no son muy largos.

Está demostrado que para periodos de tiempo suficientemente largos el vector de distribución de edades en el instante $t+1$ es múltiplo escalar del vector de distribución t anterior, siendo el escalar precisamente el autovalor positivo y estrictamente dominante λ_1 de su matriz de Leslie. Esto quiere decir que cada grupo de edad aumenta o disminuye un $\alpha\%$ al pasar de t a $t+1$ estabilizando las proporciones entre las clases de edad para finalmente mantenerse en una proporción constante.

$$\vec{X}_t \approx \lambda_1^t \vec{X}_0 \text{ y } \vec{X}_t \approx \lambda_1 \vec{X}_{(t-1)}$$

$$\vec{X}_{t+1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_{1t} \\ \lambda_1 x_{2t} \\ \vdots \\ \lambda_1 x_{nt} \end{pmatrix}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\lambda_1 x_1}{\lambda_1 x_2}$$

De otra manera, como la población se estabiliza con el paso del tiempo decimos que X_n puede ser también aproximadamente de la siguiente forma:

$$\vec{X}_{t+1} \approx \vec{X}_t + \frac{\alpha}{100} \vec{X}_t = \vec{X}_t \left(1 + \frac{\alpha}{100} \right) = \lambda_1 \vec{X}_t$$

Donde, por lo tanto:

$$\lambda_1 = 1 + \frac{\alpha_1}{100} \Leftrightarrow \alpha_1 = 100(\lambda_1 - 1)$$

Calculando así el porcentaje de variación de la población α_1 asociado al autovalor λ_1 .

El tiempo que tarda en estabilizarse la proporción de las clases de edad dependerá del número de individuos en cada clase en el instante inicial t_0 . Ahora añadimos a la inicial una constante c que introduce esta variación en la fórmula y es dependiente de la distribución de edades del vector inicial. Prescindiendo de ella para periodos largos de tiempo como ya se ha explicado.

$$\vec{X}_t \approx c\lambda_1^t \vec{X}_0 \text{ y } \vec{X}_t \approx c\lambda_1 \vec{X}_{(t-1)}$$

Ahora, dependiendo del valor del valor propio positivo λ_1 encontramos tres casos que nos indican la tendencia de crecimiento de la población a lo largo del tiempo. Siendo esta una muy importante utilidad de estas matrices de Leslie para el estudio de poblaciones.

- La población crece si $\lambda_1 > 1$.
- La población decrece si $\lambda_1 < 1$.
- La población es estable o tiene crecimiento cero, cuando $\lambda_1 = 1$.

Pero existe otro método para conocer la tendencia de la población a partir de la matriz de Leslie, este es calculando la tasa neta de reproducción, es decir, es calcular el promedio de crías que tiene una hembra a lo largo de toda su vida, estimándose de la siguiente forma:

Clase de edad (i)	Nº de hembras en esa clase	Hijas que engendran
1	x	xa_1
2	xb_1	xb_1a_2
3	xb_1b_2	$xb_1b_2a_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$xb_1 \dots b_{n-1}$	$xb_1 \dots b_{n-1}a_n$

Por lo tanto, durante toda su vida un conjunto de hembras x habrán tenido el siguiente número de crías hembra:

$$x(a_1 + a_2b_1 + a_3b_1b_2 + \cdots + a_nb_1b_2 \cdots b_{n-1})$$

Mientras que una sola de estas hembras habrá engendrado el siguiente número de crías hembra:

$$(a_1 + a_2b_1 + a_3b_1b_2 + \cdots + a_nb_1b_2 \cdots b_{n-1})$$

Es esta última expresión la que se conoce como tasa neta de reproducción y se va a representar con la letra R:

$$R = a_1 + a_2b_1 + a_3b_1b_2 + \cdots + a_nb_1b_2 \cdots b_{n-1}$$

Del resultado de esta tasa, se puede decir que mientras cada hembra a lo largo de su vida tenga más de un descendiente viable la población aumentará, si este número es igual a uno la población se mantendrá estable, mientras que si cada hembra tiene menos de una cría viable en su vida la población tenderá a la extinción. Resumiendo:

- $R > 1$ La población crece.
- $R = 1$ Población estable
- $R < 1$ La población decrece

2.3.3 Método iterativo para el cálculo de autovectores y autovalores

Como se ha explicado, es de vital importancia el conocimiento del autovalor dominante y su autovector o vector propio asociado, ya que nos proporciona información necesaria para el estudio de la población objetivo.

Recordando, el cálculo de estos valores pasaba por resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo dependiente del parámetro λ :

$$A\vec{X} = \lambda\vec{X}$$

O de una forma equivalente:

$$(A - \lambda I_n)\vec{X} = 0$$

Siendo:

A: Matriz de Leslie.

I: Matriz identidad de orden n.

λ : Autovalor.

X: Autovector.

Este método de cálculo es útil cuando las matrices no son demasiado grandes y se quiere conocer únicamente cómo se comporta la población a largo plazo (cuando en términos matemáticos $t \rightarrow \infty$).

En nuestro caso, nos interesa conocer y poder representar la evolución continua de la población y por lo tanto también la de sus valores característicos, autovalores y autovectores, sin tener que detenernos a calcularlos y de esta manera obtener una visión global de los datos obtenidos a lo largo del periodo de estudio y poder representarlos fácilmente.

Para poder calcular estos valores para cada periodo de tiempo de una manera rápida, se va a utilizar una hoja de cálculo. Por lo tanto, este proceso evita el cálculo de los autovalores y autovectores utilizando el polinomio característico $\det(A - \lambda I) = 0$, cuyo uso puede resultar complicado para matrices de gran tamaño:

Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$, son autovalores para la ecuación matricial $\det(A - \lambda I) = 0$, una vez ordenados estos valores se obtiene el autovalor dominante:

$\lambda_1 \rightarrow |\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \dots |\lambda_n|$ Entonces λ_1 será el autovalor dominante.

A partir de ahí, se obtienen también los autovalores:

$V_1, V_2, V_3, \dots, V_n / A\vec{V}_i = \lambda_i \vec{V}_i$, Donde: $|A - \lambda_i I| \vec{V}_i = 0$ para cada autovalor y autovector.

Por su parte, la variante de cálculo de autovalores y autovectores, es conocido como método de las potencias (Wielandt 1944), en este trabajos lo definimos como método iterativo de convergencia y tiene la siguiente explicación matemática:

1. $A\vec{V}_i = \lambda_i \vec{V}_i$, Donde λ_i es un autovalor del autovector $\vec{V}_i$ y $(A - \lambda_i I)\vec{V}_i = 0$
2. Cualquier vector $\vec{X}_i$ podría ser expresado como una combinación lineal de las bases de los autovectores, dependiendo de sus coordenadas:
Tomando $\vec{B} = (V_1, V_2, \dots, V_n)$, como base del autovector, un vector $\vec{X}_k$ podría ser expresado a través de $\vec{B}$ la forma: $\vec{X}_k = (\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n)$.

3. Si $\vec{X}_t$ es el vector que muestra la composición estructural de la población en el instante de tiempo t y $\vec{X}_k$ es el vector proyectado después de k intervalos de tiempo:

$$\vec{X}_{t+1} = A\vec{X}_t$$

$$\vec{X}_2 = A\vec{X}_1, \vec{X}_3 = A\vec{X}_2, \dots, \vec{X}_K = A\vec{X}_{K-1}$$

$$\vec{X}_k = A^k \vec{X}_1$$

Cada $\vec{X}_i \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ tiene sus propias coordenadas dentro de $\vec{B}$.

La base del autovector como se explicó en el punto 2, para $i = 1$, el vector $\vec{X}_1$ tendrá la siguiente expresión: $\vec{X}_1 = (\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n)$.

4. Estudiamos la convergencia de cualquier vector inicial $\vec{X}_k$ que cumpla las propiedades anteriores cuando $k \rightarrow \infty$.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{X}_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} A^k \vec{X}_1$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{X}_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} A^k (\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n)$$

Debido a que es un autovalor:

$$A^k V_i = \lambda_i^k V_i \rightarrow A^k V_1 = \lambda_1^k V_1, A^k V_2 = \lambda_2^k V_2, \dots, A^k V_n = \lambda_n^k V_n$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{X}_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_1 \lambda_1^k V_1 + \alpha_2 \lambda_2^k V_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k V_n)$$

Tomando λ_1^k como factor común:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_1^k \left(\alpha_1 V_1 + \alpha_2 \frac{\lambda_2^k}{\lambda_1^k} V_2 + \dots + \alpha_n \frac{\lambda_n^k}{\lambda_1^k} V_n \right)$$

Para terminar, tomando límites como $\lambda_1 > \lambda_i$ donde siempre $i \neq 1$.

$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^k / \lambda_1^k = 0$ a excepción del primero, donde $i = 1$ obteniéndose el

resultado: $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{X}_{k+1} = \lambda_1^k \alpha_1 \vec{X}_1$.

Donde $\lambda_1^k \alpha_1$ son constantes numéricas. Por lo tanto, converge todo ello a un nuevo vector dominante proporcional al autovector dominante $\vec{V}_i$.

Después de este proceso, α_1 permite una proporcionalidad entre $\vec{X}_1$ y $\vec{V}_i$. Demostrando al mismo tiempo el método iterativo numérico para matrices de proyección, donde el valor de λ_1 como autovalor dominante se estabiliza.

2.3.4 Modelo de Leftkovitch

En muchas especies, para poder estudiar la evolución de sus poblaciones, la edad no es lo más importante. Por ejemplo, en algunos individuos la supervivencia o la natalidad pueden estar más influenciadas por la etapa de desarrollo en la que se encuentra que por su edad en sí. El cambio de estado puede ser flexible y no tiene por qué producirse siempre al mismo tiempo pudiendo depender de factores externos.

El modelo de Leslie fue modificado posteriormente por Leftkovitch (Leftkovitch 1965) agrupando a la parte femenina de la población en etapas o estados en lugar de las clases de edad para poder adaptarse mejor a otro tipo de situaciones. Este modelo ha sido ampliamente utilizado para estudiar la evolución y el manejo de poblaciones salvajes (Caswell 2000).

Al igual que el primitivo modelo de Leslie, esta modificación se representa de forma matricial por el mismo sistema estándar de ecuaciones lineales diferenciales finitas. Donde X_t y X_{t+1} son los vectores columna que contienen el número de hembras dentro de cada clase de edad entre el periodo t y el periodo $t+1$.

$$\vec{X}_{t+1} = A\vec{X}_t$$

La modificación introducida por Leftkovitch se observa dentro de la matriz A , ahora denominada matriz de Leftkovitch. Siendo A la matriz cuadrada primitiva donde F_i es la fecundidad del grupo de edad i , media de crías hembras producidas por una hembra de esa clase, P_i es la supervivencia de la edad $i-1$ en el instante t a la edad i en el instante $t+1$ y por último el nuevo elemento G_i que representa la probabilidad de que un animal en la clase i en el instante t mantenga la clase i en el instante $t+1$. Estimando los valores de G y P como:

$$G_i = \sigma_i(1 - \gamma_i)$$

$$P_i = \sigma_i \gamma_i$$

Donde σ_i , es la probabilidad de supervivencia y γ_{ji} , la probabilidad de crecimiento de una clase de edad i. Por lo tanto, la matriz A de Leftkovitch tiene el siguiente aspecto:

$$A = \begin{pmatrix} G_0 \cdot F_0 & F_1 & F_2 & \cdots & F_{n-1} & F_n \\ P_0 & G_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & G_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & G_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & P_{n-1} & G_n \end{pmatrix}$$

A diferencia de la matriz de Leslie, ahora hay entradas positivas G_i en la diagonal principal.

Así, ahora existe la posibilidad de que parte de los individuos crezcan hasta la siguiente clase de edad en un periodo de tiempo t o mantengan esa misma clase de edad después del transcurso de ese periodo t. Además, el comportamiento en el límite de este modelo es exactamente igual al de modelo de Leslie, el crecimiento de la población es exponencial y presenta una distribución estable por etapas.

Este tipo de modelos que se basan en clases de edad o de desarrollo antes que, en la edad, se suele emplear para estudiar la evolución de poblaciones en las que es difícil conocer su edad exacta y por lo tanto es necesario basarse en su estado de desarrollo. Siendo muy útil para emplearse sobre poblaciones salvajes en las que es imposible conocer la edad exacta del individuo sin capturarlo o incluso sacrificarlo. Al mismo tiempo, se asume al igual que en el anterior modelo que la supervivencia y la reproducción son constantes, siendo esto generalmente aplicable en la naturaleza solo para periodos cortos de tiempo.

A continuación, en el siguiente ejemplo para cuatro edades y cuatro clases de edad, vemos la diferencia entre las dos matrices y se muestra gráficamente el distinto comportamiento de los dos modelos (Figura 2.5). Siendo A la matriz de Leslie y A' la matriz de Leftkovitch.

$$A = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & 0 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} G_1 \cdot F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ P_1 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & G_4 \end{pmatrix}$$

Figura 2.5. Diferencia gráfica entre el modelo de Leslie y de Leftkovitch.(Caswell 2000).

2.3.5 Extracción de individuos en modelos matriciales.

Como se ha explicado en los apartados anteriores, para una población su matriz de Leslie tiene un autovalor estrictamente dominante. Siendo este valor mayor que la unidad dicha población experimentará teóricamente un crecimiento infinito, puesto que en estos modelos no aparecen limitaciones de alimento, territorio, enfermedades...causantes de variaciones en los valores de natalidad y mortalidad presentes en la matriz original.

En consecuencia, este crecimiento permite planificar una extracción de individuos de la población con el objetivo de regularla y mantenerla en niveles óptimos o también para obtener un rendimiento económico de la misma.

El caso más sencillo es el de la extracción duradera y estable. Esto quiere decir que: una extracción es duradera y estable si el rendimiento que se obtiene al término de cada período es el mismo y la distribución de las edades de la población se conserva al separar el rendimiento de cada período. Este concepto busca la sostenibilidad de la población ya que esta no se agota, simplemente se extrae el excedente debido al crecimiento anual, permitiendo mantener la población en los niveles deseados.

Partimos de una población con una distribución de edades determinada, esta población presenta un período de crecimiento definido por una matriz de Leslie.

Terminando este período se obtiene como rendimiento una fracción de cada una de las clases de edad. La duración del período de separación de los animales que conforman el rendimiento, debería de ser breve en comparación con el período de crecimiento con el objetivo de que el crecimiento o los cambios de la población puedan ser despreciados durante el periodo de extracción. Por último y para poder cumplir con el objetivo de durabilidad en el tiempo la población al finalizar ese período debe contar con la misma distribución de edades e individuos que la inicial. Donde:

$$\vec{X}_t = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Es el vector de distribución de las hembras por edades al inicio del período de crecimiento t ; x_i es el número de hembras de la clase de edad i que forma parte de la población y que formarán parte después de la extracción del rendimiento, por lo tanto, es el número óptimo de hembras. Como es lógico, la duración de cada clase debe ser igual a la duración del período de crecimiento donde se realizará una única extracción. Es decir, se quiere extraer el rendimiento una vez al año y la población se dividirá en clases de un año.

Siendo A la matriz de Leslie que determina el crecimiento de la población, por lo tanto: $A \cdot X$ será el vector de distribución de las hembras de la población al finalizar el periodo t de crecimiento, esto será antes de realizar extracción alguna.

$$\vec{X}_{t+1} = A\vec{X}_t$$

Para fijar las extracciones, se introduce en el modelo una nueva matriz (H) a la cual se nombrará como matriz de explotación:

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_n \end{pmatrix}$$

Donde h_i es la fracción de hembras que deseamos extraer de cada clase de orden i . Por definición $0 \leq h_i \leq 1$ siendo $i = 1, 2, \dots, n$. De esta manera el vector de distribución de hembras que serán extraídas en cada clase de orden i durante el periodo de tiempo t será:

$$\vec{X}_E = H\vec{A}\vec{X}_t = \begin{pmatrix} h_1 A x_1 \\ h_2 A x_2 \\ \vdots \\ h_n A x_n \end{pmatrix}$$

El vector de distribución X_{t+1} de edades al final del período de tiempo $t+1$ de crecimiento menos el rendimiento o el vector de extracciones X_E para una extracción sostenible o duradera será igual al vector X_t que contiene la distribución de edades en el instante t , es decir:

$$AX_t - HAX_t = X_t \rightarrow (I - H)AX_t = X_t$$

El vector X_t es un vector propio de la matriz que llamaremos matriz modificada de extracción A^* :

$$(I - H)A = A^*$$

Puesto que como hemos visto anteriormente:

$$A\vec{X} = \lambda\vec{X}$$

En este caso con extracciones sostenibles o duraderas buscaremos la estabilidad de la población forzando al autovalor a la unidad a través de las extracciones:

$$A^*X = \lambda X \rightarrow A^* = \lambda = 1$$

Puesto que la matriz de Leslie es:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz A modificada para la extracción será:

$$A^* = (I - H)A = \begin{pmatrix} (1-h_1)a_1 & (1-h_1)a_2 & (1-h_1)a_3 & \cdots & (1-h_1)a_{n-1} & (1-h_1)a_n \\ (1-h_2)b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (1-h_3)b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (1-h_n)b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es del mismo tipo que una matriz de Leslie estándar, por lo que sabemos que para mantener una población constante su autovalor dominante o valor propio dominante λ ha de ser igual a la unidad. Por lo que:

$$\det(A^* - \lambda I) = 0 \rightarrow \det(A^* - I) = 0$$

$$P(1) = |A^* - I| = \begin{vmatrix} (1-h_1)a_1 - 1 & (1-h_1)a_2 & (1-h_1)a_3 & \cdots & (1-h_1)a_{n-1} & (1-h_1)a_n \\ (1-h_2)b_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (1-h_3)b_2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (1-h_n)b_{n-1} & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando este polinómico característico se obtiene:

$$1 - (1-h_1)a_1 - (1-h_1)a_2(1-h_2)b_1 - (1-h_1)a_3(1-h_2)b_1(1-h_3)b_2 - \cdots \\ \cdots - (1-h_1)a_n(1-h_2)b_1(1-h_3)b_2 \cdots (1-h_n)b_{n-1} = 0$$

Equivalente a:

$$1 = (1-h_1)a_1 + (1-h_1)a_2b_1 + (1-h_1)a_3(1-h_2)b_1b_2 + \cdots + (1-h_1)a_n(1-h_2)b_1(1-h_3)b_2 \cdots (1-h_n)b_{n-1}$$

Que simplificando da lugar a:

$$(1-h_1)(a_1 + a_2b_1(1-h_2) + a_3b_1b_2(1-h_2)(1-h_3) + \cdots + a_nb_1b_2 \cdots b_{n-1}(1-h_2)(1-h_3) \cdots (1-h_n)) = 1$$

(Ecuación 2.3)

Curiosamente este polinomio coincide con el que ya se había definido con anterioridad y que se conoce como la tasa neta de reproducción o el promedio de crías que tiene una hembra a lo largo de toda su vida, por lo tanto, al ser este polinomio igual a uno, la población permanecerá constante a lo largo del tiempo.

La ecuación da lugar a unas limitaciones para los valores h_i . Solamente los valores que cumplan la ecuación y pertenezcan al intervalo (0,1) darán origen a una posible explotación sostenible o duradera.

Buscando valores de h_i con $i = 1, 2, \dots, n$ que satisfagan la ecuación 2.3, la matriz modificada A^* tiene como valor propio o autovalor dominante $\lambda_1 = 1$, teniendo este autovalor grado de multiplicidad 1, como valor positivo de una matriz de Leslie. Por

todo esto existe un único vector propio linealmente independiente que cumple la ecuación:

$$(I - H)A\vec{X} = \vec{X} \rightarrow A^* \vec{X} = \vec{X}$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (1-h_1)a_1-1 & (1-h_1)a_2 & (1-h_1)a_3 & \cdots & (1-h_1)a_{n-1} & (1-h_1)a_n \\ (1-h_2)b_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (1-h_3)b_2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (1-h_n)b_{n-1} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Desarrollando el sistema:

$$(a_1(1-h_1)-1)x_1 + a_2(1-h_1)x_2 + \cdots + a_n(1-h_1)x_n = x_1$$

$$b_1(1-h_2)x_1 - x_2 = x_2$$

$$b_2(1-h_3)x_2 - x_3 = x_3$$

$$\vdots$$

$$b_{n-2}(1-h_{n-1})x_{n-2} - x_{n-1} = x_{n-1}$$

$$b_{n-1}(1-h_n)x_{n-1} - x_n = x_n$$

Calcularemos el valor del vector aplicando un valor fijo a:

$$x_1 = 1$$

A continuación, según este valor fijado a x_1 se obtiene:

$$x_2 = b_1(1-h_2)$$

$$x_3 = b_2(1-h_3)x_2 = b_1b_2(1-h_2)(1-h_3)$$

$$\vdots$$

$$x_n = b_1b_2 \cdots b_{n-1}(1-h_2)(1-h_3) \cdots (1-h_n)$$

Como consecuencia del proceso se obtiene el vector propio o autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$ y por lo tanto a la extracción sostenible, indicando este la proporción de hembras estable que quedará en cada una de las clases n después del aprovechamiento. Siendo este:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1(1-h_2) \\ b_1b_2(1-h_2)(1-h_3) \\ b_1b_2b_3(1-h_2)(1-h_3)(1-h_4) \\ \vdots \\ b_1b_2b_3 \cdots b_{n-1}(1-h_2)(1-h_3)(1-h_4) \cdots (1-h_n) \end{pmatrix}$$

2.3.5.1 Extracción uniforme

En la mayoría de los trabajos se aplica esta metodología, argumentando la dificultad a la hora de distinguir entre individuos a qué clase de edad pertenecen o de que estos son capturados al azar, se soluciona aplicando la misma fracción de extracción a todas las clases:

$$h = h_1 = h_2 \cdots h_n$$

Lo cierto es que con un único valor de h_i para $i = 1, 2, \dots, n$, el proceso matemático se simplifica y se vuelve más sencillo de calcular, ya que se eliminan varias incógnitas. Pasando a tener de esta manera:

$$(I - H)A\vec{X} = \vec{X} \rightarrow (1 - h)A\vec{X} = \vec{X} \rightarrow A\vec{X} = \left(\frac{1}{1-h}\right)\vec{X}$$

Por lo tanto $1/(1-h)$ tiene que ser un autovalor λ_1 de la matriz de crecimiento A :

$$A\vec{X} = \left(\frac{1}{1-h}\right)\vec{X} \rightarrow AX = \lambda_1\vec{X}$$

Despejando h :

$$\lambda_1 = \frac{1}{1-h} \rightarrow h = 1 - \frac{1}{\lambda_1}$$

Para finalizar, el vector propio X_1 de la matriz A para su autovalor dominante λ_1 será nuevamente:

$$\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} \\ \frac{b_1 b_2 b_3}{\lambda_1^3} \\ \vdots \\ \frac{b_1 b_2 b_3 \cdots b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} \end{pmatrix}$$

Concluimos que razonablemente, cuanto mayor sea el autovalor dominante λ_1 la fracción de animales que se pueden extraer sin poner a la población en riesgo de extinción será mayor. Así mismo si $\lambda_1 > 1$, la población aumentará y h se encontrará dentro del intervalo (0,1).

2.3.6 Cálculo de la Sensibilidad y elasticidad de los valores

El análisis de la sensibilidad y elasticidad de los valores que forman parte de la matriz de Leslie es una importante herramienta para conocer los cambios en la dinámica poblacional cuando uno o más tasas vitales han sido alterados. El análisis de la sensibilidad proporciona una medida absoluta de los cambios que se producen en λ al modificar cada uno de los elementos de la matriz, expresándose esta en una matriz de sensibilidad.

Por otra parte, el estudio de la elasticidad cuantifica los cambios proporcionales en λ producidos por modificaciones en cada uno de los cocientes de la matriz, también se expresa en una matriz, conocida como matriz de elasticidades.

2.3.6.1 Sensibilidad del autovalor

Se refiere a la sensibilidad de los autovalores a cambios en los elementos de la matriz a_{ij} . Los autovalores están en función de a_{ij} , esta dependencia se expresa implícitamente en la ecuación característica según la demostración de Caswell en (Caswell 2000).

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Empezando con las ecuaciones que definen a los autovalores y autovectores por la izquierda y por la derecha:

$$\begin{aligned} Aw_i &= \lambda_i w_i \\ v_i^* A &= \lambda_i v_i^* \end{aligned}$$

Donde v_i^* es el transpuesto complejo conjugado de v_i . Tomando el diferencial de ambos lados:

$$A(dw) + (dA)w = \lambda(dw) + (d\lambda)w$$

Donde $dA=(da_{ij})$ es la matrix cuyos elementos son los diferenciales da_{ij} . El producto escalar de ambos lados y el autovector por la izquierda v .

$$\langle A(dw), v \rangle + \langle (dA)w, v \rangle = \lambda \langle dw, v \rangle + \langle (d\lambda)w, v \rangle$$

Después expandimos el producto escalar y simplificamos términos:

$$d\lambda = \frac{\langle (dA)w, v \rangle}{\langle w, v \rangle} = \frac{v^* dAw}{v^* w}$$

Suponiendo ahora que solo uno de los elementos que componen la matriz de Leslie a_{ij} se modifica, mientras el resto permanece inalterado. Entonces dA contiene solamente una entrada distinta de cero, da_{ij} , en la fila i y en la columna j . En este caso la expresión anterior se reduce a:

$$d\lambda = \frac{\bar{v}_i w_j da_{ij}}{\langle w, v \rangle}$$

Donde $\bar{v}_i$ es el complejo conjugado de v_i . Dividiendo ambos lados por da_{ij} and reescribiendo los diferenciales como derivadas parciales (desde que todas a excepción de una de las variables para las cuales λ es una función, han permanecido constantes), obtenemos la siguiente fórmula:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial a_{ij}} = \frac{\bar{v}_i w_j}{\langle w, v \rangle}$$

La sensibilidad de λ a cambios en a_{ij} es proporcional al producto del i -ésimo elemento del valor del vector reproductivo y el j -ésimo elemento del estado estable de distribución. El termino de producto escalar en el denominador es independiente de i y j por lo que puede ser suprimido cuando consideramos sensibilidades relativas de

λ para diferentes elementos en la misma matriz. También los autovectores pueden ser escalados para que $\langle w, v \rangle = 1$, para que ese término pueda ser ignorado.

La sensibilidad es simplemente el valor puntual de la pendiente de λ , considerada como una función de a_{ij} . La sensibilidad de λ para todos los elementos a_{ij} puede ser calculada y representada en una matriz de sensibilidades:

$$S = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial a_{ij}} \right)$$

La cuál viene dada por:

$$S = \frac{\bar{v} w^T}{v^* w}$$

2.3.6.2 Análisis de la elasticidad

Las probabilidades de transición (que no excede 1) y las fertilidades (las cuales no están bajo tal restricción) están medidas en escalas diferentes (Caswell 2000). Esto ha conducido a considerar la proporcionalidad antes que perturbaciones absolutas, (ejem. ¿Cómo respondería λ ante una variación del 10% en supervivencia o en fertilidad?). La respuesta proporcional a una perturbación proporcional se conoce como elasticidad, en economía introducen el cálculo de la elasticidad en autovalores para cambios en las ratios vitales. La diferenciación entre perturbaciones absolutas y proporcionales puede tener importantes implicaciones.

La elasticidad de λ con respecto a a_{ij} está definida como:

$$e_{ij} = \frac{a_{ij}}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial a_{ij}} = \frac{\partial \log \lambda}{\partial \log a_{ij}}$$

Esto significa que la elasticidad e_{ij} es simplemente la pendiente del $\log \lambda$ representado contra el $\log a_{ij}$. Así, incrementos equivalentes en una escala logarítmica corresponden a proporciones equivalentes en una escala aritmética, las medidas de elasticidad proporcionales a la sensibilidad.

Nuevamente la elasticidad puede ser calculada y representada mediante una matriz de elasticidades:

$$E = \left(\frac{a_{ij}}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial a_{ij}} \right) = \frac{1}{\lambda} S \circ A$$

Donde S es la matriz de sensibilidad y " $\circ$ " hace referencia al producto de Hadamard. Este producto de Hadamard es una operación binaria en la que tomando dos matrices de las mismas dimensiones damos lugar a una tercera de igual dimensión donde cada elemento ij es el producto de los elementos ij de las dos matrices originales, este producto no debe confundirse con el producto de matrices común.

2.4 Modelo de Jensen

El conocido como modelo de Jensen, (Jensen 1995, Jensen 1996, Jensen 1997, Jensen 2000) fue desarrollado por A.L. Jensen a lo largo de varias publicaciones entre los años 1995 y 2000. Este modelo se basa inicialmente en la introducción de una función densodependiente a un modelo básico de Leslie, simulando únicamente la parte femenina de la población y que puede ser escrito de la siguiente manera:

$$N_t = N_{t-1} + (M - I)N_{t-1}$$

Donde:

N_t = Vector de la estructura de edad en el instante t

N_{t-1} = Vector de la estructura de edad en el instante $t-1$

M = Matriz de Leslie

I = Matriz Identidad

Siendo esta función análoga de la siguiente forma de la ecuación exponencial:

$$N_t = N_{t-1} + rN_{t-1}$$

Por lo tanto, Jensen asemeja la matriz $M-I$ al ratio intrínseco de crecimiento r , a partir de esta afirmación y basándose en la siguiente forma discreta de la ecuación logística (Jensen 1995):

$$N_{t+1} = N_t + [(K - N_t) / K]rN_t$$

Realiza la analogía utilizando como base el modelo matricial básico de Leslie según:

$$N_{t+1} = N_t + D(N)(M - I)N_t$$

Donde:

$D(N)$ = Función densodependiente de Jensen

Esta función densodependiente se trata de una ecuación extremadamente sencilla de la forma:

$$D(N) = (K - N) / K$$

Donde:

K = Capacidad de carga medioambiental

N = Suma de los elementos en el vector de estructura de edad en el instante $t-1$

Esta función, como bien explica el autor en su propia publicación (Jensen 1995) solamente es útil para simulaciones de crecimiento de poblaciones cuando la población inicial se encuentra ampliamente por debajo de la capacidad de carga, es decir, si la abundancia inicial es pequeña comparada con la capacidad de carga, ya que si la población inicial es grande, se necesita emplear una función densodependiente más general con términos densodependientes para cada una de las clases de edad representadas en el modelo.

Posterioridades publicaciones incluyen ambos sexos dentro del modelo y la posibilidad de aplicar extracciones (Jensen 2000). Proponiendo un vector de distribución de la población del siguiente tipo:

$$\vec{N}_t = \begin{pmatrix} N_{t,0,m} \\ N_{t,0,f} \\ N_{t,1,m} \\ N_{t,1,f} \\ N_{t,2,m} \\ N_{t,2,f} \end{pmatrix}$$

Donde se introducen tres clases de edad para cada uno de los sexos siendo:

$N_{t,i,f}$ = Número de hembras de la edad i en el instante t

$N_{t,i,m}$ = Número de machos de la edad i en el instante t

Siendo la matriz de proyección M resultante:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & F_{m0} & 0 & F_{m1} & 0 & F_{m2} \\ 0 & F_{f0} & 0 & F_{f1} & 0 & F_{f2} \\ p_{m0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{f0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{m1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{f1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde:

F_{mi}, F_{fi} = Son el número de machos y hembras nacidos de hembras en la i -ésima clase de edad en una abundancia de población baja

p_{mi}, p_{fi} = Son machos y hembras supervivientes de la edad i en el instante t a la edad $i + 1$ en el instante $t + 1$

Para poder aplicar un ratio de extracciones, el autor propone introducir en el modelo un vector de extracciones con la forma:

$$\vec{Y}_t = H\vec{N}_t$$

En el cual:

H = Matriz diagonal de extracciones, con elementos $h_{ij} = h$

Por lo tanto, el autor presupone una extracción igual para cada una de las clases de edad. Como resultado el modelo final obtenido es el siguiente:

$$\vec{N}_{t+1} = \vec{N}_t + D(N_t)(M - I)\vec{N}_t - H\vec{N}_t$$

Para obtener una extracción sostenible donde:

$$\vec{N}_t = \vec{N}_{t+1}$$

El vector de extracciones anuales en función de la abundancia de ciervos será:

$$\vec{Y}_t = D(N_t)(M - I)\vec{N}_t$$

Este modelo, ha sido posteriormente utilizado en otros trabajos para estudiar poblaciones tan dispares de la original como una población de elefante (Chelliah, Bukka et al. 2013) o para establecer un modelo de crecimiento a partir de la relación de predación entre el lobo y el ciervo de cola blanca (Jensen, Miller 2001).

2.5 La modelización de poblaciones cinegéticas en España

Actualmente en España, los gestores utilizan para estimar los cupos o la evolución de las poblaciones, modelos matemáticos mejorables como herramientas para los cálculos de extracciones en una explotación sostenible, estos modelos, no son demasiado precisos, dando generalmente únicamente datos sobre la evolución general de la población (Nores Quesada, Cano Parra et al. 2008). Entendemos como explotación sostenible aquella que utiliza un recurso natural sin poner en peligro su persistencia a lo largo del tiempo. Este límite de la sostenibilidad se verá superado cuando las extracciones superen a los reclutamientos de la población.

La forma más común de simular el crecimiento de las poblaciones es mediante la tasa de incremento o crecimiento anual (λ) que es el porcentaje de crecimiento de la población, cuando este es mayor que 1 la población crece, cuando es menor que 1 la población decrece. También es bastante utilizado el coeficiente exponencial de crecimiento (r), que refleja el exponente al que crece una población, cuando r es positivo la población decrece y cuando es negativo decrece. Estos valores quedan relacionados de la siguiente forma:

$$r = \ln \lambda$$

$$\lambda = e^r$$

El procedimiento más utilizado, se basa en representar la serie temporal de la población mediante el ajuste a una regresión exponencial de los valores obtenidos de la población (Caughley, Sinclair 1994). Este es un procedimiento que puede resultar útil para etapas de crecimiento donde la densodependencia causada por la competencia intraespecífica sea obviada.

Los modelos más básicos para conocer el rendimiento sostenible de la población son los conocidos como de producción de excedente, estos no tienen en cuenta la estructura de la población y solo se basan en datos generales de la misma. Por otra parte aquellos modelos que tienen en cuenta la estructura se conocen como modelos de comportamiento dinámico (Nores Quesada, Cano Parra et al. 2008). Esta última clase permite mayor precisión a la hora de la gestión, ya que diferencia el comportamiento biológico de las distintas clases de edad haciendo una previsión más realista.

Un modelo bastante sencillo (Caughley 1977) para crecimientos exponenciales, basado en la tasa instantánea de extracción ($H = r$) para calcular la tasa general de extracción de la población, sería:

$$h = 1 - e^{-H}$$

Existen además fórmulas directas para obtener ese porcentaje de extracción máxima sostenible.

Algunas (Chinchilla Rodríguez 2015) simplemente se basan en el cálculo de individuos totales a cosechar en un año, donde E son las existencias totales y T la tasa de extracción, que para estabilizar una población debería igualarse al crecimiento anual de la misma:

$$H = ET$$

En ocasiones a esta fórmula se le añade un coeficiente de calidad estacional (K_C) y otro de estado de la población (K_E) para tratar de darle más realismo biológico añadiendo el efecto de la densodependencia y de hábitat (Montoya Oliver 2012).

$$H = E \cdot T \cdot K_C \cdot K_E$$

Estando el factor K_E en función de la población actual (E_A) y de la población normal de la zona (E_N):

$$K_E = \frac{3}{2} \cdot \frac{E_A}{E_N}$$

A continuación, se puede añadir un coeficiente de convergencia K_I como sacrificio de gestión para llevar una población al estado ideal o elegido en el periodo de tiempo P .

$$K_I = \left(\frac{E_N}{E_A} \right)^{\frac{1}{P}} - 1$$

Completando la ecuación para el cálculo de la extracción como:

$$H = E \cdot T \cdot K_C \cdot K_E - K_I$$

Otro método que ha sido bastante utilizado para el cálculo de esta posibilidad cinegética (Birkan 1977), está basado en fórmulas generales implicando a la población

antes de la reproducción, es decir en primavera y a la población en el otoño, antes de empezar la temporada de caza de la siguiente manera:

$$E_2 = A_2 + J = A_2 + j \cdot A_2 = A_2(1 + j) = a \cdot A_1(1 + j)$$

$$H = \frac{SE_2 - KE_1}{(1 + u)S}$$

H= Cupo

E₂= Individuos totales antes del periodo de caza

E₁= Adultos antes del periodo reproductivo

A₂= Adultos antes del periodo de caza

J=Jóvenes antes del periodo de caza

a= Tasa de supervivencia de los adultos desde la primavera al otoño

j= (N_j/N_{at}+1), adultos/jóvenes antes de la caza

S= Tasa de supervivencia desde la apertura de la caza a la primavera

u= tasa de pérdidas producidas por la caza (animales no cobrados)

λ= Crecimiento de la población: λ=1 población estable, λ>1 población crece, λ<1 población decrece.

Dentro de este tipo de fórmulas para la estima de la tasa de aprovechamiento (T) otra muy utilizada (Covisa 1998) permite el cálculo de la tasa de aprovechamiento de una forma variable siendo:

$$T = \frac{R - M - S}{P_i - M + R}$$

$$S = \frac{E_N - E_A}{t}$$

$$B = \frac{E_A - E_N}{t}$$

R= Reclutamiento

M= Mortalidad en adultos

S= Sacrificio de ordenación (poblaciones infranormales)

B= Beneficio de ordenación (Poblaciones supranormales)

E_N= Carga de ordenación

E_A= Carga actual

P_i= Población inicial de cada año

E_f Población final postcaza

t= periodo de ordenación

$$E_f = P_i - M + R = P_i - T_M \cdot P_i = P_i(1 - T_M + T_R)$$

Donde T_M y T_R son las tasas de mortalidad y reclutamiento respectivamente.

Otra parte de los modelos están basados en la curva teórica logística, cuya interpretación literal en la gestión de poblaciones ha llevado a grandes errores conceptuales en esta materia.

Asume que cuando la población se establece y cuenta con un menor número de efectivos, el crecimiento es menor, incrementándose exponencialmente con el aumento de individuos hasta llegar a un punto donde el crecimiento se ve frenado debido a factores limitantes hasta anularse, denominando a este punto capacidad de carga (K).

Estos errores se fundamentan en focalizar las extracciones en el punto de inflexión de la curva logística, ya que es el punto teórico donde el crecimiento es máximo y se produce con una población N = K/2 es decir a la mitad de la capacidad de carga, donde la curva logística tiene su punto de inflexión según:

La curva del crecimiento será igual a la derivada de la función logística en función del tiempo t. Por lo tanto, la tasa máxima de extracción sostenible (TMES) en el momento t será igual al valor del crecimiento de la población en ese momento (r), despejado a partir de la derivada de la ecuación de la curva logística según (Williams, Nichols et al. 2002):

$$N_{t+1} = N_t + rN_t [1 - N_t / K]$$

$$N_{t+1} = \frac{KN_t e^{r_t}}{K + N_t(e^{r_t} - 1)} = \frac{K}{1 + C e^{-r_t}}$$

Siendo:

$$C = \frac{K}{N_t} - 1$$

$$r = H_t = \frac{dN_t}{dt}$$

$$\frac{dN_t}{dt} = \lambda_t N_t - \frac{\lambda}{K} N_t^2$$

$$\frac{dN_t}{dt} = \lambda N_t \left[1 - N_t / K \right]$$

En este caso podremos extraer ese crecimiento en el instante t sin poner en peligro la población.

Otra forma de conocer el valor de la tasa máxima de extracción sostenible es introduciendo H_t dentro de la fórmula del crecimiento logístico y conocer el punto de máxima extracción sostenible de esa población:

$$N_{t+1} = N_t + \lambda N_t \left[1 - N_t / K \right] - H_t$$

Las extracciones estabilizan la población en cualquier momento de su desarrollo cuando:

$$H_t = r N_t \left[1 - N_t / K \right]$$

$$h_t = H_t / N_t = r \left[1 - N_t / K \right]$$

El siguiente objetivo es conocer la máxima tasa de extracción sostenible de la población, es decir el máximo nivel de extracción anual que una población puede mantener según la curva del crecimiento logístico:

$$dH / dN = r - 2r(N / K) = 0$$

$$N^* = K / 2$$

Demostrando lo que ya se había contado anteriormente. Según la curva logística la densidad donde podremos obtener la mayor tasa de extracción anual se encuentra a la mitad de la capacidad de carga (Figura 2.6).

Figura 2.6. Evolución del crecimiento frente al tiempo según la ecuación logística

El rendimiento máximo sostenible es:

$$\begin{aligned}
 H^* &= rN^*(1 - N^*/K) \\
 &= rN^*(1 - 0,5K/K) \\
 &= (r/2)N^* \\
 &= rK/4
 \end{aligned}$$

Por último, el rendimiento óptimo perca pita es:

$$\begin{aligned}
 h^* &= H^* / N^* \\
 &= r/2
 \end{aligned}$$

Esto se conoce como la ley logística del crecimiento de una población.

Otros autores (Sutherland 2000) apuntan a que el punto de máxima extracción sostenible está al 60% de la capacidad de carga. Desde este trabajo creemos que esto es un error importante, ya que se basa en la adaptación del comportamiento de una población animal salvaje a una curva puramente teórica como es la logística, lo cual no tiene por qué cumplirse.

Otros autores (Caughley, Sinclair 1994) aseguran nuevamente que la tasa máxima de extracción puede calcularse como:

$$TME = rK/4$$

También calculando cuotas fijas de extracción o cuotas variables de extracción como (Nores Quesada, Cano Parra et al. 2008):

Cuota fija de extracción: se elimina un número constante (C) de individuos por debajo de la extracción máxima sostenible y la población teóricamente se estabiliza a un nivel que puede calcularse según:

$$N = \frac{K(r + \sqrt{r^2 - 4Cr / K})}{2r}$$

Cuota Variable de extracción: eliminando individuos la población se estabiliza, donde H es la tasa instantánea de extracción:

$$N = K - (KH/r)$$

Todos estos modelos y fórmulas recomiendan aplicar un porcentaje de seguridad de un 75% de la tasa máxima de extracción (Nores Quesada, Cano Parra et al. 2008) debido a su poca precisión y fiabilidad, por lo que realmente de poca ayuda le sirven al gestor para conocer el comportamiento exacto de la población con la que está tratando.

Es interesante destacar en este apartado, la dificultad y el tiempo de cálculo de los métodos actuales que el lector puede comparar con los que van a ser introducidos en esta tesis. Por ejemplo, en este caso queremos conocer cómo se estabiliza una población densodependiente con ratios de extracción diferentes.

Este proceso requiere calcular lo que varía la población tras la extracción a partir de la recta de regresión de densodependencia (Caughley 1977) a continuación, se van a enumerar los pasos necesarios a seguir (Nores Quesada, Cano Parra et al. 2008) para ver su complejidad:

1. Se calcula la regresión lineal entre N_t y r_t obteniendo K.
2. El primer año desde el valor K se calcula el número constante de individuos extraídos H ($K-H=N_t$) y se calcula utilizando la fórmula de la regresión el valor de r_1 , lo cual nos dice el crecimiento de la población bajo presión de extracciones.
3. Se convierte el valor de r_t en λ_t , ($e^r = \lambda$).
4. Multiplicando la población del primer año (N_t) por λ se obtiene la del año siguiente (N_{t+1}).

5. De esta población N_{t+1} se tiene que extraer el mismo número de individuos H donde $N_{t+1}-H=N_{t+1}$
6. Desde N_{t+1} nuevamente hay que calcular mediante la fórmula de regresión el valor de r_{t+1} convirtiéndolo en λ_{t+1} , multiplicándolo por N_{t+1} para obtener N_{t+2} , descontando entonces nuevamente H repitiendo todo el proceso hasta que después de t periodos de tiempo el valor de N_{t+n} se estabiliza.
7. Fijando otra extracción diferente H_1 se podría comprobar que nuevamente la población se estabiliza. Si H_1 es mayor que H , esta población se estabilizará con una densidad más baja que el caso anterior.
8. Se puede seguir repitiendo el proceso hasta ver con que ratio de extracción la población se extingue y por lo tanto dejará de ser sostenible.

Como podemos comprobar, este es un ejemplo de un método bastante ineficiente para el cálculo de una serie de años larga y muy poco práctico para utilizarlo en situaciones reales, lo que da una idea de la actual situación de los modelos y fórmulas matemáticas para la gestión de fauna utilizada actualmente en España.

También existen métodos que se basan en el seguimiento durante una serie de años para estudiar el efecto que está teniendo la actual gestión sobre la población y así poder modificar a posteriori los cupos hasta llegar a un equilibrio.

Nombramos aquí el modelo de Schaefer (Sutherland 2000), que inicialmente fue creado para calcular en gestión pesquera la TME, basándose en el nivel de esfuerzo para alcanzar esa tasa. Este modelo se suele utilizar cuando no se conoce la población y hay señales de sobreexplotación. Estaba basado en la idea densondependiente de que al bajar la población se reduce la competencia intraespecífica aumentando la productividad extrayendo ese excedente.

1. Se toma el número de animales extraídos anualmente y el esfuerzo, en este caso serían días de caza.
2. Se representa la captura por unidad de esfuerzo (CPUE) frente al esfuerzo (E) en una recta de regresión donde a es la captura por unidad de esfuerzo en un medio no explotado.

$$CPUE = a + bE$$

3. A continuación, se calcula el rendimiento (R):

$$R = aE + bE^2$$

4. Calcular el nivel de esfuerzo que requiere la TME

Otra opción utilizada habitualmente, son los métodos basados en regresiones múltiples, estudiando la evolución de la población y adaptándola a una recta o curva sencilla. Como ya se ha explicado, todos estos métodos no distinguen entre clases de edad dentro de la población y solo nos indican una tasa de extracción aproximada y no demasiado fiable, por lo que queda patente la necesidad de un modelo más completo fiable y eficiente para utilizar en la gestión.

Por último, el método más extendido y a la vez uno de los más simples para el cálculo de los cupos de especies de caza mayor es el basado en las pirámides de población. Para ello, se construyen pirámides que describen, de forma gráfica, la distribución o reparto de los animales de una población entre sus diferentes sexos y edades (Montoya Oliver 1999), generalmente en el lado izquierdo se colocan las hembras y en el lado derecho los machos, repartiendo las existencias poblacionales según sus clases de edad, avanzando los animales los escalones según sus probabilidades de supervivencia en cada clase. Para la realización de una pirámide poblacional, será necesario conocer: el número total de animales en cada clase de edad, natalidad y la supervivencia de cada clase. Calculando según estos valores clase por clase cuantos animales de cada una pasarán a la siguiente y cuantas crías se incorporarán a la población. Como podemos observar se trata de un método sencillo pero ineficiente para hacer simulaciones en un periodo largo de tiempo (Figura 2.7).

Figura 2.7. Pirámide de población

2.6 Vacíos detectados

Tras el análisis y estudio de los modelos generalmente empleados para la gestión de poblaciones de ungulados silvestres, se han detectado una serie de vacíos o carencias que se necesitan completar para ser empleados como una herramienta eficiente y real en la gestión sobre el terreno.

- División de los individuos en categorías de gestión, según sus parámetros específicos.
- Posibilidad de un ajuste real del modelo matemático a la curva de crecimiento de la población estudiada.
- Cálculo de ratios de extracción por clases variables según los objetivos marcados para cada estrategia de gestión.
- Valores de sostenibilidad cuantificables.
- Posibilidad de planificar diferentes alternativas de aprovechamiento.
- Medidores cuantificables de la distribución estable de la población.
- Valores densodependientes adaptados a la población y no a una función matemática.
- Utilidad en el trabajo de campo y en la gestión real de una población.
- Posibilidad de empleo por cualquier usuario.

CAPÍTULO 3. OBJETIVOS

El objetivo general de este trabajo, es implementar un algoritmo de convergencia para estimar la evolución a largo plazo y poder gestionar una población real de ciervo ibérico. Para ello, serán empleados ratios de extracción sostenibles, conociendo la distribución estable de la población a través de un modelo matricial implementado con respuestas densodependientes al crecimiento, desarrollando una metodología específica asociada. Este algoritmo aplicado, está basado en un método matemático numérico iterativo para calcular autovalores y sus autovectores asociados. De una manera más específica y detallada, los objetivos se pueden listar de la siguiente manera:

El primero de ellos, es describir un modelo matemático y todos los pasos para su empleo en el manejo de cualquier población, tomando su evolución hasta alcanzar una distribución estable en unos valores de densidad óptimos, buscando unas poblaciones más saludables al tiempo que se reducen los conflictos con el ser humano.

El segundo, es poder estimar las extracciones necesarias para alcanzar los diferentes objetivos planteados, buscando siempre la sostenibilidad del sistema, obteniendo ratios cuantitativos como indicadores de la sostenibilidad a través de los autovalores.

El tercer objetivo, es desarrollar un modelo densodependiente real que incluya la evolución de la población en función de la competencia intraespecífica y la disponibilidad de recursos en el medio (Barr, Wolverton 2014). Transformando el típico crecimiento exponencial de los modelos matriciales clásicos en una curva sigmoide, seguida comúnmente por este tipo de poblaciones (Wang, Hobbs et al. 2002), utilizando de forma cuantitativamente más significativa y exacta conceptualmente el término de capacidad de carga e introduciendo el nuevo concepto de capacidad óptima.

El cuarto objetivo, es describir un método útil y sencillo para el trabajo de campo, identificando los diferentes grupos de animales a ser gestionados a través del modelo mediante la introducción de las clases de calidad para ambos sexos. Estas clases permitirán asociar una clase de calidad a cada individuo sin necesidad de capturarlo para conocer su edad, buscando la manera más rápida de obtener datos de una

población de animales salvajes, dando lugar a una gestión más realista y eficiente en el trabajo de campo.

El quinto objetivo, se centrará en buscar diferentes estrategias de gestión que garanticen igualmente la sostenibilidad, variando la distribución natural de la población y variando los productos obtenidos de ella en función de los intereses del gestor o del mercado.

El Sexto, se trata de mostrar las diferencias entre el comportamiento de las poblaciones libres de restricciones densodependientes o bajo estas mismas restricciones, demostrando las ineficiencias en la gestión que se han podido cometer históricamente en este tipo de situaciones.

El Séptimo objetivo, busca aplicar el modelo y su metodología sobre un entorno conocido para parametrizar el modelo.

El octavo y último objetivo tratará de sentar las bases para el desarrollo de una aplicación informática que permita el empleo del modelo y su parametrización para poblaciones y áreas concretas, dotando a los técnicos de una herramienta de gestión.

CAPÍTULO 4. SÍNTESIS METODOLÓGICA

En este capítulo, se enlistan los pasos y procedimientos seguidos en este trabajo para alcanzar todos los objetivos marcados en el capítulo anterior.

- Análisis histórico de los modelos de dinámica de poblaciones.
- Recuperación bibliográfica de antecedentes.
- Análisis de aplicaciones forestales y ecológicas de los modelos de interés.
- Identificación de vacíos en la aplicación de dichos modelos en la gestión de ungulados silvestres.
- Desarrollo de un modelo que cubra las lagunas encontradas en la modelización de la gestión de estas poblaciones.
- Inventario de los factores ecológicos que afectan al modelo, y su recopilación en un entorno natural de aplicación.
- Aplicación y optimización de parámetros con el modelo elegido.
- Obtención y análisis de resultados.
- Obtención de conclusiones para la utilización del modelo en diferentes patrones de gestión para el control y aprovechamiento de estas poblaciones.
- Implementación de una aplicación informática con el modelo para permitir su empleo a nivel usuario.

CAPÍTULO 5. EL MODELO Y SU PARAMETRIZACIÓN

5.1 Parametrización de la capacidad de carga y carga óptima

El rango de las variables de estudio para poder introducir los factores densodependientes es uno de los objetivos principales en el desarrollo del modelo. En este trabajo ha sido dividido en dos partes, correspondiendo con las diferencias en el comportamiento de la curva de crecimiento, que serán explicadas en apartados posteriores. Estas divisiones estarían marcadas por dos puntos clave, la capacidad óptima del medio y la capacidad de carga del medio.

En este trabajo, la capacidad óptima del medio, es definida como el número de animales que son capaces de vivir en una zona sin arriesgar o degradar ninguno de los componentes que forman el ecosistema, incluyendo su propia población. Cuando la población se encuentra por debajo de este punto, esta no produce daños en el ecosistema y no encuentra restricciones ecológicas en su crecimiento como es la competencia intraespecífica (Gortázar, Acevedo et al. 2006, Rodríguez-Hidalgo, Gortazar et al. 2010) .

Por otra parte, la capacidad de carga, término que ha sido ampliamente utilizado en la gestión de poblaciones salvajes, se define en este trabajo como la densidad en la cual el hábitat no puede soportar un mayor número de animales y el crecimiento de la población es nulo (Williams, Nichols et al. 2002).

Estos son los puntos críticos en la conceptualización del modelo, ya que altas densidades de animales amenazan la persistencia de sus propias poblaciones y del medio ambiente. El daño sobre la vegetación, poblaciones enfermas y conflictos entre la fauna y el ser humano se agravan una vez la densidad sobrepase la capacidad óptima del medio, alcanzado su peor momento en la capacidad de carga (Bowyer, Vernon et al. 2014), donde en cualquier instante, la población sufrirá una fuerte reducción debido al aumento incontrolado de las enfermedades y a la escasez de recursos (Fernández-Morán, Gómez et al. 1997, Gortázar, Acevedo et al. 2006, Oleaga, Casais et al. 2008).

5.1.1 Cálculo de la capacidad óptima

El desarrollo de un nuevo modelo o el análisis de modelos ya existentes para la obtención de la capacidad óptima del medio no es objetivo de este trabajo, por lo que se recurre a un método ya existente para obtener un valor que permita parametrizar el

modelo, contemplando la carga únicamente como un valor numérico promedio aproximado.

Reajustes del valor obtenido, permitirían modificar las proyecciones del modelo de forma automática, habilitando así, un sistema de control sobre el modelo totalmente dinámico.

Por lo tanto, el cálculo de la capacidad óptima del medio se llevará a cabo mediante la metodología descrita para la elaboración de los planes técnicos de caza de la Junta de Andalucía, desarrollado en el Anexo III de la Orden de 13 de julio de 2007, por la que se desarrollan determinados aspectos del Decreto 182/2005, de 26 de julio, por el que se aprueba el Reglamento de Ordenación de la Caza (Junta de Andalucía 2007). Este método está basado en el desarrollado por R. Caballero (Caballero García de Arévalo 1985) y se fundamenta en las necesidades energéticas del ciervo ibérico y en las variaciones estacionales del medio.

En esta metodología, se puede encontrar tabulado el valor alimenticio de cada unidad de vegetación (Tabla 5.1) que se puede encontrar en un hábitat mediterráneo medio.

Tabla 5.1. Valor alimenticio de las distintas unidades de vegetación (Junta de Andalucía 2007).

UNIDADES DE VEGETACIÓN	Biomasa/Ha	U.A.
Superficies edificadas e infraestructuras	0	0
Zonas húmedas litorales	0	0
Zonas húmedas continentales: Masas de agua	0	0
Zonas húmedas continentales: Bosques en galería	100-200	0.24
Zonas húmedas continentales: Otros	200	0.48
Cultivos herbáceos en secano	0	0
" " con aprovechamiento cinegético	200-800	0.48
Cultivos leñosos en secano	0	0
" " con aprovechamiento cinegético	100-300	0.24
Cultivos herbáceos en regadío	0	0
" " con aprovechamiento cinegético	250-1200	0.53
Cultivos leñosos en regadío	0	0
" " con aprovechamiento cinegético	150-400	0.33
Cultivos herbáceos y leñosos en secano	0	0
" " con aprovechamiento cinegético	150-300	0.33
Cultivos herbáceos y leñosos en regadío	0	0
" " con aprovechamiento cinegético	200-500	0.24
Mosaicos de secanos y regadíos	0	0
" " con aprovechamiento cinegético	150-600	0.33
Mosaicos de cultivos con vegetación natural	0	0
" " con aprovechamiento cinegético	150-350	0.33
Cultivo herbáceo arbolado: Quercíneas	0	0
" " con aprovechamiento cinegético	300-2050	0.65
Cultivos leñosos abandonados	150-350	0.33
For. Arb. Densa: Quercíneas	300-400	0.73
For. Arb. Densa: Coníferas	50-100	0.1
For. Arb. Densa: Eucaliptos	25-100	0.03

For. Arb. Densa: Otras frondosas	200-300	0.48
For. Arb. Densa: Quercíneas + Coníferas	200-300	0.41
For. Arb. Densa: Quercíneas + Eucaliptos	200-300	0.41
For. Arb. Densa: Coníferas + Eucaliptos	50-100	0.1
For. Arb. Densa: Otras mezclas	100-150	0.33
Matorral denso arbolado: Quercíneas densas	300-400	0.65
Matorral denso arbolado: Quercíneas dispersas	300-400	0.65
Matorral denso arbolado: Coníferas densas	150-300	0.33
Matorral denso arbolado: Coníferas dispersas	200-300	0.24
Matorral denso arbolado: Eucaliptos	150	0.33
Matorral denso arbolado: Otras frondosas	250-300	0.54
Matorral denso arbolado: Quercíneas + Coníferas	250-275	0.6
Matorral denso arbolado: Quercíneas + Eucaliptos	200-250	0.44
Matorral denso arbolado: Coníferas + Eucaliptos	100-150	0.33
Matorral denso arbolado: Otras mezclas	150-200	0.33
Matorral disp. Arbolado: Quercíneas denso	300-400	0.73
Matorral disp. Arbolado: Quercíneas disperso	250-300	0.61
Matorral disp. Arbolado: Coníferas denso	100-200	0.24
Matorral disp. Arbolado: Coníferas disperso	150-250	0.36
Matorral disp. Arbolado: Eucaliptos	100-200	0.24
Matorral disp. Arbolado: Otras frondosas	150-250	0.36
Matorral disp. Arbolado: Quercíneas + Coníferas	200-300	0.48
Matorral disp. Arbolado: Quercíneas + Eucaliptos	200-250	0.48
Matorral disp. Arbolado: Coníferas + Eucaliptos	150-200	0.36
Matorral disp. Arbolado: Otras mezclas	150	0.33
Pastizal arbolado: Quercíneas denso	250-550	0.66
Pastizal arbolado: Quercíneas disperso	200-600	0.53
Pastizal arbolado: Coníferas denso	75-300	0.2
Pastizal arbolado: Coníferas disperso	100-320	0.26
Pastizal arbolado: Eucaliptos	75-150	0.2
Pastizal arbolado: Otras frondosas	150-350	0.4
Pastizal arbolado: Quercíneas + Coníferas	150-400	0.4
Pastizal arbolado: Quercíneas + Eucaliptos	100-300	0.24
Pastizal arbolado: Coníferas + Eucaliptos	100	0.26
Pastizal arbolado: Otras mezclas	150-200	0.33
Talas y plantaciones forestales recientes	0	0
Matorral denso	300-400	0.65
Matorral disperso con pastizal	200-500	0.48
Matorral disperso con pasto y roca o suelo	150	0.36
Pastizal continuo	250-1650	0.6
Pastizal con claros (Roca, suelo)	125-500	0.33
Espacios sin vegetación (Arenales...)	0	0

Conocidos estos valores se puede iniciar la estimación de la capacidad óptima, previa introducción de los factures de cálculo:

- Kg.M.S./ha.año: Producción anual de materia seca por ha para la formación vegetal de la zona.
- Unidad de Vegetación: Formación vegetal de mínima inventariación para el territorio de estudio.
- U.A.: Unidades alimentarias, equivalente alimenticio a 1 Kg de cebada.
- U.F.: Unidades forrajeras, equivalente alimenticio a 1 Kg de cebada.

- U.G.M.: Unidad de Ganado Mayor. Vaca de 450Kg (adulta).

Existiendo las siguientes equivalencias:

1 U.A. = 0,860 KgMS

1 U.A. = 1 Kg. Cebada

1 U.A. = 2755 Kcal

1 Kg.MS. = 1,163 UA

En esta metodología se establece una equivalencia de:

1 U.G.M = 4 ciervos

Los cuales, tendrán cada uno de ellos unas necesidades nutritivas de:

6.706,00 Kcal/día

Lo que equivale a:

888,45 U.A/Año

La fórmula para obtener la capacidad de carga óptima en número de unidades de ganado mayor (UGM) es la siguiente:

$$\text{Capacidad de Carga Óptima} = \frac{\text{Unidades Alimenticias Totales} \cdot \text{Coeficiente de Corrección de Aprovechamiento}}{\text{Período Crítico} \cdot 7,88 \text{ Unidades Alimenticias por U.G.M y día}}$$

Donde, para el ciervo ibérico:

Coeficiente de corrección de aprovechamiento: 0,7.

Periodo crítico: 150 días al año.

Para el caso concreto del área de estudio se obtiene una capacidad de carga óptima de 1400 ciervos, lo que quiere decir una densidad aproximada de 20 ind./100ha (Navarro Millas-Prendergast, Martín Fernández 2015). Según recomendaciones de la propia metodología a este valor resultante se le podría aplicar un intervalo de +30% - 30%, debido a las variaciones que pueden originarse en dicha capacidad según el estado de la vegetación, condiciones meteorológicas y el carácter orientativo del cálculo.

5.1.2 Cálculo de la capacidad de carga

Como alternativa, el cálculo de la capacidad de carga se hará a través de un método matemático de interpolación explicado más adelante.

5.2 Desarrollo del modelo

Después de recopilar toda la base biológica de la especie objeto de estudio y la teórica matemática, así como los trabajos realizados hasta el momento en este campo, se inicia el proceso de construcción de este modelo. Aquí se describirán de una forma teórica las fases, modificaciones y pruebas que se han seguido. Se explicará desde el planteamiento y desarrollo del primer modelo, el cual empezó de una forma sencilla y muy similar a la matriz primitiva de Leslie, hasta su evolución conforme se han ido encontrado puntos débiles y carencias para conseguir el modelo definitivo que cumple con los objetivos planteados para la gestión.

Del mismo modo, se llevarán a cabo unos casos prácticos sobre la misma población de ciervo ibérico (*Cervus elaphus hispanicus*) para cada una de las alternativas para un período de estudio de $t=20$ años. Se utilizará desde la matriz primitiva de Leslie, pasando por todos los modelos intermedios desarrollados hasta llegar al definitivo para así poder comprobar las diferencias en los resultados y las mejoras obtenidas.

La población de ciervo ibérico de la que se han obtenido los datos biológicos y que será empleada como base en estas pruebas, es la asentada en la finca “Quintos de Mora” en la provincia de Toledo. Estos datos básicos (Tabla 5.2) han sido obtenidos del Plan Técnico de Caza de Quintos de Mora, elaborado por Carlos Rodríguez-Vigal (Navarro Millas-Prendergast, Martín Fernández 2015).

Tabla 5.2. Datos Biológicos empleados para las pruebas de los modelos (Navarro Millas-Prendergast, Martín Fernández 2015).

Muerte natural hembras de 0-1 años	0,12
Muerte natural en machos de 0-1 años	0,15
Muerte natural en hembras de 1-2 años	0,06
Muerte natural en machos de 1-2 años	0,08
Muerte natural en hembras adultas	0,03
Muerte natural en machos adultos	0,05
Natalidad (Crías/hembra)	0,56

En cada uno de los modelos se pretenden simular y comparar al menos dos situaciones de gestión diferentes que pueden darse en un caso real:

- a) Población por debajo de la capacidad óptima o densidad de gestión.
- b) Población por encima de la capacidad óptima o de gestión.

Los objetivos de la gestión en todos los casos y con los diferentes modelos es: conducir a la población a la densidad y distribución deseadas y mantenerlas a lo largo del tiempo.

Consideramos para emplear en los modelos una capacidad para la finca “Quintos de Mora” de 20 individuos/ha o lo que es lo mismo, aproximadamente 1400 ciervos en total (Navarro Millas-Prendergast, Martín Fernández 2015).

Actualmente la población de la finca se encuentra por encima de la capacidad óptima estimada (Tabla 5.3), por lo que podremos aplicar estos datos reales para el supuesto b. Para simular una población que se encuentre por debajo de la capacidad de carga (supuesto a) procederemos a fabricar un vector de distribución inicial ficticio (Tabla 5.5).

Tabla 5.3. Distribución y densidad de la población de ciervo en “Quintos de Mora”. (Navarro Millas-Prendergast, Martín Fernández 2015).

	Crías	Hembras	Machos	Total
Número de individuos	413	750	800	1963
Densidad (Individuos/100ha)	6,02	10,92	11,66	28,6

5.2.1 Matriz de Leslie: Crecimiento exponencial por clases de edad de la parte femenina.

5.2.1.1 Teoría del modelo

Como se ha indicado en los objetivos generales de la tesis, el primer punto a alcanzar con ella desde el momento inicial es poder aplicar un modelo matemático en una población real de ungulados para estudiar su evolución y estimar las densidades, distribuciones y rendimientos óptimos para cada caso particular. Es por ello, que se decidió el estudio de modelos matriciales basados en la Matriz de Leslie (Leslie 1945), ya que como conocemos desde el capítulo anterior, nos permiten conocer el desarrollo de una población por clases de edad, nos proporciona valores numéricos de crecimiento (autovalor) y estima distribuciones estables (autovector).

En este caso, como el desarrollo teórico del modelo de Leslie ha sido ampliamente descrito en apartados anteriores, se empieza explicando cómo será la matriz de transiciones planteada para comenzar este trabajo.

Al utilizar un modelo primitivo de Leslie solo podremos estudiar a la parte femenina de la población, por lo tanto, solo se pueden incluir las hembras en él. Para establecer el tamaño de la matriz, primero deberemos saber la edad máxima alcanzada por los individuos de esta población. En el caso de la península ibérica las ciervas pueden llegar incluso a superar en algunos caso los 20 años de edad (Sáenz de Buruaga, Carranza 2008). Para este trabajo consideraremos una esperanza de vida máxima de 20 años, es decir ningún ejemplar podrá superar esta edad, para ello es necesario fabricar una matriz de Leslie de extensión 20x20, donde irán incluidas todas las edades posibles de la población en años.

Con todo esto, en este modelo contaremos con las siguientes variables: P_i , es la probabilidad de que una hembra de la clase i en el instante de tiempo t , se encuentre en la clase $i+1$ en el instante de tiempo $t+1$. R_i , es la natalidad, es el número medio de crías hembra producidas anualmente por cada cierva que se encuentra en la clase de edad i . X_t y X_{t+1} , son los vectores que contienen el número de animales en la edad i en el momento inicial y final de la proyección respectivamente. Por lo tanto, este modelo de Leslie queda definido por un sistema diferencial lineal homogéneo finito, siendo A la matriz cuadrada de transiciones o matriz de Leslie:

$$\vec{X}_{t+1} = A\vec{X}_t$$

$$A = \begin{pmatrix} R_{F1} & R_{F2} & R_{F3} & R_{F4} & R_{F5} & R_{F6} & R_{F7} & R_{F8} & R_{F9} & R_{F10} & R_{F11} & R_{F12} & R_{F13} & R_{F14} & R_{F15} & R_{F16} & R_{F17} & R_{F18} & R_{F19} & R_{F20} \\ P_{F1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{F2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{F3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{F4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{F5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{F6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{F7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{F8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{F9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{F10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{F11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{F12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{F13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{F14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{F15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{F16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{F17} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{F18} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{F19} & 0 \end{pmatrix}$$

Cuando llegue el momento en que la población supere la capacidad óptima esta tendrá que ser reconducida hasta ella mediante la extracción de individuos. La capacidad óptima a utilizar se verá reducida a la mitad, ya que solo modelamos la parte femenina de la población y el modelo de Leslie asume que el número de machos y de hembras es el mismo. Por lo tanto:

$$\text{Capacidad óptima del modelo de Leslie} = \frac{\text{Capacidad óptima Total}}{2}$$

Las extracciones en este caso particular como se ha desarrollado en el apartado teórico del modelo de Leslie, se calculan introduciendo una nueva matriz (H), a la que ya denominamos como matriz de explotación.

Por lo que cuando sea necesario apartar animales de la población, el modelo será:

$$\vec{X}_{t+1} = (I - H)A\vec{X}_t$$

Siendo H:

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{17} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{18} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{20} \end{pmatrix}$$

Donde h_i es la fracción de hembras que deseamos extraer de cada clase de orden i . Para simplificar los cálculos en este tipo de problemas generalmente se aplica la misma fracción de extracción para todas las clases:

$$h = h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h_5 = h_6 = h_7 = h_8 = h_9 = h_{10} = h_{11} = h_{12} = h_{13} = h_{14} = h_{15} = h_{16} = h_{17} = h_{18} = h_{19} = h_{20}$$

5.2.1.2 Parametrización y aplicación del modelo

A continuación, vamos a proceder a aplicar en un hipotético caso real de gestión el modelo de Leslie descrito en el apartado anterior. Como ya se ha explicado, para realizar estos casos prácticos utilizaremos la población de “Quintos de Mora”.

Para ello, el primer paso será representar todos los datos biológicos de la población en una tabla de vida (Tabla 5.4) adaptada al caso. Utilizando las mortalidades y natalidades (Tabla 5.2) disponibles para la zona de estudio. En la mayoría de los casos, especialmente si el estudio de la población no ha sido hecho por la persona conocedora del modelo, no dispondremos de todos los datos para cada clase de edad requerida, por lo que nos veremos en la obligación de utilizar nuestro criterio personal para distribuir adecuadamente estos valores. Puesto que solo modelamos la parte femenina de la población para la tasa de reproducción, solo nos servirá la media de crías hembra producidas por cada hembra reproductora, pudiendo considerar el sex-ratio en el momento del nacimiento como de 1:1 (Soriguer 1994a).

$$\frac{\text{Crías Hembras}}{\text{Hembras Reproductoras}} = \frac{\text{Crías Totales}}{2}$$

Tabla 5.4. Tabla de vida para la población de ciervas de Quintos de Mora para $i=20$.

Clase de edad (F_i)	Sexo	Edad(años)	Supervivencia al inicio de la clase	Tasa de mortalidad	Tasa de Supervivencia	Tasa de reproducción
F_1	Hembra	0	1	0,12	0,88	0
F_2	Hembra	1	0,88	0,06	0,94	0,28
F_3	Hembra	2	0,83	0,03	0,97	0,28
F_4	Hembra	3	0,80	0,03	0,97	0,28
F_5	Hembra	4	0,78	0,03	0,97	0,28
F_6	Hembra	5	0,75	0,03	0,97	0,28
F_7	Hembra	6	0,73	0,03	0,97	0,28
F_8	Hembra	7	0,71	0,03	0,97	0,28
F_9	Hembra	8	0,69	0,03	0,97	0,28
F_{10}	Hembra	9	0,67	0,03	0,97	0,28
F_{11}	Hembra	10	0,65	0,03	0,97	0,28
F_{12}	Hembra	11	0,63	0,03	0,97	0,28
F_{13}	Hembra	12	0,61	0,03	0,97	0,28
F_{14}	Hembra	13	0,59	0,03	0,97	0,28
F_{15}	Hembra	14	0,57	0,03	0,97	0,28
F_{16}	Hembra	15	0,56	0,03	0,97	0,28
F_{17}	Hembra	16	0,54	0,03	0,97	0,28
F_{18}	Hembra	17	0,52	0,03	0,97	0,28
F_{19}	Hembra	18	0,51	0,03	0,97	0,28
F_{20}	Hembra	19	0,49	1	0	0,28

Fuente: Elaboración propia

Ahora ya es posible elaborar la matriz A de transiciones o matriz de Leslie:

Siendo esta:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,28 & 0,28 & 0,28 & 0,28 & 0,28 & 0,28 & 0,28 & 0,28 & 0,28 & 0,28 & 0,28 & 0,28 & 0,28 & 0,28 & 0,28 & 0,28 & 0,28 & 0,28 & 0,28 \\ 0,88 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,94 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,97 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,97 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por último, deberemos conocer la capacidad óptima de la población de hembras de “Quintos de Mora” que será la introducida en este modelo.

$$C.O._{Hembras} = \frac{1400}{2} = 700$$

a) Población por debajo de la Capacidad óptima o densidad de gestión.

El primer paso es conocer la población actual de la finca. Como ya hemos comentado, los datos de la densidad real disponibles se encuentran por encima de la capacidad óptima, por lo que para poder analizar el comportamiento del modelo en este primer supuesto. Tendremos que utilizar un vector de población ficticio (Tabla 5.5) con una población total inferior a 700 individuos. El objetivo, es mantener el número total de individuos estable cerca de la capacidad de carga, que será también la densidad de Gestión.

Tabla 5.5. Vector inicial de población a emplear en el supuesto a.

	Individuos
F1	53
F2	48
F3	33
F4	31
F5	22
F6	21
F7	18
F8	12
F9	10
F10	7
F11	10
F12	8
F13	5
F14	4
F15	5
F16	3
F17	4
F18	2
F19	2
F20	2
Total	300

Una vez conocido el vector inicial de población, se introduce en el modelo. Este arroja los siguientes resultados para la evolución de la población en un período de tiempo $t=20$ años (Tabla 5.6A y Tabla 5.6B):

Tabla 5.6A. Evolución de la población según el modelo de Leslie para $t=20$.

	X_t	X_{t+1}	X_{t+2}	X_{t+3}	X_{t+4}	X_{t+5}	X_{t+6}	X_{t+7}	X_{t+8}	X_{t+9}	X_{t+10}
F1	53	70	80	94	111	130	152	178	209	246	287
F2	48	47	62	70	83	98	114	134	157	184	216
F3	33	45	44	58	66	78	92	107	126	148	173
F4	31	32	44	43	56	64	76	89	104	122	144
F5	22	30	31	43	42	54	62	74	86	101	118
F6	21	21	29	30	42	41	52	60	72	83	98
F7	18	20	20	28	29	41	40	50	58	70	81
F8	12	17	19	19	27	28	40	39	49	56	68
F9	10	12	16	18	18	26	27	39	38	48	54
F10	7	10	12	16	17	17	25	26	38	37	47
F11	10	7	10	12	16	16	16	24	25	37	36
F12	8	10	7	10	12	16	16	16	23	24	36
F13	5	8	10	7	10	12	16	16	16	22	23

F14	4	5	8	10	7	10	12	16	16	16	21
F15	5	4	5	8	10	7	10	12	16	16	16
F16	3	5	4	5	8	10	7	10	12	16	16
F17	4	3	5	4	5	8	10	7	10	12	16
F18	2	4	3	5	4	5	8	10	7	10	12
F19	2	2	4	3	5	4	5	8	10	7	10
F20	2	2	2	4	3	5	4	5	8	10	7
Total	300	354	415	487	571	670	784	920	1080	1265	1479

Tabla 5.6B. Evolución de la población según el modelo de Leslie para $t=20$.

	X_{t+11}	X_{t+12}	X_{t+13}	X_{t+14}	X_{t+15}	X_{t+16}	X_{t+17}	X_{t+18}	X_{t+19}	X_{t+20}
F1	336	394	462	540	632	739	865	1014	1189	1391
F2	253	296	347	407	475	556	650	761	892	1046
F3	203	238	278	326	383	447	523	611	715	838
F4	168	197	231	270	316	372	434	507	593	694
F5	140	163	191	224	262	307	361	421	492	575
F6	114	136	158	185	217	254	298	350	408	477
F7	95	111	132	153	179	210	246	289	340	396
F8	79	92	108	128	148	174	204	239	280	330
F9	66	77	89	105	124	144	169	198	232	272
F10	52	64	75	86	102	120	140	164	192	225
F11	46	50	62	73	83	99	116	136	159	186
F12	35	45	49	60	71	81	96	113	132	154
F13	35	34	44	48	58	69	79	93	110	128
F14	22	34	33	43	47	56	67	77	90	107
F15	20	21	33	32	42	46	54	65	75	87
F16	16	19	20	32	31	41	45	52	63	73
F17	16	16	18	19	31	30	40	44	50	61
F18	16	16	16	17	18	30	29	39	43	49
F19	12	16	16	16	16	17	29	28	38	42
F20	10	12	16	16	16	16	16	28	27	37
Total	1734	2031	2378	2780	3251	3808	4461	5229	6120	7168

De una forma gráfica (Figura 5.1), se puede ver claramente el crecimiento exponencial de la población y como supera rápidamente la capacidad óptima establecida. Es sencillo deducir a partir de la siguiente gráfica uno de los limitantes de modelo de Leslie, este es la suposición de que una población puede crecer de una forma exponencial y de manera ilimitada sin encontrar ningún tipo de restricción.

Figura 5.1. Crecimiento de la población de ciervas.

Este crecimiento está marcado por el autovalor dominante de la matriz de transición λ_1 . Este autovalor, como ya sabemos, se puede conocer observando la evolución de los autovalores de cada año (Tabla 5.7A y Tabla 5.7B), buscando el momento en que estos se estabilicen λ_1 , según el método iterativo explicado en apartados anteriores.

Tabla 5.7A. Evolución del Autovector a lo largo de los años

	t	t+1	t+2	t+3	t+4	t+5	t+6	t+7	t+8	t+9	t+10
Autovalor (λ)	-	1,18	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17

Tabla 5.7B. Evolución del Autovector a lo largo de los años

	t+11	t+12	t+13	t+14	t+15	t+16	t+17	t+18	t+19	t+20
Autovalor (λ)	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17

En este caso particular el crecimiento se estabiliza rápidamente, a partir del segundo año de estudio, por lo tanto, ya se conoce el autovalor dominante de la matriz de Leslie:

$$\lambda_1 = 1,17$$

A continuación, es momento de encontrar el vector de distribuciones estable para esta matriz de transiciones. La estabilidad vendrá dada por el autovector asociado al

autovalor dominante λ_1 . Para su estimación, nos valdremos nuevamente del método de las iteraciones, observando en que valores se estabilizan las proporciones de cada clase de edad a lo largo del tiempo (Tabla 5.8A y Tabla 5.8B).

Tabla 5.8A. Evolución del vector de proporciones.

	t	t+1	t+2	t+3	t+4	t+5	t+6	t+7	t+8	t+9	t+10
F1	0,177	0,198	0,193	0,193	0,194	0,194	0,194	0,193	0,194	0,194	0,194
F2	0,16	0,133	0,149	0,144	0,145	0,146	0,15	0,146	0,145	0,145	0,146
F3	0,11	0,127	0,106	0,119	0,116	0,116	0,12	0,116	0,117	0,117	0,117
F4	0,103	0,09	0,106	0,088	0,098	0,096	0,1	0,097	0,096	0,096	0,097
F5	0,073	0,085	0,075	0,088	0,074	0,081	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08
F6	0,07	0,059	0,07	0,062	0,074	0,061	0,07	0,065	0,067	0,066	0,066
F7	0,06	0,056	0,048	0,057	0,051	0,061	0,05	0,054	0,054	0,055	0,055
F8	0,04	0,048	0,046	0,039	0,047	0,042	0,05	0,042	0,045	0,044	0,046
F9	0,033	0,034	0,039	0,037	0,032	0,039	0,03	0,042	0,035	0,038	0,037
F10	0,023	0,028	0,029	0,033	0,03	0,025	0,03	0,028	0,035	0,029	0,032
F11	0,033	0,02	0,024	0,025	0,028	0,024	0,02	0,026	0,023	0,029	0,024
F12	0,027	0,028	0,017	0,021	0,021	0,024	0,02	0,017	0,021	0,019	0,024
F13	0,017	0,023	0,024	0,014	0,018	0,018	0,02	0,017	0,015	0,017	0,016
F14	0,013	0,014	0,019	0,021	0,012	0,015	0,02	0,017	0,015	0,013	0,014
F15	0,017	0,011	0,012	0,016	0,018	0,01	0,01	0,013	0,015	0,013	0,011
F16	0,01	0,014	0,01	0,01	0,014	0,015	0,01	0,011	0,011	0,013	0,011
F17	0,013	0,008	0,012	0,008	0,009	0,012	0,01	0,008	0,009	0,009	0,011
F18	0,007	0,011	0,007	0,01	0,007	0,007	0,01	0,011	0,006	0,008	0,008
F19	0,007	0,006	0,01	0,006	0,009	0,006	0,01	0,009	0,009	0,006	0,007
F20	0,007	0,006	0,005	0,008	0,005	0,007	0,01	0,005	0,007	0,008	0,005

Tabla 5.8B. Evolución del vector de proporciones.

	t+11	t+12	t+13	t+14	t+15	t+16	t+17	t+18	t+19	t+20
F1	0,194	0,194	0,194	0,194	0,194	0,194	0,194	0,194	0,194	0,194
F2	0,146	0,146	0,146	0,146	0,146	0,146	0,146	0,146	0,146	0,146
F3	0,117	0,117	0,117	0,117	0,118	0,117	0,117	0,117	0,117	0,117
F4	0,097	0,097	0,097	0,097	0,097	0,098	0,097	0,097	0,097	0,097
F5	0,081	0,08	0,08	0,081	0,081	0,081	0,081	0,081	0,08	0,08
F6	0,066	0,067	0,066	0,067	0,067	0,067	0,067	0,067	0,067	0,067
F7	0,055	0,055	0,056	0,055	0,055	0,055	0,055	0,055	0,055	0,055
F8	0,046	0,045	0,045	0,046	0,046	0,046	0,046	0,046	0,046	0,046
F9	0,038	0,038	0,037	0,038	0,038	0,038	0,038	0,038	0,038	0,038
F10	0,03	0,032	0,032	0,031	0,031	0,032	0,031	0,031	0,031	0,031
F11	0,027	0,025	0,026	0,026	0,026	0,026	0,026	0,026	0,026	0,026
F12	0,02	0,022	0,021	0,022	0,022	0,021	0,022	0,022	0,022	0,022
F13	0,02	0,017	0,019	0,017	0,018	0,018	0,018	0,018	0,018	0,018
F14	0,013	0,017	0,014	0,015	0,014	0,015	0,015	0,015	0,015	0,015
F15	0,012	0,01	0,014	0,012	0,013	0,012	0,012	0,012	0,012	0,012
F16	0,009	0,009	0,008	0,012	0,01	0,011	0,01	0,01	0,01	0,01

F17	0,009	0,008	0,008	0,007	0,01	0,008	0,009	0,008	0,008	0,008
F18	0,009	0,008	0,007	0,006	0,006	0,008	0,007	0,007	0,007	0,007
F19	0,007	0,008	0,007	0,006	0,005	0,004	0,007	0,005	0,006	0,006
F20	0,006	0,006	0,007	0,006	0,005	0,004	0,004	0,005	0,005	0,005

A través de esta tabla, observamos que aproximadamente en $t+19$ se produce una estabilidad total en la proporción de las clases de edad, esto quiere decir que desde ese momento esta proporción permanece constante. Por lo tanto, tenemos la proporción del autovector de la matriz de Leslie correspondiente al autovalor asociado λ_1 , estimada por el método iterativo (Tabla 5.9).

Tabla 5.9. Proporción estable de cada clase de edad con respecto a la población total.

Clase de edad	Proporción (%)
F1	19,4
F2	14,6
F3	11,7
F4	9,7
F5	8
F6	6,7
F7	5,5
F8	4,6
F9	3,8
F10	3,1
F11	2,6
F12	2,2
F13	1,8
F14	1,5
F15	1,2
F16	1
F17	0,8
F18	0,7
F19	0,6
F20	0,5

Ahora ya disponemos de toda la información que el modelo básico de Leslie nos puede aportar a cerca de una población de ciervas para poder iniciar la gestión. Sabiendo que la capacidad óptima y densidad de gestión es de 700 ciervas se procede a calcular el vector de población objetivo:

$$\vec{X}_{optimo} = \begin{pmatrix} x_{F1,optimo} = 0,194 \cdot 700 \\ x_{F2,optimo} = 0,146 \cdot 700 \\ x_{F3,optimo} = 0,117 \cdot 700 \\ x_{F4,optimo} = 0,097 \cdot 700 \\ x_{F5,optimo} = 0,08 \cdot 700 \\ x_{F6,optimo} = 0,067 \cdot 700 \\ x_{F7,optimo} = 0,055 \cdot 700 \\ x_{F8,optimo} = 0,046 \cdot 700 \\ x_{F9,optimo} = 0,038 \cdot 700 \\ x_{F10,optimo} = 0,031 \cdot 700 \\ x_{F11,optimo} = 0,026 \cdot 700 \\ x_{F12,optimo} = 0,022 \cdot 700 \\ x_{F13,optimo} = 0,018 \cdot 700 \\ x_{F14,optimo} = 0,015 \cdot 700 \\ x_{F15,optimo} = 0,012 \cdot 700 \\ x_{F16,optimo} = 0,010 \cdot 700 \\ x_{F17,optimo} = 0,008 \cdot 700 \\ x_{F18,optimo} = 0,007 \cdot 700 \\ x_{F19,optimo} = 0,006 \cdot 700 \\ x_{F20,optimo} = 0,005 \cdot 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 136 \\ 102 \\ 82 \\ 68 \\ 56 \\ 47 \\ 39 \\ 32 \\ 27 \\ 22 \\ 18 \\ 15 \\ 13 \\ 11 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

A continuación, el objetivo será conducir a la población hacia el vector óptimo de la población (X_{optimo}) calculado anteriormente y mantenerla en estos valores a lo largo de los años. Para ello observamos en la Tabla 5.10 cuando nuestra población supera la capacidad óptima.

Tabla 5.10. Momento de superación de la capacidad óptima

	X_{t+4}	X_{t+5}	X_{t+6}
F1	111	130	152
F2	83	98	114
F3	66	78	92
F4	56	64	76
F5	42	54	62
F6	42	41	52
F7	29	41	40
F8	27	28	40
F9	18	26	27
F10	17	17	25
F11	16	16	16
F12	12	16	16
F13	10	12	16
F14	7	10	12
F15	10	7	10
F16	8	10	7
F17	5	8	10
F18	4	5	8
F19	5	4	5
F20	3	5	4
Total	571	670	784

Si consideramos una densidad óptima de 700 individuos y nombramos este vector como X_{Optimo} , deducimos según la Tabla 5.10 que la densidad óptima se va a encontrar en un lugar intermedio entre X_{t+5} y X_{t+6} puesto que:

$$\vec{X}_{t+5} < \vec{X}_{Optimo} < \vec{X}_{t+6}$$

Para poder conseguir en la población el vector X_{Optimo} será necesario realizar extracciones durante el período de tiempo $t+6$, por lo tanto:

$$\vec{X}_{t+6} = A\vec{X}_{t+5} \rightarrow \vec{X}_{Optimo} = (I - H^*)\vec{X}_{t+6} \rightarrow \vec{X}_{Optimo} = (I - H^*)A\vec{X}_{t+5}$$

Siendo H^* la matriz en cuya diagonal se introducen los porcentajes de las de extracciones, que habrá que aplicar solo el primer año de manejo, para llevar a la población del vector X_{t+6} al vector X_{Optimo} . (Tabla 5.11).

Una vez conocido el vector objetivo y el momento en el que deben iniciarse las extracciones el siguiente paso es conocer la matriz H^* de extracciones de ese aprovechamiento.

Tabla 5.11. Comparativa entre el vector objetivo y el actual de la población

	X _{Objetivo}	X _{t+6}
F1	136	152
F2	102	114
F3	82	92
F4	68	76
F5	56	62
F6	47	52
F7	39	40
F8	32	40
F9	27	27
F10	22	25
F11	18	16
F12	15	16
F13	13	16
F14	11	12
F15	8	10
F16	7	7
F17	6	10
F18	5	8
F19	4	5
F20	4	4
Total	702	784

Para calcular esa matriz de extracciones de la primera intervención H^* , tenemos en cuenta que en este caso:

$$\vec{X}_{Objetivo} = (I - H^*)\vec{X}_{t+6}$$

Despejando H^* de la ecuación obtenemos que:

$$H^* = I - \frac{\vec{X}_{Objetivo}}{\vec{X}_{t+6}}$$

Cuando la primera extracción es requerida, el crecimiento total de la población se encuentra aún sin estabilizar, por lo que las extracciones deberán ser calculadas para cada una de las clases de edad, una vez llevada a cabo, no sólo mantendrán la población en niveles óptimos en cuanto a número total de individuos, sino que también ayudarán a mantener la población en una distribución por clases de edad estable. La extracción correspondiente a cada clase de edad es calculada de la siguiente manera:

$$H^* = \begin{pmatrix} h_{F1}^* = 1 - x_{F1,Objetivo} / x_{F1,t+6} \\ h_{F2}^* = 1 - x_{F2,Objetivo} / x_{F2,t+6} \\ h_{F3}^* = 1 - x_{F3,Objetivo} / x_{F3,t+6} \\ h_{F4}^* = 1 - x_{F4,Objetivo} / x_{F4,t+6} \\ h_{F5}^* = 1 - x_{F5,Objetivo} / x_{F5,t+6} \\ h_{F6}^* = 1 - x_{F6,Objetivo} / x_{F6,t+6} \\ h_{F7}^* = 1 - x_{F7,Objetivo} / x_{F7,t+6} \\ h_{F8}^* = 1 - x_{F8,Objetivo} / x_{F8,t+6} \\ h_{F9}^* = 1 - x_{F9,Objetivo} / x_{F9,t+6} \\ h_{F10}^* = 1 - x_{F10,Objetivo} / x_{F10,t+6} \\ h_{F11}^* = 1 - x_{F11,Objetivo} / x_{F11,t+6} \\ h_{F12}^* = 1 - x_{F12,Objetivo} / x_{F12,t+6} \\ h_{F13}^* = 1 - x_{F13,Objetivo} / x_{F13,t+6} \\ h_{F14}^* = 1 - x_{F14,Objetivo} / x_{F14,t+6} \\ h_{F15}^* = 1 - x_{F15,Objetivo} / x_{F15,t+6} \\ h_{F16}^* = 1 - x_{F16,Objetivo} / x_{F16,t+6} \\ h_{F17}^* = 1 - x_{F17,Objetivo} / x_{F17,t+6} \\ h_{F18}^* = 1 - x_{F18,Objetivo} / x_{F18,t+6} \\ h_{F19}^* = 1 - x_{F19,Objetivo} / x_{F19,t+6} \\ h_{F20}^* = 1 - x_{F20,Objetivo} / x_{F20,t+6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{F1}^* = 1 - 136 / 152 = 0,105 \\ h_{F2}^* = 1 - 102 / 114 = 0,105 \\ h_{F3}^* = 1 - 82 / 92 = 0,108 \\ h_{F4}^* = 1 - 68 / 76 = 0,105 \\ h_{F5}^* = 1 - 56 / 62 = 0,096 \\ h_{F6}^* = 1 - 47 / 52 = 0,096 \\ h_{F7}^* = 1 - 39 / 40 = 0,025 \\ h_{F8}^* = 1 - 32 / 40 = 0,200 \\ h_{F9}^* = 1 - 27 / 27 = 0,000 \\ h_{F10}^* = 1 - 22 / 25 = 0,120 \\ h_{F11}^* = 1 - 18 / 16 = 0^* \\ h_{F12}^* = 1 - 15 / 16 = 0,062 \\ h_{F13}^* = 1 - 13 / 16 = 0,188 \\ h_{F14}^* = 1 - 11 / 12 = 0,083 \\ h_{F15}^* = 1 - 8 / 10 = 0,200 \\ h_{F16}^* = 1 - 7 / 7 = 0,000 \\ h_{F17}^* = 1 - 6 / 10 = 0,400 \\ h_{F18}^* = 1 - 5 / 8 = 0,375 \\ h_{F19}^* = 1 - 4 / 5 = 0,200 \\ h_{F20}^* = 1 - 4 / 4 = 0,000 \end{pmatrix}$$

Una vez llevada a cabo la primera intervención en la población, el salto de crecimiento que conseguimos entre X_{t+6} y X_{t+7} es el siguiente (Tabla 5.12):

Tabla 5.12. Salto del vector estable X_{t+6} al X_{t+7} después de las extracciones

	X_{t+6}	X_{t+7}
F1	136	160
F2	102	120
F3	82	96
F4	68	80
F5	56	66
F6	47	54
F7	39	46
F8	32	38
F9	27	31
F10	22	26
F11	18	21
F12	15	17
F13	13	15
F14	11	13
F15	8	11
F16	7	8
F17	6	7
F18	5	6
F19	4	5
F20	4	4
Total	702	824

Como sabemos que la población es estable y por lo tanto tiene el mismo crecimiento anual en todas sus clases las extracciones también serán homogéneas, simplificando el cálculo de estas de la siguiente manera:

$$H = 1 - \frac{\sum X_{t+6}}{\sum X_{t+7}} \rightarrow 1 - \frac{702}{824} = 0,148$$

Otro método para calcular los porcentajes de extracción es a través de los autovalores de la siguiente forma:

$$H = 1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}$$

Siendo:

λ_1 = Autovalor dominante

λ = Autovalor objetivo

Como para este caso $\lambda_1=1,17$ y puesto que el objetivo es mantener a la población en los niveles de densidad del intervalo de tiempo anterior $\lambda=1$, por lo tanto:

$$H = 1 - \frac{1}{1,17} = 0,145$$

$$0,145 \simeq 0,148$$

Con el objetivo de mantener la población en sus valores óptimos de capacidad, necesitaremos extraer aproximadamente el 14,8% de la población de una manera homogénea en todas sus clases anualmente. Como consecuencia, tendremos el siguiente vector de extracciones estable a lo largo de todos los años que se desee mantener esta gestión:

$$\vec{X}_H = \begin{pmatrix} x_{F1,H} = 160 * 0,148 \\ x_{F2,H} = 120 * 0,148 \\ x_{F3,H} = 96 * 0,148 \\ x_{F4,H} = 80 * 0,148 \\ x_{F5,H} = 66 * 0,148 \\ x_{F6,H} = 54 * 0,148 \\ x_{F7,H} = 46 * 0,148 \\ x_{F8,H} = 38 * 0,148 \\ x_{F9,H} = 31 * 0,148 \\ x_{F10,H} = 26 * 0,148 \\ x_{F11,H} = 21 * 0,148 \\ x_{F12,H} = 17 * 0,148 \\ x_{F13,H} = 15 * 0,148 \\ x_{F14,H} = 13 * 0,148 \\ x_{F15,H} = 11 * 0,148 \\ x_{F16,H} = 8 * 0,148 \\ x_{F17,H} = 7 * 0,148 \\ x_{F18,H} = 6 * 0,148 \\ x_{F19,H} = 5 * 0,148 \\ x_{F20,H} = 4 * 0,148 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ 14 \\ 12 \\ 10 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una vez obtenido el vector anual de extracciones estable X_H para la parte femenina de la población, la solución del modelo básico de Leslie para incluir a la parte

masculina es extrapolar los datos de las hembras a los machos, por lo tanto, el número de individuos extraídos será (Tabla 5.13):

Tabla 5.13. Extracciones anuales de machos y de hembras según el modelo clásico de Leslie

Clase F	Extracciones	Clase M	Extracciones
F1	24	M1	24
F2	18	M2	18
F3	14	M3	14
F4	12	M4	12
F5	10	M5	10
F6	8	M6	8
F7	7	M7	7
F8	6	M8	6
F9	5	M9	5
F10	4	M10	4
F11	3	M11	3
F12	3	M12	3
F13	2	M13	2
F14	2	M14	2
F15	2	M15	2
F16	1	M16	1
F17	1	M17	1
F18	1	M18	1
F19	1	M19	1
F20	1	M20	1
Total F	125	Total M	125
F+M	250		

Según el modelo tradicional de Leslie obtendríamos 250 capturas de animales anualmente divididas a partes iguales entre machos y hembras, por otra parte, la pirámide de edad por sexos y clases de edad resultante de este modelo (Figura 5.2), como no podía ser de otra manera es simétrica, ya que estamos extrapolando los datos obtenidos para las hembras a la parte masculina de la población.

Figura 5.2. Pirámide de edades de la población según el modelo clásico de Leslie

b) Población por encima de la capacidad óptima o densidad de gestión

Una vez realizado el primer supuesto de gestión, donde el vector de población inicial es inferior a la capacidad óptima del medio, continuamos analizando el segundo caso posible, que el vector inicial de la población se encuentra por encima de la capacidad óptima del medio y sea tarea del gestor reconducirla hasta sus valores óptimos. El objetivo de analizar todos los posibles casos, es el poder realizar una comparativa más rigurosa entre los modelos desarrollados a partir del primitivo modelo de Leslie, para ello resolveremos los mismos problemas iniciales con los diferentes modelos y compararemos resultados. Para estudiar el supuesto de una población por encima de la capacidad de carga empezaremos con un vector de distribución X_t de la parte femenina de la población igual a 1000 individuos, para no extendernos en los cálculos utilizaremos un vector inicial con la población ya estabilizada calculado a partir del vector de proporciones estable ya conocido:

$$\vec{X}_t = \begin{pmatrix} x_{F1,t} = 1000 * 0,198 \\ x_{F2,t} = 1000 * 0,146 \\ x_{F3,t} = 1000 * 0,117 \\ x_{F4,t} = 1000 * 0,097 \\ x_{F5,t} = 1000 * 0,08 \\ x_{F6,t} = 1000 * 0,067 \\ x_{F7,t} = 1000 * 0,055 \\ x_{F8,t} = 1000 * 0,046 \\ x_{F9,t} = 1000 * 0,038 \\ x_{F10,t} = 1000 * 0,031 \\ x_{F11,t} = 1000 * 0,026 \\ x_{F12,t} = 1000 * 0,022 \\ x_{F13,t} = 1000 * 0,018 \\ x_{F14,t} = 1000 * 0,015 \\ x_{F15,t} = 1000 * 0,012 \\ x_{F16,t} = 1000 * 0,01 \\ x_{F17,t} = 1000 * 0,008 \\ x_{F18,t} = 1000 * 0,007 \\ x_{F19,t} = 1000 * 0,006 \\ x_{F20,t} = 1000 * 0,005 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 194 \\ 146 \\ 117 \\ 97 \\ 80 \\ 67 \\ 55 \\ 46 \\ 38 \\ 31 \\ 26 \\ 22 \\ 18 \\ 15 \\ 12 \\ 10 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Una vez calculado el vector inicial del estudio X_t , lo comparamos con el vector objetivo de la ordenación, es decir el vector de la población estable (Tabla 5.14) cuyo número total de individuos es igual a la capacidad óptima, en este caso, como ya se ha resuelto anteriormente al trabajar solamente con la parte femenina, el número total de hembras a la capacidad de carga será de 700.

Tabla 5.14. Vector inicial de la población y vector objetivo

	Vector Inicial estable de Población (X_t)	Vector objetivo (X_{Objetivo})
F1	194	136
F2	146	102
F3	117	82
F4	97	68
F5	80	56
F6	67	47
F7	55	39
F8	46	32
F9	38	26
F10	31	22
F11	26	18
F12	22	15
F13	18	13
F14	15	11
F15	12	9
F16	10	7
F17	8	6
F18	7	5
F19	6	4
F20	5	4
Total	1000	702

Para alcanzar el vector objetivo de la ordenación X_{Objetivo} , vamos a diseñar un plan de extracciones a lo largo de cinco años, que es generalmente la duración de los planes de ordenación actuales, para ello procedemos a calcular los vectores de población a lo largo de esos años, X_t , X_{t+1} , X_{t+2} , X_{t+3} y X_{t+4} (Tabla 5.15) a partir del vector de extracción total X_{ht} :

$$\vec{X}_{ht} = \vec{X}_t - \vec{X}_{\text{Objetivo}} \rightarrow \vec{X}_{ht} = \frac{\vec{X}_{ht}}{5}$$

Para ello tenemos que cumplir que:

$$\begin{aligned}\vec{X}_{t+1} &= \vec{X}_t - \vec{X}_{ht} \\ \vec{X}_{t+2} &= \vec{X}_{t+1} - \vec{X}_{ht} \\ \vec{X}_{t+3} &= \vec{X}_{t+2} - \vec{X}_{ht} \\ \vec{X}_{t+4} &= \vec{X}_{t+3} - \vec{X}_{ht} \\ \vec{X}_{t+5} &= \vec{X}_{t+4} - \vec{X}_{ht}\end{aligned}$$

Tabla 5.15. Evolución de la población gestionada para alcanzar la densidad óptima

	X_t	X_{t+1}	X_{t+2}	X_{t+3}	X_{t+4}	X_{t+5}
F1	194	182	170	158	146	134
F2	146	137	128	119	110	101
F3	117	110	103	96	89	82
F4	97	91	85	79	73	67
F5	80	75	70	65	60	55
F6	67	63	59	55	51	47
F7	55	52	49	46	43	40
F8	46	43	40	37	34	31
F9	38	36	34	32	30	28
F10	31	29	27	25	23	21
F11	26	24	22	20	18	16
F12	22	21	20	19	18	17
F13	18	17	16	15	14	13
F14	15	14	13	12	11	10
F15	12	11	10	9	8	7
F16	10	9	8	7	6	5
F17	8	8	8	8	8	8
F18	7	7	7	7	7	7
F19	6	6	6	6	6	6
F20	5	5	5	5	5	5
Total	1000	940	880	820	760	700

Una vez conocidos los vectores de población que vamos a querer tener a lo largo de los cinco años de la ordenación, solo resta calcular los porcentajes de extracción a aplicar a través de la matriz de extracciones H para conseguirlo:

$$h_{t+n} = 1 - \frac{X_{t+n}}{X_{t+n-1} \cdot \lambda_1} \rightarrow 1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}$$

Siendo:

λ_1 = Autovalor dominante de la matriz A

λ = Aurovalor modificado con las extracciones

Donde el valor de los autovalores modificados (Tabla 5.16) con las extracciones es calculado como resultado de:

$$\lambda_{t+1} = \frac{X_{t+1}}{X_t}$$

Tabla 5.16. Autovalores de la población bajo gestión

λ_{t+1}	λ_{t+2}	λ_{t+3}	λ_{t+4}	λ_{t+5}
0,94	0,94	0,93	0,93	0,92

Por lo tanto, el porcentaje de extracciones que habrá que introducir en el modelo para cumplir con el programa de manejo planteado son las representadas en la Tabla 5.17, puesto que como ya se ha demostrado anteriormente el vector de población tiene una estructura estable, este porcentaje de extracciones será el mismo para todas las clases de edad.

Tabla 5.17. Porcentaje de Extracciones anuales

h_{t+1}	h_{t+2}	h_{t+3}	h_{t+4}	h_{t+5}
0,2	0,2	0,21	0,21	0,21

Aplicando en el modelo estos porcentajes de extracción tenemos como resultado los siguientes vectores de capturas (Tabla 5.18) para cada uno de los años de la ordenación hasta alcanzar el vector objetivo, X_{objetivo} (Figura 5.3).

Tabla 5.18. Vectores de extracciones para cada año del periodo de ordenación

	X_{ht+1}	X_{ht+2}	X_{ht+3}	X_{ht+4}	X_{ht+5}
F1	45	44	42	41	39
F2	34	32	31	29	27
F3	27	26	24	23	21
F4	22	22	21	20	19
F5	19	18	17	17	16
F6	15	14	13	12	11
F7	13	12	11	10	9
F8	10	10	11	11	11
F9	9	8	7	6	5
F10	8	8	8	8	8
F11	6	6	6	6	6
F12	4	3	2	1	0
F13	4	4	4	4	4
F14	3	3	4	4	4
F15	4	4	4	4	4
F16	3	3	3	3	3
F17	2	1	0	0	0
F18	1	1	1	1	1
F19	1	1	1	1	1
F20	1	1	1	1	1
Total	231	221	211	201	188

Figura 5.3 Evolución de la población hasta alcanzar la capacidad óptima

Una vez que los vectores de extracciones son conocidos para la parte femenina de la población, solo resta extrapolar estos resultados a su homóloga masculina (Tabla 5.19), serían por lo tanto estas capturas las que habría que aplicar a la población real. Conseguido el objetivo de conducir a la población a los valores de densidad buscados, el siguiente paso es mantener constante el tamaño de la población el tiempo deseado, para ello se aplicará en cada periodo de ordenación el vector de extracciones calculado en el primero de los casos.

Tabla 5.19. Extracciones totales según el modelo clásico de Leslie

X_{ht+1}				X_{ht+2}				X_{ht+3}				X_{ht+4}				X_{ht+5}			
F1	45	M1	45	F1	44	M1	44	F1	42	M1	42	F1	41	M1	41	F1	39	M1	39
F2	34	M2	34	F2	32	M2	32	F2	31	M2	31	F2	29	M2	29	F2	27	M2	27
F3	27	M3	27	F3	26	M3	26	F3	24	M3	24	F3	23	M3	23	F3	21	M3	21
F4	22	M4	22	F4	22	M4	22	F4	21	M4	21	F4	20	M4	20	F4	19	M4	19
F5	19	M5	19	F5	18	M5	18	F5	17	M5	17	F5	17	M5	17	F5	16	M5	16
F6	15	M6	15	F6	14	M6	14	F6	13	M6	13	F6	12	M6	12	F6	11	M6	11
F7	13	M7	13	F7	12	M7	12	F7	11	M7	11	F7	10	M7	10	F7	9	M7	9
F8	10	M8	10	F8	10	M8	10	F8	11	M8	11	F8	11	M8	11	F8	11	M8	11
F9	9	M9	9	F9	8	M9	8	F9	7	M9	7	F9	6	M9	6	F9	5	M9	5
F10	8	M10	8	F10	8	M10	8	F10	8	M10	8	F10	8	M10	8	F10	8	M10	8
F11	6	M11	6	F11	6	M11	6	F11	6	M11	6	F11	6	M11	6	F11	6	M11	6
F12	4	M12	4	F12	3	M12	3	F12	2	M12	2	F12	1	M12	1	F12	0	M12	0
F13	4	M13	4	F13	4	M13	4	F13	4	M13	4	F13	4	M13	4	F13	4	M13	4
F14	3	M14	3	F14	3	M14	3	F14	4	M14	4	F14	4	M14	4	F14	4	M14	4
F15	4	M15	4	F15	4	M15	4	F15	4	M15	4	F15	4	M15	4	F15	4	M15	4
F16	3	M16	3	F16	3	M16	3	F16	3	M16	3	F16	3	M16	3	F16	3	M16	3
F17	2	M17	2	F17	1	M17	1	F17	0	M17	0	F17	0	M17	0	F17	0	M17	0
F18	1	M18	1	F18	1	M18	1	F18	1	M18	1	F18	1	M18	1	F18	1	M18	1
F19	1	M19	1	F19	1	M19	1	F19	1	M19	1	F19	1	M19	1	F19	1	M19	1
F20	1	M20	1	F20	1	M20	1	F20	1	M20	1	F20	1	M20	1	F20	1	M20	1
Total	231	Total	231	Total	221	Total	221	Total	211	Total	211	Total	201	Total	201	Total	188	Total	188
Total	462			Total	442			Total	422			Total	402			Total	376		

5.2.2 Primera aproximación: Crecimiento exponencial por clases de edad y sexo.

5.2.2.1 Teoría del modelo

Aplicando como punto inicial la matriz de Leslie del apartado anterior, utilizaremos nuestro conocimiento en biología y gestión de ungulados salvajes para identificar las debilidades y carencias del primitivo y sencillo modelo de Leslie para evolucionarlo hasta crear un modelo nuevo con mayor utilidad en una situación real de gestión.

Para comenzar, el objetivo final de toda gestión una vez conocida la densidad óptima para esa área, es determinar el número exacto de animales que deberían ser extraídos para mantener la población cercana a esa cifra de densidad óptima, además de conocer su distribución óptima por edades.

La primera limitación del modelo de Leslie para su empleo sobre una población real, es que el modelo de Leslie asume que en una población la densidad y desarrollo de ambos sexos es igual y su matriz es únicamente aplicable al estudio de la parte femenina de la población extrapolando resultados a la masculina.

Este supuesto no es aplicable para la mayoría de las poblaciones y supone una gran restricción. En el caso de *Cervus elaphus*, ha sido probado que entre machos y hembras hay suficientes diferencias biológicas (Miranda, Sicilia et al. 2012) tanto de supervivencia como de esperanza de vida (Sáenz de Buruaga, Carranza 2008) para ser tratados de diferente manera. Esto unido a que para un empleo real de esta herramienta necesitamos conocer el desarrollo de ambos sexos, nos obliga a buscar una solución para introducir la parte masculina en el modelo. Como podemos suponer en una población de ungulados sometida a un aprovechamiento cinegético, el conocer de la forma más precisa posible la evolución de la parte masculina cobrará incluso más importancia.

Este problema ya ha sido planteado y resuelto por algunos autores (Jensen 2000) que han introducido algunas modificaciones en la matriz de Leslie para poder incluir a los machos en el modelo.

A continuación, describimos el desarrollo de una alternativa para solventar este primer e importante limitante para nuestro objetivo. A este modelo, lo conoceremos como modelo matricial de crecimiento exponencial por clases de edad y sexo.

Este modelo está definido por medio de una matriz de probabilidades de transición por clases de edad desde un periodo de tiempo t a otro periodo de tiempo $t+1$. El periodo de tiempo o rango del intervalo de proyección adoptado es de un año. En este

caso la población de ciervo ha sido agrupada en treinta y tres clases de edad, trece para los machos y veinte para las hembras de acuerdo con la edad en años

En España un ciervo en libertad vive si es macho alrededor de 12 o 13 años y si es hembra, puede aunque raramente superar los 20 años (Sáenz de Buruaga, Carranza 2008). Para introducir en el modelo, fijamos una esperanza de vida de 13 años para los machos y 20 años para las hembras.

Del mismo modo para poder completar este modelo necesitamos conocer: la duración del estudio, la natalidad y las probabilidades de supervivencia para cada clase de edad. Con estos datos básicos, el modelo hace posible simular las variaciones de la población durante el tiempo que dura el estudio y planear las estrategias de gestión concentradas en mantener distribuciones estables, garantizando la sostenibilidad al extraer de la población el número exacto de animales en cada clase de edad. Generalmente, el concepto de estabilidad está asociado al concepto de perturbación: se considera un sistema estable si siempre vuelve a una posición de referencia o equilibrio después de sufrir una pequeña perturbación, de otra manera consideramos el sistema inestable (López, Ortuño et al. 2007).

En esta situación, un ciervo de sexo H o M contenido en la clase de edad i puede sobrevivir y progresar a la clase de edad $i+1$ en el intervalo de proyección $t, t+1$ hasta alcanzar la última clase de edad donde morirá. El número de ejemplares en cada clase de edad varía en cada proyección ya que algunos mueren y otros crecen hasta la clase de edad inmediatamente consecutiva.

Por lo tanto, en este modelo contaremos con las siguientes variables: P_{ji} (donde j es el sexo e i la clase de edad), es la probabilidad de que un animal de sexo j y clase i en el instante de tiempo t , se encuentre en la clase $i+1$ en el instante de tiempo $t+1$ y R_{ji} , que es la natalidad, es el número medio de crías de sexo j producidas por cada hembra que se encuentra en la clase de edad i . X_t y X_{t+1} , son los vectores que contienen el número de animales de cada sexo j en cada edad i en el momento inicial y final de la proyección respectivamente. Finalmente, el modelo queda definido por un sistema diferencial lineal homogéneo finito, donde A es la matriz cuadrada 33×33 de transiciones:

$$\vec{X}_{t+1} = A\vec{X}_t$$

$$A_{33 \times 33} = \begin{pmatrix} R_{F1} & R_{F2} & R_{F3} & R_{F4} & R_{F5} & R_{F6} & R_{F7} & \dots & R_{F19} & R_{F20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ P_{F1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & P_{F2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{F3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{F4} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{F5} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{F6} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{F7} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & P_{F19} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ R_{M1} & R_{M2} & R_{M3} & R_{M4} & R_{M5} & R_{M6} & R_{M7} & \dots & R_{M19} & R_{M20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & P_{M1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & P_{M2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{M3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{M4} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{M5} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{M6} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{M7} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & P_{M12} & 0 \end{pmatrix}$$

Como ya hemos demostrado en el desarrollo teórico de este tipo de modelos, realizando sucesivas proyecciones finalmente el vector de poblaciones converge a una distribución estable. Mantener esta distribución dentro de unos valores prefijados de densidad será uno de los objetivos.

Esta afirmación se basa en que para periodos de tiempo suficientemente largos el vector de distribución de edades en el instante $t+1$ es múltiplo escalar del vector de distribución t anterior, siendo el escalar precisamente el autovalor positivo y estrictamente dominante λ_1 de su matriz de Leslie. Esto quiere decir que cada grupo de edad aumenta o disminuye un $\alpha\%$ al pasar de t a $t+1$, estabilizando las proporciones entre las clases de edad para finalmente mantenerse en una proporción constante.

$$\vec{X}_t \simeq \lambda_1^t \vec{X}_0 \text{ y } \vec{X}_t \simeq \lambda_1 \vec{X}_{(t-1)}$$

$$\vec{X}_{t+1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_{1t} \\ \lambda_1 x_{2t} \\ \vdots \\ \lambda_1 x_{nt} \end{pmatrix}$$

$$\frac{x_{1t+1}}{x_{2t+1}} = \frac{\lambda_1 x_{1t}}{\lambda_1 x_{2t}}$$

Aplicado a este modelo en concreto podemos intuir que en un intervalo de tiempo suficientemente largo (n años) para alcanzar la estabilidad, las diferentes proyecciones de la población en cada instante de tiempo t serán:

$$\begin{aligned}
 \vec{X}_{t+1} &= \begin{pmatrix} R_{F1} \cdot x_{F1,t} + R_{F2} \cdot x_{F2,t} + \dots + R_{F20} \cdot x_{F20,t} \\ P_{F1} \cdot x_{F1,t} \\ P_{F2} \cdot x_{F2,t} \\ P_{F3} \cdot x_{F3,t} \\ P_{F4} \cdot x_{F4,t} \\ P_{F5} \cdot x_{F5,t} \\ P_{F6} \cdot x_{F6,t} \\ \vdots \\ P_{F18} \cdot x_{F18,t} \\ P_{F19} \cdot x_{F19,t} \\ R_{M1} \cdot x_{F1,t} + R_{M2} \cdot x_{F2,t} + \dots + R_{M20} \cdot x_{F20,t} \\ P_{M1} \cdot x_{M1,t} \\ P_{M2} \cdot x_{M2,t} \\ P_{M3} \cdot x_{M3,t} \\ P_{M4} \cdot x_{M4,t} \\ P_{M5} \cdot x_{M5,t} \\ P_{M6} \cdot x_{M6,t} \\ \vdots \\ P_{M11} \cdot x_{M11,t} \\ P_{M12} \cdot x_{M12,t} \end{pmatrix}; \vec{X}_{t+2} = \begin{pmatrix} R_{F1} \cdot x_{F1,t+1} + R_{F2} \cdot x_{F2,t+1} + \dots + R_{F20} \cdot x_{F20,t+1} \\ P_{F1} \cdot x_{F1,t+1} \\ P_{F2} \cdot x_{F2,t+1} \\ P_{F3} \cdot x_{F3,t+1} \\ P_{F4} \cdot x_{F4,t+1} \\ P_{F5} \cdot x_{F5,t+1} \\ P_{F6} \cdot x_{F6,t+1} \\ \vdots \\ P_{F18} \cdot x_{F18,t+1} \\ P_{F19} \cdot x_{F19,t+1} \\ R_{M1} \cdot x_{F1,t+1} + R_{M2} \cdot x_{F2,t+1} + \dots + R_{M20} \cdot x_{F20,t+1} \\ P_{M1} \cdot x_{M1,t+1} \\ P_{M2} \cdot x_{M2,t+1} \\ P_{M3} \cdot x_{M3,t+1} \\ P_{M4} \cdot x_{M4,t+1} \\ P_{M5} \cdot x_{M5,t+1} \\ P_{M6} \cdot x_{M6,t+1} \\ \vdots \\ P_{M11} \cdot x_{M11,t+1} \\ P_{M12} \cdot x_{M12,t+1} \end{pmatrix}; \dots; \vec{X}_{t+n} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot x_{F1,t+n-1} \\ \lambda_1 \cdot x_{F2,t+n-1} \\ \lambda_1 \cdot x_{F3,t+n-1} \\ \lambda_1 \cdot x_{F4,t+n-1} \\ \lambda_1 \cdot x_{F5,t+n-1} \\ \lambda_1 \cdot x_{F6,t+n-1} \\ \lambda_1 \cdot x_{F7,t+n-1} \\ \vdots \\ \lambda_1 \cdot x_{F19,t+n-1} \\ \lambda_1 \cdot x_{F20,t+n-1} \\ \lambda_1 \cdot x_{M1,t+n-1} \\ \lambda_1 \cdot x_{M2,t+n-1} \\ \lambda_1 \cdot x_{M3,t+n-1} \\ \lambda_1 \cdot x_{M4,t+n-1} \\ \lambda_1 \cdot x_{M5,t+n-1} \\ \lambda_1 \cdot x_{M6,t+n-1} \\ \lambda_1 \cdot x_{M7,t+n-1} \\ \vdots \\ \lambda_1 \cdot x_{M12,t+n-1} \\ \lambda_1 \cdot x_{M13,t+n-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Y la evolución de los autovectores específicos de cada clase de edad y del autovector dominante de la matriz λ_1 en el intervalo de tiempo suficientemente largo de n años, para conseguir la estabilidad de todos ellos será:

$$\lambda_{t+1} = \begin{pmatrix} \lambda_{F1,t+1} = x_{F1,t+1} / x_{F1,t} \\ \lambda_{F2,t+1} = x_{F2,t+1} / x_{F2,t} \\ \lambda_{F3,t+1} = x_{F3,t+1} / x_{F3,t} \\ \lambda_{F4,t+1} = x_{F4,t+1} / x_{F4,t} \\ \lambda_{F5,t+1} = x_{F5,t+1} / x_{F5,t} \\ \lambda_{F6,t+1} = x_{F6,t+1} / x_{F6,t} \\ \lambda_{F7,t+1} = x_{F7,t+1} / x_{F7,t} \\ \vdots \\ \lambda_{F19,t+1} = x_{F19,t+1} / x_{F19,t} \\ \lambda_{F20,t+1} = x_{F20,t+1} / x_{F20,t} \\ \lambda_{M1,t+1} = x_{M1,t+1} / x_{M1,t} \\ \lambda_{M2,t+1} = x_{M2,t+1} / x_{M2,t} \\ \lambda_{M3,t+1} = x_{M3,t+1} / x_{M3,t} \\ \lambda_{M4,t+1} = x_{M4,t+1} / x_{M4,t} \\ \lambda_{M5,t+1} = x_{M5,t+1} / x_{M5,t} \\ \lambda_{M6,t+1} = x_{M6,t+1} / x_{M6,t} \\ \lambda_{M7,t+1} = x_{M7,t+1} / x_{M7,t} \\ \vdots \\ \lambda_{M12,t+1} = x_{M12,t+1} / x_{M12,t} \\ \lambda_{M13,t+1} = x_{M13,t+1} / x_{M13,t} \end{pmatrix}; \lambda_{t+2} = \begin{pmatrix} \lambda_{F1,t+2} = x_{F1,t+2} / x_{F1,t+1} \\ \lambda_{F2,t+2} = x_{F2,t+2} / x_{F2,t+1} \\ \lambda_{F3,t+2} = x_{F3,t+2} / x_{F3,t+1} \\ \lambda_{F4,t+2} = x_{F4,t+2} / x_{F4,t+1} \\ \lambda_{F5,t+2} = x_{F5,t+2} / x_{F5,t+1} \\ \lambda_{F6,t+2} = x_{F6,t+2} / x_{F6,t+1} \\ \lambda_{F7,t+2} = x_{F7,t+2} / x_{F7,t+1} \\ \vdots \\ \lambda_{F19,t+2} = x_{F19,t+2} / x_{F19,t+1} \\ \lambda_{F20,t+2} = x_{F20,t+2} / x_{F20,t+1} \\ \lambda_{M1,t+2} = x_{M1,t+2} / x_{M1,t+1} \\ \lambda_{M2,t+2} = x_{M2,t+2} / x_{M2,t+1} \\ \lambda_{M3,t+2} = x_{M3,t+2} / x_{M3,t+1} \\ \lambda_{M4,t+2} = x_{M4,t+2} / x_{M4,t+1} \\ \lambda_{M5,t+2} = x_{M5,t+2} / x_{M5,t+1} \\ \lambda_{M6,t+2} = x_{M6,t+2} / x_{M6,t+1} \\ \lambda_{M7,t+2} = x_{M7,t+2} / x_{M7,t+1} \\ \vdots \\ \lambda_{M12,t+2} = x_{M12,t+2} / x_{M12,t+1} \\ \lambda_{M13,t+2} = x_{M13,t+2} / x_{M13,t+1} \end{pmatrix}; \dots; \lambda_1 = \lambda_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 = \lambda_{F1,t+n} = x_{F1,t+n} / x_{F1,t+n-1} \\ \lambda_1 = \lambda_{F2,t+n} = x_{F2,t+n} / x_{F2,t+n-1} \\ \lambda_1 = \lambda_{F3,t+n} = x_{F3,t+n} / x_{F3,t+n-1} \\ \lambda_1 = \lambda_{F4,t+n} = x_{F4,t+n} / x_{F4,t+n-1} \\ \lambda_1 = \lambda_{F5,t+n} = x_{F5,t+n} / x_{F5,t+n-1} \\ \lambda_1 = \lambda_{F6,t+n} = x_{F6,t+n} / x_{F6,t+n-1} \\ \lambda_1 = \lambda_{F7,t+n} = x_{F7,t+n} / x_{F7,t+n-1} \\ \vdots \\ \lambda_1 = \lambda_{F19,t+n} = x_{F19,t+n} / x_{F19,t+n-1} \\ \lambda_1 = \lambda_{F20,t+n} = x_{F20,t+n} / x_{F20,t+n-1} \\ \lambda_1 = \lambda_{M1,t+n} = x_{M1,t+n} / x_{M1,t+n-1} \\ \lambda_1 = \lambda_{M2,t+n} = x_{M2,t+n} / x_{M2,t+n-1} \\ \lambda_1 = \lambda_{M3,t+n} = x_{M3,t+n} / x_{M3,t+n-1} \\ \lambda_1 = \lambda_{M4,t+n} = x_{M4,t+n} / x_{M4,t+n-1} \\ \lambda_1 = \lambda_{M5,t+n} = x_{M5,t+n} / x_{M5,t+n-1} \\ \lambda_1 = \lambda_{M6,t+n} = x_{M6,t+n} / x_{M6,t+n-1} \\ \lambda_1 = \lambda_{M7,t+n} = x_{M7,t+n} / x_{M7,t+n-1} \\ \vdots \\ \lambda_1 = \lambda_{M12,t+n} = x_{M12,t+n} / x_{M12,t+n-1} \\ \lambda_1 = \lambda_{M13,t+n} = x_{M13,t+n} / x_{M13,t+n-1} \end{pmatrix}$$

Una vez alcanzada la estabilidad en el instante $t=n$, tanto del autovalor dominante λ_1 de la matriz de transición A , como de cada uno de los autovalores específicos de cada clase de edad λ_{ij} , podremos conocer la proporción de individuos que tendrá que haber dentro de cada clase de edad i para obtener una población total estable. Primero tendremos el vector de población estable X_n :

$$\vec{X}_n = \begin{pmatrix} x_{F1,n} \\ x_{F2,n} \\ x_{F3,n} \\ x_{F4,n} \\ x_{F5,n} \\ x_{F6,n} \\ x_{F7,n} \\ \vdots \\ x_{F19,n} \\ x_{F20,n} \\ x_{M1,n} \\ x_{M2,n} \\ x_{M3,n} \\ x_{M4,n} \\ x_{M5,n} \\ x_{M6,n} \\ x_{M7,n} \\ \vdots \\ x_{M12,n} \\ x_{M13,n} \end{pmatrix}$$

El número total de individuos en el instante n será:

$$\sum x_{ji,n} = x_{Total,n} = x_{F1,n} + x_{F2,n} + x_{F3,n} + x_{F4,n} + x_{F5,n} + x_{F6,n} + x_{F7,n} + \dots + x_{F19,n} + x_{F20,n} + \\ + x_{M1,n} + x_{M2,n} + x_{M3,n} + x_{M4,n} + x_{M5,n} + x_{M6,n} + x_{M7,n} + \dots + x_{M12,n} + x_{M13,n}$$

El vector de proporciones estables $X_n\%$, indicará finalmente el porcentaje de individuos que tendremos que mantener en cada una de las clases para lograr el objetivo de la estabilidad. Será este vector, el resultado de la relación del número de individuos dentro de cada clase en el instante n, entre el número total de individuos en el instante n:

$$\vec{X}_{\%,n} = \begin{pmatrix} x_{F1,\%} = x_{F1,n} / x_{Total,n} \\ x_{F2,\%} = x_{F2,n} / x_{Total,n} \\ x_{F3,\%} = x_{F3,n} / x_{Total,n} \\ x_{F4,\%} = x_{F4,n} / x_{Total,n} \\ x_{F5,\%} = x_{F5,n} / x_{Total,n} \\ x_{F6,\%} = x_{F6,n} / x_{Total,n} \\ x_{F7,\%} = x_{F7,n} / x_{Total,n} \\ \vdots \\ x_{F19,\%} = x_{F19,n} / x_{Total,n} \\ x_{F20,\%} = x_{F20,n} / x_{Total,n} \\ x_{M1,\%} = x_{M1,n} / x_{Total,n} \\ x_{M2,\%} = x_{M2,n} / x_{Total,n} \\ x_{M3,\%} = x_{M3,n} / x_{Total,n} \\ x_{M4,\%} = x_{M4,n} / x_{Total,n} \\ x_{M5,\%} = x_{M5,n} / x_{Total,n} \\ x_{M6,\%} = x_{M6,n} / x_{Total,n} \\ x_{M7,\%} = x_{M7,n} / x_{Total,n} \\ \vdots \\ x_{M12,\%} = x_{M12,n} / x_{Total,n} \\ x_{M13,\%} = x_{M13,n} / x_{Total,n} \end{pmatrix}$$

El siguiente paso a seguir con el modelo una vez conocido el vector de proporciones de la distribución estable para cada clase de edad, es introducir la densidad objetivo de la ordenación, a la que nombraremos como densidad de gestión D_g . Esta es, el número total de animales que queremos mantener en la población a lo largo del tiempo. Este valor será elegido por el gestor según su criterio y los objetivos que desee alcanzar, generalmente coincidirá con la capacidad óptima del medio, a la que conocemos en este trabajo como CO..

Por lo tanto, el vector de población estable X_{Dg} para la densidad de gestión elegida D_g será:

$$\vec{X}_{D_g} = \begin{pmatrix} x_{F1,D_g} = D_g \cdot x_{F1,\%} \\ x_{F2,D_g} = D_g \cdot x_{F2,\%} \\ x_{F3,D_g} = D_g \cdot x_{F3,\%} \\ x_{F4,D_g} = D_g \cdot x_{F4,\%} \\ x_{F5,D_g} = D_g \cdot x_{F5,\%} \\ x_{F6,D_g} = D_g \cdot x_{F6,\%} \\ x_{F7,D_g} = D_g \cdot x_{F7,\%} \\ \vdots \\ x_{F19,D_g} = D_g \cdot x_{F19,\%} \\ x_{F20,D_g} = D_g \cdot x_{F20,\%} \\ x_{M1,D_g} = D_g \cdot x_{M1,\%} \\ x_{M2,D_g} = D_g \cdot x_{M2,\%} \\ x_{M3,D_g} = D_g \cdot x_{M3,\%} \\ x_{M4,D_g} = D_g \cdot x_{M4,\%} \\ x_{M5,D_g} = D_g \cdot x_{M5,\%} \\ x_{M6,D_g} = D_g \cdot x_{M6,\%} \\ x_{M7,D_g} = D_g \cdot x_{M7,\%} \\ \vdots \\ x_{M12,D_g} = D_g \cdot x_{M12,\%} \\ x_{M13,D_g} = D_g \cdot x_{M13,\%} \end{pmatrix}$$

Siendo generalmente:

$$D_g = C.O.$$

Una vez conocido el vector de distribución estable de la población X_{D_g} para la densidad de gestión elegida (D_g), será necesario calcular las extracciones anuales de animales para poder mantener la población dentro de la densidad deseada, una vez haya sido sobrepasada esta por el crecimiento natural de la población. Para ello, implicamos el uso de las matrices de extracción, las cuales ya fueron utilizadas en el punto anterior.

De esta forma calcularemos el vector X_H , que contiene el número total de individuos por clases de edad y sexo que habrán de ser retirados antes de que comience un nuevo período reproductivo. Se necesita contar con dos datos iniciales: el vector de población objetivo o de gestión X_{D_g} y el vector de población existente, X_{t+1} , en la zona de estudio en el instante de tiempo $t+1$. Será el momento $t+1$ en el que se inicia la gestión, debido a que la población con su crecimiento normal ha sobrepasado

la carga de gestión prefijada. Por lo tanto, los esfuerzos de manejo se centrarán en mantener la población en la densidad de gestión.

$$\vec{X}_{t+1} > \vec{X}_{Dg}$$

Puesto que:

$$\vec{X}_t < \vec{X}_{Dg} < \vec{X}_{t+1}$$

Será necesario introducir desde este momento una matriz de extracciones al modelo del tipo:

$$\vec{X}_{t+1} = (I - H^*)A\vec{X}_t$$

Donde H^* es la matriz de extracciones del primer año de intervención para conducir la población de su densidad natural a su densidad forzada o densidad de gestión, siendo ahora:

$$\vec{X}_{t+1} = \vec{X}_{Dg}$$

Una vez realizado el primer manejo y estabilizada la proporción del vector de poblaciones para mantener constante la densidad y distribución de la población bastará con mantener una gestión constante del modo:

$$\vec{X}_{t+2} = (I - H)A\vec{X}_{t+1}; \vec{X}_{t+3} = (I - H)A\vec{X}_{t+2}; \dots; \vec{X}_{t+n} = (I - H)A\vec{X}_{t+n-1}$$

$$H = cte$$

$$\vec{X}_{t+1} = \vec{X}_{t+2} = \vec{X}_{t+3} = \dots = \vec{X}_{t+n}$$

5.2.2.2 Parametrización y aplicación del modelo

Al igual que en el caso anterior y siguiendo la metodología de analizar las diferentes variantes propuestas del modelo clásico de Leslie sobre los mismos casos prácticos, se procede a aplicar el hipotético caso real de gestión conocido sobre este modelo que simula el comportamiento de ambos sexos dentro de la población.

Nuevamente, el primer paso será representar todos los datos biológicos de la población en una tabla de vida (Tabla 5.20) adaptada al caso. Utilizando las mortalidades y natalidades (Tabla 5.2) disponibles para la zona de estudio para ambos sexos. Ahora, ya que se modelará ambas partes de la población, la tasa de reproducción nos servirá la media de crías macho y hembra producidas por cada

hembra reproductora, considerando el sex-ratio en el momento del nacimiento como de 1:1 (Soriguer 1994a).

Tabla 5.20. Tabla de vida para la población de ciervos de Quintos de Mora para $F_i=20$ y $M_i=13$

Clase de edad (F_i)	Sexo	Edad(años)	Supervivencia al inicio de la clase	Tasa de mortalidad	Tasa de Supervivencia	Tasa de reproducción
F_1	Hembra	0	1	0,12	0,88	0
F_2	Hembra	1	0,88	0,06	0,94	0,56
F_3	Hembra	2	0,83	0,03	0,97	0,56
F_4	Hembra	3	0,80	0,03	0,97	0,56
F_5	Hembra	4	0,78	0,03	0,97	0,56
F_6	Hembra	5	0,75	0,03	0,97	0,56
F_7	Hembra	6	0,73	0,03	0,97	0,56
F_8	Hembra	7	0,71	0,03	0,97	0,56
F_9	Hembra	8	0,69	0,03	0,97	0,56
F_{10}	Hembra	9	0,67	0,03	0,97	0,56
F_{11}	Hembra	10	0,65	0,03	0,97	0,56
F_{12}	Hembra	11	0,63	0,03	0,97	0,56
F_{13}	Hembra	12	0,61	0,03	0,97	0,56
F_{14}	Hembra	13	0,59	0,03	0,97	0,56
F_{15}	Hembra	14	0,57	0,03	0,97	0,56
F_{16}	Hembra	15	0,56	0,03	0,97	0,56
F_{17}	Hembra	16	0,54	0,03	0,97	0,56
F_{18}	Hembra	17	0,52	0,03	0,97	0,56
F_{19}	Hembra	18	0,51	0,03	0,97	0,56
F_{20}	Hembra	19	0,49	1	0	0,56
M_1	Macho	0	1	0,15	0,85	-
M_2	Macho	1	0,85	0,10	0,90	-
M_3	Macho	2	0,77	0,05	0,95	-
M_4	Macho	3	0,73	0,05	0,95	-
M_5	Macho	4	0,69	0,05	0,95	-
M_6	Macho	5	0,66	0,05	0,95	-
M_7	Macho	6	0,62	0,05	0,95	-
M_8	Macho	7	0,59	0,05	0,95	-
M_9	Macho	8	0,56	0,05	0,95	-
M_{10}	Macho	9	0,53	0,05	0,95	-
M_{11}	Macho	10	0,51	0,05	0,95	-
M_{12}	Macho	11	0,48	0,05	0,95	-
M_{13}	Macho	12	0,46	1	0,95	-

Fuente: Elaboración propia

Ahora, ya es posible elaborar la matriz A de transiciones o matriz de Leslie:

[illegible]

Por último, deberemos conocer la capacidad óptima de la población completa de “Quintos de Mora” que será la introducida en este modelo.

$$C.O. = 1400$$

a) Población por debajo de la Capacidad óptima o densidad de gestión.

A continuación, se analizará el comportamiento del modelo planteado con una vector inicial de población ficticio (Tabla 5.21) pero que se encuentre por debajo de la Capacidad óptima del medio, para este caso 1400 individuos. Al igual que en el ejemplo anterior el objetivo es mantener el número total de individuos estable cerca de la capacidad óptima, que será también la densidad de Gestión.

Tabla 5.21. Vector inicial de población a emplear en el supuesto a.

	Individuos
F1	53
F2	48
F3	33
F4	31
F5	22
F6	21
F7	18
F8	12
F9	10
F10	7
F11	10
F12	8
F13	5
F14	4
F15	5
F16	3
F17	4
F18	2
F19	2
F20	2
M1	53
M2	48
M3	33
M4	31
M5	22
M6	21
M7	20
M8	12

M9	10
M10	7
M11	10
M12	8
M13	5
Total	580

Introduciendo el vector inicial de población en el modelo, este arroja los siguientes resultados para la evolución de la población para ambos sexos en un período de tiempo $t=20$ años (Tabla 5.22A y Tabla 5.22B):

Tabla 5.22A. Evolución de la población según el modelo de Leslie para $t=20$ para ambos sexos

	X_t	X_{t+1}	X_{t+2}	X_{t+3}	X_{t+4}	X_{t+5}	X_{t+6}	X_{t+7}	X_{t+8}	X_{t+9}	X_{t+10}
F1	53	70	80	94	111	130	152	178	209	246	287
F2	48	47	62	70	83	98	114	134	157	184	216
F3	33	45	44	58	66	78	92	107	126	148	173
F4	31	32	44	43	56	64	76	89	104	122	144
F5	22	30	31	43	42	54	62	74	86	101	118
F6	21	21	29	30	42	41	52	60	72	83	98
F7	18	20	20	28	29	41	40	50	58	70	81
F8	12	17	19	19	27	28	40	39	49	56	68
F9	10	12	16	18	18	26	27	39	38	48	54
F10	7	10	12	16	17	17	25	26	38	37	47
F11	10	7	10	12	16	16	16	24	25	37	36
F12	8	10	7	10	12	16	16	16	23	24	36
F13	5	8	10	7	10	12	16	16	16	22	23
F14	4	5	8	10	7	10	12	16	16	16	21
F15	5	4	5	8	10	7	10	12	16	16	16
F16	3	5	4	5	8	10	7	10	12	16	16
F17	4	3	5	4	5	8	10	7	10	12	16
F18	2	4	3	5	4	5	8	10	7	10	12
F19	2	2	4	3	5	4	5	8	10	7	10
F20	2	2	2	4	3	5	4	5	8	10	7
M1	53	70	80	94	111	130	152	178	209	246	287
M2	48	45	60	68	80	94	111	129	151	178	209
M3	33	43	41	54	61	72	85	100	116	136	160
M4	31	31	41	39	51	58	68	81	95	110	129
M5	22	29	29	39	37	48	55	65	77	90	105
M6	21	21	28	28	37	35	46	52	62	73	86
M7	20	20	20	27	27	35	33	44	49	59	69
M8	12	19	19	19	26	26	33	31	42	47	56
M9	10	11	18	18	18	25	25	31	29	40	45

M10	7	10	10	17	17	17	24	24	29	28	38
M11	10	7	10	10	16	16	16	23	23	28	27
M12	8	10	7	10	10	15	15	15	22	22	27
M13	5	8	10	7	10	10	14	14	14	21	21
Total	580	678	788	917	1072	1251	1461	1707	1998	2343	2738

Tabla 5.22B. Evolución de la población según el modelo de Leslie para $t=20$ para ambos sexos

	X_{t+11}	X_{t+12}	X_{t+13}	X_{t+14}	X_{t+15}	X_{t+16}	X_{t+17}	X_{t+18}	X_{t+19}	X_{t+20}
F1	336	394	462	540	632	739	865	1014	1189	1391
F2	253	296	347	407	475	556	650	761	892	1046
F3	203	238	278	326	383	447	523	611	715	838
F4	168	197	231	270	316	372	434	507	593	694
F5	140	163	191	224	262	307	361	421	492	575
F6	114	136	158	185	217	254	298	350	408	477
F7	95	111	132	153	179	210	246	289	340	396
F8	79	92	108	128	148	174	204	239	280	330
F9	66	77	89	105	124	144	169	198	232	272
F10	52	64	75	86	102	120	140	164	192	225
F11	46	50	62	73	83	99	116	136	159	186
F12	35	45	49	60	71	81	96	113	132	154
F13	35	34	44	48	58	69	79	93	110	128
F14	22	34	33	43	47	56	67	77	90	107
F15	20	21	33	32	42	46	54	65	75	87
F16	16	19	20	32	31	41	45	52	63	73
F17	16	16	18	19	31	30	40	44	50	61
F18	16	16	16	17	18	30	29	39	43	49
F19	12	16	16	16	16	17	29	28	38	42
F20	10	12	16	16	16	16	16	28	27	37
M1	336	394	462	540	632	739	865	1014	1189	1391
M2	244	286	335	393	459	537	628	735	862	1011
M3	188	220	257	302	354	413	483	565	662	776
M4	152	179	209	244	287	336	392	459	537	629
M5	123	144	170	199	232	273	319	372	436	510
M6	100	117	137	162	189	220	259	303	353	414
M7	82	95	111	130	154	180	209	246	288	335
M8	66	78	90	105	124	146	171	199	234	274
M9	53	63	74	86	100	118	139	162	189	222
M10	43	50	60	70	82	95	112	132	154	180
M11	36	41	48	57	67	78	90	106	125	146
M12	26	34	39	46	54	64	74	86	101	119
M13	26	25	32	37	44	51	61	70	82	96
TOTAL	3209	3757	4402	5151	6029	7058	8263	9678	11332	13271

Representando gráficamente estos resultados (Figura 5.4) se ve nuevamente el crecimiento exponencial, más rápido esta vez al incluir machos y hembras en la simulación.

Figura 5.4. Crecimiento de la población de ambos sexos

Este crecimiento está marcado por el autovalor dominante de la matriz de transición λ_1 . Observando la evolución de los autovalores de cada año (Tabla 5.23A y Tabla 5.23B) y buscando el momento en que estos se estabilicen en λ_1 , según el método iterativo explicado en apartados anteriores conocemos el autovalor dominante de la matriz A.

Tabla 5.23A. Evolución del Autovector a lo largo de los años

	t	t+1	t+2	t+3	t+4	t+5	t+6	t+7	t+8	t+9	t+10
Autovalor (λ)	-	1,17	1,16	1,16	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17

Tabla 5.23B. Evolución del Autovector a lo largo de los años

	t+11	t+12	t+13	t+14	t+15	t+16	t+17	t+18	t+19	t+20
Autovalor (λ)	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17	1,17

Al igual que en ensayo de la matriz clásica del modelo de Leslie, el autovalor dominante de la matriz de transiciones para este caso es:

$$\lambda_1 = 1,17$$

Por último, solo resta conocer el vector de distribuciones estable para esta matriz de transiciones que incluye ambos sexos. Gracias al método de las iteraciones,

observando en que valores se estabilizan las proporciones de cada clase de edad a lo largo del tiempo, podemos conocer el citado vector de distribuciones (Tabla 5.24A y 5.24B).

Tabla 5.24A. Evolución del vector de proporciones

	X_t	X_{t+1}	X_{t+2}	X_{t+3}	X_{t+4}	X_{t+5}	X_{t+6}	X_{t+7}	X_{t+8}	X_{t+9}	X_{t+10}
F1	0,091	0,103	0,102	0,103	0,104	0,104	0,104	0,104	0,105	0,105	0,105
F2	0,083	0,069	0,079	0,076	0,077	0,078	0,08	0,079	0,079	0,079	0,079
F3	0,057	0,066	0,056	0,063	0,062	0,062	0,06	0,063	0,063	0,063	0,063
F4	0,053	0,047	0,056	0,047	0,052	0,051	0,05	0,052	0,052	0,052	0,053
F5	0,038	0,044	0,039	0,047	0,039	0,043	0,04	0,043	0,043	0,043	0,043
F6	0,036	0,031	0,037	0,033	0,039	0,033	0,04	0,035	0,036	0,035	0,036
F7	0,031	0,029	0,025	0,031	0,027	0,033	0,03	0,029	0,029	0,03	0,03
F8	0,021	0,025	0,024	0,021	0,025	0,022	0,03	0,023	0,025	0,024	0,025
F9	0,017	0,018	0,02	0,02	0,017	0,021	0,02	0,023	0,019	0,02	0,02
F10	0,012	0,015	0,015	0,017	0,016	0,014	0,02	0,015	0,019	0,016	0,017
F11	0,017	0,01	0,013	0,013	0,015	0,013	0,01	0,014	0,013	0,016	0,013
F12	0,014	0,015	0,009	0,011	0,011	0,013	0,01	0,009	0,012	0,01	0,013
F13	0,009	0,012	0,013	0,008	0,009	0,01	0,01	0,009	0,008	0,009	0,008
F14	0,007	0,007	0,01	0,011	0,007	0,008	0,01	0,009	0,008	0,007	0,008
F15	0,009	0,006	0,006	0,009	0,009	0,006	0,01	0,007	0,008	0,007	0,006
F16	0,005	0,007	0,005	0,005	0,007	0,008	0	0,006	0,006	0,007	0,006
F17	0,007	0,004	0,006	0,004	0,005	0,006	0,01	0,004	0,005	0,005	0,006
F18	0,003	0,006	0,004	0,005	0,004	0,004	0,01	0,006	0,004	0,004	0,004
F19	0,003	0,003	0,005	0,003	0,005	0,003	0	0,005	0,005	0,003	0,004
F20	0,003	0,003	0,003	0,004	0,003	0,004	0	0,003	0,004	0,004	0,003
M1	0,091	0,103	0,102	0,103	0,104	0,104	0,1	0,104	0,105	0,105	0,105
M2	0,083	0,066	0,076	0,074	0,075	0,075	0,08	0,076	0,076	0,076	0,076
M3	0,057	0,063	0,052	0,059	0,057	0,058	0,06	0,059	0,058	0,058	0,058
M4	0,053	0,046	0,052	0,043	0,048	0,046	0,05	0,047	0,048	0,047	0,047
M5	0,038	0,043	0,037	0,043	0,035	0,038	0,04	0,038	0,039	0,038	0,038
M6	0,036	0,031	0,036	0,031	0,035	0,028	0,03	0,03	0,031	0,031	0,031
M7	0,034	0,029	0,025	0,029	0,025	0,028	0,02	0,026	0,025	0,025	0,025
M8	0,021	0,028	0,024	0,021	0,024	0,021	0,02	0,018	0,021	0,02	0,02
M9	0,017	0,016	0,023	0,02	0,017	0,02	0,02	0,018	0,015	0,017	0,016
M10	0,012	0,015	0,013	0,019	0,016	0,014	0,02	0,014	0,015	0,012	0,014
M11	0,017	0,01	0,013	0,011	0,015	0,013	0,01	0,013	0,012	0,012	0,01
M12	0,014	0,015	0,009	0,011	0,009	0,012	0,01	0,009	0,011	0,009	0,01
M13	0,009	0,012	0,013	0,008	0,009	0,008	0,01	0,008	0,007	0,009	0,008

Tabla 5.24B. Evolución del vector de proporciones

	X_{t+11}	X_{t+12}	X_{t+13}	X_{t+14}	X_{t+15}	X_{t+16}	X_{t+17}	X_{t+18}	X_{t+19}	X_{t+20}
F1	0,105	0,105	0,105	0,105	0,105	0,105	0,105	0,105	0,105	0,105
F2	0,079	0,079	0,079	0,079	0,079	0,079	0,079	0,079	0,079	0,079
F3	0,063	0,063	0,063	0,063	0,064	0,063	0,063	0,063	0,063	0,063
F4	0,052	0,052	0,052	0,052	0,052	0,053	0,053	0,052	0,052	0,052
F5	0,044	0,043	0,043	0,043	0,043	0,043	0,044	0,044	0,043	0,043
F6	0,036	0,036	0,036	0,036	0,036	0,036	0,036	0,036	0,036	0,036
F7	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
F8	0,025	0,024	0,025	0,025	0,025	0,025	0,025	0,025	0,025	0,025
F9	0,021	0,02	0,02	0,02	0,021	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
F10	0,016	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017
F11	0,014	0,013	0,014	0,014	0,014	0,014	0,014	0,014	0,014	0,014
F12	0,011	0,012	0,011	0,012	0,012	0,011	0,012	0,012	0,012	0,012
F13	0,011	0,009	0,01	0,009	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
F14	0,007	0,009	0,007	0,008	0,008	0,008	0,008	0,008	0,008	0,008
F15	0,006	0,006	0,007	0,006	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007
F16	0,005	0,005	0,005	0,006	0,005	0,006	0,005	0,005	0,006	0,006
F17	0,005	0,004	0,004	0,004	0,005	0,004	0,005	0,005	0,004	0,005
F18	0,005	0,004	0,004	0,003	0,003	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004
F19	0,004	0,004	0,004	0,003	0,003	0,002	0,004	0,003	0,003	0,003
F20	0,003	0,003	0,004	0,003	0,003	0,002	0,002	0,003	0,002	0,003
M1	0,105	0,105	0,105	0,105	0,105	0,105	0,105	0,105	0,105	0,105
M2	0,076	0,076	0,076	0,076	0,076	0,076	0,076	0,076	0,076	0,076
M3	0,059	0,059	0,058	0,059	0,059	0,059	0,058	0,058	0,058	0,058
M4	0,047	0,048	0,047	0,047	0,048	0,048	0,047	0,047	0,047	0,047
M5	0,038	0,038	0,039	0,039	0,038	0,039	0,039	0,038	0,038	0,038
M6	0,031	0,031	0,031	0,031	0,031	0,031	0,031	0,031	0,031	0,031
M7	0,026	0,025	0,025	0,025	0,026	0,026	0,025	0,025	0,025	0,025
M8	0,021	0,021	0,02	0,02	0,021	0,021	0,021	0,021	0,021	0,021
M9	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017	0,017
M10	0,013	0,013	0,014	0,014	0,014	0,013	0,014	0,014	0,014	0,014
M11	0,011	0,011	0,011	0,011	0,011	0,011	0,011	0,011	0,011	0,011
M12	0,008	0,009	0,009	0,009	0,009	0,009	0,009	0,009	0,009	0,009
M13	0,008	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007

Estudiando los resultados se observa la estabilización de la proporción de las diferentes edades a lo largo de la simulación. Cuando estos valores permanecen invariables entre varios intervalos de tiempo consecutivos, se obtiene la proporción del autovector de la matriz de Leslie correspondiente al autovalor asociado λ_1 , estimada por el método iterativo (Tabla 5.25).

Tabla 5.25. Proporción estable de cada clase de edad con respecto a la población total.

Clase de edad	Proporción (%)
F1	10,5
F2	7,9
F3	6,3
F4	5,2
F5	4,3
F6	3,6
F7	3
F8	2,5
F9	2
F10	1,7
F11	1,4
F12	1,2
F13	1
F14	0,8
F15	0,7
F16	0,6
F17	0,5
F18	0,4
F19	0,3
F20	0,3
M1	10,5
M2	7,6
M3	5,8
M4	4,7
M5	3,8
M6	3,1
M7	2,5
M8	2,1
M9	1,7
M10	1,4
M11	1,1
M12	0,9
M13	0,7

Concluido este último proceso, ya se dispone de toda la información necesaria para planificar el manejo de esta población a través de una matriz tradicional de Leslie modificada para admitir ambos sexos. Conocida la capacidad óptima del medio, 1400 individuos, que en este caso coincide con la densidad de gestión, se puede estimar el vector óptimo de población $X_{\text{óptimo}}$:

$$\vec{X}_{Optimo} = \begin{pmatrix} x_{F1,optimo} = 0,105 * 1400 \\ x_{F2,optimo} = 0,079 * 1400 \\ x_{F3,optimo} = 0,063 * 1400 \\ x_{F4,optimo} = 0,052 * 1400 \\ x_{F5,optimo} = 0,043 * 1400 \\ x_{F6,optimo} = 0,036 * 1400 \\ x_{F7,optimo} = 0,030 * 1400 \\ x_{F8,optimo} = 0,025 * 1400 \\ x_{F9,optimo} = 0,020 * 1400 \\ x_{F10,optimo} = 0,017 * 1400 \\ x_{F11,optimo} = 0,014 * 1400 \\ x_{F12,optimo} = 0,012 * 1400 \\ x_{F13,optimo} = 0,010 * 1400 \\ x_{F14,optimo} = 0,008 * 1400 \\ x_{F15,optimo} = 0,007 * 1400 \\ x_{F16,optimo} = 0,006 * 1400 \\ x_{F17,optimo} = 0,005 * 1400 \\ x_{F18,optimo} = 0,004 * 1400 \\ x_{F19,optimo} = 0,003 * 1400 \\ x_{F20,optimo} = 0,003 * 1400 \\ x_{M1,optimo} = 0,105 * 1400 \\ x_{M2,optimo} = 0,076 * 1400 \\ x_{M3,optimo} = 0,058 * 1400 \\ x_{M4,optimo} = 0,047 * 1400 \\ x_{M5,optimo} = 0,038 * 1400 \\ x_{M6,optimo} = 0,031 * 1400 \\ x_{M7,optimo} = 0,025 * 1400 \\ x_{M8,optimo} = 0,021 * 1400 \\ x_{M9,optimo} = 0,017 * 1400 \\ x_{M10,optimo} = 0,014 * 1400 \\ x_{M11,optimo} = 0,011 * 1400 \\ x_{M12,optimo} = 0,009 * 1400 \\ x_{M13,optimo} = 0,007 * 1400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 147 \\ 111 \\ 88 \\ 73 \\ 60 \\ 50 \\ 42 \\ 35 \\ 28 \\ 24 \\ 20 \\ 17 \\ 14 \\ 11 \\ 10 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \\ 4 \\ 147 \\ 106 \\ 81 \\ 66 \\ 53 \\ 43 \\ 35 \\ 29 \\ 24 \\ 20 \\ 15 \\ 13 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Siendo el objetivo de la gestión estabilizar la población en una densidad de 1400 individuos y una vez conocido X_{Optimo} y observando su evolución en la Tabla 5.22A, el vector óptimo se encuentra entre X_{t+4} y X_{t+5} puesto que:

$$\vec{X}_{t+5} < \vec{X}_{Optimo} < \vec{X}_{t+6}$$

Nuevamente, con el objetivo de conseguir forzar la población hacia el vector X_{Optimo} será necesario realizar extracciones durante el período de tiempo $t+5$, por lo tanto:

$$\vec{X}_{t+6} = A\vec{X}_{t+5} \rightarrow \vec{X}_{Optimo} = (I - H^*)\vec{X}_{t+6} \rightarrow \vec{X}_{Optimo} = (I - H^*)A\vec{X}_{t+5}$$

Siendo H^* la matriz en cuya diagonal se introducen los porcentajes de las de extracciones, que habrá que aplicar solo el primer año de manejo, para llevar a la población del vector X_{t+6} al vector X_{Optimo} .

Puesto que las proporciones de la población en el momento de intervenir no han llegado aún a estabilizarse, es necesario calcular cada uno de los elementos de la matriz H^* de extracciones por separado para cada una de las clases de edad en ese primer aprovechamiento:

Para calcular esa matriz de extracciones H^* , tenemos en cuenta que en este caso:

$$X_{Objetivo} = (I - H^*)\vec{X}_{t+6}$$

Despejando H^* de la ecuación obtenemos que:

$$H^* = I - \frac{\vec{X}_{Objetivo}}{\vec{X}_{t+6}}$$

$$H^* = \left(\begin{array}{l} h_{F1}^* = 1 - x_{F1,Objetivo} / x_{F1,t+6} \\ h_{F2}^* = 1 - x_{F2,Objetivo} / x_{F2,t+6} \\ h_{F3}^* = 1 - x_{F3,Objetivo} / x_{F3,t+6} \\ h_{F4}^* = 1 - x_{F4,Objetivo} / x_{F4,t+6} \\ h_{F5}^* = 1 - x_{F5,Objetivo} / x_{F5,t+6} \\ h_{F6}^* = 1 - x_{F6,Objetivo} / x_{F6,t+6} \\ h_{F7}^* = 1 - x_{F7,Objetivo} / x_{F7,t+6} \\ h_{F8}^* = 1 - x_{F8,Objetivo} / x_{F8,t+6} \\ h_{F9}^* = 1 - x_{F9,Objetivo} / x_{F9,t+6} \\ h_{F10}^* = 1 - x_{F10,Objetivo} / x_{F10,t+6} \\ h_{F11}^* = 1 - x_{F11,Objetivo} / x_{F11,t+6} \\ h_{F12}^* = 1 - x_{F12,Objetivo} / x_{F12,t+6} \\ h_{F13}^* = 1 - x_{F13,Objetivo} / x_{F13,t+6} \\ h_{F14}^* = 1 - x_{F14,Objetivo} / x_{F14,t+6} \\ h_{F15}^* = 1 - x_{F15,Objetivo} / x_{F15,t+6} \\ h_{F16}^* = 1 - x_{F16,Objetivo} / x_{F16,t+6} \\ h_{F17}^* = 1 - x_{F17,Objetivo} / x_{F17,t+6} \\ h_{F18}^* = 1 - x_{F18,Objetivo} / x_{F18,t+6} \\ h_{F19}^* = 1 - x_{F19,Objetivo} / x_{F19,t+6} \\ h_{F20}^* = 1 - x_{F20,Objetivo} / x_{F20,t+6} \\ h_{M1}^* = 1 - x_{M1,Objetivo} / x_{M1,t+6} \\ h_{M2}^* = 1 - x_{M2,Objetivo} / x_{M2,t+6} \\ h_{M3}^* = 1 - x_{M3,Objetivo} / x_{M3,t+6} \\ h_{M4}^* = 1 - x_{M4,Objetivo} / x_{M4,t+6} \\ h_{M5}^* = 1 - x_{M5,Objetivo} / x_{M5,t+6} \\ h_{M6}^* = 1 - x_{M6,Objetivo} / x_{M6,t+6} \\ h_{M7}^* = 1 - x_{M7,Objetivo} / x_{M7,t+6} \\ h_{M8}^* = 1 - x_{M8,Objetivo} / x_{M8,t+6} \\ h_{M9}^* = 1 - x_{M9,Objetivo} / x_{M9,t+6} \\ h_{M10}^* = 1 - x_{M10,Objetivo} / x_{M10,t+6} \\ h_{M11}^* = 1 - x_{M11,Objetivo} / x_{M11,t+6} \\ h_{M12}^* = 1 - x_{M12,Objetivo} / x_{M12,t+6} \\ h_{M13}^* = 1 - x_{M13,Objetivo} / x_{M13,t+6} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} h_{F1}^* = 1 - 147 / 152 = 0,033 \\ h_{F1}^* = 1 - 111 / 114 = 0,026 \\ h_{F1}^* = 1 - 88 / 92 = 0,044 \\ h_{F1}^* = 1 - 73 / 76 = 0,040 \\ h_{F1}^* = 1 - 60 / 62 = 0,032 \\ h_{F1}^* = 1 - 50 / 52 = 0,038 \\ h_{F1}^* = 1 - 42 / 40 = 0^* \\ h_{F1}^* = 1 - 35 / 40 = 0,125 \\ h_{F1}^* = 1 - 28 / 27 = 0^* \\ h_{F1}^* = 1 - 24 / 25 = 0,040 \\ h_{F1}^* = 1 - 20 / 16 = 0^* \\ h_{F1}^* = 1 - 17 / 16 = 0^* \\ h_{F1}^* = 1 - 14 / 16 = 0,125 \\ h_{F1}^* = 1 - 11 / 12 = 0,083 \\ h_{F1}^* = 1 - 10 / 10 = 0^* \\ h_{F1}^* = 1 - 8 / 7 = 0^* \\ h_{F1}^* = 1 - 7 / 10 = 0,30 \\ h_{F1}^* = 1 - 6 / 8 = 0,25 \\ h_{F1}^* = 1 - 4 / 5 = 0,20 \\ h_{F1}^* = 1 - 4 / 4 = 0 \\ h_{F1}^* = 1 - 147 / 152 = 0,033 \\ h_{F1}^* = 1 - 106 / 111 = 0,045 \\ h_{F1}^* = 1 - 81 / 85 = 0,047 \\ h_{F1}^* = 1 - 66 / 68 = 0,030 \\ h_{F1}^* = 1 - 53 / 55 = 0,036 \\ h_{F1}^* = 1 - 43 / 46 = 0,065 \\ h_{F1}^* = 1 - 35 / 33 = 0^* \\ h_{F1}^* = 1 - 29 / 33 = 0,121 \\ h_{F1}^* = 1 - 24 / 25 = 0,04 \\ h_{F1}^* = 1 - 20 / 24 = 0,166 \\ h_{F1}^* = 1 - 15 / 16 = 0,063 \\ h_{F1}^* = 1 - 13 / 15 = 0,133 \\ h_{F1}^* = 1 - 10 / 14 = 0,286 \end{array} \right)$$

Los valores representados como 0* corresponden a los casos en que en el momento de la intervención alguna de las clases de edad aún no ha alcanzado los valores óptimos requeridos y, por lo tanto, no se les efectuarán extracciones en el primer manejo, en las sucesivas se le aplicarán las tasas de extracciones generales ya

que estos valores convergerán por si mismos a los niveles de densidad deseados (Tabla 5.26).

Tabla 5.26. Evolución de la población una vez realizadas las primeras extracciones

	X_{t+6}	X_{t+7}
F1	147	173
F2	111	129
F3	88	104
F4	73	85
F5	60	71
F6	50	58
F7	42	49
F8	35	41
F9	28	34
F10	24	27
F11	20	23
F12	17	19
F13	14	16
F14	11	14
F15	10	11
F16	8	10
F17	7	8
F18	6	7
F19	4	6
F20	4	4
M1	147	173
M2	106	125
M3	81	95
M4	66	77
M5	53	63
M6	43	50
M7	35	41
M8	29	33
M9	24	28
M10	20	23
M11	15	19
M12	13	14
M13	10	12
Total	1401	1642

Estabilizada la población, esta tiene el mismo crecimiento anual en todas sus clases por lo que las extracciones también serán calculadas de manera homogéneas para todas ellas:

$$H = 1 - \frac{\sum X_{t+6}}{\sum X_{t+7}} \rightarrow 1 - \frac{1401}{1642} = 0,147$$

El método para calcular los porcentajes de extracción a través de los autovalores es de la siguiente forma:

$$H = 1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}$$

Siendo:

λ_1 = Autovalor dominante

λ = Autovalor objetivo

Como ya sabemos, para este caso $\lambda_1=1,17$ y puesto que el objetivo es mantener a la población en los niveles de densidad del intervalo de tiempo anterior $\lambda=1$:

$$H = 1 - \frac{1}{1,17} = 0,145$$

$$0,145 \simeq 0,147$$

Para mantener la población en sus valores óptimos de carga, necesitaremos extraer aproximadamente el 14,8% de la población de una manera homogénea en todas sus clases anualmente. Obteniendo el vector de extracciones constante:

$$\vec{X}_H = \begin{pmatrix} x_{F1,H} = 173 * 0,145 \\ x_{F2,H} = 129 * 0,145 \\ x_{F3,H} = 104 * 0,145 \\ x_{F4,H} = 85 * 0,145 \\ x_{F5,H} = 71 * 0,145 \\ x_{F6,H} = 58 * 0,145 \\ x_{F7,H} = 49 * 0,145 \\ x_{F8,H} = 41 * 0,145 \\ x_{F9,H} = 34 * 0,145 \\ x_{F10,H} = 27 * 0,145 \\ x_{F11,H} = 23 * 0,145 \\ x_{F12,H} = 19 * 0,145 \\ x_{F13,H} = 16 * 0,145 \\ x_{F14,H} = 14 * 0,145 \\ x_{F15,H} = 11 * 0,145 \\ x_{F16,H} = 10 * 0,145 \\ x_{F17,H} = 8 * 0,145 \\ x_{F18,H} = 7 * 0,145 \\ x_{F19,H} = 6 * 0,145 \\ x_{F20,H} = 4 * 0,145 \\ x_{M1,H} = 173 * 0,145 \\ x_{M2,H} = 125 * 0,145 \\ x_{M3,H} = 95 * 0,145 \\ x_{M4,H} = 77 * 0,145 \\ x_{M5,H} = 63 * 0,145 \\ x_{M6,H} = 50 * 0,145 \\ x_{M7,H} = 41 * 0,145 \\ x_{M8,H} = 33 * 0,145 \\ x_{M9,H} = 28 * 0,145 \\ x_{M10,H} = 23 * 0,145 \\ x_{M11,H} = 19 * 0,145 \\ x_{M12,H} = 14 * 0,145 \\ x_{M13,H} = 12 * 0,145 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 19 \\ 15 \\ 12 \\ 10 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 25 \\ 18 \\ 14 \\ 11 \\ 9 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

El vector anual de extracciones estable X_{H_t} nos indica exactamente el número de animales de ambos sexos que se deben extraer anualmente (Tabla 5.27) para mantener la población dentro de los baremos establecidos.

Tabla 5.27. Extracciones anuales de machos y de hembras según de Leslie modificado 1

Clase F	Extracciones	Clase M	Extracciones
F1	25	M1	25
F2	19	M2	18
F3	15	M3	14
F4	12	M4	11
F5	10	M5	9
F6	8	M6	7
F7	7	M7	6
F8	6	M8	5
F9	5	M9	4
F10	4	M10	3
F11	3	M11	3
F12	3	M12	2
F13	2	M13	2
F14	2	M14	-
F15	2	M15	-
F16	1	M16	-
F17	1	M17	-
F18	1	M18	-
F19	1	M19	-
F20	1	M20	-
Total F	128	Total M	109
F+M	237		

Según el modelo de Leslie modificado obtendríamos 237 capturas anuales de animales: 109 machos y 126 hembras (Tabla 5.27). En la pirámide de edad (Figura 5.5), se observa una clara desviación de densidad entre ambos sexos debido a la mayor longevidad de las hembras y a la superior tasa de supervivencia de estas entre los saltos de clase.

Figura 5.5. Pirámide de edades del Vector óptimo según el modelo modificado de Leslie

b) Población por encima de la capacidad óptima o densidad de gestión

El siguiente supuesto analizado, nuevamente corresponde con el vector inicial de la población por encima de la capacidad óptima, necesitando calcular las extracciones necesarias para obtener el vector de distribución óptimo o de gestión. El vector de distribución X_t de la población igual a 2000 individuos, con el vector de población ya estabilizado, repitiendo así la simulación realizada con el modelo clásico de Leslie:

$$\vec{X}_t = \begin{pmatrix} x_{F1,t} = 2000 * 0,105 \\ x_{F2,t} = 2000 * 0,079 \\ x_{F3,t} = 2000 * 0,063 \\ x_{F4,t} = 2000 * 0,052 \\ x_{F5,t} = 2000 * 0,043 \\ x_{F6,t} = 2000 * 0,036 \\ x_{F7,t} = 2000 * 0,03 \\ x_{F8,t} = 2000 * 0,025 \\ x_{F9,t} = 2000 * 0,02 \\ x_{F10,t} = 2000 * 0,017 \\ x_{F11,t} = 2000 * 0,014 \\ x_{F12,t} = 2000 * 0,012 \\ x_{F13,t} = 2000 * 0,01 \\ x_{F14,t} = 2000 * 0,008 \\ x_{F15,t} = 2000 * 0,007 \\ x_{F16,t} = 2000 * 0,005 \\ x_{F17,t} = 2000 * 0,005 \\ x_{F18,t} = 2000 * 0,004 \\ x_{F19,t} = 2000 * 0,003 \\ x_{F20,t} = 2000 * 0,003 \\ x_{M1,t} = 2000 * 0,105 \\ x_{M2,t} = 2000 * 0,076 \\ x_{M3,t} = 2000 * 0,058 \\ x_{M4,t} = 2000 * 0,047 \\ x_{M5,t} = 2000 * 0,039 \\ x_{M6,t} = 2000 * 0,031 \\ x_{M7,t} = 2000 * 0,025 \\ x_{M8,t} = 2000 * 0,021 \\ x_{M9,t} = 2000 * 0,017 \\ x_{M10,t} = 2000 * 0,014 \\ x_{M11,t} = 2000 * 0,011 \\ x_{M12,t} = 2000 * 0,009 \\ x_{M13,t} = 2000 * 0,007 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 158 \\ 126 \\ 104 \\ 86 \\ 72 \\ 60 \\ 50 \\ 40 \\ 34 \\ 28 \\ 24 \\ 20 \\ 16 \\ 14 \\ 10 \\ 10 \\ 8 \\ 6 \\ 6 \\ 210 \\ 152 \\ 116 \\ 94 \\ 78 \\ 62 \\ 50 \\ 42 \\ 34 \\ 28 \\ 22 \\ 18 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Conocido el vector inicial del estudio X_t , lo comparamos con el vector objetivo de la ordenación, es decir el vector de la población estable cuyo número total de individuos es igual a la (Tabla 5.28) capacidad óptima, en este caso, como ya se ha

resuelto anteriormente, el número total de individuos igual a la capacidad de carga será de 1400.

Tabla 5.28. Vector inicial de la población y vector objetivo

	Vector Inicial estable de Población (X_i)	Vector objetivo (X_{Objetivo})
F1	210	147
F2	158	111
F3	126	88
F4	104	73
F5	86	60
F6	72	50
F7	60	42
F8	50	35
F9	40	28
F10	34	24
F11	28	20
F12	24	17
F13	20	14
F14	16	11
F15	14	10
F16	10	8
F17	10	7
F18	8	6
F19	6	4
F20	6	4
M1	210	147
M2	152	106
M3	116	81
M4	94	66
M5	78	53
M6	62	43
M7	50	35
M8	42	29
M9	34	24
M10	28	20
M11	22	15
M12	18	13
M13	14	10
Total	2002	1401

Continuando con el plan de extracciones a lo largo de cinco años, se calculan los vectores de población a lo largo del periodo de ordenación, X_t , X_{t+1} , X_{t+2} , X_{t+3} y X_{t+4} (Tabla 5.29) a partir del vector de extracción total X_{ht} :

$$\vec{X}_{ht} = \vec{X}_t - \vec{X}_{Objetivo} \rightarrow \vec{X}_{ht} = \frac{\vec{X}_{ht}}{5}$$

Para ello tenemos que cumplir que:

$$\begin{aligned}\vec{X}_{t+1} &= \vec{X}_t - \vec{X}_{ht} \\ \vec{X}_{t+2} &= \vec{X}_{t+1} - \vec{X}_{ht} \\ \vec{X}_{t+3} &= \vec{X}_{t+2} - \vec{X}_{ht} \\ \vec{X}_{t+4} &= \vec{X}_{t+3} - \vec{X}_{ht} \\ \vec{X}_{t+5} &= \vec{X}_{t+4} - \vec{X}_{ht}\end{aligned}$$

Tabla 5.29. Evolución de la población gestionada para alcanzar la densidad óptima

	X_t	X_{t+1}	X_{t+2}	X_{t+3}	X_{t+4}	X_{t+5}
F1	210	197	184	171	158	145
F2	158	149	140	131	122	113
F3	126	118	110	102	94	86
F4	104	98	92	86	80	74
F5	86	81	76	71	66	61
F6	72	68	64	60	56	52
F7	60	56	52	48	44	40
F8	50	47	44	41	38	35
F9	40	38	36	34	32	30
F10	34	32	30	28	26	24
F11	28	26	24	22	20	18
F12	24	23	22	21	20	19
F13	20	19	18	17	16	15
F14	16	15	14	13	12	11
F15	14	13	12	11	10	9
F16	10	10	10	10	10	10
F17	10	9	8	7	6	5
F18	8	8	8	8	8	8
F19	6	6	6	6	6	6
F20	6	6	6	6	6	6
M1	210	197	184	171	158	145
M2	152	143	134	125	116	107
M3	116	109	102	95	88	81
M4	94	88	82	76	70	64
M5	78	73	68	63	58	53
M6	62	58	54	50	46	42

M7	50	47	44	41	38	35
M8	42	39	36	33	30	27
M9	34	32	30	28	26	24
M10	28	26	24	22	20	18
M11	22	21	20	19	18	17
M12	18	17	16	15	14	13
M13	14	13	12	11	10	9
Total	2002	1882	1762	1642	1522	1402

Conocidos los vectores de población en el periodo establecido, se calculan los porcentajes de extracción a aplicar a través de la matriz de extracciones H para conseguirlo:

$$h_{t+n} = 1 - \frac{\vec{X}_{t+n}}{\vec{X}_{t+n-1} \cdot \lambda_1} \rightarrow 1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}$$

Siendo:

λ_1 = Autovalor dominante de la matriz A

λ = Autovalor modificado con las extracciones

Donde el valor de los autovalores modificados con las extracciones (Tabla 5.30) es calculado como resultado de:

$$\lambda_{t+1} = \frac{\vec{X}_{t+1}}{\vec{X}_t}$$

Tabla 5.30. Autovalores de la población bajo gestión

λ_{t+1}	λ_{t+2}	λ_{t+3}	λ_{t+4}	λ_{t+5}
0,94	0,94	0,93	0,93	0,92

El porcentaje de extracciones a introducir en la matriz de extracciones H al tener el vector de población una estructura estable será el mismo para todas las clases de edad. (Tabla 5.31).

Tabla 5.31. Porcentaje de Extracciones anuales

h_{t+1}	h_{t+2}	h_{t+3}	h_{t+4}	h_{t+5}
0,2	0,2	0,21	0,21	0,21

Con dichos porcentajes de extracción aplicados en el modelo, son obtenidos los siguientes vectores de capturas (Tabla 5.32) y evolución de la población (Figura 5.6) para cada uno de los años de la ordenación hasta alcanzar el vector objetivo X_{objetivo} .

Tabla 5.32. Vectores de extracciones para cada año del periodo de ordenación

	X_{t+1}	X_{t+2}	X_{t+3}	X_{t+4}	X_{t+5}
F1	49	48	47	46	45
F2	36	33	31	28	26
F3	31	30	30	29	29
F4	24	22	21	19	17
F5	20	19	18	17	17
F6	15	15	14	13	12
F7	14	14	14	14	14
F8	11	10	9	9	8
F9	11	10	9	8	7
F10	7	7	7	7	7
F11	7	7	7	7	7
F12	4	3	2	1	0
F13	4	4	4	4	4
F14	4	4	4	4	5
F15	3	3	3	3	3
F16	4	3	2	1	0
F17	1	2	3	4	5
F18	2	1	0	-1	-2
F19	2	2	2	2	2
F20	0	0	0	0	0
M1	49	48	47	46	45
M2	36	33	31	29	27
M3	28	27	26	25	23
M4	22	22	21	20	20
M5	16	16	15	14	14
M6	16	15	15	14	13
M7	12	11	10	10	9
M8	9	9	9	9	9
M9	8	7	6	5	5
M10	6	6	7	7	7
M11	6	5	4	3	2
M12	4	4	4	4	4
M13	4	4	4	4	4
Total	465	444	426	405	388

Figura 5.6. Evolución de la población hasta alcanzar la capacidad óptima

Una vez la población se encuentra en los valores de densidad buscados, bastará aplicar el vector de extracciones calculado en el apartado anterior para mantenerlo a estos niveles tantos intervalos de tiempo como sea necesario.

5.2.3 Comparación y valoración de los modelos de Leslie

A continuación, se realizará una comparativa entre los resultados obtenidos con el modelo clásico de Leslie (Leslie 1945) y su modificación para incluir ambos sexos dentro de la matriz de transiciones, también se va a realizar una valoración de las ventajas y desventajas de estos modelos iniciales y de su metodología asociada para poder emplearse como una herramienta útil en la gestión de poblaciones de fauna silvestre, que es el principal objetivo de este trabajo. De esta forma, se podrán valorar las mejoras necesarias para evolucionar el modelo hasta que cumpla con todos los requisitos para gestionar una población real.

5.2.3.1 Comparación entre el modelo inicial y su modificación 1

La diferencia entre los dos modelos utilizados para realizar las simulaciones de gestión en este apartado, es la inclusión o no inclusión de la parte masculina dentro de la matriz de transiciones A , comparando resultados se puede analizar de qué manera esto afecta a la complejidad de los cálculos y a la calidad de los resultados.

La primera comparativa, va a ser realizada sobre los resultados obtenidos para el vector objetivo de la gestión X_{Objetivo} (Tabla 5.33). Recordamos que en el modelo tradicional de Leslie solo se consiguen resultados para la población de hembras, por lo que estos valores para la parte masculina son extrapolados a partir de esta.

Tabla 5.33. Comparación entre Xobjetivo calculado con ambos modelos

	Xobj. modelo tradicional	Xobj Modelo 1
F1	136	147
F2	102	111
F3	82	88
F4	68	73
F5	56	60
F6	47	50
F7	39	42
F8	32	35
F9	27	28
F10	22	24
F11	18	20
F12	15	17
F13	13	14
F14	11	11
F15	8	10
F16	7	8
F17	6	7
F18	5	6
F19	4	4
F20	4	4
M1	136	147
M2	102	106
M3	82	81
M4	68	66
M5	56	53
M6	47	43
M7	39	35
M8	32	29
M9	27	24
M10	22	20
M11	18	15
M12	15	13
M13	13	10
M14	11	-
M15	8	-
M16	7	-
M17	6	-
M18	5	-
M19	4	-
M20	4	-
Total	1404	1401

La primera y más clara diferencia, es la falta de correspondencia entre las clases de edad de ambos modelos, lo que produce cambios sustanciales. El modelo clásico de Leslie extrapola los resultados de un sexo al otro, haciendo que estos siempre se correspondan a pesar de que para el caso que nos ocupa, como ya se ha explicado, no existe esta simetría, ya que los valores biológicos entre sexos difieren al igual que su esperanza de vida y la diferencia entre sus clases de edad. Por lo tanto, el modelo modificado resultaría más cercano a la realidad al permitir contemplar estas diferencias en el desarrollo de ambos sexos.

La no correspondencia entre los vectores objetivo y la evolución de estos lleva a que las extracciones estimadas sean diferentes (Tabla 5.34) para ambos modelos. El modelo inicial de Leslie en este caso, sobreestima la población de machos y por lo tanto también sus extracciones con respecto al modificado, por lo que, a la hora de un caso real de gestión, los resultados obtenidos pueden no coincidir con los esperados y causar una reducción indeseada de la población. Para el segundo supuesto, también se observan cambios en los resultados de las extracciones estimadas, pero en este caso son opuestas, ya que el modelo modificado de Leslie requiere de extracciones más elevadas que el tradicional para conseguir alcanzar el mismo objetivo, reducir la población progresivamente (Tabla 5.35), a pesar de estas diferencias, los resultados son muy similares.

Tabla 5.34. Comparación entre X_h para $X_t < C.O.$

	Xh modelo tradicional	Xh Modelo 1
F1	24	25
F2	18	19
F3	14	15
F4	12	12
F5	10	10
F6	8	8
F7	7	7
F8	6	6
F9	5	5
F10	4	4
F11	3	3
F12	3	3
F13	2	2
F14	2	2
F15	2	2
F16	1	1
F17	1	1
F18	1	1

F19	1	1
F20	1	1
M1	24	25
M2	18	18
M3	14	14
M4	12	11
M5	10	9
M6	8	7
M7	7	6
M8	6	5
M9	5	4
M10	4	3
M11	3	3
M12	3	2
M13	2	2
M14	2	-
M15	2	-
M16	1	-
M17	1	-
M18	1	-
M19	1	-
M20	1	-
Total	250	237

Tabla 5.35. Comparación entre X_h para $X_t > C.O.$

	Xt+1		Xt+2		Xt+3		Xt+4		Xt+5	
	Xh tradicional	Xh Modificado	Xh tradicional	Xh Modificado	Xh tradicional	Xh Modificado	Xh tradicional	Xh Modificado	Xh tradicional	Xh Modificado
F1	45	49	44	48	42	47	41	46	39	45
F2	34	36	32	33	31	31	29	28	27	26
F3	27	31	26	30	24	30	23	29	21	29
F4	22	24	22	22	21	21	20	19	19	17
F5	19	20	18	19	17	18	17	17	16	17
F6	15	15	14	15	13	14	12	13	11	12
F7	13	14	12	14	11	14	10	14	9	14
F8	10	11	10	10	11	9	11	9	11	8
F9	9	11	8	10	7	9	6	8	5	7
F10	8	7	8	7	8	7	8	7	8	7
F11	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7
F12	4	4	3	3	2	2	1	1	0	0
F13	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
F14	3	4	3	4	4	4	4	4	4	5
F15	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3
F16	3	4	3	3	3	2	3	1	3	0
F17	2	1	1	2	0	3	0	4	0	5
F18	1	2	1	1	1	0	1	-1	1	-2
F19	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
F20	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
M1	45	49	44	48	42	47	41	46	39	45
M2	34	36	32	33	31	31	29	29	27	27
M3	27	28	26	27	24	26	23	25	21	23
M4	22	22	22	22	21	21	20	20	19	20

M5	19	16	18	16	17	15	17	14	16	14
M6	15	16	14	15	13	15	12	14	11	13
M7	13	12	12	11	11	10	10	10	9	9
M8	10	9	10	9	11	9	11	9	11	9
M9	9	8	8	7	7	6	6	5	5	5
M10	8	6	8	6	8	7	8	7	8	7
M11	6	6	6	5	6	4	6	3	6	2
M12	4	4	3	4	2	4	1	4	0	4
M13	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
M14	3	-	3	-	4	-	4	-	4	-
M15	4	-	4	-	4	-	4	-	4	-
M16	3	-	3	-	3	-	3	-	3	-
M17	2	-	1	-	0	-	0	-	0	-
M18	1	-	1	-	1	-	1	-	1	-
M19	1	-	1	-	1	-	1	-	1	-
M20	1	-	1	-	1	-	1	-	1	-
Total	462	465	442	444	422	426	404	405	380	388

Completos los ensayos teóricos y la comparación entre sus resultados, podemos extraer las siguientes conclusiones para su empleo como modelo para gestionar poblaciones salvajes y como mejorarlo.

- Ventajas:
 - Representa la evolución de la población por clases de edad y sexo.
 - Fácil cálculo de los valores característicos de la matriz (autovalores y autovectores) gracias al método numérico iterativo.
 - Permite conocer la distribución estable de la población.
 - Metodología sencilla en la aproximación de los rendimientos de extracción.
- Inconvenientes:
 - Gran tamaño de las matrices, lo que dificulta trabajar con ellas.
 - Simula un crecimiento exponencial e infinito de la población, situación irreal en poblaciones de grandes ungulados.
 - Empleo de clases de edad. Estas clases de edad hacen imposible trabajar con poblaciones salvajes, ya que nunca se va a conocer la edad exacta de los individuos para poder introducirlos en el modelo correctamente.
 - Generalmente siempre se han empleado porcentajes de extracción constantes para todas las clases de edad.

Los modelos Matriciales de Leslie tradicionales o con algunas pequeñas modificaciones para incluir machos en el modelo o incluir factores de freno densodependientes, han sido empleados a lo largo de los años para simular y estudiar poblaciones de ungulados salvajes como alces (Lopatin, Rosolovsky 2002), ciervo de cola blanca (Walters 2001, Millspaugh, Skalski et al. 2009) o ciervo de cola negra (Gilbert, Raedeke et al. 2007), centrados generalmente la evolución histórica a largo plazo desde un punto de vista demográfico y generalmente simulando solo la parte femenina de la población (Jensen 1995, Walters 2001). Teniendo en cuenta estos trabajos, así como los ensayos realizados en este estudio, se analizan sus debilidades y fortalezas para ser empleados como modelo real para una gestión eficiente y

sostenida de una población De ungulados salvajes a través de un nuevo modelo más eficiente.

5.3 Modelo final: Modelo densodependiente con clases de calidad

Los modelos matriciales de Leslie más básicos para el estudio de poblaciones presentan claros inconvenientes para ser utilizados como una herramienta real por los gestores, es por ello que el principal objetivo de este trabajo en su conjunto es el de describir un nuevo modelo que sea útil para la gestión de cualquier población de ungulados silvestres (Martínez, Martín 2017).

Los modelos matriciales de proyección de poblaciones introducidos por Leslie (Leslie 1945) y modificados más tarde (Lefkovich 1965) para agrupar los organismos en categorías de estado en vez de categorías de edad, han sido ampliamente aplicados para analizar la evolución, el manejo y las extracciones en poblaciones salvajes (Caswell 2000). Este tipo de modelos, se han empleado para estudiar poblaciones de diferentes ungulados como: jabalí y gamo (Focardi, Toso et al. 1996), alce (Lopatin, Rosolovsky 2002) y varias clases de ciervos americanos, empleando para ello estructuras de edad por años (Jensen 1996) o clases de edad, considerando únicamente a la población femenina y su productividad (Jensen 1995, Walters 2001, Gilbert, Raedeke et al. 2007), o introduciendo ambos sexos en el mismo modelo (Jensen 2000), permitiendo de esta forma un sistema de variables vectoriales más detallado y con una mayor dimensión. Estos estudios basados en matrices de transición, presentan una serie de desventajas para ser empleados como una herramienta eficiente para simular una población real de ciervo, debido a que simulan un crecimiento exponencial continuo y sin ningún tipo de restricción o pretenden simular un crecimiento irreal basado en la curva logística (Jensen 1996) estando focalizadas en la capacidad de carga máxima del medio. Estos estudios han superado esta divergencia entre modelos matemáticos y el conocimiento empírico, introduciendo factores densodependientes, sin demasiado sentido ecológico como limitantes matemáticos para simplificar la explicación. La ecuación del modelo logístico ha sido el modelo teórico de crecimiento de poblaciones dominante, simulando una curva sigmoide asintóticamente limitada, pero esta curva presenta desventajas y limitantes (McCullough 1999). El modelo logístico (Trenkel 2001) asume una declinación continua y lineal de la función densodependiente para todo el rango de la variable cuando se produce el aumento del número total de individuos, no siendo este el comportamiento usual de poblaciones reales salvajes, ya que algunas de ellas presentan sus respuestas densodependientes solo cuando la suma de la población

total es muy cercana a la Capacidad de Carga Logística (K) (Bowyer, Vernon et al. 2014), alejando la curva del comportamiento real, por otro lado, desde el punto de vista matemático, se encuentran dificultades a la hora de aproximarla a una población específica.

Es por ello, que en este trabajo se trata de desarrollar un modelo que reduzca estos limitantes al mismo tiempo que pueda ser empleado en situaciones reales de manejo.

5.3.1 Clases de Calidad

El primer gran limitante observado en las simulaciones llevadas a cabo con el modelo de Leslie, es el empleo de clases de edad en años. En especies con una longevidad media, como son las especies de ungulados objeto de estudio, nos encontramos con elementos mejorables tanto desde el punto de vista matemático como desde el punto de vista práctico en su empleo sobre el terreno. El primero de ellos desde el punto de vista matemático es el gran tamaño de la matriz de transiciones A y por consiguiente de los vectores de población o de extracciones a emplear, lo que hace que el proceso de cálculo y la manejabilidad del modelo y de sus resultados sea lenta y engorrosa. Respecto al empleo de estos modelos en una población salvaje, existe el inconveniente de conocer la edad exacta de los animales para distribuirlos correctamente en el vector de clases de edad o en el vector de extracciones y aplicar la gestión sobre los individuos adecuados. Es imposible conocer exactamente la edad de un animal salvaje sin capturarlo, e incluso haciéndolo, sería necesario sacrificarlo para realizar estudios más profundos de desgaste dentario, anillos de crecimiento en las piezas dentales...etc. Todo lo anterior, hace inútiles este tipo de modelos tal como han sido planteados para otra cosa que no sean simulaciones en laboratorio, para ser útiles en situaciones de gestión reales es necesario que se puedan asignar los individuos a su categoría o clase, solamente siendo observados en su entorno natural.

Para comenzar, el elemento distintivo que se aprecia con mayor facilidad en el ciervo ibérico es la presencia o ausencia de cuerna durante la mayor parte del año, los machos desarrollan a partir de su primer año de vida cuernas de origen óseo renovables anualmente, por el contrario, las hembras carecen de ellas. En el ciervo macho adulto, se pueden distinguir de abajo a arriba los siguientes tipos de puntas, aunque no todas están presentes en todos los individuos: dos pares de luchaderas, un par de puntas centrales, y un número variable de puntas en la parte superior

denominada corona. En individuos de un año de edad, estas estructuras suelen consistir en un par de varas no ramificadas, aunque estas podrían presentar ya ramificaciones en caso de que su calidad genética y del medio fueran muy buenas. A partir del segundo año, se pueden ya encontrar ejemplares con entre 6 y 12 puntas, tendiendo a aumentar en número con el paso de los años. El máximo desarrollo en ejemplares ibéricos en libertad suele ocurrir en torno a los 7 u 8 años de edad, encontrando ejemplares cuyas cuernas pueden superar el metro de longitud y las 20 puntas. Aproximadamente desde los 9 años el animal entra en decadencia física, reduciéndose el número de puntas y tamaño de la cuerna hasta el momento de su muerte (Navarro Millas-Prendergast, Martín Fernández 2015).

Anatómicamente se pueden separar tanto machos como hembras en tres fases iguales, aunque de diferente duración para cada sexo (Figura 5.36), ya que las hembras son más longevas y acusan más levemente el paso de los años, estas etapas son: desarrollo, plenitud y decadencia. En el caso de los machos, se estima que terminan su desarrollo corporal entorno a los 5 o 6 años y que su plenitud física, reproductora y máximo desarrollo de su cuerna dure aproximadamente 4 años, es decir, alrededor de los 9 o 10 años de edad comienza su senescencia, no superando en condiciones naturales normales los 13 años de vida. Para las hembras, las etapas son las mismas, pero su duración es diferente. Una hembra generalmente en su segundo año de vida ha alcanzado su etapa de plenitud y podrá ser fecundada y reproducirse, aunque este hecho podría darse incluso desde el primer año de vida si las condiciones del individuo y del medio son muy favorables (Montoya Oliver 2012). Las hembras mantendrán esta condición reproductora hasta prácticamente el día de su muerte, pudiendo llegar incluso a los 20 años.

Figura 5.36. Duración de las diferentes etapas de la vida del ciervo en función del sexo (Navarro Millas-Prendergast, Martín Fernández 2015)

Basándonos en las modificaciones del modelo inicial de Leslie para poder agrupar individuos en las llamadas clases de estado, conocidas como matrices de Lefkovitch (Lefkovitch 1965) donde los individuos pueden mantener la clase entre un período de tiempo y el siguiente, proponemos el empleo de lo que denominaremos como “Clases de Calidad”, que nos permitirán asignar a cada individuo a su clase sobre el terreno sin capturarlo. Como ha quedado de manifiesto, existe mayor variabilidad en las etapas de desarrollo en los machos que en las hembras, por lo que la clasificación ha de ser diferente. Complementando las observaciones y examen de los animales en su medio con la bibliografía especializada (Soriguer 1994a) se proponen para el empleo del modelo sobre el ciervo ibérico siete clases de calidad, dos para hembras y cinco para machos. Estas distintas clases han sido asignadas utilizando diversos criterios, tales como: estado del desarrollo del cuerpo, desarrollo de la cuerna o comportamiento biológico.

5.3.1.1 Hembras:

Su clasificación viene determinada por su etapa de formación, es decir se distinguen individuos que no han alcanzado la madurez sexual de los que sí lo han hecho y por lo tanto ya están completamente formados. Dentro del primer grupo encontramos las llamadas “gabatas”, hembras de menos de un año de edad que se

diferenciarán por su pequeño tamaño y por qué las veremos generalmente salvo muerte de la misma acompañando a sus madres que son de tamaño muy superior.

En el segundo grupo se engloban el resto de hembras de la población, es decir, hembras con edades superiores a los dos años y con capacidad reproductora, cabe citar, que a no ser que las condiciones del medio y del individuo sean muy favorables las hembras entre uno y dos años de vida aún no tendrán la posibilidad de reproducirse (Montoya Oliver 1999), pero se incluyen en el grupo de reproductoras debido a su tamaño similar al resto, lo que las hace difícil de diferenciar de las reproductoras, mientras que por otra parte algunas de ellas serán ya reproductoras, por lo tanto a efectos prácticos a la hora de la toma de datos se incluirán en este grupo. Las hembras pertenecientes a esta clase se distinguirán por su desarrollo corporal parcial o totalmente completo y por ir en la mayoría de los casos acompañadas de cría.

5.3.1.2 Machos:

Estos presentan una mayor variabilidad y complejidad, especialmente en el desarrollo de su cuerna, por lo tanto, será necesario incluir un mayor número de clases de calidad que para las hembras. Por lo tanto, los machos van a ser agrupados en cinco clases de calidad en función de la etapa de la vida en la que se encuentre y calidad de su cuerna, la cual tiene muchas características distintivas, tales como: puntas, grosor, simetría, color, perlado...etc.

En la primera clase, se incluyen los machos que aún no han cumplido su primer año de edad, al igual que en la primera clase de las hembras se distinguirán por su pequeño tamaño, la ausencia de cuernas y por no separarse de su madre.

Pertenecerán a la segunda clase los denominados coloquialmente como “varetos”, animales que se encuentran entre su primer y segundo cumpleaños y que son poseedores de su primera cuerna, generalmente compuesta por dos varas sin ramificar, aunque en ocasiones pueden estar ramificadas, la principal característica de sus cuernas es la ausencia de “roseta”, que es un engrosamiento en la base de la cuerna, en la unión con los pivotes del cráneo, que aumenta en grosor a lo largo de los años a medida que el animal repone sus defensas. Su cuerpo es más pequeño que el del resto de los machos con cuerna y suelen verse acompañados de otros machos de su edad o de hembras, no participan aún en la reproducción.

La tercera clase corresponde a los machos que pueden ser ya reproductores, pero no han alcanzado aún ni su máximo desarrollo corporal ni de cuerna, estas deben estar ya ramificadas, presentando entre una sola ramificación y 4 puntas en los conocidos como “horquillones”, pudiendo ser confundidos con los mejores ejemplares de la clase anterior si no se atiende a otras características como la roseta y 12 puntas con rosetas bien definidas en los mejores ejemplares o en los más altos de la clase. Presentan un notable tamaño corporal, pero de complexión delgada y juvenil, se suelen observar generalmente en grupos de individuos de la misma edad y sexo.

La cuarta clase estará conformada por los individuos que han alcanzado su plenitud en el desarrollo corporal y de la cuerna, competirán activamente durante la berrea para ganarse el derecho a la reproducción. Sus cuernas deben presentar por encima de las 12 puntas y ser gruesas, largas y pesadas, sus cuerpos son grandes y fuertes. Excepto durante la época de celo donde se les podrá observar luchando por defender su harén de hembras, el resto del año se les encontrará en solitario o en pequeños grupos de dos o tres ejemplares con similares características.

En último lugar la quinta clase de calidad incluirá los llamados ejemplares senescentes, no suelen tomar parte ya en la reproducción ya que son desplazados por animales más jóvenes y fuertes. Su cuerna pierde longitud y ramificaciones, pero gana en grosor, su cuerpo grande y pesado en algunos casos con síntomas de debilidad, se caracteriza por el grosor de su cuello y su tendencia a llevar la cabeza agachada. Estos ejemplares suelen ser siempre observados en solitario en lugares de difícil acceso.

Las diferentes características que definen cada clase de calidad presentadas (Tabla 5.37), pueden ser reconocidos en el campo observando al animal desde la distancia, lo que favorece las tareas de censo y extracción de los individuos, eliminando el condicionante de no conocer la edad exacta de los mismos, del mismo modo que se reduce ostensiblemente la dimensión de las matrices y vectores a emplear.

Tabla 5.37. Características de las clases de calidad planteadas

Clase de calidad	Características	Rango de edad (Años)
Hembras		
F1	Hembras jóvenes no reproductoras	0 - 1
F2	Hembras adultas reproductoras	1 - 20
Machos		
M1	Machos añales, sin cuerna	0 - 1
M2	Primera cuerna, una o dos puntas	1 - 2
M3	Jóvenes reproductores, cuerna con varias puntas y roseta pero no gran tamaño corporal	2 - 5
M4	Machos maduros, máximo desarrollo del trofeo y gran tamaño de cuerpo	5 - 9
M5	Machos viejos, trofeo en decadencia, tamaño máximo del cuerpo pero menos fuertes que los maduros.	9 - 13

5.3.2 Nueva matriz de transiciones A

Definidas las diferentes clases de calidad en los que ha sido dividida la población, es el momento de introducir la nueva matriz de transiciones como resultado de esta modificación de la matriz del modelo inicial de Leslie.

Sin intervención humana, un individuo perteneciente a una clase de calidad i puede del mismo modo permanecer en dicha clase o progresar a la siguiente clase de calidad $i+1$ en el intervalo de proyección $(t, t+1)$, hasta alcanzar la última clase de calidad donde podrá permanecer o morir. El número de animales en cada clase cambia en cada intervalo de proyección, de tal manera que algunos mueren, otros se mantienen en la misma clase de calidad y otros crecen hasta la siguiente clase de calidad. Considerando P_{ij} , donde j es el sexo e i es el número de clase, como la probabilidad de que un animal en la clase i en el instante de tiempo t cambie a la clase $i+1$ en el instante de tiempo $t+1$. G_{ji} es la probabilidad de que un animal en la clase i en el instante t permanezca en la misma clase i en el instante de tiempo $t+1$ y R_{ji} es la fecundidad de las hembras, es decir, la media de machos o hembras producidos por una hembra adulta. Estas probabilidades de transición, se estiman relacionando la mortalidad y el tiempo que cada animal permanece en cada clase de calidad de la siguiente manera:

$$G_{ji} = \sigma_{ji}(1 - \gamma_{ji})$$

$$P_{ji} = \sigma_{ji}\gamma_{ji}$$

Donde σ_{ji} es la probabilidad de supervivencia y γ_{ji} la probabilidad de crecimiento (Caswell 2000) de una clase de calidad ji . En este trabajo se supone que el

crecimiento se producirá en uno de los años incluido dentro del rango de edades de la clase de edad (n), por lo tanto:

$$\gamma_{ji} = \frac{1}{n}$$

Como consecuencia la matriz de transiciones A resultante es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & R_{F2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{F1} & G_{F2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{M2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{M1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{M2} & G_{M3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{M3} & G_{M4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{M4} & G_{M5} \end{pmatrix}$$

El resultado es una matriz de transiciones 7×7 mucho más ajustada y manejable para realizar el estudio.

5.3.3 Tabla de vida y parametrización de la matriz

El objetivo de este trabajo es crear un modelo densodependiente con una serie de valores estándar que se pueda adaptar y ser empleado sobre cualquier población de ciervo ibérico. Para ello, se han determinado los dos puntos críticos en la curva de crecimiento de la población: estos son la capacidad de carga (C.C) y la capacidad óptima (C.O). Para obtener los valores biológicos necesarios para operar con la nueva matriz se han tenido en cuenta los datos procedentes del plan de gestión cinegética de Quintos de Mora (Navarro Millas-Prendergast, Martín Fernández 2015), obtenidos a lo largos de los años, estos datos incluyen número de crías, juveniles, adultos y sus ratios de mortalidad y natalidad. Para completar estos datos, se han empleado otros procedentes de la bibliografía especializada (Soriguer 1994a, Montoya Oliver 1999) y de diferentes publicaciones (Landete-Castillejos, Tomás, Gortázar et al. 2004, Rodríguez-Hidalgo, Gortazar et al. 2010). Procesando toda la información compilada, se han elaborado unos valores biológicos medios de referencia a introducir en el modelo para el estudio de poblaciones de ciervo ibérico, estos valores se diferencian en: valores bajo condiciones de densidad óptimas o bajo densidades próximas a la capacidad de carga del medio (Tabla 5.38 y Tabla 5.39) (Martinez, Martin 2017).

Tabla 5.38. Valores biológicos aplicados en el modelo en condiciones de capacidad óptima.

Natalidad (Crías/hembras reproductoras)	0,8
Sex ratio al nacimiento (M:H)	1:1
Mortalidad crías hembra	0,12
Mortalidad crías macho	0,15
Mortalidad hembras jóvenes	0,06
Mortalidad machos jóvenes	0,10
Mortalidad hembras adultas	0,03
Mortalidad macho adultos	0,05

Tabla 5.39. Valores biológicos aplicados en el modelo en condiciones de capacidad de carga.

Natalidad (Crías/hembras reproductoras)	0,36
Sex ratio al nacimiento (M:H)	1:1
Mortalidad crías hembra	0,34
Mortalidad crías macho	0,36
Mortalidad hembras jóvenes	0,10
Mortalidad machos jóvenes	0,14
Mortalidad hembras adultas	0,07
Mortalidad macho adultos	0,09

Con estos valores de referencia, se pueden elaborar las tablas de vida para las clases de calidad desarrolladas en el apartado anterior y para las dos condiciones posibles: densidades por debajo de C.O o cercanas C.C (Tablas 5.40 y Tabla 5.41).

Tabla 5.40. Tabla de vida para una población cuya densidad es igual o inferior a la capacidad óptima del medio

Clase de calidad	Sexo	Edad (años)	Duración (años)	Sup. al inicio de la clase	Tasa de mortalidad	Tasa de supervivencia	Gij	Pij	Tasa de reproducción
H1	Hembra	0-1	1	1	0,12	0,88	0	0,88	0
H2	Hembra	1-20	19	0,88	0,08	0,92	0,9174	0	0,8
M1	Macho	0-1	1	1	0,15	0,85	0	0,85	-
M2	Macho	1-2	1	0,85	0,1	0,9	0	0,9	-
M3	Macho	2-5	3	0,77	0,05	0,95	0,6333	0,3166	-
M4	Macho	5-9	4	0,66	0,05	0,95	0,7125	0,2375	-
M5	Macho	9-13	4	0,53	0,2875	0,7125	0,7125	0	-

Tabla 5.41. Tabla de vida para una población cuya densidad es igual la capacidad de carga del medio

Clase de calidad	Sexo	Edad (años)	Duración (años)	Sup. al inicio de la clase	Tasa de mortalidad	Tasa de supervivencia	Gij	Pij	Tasa de reproducción
H1	Hembra	0-1	1	1	0,34	0,66	0	0,66	0
H2	Hembra	1-20	19	0,66	0,12	0,88	0,88	0	0,36
M1	Macho	0-1	1	1	0,363	0,637	0	0,637	-
M2	Macho	1-2	1	0,64	0,136	0,864	0	0,864	-
M3	Macho	2-5	3	0,55	0,09	0,91	0,606	0,303	-
M4	Macho	5-9	4	0,41	0,09	0,91	0,6825	0,2275	-
M5	Macho	9-13	4	0,28	0,3175	0,6825	0,6825	0	-

Este estudio parte de la premisa de que poblaciones de ciervo ibérico cuyas densidades se encuentren en niveles iguales o inferiores a la capacidad óptima del medio presentaran valores biológicos muy cercanos a los presentados en la Tabla 5.38 y la Tabla 5.40, mientras que, si la densidad es igual a la capacidad de carga del medio, estos valores serán iguales a los indicados en la Tabla 5.39 y 5.41.

5.3.4 Densodependencia, Capacidad de carga y Capacidad óptima de una población

La densodependencia en poblaciones de fauna salvaje, puede ser resumida como una serie de mecanismos biológicos de respuesta que conducen a altas tasas de crecimiento de la población cuando la densidad es baja y bajas tasas de crecimiento de la población cuando la densidad es alta (Bergman, Paul F. Doherty et al. 2015). La ecuación logística, ha sido ampliamente utilizada para simular la evolución del crecimiento de poblaciones de animales salvajes con restricciones densodependientes (Williams, Nichols et al. 2002), mientras que en otras ocasiones ha sido modificada para introducir en su ecuación una Matriz de Leslie (Jensen 1995, Wam, Hofstad 2007) añadiendo realismo al conjunto del modelo, aunque estas aproximaciones están aún lejos de ser una herramienta útil en la gestión.

Uno de los principales objetivos de este trabajo es el desarrollo de un modelo densodependiente que se ajuste a la realidad de la población estudiada (Forchhammer M.C., Stenseth N.C. et al. 1998, Festa-Bianchet, Gaillard et al. 2003, Imperio, Focardi et al. 2012), este modelo pretende simular su evolución dependiendo de la competencia intraespecífica, por lo tanto, la gráfica resultante del número de individuos a lo largo del tiempo será una curva sigmoide, la cual es usualmente seguida por el crecimiento de este tipo de poblaciones salvajes (Wang, Hobbs et al. 2002, Ueno, Kaji et al. 2010), para ello deberán incluirse en la ecuación dos variables que se han diferenciado en este trabajo: la capacidad de carga del medio (C.C) y la capacidad óptima del medio (C.O).

El rango de estudio del crecimiento ha sido dividido en dos partes, la primera de ellas para simular el crecimiento de la población cuando su densidad está por debajo de la capacidad óptima, donde la población no encuentra competencia intraespecífica ni restricciones para su expansión y mantiene un crecimiento de tipo exponencial (Martinez, Martin 2017) y la segunda cuando la densidad se encuentra entre la capacidad óptima y a capacidad de carga del medio donde la población verá limitado su crecimiento a causa de la competencia entre individuos. Debido a la diferente

aproximación matemática, y buscando un comportamiento biológico conceptual de la población con diferente desarrollo, es necesario separar estos dos conceptos.

La capacidad óptima, es definida en este trabajo como el número de animales que pueden vivir en un área sin arriesgar la persistencia o degradar alguno de los componentes del ecosistema, incluyendo su propia población. Cuando la densidad de animales se encuentra por debajo de este punto, el crecimiento de la población no encuentra restricciones ecológicas.

Por otra parte, la capacidad de carga ha sido ampliamente utilizada en gestión de poblaciones salvajes. Definimos capacidad de carga, como la densidad en la que el hábitat no puede soportar más individuos y el crecimiento de la población es prácticamente igual a cero (Williams, Nichols et al. 2002). Se trata este de un punto crítico para la conceptualización del modelo, ya que altas densidades amenazan la persistencia de su propia población y de su hábitat. El daño sobre la cobertura vegetal, la aparición de un mayor número de enfermedades además de conflictos en la convivencia entre ungulados y humanos serán notables una vez la densidad supere la capacidad óptima y se irán agravando conforme se acerque a la capacidad de carga, llegando a alcanzar su peor momento en ese punto, donde en algún momento la población sufrirá una gran reducción debido a la aparición de enfermedades o a la ausencia de recursos (Fernández-Morán, Gómez et al. 1997, Gortázar, Acevedo et al. 2006, Oleaga, Casais et al. 2008) pudiendo llegar incluso a desaparecer.

A diferencia del cálculo de la capacidad óptima, para estimar la capacidad de carga o máxima capacidad de un área, se ha empleado un método matemático sencillo basado en la afirmación de que la natalidad desde C.O a C.C se reduce siguiendo una función parabólica (Figura 5.7). Esta afirmación, se fundamenta a partir de los modelos densodependientes tradicionales (Bowyer, Vernon et al. 2014) que plantean el inicio de esta evolución parabólica desde las densidades iniciales, adaptándola en este caso al nuevo modelo, iniciando pues esta respuesta en densidades superiores a la capacidad óptima. A través de una regresión se pueden aproximar bastante los resultados, ya que conocemos de antemano los valores de natalidad previsibles en CO y CC (Tabla 5.38 y Tabla 5.39) y mediante el estudio de campo podemos conocer los valores de natalidad actuales de la población estudiada. La regresión paramétrica utilizada es la siguiente:

$$N_x = aX^2 + b$$

Donde:

N_x = Natalidad a densidad X

a, b = Parámetros de ajuste

X = Actual número de individuos

Conociendo los valores de natalidad N_x , N_{CO} , N_{CC} y el número de individuos X y X_{CO} mediante la regresión se calcula el valor de X_{CC} .

Densidades de entre 20-25 individuos/100ha. para valores de capacidad óptima y de entre 30-35 individuos/100ha. para la capacidad de carga son considerados normales para poblaciones de ciervo ibérico en hábitat mediterráneo (Montoya Oliver 1999).

Figura 5.7. Ejemplo de la evolución de la natalidad ajustada en función de la densidad desde que la población sobrepasa la capacidad óptima hasta que alcanza la capacidad de carga.

Para simular el comportamiento sigmoide de la curva de crecimiento con un modelo matricial cuyos resultados se corresponden con un desarrollo puramente exponencial, es necesario introducir variables densodependiente dentro de ecuación. Este trabajo propone modificar la ecuación inicial del modelo de Leslie para obtener una función capaz de simular el comportamiento de la población con densidades por encima de la capacidad óptima hasta alcanzar la capacidad de carga, es decir, la segunda parte del sigmoide.

Se comienza por dividir la matriz original A, ya que los factores de densidad afectan a cada valor biológico en diferente proporción, esta división podría llevarse a

cabo en tantas submatrices como factores biológicos contenga la matriz inicial (Jensen 1995). En este trabajo se van a proponer tres submatrices que agruparán factores biológicos similares buscando incrementar la eficiencia del modelo al mismo tiempo que se reducen los elementos matemáticos sin sacrificar la precisión de los resultados, una de las ventajas de este modelo es que se puede adaptar en cada una de sus variables a cada caso en particular o al criterio del usuario, por lo tanto, estas divisiones son completamente flexibles al cambio.

Estas tres matrices propuestas son:

A_{nat} = Matriz de natalidad

A_{ym} = Matriz de mortalidad juvenil

A_{am} = Matriz de mortalidad en adultos

$$A_{nat} = \begin{pmatrix} 0 & R_{F2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{M2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A_{ym} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{F1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{M1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A_{am} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{F2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{M2} & G_{M3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{M3} & G_{M4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{M4} & G_{M5} \end{pmatrix}$$

Cada una de estas submatrices, es afectada por su propio factor densodependiente, llamados en este trabajo: factores densodependientes (D_{KX}). Por lo tanto, estos factores serán tres, al igual que el número de submatrices:

D_{natX} = Factor de natalidad a densidad X

D_{ymX} = Factor de mortalidad juvenil a densidad X

D_{amX} = Factor de mortalidad en adultos a densidad X

Estos factores densodependientes dependen de los valores biológicos de la población en capacidad óptima y en capacidad de carga, así como de su densidad actual (X) y son calculados de la siguiente manera:

K_{CO} = Valor biológico K en C.O

K_{CC} = Valor biológico K en C.C

D_{KCO} = Factor densodependiente de K valor biológico en C.O

D_{KCC} = Factor densodependiente de K valor biológico en C.C

Donde:

$$D_{KCO} = \frac{K_{CO}}{K_{CO}} = 1$$

$$D_{KCC} = \frac{K_{CC}}{K_{CO}}$$

Una vez que los factores de densidad en CO y en CC son conocidos, es necesario estimar los factores densodependientes en niveles de densidad intermedios y para ello se propone una regresión parabólica, esta alternativa, nuevamente puede ser sustituida por otra que se ajuste mejor a los parámetros de otra población, sin para ello, afectar a la operatividad del modelo, la regresión propuesta es la siguiente:

$$D_{KX} = aX^2 + b$$

Donde:

D_{KX} = Factor densodependiente de K valor biológico a densidad X

a, b = Parámetros de ajuste

X = Número actual de individuos

Calculándose los parámetros de ajuste a y b como resultado de:

$$a = \frac{D_{KCO} - b}{X_{CO}^2} = \frac{D_{KCC} - b}{X_{CC}^2}$$

$$b = \frac{X_{CC}^2 \cdot D_{KCO} - X_{CO}^2 \cdot D_{KCC}}{(X_{CC}^2 - X_{CO}^2)}$$

Siendo:

X_{CO} = Número de individuos en capacidad óptima

X_{CC} = Número de individuos en capacidad de carga

Finalmente, y de acuerdo con las propiedades de las matrices, el modelo inicial se modifica para simular el comportamiento de una población bajo restricciones densodependientes variables:

$$\vec{X}_{t+1} = (D_{natx} \cdot A_{nat} + D_{ymx} \cdot A_{ym} + D_{amx} \cdot A_{am}) \cdot \vec{X}_t$$

El crecimiento exponencial propio de densidades inferiores a la CO del medio con el crecimiento densodependiente correspondiente a densidades superiores la CO dentro de esta nueva ecuación se relacionarán de la siguiente manera:

$$Si \begin{cases} X_t \leq CO \rightarrow D_{KX} = 1 \\ X_t > CO \rightarrow D_{KX} = aX^2 + b \end{cases}$$

La introducción de estos factores densodependientes en el modelo original de Leslie genera curvas de crecimiento sigmoides, propias de este tipo de poblaciones salvajes, frente al clásico e irreal crecimiento exponencial ilimitado del modelo clásico de Leslie.

Figura 5.8. Curva de crecimiento sigmoide generada con el nuevo modelo comparado con una curva de crecimiento exponencial generada por el modelo clásico de Leslie para unos mismos valores iniciales

En la representación del ejemplo anterior (Figura 5.8), puede verse claramente la divergencia de resultados entre ambos modelos con valores iniciales idénticos una vez que el número de individuos supera la capacidad óptima del medio y la población se encuentra con limitantes densodependientes que frenan su crecimiento. El empleo de modelos que no tienen en cuenta este freno puede llevar a grandes errores en la gestión.

5.3.5 Población después de la reproducción y después de las extracciones

Otra de las nuevas aportaciones extraídas del modelo desarrollado en este trabajo es el poder conocer la evolución de la población dos veces al año, permitiendo conocer la variación cíclica anual. La primera de ellas en primavera, después del periodo donde la densidad de animales será la más alta del año y la segunda al final del invierno, después de la temporada de caza o de extracciones donde la densidad se encontrará con sus valores mínimos a lo largo del año. Esta información es indicadora del efecto de los nacimientos y de las extracciones, permitiendo al gestor asegurarse de que la densidad de gestión no es superada en ningún momento del año. Incorporando al sistema diferencial finito lineal y homogéneo la matriz de extracciones conocida E , siendo:

$$E = (I - H)$$

Donde I es la matriz identidad y $H = \text{diag. } (h_{F1}, h_{F2}, h_{M1}, \dots, h_{M5})$, es la matriz diagonal que incluye los porcentajes de extracción, es decir la fracción de cada clase de calidad a ser extraída. La incorporación de esta matriz de extracciones al despejar la ecuación inicial obtiene:

$$\begin{aligned}\vec{X}_{t+1} &= A\vec{X}_t \rightarrow \vec{X}_{D.R.t+1} = A\vec{X}_{D.R.t} \\ \vec{X}_{t+1} &= EA\vec{X}_t \rightarrow \vec{X}_{D.E.t+1} = EA\vec{X}_{D.E.t}\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\vec{X}_{D.E.t+1} &= E\vec{X}_{D.R.t+1} \\ \vec{X}_{D.R.t+1} &= A\vec{X}_{D.E.t}\end{aligned}$$

Siendo $X_{D.E.}$ y $X_{D.R.}$ los vectores columna que incluyen el número de animales ordenados por clases de calidad después del periodo reproductivo (D.R.) y después del periodo de extracciones (D.E.) en los intervalos de proyección consecutivos, t y $t+1$.

Conocida esta información inapreciable en el modelo clásico de Leslie que indica el tamaño de la población entre dos momentos del mismo intervalo de proyección, la gestión deberá dirigirse a no superar la densidad de gestión en el instante en que esta es máxima a lo largo del año, es decir, después de la reproducción (Figura 5.42).

Figura 5.42. Ejemplo de crecimiento de una población representado su variación anual entre después del periodo reproductivo y después del periodo de extracciones hasta alcanzar la densidad de gestión y ser mantenida en ese nivel mediante extracciones.

Tras esta demostración, queda de manifiesto que se obtienen datos de la densidad de animales dos veces al año, por lo tanto, se plantea la duda de cuál de las dos emplear como referencia para calcular el valor de los factores densodependientes D_{KX} que fueron explicados en el apartado anterior. Las dos alternativas son:

$$\vec{X}_{D.R.t} \text{ o } \vec{X}_{D.E.t}$$

Donde siempre:

$$\vec{X}_{D.R.t} > \vec{X}_{D.E.t}$$

Por lo tanto, en este trabajo se propone emplear la densidad anual más alta, es decir, la densidad después del período reproductivo para realizar los cálculos de los factores densodependientes y como referencia para la densidad de gestión requerida. De esta manera, se llevará a cabo una gestión más conservadora, ya que este punto sería el más crítico del año en cuanto a problemas derivados del número de individuos, asegurando que en ningún momento se van a superar las densidades críticas. Este problema está presente hasta ahora en la metodología del modelo clásico de Leslie y sus derivados.

5.3.6 Extracciones por la derecha o por la izquierda

Una vez despejados de la ecuación del modelo el estado de la población en dos instantes del mismo intervalo de proyección se abren nuevos interrogantes acerca de la matriz de extracciones E. Estos interrogantes giran alrededor de conocer la mejor alternativa para introducir estas extracciones en el modelo para calcular los porcentajes de extracción en una población real y saber con certeza en que instante estas deben ser llevadas a cabo sin que se produzcan errores que pueden conducir a no alcanzar ninguno de los objetivos planteados inicialmente con la gestión a realizar.

Generalmente, esta ecuación ha sido escrita como el producto por la izquierda entre la matriz de extracciones y la matriz de Leslie del siguiente modo (Caswell 2000):

$$n(t+1) = HAn(t)$$

Donde $n(t+1)$ es el vector de población en el instante de tiempo $(t+1)$, $n(t)$ es el vector de población en el instante t , A es la matriz de Leslie y $H = \text{diag.}(h_1, \dots, h_s)$ siendo h_s la proporción de individuos en el estado s que sobreviven a la extracción.

Tomando esta ecuación clásica para desarrollarla e introduciendo en la función la matriz E empleada en este estudio en lugar de la matriz H utilizada generalmente, se puede trabajar con porcentajes de extracción en lugar de con porcentajes de supervivencia.

Gracias a la división del intervalo de proyección de un año en los dos momentos significativos: después de la reproducción (D.R.) y después de la extracción (D.E.) hecha en este trabajo, se puede explicar las diferencias entre el producto de la matriz de extracciones por la derecha o por la izquierda. Ahora, los factores que están relacionados con la variación de cada uno de los estados desde el instante de tiempo t al instante $t+1$ son estudiados. Para comenzar, el producto por la izquierda entre la matriz de extracciones y la matriz de Leslie se analiza:

$$\vec{X}_{t+1} = EAX_t$$

$$\begin{pmatrix} X_{F1t+1} \\ X_{F2t+1} \\ X_{M1t+1} \\ X_{M2t+1} \\ X_{M3t+1} \\ X_{M4t+1} \\ X_{M5t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & R_{F2}(1-h_{F1}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{F1}(1-h_{F2}) & G_{F2}(1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{M2}(1-h_{M1}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{M1}(1-h_{M2}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{M2}(1-h_{M3}) & G_{M3}(1-h_{M3}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{M3}(1-h_{M4}) & G_{M4}(1-h_{M4}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{M4}(1-h_{M5}) & G_{M5}(1-h_{M5}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{F1t} \\ X_{F2t} \\ X_{M1t} \\ X_{M2t} \\ X_{M3t} \\ X_{M4t} \\ X_{M5t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 X_{F1t+1} &= R_{F2}(1-h_{F1})X_{F2t} \\
 X_{F2t+1} &= P_{F1}(1-h_{F2})X_{F1t} + G_{F2}(1-h_{F2})X_{F2t} \\
 X_{M1t+1} &= R_{M2}(1-h_{M1})X_{F2t} \\
 X_{M2t+1} &= P_{M1}(1-h_{M2})X_{M1t} \\
 X_{M3t+1} &= P_{M2}(1-h_{M3})X_{M2t} + G_{M3}(1-h_{M3})X_{M3t} \\
 X_{M4t+1} &= P_{M3}(1-h_{M4})X_{M3t} + G_{M4}(1-h_{M4})X_{M4t} \\
 X_{M5t+1} &= P_{M4}(1-h_{M5})X_{M4t} + G_{M5}(1-h_{M5})X_{M5t}
 \end{aligned}$$

Después de este análisis, se concluye que el producto por la izquierda de la matriz de extracciones E puede ser expresado como:

$$\begin{aligned}
 \vec{X}_{D,R,t+1} &= A\vec{X}_{D,E,t} \\
 \vec{X}_{D,E,t+1} &= E_{t+1}\vec{X}_{D,R,t+1} \\
 \vec{X}_{D,E,t+1} &= E_{t+1}A\vec{X}_{D,E,t}
 \end{aligned}$$

Se puede ver que, a través del producto por la izquierda, es necesario trabajar con valores de densidad de la población obtenidos después del periodo de extracciones, es decir, después del invierno de cada una de las proyecciones: t y t+1. Por su parte las extracciones son programadas y llevadas a cabo en la temporada de caza o de extracciones correspondiente con el intervalo de tiempo t+1.

El análisis de la otra alternativa, correspondiente con el producto por la derecha se resuelve a continuación:

$$\vec{X}_{t+1} = A E \vec{X}_t$$

$$\begin{pmatrix} X_{F1t+1} \\ X_{F2t+1} \\ X_{M1t+1} \\ X_{M2t+1} \\ X_{M3t+1} \\ X_{M4t+1} \\ X_{M5t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & R_{F2}(1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{F1}(1-h_{F1}) & G_{F2}(1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{M2}(1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{M1}(1-h_{M1}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{M2}(1-h_{M2}) & G_{M3}(1-h_{M3}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{M3}(1-h_{M3}) & G_{M4}(1-h_{M4}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{M4}(1-h_{M4}) & G_{M5}(1-h_{M5}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{F1t} \\ X_{F2t} \\ X_{M1t} \\ X_{M2t} \\ X_{M3t} \\ X_{M4t} \\ X_{M5t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
X_{F1t+1} &= R_{F2}(1-h_{F2})X_{F2t} \\
X_{F2t+1} &= P_{F1}(1-h_{F1})X_{F1t} + G_{F2}(1-h_{F2})X_{F2t} \\
X_{M1t+1} &= R_{M2}(1-h_{F2})X_{F2t} \\
X_{M2t+1} &= P_{M1}(1-h_{M1})X_{M1t} \\
X_{M3t+1} &= P_{M2}(1-h_{M2})X_{M2t} + G_{M3}(1-h_{M3})X_{M3t} \\
X_{M4t+1} &= P_{M3}(1-h_{M3})X_{M3t} + G_{M4}(1-h_{M4})X_{M4t} \\
X_{M5t+1} &= P_{M4}(1-h_{M4})X_{M4t} + G_{M5}(1-h_{M5})X_{M5t}
\end{aligned}$$

Al igual que en el caso anterior, el producto por la derecha de la matriz de extracciones es expresado como:

$$\begin{aligned}
\vec{X}_{D.R,t+1} &= A\vec{X}_{D.E,t} \\
\vec{X}_{D.E,t} &= \vec{X}_{D.R,t}E_t \\
\vec{X}_{D.R,t+1} &= AE_t\vec{X}_{D.R,t}
\end{aligned}$$

Al contrario de lo que ocurría con el producto por la izquierda, el producto por la derecha obliga a trabajar con valores de densidad de la población después de los periodos reproductivos (después del verano) y la temporada de caza o de extracciones se calcula y se aplica en el actual intervalo de proyección (temporada de extracciones t).

Como conclusión general de los resultados obtenidos, se puede decir que, para este tipo de poblaciones de ungulados, el producto por la izquierda aporta información del crecimiento de la población entre el final de dos inviernos consecutivos ($X_{D.E,t}$ y $X_{D.E,t+1}$) y los porcentajes de extracción son planeados para la siguiente temporada de extracciones (E_{t+1}). Por su parte, el producto por la derecha refleja datos entre dos otoños consecutivos ($X_{D.R,t}$ y $X_{D.R,t+1}$) y los porcentajes de extracción calculados se aplicarán en la temporada actual (E_t).

Existe la discusión de si el producto entre la matriz de Leslie y la matriz de extracciones debe ser escrita como el producto por la izquierda (HA) o por la derecha (AH) (Caswell 2000). El producto por la izquierda (HA) es el método comúnmente más aceptado (Doubleday 1975). El producto por la derecha será el empleado en este trabajo, ya que en este tipo de situaciones de gestión es mejor planear las extracciones en base al momento del año en que la población sea mayor, lo que se traduce en el momento después de la reproducción. Como consecuencia, la ecuación general del nuevo modelo con la matriz de extracciones E incluida será:

$$\vec{X}_{D.R.t+1} = (D_{natx} \cdot A_{nat} + D_{ymx} \cdot A_{ym} + D_{amx} \cdot A_{am}) \cdot E_t \cdot \vec{X}_{D.R.t}$$

5.3.7 Cálculo matemático de los parámetros de gestión y de las extracciones

Según las propiedades de las matrices, considerando una matriz A , de dimensiones $n \times n$, aparece el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A \begin{pmatrix} x_{F1} \\ \vdots \\ x_{M5} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_{F1} \\ \vdots \\ x_{M5} \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x_{F1} \\ \vdots \\ x_{M5} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} x_{F1} \\ \vdots \\ x_{M5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A - I\lambda) \begin{pmatrix} x_{F1} \\ \vdots \\ x_{M5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para cada valor de λ , nos encontramos con un sistema diferente de ecuaciones, centrándonos en aquellos sistemas con infinitas soluciones no triviales, para ello es necesario que:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Llevando esto a las siguientes definiciones ya conocidas:

Los autovalores de la matriz cuadrada A son todos los valores de λ para los cuales el sistema tiene infinitas soluciones no triviales:

$$(A - \lambda I) \begin{pmatrix} x_{F1} \\ \vdots \\ x_{M5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema, es el que conocíamos como Ecuación característica de la matriz.

De una forma equivalente, los autovalores de la matriz cuadrada A son todos los valores de λ para los cuales:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Si la matriz A es $n \times n$, tendrá n autovalores. Estos autovalores pueden repetirse o ser números complejos.

Siendo λ_0 un autovalor de la matriz cuadrada A . Un autovector de la matriz A asociado a ese autovalor λ_0 es cualquier solución $(x_{F1}, \dots, x_{M5})$ del sistema:

$$(A - \lambda_0 I) \begin{pmatrix} x_{F1} \\ \vdots \\ x_{M5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, existen infinitos autovectores asociados a cada autovalor.

En base a esta teoría matricial, se desarrollará la ecuación característica para cada una de las variantes contempladas en este trabajo. Estas dos variantes se refieren al producto entre la matriz de extracciones (E) y la matriz de transiciones (A), bien por la izquierda o bien por la derecha. De este modo, se tiene la posibilidad de despejar y aislar todos los factores que influyen en la evolución de la población para de esta manera conocer qué variables y de qué manera influyen en ellos, continuando con su estudio individualizado, ampliando la comprensión de la gestión.

Para comenzar, se necesita una matriz de transiciones A que pueda ser introducida dentro de la ecuación característica. Recordamos que la matriz de transiciones del modelo gracias a las propiedades de las mismas, había sido dividida en tres submatrices de la siguiente forma:

$$A = D_{natx} \cdot A_{nat} + D_{ymx} \cdot A_{ym} + D_{amx} \cdot A_{am}$$

Para facilitar los cálculos con la ecuación característica, y de nuevo en base a las propiedades de las matrices, es posible agrupar estas submatrices en una única matriz A donde:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & D_{natx} \cdot R_{F2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ymx} \cdot P_{F1} & D_{amx} \cdot G_{F2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{natx} \cdot R_{M2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{ymx} \cdot P_{M1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M2} & D_{amx} \cdot G_{M3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M3} & D_{amx} \cdot G_{M4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M4} & D_{amx} \cdot G_{M5} \end{pmatrix}$$

A continuación, se procederá al desarrollo de la ecuación característica dependiendo del producto entre la matriz A agrupada y la matriz E.

5.3.7.1 Parámetros y extracciones del producto por la izquierda

Siendo la ecuación del modelo con el producto de la matriz de extracciones por la izquierda:

$$\vec{X}_{t+1} = E A \vec{X}_t$$

Se desarrolla el producto entre las matrices A y E simplificándolas en una única matriz a la que llamaremos A*:

$$A^* = E \cdot A = (I - H) \cdot A$$

$$= \begin{pmatrix} (1-h_{F1}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-h_{M1}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-h_{M2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-h_{M3}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-h_{M4}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-h_{M5}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & D_{natx} \cdot R_{F2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ymx} \cdot P_{F1} & D_{amx} \cdot G_{F2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{natx} \cdot R_{M2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{ymx} \cdot P_{M1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M2} & D_{amx} \cdot G_{M3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M3} & D_{amx} \cdot G_{M4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M4} & D_{amx} \cdot G_{M5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1-h_{F1}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1-h_{F2}) & D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1-h_{M1}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot (1-h_{M2}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (1-h_{M3}) & D_{amx} \cdot G_{M3} \cdot (1-h_{M3}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot (1-h_{M4}) & D_{amx} \cdot G_{M4} \cdot (1-h_{M4}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot (1-h_{M5}) & D_{amx} \cdot G_{M5} \cdot (1-h_{M5}) \end{pmatrix}$$

Donde: h_{ji} : son los porcentajes de extracción en tanto por uno del sexo j y de la clase i . D_{KX} : son los factores densodependientes K a densidad X , por último, R_{Fi} , P_{ji} , G_{ji} : son los factores de reproducción, paso de clase y mantenimiento de clase respectivamente del sexo j y de la clase i . Como resultado de este producto la ecuación característica resultante es:

$$(A^* - \lambda I) \begin{pmatrix} x_{F1} \\ \vdots \\ x_{M5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

En la cual λ es el autovalor asociado con el autovector $(x_{F1}, \dots, x_{M5})$ e I es la matriz identidad que completa el sistema. En este trabajo se ha querido estudiar el autovalor no solo como indicativo del crecimiento de la población en su conjunto, sino como indicativo del crecimiento de cada una de las clases de calidad, para ello se sustituye λ por un vector formado por λ_{ji} , siendo j el sexo e i la clase:

$$\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_{F1} \\ \lambda_{F2} \\ \lambda_{M1} \\ \lambda_{M2} \\ \lambda_{M3} \\ \lambda_{M4} \\ \lambda_{M5} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 A \begin{pmatrix} x_{F1} \\ \vdots \\ x_{M5} \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} x_{F1} \\ \vdots \\ x_{M5} \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x_{F1} \\ \vdots \\ x_{M5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{F1} \\ \vdots \\ \lambda_{M5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{F1} \\ \vdots \\ x_{M5} \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x_{F1} \\ \vdots \\ x_{M5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{F1} \cdot x_{F1} \\ \vdots \\ \lambda_{F1} \cdot x_{M5} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x_{F1} \\ \vdots \\ x_{M5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_{F1} \cdot x_{F1} \\ \vdots \\ \lambda_{F1} \cdot x_{M5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Obteniendo como resultado esta ecuación característica modificada:

$$\left(A^* - I \begin{pmatrix} \lambda_{F1} \\ \vdots \\ \lambda_{M5} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_{F1} \\ \vdots \\ x_{M5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollando dicha ecuación se obtienen las siguientes siete ecuaciones:

$$-\lambda_{F1} \cdot x_{F1} + (D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1 - h_{F1})) \cdot x_{F2} = 0 \rightarrow \text{equ.1}$$

$$(D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F1} + (D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1 - h_{F2}) - \lambda_{F2}) \cdot x_{F2} = 0 \rightarrow \text{equ.2}$$

$$(D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{M1})) \cdot x_{F2} - \lambda_{M1} \cdot x_{M1} = 0 \rightarrow \text{equ.3}$$

$$(D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot (1 - h_{M2})) \cdot x_{M1} - \lambda_{M2} \cdot x_{M2} = 0 \rightarrow \text{equ.4}$$

$$(D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (1 - h_{M3})) \cdot x_{M2} + (D_{amx} \cdot G_{M3} \cdot (1 - h_{M3}) - \lambda_{M3}) \cdot x_{M3} = 0 \rightarrow \text{equ.5}$$

$$(D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot (1 - h_{M4})) \cdot x_{M3} + (D_{amx} \cdot G_{M4} \cdot (1 - h_{M4}) - \lambda_{M4}) \cdot x_{M4} = 0 \rightarrow \text{equ.6}$$

$$(D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot (1 - h_{M5})) \cdot x_{M4} + (D_{amx} \cdot G_{M5} \cdot (1 - h_{M5}) - \lambda_{M5}) \cdot x_{M5} = 0 \rightarrow \text{equ.7}$$

Obtenidas estas siete ecuaciones se despejarán todos los factores de interés para la gestión de una población de cada una de ellas:

Equ.1

$$x_{F1} = \frac{(D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1 - h_{F1})) \cdot x_{F2}}{\lambda_{F1}}$$

$$x_{F2} = \frac{\lambda_{F1} \cdot x_{F1}}{D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1 - h_{F1})}$$

$$\lambda_{F1} = \frac{(D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1 - h_{F1})) \cdot x_{F2}}{x_{F1}}$$

$$h_{F1} = 1 - \frac{\lambda_{F1} \cdot x_{F1}}{D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2}}$$

Equ.2

$$x_{F1} = \frac{-(D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1 - h_{F2}) - \lambda_{F2}) \cdot x_{F2}}{D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1 - h_{F2})}$$

$$x_{F2} = \frac{-(D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F1}}{(D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1 - h_{F2}) - \lambda_{F2})}$$

$$\lambda_{F2} = \frac{(D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F1}}{x_{F2}} + D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1 - h_{F2})$$

$$h_{F2} = 1 - \frac{\lambda_{F2} \cdot x_{F2}}{D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot x_{F1} + D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot x_{F2}}$$

Equ.3

$$x_{M1} = \frac{(D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{M1})) \cdot x_{F2}}{\lambda_{M1}}$$

$$x_{F2} = \frac{\lambda_{M1} \cdot x_{M1}}{D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{M1})}$$

$$\lambda_{M1} = \frac{(D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{M1})) \cdot x_{F2}}{x_{M1}}$$

$$h_{M1} = 1 - \frac{\lambda_{M1} \cdot x_{M1}}{D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2}}$$

Equ.4

$$x_{M1} = \frac{\lambda_{M2} \cdot x_{M2}}{D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot (1 - h_{M2})}$$

$$x_{M2} = \frac{(D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot (1 - h_{M2})) \cdot x_{M1}}{\lambda_{M2}}$$

$$\lambda_{M2} = \frac{(D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot (1 - h_{M2})) \cdot x_{M1}}{x_{M2}}$$

$$h_{M2} = 1 - \frac{\lambda_{M2} \cdot x_{M2}}{D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot x_{M1}}$$

Equ.5

$$\begin{aligned}
 x_{M2} &= \frac{-(D_{amx} \cdot G_{M3} \cdot (1-h_{M3}) - \lambda_{M3}) \cdot x_{M3}}{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (1-h_{M3})} \\
 x_{M3} &= \frac{-(D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (1-h_{M3})) \cdot x_{M2}}{(D_{amx} \cdot G_{M3} \cdot (1-h_{M3}) - \lambda_{M3})} \\
 \lambda_{M3} &= \frac{(D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (1-h_{M3})) \cdot x_{M2}}{x_{M3}} + D_{amx} \cdot G_{M3} \cdot (1-h_{M3}) \\
 h_{M3} &= 1 - \frac{\lambda_{M3} \cdot x_{M3}}{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot x_{M2} + D_{amx} \cdot G_{M3} \cdot x_{M3}}
 \end{aligned}$$

Equ.6

$$\begin{aligned}
 x_{M3} &= \frac{-(D_{amx} \cdot G_{M4} \cdot (1-h_{M4}) - \lambda_{M4}) \cdot x_{M4}}{D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot (1-h_{M4})} \\
 x_{M4} &= \frac{-(D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot (1-h_{M4})) \cdot x_{M3}}{(D_{amx} \cdot G_{M4} \cdot (1-h_{M4}) - \lambda_{M4})} \\
 \lambda_{M4} &= \frac{(D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot (1-h_{M4})) \cdot x_{M3}}{x_{M4}} + D_{amx} \cdot G_{M4} \cdot (1-h_{M4}) \\
 h_{M4} &= 1 - \frac{\lambda_{M4} \cdot x_{M4}}{D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot x_{M3} + D_{amx} \cdot G_{M4} \cdot x_{M4}}
 \end{aligned}$$

Equ.7

$$\begin{aligned}
 x_{M4} &= \frac{-(D_{amx} \cdot G_{M5} \cdot (1-h_{M5}) - \lambda_{M5}) \cdot x_{M5}}{D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot (1-h_{M5})} \\
 x_{M5} &= \frac{-(D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot (1-h_{M5})) \cdot x_{M4}}{(D_{amx} \cdot G_{M5} \cdot (1-h_{M5}) - \lambda_{M5})} \\
 \lambda_{M5} &= \frac{(D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot (1-h_{M5})) \cdot x_{M4}}{x_{M5}} + D_{amx} \cdot G_{M5} \cdot (1-h_{M5}) \\
 h_{M5} &= 1 - \frac{\lambda_{M5} \cdot x_{M5}}{D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot x_{M4} + D_{amx} \cdot G_{M5} \cdot x_{M5}}
 \end{aligned}$$

Examinando los resultados obtenidos, es claro que cada una de las clases de edad está en función de su clase inmediatamente anterior, mientras que las dos primeras clases (F_1 y M_1), lo están por el número de hembras reproductoras y sus variables de supervivencia. Por su parte, son ahora ya conocidas las fórmulas para

calcular el porcentaje de extracciones para cada clase por separado (h_{ji}), en función del crecimiento que se busque de cada una de ellas λ_{ji} , y viceversa. Calculando valores de λ_{ji} para cada una de las clases de forma individual, es posible también conocer el autovalor dominante λ de la matriz A^* a través de la siguiente relación:

$$\lambda \cdot \sum_{M5}^{F1} \vec{X}_{ji} = \sum_{M5}^{F1} (\vec{\lambda}_{ji} \cdot \vec{X}_{ji})$$

$$\lambda = \frac{\sum_{M5}^{F1} (\vec{\lambda}_{ji} \cdot \vec{X}_{ji})}{\sum_{M5}^{F1} \vec{X}_{ji}}$$

De una forma genérica, las fórmulas para calcular el porcentaje de extracciones, estableciendo paralelismos entre el autovalor dominante de la matriz A y el autovalor de cada una de las clases por separado, pueden ser sintetizadas como:

$$\lambda' \vec{X} = (I - H) A \vec{X} \rightarrow \lambda'_{ji} x_{ji} = (1 - h_{ji}) \lambda_{ji} x_{ji}$$

$$A \vec{X} = \left(\frac{1}{I - H} \right) \lambda' \vec{X} \rightarrow \lambda_{ji} x_{ji} = \left(\frac{1}{1 - h_{ji}} \right) \lambda'_{ji} x_{ji}$$

Donde:

$$\lambda = \left(\frac{1}{I - H} \right) \lambda' \rightarrow \lambda_{ji} = \left(\frac{1}{1 - h_{ji}} \right) \lambda'_{ji}$$

$$\lambda = \frac{\lambda'}{I - H} \rightarrow \lambda_{ji} = \frac{\lambda'_{ji}}{1 - h_{ji}}$$

Siendo λ' y λ'_{ji} el autovalor dominante de la matriz A modificada con las extracciones que conocernos como matriz A^* y el autovalor de crecimiento modificado de la clase ji respectivamente. Por su parte H , es la matriz diagonal de extracciones que contiene los porcentajes de extracción para cada clase, h_{ji} , que son calculados como resultado de:

$$\lambda' = \lambda (1 - H) \rightarrow \lambda'_{ji} = \lambda_{ji} (1 - h_{ji})$$

$$\lambda' = \lambda - \lambda H \rightarrow \lambda'_{ji} = \lambda_{ji} - \lambda_{ji} h_{ji}$$

$$\lambda H = \lambda - \lambda' \rightarrow \lambda_{ji} h_{ji} = \lambda_{ji} - \lambda'_{ji}$$

$$H = \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda} \rightarrow h_{ji} = \frac{\lambda_{ji} - \lambda'_{ji}}{\lambda_{ji}}$$

$$H = 1 - \frac{\lambda'}{\lambda} \rightarrow h_{ji} = 1 - \frac{\lambda'_{ji}}{\lambda_{ji}}$$

Recordamos que, según lo demostrado con anterioridad, cuando trabajamos con el producto por la izquierda de la matriz de extracciones se deberán introducir en el modelo valores de densidad obtenidos o calculados después del periodo de extracciones (D.E.).

5.2.7.2 Parámetros y extracciones del producto por la derecha

El segundo caso estudiado se trata del producto de la matriz de extracciones por la derecha:

$$\vec{X}_{t+1} = A E \vec{X}_t$$

Al igual que en el supuesto primero, se desarrolla el producto entre las matrices A y E simplificándolas en una única matriz a la que llamaremos A*:

$$A^* = A \cdot E =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & D_{natx} \cdot R_{F2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ymx} \cdot P_{F1} & D_{amx} \cdot G_{F2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{natx} \cdot R_{M2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{ymx} \cdot P_{M1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M2} & D_{amx} \cdot G_{M3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M3} & D_{amx} \cdot G_{M4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M4} & D_{amx} \cdot G_{M5} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1-h_{F1}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-h_{M1}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-h_{M2}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-h_{M3}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-h_{M4}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-h_{M5}) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1-h_{F1}) & D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot (1-h_{M1}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (1-h_{M2}) & D_{amx} \cdot G_{M3} \cdot (1-h_{M3}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot (1-h_{M3}) & D_{amx} \cdot G_{M4} \cdot (1-h_{M4}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot (1-h_{M4}) & D_{amx} \cdot G_{M5} \cdot (1-h_{M5}) & 0 \end{pmatrix}$$

Y continuando con la misma metodología ya expuesta en el apartado anterior, se llega a la ecuación característica modificada:

$$\left(A^* - I \begin{pmatrix} \lambda_{F1} \\ \vdots \\ \lambda_{M5} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_{F1} \\ \vdots \\ x_{M5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que nuevamente, con su desarrollo se llega a las siete ecuaciones que incluyen todos los parámetros que afectan a la evolución de la población objeto de estudio:

$$-\lambda_{F1} \cdot x_{F1} + (D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2} = 0 \rightarrow \text{equ.1}$$

$$(D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1 - h_{F1})) \cdot x_{F1} + (D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1 - h_{F2}) - \lambda_{F2}) \cdot x_{F2} = 0 \rightarrow \text{equ.2}$$

$$(D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2} - \lambda_{M1} \cdot x_{M1} = 0 \rightarrow \text{equ.3}$$

$$(D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot (1 - h_{M1})) \cdot x_{M1} - \lambda_{M2} \cdot x_{M2} = 0 \rightarrow \text{equ.4}$$

$$(D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (1 - h_{M2})) \cdot x_{M2} + (D_{amx} \cdot G_{M3} \cdot (1 - h_{M3}) - \lambda_{M3}) \cdot x_{M3} = 0 \rightarrow \text{equ.5}$$

$$(D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot (1 - h_{M3})) \cdot x_{M3} + (D_{amx} \cdot G_{M4} \cdot (1 - h_{M4}) - \lambda_{M4}) \cdot x_{M4} = 0 \rightarrow \text{equ.6}$$

$$(D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot (1 - h_{M4})) \cdot x_{M4} + (D_{amx} \cdot G_{M5} \cdot (1 - h_{M5}) - \lambda_{M5}) \cdot x_{M5} = 0 \rightarrow \text{equ.7}$$

Obtenidas las siete ecuaciones, a continuación, se procede a despejar cada uno de los factores:

Equ.1

$$x_{F1} = \frac{(D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2}}{\lambda_{F1}}$$

$$x_{F2} = \frac{\lambda_{F1} \cdot x_{F1}}{D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1 - h_{F2})}$$

$$\lambda_{F1} = \frac{(D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2}}{x_{F1}}$$

$$h_{F2} = 1 - \frac{\lambda_{F1} \cdot x_{F1}}{D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2}}$$

Equ.2

$$x_{F1} = \frac{-(D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1 - h_{F2}) - \lambda_{F2}) \cdot x_{F2}}{D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1 - h_{F1})}$$

$$x_{F2} = \frac{-(D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1 - h_{F1})) \cdot x_{F1}}{(D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1 - h_{F2}) - \lambda_{F2})}$$

$$\lambda_{F2} = \frac{(D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1 - h_{F1})) \cdot x_{F1}}{x_{F2}} + D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1 - h_{F2})$$

$$h_{F1} = 1 + \frac{(D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1 - h_{F2}) - \lambda_{F2}) \cdot x_{F2}}{D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot x_{F1}}$$

$$h_{F2} = 1 + \frac{(D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1 - h_{F1})) \cdot x_{F1} - \lambda_{F2} \cdot x_{F2}}{D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot x_{F2}}$$

Equ.3

$$x_{M1} = \frac{(D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2}}{\lambda_{M1}}$$

$$x_{F2} = \frac{\lambda_{M1} \cdot x_{M1}}{D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2})}$$

$$\lambda_{M1} = \frac{(D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2}}{x_{M1}}$$

$$h_{F2} = 1 - \frac{\lambda_{M1} \cdot x_{M1}}{D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2}}$$

Equ.4

$$x_{M1} = \frac{\lambda_{M2} \cdot x_{M2}}{D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot (1 - h_{M1})}$$

$$x_{M2} = \frac{(D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot (1 - h_{M1})) \cdot x_{M1}}{\lambda_{M2}}$$

$$\lambda_{M2} = \frac{(D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot (1 - h_{M1})) \cdot x_{M1}}{x_{M2}}$$

$$h_{M1} = 1 - \frac{\lambda_{M2} \cdot x_{M2}}{D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot x_{M1}}$$

Equ.5

$$x_{M2} = \frac{-(D_{amx} \cdot G_{M3} \cdot (1 - h_{M3}) - \lambda_{M3}) \cdot x_{M3}}{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (1 - h_{M2})}$$

$$x_{M3} = \frac{-(D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (1 - h_{M2})) \cdot x_{M2}}{(D_{amx} \cdot G_{M3} \cdot (1 - h_{M3}) - \lambda_{M3})}$$

$$\lambda_{M3} = \frac{(D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (1 - h_{M2})) \cdot x_{M2}}{x_{M3}} + D_{amx} \cdot G_{M3} \cdot (1 - h_{M3})$$

$$h_{M2} = 1 + \frac{(D_{amx} \cdot G_{M3} \cdot (1 - h_{M3})) \cdot x_{M3} - \lambda_{M3} \cdot x_{M3}}{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot x_{M2}}$$

$$h_{M3} = 1 + \frac{(D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (1 - h_{M2})) \cdot x_{M2} - \lambda_{M3} \cdot x_{M3}}{D_{amx} \cdot G_{M3} \cdot x_{M3}}$$

Equ.6

$$\begin{aligned}
 x_{M3} &= \frac{-(D_{amx} \cdot G_{M4} \cdot (1 - h_{M4}) - \lambda_{M4}) \cdot x_{M4}}{D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot (1 - h_{M3})} \\
 x_{M4} &= \frac{-(D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot (1 - h_{M3})) \cdot x_{M3}}{(D_{amx} \cdot G_{M4} \cdot (1 - h_{M4}) - \lambda_{M4})} \\
 \lambda_{M4} &= \frac{(D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot (1 - h_{M3})) \cdot x_{M3}}{x_{M4}} + D_{amx} \cdot G_{M4} \cdot (1 - h_{M4}) \\
 h_{M3} &= 1 + \frac{(D_{amx} \cdot G_{M4} \cdot (1 - h_{M4})) \cdot x_{M4} - \lambda_{M4} \cdot x_{M4}}{D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot x_{M3}} \\
 h_{M4} &= 1 + \frac{(D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot (1 - h_{M3})) \cdot x_{M3} - \lambda_{M4} \cdot x_{M4}}{D_{amx} \cdot G_{M4} \cdot x_{M4}}
 \end{aligned}$$

Equ.7

$$\begin{aligned}
 x_{M4} &= \frac{-(D_{amx} \cdot G_{M5} \cdot (1 - h_{M5}) - \lambda_{M5}) \cdot x_{M5}}{D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot (1 - h_{M4})} \\
 x_{M5} &= \frac{-(D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot (1 - h_{M4})) \cdot x_{M4}}{(D_{amx} \cdot G_{M5} \cdot (1 - h_{M5}) - \lambda_{M5})} \\
 \lambda_{M5} &= \frac{(D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot (1 - h_{M4})) \cdot x_{M4}}{x_{M5}} + D_{amx} \cdot G_{M5} \cdot (1 - h_{M5}) \\
 h_{M4} &= 1 + \frac{(D_{amx} \cdot G_{M5} \cdot (1 - h_{M5})) \cdot x_{M5} - \lambda_{M5} \cdot x_{M5}}{D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot x_{M4}} \\
 h_{M5} &= 1 + \frac{(D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot (1 - h_{M4})) \cdot x_{M4} - \lambda_{M5} \cdot x_{M5}}{D_{amx} \cdot G_{M5} \cdot x_{M5}}
 \end{aligned}$$

Empleando fórmulas obtenidas a partir del producto por la derecha de la matriz de extracciones, se deberá trabajar con densidades después de la época reproductiva, como ya quedó demostrado. Es posible resumir el cálculo de las extracciones para el producto por la derecha de la matriz E de extracciones, como el resultado de:

$$h_{jit} = 1 + \frac{x_{jiD.R.t+1 \rightarrow x_{ji-1D.E.t}} - x_{o jiD.R.t+1}}{x_{jiD.R.t+1 \rightarrow x_{jiD.R.t}}}$$

h_{ji} = Porcentaje de extracciones del sexo j y de la clase i en la temporada de extracciones t

$x_{jiD.R.t+1 \rightarrow x_{ji-1D.E.t}}$ = Individuos de sexo j y clase i después de la época de reproducción t+1

procedentes de los individuos de sexo j y clase i-1 después de la temporada de extracciones t

$x_{o\ jiD.R.t+1}$ = Individuos objetivo de sexo j y clase i después de la época reproductiva t+1

$X_{jiD.R.t+1 \rightarrow x_{jiD.R.t}}$ = Individuos de sexo j y clase i después de la época de reproducción t+1

procedentes de los individuos de sexo j y clase i después del periodo reproductivo t

Comparando estas ecuaciones con las obtenidas en el apartado anterior, quedan de manifiesto las diferencias entre los resultados de ambos productos, sirviendo para confirmar las conclusiones ya. Para el producto por la derecha, una clase de calidad se verá afectada por las extracciones de su propia clase y las de su clase inmediatamente anterior, ya que las extracciones son calculadas para la temporada de extracciones t y el vector objetivo es calculado para el momento t+1 después de la época de reproducción, mientras que en el producto por la izquierda solo se verá afectada por las extracciones de su propia clase, las extracciones se realizarán en la temporada de extracciones t+1 y el vector objetivo es calculado para el instante t+1 después de las extracciones. A través de esta colección de ecuaciones, se podrán hallar infinitos vectores que garanticen la estabilidad mediante las extracciones en infinitas situaciones de gestión en función de las necesidades del gestor.

5.4 Alternativas de gestión: Matrices de gestión

Hasta ahora, todo tipo de gestión planteada en este trabajo estaba dirigida a mantener la densidad de la población igual a la capacidad óptima del medio y a conseguir una estructura estable de distribución igual a la que esta alcanzaría de forma natural, esta distribución está marcada por el autovector dominante asociado al autovalor dominante de la matriz de transiciones A . Sin embargo, este modelo nos permite conocer infinitas distribuciones igualmente estables que permitirían al gestor obtener el máximo rendimiento de unos determinados productos, al mismo tiempo que realiza una extracción máxima sin poner en peligro la persistencia de la población con diferentes densidades, es decir, garantizando la sostenibilidad. Para ello, se va a presentar una colección de matrices de extracciones E , a las que nombraremos como “matrices de gestión”. Estas matrices de gestión, aplicadas directamente en el modelo y más tarde sobre una población real de ciervo ibérico asegurarán la estabilidad de la población y la sostenibilidad de la extracción una vez esta se encuentre en su densidad de gestión D_g , modificando mediante extracciones perfectamente planificadas la distribución natural de la población y así obtener un mayor número de individuos de la clase objeto de interés del gestor y maximizar el rendimiento anual de la misma.

En este trabajo se van a introducir tres tipos de matrices de gestión para tres situaciones típicas en la gestión del ciervo ibérico en España, aunque el abanico de matrices de gestión a desarrollar es infinito y se puede adaptar a cualquier necesidad. Estas matrices serán calculadas para los casos que denominaremos como: Monterías comerciales, Montería de trofeos y Trofeos Medallables. Llamamos montería comercial al sistema de gestión que busca producir y extraer anualmente el máximo número de machos “cazables” posibles sin importar demasiado la calidad de su trofeo. Montería de trofeos, este sistema de gestión buscará extraer el máximo número de machos posibles anualmente con la condición de que estos sean portadores de un trofeo destacable. Por último, el sistema denominado como “trofeos medallables” buscará extraer el mayor número de ciervos machos cuyo trofeo sea considerado medalla, es decir, de la máxima calidad posible.

Para llegar a establecer estas matrices de gestión, es necesario primeramente conocer cómo será el vector de distribución de la población en función de los productos buscados, por lo tanto, es necesario saber cómo se relacionan las diferentes clases entre ellas, siendo viables dos metodologías para alcanzar el mismo resultado, el primero de ellos es a través de la ecuación característica:

$$(A - \lambda I) \begin{pmatrix} x_{F1} \\ \vdots \\ x_{M5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & D_{natx} \cdot R_{F2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ymx} \cdot P_{F1} & D_{amx} \cdot G_{F2} - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{natx} \cdot R_{M2} & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{ymx} \cdot P_{M1} & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M2} & D_{amx} \cdot G_{M3} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M3} & D_{amx} \cdot G_{M4} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M4} & D_{amx} \cdot G_{M5} - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{F1} \\ x_{F2} \\ x_{M1} \\ x_{M2} \\ x_{M3} \\ x_{M4} \\ x_{M5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -\lambda \cdot x_{F1} + D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2} &= 0 \\ D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot x_{F1} + (D_{amx} \cdot G_{F2} - \lambda) \cdot x_{F2} &= 0 \\ D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2} - \lambda \cdot x_{M1} &= 0 \\ D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot x_{M1} - \lambda \cdot x_{M2} &= 0 \\ D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot x_{M2} + (D_{amx} \cdot G_{M3} - \lambda) \cdot x_{M3} &= 0 \\ D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot x_{M3} + (D_{amx} \cdot G_{M4} - \lambda) \cdot x_{M4} &= 0 \\ D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot x_{M4} + (D_{amx} \cdot G_{M5} - \lambda) \cdot x_{M5} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot x_{F1} &= D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2} \\ \lambda \cdot x_{F2} &= D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot x_{F1} + D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot x_{F2} \\ \lambda \cdot x_{M1} &= D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2} \\ \lambda \cdot x_{M2} &= D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot x_{M1} \\ \lambda \cdot x_{M3} &= D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot x_{M2} + D_{amx} \cdot G_{M3} \cdot x_{M3} \\ \lambda \cdot x_{M4} &= D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot x_{M3} + D_{amx} \cdot G_{M4} \cdot x_{M4} \\ \lambda \cdot x_{M5} &= D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot x_{M4} + D_{amx} \cdot G_{M5} \cdot x_{M5} \end{aligned}$$

Lo que es lo mismo que:

$$\begin{aligned} x_{F1t+1} &= D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2t} \\ x_{F2t+1} &= D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot x_{F1t} + D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot x_{F2t} \\ x_{M1t+1} &= D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t} \\ x_{M2t+1} &= D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot x_{M1t} \\ x_{M3t+1} &= D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot x_{M2t} + D_{amx} \cdot G_{M3} \cdot x_{M3t} \\ x_{M4t+1} &= D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot x_{M3t} + D_{amx} \cdot G_{M4} \cdot x_{M4t} \\ x_{M5t+1} &= D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot x_{M4t} + D_{amx} \cdot G_{M5} \cdot x_{M5t} \end{aligned}$$

El otro camino para obtener el mismo resultado:

$$\vec{X}_{t+1} = A\vec{X}_t$$

$$\begin{pmatrix} x_{F1t+1} \\ x_{F2t+1} \\ x_{M1t+1} \\ x_{M2t+1} \\ x_{M3t+1} \\ x_{M4t+1} \\ x_{M5t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & D_{natx} \cdot R_{F2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ymx} \cdot P_{F1} & D_{amx} \cdot G_{F2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{natx} \cdot R_{M2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{ymx} \cdot P_{M1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M2} & D_{amx} \cdot G_{M3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M3} & D_{amx} \cdot G_{M4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M4} & D_{amx} \cdot G_{M5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{F1t} \\ x_{F2t} \\ x_{M1t} \\ x_{M2t} \\ x_{M3t} \\ x_{M4t} \\ x_{M5t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_{F1t+1} &= D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2t} \\ x_{F2t+1} &= D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot x_{F1t} + D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot x_{F2t} \\ x_{M1t+1} &= D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t} \\ x_{M2t+1} &= D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot x_{M1t} \\ x_{M3t+1} &= D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot x_{M2t} + D_{amx} \cdot G_{M3} \cdot x_{M3t} \\ x_{M4t+1} &= D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot x_{M3t} + D_{amx} \cdot G_{M4} \cdot x_{M4t} \\ x_{M5t+1} &= D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot x_{M4t} + D_{amx} \cdot G_{M5} \cdot x_{M5t} \end{aligned}$$

La renovación y crecimiento de la población recae sobre las hembras reproductoras (F2), por lo tanto, para mantener una población dentro de unos valores de densidad establecidos (Dg), bastará con establecer un control sobre las mismas. A continuación, se van reformular las ecuaciones de cada clase en función del número de hembras:

$$\begin{aligned}
x_{F1t+1} &= D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2t} \\
x_{F2t+1} &= D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2t} + D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot x_{F2t} \\
x_{M1t+1} &= D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t} \\
x_{M2t+1} &= D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t} \\
x_{M3t+1} &= \frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \\
x_{M4t+1} &= \frac{D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right)}{1 - D_{amx} \cdot G_{M4}} \\
x_{M5t+1} &= \frac{D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right)}{1 - D_{amx} \cdot G_{M4}} \right)}{1 - D_{amx} \cdot G_{M5}}
\end{aligned}$$

Obtenidas estas ecuaciones y conocida la densidad de animales que se quiere mantener o densidad de gestión (Dg) sabemos que:

$$x_{F1t+1} + x_{F2t+1} + x_{M1t+1} + x_{M2t+1} + x_{M3t+1} + x_{M4t+1} + x_{M5t+1} = x_{Dg}$$

Por lo tanto, en función de F2:

$$\begin{aligned}
 & (D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2t}) + (D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2t} + D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot x_{F2t}) + (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t}) + \\
 & + (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t}) + \\
 & + \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right) + \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right)}{1 - D_{amx} \cdot G_{M4}} \right) + \\
 & + \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right)}{1 - D_{amx} \cdot G_{M4}} \right)}{1 - D_{amx} \cdot G_{M5}} \right) = x_{Dg}
 \end{aligned}$$

De donde finalmente podremos conocer el número de hembras reproductoras que deberemos de tener después de la época de extracciones en el instante t para alcanzar la densidad de gestión y no sobrepasarla en el momento t+1 después de la reproducción.

$$x_{F2D.E.t} = \frac{x_{Dg}}{\left(\begin{aligned} & \left((D_{natx} \cdot R_{F2}) + (D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot D_{natx} \cdot R_{F2} + D_{amx} \cdot G_{F2}) + (D_{natx} \cdot R_{M2}) + \right. \\ & \left. + (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2}) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right) + \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right)}{1 - D_{amx} \cdot G_{M4}} \right) \right) + \\ & \left. + \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right)}{1 - D_{amx} \cdot G_{M4}} \right)}{1 - D_{amx} \cdot G_{M5}} \right) \right) \end{aligned} \right)}$$

A continuación, se muestra cómo deben utilizarse las fórmulas anteriores para establecer las matrices de gestión para cada uno de los tres supuestos propuestos.

5.4.1 Montería comercial

Esta categoría de gestión hace referencia a la situación que se presenta cuando el gestor busca mantener la población estable en su densidad de gestión año tras año al mismo tiempo que pretende extraer el mayor número de ciervos machos posibles. Las extracciones se llevarán a cabo mediante la clásica montería española donde para tratar de obtener el máximo rendimiento económico, esta se basaría en extraer el mayor número de ciervos machos posible. Por lo tanto, los animales no deberían superar la primera clase de calidad en la que estos tendrían valor comercial, ya que a medida que estos crecen parte de ellos irán muriendo perdiendo el gestor posibilidad de extracción.

Como consecuencia, todos los animales serán retirados de la población una vez alcancen la categoría M3, que como recordamos desde el punto de vista del trofeo se corresponde con:

Machos cuya cuerna debe estar ramificada, presentando entre una sola ramificación y 12 puntas con rosetas bien definidas en los mejores ejemplares.

Estos animales ya presentan atractivo para el cazador deportivo, aunque este atractivo y por lo tanto el valor comercial estará en función de la posibilidad de conseguir varias capturas en una misma jornada, la cual se verá aumentada cuantos más animales de esa clase se encuentren sobre el terreno. Para ello planeamos que todos ellos serán extraídos anualmente tan pronto alcancen la categoría M3, dando lugar a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 x_{F1t+1} &= D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2t} \\
 x_{F2t+1} &= D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot x_{F1t} + D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot x_{F2t} \\
 x_{M1t+1} &= D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t} \\
 x_{M2t+1} &= D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot x_{M1t} \\
 x_{M3t+1} &= D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot x_{M2t} + 0 \\
 x_{M4t+1} &= 0 \\
 x_{M5t+1} &= 0
 \end{aligned}$$

$$x_{F1t+1} + x_{F2t+1} + x_{M1t+1} + x_{M2t+1} + x_{M3t+1} = x_{Dg}$$

La matriz de extracciones para un sistema de gestión basada en el sistema de montería comercial ($E_{M.C.}$) es la siguiente:

$$E_{M.C.} = I - H_{M.C.}$$

Donde I es la matriz identidad e H es la matriz diagonal que contiene los porcentajes de extracción de cada clase en tanto por uno:

$$H_{M.C.} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{F2t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{M3t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puesto que todos los animales serán extraídos al alcanzar la categoría de M3:

$$H_{M.C.} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{F2t+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El siguiente paso consistirá en estimar el porcentaje de extracción de hembras reproductoras, h_{F2t} . Para ello, es necesario conocer el número de hembras que tendrán que reproducirse cada año para mantener a la población en los niveles establecidos, es decir, $x_{F2D.E.}$, comenzando por dejar todas las ecuaciones que regulan la evolución de cada clase en función del número de hembras reproductoras:

$$\begin{aligned} x_{F1t+1} &= D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2t} \\ x_{F2t+1} &= D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2t} + D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot x_{F2t} \\ x_{M1t+1} &= D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t} \\ x_{M2t+1} &= D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t} \\ x_{M3t+1} &= D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t}) \\ x_{M4t+1} &= 0 \\ x_{M5t+1} &= 0 \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} & (D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2t}) + (D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2t} + D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot x_{F2t}) + (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t}) + \\ & + (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t}) + (D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t})) = x_{Dg} \end{aligned}$$

$$x_{F2D.E.t} = \frac{x_{Dg}}{\left((D_{natx} \cdot R_{F2}) + (D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot D_{natx} \cdot R_{F2} + D_{amx} \cdot G_{F2}) + (D_{natx} \cdot R_{M2}) + \right. \\ \left. + (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2}) + (D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2})) \right)}$$

Una vez conocido el valor de x_{F2t} , y recurriendo a la fórmula para conocer h_{F2} cuando el valor de densidad introducido en la ecuación es $x_{F2D.E.}$:

$$h_{F2t+1} = 1 - \frac{x_{F2D.E.t}}{x_{F2D.R.t+1}}$$

Tras sustituir los valores ya conocidos, es posible calcular el porcentaje de extracción anual para las hembras reproductoras:

$$h_{F2t+1} = 1 - \frac{x_{Dg} \left((D_{natx} \cdot R_{F2}) + (D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot D_{natx} \cdot R_{F2} + D_{amx} \cdot G_{F2}) + (D_{natx} \cdot R_{M2}) + (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2}) + (D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2})) \right)}{D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2t} + D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot x_{F2t}}$$

Ya solamente resta conocer la distribución estable que resulta al aplicar esta matriz de extracciones anualmente. En este punto podremos diferenciar dos vectores, el que nos indicaría la distribución de la población estable después de las extracciones y el que nos la indicaría después de la reproducción, como ya ha quedado demostrado anteriormente ello dependerá de que el producto entre la matriz de vida y la matriz de extracciones sea por la derecha (después de la reproducción) o por la izquierda (después de las extracciones). Para conocer estos vectores de proporciones, nos valemos de la ecuación característica de la matriz:

$$(A^* - \lambda I) \begin{pmatrix} x_{F1} \\ \vdots \\ x_{M5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde como ya se ha visto para el producto por la izquierda:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1-h_{F1}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1-h_{F2}) & D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1-h_{M1}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot (1-h_{M2}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (1-h_{M3}) & D_{amx} \cdot G_{M3} \cdot (1-h_{M3}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot (1-h_{M4}) & D_{amx} \cdot G_{M4} \cdot (1-h_{M4}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot (1-h_{M5}) & D_{amx} \cdot G_{M5} \cdot (1-h_{M5}) \end{pmatrix}$$

En este caso se pretende que la población se mantenga a unos niveles constantes entre el instante de tiempo D.E.t y D.E.t+1 por lo tanto el autovalor asociado a la matriz modificada A* es $\lambda = 1$, dando como resultado:

$$(A^* - I) \begin{pmatrix} x_{F1} \\ \vdots \\ x_{M5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo los valores conocidos de h_{ji} en A* tenemos que:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & D_{natx} \cdot R_{F2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1-h_{F2}) & D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{natx} \cdot R_{M2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{ymx} \cdot P_{M1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (1-h_{M3}) & D_{amx} \cdot G_{M3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M3} & D_{amx} \cdot G_{M4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M4} & D_{amx} \cdot G_{M5} \end{pmatrix}$$

Mientras que para el autovector asociado sabemos que después de las extracciones:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_{F1} \\ x_{F2} \\ x_{M1} \\ x_{M2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De este modo:

$$\begin{pmatrix} -1 & D_{natx} \cdot R_{F2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1-h_{F2}) & D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1-h_{F2}) - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{natx} \cdot R_{M2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{ymx} \cdot P_{M1} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (1-h_{M3}) & D_{amx} \cdot G_{M3} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M3} & D_{amx} \cdot G_{M4} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M4} & D_{amx} \cdot G_{M5} - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{F1} \\ x_{F2} \\ x_{M1} \\ x_{M2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo:

$$-x_{F1} + D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2} = 0$$

$$D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1-h_{F2}) \cdot x_{F1} + (D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1-h_{F2}) - 1) x_{F2} = 0$$

$$D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2} - x_{M1} = 0$$

$$D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot x_{M1} - x_{M2} = 0$$

Despejando cada una de las clases:

$$x_{F1} = D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2}$$

$$x_{F2} = D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1-h_{F2}) \cdot x_{F1} + D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1-h_{F2}) \cdot x_{F2}$$

$$x_{M1} = D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2}$$

$$x_{M2} = D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot x_{M1}$$

Y dejando todas las ecuaciones en función de x_{F2} :

$$x_{F1} = D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2}$$

$$x_{F2} = D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1 - h_{F2}) \cdot (D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2}) + D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1 - h_{F2}) \cdot x_{F2}$$

$$x_{M1} = D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2}$$

$$x_{M2} = D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2})$$

Para simplificar el vector de proporciones estable después de la época de extracciones: $x_{F2}=1$, dando como resultado el vector de proporciones de la población gestionada en base a la matriz de gestión de montería comercial después del periodo de extracciones:

$$\begin{pmatrix} D_{natx} \cdot R_{F2} \\ 1 \\ D_{natx} \cdot R_{M2} \\ D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por su parte la matriz A modificada con el producto por la derecha A^* , nos servirá para conocer el vector de distribución estable de la población después del periodo reproductivo:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1 - h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1 - h_{F1}) & D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1 - h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot (1 - h_{M1}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (1 - h_{M2}) & D_{amx} \cdot G_{M3} \cdot (1 - h_{M3}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot (1 - h_{M3}) & D_{amx} \cdot G_{M4} \cdot (1 - h_{M4}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot (1 - h_{M4}) & D_{amx} \cdot G_{M5} \cdot (1 - h_{M5}) \end{pmatrix}$$

Al igual que ocurría en el caso anterior la población se mantendrá constante entre los instantes D.R.t y D.R.t+1 por lo tanto $\lambda = 1$, por lo tanto, sustituyendo los valores de h_{ji} obtenemos:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1 - h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ymx} \cdot P_{F1} & D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1 - h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{ymx} \cdot P_{M1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M2} & D_{amx} \cdot G_{M3} \cdot (1 - h_{M3}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot (1 - h_{M3}) & D_{amx} \cdot G_{M4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M4} & D_{amx} \cdot G_{M5} \end{pmatrix}$$

El autovector asociado después del periodo de reproducción será:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_{F1} \\ x_{F2} \\ x_{M1} \\ x_{M2} \\ x_{M3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siendo:

$$\begin{pmatrix} -1 & D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ymx} \cdot P_{F1} & D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1-h_{F2}) - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1-h_{F2}) & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{ymx} \cdot P_{M1} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M2} & D_{amx} \cdot G_{M3} \cdot (1-1) - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot (1-1) & D_{amx} \cdot G_{M4} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M4} & D_{amx} \cdot G_{M5} - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{F1} \\ x_{F2} \\ x_{M1} \\ x_{M2} \\ x_{M3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que se resuelve como:

$$\begin{aligned} -x_{F1} + (D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1-h_{F2})) \cdot x_{F2} &= 0 \\ (D_{ymx} \cdot P_{F1}) \cdot x_{F1} + (D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1-h_{F2}) - 1) \cdot x_{F2} &= 0 \\ (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1-h_{F2})) \cdot x_{F2} - x_{M1} &= 0 \\ (D_{ymx} \cdot P_{M1}) \cdot x_{M1} - x_{M2} &= 0 \\ (D_{amx} \cdot P_{M2}) \cdot x_{M2} - x_{M3} &= 0 \end{aligned}$$

Despejando cada una de las clases:

$$\begin{aligned} x_{F1} &= (D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1-h_{F2})) \cdot x_{F2} \\ x_{F2} &= (D_{ymx} \cdot P_{F1}) \cdot x_{F1} + (D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1-h_{F2})) \cdot x_{F2} \\ x_{M1} &= (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1-h_{F2})) \cdot x_{F2} \\ x_{M2} &= (D_{ymx} \cdot P_{M1}) \cdot x_{M1} \\ x_{M3} &= (D_{amx} \cdot P_{M2}) \cdot x_{M2} \end{aligned}$$

Que en función de F2 son:

$$\begin{aligned}
 x_{F1} &= (D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2} \\
 x_{F2} &= (D_{ymx} \cdot P_{F1}) \cdot (D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2} + (D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2} \\
 x_{M1} &= (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2} \\
 x_{M2} &= (D_{ymx} \cdot P_{M1}) \cdot (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2} \\
 x_{M3} &= (D_{amx} \cdot P_{M2}) \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1}) \cdot (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2}
 \end{aligned}$$

Si $x_{F2} = 1$, el vector que marca la proporción estable de la población gestionada en base a la matriz de gestión de montería comercial después del periodo de reproducción es:

$$\begin{pmatrix}
 D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1 - h_{F2}) \\
 1 \\
 D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2}) \\
 D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2}) \\
 D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2}) \\
 0 \\
 0
 \end{pmatrix}$$

5.4.2 Montería de trofeos

La segunda categoría de gestión propuesta que se alejaría de la distribución natural de la población, es la que llamamos como “montería de trofeos”. Aquí el gestor busca mantener la población estable en su densidad de gestión año tras año al mismo tiempo que pretende extraer el mayor número de ciervos machos posibles, pero contando estos ya con un trofeo destacable. Nuevamente, el método de extracción sería la montería, donde en este caso la rentabilidad económica estaría basada no solo en el número de animales capturados sino también en la calidad del trofeo. Esta demanda de animales con trofeos de mayor categoría obliga al gestor a dejarlos alcanzar una clase de calidad superior a la planteada en la situación anterior.

Por lo tanto, el total de los animales macho, serán extraídos de la población una vez alcancen la categoría M4, que desde el punto de vista del trofeo se definía como:

Machos cuya cuerna deben presentar por encima de las 12 puntas y ser gruesas, largas y pesadas.

Los individuos pertenecientes a esta categoría capturados en montería presentan un atractivo altísimo para el cazador, por lo que su valor económico es alto, más aún si son abundantes y se capturan en gran número. Para ello la estrategia de gestión pasa

por extraer anualmente todos los animales que alcanzan la categoría M4. Las ecuaciones resultantes son:

$$\begin{aligned}
 x_{F1t+1} &= D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2t} \\
 x_{F2t+1} &= D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot x_{F1t} + D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot x_{F2t} \\
 x_{M1t+1} &= D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t} \\
 x_{M2t+1} &= D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot x_{M1t} \\
 x_{M3t+1} &= D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot x_{M2t} + D_{amx} \cdot G_{M3} \cdot x_{M3t} \\
 x_{M4t+1} &= D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot x_{M3t} + 0 \\
 x_{M5t+1} &= 0
 \end{aligned}$$

$$x_{F1t+1} + x_{F2t+1} + x_{M1t+1} + x_{M2t+1} + x_{M3t+1} + x_{M4t+1} = x_{Dg}$$

La matriz de extracciones para un sistema de gestión basada en el sistema de montería de trofeos ($E_{M.T.}$) es la siguiente:

$$E_{M.T.} = I - H_{M.T.}$$

Donde I es la matriz identidad e H es la matriz diagonal que contiene los porcentajes de extracción de cada clase en tanto por uno:

$$H_{M.T.} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{F2t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{M4t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como todos los animales serán extraídos al alcanzar la categoría de M4:

$$H_{M.T.} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{F2t+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos el porcentaje de extracción de hembras reproductoras, h_{F2t} , primero, conociendo el número de hembras que tendrán que reproducirse cada año para

mantener a la población en los niveles establecidos, es decir, $x_{F2D.E.}$, para ello dejábamos todas las ecuaciones que regulan la evolución de cada clase en función del número de hembras reproductoras:

$$\begin{aligned}
 x_{F1t+1} &= D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2t} \\
 x_{F2t+1} &= D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2t} + D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot x_{F2t} \\
 x_{M1t+1} &= D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t} \\
 x_{M2t+1} &= D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t} \\
 x_{M3t+1} &= \frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \\
 x_{M4t+1} &= D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right) \\
 x_{M5t+1} &= 0
 \end{aligned}$$

La densidad de gestión será:

$$\begin{aligned}
 &(D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2t}) + (D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2t} + D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot x_{F2t}) + (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t}) + \\
 &+ (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t}) + \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right) + \\
 &+ \left(D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right) \right) = x_{Dg}
 \end{aligned}$$

De donde se puede despejar el número de hembras reproductoras necesarias al final del periodo de extracciones:

$$x_{F2D.E.t} = \frac{x_{Dg}}{\left(\begin{aligned} &(D_{natx} \cdot R_{F2}) + (D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot D_{natx} \cdot R_{F2} + D_{amx} \cdot G_{F2}) + (D_{natx} \cdot R_{M2}) + \\ &+ (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2}) + \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right) + \\ &+ \left(D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right) \right) \end{aligned} \right)}$$

Conocido x_{F2t} , y se calcula h_{F2} cuando el valor de densidad introducido en la ecuación es $x_{F2D.E.}$:

$$h_{F2t+1} = 1 - \frac{x_{F2D.E.t}}{x_{F2D.R.t+1}}$$

Sustituyendo valores conocidos, se calcula el porcentaje de extracción anual para las hembras reproductoras:

$$h_{F2t+1} = 1 - \frac{x_{Dg} \left(\begin{aligned} & (D_{natx} \cdot R_{F2}) + (D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot D_{natx} \cdot R_{F2} + D_{amx} \cdot G_{F2}) + (D_{natx} \cdot R_{M2}) + \\ & + (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2}) + \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right) + \\ & + \left(D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right) \right) \end{aligned} \right)}{D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2t} + D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot x_{F2t}}$$

Por último, se calculaba la distribución estable resultante de la aplicación de esta matriz de extracciones cada año, diferenciando dos vectores: el producto entre la matriz de vida y la matriz de extracciones por la derecha (después de la reproducción) o por la izquierda (después de las extracciones). A través de la ecuación característica de la matriz:

$$(A^* - \lambda I) \begin{pmatrix} x_{F1} \\ \vdots \\ x_{M5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para el producto por la izquierda:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1 - h_{F1}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1 - h_{F2}) & D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1 - h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{M1}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot (1 - h_{M2}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (1 - h_{M3}) & D_{amx} \cdot G_{M3} \cdot (1 - h_{M3}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot (1 - h_{M4}) & D_{amx} \cdot G_{M4} \cdot (1 - h_{M4}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot (1 - h_{M5}) & D_{amx} \cdot G_{M5} \cdot (1 - h_{M5}) \end{pmatrix}$$

El autovalor asociado a la matriz modificada A^* es $\lambda = 1$:

$$(A^* - I) \begin{pmatrix} x_{F1} \\ \vdots \\ x_{M5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo los valores conocidos de h_{ji} en A^* tenemos que:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & D_{natx} \cdot R_{F2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1-h_{F2}) & D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{natx} \cdot R_{M2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{ymx} \cdot P_{M1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M2} & D_{amx} \cdot G_{M3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot (1-h_{M4}) & D_{amx} \cdot G_{M4} \cdot (1-h_{M4}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M4} & D_{amx} \cdot G_{M5} \end{pmatrix}$$

El autovector asociado después de las extracciones:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_{F1} \\ x_{F2} \\ x_{M1} \\ x_{M2} \\ x_{M3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así:

$$\begin{pmatrix} -1 & D_{natx} \cdot R_{F2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1-h_{F2}) & D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1-h_{F2}) - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{natx} \cdot R_{M2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{ymx} \cdot P_{M1} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M2} & D_{amx} \cdot G_{M3} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot (1-h_{M4}) & D_{amx} \cdot G_{M4} \cdot (1-h_{M4}) - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M4} & D_{amx} \cdot G_{M5} - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{F1} \\ x_{F2} \\ x_{M1} \\ x_{M2} \\ x_{M3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo:

$$-x_{F1} + D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2} = 0$$

$$D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1-h_{F2}) \cdot x_{F1} + (D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1-h_{F2}) - 1) x_{F2} = 0$$

$$D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2} - x_{M1} = 0$$

$$D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot x_{M1} - x_{M2} = 0$$

$$D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot x_{M2} + (D_{amx} \cdot G_{M3} - 1) \cdot x_{M3} = 0$$

Despejando cada una de las clases:

$$\begin{aligned}
 x_{F1} &= D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2} \\
 x_{F2} &= D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1 - h_{F2}) \cdot x_{F1} + D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1 - h_{F2}) \cdot x_{F2} \\
 x_{M1} &= D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2} \\
 x_{M2} &= D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot x_{M1} \\
 x_{M3} &= \frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot x_{M2}}{-(D_{amx} \cdot G_{M3} - 1)}
 \end{aligned}$$

Y dejando todas las ecuaciones en función de x_{F2} :

$$\begin{aligned}
 x_{F1} &= D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2} \\
 x_{F2} &= D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1 - h_{F2}) \cdot (D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2}) + D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1 - h_{F2}) \cdot x_{F2} \\
 x_{M1} &= D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2} \\
 x_{M2} &= D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2}) \\
 x_{M3} &= \frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2}))}{-(D_{amx} \cdot G_{M3} - 1)}
 \end{aligned}$$

Dando valor a $x_{F2}=1$, el vector de proporciones estable después de la época de extracciones de la población gestionada en base a la matriz de gestión de montería de trofeos es:

$$\begin{pmatrix}
 D_{natx} \cdot R_{F2} \\
 1 \\
 D_{natx} \cdot R_{M2} \\
 D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \\
 \frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2}}{-(D_{amx} \cdot G_{M3} - 1)} \\
 0 \\
 0
 \end{pmatrix}$$

Repitiendo el proceso con la matriz A modificada con el producto por la derecha A^* , se obtiene el vector de distribución estable de la población después del periodo reproductivo:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1-h_{F1}) & D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot (1-h_{M1}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (1-h_{M2}) & D_{amx} \cdot G_{M3} \cdot (1-h_{M3}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot (1-h_{M3}) & D_{amx} \cdot G_{M4} \cdot (1-h_{M4}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot (1-h_{M4}) & D_{amx} \cdot G_{M5} \cdot (1-h_{M5}) \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$, sustituyendo los valores de h_{ji} :

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ymx} \cdot P_{F1} & D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{ymx} \cdot P_{M1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M2} & D_{amx} \cdot G_{M3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M3} & D_{amx} \cdot G_{M4} \cdot (1-h_{M4}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot (1-h_{M4}) & D_{amx} \cdot G_{M5} \end{pmatrix}$$

El autovector asociado después del periodo de reproducción será:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_{F1} \\ x_{F2} \\ x_{M1} \\ x_{M2} \\ x_{M3} \\ x_{M4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siendo:

$$\begin{pmatrix} -1 & D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ymx} \cdot P_{F1} & D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1-h_{F2}) - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1-h_{F2}) & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{ymx} \cdot P_{M1} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M2} & D_{amx} \cdot G_{M3} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M3} & D_{amx} \cdot G_{M4} \cdot (1-1) - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot (1-1) & D_{amx} \cdot G_{M5} - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{F1} \\ x_{F2} \\ x_{M1} \\ x_{M2} \\ x_{M3} \\ x_{M4} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que se resuelve como:

$$\begin{aligned}
-x_{F1} + (D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2} &= 0 \\
(D_{ymx} \cdot P_{F1}) \cdot x_{F1} + (D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1 - h_{F2}) - 1) \cdot x_{F2} &= 0 \\
(D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2} - x_{M1} &= 0 \\
(D_{ymx} \cdot P_{M1}) \cdot x_{M1} - x_{M2} &= 0 \\
(D_{amx} \cdot P_{M2}) \cdot x_{M2} + (D_{amx} \cdot G_{M3} - 1) \cdot x_{M3} &= 0 \\
(D_{amx} \cdot P_{M3}) \cdot x_{M3} - x_{M4} &= 0
\end{aligned}$$

Despejando cada una de las clases:

$$\begin{aligned}
x_{F1} &= (D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2} \\
x_{F2} &= (D_{ymx} \cdot P_{F1}) \cdot x_{F1} + (D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2} \\
x_{M1} &= (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2} \\
x_{M2} &= (D_{ymx} \cdot P_{M1}) \cdot x_{M1} \\
x_{M3} &= \frac{(D_{amx} \cdot P_{M2}) \cdot x_{M2}}{-(D_{amx} \cdot G_{M3} - 1)} \\
x_{M4} &= (D_{amx} \cdot P_{M3}) \cdot x_{M3}
\end{aligned}$$

Que en función de F2 son:

$$\begin{aligned}
x_{F1} &= (D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2} \\
x_{F2} &= (D_{ymx} \cdot P_{F1}) \cdot (D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2} + (D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2} \\
x_{M1} &= (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2} \\
x_{M2} &= (D_{ymx} \cdot P_{M1}) \cdot (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2} \\
x_{M3} &= \frac{(D_{amx} \cdot P_{M2}) \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1}) \cdot (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2}}{-(D_{amx} \cdot G_{M3} - 1)} \\
x_{M4} &= (D_{amx} \cdot P_{M3}) \cdot \frac{(D_{amx} \cdot P_{M2}) \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1}) \cdot (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2}}{-(D_{amx} \cdot G_{M3} - 1)}
\end{aligned}$$

Siendo $X_{F2} = 1$, el vector de la proporción estable de la población gestionada en base a la matriz de gestión de montería de trofeos después del periodo de reproducción es:

$$\begin{pmatrix} D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1 - h_{F2}) \\ 1 \\ D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2}) \\ D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2}) \\ \frac{(D_{amx} \cdot P_{M2}) \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1}) \cdot (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2}))}{-(D_{amx} \cdot G_{M3} - 1)} \\ (D_{amx} \cdot P_{M3}) \cdot \frac{(D_{amx} \cdot P_{M2}) \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1}) \cdot (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2}))}{-(D_{amx} \cdot G_{M3} - 1)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.4.3 Trofeos Medallables

La tercera modalidad de gestión que va a tratarse es la que denominaremos como “trofeos medallables”. Una vez más, el objetivo es mantener la población estable en su densidad de gestión año tras año, pero en este apartado se conseguirá mientras que se extraen el mayor número de ciervos machos posibles y de la mayor calidad de trofeo que estos pudieran alcanzar. El método de extracción para este tipo de grandes trofeos sería el rececho, donde se obtendría el beneficio económico debido al alto valor que alcanza el abatir uno de estos grandes ejemplares. Para ello los animales deberán alcanzar la clase de calidad más elevada, donde el desarrollo del trofeo es máximo. Como consecuencia, el total de los machos serán extraídos de la población una vez alcancen la categoría M5 donde su trofeo es máximo, a partir de aquí comenzará la decadencia del individuo a causa de la edad, por lo que si permanece durante más años en esta clase su trofeo perderá calidad y valor.

Estos ejemplares capturados en la modalidad de rececho, tienen un elevadísimo valor a causa de sus grandes trofeos, categorizados como “medallables” y a su coste de producción, tanto en tiempo como en recursos. Esta gestión deberá centrarse en extraer anualmente todos los animales que alcanzan la categoría M5. Las ecuaciones resultantes son:

$$\begin{aligned} x_{F1t+1} &= D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2t} \\ x_{F2t+1} &= D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot x_{F1t} + D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot x_{F2t} \\ x_{M1t+1} &= D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t} \\ x_{M2t+1} &= D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot x_{M1t} \\ x_{M3t+1} &= D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot x_{M2t} + D_{amx} \cdot G_{M3} \cdot x_{M3t} \\ x_{M4t+1} &= D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot x_{M3t} + D_{amx} \cdot G_{M4} \cdot x_{M4t} \\ x_{M5t+1} &= D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot x_{M4t} + 0 \end{aligned}$$

$$x_{F1t+1} + x_{F2t+1} + x_{M1t+1} + x_{M2t+1} + x_{M3t+1} + x_{M4t+1} + x_{M5t+1} = x_{Dg}$$

La matriz de extracciones para un sistema de gestión basada en el sistema de trofeos medallables ($E_{T.M.}$) es la siguiente:

$$E_{M.T.} = I - H_{T.M.}$$

Donde I es la matriz identidad e H es la matriz diagonal que contiene los porcentajes de extracción de cada clase en tanto por uno:

$$H_{T.M.} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{F2t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{M5t} \end{pmatrix}$$

Ya que todos los animales serán extraídos al alcanzar la categoría de M5:

$$H_{T.M.} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{F2t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el porcentaje de extracción de hembras reproductoras, h_{F2t} , primero, conociendo el número de hembras que tendrán que reproducirse cada año para mantener a la población en los niveles establecidos, es decir, $x_{F2D.E.}$, para ello todas las ecuaciones que regulan la evolución de cada clase se expresan en función del número de hembras reproductoras:

$$\begin{aligned}
 x_{F1t+1} &= D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2t} \\
 x_{F2t+1} &= D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2t} + D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot x_{F2t} \\
 x_{M1t+1} &= D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t} \\
 x_{M2t+1} &= D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t} \\
 x_{M3t+1} &= \frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \\
 x_{M4t+1} &= \frac{D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right)}{1 - D_{amx} \cdot G_{M4}} \\
 x_{M5t+1} &= D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right)}{1 - D_{amx} \cdot G_{M4}} \right)
 \end{aligned}$$

Como resultado, la densidad de gestión es:

$$\begin{aligned}
 &(D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2t}) + (D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2t} + D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot x_{F2t}) + (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t}) + \\
 &+ (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t}) + \\
 &+ \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right) + \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right)}{1 - D_{amx} \cdot G_{M4}} \right) + \\
 &+ \left(D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2t})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right)}{1 - D_{amx} \cdot G_{M4}} \right) \right) = x_{Dg}
 \end{aligned}$$

Despejando el número de hembras reproductoras necesarias al final del periodo de extracciones:

$$x_{F2D.E.t} = \frac{x_{Dg}}{\left(\begin{aligned} & \left(D_{natx} \cdot R_{F2} \right) + \left(D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot D_{natx} \cdot R_{F2} + D_{amx} \cdot G_{F2} \right) + \left(D_{natx} \cdot R_{M2} \right) + \\ & + \left(D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \right) + \\ & + \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot \left(D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \right)}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right) + \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot \left(D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \right)}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right)}{1 - D_{amx} \cdot G_{M4}} \right) + \\ & + \left(D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot \left(D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \right)}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right)}{1 - D_{amx} \cdot G_{M4}} \right) \right) \end{aligned} \right)}$$

Conocido $x_{F2D.E.t}$, se calcula h_{F2} cuando el valor de densidad introducido en la ecuación es después de las extracciones:

$$h_{F2t+1} = 1 - \frac{x_{F2D.E.t}}{x_{F2D.R.t+1}}$$

Sustituyendo valores conocidos, se calcula el porcentaje de extracción anual para las hembras reproductoras:

$$h_{F2t+1} = 1 - \frac{x_{Dg}}{\left((D_{natx} \cdot R_{F2}) + (D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot D_{natx} \cdot R_{F2} + D_{amx} \cdot G_{F2}) + (D_{natx} \cdot R_{M2}) + \right. \\ \left. + (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2}) + \right. \\ \left. + \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right) + \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right)}{1 - D_{amx} \cdot G_{M4}} \right) + \right. \\ \left. + \left(D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right)}{1 - D_{amx} \cdot G_{M4}} \right) \right) \right) \\ D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2t} + D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot x_{F2t}$$

La distribución estable resultante de la aplicación de esta matriz de extracciones cada año, diferenciando dos vectores: el producto entre la matriz de vida y la matriz de extracciones por la derecha (después de la reproducción) o por la izquierda (después de las extracciones). A través de la ecuación característica de la matriz:

$$(A^* - \lambda I) \begin{pmatrix} x_{F1} \\ \vdots \\ x_{M5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para el producto por la izquierda:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1 - h_{F1}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1 - h_{F2}) & D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1 - h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{M1}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot (1 - h_{M2}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (1 - h_{M3}) & D_{amx} \cdot G_{M3} \cdot (1 - h_{M3}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot (1 - h_{M4}) & D_{amx} \cdot G_{M4} \cdot (1 - h_{M4}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot (1 - h_{M5}) & D_{amx} \cdot G_{M5} \cdot (1 - h_{M5}) \end{pmatrix}$$

El autovalor asociado a la matriz modificada A* es $\lambda = 1$:

$$(A^* - I) \begin{pmatrix} x_{F1} \\ \vdots \\ x_{M5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo los valores conocidos de h_{ji} en A* tenemos que:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & D_{natx} \cdot R_{F2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1-h_{F2}) & D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{natx} \cdot R_{M2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{ymx} \cdot P_{M1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M2} & D_{amx} \cdot G_{M3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M3} & D_{amx} \cdot G_{M4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot (1-h_{M5}) & D_{amx} \cdot G_{M5} \cdot (1-h_{M5}) \end{pmatrix}$$

El autovector asociado después de las extracciones:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_{F1} \\ x_{F2} \\ x_{M1} \\ x_{M2} \\ x_{M3} \\ x_{M4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde:

$$\begin{pmatrix} -1 & D_{natx} \cdot R_{F2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1-h_{F2}) & D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1-h_{F2}) - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{natx} \cdot R_{M2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{ymx} \cdot P_{M1} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M2} & D_{amx} \cdot G_{M3} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M3} & D_{amx} \cdot G_{M4} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot (1-h_{M5}) & D_{amx} \cdot G_{M5} \cdot (1-h_{M5}) - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{F1} \\ x_{F2} \\ x_{M1} \\ x_{M2} \\ x_{M3} \\ x_{M4} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo:

$$-x_{F1} + D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2} = 0$$

$$D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1-h_{F2}) \cdot x_{F1} + (D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1-h_{F2}) - 1) x_{F2} = 0$$

$$D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2} - x_{M1} = 0$$

$$D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot x_{M1} - x_{M2} = 0$$

$$D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot x_{M2} + (D_{amx} \cdot G_{M3} - 1) \cdot x_{M3} = 0$$

$$D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot x_{M3} + (D_{amx} \cdot G_{M4} - 1) \cdot x_{M4} = 0$$

Despejando cada una de las clases:

$$\begin{aligned}
 x_{F1} &= D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2} \\
 x_{F2} &= D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1 - h_{F2}) \cdot x_{F1} + D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1 - h_{F2}) \cdot x_{F2} \\
 x_{M1} &= D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2} \\
 x_{M2} &= D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot x_{M1} \\
 x_{M3} &= \frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot x_{M2}}{-(D_{amx} \cdot G_{M3} - 1)} \\
 x_{M4} &= \frac{D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot x_{M3}}{-(D_{amx} \cdot G_{M4} - 1)}
 \end{aligned}$$

Y dejando todas las ecuaciones en función de x_{F2} :

$$\begin{aligned}
 x_{F1} &= D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2} \\
 x_{F2} &= D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1 - h_{F2}) \cdot (D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot x_{F2}) + D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1 - h_{F2}) \cdot x_{F2} \\
 x_{M1} &= D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2} \\
 x_{M2} &= D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2}) \\
 x_{M3} &= \frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2}))}{-(D_{amx} \cdot G_{M3} - 1)} \\
 x_{M4} &= \frac{D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot x_{F2}))}{-(D_{amx} \cdot G_{M3} - 1)} \right)}{-(D_{amx} \cdot G_{M4} - 1)}
 \end{aligned}$$

Siendo $x_{F2}=1$, el vector de proporciones estable después de la época de extracciones de la población gestionada en base a la matriz de gestión de trofeos medallables es:

$$\begin{pmatrix}
 D_{natx} \cdot R_{F2} \\
 1 \\
 D_{natx} \cdot R_{M2} \\
 D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \\
 \frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2}}{-(D_{amx} \cdot G_{M3} - 1)} \\
 \frac{D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot \frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2}}{-(D_{amx} \cdot G_{M3} - 1)}}{-(D_{amx} \cdot G_{M4} - 1)} \\
 0
 \end{pmatrix}$$

Con la matriz A modificada con el producto por la derecha A^* , se obtiene el vector de distribución estable de la población después del periodo reproductivo:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot (1-h_{F1}) & D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot (1-h_{M1}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (1-h_{M2}) & D_{amx} \cdot G_{M3} \cdot (1-h_{M3}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot (1-h_{M3}) & D_{amx} \cdot G_{M4} \cdot (1-h_{M4}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot (1-h_{M4}) & D_{amx} \cdot G_{M5} \cdot (1-h_{M5}) \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$, sustituyendo los valores de h_{ji} :

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ymx} \cdot P_{F1} & D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{ymx} \cdot P_{M1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M2} & D_{amx} \cdot G_{M3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M3} & D_{amx} \cdot G_{M4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M4} & D_{amx} \cdot G_{M5} \cdot (1-h_{M5}) \end{pmatrix}$$

El autovector asociado después del periodo de reproducción será:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_{F1} \\ x_{F2} \\ x_{M1} \\ x_{M2} \\ x_{M3} \\ x_{M4} \\ x_{M5} \end{pmatrix}$$

Siendo:

$$\begin{pmatrix} -1 & D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1-h_{F2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ymx} \cdot P_{F1} & D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1-h_{F2}) - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1-h_{F2}) & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{ymx} \cdot P_{M1} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M2} & D_{amx} \cdot G_{M3} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M3} & D_{amx} \cdot G_{M4} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{amx} \cdot P_{M4} & D_{amx} \cdot G_{M5} \cdot (1-h_{M5}) - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{F1} \\ x_{F2} \\ x_{M1} \\ x_{M2} \\ x_{M3} \\ x_{M4} \\ x_{M5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned}
 -x_{F1} + (D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2} &= 0 \\
 (D_{ymx} \cdot P_{F1}) \cdot x_{F1} + (D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1 - h_{F2}) - 1) \cdot x_{F2} &= 0 \\
 (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2} - x_{M1} &= 0 \\
 (D_{ymx} \cdot P_{M1}) \cdot x_{M1} - x_{M2} &= 0 \\
 (D_{amx} \cdot P_{M2}) \cdot x_{M2} + (D_{amx} \cdot G_{M3} - 1) \cdot x_{M3} &= 0 \\
 (D_{amx} \cdot P_{M3}) \cdot x_{M3} + (D_{amx} \cdot G_{M4} - 1) \cdot x_{M4} &= 0 \\
 (D_{amx} \cdot P_{M4}) \cdot x_{M4} - x_{M5} &= 0
 \end{aligned}$$

Despejando cada una de las clases:

$$\begin{aligned}
 x_{F1} &= (D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2} \\
 x_{F2} &= (D_{ymx} \cdot P_{F1}) \cdot x_{F1} + (D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2} \\
 x_{M1} &= (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2} \\
 x_{M2} &= (D_{ymx} \cdot P_{M1}) \cdot x_{M1} \\
 x_{M3} &= \frac{(D_{amx} \cdot P_{M2}) \cdot x_{M2}}{-(D_{amx} \cdot G_{M3} - 1)} \\
 x_{M4} &= \frac{(D_{amx} \cdot P_{M3}) \cdot x_{M3}}{-(D_{amx} \cdot G_{M4} - 1)} \\
 x_{M5} &= (D_{amx} \cdot P_{M4}) \cdot x_{M4}
 \end{aligned}$$

Que en función de F2 son:

$$\begin{aligned}
 x_{F1} &= (D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2} \\
 x_{F2} &= (D_{ymx} \cdot P_{F1}) \cdot (D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2} + (D_{amx} \cdot G_{F2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2} \\
 x_{M1} &= (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2} \\
 x_{M2} &= (D_{ymx} \cdot P_{M1}) \cdot (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2} \\
 x_{M3} &= \frac{(D_{amx} \cdot P_{M2}) \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1}) \cdot (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2}}{-(D_{amx} \cdot G_{M3} - 1)} \\
 x_{M4} &= (D_{amx} \cdot P_{M3}) \cdot \left(\frac{(D_{amx} \cdot P_{M2}) \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1}) \cdot (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2}}{-(D_{amx} \cdot G_{M3} - 1)} \right) \\
 x_{M5} &= (D_{amx} \cdot P_{M4}) \cdot \left((D_{amx} \cdot P_{M3}) \cdot \left(\frac{(D_{amx} \cdot P_{M2}) \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1}) \cdot (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2}}{-(D_{amx} \cdot G_{M3} - 1)} \right) \right)
 \end{aligned}$$

Siendo $x_{F2} = 1$, el vector de la proporción estable de la población gestionada en base a la matriz de gestión de trofeos medallables después del periodo de reproducción es:

$$\begin{pmatrix} D_{natx} \cdot R_{F2} \cdot (1 - h_{F2}) \\ 1 \\ D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2}) \\ D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2}) \\ \frac{(D_{amx} \cdot P_{M2}) \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1}) \cdot (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2}))}{-(D_{amx} \cdot G_{M3} - 1)} \\ (D_{amx} \cdot P_{M3}) \cdot \frac{(D_{amx} \cdot P_{M2}) \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1}) \cdot (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2}))}{-(D_{amx} \cdot G_{M3} - 1)} \\ (D_{amx} \cdot P_{M4}) \cdot (D_{amx} \cdot P_{M3}) \cdot \frac{(D_{amx} \cdot P_{M2}) \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1}) \cdot (D_{natx} \cdot R_{M2} \cdot (1 - h_{F2})) \cdot x_{F2}}{-(D_{amx} \cdot G_{M3} - 1)} \end{pmatrix}$$

CAPÍTULO 6. APLICACIÓN DEL MODELO Y RESULTADOS

6.1 Objetivos

El objetivo principal en este apartado es la aplicación del modelo desarrollado en este trabajo, en una situación de gestión real, en este caso sobre la población de ciervos de la finca “Quintos de Mora”. Para ello se analizarán e interpretarán los resultados que arroja, buscando siempre una gestión sostenible que garantice una extracción ordenada y racional de animales para mantener sus densidades a niveles óptimos para el ecosistema y la distribución de su población estable.

Como ya sabemos, el rango del estudio de la población puede ser dividida en dos partes según el comportamiento de la curva de crecimiento: población por debajo de la capacidad óptima de carga, donde no hay restricciones densodependientes al crecimiento o población por encima de la capacidad óptima de carga y por debajo de la capacidad de carga, donde la densidad de los propios animales reduce su crecimiento. Por lo tanto, se van a estudiar las dos posibles situaciones que el gestor se puede encontrar dentro de una población y se van a explicar los procedimientos y las herramientas de como converger a una densidad óptima o densidad de gestión estipulada y mantenerla, según si la población en el momento de comenzar la gestión se encuentra por encima o por debajo de esta capacidad óptima.

6.2 Valores de capacidad óptima y capacidad de carga

Como se ha visto anteriormente, la capacidad óptima de la finca ha sido calculada utilizando un modelo específico para tal fin definido por la Junta de Andalucía (Junta de Andalucía 2007). Este estudio estimó que la capacidad óptima de la finca es de unos 1.400 ejemplares de ciervo ibérico (Navarro Millas-Prendergast, Martín Fernández 2015).

Por otra parte, como ya se ha hecho referencia en apartados anteriores, para conocer la capacidad de carga, no existe un modelo específico ni una metodología similar al disponible para conocer la capacidad óptima, por lo tanto, en este trabajo este valor se estima mediante la regresión definida a partir de la ecuación:

$$N_x = aX^2 + b$$

Donde:

N_x = Natalidad a densidad X

a, b = Parámetros de ajuste

X = Actual número de individuos

Conociendo los valores de natalidad N_x , N_{co} (Natalidad a capacidad óptima), N_{cc} (Natalidad a capacidad de carga) y el número de individuos X y X_{co} (Individuos a la capacidad óptima) mediante la regresión se calcula el valor de X_{cc} (Individuos a la capacidad de carga).

Los últimos datos de densidad disponibles de animales en la finca arrojaban un tamaño de población residente en la finca de aproximadamente 1963 individuos.

Tabla 6.1. Valores biológicos en la densidad actual (1.963 individuos).

Natalidad (Crías/hembras reproductoras)	0,564
Sex ratio al nacimiento (M:H)	1:1
Mortalidad crías hembra	0,24
Mortalidad crías macho	0,26
Mortalidad hembras jóvenes	0,08
Mortalidad machos jóvenes	0,12
Mortalidad hembras adultas	0,05
Mortalidad macho adultos	0,07

Contando con los datos biológicos de la población en ese momento (Tabla 6.1) (Navarro Millas-Prendergast, Martín Fernández 2015), y los valores de referencia propuestos para poblaciones con densidades por debajo de la capacidad óptima o iguales a la capacidad de carga (Tabla 5.38 y Tabla 5.39), ya se dispone de la información necesaria (Tabla 6.2) para a través del método de regresión propuesto estimar un valor de la capacidad de carga.

Tabla 6.2. Valores biológicos utilizados en la regresión

	Densidad	Natalidad
Capacidad óptima	1400	0,8
Capacidad actual	1963	0,56
Capacidad de carga	X	0,36

Puesto que:

$$N_{co} = aX_{co}^2 + b$$

$$N_x = aX^2 + b$$

$$N_{cc} = aX_{cc}^2 + b$$

Despejando:

$$a = \frac{N_{co} - b}{X_{co}^2}; b = \frac{N_x \cdot X_{co}^2 - N_{co} \cdot X^2}{(X_{co}^2 - X^2)}$$

Conociendo:

$$N_{co} = 0,8$$

$$X_{co} = 1400$$

$$N_x = 0,56$$

$$X = 1963$$

$$N_{cc} = 0,36$$

$$X_{cc} = X_{cc}$$

Tenemos que:

$$a = -1,267581755 \times 10^{-7}$$

$$b = 1,048446024$$

Pudiendo ya conocer el valor final de la capacidad de carga:

$$X_{cc} = \sqrt{\frac{N_{cc} - b}{a}} = \sqrt{\frac{0,36 - 1,048446024}{-1,267581755 \times 10^{-7}}} = 2330$$

Por lo tanto, utilizando el método de regresión propuesto en este trabajo, conocemos la evolución completa de la natalidad en función de la densidad de animales para esta población en particular, (Figura 6.1) y el valor de la capacidad de carga de la finca que va a ser empleado en los cálculos, es decir, 2330 animales.

Figura 6.1. Evolución de la natalidad en función de la densidad según el método de interpolación propuesto.

6.3 Convergencia por debajo de la capacidad óptima

Ya que, en el momento de la obtención de los datos de la población, esta se encontraba en valores superiores a la capacidad óptima del medio, para poder explicar el proceso de gestión de una población cuyo inicio encuentra valores inferiores a la CO vamos a realizar la simulación con una población inicial aleatoria y con distribución también aleatoria, para este ejemplo contaremos con una población $X=200$ en $t_{D.R.}=0$ (Tabla 6.3).

Tabla 6.3. Distribución por clases de calidad de la población inicial $X_{D.R.+0}$

Clase de calidad	Número de individuos
F1	24
F2	64
M1	30
M2	20
M3	21
M4	23
M5	18
Total	200
Ciervos/100ha	2,91

Este vector aleatorio inicial $X_{t_{D.R.}+0}$ introducido en el modelo y sin intervención humana, genera sucesivos vectores de distribución por clases de calidad, y en dos instantes dentro de cada periodo, después del periodo reproductivo (D.R.) y después del periodo de extracciones (D.E.) para cada uno de los intervalos del rango de estudio, en este caso será simulado hasta el instante de tiempo $t=20$ (Tablas 6.4A, 6.4B, 6.4C Y 6.4D).

Tabla 6.4A. Evolución de la población a lo largo de 20 años sin intervención humana.

	D.R.+0	D.E.+0	D.R.+1	D.E.+1	D.R.+2	D.E.+2	D.R.+3	D.E.+3	D.R.+4	D.E.+4
F1	24	24	26	26	32	32	39	39	47	47
F2	64	64	80	80	97	97	117	117	142	142
M1	30	30	26	26	32	32	39	39	47	47
M2	20	20	26	26	22	22	27	27	33	33
M3	21	21	31	31	43	43	47	47	54	54
M4	23	23	23	23	26	26	32	32	38	38
M5	18	18	18	18	18	18	19	19	21	21
Total	200	200	230	230	270	270	320	320	382	382
Ciervos/100ha	2,91	2,91	3,35	3,35	3,93	3,93	4,66	4,66	5,57	5,57

Tabla 6.4B. Evolución de la población a lo largo de 20 años sin intervención humana.

D.R.+5	D.E.+5	D.R.+6	D.E.+6	D.R.+7	D.E.+7	D.R.+8	D.E.+8	D.R.+9	D.E.+9	D.R.+10	D.E.+10
57	57	69	69	83	83	101	101	122	122	148	148
172	172	208	208	252	252	305	305	370	370	447	447
57	57	69	69	83	83	101	101	122	122	148	148
40	40	48	48	59	59	71	71	86	86	104	104
64	64	77	77	92	92	111	111	134	134	162	162
44	44	52	52	61	61	73	73	87	87	104	104
24	24	28	28	32	32	37	37	44	44	52	52
458	458	551	551	662	662	799	799	965	965	1165	1165
6,67	6,67	8,03	8,03	9,64	9,64	11,64	11,64	14,06	14,06	16,97	16,97

Tabla 6.4C. Evolución de la población a lo largo de 20 años sin intervención humana.

D.R.+11	D.E.+11	D.R.+12	D.E.+12	D.R.+13	D.E.+13	D.R.+14	D.E.+14	D.R.+15	D.E.+15
179	179	216	216	223	223	220	220	209	209
541	541	655	655	773	773	867	867	933	933
179	179	216	216	223	223	220	220	209	209
126	126	152	152	171	171	165	165	153	153
196	196	237	237	284	284	326	326	344	344
125	125	151	151	181	181	214	214	248	248
62	62	74	74	88	88	103	103	120	120
1408	1408	1701	1701	1943	1943	2115	2115	2216	2216
20,51	20,51	24,78	24,78	28,31	28,31	30,81	30,81	32,28	32,28

Tabla 6.4D. Evolución de la población a lo largo de 20 años sin intervención humana.

D.R.+16	D.E.+16	D.R.+17	D.E.+17	D.R.+18	D.E.+18	D.R.+19	D.E.+19	D.R.+20	D.E.+20
199	199	193	193	190	190	190	190	190	190
973	973	996	996	1009	1009	1018	1018	1026	1026
199	199	193	193	190	190	190	190	190	190
140	140	130	130	125	125	123	123	122	122
343	343	330	330	313	313	298	298	287	287
275	275	293	293	301	301	301	301	296	296
139	139	158	158	175	175	188	188	197	197
2268	2268	2293	2293	2303	2303	2308	2308	2308	2308
33,04	33,04	33,41	33,41	33,55	33,55	33,62	33,62	33,62	33,62

Una vez realizada la simulación, se procederá a interpretar y comentar los resultados obtenidos, así como a planear la estrategia de gestión a seguir.

En un primer análisis superficial de los valores numéricos (Tablas 6.4A, 6.4B, 6.4C Y 6.4D) y de su representación gráfica (Figura 6.2) se puede observar un rápido crecimiento inicial, que se ralentiza una vez se supera la capacidad óptima del medio hasta detenerse finalmente en valores próximos a la capacidad de carga del mismo. Por otra parte, al no existir un plan de extracciones, la población después del periodo

reproductivo y después del periodo de extracciones dentro del mismo intervalo de tiempo será la misma.

El siguiente paso que aporta información esencial a cerca del crecimiento de la población, es el estudio del autovector, reuniendo estos valores (Tablas 6.5A, 6.5B, 6.5C, 6.5D), seremos capaces de conocer: el ratio de crecimiento de cada una de las clases de calidad y de la población en cada uno de los instantes de tiempo y el autovalor dominante de la matriz de crecimiento A en condiciones óptimas de crecimiento.

Tabla 6.5A. Evolución de los autovectores de la población estudiada por clases de calidad en el rango de tiempo estudiado.

	D.E.+0	D.R.+1	D.E.+1	D.R.+2	D.E.+2	D.R.+3	D.E.+3	D.R.+4	D.E.+4	D.R.+5	D.E.+5
F1	-	1,08	1,08	1,23	1,23	1,22	1,22	1,21	1,21	1,21	1,21
F2	-	1,25	1,25	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21
M1	-	0,87	0,87	1,23	1,23	1,22	1,22	1,21	1,21	1,21	1,21
M2	-	1,3	1,3	0,85	0,85	1,23	1,23	1,22	1,22	1,21	1,21
M3	-	1,48	1,48	1,39	1,39	1,09	1,09	1,15	1,15	1,19	1,19
M4	-	1	1	1,13	1,13	1,23	1,23	1,19	1,19	1,16	1,16
M5	-	1	1	1	1	1,06	1,06	1,11	1,11	1,14	1,14
Total	-	1,15	1,15	1,17	1,17	1,19	1,19	1,19	1,19	1,2	1,2

Tabla 6.5B. Evolución de los autovectores de la población estudiada por clases de calidad en el rango de tiempo estudiado.

D.R.+6	D.E.+6	D.R.+7	D.E.+7	D.R.+8	D.E.+8	D.R.+9	D.E.+9	D.R.+10	D.E.+10
1,21	1,21	1,2	1,2	1,22	1,22	1,21	1,21	1,21	1,21
1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21
1,21	1,21	1,2	1,2	1,22	1,22	1,21	1,21	1,21	1,21
1,2	1,2	1,23	1,23	1,2	1,2	1,21	1,21	1,21	1,21
1,2	1,2	1,19	1,19	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21
1,18	1,18	1,17	1,17	1,2	1,2	1,19	1,19	1,2	1,2
1,17	1,17	1,14	1,14	1,16	1,16	1,19	1,19	1,18	1,18
1,2	1,2	1,2	1,2	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21

Tabla 6.5C. Evolución de los autovectores de la población estudiada por clases de calidad en el rango de tiempo estudiado.

D.R.+11	D.E.+11	D.R.+12	D.E.+12	D.R.+13	D.E.+13	D.R.+14	D.E.+14	D.R.+15	D.E.+15
1,21	1,21	1,21	1,21	1,03	1,03	0,99	0,99	0,95	0,95
1,21	1,21	1,21	1,21	1,18	1,18	1,12	1,12	1,08	1,08
1,21	1,21	1,21	1,21	1,03	1,03	0,99	0,99	0,95	0,95
1,21	1,21	1,21	1,21	1,13	1,13	0,96	0,96	0,93	0,93
1,21	1,21	1,21	1,21	1,2	1,2	1,15	1,15	1,06	1,06
1,2	1,2	1,21	1,21	1,2	1,2	1,18	1,18	1,16	1,16
1,19	1,19	1,19	1,19	1,19	1,19	1,17	1,17	1,17	1,17
1,21	1,21	1,21	1,21	1,14	1,14	1,09	1,09	1,05	1,05

Tabla 6.5D. Evolución de los autovectores de la población estudiada por clases de calidad en el rango de tiempo estudiado.

D.R.+16	D.E.+16	D.R.+17	D.E.+17	D.R.+18	D.E.+18	D.R.+19	D.E.+19	D.R.+20	D.E.+20
0,95	0,95	0,97	0,97	0,98	0,98	1	1	1	1
1,04	1,04	1,02	1,02	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01
0,95	0,95	0,97	0,97	0,98	0,98	1	1	1	1
0,92	0,92	0,93	0,93	0,96	0,96	0,98	0,98	0,99	0,99
1	1	0,96	0,96	0,95	0,95	0,95	0,95	0,96	0,96
1,11	1,11	1,07	1,07	1,03	1,03	1	1	0,98	0,98
1,16	1,16	1,14	1,14	1,11	1,11	1,07	1,07	1,05	1,05
1,02	1,02	1,01	1,01	1	1	1	1	1	1

El estudio de estos autovalores confirma que el crecimiento de la población comienza con un autovalor $\lambda=1,15$, por debajo del autovalor dominante, debido a la distribución irregular de la misma, aumentando el crecimiento progresivamente hasta estabilizarse entre $t=8$ y $t=12$ en el que será como se ha explicado en el método iterativo para el cálculo de autovalores y autovectores, el autovalor dominante de la matriz ($\lambda=1,21$). Una vez la población supera la capacidad óptima del medio los factores de freno densodependientes del crecimiento comienzan a hacer efecto reduciendo drásticamente el autovalor y por lo tanto el crecimiento hasta llegar a $\lambda=1$ con densidades muy próximas a la capacidad de carga, haciendo nulo el crecimiento

(Figura 6.3). Al no introducirse en el modelo extracciones los autovectores resultantes después de la reproducción y después de las extracciones no varían.

Figura 6.3. Representación gráfica de la evolución del autovalor general de la población sin intervención humana.

La siguiente información que podemos extraer del modelo es el vector de distribución estable de la población en condiciones de densidad óptimas, para ello se representará la evolución de las proporciones a lo largo del periodo de estudio y se obtendrán las conclusiones oportunas (Tablas 6.6A, Tablas 6.6B, Tablas 6.6C, Tablas 6.6D).

Tabla 6.6A. Evolución de los vectores de proporciones a lo largo del periodo estudiado

	D.E.+0	D.R.+1	D.E.+1	D.R.+2	D.E.+2	D.R.+3	D.E.+3	D.R.+4	D.E.+4
F1	0,12	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12
F2	0,32	0,35	0,35	0,36	0,36	0,37	0,37	0,37	0,37
M1	0,15	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12
M2	0,1	0,11	0,11	0,08	0,08	0,08	0,08	0,09	0,09
M3	0,11	0,13	0,13	0,16	0,16	0,15	0,15	0,14	0,14
M4	0,12	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
M5	0,09	0,08	0,08	0,07	0,07	0,06	0,06	0,05	0,05

Tabla 6.6B. Evolución de los vectores de proporciones a lo largo del periodo estudiado

D.R.+5	D.E.+5	D.R.+6	D.E.+6	D.R.+7	D.E.+7	D.R.+8	D.E.+8	D.R.+9	D.E.+9	D.R.+10	D.E.+10
0,12	0,12	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13
0,38	0,38	0,38	0,38	0,38	0,38	0,38	0,38	0,38	0,38	0,38	0,38
0,12	0,12	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13
0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09
0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14
0,1	0,1	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09
0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,04	0,04

Tabla 6.6C. Evolución de los vectores de proporciones a lo largo del periodo estudiado

D.R.+11	D.E.+11	D.R.+12	D.E.+12	D.R.+13	D.E.+13	D.R.+14	D.E.+14	D.R.+15	D.E.+15
0,13	0,13	0,13	0,13	0,11	0,11	0,1	0,1	0,09	0,09
0,38	0,38	0,39	0,39	0,4	0,4	0,41	0,41	0,42	0,42
0,13	0,13	0,13	0,13	0,11	0,11	0,1	0,1	0,09	0,09
0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,08	0,08	0,07	0,07
0,14	0,14	0,14	0,14	0,15	0,15	0,15	0,15	0,16	0,16
0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,1	0,1	0,11	0,11
0,04	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05

Tabla 6.6D. Evolución de los vectores de proporciones a lo largo del periodo estudiado

D.R.+16	D.E.+16	D.R.+17	D.E.+17	D.R.+18	D.E.+18	D.R.+19	D.E.+19	D.R.+20	D.E.+20
0,09	0,09	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08
0,43	0,43	0,43	0,43	0,44	0,44	0,44	0,44	0,44	0,44
0,09	0,09	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08
0,06	0,06	0,06	0,06	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
0,15	0,15	0,14	0,14	0,14	0,14	0,13	0,13	0,12	0,12
0,12	0,12	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13
0,06	0,06	0,07	0,07	0,08	0,08	0,08	0,08	0,09	0,09

Gracias al método de las iteraciones, cuando el vector de distribuciones se estabilice y permanezca constante en una serie de simulaciones en intervalos de tiempo consecutivos, se puede asegurar que esa distribución coincidirá con la distribución estable del vector de población y con el autovector asociado al autovalor dominante de la matriz A. Puesto que este modelo en cargas superiores a la capacidad óptima del medio aplica factores de freno a la matriz A, produciendo variaciones en esta en función de la densidad, los autovalores y por lo tanto autovectores resultantes serán diferentes para cada densidad a partir de ese punto, por lo tanto el autovector estable se buscará para el autovalor dominante de la matriz A en condiciones óptimas del medio. Cabe destacar, que el método iterativo necesita de una serie variable de simulaciones consecutivas para llegar a estabilizar el vector, el número de series necesarias dependerá de la proximidad a la estabilización del vector X_t inicial, cuanto más cercana a la estabilidad este su distribución, menor serán

las series necesarias para estabilizarlo. En caso de que el vector inicial introducido no cuente con las series suficientes antes de que la población supere la CO para estabilizarse, se proponen dos alternativas: realizar el cálculo matemáticamente con los métodos tradicionales basados en la ecuación característica de la matriz que ya ha sido ampliamente descrito en este trabajo o basándonos nuevamente en el método de las iteraciones, realizar una simulación con un vector aleatorio inicial X_t con una densidad baja de animales con el fin de que el vector de población tenga suficientes sucesiones y se estabilice antes de superar la CO. Posteriormente se aplica este vector obtenido al estudio de la población real que nos ocupa, ya que el autovector estable depende de la matriz A y por lo tanto, será el mismo independientemente del vector inicial de población.

Analizando los resultados obtenidos, se puede observar la estabilización del vector de distribuciones en dos momentos, a partir del instante de tiempo $t+10$ hasta el instante de tiempo $t+13$, a partir del cual la población supera la C.O y por lo tanto, los factores densodependientes modifican la matriz A y por otro lado, a partir del instante $t+18$ cuando la población alcanza la C.C y vuelve a tener un autovalor dominante constante ($\lambda=1$). Como consecuencia, sabemos la distribución estable de la población para un autovalor dominante $\lambda=1,21$ en condiciones de carga óptima y la distribución de la población cuando esta se encuentra en la capacidad de carga (Tabla 6.7).

Tabla 6.7. Distribución estable (%) por clases de calidad en capacidad de carga óptima y en capacidad de carga máxima.

	Capacidad óptima	Capacidad de carga
F1	13	8
F2	39	44
M1	13	8
M2	9	5
M3	14	12
M4	9	13
M5	4	9

Se puede ver claramente como la densidad elevada afecta sobre todo al número de nacimientos de crías y a la supervivencia de estas, ya que en condiciones óptimas del medio estas supondrían un 13% de la población total, mientras que en condiciones de carga máxima estas tendrían una representación el 8% con respecto a la población total.

Una vez extraída e interpretada toda la información que el modelo puede aportar, llega el momento de planificar la gestión. El objetivo principal es mantener una

población estable mediante extracciones que garanticen la sostenibilidad del recurso, permitiendo una máxima explotación al mismo tiempo que se conserva su ecosistema. Por lo tanto, para cumplir con estos requisitos se debe mantener la población siempre en niveles inferiores o iguales a la capacidad óptima del medio para que este no se vea degradado debido a la presión que en gran número estos animales ejercen. Para empezar, debemos conocer el vector de población que queremos mantener a lo largo de los años, como ya es sabido la carga óptima del medio es de unos 1400 ejemplares, por lo tanto, será ese punto donde tendremos un crecimiento máximo de la población sin poner en peligro su medio, siendo, el vector objetivo de la población será el resultado de:

$$\vec{X}_{O.D.R.} = \begin{pmatrix} 1400 \cdot 0,13 \\ 1400 \cdot 0,39 \\ 1400 \cdot 0,13 \\ 1400 \cdot 0,09 \\ 1400 \cdot 0,14 \\ 1400 \cdot 0,09 \\ 1400 \cdot 0,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 182 \\ 546 \\ 182 \\ 126 \\ 196 \\ 126 \\ 56 \end{pmatrix}$$

Este vector escogido deberá cumplirse en el momento en que la densidad de la población es máxima a lo largo del año, es decir, después del periodo reproductivo, ya que de otro modo se correría el riesgo de superar la capacidad óptima de carga en algún momento del año con indeseables consecuencias.

Conocido el vector objetivo de la población ($X_{O.D.R.}$) y el periodo anual en el que queremos tenerlo, resta saber el momento de inicio de las extracciones, el cual deberá corresponderse con el momento en que la población de manera natural supere la capacidad óptima del medio (Tabla 6.8).

Tabla 6.8. Instante en que la población supera la capacidad óptima del medio de manera natural

	D.R.+11	D.E.+11	D.R.+12	D.E.+12
F1	179	179	216	216
F2	541	541	655	655
M1	179	179	216	216
M2	126	126	152	152
M3	196	196	237	237
M4	125	125	151	151
M5	62	62	74	74
Total	1408	1408	1701	1701
Ciervos/100ha	20,51	20,51	24,78	24,78

Es por lo tanto en el instante $t+11$, cuando las extracciones deben impedir que la población supere ampliamente los 1400 individuos en el instante $t+12$ consecutivo. Deberán ser calculados dos vectores de extracciones diferentes: el primero de ellos para converger el vector de la población natural al objetivo y el segundo de ellos para mantener el vector deseado constante a lo largo de los años. En este caso, puesto que el vector de partida de $t+11$ prácticamente coincide ya con el vector objetivo la variación será muy pequeña entre estos dos vectores de extracciones. Como vamos a trabajar con vectores de población después de la época de reproducción para garantizar que nunca se sobrepasa la densidad de gestión, la matriz de extracciones deberá introducirse en el modelo como producto por la derecha.

$$\vec{X}_{t+1} = A E \vec{X}_t$$

Calculando el ratio de extracciones según la fórmula:

$$h_{jit} = 1 + \frac{x_{jiD.R.t+1 \rightarrow x_{ji-1D.E.t}} - x_{o\ jiD.R.t+1}}{x_{jiD.R.t+1 \rightarrow x_{jiD.R.t}}}$$

Donde:

h_{jit} = Porcentaje de extracciones del sexo j y de la clase i en la temporada de extracciones t

$x_{jiD.R.t+1 \rightarrow x_{ji-1D.E.t}}$ = Individuos de sexo j y clase i después de la época de reproducción $t+1$

procedentes de los individuos de sexo j y clase $i-1$ después de la temporada de extracciones t

$x_{o\ jiD.R.t+1}$ = Individuos objetivo de sexo j y clase i después de la época reproductiva $t+1$

$x_{jiD.R.t+1 \rightarrow x_{jiD.R.t}}$ = Individuos de sexo j y clase i después de la época de reproducción $t+1$

procedentes de los individuos de sexo j y clase i después del periodo reproductivo t

Como se ha demostrado en los desarrollos de las fórmulas, el número de individuos en el instante de tiempo $t+1$ de las clases más bajas para ambos sexos (F1, M1 y M2) depende únicamente del número de individuos supervivientes al final del periodo de tiempo t de la clase inmediatamente anterior, (F2 o M1), por lo tanto, las extracciones sobre ellas en el instante de tiempo t no tendrán influencia sobre esa misma clase en el instante $t+1$. En resumen, si el número de hembras reproductoras se reconduce a los valores deseados las clases F1 y M1 también lo harán. Para simplificar cálculos y no recurrir a fórmulas que están en función del porcentaje de extracciones de varias clases al mismo tiempo, el ratio de extracciones para estas clases va a ser calculado en función del autovalor dominante conocido de la matriz A , $\lambda=1,21$ para buscar un autovector $\lambda=1$:

$$h_{ji} = 1 - \frac{\lambda'_{ji}}{\lambda_{ji}}$$

$$h_{ji} = 1 - \frac{1}{1,21} = 0,1735$$

A continuación, ya se pueden calcular el resto de los ratios de extracción para la temporada de extracciones t+11:

$$h_{F1} = 0,174$$

$$h_{F2} = 1 + \left(\frac{(1 \cdot 0,88 \cdot 179 \cdot (1 - 0,1735)) - 546}{(1 \cdot 0,92 \cdot 541)} \right) = 0,165$$

$$h_{M1} = 0,174$$

$$h_{M2} = 0,174$$

$$h_{M3} = 1 + \left(\frac{(1 \cdot 0,9 \cdot 126 \cdot (1 - 0,1735)) - 196}{(1 \cdot 0,6333 \cdot 196)} \right) = 0,176$$

$$h_{M4} = 1 + \left(\frac{(1 \cdot 0,3166 \cdot 196 \cdot (1 - 0,176)) - 126}{(1 \cdot 0,7125 \cdot 125)} \right) = 0,159$$

$$h_{M5} = 1 + \left(\frac{(1 \cdot 0,2375 \cdot 125 \cdot (1 - 0,1593)) - 56}{(1 \cdot 0,7125 \cdot 62)} \right) = 0,297$$

Una vez reconducido el vector de población hacia el vector objetivo con las primeras extracciones, las extracciones sucesivas puesto que el vector se encuentra estabilizado en su autovector dominante y la intención es mantener la población y su distribución estable en esos valores tantos años como se desee, se busca el autovector $\lambda=1$:

$$h_{ji} = 1 - \frac{\lambda'_{ji}}{\lambda_{ji}}$$

$$h_{ji} = 1 - \frac{1}{1,21} = 0,1735$$

Por lo tanto, se introducirá ese porcentaje de extracciones en el modelo, para cada clase a partir del instante de tiempo t+12 y durante todo el rango de tiempo simulado, a continuación, se estudiarán e interpretarán los resultados (Tablas 6.9A, 6.9B, 6.9C, 6.9D).

Tabla 6.9A. Evolución de la población a lo largo de 20 años bajo gestión humana.

	D.R.+0	D.E.+0	D.R.+1	D.E.+1	D.R.+2	D.E.+2	D.R.+3	D.E.+3	D.R.+4	D.E.+4
F1	24	24	26	26	32	32	39	39	47	47
F2	64	64	80	80	97	97	117	117	142	142
M1	30	30	26	26	32	32	39	39	47	47
M2	20	20	26	26	22	22	27	27	33	33
M3	21	21	31	31	43	43	47	47	54	54
M4	23	23	23	23	26	26	32	32	38	38
M5	18	18	18	18	18	18	19	19	21	21
Total	200	200	230	230	270	270	320	320	382	382
Ciervos/100ha	2,91	2,91	3,35	3,35	3,93	3,93	4,66	4,66	5,57	5,57

Tabla 6.9B. Evolución de la población a lo largo de 20 años bajo gestión humana.

D.R.+5	D.E.+5	D.R.+6	D.E.+6	D.R.+7	D.E.+7	D.R.+8	D.E.+8	D.R.+9	D.E.+9	D.R.+10	D.E.+10
57	57	69	69	83	83	101	101	122	122	148	148
172	172	208	208	252	252	305	305	370	370	447	447
57	57	69	69	83	83	101	101	122	122	148	148
40	40	48	48	59	59	71	71	86	86	104	104
64	64	77	77	92	92	111	111	134	134	162	162
44	44	52	52	61	61	73	73	87	87	104	104
24	24	28	28	32	32	37	37	44	44	52	52
458	458	551	551	662	662	799	799	965	965	1165	1165
6,67	6,67	8,03	8,03	9,64	9,64	11,64	11,64	14,06	14,06	16,97	16,97

Tabla 6.9C. Evolución de la población a lo largo de 20 años bajo gestión humana.

D.R.+11	D.E.+11	D.R.+12	D.E.+12	D.R.+13	D.E.+13	D.R.+14	D.E.+14	D.R.+15	D.E.+15
179	148	180	149	180	149	180	149	180	149
541	452	546	451	546	451	546	451	546	451
179	148	180	149	180	149	180	149	180	149
126	104	126	104	126	104	126	104	126	104
196	162	196	162	196	162	196	162	196	162
125	105	126	104	125	103	125	103	125	103
62	44	56	46	57	47	58	48	59	49
1408	1163	1410	1165	1410	1165	1411	1166	1412	1167
20,51	16,94	20,54	16,97	20,54	16,97	20,56	16,99	20,57	17

Tabla 6.9D. Evolución de la población a lo largo de 20 años bajo gestión humana.

D.R.+16	D.E.+16	D.R.+17	D.E.+17	D.R.+18	D.E.+18	D.R.+19	D.E.+19	D.R.+20	D.E.+20
179	148	180	149	179	148	179	148	179	148
546	451	545	450	545	450	544	449	543	449
179	148	180	149	179	148	179	148	179	148
126	104	126	104	126	104	126	104	126	104
196	162	196	162	196	162	196	162	196	162
125	103	125	103	125	103	125	103	125	103
59	49	59	49	59	49	59	49	59	49
1410	1165	1411	1166	1409	1164	1408	1163	1407	1163
20,54	16,97	20,56	16,99	20,53	16,96	20,51	16,94	20,5	16,94

Ahora si es evidente la diferencia entre la población después de la reproducción y después de las extracciones a partir del instante $t+11$, que es cuando se habría empezado a gestionar (Figura 6.4).

Figura 6.4. Evolución de la población estudiada desde $t=0$ a $t=20$ con extracciones

Estas extracciones, (Tabla 6.10) lo que consiguen es mantener la población estable a niveles óptimos de carga sin llegar a superarla nunca, al mismo tiempo que se puede obtener la máxima renta en la extracción.

Tabla 6.10. Número total de animales extraídos cada temporada por clase de calidad.

	t+0	t+1	t+2	t+3	t+4	t+5	t+6	t+7	t+8	t+9	t+10	t+11	t+12	t+13	t+14	t+15	t+16	t+17	t+18	t+19	t+20
F1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31
F2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89	95	95	95	95	95	95	95	95	94
M1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31
M2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22
M3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34
M4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	22	22	22	22	22	22	22	22	22
M5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	10	10	10	10	10	10	10	10	10
Total	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	245	245	245	245	245	245	245	245	245	244

Por último, el estudio de los autovalores (Tablas 6.11A, 6.11B, 6.11C, 6.11D) nos confirma nuevamente que el objetivo ha sido cumplido, los autovalores de la población después de la reproducción se mantienen iguales al autovalor dominante de la matriz A, provocando un crecimiento máximo, mientras que los autovalores de la población después de la extracción son iguales a la unidad, lo que significa que el rendimiento de la extracción es sostenible y la distribución estable de la población se mantiene (Figura 6.5).

Tabla 6.11A. Evolución de los autovalores totales y por clases de la población bajo gestión.

	D.E.+0	D.R.+1	D.E.+1	D.R.+2	D.E.+2	D.R.+3	D.E.+3	D.R.+4	D.E.+4	D.R.+5	D.E.+5
F1	-	1,08	1,08	1,23	1,23	1,22	1,22	1,21	1,21	1,21	1,21
F2	-	1,25	1,25	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21
M1	-	0,87	0,87	1,23	1,23	1,22	1,22	1,21	1,21	1,21	1,21
M2	-	1,3	1,3	0,85	0,85	1,23	1,23	1,22	1,22	1,21	1,21
M3	-	1,48	1,48	1,39	1,39	1,09	1,09	1,15	1,15	1,19	1,19
M4	-	1	1	1,13	1,13	1,23	1,23	1,19	1,19	1,16	1,16
M5	-	1	1	1	1	1,06	1,06	1,11	1,11	1,14	1,14
Total	-	1,15	1,15	1,17	1,17	1,19	1,19	1,19	1,19	1,2	1,2

Tabla 6.11B. Evolución de los autovalores totales y por clases de la población bajo gestión.

D.R.+6	D.E.+6	D.R.+7	D.E.+7	D.R.+8	D.E.+8	D.R.+9	D.E.+9	D.R.+10	D.E.+10
1,21	1,21	1,2	1,2	1,22	1,22	1,21	1,21	1,21	1,21
1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21
1,21	1,21	1,2	1,2	1,22	1,22	1,21	1,21	1,21	1,21
1,2	1,2	1,23	1,23	1,2	1,2	1,21	1,21	1,21	1,21
1,2	1,2	1,19	1,19	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21
1,18	1,18	1,17	1,17	1,2	1,2	1,19	1,19	1,2	1,2
1,17	1,17	1,14	1,14	1,16	1,16	1,19	1,19	1,18	1,18
1,2	1,2	1,2	1,2	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21

Tabla 6.11C. Evolución de los autovalores totales y por clases de la población bajo gestión.

D.R.+11	D.E.+11	D.R.+12	D.E.+12	D.R.+13	D.E.+13	D.R.+14	D.E.+14	D.R.+15	D.E.+15
1,21	1	1,22	1,01	1,21	1	1,21	1	1,21	1
1,21	1,01	1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1
1,21	1	1,22	1,01	1,21	1	1,21	1	1,21	1
1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1
1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1
1,2	1,01	1,2	0,99	1,2	0,99	1,21	1	1,21	1
1,19	0,85	1,27	1,05	1,24	1,02	1,23	1,02	1,23	1,02
1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1

Tabla 6.11D. Evolución de los autovalores totales y por clases de la población bajo gestión.

D.R.+16	D.E.+16	D.R.+17	D.E.+17	D.R.+18	D.E.+18	D.R.+19	D.E.+19	D.R.+20	D.E.+20
1,2	0,99	1,22	1,01	1,2	0,99	1,21	1	1,21	1
1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1
1,2	0,99	1,22	1,01	1,2	0,99	1,21	1	1,21	1
1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1
1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1
1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1
1,2	1	1,2	1	1,2	1	1,2	1	1,2	1
1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1

Figura 6.5. Evolución del autovalor general D.E. de la población bajo gestión humana.

6.4 Convergencia por encima de la capacidad óptima

El segundo supuesto, hace referencia a la situación real de la población de ciervo ibérico en la finca de “Quintos de Mora” en el momento en que fueron tomados los datos que están disponibles, es decir, la población se encuentra muy por encima de la capacidad óptima del medio y muy cerca de la capacidad de carga de esta. Por lo

tanto, sería deber del gestor planificar las extracciones necesarias para disminuir esta población hasta valores de densidad óptimos. Para ello, se introducirá en el modelo el vector de población actual de la finca $X_{D.R.t+0}$, que suma un total de 1963 animales (Tabla 6.12).

Tabla 6.12. Distribución de la población real de la finca “Quintos de Mora” en el momento de comenzar con la simulación ($X_{D.R.t+0}$).

Clase de calidad	Número de Individuos
F1	206
F2	750
M1	206
M2	89
M3	267
M4	213
M5	232
Total	1963
Ciervos/100ha	28,6

Introducido el vector inicial en el modelo, este arroja los resultados de la evolución de la población sin extracciones, en un rango de tiempo $t=20$ y dos veces cada temporada, después del periodo reproductivo y después de las extracciones (Tablas 6.13A, 6.13B, 6.13C, 6.13D).

Tabla 6.13A. Evolución de la población a lo largo de 20 años sin intervención humana.

	D.R.+0	D.E.+0	D.R.+1	D.E.+1	D.R.+2	D.E.+2	D.R.+3	D.E.+3	D.R.+4	D.E.+4
F1	206	206	210	210	206	206	202	202	198	198
F2	750	750	831	831	895	895	941	941	974	974
M1	206	206	210	210	206	206	202	202	198	198
M2	89	89	151	151	148	148	140	140	135	135
M3	267	267	244	244	282	282	301	301	305	305
M4	213	213	231	231	235	235	248	248	262	262
M5	232	232	211	211	199	199	191	191	188	188
Total	1963	1963	2088	2088	2171	2171	2225	2225	2260	2260
Ciervos/100ha	28,6	28,6	30,42	30,42	31,63	31,63	32,42	32,42	32,93	32,93

Tabla 6.13B. Evolución de la población a lo largo de 20 años sin intervención humana.

D.R.+5	D.E.+5	D.R.+6	D.E.+6	D.R.+7	D.E.+7	D.R.+8	D.E.+8	D.R.+9	D.E.+9	D.R.+10	D.E.+10
195	195	193	193	193	193	193	193	194	194	193	193
997	997	1012	1012	1023	1023	1033	1033	1041	1041	1048	1048
195	195	193	193	193	193	193	193	194	194	193	193
130	130	127	127	125	125	125	125	124	124	125	125
303	303	297	297	290	290	284	284	281	281	278	278
273	273	279	279	281	281	280	280	278	278	275	275
189	189	192	192	195	195	197	197	199	199	199	199
2282	2282	2293	2293	2300	2300	2305	2305	2311	2311	2311	2311
33,25	33,25	33,41	33,41	33,51	33,51	33,58	33,58	33,67	33,67	33,67	33,67

Tabla 6.13C. Evolución de la población a lo largo de 20 años sin intervención humana.

D.R.+11	D.E.+11	D.R.+12	D.E.+12	D.R.+13	D.E.+13	D.R.+14	D.E.+14	D.R.+15	D.E.+15
195	195	194	194	195	195	195	195	195	195
1053	1053	1059	1059	1063	1063	1067	1067	1070	1070
195	195	194	194	195	195	195	195	195	195
124	124	125	125	125	125	125	125	125	125
277	277	275	275	275	275	275	275	275	275
272	272	270	270	268	268	267	267	266	266
199	199	198	198	197	197	196	196	195	195
2315	2315	2315	2315	2318	2318	2320	2320	2321	2321
33,73	33,73	33,73	33,73	33,77	33,77	33,8	33,8	33,81	33,81

Tabla 6.13D. Evolución de la población a lo largo de 20 años sin intervención humana.

D.R.+16	D.E.+16	D.R.+17	D.E.+17	D.R.+18	D.E.+18	D.R.+19	D.E.+19	D.R.+20	D.E.+20
195	195	196	196	195	195	196	196	195	195
1073	1073	1075	1075	1078	1078	1080	1080	1082	1082
195	195	196	196	195	195	196	196	195	195
125	125	125	125	125	125	125	125	125	125
275	275	275	275	275	275	275	275	275	275
265	265	265	265	264	264	264	264	264	264
194	194	193	193	192	192	191	191	191	191
2322	2322	2325	2325	2324	2324	2327	2327	2327	2327
33,83	33,83	33,87	33,87	33,86	33,86	33,9	33,9	33,9	33,9

Al igual que ocurría en la simulación anterior, al no existir intervención humana de ningún tipo, la población crece descontrolada hasta alcanzar la capacidad de carga del medio, donde su propia densidad le impide continuar creciendo. En este caso, debido a que el vector inicial es muy próximo a la capacidad de carga del medio, esta se alcanzará rápidamente (Figura 6.5), por lo que la intervención por parte del gestor ha de ser inmediata.

Figura 6.5. Evolución de la población desde $t=0$ a $t=20$ sin intervención humana.

Por lo tanto, el autovalor, indicador del valor de crecimiento anual de la población se igualará a uno en un corto periodo de tiempo (Tablas 6.14A, 6.14B, 6.14C, 6.14D) al alcanzar la densidad de carga (Figura 6.6).

Tabla 6.14A. Evolución de los autovectores de la población estudiada por clases de calidad en el rango de tiempo estudiado sin intervención humana.

	D.E.+0	D.R.+1	D.E.+1	D.R.+2	D.E.+2	D.R.+3	D.E.+3	D.R.+4	D.E.+4	D.R.+5	D.E.+5
F1	-	1,02	1,02	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98
F2	-	1,11	1,11	1,08	1,08	1,05	1,05	1,04	1,04	1,02	1,02
M1	-	1,02	1,02	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98
M2	-	1,7	1,7	0,98	0,98	0,95	0,95	0,96	0,96	0,96	0,96
M3	-	0,91	0,91	1,16	1,16	1,07	1,07	1,01	1,01	0,99	0,99
M4	-	1,08	1,08	1,02	1,02	1,06	1,06	1,06	1,06	1,04	1,04
M5	-	0,91	0,91	0,94	0,94	0,96	0,96	0,98	0,98	1,01	1,01
Total	-	1,06	1,06	1,04	1,04	1,02	1,02	1,02	1,02	1,01	1,01

Tabla 6.14B. Evolución de los autovectores de la población estudiada por clases de calidad en el rango de tiempo estudiado sin intervención humana.

D.R.+6	D.E.+6	D.R.+7	D.E.+7	D.R.+8	D.E.+8	D.R.+9	D.E.+9	D.R.+10	D.E.+10
0,99	0,99	1	1	1	1	1,01	1,01	0,99	0,99
1,02	1,02	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01
0,99	0,99	1	1	1	1	1,01	1,01	0,99	0,99
0,98	0,98	0,98	0,98	1	1	0,99	0,99	1,01	1,01
0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,99	0,99	0,99	0,99
1,02	1,02	1,01	1,01	1	1	0,99	0,99	0,99	0,99
1,02	1,02	1,02	1,02	1,01	1,01	1,01	1,01	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabla 6.14C. Evolución de los autovectores de la población estudiada por clases de calidad en el rango de tiempo estudiado sin intervención humana.

D.R.+11	D.E.+11	D.R.+12	D.E.+12	D.R.+13	D.E.+13	D.R.+14	D.E.+14	D.R.+15	D.E.+15
1,01	1,01	0,99	0,99	1,01	1,01	1	1	1	1
1	1	1,01	1,01	1	1	1	1	1	1
1,01	1,01	0,99	0,99	1,01	1,01	1	1	1	1
0,99	0,99	1,01	1,01	1	1	1	1	1	1
1	1	0,99	0,99	1	1	1	1	1	1
0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	1	1	1	1
1	1	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabla 6.14D. Evolución de los autovectores de la población estudiada por clases de calidad en el rango de tiempo estudiado sin intervención humana.

D.R.+16	D.E.+16	D.R.+17	D.E.+17	D.R.+18	D.E.+18	D.R.+19	D.E.+19	D.R.+20	D.E.+20
1	1	1,01	1,01	0,99	0,99	1,01	1,01	0,99	0,99
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1,01	1,01	0,99	0,99	1,01	1,01	0,99	0,99
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Figura 6.6. Evolución del autovalor general de la población sin intervención humana.

No será necesario repetir el estudio de las proporciones del vector estable de la población, ya que como la matriz A no ha sido modificada y este depende directamente de ella, la población convergerá a las mismas distribuciones que en la simulación anterior, por lo que se pueden reutilizar los resultados ya obtenidos. Por lo tanto, conociendo el vector de población actual y el vector de población objetivo (Tabla 6.15).

Tabla 6.15. Vector de la población actual D.R. frente al vector objetivo D.R. después de la ordenación.

	$X_{D.R.t+0}$	$X_{D.R.O}$
F1	206	182
F2	750	546
M1	206	182
M2	89	126
M3	267	196
M4	213	126
M5	232	56
Total	1963	1414

A continuación, se deberá planificar la estrategia a seguir para reconducir la población del vector actual al vector objetivo. En este caso, la población se encuentra en un valor de densidad bastante superior al objetivo marcado, por lo tanto, la planificación deberá centrarse en reducir esta población progresivamente hasta alcanzar los valores deseados. Los planes de ordenación cinegética no suelen exceder los cinco años de duración (Consejería de Agricultura, Medio Ambiente y Desarrollo Rural, Castilla-La Mancha 2017), por consiguiente este trabajo propone un método para redireccionar la población y detener la dinámica de crecimiento actual por

medio de una extracción ordenada a lo largo de cinco años, una vez alcanzado el vector objetivo bastará aplicar los ratios de extracción conocidos en el apartado anterior para mantener la población en ese punto.

El primer paso, consiste en realizar un planteamiento inicial (Tabla 6.16) de cómo se encuentra la población en ese momento con respecto al objetivo. En este caso todas las clases a excepción de una de ellas se encuentran en niveles superiores a los deseados, por lo tanto, en un periodo de 5 años deberá reducirse progresivamente la población en 549 individuos, lo que significa planificar una estrategia de gestión para reducir en aproximadamente 110 animales anualmente la población.

Tabla 6.16. Planteamiento inicial de reducción de la población para un período de 5 años

Clases de calidad	Población actual D.R.	Población Objetivo D.R.	Reducción total	Reducción anual
F1	206	182	24	5
F2	750	546	204	41
M1	206	182	24	5
M2	89	126	-37	-7
M3	267	196	71	14
M4	213	126	87	17
M5	232	56	176	35
Total	1963	1414	549	110

Aplicando esta reducción anual al vector de población inicial, se obtienen los vectores hipotéticos (Tabla 6.17) que la población debería de seguir una vez se apliquen los porcentajes de extracción que serán calculados más adelante, para llegar a alcanzar el vector objetivo de la población al sexto año, es decir el primer año del plan de ordenación siguiente donde deberá plantearse una nueva estrategia de ordenación en función de nuevos objetivos.

Tabla 6.17. Vectores hipotéticos de la evolución de la población gestionada

Clase	Año 0 D.R.	Año 1 D.R.	Año 2 D.R.	Año 3 D.R.	Año 4 D.R.	Año 5 D.R.
F1	206	201	196	191	186	181
F2	750	709	668	627	586	545
M1	206	201	196	191	186	181
M2	89	96	103	110	117	124
M3	267	253	239	225	211	197
M4	213	196	179	162	145	128
M5	232	197	162	127	92	57
Total	1963	1853	1743	1633	1523	1413

Llega el momento de plantear las extracciones necesarias para cumplir con la reducción de la población planteada. Para verificar la adaptabilidad del modelo y sus

cálculos, se proponen unos ratios de extracción fijos en concepto de extracciones selectivas para las clases de edad más bajas (F1, M1 y M2) que cuentan con un menor interés cinegético y comercial, esto es debido a que el número de individuos en estas clases bajas está directamente relacionado con el número de hembras reproductoras, por lo que si el número de hembras reproductoras es reconducido hacia los objetivos, el número de individuos de estas clases bajas lo será también. El ratio de extracción anual propuesto para estas clases es del 5% anual.

Las extracciones calculadas para la temporada de extracciones $t=0$ se harán según la fórmula:

$$h_{jit} = 1 + \frac{x_{jiD.R.t+1 \rightarrow x_{ji-1D.E.t}} - x_{o\ jiD.R.t+1}}{x_{jiD.R.t+1 \rightarrow x_{jiD.R.t}}}$$

Puesto que la clase M3 se encuentra actualmente por debajo del objetivo, en el primer año de extracciones se le aplicará también un ratio del 5% en calidad de extracciones selectivas para favorecer su convergencia, el porcentaje de extracciones del primer año de gestión es el siguiente:

$$h_{F1} = 0,05$$

$$h_{F2} = 1 + \left(\frac{(0,864 \cdot 0,88 \cdot 206 \cdot (1 - 0,05)) - 709}{(0,977 \cdot 0,92 \cdot 750)} \right) = 0,1689$$

$$h_{M1} = 0,05$$

$$h_{M2} = 0,05$$

$$h_{M3} = 0,05$$

$$h_{M4} = 1 + \left(\frac{(0,977 \cdot 0,3166 \cdot 267 \cdot (1 - 0,05)) - 196}{(0,977 \cdot 0,7125 \cdot 213)} \right) = 0,2072$$

$$h_{M5} = 1 + \left(\frac{(0,977 \cdot 0,2375 \cdot 213 \cdot (1 - 0,2072)) - 197}{(0,977 \cdot 0,7125 \cdot 232)} \right) = 0,022$$

Aplicados estos porcentajes de extracción se obtiene el vector de la población después del periodo reproductivo siguiente $X_{D,R,t+1}$:

$$\vec{X}_{D,R,t+1} = \begin{pmatrix} 174 \\ 709 \\ 174 \\ 144 \\ 232 \\ 196 \\ 197 \end{pmatrix}$$

Conocido ya este vector, se puede continuar con los porcentajes de extracciones del segundo año, a partir de ahora el número de individuos pertenecientes a la clase M3 superan al objetivo para este periodo, por lo que sus extracciones deberán ser calculadas del mismo modo que se hace para las otras clases:

$$h_{F1} = 0,05$$

$$h_{F2} = 1 + \left(\frac{(0,901 \cdot 0,88 \cdot 174 \cdot (1 - 0,05)) - 668}{(0,983 \cdot 0,92 \cdot 709)} \right) = 0,1625$$

$$h_{M1} = 0,05$$

$$h_{M2} = 0,05$$

$$h_{M3} = 1 + \left(\frac{(0,983 \cdot 0,9 \cdot 144 \cdot (1 - 0,05)) - 239}{(0,983 \cdot 0,6333 \cdot 232)} \right) = 0,1831$$

$$h_{M4} = 1 + \left(\frac{(0,983 \cdot 0,3166 \cdot 232 \cdot (1 - 0,1831)) - 179}{(0,983 \cdot 0,7125 \cdot 196)} \right) = 0,1257$$

$$h_{M5} = 1 + \left(\frac{(0,983 \cdot 0,2375 \cdot 196 \cdot (1 - 0,1257)) - 162}{(0,983 \cdot 0,7125 \cdot 197)} \right) = 0,1158$$

Después de introducir estos porcentajes de extracción en el modelo, se obtiene el vector $X_{D,R,t+2}$.

$$\vec{X}_{D,R,t+2} = \begin{pmatrix} 186 \\ 668 \\ 186 \\ 126 \\ 240 \\ 179 \\ 162 \end{pmatrix}$$

Continuando con los porcentajes aplicados en el tercer año:

$$h_{F1} = 0,05$$

$$h_{F2} = 1 + \left(\frac{(0,921 \cdot 0,88 \cdot 186 \cdot (1 - 0,05)) - 627}{(0,987 \cdot 0,92 \cdot 668)} \right) = 0,2024$$

$$h_{M1} = 0,05$$

$$h_{M2} = 0,05$$

$$h_{M3} = 1 + \left(\frac{(0,987 \cdot 0,9 \cdot 126 \cdot (1 - 0,05)) - 226}{(0,987 \cdot 0,6333 \cdot 240)} \right) = 0,2019$$

$$h_{M4} = 1 + \left(\frac{(0,987 \cdot 0,3166 \cdot 240 \cdot (1 - 0,2019)) - 162}{(0,987 \cdot 0,7125 \cdot 179)} \right) = 0,1885$$

$$h_{M5} = 1 + \left(\frac{(0,987 \cdot 0,2375 \cdot 179 \cdot (1 - 0,1885)) - 127}{(0,987 \cdot 0,7125 \cdot 162)} \right) = 0,1813$$

Se obtiene:

$$\vec{X}_{D,R,t+3} = \begin{pmatrix} 176 \\ 628 \\ 176 \\ 139 \\ 227 \\ 162 \\ 128 \end{pmatrix}$$

Le sigue el cálculo de los porcentajes del cuarto año de intervenciones:

$$h_{F1} = 0,05$$

$$h_{F2} = 1 + \left(\frac{(0,948 \cdot 0,88 \cdot 176 \cdot (1 - 0,05)) - 586}{(0,991 \cdot 0,92 \cdot 628)} \right) = 0,2201$$

$$h_{M1} = 0,05$$

$$h_{M2} = 0,05$$

$$h_{M3} = 1 + \left(\frac{(0,991 \cdot 0,9 \cdot 139 \cdot (1 - 0,05)) - 211}{(0,991 \cdot 0,6333 \cdot 227)} \right) = 0,3456$$

$$h_{M4} = 1 + \left(\frac{(0,991 \cdot 0,3166 \cdot 227 \cdot (1 - 0,3456)) - 145}{(0,991 \cdot 0,7125 \cdot 162)} \right) = 0,1398$$

$$h_{M5} = 1 + \left(\frac{(0,991 \cdot 0,2375 \cdot 162 \cdot (1 - 0,1398)) - 93}{(0,991 \cdot 0,7125 \cdot 128)} \right) = 0,3338$$

$$\vec{X}_{D.R.t+4} = \begin{pmatrix} 174 \\ 586 \\ 174 \\ 135 \\ 211 \\ 145 \\ 93 \end{pmatrix}$$

Los porcentajes de la quinta y última temporada del plan de gestión son:

$$h_{F1} = 0,05$$

$$h_{F2} = 1 + \left(\frac{(0,975 \cdot 0,88 \cdot 174 \cdot (1 - 0,05)) - 545}{(0,996 \cdot 0,92 \cdot 586)} \right) = 0,2491$$

$$h_{M1} = 0,05$$

$$h_{M2} = 0,05$$

$$h_{M3} = 1 + \left(\frac{(0,996 \cdot 0,9 \cdot 135 \cdot (1 - 0,05)) - 197}{(0,996 \cdot 0,6333 \cdot 211)} \right) = 0,3836$$

$$h_{M4} = 1 + \left(\frac{(0,996 \cdot 0,3166 \cdot 211 \cdot (1 - 0,3836)) - 128}{(0,996 \cdot 0,7125 \cdot 145)} \right) = 0,1546$$

$$h_{M5} = 1 + \left(\frac{(0,996 \cdot 0,2375 \cdot 145 \cdot (1 - 0,1546)) - 57}{(0,996 \cdot 0,7125 \cdot 93)} \right) = 0,5756$$

Y el vector resultante, será el vector de población objetivo:

$$\vec{X}_{D.R.t+5} = \begin{pmatrix} 166 \\ 545 \\ 166 \\ 137 \\ 197 \\ 128 \\ 57 \end{pmatrix}$$

Una vez llegados a este momento, para mantener la población estable y obtener el máximo rendimiento anual, bastará con aplicar los porcentajes de extracción sostenible ya calculados en el punto anterior para la población igual a la capacidad óptima de este medio. Planificadas las extracciones, se introducen en el modelo para simular el desarrollo completo de la población desde $t=0$ a $t=20$ (Tablas 6.18A, 6.18B, 6.18C, 6.18D).

Tabla 6.18A. Evolución de la población a lo largo de 20 años con intervención humana.

	D.R.+0	D.E.+0	D.R.+1	D.E.+1	D.R.+2	D.E.+2	D.R.+3	D.E.+3	D.R.+4	D.E.+4
F1	206	196	174	165	186	177	176	167	174	165
F2	750	623	709	594	668	533	628	490	586	440
M1	206	196	174	165	186	177	176	167	174	165
M2	89	85	144	137	126	120	139	132	135	128
M3	267	254	232	190	240	192	227	149	211	130
M4	213	169	196	171	179	145	162	139	145	123
M5	232	227	197	174	162	133	128	85	93	39
Total	1963	1750	1826	1596	1747	1477	1636	1329	1518	1190
Ciervos/100ha	28,6	25,5	26,6	23,25	25,45	21,52	23,83	19,36	22,12	17,34

Tabla 6.18B. Evolución de la población a lo largo de 20 años con intervención humana.

D.R.+5	D.E.+5	D.R.+6	D.E.+6	D.R.+7	D.E.+7	D.R.+8	D.E.+8	D.R.+9	D.E.+9	D.R.+10	D.E.+10
166	137	180	149	177	146	178	147	177	146	178	147
545	450	535	442	538	444	536	443	537	444	536	443
166	137	180	149	177	146	178	147	177	146	178	147
137	113	116	96	127	105	124	102	125	103	124	102
197	163	205	169	193	159	195	161	194	160	194	160
128	106	127	105	128	106	126	104	125	103	124	102
57	47	59	49	60	50	61	50	60	50	60	50
1396	1153	1402	1159	1400	1156	1398	1154	1395	1152	1394	1151
20,34	16,8	20,43	16,89	20,4	16,84	20,37	16,81	20,32	16,78	20,31	16,77

Tabla 6.18C. Evolución de la población a lo largo de 20 años con intervención humana.

D.R.+11	D.E.+11	D.R.+12	D.E.+12	D.R.+13	D.E.+13	D.R.+14	D.E.+14	D.R.+15	D.E.+15
177	146	178	147	177	146	178	147	177	146
537	444	536	443	537	444	536	443	537	444
177	146	178	147	177	146	178	147	177	146
125	103	124	102	125	103	124	102	125	103
193	159	193	159	192	159	193	159	192	159
123	102	123	102	123	102	123	102	123	102
60	50	60	50	60	50	60	50	60	50
1392	1150	1392	1150	1391	1150	1392	1150	1391	1150
20,28	16,75	20,28	16,75	20,27	16,75	20,28	16,75	20,27	16,75

Tabla 6.18D. Evolución de la población a lo largo de 20 años con intervención humana.

D.R.+16	D.E.+16	D.R.+17	D.E.+17	D.R.+18	D.E.+18	D.R.+19	D.E.+19	D.R.+20	D.E.+20
178	147	177	146	178	147	177	146	178	147
536	443	537	444	536	443	537	444	536	443
178	147	177	146	178	147	177	146	178	147
124	102	125	103	124	102	125	103	124	102
193	159	192	159	193	159	192	159	193	159
123	102	123	102	123	102	123	102	123	102
60	50	60	50	60	50	60	50	60	50
1392	1150	1391	1150	1392	1150	1391	1150	1392	1150
20,28	16,75	20,27	16,75	20,28	16,75	20,27	16,75	20,28	16,75

Se observa como a causa de unas extracciones bien planificadas, se alcanza el objetivo al cabo de los cinco periodos de extracciones, una vez estas comienzan a llevarse a cabo la densidad comienza a caer progresivamente hasta alcanzar la capacidad óptima (Figura 6.7), llegado a este punto, una nueva planificación de las extracciones mantendrá la población en los niveles deseados.

Figura 6.7. Evolución de la población desde t=0 a t=20 con intervención humana.

Por su parte, el estudio e interpretación de los autovalores y autovectores de la población (Tablas 6.19A, 6.19B, 6.19C, 6.19D) cuando esta se encuentra por encima de la capacidad de carga rebelará información importantísima a la hora de diferenciar como debe ser la gestión el deseo del gestor es reducir su número.

Tabla 6.19A. Evolución de los autovectores de la población estudiada por clases de calidad en el rango de tiempo estudiado con intervención humana.

	D.E.+0	D.R.+1	D.E.+1	D.R.+2	D.E.+2	D.R.+3	D.E.+3	D.R.+4	D.E.+4	D.R.+5	D.E.+5
F1	-	0,89	0,84	1,13	1,07	0,99	0,94	1,04	0,99	1,01	0,83
F2	-	1,14	0,95	1,12	0,9	1,18	0,92	1,2	0,9	1,24	1,02
M1	-	0,89	0,84	1,13	1,07	0,99	0,94	1,04	0,99	1,01	0,83
M2	-	1,69	1,61	0,92	0,88	1,16	1,1	1,02	0,97	1,07	0,88
M3	-	0,91	0,75	1,26	1,01	1,18	0,78	1,42	0,87	1,52	1,25
M4	-	1,16	1,01	1,05	0,85	1,12	0,96	1,04	0,88	1,04	0,86
M5	-	0,87	0,77	0,93	0,76	0,96	0,64	1,09	0,46	1,46	1,21
Total	-	1,04	0,91	1,09	0,93	1,11	0,9	1,14	0,9	1,17	0,97

Tabla 6.19B. Evolución de los autovectores de la población estudiada por clases de calidad en el rango de tiempo estudiado con intervención humana.

D.R.+6	D.E.+6	D.R.+7	D.E.+7	D.R.+8	D.E.+8	D.R.+9	D.E.+9	D.R.+10	D.E.+10
1,31	1,09	1,19	0,98	1,22	1,01	1,2	0,99	1,22	1,01
1,19	0,98	1,22	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1
1,31	1,09	1,19	0,98	1,22	1,01	1,2	0,99	1,22	1,01
1,03	0,85	1,32	1,09	1,18	0,97	1,23	1,01	1,2	0,99
1,26	1,04	1,14	0,94	1,23	1,01	1,2	0,99	1,21	1
1,2	0,99	1,22	1,01	1,19	0,98	1,2	0,99	1,2	0,99
1,26	1,04	1,22	1,02	1,22	1	1,2	1	1,2	1
1,22	1,01	1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1

Tabla 6.19C. Evolución de los autovectores de la población estudiada por clases de calidad en el rango de tiempo estudiado con intervención humana.

D.R.+11	D.E.+11	D.R.+12	D.E.+12	D.R.+13	D.E.+13	D.R.+14	D.E.+14	D.R.+15	D.E.+15
1,2	0,99	1,22	1,01	1,2	0,99	1,22	1,01	1,2	0,99
1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1
1,2	0,99	1,22	1,01	1,2	0,99	1,22	1,01	1,2	0,99
1,23	1,01	1,2	0,99	1,23	1,01	1,2	0,99	1,23	1,01
1,21	0,99	1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1
1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1
1,2	1	1,2	1	1,2	1	1,2	1	1,2	1
1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1

Tabla 6.19D. Evolución de los autovectores de la población estudiada por clases de calidad en el rango de tiempo estudiado con intervención humana.

D.R.+16	D.E.+16	D.R.+17	D.E.+17	D.R.+18	D.E.+18	D.R.+19	D.E.+19	D.R.+20	D.E.+20
1,22	1,01	1,2	0,99	1,22	1,01	1,2	0,99	1,22	1,01
1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1
1,22	1,01	1,2	0,99	1,22	1,01	1,2	0,99	1,22	1,01
1,2	0,99	1,23	1,01	1,2	0,99	1,23	1,01	1,2	0,99
1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1
1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1
1,2	1	1,2	1	1,2	1	1,2	1	1,2	1
1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1	1,21	1

Se puede observar que a medida que la población se va reduciendo en los primeros cinco años el autovalor general de la población después de la reproducción (Figura 6.8) aumenta, mientras que el autovalor general después de las extracciones (Figura 6.9) se mantiene más o menos estable, esto se debe a la disminución de la población que la gestión está causando. Al tiempo que el número de individuos desciende, la competencia intraespecífica disminuye, recuperándose los recursos disponibles gradualmente, esta recuperación de los recursos se transforma en un incremento del ratio de crecimiento debido a que los animales se encuentran más fuertes y sanos (Rodríguez-Hidalgo, Gortazar et al. 2010), siendo este aumento del autovalor un indicativo de que la gestión está causando una mejoría en el medio ambiente y en la población. Por lo tanto, si se quiere continuar disminuyendo la población paulatinamente, las extracciones deberán hacerse más intensas entre intervalos para conseguirlo, ya que la capacidad de crecer de la población va siendo mayor. Esta eventualidad provocaría que fuera tarea imposible reducir la densidad si planeamos unos ratios de extracción constantes en función del crecimiento de la población en el punto de inicio, ya que en algún momento debido a esta recuperación la población sería capaz de incorporar más efectivos que se le están extrayendo.

Figura 6.8. Evolución del autovalor general D.R. de la población bajo gestión humana.

Figura 6.9. Evolución del autovalor general D.E. de la población bajo gestión humana.

Este incremento de la capacidad de crecer de la población, queda también de manifiesto en los ratios de extracción calculados. Para cumplir con el objetivo de mantener una disminución de efectivos gradual y constante, las fórmulas arrojan ratios más altos cada año (Tabla 6.20) hasta alcanzar la densidad óptima de gestión donde la densidad se mantendrá estable.

Tabla 6.20. Ratios de extracción h_{ijt} calculados para disminuir gradualmente la población

	Año 0	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4
hF1	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
hF2	0,1689	0,1625	0,2024	0,2201	0,2491
hM1	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
hM2	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
hM3	0,05	0,1831	0,2019	0,3456	0,3836
hM4	0,2072	0,1257	0,1885	0,1398	0,1546
hM5	0,022	0,1158	0,1813	0,3338	0,5756

En cuanto al número total de animales extraídos se observa como en los cinco primeros periodos de extracciones este se incrementa (Tabla 6.21) para ser capaz de continuar con la disminución de la densidad al tiempo que el autovalor de la población aumenta. Alcanzada la densidad objetivo, las extracciones se mantendrán constantes para mantener ahí la población.

Tabla 6.21. Número total de animales extraídos cada temporada por clase de calidad.

	t+0	t+1	t+2	t+3	t+4	t+5	t+6	t+7	t+8	t+9	t+10	t+11	t+12	t+13	t+14	t+15	t+16	t+17	t+18	t+19	t+20
F1	10	9	9	9	9	29	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31
F2	127	115	135	138	146	95	93	94	93	93	93	93	93	93	93	93	93	93	93	93	93
M1	10	9	9	9	9	29	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31
M2	4	7	6	7	7	24	20	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22
M3	13	42	48	78	81	34	36	34	34	34	34	34	34	33	34	33	34	33	34	33	34
M4	44	25	34	23	22	22	22	22	22	22	22	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21
M5	5	23	29	43	54	10	10	10	11	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
Total	213	230	270	307	328	243	243	244	244	243	243	242	242	241	242	241	242	241	242	241	242

6.5 Aplicación de las matrices de gestión

Hasta ahora, se han visto y desarrollado gestiones cuyo objetivo no es otro que mantener la población en el nivel óptimo de densidad del medio con una distribución igual a la que alcanzaría esta de forma natural, mediante la aplicación de una serie de extracciones que permiten la sostenibilidad y persistencia del sistema, es decir un autovalor general $\lambda=1$. Esta modalidad de gestión implica un vector de extracciones fijo condicionado por la distribución estable y natural de la población en la que el gestor no puede buscar el obtener un mayor rendimiento de alguna de las clases y por lo tanto, aumentar la presión de extracción sobre ella, ya que se rompería el equilibrio.

En la situación estudiada hasta ahora para mantener a la población en su densidad óptima (aproximadamente 1400 individuos), se había calculado una

extracción general para todas las clases de calidad de un 17,4% anual, lo que se resume en aproximadamente 242 individuos al año (Tabla 6.22).

Tabla 6.22. Resumen de los resultados obtenidos para mantener la distribución natural de la población.

	Proporción estable	Vector de extracciones h_{ji}	Vector estable D.R.	Vector de extracciones
F1	0,13	0,174	182	32
F2	0,39	0,174	532	93
M1	0,13	0,174	182	32
M2	0,09	0,174	126	21
M3	0,14	0,174	196	33
M4	0,0,9	0,174	126	21
M5	0,04	0,174	56	10
Total	1	-	1400	242

La pirámide de edad resultante del vector de población después del periodo de reproducción (Figura 6.10), representa un equilibrio entre el número de individuos de ambos sexos, con representantes distribuidos de una forma natural en todas sus clases.

Figura 6.10. Pirámide poblacional según el vector objetivo $X_{D.R.}$ con una distribución natural

Sin embargo, gracias a esta metodología, es posible buscar diferentes alternativas de gestión para obtener distintos vectores estables que permitan aprovechamiento variable de las clases de calidad frente al aprovechamiento basado en su crecimiento natural, garantizando de igual modo la sostenibilidad del sistema. Para ello, se habían desarrollado tres opciones o matrices de gestión diferentes al planteamiento general: montería comercial, montería de trofeos o trofeos medallables, en función del rendimiento variable que se desee extraer de cada clase de calidad. A continuación, en base al caso estudiado para la finca de “Quintos de Mora”, se van a ensayar estas tres alternativas a la gestión.

6.5.1 Montería comercial

A modo de recordatorio, esta modalidad de gestión se basaba en que todos los animales serán retirados de la población una vez alcancen la categoría M3. Su matriz de extracciones H era:

$$H_{M.C.} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{F2t+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El primer paso consiste en conocer el número de hembras reproductoras que se necesitan reproduciéndose para mantener estable el sistema, para ello contábamos con la fórmula:

$$x_{F2D.E.t} = \frac{x_{Dg}}{\left((D_{natx} \cdot R_{F2}) + (D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot D_{natx} \cdot R_{F2} + D_{amx} \cdot G_{F2}) + (D_{natx} \cdot R_{M2}) + \right. \\ \left. + (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2}) + (D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2})) \right)}$$

Donde en este caso $x_{Dg} = 1400$ ciervos, por lo tanto:

$$x_{F2D.E.t} = \frac{1400}{\left((1 \cdot 0,4) + (1 \cdot 0,88 \cdot 1 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,92) + (1 \cdot 0,4) + \right. \\ \left. + (1 \cdot 0,85 \cdot 1 \cdot 0,4) + (1 \cdot 0,9 \cdot (1 \cdot 0,85 \cdot 1 \cdot 0,4)) \right)} = \frac{1400}{2,718} \approx 515$$

Por lo tanto, necesitaremos contar con 515 hembras después del periodo de extracciones para poner mantener el sistema con una densidad de 1400 ciervos en total a lo largo del tiempo. Conocido ya este número de hembras después del periodo de extracciones, es posible también conocer el vector estable total de la población después de las extracciones $X_{OD.E.}$ según la fórmula:

$$X_{D.E.} = \begin{pmatrix} D_{natx} \cdot R_{F2} \\ 1 \\ D_{natx} \cdot R_{M2} \\ D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0,4 \\ 1 \\ 1 \cdot 0,4 \\ 1 \cdot 0,85 \cdot 1 \cdot 0,4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 1 \\ 0,4 \\ 0,34 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como el número de hembras reproductoras tiene que ser 515, el vector objetivo después del periodo de extracciones será:

$$X_{O.D.E.} = \begin{pmatrix} 0,4 \cdot 515 \\ 1 \cdot 515 \\ 0,4 \cdot 515 \\ 0,34 \cdot 515 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 206 \\ 515 \\ 206 \\ 175 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puesto que el vector de partida $X_{D.R.t+0}$ es:

$$X_{D.R.t+0} = \begin{pmatrix} 182 \\ 532 \\ 182 \\ 126 \\ 196 \\ 126 \\ 56 \end{pmatrix}$$

Las extracciones a realizar el primer año para hacer converger el vector inicial al deseado son:

$$\vec{h}_{jit+0} = \begin{pmatrix} h_{F1t+0} = 0 \\ h_{F2t+0} = 1 - \frac{515}{532} \\ h_{M1t+0} = 0 \\ h_{M2t+0} = 0 \\ h_{M3t+0} = 1 \\ h_{M4t+0} = 1 \\ h_{M5t+0} = 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,032 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A la hora de proceder con la primera intervención, el número de individuos en las clases F1, M1 y M2 es inferior al objetivo, por lo que no se realizará extracción alguna, por su parte los individuos de las clases M3, M4 y M5 ser extraerán todos. Introducidas las extracciones en el modelo se obtiene el siguiente vector de poblaciones:

$$X_{D,R,t+1} = \begin{pmatrix} 206 \\ 634 \\ 206 \\ 155 \\ 113 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El número de individuos de las clases F1, F2 y M1 ya se encuentran en los valores establecidos, solamente los individuos M3 tardarán un salto de tiempo más en alcanzar su población estable, por lo tanto, el siguiente vector de extracciones es:

$$\vec{h}_{jit+1} = \begin{pmatrix} h_{F1t+1} = 0 \\ h_{F2t+1} = 1 - \frac{515}{634} \\ h_{M1t+1} = 0 \\ h_{M2t+1} = 0 \\ h_{M3t+1} = 1 \\ h_{M4t+1} = 1 \\ h_{M5t+1} = 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,187 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como consecuencia:

$$X_{D,R,t+2} = \begin{pmatrix} 206 \\ 655 \\ 206 \\ 175 \\ 140 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde ya con todas las clases estabilizadas es posible calcular el vector de extracciones definitivo para la población gestionada en base a los criterios de la montería comercial:

$$\vec{h}_{jiM.C.} = \begin{pmatrix} h_{F1t+1} = 0 \\ h_{F2t+1} = 1 - \frac{515}{655} \\ h_{M1t+1} = 0 \\ h_{M2t+1} = 0 \\ h_{M3t+1} = 1 \\ h_{M4t+1} = 1 \\ h_{M5t+1} = 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,2137 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando este vector a todas las sucesiones siguientes se consigue mantener la población en los niveles de densidad deseados y con una distribución estable y sostenible distinta a la natural (Tablas 6.23A, 6.23B, 6.23C, 6.23D y Figura 6.11).

Tabla 6.23A. Evolución de la población gestionada según los criterios de montería comercial

	D.R.+0	D.E.+0	D.R.+1	D.E.+1	D.R.+2	D.E.+2	D.R.+3	D.E.+3	D.R.+4	D.E.+4
F1	182	182	206	206	206	206	206	206	206	206
F2	532	515	634	515	655	515	655	515	655	515
M1	182	182	206	206	206	206	206	206	206	206
M2	126	126	155	155	175	175	175	175	175	175
M3	196	0	113	0	140	0	158	0	158	0
M4	126	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M5	56	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total	1400	1005	1314	1082	1382	1102	1400	1102	1400	1102
Ciervos/100ha	20,4	14,64	19,14	15,76	20,13	16,05	20,4	16,05	20,4	16,05

Tabla 6.23B. Evolución de la población gestionada según los criterios de montería comercial

D.R.+5	D.E.+5	D.R.+6	D.E.+6	D.R.+7	D.E.+7	D.R.+8	D.E.+8	D.R.+9	D.E.+9	D.R.+10	D.E.+10
206	206	206	206	206	206	206	206	206	206	206	206
655	515	655	515	655	515	655	515	655	515	655	515
206	206	206	206	206	206	206	206	206	206	206	206
175	175	175	175	175	175	175	175	175	175	175	175
158	0	158	0	158	0	158	0	158	0	158	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1400	1102	1400	1102	1400	1102	1400	1102	1400	1102	1400	1102
20,4	16,05	20,4	16,05	20,4	16,05	20,4	16,05	20,4	16,05	20,4	16,05

Tabla 6.23C. Evolución de la población gestionada según los criterios de montería comercial

D.R.+11	D.E.+11	D.R.+12	D.E.+12	D.R.+13	D.E.+13	D.R.+14	D.E.+14	D.R.+15	D.E.+15
206	206	206	206	206	206	206	206	206	206
655	515	655	515	655	515	655	515	655	515
206	206	206	206	206	206	206	206	206	206
175	175	175	175	175	175	175	175	175	175
158	0	158	0	158	0	158	0	158	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1400	1102	1400	1102	1400	1102	1400	1102	1400	1102
20,4	16,05	20,4	16,05	20,4	16,05	20,4	16,05	20,4	16,05

Tabla 6.23D. Evolución de la población gestionada según los criterios de montería comercial

D.R.+16	D.E.+16	D.R.+17	D.E.+17	D.R.+18	D.E.+18	D.R.+19	D.E.+19	D.R.+20	D.E.+20
206	206	206	206	206	206	206	206	206	206
655	515	655	515	655	515	655	515	655	515
206	206	206	206	206	206	206	206	206	206
175	175	175	175	175	175	175	175	175	175
158	0	158	0	158	0	158	0	158	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1400	1102	1400	1102	1400	1102	1400	1102	1400	1102
20,4	16,05	20,4	16,05	20,4	16,05	20,4	16,05	20,4	16,05

Figura 6.11. Evolución gráfica de la población gestionada según los criterios de montería comercial

La población se estabiliza en el vector después de la época de reproducción:

$$\vec{X}_{O.D.R.} = \begin{pmatrix} 206 \\ 655 \\ 206 \\ 175 \\ 158 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con una pirámide de edades más baja, al no contar con las dos últimas clases de calidad y donde el peso de las hembras es mayor (Figura 6.12).

Figura 6.12. Pirámide poblacional derivada de la gestión basada en los criterios de montería comercial.

Esta mayor representación del grupo de las hembras causa un aumento en el autovalor general de la población después del periodo reproductor $\lambda=1,27$, lo que se traduce en una mayor productividad anual, por su parte, el autovalor después del periodo de extracciones es igual a la unidad, lo que garantiza la sostenibilidad de la explotación de dicho recurso (Tablas 6.24A, 6.24B, 6.24C, 6.24D).

Tabla 6.24A. Evolución de los autovalores según la gestión de montería comercial

	D.E.+0	D.R.+1	D.E.+1	D.R.+2	D.E.+2	D.R.+3	D.E.+3	D.R.+4	D.E.+4	D.R.+5	D.E.+5
F1	-	1,13	1,13	1	1	1	1	1	1	1	1
F2	-	1,23	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1
M1	-	1,13	1,13	1	1	1	1	1	1	1	1
M2	-	1,23	1,23	1,13	1,13	1	1	1	1	1	1
M3	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M4	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M5	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total	-	1,31	1,08	1,28	1,02	1,27	1	1,27	1	1,27	1

Tabla 6.24B. Evolución de los autovalores según la gestión de montería comercial

D.R.+6	D.E.+6	D.R.+7	D.E.+7	D.R.+8	D.E.+8	D.R.+9	D.E.+9	D.R.+10	D.E.+10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,27	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,27	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1

Tabla 6.24C. Evolución de los autovalores según la gestión de montería comercial

D.R.+11	D.E.+11	D.R.+12	D.E.+12	D.R.+13	D.E.+13	D.R.+14	D.E.+14	D.R.+15	D.E.+15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,27	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,27	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1

Tabla 6.24D. Evolución de los autovalores según la gestión de montería comercial

D.R.+16	D.E.+16	D.R.+17	D.E.+17	D.R.+18	D.E.+18	D.R.+19	D.E.+19	D.R.+20	D.E.+20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,27	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,27	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1

Por lo tanto, con la aplicación de este modelo se obtendrá una renta anual estable y sostenible de 298 animales, formados solamente por individuos de la clase F2 y M3 (Tabla 6.25).

Tabla 6.25. Extracciones anuales según el modelo de montería comercial

	t+0	t+1	t+2	t+3	t+4	t+5	t+6	t+7	t+8	t+9	t+10	t+11	t+12	t+13	t+14	t+15	t+16	t+17	t+18	t+19	t+20
F1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F2	119	140	140	140	140	140	140	140	140	140	140	140	140	140	140	140	140	140	140	140	140
M1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M3	113	140	158	158	158	158	158	158	158	158	158	158	158	158	158	158	158	158	158	158	158
M4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total	232	280	298	298	298	298	298	298	298	298	298	298	298	298	298	298	298	298	298	298	298

Los principales valores característicos obtenidos para este tipo de gestión pueden resumirse en el siguiente cuadro (Tabla 6.26):

Tabla 6.26. Resumen de resultados derivados de la gestión de montería comercial

	Proporción estable	Vector de extracciones h_{ji}	Vector estable $X_{OD.R.}$	Vector de extracciones
F1	0,15	0	206	0
F2	0,47	0,2137	655	140
M1	0,15	0	206	0
M2	0,13	0	175	0
M3	0,11	1	158	158
M4	0	0	0	0
M5	0	0	0	0
Total	1	-	1400	298

6.5.2 Montería de trofeos

Nos encontramos ahora con el tipo de gestión que busca que el total de los animales macho sean extraídos de la población una vez alcancen la categoría M4, por lo tanto, la matriz de extracciones H tendrá la forma:

$$H_{M.T.} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{F2t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{M4t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comenzando por conocer el número de hembras reproductoras que se necesitan reproduciéndose para mantener estable el sistema, según la fórmula:

$$x_{F2D.E.t} = \frac{x_{Dg}}{\left(\begin{aligned} &(D_{natx} \cdot R_{F2}) + (D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot D_{natx} \cdot R_{F2} + D_{amx} \cdot G_{F2}) + (D_{natx} \cdot R_{M2}) + \\ &+ (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2}) + \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right) + \\ &+ \left(D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right) \right) \end{aligned} \right)}$$

Como es sabido estamos trabajando con $x_{Dg}=1400$, por lo que:

$$x_{F2D.E.t} = \frac{1400}{\left(\begin{aligned} &(1 \cdot 0,4) + (1 \cdot 0,88 \cdot 1 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,92) + (1 \cdot 0,4) + \\ &+ (1 \cdot 0,85 \cdot 1 \cdot 0,4) + \left(\frac{1 \cdot 0,9 \cdot (1 \cdot 0,85 \cdot 1 \cdot 0,4)}{1 - 1 \cdot 0,633} \right) + \\ &+ \left(1 \cdot 0,3166 \cdot \left(\frac{1 \cdot 0,9 \cdot (1 \cdot 0,85 \cdot 1 \cdot 0,4)}{1 - 1 \cdot 0,633} \right) \right) \end{aligned} \right)} = \frac{1400}{3,509} \approx 399$$

Como consecuencia, 399 será el número de hembras reproductoras (F2) que deberemos mantener en la población después de cada periodo de extracciones para conseguir el objetivo marcado con la gestión. Una vez conocido este número, se continuará calculando el vector objetivo de la población después del periodo de extracciones a partir de la fórmula conocida:

$$\vec{X}_{D.E.} = \begin{pmatrix} D_{natx} \cdot R_{F2} \\ 1 \\ D_{natx} \cdot R_{M2} \\ D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \\ \frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2}}{-(D_{amx} \cdot G_{M3} - 1)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0,4 \\ 1 \\ 1 \cdot 0,4 \\ 1 \cdot 0,85 \cdot 1 \cdot 0,4 \\ \frac{1 \cdot 0,9 \cdot 1 \cdot 0,85 \cdot 1 \cdot 0,4}{-(1 \cdot 0,633 - 1)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 1 \\ 0,4 \\ 0,34 \\ 0,833 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ya que el número de hembras reproductoras (F2) en esta situación es de 399 el vector objetivo de la ordenación después de las extracciones será igual a:

$$\vec{X}_{O.D.E.} = \begin{pmatrix} 0,4 \cdot 399 \\ 1 \cdot 399 \\ 0,4 \cdot 399 \\ 0,34 \cdot 399 \\ 0,833 \cdot 399 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 399 \\ 160 \\ 136 \\ 332 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A continuación, a partir del vector de partida ya conocido $X_{D.R.t+0}$:

$$\vec{X}_{D.R.t+0} = \begin{pmatrix} 182 \\ 532 \\ 182 \\ 126 \\ 196 \\ 126 \\ 56 \end{pmatrix}$$

Se comienzan a calcular las extracciones del primer periodo para iniciar la convergencia de dicho vector inicial al objetivo:

$$\vec{h}_{jit+0} = \begin{pmatrix} h_{F1t+0} = 0 \\ h_{F2t+0} = 1 - \frac{399}{532} \\ h_{M1t+0} = 0 \\ h_{M2t+0} = 0 \\ h_{M3t+0} = 0 \\ h_{M4t+0} = 1 \\ h_{M5t+0} = 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una vez llevadas a cabo, el vector generado para el siguiente salto de proyección es:

$$\vec{X}_{D.R.t+1} = \begin{pmatrix} 160 \\ 527 \\ 160 \\ 155 \\ 238 \\ 62 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que el vector de extracciones para el segundo periodo de extracciones es:

$$\vec{h}_{jit+1} = \begin{pmatrix} h_{F1t+1} = 0 \\ h_{F2t+1} = 1 - \frac{399}{527} \\ h_{M1t+1} = 0 \\ h_{M2t+1} = 0 \\ h_{M3t+1} = 0 \\ h_{M4t+1} = 1 \\ h_{M5t+1} = 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,2428 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dando lugar a:

$$\vec{X}_{D.R.t+2} = \begin{pmatrix} 160 \\ 508 \\ 160 \\ 136 \\ 290 \\ 75 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puesto que la población de hembras ya se encuentra estabilizada, en este momento, ya se puede conocer el vector de extracciones final que deberá repetirse sistemáticamente para gestionar esta población de 1400 individuos según los criterios de montería de trofeos:

$$\vec{h}_{jiM.T.} = \begin{pmatrix} h_{F1t+1} = 0 \\ h_{F2t+1} = 1 - \frac{399}{508} \\ h_{M1t+1} = 0 \\ h_{M2t+1} = 0 \\ h_{M3t+1} = 0 \\ h_{M4t+1} = 1 \\ h_{M5t+1} = 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,2145 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como esta vez la población alcanza una clase de calidad superior al caso anterior, esta clase tardará aún entre tres y cuatro proyecciones en estabilizarse en su densidad definitiva (Tablas 6.27A, 6.27B, 6.27C, 6.27D), no siendo esto influyente en el cálculo de las proporciones de extracción, ya que para los machos va a ser siempre el mismo, debido a esto la densidad de gestión tardará en alcanzarse dicho número de proyecciones (Figura 6.13).

Tabla 6.27A. Evolución de la población gestionada según los criterios de montería de trofeos

	D.R.+0	D.E.+0	D.R.+1	D.E.+1	D.R.+2	D.E.+2	D.R.+3	D.E.+3	D.R.+4	D.E.+4
F1	182	182	160	160	160	160	160	160	160	160
F2	532	399	527	399	508	399	508	399	508	399
M1	182	182	160	160	160	160	160	160	160	160
M2	126	126	155	155	136	136	136	136	136	136
M3	196	196	238	238	290	290	306	306	316	316
M4	126	0	62	0	75	0	92	0	97	0
M5	56	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total	1400	1085	1302	1112	1329	1145	1362	1161	1377	1171
Ciervos/100ha	20,4	15,81	18,97	16,2	19,36	16,68	19,84	16,91	20,06	17,06

Tabla 6.27B. Evolución de la población gestionada según los criterios de montería de trofeos

D.R.+5	D.E.+5	D.R.+6	D.E.+6	D.R.+7	D.E.+7	D.R.+8	D.E.+8	D.R.+9	D.E.+9	D.R.+10	D.E.+10
160	160	160	160	160	160	160	160	160	160	160	160
508	399	508	399	508	399	508	399	508	399	508	399
160	160	160	160	160	160	160	160	160	160	160	160
136	136	136	136	136	136	136	136	136	136	136	136
323	323	327	327	329	329	331	331	332	332	333	333
100	0	102	0	104	0	104	0	105	0	105	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1387	1178	1393	1182	1397	1184	1399	1186	1401	1187	1402	1188
20,21	17,16	20,29	17,22	20,35	17,25	20,38	17,28	20,41	17,29	20,43	17,31

Tabla 6.27C. Evolución de la población gestionada según los criterios de montería de trofeos

D.R.+11	D.E.+11	D.R.+12	D.E.+12	D.R.+13	D.E.+13	D.R.+14	D.E.+14	D.R.+15	D.E.+15
159	159	160	160	159	159	159	159	159	159
508	399	507	398	507	398	506	397	505	397
159	159	160	160	159	159	159	159	159	159
136	136	135	135	136	136	135	135	135	135
333	333	333	333	332	332	333	333	332	332
105	0	105	0	105	0	105	0	105	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1400	1186	1400	1186	1398	1184	1397	1183	1395	1182
20,4	17,28	20,4	17,28	20,37	17,25	20,35	17,23	20,32	17,22

Tabla 6.27D. Evolución de la población gestionada según los criterios de montería de trofeos

D.R.+16	D.E.+16	D.R.+17	D.E.+17	D.R.+18	D.E.+18	D.R.+19	D.E.+19	D.R.+20	D.E.+20
159	159	159	159	159	159	159	159	159	159
505	397	505	397	505	397	505	397	505	397
159	159	159	159	159	159	159	159	159	159
135	135	135	135	135	135	135	135	135	135
332	332	332	332	332	332	332	332	332	332
105	0	105	0	105	0	105	0	105	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1395	1182	1395	1182	1395	1182	1395	1182	1395	1182
20,32	17,22	20,32	17,22	20,32	17,22	20,32	17,22	20,32	17,22

Figura 6.13. Evolución gráfica de la población gestionada según los criterios de montería de trofeos

Estabilizándose finalmente la población en el siguiente vector después de la época de reproducción:

$$\vec{X}_{O.D.R.} = \begin{pmatrix} 159 \\ 505 \\ 159 \\ 135 \\ 332 \\ 105 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La pirámide de edades (Figura 6.14) refleja la necesidad de mantener un mayor número de machos que de hembras para poder sostener este tipo de gestión, en que los machos tienen que ser más longevos, sacrificando productividad frente a la opción anterior.

Figura 6.14. Pirámide poblacional derivada de la gestión basada en los criterios de montería de trofeos

Este descenso en la productividad anual, se manifiesta como no podía ser de otra manera en la reducción del autovalor general de la población, el cuál después del periodo reproductivo se estabiliza en $\lambda=1,18$. Una vez más la sostenibilidad de la explotación está garantizada al ser el autovalor de la población igual a la unidad después del periodo de extracciones (Tablas 6.28A, 6.28B, 6.28C, 6.28D).

Tabla 6.28A. Evolución de los autovalores según la gestión de montería de trofeos

	D.E.+0	D.R.+1	D.E.+1	D.R.+2	D.E.+2	D.R.+3	D.E.+3	D.R.+4	D.E.+4	D.R.+5	D.E.+5
F1	-	0,88	0,88	1	1	1	1	1	1	1	1
F2	-	1,32	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1
M1	-	0,88	0,88	1	1	1	1	1	1	1	1
M2	-	1,23	1,23	0,88	0,88	1	1	1	1	1	1
M3	-	1,21	1,21	1,22	1,22	1,06	1,06	1,03	1,03	1,02	1,02
M4	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M5	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total	-	1,2	1,02	1,2	1,03	1,19	1,01	1,19	1,01	1,18	1,01

Tabla 6.28B. Evolución de los autovalores según la gestión de montería de trofeos

D.R.+6	D.E.+6	D.R.+7	D.E.+7	D.R.+8	D.E.+8	D.R.+9	D.E.+9	D.R.+10	D.E.+10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,27	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,18	1	1,18	1	1,18	1	1,18	1	1,18	1

Tabla 6.28C. Evolución de los autovalores según la gestión de montería de trofeos

D.R.+11	D.E.+11	D.R.+12	D.E.+12	D.R.+13	D.E.+13	D.R.+14	D.E.+14	D.R.+15	D.E.+15
0,99	0,99	1,01	1,01	0,99	0,99	1	1	1	1
1,27	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1
0,99	0,99	1,01	1,01	0,99	0,99	1	1	1	1
1	1	0,99	0,99	1,01	1,01	0,99	0,99	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,18	1	1,18	1	1,18	1	1,18	1	1,18	1

Tabla 6.28D. Evolución de los autovalores según la gestión de montería de trofeos

D.R.+16	D.E.+16	D.R.+17	D.E.+17	D.R.+18	D.E.+18	D.R.+19	D.E.+19	D.R.+20	D.E.+20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,27	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,18	1	1,18	1	1,18	1	1,18	1	1,18	1

Aplicando el modelo de gestión basado en la montería de trofeos, se obtendría una renta anual constante y sostenible de 213 ciervos, repartidos entre las clases F2 Y M4 (Tabla 6.29).

Tabla 6.29. Extracciones anuales según el modelo de montería de trofeos

	t+0	t+1	t+2	t+3	t+4	t+5	t+6	t+7	t+8	t+9	t+10	t+11	t+12	t+13	t+14	t+15	t+16	t+17	t+18	t+19	t+20
F1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F2	128	109	109	109	109	109	109	109	109	109	109	109	109	109	108	108	108	108	108	108	108
M1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M4	62	75	92	97	100	102	104	104	105	105	105	105	105	105	105	105	105	105	105	105	105
M5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total	190	184	201	206	209	211	213	213	214	214	214	214	214	214	213	213	213	213	213	213	213

Los valores más característicos obtenidos para este tipo de gestión se resumen en el siguiente cuadro (Tabla 6.30):

Tabla 6.30. Resumen de resultados derivados de la gestión de montería de trofeos

	Proporción estable	Vector de extracciones h_{ji}	Vector estable $X_{O.D.R.}$	Vector de extracciones
F1	0,11	0	159	0
F2	0,36	0,2145	505	108
M1	0,11	0	159	0
M2	0,1	0	135	0
M3	0,24	0	332	0
M4	0,08	1	105	105
M5	0	0	0	0
Total	1	-	1395	213

6.5.3 Trofeos Medallables

Por último, la tercera modalidad de gestión propuesta se corresponde con la que nombramos como “trofeos medallables” que se definía como el sistema de gestión que se centra en extraer anualmente todos los animales que alcanzan la categoría M5, por lo tanto, su matriz de extracciones H tenía la forma:

$$H_{T.M.} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{F2t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{M5t} \end{pmatrix}$$

El primer dato que se necesita conocer es el número de hembras reproductoras necesarias al final del periodo de extracciones para sustentar una población de 1400 individuos al final del periodo reproductivo, para ello se recurre a la fórmula:

$$x_{F2D.E.I} = \frac{x_{Dg}}{\left((D_{natx} \cdot R_{F2}) + (D_{ymx} \cdot P_{F1} \cdot D_{natx} \cdot R_{F2} + D_{amx} \cdot G_{F2}) + (D_{natx} \cdot R_{M2}) + \right. \\ \left. + (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2}) + \right. \\ \left. + \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right) + \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right)}{1 - D_{amx} \cdot G_{M4}} \right) + \right. \\ \left. + \left(D_{amx} \cdot P_{M4} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot \left(\frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot (D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2})}{1 - D_{amx} \cdot G_{M3}} \right)}{1 - D_{amx} \cdot G_{M4}} \right) \right) \right)$$

$$x_{F2D.E.I} = \frac{1400}{\left((1 \cdot 0,4) + (1 \cdot 0,88 \cdot 1 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,92) + (1 \cdot 0,4) + (1 \cdot 0,85 \cdot 1 \cdot 0,4) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1 \cdot 0,9 \cdot (1 \cdot 0,85 \cdot 1 \cdot 0,4)}{1 - 1 \cdot 0,633} \right) + \left(\frac{1 \cdot 0,3166 \cdot \left(\frac{1 \cdot 0,9 \cdot (1 \cdot 0,85 \cdot 1 \cdot 0,4)}{1 - 1 \cdot 0,633} \right)}{1 - 1 \cdot 0,7125} \right) + \right. \\ \left. + \left(1 \cdot 0,2375 \cdot \left(\frac{1 \cdot 0,3166 \cdot \left(\frac{1 \cdot 0,9 \cdot (1 \cdot 0,85 \cdot 1 \cdot 0,4)}{1 - 1 \cdot 0,633} \right)}{1 - 1 \cdot 0,7125} \right) \right) \right) = \frac{1400}{4,382} \approx 319$$

Por lo tanto, son 319 hembras reproductoras (F2) las que deberán permanecer en la población después de la época de extracciones para mantener a esta en los niveles buscados. Conocido su número, es posible calcular el vector objetivo después de la época de extracciones completo empleando la siguiente fórmula:

$$\vec{X}_{D.E.} = \begin{pmatrix} D_{natx} \cdot R_{F2} \\ 1 \\ D_{natx} \cdot R_{M2} \\ D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2} \\ \frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2}}{-(D_{amx} \cdot G_{M3} - 1)} \\ D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot \frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2}}{-(D_{amx} \cdot G_{M3} - 1)} \\ \frac{D_{amx} \cdot P_{M3} \cdot \frac{D_{amx} \cdot P_{M2} \cdot D_{ymx} \cdot P_{M1} \cdot D_{natx} \cdot R_{M2}}{-(D_{amx} \cdot G_{M3} - 1)}}{-(D_{amx} \cdot G_{M4} - 1)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0,4 \\ 1 \\ 1 \cdot 0,4 \\ 1 \cdot 0,85 \cdot 1 \cdot 0,4 \\ \frac{1 \cdot 0,9 \cdot 1 \cdot 0,85 \cdot 1 \cdot 0,4}{-(1 \cdot 0,633 - 1)} \\ 1 \cdot 0,3166 \cdot \frac{1 \cdot 0,9 \cdot 1 \cdot 0,85 \cdot 1 \cdot 0,4}{-(1 \cdot 0,633 - 1)} \\ \frac{1 \cdot 0,3166 \cdot \frac{1 \cdot 0,9 \cdot 1 \cdot 0,85 \cdot 1 \cdot 0,4}{-(1 \cdot 0,633 - 1)}}{-(1 \cdot 0,7125 - 1)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 1 \\ 0,4 \\ 0,34 \\ 0,833 \\ 0,917 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siendo F2=319:

$$\vec{X}_{O.D.E.} = \begin{pmatrix} 0,4 \cdot 319 \\ 1 \cdot 319 \\ 0,4 \cdot 319 \\ 0,34 \cdot 319 \\ 0,833 \cdot 319 \\ 0,917 \cdot 319 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 128 \\ 319 \\ 128 \\ 108 \\ 266 \\ 293 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con la información necesaria para iniciar el cálculo de los ratios de extracción y el vector de arranque de la población después del periodo reproductivo $X_{D.R.t+0}$:

$$\vec{X}_{D.R.t+0} = \begin{pmatrix} 182 \\ 532 \\ 182 \\ 126 \\ 196 \\ 126 \\ 56 \end{pmatrix}$$

Se obtiene el primer vector de extracciones para converger el número de hembras y por tanto la población completa a los valores deseados:

$$\vec{h}_{jit+0} = \begin{pmatrix} h_{F1t+0} = 0 \\ h_{F2t+0} = 1 - \frac{319}{532} \\ h_{M1t+0} = 0 \\ h_{M2t+0} = 0 \\ h_{M3t+0} = 0 \\ h_{M4t+0} = 0 \\ h_{M5t+0} = 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como consecuencia, el vector resultante en el siguiente intervalo de proyección es:

$$\vec{X}_{D,R,t+1} = \begin{pmatrix} 128 \\ 453 \\ 128 \\ 155 \\ 238 \\ 152 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Se continúa calculando los porcentajes de extracción para el segundo periodo:

$$\vec{h}_{jit+1} = \begin{pmatrix} h_{F1t+1} = 0 \\ h_{F2t+1} = 1 - \frac{319}{453} \\ h_{M1t+1} = 0 \\ h_{M2t+1} = 0 \\ h_{M3t+1} = 0 \\ h_{M4t+1} = 1 \\ h_{M5t+1} = 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,2958 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Originando el vector:

$$\vec{X}_{D.R.t+2} = \begin{pmatrix} 128 \\ 406 \\ 128 \\ 109 \\ 290 \\ 184 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Al igual que en los casos anteriores, a esta altura de la simulación, la población de hembras ya se encuentra estabilizada, por lo que su ratio de extracciones definitivo puede ser ya calculado. La situación de los machos es diferente, puesto que cuenta ahora con todas sus clases de calidad y necesitará de más sucesiones para la estabilización. El porcentaje de extracciones para mantener la densidad de animales en 1400 individuos, según el criterio de gestión de trofeos medallables una vez la población de hembras es estable es:

$$\vec{h}_{jiT.M.} = \begin{pmatrix} h_{F1t+1} = 0 \\ h_{F2t+1} = 1 - \frac{319}{406} \\ h_{M1t+1} = 0 \\ h_{M2t+1} = 0 \\ h_{M3t+1} = 0 \\ h_{M4t+1} = 0 \\ h_{M5t+1} = 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,2142 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando estos ratios de extracción sobre la población se conseguirá estabilizarla en una densidad de 1400 ejemplares (Tablas 6.31A, 6.31B, 6.31C, 6.31D y Figura 6.15) manteniendo la renta máxima de extracciones de trofeos medallables posible.

Tabla 6.31A. Evolución de la población gestionada según los criterios de trofeos medallables

	D.R.+0	D.E.+0	D.R.+1	D.E.+1	D.R.+2	D.E.+2	D.R.+3	D.E.+3	D.R.+4	D.E.+4
F1	182	182	128	128	128	128	128	128	128	128
F2	532	319	453	319	406	319	406	319	406	319
M1	182	182	128	128	128	128	128	128	128	128
M2	126	126	155	155	109	109	109	109	109	109
M3	196	196	238	238	290	290	282	282	277	277
M4	126	126	152	152	184	184	223	223	248	248
M5	56	0	30	0	36	0	44	0	53	0
Total	1400	1131	1284	1120	1281	1158	1320	1189	1349	1209
Ciervos/100ha	20,4	16,48	18,71	16,32	18,66	16,87	19,23	17,32	19,65	17,61

Tabla 6.31B. Evolución de la población gestionada según los criterios de trofeos medallables

D.R.+5	D.E.+5	D.R.+6	D.E.+6	D.R.+7	D.E.+7	D.R.+8	D.E.+8	D.R.+9	D.E.+9	D.R.+10	D.E.+10
128	128	128	128	128	128	128	128	128	128	128	128
406	319	406	319	406	319	406	319	406	319	406	319
128	128	128	128	128	128	128	128	128	128	128	128
109	109	109	109	109	109	109	109	109	109	109	109
274	274	272	272	270	270	269	269	268	268	268	268
264	264	275	275	282	282	286	286	289	289	291	291
59	0	63	0	65	0	67	0	68	0	69	0
1368	1222	1381	1231	1388	1236	1393	1239	1396	1241	1399	1243
19,93	17,8	20,12	17,93	20,22	18,01	20,29	18,05	20,34	18,08	20,38	18,11

Tabla 6.31C. Evolución de la población gestionada según los criterios de trofeos medallables

D.R.+11	D.E.+11	D.R.+12	D.E.+12	D.R.+13	D.E.+13	D.R.+14	D.E.+14	D.R.+15	D.E.+15
128	128	128	128	128	128	127	127	128	128
406	319	406	319	406	319	406	319	405	318
128	128	128	128	128	128	127	127	128	128
109	109	109	109	109	109	109	109	108	108
268	268	268	268	268	268	268	268	268	268
292	292	293	293	294	294	294	294	294	294
69	0	69	0	70	0	70	0	70	0
1400	1244	1401	1245	1403	1246	1401	1244	1401	1244
20,4	18,12	20,41	18,14	20,44	18,15	20,41	18,12	20,41	18,12

Tabla 6.31D. Evolución de la población gestionada según los criterios de trofeos medallables

D.R.+16	D.E.+16	D.R.+17	D.E.+17	D.R.+18	D.E.+18	D.R.+19	D.E.+19	D.R.+20	D.E.+20
127	127	128	128	127	127	128	128	127	127
406	319	405	318	406	319	405	318	406	319
127	127	128	128	127	127	128	128	127	127
109	109	108	108	109	109	108	108	109	109
267	267	267	267	266	266	267	267	266	266
294	294	294	294	294	294	294	294	294	294
70	0	70	0	70	0	70	0	70	0
1400	1243	1400	1243	1399	1242	1400	1243	1399	1242
20,4	18,11	20,4	18,11	20,38	18,09	20,4	18,11	20,38	18,09

Figura 6.15. Evolución gráfica de la población gestionada según los criterios de trofeos medallables

Comparando gráficamente la evolución de las poblaciones según cada tipo de gestión (Figura 6.11, Figura 6.13 y Figura 6.15), se observa una reducción en el tamaño de los dientes entre saltos consecutivos, debido al sacrificio en productividad y por lo tanto en extracciones anuales totales que debe de hacerse para poder obtener productos de clases de edad altas, en las cuales el animal necesita alcanzar una edad elevada.

Para esta última alternativa, el vector de población estable después del periodo de reproducción es:

$$\vec{X}_{O.D.R.} = \begin{pmatrix} 128 \\ 405 \\ 128 \\ 108 \\ 267 \\ 294 \\ 70 \end{pmatrix}$$

La pirámide de edades resultante (Figura 6.16), refleja de una forma muy evidente el desequilibrio entre machos y hembras a la que hay que forzar a la población para obtener el máximo rendimiento posible de trofeos de la más alta calidad.

Figura 6.16. Pirámide poblacional derivada de la gestión basada en los criterios de trofeos medallables

Este desequilibrio entre ambos sexos a favor de los machos, origina una productividad anual baja, siendo el autovalor general de la población después de la reproducción una vez estabilizada, $\lambda=1,13$. El objetivo de planificar una estrategia de gestión sostenible se cumple al garantizar un autovalor general de la población $\lambda=1$ después de las extracciones (Tablas 6.32A, 6.32B, 6.32C, 6.32D).

Tabla 6.32A. Evolución de los autovalores según la gestión de trofeos medallables

	D.E.+0	D.R.+1	D.E.+1	D.R.+2	D.E.+2	D.R.+3	D.E.+3	D.R.+4	D.E.+4	D.R.+5	D.E.+5
F1	-	0,7	0,7	1	1	1	1	1	1	1	1
F2	-	1,42	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1
M1	-	0,7	0,7	1	1	1	1	1	1	1	1
M2	-	1,23	1,23	0,7	0,7	1	1	1	1	1	1
M3	-	1,21	1,21	1,22	1,22	0,97	0,97	0,98	0,98	0,99	0,99
M4	-	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,21	1,11	1,11	1,06	1,06
M5	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total	-	1,14	0,99	1,14	1,03	1,14	1,03	1,13	1,02	1,13	1,01

Tabla 6.32B. Evolución de los autovalores según la gestión de trofeos medallables

D.R.+6	D.E.+6	D.R.+7	D.E.+7	D.R.+8	D.E.+8	D.R.+9	D.E.+9	D.R.+10	D.E.+10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,27	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,99	0,99	0,99	0,99	1	1	1	1	1	1
1,04	1,04	1,03	1,03	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,13	1,01	1,13	1	1,13	1	1,13	1	1,13	1

Tabla 6.32C. Evolución de los autovalores según la gestión de trofeos medallables

D.R.+11	D.E.+11	D.R.+12	D.E.+12	D.R.+13	D.E.+13	D.R.+14	D.E.+14	D.R.+15	D.E.+15
1	1	1	1	1	1	0,99	0,99	1,01	1,01
1,27	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1	1,27	1
1	1	1	1	1	1	0,99	0,99	1,01	1,01
1	1	1	1	1	1	1	1	0,99	0,99
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,13	1	1,13	1	1,13	1	1,12	1	1,13	1

Tabla 6.32D. Evolución de los autovalores según la gestión de trofeos medallables

D.R.+16	D.E.+16	D.R.+17	D.E.+17	D.R.+18	D.E.+18	D.R.+19	D.E.+19	D.R.+20	D.E.+20
0,99	0,99	1,01	1,01	0,99	0,99	1,01	1,01	0,99	0,99
1,28	1	1,27	1	1,28	1	1,27	1	1,28	1
0,99	0,99	1,01	1,01	0,99	0,99	1,01	1,01	0,99	0,99
1,01	1,01	0,99	0,99	1,01	1,01	0,99	0,99	1,01	1,01
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,13	1	1,13	1	1,13	1	1,13	1	1,13	1

Según este modelo de gestión, para obtener el máximo rendimiento de trofeos de alta calidad se obtendría un rendimiento anual constante y sostenible de 157 ciervos repartidos en 87 de la categoría F2 y 70 de la categoría M5 (Tabla 6.33).

Tabla 6.33. Extracciones anuales según el modelo de trofeos medallables

	t+0	t+1	t+2	t+3	t+4	t+5	t+6	t+7	t+8	t+9	t+10	t+11	t+12	t+13	t+14	t+15	t+16	t+17	t+18	t+19	t+20
F1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F2	134	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87
M1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M5	30	36	44	53	59	63	65	67	68	69	69	69	70	70	70	70	70	70	70	70	70
Total	164	123	131	140	146	150	152	154	155	156	156	156	157	157	157	157	157	157	157	157	157

Los valores más característicos obtenidos para esta alternativa a la gestión se resumen en el siguiente cuadro (Tabla 6.34):

Tabla 6.34. Resumen de resultados derivados de la gestión de trofeos medallables

	Proporción estable	Vector de extracciones h_{ij}	Vector estable $X_{O,D,R}$	Vector de extracciones
F1	0,09	0	128	0
F2	0,29	0,2142	405	87
M1	0,09	0	128	0
M2	0,08	0	108	0
M3	0,19	0	267	0
M4	0,21	0	294	0
M5	0,05	1	70	70
Total	1	-	1400	157

6.6 Comparativa de extracciones

Cuatro son las alternativas de gestión que han sido desarrolladas en este trabajo para una misma población y bajo las mismas condiciones. Garantizar una extracción constante y estable en el tiempo, asegurando la sostenibilidad de la explotación, son requisitos indispensables para llevarlas a cabo. Cumpliendo con igual eficiencia los objetivos marcados, cada una de ellas arroja vectores de extracción diferentes (Tabla 6.35) y será deber del gestor escoger que productos se adaptan mejor a sus necesidades y a las del mercado para decantarse por una de ellas.

Tabla 6.35. Vectores de extracciones de las cuatro alternativas de gestión

	Gestión natural	Montería comercial	Montería de trofeos	Trofeos medallables
F1	32	0	0	0
F2	93	140	108	87
M1	32	0	0	0
M2	21	0	0	0
M3	33	158	0	0
M4	21	0	105	0
M5	10	0	0	70
Total	242	298	213	157

Para la población objeto de estudio cuya densidad nunca debe superar los 1400 ejemplares, se plantean las diferentes alternativas para conseguirlo. La gestión natural, buscará aplicar el mismo ratio de extracción a todas las clases presentes para mantenerlas constantes, mientras que las otras gestiones aplican extracciones solamente sobre las hembras reproductoras para que la población no crezca y sobre la clase de calidad deseada, extrayéndola en su totalidad cada año (Figura 6.17).

Figura 6.17. Número de extracciones por clase de calidad y modelo de gestión

El rendimiento anual descende cuanto mayor es la clase de calidad a extraer, (Figura 6.18), ya que se necesitan efectivos en las clases intermedias para mantener el sistema estable y sostenible, durante su crecimiento, muchos de ellos mueren antes de alcanzar su edad de extracción sin que se obtenga rendimiento alguno de ellos, del resto no se obtendrá hasta que no crezcan lo suficiente y alcancen la clase determinada.

Figura 6.18. Rendimiento anual en extracciones totales para cada sistema de gestión

Respecto al sexo de los animales capturados (Figura 6.19), la tendencia general refleja una necesidad de extraer anualmente un mayor número de hembras que de machos a excepción de la gestión de montería comercial, ya que los machos son extraídos en su totalidad en una clase baja, no necesitando pasar por las clases intermedias para crecer, al tiempo que se pierde el mínimo número de efectivos posibles por muerte natural durante el proceso.

Figura 6.19. Rendimiento anual en extracciones por sexo para cada sistema de gestión

Se deberá decidir, por lo tanto, si prefiere basar la gestión en unas extracciones anuales numerosas de machos jóvenes y de hembras con un valor bajo de mercado

por individuo, o por el contrario permitir que los ejemplares se desarrollen asumiendo la pérdida de efectivos y el descenso de rendimiento total anual a costa de un incremento en la calidad y por tanto del valor de mercado por cada uno de ellos.

6.7 Errores comunes en el cálculo de ratios de extracción

En este apartado se van a discutir posibles errores o imprecisiones en el cálculo de los ratios de extracción según algunas metodologías tradicionales, comparando los resultados con los obtenidos por el modelo densodependiente presentado. La incorporación de los vectores de población después de la época de reproducción y después de la época de extracción será de gran ayuda para detectarlos y explicarlos.

El primero de los errores, se origina a partir del cálculo del plan de manejo en base a que la capacidad óptima o densidad de gestión fuera alcanzada después de la época de extracciones, es decir $X_{D.E.}=X_{Dg}$, o en el caso de encontrarse utilizando el modelo tradicional de Leslie o sus derivados con sus metodologías generales asociada, empleando el producto por la izquierda de la matriz de extracciones (Jensen 2000, Chelliah, Bukka et al. 2013). Seguir esta metodología será causante de una sobrepoblación indeseada y desconocida por el gestor que confía en ella aportando solo información en un único momento del año (Tabla 6.36). Este manejo derivado del producto por la izquierda, se fundamenta y calcula en base a la densidad más baja a lo largo del año, empleando para conocer los ratios de extracción (Tabla 6.36) la fórmula ya conocida:

$$h_{jit+1} = 1 - \frac{\lambda'}{\lambda} \rightarrow h_{jit+1} = 1 - \frac{x_{jiObj,t+1}}{x_{jit+1}}$$

Siendo:

λ = Autovalor dominante

λ' = Autovalor modificado por las extracciones

h_{ji} = Porcentaje de extracción

$x_{jiObj,t+1}$ = Número de individuos del sexo j y clase i objetivo en el instante t+1

x_{jit+1} = Número de individuos del sexo j y clase i en el instante t+1 sin extracciones

Tabla 6.36. Ratios de extracción calculados según la metodología clásica del producto por la izquierda de la matriz de extracciones (H)

	h_{t+0}	h_{t+1}	h_{t+2}	h_{t+3}	h_{t+4}	h_{t+5}
F1	0	0,1625	0	0,1157	0,0837	0,0471
F2	0	0,16	0,1424	0,1606	0,2448	0,1625
M1	0	0,1625	0	0,1388	0,1034	0,0471
M2	0	0,044	0	0	0,0902	0,1369
M3	0	0	0,1584	0,1788	0,1946	0,2128
M4	0	0,1587	0,1516	0,19	0,2119	0,25
M5	0	0,0751	0,1098	0,1858	0,2755	0,4343

Como consecuencia, la densidad objetivo parece haber sido alcanzada (Tabla 6.37 y Figura 6.20), mientras que la realidad es muy distinta.

Tabla 6.37. Evolución de la población de 1963 individuos de “Quintos de Mora” aplicando los porcentajes de extracción calculados según la metodología tradicional del producto de la matriz de extracciones por la izquierda y sin diferenciación entre población D.R. y D.E.

	X_t	X_{t+1}	X_{t+2}	X_{t+3}	X_{t+4}	X_{t+5}
F1	206	201	176	191	186	182
F2	750	709	668	627	546	546
M1	206	201	176	186	182	182
M2	89	152	141	137	131	126
M3	267	245	239	225	211	196
M4	213	196	179	162	145	126
M5	232	197	162	127	92	56
Total	1963	1901	1741	1655	1493	1414
Ciervos/100ha	28,6	27,7	25,36	24,11	21,75	20,6

Figura 6.20. Evolución gráfica de la población de 1963 individuos de “Quintos de Mora” aplicando los porcentajes de extracción calculados según la metodología tradicional del producto de la matriz de extracciones por la izquierda y sin diferenciación entre población D.R. y D.E.

Gracias a la división del vector de población en D.R. y D.E. realizado en este trabajo, este error se descubre con facilidad. Si la población después de la época de reproducción se toma como referencia y se reconduce hasta ser igual a la capacidad óptima del medio o a la densidad de gestión, el número de individuos extraídos será subestimado ya que la población se igualará al objetivo después de la época de extracciones, pero será siempre superior a este después de la época reproductiva del año siguiente (Tabla 6.38), lo que es claramente indeseado. La extracción calculada según la metodología asociada al modelo tradicional de Leslie o del producto de la matriz de extracciones por la izquierda, sin conocimiento de su significado real y de cómo aplicarlo correctamente, no será suficiente para conducir a la población a los valores deseados (Figura 6.21).

Tabla 6.38. Evolución de la población de 1963 individuos de “Quintos de Mora” aplicando los porcentajes de extracción calculados según la metodología tradicional del producto de la matriz de extracciones por la izquierda, pero aplicando la división de vectores D.R. y D.E.

	D.R.+0	D.E.+0	D.R.+1	D.E.+1	D.R.+2	D.E.+2	D.R.+3	D.E.+3	D.R.+4	D.E.+4	D.R.+5	D.E.+5	D.R.+6
F1	?	206	240	201	176	176	216	191	203	186	191	182	206
F2	?	750	844	709	779	668	747	627	723	546	652	546	656
M1	?	206	240	201	176	176	216	186	203	182	191	182	206
M2	?	89	159	152	141	141	137	137	144	131	146	126	151
M3	?	267	245	245	284	239	274	225	262	211	249	196	237
M4	?	213	233	196	211	179	200	162	184	145	168	126	151
M5	?	232	213	197	182	162	156	127	127	92	99	56	70
Total	?	1963	2174	1901	1949	1741	1946	1655	1846	1493	1696	1414	1677
Ciervos/100ha	?	28,6	31,67	27,7	28,39	25,36	28,35	24,11	26,89	21,75	24,71	20,6	24,43

Figura 6.21. Evolución de la población de 1963 individuos de “Quintos de Mora” aplicando los porcentajes de extracción calculados según la metodología tradicional del producto de la matriz de extracciones por la izquierda, pero aplicando la división de vectores D.R. y D.E.

El segundo caso, trata de explicar los efectos de emplear modelos exponenciales para la simulación de la evolución y el cálculo de los porcentajes de extracción de poblaciones reales, cuyo crecimiento se encuentra condicionado por la competencia interespecífica y la densodependencia.

El cálculo de los ratios de extracción se realiza siguiendo la metodología del producto por la derecha de la matriz de extracciones (H), teniendo perfecta consideración de que la población objetivo debe alcanzarse en el instante después de la reproducción, donde la población es la mayor del año, asegurando de que esta nunca supera el valor prefijado. Estos valores son estimados aplicando a la población un crecimiento exponencial en todo su desarrollo e introduciendo en la matriz los valores biológicos recopilados en el momento actual de la población, es decir, para este ejemplo, en una densidad de 1963 individuos. Según la fórmula:

$$h_{jit} = 1 + \frac{x_{jiD.R.t+1 \rightarrow x_{ji-1D.E.t}} - x_{o\ jiD.R.t+1}}{x_{jiD.R.t+1 \rightarrow x_{jiD.R.t}}}$$

Donde:

h_{jit} = Porcentaje de extracciones del sexo j y de la clase i en la temporada de extracciones t

$x_{jiD.R.t+1 \rightarrow x_{ji-1D.E.t}}$ = Individuos de sexo j y clase i después de la época de reproducción t+1

procedentes de los individuos de sexo j y clase i-1 después de la temporada de extracciones t

$x_{o\ jiD.R.t+1}$ = Individuos objetivo de sexo j y clase i después de la época reproductiva t+1

$X_{jiD.R.t+1 \rightarrow x_{jiD.R.t}}$ = Individuos de sexo j y clase i después de la época de reproducción t+1

procedentes de los individuos de sexo j y clase i después del periodo reproductivo t

Son calculados los porcentajes de extracción para reconducir la tendencia natural de la población, hacia la distribución y densidad objetivo de 1400 individuos que se ha venido utilizando como referencia en este trabajo (Tabla 6.39):

Tabla 6.39. Ratios de extracción calculados según la metodología del producto por la derecha de la matriz de extracciones (H) y bajo un crecimiento exponencial

	h_{t+0}	h_{t+1}	h_{t+2}	h_{t+3}	h_{t+4}
F1	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
F2	0,1699	0,1516	0,1615	0,1631	0,1675
M1	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
M2	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
M3	0,05	0,1754	0,1752	0,1991	0,2069
M4	0,2087	0,1218	0,1896	0,2086	0,2641
M5	0,0235	0,1102	0,1727	0,2957	0,5136

Tras aplicar estos ratios de extracciones en el modelo matricial exponencial o modelo tradicional de Leslie, se obtienen los siguientes resultados (Tabla 6.40):

Tabla 6.40. Evolución de la población simulada a través de un modelo matricial exponencial aplicando las extracciones calculadas asociadas a este

	D.R.+0	D.E.+0	D.R.+1	D.E.+1	D.R.+2	D.E.+2	D.R.+3	D.E.+3	D.R.+4	D.E.+4	D.R.+5
F1	206	196	176	167	170	162	158	150	148	141	138
F2	750	623	709	602	668	560	627	525	586	488	546
M1	206	196	176	167	170	162	158	150	148	141	138
M2	89	85	144	137	123	117	119	113	110	105	104
M3	267	254	232	191	239	197	225	180	211	167	196
M4	213	169	196	172	179	145	162	128	145	107	126
M5	232	227	197	175	162	134	127	89	92	45	56
Total	1963	1750	1830	1611	1711	1477	1576	1335	1440	1194	1304
Ciervos/100ha	28,59	25,49	26,66	23,47	24,92	21,51	22,96	19,44	20,97	17,39	18,99

Rápidamente se observan dos cosas: El objetivo de situar la densidad de población por debajo de la capacidad óptima del medio parece cumplido y que el vector poblacional no converge exactamente al deseado quedándose la densidad total notablemente por debajo de la densidad objetivo (Figura 6.22). Esto es debido, a que al introducir los valores de la población en el momento en que han sido tomados los datos, es decir, cuando la densidad rondaba los 1963 en la matriz A y no adaptarse esta a los cambios de densidad, su autovalor dominante y como consecuencia su autovector estable en el momento de alcanzar la capacidad óptima del medio, se ve modificado, difiriendo del vector objetivo con el que se ha trabajado hasta ahora.

Figura 6.22. Evolución gráfica de la población simulada a través de un modelo matricial exponencial aplicando las extracciones calculadas asociadas a este

No obstante, si introducimos en el modelo densodependiente, el cual se adapta más fielmente a lo que sería el comportamiento real de la población, los porcentajes de extracción calculados para el modelo exponencial (Tabla 6.39), se observa que la densidad objetivo no es alcanzada (Tabla 6.41).

Tabla 6.41. Evolución de la población simulada a través del modelo densodependiente aplicando las extracciones calculadas según el modelo exponencial

	D.R.+0	D.E.+0	D.R.+1	D.E.+1	D.R.+2	D.E.+2	D.R.+3	D.E.+3	D.R.+4	D.E.+4	D.R.+5
F1	206	196	176	167	199	189	195	185	201	191	203
F2	750	623	709	602	682	572	675	565	670	558	671
M1	206	196	176	167	199	189	195	185	201	191	203
M2	89	85	144	137	131	124	150	143	149	142	156
M3	267	254	232	191	241	199	235	188	246	195	250
M4	213	169	196	172	181	147	166	131	152	112	141
M5	232	227	197	175	163	135	130	92	96	47	60
Total	1963	1750	1830	1611	1796	1555	1746	1489	1715	1436	1684
Ciervos/100ha	28,6	25,5	26,66	23,47	26,17	22,65	25,44	21,69	24,99	20,92	24,53

Estabilizándose la población en una densidad indeseada por encima de la capacidad óptima del medio (Figura 6.23).

Figura 6.23. Evolución gráfica de la población simulada a través del modelo densodependiente aplicando las extracciones calculadas según el modelo exponencial

Todo esto, es consecuencia del fenómeno de la densodependencia, ampliamente tratado en este trabajo. El ratio de crecimiento de la población, reflejado a través del autovalor dominante, se incrementa bajo condiciones densodependientes si se reduce la población total. Como resultado de la reducción de la competencia interespecífica (Rodríguez-Hidalgo, Gortazar et al. 2010), que pone un mayor número de recursos de calidad a disposición de los individuos restantes, su salud mejora junto a sus probabilidades de supervivencia y aumenta el rendimiento reproductivo.

Por lo tanto, los ratios de extracción calculados para el modelo exponencial no serán suficientes para reducir el tamaño de la población real al deseado, ya que el crecimiento exponencial no considera el incremento en el ratio de crecimiento cuando la población se ve reducida, en algún punto estas extracciones serán inferiores al reclutamiento y la población no decrecerá alcanzando un nivel de equilibrio indeseado (Figura 6.23). De una forma contraria, el esfuerzo de extracción calculado como consecuencia del modelo densodependiente se incrementa a medida que la densidad se reduce y el ratio de crecimiento aumenta (Figura 6.24).

Figura 6.24 Comparativa de los individuos extraídos en base al modelo exponencial y al modelo densodependiente

6.8 Comparación con otros modelos

Es turno ahora de la comparación entre diferentes modelos que han sido históricamente empleados para la simulación de poblaciones de ungulados salvajes. Serán objeto de análisis y comparativa con el modelo aquí desarrollado:

- Modelo exponencial
- Modelo logístico
- Modelo de Jensen

Para ello, se realizará una simulación con cada modelo en base a la misma población inicial de 200 individuos (Tabla 6.41) para la finca de “Quintos de Mora” y se compararán los resultados obtenidos de cada uno de ellos.

Tabla 6.41. Población base de 200 individuos

Clase de calidad	X_{t+0}
F1	24
F2	64
M1	30
M2	20
M3	21
M4	23
M5	18
Total	200
Ciervos/100ha	2,91

La ecuación logística ha sido el modelo teórico de crecimiento de poblaciones dominante (Jensen 1995, Wam, Hofstad 2007, Chelliah, Bukka et al. 2013) para simular una curva sigmoide limitada asintótica. Esta función asume una declinación continua y lineal de la función densodependiente, al tiempo que la población se incrementa, lo que presenta desventajas y limitaciones (McCullough 1999) debido a que este comportamiento no es usualmente seguido por las poblaciones salvajes reales ya que por ejemplo, algunas de estas poblaciones presentan su respuesta densodependiente solamente en valores de densidad cercanos a la capacidad de carga logística (Martinez, Martin 2017). El modelo presentado en este trabajo, se adapta fácilmente a estas variables al ser posible modificar el rango de datos entre la capacidad óptima y la capacidad de carga, asumiendo un crecimiento ilimitado hasta que la población alcanza las restricciones por encima de la capacidad óptima. La ecuación logística (Williams, Nichols et al. 2002) y los modelos basados en ella (Jensen 1996), presentan restricciones al crecimiento desde el mismo arranque en la evolución de la población, mientras que la ecuación del crecimiento exponencial tiene un crecimiento ilimitado en todo su rango de estudio, situación igualmente irreal cuando de ungulados salvajes se está hablando.

La evolución de la hipotética población inicial de 200 individuos de Quintos de Mora hasta alcanzar la capacidad de carga de 2330 individuos, ha sido simulada empleando los cuatro modelos: exponencial (Leslie 1945, Lefkovitch 1965), logístico (Williams, Nichols et al. 2002), Jensen (Jensen 1995, Jensen 2000), basado en la propia ecuación logística y el modelo presentado en este trabajo al que nombraremos como modelo densodependiente.

El coeficiente logístico de crecimiento de la población, r , aplicado ha sido el autovalor dominante de la población estimado en apartados anteriores, siendo $r=0,21$, ya que la ecuación logística no considera variaciones del rendimiento del crecimiento

producidas por las modificaciones de la distribución de la población como hacen los modelos matriciales.

El modelo de Jensen, fue desarrollado para poder introducir una matriz de crecimiento de Leslie y un vector de distribución de población en el sistema logístico clásico, solventando así por ejemplo el inconveniente de no contar con la influencia de la distribución de la población en el crecimiento. En este estudio comparativo se ha introducido la matriz A desarrollada para la población de ciervo ibérico Quintos de Mora en la ecuación de Jensen. En cuanto al modelo exponencial, la misma matriz de crecimiento A, ha servido para implementar el modelo clásico de Leslie, modificándolo para albergar clases de calidad en lugar de clases de edad.

Simulando la evolución de la población a través de los diferentes modelos, se obtienen resultados dispares (Figura 6.25).

Figura 6.25. Evolución de la misma población de ciervo ibérico inicial de 200 ejemplares según cuatro modelos diferentes

El análisis gráfico de los resultados, aporta importante información acerca del comportamiento de los modelos estudiados. Para comenzar, resulta fácil distinguir como el modelo exponencial presenta el típico crecimiento ilimitado según el cual supera sin alterarse los valores de capacidad óptima del medio y de capacidad de carga disparando el número de individuos rápidamente fuera de valores razonables para este tipo de fauna.

Por otro lado, se observa la similitud entre el modelo de Jensen y la ecuación logística, a consecuencia de que el primero está basado directamente en el segundo. La desviación entre los resultados de ambos, se debe a la inestabilidad en la distribución de la población inicial introducida en el modelo de Jensen, esto significa, que este modelo, al igual que cualquier otro modelo matricial de Leslie necesitará estabilizar la distribución del vector de poblaciones para alcanzar el crecimiento dictado por el autovalor dominante y estable de la matriz A . Esta diferencia entre la distribución de la población inicial y del autovector inicial y del dominante, hará que el crecimiento se retrase ligeramente en el modelo de Jensen frente al modelo logístico. Como se ha comentado la ecuación logística, no tiene en cuenta el factor de distribución de la población, iniciando su desarrollo directamente con el coeficiente de crecimiento estabilizado (r).

En cuanto al novedoso modelo densodependiente, se puede observar su claro crecimiento ilimitado igual al exponencial hasta alcanzar la capacidad óptima del medio, a partir de la cual, la competencia intraespecífica comenzará a hacer mella en los ejemplares, ralentizando su capacidad de crecer gradualmente hasta alcanzar su desarrollo máximo o capacidad de carga del medio, donde la ausencia de recursos hará imposible un mayor crecimiento de la población.

El análisis de los ratios de crecimiento o autovalores de los diferentes modelos para cada densidad establecida, confirma las conclusiones obtenidas (Figura 6.26).

Figura 6.26. Ratios de crecimiento de la población estudiada a través del modelo exponencial, logístico, Jensen y del modelo densodependiente

Según las variaciones observadas en los ratios de crecimiento, las diferencias entre los modelos son aún más claras.

En el modelo exponencial, el ratio de crecimiento crece al tiempo que se estabiliza la distribución de la población, una vez estabilizada la distribución de la población permanece constante a lo largo de todo el rango de estudio sin ningún tipo de influencia del medio y de la densidad de animales, descartándolo por completo para simular una situación completamente real de este tipo de poblaciones.

Con un comportamiento diferente, el ratio de crecimiento en el modelo logístico y en el modelo de Jensen, se ve reducido por las restricciones densodependientes desde el primer instante. De este modo, la única situación en la que según este planteamiento teórico no hay restricciones debido a la competencia interespecífica es cuando la población ni siquiera existe ($X=0$). Como conclusión, se puede añadir que no tendría mucho sentido biológico aplicar este principio sobre poblaciones reales de ungulados salvajes.

Por último, el modelo densodependiente desarrollado durante este trabajo, presenta un autovalor fluctuante según el momento. En un principio este ratio aumentaría gradualmente hasta que la distribución de la población estuviera estabilizada y se alcanzara el autovalor dominante. Este autovalor dominante, se mantiene constante hasta que la densidad de animales supera la capacidad óptima del medio. A partir de este punto, si se permite que el aumento de animales continúe, las restricciones densodependientes al crecimiento se manifestarán gradualmente, reduciendo este crecimiento cada vez con mayor rigurosidad hasta anularlo por completo a densidades cercanas a la capacidad de carga del medio.

Respecto a lo expuesto con anterioridad, mientras que la rigidez de los modelos logísticos y exponenciales los hace poco útiles para la simulación de poblaciones reales, el nuevo modelo densodependiente puede adaptar su curva de crecimiento a los valores introducidos en él, valores como: capacidad óptima del medio, capacidad de carga del medio, natalidad y mortalidad de cada una de las clases de calidad, junto con los ya conocidos como factores densodependientes (D_{KX}), originan distintos resultados en diferentes situaciones.

CAPÍTULO 7. APLICACIÓN INFORMÁTICA

Debido a la complejidad de muchos de los procesos y cálculos descritos para la correcta utilización del modelo, su empleo para obtener los valores buscados puede resultar largo y tedioso y no estar al alcance de cualquier gestor. Puesto que uno de los principales objetivos de este trabajo era la creación de una herramienta útil para la gestión real de poblaciones de ungulados salvajes accesible a cualquier usuario, este modelo ha sido implementado en una aplicación informática, que lo transforma en una herramienta de uso rápido y sencillo, guiando al gestor desde la introducción de los valores iniciales hasta los resultados de una manera intuitiva. Solamente encontramos un antecedente similar de una aplicación informática específica para la gestión de una población de ciervo, en este caso para una población de ciervo de cola blanca (*Odocoileus virginianus*) que fue desarrollado por la universidad de Michigan (Xie, Hill et al. 1999). Esta aplicación conocida como DeerMOM (The deer management options model), se fundamenta en parámetros y funciones específicas del ciervo de cola blanca en un área de estudio concreta, no explicando con claridad en su estudio todos los fundamentos matemáticos en los que se soporta, por lo que realizar una comparación resulta imposible.

La aplicación presentada en este trabajo, se ha realizado con un lenguaje de programación de Microsoft conocido como visual basic application o vba. Esta aplicación se sostiene sobre un entorno de una hoja de cálculo de Microsoft excell, tomando formularios de entrada de datos que se sincronizan con las distintas hojas del programa donde se realizarán automáticamente los cálculos, mostrando los resultados obtenidos en las diferentes pantallas de outputs, tanto de forma gráfica como en forma de tabla.

A continuación, se procede a mostrar las diferentes pantallas de esta aplicación y a describir su uso a modo de sencillo manual.

7.1 Entrada de datos

Para comenzar, la aplicación se ejecutará automáticamente haciendo doble click sobre su icono correspondiente (Figura 7.1).

Figura 7.1. Vista del icono de inicio de la aplicación

Una vez abierta, el usuario se encontrará la pantalla de inicio, donde se contiene el formulario para la entrada de datos (Figura 7.2). Estos datos de entrada pueden ser o bien introducidos por el usuario o bien algunos de ellos, pueden ser introducidos automáticamente por la aplicación.

Figura 7.2. Pantalla de inicio donde se introducen los datos de entrada

MODELO DENSODEPENDIENTE

Datos Coto

Superficie del coto (ha)	
Carga máxima	
Carga óptima	

	Carga óptima	Carga máxima
Natalidad (crías/hembra)		
Supervivencia gabatos (%)		
Supervivencia gabatos (%)		
Supervivencia hembras de 1 año (%)		
Supervivencia machos de 1 año (%)		
Supervivencia hembras adultas (%)		
Supervivencia machos adultos (%)		

Los campos con (%) solo admiten valores comprendidos entre 0 y 1

Resetear valores Valores por defecto

Siguiente ➔

Deben ser aportados exclusivamente por el usuario los siguientes valores pertenecientes al primer cuadro:

- Superficie del coto o finca en hectáreas
- Carga máxima de animales o capacidad de carga.
- Carga óptima de animales.

El siguiente cuadro de datos se corresponde con los valores biológicos de la población, en este momento el usuario tiene dos opciones, introducir manualmente los valores específicos de la población que esté estudiando o pulsar el botón “valores por

defecto”, que hará que este cuadro se complete automáticamente con los valores de referencia utilizados en este trabajo (Figura 7.3).

Figura 7.3. Botón de “valores por defecto” y dichos valores en el cuadro de entrada de datos

Modelo Densodependiente

MODELO DENSODEPENDIENTE

Datos Coto

Superficie del coto (ha)	
Carga máxima	
Carga óptima	

	Carga óptima	Carga máxima
Natalidad (crias/hembra)	0,8	0,36
Supervivencia gachas (%)	0,12	0,34
Supervivencia gachas (%)	0,15	0,36
Supervivencia hembras de 1 año (%)	0,06	0,1
Supervivencia machos de 1 año (%)	0,1	0,14
Supervivencia hembras adultas (%)	0,03	0,07
Supervivencia machos adultos (%)	0,05	0,09

Los campos con (%) solo admiten valores comprendidos entre 0 y 1

Estos valores biológicos deberán estar siempre comprendidos entre 0 y 1 a excepción de la natalidad, en caso contrario el programa mostrará una alerta indicando el error (Figura 7.4).

Figura 7.4. Alerta de error al introducir valores biológicos fuera del intervalo 0-1

Modelo Densodependiente

MODELO DENSODEPENDIENTE

Datos Coto

Superficie del coto (ha)	1650
Carga máxima	600
Carga óptima	450

Natalidad (c)		
Supervivencia		
Supervivencia		
Supervivencia		
Supervivencia		
Supervivencia hembras adultas (%)	0,03	0,07
Supervivencia machos adultos (%)	0,05	0,09

Carga óptima	Carga máxima
0,36	0,34
0,36	0,1
0,14	

Los campos con (%) solo admiten valores comprendidos entre 0 y 1

Resetear valores
Valores por defecto

Siguiente
➔

Este segundo cuadro de entrada de datos se compone de los siguientes campos:

- Natalidad (crías/hembras)
- Supervivencia de gabatas (hembras 0-1 años).
- Supervivencia de gabatos (machos 0-1 años).
- Supervivencia hembras de 1 año
- Supervivencia machos de 1 año
- Supervivencia hembras adultas
- Supervivencia machos adultos

Es obligatorio en esta pantalla rellenar todos los campos puesto que, en caso de no hacerlo, el programa nos mostrará una ventana de alerta indicándolo y no permitiendo al usuario avanzar (Figura 7.5).

Figura 7.5. Alerta de error por falta de datos

Modelo Densodependiente

MODELO DENSODEPENDIENTE

Datos Coto

Superficie del coto (ha)	
Carga máxima	600
Carga óptima	450

Natalidad		máxima
Supervive		0,36
Supervive		0,34
Supervive		0,36
Supervive		0,1
Supervive		0,14
Supervivencia hembras adultas (%)	0,03	0,07
Supervivencia machos adultos (%)	0,05	0,09

Los campos con (%) solo admiten valores comprendidos entre 0 y 1

Resetea valores Valores por defecto

Campos Obligatorios

Todos los campos de este formulario son obligatorios

Aceptar

Siguiente

Una vez completada la pantalla de entrada de datos, pulsando el botón “siguiente” (Figura 7.5), situado en la parte inferior de la pantalla, se accede automáticamente a la segunda pantalla de entrada de datos. En esta pantalla se deberá introducir el vector de población inicial, dividido en las ya conocidas 7 clases de calidad (Figura 7.6).

Figura 7.6. Segunda pantalla de entrada de datos donde se introducirá la población inicial

The screenshot shows a window titled 'Datos Poblacion'. At the top, there is a large text input field labeled 'POBLACIÓN'. Below it, a section titled 'Datos Población' contains a table. The table has a header row with columns 'F1', 'F2', 'M1', 'M2', 'M3', 'M4', and 'M5'. The first row of the table is labeled 'Población inicial' and contains seven empty input fields corresponding to each column. At the bottom of the window, there are two buttons: 'Anterior' (with a left arrow) and 'Siguiente' (with a right arrow).

Nuevamente es obligatorio introducir todos los campos marcados, ya que en caso contrario una alerta del programa nos impedirá avanzar (Figura 7.7). Pulsando el botón siguiente situado en la esquina inferior derecha, llegaremos a la siguiente pantalla.

Figura 7.7. Alerta por falta de datos en la pantalla de población inicial

This screenshot shows the same 'Datos Poblacion' window as Figure 7.6, but with an error dialog box overlaid in the center. The dialog box is titled 'CAMPOS OBLIGATORIOS' and contains a red 'X' icon and the text 'Todos los campos de este formulario son obligatorios'. There is an 'Aceptar' button at the bottom right of the dialog box. The background elements, including the 'POBLACIÓN' input field, the table, and the 'Anterior'/'Siguiente' buttons, are visible behind the dialog.

Alcanzamos pues la tercera y última pantalla de entrada de datos, donde se introducirán los porcentajes de extracción que se quieren llevar a cabo (Figura 7.8). En esta pantalla se podrán introducir los valores de las extracciones que se deseen realizar sobre la población en el periodo de 20 años que dura la simulación. Estos valores deberán situarse siempre entre 0 y 1, en caso contrario, una alerta impedirá el avance hacia la pantalla de resultados. En el caso de que se dejen campos sin rellenar y pulsar el botón “siguiente” de la esquina inferior derecha, el programa

interpretará que no se va a realizar ninguna extracción y lo completará automáticamente con un 0. Se recomienda en primera estancia, acceder a la pantalla de resultados sin introducir en esta ningún valor para de esta manera conocer la evolución de la población sin ningún tipo de gestión, volviendo atrás a continuación para introducir las extracciones finales.

Figura 7.8. Pantalla para la introducción de los ratios de extracción

Porcentajes de captura

PORCENTAJES DE CAPTURA

Porcentaje Captura

** Valores comprendidos entre 0 y 1. Las celdas en blanco se considerarán con valor 0 para los cálculos*

	AÑO 0	AÑO 1	AÑO 2	AÑO 3	AÑO 4	AÑO 5	AÑO 6	AÑO 7	AÑO 8	AÑO 9	AÑO 10	AÑO 11	AÑO 12	AÑO 13	AÑO 14	AÑO 15	AÑO 16	AÑO 17	AÑO 18	AÑO 19	AÑO 20
F1																					
F2																					
M1																					
M2																					
M3																					
M4																					
M5																					

Anterior Siguiente

7.2 Resultados

Una vez finalizada la cumplimentación de todos los campos de datos iniciales, se podrá acceder a la pantalla de resultados (Figura 7.9). En ella pulsando cada uno de los botones el usuario podrá acceder a los diferentes resultados obtenidos por la aplicación para una simulación de 20 años. Pulsando el botón “anterior” situado en la esquina inferior izquierda se podrá acceder a los formularios de datos de entrada y realizar modificaciones.

Tabla 7.9. Pantalla de resultados

The screenshot shows a software window titled 'UserForm1' with a close button in the top right corner. The main title is 'RESULTADO APLICACIÓN'. Below it, a label reads '* Selecciona informe o gráfico a visualizar'. There are six buttons arranged in two columns: 'Vectores de población', 'Autovalores', and 'Capturas' on the left; 'Proporciones', 'Sex-ratio', and 'Gráficos' on the right. The 'Gráficos' button is highlighted with an orange border. At the bottom left, there is a green button with a left arrow and the text 'Anterior'.

Los botones de resultados que aporta el programa son los siguientes:

- Vectores de población
- Autovalores
- Capturas
- Proporciones
- Sex-ratio
- Gráficos

Pulsando sobre el botón de vectores de población, se obtiene la evolución de la población en forma de tabla y por clases de calidad a lo largo de los 20 años que dura la simulación con la división anual de después de la reproducción y después del periodo de extracciones (Figura 7.10). Presionando el botón situado en la esquina superior izquierda "volver Menú Resultados", podremos elegir otra hoja de resultados diferente.

Figura 7.10. Hoja de resultados de los vectores de población

Modelo Densodependiente - Excel

Volver Menú Resultados

*D.R.=Después de la reproducción
*D.E.= Después de las temporadas de extracciones

Clase de calidad		D.R.+0	D.E.+0	D.R.+1	D.E.+1	D.R.+2	D.E.+2	D.R.+3	D.E.+3	D.R.+4	D.E.+4	D.R.+5	D.E.+5
Hembras	F1	12	12	8	8	12	12	14	14	17	17	20	20
	F2	20	20	29	29	34	34	42	42	51	51	62	62
	M1	10	10	8	8	12	12	14	14	17	17	20	20
	M2	14	14	9	9	7	7	10	10	12	12	14	14
	M3	23	23	27	27	25	25	22	22	23	23	25	25
Machos	M4	18	18	20	20	23	23	24	24	24	24	24	24
	M5	16	16	16	16	16	16	17	17	18	18	19	19
	Total	112	112	117	117	129	129	143	143	162	162	184	184
	Densidad: Cierrosfha	8.43	8.43	8.73	8.73	9.63	9.63	10.67	10.67	12.09	12.09	13.73	13.73

Clase de calidad		D.R.+6	D.E.+6	D.R.+7	D.E.+7	D.R.+8	D.E.+8	D.R.+9	D.E.+9	D.R.+10	D.E.+10
Hembras	F1	25	25	30	30	36	36	44	44	53	53
	F2	75	75	91	91	100	100	133	133	161	161
	M1	25	25	30	30	36	36	44	44	53	53
	M2	17	17	21	21	26	26	31	31	37	37
	M3	28	28	33	33	40	40	49	49	59	59
Machos	M4	25	25	27	27	30	30	34	34	40	40
	M5	19	19	19	19	20	20	21	21	23	23
	Total	214	214	251	251	298	298	356	356	426	426
	Densidad: Cierrosfha	15.97	15.97	18.73	18.73	22.24	22.24	26.57	26.57	31.79	31.79

Clase de calidad		D.R.+11	D.E.+11	D.R.+12	D.E.+12	D.R.+13	D.E.+13	D.R.+14	D.E.+14	D.R.+15	D.E.+15
Hembras	F1	64	64	62	62	53	53	50	50	48	48
	F2	195	195	228	228	247	247	255	255	258	258
	M1	64	64	62	62	53	53	50	50	48	48
	M2	45	45	49	49	43	43	35	35	32	32
	M3	71	71	84	84	94	94	95	95	88	88
Machos	M4	47	47	55	55	64	64	73	73	79	79
	M5	26	26	29	29	33	33	37	37	42	42
	Total	512	512	569	569	587	587	595	595	595	595
	Densidad: Cierrosfha	38.21	38.21	42.46	42.46	43.81	43.81	44.40	44.40	44.40	44.40

Clase de calidad		D.R.+16	D.E.+16	D.R.+17	D.E.+17	D.R.+18	D.E.+18	D.R.+19	D.E.+19	D.R.+20	D.E.+20
Hembras	F1	43	43	46	46	43	43	43	43	43	43
	F2	260	260	262	262	263	263	265	265	267	267
	M1	43	43	46	46	43	43	43	43	43	43
	M2	31	31	31	31	31	31	32	32	32	32
	M3	81	81	81	76	76	73	71	71	71	71
Machos	M4	81	81	80	80	78	78	76	76	74	74
	M5	47	47	51	51	53	53	54	54	54	54
	Total	530	530	536	536	536	536	536	536	536	536
	Densidad: Cierrosfha	44.63	44.63	44.48	44.48	44.48	44.48	44.48	44.48	44.48	44.48

LISTO

80

El siguiente botón, (Autovalores) arrojará información sobre los autovalores de la población en cada momento, tanto por clases de calidad como el autovalor general (Figura 7.11), pudiendo hacer un seguimiento de su estabilización a lo largo de la simulación y conocer así el autovalor dominante de la matriz A.

Figura 7.11. Hoja de resultados de los autovalores

Figura 7.11: Hoja de resultados de Excel

Modelo Densodependiente - Excel

Volver Menú Resultados

*D.R.=Después de la reproducción
*D.E.= Después de las temporadas de extracción

Clase de calidad		D.R.+0	D.E.+0	D.R.+1	D.E.+1	D.R.+2	D.E.+2	D.R.+3	D.E.+3	D.R.+4	D.E.+4	D.R.+5	D.E.+5
Hembras	F1	-	-	0.87	0.87	1.5	1.5	1.07	1.07	1.21	1.21	1.18	1.18
	F2	-	-	1.45	1.45	1.07	1.07	1.24	1.24	1.21	1.21	1.22	1.22
	M1	-	-	0.8	0.8	1.5	1.5	1.07	1.07	1.21	1.21	1.18	1.18
	M2	-	-	0.64	0.64	0.70	0.70	1.43	1.43	1.2	1.2	1.07	1.07
	M3	-	-	1.07	1.07	0.83	0.83	0.88	0.88	1.05	1.05	1.09	1.09
Machos	M4	-	-	1.07	1.07	1.05	1.05	1.04	1.04	1	1	1	1
	M5	-	-	1	1	1	1	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06
	Total	-	-	1.04	1.04	1.1	1.1	1.07	1.07	1.02	1.02	1.04	1.04

Clase de calidad		D.R.+6	D.E.+6	D.R.+7	D.E.+7	D.R.+8	D.E.+8	D.R.+9	D.E.+9	D.R.+10	D.E.+10
Hembras	F1	1.25	1.25	1.2	1.2	1.2	1.2	1.22	1.22	1.2	1.2
	F2	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01
	M1	1.25	1.25	1.2	1.2	1.2	1.2	1.22	1.22	1.2	1.2
	M2	1.21	1.21	1.24	1.24	1.24	1.24	1.19	1.19	1.19	1.19
	M3	1.02	1.02	1.03	1.03	1.01	1.01	1.03	1.03	1.2	1.2
Machos	M4	1.04	1.04	1.08	1.08	1.01	1.01	1.03	1.03	1.08	1.08
	M5	1	1	1	1	1.05	1.05	1.05	1.05	1.1	1.1
	Total	1.06	1.06	1.07	1.07	1.09	1.09	1.09	1.09	1.2	1.2

Clase de calidad		D.R.+11	D.E.+11	D.R.+12	D.E.+12	D.R.+13	D.E.+13	D.R.+14	D.E.+14	D.R.+15	D.E.+15
Hembras	F1	1.21	1.21	0.97	0.97	0.85	0.85	0.84	0.84	0.96	0.96
	F2	1.21	1.21	1.07	1.07	1.08	1.08	1.03	1.03	1.01	1.01
	M1	1.01	1.01	0.91	0.91	0.85	0.85	0.84	0.84	0.96	0.96
	M2	1.22	1.22	1.09	1.09	0.86	0.86	0.81	0.81	0.91	0.91
	M3	1.2	1.2	1.01	1.01	1.02	1.02	1.01	1.01	0.93	0.93
Machos	M4	1.06	1.06	1.07	1.07	1.06	1.06	1.04	1.04	1.08	1.08
	M5	1.02	1.02	1.02	1.02	1.04	1.04	1.02	1.02	1.04	1.04
	Total	1.2	1.2	1.07	1.07	1.03	1.03	1.01	1.01	1	1

Clase de calidad		D.R.+16	D.E.+16	D.R.+17	D.E.+17	D.R.+18	D.E.+18	D.R.+19	D.E.+19	D.R.+20	D.E.+20
Hembras	F1	1.02	1.02	0.96	0.96	1.02	1.02	1	1	1.01	1.01
	F2	1.02	1.02	0.96	0.96	1.02	1.02	1	1	1	1
	M1	0.97	0.97	1	1	1	1	1.03	1.03	1	1
	M2	0.92	0.92	0.94	0.94	0.96	0.96	0.97	0.97	1	1
	M3	1.03	1.03	0.99	0.99	0.98	0.98	0.97	0.97	0.97	0.97
Machos	M4	1.03	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.02	1.02	1	1
	M5	1.02	1.02	1.03	1.03	1.04	1.04	1.02	1.02	1	1
	Total	1.01	1.01	1	1	1	1	1	1	1	1

En el botón capturas, se mostrarán en forma de tabla el número de individuos extraídos de la población en cada momento, por clase de calidad y sobre el total de la población para el total de la simulación (Figura 7.12).

Figura 7.12. Hoja de resultados de las extracciones

Volver Menú Resultados

	Clase de calidad	t+0	t+1	t+2	t+3	t+4	t+5	t+6	t+7	t+8	t+9	t+10
Hembras	F1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	F2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	M1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Machos	M2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	M3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	M4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	M5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	Clase de calidad	t+11	t+12	t+13	t+14	t+15	t+16	t+17	t+18	t+19	t+20
Hembras	F1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	F2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	M1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Machos	M2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	M3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	M4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	M5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

LISTO 70 %

En el botón de proporciones, se mostrará una tabla con la evolución de los autovectores, siendo estos las proporciones por cada clase de calidad para cada instante (Figura 7.13). Observado la estabilización de estos vectores, se puede conocer el autovector asociado al autovalor dominante de la matriz A.

Tabla 7.13. Hoja de resultados de los autovectores o proporciones

Volver Menú Resultados

D.R. = Después de la reproducción
D.E. = Después de las temporadas de extracción

	Clase de calidad	D.R.+0	D.E.+0	D.R.+1	D.E.+1	D.R.+2	D.E.+2	D.R.+3	D.E.+3	D.R.+4	D.E.+4	D.R.+5	D.E.+5
Hembras	F1	0,11	0,11	0,07	0,07	0,03	0,03	0,1	0,1	0,1	0,1	0,11	0,11
	F2	0,19	0,19	0,25	0,25	0,26	0,26	0,29	0,29	0,31	0,31	0,34	0,34
	M1	0,09	0,09	0,07	0,07	0,09	0,09	0,1	0,1	0,1	0,1	0,11	0,11
Machos	M2	0,12	0,12	0,08	0,08	0,05	0,05	0,07	0,07	0,07	0,07	0,08	0,08
	M3	0,2	0,2	0,23	0,23	0,19	0,19	0,15	0,15	0,14	0,14	0,14	0,14
	M4	0,16	0,16	0,17	0,17	0,16	0,16	0,17	0,17	0,15	0,15	0,15	0,15
	M5	0,14	0,14	0,14	0,14	0,12	0,12	0,12	0,12	0,11	0,11	0,1	0,1
Total		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

	Clase de calidad	D.R.+6	D.E.+6	D.R.+7	D.E.+7	D.R.+8	D.E.+8	D.R.+9	D.E.+9	D.R.+10	D.E.+10
Hembras	F1	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12
	F2	0,25	0,25	0,26	0,26	0,27	0,27	0,27	0,27	0,28	0,28
	M1	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12
Machos	M2	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09
	M3	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,14	0,14	0,14	0,14
	M4	0,12	0,12	0,11	0,11	0,1	0,1	0,1	0,1	0,09	0,09
	M5	0,09	0,09	0,08	0,08	0,07	0,07	0,06	0,06	0,05	0,05
Total		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

	Clase de calidad	D.R.+11	D.E.+11	D.R.+12	D.E.+12	D.R.+13	D.E.+13	D.R.+14	D.E.+14	D.R.+15	D.E.+15
Hembras	F1	0,13	0,13	0,11	0,11	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09
	F2	0,29	0,29	0,4	0,4	0,42	0,42	0,43	0,43	0,43	0,43
	M1	0,13	0,13	0,11	0,11	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09
Machos	M2	0,09	0,09	0,09	0,09	0,07	0,07	0,06	0,06	0,05	0,05
	M3	0,14	0,14	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13
	M4	0,09	0,09	0,1	0,1	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,12
	M5	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07
Total		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

	Clase de calidad	D.R.+16	D.E.+16	D.R.+17	D.E.+17	D.R.+18	D.E.+18	D.R.+19	D.E.+19	D.R.+20	D.E.+20
Hembras	F1	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,09	0,09
	F2	0,43	0,43	0,44	0,44	0,44	0,44	0,44	0,44	0,45	0,45
	M1	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09
Machos	M2	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
	M3	0,14	0,14	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,12	0,12
	M4	0,14	0,14	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,12	0,12
	M5	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09
Total		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

LISTO 70 %

A continuación, clicando sobre el botón sex-ratio, se obtendrá una tabla de resultados con el número total de machos y el número total de hembras para cada intervalo de la proyección, así como la proporción de sexos según la razón hembras/machos (Figura 7.14).

Figura 7.14. Hoja de resultados del sex-ratio

Modelo Densodependiente - Excel

Volver Menú Resultados

*D.R.=Después de la reproducción
*D.E.= Después de las temporadas de extracciones

	D.R.+0	D.E.+0	D.R.+1	D.E.+1	D.R.+2	D.E.+2	D.R.+3	D.E.+3	D.R.+4	D.E.+4	D.R.+5	D.E.+5
Total hembras	32	32	37	37	46	46	56	56	68	68	82	82
Total Machos	81	81	80	80	83	83	87	87	94	94	102	102
Hembras/Machos	0,40	0,40	0,46	0,46	0,55	0,55	0,64	0,64	0,72	0,72	0,80	0,80

	D.R.+6	D.E.+6	D.R.+7	D.E.+7	D.R.+8	D.E.+8	D.R.+9	D.E.+9	D.R.+10	D.E.+10
Total hembras	100	100	121	121	146	146	177	177	214	214
Total Machos	114	114	130	130	152	152	179	179	212	212
Hembras/Machos	0,88	0,88	0,93	0,93	0,96	0,96	0,99	0,99	1,01	1,01

	D.R.+11	D.E.+11	D.R.+12	D.E.+12	D.R.+13	D.E.+13	D.R.+14	D.E.+14	D.R.+15	D.E.+15
Total hembras	259	259	290	290	300	300	305	305	306	306
Total Machos	253	253	279	279	287	287	290	290	289	289
Hembras/Machos	1,02	1,02	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,06	1,06

	D.R.+16	D.E.+16	D.R.+17	D.E.+17	D.R.+18	D.E.+18	D.R.+19	D.E.+19	D.R.+20	D.E.+20
Total hembras	309	309	310	310	312	312	314	314	316	316
Total Machos	289	289	286	286	284	284	282	282	280	280
Hembras/Machos	1,07	1,07	1,08	1,08	1,10	1,10	1,11	1,11	1,13	1,13

LISTO

Por último, si el usuario presiona el botón gráficos, se generará una hoja de resultados que muestra dos gráficos (Figura 7.15): el primero de ellos representa la evolución de la población a lo largo de los 20 años de la simulación y en los dos instantes de tiempo en los que se ha dividido cada uno de los intervalos anuales, es decir, después del periodo reproductivo y después del periodo de extracciones. Por su parte el segundo gráfico muestra la evolución de dicha población sin realizar dicha división bianual.

Figura 7.15. Hoja de resultados de gráficos

CAPÍTULO 8. CONCLUSIONES

Este trabajo, muestra el desarrollo de un modelo matricial densodependiente adaptable y su metodología asociada para la gestión de poblaciones de ungulados salvajes. El modelo se sirve de un método iterativo numérico de convergencia para el cálculo de los valores característicos de la matriz de transiciones y las distribuciones estables asociadas, consiguiendo mantener la población en niveles de densidad óptimos mediante extracciones sostenibles, reduciendo de esta manera los conflictos resultantes entre el aumento de estas poblaciones, su entorno y la sociedad humana. Siendo posible simular el crecimiento real de una población con el objetivo de prever su evolución y probar diferentes alternativas de gestión para finalmente llevar a cabo la que más se adapte a los objetivos marcados.

Durante mucho tiempo, la ecuación logística ha sido el modelo teórico dominante de crecimiento de poblaciones para simular una curva sigmoide limitada asintóticamente, a pesar de ello, esta ecuación presenta desventajas y limitaciones (McCullough 1999) que afectan a su realismo. Desde un modelo matricial clásico de Leslie que simula solamente un crecimiento exponencial de la población, este modelo ha sido adaptado para simular un crecimiento sigmoide que añade realismo biológico a la función (Jensen 1997).

Dos importantes términos para la gestión de poblaciones salvajes han sido diferenciados y redefinidos: Capacidad óptima y Capacidad de carga. Su importancia radica en que el comportamiento de la curva de crecimiento de la población se ve modificado en sus valores ya que son indicadores del comienzo y fin de las restricciones densodependientes y de su intensidad. El crecimiento cambia de exponencial a densodependiente al cruzar el umbral de la densidad óptima, volviéndose cercano a cero cuando la densidad ronda la capacidad de carga del medio. Por otra parte, la conceptualización de este modelo permite la variación de sus componentes paramétricos gracias a los factores densodependientes, los cuales a su vez están en función de los valores de capacidad óptima y capacidad de carga, siendo completamente distintos para cada caso particular estudiado.

Con el objetivo de conseguir un modelo útil para la gestión de poblaciones salvajes, también se han introducido las clases de calidad para el ciervo ibérico facilitando el trabajo sobre el terreno, convirtiendo este modelo en una herramienta efectiva para la toma y tratamiento de resultados. Estas clases de calidad, son específicas para cada especie de ungulado, en este estudio, dos clases para las

hembras y cinco clases para los machos de ciervo ibérico han sido propuestas cumpliendo de la manera más práctica y precisa los objetivos de la ordenación. Al analizar una población con este modelo, los resultados obtenidos aportan todos los parámetros importantes a tener en cuenta para la gestión, proporcionando para cada salto de la simulación, su estructura y ratio de crecimiento.

Otra de las novedades aportadas tiene que ver con que esta herramienta arroja datos en dos momentos o situaciones diferentes al año, permitiendo obtener resultados según el ciclo anual y así conocer como está cambiando exactamente la densidad y la distribución por clases de la población después de la época de reproducción y después de la época de extracciones (Focardi, Toso et al. 1996, Lopatin, Rosolovsky 2002, Gilbert, Raedeke et al. 2007).

Los autovalores de la matriz dan información precisa acerca del crecimiento anual de la población sin extracciones, permitiendo calcular estas con el objetivo final de alcanzar un rendimiento sostenible que iguale su autovalor a la unidad, garantizando de este modo de una forma cuantitativa la persistencia de la población. Gracias a la diferenciación realizada del producto por la derecha o por la izquierda de la matriz de extracciones (H) con la matriz de transiciones A y a la explicación e interpretación de los resultados, estas extracciones mantienen la densidad de animales en valores óptimos después del periodo reproductivo, que es cuando el número de animales es mayor a lo largo del año.

Una vez explorada una estrategia de gestión clásica, que se fundamenta en mantener unas extracciones sostenibles con una distribución natural de la población, diferentes alternativas de gestión, llamadas “matrices de gestión” han sido propuestas y probadas. Estas alternativas han sido validadas como estrategias igualmente sostenibles, con el objetivo de obtener un mayor rendimiento de una determinada clase de calidad, forzando a la población a proporciones diferentes a las naturales.

La implementación de una aplicación informática rápida e intuitiva con el modelo desarrollado, es el paso definitivo para hacer de este modelo a priori complicado y extenso en los cálculos, una herramienta útil y sencilla al alcance de cualquier usuario.

Por último, todas estas herramientas y procesos han sido probados sobre un entorno y una población real conocida, donde se ha podido analizar el alcance y la efectividad del modelo.

ANEXOS

Anexo 1: Especie objeto de estudio: El ciervo rojo (*Cervus elaphus*)

Taxonomía y origen

El ciervo rojo pertenece a la familia de los cérvidos. Su orden es el de Artiodactyla y el suborden Rumiantes. De las cuarenta especies de cérvidos presentes en el mundo es una de las tres que se encuentran en la península ibérica junto con el corzo (*Capreolus capreolus*) y el gamo (*Dama dama*) (Montoya Oliver 1999). Forma parte del género “Cervus” que cuenta con nueve especies, siendo la más cercana el wapití (*Cervus canadensis*) que se encuentra desde Asia Central hacia el este hasta Norteamérica. Algunos autores consideran al wapití una subespecie del ciervo rojo denominándola *Cervus elaphus canadensis* (Carranza 2007).

El ciervo tal y como se conoce actualmente existe desde el Cuaternario hace aproximadamente 600.000 años, procedente originariamente de Asia central desde donde comenzó su colonización de otras zonas (Montoya Oliver 1999), formando parte de la fauna europea desde el pleistoceno (Sommer, Zachos et al. 2008). Existen también en la península ibérica al menos desde el pleistoceno superior (hace 120.000 años)(Carranza 2007, Sommer, Zachos et al. 2008). Ya que como otras muchas especies animales encontró en ella un refugio durante las glaciaciones (Meiri, Lister et al. 2013), lo que provocó la diferenciación de la subespecie ibérica (*Cervus elaphus hispanicus*) (Carranza 2004).

Distribución

Distribución mundial

De forma natural el ciervo rojo se distribuye en la región Paleártica, viviendo solo en el hemisferio norte. Originalmente ocupaba desde el atlas marroquí en el norte de África, prácticamente toda Europa occidental hasta Asia central, incluidas las islas de Córcega y Cerdeña (Carranza 2007). Las poblaciones originales más orientales son las del Tíbet y el Turquestán, y las más occidentales las del sur de Portugal (Carranza 2004). También como se comentó anteriormente si consideramos al wapití como subespecie del ciervo rojo, está distribuida por América, desde el sur de los Estados Unidos hasta el norte de Canadá (Montoya Oliver 1999). A causa de las introducciones con fines cinegéticos y comerciales podemos encontrarla en el Reino Unido y también en zonas del hemisferio sur tales como Argentina y Nueva Zelanda, donde se ha adaptado perfectamente.

Como se puede adivinar vive en latitudes medias desde los 25° hasta los 65° de latitud Norte, siendo su zona ideal entre los 35° y los 55°, donde las estaciones del año se presentan más diferenciadas, siendo de gran influencia en los ciclos biológicos de esta especie. A causa de esta amplia distribución hay una gran variación genética dentro de la misma especie provocando subespecies, razas, ecotípos...con diferentes tamaños, colores, cuernas etc. Dentro de esto los más pequeños son los extintos ciervos marroquíes, los de Córcega y los de Doñana, mientras que los más grandes son los ciervos centroeuropeos y los wapitíes americanos (Montoya Oliver 1999).

Distribución en España

En la península ibérica podemos encontrar la subespecie *Cervus elaphus hispanicus*, conocida como ciervo ibérico, esta solo existe en España y Portugal. No existen evidencias de su exportación a otras partes del mundo, excepto en el norte de África. Esta subespecie es claramente diferenciada de las otras doce existentes y está considerada como casi amenazada (NT) debido a la pérdida de pureza genética causada por la incontrolada introducción de ciervos centroeuropeos para mejorar los trofeos (Carranza 2007) . Durante la mayor parte del siglo XX era frecuente solo en Sierra Morena, Montes de Toledo, Doñana y en algunas zonas aisladas de la Cordillera Cantábrica. Debido a la expansión natural agravada por el abandono del campo, y las repoblaciones realizadas por la administración en la segunda mitad del siglo XX (Tabla A1.1). Actualmente está experimentando una gran expansión tanto en número de efectivos como en territorio, ocupando casi todo el país, excepto la parte más occidental de Galicia y la costa Levantina. La población está altamente fragmentada, caracterizándose por núcleos con gran concentración rodeados por otras zonas con bajas densidades y ausencias. El empleo de mallas cinegéticas por parte de algunas fincas provoca el aislamiento de estas poblaciones, por otra parte una gestión ineficiente y no coordinada de grandes áreas no malladas agravan este problema (Carranza 2004).

Tabla A1.1. Repoblaciones de ciervo efectuadas por la administración estatal entre los años 1949 y 1964 (Fandos, Burón Fernández 2015)

Provincia	Zona	Año	Ejemplares
Álava	Montes de Vitoria	1958-1959	20
Asturias	Reres (ahora redes)	1955	34
Asturias	Peña Mayor	1955-1956	11
Asturias	Infiesto y P.N. Covadonga	1857	17
Barcelona	Sierra del Cadí	1958-1959	24
Badajoz	Pantano de Cijara	1863	20
Cuenca	El Hosquillo	1960-1962	45
Cuenca	Serranía de Cuenca	1963	20
Girona	Sierra del Cadí	1957-1959	24
Huesca	Pirineo Aragonés	1962	13
Jaén	Sierra de Cazorla	1852	37
Lugo	Montes de los Ancares	1961-62	28
Madrid	El Pardo	1959-64	118
Navarra	Quinto Real	1955-1956	20
Navarra	Bértiz	1956	11
Navarra	Quinto Real	1957	6
Navarra	Lantz	1957	18
Cantabria	Cabuérniga	1949-54	37
Cantabria	Arenas y Molledo	1952	9
Cantabria	Goscaya	1955-57	27
Cantabria	Saja	1956	8
Pontevedra	Montes do Morrazo	1962	4
Soria	Trévago	1959	10
Soria	Vinuesa	1959	28
Teruel	Montes Universales	1961-62	31
Toledo	Hontanar	1963	4

Descripción

Los ciervos son uno de los animales más reconocibles en todo el mundo, los machos presentan una cuerna ramificada que renuevan anualmente desde el primer año. Las hembras carecen de cuerna. Mudan el pelaje dos veces al año, en invierno es más espeso y tiene un color marrón grisáceo mientras que en verano es de color marrón rojizo. Los cervatillos tienen las clásicas manchas blancas sobre fondo marrón aproximadamente duraste los tres primeros meses de vida para camuflarse en el fondo del sotobosque. Las hembras cuentan con 4 mamas en la zona ventro-posterior para alimentarlos.

Su fórmula dental es I 0/3, C 1/1, P3/3, M 3/3. La dentadura juvenil se va renovando progresivamente, siendo útil para la identificación de la edad del animal

hasta los tres primeros años cuando termina su desarrollo, a partir de entonces será necesario recurrir a los anillos de crecimiento del cemento dental (Carranza 2004).

A parte de la presencia de la cuerna existe dimorfismo sexual en cuanto al tamaño siendo los machos mucho más grandes que las hembras. En áreas típicas mediterráneas el tamaño medio es (Carranza 2007): Longitud total de los machos a partir de dos años entre 150 y 220 cm, altura a la cruz entre 90 y 120 cm, tarso entre 35 y 47 cm con un peso entre 80 y 160 Kg. Para las hembras la longitud esta entre 160 y 195 cm, altura a la cruz entre 90 y 110cm, tarso entre 35 y 45 cm y peso entre 50 y 100 Kg. Estas medidas varían mucho en función de su hábitat por eso los venados de la zona norte de la península pueden superar ampliamente estas medidas.

La cuerna durante su primer año suele consistir simplemente en un par de varas no ramificadas, aunque en ocasiones ya presentan varias ramificaciones o puntas. En el segundo año pueden tener en condiciones óptimas entre 6 y 12, su máximo esplendor suele ocurrir en torno a los 7 u 8 años pudiendo alcanzar hasta 20 puntas, a partir de este punto comienza el declive del animal y su cuerna (Carranza 2004).

Hábitat

Se pueden encontrar estos animales en la mayor parte de los hábitats presentes en la península Ibérica, que cuentan con praderas junto a cobertura vegetal leñosa, desde llanuras a nivel del mar hasta áreas de alta montaña. Este animal utiliza preferentemente los ecotonos o zonas de borde entre zonas boscosas o cubiertas con vegetación arbustiva y áreas abiertas donde exista producción de plantas herbáceas (Carranza 2004). El uso de áreas con cubierta vegetal y praderas abiertas sufre variaciones tanto diarias como estacionales, por lo que es importante su presencia en forma de mosaico a fin de evitar largos desplazamientos para cumplir sus necesidades vitales. La actividad de alimentación tiene lugar preferentemente durante la noche, pero principalmente en ambos crepúsculos, y para ello pueden utilizar hábitats abiertos o de cobertura vegetal. El descanso principalmente se da en las horas centrales del día tiene lugar en zonas cubiertas. Solo en las zonas más secas del Sureste peninsular el ciervo encuentra limitaciones, en especial a través de la actuación de parásitos de debilidad como garrapatas, cuántos más componentes atlánticos o centroeuropeos tiene un clima y menor sequía estival presenta, el ciervo encontrara un hábitat más favorable. La sequía veraniega típica de ambientes mediterráneos afecta negativamente al tamaño y a la cuerna de estos animales, especialmente en

condiciones de altas densidades y especialmente a animales jóvenes (Torres-Porras, Carranza et al. 2009a).

La supervivencia de las crías desciende cuando hay un mes o más de helada segura (temperatura media de las mínimas menor de 0°C) y podemos encontrar mortalidad de adultos a causa del frío cuando la mínima baje de -15°C (Montoya Oliver 1999).

Prefiere suelos de gran fertilidad, sin grandes zonas rocosas y ni escarpadas. A pesar de ello en España a causa de las actividades humanas se ha visto desplazado a ocupar principalmente las zonas más pobres y abruptas de las sierras del Suroeste con suelos poco profundos y escasas precipitaciones. Su distribución está más ligada a los tipos de vegetación que al tipo de suelo, también es necesario un bajo nivel de impacto humano (Caballero García de Arévalo 1985). Todo esto hace resaltar la gran adaptabilidad al medio que tiene esta especie.

Actualmente el grueso de la población de cervuno en España habita en áreas con las siguientes características típicas de la mitad sur peninsular (Caballero García de Arévalo 1985):

Condiciones climáticas

Áreas de climas subhúmedos, seco-subhúmedo y semiárido con influencia de montaña. El periodo libre de heladas mínimo es de 260 días y el máximo número de heladas es de 40 días.

Condiciones edáficas y topográficas

En cuanto a la litología se pueden destacar los siguientes tipos principales de rocas en las áreas típicas habitadas por el ciervo:

- Rocas ígneas: Principalmente granito
- Rocas metamórficas: Pizarras y gneis.
- Rocas básicas: Pobres en sílice y ricas en plagioclasas.
- Rocas Volcánicas: Pobres en sílice y de carácter andesítico.
- Rocas sedimentarias: Básicamente cuarcitas y areniscas, casi siempre exentas de CO₃Ca.
- Rocas calizas: Margas y yesos.

En cuanto a los suelos que se sustentan sobre estas rocas suelen ser pobres y con bajas concentraciones de CO_3Ca , esto como se ha apuntado anteriormente es causa del desplazamiento al que han sido obligados estos animales hacia zonas marginales para la agricultura y la ganadería y no la preferencia de estos animales por zonas de suelos pobres en nutrientes. En estas zonas generalmente se encuentran suelos como:

- Tierra parda meridional sobre rocas metamórficas, básicamente pizarras. Suelos con perfil A (B) C sobre materiales silíceos.
- Tierra parda meridional sobre rocas ígneas. Suelos con perfil A (B) C sobre materiales silíceos.
- Suelos rojos mediterráneos sobre materiales silíceos. Suelos con perfil A B C.
- Suelos pardos no calizos. Suelos con perfil A B C.
- Suelo pardo calizo forestal predominante en las sierras del este peninsular. Esta unidad es rica en CO_3Ca .

Vegetación

Como se ha dicho anteriormente es el factor que más influye en la distribución y densidad de las distintas poblaciones de ciervo ya que tiene que ser capaz de satisfacer todas las demandas de estos animales, tanto alimenticias como de refugio.

El ciervo prefiere vegetación propia de climas de carácter oceánico, más húmedos, con gran variedad de formaciones vegetales caducifolias, las cuales le proporcionan gran cantidad de alimento de calidad durante todo el año. En estos lugares alcanzan los individuos los mayores desarrollos tanto en el tamaño de su cuerpo como en el trofeo. Dentro de la península ibérica se observa la clara diferencia de tamaño entre los ciervos del área mediterránea, donde en los lugares más pobres como en el parque de Doñana los machos apenas alcanzan los 90 o 100 Kg y los grandes ciervos de la cornisa cantábrica o la sierra de la culebra en Zamora que suelen superar los 200kg. Los años con intensas sequía estivales en zonas mediterráneas se verán reflejados en el decaimiento de la calidad de los trofeos correspondientes a ese período, especialmente en fincas con altas densidades donde existe mayor competencia interespecífica (Azorit, Analla et al. 2002, Landete-Castillejos, Tomás, Estevez et al. 2013). Ya que tanto el estrés como inestabilidad

alimenticia durante el desarrollo de la cuerna se refleja en su formación deficiente y asimétrica (Mateos, Alarcos et al. 2008).

Debido a que la mayoría de la población cervuna ibérica está localizada en la mitad sur, a continuación se describen los hábitats más comunes utilizados por estos animales y su idoneidad (Caballero García de Arévalo 1985):

- Bosque mediterráneo: Vegetación clímax de gran parte de la península. Especies arbóreas del género *Quercus* con una cobertura superior al 50%, el estrato arbustivo con especies de una etapa serial avanzada con una cobertura superior al 75% por lo que será escasa la producción herbácea. Por si solo dota a estos animales de comida y refugio, aunque para llegar a ser un buen hábitat tiene que alternarse con áreas de pastizal que suplen otros requisitos a lo largo del año.
- Dehesa: Formada a partir del bosque mediterráneo por el hombre mediante la eliminación del matorral para originar pastos y una alta producción de fruto de las especies del género *Quercus* para el ganado. Las especies arbóreas que la conforman generalmente son: *Quercus ilex*, *Quercus suber* y *Quercus faginea* apareciendo habitualmente de manera monoespecífica a causa de la selección. Las gramíneas anuales conforman habitualmente más del 50% del pastizal, el clímax estaría compuesto por plantas como: *Trifolium subterraneum* y *Poa Bulbosa*. Tiene una producción media de bellota de 10-15 kg/árbol y una densidad media de 50 árboles/ha (Caballero García de Arévalo 1985). Por si solo no se trata de un hábitat demasiado bueno a causa de la completa ausencia del matorral que les proporciona refugio y es la principal fuente de alimento del ciervo en zonas mediterráneas donde el pasto se agosta completamente.
- Jaral Serial: Si la dehesa se abandona aparecen especies como: *Retama sphaerocarpa*, *Sarothammus vulgaris*, *Cistus monspeliensis* y *Cistus crispus*. Aunque la producción de bellota y pasto baja, combinado con las especies que forman la dehesa crea un hábitat muy bueno para el ciervo. Por si solo se trata de un hábitat muy pobre y de escaso valor para estos cérvidos ya que no suple todos sus requisitos.
- Jaral general: Compuesto principalmente de: *Cistus ladanifer*, *Cistus albidus* y *Genista hirsuta*, casi completamente desprovisto de *Quercus* y de

herbáceas. Suelen ser los peores suelos con antecedentes de incendios o roturación. Se trata de un mal hábitat para el ciervo ya que les proporciona escaso alimento y cobertura puesto que estas especies no suelen superar los dos metros de altura.

- Matorral General: Etapa serial más avanzada de matorral, el fuego o los herbívoros le impide progresar. Puede contener algunos ejemplares de *Quercus* diseminados, la producción de pastos es escasa a causa de la cobertura del matorral. Especies típicas: *Quercus* (en forma arbustiva), *Adenocarpus lonicera*, *Arbutus unedo*, *Mirtus communis*, *Philirea angustifolia*, *Pistacia lentiscus*, *Teucrium fruticans* y *Viburnum tynus*. Algunas de estas especies pueden alcanzar más de dos metros de alto por lo que son una buena cobertura para el ciervo además de proporcionarle alimento, especialmente en verano, cuando no hay frutos y el pasto está seco. Puede ser un buen hábitat para el ciervo si se presenta en mosaico con otros tipos de vegetación que le suministren pasto y frutos.
- Pastizal: las comunidades de pastizal de zonas semiáridas o seco-subhúmeda están agrupadas en dos clases fitosociológicas: Thero-Brachypodietea (sustrato básico) y Helianthemetea (pastizales sobre silíceos o pobres en carbono cálcico). En los dos casos las comunidades más evolucionadas corresponden a asociaciones de majadal. Para la especie que nos ocupa le proporciona alimento en primavera y en parte del otoño e invierno donde la producción se detiene a causa de las bajas temperaturas por lo que nunca puede ser un hábitat idóneo por sí mismo.
- Pinares: Aparecen principalmente a causa de repoblaciones hechas por el hombre. Constituyen originalmente etapas subseriales en la evolución hacia bosques de frondosas. Los pinares adultos no son hábitats de gran valor ya que suelen impedir la formación de matorral y los animales no tienen acceso al ramoneo. Si se presenta intercalado con otras formaciones es una muy buena zona de refugio, tanto ante los depredadores como térmico.

Biología y comportamiento

Alimentación

El ciervo ibérico ha coevolucionado con la vegetación mediterránea por lo que está bien adaptado a su consumo. Su alimentación alterna el consumo de herbáceas con el ramoneo sobre plantas leñosas según su disponibilidad a lo largo del año y sexo del animal. Estas fluctuaciones anuales pueden ir desde una dieta compuesta un 25% por material herbáceo y un 75% de matorral junto con biomasa vegetativa y frutos forestales en verano, un 50% de bellota y más de un 30% de herbáceas en otoño y en primavera e invierno las herbáceas pueden constituir más de un 70% de su dieta (Caballero García de Arévalo 1985).

Otros estudios (Soriguer 1994b) fijan valores del 73,7% para plantas leñosas, siendo el 35,7% de estas Quercíneas, donde las bellotas de encina y las hojas de esta con un 32,2% y un 2,75% respectivamente son las más consumidas. Consumen también una gran variedad de especies del género *Cistus*, como: *Cistus ladanifer* (17,5%), *Cistus salvifolius* (6,7%), *Cistus monspeliensis* (2,5%), *Cistus crispus* (1,5%), *Cistus albidus* (0,7), *Cistus populifolius* (0,4), también *Halimium* sp. con un 0,8%. Otras especies también consumidas son: romeros (3,3%), zarzas (1,6%), jazmines (1,1%), lentiscos (0,9), hiniestas (0,7%), cantuesos (0,6%), *Teucrium fruticans* (0,3%) y espinos majuelos (0,1%). Otras especies de leñosas consumidas son (Caballero García de Arévalo 1985): *Adenocarpus telonensis*, *Arbutus unedo*, *Erica arborea*, *Myrtus communis*, *Olea europea* y *Viburnum tinus*.

Son de gran importancia en la dieta veraniega los trompos de las jaras. Estas capsulas están llenas de semillas sin defensas químicas, lo que indica la adaptación de esta planta a que sus semillas sean consumidas y posteriormente dispersadas por el ciervo (Carranza 2004).

Por su parte podemos destacar en su dieta herbáceas (Caballero García de Arévalo 1985): Gramíneas anuales de alta palatabilidad como *Lolium perenne*, *Dactylis glomerata*, *Poa bulbosa*, *Phalaris tuberosa*, *Poa annua* y *Lolium rigidum*. Otras gramíneas anuales de menor palatabilidad como *Bromus mollis*, *Hordeum murinum*, *Vulpia bromoides*, *Cynodon dactylon*, *Elymus caput-medusae*, *Aegilops ovata*, *Briza minima*, *Cynosurus cristatus*, *Gaudinia fragilis*, *Koelleria vallesiana*, *Avena fatua*, *Stipa commata*, *Agrostis salmantica* y *Brachypodium* sp. Las leguminosas son de muchísimo interés a causa de su elevado valor nutritivo, conteniendo altos valores de proteína y calcio. Otras que no se encuentran entre las gramíneas o leguminosas, como son las

pertenecientes a la familia de las Compuestas, Cariofiláceas, Rosáceas o Geraniáceas que generalmente presentan una palatabilidad menor.

Todas estas especies aportarán energía y los nutrientes necesarios a los animales para sobrevivir. Estimando la máxima necesidad nutritiva diaria (Caballero García de Arévalo 1985) como las de una hembra de lactante de 90 kg de peso se han fijado estas del orden de 6.706 Kcal/animal/día.

Horarios y desplazamientos

El ciervo reparte su tiempo entre la comida, la rumia y el descanso. Es un animal de hábitos crepusculares centrando su actividad al amanecer y atardecer. En las horas centrales de la noche y el día suelen encamarse a descansar y rumiar, aunque siempre son más activos durante la noche. Los machos se vuelven más nocturnos y esquivos al aumentar la edad. Las poblaciones ibéricas tienen una mayor actividad nocturna que las poblaciones del norte de Europa (Carranza 2004). Esto se debe a una adaptación enfocada a defenderse de los predadores y en verano como método para evitar las altas temperaturas que durante el día encuentran en zonas mediterráneas.

Estos animales suelen permanecer fieles a su área de campeo si no se les molesta y encuentran todo lo que necesitan en ella, el tamaño de estas áreas varía bastante entre los dos sexos. En la península ibérica las áreas de campeo estudiadas son menores que en el norte y centro de Europa (Carranza 2004) siendo mayores las áreas utilizadas por los machos que por las hembras. En el parque de Monfragüe se llegó a la conclusión de que las áreas de campeo son de aproximadamente 250 ha para las hembras y 655 ha para los machos (CARRANZA, DETRUCIOS et al. 1991). En Sierra Morena se obtuvieron 1185 ha para machos y 417 para hembras (LAZO, SORIGUER et al. 1994). En el Parque de Doñana los resultados arrojaron 1050 ha para los machos y 240 para las hembras (Sánchez-Prieto, Carranza et al. 2004). Otros autores fijan estas áreas de campeo en una media de 300 ha para las hembras y de 1200 ha para los machos (Montoya Oliver 1999). Cabe destacar que no usarán todo el año el máximo de esta área, viéndose obligados a realizar más desplazamientos cuanto más desfavorable es la estación. En zonas de alta montaña con climas más extremos en invierno los desplazamientos pueden ser muchos mayores para descender en altitud y así evitar las nevadas y subir en verano para encontrar pastos de mejor calidad.

Durante el día desplazamiento se ve condicionado por la distancia a la que se encuentran los distintos elementos que necesita para sobrevivir, tales como: agua, alimento y refugio. En la península se ha estimado una distancia mínima diaria de desplazamiento de entre 3,04 y 4,21 (Carranza 2004), esto no quiere decir que se alejen cada día esos valores ya que mucha de esa distancia recorrida es en círculos o pasando por los mismos puntos.

Como no podía ser de otra manera las áreas de altas densidades también provocan el desplazamiento y la dispersión de algunos ejemplares lejos de su área natural de campeo, especialmente individuos jóvenes de ambos sexos en busca de nuevas zonas por explotar. En este caso los machos se dispersan más lejos que las hembras y de manera más frecuente, ya que estas últimas forman en muchas ocasiones grupos familiares con sus madres, los cuales se tratan más adelante. Estudios en poblaciones europeas indican que la edad de dispersión de los machos suele ser de dos años, aunque puede variar entre esta y los 5. Otro dato destacable es que hasta un 70% de los machos se encontraron a más de 2km del lugar de nacimiento, siendo el mayor desplazamiento de 22km (Clutton-Brock, Guinness 1983). Además, el mismo estudio hace referencia a que los machos que más se dispersan también son los que más pesan. Esto se debe casi con total seguridad a que solo los animales que se encuentran en una muy buena condición física pueden lanzarse a colonizar áreas para ellos desconocidas. Estos mecanismos de dispersión de jóvenes individuos son comunes en otras especies de cérvidos como el corzo y son mecanismos naturales para controlar la densidad, colonizar nuevas zonas y fomentar el intercambio genético entre poblaciones ya asentadas, evitando así la nada deseable consanguinidad de las poblaciones salvajes. Como se puede suponer todos estos movimientos naturales de la especie han sido alterados e interrumpidos por la proliferación de los mallados cinegéticos.

Comportamiento social

El comportamiento social de estos animales es bastante gregario, entendiéndose por gregario como la tendencia de los animales a formar grupos con organización social (Soriguer 1994b). El ciervo se sitúa en este sentido a medio camino de sus dos parientes más cercanos, el corzo y el gamo, siendo el corzo un animal bastante solitario y profundamente territorial en los meses próximos al celo y el gamo que generalmente forma grupos mayores que el ciervo (Carranza 2004). Un animal puede obtener dos importantes ventajas a la hora de vivir en grupo: mejor protección frente a

depredadores y aumento de la eficacia a la hora de conseguir alimento, pero como no podía ser de otra manera esto también trae desventajas como el aumento de la competencia por el espacio y el alimento y la mayor detectabilidad por parte de los depredadores. En el caso de los ungulados el gregarismo se reduce cuanto más forestales son sus hábitos, en el caso contrario podemos pensar en las grandes manadas de ungulados de las grandes praderas. Este comportamiento puede observarse dentro de una misma especie, en el caso del ciervo estos viven en grandes “manadas” en los abiertos brezales de Escocia y en pequeños grupos en zonas boscosas de Centroeuropa. Lo que pone de manifiesto la necesidad de protegerse de los depredadores en zonas abiertas aumentando el número de efectivos vigilantes. Así mismo en zonas con densidades elevadas se produce un aumento en el tamaño de los grupos y en la tolerancia social entre individuos (Soriguer 1994b).

Los ciervos se distribuyen la mayor parte del año en grupos separados por sexos, solo se juntarán durante la época de celo, donde un macho adulto acaparará un pequeño grupo de hembras. En el caso de hembras su organización social es matrilineal, formarán grupos familiares liderados por la hembra de más edad seguida por su cría del año y a su vez por alguna de sus hijas de años anteriores con sus respectivas descendencias (Montoya Oliver 1999). En el momento del parto las hembras suelen separarse solapándose generalmente las áreas de campeo de hembras pertenecientes a un mismo grupo familiar. Es sabido que estos animales son capaces de reconocer fácilmente a sus parientes y presentan bajos niveles de agresión entre ellos (Ceacero, Landete- Castillejos et al. 2007). Por otra parte los machos abandonan el grupo familiar aproximadamente a los dos años de edad para unirse a un grupo de machos de edad similar muy jerarquizados, permaneciendo de esta manera hasta la época de celo en que cada macho adulto defenderá su área de hembras. Los machos viejos se vuelven más solitarios renunciando a vivir en grupo.

Los grupos de machos y de hembras tienen a su vez distintas querencias y comportamientos entre sí, los grupos de hembras y animales más jóvenes utilizan zonas más abiertas de pastizal, donde encuentran alimento de mejor calidad para suplir las necesidades de la lactancia y la gestación en el caso de las hembras adultas o del propio crecimiento en caso de animales jóvenes. El mayor número de individuos que suelen formar estos grupos en comparativa con los machos les sirve como defensa en estas áreas más abiertas que frecuentan. Por otra parte, los machos tienen unas necesidades alimenticias menores por unidad de peso y un mayor tamaño que les permite alcanzar alimento inaccesible para las hembras. Por lo tanto, pueden

sobrevivir perfectamente ramoneando en el interior del monte sin exponerse en zonas abiertas. Respecto al tamaño de estos grupos, un estudio realizado en Andalucía (Soriguer 1994b) indico que el porcentaje medio anual de individuos fue: solitarios 39,4%, parejas o tríos 42,2%, grupos medios (de cuatro a nueve individuos) 16,4%, mientras que el porcentaje de grupos grandes de diez o más individuos fue de apenas el 2%. Para hembras la unidad social más frecuente fue la asociación de dos-tres individuos y para los machos fue el individuo solitario.

Dinámica de poblaciones

La evolución o la dinámica de una población en una determinada zona vendrá marcada por un equilibrio dinámico entre la natalidad o animales que nacen y mortalidad o animales que mueren. Si este equilibrio se rompe a favor de la natalidad la población verá aumentado su número de efectivos, mientras que si esta ruptura ocurre a favor de la mortalidad su número descenderá pudiendo incluso si esto no se corrige llevar a la desaparición de la población. Otros factores como son la emigración e inmigración también afectan a esta dinámica afectando al número total de individuos de la población. Actualmente gran parte de las poblaciones de ciervo en España se encuentran en fincas con su perímetro completamente vallado, impidiendo los desplazamientos naturales de los animales, por lo que estos dos últimos factores no afectan a dichas poblaciones. Por lo tanto, el número total individuos en un periodo de tiempo t , presentes en una población viene dado por la siguiente expresión:

$$N_{t+1} = N_t + F - M + I - E$$

N_{t+1} : Es el número de individuos al finalizar el periodo.

N_t : Es el número de individuos al iniciar el periodo.

F : Número de individuos nacidos en ese periodo.

M : Número de individuos muertos durante el periodo.

I : Individuos que han inmigrado.

E : Individuos que han emigrado.

Longevidad

En el caso de los ciervos existe también diferencia significativa entre ambos sexos con respecto a su esperanza de vida. En el caso de los machos, estos terminan de desarrollarse corporalmente aproximadamente a los 5 años de edad y ya desde entonces cerca de los 6 años puedan participar activamente en la berrea con su propio grupo de hembras. Podrán disfrutar de su plenitud reproductora poco más de 4 años

ya que desde los 9 años comienza su decadencia corporal, muriendo por causas naturales a una edad aproximada de 12-13 años, pudiéndose alargar ligeramente si las condiciones del medio son muy favorables (Carranza 2004).

Por otra parte, las hembras disfrutan de una vida más larga. Estas a partir de los 2 años de vida pueden reproducirse, pariendo una cría anualmente desde este momento, hasta prácticamente su muerte, que puede producirse incluso en edades superiores a 20 años (Carranza 2004).

Esta diferenciación entre las esperanzas de vida de los dos sexos es causada por la mayor rapidez de envejecimiento de los machos, ya que los dientes molares de estos son de menor tamaño en base a su tamaño corporal que en las hembras, por lo que se desgastan antes produciéndole la muerte al animal al incapacitarle a la hora de alimentarse correctamente o debilitándole y siendo víctima de parásitos de desgaste (Montoya Oliver 1999). Estos extremos de longevidad son alcanzados debido a la ausencia de depredadores naturales en gran parte de su distribución, ya que, con la presencia de estos, los ciervos serían depredados antes de alcanzar tales niveles de desgaste y decaimiento.

Proporción de sexos

También conocida como sex ratio. Se trata de la relación entre el número de machos y número de hembras de una población. Generalmente se calcula como el cociente del número de hembras total entre número de machos. Se trata de un valor de gran importancia ecológica que influirá en gran medida sobre las distintas gestiones a realizar.

Normalmente en los mamíferos esta proporción es de 1:1, es decir, en una población salvaje suele haber el mismo número de machos que de hembras. La proporción de sexos intrauterina y perinatal está cerca de esta proporción aunque suele desviarse hacia los machos, las hembras en peores condiciones para criar tienen más probabilidades de parir un cervatillo hembra, mientras que padres más fértiles y adultos tienen mayores probabilidades de producir un cervatillo macho (Carranza 2004).

Después de este punto la mortalidad es mayor en crías machos que en crías hembras tanto intrauterina como durante la lactancia y el primer año de vida (Clutton-Brock, Guinness 1983). Por lo tanto desde este punto la proporción de hembras empieza a ser mayor, unido esto a la mayor esperanza de vida de estas hace que las

poblaciones de ciervo naturalmente tiendan a estar formadas por más hembras que machos (Carranza 2004), unido esto al efecto del hombre que generalmente ejerce más presión sobre la parte de los machos lleva a fuertes desequilibrios en nuestras poblaciones.

Otro estudio realizado en el sur de España (Soriguer 1994b) reflejó que la proporción al nacer podía considerarse de 1:1, coincidiendo con la opinión de más autores encontrando un desequilibrio hacia los machos en su primer año de vida. Después de este periodo la mortalidad en machos se vuelve mayor, llegando al equilibrio sobre los 4-5 años, después de esto la proporción e hembras se hace mayor.

El manejo de este ratio de sexos en una población polígama como la del ciervo, donde un mismo macho fecundará a varias hembras, nos puede permitir variar el crecimiento anual de la población, ya que este dependerá solo de las hembras disponibles para parir.

Mortalidad

Depredación

En la gran mayoría de la distribución ibérica del ciervo, este no encuentra depredadores. Concretamente en toda el área mediterránea de su distribución no existen actualmente poblaciones de Lobo ibérico (*Canis lupus signatus*) o sus apariciones son puramente anecdóticas. Únicamente las crías de ciervo pueden ser depredadas en estas zonas, siendo los zorros los más habituales o en casos menos comunes por lince (Carranza 2004) o grandes águilas (Montoya Oliver 1999).

Por otra parte, su situación en la zona norte peninsular, principalmente en el noroeste es muy distinta ya que convive aquí el ciervo con abundantes poblaciones de lobo que ejerce una fuerte presión sobre estos cérvidos, especialmente durante las fuertes nevadas.

A causa de la rápida expansión que está sufriendo el lobo en nuestro país, pronto comenzarán a afectar también a las poblaciones de ciervo mediterráneas en la mitad sur peninsular.

Enfermedades y parásitos

Existe una gran variedad de condicionantes que pueden favorecer o provocar enfermedades infecciosas, parasitarias, intoxicaciones, deficiencias nutricionales o

enfermedades genéticas en los animales silvestres. La demografía, alimentación y la intervención del hombre mediante actividades agrícolas, ganaderas o forestales predisponen a su aparición.

La existencia de un agente patógeno produce una enfermedad que depende de la virulencia del agente y de la resistencia del individuo. Muchos parásitos y enfermedades permanecen en los animales de forma asintomática o con leves consecuencias, pero siguen siendo foco de contagios y de riesgo.

En poblaciones libres y naturales las enfermedades ejercen un papel regulador, animales más débiles, sensibles o inadaptados al medio son eliminados. En el caso contrario, en fincas cerradas, donde se realizan repoblaciones y los animales silvestres entran en contacto con ganado doméstico se introducen nuevos patógenos a los que la fauna del lugar no está adaptada rompiendo el equilibrio y pudiendo causar gran número de bajas. A todo esto, hay que añadir la gran dificultad o imposibilidad de hacer un control sanitario o tratamientos a animales salvajes. Con una correcta gestión de estos animales como no superar la carga del medio, mantener un sex ratio equilibrado, eliminar ejemplares enfermos entre otros se puede controlar efectivamente estos problemas.

Enfermedades

Encontramos en el ciervo enfermedades (Carranza 2004, Soriguer 1994b), algunas transmisibles al hombre y muy conocidas, como la encefalopatía espongiforme o enfermedad de las “vacas locas”, la brucelosis, salmonelosis, pasteurelisis, queratoconjuntivitis y clamidiasis.

Así mismo se han detectado altas prevalencias del virus de la lengua azul y también anticuerpos de *Leptospira* sp., considerada una de las infecciones universalmente más extendida en mamíferos salvajes. Además de abundantes casos de sarna sarcóptica en poblaciones de la cordillera cantábrica y del sistema central, procedentes del contacto con ganado doméstico al igual que la tuberculosis bovina y paratuberculosis. El virus del ectima contagioso muy extendida en cabras y ovejas es otro caso de la transmisión de enfermedades entre ganado y fauna.

Parásitos

El parasitismo es una relación entre dos organismos, uno es el propio parásito que depende completamente de su hospedador el cual le proporciona energía y hábitat para su desarrollo.

Los ciervos conviven con varias especies parásitas (Carranza 2004, Soriguer 1994b), dentro de las cuales son muy comunes los nematodos pulmonares como *Dyctyocaulus viviparus* y *Dyctyocaulus eckerii*, también hay que destacar parásitos gastrointestinales, Protostrongílidos, Tricostongílidos y otros como *Strongilus* sp. y *Oesophagostomum* sp. También se pueden encontrar helmintos, cuya intensidad es mayor en adultos.

Cestodos, conocidos comúnmente como tenias. Provocan hidatidosis (*Echinococcus granulosus*) donde el ciervo actúa como hospedante intermedio causándole quistes hidatídicos. Coenurosis (*Coenurus cerebralis*) invadiendo el sistema nervioso central del ciervo como hospedante intermedio, formando vesículas y causándole pérdida del equilibrio.

Muy importantes son las producidas por trematodos en nuestros ciervos como *Fasciola hepatica* y *Dicrocoelium dentriticum*, estos parásitos se encuentran en los conductos hepáticos llegando a causar problemas en altos grados de parasitación. Coccidiosis producida por protozoos que viven en los líquidos o tejidos corporales del venado, *Sarcocystis cervicanis*, y otros del género *Eimeria* o *Cryptosporidium*.

Otros causantes de parasitosis en ciervos son artrópodos como dípteros de la familia Oestridae como *Pharyngomyia picta* y *Cephenemyia auribarbis*, estos dípteros introducen sus larvas en el primer estadio en las fosas nasales donde completan su desarrollo. Otros alojan sus larvas debajo de la piel del lomo como el popularmente conocido como “barros” *Hypoderma actaeon*. *Elaeophora elaphi*, con mayor prevalencia en las regiones climáticas secas de la península. Otros artrópodos parásitos también muy comunes son las pulgas (*Siphonaptera*) o piojos (*Phthiraptera*).

Estas parasitaciones se ven muy afectadas por las condiciones medioambientales y de los individuos a los que afectan, dependiendo de su condición física y resistencia, pudiendo sufrir grandes variaciones de un año a otro. Generalmente estos parásitos han evolucionado junto a sus hospedantes y salvo casos de invasiones masivas no suelen causar problemas para la supervivencia de estos.

También son destacables especialmente en épocas de mayor calor la presencia de parásitos externos como Ixódidos comúnmente conocidos como garrapatas que a

su vez pueden ser portadoras y transmisoras de enfermedades como la Borreliosis de Lyme que afecta al hombre, las rickettsias y piroplasmosis, también conocida como babesiosis, se trata de un protozoo que parasita la sangre del hospedador. Las garrapatas más comunes en ciervos son: *Hyalomma marginatum*, *Rhipicephalus annulatus* y *Rhipicephalus bursa* (Ruiz-Fons, Fernández-de-Mera et al. 2006).

Reproducción y natalidad

Es el ciervo una especie poligínica, es decir, su estrategia reproductiva se basa en que los machos se apareen con cuantas hembras puedan. Los machos alcanzan su madurez sexual a los dos o tres años (Carranza 2007) y las hembras al escuchar su segunda (16 meses), si han alcanzado un 75% de su peso adulto o más comúnmente su tercera berrea (28 meses) (Montoya Oliver 1999). El adelanto o retraso del primer celo de la hembra dependerá de la calidad del medio en el que habita, en condiciones muy buenas de alimentación estas alcanzarán el peso necesario para entrar en celo con antelación a otras que viven en zonas más pobres. Estudios realizados con ciervas en cautividad dieron como resultado los siguientes pesos mínimos: 53,5 Kg, 58,5 Kg y 71 Kg, para la reproducción con uno, dos o tres años respectivamente (Carrión, D., Garcia et al. 2010). También está demostrado que las ciervas que han tenido un año de descanso reproductivo llegan con mayor peso y mejor condición física a la época de celo lo que aumenta sus posibilidades de criar con éxito a sus cervatillos (Carrión, Débora, Gaspar-López et al. 2010).

Durante el periodo de celo los machos emiten unos bramidos muy característicos que hacen conocer a este periodo como berrea, utilizada para medir la fuerza entre los machos sin necesidad de luchar contra todos. Esta se desarrolla al comienzo del otoño, entre septiembre y octubre, desatándose por el fotoperiodo, cuando empieza a haber más horas de oscuridad que de luz. La berrea puede retrasarse en años con poca alimentación disponible que hace que las ciervas entren en celo más tarde, ya que necesitan reponer su condición física o con la nueva hierba de las lluvias otoñales o con la caída de la bellota. También las altas densidades, molestias o estrés pueden producir cópulas tardías. Estos retrasos en el celo provocan que las crías nazcan después del período óptimo y tendrán un peor futuro que las nacidas en el momento adecuado. La duración de la berrea en buenas condiciones ha de ser corta, en torno a 25 días ya que esto es un indicativo de que todas las hembras han salido en celo al mismo tiempo y parirán sus crías en la época de mayor disponibilidad de alimento (primavera). Las hembras son receptivas entre 12 y 24

horas, la gestación dura unos 235-240 días (Carranza 2004), por lo que el momento óptimo de la cópula sea en la segunda mitad de septiembre. Los cervatillos son amamantados entre 4 y 5 meses, siendo las hembras con mayor peso y mejor condición física las que más leche producirán (Landete-Castillejos, Tomás, Ceacero et al. 2010), por lo que se demuestra la importancia de que el nacimiento se produzca en el periodo óptimo (Landete-Castillejos, T., García et al. 2005), ya que los cervatillos que nacen al principio del periodo de partos van a tener mayores recursos y posibilidades de supervivencia (Gómez, Landete-Castillejos et al. 2002, Landete-Castillejos, Tomás, García et al. 2002). También este es un factor importante para la producción de trofeos ya que el tamaño de la primera cuerna depende de la producción de leche de su madre, de la fecha de iniciación del crecimiento de la cuerna, el peso del animal a los 6 meses y el intervalo de tiempo de crecimiento de la cuerna (Gaspar-López, García et al. 2008). La proporción de sexos en el parto es muy cercana al 1:1, teniendo generalmente las hembras adultas y en mejor condición física tienen mayores posibilidades de parir un cervatillo macho, cuyos costes de producción y alimentación para la madre son mayores. Es en las más jóvenes donde existe un sesgo significativo hacia el número de partos de crías hembra (Landete-Castillejos, Tomás, Gortázar et al. 2004).

En la época en que se produce la berrea en el área mediterránea la comida escasea, provocando que las hembras se concentren en puntos donde aun puedan encontrarla. Por lo tanto los machos lucharan para controlar estas zonas de hasta dos hectáreas y acaparar el mayor número de hembras posibles hasta unas 50 (Carranza 2007), generalmente los mejores puntos serán dominados por los machos más grandes y fuertes. Otros machos sin territorio intentarán defender un grupo de hembras o harén, siendo ambas estrategias posibles dentro de una misma población (Carranza 2004). La tasa de berridos por unidad de tiempo, así como el tamaño y simetría de sus cuernas son indicativos tanto del estado físico y la fortaleza del individuo como de su fertilidad (Carranza 2004).

Se ha comprobado (Pérez-González, Barbosa et al. 2010, Sánchez-Prieto, Carranza et al. 2004) que la práctica muy común de aportar suplementación alimenticia artificial en época de berra altera el normal desarrollo de esta. La distribución natural de las hembras se ve alterada, provocando la aglomeración de las ciervas en torno a los mismos focos, sufriendo estas un menor acoso per cápita por parte de los machos. Las aglomeraciones incrementan las luchas entre ellos y el estrés dando lugar a cópulas no efectivas. Muchas hembras son cubiertas por los mismos machos lo que incrementa la consanguinidad. Esta consanguinidad produce

efectos negativos en la salud de la población y la disminución de la calidad de los trofeos (Pérez-González, Carranza et al. 2010).

La natalidad se expresa generalmente como natalidad operativa, es decir el porcentaje de hembras con cría respecto a la población total de hembras adultas al final de periodo de partos para descontar la mortalidad perinatal. Un estudio realizado en Andalucía (Soriguer 1994b) determinó según autopsias que más de un 80% de las hembras estaban preñadas y que entre distintos años la natalidad operativa varió de un 80% a un 40% posiblemente causado esto por una amplia superación de la capacidad de carga. Se puede concluir que la mortalidad perinatal puede ser un factor importantísimo que afecta a las poblaciones si las condiciones del medio no son buenas.

Anexo 2: Área de estudio

A continuación, se describen las características del lugar en el que habita la población de la cual se han tomado los datos para llevar a cabo la parametrización del modelo, con el único objetivo de que futuros lectores puedan comparar sus áreas de estudio e identificar posibles variaciones en los parámetros y la influencia del medio sobre los mismos.

Descripción del medio

Según la recopilación de información de la finca “Quintos de Mora” realizado en los trabajos previos a esta tesis (Navarro Millas-Prenderas, Martín Fernández 2015) con el objetivo de acopiar y captar los datos reales necesarios para completar el ajuste del modelo y parametrizarlo. Siendo el modelo el objetivo principal del trabajo y no la obtención de estos datos.

Estado Legal

La finca Los Quintos de Mora (Navarro Millas-Prendergast, Martín Fernández 2015) se encuentra en el término de Los Yébenes, en la zona de Montes de Toledo. Es el primer territorio catalogado como Monte de Utilidad Pública de la provincia de Toledo, con una superficie total de 6.864 ha.

La finca se encuentra en una de las zonas declaradas como (Z.E.P.A.) Zona de Especial Protección para las Aves, catalogada según lo establecido en la directiva comunitaria 79/409/CEE como zona natural de singular relevancia para la conservación de la avifauna amenazada de extinción.

Como aprovechamiento principal de la finca figura la caza, teniendo como principales exponentes al jabalí y al ciervo; en segundo plano se encuentra el aprovechamiento de las piñas de *Pinus pinea*.

Situación Administrativa

Según los libros de rentas del Ayuntamiento de Toledo, los Montes de Toledo aparecen como “(...) propiedad particular del común de vecinos de la misma capital, adquirida por título legítimo de compra, al Santo Rey Don Fernando III de Castilla en el año 1.284. En la comprensión de esta vasta finca, que, según noticias consta de 1.523.280 fanegas de todas clases, pobladas de arbolado, se hallan situados 17 lugares que son: “Pulgar, Ventas con Peña Aguilera, San Pablo, Yébenes de Toledo,

Marjaliza, Molinillo, Alcoba, Anoba, Navalpino, Fontanarejo, El Horcajo, Navalucillos de Toledo, Navalmoral de Toledo, Navahermosa, Hontanar, Retuerta y Navas de Estena”.

En el extremo sur de la provincia de Toledo, en la comarca de las Guadalerzas, se extienden los Montes de Mora, latifundio de 6.864 ha., pertenecientes al término municipal de Los Yébenes. La denominación de Montes de Mora era la original que recibía esta finca antes de ser adquirida por el Patrimonio Forestal del Estado al Ayuntamiento de Mora, el 2 de enero de 1942, momento desde el cual comienza a ser conocida como “Quintos de Mora”. Recibe su nombre del vocablo “quinto”, denominación que se da a aquellos terrenos que, extendiéndose más allá de los límites del pueblo, están dedicados fundamentalmente a actividades agropecuarias, en ocasiones acompañadas de otras, más importantes incluso, como la caza.

Anteriormente a ser adquirido por el Patrimonio Forestal, estuvieron integradas en las 32.500 ha. propiedad y señorío de las Doncellas Nobles de Toledo. Pero a raíz de las leyes desvinculadoras fue agregado al término municipal de Los Yébenes y posteriormente desamortizadas a mediados del siglo XIX -Desamortización de Mendizábal-.

A partir de 1971, la gestión queda a cargo de la Administración Central por medio de ICONA, dada su catalogación como coto social de caza con arreglo a la Ley de Caza de 4 de abril de 1970 y su reglamento.

La finca Quintos de Mora se encuentra situada dentro de los Montes de Toledo. Cuenta con una superficie de 6.864 ha., pertenecientes al término municipal de Los Yébenes, partido judicial de Orgaz, provincia de Toledo. Se enmarca dentro del Catálogo de Montes de Utilidad Pública donde figura con el nº1 para dicha provincia.

Como consecuencia de la ordenación territorial del Estado de Comunidades Autónomas, tras la transferencia de competencias de la Administración Central a la Comunidad Autónoma de Castilla La Mancha, en septiembre de 1984, la granja cinegética ubicada en el monte pasa a la Administración Autonómica, permaneciendo el resto del monte en la Administración Central.

Es coto privado de caza con número de matrícula TO-1010.

Pertenencia

Su gestión corresponde al Organismo de Parques Nacionales, dependientes del Ministerio de Agricultura, Alimentación y Medio Ambiente.

La situación legal y administrativa actual es la siguiente:

- Titular: Organismo Autónomo Parques Nacionales-Quintos de Mora.
- C.I.F.: Q-4536001-C.
- Dirección: C/ Costanilla de San Lázaro, nº3-1º.
- Población: Toledo.
- Superficie: 6.864 ha.
- Término municipal: Los Yébenes.

Límites

El monte constituye en dos terceras partes de su perímetro el límite entre las provincias de Toledo y Ciudad Real, limitando el tercio restante con fincas del término de Los Yébenes.

Quintos de Mora limita con las siguientes fincas pertenecientes a las provincias de Toledo y Ciudad Real (Tabla A2.1):

Tabla A2.1. Límites de la finca Quintos de Mora

NORTE	“Los Tornos y San Salvador”	Ciudad Real
SUR	“El Manojal y Los Estados del Duque”	Ciudad Real
ESTE	“Las Navas”	Toledo
OESTE	“Tapuelas, Valdelagata, Bermú y El Gavilan”	Ciudad Real

La finca adopta aproximadamente la forma de un rectángulo, cuya mayor dimensión, de norte a sur, abarca unos 12 km. y la menor, de este a oeste, unos 7 km.

Enclavados

Existen tres enclavados:

- Corral “Colmenar de la Pizarra”: adquirido por el Patrimonio Forestal del Estado el 8 de junio de 1971. Es actualmente propiedad de la Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha (R.D. 1678/1984). Su extensión es de 9 áreas y actualmente no se le reconoce ningún uso.
- Corral “Colmenar de Sandalio”: sin dueño conocido. Tiene una superficie de 10 áreas y no tiene ningún uso hoy en día.

- Granja Cinegética: propiedad de la Junta de Comunidades de Castilla- La Mancha. Su extensión es de 33,5 ha., de las cuales 6,5 ha. están ocupadas por las instalaciones de la granja y el resto es superficie forestal ocupada fundamentalmente por quejigo y rebollo. A su vez, existía un centro de cría de gabatos ubicado dentro de la granja de perdices, que actualmente se encuentra en desuso.

Viaros y accesos

Desde la carretera N – 401, se accede a Los Quintos de Mora, primero desviándose en la carretera comarcal TO-3249 (situada entre los puntos kilométricos 22 y 23 de la N – 401) y, a continuación, desde el acceso denominado “Paseo de los Quintos de Mora”. Desde este punto habrá que recorrer 10 km de camino hasta llegar a la finca.

Servidumbres de paso

Las servidumbres que existen en la finca son:

A.- Vía pecuaria (vereda) “Camino de Los Urdeños”: atraviesa el monte de este-sureste a oeste- noroeste, siguiendo el curso del río de Las Navas. La longitud que esta vía pecuaria recorre dentro del monte es de 5.300 m., siendo su anchura de 20 m.

B.- Vía pecuaria (colada) “Valle de San Marcos”: entrando por el norte, proveniente de la finca de “Torneros”, corre paralela al límite de la zona este del monte para salir a continuación a la finca “Las Navas”. Su longitud es de 4.700 m.

C.- Servidumbre de paso como camino público, el llamado “Camino de Bermú”, entrando por el oeste procede de la finca Bermú, pasa por la Casa Forestal, donde enlaza con el camino asfaltado de acceso a la finca, para empalmar a la anterior vía pecuaria justo en el puente del río de Las Navas. Su longitud es de 9.400 m., con una anchura variable pero que en ningún caso excede los 4m.

Actualmente, estas vías pecuarias y servidumbres no son utilizadas para el tránsito de ganado al haber desaparecido la práctica de la trashumancia por estos terrenos. Sin embargo, se siguen utilizando para el tránsito de personas y vehículos privados al ser su uso de carácter público.

Servidumbres de uso. Ocupaciones

Instalaciones militares: concesión de 270 ha. de terreno a favor del Ministerio de Defensa, concedida por el antiguo ICONA, con fecha de 21 de octubre de 1981. Por el R.D. 446/1983, de 23 de febrero, fue declarada zona de interés para la Defensa Nacional la parte meridional del monte hasta la orilla izquierda del río de Las Navas. Los límites de ocupación fueron modificados por acuerdo entre ambas administraciones el 13 de abril de 1994, quedando en la actualidad fijados en una superficie de 100 ha.

Usos y costumbres vecinales

Los principales usos y costumbres vecinales son la recogida de hongos en otoño, así como la recogida de espárragos trigueros en primavera. Para llevar a cabo este tipo de actividad, los vecinos acceden hasta la zona en su vehículo desde las servidumbres de paso, ya que el monte se encuentra apartado de los núcleos urbanos.

También es importante resaltar la afluencia de gente que acude a presenciar el comportamiento de los venados en la época de berrea, aprovechando para ello los accesos y vías públicos que existen en la finca.

Figuras de planificación territorial o de protección

Los Quintos de Mora se encuentra catalogado en la categoría de Espacios Naturales de la provincia de Toledo y se ve afectado por varios planes de conservación. Se encuentra incluido por completo como L.I.C. y como Z.E.P.A. bajo la denominación "Montes de Toledo". El código para la Z.E.P.A. ES0000093, incluido por albergar poblaciones de águila imperial ibérica (*Aquila adalberti*), buitre negro (*Aegypius monachus*), cigüeña negra (*Ciconia nigra*) y otras especies que se encuentran dentro del catálogo. Por albergar numerosos tipos de hábitats de interés comunitario y especies de fauna, se encuentra como L.I.C. con código ES4250005 perteneciendo a una superficie comprendida en 218.013,23 ha.

Normativa aplicable

Normativa comunitaria:

- Directiva 79/409/CEE, relativa a la conservación de las aves silvestres.
- Directiva 92/43/CEE, relativa a la conservación de los Hábitats, de la Fauna y Flora Silvestres

Normativa estatal:

- Ley 43/2003, de 21 de noviembre, de Montes.
- Ley 4/1989, de 27 de marzo, de Conservación de los Espacios Naturales y de la Flora y Fauna.
- Real Decreto 439/90, 30 de marzo, que establece el Catálogo Nacional de Especies Amenazadas.
- Ley 3/1995 de Vías Pecuarias.

Normativa autonómica (Comunidad de Castilla La Mancha):

- Ley 9/99, de 26 de mayo, de Conservación de la Naturaleza
- Ley 3/2008, de 12 de junio, de Montes y Gestión Forestal Sostenible de Castilla-La Mancha.
- Decreto 33/1998, de 5 de mayo. Catálogo Regional de Especies amenazadas.DO. Castilla-La Mancha 15 mayo 1998, núm. 22/1998]
- Ley 4/2007, de 08-03-2007, de Evaluación Ambiental en Castilla-La Mancha,
- Decreto 33/1998, de 5 de mayo, Catálogo Regional de Especies Amenazadas
- Ley de 9/1999, de 26 de mayo, de conservación de la naturaleza
- Decreto 200/2001, de 6 de noviembre, modificación catalogo regional de especies amenazadas
- Decreto 141/1994, de 9 de diciembre, por el que se aprueba el Reglamento general de aplicación de la Ley 2/1993, de caza de Castilla- La Mancha.
- Ley 3/2015, de 5 de marzo, de Caza de Castilla- La Mancha.

Estado natural

Historia natural y geología

La geología de una zona está determinada por su historia natural, la cual es imprescindible conocer para explicarse aquella. Por ello vamos a repasar muy por encima la historia natural de Castilla-La Mancha para poder, a continuación, interpretar sus características geológicas, cerniéndonos más concretamente a la zona que nos ocupa.

Ya con anterioridad al Cámbrico, determinados enclaves del noroeste de Castilla La Mancha se encontraban emergidos, estos son los “escudos precámbricos”.

Hasta finales de la era primaria este escudo precámbrico situado en el oeste de Iberia, Macizo Hespérico, permaneció emergido sin grandes alteraciones con procesos de erosión que suavizaron el relieve e hicieron ganar terreno a los mares del Silúrico y del Devónico. Como testimonio aparecen Trilobites los fósiles más característicos de esta época; Arqueociatidos, que formaban arrecifes costeros; Lígulas, que recuerdan por su ecología a los actuales moluscos bivalvos. Ya hacia el Silúrico y Devónico aparecerán los Graptolitos, que formaban colonias flotantes.

Durante el Carbonífero y el Pérmico tiene lugar la orogenia herciniana, que levanta sobre el nivel del mar extensas regiones sumergidas hasta entonces, dejando, entre otros, extensos lechos de carbón (yacimientos de Puertollano, Ciudad Real). Durante el Carbonífero acontece un notable cambio climático que origina una vegetación propia, muy rica en especies, acorde con un clima húmedo y tropical. En estos bosques carboníferos se desarrolla una fauna muy variada de artrópodos terrestres, con tendencia a las formas gigantes; aparecen también formas dulceacuícolas (bivalvos, crustáceos, etc...) así como los primeros animales vertebrados (anfibios y peces primitivos).

En el Pérmico sobrevino un gran cambio climático que termina con esta flora y su fauna asociada, apareciendo en el Macizo Hespérico un clima desértico y cálido.

Durante el secundario y principios del terciario se instaura una fase de relativa estabilidad orogénica, sufriendo el mar una serie de avances y retrocesos sobre las costas europeas. En el centro y oeste de Castilla La Mancha se encontraba entre las tierras emergidas. En el Cretácico se produce un cambio climático que va a tener consecuencias fundamentales en el paisaje natural, se trata de los ritmos estacionales que originan respuestas también periódicas en los seres vivos. Si bien predominan las coníferas, aparecen las angiospermas, como los chopos, sauces y laureles.

En la era Terciaria se configuran la cadena Pirenaica y la separación con el noroeste de África, confiriendo en la península su marcado aislamiento bio-geográfico. También hace su aparición el sistema de cordilleras transversales de los rebordes montañosos que bordean las mesetas.

Las viejas cordilleras hercinianas fueron totalmente erosionadas y transformadas en penillanura, durante el periodo entre la orogenia herciniana y la alpina. Posteriormente, durante el paroxismo alpino, la penillanura se abomba en unos

lugares, formándose las sierras interiores (Sistema Central y Montes de Toledo). Los Montes de Toledo son viejos macizos hercinianos desnudados y desgastados. Según Hernandez Pacheco (1.932) estos montes son el resultado de una erosión diferencial, sobre una alineación herciniana, por la cual las pizarras cámbrico-silúricas fueron desgastadas, descubriéndose así las cuarcitas silúricas. La tectónica alpina disloco el zócalo precámbrico y paleozoico, individualizando una serie de bloques separados por fallas o valles transversales. Están orientados de este a oeste, no llegando a cubrir la meseta en su totalidad pues hacia el este desaparecen bajo los sedimentos terciarios (La Mancha). Entre el Mioceno y Plioceno estas sierras se rejuvenecen y en sus fosas y depresiones (Tajo y Guadiana) se acumulan sedimentos lacustres y continentales. La presión sobre el flanco oriental hizo bascular el bloque mesetario hacia occidente, por lo que a partir de entonces los ríos de la meseta desembocan en el Atlántico.

Todo esto se origina por la acción de la orogenia alpina, que comprime sedimentos almacenados en el fondo del Tetis.

El clima terciario sigue siendo tropical, aunque aparecerá la alternancia verano-invierno, la temperatura sería de unos 20 °C. Con el tiempo dominaran las plantas con flores, junto con los insectos florícolas, y entre los árboles los caducifolios, a la vez que se desarrollan progresivamente las praderas herbáceas, en especial gramíneas, y con ellas los ungulados.

A finales de la era Terciaria, hace unos dos millones de años, se producen las glaciaciones que provocan una migración de los ecosistemas hacia el sur.

Castilla La Mancha nunca estuvo sometida a un ambiente glacial estricto, si bien toda la mitad oriental se vio afectada por el clima periglacial.

No es hasta la llegada del último interglacial cuando se produce una xerificación progresiva del clima y la instauración en la submeseta sur de la vegetación típicamente mediterránea, representada por la encina, el alcornoque, y por los robles marcescentes (rebollos y quejigos).

En la era Cuaternaria el Sistema Central supuso una barrera hacia el sur, para animales y plantas, lo que implicó un aislamiento de la submeseta sur.

En el Pleistoceno medio, la fauna de anfibios y reptiles adquiere la fisionomía que le caracteriza en la actualidad y se produce la llegada de una fauna predominante eurasiática. Hasta Castilla La Mancha penetran algunas de estas especies (salamandra, sapo partero europeo, galápago europeo, culebra de collar...) si bien una

serie de formas norteafricanas se extienden desde el sur de Iberia (gallipato, lagartija colirroja, culebra de herradura).

En cuanto a mamíferos, se produce la sustitución de los mastodontes por mamuts. Hacen actos de presencia especies de la fauna que se mantienen en la actualidad, como el ciervo, corzo, cabra montés, jabalí, lobo y zorro; en cuanto a pequeños mamíferos aparecen en Castilla La Mancha el conejo y la liebre, lirón careto, rata de agua y los topillos subterráneos.

La especie humana ya tiene una larga historia en estas latitudes, donde ha estado presente por tres formas sucesivas: Homo Erectus, H. Sapiens Neardenthalensis y H. Sapiens. Sapiens., y donde va a actuar como agente decisivo en la remodelación de los cuadros naturales.

Como resultado de esta historia, en Quintos de Mora hallamos unas características geológicas determinadas:

Así podemos diferenciar:

1.- Zonas aluviales del Cuaternario, a lo largo de las riberas (arroyos de Valdeyernos, Torneros, Las Navas).

2.- Zonas de abanicos aluviales tipo raña del Pliocuatnario. Ocupan toda la gran llanura central.

3.- Conglomerados y areniscas del Ordovícico inferior. Aparece en las zonas elevadas de las laderas.

4.- Areniscas y pizarras del Ordovícico inferior. Se encuentra entre las zonas de raña y las zonas altas de sierra.

5.- Pizarras y cuarcitas alterantes del Ordovícico medio.

6.- Cuarcitas del Ordovícico inferior. Formando crestas en los montes.

7.- Derrubios de laderas del Cuaternario. Sopiés de montes. Se les considera áreas inestables.

8.- Pizarras verdes y areniscas del Cámbrico inferior solo aparecen en la umbría.

9.- Pizarras negras del Ordovícico medio.

Los Quintos de Mora presentan una gran cantidad de pizarras y cuarcitas, que, tras el plegamiento herciniano, forman las crestas más altas.

Desde el punto de vista fisiográfico, el territorio se divide en dos unidades netamente diferenciadas: la raña y el monte, abarcando cada una de ellas la mitad de la superficie total.

Las alineaciones montañosas son predominantemente, de carácter detrítico-metamórfico, con probabilidad originados en el Cámbrico; en ellas dominan las cuarcitas y, en menor medida, areniscas y pizarras. Estos materiales afloran de forma masiva en las crestas de las montañas y, constituyendo canchales, en las típicas pedrizas. Estos bloques dan lugar a suelos coloniales al depositarse al pie de las laderas.

La raña está formada por terreno sedimentario de origen detrítico. Los depósitos detríticos están constituidos por cantos muy rodados de cuarcitas con escasa proporción de dolomía y caliza. Es frecuente encontrarles aglomerados por tierras arcilloso-arenosas. Estas formaciones parecen haberse originado durante el Plioceno medio-superior (ESPEJO, 1.986).

En cuanto a la tectónica, podemos distinguir numerosos macropliegues, entre ellos:

Anticlinal de la “Sierra de Torneros”

Sinclinal del “Rio de las Navas”

Anticlinal de la “Sierra del pocito”

Los suelos en líneas generales, son silíceo-arcillosos, fuertes, compactos y ácidos, con gran cantidad de pizarras y cuarcitas, de aristas vivas o redondeadas según el transporte al que hayan sido sometidas, con escasa profundidad (25-30 cm).

Podemos distinguir dos tipos de suelos:

1.- Suelos pocos desarrollados, de perfil A/C (ranker) y A/B/C (tierras pardas), que abundan en áreas de montaña. Estos son el resultado de procesos edafogénicos actuales. Los suelos formados antes de la consolidación de la actual red hidrográfica, han sido parcial o totalmente destruidos, desarrollándose en su lugar otros nuevos con mucho menor grado de evolución (tierras pardas y ranker). En las áreas de montaña y sobre fuertes pendientes, debido a la degradación del monte, (de pizarras y cuarcitas), han dado lugar a que estos suelos se apelmacen en su parte superior, de tal forma que el agua, que corre libremente, arrastre los materiales finos y la materia orgánica, dando lugar a los litosuelos (pedrizas y afloramientos directos). Se deduce de aquí la

necesidad de mantener la espesura de la vegetación y el bosque autóctono en las laderas.

Tierras pardas meridionales. De las laderas de solana, con vegetación predominante de encina.

Tierras pardas húmedas. Laderas de umbría, con suelos mejores y más ricos en materia orgánica. Propios de la serie del rebollo o quejigo.

2.- Suelos rojos y pardos amarillentos de perfil A/B/C o A/B/Bg/C, con un mayor grado de madurez, propios de las zonas bajas de escasa pendiente. Los contrastes característicos del paleoclima constituyen un ámbito idóneo para los fenómenos de rubefacción, liberación de óxido y formación de suelos ferruginosos rojos sobre las zonas pizarrosas.

Estos suelos corresponden a zonas donde la acción erosiva de la red fluvial del cuaternario ha sido menor.

Son el resultado de una evolución continua e ininterrumpida, aunque no homogénea, debido especialmente al episodio erosivo del establecimiento de la red hidrográfica actual.

Ocupan los bordes y fondos de los valles, cubiertas por una formación de raña que fosiliza por materiales de la serie herciniana o de depósitos miocenos.

Son predominante hidromórficos, pedregosos y ácidos.

Situación geográfica

La finca Quintos de Mora se halla situado en el extremo suroeste de la provincia de Toledo, al suroeste del término municipal de Los Yébenes.

Está comprendida entre las latitudes 39° 20' 33" y 39° 27' 41" norte, y las longitudes (referidas al meridiano Greenwich) 4° 2' 28" y 4° 2' 43" oeste.

Pertenece a la cuenca hidrográfica del Guadiana, vertiente Norte.

Orografía y configuración del terreno

El territorio de Los Quintos de Mora se encuentra entre los bloques paleozoicos nororientales de los Montes de Toledo. Orográficamente se encuentra situado en los Montes de Toledo, considerados como el territorio comprendido por la meseta granítica Toledana al norte, La Mancha al este, el Campo de Calatrava al sur y la

Llanura de la Jara, al oeste (*Julio Muñoz, 1976*). El territorio así delimitado comprende una superficie de unos 5.000km², y se encuentra situado entre unas altitudes de 735 m, al oeste de la finca, en el punto en que el río de Las Navas alcanza su perímetro; y los 1.265 m en el extremo noroeste del coto, en la cresta de la Sierra de Los Torneros.

El Sistema de los Montes de Toledo está formado por el conjunto de relieves situados entre los ríos Tajo y Guadiana, resultantes de la acción diferencial de un largo proceso erosivo sobre una potente serie sedimentaria plegada en la orogenie herciniana. Los “Montes de Toledo” son el conjunto oriental de dicho Sistema.

Ecológicamente se encuentra incluido en la provincia luso – extremeña, sector toledano – tangano, distrito oretano oriental, (Rivas-Martínez, 1987).

Fisiográficamente, se observan en Quintos de Mora tres unidades principales: la Sierra de Torneros en el tercio norte, la raña de Mora en el tercio central y la Sierra del Pocito en el tercio sur.

De la sierra de los Torneros, la finca encierra su vertiente sur, es decir, la solana como orientación general, si bien es atravesada por dos profundos barrancos (dirección norte-sur): los barrancos de Valdeyernos y Valdeyernillos. Comprende asimismo el extremo oriental de la Sierra de Rebollarejo, separada de la de Torneros. Las laderas de este tercio norte tienen una pendiente suave, entre el 7 y el 20%.

La raña de Mora, el tercio central, consiste en un depósito pliocuaternalio prácticamente llano, es decir, con una pendiente máxima del 7%. Tiene una anchura de 4-4,5 km aproximadamente.

De la sierra del Pocito, queda incluida en la finca parte de su umbría, con una pendiente que varía entre el 7 y el 20%. Esta umbría está hendida longitudinalmente por el barranco de la Peña. También se incluye en este tercio parte de la solana de la mencionada sierra, y una zona sin orientación general definida, con pendientes entre el 7 y el 20% principalmente, excepto en los extremos sur y este, que tienen pendientes entre el 20 y el 70%.

En la sierra de los Torneros existen, dentro de la finca, dos vértices geodésicos: Valdeyernos (1.235 m) y Valdesimón (1.116 m). En la sierra del Pocito, existen otros dos, que son: Alcuzón (1.046 m) y Los Rondines (1.073 m).

Caracterización climática

Para la caracterización climatológica de Quintos de Mora, se ha recurrido a la estación meteorológica situada en “Los Cortijos de Arriba”, municipio de Ciudad Real que limita al norte con la finca. Esta estación, situada a 775 m de altitud (39° 18' de latitud N y 04° 04' de longitud W), cuenta con 42 años de observaciones para la precipitación y 34 años de observaciones para la temperatura, un número suficiente para el análisis climático. El Centro cuenta con una estación meteorológica que todavía no tiene años suficientes para caracterizar adecuadamente las variables climatológicas. Adjuntamos gráfica de precipitaciones para Quintos de Mora (*Figura 2*).

Quintos de Mora presenta una climatología típicamente mediterránea, con un acusado periodo de sequía durante los meses estivales.

Además de mediterráneo, el clima de Quintos de Mora es netamente continental, con grandes oscilaciones térmicas entre el día y la noche y entre el verano y el invierno. Por lo referente a las precipitaciones anuales, se encuentran entre los 317 mm (año 1994) y 1.628 mm (año 1996), aunque lo normal son precipitaciones comprendidas entre 600 y 700 mm anuales. El periodo de sequía se extiende desde mediados de junio hasta mediados de septiembre.

Atendiendo a estas especificaciones, Quintos de Mora quedaría encuadrado globalmente en el piso bioclimático mesomediterráneo, con un ombroclima seco-subhúmedo.

Otros datos climáticos:

Precipitación media anual: 702 mm.

Precipitación estacional:

Invierno: 270 mm (38,46%).

Primavera: 188 mm (26,78%).

Verano: 61 mm (8,69%).

Otoño: 183 mm (26,07%).

Evapotranspiración: 798mm.

Temperatura media: 16,7 °C.

Temperatura media de máximas del mes más cálido: 34,5°C.

Temperatura media de mínimas del mes más frío: 1,6°C.

Temperatura media mensual de las mínimas absolutas: - 4,6°C.

Período frío o de heladas: 6 meses.

Período seco o árido: 3,5 meses.

Pluviometría máxima en 24 horas: 47 mm.

Factor R: 125,6.

A continuación, se presentan las gráficas de pluviometría de Quintos de Mora (Figura A2.1) (2001-2011) y el climodiagrama obtenido con los datos de la estación meteorológica de Los Cortijos de Arriba (Figura A2.2).

Figura A2.1. Gráfica pluviométrica de Quintos de Mora (2001-2011) (Navarro Millas-Prendergast, Martín Fernández 2015)

Figura A2.2. Climodiagrama de "Los Cortijos" (Navarro Millas-Prendergast, Martín Fernández 2015)

La climatología típica mediterránea, presenta un acusado periodo de sequía comprendido entre los meses de junio y septiembre, y un máximo pluviométrico en la primavera, y, ya menos acusado, en el otoño. La precipitación media anual ronda los 702mm, y rara vez cae en forma de nieve. La temperatura media anual es de 16°C, siendo la media de las máximas y de las mínimas 7 °C (Ortuno y de la Peña 1.978).

Según la clasificación de Köppen el clima que nos afecta estará englobado en el grupo “C”, climas templados meso térmicos en los que la temperatura del mes más frío se encuentra entre -3 °C y 18 °C y la del mes más cálido es superior a 10 °C, en cuanto a la estacionalidad esta es muy marcada presentando veranos e inviernos, la precipitación del mes más seco es inferior a 300mm y el mes más lluvioso en el invierno es 3 veces superior por ello gana el subíndice “S”, finalmente la temperatura del mes más cálido es superior a 22°C por ello el último subíndice es “A”, quedando que nuestro clima responde a las siglas “CSA”.

Posición hidrográfica y procesos erosivos

La finca se encuentra surcada por el río Las Navas, principal curso de agua que la recorre de este a oeste por la mitad sur de la finca, y que es uno de los últimos en sufrir el estiaje que durante el verano interrumpe la circulación superficial de otros arroyos, como Torneros, Las Corzas, etc.

Los arroyos de Valdeyernos y Gil García son los únicos cursos de agua que no suelen sufrir estiaje completo, pues quedan algunas zonas durante el verano donde podemos encontrar agua circulante por el cauce. No obstante, en los años con muy pocas lluvias y altas temperaturas han llegado a secarse por completo.

El río Las Navas es afluente del río Bullaque, que a su vez vierte en el Guadiana; por tanto, la finca se encuentra incluida en la Cuenca Hidrográfica del Guadiana.

Por la derecha, se encuentran los siguientes afluentes de oeste a este:

- Arroyo de Valdeyernos: se une al río de Las Navas ya fuera del perímetro de la finca, y corre aproximadamente de noreste a suroeste. Nace en la solana de Valdeyernos. Tiene un subafluente por la izquierda, el Barranco de los Chopos.

- Regato de la Higuera: también, como prácticamente todos los afluentes por la derecha, de noreste a suroeste. Nace cerca de la Posada de la Higuera.

- Arroyo de los Torneros: el más largo. Nace al noreste de la finca, fuera de ella, y cuyos subafluentes son el arroyo Valdeyernillo y el arroyo Ciego, ambos a su vez por la derecha.

- Varios arroyos sin denominación y de corta longitud.

Por la izquierda, el afluente más importante es el arroyo de la Peña, que corre en principio hacia el oeste virando más tarde al norte, con un afluente por la izquierda que es el arroyo de Gil García, que nace cerca del Pico Alcuzón. Existen también diversos arroyos de muy corta longitud en esta margen, que vierten al río de Las Navas.

Existe un único curso de agua que no es afluente del río de Las Navas: el arroyo de La Fuente del Común, al sur de la finca, que corre de oeste a este hendiendo la Sierra del Pocito. Tiene un afluente por la izquierda, el arroyo de Las Bellotas, el cual se le une ya fuera de la finca.

Por la parte norte de la raña, se encuentran además algunos manantiales muy cortos y de efímera existencia, que drenan sin afluir a ningún otro curso de agua, siendo el más importante de estos el arroyo de Rompecapas.

Litología y edafología

Geología:

De acuerdo con el mapa geológico 1:50.000 de la zona (ver Anexo II), aparecen en el perímetro de Quintos de Mora las siguientes nueve unidades, por orden de antigüedad:

QAL (9): Zonas aluviadas del Cuaternario, a lo largo de las riberas. Especialmente en los arroyos de Valdeyernos, Torneros y Las Navas.

T2BQ1(7): Zonas de abanicos aluviales tipo raña del Pliocuatnario. Ocupan toda la gran llanura central rodeando las zonas aluviales de ribera.

O11cgcg (2): Conglomerados y areniscas del Ordovícico inferior (Tremadoc.). Aparecen en zonas elevadas de ambas laderas, la de umbría y la de solana. Es el Ordovícico más antiguo de los montes.

O11(3): Areniscas y pizarras también del Ordovícico inferior (Tremadoc.). Aparecen entre las zonas de rañas y las anteriores.

O12-21(5): Pizarras y cuarcitas alternantes del Ordovícico medio (Llancirniense inferior).

O11-12(4): Cuarcitas del Ordovícico inferior extremadamente duras, suelen formar crestas en los montes.

QL (8): Derrubios de laderas del Cuaternario. Sopiés de montes. En continuo movimiento, se les considera áreas inestables.

CA1(1): Pizarras verdes y areniscas arcónicas del Cámbrico inferior (medio y alto). Pequeña mancha solo en la umbría.

O22(6): Pizarras negras del Ordovícico medio (Llandeilo). Es el Ordovícico menos antiguo de los montes.

Todos estos sustratos son duros para dar suelos profundos y de buen volumen útil para el arbolado, en especial los formados sobre cuarcitas. Se exceptúan los suelos de ribera, de raña y los sopiés de las laderas, es decir, los sustratos del Cuaternario.

A continuación, se presentan las características edáficas más importantes de la finca:

- Profundidad: aproximadamente unos 100 cm si no contamos la roca madre alterada, es decir, se trata de suelos medianamente profundos.

- Materia orgánica: pueden considerarse suelos débilmente humíferos en general, ya que no alcanza el 2,5% de materia orgánica.

- Reacción del suelo: los suelos oscilan entre la acidez fuerte y la moderada (5,26-6,44) según la clasificación de Wilde. Respecto a la caliza activa y en roca, la litología de la zona produce suelos totalmente descarbonatados.

- Permeabilidad: los suelos de la finca recorren un amplio abanico de permeabilidades, desde poco permeables a muy permeables.

- Fertilidad (sobre N, P, K): presenta una fertilidad muy escasa, siendo muy deficiente en fósforo y nitrógeno, el potasio solo en algunos lugares es adecuado. En todo caso el nitrógeno actúa como mayor factor limitante.

Geomorfología:

Los Quintos de Mora tienen un relieve muy adecuado para el ciervo. Poseen una gran llanura en la raña central que abastece de comida y es el hábitat preferente de las hembras y zona de berrea, además de dos grandes laderas, una de pastos más tempranos en solana, y la otra en umbría.

La finca no tiene ninguna cota significativa y son frecuentes las fuentes, arroyos y puntos de vaguada. La evacuación del agua se hace por esorrentía, dada la impermeabilidad de la zona.

Esta estructura geomorfológica es la base esencial del buen equilibrio interno del cercado de Los Quintos de Mora, pues la solana, umbría y raña forman un paisaje armónico y muy adaptado a las necesidades del ciervo y el corzo.

El esquema general del relieve son dos sierras de sentido este- oeste (anticlinorio de Los Torneros- Rebollarejo y anticlinorio de Los Cortijos), separadas por la raña, situada en el valle (sinclinorio de Las Navas). La formación de las mismas se atribuye a la orogenia hercínica y, en concreto, se formarían los montes que limitan el arroyo de Valdeyernos.

Vegetación

En Quintos de Mora la vegetación responde a los parámetros climáticos con idénticas adaptaciones que, en otras zonas mediterráneas, básicamente, esta respuesta se centra en el predominio de una vegetación de hoja dura (esclerófila) y perenne, en el que el árbol dominante es la encina, aunque el paisaje vegetal se encuentra sumamente alterado por la acción del hombre.

La caracterización Corológica o Biogeográfica del territorio de Quintos de Mora es (Rivas-Martínez 1987):

Reino: Holártico.

Región: Mediterránea.

Subregión: Mediterráneo Occidental.

Superprovincia: Mediterráneo Ibero-Atlántica.

Provincia: Luso-Extremadurese.

Sector: Toledano-Tagano.

Subsector: Oretano.

Distrito: Montes de Toledo.

VEGETACIÓN POTENCIAL

En la finca existirían dos pisos bioclimáticos diferenciados (Rivas-Martínez 1987): las partes más altas corresponderían al piso supramediterráneo y el resto de la finca al

piso mesomediterráneo. Las principales series de vegetación potencial climatófila son las siguientes:

1.- Piso supramediterráneo:

Serie de los melojares supramediterráneos.

Serie supramediterránea luso-extremadurensis silicícola del roble melojo (*Quercus pyrenaica*). *Sorbo torminalis-Querceto pyrenaicae sigmetum* (Serie supramediterránea toledano-mariánica silicícola de *Quercus pyrenaica*).

A continuación, se enumeran algunas características florísticas de esta serie:

Árbol dominante: *Quercus pyrenaica*.

Bosque: *Quercus pyrenaica*, *Sorbus torminalis*, *Hyacinthoides hispanica*, *Viola riviniana*.

Matorral denso: *Cytisus scoparius*, *Cytisus striatus*, *Genista cinerascens*, *Genista florida*, *Pteridium aquilinum*.

Matorral degradado: *Erica aragonensis*, *Erica umbellata*, *Halimium ocymoides*, *Halimium viscosum*.

Pastizales: *Agrostis castellana*, *Festuca ampla*, *Poa bulbosa*.

2.- Piso mesomediterráneo:

Serie de los encinares mesomediterráneos.

Serie mesomediterránea luso-extremadurensis silicícola de la encina (*Quercus ilex* ssp. *ballota*). *Pyro bourgaeanae-Querceto rotundifoliae sigmetum*. Faciación mesófila con quejigo (*Quercus faginea* ssp. *brotero*).

A continuación, se enumeran algunas características florísticas de esta serie:

Árbol dominante: *Quercus ilex* ssp. *ballota*.

Bosque: *Quercus ilex* ssp. *ballota*, *Pyrus bourgaeana*, *Paeonia brotero*, *Dorycnium plantagineum*.

Matorral denso: *Phillyrea angustifolia*, *Quercus coccifera*, *Cytisus multiflorus*, *Retama sphaerocarpa*.

Matorral degradado: *Cistus ladanifer*, *Genista hirsuta*, *Lavandula sampaiana*, *Halimium viscosum*.

Pastizales: *Agrostis castellana*, *Psilurus incurvus*, *Poa bulbosa*.

VEGETACIÓN ACTUAL

El inventario vegetal sobre plano facilitado por la dirección del centro, se encuentra en el Anexo II en el mapa número 5 y obedece a 50 clases de vegetación según la siguiente leyenda:

Cubiertas arbóreas monoespecíficas:

QP_	Robledal
QV_	Quejigar
QI_	Encinar
PP_	Pinar de pino piñonero
PT_	Pinar de pino resinero

Cubiertas mixtas arbóreas/arbustivas:

BM_	Bosque mixto de esclerófilas y subesclerófilas
QP.QV_	Robledal_Quejigar
QP.QV.AM_	Robledal_Quejigar_Aceral
QP.QV.AV_	Robledal_Quejigar_Madroñal
QV.QP_	Quejigar_Robledal
QV.QI_	Quejigar_Encinar
QV.QI.PP_	Quejigar_Encinar_Pinar de piñonero
QV.AU_	Quejigar_Madroñal
QI.QP_	Encinar_Robledal
QI.QV_	Encinar_Quejigar
QI.QV.AU_	Encinar_Quejigar_Madroñal
QI.AU_	Encinar_Madroñal
QI.AU.QV_	Encinar_Madroñal_Quejigar

AU.QP.QV_	Madroñal_Robledal_Quejigar
AU.QV_	Madroñal_Quejigar
AU.QV.QI_	Madroñal_Quejigar_Encinar
AU.QI_	Madroñal_Encinar
AU.QI.QV_	Madroñal_Encinar_Quejigar
PP.PT_	Pinar mezclado con predominio de piñonero
PT.PP_	Pinar mezclado con predominio de resinero
PX_	Pinar mixto de piñonero, resinero y carrasco
PP.QI_	Pinar de piñonero_Encinar
PP.QV.QI_	Pinar de piñonero_Quejigar_Encinar

Cubiertas arbóreas monoespecíficas:

AU_	Madroñal
j_	Jaral
m_	Romeral
bs_	Brezal de <i>Erica scoparia</i>
Cm_	Escobonal

Cubiertas mixtas no arbóreas:

AU.j.b_	Madroñal_Jaral_Brezal
AU.j_	Madroñal_Jaral
j.b_	Jaral_Brezal
j.m_	Jaral_Romeral
j.b.m_	Jaral_Brezal_Romeral
m.b_	Romeral_Brezal
p_	Pastizal con predominio de anuales
tm.p_	Tomillar_Pastizal
mj.g_	Majadal_Gabonal

V	Vallicar
Z.V_	Zarzal_Vallicar
t_	Vegetación de trampales y enclaves y higroturbosos

Otros:

a_	Cultivos
U_	Edificaciones
C_	Cortafuegos
F_	Roquedos
J_	Pedrizas

Desde el punto de vista biogeográfico, Quintos de Mora se encuentra incluido en la provincia Mediterránea Ibérica occidental, subprovincia Luso-Extremadurensis, sector Toledano-Tagano, distrito Oretano oriental (Rivas-Martínez 1987).

El paisaje está dominado por vegetación de hoja dura (esclerófila) y perenne en la que el árbol dominante es la encina (*Quercus ilex ssp. ballota*), aunque el paisaje vegetal está sumamente alterado por la acción del hombre.

Seguidamente se describen someramente las principales formaciones vegetales y taxones que componen el paisaje vegetal de Quintos de Mora (Gómez Manzaneque 1988).

1.- Encinares

Cuando se encuentra inalterado, se encuentra como un bosque de hoja coriácea en el que *Quercus rotundifolia* constituye el principal componente del estrato arbóreo, que puede alcanzar entre 10 y 15m de altura.

Se agrupan en la asociación *Pyro bourgeanae-Quercetum rotundifoliae* (Rivas Godoy 1.959). Se extienden, principalmente, por gran parte de la raña central. Los encinares con piruétano desarrollados sobre suelos oligótrofos no son muy ricos en especies. Esta pobreza florística se ve acentuada por la influencia humana, materializada en las repoblaciones de pinos que se han efectuado en la raña y laderas a expensas de estos encinares.

En estas comunidades podemos encontrar: peonía (*Paeonia broteroï*), labiérnago (*Phillyrea angustifolia*), aladierno (*Rhamnus alaternus*), cornicabra (*Pistacia*

terebinthus), jazmín silvestre (*Jasminum fruticans*), madreselvas (*Lonicera sp.*), espárragos (*Asparagus acutifolius*) etc. Las herbáceas son poco abundantes.

Bajo los restos del bosque abierto o sustituyéndole se desarrolla *Genisto hirsutae-Cistetum ladaniferi*, asociación integrada principalmente por jara pringosa (*Cistus ladanifer*) y aulaga (*Genista hirsuta*).

Aparecen asociadas dependiendo la composición florística:

Junipero-Quercetum rotundifoliae (de corología Guadarrámica). Con presencia en las cumbres y pedrizas en mezcla con el enebro, donde *Rubia peregrina*, *Asparagus acutifolius* y *Paeonia broteroi* le hacen diferenciable.

Pyro bourgeanae-Quercetum rotundifoliae (encinar extremeño), estando presentes *Lonicera etrusca*, *Ruscus aculeatus*, *Phillyrea angustifolia* y *Arbutus unedo*.

2.- Matorrales de sustitución

Cuando las frondosas y exuberantes manchas de encinas con abundantes quejigos y madroños de las umbrías se degradan en aquellas áreas del monte en que han sido maltratadas por el hacha o por el ramoneo excesivo de los animales, con el empobrecimiento consiguiente del suelo, son sustituidas por un jaral-brezal donde el brezo arbóreo (*Erica arborea*), la bermejuela (*Erica australis*) y la brecina (*Calluna vulgaris*), están acompañadas por la jara cervuna (*Cistus populifolius*), aquí llamada estepa, y el jaguarzo (*Cistus salvifolius*).

Al aumentar el proceso de degradación se hace frecuente la presencia de la jara pringosa (*Cistus ladanifer*) y aparecen grandes manchas de un matorral de menor porte y más claro formado principalmente por la alcayuela (*Halimium ocymoides*), mata de grandes flores de pétalos amarillos con una mancha purpúrea en la base, la quirola (*Erica umbellata*) y una orquideacea bastante abundante (*Epipactis helleborine*) conocida en algunos lugares como reina de las nieves.

Pero la forma más corriente que adopta la degradación del encinar en las laderas de solana y en la raña es el jaral-aulagar, donde la jara pringosa (*Cistus ladanifer*) y la aulaga (*Genista hirsuta*), junto con el romero (*Rosmarinus officinalis*) y los cantuesos (*Lavandula stoechas ssp. pedunculata*) en las rañas y (*Lavandula stoechas ssp. sampaiana*) en las laderas, son las principales matas que proporcionan el mayor volumen dentro de esta formación vegetal.

Aparece también con constancia en estos matorrales el labiérnago (*Phillyrea angustifolia*), la aulaguilla (*Genista tournefortii*) y más raramente la cegollada (*Globularia alypum*).

3.- Rebollares

En los fondos de valle y vaguadas, donde la humedad edáfica compensa la carencia de la ambiental, aparecen los bosques caducifolios marcescentes dominados por el roble melojo o rebollo, al que acompaña habitualmente el mostajo. En la finca, estos bosques, pertenecientes a la asociación *Sorbo torminalis-Quercetum pyrenaicae*, aparecen circunscritos a algunos valles ubicados en altitudes próximas a los 850 m.

Los bosques de melojo se diferencian claramente de los encinares tanto en su estructura como en su aspecto paisajístico. Está dominado por un estrato arbóreo de *Quercus pyrenaica*, con algunos árboles de neto carácter atlántico (*Sorbus torminalis*...) los cuales originan un sotobosque abierto por la ausencia de un espeso estrato arbustivo. Por el contrario, existe un estrato herbáceo bien desarrollado en el que dominan hierbas perennes y bulbosas de floración precoz, que producen sus piezas florales muy tempranamente para aprovechar las buenas condiciones de luminosidad que reina en el interior del bosque antes de la foliación de los árboles. No faltan tampoco las herbáceas de sombra (escifolia), adaptadas a las condiciones memorables del bosque, en las cuales la luz es el factor limitante. Ello, hace que en estos medios los animales dispongan de dos temporadas de pasto.

Desde el punto de vista fitosociológico, los rebollares ocupan en este territorio, preferentemente el piso mesomediterráneo de ombroclima húmedo, sobre tierra pardahúmeda en derrubios de ladera y aprovechándose de las fuertes umbrías. Aparecen a los 825 m de altitud y se aprovecha de la menor evapotranspiración de estas orientaciones. Son rebollares con madroños de carácter más termófilo que el resto de los bosques de esta especie, pertenecientes a la asociación *Arbutum-Quercetum pyrenaica*.

Los madroñales también constituyen la primera etapa de sustitución de estos melojares, pero en ellos se hacen más abundantes el durillo (*Viburnum tinus*) y zarzamora (*Rubus ulmifolius*). Una etapa posterior de degradación la constituyen los jarales de *Cistus populifolius*.

4.- Quejigares

Dentro del bosque de frondosas caducifolias, el quejigo es la especie que presenta un mayor carácter mediterráneo, mostrándose como especie de transición entre los robledales, y encinares, pudiendo incorporar en su cortejo florístico especies tanto del dominio esclerófilo-perennifolio como del dominio caducifolio.

En la zona de Quintos de Mora, el quejigar está formado mayoritariamente por el quejigo (*Quercus faginea*), que, si bien en la mayoría de los casos no forma masas puras y convive con la encina y el rebollo, se manifiesta claramente dominante en la raña, donde a la inversión térmica se unen unos suelos más profundos, arcillosos y ricos en bases.

El quejigar se impone actualmente en nuestro territorio, lo que induce a pensar que pudiera haber un óptimo vegetal, cuya cabeza de serie estaría representada por el quejigo, quizás con el madroño, junto a la serie de comunidades de sustitución. Estos serían los quejigares silíceos mesomediterráneos luso-extremadurenses.

Acompañan al quejigo: arce (*Acer monspesulanum*), majuelo (*Crataegus monogyna*), rosa (*Rosa spp.*), cornicabra (*Pistacia terebinthus*), madroño (*Arbutus unedo*), torvisco (*Daphne gnidium*), labiérnago (*Phillyrea angustifolia*), brezo sarnoso (*Erica scoparia*), jara cervuna (*Cistus populifolius*).

Sus mejores masas se ubican en la raña (río Las Navas), cuyos dominios se encuentran actualmente muy menguados debido a las repoblaciones de *Pinus pinea* y *Pinus pinaster* y al adehesamiento; y en la zona sur del monte con exposiciones de umbría.

La asociación en que se integra habitualmente es *Arbutus-Quercetum faginae*, o de los quejigares silíceos mesomediterráneos luso-extremadurenses.

5.- Jarales y brezales

Son formaciones integradas por grandes matas leñosas, algunas casi de la talla de arbustos, dominadas por la jara pringosa (*Cistus ladanifer*), que son características de los montes con suelos ácidos degradados y que se instalan y se propagan a favor de los incendios forestales repetidos con frecuencia.

Cuando el jaral ocupa las solanas, donde la intensa insolación se une a la aridez funcional del suelo, la jara pringosa predomina sobre los otros componentes del matorral, que suelen ser el romero (*Rosmarinus officinalis*), el cantueso (*Lavandula stoechas*), la aulaga (*Genista hirsuta*), la aulaguilla (*Genista tournefortii*), el jaguarcillo

(*Halimium umbellatum*), la mejorana o amaraco (*Thymus mastichina*), el jaguarzo morisco (*Cistus salvifolius*) y el torvisco (*Daphne gnidium*).

En la raña, el jaral se puebla con grandes cantidades de gamones (*Asphodelus albus*), cebolla albarrana (*Urginea maritima*), garbancilla (*Astragalus lusitanicus*) y las consabidas plantas parásitas, la orobanca (*Orobancha latisquama*), parásita del romero y la colmenilla (*Cytisus hypocistis*) parásita de la jara.

Cuando aumenta la humedad edáfica, en repechos umbrosos y hondonadas, las jaras comparten el espacio con los brezos (*Erica australis*, *E. arborea* y *Calluna vulgaris*), aparece con cierta constancia la polígala (*Polygala microphylla*) y, si la humedad edáfica aumenta, hace abundante acto de presencia la jara cervuna (*Cistus populifolius*) que aquí se nombra como estepa. En algunos claros intermedios aparecen manchas de alcayuela (*Halimium ocymoides*), acompañada por la quirola (*Erica umbellata*).

6.- Madroñales

El matorral noble es una formación a base de arbustos altos y densos en la mayoría de los casos perennifolios, que constituyen la orla del bosque umbrófilo mediterráneo, y forman la primera etapa de sustitución de los bosques de *Quercetea ilicis* (encinares, quejigares, alcornocales).

En lugares topográficamente desfavorables, como ocurre a menudo en la zona de estudio, tienen carácter de comunidad permanente.

La asociación, según la caracterización fitosociológica correspondería a *Phillyreo-Arbutetum arbutetosum unedoni*, con las siguientes especies características: labiérnago (*Phillyrea angustifolia*), madroño (*Arbutus unedo*), brezo blanco (*Erica arborea*), alcornoque (*Quercus suber*), encina (*Quercus ilex*, ssp. *ballota*), quejigo (*Quercus faginea* ssp. *broteroi*), además de la jara (*Cistus ladanifer*), lavanda (*Lavandula stoechas* ssp. *luisieri*), majuelo (*Crataegus monogyna*), etc.

Estas formaciones arbustivas perennifolias ocupan el piso mesomediterráneo, presentando un enorme interés cinegético, no sólo por el cobijo que proporcionan a la caza, sino también por el alimento, tanto en frutos como en ramón, que son el principal sustento de las reses en una de las épocas críticas.

La asociación fitosociológica en que se integra habitualmente es *Phillyreo-Arbutetum arbutetosum unedoni*.

7.- Tamujares

Existe una formación muy puntual en Quintos de Mora, perteneciente a la asociación *Pyro-Securinegetum tinctorae*, muy condicionada a los suelos hidromorfos. Ocupa el piso mesomediterráneo ligado a ríos y arroyos con gran estiaje, ocupando su borde exterior y en contacto con el quejigar-encinar.

Son formaciones prácticamente monoespecíficas a base de la especie principal que es el tamujo (*Securineja tinctorae*); le acompañan la nueza negra (*Tamus communis*), retama loca (*Osyris alba*), brezo sarnoso (*Erica scoparia*), zarza (*Rubus ulmifolius*), junco churrero (*Scirpus holoschoenus*).

8.- Tremedales

Se trata de brezales higroturbosos de la asociación *Erico tetralicis-Myricaetum galeae*, en los que crece el mirto de brabante (*Myrica gale*), arbusto fijador de nitrógeno y al que acompaña el brezo de pantano (*Erica tetralix*). Esta comunidad, rodeada por los melojares con mostajo, parece representar una etapa de sustitución de los abedulares relícticos de esta zona (*Betula pendula subsp. fontqueri var. parvibracteata*). La presencia de abedules en Montes de Toledo ya había sido puesta de manifiesto por Máximo Laguna en el 1.883 con el nombre de *Betula vernicosa*. Posteriormente Julio Muñoz en el 1.976 hace referencia a *Betula pubescens*.

Por su gran valor botánico, ecológico y cultural debe ser protegido.

9.- Pinares

El pinar implantado sobre desbroce posee una composición y una estructura muy distinta a la del bosque mediterráneo, pues carece de la riqueza de las especies acompañantes de matorrales y arbustos que caracterizan a los últimos y les confieren su riqueza y diversidad. Incluso en los pinares intercalados en el ecosistema original se organizan unas comunidades animales distintas de las autóctonas.

En 1.945, en Quintos de Mora, se llevaron a cabo repoblaciones de pinos con el objeto de tener un aprovechamiento forestal en la finca y controlar la erosión del suelo, esto constituye en la actualidad la principal alteración del paisaje vegetal original. Esto supuso que se sembrara pino negral o resinero (*Pinus pinaster*) en las laderas bajas de la sierra, cubriendo grandes superficies en las umbrías de la Sierra del Pocito y el extremo sur de la finca, y pino piñonero (*Pinus pinea*) que comparte con el anterior y con algunas cupulíferas la llanura central de la raña de Las Navas, en donde también aparecen dispersos algunos ejemplares de pino carrasco (*Pinus halepensis*).

Se sembraron a voleo, pensando que iban a germinar un porcentaje de éstos mucho menor de lo que en realidad ocurrió, y es que germinó un elevado porcentaje de semillas quedando unas densidades de 5.000 pies /ha y, en algunos lugares, de hasta 8.000 pies/ha.

La deficiente descomposición de la hojarasca, rica en resinas y otros derivados fenólicos que, además de favorecer la combustibilidad, generan un mantillo poco propicio para la actividad de la microflora edáfica, integrada sobre todo por hongos. La velocidad de descomposición es por ello muy lenta, y consecuentemente el reciclado de nutrientes poco eficaz.

Fue a partir de 1983 cuando la política forestal y de aprovechamiento del monte cambió y se comenzó entonces a disminuir estas altas densidades. Para ello, la finca contó con partidas presupuestarias por parte del Estado exclusivamente para ordenar el monte.

Durante el periodo comprendido entre 1983-1996, la alta densidad de pinos, tanto piñonero como negral, se redujeron drásticamente, llegando a quedar en la actualidad una densidad media de unos 120 pies/ha de piñonero en la raña y unos 450 pies/ha de negral en el monte; para el negral, se considera que esta densidad es óptima, aunque se continua la conversión de pinares a masas mixtas de pinar-encinar o masas puras de quercineas.

A estas especies arbóreo/arbustivas principales, va unido en la mayoría de los casos un sotobosque acompañante, que puede ser pobre o más o menos rico en especies según donde nos encontremos.

Las asociaciones fitosociológicas en que se integran habitualmente, así como su procedencia original son las siguientes:

Phillyreo-Arbutetum. Procedentes de la degradación de los encinares con quejigo (*Pyro bourgeanae-Quercetum rotundifoliae quercetosum fagunae*) existentes en las solanas. También constituyen la primera etapa de degradación de los rebollares, como matorral alto.

Erico australis-Cistetum populifolii. (brezal-jaral de umbrías compuesto por brezo rojo y jara cervuna). Forma parte de la etapa de sustitución de rebollar. También constituye la etapa de degradación del madroñal sobre suelos más profundos de umbría.

Polygalo microphylli-Cistetum populifolii. Aparece en contacto con *Erico-Cistetum populifolii*.

Erico australis-Cistetum ladanideri (brezal-jaral de solana compuesto por brezo rojo y jara pringosa). Constituye la etapa de sustitución del rebollar, contactando con el anterior, pero dominando en su composición la jara pringosa frente a la jara cervuna.

Halimio-Ericetum umbellatae (brezal-jaral de alturas con suelos poco profundos, degradados, lixiviados, fuertemente acidificados). Aparece como consecuencia de la desaparición de las tierras pardas y transformación en ranker dentro del dominio potencial del rebollar.

Cisto psilosepali-Ericetum lusitani (brezal de río, presente en el arroyo torneros). Aparecen otros brezos en su composición como *Erica arbórea* y *Erica scoparia*.

Genisto hirsutae-Cistetum ladaniferi ericetosum australis o *Ericetum australis*. (Aulagar-jaral con brezo rojo). Se presenta sobre suelos esqueléticos y en solanas del piso mesomediterráneo como consecuencia de la degradación del madroñal.

Rosmarino-Cistetum ladaniferi. Procedente de la degradación de madroñales continentales y del bosque de encinar continental y quejigar. Cede en solanas al jaral-brezal de *Cisto ladaniferi-Ericetum australis* y en umbrías a *Erico australis-Cistetum populifolii*. Si se integra la aulaga y escasea el romero aparece *Genisto hirsutae-Cistetum ladaniferi*.

Genisto hirsutae-Cistetum ladaniferi. Procede de la degradación de encinares de solana y se limita a las faldas de entrada en la Solana. Si nos elevamos en altura se incorpora *Erica australis* dando lugar a *Genisto-Cistetum ladaniferi ericetosum australis*.

Scillo-Lavanduletum pedunculatae. (Cantuesar con ceborranchas). Última etapa de degradación de los encinares de solana.

Pyro-Securinegetum tinctorae. Condicionada por suelos hidromorfos, son formaciones prácticamente monoespecíficas a base de *Securinea tinctoria*, que ocupan los bordes de los arroyos de marcado carácter estacional, llegando a entrar en contacto con los encinares y los quejigares. Aparecen principalmente en el Río de las Navas.

Erico tetralix-Myricaetum galae. Son pequeños enclaves que aparecen en el arroyo de Valdeyernos, de marcado carácter higrófilo ocupan suelos más o menos podzolizados y siempre gleyzados.

A continuación, se presenta un corte transversal (Figura A2.3) para poder observar de una manera esquemática la distribución vegetal de la finca.

Figura A2.3. Esquema de la distribución de las principales formaciones vegetales en Quintos de Mora (Navarro Millas-Prendergast, Martín Fernández 2015).

COMUNIDADES VEGETALES HERBÁCEAS NATURALES

1.- Pastizales terofíticos

Pastizales terofíticos normales.

Son pastizales terofíticos pioneros, que constituyen la última etapa de sustitución por degradación, de los bosques esclerófilo-perennifolios.

La comunidad vegetal herbácea está formada, básicamente, por plantas anuales de pequeña a mediana talla con inclusión de algunas vivaces en las zonas de acumulación de humedad edáfica. Su cobertura no suele llegar a ser completa, oscilando normalmente entre el 50 y el 80 %. Son pastizales pioneros, como se ha dicho anteriormente, de carácter invasor, bastante fugaces y pobres que aparecen naturalmente, con escasa superficie y muy pobre calidad, en los claros de jarales, cantuesares, etc. No obstante, por efectos del pastoreo pueden evolucionar, llegar a estabilizarse dominando a las leñosas y mejorar notablemente en cobertura, extensión y calidad, sobre todo, en las zonas más húmedas, donde en algún caso llegan a convertirse en majadales.

Los pastizales terofíticos normales de Quintos de Mora, corresponden mayoritariamente a la Clase *Tuberarietea guttatae*, dentro de ella al Orden *Tuberarietalia guttatae* y, finalmente, dentro de éste, a las Alianzas *Tuberation guttatae*, en las zonas menos frías (son los más abundantes) y *Thero-Airion*, en los lugares más fríos (piso supramediterráneo).

Dentro de las especies de cierta calidad pastoral, a pesar de su corto ciclo vegetativo, dominan algunas gramíneas como *Vulpia spp.*, *Micropyrum tenellum*, *Molineriella laveis*, *Anthoxanthum aristatum* y leguminosas como *Anthyllis lotoides*, *Coronilla dura*, *Ornithopus compressus*, *Trifolium spp.*, etc.

Su distribución en Quintos de Mora se limita a los claros del matorral bajo, por lo que ocupan una extensión superficial reducida y casi no reviste importancia para la gestión cinegética de la finca.

Su producción anual es escasa y, sobre todo, muy variable tanto entre años como estacionalmente, en función de la cuantía y la distribución de las precipitaciones.

Pastizales terofíticos nitrófilos.

Son pastizales terofíticos pioneros especializados en colonizar y aprovechar suelos con una cierta riqueza en nitrógeno mineral, generalmente procedente de un proceso de nitrificación acelerado por la remoción del suelo. Corresponden, desde el punto de vista fitosociológico a la Clase *Ruderali-Secalietae*, al Orden *Sisymbrietalia officinalis* y a los Subórdenes *Sisymbrienalia officinalis* o *Bromenalia rubenti-tectori*, de pastizales terofíticos, nitrófilos y subnitrófilos mediterráneos.

En Quintos de Mora aparecen preferentemente sobre los comederos (zonas cultivadas cada 3-4 años) durante su periodo de reposo. A pesar de ser fugaces y de calidad parecida a los de *Tuberarietalia*, son más productivos y de calidad algo superior. Durante el primer año, su palatabilidad es relativamente buena, porque se ven enriquecidos por la "ricia" (plantas procedentes de las semillas del cultivo agrícola que no fueron cosechadas). De entre sus especies más conspicuas se pueden citar diversas gramíneas como *Bromus tectorum*, *Bromus rubens*, *Bromus matritensis*, *Taeniatherum caputmedusae*, buen número de crucíferas, denominadas vulgarmente jaramagos (*Sisymbrium*, *Coincya*, *Brassica*), y de algunas compuestas (*Anthemis*, *Sonchus*, *Tolpis*). Su producción se centra básicamente en la primavera.

Pastizales terofíticos nemorales.

Son pastizales terofíticos, generalmente encuadrables en los Órdenes *Sisymbrietalia officinalis* o *Tuberaritalia guttatae* (según el suelo haya sido labrado o no) cuya densidad, producción y fenología se ven condicionadas por una cubierta arbórea más o menos densa. Estas circunstancias se producen muy frecuentemente en los pinares con encinas y quejigos de la raña. En ellos, la sombra y el barrujo (cúmulo de acículas de pino) sólo permiten la existencia de estos pastizales terofíticos, poco densos, pobres y muy fugaces que, no obstante, son bastante aprovechados por las poblaciones de corzos y venados que parecen utilizar con bastante asiduidad este tipo de hábitat.

La producción herbácea es marcadamente estacional y se concentra en primavera, aunque en ocasiones puede haber una ligera otoñada.

Pastizales de vivaces xerófilas y anuales.

En las zonas donde la sequía estival se manifiesta con menor intensidad, bien sea por situación topográfica, la profundidad del suelo o, simplemente, por la incorporación de materia orgánica al suelo como consecuencia del pastoreo intenso y continuado en las querencias, los pastizales de anuales son sustituidos por otros en los que dominan las vivaces más o menos xerófilas, aunque los terófitos siguen siendo abundantes. Su producción es superior a la de los pastizales terofíticos, aunque a veces sólo ligeramente. Su principal ventaja desde el punto de vista cinegético es, su periodo vegetativo más largo, que les convierte en un recurso alimenticio interesante, a pesar de su mediocre calidad. Los principales tipos de pastizales encuadrables en esta categoría dentro de Los Quintos de Mora son los siguientes:

Pastizales de vivaces más o menos duras sobre suelos decapitados: Orden *Jasiono-Koeleretalia*.

Talla media-baja. Cobertura 50-80 %: *Hieracio-Plantaginion radicatae*.

Talla alta. Cobertura 75-100 %: *Stipion giganteae* (berciales).

Pastizales de anuales y vivaces, muy densos, de talla baja y buena calidad dominados por *Poa bulbosa*: majadales de *Poetalia bulbosae*.

Los pastizales de *Hieracio-Plantaginion* se presentan sobre suelos decapitados en las laderas menos expuestas al sol, donde sustituyen a los de *Tuberarietalia*, con los

que frecuentemente llegan a formar mosaico. Su extensión en Quintos de Mora es relativamente reducida.

Los berciales de *Stipion giganteae* se presentan sobre suelos profundos en lomas y laderas secas. Son pastizales muy llamativos por su color dorado en verano y otoño, y son objeto de pastoreo por parte de la caza mayor, sobre todo en invierno, cuando la producción herbácea es pequeña y la avidez de la fauna silvestre por los forrajes con mayor contenido en celulosa aumenta. No obstante, su extensión es muy reducida y sus posibilidades de mejora son pequeñas.

Finalmente, los majadales de *Poetalia bulbosae*, son pastizales de gran calidad, a pesar de su corta talla y su carácter agostante, que aparecen como consecuencia del pastoreo intenso y continuado en las querencias más frecuentes por la caza mayor. Su cobertura es completa, su composición florística posee una calidad pastoral muy superior a la de otros pastizales próximos, a partir de los cuales se han formado (el pastoreo favorece a las especies que por su mayor palatabilidad se “han visto obligadas a desarrollar mecanismos de resistencia al pastoreo”), su periodo vegetativo es más largo (por la mayor capacidad de retención de agua que le confiere su mayor contenido en materia orgánica) y su producción más alta.

En Quintos de Mora, los majadales se sitúan en las proximidades de los arroyos y zonas húmedas, donde las cargas de ciervos llegan a ser muy altas. En ellas, forman tapices muy densos en los que también son frecuentes los gamones (*Asphodelus spp.*) y las matas recomendadas de encina y brezo blanco. Su periodo vegetativo dura, por término medio, unos 30-40 días más que el de los pastizales de *Tuberarietalia*.

Agostaderos.

Los pastizales de vivaces verdes durante todo o parte del verano aparecen en el medio mediterráneo ligados a fenómenos de freatismo más o menos intenso. Por ello, suelen constituir etapas de sustitución no ya de bosques esclerófilos-perennifolios, sino de marcescentes (como los quejigos o rebollos) o caducifolios (como los fresnos). También por ello, suelen aparecer ligados a matorrales espinosos (Orden *Prunetalia spinosae*) y al brezo blanco. En general, los pastizales de este tipo suelen estar dominados por gramíneas altas y bastas (poco palatables) o por juncos, por lo que su calidad alimenticia no es muy alta. Sin embargo, su aceptable producción y, sobre todo, su carácter de agostaderos les confiere un alto valor en la ordenación pastoral en general y en la cinegética en particular.

Los pastizales de esta categoría presentes en Quintos de Mora, pueden encuadrarse en tres grandes grupos, todos pertenecientes a la gran Clase *Molinio-Arrhenatheretea*:

Comunidades densas dominadas por gramíneas altas, pero agostantes: vallicares de *Agrostietalia catellanae*.

Comunidades dominadas por gramíneas más altas y duras, no agostables, que se presentan sobre suelos permanentemente húmedos: praderas húmedas de *Molinietalia*.

Comunidades dominadas por el junco churrero (*Scirpus holoschoenus*): praderas juncuales mediterráneas de *Holoschoenetalia*.

De los tres tipos de pastizales anteriormente descritos, sólo los vallicares ocupan una extensión relativamente amplia en Quintos de Mora, como etapa de sustitución de los rebollares y los quejigares más húmedos, por lo que suelen constituir también el estrato herbáceo de las masas adehesadas de dichas especies (si no se ha labrado). Por tanto, en principio, sólo ellos son merecedores de especial atención en la ordenación cinegética de la finca. Su producción se concentra a finales de primavera y principios de verano (meses de mayo, junio y principios de julio), cuando la mayoría de los pastizales próximos ya se ha agostado; la producción de otoño es muy escasa.

Uno de los principales problemas de los vallicares es su escasez de leguminosas, provocada en buena parte por la alta talla del pasto y por la pobreza del suelo en fósforo. Por ello, el pastoreo intenso y la fertilización fosfórica mejoran notablemente las características productivas de estos pastizales y hacen posible su conversión en majadales. Otra de sus posibilidades de mejora, dada la humedad edáfica durante parte del verano, es su sustitución por pastizales artificiales de calidad.

Fauna

Analizada la situación geográfica y la descripción de las características físicas de Quintos de Mora, si se pensase en una evolución natural, sin factores alterados por el hombre, cabría pensar que este paisaje estaría poblado por una fauna mediterránea muy diversa, donde coexistirían todas las especies de los últimos tiempos cuaternarios, y donde sólo faltarían formas de alta montaña. Pero dado el cambio de uso del hábitat que ha originado un cambio en el ambiente, las comunidades animales que habitaban el ecosistema original anterior han sido desplazadas, no siguiendo un

gradiente latitudinal como con las instrucciones glaciales, sino a cualquier lugar cercano que ofrezca unas condiciones mínimamente similares al bosque autóctono.

Según el inventario que se ha elaborado para el plan técnico de caza 2012/17 y que ha sido facilitado por O.A.P.N. Quintos de Mora (Navarro Millas-Prendergast, Martín Fernández 2015).

Podemos agrupar a las distintas especies que ocupan el monte Quintos de Mora en dos grupos:

Especies cinegéticas.

Especies protegidas.

1.- Especies cinegéticas

Mamíferos:

- Ciervo (*Cervus elaphus*)
- Jabalí (*Sus scrofa*)
- Gamo (*Dama dama*)
- Corzo (*Capreolus capreolus*)
- Conejo (*Oryctolagus cuniculus*)
- Liebre (*Lepus granatensis*)
- Zorro (*Vulpes vulpes*)

Aves:

- Perdiz roja (*Alectoris rufa*)
- Paloma torcaz (*Columba palumbus*)
- Ánade real (*Anas platyrhynchos*)
- Avefría (*Vanellus vanellus*)
- Becada (*Scolopax rusticola*)
- Corneja (*Corvus corone*)
- Estornino negro (*Sturnus unicolor*)
- Paloma bravía (*Columba oenas*)
- Tórtola común (*Streptopelia turtur*)
- Zorzal común (*Turdus philomelos*)

- Zorzal charlo (*Turdus viscivorus*)
- Urraca (*Pica pica*)

De las especies citadas anteriormente, las sujetas a control poblacional son el ciervo, corzo, gamo y jabalí. Además, se podrá abatir el zorro.

2.- Especies protegidas

A continuación, se presenta una escueta enumeración de las especies que se encuentran en la finca y están además protegidas.

EN PELIGRO DE EXTINCIÓN

Aves:

- *Aquila adalberti*
- *Ciconia nigra*

AMENAZADAS

Especies recogidas en el catálogo regional de especies amenazadas

Reptiles:

- *Emys orbicularis*

Aves:

- *Aegypius monachus*

Mamíferos:

- *Myotis myotis*
- *Rhinolophus ferrumequinum*
- *Lutra lutra*

PREOCUPACIÓN MENOR

Insectos:

- *Apteromantis aptera*
- *Deleproctophylla dusmeti*
- *Bubopsis agrioides*

Peces:

- *Rutilus lemingii*

- *Tropidophoxinellus alburnoides*

Anfibios

- *Pleurodeles walt*
- *Salamandra salamandra*.
- *Triturus pygmaeus*
- *Triturus boscai*
- *Discoglossus galganoi*
- *Alytes cisternasii*
- *Pelobates cultripes*
- *Pelodytes punctatus*
- *Bufo bufo*
- *Bufo calamita*
- *Hyla arborea*

Reptiles:

- *Mauremys leprosa*
- *Tarentola mauritanica*
- *Lacerta lepida*
- *Podarcis hispánica*
- *Psammodromus algirus*
- *Chalcides bedriagai*
- *Blanus cinereus*
- *Hemorrhois hippocrepis*
- *Elaphe scalaris*
- *Malpolon monspessulanum*
- *Coronella girondica*
- *Macroprotodon cucullatus*
- *Natrix natrix*
- *Natrix maura*

Aves:

- *Phalacrocorax carbo sinensis*
- *Ciconia ciconia*
- *Bubulcus ibis*
- *Ardea cinerea*
- *Gyps fulvus*
- *Pernis apivorus*
- *Milvus migrans*
- *Buteo buteo*
- *Hieraetus pennatus*
- *Falco tinnunculus*
- *Gallinula chloropus*
- *Himantopus himantopus*
- *Burhinus oedicephalus*
- *Actitis hypoleucos*
- *Clamator glandarius*
- *Cuculus canorus*
- *Otus scops*
- *Athene noctua*
- *Strix aluco*
- *Asio otus*
- *Caprimulgus ruficollis*
- *Apus apus*
- *Merops apiaster*
- *Upupa epops*
- *Jynx torquilla*
- *Picus viridis*

- *Dendrocopos major*
- *Melanocorypha calandra*
- *Calandrella brachydactyla*
- *Galerida cristata*
- *Galerida theklae*
- *Lullula arborea*
- *Ptyonoprogne rupestris*
- *Hirundo rustica*
- *Hirundo daurica*
- *Delichon urbica*
- *Anthus campestris*
- *Motacilla flava*
- *Motacilla alba*
- *Motacilla cinerea*
- *Troglodytes troglodytes*
- *Erithacus rubecula*
- *Luscinia megarhynchos*
- *Saxicola rubetra*
- *Saxicola torquata*
- *Oenanthe oenanthe*
- *Oenanthe hispánica*
- *Monticola solitarius*
- *Turdus merula*
- *Cettia cetti*
- *Hippolaris polyglotta*
- *Sylvia undata*
- *Sylvia cantillans*
- *Sylvia melanocephala*

- *Sylvia hortensis*
- *Phylloscopus collybita*
- *Muscicapa striata*
- *Ficedula hypoleuca*
- *Aegithalos caudatus*
- *Parus cristatus*
- *Parus caeruleus*
- *Parus major*
- *Sitta europea*
- *Certhia brachydactyla*
- *Oriolus oriolus*
- *Lanius senator*
- *Corvus corax*
- *Cyanopica cyanus*
- *Garrulus glandarius*
- *Passer hispaniolensis*
- *Petronia petronia*
- *Fringilla coelebs*
- *Loxia curvirostra*
- *Coccothraustes coccothraustes*
- *Emberiza cirrus*
- *Emberiza cia*
- *Miliaria calandra*

Mamíferos:

- *Erinaceus europaeus*
- *Talpa occidentalis*
- *Crocidura russula*
- *Suncus etruscus*

- *Myotis daubentoni*
- *Plecotus austriacus*
- *Pipistrellus pipistrellus*
- *Pipistrellus kuhlii*
- *Eptesicus serotinus*
- *Tadarida teniotis*
- *Meles meles*
- *Mustela putorius*
- *Martes foina*
- *Mustela nivalis*
- *Felis silvestris*
- *Genetta genetta*

Estado fitosanitario de las masas forestales

Para la recopilación de información fitosanitaria de las masas forestales se realizan una serie de mediciones en otoño, basadas en la toma de datos de un itinerario previamente fijado en el cual se evalúan daños y riegos que existen en la masa forestal.

DAÑOS CAUSADOS POR AGENTES BIÓTICOS

Se puede considerar la posible incidencia de la fauna cinegética en el regenerado debido al consumo de las bellotas de encina y quejigo, aunque en general la regeneración no se ve muy afectada ya que son numerosos los brinzales en el monte.

Otros daños que se pueden apreciar repartidos por todo el monte son los causados por el descorreado de los ciervos, que pueden llegar a ser importantes al frotarse intensamente en árboles jóvenes.

DAÑOS CAUSADOS POR AGENTES ABIÓTICOS

La sequía es uno de los agentes abióticos que influye de forma determinante en el estado vegetativo de los ecosistemas forestales, principalmente por las fuertes variaciones intra- e interanuales, razón por la que la precipitación total no puede ser considerada más que como una referencia.

Puesto que poco se puede hacer para cambiar el clima, la gestión debe ir encaminada a favorecer la mejora del estado vegetativo de los ecosistemas forestales y su rejuvenecimiento.

Riesgo de incendio

El riesgo de incendio se calcula en función de la inflamabilidad, la combustibilidad y la pendiente.

El grado de inflamabilidad depende fundamentalmente de la humedad de la planta, de la cantidad y naturaleza de los gases volátiles. Para determinar el grado de inflamabilidad de las diferentes especies vegetales o comunidades vegetales utilizamos las tablas confeccionadas por el INIA (Instituto Nacional de Investigación y Tecnología Agraria y Alimentaria) organismo español y el INRA (Institut National de la Recherche Agronomique) organismo francés, según las diferentes especies predominantes. El monte presenta una alta inflamabilidad, al ser la vegetación predominante la encina, salvo en zonas de vegetación de ribera. Por lo tanto el riesgo por inflamabilidad del monte es en general muy alto.

La combustibilidad depende fundamentalmente de las especies presentes, su naturaleza (muerta o viva), su ubicación (subterránea, superficial o aérea), su continuidad (vertical y horizontal), tamaño y contenido de humedad. Para determinar la combustibilidad utilizamos los 13 modelos de combustibles desarrollados por R. Rothermel, según la formación vegetal predominante, su estructura espacial y el grado de restos de cortas u operaciones selvícolas. El monte presenta los siguientes modelos de combustible:

Modelo 2: Zonas donde predominan pastos finos, secos y bajos, que recubren completamente el suelo, con plantas leñosas dispersas, con propagación del fuego por el pasto.

Modelo 6: Zonas con matorral denso y verde, de menos de 1 m de altura, bastante inflamable o con restos de corta, con especies de mayor talla, con propagación por la hojarasca y el pasto.

Modelo 7: Zonas con matorral muy inflamable, de 0,5-2 m de altura, como sotobosque de masa de especies del género *Quercus*.

Modelo 9: Zonas de bosque denso, con hojarasca más o menos compacta.

Por lo tanto, el riesgo por combustibilidad será en general alto (modelos 2, 6 y 7) y en las formaciones de ribera será moderado (modelo 9).

La pendiente del terreno es otro factor importante ya que favorece la velocidad de propagación al aumentar la cantidad vertical de combustible, a pendientes bajas riesgo bajo, al aumentar la pendiente, el riesgo es mayor.

Al combinar el riesgo de incendio debido a la pendiente del terreno y el riesgo debido a la combustibilidad, obtenemos el riesgo estructural de incendio, que junto con el riesgo de inflamabilidad permite conocer el riesgo real de incendio.

Es por ello que este es uno de los factores a tener en cuanto en la gestión del monte en lo que se refiere a tratamientos selvícolas, ya que el riesgo de incendio es grande pudiendo dar lugar a grandes perturbaciones con los consecuentes efectos que esto trae para la elaboración y predicción de nuestros modelos.

Ecosistemas, paisajes y valores naturales más sobresalientes

Los enclaves húmedos de interés florístico en los Quintos de Mora son:

Brezales de Erica Escoparia, juncuales asociados a arroyos intermitentes, bordes de riachuelos en el interior de quejigares umbrosos, juncuales y prados hidromorfos de fondo de valle, tremadales o brezales higroturbosos.

Otros aspectos relevantes son sus características para albergar a especies amenazadas y/o en peligro de extinción como el águila imperial ibérica, la cigüeña negra el buitre negro y el singular lince ibérico.

BIBLIOGRAFÍA

AUSTIN, Z., RAFFAELLI, D. and WHITE, P., 2013. Interactions between ecological and social drivers in determining and managing biodiversity impacts of deer. *Biological Conservation*, **158**, pp. 214-222.

AZORIT, C., ANALLA, M., CARRASCO, R. and MUÑOZ-COBO, J., 2002. Influence of age and environment on antler traits in Spanish red deer (*Cervus elaphus hispanicus*). *Zeitschrift für Jagdwissenschaft*, **48**(3), pp. 137-144.

BARR, B. and WOLVERTON, S., 2014. The Effects of Population Density on Juvenile Growth Rate in White-Tailed Deer. *Environmental management*, **54**(4), pp. 897-907.

BERGMAN, E.J., PAUL F. DOHERTY, J., WHITE, G.C. and HOLLAND, A.A., 2015. Density dependence in mule deer: a review of evidence. *Wildlife Biology*, **21**(1), pp. 18-29.

BIRKAN, M.G., 1977. Analyse des tableaux de chasse de Perdix (*Perdix perdix* L. et *Alectoris rufa* L.). Courbes d'éclosion, structure et dynamique des populations, plan de chasse. In: P. PESSON, P. & M.G. BIRKAN, ed, *Écologie du petit gibier et aménagement des chasses*. Paris: Gauthier-Villars, pp. 55-77.

BOWYER, R.T., VERNON, C.B., STEWART, K.M., WHITING, J.C. and MONTEITH, K.L., 2014. Density dependence in ungulates: a review of causes, and concepts with some clarifications. *California Fish and Game*, **100**(3), pp. 550-572.

CABALLERO GARCÍA DE ARÉVALO, R., 1985. *Habitat y alimentación del ciervo en ambiente mediterráneo*. Madrid: Instituto Nacional para la Conservación de la Naturaleza.

CARPIO, A., CASTRO-LOPEZ, J., GUERRERO-CASADO, J., RUIZ-AIZPURUA, L., VICENTE, J. and TORTOSA, F., 2014. Effect of wild ungulate density on invertebrates in a Mediterranean ecosystem. *ANIMAL BIODIVERSITY AND CONSERVATION*, **37**(2), pp. 115-125.

CARRANZA, J., 2007. *Cervus elaphus* Linnaeus, 1758. In: L.J. PALOMO, J. GISBERT and J.C. BLANCO, eds, *Atlas y Libro Rojo de los Mamíferos Terrestres de España*. 1 edn. Madrid: Dirección General para la Biodiversidad -SECEM-SECEMU, pp. 352-355.

CARRANZA, J., 2011, 2004-last update, Ciervo - *Cervus elaphus* Linnaeus, 1758 [Homepage of Museo Nacional de Ciencias Naturales, Madrid], [Online]. Available: www.vertebradosibericos.org [04/08, 2016].

CARRANZA, J., DETRUCIOS, S., MEDINA, R., VALENCIA, J. and DELGADO, J., 1991. SPACE USE BY RED DEER IN A MEDITERRANEAN ECOSYSTEM AS DETERMINED BY RADIO-TRACKING. *Applied Animal Behaviour Science*, **30**(3-4), pp. 363-371.

CARRIÓN, D., GARCIA, A.J., LANDETE-CASTILLEJOS, T., GASPAR-LOPEZ, E., CEACERO, F., ESTEVEZ, J.A. and GALLEGO, L., 2010. Hind body condition and weight in primiparous of Iberian red deer (*Cervus elaphus hispanicus*) with one, two or three years old at mating. *Italian Journal of Animal Science*, **6**(15),.

CARRIÓN, D., GASPAR-LÓPEZ, E., LANDETE-CASTILLEJOS, T., GALLEGO, L. and GARCÍA, A.J., 2010. Effect of reproductive rest on the subsequent breeding in Iberian red deer hinds (*Cervus elaphus hispanicus*). *Mammalian Biology*, **75**(3), pp. 211-218.

CASWELL, H., 2000. *Matrix population models: construction, analysis, and interpretation*. 2ª edn. Sunderland, Massachusetts: Sinauer Associates.

- CAUGHLEY, G., 1977. *Analysis of vertebrate populations*. Chichester: John Wiley & Sons.
- CAUGHLEY, G. and SINCLAIR, A., 1994. *Wildlife Ecology and Management*. Oxford: Blackwell Sci.
- CEACERO, F., LANDETE-CASTILLEJOS, T., GARCÍA, A.J., ESTÉVEZ, J.A. and GALLEGO, L., 2007. Kinship Discrimination and Effects on Social Rank and Aggressiveness Levels in Iberian Red Deer Hinds. *Ethology*, **113**(12), pp. 1133-1140.
- CHELLIAH, K., BUKKA, H. and SUKUMAR, R., 2013. Modeling harvest rates and numbers from age and sex ratios: A demonstration for elephant populations. *Biological Conservation*, **165**, pp. 54-61.
- CHINCHILLA RODRÍGUEZ, A., 2015. *Ordenación cinegética: guía metodológica para proyectos y planes técnicos*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Montes.
- CLUTTON-BROCK, F.E. and GUINNESS, S.D.A., 1983. *Red Deer. Behavior and Ecology of Two Sexes*. Blackwell Scientific Publications.
- CONSEJERÍA DE AGRICULTURA, MEDIO AMBIENTE Y DESARROLLO RURAL, CASTILLA-LA MANCHA, 2017. *Instrucción Caza 3/2017 de 15 de noviembre de 2017, de la dirección general de política forestal y espacios naturales por la que se desarrolla el contenido de los planes de ordenación cinegética*.
- COVISA, J., 1998. *Ordenación cinegética: proyectos de ordenación y planes técnicos*. Madrid: Cinegetica y naturaleza ediciones.
- DGT, 2019-last update, Anuario Estadístico de Accidentes. Available: <http://www.dgt.es/es/seguridad-vial/estadisticas-e-indicadores/publicaciones/anuario-estadistico-accidentes/> [03/19, 2019].
- DGT, 2011-last update, Accidentes de tráfico con animales. Análisis de la situación a nivel Europeo y Español. Available: <http://www.dgt.es/Galerias/seguridad-vial/investigacion/estudios-e-informes/INFORME-PARA-WEB-ACCIDENTES-DE-TRAFICO-CON-ANIMALES-12.pdf> [03/19, 2019].
- DOADRIO, I., 2001. *Atlas y libro rojo de los peces continentales de España*. Madrid: Madrid Dirección General de Conservación de la Naturaleza.
- DOUBLEDAY, W.G., 1975. Harvesting in Matrix Population Models. *Biometrics*, **31**(1), pp. 189-200.
- FANDOS, P. and BURÓN FERNÁNDEZ, D., 2015. *Corzos*. Sevilla: Cervál.
- FERNÁNDEZ-MORÁN, J., GÓMEZ, S., BALLESTEROS, F., QUIRÓS, P., BENITO, J., FELIU, C. and NIETO, J., 1997. Epizootiology of sarcoptic mange in a population of cantabrian chamois (*Rupicapra pyrenaica parva*) in Northwestern Spain. *Veterinary parasitology*, **73**(1), pp. 163-171.
- FESTA-BIANCHET, M., GAILLARD, J. and CÔTÉ, S.D., 2003. Variable age structure and apparent density dependence in survival of adult ungulates. *Journal of Animal Ecology*, **72**(4), pp. 640-649.
- FOCARDI, S., TOSO, S. and PECCHIOLI, E., 1996. The population modelling of fallow deer and wild boar in a Mediterranean ecosystem. *Forest Ecology and Management*, **88**(1), pp. 7-14.
- FORCHHAMMER M.C., STENSETH N.C., POST E. and LANDVATN R., 1998. Population dynamics of Norwegian red deer: density-dependence and climatic variation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences*, **265**(1393), pp. 341-350.

- GASPAR-LÓPEZ, E., GARCÍA, A.J., LANDETE-CASTILLEJOS, T., CARRIÓN, D., ESTEVEZ, J.A. and GALLEGU, L., 2008. Growth of the first antler in Iberian red deer (*Cervus elaphus hispanicus*). *European Journal of Wildlife Research*, **54**(1), pp. 1-5.
- GILBERT, B.A., RAEDEKE, K.J., SKALSKI, J.R. and STRINGER, A.B., 2007. Modeling Black-Tailed Deer Population Dynamics Using Structured and Unstructured Approaches. *Journal of Wildlife Management*, **71**(1), pp. 144-154.
- GÓMEZ MANZANEQUE, F., 1988. La cubierta vegetal de los Montes de Mora (Los Yébenes, Toledo). . *Ecología*, **2**, pp. 111-130.
- GÓMEZ, J.A., LANDETE-CASTILLEJOS, T., GARCIA, A.J. and GALLEGU, L., 2002. Effect of calving advance on milk production and composition, and calf growth in Iberian deer (*Cervus elaphus hispanicus*). *Small Ruminant Research*, **44**(3), pp. 213-218.
- GORDON, I.J., HESTER, A.J. and FESTA-BIANCHET, M., 2004. The Management of Wild Large Herbivores to Meet Economic, Conservation and Environmental Objectives. *Journal of Applied Ecology*, **41**(6), pp. 1021-1031.
- GORTÁZAR, C., ACEVEDO, P., RUIZ-FONS, F. and VICENTE, J., 2006. Disease risks and overabundance of game species. *European Journal of Wildlife Research*, **52**(2), pp. 81-87.
- HARD, J.J., MILLS, L.S. and PEEK, J.M., 2006. Genetic implications of reduced survival of male red deer *Cervus elaphus* under harvest. *Wildlife Biology*, **12**(4), pp. 427-441.
- IMPERIO, S., FOCARDI, S., SANTINI, G. and PROVENZALE, A., 2012. Population dynamics in a guild of four Mediterranean ungulates: density-dependence, environmental effects and inter-specific interactions. *Oikos*, **121**(10), pp. 1613-1626.
- INSTITUTO NACIONAL DE ESTADÍSTICA, 2019-last update, Cifras de Población. Available: https://www.ine.es/dyngs/INEbase/es/operacion.htm?c=Estadistica_C&cid=1254736176951&menu=ultiDatos&idp=1254735572981 [02/24, 2019].
- JENNINGS, B., BOWMAN, J. and TYMKIW, E., 2014. A spatially explicit model of the white-tailed deer population in Delaware. *Human - Wildlife Interactions*, **8**(2), pp. 195-209.
- JENSEN, A.L., 1997. Matrix population model with density-dependent recruitment for assessment of age-structured wildlife populations. *Bulletin of mathematical biology*, **59**(2), pp. 255-262.
- JENSEN, A.L., 2000. Sex and age structured matrix model applied to harvesting a white tailed deer population. *Ecological Modelling*, **128**(2), pp. 245-249.
- JENSEN, A.L., 1996. Density-dependent matrix yield equation for optimal harvest of age-structured wildlife populations. *Ecological Modelling*, **88**(1), pp. 125-132.
- JENSEN, A.L., 1995. Simple density-dependent matrix model for population projection. *Ecological Modelling*, **77**(1), pp. 43-48.
- JENSEN, A.L. and MILLER, D.H., 2001. Age structured matrix predation model for the dynamics of wolf and deer populations. *Ecological Modelling*, **141**(1), pp. 299-305.

- JOHNSON, H.E., MILLS, L.S., STEPHENSON, T.R. and WEHAUSEN, J.D., 2010. Population-specific vital rate contributions influence management of an endangered ungulate. *Ecological Applications*, **20**(6), pp. 1753-1765.
- JUNTA DE ANDALUCÍA, 2007. *Orden de 13 de julio de 2007, por la que se desarrollan determinados aspectos del Decreto 182/2005, de 26 de julio, por el que se aprueba el Reglamento de Ordenación de la caza*. Boletín nº169 edn.
- LANDETE-CASTILLEJOS, T., GARCÍA, A., GOMEZ, J.A., BERRUGA, M.I. and GALLEG0, L., 2005. Effects of Birth Date and Order in Lactation Performance of Iberian Red Deer (*Cervus elaphus hispanicus*). *Journal of dairy science*, **88**(1), pp. 154-158.
- LANDETE-CASTILLEJOS, T., CEACERO, F., GARCÍA, A.J., ESTEVEZ, J.A. and GALLEG0, L., 2010. Direct versus indirect effects of social rank, maternal weight, body condition and age on milk production in Iberian red deer (*Cervus elaphus hispanicus*). *Journal of Dairy Research*, **77**(1), pp. 77-84.
- LANDETE-CASTILLEJOS, T., ESTEVEZ, J.A., CEACERO, F., GARCIA, A.J. and GALLEG0, L., 2013. Effects of public vs. private management on deer antler composition, mechanical and structural variables. *European Journal of Wildlife Research*, **59**(4), pp. 519-529.
- LANDETE-CASTILLEJOS, T., GARCÍA, A., GÓMEZ, J.Á., LABORDA, J. and GALLEG0, L., 2002. Effects of Nutritional Stress During Lactation on Immunity Costs and Indices of Future Reproduction in Iberian Red Deer (*Cervus elaphus hispanicus*)1. *Biology of reproduction*, **67**(5), pp. 1613-1620.
- LANDETE-CASTILLEJOS, T., GORTÁZAR, C., VICENTE, J., FIERRO, Y., GARCIA, A. and GALLEG0, L., 2004. Age-Related Foetal Sex Ratio Bias in Iberian Red Deer (*Cervus elaphus hispanicus*): Are Male Calves too Expensive for Growing Mothers? *Behavioral Ecology and Sociobiology*, **56**(1), pp. 1-8.
- LAZO, A., SORIGUER, R. and FANDOS, P., 1994. HABITAT USE AND RANGING BEHAVIOR OF A HIGH-DENSITY POPULATION OF SPANISH RED DEER IN A FENCED INTENSIVELY MANAGED AREA. *Applied Animal Behaviour Science*, **40**(1), pp. 55-65.
- LEFKOVITCH, L.P., 1965. The Study of Population Growth in Organisms Grouped by Stages. *Biometrics*, **21**(1), pp. 1-18.
- LESLIE, P.H., 1945. On the Use of Matrices in Certain Population Mathematics. *Biometrika*, **33**(3), pp. 183-212.
- LOPATIN, V.N. and ROSOLOVSKY, S.V., 2002. Evaluation of the state and productivity of moose populations using Leslie Matrix analyses. *Alces*, **38**, pp. S77.
- LÓPEZ, I., ORTUÑO, S.F., MARTÍN, ÁJ. and FULLANA, C., 2007. Estimating the sustainable harvesting and the stable diameter distribution of European beech with projection matrix models. *Annals of Forest Science*, **64**(6), pp. 593-599.
- LWIN, N., LINKIE, M., HARIHAR, A., AUNG, S.S., LIN, A.K. and MOMBERG, F., 2016. Initiating conservation of a newly discovered population of the Endangered hog deer *Axis porcinus* in Myanmar. *Oryx*, **52**(1), pp. 1-8.
- MACMILLAN, D.C. and PHILLIP, S., 2008. Consumptive and non-consumptive values of wild mammals in Britain. *Mammal Review*, **38**(2-3), pp. 189-204.
- MADROÑO, A., GONZÁLEZ, C., ATIENZA, J.C. and SOCIEDAD ESPAÑOLA, D.O., 2004. *Libro rojo de las aves de España*. Madrid: Madrid Organismo Autónomo Parques Nacionales.

- MALTHUS, T.R., 1846. *Ensayo sobre el principio de la poblacion*. Madrid: Madrid Lucas Gonzalez y Cia.
- MARTINEZ, A. and MARTIN, A., 2017. A matrix system using quality classes can be applied for managing sustainable wild ungulates populations: Convergence below optimum capacity. *Ecological Engineering*, **108**, pp. 10-16.
- MARTÍNEZ-JAUREGUI, M. and HERRUZO, A.C., 2014. A note on the effectiveness of incorporating management objectives with ecological variables when modeling red deer abundance. *European Journal of Wildlife Research*, **60**(3), pp. 511-517.
- MATEOS, C., ALARCOS, S., CARRANZA, J., SÁNCHEZ-PRIETO, C.B. and VALENCIA, J., 2008. Fluctuating asymmetry of red deer antlers negatively relates to individual condition and proximity to prime age. *Animal Behaviour*, **75**(5), pp. 1629-1640.
- MCCULLOUGH, D.R., 1999. Density Dependence and Life-History Strategies of Ungulates. *Journal of mammalogy*, **80**(4), pp. 1130-1146.
- MEIRI, M., LISTER, A.M., HIGHAM, T.F.G., STEWART, J.R., STRAUS, L.G., OBERMAIER, H., GONZÁLEZ MORALES, M.R., MARÍN-ARROYO, A.B. and BARNES, I., 2013. Late-glacial recolonization and phylogeography of European red deer (*Cervus elaphus* L.). *Molecular ecology*, **22**(18), pp. 4711-4722.
- MILLSPAUGH, J.J., SKALSKI, J.R., TOWNSEND, R.L., DIEFENBACH, D.R., BOYCE, M.S., HANSEN, L.P. and KAMMERMEYER, K., 2009. An Evaluation of Sex-Age-Kill (SAK) Model Performance. *Journal of Wildlife Management*, **73**(3), pp. 442-451.
- MIRANDA, M., SICILIA, M., BARTOLOME, J., MOLINA-ALCAIDE, E., GALVEZ-BRAVO, L. and CASSINELLO, J., 2012. Foraging sexual segregation in a Mediterranean environment: Summer drought modulates sex-specific resource selection. *Journal of Arid Environments*, **85**, pp. 97-104.
- MONTOYA OLIVER, J.M., 2012. *Cálculo de la sostenibilidad de la perdiz roja*. <http://www.club-caza.com/articulos/600montoya.asp> edn.
- MONTOYA OLIVER, J.M., 1999. *El ciervo y el monte: manejo y conservación (Cervus elaphus L.)*. Madrid: Fundación Conde del Valle de Salazar.
- MYSTERUD, A., 2010. Still walking on the wild side? Management actions as steps towards 'semi-domestication' of hunted ungulates. *Journal of Applied Ecology*, **47**(4), pp. 920-925.
- NAGLE, R.K., 1992. *Fundamentos de ecuaciones diferenciales*. 2ª ed. edn. Buenos Aires: Buenos Aires Addison-Wesley Iberoamericana.
- NAVARRO MILLAS-PRENDERGAST, F. and MARTÍN FERNÁNDEZ, Á.J., 2015. *Aplicación de un modelo cuantitativo para garantizar la sostenibilidad en la ordenación cinegética del ciervo (Cervus elaphus L.) en Los Quintos de Mora (Toledo)*. Madrid: F. Navarro Millas-Prendergast.
- NORES QUESADA, C., CANO PARRA, M., GARCIA-ROVES, P., SEGURA, A., ARGUELLES, I., FERNANDEZ, M., GARCIA, S. and RODRIGUEZ, J., 2008. *Manual para la Gestión de las Especies de Caza Mayor en el Principado de Asturias*. 1 edn. Oviedo: Gobierno del Principado de Asturias.
- OLEAGA, A., CASAIS, R., GONZÁLEZ-QUIRÓS, P., PRIETO, M. and GORTÁZAR, C., 2008. Sarcoptic mange in red deer from Spain: Improved surveillance or disease emergence? *Veterinary parasitology*, **154**(1), pp. 103-113.

- PALOMO, L.J., GISBERT, J. and BLANCO, J.C., 2007. *Atlas y libro rojo de los mamíferos terrestres de España*. Madrid: Madrid Dirección General para la Biodiversidad.
- PÉREZ-GONZÁLEZ, J., BARBOSA, A.M., CARRANZA, J. and TORRES-PORRAS, J., 2010. Relative Effect of Food Supplementation and Natural Resources on Female Red Deer Distribution in a Mediterranean Ecosystem. *Journal of Wildlife Management*, **74**(8), pp. 1701-1708.
- PÉREZ-GONZÁLEZ, J., CARRANZA, J., TORRES-PORRAS, J. and FERNÁNDEZ-GARCÍA, J.L., 2010. Low heterozygosity at microsatellite markers in Iberian red deer with small antlers. *The Journal of heredity*, **101**(5), pp. 553-561.
- PLEGUEZUELOS, J.M., MÁRQUEZ, R. and LIZANA, M., 2002. *Atlas y libro rojo de los anfibios y reptiles de España*. Madrid: Madrid Organismo Autónomo de Parques Nacionales.
- PUTMAN, R. and MOORE, N., 1998. Impact of deer in lowland Britain on agriculture, forestry and conservation habitats. *Mammal Review*, **28**(4), pp. 141-163.
- RENAUD, P.C., VERHEYDEN-TIXIER, H. and DUMONT, B., 2003. Damage to saplings by red deer (*Cervus elaphus*): effect of foliage height and structure. *Forest Ecology and Management*, **181**(1), pp. 31-37.
- RIVAS-MARTÍNEZ, S., 1987. *Memoria del mapa de series de vegetación de España: 1:400.000*. Madrid: Madrid ICONA.
- RODRIGUEZ-HIDALGO, P., GORTAZAR, C., TORTOSA, F.S., RODRIGUEZ-VIGAL, C., FIERRO, Y. and VICENTE, J., 2010. Effects of density, climate, and supplementary forage on body mass and pregnancy rates of female red deer in Spain. *Oecologia*, **164**(2), pp. 389-398.
- RORRES, C. and ANTON, H., 1979. *Aplicaciones de álgebra lineal*. México: Limusa.
- RUIZ-FONS, F., FERNÁNDEZ-DE-MERA, I.G., ACEVEDO, P., HÖFLE, U., VICENTE, J., DE LA FUENTE, J. and GORTAZAR, C., 2006. Ixodid ticks parasitizing Iberian red deer (*Cervus elaphus hispanicus*) and European wild boar (*Sus scrofa*) from Spain: Geographical and temporal distribution. *Veterinary parasitology*, **140**(1), pp. 133-142.
- SÁENZ DE BURUAGA, M. and CARRANZA, J., 2008. *Gestión cinegética en los ecosistemas mediterráneos*. 1 edn. Junta de Andalucía: Consejería de Medio Ambiente.
- SÁNCHEZ-PRIETO, C.B., CARRANZA, J. and PULIDO, F.J., 2004. REPRODUCTIVE BEHAVIOR IN FEMALE IBERIAN RED DEER: EFFECTS OF AGGREGATION AND DISPERSION OF FOOD. *Journal of mammalogy*, **85**(4), pp. 761-767.
- SKONHOFT, A., VEIBERG, V., GAUTEPLASS, A., OLAUSSEN, J., MEISINGSET, E. and MYSTERUD, A., 2013. Balancing income and cost in red deer management. *Journal of environmental management*, **115**, pp. 179-188.
- SMART, J.C.R., WHITE, P.C.L. and TERMANSEN, M., 2008. Modelling conflicting objectives in the management of a mobile ecological resource: Red deer in the Scottish Highlands. *Ecological Economics*, **64**(4), pp. 881-892.
- SNOW, N., PORTER, W. and WILLIAMS, D., 2015. Underreporting of wildlife-vehicle collisions does not hinder predictive models for large ungulates. *Biological Conservation*, **181**, pp. 44-53.

- SOMMER, R.S., ZACHOS, F.E., STREET, M., JÖRIS, O., SKOG, A. and BENECKE, N., 2008. Late Quaternary distribution dynamics and phylogeography of the red deer (*Cervus elaphus*) in Europe. *Quaternary Science Reviews*, **27**(7), pp. 714-733.
- SORIGUER, R.C., 1994a. *El ciervo en Andalucía*. Sevilla: Junta de Andalucía, Consejería de Agricultura y Pesca.
- SORIGUER, R.C., 1994b. *El ciervo en Andalucía*. Sevilla: Junta de Andalucía, Consejería de Agricultura y Pesca.
- STEARNS, S.C., 1992. The evolution of Life Histories. *Oxford University Press, London XII*, , pp. 249.
- SUTHERLAND, W.J., 2000. *The conservation Handbook. Research, Management and Policy*. Oxford: Blackwell Science.
- TORRES-PORRAS, J., CARRANZA, J. and PÉREZ-GONZÁLEZ, J., 2009a. Combined Effects of Drought and Density on Body and Antler Size of Male Iberian Red Deer *Cervus Elaphus Hispanicus*: Climate Change Implications. *Wildlife Biology*, **15**(2), pp. 213-221.
- TORRES-PORRAS, J., CARRANZA, J. and PÉREZ-GONZÁLEZ, J., 2009b. Selective culling of Iberian red deer stags (*Cervus elaphus hispanicus*) by selective montería in Spain. *European Journal of Wildlife Research*, **55**(2), pp. 117-123.
- TRDAN, S. and VIDRIH, M., 2008. Quantifying the damage of red deer (*Cervus elaphus*) grazing on grassland production in southeastern Slovenia. *European Journal of Wildlife Research*, **54**(1), pp. 138-141.
- TREMBLAY, J., HESTER, A., MCLEOD, J. and HUOT, J., 2004. *Choice and development of decision support tools for the sustainable management of deer-forest systems*. AMSTERDAM: Elsevier B.V.
- TRENKEL, V.M., 2001. Exploring red deer culling strategies using a population-specific calibrated management model. *Journal of environmental management*, **62**(1), pp. 37-53.
- UENO, M., KAJI, K. and SAITOH, T., 2010. Culling Versus Density Effects in Management of a Deer Population. *Journal of Wildlife Management*, **74**(7), pp. 1472-1483.
- WALTERS, S., 2001. Landscape pattern and productivity effects on source-sink dynamics of deer populations. *Ecological Modelling*, **143**(1), pp. 17-32.
- WAM, H.K. and HOFSTAD, O., 2007. Taking timber browsing damage into account: A density dependant matrix model for the optimal harvest of moose in Scandinavia. *Ecological Economics*, **62**(1), pp. 45-55.
- WANG, G.M., HOBBS, N.T., SINGER, F.J., OJIMA, D.S. and LUBOW, B.C., 2002. Impacts of climate changes on elk population dynamics in Rocky Mountain National Park, Colorado, USA. *Climatic Change*, **54**(1-2), pp. 205-223.
- WIELANDT, H., 1944. Das Iterationsverfahren bei nicht selbstadjungierten linearen Eigenwertaufgaben. *Mathematische Zeitschrift*, **50**(1), pp. 93-143.
- WIKIPEDIA, 2019a-last update, Función logística. Available: https://es.wikipedia.org/wiki/Funcion_logistica [03/14, 2019].

WIKIPEDIA, 2019b-last update, Pierre-François Verhulst. Available: https://es.wikipedia.org/wiki/Pierre-François_Verhulst [03/14, 2019].

WIKIPEDIA, 2019c-last update, Thomas Malthus. Available: https://es.wikipedia.org/wiki/Thomas_Malthus [03/14, 2019].

WILLIAMS, B.K., NICHOLS, J.D. and CONROY, M.J., 2002. *Analysis and management of animal populations: modeling, estimation and decision making*. San Diego: Academic Press.

XIE, J., HILL, H.R., WINTERSTEIN, S.R., CAMPA III, H., DOEPKER, R.V., VAN DEELEN, T.R. and LIU, J., 1999. White-tailed deer management options model (DeerMOM): design, quantification, and application. *Ecological Modelling*, **124**(2–3), pp. 121-130.

ZIPKIN, E.F., ANDREW ROYLE, J., DAWSON, D.K. and BATES, S., 2010. Multi-species occurrence models to evaluate the effects of conservation and management actions. *Biological Conservation*, **143**(2), pp. 479-484.

ZUBEROGOITIA, I., REAL, J.D., TORRES, J.J., RODRÍGUEZ, L., ALONSO, M. and ZABALA, J., 2014. Ungulate Vehicle Collisions in a Peri-Urban Environment: Consequences of Transportation Infrastructures Planned Assuming the Absence of Ungulates: e107713. *PLoS One*, **9**(9).