Universidad Politécnica de Madrid

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Agronómica, Alimentaria
y de Biosistemas

**Simulación del flujo del agua en el suelo
en riego por goteo superficial, soluciones
analíticas aproximadas, caracterización
del suelo y diseño de los riegos**

TESIS DOCTORAL

Ángel del Vigo García.

Licenciado en Ciencias Físicas.

Master Universitario en Geofísica y Meteorología.

2020

Departamento de Ingeniería Agroforestal

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Agronómica, Alimentaria y de
Biosistemas

- §•§ -

Simulación del flujo del agua en el suelo en riego por goteo superficial, soluciones analíticas aproximadas, caracterización del suelo y diseño de los riegos

- §•§ -

Autor:

Ángel del Vigo García.

Licenciado en Ciencias Físicas.

Master Universitario en Geofísica y Meteorología.

Director:

Dr. Luis Juana Sirgado.

Catedrático de Ingeniería Agronómica.

2020

Tribunal nombrado por el Magfco. y Excmo. Sr. Rector de la Universidad Politécnica de Madrid el día ____ de _____ del 2020.

Presidente: _____

Vocal: _____

Vocal: _____

Vocal: _____

Secretario: _____

Suplente: _____

Suplente: _____

Realizado el acto de defensa y lectura de tesis doctoral el día __ de ____ de 2020 en la E.T.S de Ingeniería Agronómica, Alimentaria y de Biosistemas de la Universidad Politécnica de Madrid.

Calificación:

EL PRESIDENTE.

LOS VOCALES.

EL SECRETARIO.

Agradecimientos.

En primer lugar, me gustaría agradecer la labor y recordar a nuestro compañero y técnico de laboratorio D. Juan Carlos Garrido quien participó directamente en los trabajos que se presentan en esta tesis, y lamentablemente, ha fallecido recientemente durante la pandemia.

Me gustaría mostrar mi gratitud con mi director de tesis el Dr. Luis Juana que es el motor de este trabajo, y mi tutor el Dr. Sergio Zubelzu por el apoyo moral y ayuda recibida durante estos años.

Agradecer la labor de los revisores anónimos y editores de las revistas de investigación, así como los comentarios recibidos por los miembros del tribunal de pre-lectura que han ayudado a mejorar este trabajo.

A nivel personal, me gustaría agradecer a mi familia su apoyo incondicional y entrega durante estos años.

ÍNDICE.

Índice de Tablas.	...vii
Índice de Figuras.	...ix
Resumen.	...xiii
Abstract.	...xv
1.- INTRODUCCIÓN.	...Pg.1
2.- OBJETIVOS DE LA TESIS.	...Pg.7
3.- REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA.	...Pg.9
3.1.- Conceptos generales.	...Pg.11
3.1.1. Conceptos básicos.	
3.1.2. Ecuación de la filtración o ecuación de Richards.	
3.1.3. Modelos de caracterización del suelo.	
3.1.3.1. Modelo de Gardner.	
3.1.3.2. Modelo de Clapp y Hornberger.	
3.1.3.3. Modelo de van Genuchten-Mualem.	
3.1.4. Determinación de los parámetros del suelo. ROSETTA.	
3.2.- Integración de la ecuación de Richards.	...Pg.23
3.2.1. Introducción.	
3.2.2. Soluciones analíticas de la ecuación de Richards.	
3.2.2.1. Soluciones en estado estacionario.	
3.2.2.2. Solución en estado transitorio. Modelo de Warrick y Lomen.	
3.2.3. Soluciones numéricas de la ecuación de Richards.	
3.2.3.1. Modelos basados en Métodos de Diferencias Finitas.	
3.2.3.2. Modelos basados en Métodos de Elementos Finitos.	
3.2.3.3. HYDRUS 2D/3D.	

3.3.- Soluciones analíticas simplificadas.	...Pg.39
3.3.1. Modelo de Green-Ampt.	
3.3.2. Modelo tridimensional de Chu S.T.	
3.4.- Soluciones con condiciones de contorno variable. Evolución del charco en superficie y radio límite.	...Pg.45
3.4.1. Modelo de Wooding.	
3.4.2. Modelo de Brandt.	
3.4.3. Modelo de Bhatnagar y Chauhan.	
4.- MATERIALES Y MÉTODOS.	...Pg.51
4.1.- Solución numérica de la ecuación de Richards.	...Pg.53
4.1.1.- Fundamentos matemáticos.	
4.1.2.- Formulación de la ecuación de Richards.	
4.1.3.- Discretización de la ecuación de Richards.	
4.1.4.- Condiciones de contorno.	
4.1.5.- Estabilidad numérica y restricciones.	
4.1.6.- Diagrama de flujo.	
4.2.- Soluciones analíticas aproximadas.	...Pg.67
4.2.1.- Flujo desde una semiesfera.	
4.2.2.- Flujo desde un disco.	
4.3.- Pruebas experimentales.	...Pg.75
4.3.1.- Ensayo de filtración entre placas.	
4.3.2.- Experimentos de infiltración en campo.	
4.3.2.1. Frente de avance en superficie.	
4.3.2.2. Evolución de la zona saturada.	
5.- RESULTADOS Y DISCUSIÓN.	...Pg.83
5.1.- Validación del modelo numérico.	...Pg.85
5.1.1. Validación frente a soluciones analíticas.	
5.1.1.1. Fuente puntual.	
5.1.1.2. Fuente circular.	
5.1.2. Validación frente a otro modelo numérico. HYDRUS 2D/3D.	
5.1.3. Contraste experimental.	

5.1.3.1. Experimento de infiltración entre placas.	
5.1.3.2. Evolución del frente de avance en superficie.	
5.1.3.3. Evolución de la zona saturada en superficie.	
5.2.- Validación de las soluciones analíticas propuestas y aplicaciones.	
5.2.1. Fuente semiesférica.	...Pg.99
5.2.2. Fuente circular.	
5.2.3. Extensión de la validación a otros tipos de suelo y condiciones.	
5.2.4. Aplicación a la caracterización del suelo.	
5.3.- Evolución de la zona saturada en superficie y aplicaciones.	...Pg.115
5.3.1.- Contraste frente a otros modelos.	
5.3.2.- Estudio del radio límite.	
5.3.2.1.- Suelos del tipo Gardner	
5.3.2.2.- Suelos del tipo Clapp & Hornberger.	
5.3.2.3.- Suelos del tipo van Genuchten-Mualem.	
5.3.3.- Discusión de los resultados obtenidos para el radio límite.	
6.- CONCLUSIONES.	...Pg.133
REFERENCIAS	...Pg.139

- §•§ -

ANEJO I. Fundamentos matemáticos. ...Pg.151

I.i. Aproximación numérica a la derivada.

I.ii. Aproximación numérica a la integral.

I.ii.i. Integral a partir de su definición.

I.ii.ii. Método de Simpson.

I.ii.iii. Integrales impropias. Cuadratura de Gauss-Laguerre.

I.iii. Métodos de integración de ecuaciones diferenciales.

I.iii.i. Introducción.

I.iii.ii. Método de Euler.

I.iii.iii. Método de la serie de Taylor.

I.iii.iv. Método predictor-corrector.

I.iii.v. Método de Crank-Nicolson.

I.iv. Funciones de Bessel.

ANEJO II. Anejo a la Teoría de la Infiltración. ...Pg.165

II.i. Catálogos de los modelos de caracterización del suelo utilizados.

II.ii. Modelos empíricos.

II.iii. Teoría de la infiltración en una dimensión.

II.iii.i. Flujo horizontal.

II.iii.ii. Sorptividad.

II.iii.iii. Flujo vertical.

ANEJO III. Anejo a la caracterización de suelos. ...Pg.175

ANEJO IV. Procedimientos experimentales. ...Pg.177

IV.i. Cálculo de errores.

IV.ii. Medida del contenido de humedad.

IV.ii.i. Contenido de humedad inicial.

IV.ii.ii. Contenido de humedad en saturación.

IV.iii. Medida de la conductividad hidráulica en saturación.
Permeámetro de carga variable.

IV.iv. Medida de la textura de suelos. Densitómetro de Bouyoucos.

ANEJO V. Datos experimentales. ...Pg.189

V.i. Características de los suelos utilizados en esta tesis.

V.ii. Tablas de datos.

V.ii.i. Ensayo de infiltración entre placas.

V.ii.ii. Ensayos de infiltración en campo.

ANEXO VI. Código. ...Pg.193

VI.i. Modelo en coordenadas cartesianas.

VI.i.i. Estructura del modelo.

VI.i.ii. Código.

VI.ii. Modelo en coordenadas cilíndricas.

VI.ii.i. Fuente puntual.

VI.ii.ii. Condiciones de contorno constantes.

VI.ii.iii. Condiciones de contorno variable.

ANEXO VII. Glosario de términos. ...Pg.213

ANEXO VIII. Publicaciones científicas ...Pg.219

	Pg.
Tabla 4.1. Parámetros del suelo usados en el ejemplo de simulación.	-63-
Tabla 4.2. Parámetros medidos y estimados del suelo C-C.	-77-
Tabla 4.3. Parámetros medidos y estimados del suelo C-P.	-79-
Tabla 5.1. Parámetros usados en las simulaciones de validación del modelo numérico con la solución analítica.	-86-
Tabla 5.2. Parámetros usados en las simulaciones de validación del modelo numérico con HYDRUS 2D/3D.	-91-
Tabla 5.3. Parámetros del suelo C-C utilizados en el contraste del modelo numérico con el experimento de laboratorio.	-94-
Tabla 5.4. Parámetros del suelo C-P utilizados para el contraste del modelo numérico con los ensayos de campo.	-96-
Tabla 5.5. Parámetros utilizados en las simulaciones de validación del modelo analítico propuesto.	-100-
Tabla 5.6. Parámetros utilizados en la validación extendida del modelo analítico propuesto para fuente circular.	-106-
Tabla 5.7. Resultados del ajuste de los parámetros ($ks, \tau f$) a través del modelo analítico.	-112-
Tabla 5.8. Parámetros usados en la comparativa entre modelos de estudio de la evolución de la zona saturada.	-116-
Tabla 5.9. Comparativa del radio máximo del charco obtenido con los tres modelos.	-116-
Tabla 5.10. Resultados del radio límite para suelos representativos del tipo Gardner.	-119-
Tabla 5.11. Resultados del radio límite para suelos representativos del tipo Clapp y Hornberger.	-122-

	Pg.
Tabla 5.12. Resultados del radio límite para suelos representativos del tipo van Genuchten-Mualem.	-124-
Tabla 5.13. Valores del ajuste sobre la ecuación [5.1]	-127-
Tabla 5.14. Parámetros utilizados para el contraste entre modelos de estimación del radio límite.	-129-
Tabla 5.15. Comparativa del radio límite obtenido con los distintos modelos.	-130-
Tabla II.1. Catálogo de Mualem (1976).	-165-
Tabla II.2. Catálogo de Clapp y Hornberger (1978).	-165-
Tabla II.3. Catálogo de Carsel y Parrish (1988).	-166-
Tabla II.4. Valores obtenidos para los cuatro primeros coeficientes de la solución de Philip.	-173-
Tabla IV.1. Tamaño de las partículas según el USDA.	-185-
Tabla IV.2. Parámetros de sedimentación por buzamiento.	-187-
Tabla IV.3. Factor corrector de la densidad según la temperatura de la disolución.	-187-
Tabla V.1. Resumen de todos los parámetros medidos y estimados de los cinco suelos que se han utilizado en la tesis.	-190-
Tabla V.2. Datos del primer ensayo entre placas paralelas.	-191-
Tabla V.3. Datos del segundo ensayo entre placas paralelas.	-191-
Tabla V.4. Datos recogidos del avance del frente en ensayos de campo.	-192-
Tabla V.5. Datos recogidos del avance de la zona saturada en ensayos de campo.	-192-

	Pg.
Figura 3.1. Ejemplo de curvas características.	-13-
Figura 3.2. Modelo de Green-Ampt.	-40-
Figura 4.1. Esquema explicativo de los nodos para el análisis de la estabilidad numérica.	-62-
Figura 4.2. Ejemplo de resultados obtenidos con el modelo numérico.	-64-
Figura 4.3. Diagrama de flujo.	-65-
Figura 4.4. Experimento de filtración entre placas.	-77-
Figura 4.5. Fotografía del campo de prácticas de la ETSIAAB.	-80-
Figura 5.1. Validación del modelo numérico para una fuente puntual y superficial.	-87-
Figura 5.2. Validación modelo numérico en redistribución.	-88-
Figura 5.3. Validación modelo numérico para fuente sub-superficial.	-89-
Figura 5.4. Validación del modelo numérico para fuente circular en superficie.	-90-
Figura 5.5. Validación modelo numérico frente a HYDRUS 2D/3D.	-92-
Figura 5.6. Contraste del modelo numérico frente a experimentos. Avance del frente mojado en superficie y profundidad.	-94-
Figura 5.7. Contraste del modelo numérico frente a experimentos. Avance del frente mojado en promedio.	-95-
Figura 5.8. Contraste del modelo numérico frente a ensayos de campo. Avance del frente en superficie.	-97-
Figura 5.9. Contraste del modelo numérico frente a ensayos de campo. Avance de la zona saturada en superficie.	-98-

	Pg.
Figura 5.10. Validación del modelo analítico. Fuente semiesférica.	-100-
Figura 5.11. Validación del modelo analítico. Fuente semiesférica. Comparativa de resultados con y sin gravedad.	-101-
Figura 5.12. Validación del modelo analítico. Fuente semiesférica. Aproximación de dos términos.	-102-
Figura 5.13. Validación del modelo analítico. Fuente circular.	-105-
Figura 5.14. Desviación relativa entre los modelos de aproximación analítica para un disco superficial [4.19] y [4.20b].	-105-
Figura 5.15. Validación del modelo analítico para fuente circular de distintos radios.	-107-
Figura 5.16. Convergencia de las simulaciones al modelo analítico al aumentar la resolución espacio-temporal.	-108-
Figura 5.17. Validación extendida del modelo analítico. Colección de todas las simulaciones realizadas.	-110-
Figura 5.18. Caracterización del suelo con el modelo analítico.	-112-
Figura 5.19. Evolución de la zona saturada. Comparativa de modelos.	-117-
Figura 5.20. Evolución de la zona saturada y radio límite para suelo 'Bet Netofa Clay' del tipo Gardner a caudal $4L/h$.	-120-
Figura 5.21. Ajuste de la ecuación [5.1] para suelos del tipo Gardner.	-121-
Figura 5.22. Evolución de la zona saturada y radio límite para suelo Franco del tipo Clapp y Hornberger a caudal $2L/h$.	-122-
Figura 5.23. Ajuste de la ecuación [5.1] para suelos del tipo Clapp y Hornberger.	-123-
Figura 5.24. Ajuste de la ecuación [5.1] para suelos del tipo van Genuchten-Mualem.	-125-

	Pg.
Figura 5.25. Comparación entre las ecuaciones [5.3a]-[5.3b].	-128-
Figura I.1. Funciones de Bessel de primera especie.	-164-
Figura II.1. Definición de la Sorptividad.	-171-
Figura III.1. Ajuste entre τ_f y k_s a través del modelo analítico (método de corte de curvas).	-176-
Figura IV.1. Esquema del permeámetro de carga variable.	-182-
Figura IV.2. Obtención de k_s con el permeámetro de carga variable.	-184-
Figura IV.3. Triangulo de texturas según el USDA.	-184-
Figura IV.4. Estudio edafológico. Mezclador de muestras.	-186-
Figura IV.5. Estudio edafológico. Material utilizado.	-188-
Figura V.1. Muestras de los cinco suelos utilizados en esta tesis.	-190-

RESUMEN.

Se presenta en esta tesis un conjunto de herramientas que han sido desarrolladas con el objetivo de analizar el flujo de agua en el suelo, estudiar patrones de infiltración bajo emisores de riego por goteo, y caracterizar hidrofisicamente el suelo, de utilidad potencial para el diseño y desarrollo de los sistemas de riego localizado. Los modelos propuestos que están basados en las ecuaciones fundamentales de la filtración, han sido validados frente a soluciones analíticas conocidas y otros modelos numéricos existentes; adicionalmente, se han realizado algunos contrastes experimentales.

En primer lugar, se presenta un modelo numérico basado en la integración de la ecuación fundamental de la filtración (ecuación de Richards), capaz de simular el flujo de agua y la evolución del contenido de humedad en el suelo, bajo condiciones de contorno fijas o variables. En este sentido, el modelo permite estudiar la evolución de la zona saturada en superficie, así como su redistribución una vez finalizado el riego. Así mismo, el modelo puede estudiar la evolución de la presión en cualquier punto del sistema, y en particular en el entorno de la fuente emisora, lo que es de interés potencial en el estudio de riego sub-superficial.

En segundo lugar, se ha derivado un conjunto de expresiones analíticas bajo condiciones de simplificación asumibles del tipo Green-Ampt, para el análisis del flujo de agua en el suelo, en régimen transitorio, y desde fuentes de geometría semiesférica y circular en superficie. Estas expresiones han sido validadas con el modelo de simulación. Se considera en base a los estudios realizados que, con el reducido conjunto de parámetros fundamentales de los que depende el modelo analítico es posible realizar una caracterización simplificada del suelo. El modelo ha mostrado su idoneidad para el ajuste y estimación de sus parámetros, en base a datos experimentales obtenidos, sobre suelo real, con un infiltrómetro de base circular, conocidos los contenidos de humedad inicial y de saturación del suelo, que pueden ser medidos en laboratorio por procedimientos experimentales establecidos.

Al final de este manuscrito se presenta un estudio específico del radio máximo (radio límite, o asintótico) de la zona saturada en superficie bajo riego por goteo a caudal constante, una vez alcanzado el régimen estacionario. Se propone un modelo empírico inferido a través de simulación, y extendido a los tres catálogos de referencia que se mencionan en esta tesis. Se ha comprobado además que, este modelo se puede considerar como un caso particular del modelo analítico derivado para una fuente circular en superficie, si se desprecia el término propio a la succión en el frente (de escasa, o nula, relevancia en las condiciones de riego en régimen permanente propias del radio límite del charco), lo que confiere de cierta racionalidad a este conjunto de expresiones empíricas.

ABSTRACT.

Investigations about flow dynamics in porous medium with application to surface drip irrigation characterization and trickle irrigation systems design are presented in this thesis. The models developed are based on the fundamental equations of hydrology and hydro-physical characteristics of the soil. They were validated against other existing models and experiments.

First, it is presented a numerical model based on direct integration of Richard's equation, which is able to analyze the flow under variable boundary conditions. It is shown its capability to study phenomena of interest in trickle irrigation such as, superficial puddle evolution, redistribution and overpressure around the emitter, among others.

Secondly, it is presented an analytical model that was derived from Darcy's Law under simplifying conditions of the Green-Ampt type, regarding to circular and semi-spherical superficial sources. It depends on a small set of physical parameters. Thus, it is proposed as a tool for soil characterization.

Additionally, a study of puddle evolution and its asymptotic limit radius under surface drip irrigation is shown. A set of empirical equations for the limit puddle radius is given that are potentially useful for drip irrigation systems design.

CAPÍTULO 1:

INTRODUCCIÓN.

El aumento de la población mundial, el desarrollo socio-económico, y el cambio climático son algunos de los factores fundamentales del aumento de las necesidades hídricas a nivel global. Esto implica que, la disponibilidad de agua para el uso agrícola está cada vez más limitada, por lo que se necesitan métodos de riego que sean más eficientes.

Los métodos de riego tradicional como el riego por inundación a manta, o en menor medida el riego por surcos y aspersión se fundamentan en la aplicación de grandes cantidades de agua al suelo entre intervalos largos de tiempo. En estos casos, las pérdidas por filtración profunda o evaporación en superficie, reducen la eficiencia de los riegos. El concepto de riego por goteo es esencialmente el contrario; se suministra, con alta frecuencia, reducidas aplicaciones de volumen lo que permite un régimen más constante del contenido de humedad del suelo, favoreciendo el crecimiento de la planta; el efecto de la evaporación disminuye y puede despreciarse en la mayoría de los casos (Bresler, 1975).

El riego localizado consiste en la aplicación de agua directa y exclusivamente sobre la región de la planta. Los riegos localizados son los de mayor eficiencia potencial, ya que no se ven tan afectados por la heterogeneidad del suelo y se evita la evaporación de agua en las zonas más alejadas de la planta; sobre todo si se compara con el riego por aspersión en el que la necesaria pulverización del agua favorece especialmente su evaporación. Un manejo apropiado de estos sistemas puede suponer una eficiencia del uso del agua en torno al 95% (Payero, 2005). El centro de estudio de esta tesis es el riego localizado de bajo caudal en superficie.

El riego por goteo es un método de riego localizado que permite controlar el volumen de agua aplicado a la planta en función de su necesidad hídrica, de forma que, se reducen las pérdidas de agua por filtración profunda, escorrentía o evapotranspiración (Wu *et al*, 1979). El agua se distribuye por tuberías de polietileno con diámetro entre 25-100 mm que se denominan porta-ramales, hasta otras más finas denominadas ramales y cuyo diámetro suele estar entre 12-17 mm.

Sobre los ramales se insertan los goteros a una distancia determinada según la separación entre plantas. El agua accede a los porta-ramales típicamente desde tuberías más grandes a través de la cabeza del sistema de riego, donde se puede controlar la presión, filtrado y fertilizante del flujo de agua. Los goteros desde los que se vierte el agua a la planta pueden ser compensantes, si su caudal se mantiene dentro de un rango constante, independientemente de la presión de entrada en el ramal, o no compensantes, si su caudal aumenta con la presión existente en el interior de las tuberías.

El estudio de los patrones de filtración (evolución de la distribución del contenido de humedad del bulbo) en función del caudal aplicado para riego por goteo es importante para mejorar la eficiencia de los sistemas de riego (Thorburn *et al*, 2000), asegurar que el agua y los fertilizantes alcancen la raíz de la planta (Lubana *et al*, 2002), establecer calendarios de riego y sincronizar el patrón de humedades con las zonas en las que crecen las raíces (Kandelous y Simunek, 2010). Por otro lado, en el cultivo arbóreo (sobre todo de frutales) es aconsejable la humectación de un porcentaje determinado de suelo en el entorno de la planta, lo que requiere de una estimación previa para optimizar el número de goteros por árbol y su separación en función del caudal aplicado.

El estudio de los patrones de filtración a nivel experimental, tiene el inconveniente de que puede alterar las condiciones del suelo a la hora de efectuar las medidas, o durante la instalación, como han discutido Ayers & Watson (1977), o Thorburn *et al* (2003). Por ello, y como han reportado otros autores (Ravi *et al*, 1998) los modelos matemáticos son de gran interés a la hora de estudiar la evolución del contenido de humedad en el suelo, por su inmediatez, pero sobretodo porque no son invasivos; lo que los convierte en una herramienta útil para el desarrollo y diseño de los sistemas de riego por goteo.

Los modelos matemáticos para el estudio de la filtración de agua en el suelo se clasifican en tres grupos: analíticos, numéricos y empíricos. Los dos primeros están basados en la descripción del fenómeno de la filtración a partir de ecuaciones de base física relativas al movimiento de un fluido en un medio poroso (el suelo). El tercer grupo, representa una serie de modelos de ajuste, sobre funciones matemáticas sin fundamento físico claro, a partir de las observaciones realizadas en cada caso. Algunos modelos clásicos de este estilo son los de Kostiaikov (1932) y Holtan (1961).

Los modelos de base física, se fundamentan en la resolución de las ecuaciones de la filtración (o dinámica de fluidos en un medio poroso), es decir, la ecuación de Darcy (Darcy, 1856; Buckingham, 1907) y la ecuación de Richards (1931). Se habla de modelos analíticos cuando estas ecuaciones se pueden integrar de forma exacta; normalmente, mediante alguna simplificación sobre las condiciones iniciales o de contorno, o también sobre las funciones de caracterización del suelo asociadas a estas dos ecuaciones diferenciales. Por otro lado, en los modelos numéricos, este tipo de restricciones no son tan severas lo que permite estudiar fenómenos más complejos a través de métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales que se aproximan a la solución exacta. También, la resolución de algunas ecuaciones analíticas puede requerir de integración numérica.

Es en el contexto de los modelos de base física en el que se encuadran los avances propuestos en esta tesis.

Entre los modelos analíticos para la resolución de la ecuación de Darcy, cabe citar el modelo de Green-Ampt (1911) que es aún muy usado, a pesar de su antigüedad y de ser un modelo reducido al flujo unidireccional. Prueba de ello son los modelos más recientes desarrollados a partir de él, que permiten estudiar situaciones más complejas como son los modelos Li *et al* (1976), Flerchinger *et al* (1988) que extendió el modelo a medios estratificados, Chu (1994) que propuso un modelo de Green-Ampt tridimensional para flujo con simetría radial, o más recientemente el modelo de Vatankhah (2015), que ha propuesto una ecuación explícita del tiempo equivalente a la de Green-Ampt algo más sofisticada que la del modelo de Li *et al*.

Siguiendo esta línea, en esta tesis se presenta la resolución analítica de la ecuación de Darcy para una fuente semiesférica en superficie asumiendo hipótesis similares a las del modelo de Green-Ampt. Se han alcanzado ecuaciones similares a las del modelo de Chu, a pesar de utilizar un método de integración sensiblemente distinto. Adicionalmente, y a partir estas ecuaciones, se han derivado soluciones para una fuente circular en superficie con argumentos de base física que relacionan ambas geometrías. Este modelo ha sido validado, por comparación bajo las mismas condiciones de contorno y riego, con resultados procedentes de la integración numérica de la ecuación de

Richards, obteniendo resultados satisfactorios. El modelo se ha mostrado potencialmente útil para la caracterización de suelos

Entre las soluciones analíticas de la ecuación de Richards, también cabe citar los modelos de Philip (1969-84), el modelo de Raats (1971) y sobretodo, para los objetivos de esta tesis, las soluciones analíticas de Warrick y Lomen (1974-76) para el flujo superficial a través de una fuente puntual, circular y lineal en superficie; estas últimas, fueron utilizadas para la validación del modelo numérico desarrollado en esta tesis.

La mayoría de los modelos numéricos existentes se fundamentan en la resolución de la ecuación de Richards. Según el modo de resolución de las ecuaciones se pueden distinguir entre modelos basados en métodos de diferencias finitas, métodos de elementos finitos, y métodos de elementos finitos de contorno. Por su mayor impacto con respecto a la teoría de la filtración en el contexto de esta tesis, se aborda la revisión bibliográfica de las características principales y modelos numéricos más relevantes de los dos primeros grupos. Los modelos de elementos finitos de contorno, como por ejemplo el modelo de Pullan y Collins (1987), han resultado de mayor utilidad para el estudio de riego sub-superficial y análisis del efecto de la forma de la fuente sobre el bulbo.

Los modelos basados en los métodos de diferencias finitas fueron los primeros en ser implementados en este campo por su mayor sencillez conceptual, ya que el espacio de resolución de las ecuaciones es el mismo que el espacio físico del medio poroso. Algunos ejemplos interesantes de este grupo son el modelo de Brandt *et al* (1971), el modelo de Lafolie *et al* (1989) y el modelo de Bhatnagar y Chauhan (2008). Por su parte, los modelos basados en métodos de elementos finitos resuelven las ecuaciones en un espacio matemático distinto al espacio físico-euclídeo (espacio de Banach), también conocido como el espacio de las soluciones, por lo que son posteriores a los modelos de diferencias finitas y más sofisticados. El modelo de Simunek *et al* (2006) es el más representativo de este grupo, ya que se comercializa como un software conocido como 'HYDRUS-2D/3D' que se ejecuta en un entorno intuitivo en que facilita su uso; este modelo se ha utilizado como una vía adicional para la validación del modelo numérico propuesto.

Los modelos basados en técnicas de resolución por elementos finitos son más complejos de desarrollar, y si el fenómeno de estudio es

particularmente simple, el esfuerzo de cálculo para la resolución de algoritmos complejos en el espacio de las soluciones no está justificado. Sin embargo, cuando el sistema está condicionado por fenómenos que afectan a la dinámica del flujo como son la difusión y convección del calor, evaporación, o procesos de osmosis, aparece un acoplamiento entre la ecuación de Richards y otras ecuaciones diferenciales involucradas como son la ecuación del calor y las ecuaciones de transporte osmótico. Es en estos casos, donde los modelos de elementos finitos resultan más eficientes, ya que la solución de estas ecuaciones acopladas suele tener un menor coste computacional dentro del espacio de Banach.

Teniendo en cuenta que el objeto de estudio de esta tesis es fundamentalmente el flujo de agua bajo un único gotero superficial, y asumiendo que los procesos térmicos y osmóticos, así como la evapotranspiración, son insignificantes para el transporte de masa en los casos de nuestro interés, se ha optado por el desarrollo de un modelo de resolución de la ecuación de Richards basado en el método de las diferencias finitas. Asumiendo las condiciones de simetría propias del riego por goteo en superficie (simetría axial), la herramienta desarrollada se ha mostrado eficiente, precisa y flexible para introducir las condiciones iniciales y de contorno de interés. El modelo propuesto ha sido validado con respecto a las soluciones analíticas de Warrick y Lomen antes mencionadas, y también frente a otro modelo numérico HYDRUS 2D/3D, bajo diferentes condiciones iniciales, de contorno y riego, obteniendo resultados satisfactorios. Adicionalmente, se ha contrastado frente a experimentos. Este modelo numérico se ha utilizado para validar las expresiones analíticas propuestas, mencionadas con anterioridad y que se han deducido a partir de la ecuación de Darcy.

El programa desarrollado permite introducir condiciones de contorno constantes o variables, con capacidad para estudiar aspectos del riego por goteo que demandan una mayor atención como son la redistribución, sobrepresión o evolución de la zona saturada en superficie. En el análisis de este último punto, el modelo ha mostrado su superioridad frente a otros modelos existentes, como por ejemplo los modelos de Brandt (1971) o Lafolie (1989); por ello, se ha utilizado como herramienta para el estudio del avance de la zona saturada en superficie en función del caudal aplicado sobre los distintos tipos de suelo de los tres catálogos de referencia: Mualem (1976), Clapp y

Hornberger (1978), y Carsell y Parrish (1988). Como resultado de este estudio se ha inferido un modelo empírico que determina el radio máximo del charco (radio límite asintótico en régimen permanente), en función del caudal, para suelos de estos tres catálogos de referencia.

El uso de agua en riegos supone el 90% del consumo a nivel global (Bates *et al*, 2008). Paralelamente, y debido al cambio climático y crecimiento de la población mundial se espera un aumento de las necesidades hídricas a corto y medio plazo, que puede suponer un incremento del 14% hasta el 2030 según Naglic *et al* (2014). Por ello, es necesario seguir avanzando en el desarrollo de sistemas de riego más eficientes que garanticen la productividad agraria, con el menor impacto posible sobre el medio ambiente. Este hecho, está intrínsecamente ligado a un mayor conocimiento de la dinámica del flujo de agua y sus fertilizantes en el suelo. A pesar de que existen numerosos modelos matemáticos (como los ya mencionados), así como avanzadas técnicas experimentales para el estudio de la evolución y avance del bulbo en el suelo, la complejidad del fenómeno, unido a las limitaciones existentes para la caracterización del suelo hace que todavía se requieran avances en estos aspectos.

Por todo ello, en esta tesis se presenta un modelo numérico basado en la resolución de la ecuación de Richards que ha mostrado su idoneidad para el estudio de diversos aspectos de interés en el riego por goteo superficial. Adicionalmente, se presenta un modelo analítico derivado desde la ecuación de Darcy que aproxima con bastante precisión y bajo ciertas condiciones asumibles en riego por goteo superficial, la evolución del caudal y volumen infiltrado en función del tiempo. El modelo analítico se ha mostrado como una herramienta con potencial para la caracterización del suelo debido al reducido número de parámetros del medio de los que depende; en este sentido, se propone un procedimiento de caracterización del suelo a través del mismo. Finalmente, se ha profundizado en el estudio de la evolución de la zona saturada en superficie. Como consecuencia, se presenta un modelo empírico inferido de las simulaciones realizadas con el código propuesto que puede ser de utilidad para el desarrollo y diseño de riegos.

Los resultados obtenidos y presentes en esta tesis están enfocados a potenciar el avance en el desarrollo y modelización de sistemas eficientes de riego, de aplicabilidad a la agronomía.

CAPÍTULO 2:

OBJETIVOS DE LA TESIS.

Teniendo en cuenta el estado actual de los avances en este campo de investigación, así como las necesidades expuestas en el Capítulo de Introducción, los esfuerzos de esta tesis se han dirigido a cubrir el siguiente objetivo general:

- Proporcionar un conjunto de herramientas para el estudio del flujo de agua en el suelo desde emisores de riego por goteo, y la caracterización hidrofísica del mismo, con aplicación al diseño y gestión de los sistemas de riego por goteo.

Para ello, se han abordado los siguientes objetivos específicos:

1.- Desarrollo de un código para la integración numérica de la ecuación de la filtración (ecuación de Richards) en tres dimensiones, adaptado al riego por goteo. El programa debe ser capaz de estudiar fenómenos de interés en el diseño de riegos como son el avance de la zona saturada en superficie (condiciones de contorno variables), la evolución del bulbo, la redistribución y la sobrepresión, entre otros.

2.- Validación del modelo numérico a través de tres diferentes vías: las soluciones analíticas conocidas de Warrick y Lomen (1974-76) bajo sus propias restricciones, otro modelo numérico contrastado (HYDRUS-2D/3D) en condiciones de riego y suelo más generales, y por último, ensayos experimentales.

3.- Desarrollo de un modelo analítico en régimen transitorio, a partir de condiciones asumibles de simplificación y aplicable a todo tipo de suelos. Este modelo debería depender de un reducido número de parámetros conmensurables por procedimientos establecidos. La validación del modelo analítico se llevará a cabo por comparación con resultados obtenidos a través del modelo numérico.

4.- Propuesta de un método para la caracterización de suelos basado en el reducido grupo de parámetros relativo al modelo analítico, y análisis de su precisión en el ajuste de los mismos.

5.- Estudio de la evolución de la zona saturada en superficie para el riego por goteo, a partir de las herramientas desarrolladas. Propuesta de un grupo de expresiones para el radio máximo (radio límite asintótico) inferidas de los resultados de simulación, con validez extendida para distintos tipos de suelo con independencia de sus funciones de caracterización, y aplicabilidad al diseño de los sistemas de riego y emplazamiento de goteros.

CAPITULO 3:

REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA.

3.- REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA.

3.1.- Conceptos generales.

3.1.1. Conceptos básicos.

3.1.2. Ecuación de la filtración o ecuación de Richards.

3.1.3. Modelos de caracterización del suelo.

3.1.3.1. Modelo de Gardner.

3.1.3.2. Modelo de Clapp y Hornberger.

3.1.3.3. Modelo de van Genuchten-Mualem.

3.1.4. Determinación de los parámetros del suelo. ROSETTA.

3.2.- Integración de la ecuación de Richards.

3.2.1. Introducción.

3.2.2. Soluciones analíticas de la ecuación de Richards.

3.2.2.1. Soluciones en estado estacionario.

3.2.2.2. Solución en estado transitorio. Modelo de Warrick y Lomen.

3.2.3. Soluciones numéricas de la ecuación de Richards.

3.2.3.1. Modelos basados en Métodos de Diferencias Finitas.

3.2.3.2. Modelos basados en Métodos de Elementos Finitos.

3.2.3.3. HYDRUS 2D/3D.

3.3.- Soluciones analíticas simplificadas.

3.3.1. Modelo de Green-Ampt.

3.3.2. Modelo tridimensional de Chu S.T.

3.4.- Soluciones con condiciones de contorno variable. Evolución del charco en superficie y radio límite.

3.4.1. Modelo de Wooding.

3.4.2. Modelo de Brandt.

3.4.3. Modelo de Bhatnagar y Chauhan.

- §•§ -

Este capítulo se ha enfocado con el objetivo de contextualizar el interés y los avances obtenidos en la tesis. En la primera sección se introducen algunos conceptos generales de la teoría de infiltración que son transversales a todo el manuscrito, como las ecuaciones fundamentales, los modelos de caracterización del suelo, y algunos métodos de estimación de sus parámetros, como ROSETTA (Schaap *et al*, 2001), que se han utilizado en esta tesis.

En la Sección 3.2 se introducen los modelos de integración de la ecuación de Richards más relevantes. Se presentan en apartados independientes los modelos de Warrick y Lomen (1974-76), y HYDRUS-2D/3D de Simunek *et al* (2006), que han sido utilizados para la validación del modelo numérico propuesto en esta tesis.

En la Sección 3.3 se presenta una revisión del modelo de Green-Ampt, centrando una mayor atención en el modelo tridimensional de Chu S.T. (1994). Las expresiones derivadas de la ecuación de Darcy que se presentan en el próximo capítulo, y de utilidad potencial para la caracterización del suelo, guardan una estrecha relación con los contenidos expuestos en esta sección.

Se ha reservado la última sección a la revisión de los modelos más relevantes para el estudio de la zona saturada en superficie; esta característica del riego es de especial interés para el diseño de sistemas de riego por goteo en superficie.

3.1.- CONCEPTOS GENERALES.

3.1.1. Conceptos básicos.

Se supone un volumen de control diferencial (dV) en el régimen de la macro-escala. Se consideran todos los efectos de un medio poroso, es decir, cada elemento de suelo está constituido por una parte sólida, con poros interconectados de ubicación y tamaño estocástico, que eventualmente pueden estar llenos de agua o aire.

Contenido de humedad.

Cada elemento diferencial de volumen de suelo contiene, para cada instante de tiempo, una determinada cantidad de agua (dV_{H_2O}) que, por unidad de volumen, vamos a definir con la variable adimensional $\theta(x, y, z, t)$. Esto es:

$$\theta(x, y, z, t) = \frac{dV_{H_2O}}{dV} < 1 \quad [3.1]$$

Caudal.

Llamamos caudal, al volumen de agua que atraviesa una superficie de control por unidad de tiempo. Es una magnitud escalar con unidades de $[cm^3/min]^1$ que puede determinarse como la integral de cada elemento de sección diferencial por la componente de la velocidad eficaz normal a la misma:

$$q = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad [3.2]$$

La velocidad eficaz es la velocidad que tendría el agua si no se moviese por un espacio en parte ocupado por la matriz porosa. La velocidad real en el medio poroso es por tanto mayor que la velocidad eficaz.

Infiltración.

Al proceso de entrada del agua en el suelo se le conoce como infiltración. Se distingue entre:

Infiltración instantánea (i), velocidad eficaz a la entrada del suelo $[cm/min]$. En tres dimensiones corresponde al caudal infiltrado (q_i).

¹ Si no se indica lo contrario, utilizaremos a lo largo de esta tesis las siguientes unidades:
 $[L] = cm$; $[T] = min$; $[M] = g$.

Infiltración acumulada (I), altura (o volumen por unidad de superficie) de agua que infiltra [cm]. En tres dimensiones corresponde al volumen infiltrado (V_i).

La relación que existe entre ambos conceptos es:

$$I = \int i dt \Leftrightarrow i = \frac{dI}{dt} \quad [3.3a]$$

$$V_i = \int q_i dt \Leftrightarrow q_i = \frac{dV_i}{dt} \quad [3.3b]$$

Ecuación de continuidad.

La diferencia entre el agua que entra y sale de cada elemento diferencial produce una modificación del contenido de humedad que considerando la densidad del agua constante y la matriz del suelo rígida es igual a:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad [3.4]$$

Donde el signo menos refiere que, para divergencias positivas, el caudal de agua va hacia afuera, por lo que el volumen de control se vacía.

Ecuación de Darcy.

Ley empírica que describe el flujo de agua a través de un medio poroso como el producto de una función dependiente del contenido de humedad, conocida como conductividad hidráulica ($k(\theta)$) y el gradiente de un potencial H (Darcy y Buckingham, 1856-1907). Matemáticamente se escribe²:

$$\vec{v} = -k\vec{\nabla}H \quad [3.5]$$

La función conductividad hidráulica tiene unidades de velocidad [cm/min]. La función H es en realidad un potencial por unidad de peso, por lo que tiene unidades de longitud [cm]:

$$H = h + z \quad [3.6]$$

Las magnitudes h (potencial de capilaridad, potencial de presión en saturación, o potencial matricial en condiciones de sub-saturación), y z

² Notar que la velocidad tiene la dirección del gradiente de potencial. Como la conductividad hidráulica es definida positiva, el signo negativo delante de esta ecuación implica que la velocidad tiene el sentido de la disminución del potencial $H(x,y,z)$.

(cota o potencial gravitatorio) representan también un potencial por unidad de peso [cm]³.

El potencial matricial como la función conductividad, depende del suelo y de su contenido de humedad. Frecuentemente, y sobre todo en suelos de poros finos, tanto $k(\theta)$ como $h(\theta)$ están sujetas a fenómenos de histéresis, lo que significa que para un mismo valor de θ estas funciones toman valores distintos en fase de humectación y desecación. La Figura 3.1 representa estas dos funciones en fase de humectación para una simulación después de 60 minutos de riego sobre un suelo arenoso del catálogo de referencia de Carsel y Parrish (1988) para un contenido de humedad inicial asumido de $\theta_0 = 0.1$. Se pueden consultar el resto de los parámetros de este suelo en el Anejo II.

Figura 3.1. Curva de retención y conductividad hidráulica para suelo arenoso del catálogo de referencia de Carsel y Parrish (1988).

³ Las dos magnitudes son negativas y disminuyen con la profundidad

Difusividad hidráulica.

Para expresar la ecuación de Darcy en términos del gradiente del contenido de humedad, en lugar del gradiente de potencial matricial, se suele expresar la capacidad del suelo para el transporte de masa en términos de la difusividad hidráulica $D(\theta)$ [cm²/min]. La relación entre estas dos magnitudes es:

$$k(\theta) = D(\theta) \frac{d\theta}{dh} = C(\theta) \cdot D(\theta) \quad [3.7]$$

Lo que permite expresar la ecuación [3.5] como:

$$\vec{v} = -k\vec{\nabla}(h + z) = -k \left(\frac{dh}{d\theta} \vec{\nabla}\theta + \vec{\nabla}z \right) = -(D\vec{\nabla}\theta + k\hat{k}) \quad [3.8]$$

A la pendiente de la curva de retención $\theta(h)$ de humedad, también se la conoce como capacidad específica del suelo [cm⁻¹]:

$$C(\theta) = \frac{d\theta}{dh} \quad [3.9]$$

3.1.2. Ecuación de la filtración o ecuación de Richards.

La ecuación de Richards es la ecuación fundamental para el estudio del flujo de agua en el suelo. Introduciendo la ecuación de Darcy en la de continuidad se deriva la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial t} &= \vec{\nabla} \cdot (k(\theta) \vec{\nabla}(h + z)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k(\theta) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(\theta) \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(\theta) \frac{\partial h}{\partial z} \right) \\ &\quad + \frac{\partial k(\theta)}{\partial z} \quad [3.10a]\end{aligned}$$

Ecuación escalar con dimensiones de frecuencia [min^{-1}]. Considerando los siguientes operadores podemos expresar la ecuación en coordenadas cilíndricas como:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad ; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad [OP. 3.1]$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(k(\theta) \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{k(\theta)}{r} \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(\theta) \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \frac{\partial k(\theta)}{\partial z} \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(k \frac{\partial h}{\partial \varphi} \right) \quad [3.10b]\end{aligned}$$

Y asumiendo simetría axial ($\partial/\partial \varphi = 0$) la expresión se simplifica a:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(k(\theta) \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{k(\theta)}{r} \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(\theta) \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \frac{\partial k(\theta)}{\partial z} = C(\theta) \frac{\partial h}{\partial t} \quad [3.10c]$$

La simetría existente en el riego por goteo en superficie⁴ hace más conveniente el uso de esta expresión ya que solo depende de dos variables espaciales (r, z), reduciendo el esfuerzo de cálculo al integrar numéricamente. Se ha utilizado la capacidad específica del medio para expresar la igualdad [3.10c] en función de la incógnita h . La forma de la función conductividad hidráulica determina las soluciones que pueda adquirir esta ecuación.

⁴ Mientras no haya superposición de bulbos.

3.1.3. Modelos de caracterización del suelo.

La relación entre el contenido de humedad y el potencial matricial $\theta(h)$ se conoce como curva de retención. Para caracterizar el suelo es necesario conocer también la relación existente entre el contenido de humedad y la función conductividad hidráulica $k(\theta)$. Como esta relación es más compleja de determinar experimentalmente, se suele estimar a través de la curva de retención aplicando conceptos de semejanza hidráulica. Como es sabido, en un tubo capilar la conductividad es proporcional al cuadrado de su radio, y siendo el potencial de presión correspondiente a los meniscos inversamente proporcional al radio, se puede concluir que la conductividad hidráulica es inversamente proporcional al cuadrado del potencial matricial.

Por otro lado, también se sabe que para un potencial matricial determinado existe un límite del tamaño del poro a partir del cual los poros están vacíos; estando la conductividad hidráulica tan solo condicionada a los poros o capilares que están llenos de agua, es decir, a los menores de este radio límite. La heterogeneidad de tamaños y la tortuosidad del recorrido dificultan la aplicación de estas simplificaciones; a pesar de ello, existen algunas expresiones para la conductividad hidráulica derivadas de la curva de retención.

A continuación, se exponen los tres modelos que relacionando estas tres magnitudes, se han propuesto para la caracterización del suelo; estos tres modelos son transversales a los resultados obtenidos en esta tesis.

3.1.3.1. Modelo de Gardner.

Nace de la necesidad de encontrar soluciones analíticas de la ecuación de Richards. En este sentido, Gardner (1958) propuso la siguiente relación entre la conductividad hidráulica y el potencial matricial que permite transformar la ecuación de Richards en una ecuación diferencial en derivadas parciales lineal con soluciones analíticas bajo determinadas condiciones de contorno:

$$k(\theta) = k_s \exp(\alpha h(\theta)) \quad [3.11a]$$

Donde k_s [cm/min] es la conductividad hidráulica en saturación mientras que α [cm⁻¹] es una constante que depende del medio poroso.

Asumiendo que $\partial k / \partial \theta = \kappa$ donde κ es una constante con unidades de velocidad, la curva de retención resulta de la forma:

$$\theta = \theta_s - \frac{k_s}{\kappa} (1 - \exp(\alpha h)) \quad [3.11b]$$

3.1.3.2. Modelo de Clapp y Hornberger.

Este modelo fue sugerido por primera vez por Campbell (1974) dada la conveniencia de usar expresiones sencillas que, aunque no ofrecieran la posibilidad de encontrar soluciones analíticas de la ecuación de Richards, permitieran ajustes a las observaciones en una realidad del suelo compleja; la ecuación de Richards se debe resolver por métodos numéricos en este caso:

$$h = h_s \left(\frac{\theta_s}{\theta} \right)^b \quad [3.12a]$$

$$k = k_s \left(\frac{\theta}{\theta_s} \right)^{2b+3} \quad [3.12b]$$

Donde h_s y θ_s son, respectivamente, el potencial matricial y contenido de humedad en saturación. El parámetro b se calcula empíricamente para los distintos tipos de suelo siendo mayor para los suelos más arcillosos. Clapp y Hornberger (1978) realizaron un detallado estudio experimental para 1446 muestras de suelo procedentes de 34 sitios de Estados Unidos, llegando a determinar los parámetros de la anterior ecuación para una clasificación de 11 diferentes tipos de suelos. Se considera un buen ajuste a las características de los suelos reales (Clapp y Hornberger, 1978) para valores de b en el intervalo (0.17,13.6).

3.1.3.3. Modelo de van Genuchten-Mualem.

Probablemente el modelo de caracterización del suelo más usado es el de M.T. van Genuchten y Y. Mualem (van Genuchten 1980, Mualem 1976), el cual sigue la descripción parametrizada:

$$\theta^* = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left(1 + (-\alpha \cdot h \cdot (h < 0))^n \right)^{-m} \quad [3.13a]$$

$$k(\theta^*) = k_s \cdot \theta^{*\lambda} \left[1 - \left(1 - \theta^{*\frac{1}{m}} \right)^m \right]^2 \leq k_s \quad [3.13b]$$

Donde θ^* es el contenido de agua normalizado a valores entre $[0,1]$. La expresión ($h < 0$) se refiere a una variable lógica cuyo valor es: (1 *true*, 0 *false*). La constante de escala macroscópica de capilaridad α es un parámetro relacionado con el tamaño del poro introducido por vez primera en el modelo de Gardner. En la expresión de Brooks y Corey (1964) de la que posteriormente se derivaron las funciones de van Genuchten-Mualem, representa la inversa de la tensión necesaria para la entrada de aire en el suelo poroso, por lo que α es grande para suelos en los que el agua se infiltra fácilmente (suelos arenosos). Por otro lado, n es un parámetro relativo a la distribución de las cavidades porosas en el suelo. El contenido de agua de cada elemento de control se considera entre los límites de residual y en saturación: $[\theta_r, \theta_s]$. Finalmente, el parámetro λ está asociado a la conectividad de los poros y normalmente si no se conoce se aproxima a $\lambda = 1/2$. En el modelo de van Genuchten-Mualem, el exponente m se suele considerar como una variable dependiente: $m = 1 - 1/n$.

3.1.4. Determinación de los parámetros del suelo. ROSETTA.

Los parámetros relativos a las expresiones de caracterización del suelo vistos en el apartado anterior han sido estimados para diversas clases de suelos, existiendo bases de datos que dan valores de referencia según su textura. Los catálogos de referencia tradicionales asociados a los tres modelos que hemos visto son Mualem (1976) para el caso [3.11], Clapp y Hornberger (1978) para [3.12] y Carsel y Parrish (1988) sobre las expresiones [3.13]. Los tres catálogos han sido confeccionados en base al estudio de una gran cantidad de muestras de los distintos tipos de suelo que configuran cada uno de ellos. El ajuste de las medidas experimentales a las funciones $k(\theta)$ y $h(\theta)$ para cada tipo de suelo, ha proporcionado los valores de los parámetros que recogen las tres tablas.

El problema de la caracterización del suelo (refiriéndonos en este contexto a la estimación de sus parámetros) es inherente al estudio del flujo sobre el medio poroso. La dificultad de este problema, como han apuntado Fernández-Gálvez y Simmonds (2006), crece con el número de parámetros asociados a cada modelo. Así, los suelos en el contexto de Clapp y Hornberger, o Gardner que tan solo dependen de tres y cuatro parámetros respectivamente, son más sencillos de caracterizar, en principio, que los de van Genuchten-Mualem que contienen un total de seis constantes⁵. La ventaja de la sobre-parametrización es que en muchas ocasiones las curvas, al ser más complejas, se ajustan mejor a la realidad observada en el suelo, razón por la que en muchos análisis se impone el modelo de van Genuchten-Mualem; aunque puede suceder que juegos de parámetros distintos reproduzcan las mismas observaciones, lo que está en contra de la racionalidad del modelo.

Otro factor a tener en cuenta es, si los parámetros tienen un significado físico bien establecido que los permita medir directamente en laboratorio. En este sentido, los contenidos de humedad (θ_r, θ_s) la conductividad hidráulica en saturación k_s , o incluso la constante de escala macroscópica de capilaridad α , tienen un significado físico claro que permite su medida directa en laboratorio bajo dispositivos experimentales sensibles a su valor. Por el contrario, parámetros como el exponente b en el modelo de Clapp y Hornberger, o (λ, n) en el contexto de van Genuchten-Mualem aunque tienen un sentido ligado a factores cualitativos del medio, como son la porosidad y la conectividad

⁵ Excluimos de esta lista al contenido inicial de agua en el suelo ya que es una condición inicial cambiante según las circunstancias y no una característica del propio suelo.

de las cavidades porosas, no son cuantificables desde el punto de vista de una medida experimental. Por ello, son necesarios métodos de ajuste sobre las funciones $k(\theta)$ y $h(\theta)$ para determinar estos parámetros, como han reportado Clapp y Hornberger (1978), van Genuchten (1980), Cosby *et al* (1984), Klute (1986), o Leij y van Genuchten (1999).

Para evitar la laboriosa (y costosa en recursos) vía experimental de obtención de estos parámetros existen otros métodos matemáticos de estimación de los mismos que se clasifican en dos grupos: métodos de estimación por funciones de pedo-transferencia, y métodos basados en la teoría de fractales sobre el medio poroso.

El primer grupo utiliza las bases de datos existentes referentes a características del suelo fácilmente medibles como son su textura, densidad aparente, o contenido de materia orgánica, para inferir el valor de los parámetros en los modelos de caracterización del suelo. Las funciones de pedo-transferencia simplemente establecen una correspondencia entre las características del terreno observables y los parámetros de las curvas $k(\theta)$ y $h(\theta)$. Algunos ejemplos⁶ de este estilo son los modelos de van Genuchten y Leij (1992), Rawls *et al* (2001) o Minasny y McBratney (2007), aunque probablemente el máximo exponente de todos ellos sea el modelo ROSETTA de Schaap *et al* (2001) que ha sido utilizado en esta tesis. Todos estos modelos tienen un alto grado de empirismo (Giménez *et al*, 1997), y ninguna base física aparente, ya que tan solo se basan en relacionar, con una mayor o menor complejidad matemática, un conjunto de características observables con los parámetros de caracterización del suelo.

El segundo grupo lo conforman los métodos basados en la representación fractal del medio poroso, y es una alternativa con mayor base física. Asumiendo que la estructura del suelo se puede representar como un conjunto de partículas y cavidades irregulares (patrón) que se repite a lo largo del espacio algunos autores han utilizado la teoría de fractales para la modelización del suelo y estimación de sus parámetros; así, se pueden estimar los parámetros asociados a la porosidad del suelo y conectividad de las cavidades porosas (λ, n), que por otro lado, son los peor controlados por los métodos experimentales tradicionales.

⁶ El ejemplo más simple de este grupo de métodos (que no conlleva cálculo matemático alguno) son las tablas de Carsel y Parrish (1988) que hacen corresponder a cada grupo textural de suelos un conjunto de parámetros bien definidos de las expresiones de van Genuchten-Mualem.

Algunos ejemplos de este tipo de métodos son Bird *et al* (2000) que incluye como un caso particular al modelo de Brooks y Corey (1964), o Ghanbarian-Alavijeh *et al* (2010) que es capaz de estimar los parámetros del modelo de van Genuchten-Mualem. Este último, ha reportado, para los suelos analizados, una precisión superior a ROSETTA sobre todos los parámetros a excepción de α .

Modelo de Schaap. ROSETTA.

ROSETTA (Schaap *et al*, 2001) es un programa abierto que por funciones de pedo-transferencia permite estimar los parámetros de caracterización del suelo, a partir de información observable del mismo como su densidad aparente y textura.

Schaap *et al* (2001) desarrollaron una herramienta que estima los parámetros de van Genuchten-Mualem para un suelo del que se tiene la información de su textura, densidad aparente y opcionalmente uno o dos puntos de la curva de retención. Para ello, utilizaron modelos de análisis de red neuronal sobre funciones de pedotransferencia, que son simplemente funciones que generan valores para propiedades físicas del suelo a través de otros parámetros empíricos como los antes mencionados.

Para confeccionar las funciones de pedotransferencia utilizaron información empírica de 2134 muestras de suelos procedentes de Europa y Norte América, sobre los que se midieron 20574 puntos $\theta(h)$ de su curva de retención y 4117 puntos de su curva de conductividad hidráulica $k(h)$. Para la obtención de esta información utilizaron bases de datos como UNSODA (Leij *et al*, 1996; Nemes *et al*, 2001).

Estos datos fueron ajustados a las funciones [3.13a-b] que describen las curvas de caracterización según el modelo de van Genuchten-Mualem, obteniendo las funciones de pedotransferencia que fueron calibradas y optimizadas por métodos de análisis neuronal. Un análisis más exhaustivo se ha presentado en Schaap *et al* (1998), y Schaap y Leij (1998-2000).

3.2.- INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS.

3.2.1. Introducción.

Los modelos de infiltración más reconocidos son los basados en la ecuación Richards⁷ [3.10] cuyas soluciones pueden ser analíticas, analíticas simplificadas o numéricas dependiendo de las hipótesis planteadas y/o condiciones de contorno:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \vec{\nabla}(k(\theta)\vec{\nabla}h(\theta)) + \frac{\partial k(\theta)}{\partial z} \quad [3.10]$$

En ocasiones, sobre todo para la resolución analítica del problema en tres dimensiones, se utiliza el siguiente cambio de variable, conocido como la transformación de Kirchhoff, utilizado por primera vez para el estudio de la filtración de agua en el suelo por Gardner (1958):

$$\phi(h) = \int_{-\infty}^h k(\alpha) d\alpha \quad [3.14]$$

Donde ϕ [cm²/min] se conoce como el potencial del flujo matricial, dando lugar a la siguiente ecuación en términos de la difusividad hidráulica:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \nabla^2 \phi + D \frac{\partial k}{\partial z} \quad [3.15]$$

Ecuación que bajo ciertas condiciones para la función D (o k) puede ser lineal⁸. Carslaw y Jaeger (1959) en el contexto de la difusión del calor obtuvieron soluciones de esta ecuación para funciones difusividad del estilo [3.11].

Para resolver la ecuación de Richards se necesita la siguiente información:

1.- Condiciones de contorno relativas a la cantidad de agua que aportamos desde la superficie, o en profundidad en el caso de riego sub-

⁷ Recordar que en nuestra formulación de la ecuación de Richards estamos tomando el eje Z positivo hacia arriba.

⁸ Una ecuación diferencial es lineal, si la incógnita y todas sus derivadas están multiplicadas por funciones conocidas que no dependen implícitamente de la incógnita (ni de sus derivadas).

superficial. Ya sea en términos de contenido de humedad $\theta(x_0, y_0, z_0, t)$, o del potencial de flujo $\phi(x_0, y_0, z_0, t)$.

2.- Una condición inicial para todos los elementos de control: $\theta(x, y, z, t_0) = \theta_0$ [$\phi(x, y, z, t_0) = \phi_0$].

3.- El conocimiento de las funciones conductividad $k(\theta)$ (o difusividad) y potencial de capilaridad $h(\theta)$.

Normalmente las condiciones de contorno e iniciales son seleccionadas en función del problema a analizar. Según las características del sistema, y los valores que tomemos para las funciones $k(\theta)$ y $h(\theta)$, la solución del problema puede ser analítica o numérica.

Con todo ello, algunas limitaciones importantes se han discutido en la bibliografía para la aplicabilidad de la ecuación de Richards sobre problemas reales de infiltración (Philip, 1969) como son:

1.- La ecuación de la filtración no tiene en cuenta el tamaño de los coloides, así como su posición relativa en el medio y el movimiento de los mismos.

2.- La ecuación de Richards no tiene en cuenta el flujo de aire en el suelo y lo posibles cambios de presión que este produce.

3.- Tampoco tiene en cuenta el efecto térmico que puede ser importante, sobretodo cerca de la superficie, ya que afecta a procesos de evapotranspiración (que tampoco contempla), así como en procesos largos de infiltración o redistribución.

4.- Efectos fuente o sumidero, producidos por ejemplo por raíces o material orgánico en el suelo no están incluidos en este modelo.

5.- En caso de existir caminos preferenciales o macro-poros, su efecto en el flujo no está incluido en este modelo.

Igualmente, tampoco se consideran diferencias electrolíticas de unos puntos a otros que obligarían a introducir los gradientes del potencial osmótico. Tampoco hay que olvidar que la validez de la ecuación de Darcy (y por tanto la de Richards) se limita al flujo en régimen laminar, por lo que filtraciones a altas presiones o velocidades en las que se

alcance localmente la turbulencia no se pueden abordar con la ecuación de Richards a menos que se incluyan sumandos correctores.

La ecuación de Richards puede resolverse en términos del contenido de humedad θ o del potencial matricial h . En caso en el que exista una capa de agua superficial de altura no despreciable, o se quiera estudiar el efecto de la sobrepresión en riego subsuperficial, la resolución en términos de h es más adecuada. En el resto de los casos, puede ser más recomendable resolver esta ecuación a través del contenido de humedad.

En general, el uso de la ecuación de Richards ha estado enfocado mayoritariamente al estudio de problemas de infiltración. Existen comparativamente pocos estudios de filtración o redistribución realizados a través de esta ecuación.

3.2.2. Soluciones analíticas de la ecuación de Richards.

La mayor parte de las soluciones analíticas de la ecuación de Richards que se han alcanzado con éxito dependen de la expresión de Gardner para la caracterización del suelo, ecuación [3.11], la cual simplifica significativamente la ecuación diferencial, pudiéndose transformar en una ecuación lineal en muchos casos.

Las ventajas de las soluciones analíticas de la ecuación de Richards son su bajo coste computacional y exactitud, si son conocidos los parámetros del suelo, y siempre que se cumplan las condiciones de simplificación asumidas.

Por razones de simplicidad, la mayor parte de soluciones analíticas existentes son para régimen estacionario, es decir, cuando se cumple que $\partial\theta/\partial t = 0$. Este tipo de soluciones son una aproximación válida cuando el tiempo de riego es suficientemente largo como para considerar que el contenido de humedad de cada elemento de volumen del bulbo permanece constante. Por su parte, en régimen transitorio, se han obtenido las soluciones de Warrick y Lomen para funciones de caracterización del tipo Gardner [3.11]. Esta solución se detallará a continuación, ya que se han utilizado para validar el código presentado en esta tesis. Algunos autores (Pullan, 1990) conciben un tercer grupo de soluciones en esta clasificación, que serían las soluciones analíticas cuasi-lineales, de las cuales el máximo exponente son las soluciones analíticas de Philip (1969-1984). Sin embargo, y teniendo en cuenta que no dejan de ser soluciones en estado estacionario, se han incluido como parte de este apartado.

3.2.2.1. Soluciones en estado estacionario.

Los modelos más sencillos de resolución analítica de la ecuación [3.10] están basados en asumir que el contenido de humedad para cada punto no varía con el tiempo. Bajo estas condiciones y utilizando la transformada de Kirchhoff, la ecuación de Richards se simplifica como:

$$0 = \nabla^2 \phi + \frac{\partial k}{\partial z} \quad [3.16]$$

Estas condiciones solo se ajustan a la realidad para los casos límite en los que el tiempo de riego es muy corto (tiende a cero), o muy largo

(tiende a infinito). Entre las soluciones analíticas estacionarias para tiempos cortos de riego cabe citar el modelo de Clothier y Scotter (1982), sin embargo, son por su interés, los modelos en régimen estacionario para tiempos largos son los más utilizados y contrastados.

Utilizando las ecuaciones [3.11] y [3.16] Raats (1971) alcanzó una forma lineal de la ecuación de Richards en régimen estacionario para el potencial de flujo matricial. Considerando una fuente puntual en superficie de caudal aplicado constante ($q = cte$), el potencial de flujo matricial [cm^2/min] para todos los puntos del medio semi-infinito es:

$$\phi(r^*, z^*) = \frac{\alpha q}{4\pi} \left(\frac{1}{\rho^*} \exp(z^* - \rho^*) - \exp(2z^*) \cdot (z^* + \rho^*) \cdot \int_r^\infty \frac{e^{-\omega}}{\omega} d\omega \right) \quad [3.17]$$

Donde se han utilizado variables adimensionales de las coordenadas cilíndricas (r^*, z^*), y el radio auxiliar: $\rho^{*2} = r^{*2} + z^{*2}$. Una vez obtenido ϕ , y por tanto $k(h)$ (ecuación [3.14]), el cálculo del contenido de humedad para cada punto es directo teniendo en cuenta la aproximación $\partial k / \partial \theta = \kappa$ según la expresión:

$$\theta(h) = \theta_s - \frac{k_s}{\kappa} (1 - \exp(\alpha h)) \quad [3.11b]$$

Durante estos años P.A.C.Raats también publicó soluciones en estado estacionario para el flujo de una fuente lineal, modelo extendido a surcos en superficie (Raats, 1970), y el de una fuente puntual enterrada a cierta profundidad (Raats, 1972), aplicable al riego sub-superficial.

Posteriormente, Philip (1984) partiendo de la ecuación para el flujo estacionario [3.16] y las mismas aproximaciones mencionadas en el modelo de Raats, derivó las siguientes expresiones explícitas para el tiempo de viaje de una partícula desde la fuente en superficie y profundidad:

$$t^*(0, z^*) = \frac{1}{2} (z^*)^2 - z^* + \ln(1 + z^*) \quad [3.18a]$$

$$t^*(r^*, 0) = 2 \left(\exp(r^*) \left(1 - r^* + \frac{1}{2} (r^*)^2 \right) - 1 \right) \quad [3.18b]$$

Con los parámetros de referencia:

$$t^* = \frac{\alpha^3 q}{16\pi\Delta\theta} t; \quad z^* = \frac{\alpha z}{2}; \quad r^* = \frac{\alpha r}{2} \quad [REF.3.1]$$

El modelo es en régimen estacionario ya que evalúa el tiempo que tardaría una partícula en alcanzar el punto de referencia (r, z) saliendo desde la fuente. La ecuación diferencial que resolvió Philip para obtener esta solución pertenece al grupo de ecuaciones cuasi-lineales⁹. El modelo de Philip ha fundamentado otros modelos posteriores como por ejemplo el software libre ‘WET-UP’ (Cook *et al*, 2003; Cook *et al*, 2006); este modelo que se ejecuta en un entorno de ‘Windows’ es una aplicación de sencillo manejo que utiliza las ecuaciones [3.18] para predecir el patrón de humedad del bulbo mojado con solo introducir los parámetros: tipo de suelo, potencial matriz inicial y el caudal aplicado.

Cabe citar igualmente el modelo estacionario de Wooding (1968) que permite calcular el tamaño máximo de la zona saturada en superficie en condiciones de caudal aplicado constante. Este modelo se detallará más adelante (Sección 3.4) junto a otros modelos de interés para la evolución y radio límite de la zona saturada en superficie.

Los modelos de régimen estacionario tienen la limitación para los casos de tiempo límite ya mencionados. En regímenes de tiempo intermedio, para las zonas cercanas a la fuente se pueden considerar también como una buena aproximación Jury y Earl (1977), si el flujo a través de este espacio se mantiene constante. No obstante, para el estudio del avance del frente mojado y volumen infiltrado en situaciones de riego real es necesario acudir a otros modelos que permitan el estudio del régimen transitorio.

3.2.2.2. Soluciones en estado transitorio. Modelo de Warrick y Lomen.

En este epígrafe se introducen las soluciones existentes en régimen transitorio, con principal atención sobre el modelo de Warrick y Lomen, que se ha utilizado en esta tesis para la validación del código.

⁹ Una ecuación diferencial es cuasi-lineal cuando es lineal para el término de orden más alto; esto significa que la función que multiplica a la derivada de orden superior de la incógnita no depende de la incógnita ni de ninguna de sus derivadas. En muchas ocasiones estas ecuaciones se pueden integrar más fácilmente que las no lineales.

En 1969, J.R.Philip asumiendo una fuente puntual de caudal constante sobre la superficie, y usando una conductividad hidráulica exponencial en función del potencial matricial [3.11], derivó la siguiente expresión explícita adimensional del volumen infiltrado frente al tiempo para el régimen transitorio:

$$V^* = \frac{1}{4} \left(2\sqrt{t^*} \exp\left(-\frac{t^*}{\pi}\right) + (2t^* + \pi) \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{t^*}{\pi}}\right) + 2t^* \right) \quad [3.19]$$

Donde *erf* representa la función error de Gauss. Esta ecuación, aunque describe el volumen infiltrado frente al tiempo, no es válida para el estudio de la evolución y avance del bulbo en función del tiempo.

Los trabajos previos de Raats y Philip fueron recogidos por Warrick (1974), y Warrick y Lomen (1976), para el estudio de una fuente de geometría puntual y circular en superficie con caudal infiltrado constante. Estas expresiones analíticas se han utilizado para validar el código propuesto en el siguiente capítulo.

Suponer una conductividad hidráulica al estilo de Gardner (1958), es decir, como una función exponencial del potencial matriz:

$$k(\theta) = k_s \exp(\alpha h(\theta)) \quad [3.11a]$$

Donde k_s [cm/min] es la conductividad hidráulica en saturación y α es la constante de escala macroscópica de capilaridad [cm^{-1}]. Esta ecuación permite la linealización de la ecuación de Richards usando la transformada de Kirchhoff, de manera que se define una nueva variable conocida como potencial del flujo matricial ϕ [cm^2/min], que para el caso de la expresión de Gardner resulta:

$$\phi = \int_{-\infty}^h k(\theta) dh = \frac{k(\theta)}{\alpha} \quad [3.20]$$

Asumiendo que la derivada de la conductividad hidráulica con respecto al contenido de humedad es constante:

$$\frac{\partial k}{\partial \theta} = \kappa \quad [3.21]$$

Siendo κ un parámetro con unidades de velocidad, la ecuación de Richards se transforma en la siguiente EDP lineal:

$$\nabla^2 \phi + \alpha \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{\alpha}{\kappa} \quad [3.22]$$

En la anterior ecuación se ha utilizado la igualdad $\partial \theta / \partial \phi = \alpha / \kappa$, que se deduce de manera directa desde la asunción [3.21] y la ecuación [3.20], siendo definida la coordenada z positiva hacia arriba.

Soluciones analíticas para esta ecuación diferencial lineal fueron obtenidas en el contexto de la transmisión del calor por Carslaw y Jaeger (1959). Warrick (1974) apoyándose en los estudios previos de Raats (1971) y Philip (1971) alcanzó una solución para un medio semi-infinito con una fuente puntual sobre la superficie cuyo caudal aplicado es constante ($q = cte$)¹⁰:

$$\phi^* = 2(\phi_B^* - \exp(2z^*)) \cdot \int_{z^*}^{\infty} \exp(-2Z') \cdot [\phi_B^*]_{Z=Z'} dZ' \quad [3.23]$$

En esta ecuación se ha representado el potencial de flujo matricial adimensional (ϕ^*) en función del que se obtendría para una fuente enterrada (ϕ_B^*) a una profundidad z , siendo Z' una variable muda del proceso de integración. El valor de ϕ_B es conocido de un resultado anterior (Philip, 1971) siendo:

$$\phi_B^* = \frac{\exp(z^*)}{2\rho} \left(\exp(\rho) \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{\rho}{2\sqrt{t^*}} + \sqrt{t^*} \right) + \exp(-\rho) \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{\rho}{2\sqrt{t^*}} - \sqrt{t^*} \right) \right) \quad [3.24]$$

Donde aparece la función complementaria de error de Gauss expresada como ' $\operatorname{erfc}(x)$ '. Todos los términos adimensionales están obtenidos con los siguientes parámetros de referencia:

$$r^* = \frac{\alpha r}{2} ; z^* = \frac{\alpha z}{2} ; t^* = \frac{\alpha \kappa t}{4} ; \rho^{*2} = r^{*2} + z^{*2} ; \phi^* = \frac{8\pi \phi}{\alpha \cdot q} \quad [REF.3.2]$$

¹⁰ Esta ecuación considera el eje-Z positivo hacia abajo.

Donde r^* , z^* y t^* son respectivamente la coordenada radial, profundidad y tiempo adimensionales, siendo ρ^* un radio auxiliar adimensional definido en [REF.3.2].

Por otro lado, en el caso de un disco superficial y saturado que aplica un caudal conocido y constante, el flujo de potencial adimensional viene determinado por la siguiente ecuación:

$$\phi^* = \frac{2}{R_0^*} \cdot \int_0^\infty J_0(\lambda R_0^*) \cdot J_1(\lambda R_0^*) \left[\frac{\exp\left(z^*(1 - \sqrt{1 + \lambda^2})\right) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{z^*}{2\sqrt{t^*}} - \sqrt{(1 + \lambda^2)t^*}\right)}{1 + \sqrt{1 + \lambda^2}} + \frac{\exp\left(z^*(1 + \sqrt{1 + \lambda^2})\right) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{z^*}{2\sqrt{t^*}} + \sqrt{(1 + \lambda^2)t^*}\right)}{1 - \sqrt{1 + \lambda^2}} + \frac{2 \exp(2z^* - \lambda^2 t^*) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{z^*}{2\sqrt{t^*}} + \sqrt{t^*}\right)}{\lambda^2} \right] d\lambda \quad [3.25]$$

Donde J_0 y J_1 son las funciones de Bessel de primera especie, mientras que el radio adimensional del disco viene expresado por: $R_0^* = \alpha R_0/2$. De nuevo, la terna $[t^*, \rho, z^*]$ son las tres coordenadas espacio-temporales adimensionalizadas según los parámetros expresados en [REF.3.2]. Esta formulación de las ecuaciones considera el eje-Z positivo hacia abajo. Puede consultarse más información sobre las funciones de Bessel, propiedades y su utilidad en el Anejo.

Una vez obtenido ϕ , y por tanto $k(h)$, el cálculo del contenido de humedad para cada punto es directo teniendo en cuenta la aproximación [3.21], según la expresión:

$$\theta(h) = \theta_s - \frac{k_s}{\kappa} (1 - \exp(\alpha h)) \quad [3.11b]$$

Dasberg y Or (1999) analizaron las ventajas de las soluciones analíticas frente a otros modelos numéricos, subrayando los siguientes puntos:

1.- Analizando las ecuaciones se puede entender el comportamiento del flujo dentro del medio.

- 2.- Existencia de una relación directa-exacta entre los parámetros del suelo (input) y los resultados obtenidos (output).
- 3.- Se puede analizar la sensibilidad de los resultados (output) frente a los parámetros de entrada (input).
- 4.- Los modelos analíticos necesitan generalmente del conocimiento de menos parámetros de entrada que los numéricos.
- 5.- El tiempo y esfuerzo de computación es muy inferior al de otros modelos numéricos.

Por el contrario, las limitaciones principales de las soluciones analíticas se resumen en:

- 1.- Normalmente la geometría de la fuente es menos simétrica que la asumida.
- 2.- El error que se comete en el proceso de linealización a través de la transformada de Kirchhoff.
- 3.- En muchos casos las soluciones analíticas derivan en formulaciones complicadas que incluyen series de infinitos términos, o integrales que deben ser resueltas numéricamente, por lo que dejan de ser exactas.

Las limitaciones de las soluciones analíticas aparecen del hecho de asumir que aproximaciones como la función de caracterización de Gardner o que la variación de la conductividad hidráulica con el contenido de humedad sea una constante, ecuación [3.21], no se ajusta a la realidad del suelo en la mayoría de los casos de interés. Consecuentemente, surge la necesidad de obtener soluciones de la ecuación de la filtración fuera de este marco, bajo formulaciones para la caracterización del suelo más amplias aunque tengan que integrarse numéricamente.

3.2.3. Soluciones numéricas de la ecuación de Richards.

El uso de funciones de caracterización distintas a las de Gardner obliga en la mayoría de los casos a integrar numéricamente la ecuación de Richards. Por otro lado, estudios con condiciones de límite cambiantes, como el avance de la zona saturada en superficie (charco mojado), también precisan una resolución numérica de la ecuación de la filtración.

Entre los métodos de integración numérica más consolidados para la resolución de la ecuación de Richards no lineal cabe destacar dos grandes grupos: métodos de diferencias finitas y métodos de elementos finitos. En ambos casos, el problema de análisis de ecuaciones en derivadas parciales se transforma en un problema de resolución de ecuaciones algebraicas abordable con un ordenador.

En los *métodos en diferencias finitas* el espacio de resolución de las ecuaciones algebraicas es el mismo que el espacio físico. Las incógnitas se resuelven para cada punto de una red que representa la discretización del espacio físico. Por ello, conceptualmente son más fáciles de implementar y desarrollar a la hora de resolver problemas físicos de filtración.

Por el contrario, en los *métodos de elementos finitos* las ecuaciones se resuelven en un espacio matemático (espacio de Banach) distinto al espacio euclídeo, de manera que los resultados obtenidos hay que trasladarlos (interpretarlos) desde el espacio de resolución de las ecuaciones hasta el espacio físico de estudio. Esto implica mayor complejidad a la hora de desarrollar programas y adaptarlos a las condiciones de interés físico en problemas de filtración, aunque por otro lado presentan ventajas en situaciones con geometría compleja en los que interesa una resolución espacial variable y existe acoplamiento entre ecuaciones diferenciales.

Un análisis más detallado de los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales se puede consultar en el anejo.

Los métodos de diferencias finitas son adecuados para resolver problemas sencillos de infiltración en condiciones de isotropía y bastante simetría de la fuente (Yeh, 1999), como por ejemplo problemas que se pueden reducir a dos variables espaciales, o problemas en régimen estacionario. En estos casos los métodos de diferencias finitas

son fáciles de implementar, tienen un asumible coste computacional, y además por lo general necesitan incorporar menos parámetros de entrada (input) al código (Emery y Carson, 1971).

Por el contrario, los métodos de elementos finitos son más adecuados cuando los problemas de filtración están sujetos a una mayor complejidad incluyendo anisotropía del medio o acoplamiento con otras ecuaciones distintas a la ecuación de Richards, como puede ser la ecuación del calor. Para estos casos el coste computacional de trabajar en el espacio de solución de las ecuaciones está justificado (Anderson y Woessner, 1992) dada su mayor flexibilidad para interpolar datos, relacionar las condiciones de contorno entre distintas ecuaciones, ajustar a fuentes de geometría irregular e incorporar propiedades de anisotropía y heterogeneidad del medio (Friedel, 2001).

3.2.3.1. Modelos basados en Métodos de Diferencias Finitas.

En la bibliografía se pueden encontrar numerosos ejemplos de modelos numéricos para el estudio del flujo de agua en el suelo a través del método de las diferencias finitas. Algunos de los más relevantes que podemos citar aquí son Brandt *et al* (1971), Ababou (1981), Lafolie *et al* (1989), Bhatnagar y Chauhan (2008) o Elmaloglou y Diamantopoulos (2010).

Los métodos de diferencias finitas, se clasifican en métodos explícitos o métodos implícitos según el esquema que se utilice para la resolución de las ecuaciones. Los métodos explícitos permiten el cálculo de todas las variables a través de las condiciones iniciales y de contorno, a excepción de una incógnita que se despeja explícitamente en función de todas las demás. Generalmente, en problemas de evolución temporal, es el tiempo la variable que se expresa explícitamente en función de las coordenadas espaciales conocidas para un paso de tiempo anterior. Por el contrario, en los métodos implícitos, existe más de una incógnita en la ecuación aproximada, lo que obliga a resolver un sistema de ecuaciones algebraicas en cada iteración utilizando la información de la que se dispone, es decir, las condiciones iniciales y de contorno. Generalmente, los métodos explícitos son más fáciles de implementar dada su sencillez conceptual. Además, no requieren tanto esfuerzo de computación como los métodos implícitos que obligan a la resolución de sistemas de ecuaciones, o ecuaciones implícitas sobre una variable en cada iteración. Sin embargo, los métodos implícitos son muy utilizados

por su mayor estabilidad lo que significa que en muchas ocasiones permiten incrementar el paso de tiempo, reduciendo así el esfuerzo de computación.

Modelo de Lafolie (1989). Un ejemplo de modelo en diferencias finitas desarrollado para medios estratificados es el modelo de Lafolie (1989). En este modelo, se definen dos funciones de conductividad hidráulica, una para la dirección radial, o plano horizontal (k_h) y otra en la dirección vertical (k_z). Adicionalmente, el modelo es capaz de medir la evolución del charco mojado en superficie y evaporación. La discretización espacial se fundamenta en la aproximación de las derivadas centradas, usando la media geométrica para el cálculo de la conductividad hidráulica entre puntos contiguos. La integración temporal de la ecuación de Richards se desarrolla por el método implícito de Crank-Nicolson.

La validación del modelo no fue realizada con respecto a soluciones analíticas, ya que siguiendo el criterio de los autores, se pretendía evitar el uso de funciones del tipo Gardner. De manera que, se realizó una validación frente a otros modelos numéricos previamente contrastados como son Selim y Kirkham (1973), Zyvoloski *et al* (1976) y Caussade *et al* (1979). Los resultados reportados para el contenido de humedad bajo las mismas condiciones de contorno (surco mojado en superficie) y suelo, son aproximados, pero no coincidentes. Adicionalmente, se realizó una comparativa de la evolución del charco en superficie con el modelo de Brandt (1971), bajo las mismas condiciones de contorno y suelo (Gilat Loam) reportando valores muy inferiores (en un factor 1/3) a los que reproducen los modelos de Brandt y Wooding (1968).

Modelo de Elmaloglou y Diamantopoulos (2010). Uno de los modelos más recientes de simulación del flujo en el suelo desarrollado por el método de las diferencias finitas. El modelo se basa en discretizar el sistema en coordenadas cilíndricas para utilizar el método de resolución implícito de las direcciones alternativas (ADI). Este modelo permite estudiar el flujo de agua desde dos fuentes superficiales independientes separadas una distancia conocida, incorporando, como en el caso del modelo de Lafolie, un parámetro relativo a la evaporación.

Uno de los mayores problemas de las soluciones numéricas desarrolladas hasta el momento es la gran discrepancia existente con respecto a la evolución de las condiciones de contorno en régimen transitorio. En este sentido, los modelos de Brandt (1971) y Bhatnagar (2008) predicen resultados similares para la evolución de la zona saturada en superficie (charco) bajo las mismas condiciones de suelo y riego; para tiempos muy largos, la predicción de estos dos modelos se aproxima bien al radio límite que determina la solución analítica de Wooding en régimen estacionario. Por el contrario, los modelos de Lafolie (1989) y Ababou (1981) subestiman significativamente el tamaño del charco (hasta un factor 1/3) con respecto a los otros tres modelos. Es por ello necesario seguir investigando en técnicas que ayuden a mejorar la predicción de la evolución de la zona saturada en superficie.

Los mencionados modelos de Brandt (1971) y Bhatnagar (2008), se exponen junto al modelo de Wooding (1968) en la Sección 3.4 que se ha reservado para la descripción de los modelos de interés en el estudio de la evolución de la zona saturada en superficie y su radio máximo.

3.2.3.2. Modelos basados en Métodos de elementos Finitos.

Al ser más sofisticados, los métodos basados en aproximación por elementos finitos para la resolución de la ecuación de la filtración, son posteriores a los de diferencias finitas. La mayoría de estos modelos utilizan funciones para la aproximación espacial del tipo Galerkin, mientras que la integración temporal se resuelve mediante algún método implícito o explícito en diferencias finitas. Este es el caso de modelos como por ejemplo, Neuman (1973), Taghavi *et al* (1984) y Ghali (1989). El modelo de Neuman que es posiblemente el primer modelo desarrollado para la resolución de la ecuación de Richards por elementos finitos, es especialmente útil para resolver problemas de infiltración con un alto grado de anisotropía a nivel local, según se ha reportado. Por otro lado, el modelo de Taghavi utiliza el método implícito de Newton-Raphson para resolver la derivada temporal, y el método de Galerkin para la resolución espacial. El autor reporta un ajuste satisfactorio de este modelo con resultados experimentales en laboratorio y campo, mostrando una gran estabilidad para suelos muy secos, donde otros programas encuentran dificultades debido a que el frente de avance es abrupto.

Se han reportado (Tan *et al*, 2004) algunos problemas comunes a los modelos desarrollados por los métodos de elementos finitos como por ejemplo, la existencia de oscilaciones numéricas con respecto a la presión a lo largo de la línea del frente de avance. Adicionalmente, algunos estudios realizados sugieren que estos modelos tienden a subestimar el avance del frente mojado a medida que se aumenta la resolución espacio-temporal.

3.2.3.3. HYDRUS 2D/3D.

Una de las herramientas más utilizadas para el estudio de los problemas de filtración es el programa comercial HYDRUS2D/3D (Simunek *et al*, 2006) que está desarrollado para resolver la ecuación de Richards acoplada con la ecuación de la conducción del calor.

Las ecuaciones se resuelven utilizando técnicas de elementos finitos del tipo Galerkin para las variables espaciales. El espacio físico se transforma en el espacio de las soluciones a través de tetraedros sobre los que se aproxima la solución en sus vértices.

Por otro lado, para la discretización temporal utiliza técnicas de diferencias finitas sobre ecuaciones implícitas del tipo ‘backward’. Se puede consultar más información sobre métodos de resolución de ecuaciones diferenciales en el Anejo.

El programa se ha validado frente a datos experimentales y de campo, a la vez que ha sido contrastado con éxito con respecto a otros modelos como reportan los autores (Kandelous y Simunek, 2010 a-b). Algunas discrepancias con otros modelos (WET-UP) e inestabilidades para suelos arcillosos han sido reportadas (Cook *et al*, 2006).

3.3.- SOLUCIONES ANALÍTICAS SIMPLIFICADAS.

Se habla de soluciones analíticas simplificadas cuando se alcanza una solución analítica desde las ecuaciones fundamentales de la filtración para un sistema determinado a través de alguna aproximación que simplifica la ecuación, o alguna de sus condiciones de contorno o funciones de caracterización del suelo. Estos modelos son válidos si las condiciones reales del experimento de filtración son parecidas a las que se han asumido. Uno de los ejemplos más conocidos de este tipo de solución es el modelo de Green-Ampt.

3.3.1. Modelo de Green-Ampt.

W.H. Green y G.A. Ampt publicaron en 1911 el primer modelo físico que describe la infiltración de agua en el suelo. Aunque es un modelo aproximado, es un modelo conceptual muy usado en los estudios hidrológicos.

El modelo de Green-Ampt está basado en considerar que el agua filtra homogéneamente sobre toda la superficie del suelo, de manera que a un lado del frente está saturado y al otro tiene el contenido de humedad inicial.

En el modelo de Green-Ampt se considera el contenido de humedad en saturación para todos los puntos que están por encima del frente de avance, mientras que por debajo de esta cota se considera el contenido de humedad inicial (Figura 3.2). La ecuación de Darcy se simplifica en la dirección vertical como:

$$\vec{v} = -k(\theta)\vec{\nabla}(h(z) - z) \Rightarrow v = -k\left(\frac{\partial h}{\partial z} - 1\right) \quad [3.26]$$

Donde, en este caso, se ha considerado el eje-Z positivo hacia abajo (ver Figura 3.2).

Figura.3.2. Modelo de Green-Ampt. Representación del contenido de humedad para un instante determinado de tiempo de infiltración. Línea continua (modelo de Green-Ampt) frente a línea discontinua (situación realista). Dirección del eje positivo hacia abajo.

El potencial en la superficie saturada se puede aproximar a cero ($h_s \approx 0$) teniendo en cuenta que no hay altura de agua, mientras que la conductividad hidráulica se considera en saturación hasta el frente de avance por las hipótesis del modelo lo que permite escribir la velocidad en términos absolutos como (infiltración instantánea):

$$|v| = i = k_s \left(\frac{\tau_f}{z_f} + 1 \right) = k_s \left(\frac{\tau_f \Delta \theta}{I} + 1 \right) = \frac{\partial I}{\partial t} \quad [3.27]$$

Donde según las hipótesis del modelo se ha supuesto la infiltración acumulada como el área del rectángulo $I = |z_f| \cdot (\theta_s - \theta_0) = z_f \Delta \theta$. Aunque el potencial en la superficie se ha considerado nulo, con una lámina de agua podría haberse tenido en cuenta dicha altura. El potencial de presión en el frente h_f es un valor medio negativo que lo hemos sustituido por su opuesto, la tensión en el frente: $\tau_f = -h_f > 0$.

El valor de τ_f suele considerarse constante, lo que es solo rigurosamente cierto en el flujo horizontal, y puede estimarse por la expresión de Neuman (1976), a partir de las curvas características $k(\theta)$ y $h(\theta)$. La expresión de Neuman es:

$$\tau_f = \frac{1}{k_s} \int_{h(\theta_o)}^0 k dh \quad [3.28]$$

Para facilitar el uso de esta expresión, también se han propuesto valores de referencia de τ_f para los distintos tipos de suelo, Rawls *et al* (1993).

Integrando la ecuación [3.27] se llega a la siguiente expresión para la infiltración acumulada:

$$I(t) = k_s \cdot t + \Delta\theta\tau_f \cdot \ln\left(1 + \frac{I(t)}{\Delta\theta\tau_f}\right) \quad [3.29]$$

Ecuación implícita para la infiltración acumulada.

Philip (1957) demostró que se puede considerar esta ecuación como una solución particular de la ecuación de Richards cuando la conductividad hidráulica se considera una función δ -Dirac con valores nulos en los puntos a contenido de humedad inicial. Asimismo, es la que se obtendría en un suelo caracterizado por un conjunto de capilares de tamaño uniforme.

Al ser la ecuación de Green-Ampt (G-A) una expresión implícita deben utilizarse métodos iterativos para resolver la infiltración acumulada en cada instante. Para evitar este hecho, Li *et al* (1976) desarrollaron una expresión aproximada pero explícita del tiempo, utilizando los primeros términos del desarrollo en series de Taylor de la función logarítmica en la ecuación [3.29]. Flerchinger *et al* (1988) extendieron el modelo de Li para medios estratificados. Otras expresiones aproximadas y explícitas del tiempo posteriores de la ecuación de G-A han sido obtenidas por Stone *et al* (1994), Parlange *et al* (2002), Barry *et al* (2005), Swamee *et al* (2012) y Vatankhah (2015).

Por otro lado, existen distintos programas publicados que permiten estudiar el fenómeno de infiltración a través de este modelo como son: ANSWERS “Areal Nonpoint Source Watershed Environment Response Simulation” (Beasley y Huggins, 1982), WEPP “Water Erosion Prediction Project” (Lane y Nearing, 1989), o también, HSPF “Hydrological Simulation Prediction Fortran” (Bicknell *et al*, 2001).

El modelo de G-A ha sido extendido para medios estratificados como el caso de Bouwer (1969), Childs y Bybordi (1969) o el antes mencionado modelo de Flerchinger *et al* (1988). El estudio de la infiltración a través de la superficie mojada por agua de lluvia es una de las aplicaciones más usadas de este modelo. Este es el caso de Smith y Parlange (1978) y Philip (1992-1993). Otras aplicaciones interesantes de este modelo son las desarrolladas por Killen y Stack (1987) para el estudio del riego por inundación así como Ogden y Saghafian (1997) que lo ha adaptado para el estudio de la redistribución.

Aunque el modelo de G-A fue concebido para el estudio de la infiltración vertical, su simplicidad y ajuste satisfactorio a muchas situaciones de infiltración ha impulsado su desarrollo para otros tipos de geometría como es la infiltración a través de un frente de avance esférico. En este sentido Shu-Tung Chu (1994), desarrolló unas soluciones analíticas aproximadas para hipótesis similares a las de G-A considerando un frente de avance radial, muy similar al de las condiciones de riego por goteo.

3.3.2. Modelo tridimensional de Chu S.T.

Considerando una fuente cuasi-puntual semiesférica de radio R_0 que emite un flujo de dirección radial de manera que el bulbo está saturado hasta el frente de avance semiesférico de radio r_f . Cada elemento diferencial de superficie sobre el frente de avance toma el valor en módulo de:

$$dS = r_f^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi = 2\pi r_f^2 \sin\vartheta d\vartheta \quad [3.30]$$

Siendo ϑ y φ los ángulos polar (colatitud) y azimuthal (ecuatorial) en un sistema de coordenadas esféricas centrado en la fuente. Se ha integrado sobre el ángulo azimuthal de manera que se llega a un elemento infinitesimal de anillo a profundidad: $z = r_f \cos\vartheta$. Considerando la ley de conservación de la masa se puede demostrar que el campo de velocidades es inversamente proporcional al cuadrado del radio del frente¹¹ $v = Cr^{-2}$, siendo C una constante de proporcionalidad con unidades de caudal [cm^3/min]. Igualando este resultado con la ecuación de Darcy se obtiene:

$$v = Cr_f^{-2} = -k_s \frac{dH}{dr_f} \quad [3.31]$$

Donde se ha utilizado la conductividad hidráulica en saturación hasta el frente de avance al estilo de Green-Ampt. Siendo $H = h + z$, e integrando esta ecuación se llega a un resultado para la constante C :

$$C = \frac{k_s R_0 r_f (\tau_f + r_f \cos\vartheta)}{r_f - R_0} \Rightarrow v = \frac{k_s R_0 (\tau_f + r_f \cos\vartheta)}{r_f (r_f - R_0)} = \Delta\theta \frac{dr_f}{dt} \quad [3.32a]$$

Ecuación que se integra obteniendo el siguiente resultado que describe el radio del frente de avance en función del tiempo y el ángulo con respecto a la vertical:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(r_f^2 - R_0^2) - \left(\frac{\tau_f}{\cos\vartheta} + R_0\right) \left(r_f - R_0 - \frac{\tau_f}{\cos\vartheta} \ln\left(\frac{r_f \cos\vartheta + \tau_f}{R_0 \cos\vartheta + \tau_f}\right)\right) \\ = \frac{k_s R_0 \cos\vartheta}{\Delta\theta} t \quad [3.33a] \end{aligned}$$

¹¹ Este resultado se deriva del hecho de que el campo de velocidades es divergente.

La ecuación anterior está restringida a valores de $\vartheta \neq 90^\circ$. Para el caso del radio de avance en superficie ($\vartheta = 90^\circ$), es necesario integrar de nuevo desde la ecuación anterior:

$$\frac{k_s R_0 \tau_f}{r_f (r_f - R_0)} = \Delta\theta \frac{dr_f}{dt} \quad [3.32b]$$

Obteniendo el siguiente resultado:

$$t = \frac{\Delta\theta}{k_s \tau_f R_0} \left[\frac{1}{3} (r_f^3(t) - R_0^3) - \frac{R_0}{2} (r_f^2(t) - R_0^2) \right] \quad [3.33b]$$

Para calcular el volumen infiltrado en función del tiempo es necesario integrar para todos los elementos de volumen; desde la ecuación [3.30] se obtiene:

$$V = \Delta\theta \iint_{r=R_0; \vartheta=0}^{r=r_f; \vartheta=\pi/2} dr dS = \Delta\theta \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/2} r_f^3(t) \sin\vartheta d\vartheta \quad [3.34]$$

Integral que depende implícitamente del tiempo a través de la ecuación [3.33].

3.4.- SOLUCIONES CON CONDICIONES DE CONTORNO VARIABLE. EVOLUCIÓN DEL CHARCO EN SUPERFICIE Y RADIO LÍMITE.

El programa desarrollado en esta tesis, ha demostrado su fácil adaptabilidad al estudio de fenómenos en régimen transitorio para condiciones de contorno variables en el tiempo. En particular, está desarrollado para analizar el avance de la zona saturada sobre la superficie (evolución del charco) durante un proceso de riego. En este apartado vamos a exponer los modelos más relevantes de la bibliografía capaces de analizar este fenómeno.

3.4.1. Modelo de Wooding.

A pesar de que este modelo analítico para régimen estacionario no asume condiciones de contorno variable, se introduce en esta sección por su interés para el estudio del radio límite; fenómeno ligado a la evolución de la zona saturada.

A partir de la ecuación de Richards en 1968 el físico neozelandés R. A. Wooding estableció un modelo analítico cuya solución en forma de serie infinita tiende a una sencilla expresión de tan solo dos términos que relaciona el tamaño del charco límite (radio máximo) con el caudal aplicado para condiciones de régimen estacionario; este modelo, por su fácil aplicabilidad y buen ajuste a muchas condiciones aún es usado.

Esta solución de la ecuación de Richards para régimen estacionario, utiliza la transformación de Kirchhoff [3.14] y, al igual que Warrick, una forma exponencial para la conductividad hidráulica [3.11a], que le permite reducir la ecuación a una forma lineal en régimen estacionario (independiente del tiempo):

$$\nabla^2 \phi = \alpha \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad [3.35a]$$

$$k(\theta) = k_s \exp(\alpha h(\theta)) \quad [3.11a]$$

$$\phi = \int_{-\infty}^h k(\theta) dh = \frac{k(\theta)}{\alpha} \quad [3.20]$$

La ecuación [3.35a] es simplemente la forma lineal de la ecuación de Richards [3.16] para régimen estacionario ($\partial\phi/\partial t = 0$), considerando el eje-Z positivo hacia abajo.

Por la simetría del problema, utilizó un sistema de coordenadas cilíndricas centrado en la fuente que reduce el problema a dos coordenadas espaciales adimensionales (r^*, z^*), quedando la siguiente expresión para el potencial de flujo matricial:

$$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial r^{*2}} + \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial z^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} = \frac{\alpha^2 R_0^2}{4} \phi^* \quad [3.35b]$$

Tras un elaborado desarrollo en el que se utilizó la transformada de Hankel (Sneddon, 1951), se obtuvo una solución en forma de serie infinita, cuya aproximación a los dos primeros términos es la siguiente:

$$q = \frac{4k_s}{\alpha} R_w + \pi k_s R_w^2 \quad [3.36]$$

Siendo R_w el radio de la fuente en régimen estacionario y q el caudal aplicado. Se presentó una validación numérica de esta solución para fuentes de distinto caudal en el mismo artículo. El primer término representa el potencial capilar de la propia succión del medio. El segundo término está relacionado con el potencial gravitatorio bajo la fuente. Notar que cuanto más grande es el radio del disco mayor es el efecto gravitatorio frente al de succión.

Asumiendo condiciones de contorno para un medio semi-infinito sobre el que hay una zona saturada de radio R_w sobre el que se aplica un caudal constante, la ecuación de Wooding permite relacionar por tanto el caudal aplicado con el radio de la fuente. No es por tanto válida en régimen transitorio.

Algunos autores como Pullan y Collins (1987), Weir (1987) o Warrick (1992) han reportado un pobre ajuste del modelo de Wooding con respecto a soluciones numéricas propias para casos en los que el radio en régimen estacionario es pequeño.

3.4.2. Modelo de Brandt.

Brandt y Bresler publicaron en 1971 un modelo numérico capaz de estudiar la evolución de la zona saturada en superficie. Asumiendo un flujo aplicado desde una fuente puntual superficial y para un medio semi-infinito utilizaron un sistema de coordenadas cilíndricas, centrado en la fuente para resolver numéricamente la ecuación de Richards en régimen transitorio (dependiente del tiempo) y condiciones de axisimetría.

Buscando una mayor simplicidad de la ecuación de Richards utilizaron la siguiente función que es una variante de la transformación de Kirchhoff para la difusividad, siendo ω en este caso, una variable muda:

$$\chi(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} D(\omega) d\omega \quad [3.37]$$

Lo que transforma la ecuación de la filtración en condiciones de axisimetría (considerando la coordenada z positiva hacia abajo) de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad [3.38]$$

Para resolver esta ecuación no lineal se utilizó el método implícito de las direcciones alternativas (diferencias finitas) sobre las coordenadas espaciales; la resolución de las ecuaciones algebraicas asociadas se realizó a través del método iterativo de Newton-Raphson. Por su parte, la derivada temporal se calculó iterativamente por un método explícito.

La validación del código la realizaron por comparación con resultados obtenidos por el modelo analítico de Wooding para el avance de la zona saturada en superficie, reportando satisfactorios resultados de ajuste entre ambos métodos.

Algunos autores como Ababou (1981) y Bhatnagar (2008) han reportado que el modelo de Brandt tiende a sobrestimar el tamaño del radio de la zona saturada. Los resultados reportados por el propio Brandt para tiempos muy largos, sobreestiman sensiblemente el radio en régimen estacionario que predice el modelo de Wooding.

3.4.3. Modelo de Bhatnagar y Chauhan.

Bhatnagar y Chauhan (2008) publicaron un modelo de filtración del suelo basado en la resolución numérica de la ecuación de Richards, sobre un sistema de referencia de coordenadas esféricas oblatas, reportando un buen ajuste y eficiencia del mismo.

Las coordenadas esféricas oblatas son una extensión de las coordenadas elípticas para tres dimensiones en las que se genera la tercera dimensión haciendo rotar la elipse con respecto a la bisectriz del segmento que une sus dos focos.

Bhatnagar utiliza la transformación de Kirchhoff para simplificar la ecuación de Richards. Sin embargo, y a diferencia de Warrick no utiliza la expresión de Gardner para la conductividad hidráulica. Por lo que, su formulación de la ecuación de Richards para el potencial de flujo matricial, depende de la capacidad específica $C(h) = d\theta/dh$ [cm⁻¹], y la pendiente de la conductividad hidráulica frente al potencial matriz $s(h) = dk/dh$ [cm⁻¹], obteniendo la siguiente EDP no lineal:

$$\nabla^2 \phi + \frac{s(h)}{k} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{C(h)}{k} \quad [3.39]$$

Se puede comprobar que esta ecuación se reduce a la ecuación [3.22] introducida para el modelo de Warrick, teniendo en cuenta las dos consideraciones mencionadas con anterioridad:

$$k(h) = k_s \exp(\alpha h(\theta)) = c_1 \theta + c_2 \quad [3.11a] - [3.21]$$

Donde c_1 y c_2 son las constantes de la función lineal $k(\theta)$.

La ecuación [3.39] en coordenadas esféricas oblatas se escribe como:

$$\begin{cases} r = a \cdot \cosh \eta \cdot \sen \psi \\ z = a \cdot \senh \eta \cdot \cos \psi \end{cases} \quad [3.40]$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + P(\eta, \psi, s, k) \frac{\partial \phi}{\partial z} + Q(\eta, \psi, s, k) \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \psi^2} = R(\eta, \psi, C, k) \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad [3.41]$$

Donde (η, ψ) son las coordenadas radial y angular, respectivamente, y el parámetro a representa la distancia del foco al origen del sistema de

referencia. Las esferas oblatas colapsan cuando $\eta = 0$ en un disco de radio a . La ventaja de este sistema de referencia es que la condición de contorno sobre la superficie ($\eta = 0$) para el radio del charco mojado coincide con el valor de este parámetro, es decir: $R_0 = a$. La tercera coordenada, ángulo azimutal es despreciable por la simetría del problema. Cuando el radio es infinito ($\eta \gg 0$) el esferoide oblato se convierte en una esfera ya que la distancia focal se hace despreciable.

Como en el caso de Brandt, Bhatnagar también utiliza un método de resolución numérica implícito de direcciones alternativas que reduce su problema al cálculo iterativo de sistemas de ecuaciones algebraicas de tipo tridiagonal. Como reporta Bhatnagar, este método se ha demostrado estable para una EDP de estas características (Jain *et al*, 1994).

La validación del modelo la realiza a través de comparación con resultados experimentales de Taghavi *et al* (1984) y el modelo de Brandt y Bresler antes citado. La comparativa con los resultados de Taghavi es satisfactoria dentro del margen de incertidumbre experimental esperado. Sin embargo, el tamaño del charco que obtiene es significativamente menor que el del modelo de Brandt bajo las mismas condiciones de suelo y riego. Resultados obtenidos bajo otros modelos numéricos (Lafolie *et al*, 1989) basados en una aproximación por diferencias finitas, así como el modelo analítico de Wooding para régimen estacionario también concluyen que el tamaño del radio mojado de Brandt está sobrestimado.

CAPITULO 4:

MATERIALES Y MÉTODOS.

- 4.1.- Solución numérica de la ecuación de Richards.
 - 4.1.1.- Fundamentos matemáticos.
 - 4.1.2.- Formulación de la ecuación de Richards.
 - 4.1.3.- Discretización de la ecuación de Richards.
 - 4.1.4.- Condiciones de contorno.
 - 4.1.5.- Estabilidad numérica y restricciones.
 - 4.1.6.- Diagrama de flujo.
- 4.2.- Soluciones analíticas aproximadas.
 - 4.2.1.- Flujo desde una semiesfera.
 - 4.2.2.- Flujo desde un disco.
- 4.3.- Pruebas experimentales.
 - 4.3.1.- Ensayo de filtración entre placas.
 - 4.3.2.- Experimentos de infiltración en campo.
 - 4.3.2.1. Frente de avance en superficie.
 - 4.3.2.2. Evolución de la zona saturada.

- §•§ -

En este capítulo se exponen los materiales y métodos desarrollados en la tesis. En la primera sección se describen los fundamentos matemáticos del modelo desarrollado para la integración numérica de la ecuación de Richards, la estructura del código en su versión principal, una descripción de las condiciones de contorno, y los criterios de estabilidad numérica necesarios para la resolución de la ecuación diferencial. Los resultados de validación del código se presentan en el siguiente capítulo.

En la segunda sección se presenta un conjunto de soluciones analíticas derivadas desde la ecuación de Darcy, que han sido obtenidas bajo hipótesis de simplificación similares a las del modelo de Green-Ampt, para fuentes de geometría semiesférica y circular en superficie. Estas soluciones, cuya validación numérica se presenta en el próximo capítulo, permiten predecir el volumen y caudal infiltrado frente al tiempo en base a un grupo muy reducido de parámetros del suelo; razón por la cual son potencialmente útiles para la caracterización del suelo.

En el último apartado, se describen algunos ensayos experimentales realizados para contrastar la validez y aplicabilidad de los resultados numéricos y teóricos presentados en esta tesis.

4.1. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS.

Esta sección presenta el modelo propuesto para la integración numérica de la ecuación de Richards, para un sistema de riego por goteo en tres dimensiones. Se exponen algunos de los fundamentos matemáticos utilizados, el esquema del código desarrollado, la descripción de las condiciones de contorno de interés, y los criterios de estabilidad numérica. Al final de la sección se presenta un diagrama de flujo de la versión principal del código.

4.1.1. Fundamentos matemáticos.

Considerar una ecuación diferencial ordinaria de primer orden $y' = f(t, y(t))$. El método de Adams-Bashforth es un método explícito que está basado en el teorema fundamental del cálculo integral:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \quad [4.1]$$

Donde $y(t_{n+1})$ es la solución aproximada para el paso de tiempo a determinar. El resultado se obtiene aplicando sobre la función $f(t, y(t))$ la aproximación a su polinomio de interpolación de Lagrange de grado s (número de puntos sobre los que se desarrolla la interpolación). En el caso más sencillo en que $s = 1$, se llega a la expresión de Euler [4.1a]. Casos de grado superior como por ejemplo $s = 2, 4$ representan expresiones explícitas en multi-paso (Mathews y Fink, 1999):

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y_n(t)) \quad (s = 1) \quad [4.1a]$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h \left(\frac{3}{2} f(t_n, y_n(t)) - \frac{1}{2} f(t_{n-1}, y_{n-1}(t)) \right) \quad (s = 2) \quad [4.1b]$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h \left(55f(t_n, y_n(t)) - 59f(t_{n-1}, y_{n-1}(t)) + 37f(t_{n-2}, y_{n-2}(t)) - 9f(t_{n-3}, y_{n-3}(t)) \right) \quad (s = 4) \quad [4.1c]$$

Notar como la suma de todos los términos ponderados computa un valor $hf(t, y(t))$ que se añade a la función conocida $y(t_n)$. El método de Adams-Bashforth para los grados $s = 1, 2$ [4.1a-b] se ha utilizado para

la aproximación de la integración temporal de la ecuación de Richards con el modelo propuesto.

La integración espacial de la ecuación de Richards se ha tratado a través del método de las diferencias finitas. Esta técnica se fundamenta en la sustitución de las derivadas espaciales que aparecen en la ecuación diferencial por su aproximación a la derivada en cualquiera de las formas que aparecen en el Anejo I. Es por tanto, un método que plantea la resolución de la ecuación diferencial sobre el espacio físico que ocupa el sistema. Este método es aplicable tanto a ecuaciones ordinarias como en derivadas parciales de cualquier orden y se puede desarrollar como un método explícito o implícito, según se formulen las ecuaciones.

Como ya se ha mencionado en la revisión bibliográfica, el método de las diferencias finitas es un método tradicional para la resolución de la ecuación de la filtración debido a su sencillez y eficiencia computacional en sistemas de riego. Otros métodos más sofisticados como pueden ser los métodos de elementos finitos o métodos de elementos de contorno, son conceptualmente más complejos y de implementación más elaborada; su desarrollo no está justificado en términos de eficiencia computacional, a menos que, el sistema esté sometido a condiciones de contorno muy complejas, exista un alto grado de anisotropía, o el flujo este dominado por otras ecuaciones acopladas a la ecuación de Richards; en ninguno de estos casos ha centrado el interés de esta tesis.

Por tanto, el modelo propuesto para la resolución de la ecuación de la filtración es un modelo explícito en multi-paso que combina el método de Adams-Bashforth para la integración temporal con la técnica de las diferencias finitas para la aproximación espacial de las ecuaciones.

Se exploraron otras técnicas como el método implícito de Crank-Nicolson o un método explícito del tipo predictor-corrector que finalmente no aportaron mejoras significativas, por lo que la mayoría de los resultados fueron obtenidos con el método explícito citado en esta sección. Algunas de las versiones alternativas se pueden consultar en el Anejo.

4.1.2. Formulación de la ecuación de Richards.

La simetría axial existente en el fenómeno de infiltración desde un gotero en superficie convierte al sistema de referencia en coordenadas cilíndricas en el más adecuado para su estudio. Efectivamente, considerando una fuente emisora sobre un medio homogéneo, plano, isótropo, no estratificado y semi-infinito podemos suponer que el agua se distribuye sin una dirección privilegiada, a lo largo de la superficie y en su filtración a través del suelo. Esta simetría axial (con respecto al eje Z), permite reducir en un grado de libertad el problema tridimensional a dos coordenadas espaciales (r, z) disminuyendo el esfuerzo de cálculo.

Si además, consideramos que el gotero se coloca en el origen del sistema de referencia, ajustando convenientemente las condiciones de contorno podemos reducir el número de nodos espaciales para el desarrollo del cálculo aumentando la eficiencia del modelo.

La ecuación de Richards en tres dimensiones para condiciones de axisimetría ($\partial/\partial\theta = 0$) se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(k(\theta) \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{k(\theta)}{r} \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(\theta) \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \frac{\partial k(\theta)}{\partial z} = C(\theta) \frac{\partial h}{\partial t} \quad [3.10c]$$

La función conductividad hidráulica se puede escribir explícitamente en función de h ya que $k(\theta(h))$ para cualquier esquema de caracterización del suelo mencionado en la sección 3.1. Por tanto, la incógnita depende de dos variables espaciales y el tiempo $h(r, z, t)$.

La formulación de la ecuación de Richards a través del potencial de capilaridad permite estudiar casos de presión positiva; del mismo modo, con esta formulación se puede estudiar el efecto de una columna de agua de espesor no despreciable sobre la superficie, y realizar simulaciones con fuentes de caudal conocido (constante o variable) como condición de contorno en términos de la presión, lo que es ventajoso ya que generalmente no es conocido el contenido de humedad en los puntos adyacentes a la fuente. Para ello, se puede relacionar el caudal y potencial de presión a través de la ecuación de Darcy en el entorno de la fuente.

En algún caso particular, en el que las condiciones lo favorecían se han implementado versiones del código en coordenadas cartesianas [3.10a], o también en coordenadas cilíndricas sobre la incógnita contenido de humedad.

4.1.3.- Discretización de la ecuación de Richards.

Considerar la aproximación de Adams – Bashforth de grado $s = 1$ (Método de Euler) para la derivada temporal. Considerar en la ecuación [3.10c] diferencias centradas sobre las derivadas primeras y diferencias progresivas sobre la derivada segunda. Si además, se calcula la media aritmética de la conductividad hidráulica $k(h)$ en nodos adyacentes donde acompaña a la derivada, obtenemos la siguiente ecuación de aproximación para [3.10c] en forma explícita:

$$\begin{aligned}
 h_{ij}^{n+1} = h_{ij}^n + \frac{\Delta t}{2C_{ij}^n} & \cdot \left[\frac{k_{ij}^n}{r_i} \cdot \frac{h_{i-1j}^n - h_{i+1j}^n}{\Delta r} \right. \\
 & + \frac{(k_{ij}^n + k_{i-1j}^n)(h_{i-1j}^n - h_{ij}^n) + (k_{ij}^n + k_{i+1j}^n)(h_{i+1j}^n - h_{ij}^n)}{(\Delta r)^2} \\
 & + \frac{(k_{ij}^n + k_{ij+1}^n)(h_{ij+1}^n - h_{ij}^n) + (k_{ij}^n + k_{ij-1}^n)(h_{ij-1}^n - h_{ij}^n)}{(\Delta z)^2} \\
 & \left. + \frac{k_{ij+1}^n - k_{ij-1}^n}{\Delta z} \right] \quad [4.2]
 \end{aligned}$$

Donde el superíndice n designa cada paso de tiempo, mientras que los subíndices i, j representan la discretización sobre las variables (r, z) , respectivamente. En este esquema explícito las condiciones iniciales y de contorno deben asegurar que todas las magnitudes sean conocidas para el paso de tiempo de subíndice n .

El paso de tiempo (Δt) determina la estabilidad numérica de esta ecuación y se ha definido creciente siguiendo una progresión geométrica del tipo $\Delta t_{n+1} = \delta \Delta t_n$, donde δ es un valor constante. Este planteamiento permite iterar con gran resolución temporal en los primeros pasos de tiempo relajando este aspecto hasta un valor límite que asegure la estabilidad numérica a medida que avanza la simulación, lo que reduce el esfuerzo de cálculo. Se ha comprobado que una alta resolución temporal al inicio de las simulaciones, así como limitar a un valor máximo el paso de tiempo son condiciones necesarias para asegurar la estabilidad numérica. El valor máximo del paso de tiempo se ha fijado siguiendo los criterios de estabilidad que se exponen en el siguiente apartado. En los casos en los que se ha utilizado la aproximación temporal de Adams-Bashforth de grado $s = 2$ la ecuación [4.2] se extiende a los dos pasos previos conocidos de subíndices n y $n - 1$.

4.1.4.- Condiciones de contorno.

Aprovechando la simetría axial, la mayoría de las simulaciones se han realizado colocando la fuente en la esquina superior derecha de la red. Al considerar un medio semi-infinito, la red de nodos debe ser suficientemente grande como para que el frente de avance no alcance sus límites.

Según la naturaleza del experimento a simular el modelo desarrollado permite introducir condiciones de contorno que puede ser constantes o variables. Las condiciones de contorno de carácter constante más representativas de las simulaciones realizadas se enumeran en la siguiente lista:

- 1.- *Fuente en superficie de radio R_0 .* Condiciones de saturación a presión despreciable $h = 0 \Rightarrow \theta = \theta_s$. Considerando una fuente circular ($r \leq R_0, z = 0$). Considerando una fuente semiesférica se puede generalizar esta condición para todos los puntos que cumplen $\sqrt{r^2 + z^2} \leq R_0$. En el caso de fuente puntual, esta condición estaría restringida al nodo en que se encuentra el gotero.
- 2.- *Resto de superficie: ($r > R_0, z = 0$).* Velocidad vertical (hacia arriba) nula, lo que implica que $h_{ij+1}^n = h_{ij}^n + \Delta z$, en toda la superficie.
- 3.- *Eje de simetría: ($r = 0$).* En este caso se impone la condición de simetría: $h_{i+1j}^n = h_{i-1j}^n$ para todo el eje Z.
- 4.- *Eje vertical opuesto: ($r = L_R$).* Condiciones iniciales y ninguna restricción ya que se considera un medio semi-infinito, por lo que la red debe ser suficientemente grande como para que el frente de avance no alcance el límite L_R . En el caso particular en el que se estudia la línea divisoria entre dos goteros idénticos puede utilizarse una condición de simetría similar a la del otro eje $h_{i+1j}^n = h_{i-1j}^n$.
- 5.- *Fondo: ($z = L_z$).* Condiciones iniciales y ninguna restricción (medio semi-infinito) siendo L_z lo suficientemente grande como para que el frente de avance no alcance el límite de la red de nodos. Si existiera una capa impermeable, la condición de contorno sería de velocidad vertical nula, $h_{ij+1}^n = h_{ij}^n + \Delta z$.

6.- *Resto de puntos.* Condición inicial: ($t = 0, r > R_0$). Todos los puntos tienen el mismo potencial de presión inicial: $h = h_0 \Leftrightarrow \theta = \theta_0$. Otra condición implementada y quizás más realista, aunque no fue la más usada ha sido situación inicial hidrostática con un contenido de humedad $\theta = \theta_0$ en superficie y $h + z = cte$ para los puntos con menor cota. Esto representa un incremento sensible de humedad con la profundidad.

En condiciones de riego real normalmente se conoce el caudal aplicado, en lugar del contenido de humedad en un entorno de la fuente. Por ello, es de interés expresar la condición de contorno respectiva a la fuente en términos del caudal. Considerando una fuente circular de radio R_0 y caudal q en superficie, la velocidad de infiltración es paralela al eje-Z $\vec{v} = -q/\pi R_0^2 \hat{k}$. En el modelo numérico, la celda que representa la fuente emite un caudal que por unidad de volumen es $q/(\pi R_0^2 \cdot \Delta z)$. De la ecuación de continuidad, se deduce la siguiente relación entre el caudal y la incógnita para todos los nodos bajo la fuente ($r \leq R_0, z = 0$):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + q/(\pi R_0^2 \cdot \Delta z) \quad [4.3]$$

Paralelamente, y dado su interés en agronomía, se ha desarrollado una versión del código que permite estudiar la evolución de la zona saturada en superficie (evolución del charco). Esto implica que las condiciones de contorno en superficie son variables con el tiempo. Efectivamente, cuando el caudal aplicado es mayor que el infiltrado el agua se acumula en la superficie, expandiéndose con simetría radial para un medio isótropo. La forma que adquiere el agua acumulada depende de su tensión superficial y la rugosidad del suelo. Estos dos factores afectan a la altura que adquiere el agua acumulada antes de empezar a expandirse. Esta altura se puede introducir en el código como un parámetro (z_r) de entrada. En la mayoría de las simulaciones se ha estimado la rugosidad del suelo como $z_r = 0.5 \text{ cm}$.¹². Recordar que en expresiones empíricas como las Familias de infiltración del NRCS, se considera un valor de 0.7 cm para la altura del charco sobre una superficie plana y regular. Aunque este parámetro puede crecer con la rugosidad del suelo.

¹² Valores por debajo de este umbral pueden generar problemas de estabilidad numérica en el modelo.

Bajo esta consideración, el agua acumulada en superficie ocupa un volumen cilíndrico de altura $z < z_r$, y radio creciente con el tiempo ($R_0(t)$) siempre que el caudal aplicado sea mayor que el infiltrado. Este hecho se ha implementado en el código definiendo las siguientes condiciones de contorno variables en el tiempo:

- 1.- *Fuente variable en superficie:* ($r \leq R_0(t), z = 0$). Condiciones de saturación bajo presión $h \cong z_r$.
- 2.- *Resto de superficie:* ($r > R_0(t), z = 0$). Condiciones iniciales y velocidad vertical nula $h_{ij+1}^n = h_{ij}^n + \Delta z$

Siendo el radio de la zona saturada una función del tiempo, se puede relacionar con el volumen neto ($V_n(t)$) acumulado bajo el gotero $R_0(t) = \sqrt{V_n(t)/\pi z_r}$; donde z_r es la rugosidad del suelo (parámetro de entrada del código). El volumen neto acumulado sobre la superficie es la diferencia entre el volumen aplicado e infiltrado $V_n(t) = V_a - V$, que son datos conocidos para cada paso de tiempo en el proceso de integración numérica. En este contexto, el radio del charco es una función de valores discretos restringidos (r_i) a la resolución espacial de la red de nodos ($R_0(t) = r_i$); cada vez que el volumen acumulado en superficie supera al cilindro de radio r_i , es decir si $V_n(t) > \pi z_r r_i^2$, el radio de la fuente crece un valor igual a la resolución espacial sobre la dirección radial $R_0(t) = r_i + \Delta r$. Esta acción es recurrente. Este método es aplicable a sistemas de caudal constante o variable en el tiempo, siempre que la función $q(t)$ sea conocida.

4.1.5.- Estabilidad numérica y restricciones.

Algunas restricciones sobre las funciones k , h y θ , son necesarias para asegurar la estabilidad de las soluciones. En general, no se admiten valores menores que el contenido de humedad inicial, ni superiores al de saturación debido a las limitaciones físicas del medio poroso. A pesar de ello, pequeñas desviaciones numéricas pueden producir que en algún nodo se sobrepasen estos límites, lo que es necesario corregir para asegurar la estabilidad de las soluciones, ya que las funciones de caracterización del suelo de van Genuchten-Mualem no están definidas fuera del dominio $\theta = [\theta_r, \theta_s]$.

Se puede demostrar (Carnahan *et al*, 1979) que un método de integración explícito para una EDP parabólica básica es estable si se cumple que $\Delta t < (\Delta x)^2/2$. Siguiendo esta idea, y el esquema propuesto en la aproximación [4.2], su equivalente sería la siguiente restricción que asegura la estabilidad numérica del programa:

$$\Delta t \leq \frac{2C(\Delta s)^2}{(4k + \sum_{i=1}^4 k_i)} \quad [4.4a]$$

Donde Δs es la resolución espacial (normalmente $\Delta s = \Delta r = \Delta z$) y los subíndices i se refieren a la conductividad hidráulica de cada uno de los nodos contiguos al punto de interés (ver figura 4.1). Notar que esta ecuación adimensional tiene en consideración que para valores de conductividad altos, o de capacidad específica bajos es necesario reducir el paso de tiempo para asegurar la estabilidad numérica. Esto se debe a que las variaciones del contenido de humedad en el tiempo son proporcionales al factor k/C , por lo que un paso de tiempo demasiado largo para casos en los que este factor es alto, podría producir incrementos bruscos del contenido de humedad que deriven en inestabilidades numéricas.

Figura 4.1. Esquema explicativo de la ecuación [4.4a].

Teniendo en cuenta que la conductividad hidráulica es máxima en saturación, se puede simplificar la anterior ecuación a:

$$\Delta t \leq \frac{C}{4k_s} (\Delta s)^2 \quad [4.4b]$$

Notar que según las expresiones de van Genuchten-Mualem [3.13a] la capacidad específica del medio en saturación tiende a cero ($(d\theta/dh)_s \rightarrow 0$); este hecho no es del todo realista ya que existe un factor de compresibilidad del agua. Además, bajo estas circunstancias y teniendo en consideración [4.4] la resolución temporal necesaria para zonas saturadas (nodos cercanos a la fuente) tendría que ser infinita ($\Delta t = 0$).

Para evitar este aspecto, se ha limitado el valor de la capacidad específica del medio en saturación a $(d\theta/dh)_s \cong \theta_s/2000$, lo que es equivalente a considerar que el contenido de humedad a partir de cierta cota es el de saturación ($\theta^* = 0.999 \cong 1$). Por consiguiente, y teniendo en cuenta todas estas consideraciones se ha restringido la resolución temporal del código al valor máximo:

$$\Delta t \leq \frac{\theta_s (\Delta s)^2}{8000k_s} \quad [4.4c]$$

Se ha comprobado que esta relación garantiza la estabilidad numérica para todos los casos simulados, en los que se ha considerado $\theta^* > 0.999 = 1$; pudiéndose incluso relajar, en la mayoría de las ocasiones.

4.1.6.- Diagrama de flujo.

El siguiente esquema representa un diagrama de flujo común a todas las versiones del código desarrolladas. Paralelamente, se muestran resultados con el modelo expuesto en este apartado. Se han utilizado coordenadas cilíndricas y el esquema de la ecuación [4.2] para condiciones de contorno variables en superficie. La red de nodos $(N_r, N_z) = (80, 40)$ tiene una resolución espacial de $\Delta r = \Delta z = 0.5 \text{ cm}$. La resolución temporal se ha incrementado progresivamente desde el primer paso de tiempo ($\Delta t_0 = 10^{-7} \text{ min}$) hasta un valor límite ($\Delta t_{\max} = 0.00078 \text{ min}$) impuesto por la restricción de estabilidad [4.4c], a razón de un incremento del 0.02% en cada iteración ($\delta = 1.0002$).

La simulación de este ejemplo se ha realizado para un suelo Franco caracterizado según las ecuaciones [3.13] del catálogo de Carsel y Parrish (1988), considerando un contenido de humedad inicial $\theta_0 = 0.2$ (ver Tabla 4.1). El caudal aplicado $q = 4 \text{ L/h}$ desde una fuente puntual se consideró contante durante un tiempo de riego de $t = 90 \text{ min}$. El tiempo empleado en la integración numérica fue de 2 minutos y 52 segundos utilizando un PC convencional (Intel Core i7 CPU-2.7GHz-RAM-8Gb-).

vG-M	θ_s	θ_r	λ	$\alpha(\text{cm}^{-1})$	$k_s(\text{cm/min})$	m	n	θ_0
Franco	0.43	0.078	0.5	0.036	0.0173	0.359	1.56	0.2

Tabla 4.1. Parámetros del suelo usados en la simulación.

Figura 4.2. Resultados obtenidos con el modelo propuesto. (a) Evolución de la zona saturada en superficie; (b) Perfil de humedad en profundidad y (c) líneas de contenido de humedad constante del bulbo. Tiempo final de la simulación: $t = 90$ min.

Figura 4.3. Diagrama de flujo.

4.2.- SOLUCIONES ANALÍTICAS APROXIMADAS.

En este capítulo se presenta un estudio analítico de la filtración de agua a partir de la ecuación de Darcy, para dos fuentes superficiales de geometría semiesférica y circular. Las ecuaciones obtenidas han sido validadas por integración directa de la ecuación de Richards bajo las condiciones de contorno propuestas a través del modelo numérico presentado en la sección anterior.

En el caso de la fuente semiesférica, y en ausencia de gravedad, se puede considerar que el flujo es radial; para este caso se han obtenido ecuaciones muy similares a las de Chu S.T. (1994) por un camino sensiblemente distinto. La diferencia conceptual más importante entre los dos desarrollos es que en los trabajos de Chu S.T. se considera el efecto gravitatorio, lo que es incompatible con una simetría semiesférica del avance del bulbo mojado. En su lugar, en las expresiones propuestas se ha introducido el efecto de la gravedad a través de una corrección de base física del resultado obtenido para condiciones de gravedad despreciable. Se ha comprobado, por comparación con los resultados obtenidos con la integración de la ecuación de Richards, que esta corrección ajusta satisfactoriamente.

La ausencia de simetría para el flujo infiltrado desde una fuente circular en superficie no permite realizar un desarrollo similar al del caso anterior. Por ello, se ha propuesto una corrección de base física al modelo de la semiesfera que permite aproximar el caudal y volumen infiltrado en función del tiempo, con un número muy reducido de parámetros del suelo que son: la tensión en el frente de avance, la conductividad hidráulica en saturación y los contenidos de humedad inicial y en saturación del suelo, (los mismos que para la fuente semiesférica). En este caso, se ha extendido a más tipos de suelo la validación, al considerar que este sistema tiene un interés mayor porque representa las mismas condiciones de riego que un infiltrómetro de base circular convencional. El reducido número de parámetros del suelo relativos a este modelo simplificado, unido a la posibilidad de realizar medidas en campo con un infiltrómetro de base circular, lo convierte en una herramienta potencial para la caracterización de suelos. En el siguiente capítulo, a parte de los resultados de validación, se propone un método de caracterización del suelo fundamentado en este modelo analítico.

4.2.1 Flujo desde una semiesfera.

Considerar un medio homogéneo, semi-infinito, sobre el que se sitúa una fuente semiesférica en superficie de radio R_0 , saturada y con potencial matricial aproximadamente nulo ($h_0 = 0$) como en el modelo de Green-Ampt (G-A); despreciando el efecto gravitatorio, la ecuación de Darcy [3.5] para el flujo desde esta fuente con simetría radial:

$$\vec{v} = k(\theta)\vec{\nabla}H \Rightarrow v_r = -k_s \frac{\partial h}{\partial r} \quad [4.5]$$

Considerar además como hipótesis, de manera similar al modelo de Green-Ampt, que todo el bulbo se encuentra saturado hasta el frente de avance (r_f). Consecuentemente, el caudal sobre cualquier superficie semiesférica de radio $r \in [R_0, r_f]$ debe ser el mismo en cada instante:

$$q(t) = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = v_r(t) \cdot 2\pi r^2 \quad [4.6]$$

Al estar todo el bulbo en condiciones de saturación, se pueden considerar las variaciones del potencial de presión en el intervalo $[R_0, r_f]$, desde 0 a la correspondiente succión τ_f del frente subsaturado, al estilo de G-A. Así, la combinación de las ecuaciones anteriores lleva a:

$$v_r(t) = -k_s \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{q(t)}{2\pi r^2} \quad [4.7]$$

Al integrar entre los límites R_0 y r_f , se obtiene la siguiente expresión para el caudal, para el instante de tiempo considerado:

$$q(t) = 2\pi k_s \tau_f R_0 \frac{r_f(t)}{r_f(t) - R_0} \quad [4.8]$$

En esta ecuación se ha sustituido el potencial de presión en el frente por su opuesto, la tensión en el frente de avance: $\tau_f = -h_f$, parámetro que como se ha mencionado en el Capítulo 3, se puede calcular a través de la expresión de Neuman [3.28]. Según lo dicho, y siendo el caudal igual a la variación del volumen infiltrado con respecto al tiempo, se puede expresar la siguiente igualdad para el avance del frente mojado:

$$q(t) = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{2\pi}{3} \Delta\theta (r_f^3(t) - R_0^3) \right) = 2\pi k_s \tau_f R_0 \frac{r_f(t)}{r_f(t) - R_0} \quad [4.9]$$

Siendo la diferencia entre el contenido de humedad inicial y en saturación $\Delta\theta = \theta_s - \theta_0$. Esta ecuación se puede integrar en función del tiempo, llegando a la siguiente función en términos del volumen infiltrado:

$$t = \frac{\Delta\theta}{k_s \tau_f R_0} \left[\frac{1}{3} (r_f^3(t) - R_0^3) - \frac{r_0}{2} (r_f^2(t) - R_0^2) \right] \quad [4.10a]$$

$$t = \frac{1}{2\pi R_0 \tau_f k_s} \left[V(t) + \pi \Delta\theta R_0^3 \left(1 - \left(1 + \frac{3V(t)}{2\pi \Delta\theta R_0^3} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \right] \quad [4.10b]$$

Advertir que la ecuación [4.10a], es la misma que aparece en la revisión bibliográfica [3.33b] y que fue deducida por un método sensiblemente distinto por Chu S.T. para el avance del frente mojado en superficie. La diferencia conceptual más importante con respecto al trabajo de Chu es que él asumió el efecto de campo gravitatorio, por lo que en sus ecuaciones el frente de avance aumenta con el ángulo polar (ϑ). No obstante, parte de una aproximación similar a [4.6] lo que es incompatible con un bulbo que no tenga simetría esférica.

Se propone la forma adimensional de la ecuación [4.10b]:

$$t^* = V^* + \frac{3}{2} \left(1 - (1 + V^*)^{\frac{2}{3}} \right) \quad [4.11a]$$

$$q^* = \frac{1}{1 - (1 + V^*)^{-1/3}} \quad [4.11b]$$

Donde [4.11b] es simplemente la derivada sobre el tiempo de [4.11a]. Utilizado los siguientes parámetros de referencia o escalas:

$$V_{ref} = \frac{2}{3} \pi \Delta\theta R_0^3; \quad q_{ref} = 2\pi R_0 \tau_f k_s; \quad t_{ref} = \frac{V_{ref}}{q_{ref}} \quad [REF. 4.1]$$

En consecuencia, las expresiones [4.11] relacionan el volumen infiltrado y caudal como una función del tiempo con tan solo cuatro parámetros físicos del medio, siempre que se cumplan de forma aproximada las hipótesis y condiciones de contorno mencionadas. La utilidad de estas

expresiones no solo reside en el estudio de la evolución de estas dos magnitudes con el tiempo, sino también en la caracterización potencial del suelo a través de los cuatro parámetros que consideran.

Desarrollando en serie de Taylor el término $(1 + V^*)^{\frac{2}{3}}$ se obtiene la siguiente expresión aproximada para tiempos cercanos a cero, en la que se ha introducido también en su forma dimensional:

$$\lim_{t \rightarrow 0} V^*(t) = \sqrt{6t^*} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} V_i(t) = 2\pi R_0^2 \sqrt{2\Delta\theta\tau_f k_s t} = A_{SM} \cdot S\sqrt{t} \quad [4.12a]$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} q^*(t) = \frac{3}{V^*} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} q(t) = \frac{4\pi^2 \Delta\theta R_0^4 \tau_f k_s}{V_i} = \frac{2\pi R_0^2 \sqrt{\Delta\theta\tau_f k_s}}{\sqrt{2t}} = A_{SM} \frac{S}{2\sqrt{t}} \quad [4.12b]$$

Se ha expresado también la ecuación [4.12] utilizando el área de la fuente semiesférica (A_{SM}), y la sorptividad $S = \sqrt{2\Delta\theta\tau_f k_s}$ [cm/min^{1/2}], concepto introducido en la teoría de infiltración de flujo horizontal en una dimensión que se refiere a la infiltración acumulada dividida por la raíz cuadrada del tiempo. La sorptividad representa el área que encierra la curva $(\theta(B))$ en infiltración horizontal unidimensional siendo $B = x/\sqrt{t}$, la variable de Boltzmann (Sayah *et al*, 2016).

Notar que, en los primeros instantes de tiempo el volumen total infiltrado [4.12a] es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo, y por tanto igual al límite para tiempos cercanos a cero de la infiltración vertical en una dimensión, primer término de la ecuación [II.21a] del Anejo.

La sencillez de este modelo reside en que todos los parámetros usados en las ecuaciones [4.12] son constantes del sistema, que se pueden determinar de forma experimental o numérica como en el caso de la tensión τ_f .

Para el caso de tiempos grandes, las expresiones simplificadas tienden a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q^*(t) = 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 2\pi R_0 \tau_f k_s \quad [4.13a]$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V^*(t) = t^* \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} V_i(t) = 2\pi R_0 \tau_f k_s \cdot t \quad [4.13b]$$

Observar que el caudal adimensional tiende a un valor constante ($q^* = 1$), lo que significa que el volumen se incrementa como una función

lineal en el tiempo. En este caso también se encuentra la misma tendencia que en la infiltración vertical unidimensional (Anejo).

Sin embargo, el efecto gravitatorio, a medida que aumenta el tiempo de infiltración, es más predominante hasta alcanzar un efecto máximo para tiempo infinito. Reescribiendo la expresión anterior como $q = 2\pi R_0^2 k_s (\tau_f / R_0)$, se puede considerar que en este contexto, el término entre paréntesis es la pendiente motriz de entrada. El efecto gravitatorio, que hasta el momento no ha sido considerado en esta aproximación, pero que tiene relevancia para tiempos de riego que no sean muy pequeños, debe producir un incremento de la pendiente motriz, y por tanto del caudal infiltrado. Para tener en cuenta este efecto proponemos un aumento de la pendiente motriz asociada a la diferencia del contenido de humedad entre el frente de avance en saturación y el contenido inicial del suelo, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 2\pi R_0^2 k_s \left(\frac{\tau_f}{R_0} + \Delta\theta \right) \quad [4.14]$$

Las computaciones realizadas que se presentan en el capítulo de resultados, confirman la validez de esta aproximación. Para introducir este efecto en las expresiones adimensionales [4.11a-b] se propone usar los siguientes parámetros de referencia:

$$c_g = 1 + \frac{\Delta\theta R_0}{\tau_f}; \quad V_{ref} = \frac{2}{3c_g} \pi \Delta\theta R_0^3; \quad q_{ref} = 2\pi R_0 \tau_f k_s \cdot c_g; \quad t_{ref} = \frac{V_{ref}}{q_{ref}} \quad [REF. 4.2]$$

En este caso, la constante adimensional c_g actúa como un factor corrector que introduce el efecto gravitatorio en el modelo propuesto sin gravedad.

4.2.2.- Flujo desde un disco.

Considerar un medio semi-infinito, con una fuente en superficie que ahora es circular de radio R_0 , saturada y cuya presión sobre la superficie es aproximadamente nula ($h_0 = 0$). En este caso, no existe una simetría en el flujo que nos permita asumir hipótesis de geometría del bulbo del mismo modo que en el apartado anterior. No obstante, en los primeros instantes de tiempo, y según se ha discutido en el apartado anterior podemos asumir que el flujo sea el mismo que en la infiltración vertical, siendo en este caso, la superficie de infiltración la mitad que en la semiesfera $A_D = \pi R_0^2$; Asumiendo esto, el volumen infiltrado será también la mitad:

$$\lim_{t \rightarrow 0} V_i(t) = \pi R_0^2 \sqrt{2\Delta\theta\tau_f k_s t} = A_D \cdot S\sqrt{t} \quad [4.15a]$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} q(t) = \frac{\pi^2 \Delta\theta R_0^4 \tau_f k_s}{V_i} = \frac{\pi R_0^2 \sqrt{\Delta\theta\tau_f k_s}}{\sqrt{2t}} = A_D \cdot \frac{S}{2\sqrt{t}} \quad [4.15b]$$

Pensando que la superficie total de la semiesfera tiene dos componentes proyectadas iguales, una vertical y otra horizontal, para tiempos muy grandes, y en ausencia de gravedad, podemos considerar que el flujo a través de la semiesfera es el mismo en las dos direcciones. Por ello, se propone que el flujo aplicado a través de una semiesfera y en ausencia de gravedad sea en módulo superior al de un disco en un término $\sqrt{2}$. Siendo así, se puede escribir para un disco en ausencia de gravedad y teniendo en cuenta [4.13]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \sqrt{2}\pi R_0^2 k_s \frac{\tau_f}{R_0} \quad [4.16a]$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_i(t) = \sqrt{2}\pi R_0 \tau_f k_s \cdot t \quad [4.16b]$$

Para considerar que el efecto gravitatorio es relevante en tiempos largos, de forma análoga al caso anterior, se propone:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \sqrt{2}\pi R_0^2 k_s \left(\frac{\tau_f}{R_0} + 2\Delta\theta \right) \quad [4.17]$$

Siendo en esta expresión, el término que se añade a la pendiente motriz para simular el efecto gravitatorio, el doble que en el caso anterior de la semiesfera; los resultados obtenidos por integración de la ecuación de

Richards confirman este hecho. Para, su consideración, de forma análoga, puede hacerse con las siguientes escalas:

$$c_g = 1 + \frac{2\Delta\theta R_0}{\tau_f}; V_{ref} = \frac{\sqrt{2}}{3c_g} \pi \Delta\theta R_0^3; q_{ref} = \sqrt{2} \pi R_0 \tau_f k_s \cdot c_g; t_{ref} = \frac{V_{ref}}{q_{ref}} \quad [REF. 4.3]$$

Se llega a las ecuaciones adimensionales siguientes:

$$\lim_{t \rightarrow 0} V^* = \sqrt{3t^*} \quad [4.18a]$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} q^* = \frac{3}{2V^*} \quad [4.18b]$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V^* = t^* \quad [4.18c]$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q^* = 1 \quad [4.18d]$$

Se puede observar que, al igual que en el caso de la semiesfera, el volumen total infiltrado para tiempos pequeños es proporcional a la raíz del tiempo, mientras que para tiempos grandes evoluciona siguiendo una función lineal (con la sorptividad como factor en ambos casos). Las simulaciones de validación que se presentan en el siguiente capítulo confirman la tendencia de estas ecuaciones para el volumen y caudal aplicado [4.12]-[4.13]-[4.18]. Parece razonable pensar que, con independencia del tipo de geometría, en estos límites el volumen infiltrado evolucione siguiendo esta misma tendencia.

Por otro lado, según el desarrollo de Philip (1957) de la teoría de infiltración vertical, la suma de la infiltración acumulada en los primeros instantes con la de tiempos muy elevados se aproxima a la infiltración para tiempos intermedios. Así, la expresión de Philip de dos parámetros, considera la infiltración acumulada como la suma de dos términos, uno proporcional a la raíz del tiempo, preponderante para tiempos cercanos a cero, y otro proporcional al tiempo que prevalece a tiempos grandes. En este contexto, se puede generalizar la teoría de Philip para riego en tres dimensiones, bajo las hipótesis propuestas, siendo la infiltración acumulada el equivalente al volumen infiltrado en tres dimensiones; es decir:

$$V^*(t) = \sqrt{3t^*} + t^* \quad [4.19]$$

Por su parte, en el modelo de Green-Ampt, es la infiltración instantánea la que se puede aproximar como la suma de dos términos; uno

proporcional a la raíz del tiempo que prevalece para tiempos cercanos a cero, y otro lineal, independiente del tiempo, preponderante para tiempos grandes. La suma de ambos términos aproxima la infiltración instantánea para tiempos intermedios. En este sentido, Sayah *et al* (2016) para infiltración en una dimensión integrando numéricamente la ecuación de Richards unidimensional demostraron que resulta ser algo más precisa la expresión de Green-Ampt que la de Philip de dos parámetros.

En tres dimensiones, la infiltración instantánea equivale al caudal infiltrado; por ello se propone una expresión de dos términos basada en el caudal al estilo de Green-Ampt:

$$q^* = 1 + \frac{3}{2V^*} \quad [4.20a]$$

Que integrando nos proporciona la siguiente relación explícita entre el tiempo y volumen infiltrado adimensional:

$$t^* = V^* - \frac{3}{2} \ln \left(\frac{2}{3} V^* + 1 \right) \quad [4.20b]$$

En el capítulo de resultados se presenta la validación de las expresiones deducidas aquí, así como una propuesta para la caracterización del suelo en base a los cuatro parámetros a los que se refieren estas expresiones. Las expresiones analíticas para la fuente circular en superficie, tienen un especial interés ya que describen condiciones similares a las de un infiltrómetro de sección circular que permite medir experimentalmente la función $V(t)$.

4.3.- PRUEBAS EXPERIMENTALES.

En este capítulo se muestran algunos ensayos experimentales que se han desarrollado en esta tesis. El objetivo de estas pruebas es por un lado comprobar la aplicabilidad de los resultados obtenidos en situación de riego real, y por el otro, contrastar la validez de los modelos propuestos dentro del margen de incertidumbre experimental.

Para ello, se han realizado ensayos de filtración en los que se puede observar el avance del bulbo mojado a lo largo de un plano de simetría, dirigidos a validar el código y las soluciones analíticas aproximadas propuestas. También, se presentan pruebas concebidas para estudiar la evolución temporal del frente de avance y zona saturada en superficie.

Paralelamente, se han realizado medidas para la estimación de las propiedades físicas y parámetros de van Genuchten-Mualem, de los suelos utilizados, que son necesarios para el desarrollo de las simulaciones. De este modo, se ha medido la densidad aparente, la textura, la conductividad hidráulica en saturación, y los contenidos de humedad inicial y en saturación de los suelos con los que se ha trabajado. El resto de parámetros se han estimado con ROSETTA (Schaap *et al*, 2001), y en el caso de la tensión en el frente con la integral de Neuman [3.28]. Algunos de estos métodos experimentales se han recogido en el Anejo IV.

4.3.1.- Ensayo de infiltración entre placas.

Para observar el flujo y frente de avance del agua se realizó un estudio de la filtración entre dos placas sólidas y transparentes. El experimento permite medir la evolución del bulbo a lo largo de un plano de simetría, y en particular para siete radios seleccionados.

El dispositivo consta de dos placas en disposición vertical y paralelas entre sí, de 1.5 metros de longitud (Figura 4.4). Las placas fabricadas en metacrilato transparente, están separadas una distancia de 4 cm. En su interior se encuentra el suelo a estudio. El agua se introduce desde un gotero en superficie de caudal constante 1 L/h , compensante, aunque controlado a través de la presión de entrada al circuito. El dispositivo permite visualizar el avance del frente mojado en función del tiempo.

Por la longitud de las placas, en cada ensayo se pueden realizar medidas sobre dos bulbos paralelos. Para cada uno, se han obtenido datos sobre siete direcciones radiales del frente de avance (múltiplos de 30°), hasta un tiempo máximo de 2 horas en que el agua alcanza el límite del dispositivo.

Se realizaron dos ensayos, con el mismo suelo, caudal aplicado, y tratando de mantener la misma compactación; por lo que podemos considerar cuatro pruebas bajo las mismas condiciones experimentales. Por tanto, se han promediado datos de las cuatro pruebas sobre las direcciones radiales: 0°, 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°, con respecto a la horizontal. El suelo utilizado es del sitio *Club de golf de Cabanillas del Campo* (Guadalajara) de coordenadas (40.65N, 3.24E). Las características de este suelo, que han sido medidas y/o estimadas experimentalmente, se resumen en la Tabla 4.2.

La textura del suelo fue determinada por el método del densitómetro de Bouyoucos (A.IV.iv). Con esta información y la densidad aparente se pudieron estimar con ROSETTA los parámetros asociados a las expresiones de van Genuchten-Mualem que se presentan en la fila (2) de la Tabla 4.2. Por otro lado, se determinaron experimentalmente los contenidos de humedad en saturación e inicial aparente del suelo, por diferencias de masa tras calentamiento; para ello, se utilizaron 30 muestras de suelo que fueron sometidas a temperaturas de ebullición (110°C) durante al menos 24h. Un primer grupo de 15 muestras se secó a partir de condiciones de humedad inicial, mientras que las 15 muestras restantes fueron saturadas por contacto con agua durante al menos 24h antes de ser sometidas al proceso de secado. Los contenidos de humedad inicial y en saturación se han estimado como la suma del residual (obtenido con ROSETTA), más el inicial aparente (eliminado en horno) en cada uno de los dos casos. Se pueden ver más detalles en el Anejo IV.

Figura 4.4. Experimento de filtración entre placas paralelas y transparentes. Laboratorio de Hidráulica de la ETSIAAB. (a) Fotografía de todo el dispositivo; (b) Detalle de las marcas del frente de avance en función del tiempo a lo largo de los siete radios estudiados.

Suelo	(1)	$\tilde{\theta}_0$	θ_s	$k_s(cm/min)$	$\rho(g/cm^3)$	%Arena	%Limo	%Arcilla
C-C		0.039	0.598	0.133	1.23	40	45	15
Tipo	(2)	θ_0	θ_s	$k_s(cm/min)$	θ_r	$\alpha(cm^{-1})$	m	n
Franco		0.095	0.422	0.0288	0.056	0.0068	0.359	1.605

Tabla 4.2. Resumen de valores medidos y estimados del suelo de Cabanillas Cribado (C-C). La densidad aparente y los contenidos de humedad inicial aparente ($\tilde{\theta}_0$) y en saturación fueron medidos experimentalmente en el laboratorio de Hidráulica. La textura fue medida en el laboratorio de Edafología. Los valores de α , n , y k_s fueron estimados con ROSETTA (Schaap *et al*, 2001) a través de la información experimental de su textura y densidad aparente. La fila (1) representa los valores medidos experimentalmente, mientras que la fila (2) muestra los valores estimados por ROSETTA. Un resumen de las técnicas experimentales utilizadas para la medición de estos parámetros, así como algunas cotas de error, pueden encontrarse en el Anejo.

Finalmente, se obtuvo experimentalmente la conductividad hidráulica en saturación del suelo con un permeámetro de carga variable. Todos los datos medidos experimentalmente y relativos a este suelo se presentan en la fila (1) de la Tabla 4.2.

El experimento permite extraer conclusiones sobre la simetría radial del riego por goteo, así como del efecto de la fuerza gravitatoria. El valor

de k_s elegido para la comparación frente a las simulaciones fue el estimado por ROSETTA ya que parecía más ajustado a la realidad de este suelo Franco que el dato medido experimentalmente.

Al haberse obtenido cuatro pruebas independientes (2 bulbos en cada ensayo) bajo las mismas condiciones experimentales, se pueden promediar los frentes de avance para cada una de las direcciones radiales. Además, si tenemos en cuenta la simetría radial del experimento, junto con el efecto gravitatorio podemos considerar que las direcciones de ángulos suplementarios, es decir: 0° - 180° , 30° - 150° y 60° - 120° , son esencialmente las mismas, por lo que el promedio en cada instante de tiempo se puede ajustar a 8 datos experimentales. En caso de despreciar el efecto gravitatorio (simetría radial), se podrían promediar todos los datos, con independencia de su dirección, lo que supondría un total de 28 medidas del frente de avance para cada instante de tiempo.

El error sistemático estimado de las medidas directas asociadas a este experimento de filtración (a pesar de que la precisión de los aparatos de medida pueda ser mayor) es el siguiente:

- 1.- Ángulo: $\Delta\theta = 2^\circ$. Transportador de ángulos.
- 2.- Distancia del frente de avance: $\varepsilon_s = 0.2 \text{ cm}$. Cinta métrica.
- 3.- Tiempo: $\Delta t = 5 \text{ s}$. Cronómetro manual.

El error total del frente de avance para cada instante de tiempo, siendo N el número de medidas consideradas bajo las mismas condiciones experimentales se ha estimado a través de la composición del error sistemático y aleatorio que se expone en el Anejo IV.

Una tabla con todas las medidas obtenidas para este experimento se pueden encontrar en el Anejo V.

4.3.2.- Experimentos de infiltración en campo.

En las instalaciones de prácticas del campus universitario de la Escuela de Ingenieros Agrónomos se han realizado una serie de ensayos con el objetivo de medir para un grupo de goteros controlado, el avance del frente en superficie y la evolución del charco o zona saturada. El interés de este experimento reside en el estudio del fenómeno de infiltración y contraste del código en situación de campo (riego por goteo en viñedo).

La Tabla 4.3 resume los parámetros medidos experimentalmente de este suelo. Como en apartados anteriores se ha medido la densidad aparente del suelo y se realizó un estudio de su textura, con la finalidad de poder estimar los parámetros de van Genuchten-Mualem a través de ROSETTA. Adicionalmente, se obtuvo por exposición a temperaturas de 110°C, el contenido de humedad en saturación e inicial aparente. También se realizó una medición de la conductividad hidráulica en saturación con un permeámetro de carga variable.

Suelo		$\tilde{\theta}_0$	θ_s	$k_s(cm/min)$	$\rho(g/cm^3)$	%Arena	%Limo	%Arcilla
C-P	(1)	0.030	0.583	0.165	1.33	52	33	15
		θ_0	θ_s	$k_s(cm/min)$	θ_r	$\alpha(cm^{-1})$	m	n
Franco-arenoso	(2)	0.083	0.410	0.0249	0.053	0.0136	0.328	1.488

Tabla 4.3. Resumen de los valores utilizados del suelo Campo de Prácticas (C-P). El contenido de humedad en saturación, y el valor para la conductividad hidráulica en saturación han sido medidos directamente en el laboratorio de Hidráulica a través de los métodos explicados en el Anejo. Los valores de α , n y m , han sido estimados con ROSETTA (Schaap *et al*, 2001) a través de la información experimental de su textura y densidad aparente. El valor del contenido de humedad inicial fue estimado como la suma del contenido de humedad inicial aparente ($\tilde{\theta}_0$) y el residual estimado por ROSETTA. La fila (1) representa los valores medidos experimentalmente, mientras que la fila (2) muestra los valores estimados.

En este caso, se ha utilizado en las simulaciones el valor experimental de k_s , mayor que el estimado por ROSETTA, por considerar que era más aproximado al real.

Figura 4.5. Foto de la parcela del campo de prácticas de la Escuela de Ingenieros Agrónomos (ETSIAAB) de la UPM, en la que se realizaron los ensayos. Localización: 40°26'37"N-3°44'19"W.

4.3.2.1. Frente de avance en superficie.

Se seleccionaron un grupo de 15 goteros del campo de prácticas por su buena ubicación y condiciones de homogeneidad en superficie. Estos goteros aparentemente no tenían materia orgánica en su entorno, estando en terreno plano. El caudal aplicado para todos los goteros fue de 2.3 L/h y se mantuvo constante durante el desarrollo del experimento controlando la presión de salida en la cabeza del circuito. En estas condiciones se realizaron medidas del avance del frente en superficie (diámetro medio) durante 3 horas. Se ha considerado las mismas condiciones experimentales para todos los goteros, lo que permite promediar los diámetros del frente de avance en función del tiempo.

Se ha estimado el error sistemático cometido en cada medida del diámetro del frente avance en superficie como: $\varepsilon_s = 1\text{cm}$, a pesar de que la cinta métrica tiene más precisión. Al tratarse de $N = 15$ medidas realizadas bajo las mismas condiciones experimentales el error total del avance del frente mojado en superficie se reduce (Anejo IV).

Este experimento se ha utilizado para contrastar los resultados obtenidos con el código en la simulación del frente de avance en superficie bajo condiciones de riego real. Para ello, se ha estimado que el frente de avance observable empíricamente corresponde a un

incremento del contenido de humedad inicial uno superior al 5%, es decir: $\theta_f = 1.05\theta_0$.

4.3.2.2. Evolución de la zona saturada.

En el estudio del frente de avance se utilizaron goteros de caudal constante 2.3L/h. Bajo estas condiciones, el charco no fue apreciable hasta pasadas varias horas de riego. Por ello, y para poder estudiar la evolución del charco mojado se instaló un ramal con un grupo de goteros auto-compensantes de un mayor caudal (hasta 24 L/h). Se obtuvo una única medida del diámetro del charco en cada instante de tiempo por gotero, por lo que el error total de cada dato es error estimado de precisión del aparato (cinta métrica): $\varepsilon_s = 2cm$.

En estas condiciones se midió la evolución del diámetro del charco para cada una de estas fuentes hasta un límite de 60 minutos.

Los resultados de estos dos ensayos de campo se presentan en el capítulo siguiente; el ajuste a las simulaciones realizadas con el código es satisfactorio dentro del margen de error experimental.

CAPITULO 5:

RESULTADOS Y DISCUSIÓN.

5.1.- Validación del modelo numérico.

5.1.1. Validación frente a soluciones analíticas.

5.1.1.1. Fuente puntual.

5.1.1.2. Fuente circular.

5.1.2. Validación frente a otro modelo numérico. HYDRUS 2D/3D.

5.1.3. Contraste experimental.

5.1.3.1. Experimento de infiltración entre placas.

5.1.3.2. Evolución del frente de avance en superficie.

5.1.3.3. Evolución de la zona saturada en superficie.

5.2.- Validación de las soluciones analíticas propuestas y aplicaciones.

5.2.1. Fuente semiesférica.

5.2.2. Fuente circular.

5.2.3. Extensión de la validación a otros tipos de suelo y condiciones.

5.2.4. Aplicación a la caracterización del suelo.

5.3.- Evolución de la zona saturada en superficie y aplicaciones.

5.3.1.- Contraste frente a otros modelos.

5.3.2.- Estudio del radio límite.

5.3.2.1.- Suelos del tipo Gardner

5.3.2.2.- Suelos del tipo Clapp & Hornberger.

5.3.2.3.- Suelos del tipo van Genuchten-Mualem.

5.3.3.- Discusión de los resultados obtenidos para el radio límite.

- §•§ -

En este capítulo se presentan los resultados numéricos, teóricos y experimentales de esta tesis. En la primera sección, se muestran los resultados de validación del código desarrollado para la integración numérica de la ecuación de la filtración en tres dimensiones. Se han utilizado tres vías de validación que verifican la validez del código.

En la Sección 5.2, se presenta la validación de las soluciones analíticas aproximadas expuestas en el capítulo anterior, así como una propuesta de su aplicabilidad para la caracterización del suelo. La validación de las expresiones analíticas se ha llevado a cabo íntegramente a través del modelo numérico propuesto. Al final de esta sección, se propone un método de caracterización del suelo basado en los cuatro parámetros asociados a estas expresiones analíticas simplificadas, y se muestra un estudio de su validez.

Finalmente, en la Sección 5.3 se presenta un estudio de la evolución de la zona saturada en superficie, y su radio límite, bajo condiciones de riego por goteo superficial, para los tres principales catálogos de suelos citados en el Apartado 3.1.3. Estos resultados son de utilidad potencial para el diseño de sistemas de riego por goteo.

5.1. VALIDACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO.

La validación del código se ha realizado por tres vías. En un primer lugar, por comparación con las soluciones analíticas de Warrick y Lomen (1974-76) bajo las mismas condiciones de contorno y suelo del tipo Gardner [3.11], que asume el modelo analítico. Para extender la validez del código frente a otros tipos de suelo como van Genuchten-Mualem [3.13], se han comparado resultados frente a otro modelo numérico consolidado: HYDRUS 2D/3D. Finalmente, se presentan tres contrastes frente a experimentos.

5.1.1.- Validación frente a soluciones analíticas.

En el Epígrafe 3.2.2.2 se han detallado las soluciones analíticas de Warrick (1974) y Warrick y Lomen (1976). Este modelo analítico describe la evolución temporal del flujo para un medio homogéneo y semi-infinito, bajo una fuente puntual (y circular) en superficie que está saturada, habiendo considerado la conductividad hidráulica como una función exponencial del potencial matricial [3.11].

En éste apartado se van a comparar las soluciones analíticas citadas con los resultados que arroja el programa propuesto bajo las mismas condiciones de contorno e hipótesis.

5.1.1.1. Fuente puntual.

En la solución analítica de Warrick (1974) para una fuente puntual en superficie se asumen las siguientes condiciones: (1) el medio es homogéneo y semi-infinito, (2) la conductividad hidráulica sigue la expresión de Gardner [3.11a], (3) la derivada de la conductividad hidráulica con respecto al contenido de humedad es constante [3.21] y (4) la fuente puntual en superficie suministra un caudal constante. Bajo estas condiciones se llega al resultado [3.23], que con [3.24] y las escalas [REF.3.2] permiten la obtención del potencial de flujo ϕ para cada valor de espacio y tiempo. Conocido el potencial del flujo matricial, la conductividad hidráulica se obtiene a través de [3.20], y por tanto, el potencial matricial a través de la expresión de Gardner. El contenido de humedad θ , se obtiene finalmente con la ecuación [3.11b] que es consecuencia directa de la aproximación [3.21].

La integral impropia de la ecuación [3.23] se ha resuelto en el entorno MATLAB a través del método de la cuadratura de Gauss-Laguerre, que se expone en el Anejo I. Para ello, se han utilizado polinomios de Laguerre de grado $s = 68$. Las raíces de estos polinomios (puntos sobre los que se aproxima la integral numérica) se han determinado gracias a la función de MATLAB '*laguerreL*'.

Por otro lado, se ha utilizado una versión del código en coordenadas cilíndricas similar a [4.2] para resolver la ecuación de Richards implementando las mismas condiciones de contorno y función conductividad hidráulica que asume la solución analítica.

La siguiente gráfica muestra una comparación de los resultados obtenidos a través de los dos métodos. Se presenta el contenido de humedad después de 60 minutos de riego a un caudal constante de $q = 50 \text{ cm}^3/\text{min}$ (3L/h) sobre el suelo de la tabla 5.1 (Sable DEK):

θ_s	θ_0	$\alpha(\text{cm}^{-1})$	$\kappa(\text{cm}/\text{min})$	$k_s(\text{cm}/\text{min})$
0.3	0.125	0.073	0.557	0.0975

Tabla 5.1. Parámetros usados en las simulaciones. Suelo Sable DEK (Elmaloglou & Diamantopoulus, 2009).

Podemos observar que ambas gráficas son casi coincidentes. Una segunda prueba se ha realizado comparando resultados en fase de redistribución, es decir, algún tiempo después de finalizar el riego. En la gráfica 5.2 se presentan los resultados obtenidos entre los dos modelos 30 minutos después de finalizar un riego de una hora, bajo las mismas condiciones que se presentan en la Figura 5.1.

Para estudiar la redistribución con el código simplemente se han implementado condiciones de contorno para una fuente puntual de caudal constante 3 L/h durante un periodo de 60 minutos, que se reduce a caudal nulo (0 L/h) a partir de ese instante. Se han mantenido las curvas que caracterizan el suelo para la humectación como para la desecación, sin considerar efectos de histéresis.

Figura 5.1. Contenido de humedad después de 60 minutos de riego desde fuente puntual a caudal 3 L/h sobre el suelo de la Tabla 5.1. (a) Modelo analítico, (b) modelo numérico propuesto.

Por su parte, en la solución analítica se ha utilizado el principio de superposición, propiedad que cumple la ecuación de la filtración en este caso [3.22], ya que bajo las hipótesis de Warrick es una EDP lineal.¹³ Este principio establece que la solución de una ecuación diferencial lineal para un sistema dinámico a causa de dos fenómenos distintos, se puede obtener como la suma de las soluciones particulares relativas a dos sistemas independientes en los que actúan de forma separada cada uno de estos dos fenómenos. Por tanto, en nuestro contexto, hemos obtenido la solución de la ecuación [3.22] para las condiciones de redistribución mencionadas con anterioridad, restando el potencial de flujo matricial calculado para un tiempo de riego de 90 minutos a caudal 3L/h, del efecto de 30 minutos de riego bajo condiciones con el mismo caudal. Los resultados presentados en la Figura 5.2 están obtenidos para el mismo tipo de suelo descrito en la tabla 5.1. Nuevamente, se

¹³ Las ecuaciones diferenciales lineales cumplen los principios de linealidad y superposición, Simmons (1998).

observa una buena coincidencia entre los resultados analíticos y numéricos.

Figura 5.2. Contenido de humedad después de 60 minutos de riego a caudal 3L/h más 30 minutos en fase de redistribución. (a) Modelo analítico, (b) Modelo numérico propuesto. Parámetros del suelo de la tabla 5.1.

Aunque el riego sub-superficial no es objetivo prioritario de la tesis, para una mayor generalidad, también se ha testado el código en condiciones de flujo sub-superficial desde una fuente puntual de caudal constante. Para ello se ha utilizado la ecuación [3.24] que describe la evolución del flujo de potencial matricial desde una fuente puntual en un medio infinito. Los parámetros de referencia son como en el caso anterior [REF.3.2]. El cálculo del resto de funciones y variables del problema es directo desde ϕ_B^* , siguiendo el mismo procedimiento que se establece para el caso de infiltración superficial. Por su parte, la definición de esta nueva condición de contorno en el código tan solo implica cambiar la ubicación de la fuente sobre el eje Z.

La Figura 5.3 presenta la comparativa de resultados entre los dos modelos después de un riego de 120 minutos desde una fuente puntual enterrada, bajo las mismas condiciones de caudal y suelo mencionadas. La fuente se sitúa en el origen ya que la solución analítica está definida en este caso, para un medio poroso infinito. El signo del eje vertical se

ha corregido ya que la solución analítica lo considera positivo hacia abajo.

Como en los dos casos anteriores existe una muy buena correlación entre los resultados analíticos y numéricos, por lo que podemos concluir que el programa queda validado en condiciones de riego desde una fuente puntual.

Figura 5.3. Contenido de humedad después de 120 minutos de riego sub-superficial a caudal 3L/h. (a) Modelo analítico, (b) Modelo numérico propuesto. Parámetros del suelo en tabla 5.1.

5.1.1.2. Fuente circular.

La ecuación [3.25]-[REF.3.2] describe la evolución temporal del potencial de flujo matricial adimensional según la aproximación analítica de Warrick y Lomen (1976) para un sistema con una fuente circular de radio R_0 en superficie. Esta integral impropia depende de las funciones de Bessel de primera especie (Anejo I.iv), y se ha resuelto con MATLAB arrojando un resultado que en términos del contenido de humedad se representa en la Figura 5.4. La relación entre el potencial de flujo matricial adimensional y el contenido de humedad se obtiene del mismo modo que en el epígrafe anterior.

Los resultados de validación que se presentan en la siguiente figura corresponden a un disco de radio constante $R_0 = 10\text{cm}$, por el que se

aplica un caudal de 3L/h después de 60 minutos de riego. La solución numérica está definida para las mismas hipótesis y condiciones de contorno de las soluciones analíticas, y el suelo recogido en la Tabla 5.1.

Figura 5.4. Contenido de humedad después de 60 minutos de riego bajo disco de radio constante $R_0 = 10\text{cm}$ y caudal aplicado de 3L/h. (a) Modelo analítico, (b) Modelo numérico propuesto. Parámetros del suelo en Tabla 5.1.

El ajuste del modelo numérico propuesto a las soluciones analíticas es condición suficiente para garantizar su validez, tanto para riego superficial como sub-superficial desde una fuente puntual y un disco. Además, el hecho de que cambien las condiciones iniciales, de contorno, o incluso las funciones de caracterización del suelo así como los parámetros del mismo, no debe afectar a la validez del modelo numérico de integración, siempre que estas condiciones estén bien definidas. A pesar de ello, y para extender estos resultados de validación, en el siguiente epígrafe presentamos una prueba adicional sobre un suelo caracterizado con funciones del tipo van Genuchten-Mualem (1980), y sin las restricciones del modelo analítico de Warrick y Lomen. Por lo general, este tipo de funciones de caracterización se ajustan mejor a las condiciones del suelo real que las del tipo Gardner.

5.1.2.- Validación frente a otro modelo numérico. HYDRUS 2D/3D.

De todos los modelos numéricos presentados en el Capítulo 3, posiblemente el más consolidado sea HYDRUS 2D/3D (Simunek et al, 2006), debido a su eficiencia, facilidad de uso y el amplio espectro de pruebas experimentales y numéricas con respecto a las que ha sido contrastado. En este apartado, se presenta una comparativa entre los resultados que proporcionan nuestro programa y HYDRUS 2D/3D, para una simulación bajo las mismas condiciones de riego. Para ello, se ha elegido un suelo caracterizado por las expresiones de van Genuchten-Mualem [3.13], dada su mejor adaptación a las condiciones reales del suelo.

En la siguiente figura se presentan resultados obtenidos con HYDRUS 2D/3D (líneas) frente al modelo numérico propuesto (puntos). Se han elegido condiciones de riego superficial desde un disco en saturación de radio constante (R_0). Se presentan cinco simulaciones para cada uno de los dos modelos en las que se ha incrementado el radio de la zona saturada en superficie desde de 6 cm hasta 15 cm. El gráfico representa la evolución del volumen infiltrado frente al tiempo durante dos horas de riego. Se ha utilizado un suelo Franco de referencia del Catálogo de Carsel y Parrish (1988), asumiendo un contenido de humedad inicial igual a $\theta_0 = 0.20$. Los parámetros utilizados se resumen en la Tabla 5.2.

Suelo	θ_s	θ_r	$\alpha(cm^{-1})$	$k_s(cm/min)$	m	n	λ	θ_0
Franco	0.43	0.078	0.036	0.0173	0.359	1.56	0.5	0.2

Tabla 5.2. Parámetros utilizados en la validación del modelo numérico propuesto con HYDRUS 2D/3D. Suelo Franco de referencia del catálogo de Carsel y Parrish (1988). Contenido de humedad inicial $\theta_0 = 0.20$.

Se puede observar cómo el volumen infiltrado crece con el radio del disco para cada instante del tiempo. La figura muestra que los resultados obtenidos a través de los dos programas ajustan satisfactoriamente. Las soluciones entre dos modelos de integración numérica deben ser convergentes cuando la resolución espacio-temporal es infinita, por lo que un mejor ajuste podría obtenerse reduciendo el tamaño de la red con la que se hicieron las simulaciones en ambos códigos.

Figura 5.5. Volumen infiltrado frente al tiempo. Se presentan cinco simulaciones del riego desde un disco en superficie de radio constante: $R_0 = 6, 7, 8, 10$ y 15 cm. Comparación entre el código propuesto (puntos) frente a HYDRUS 3D (líneas). Los parámetros del suelo están recogidos en la Tabla 5.2.

5.1.3.- Contraste experimental.

Con objeto de realizar un test adicional del código, pero sobre todo para evaluar la aplicación de los métodos propuestos a casos reales de riego por goteo se realizó un grupo de contrastes experimentales.

Teniendo en cuenta que las medidas experimentales, aún en condiciones de laboratorio muy controladas, están sometidas a cierta indeterminación, cabe esperar un peor ajuste de los datos con respecto a las predicciones del programa. Las dificultades existentes a la hora de caracterizar el suelo, la heterogeneidad y compactación en profundidad, así como el error experimental inherente a las medidas, son las causas principales de las diferencias existentes en este caso.

5.1.3.1. Experimento de infiltración entre placas.

Como se ha mencionado en el Apartado 4.3.1 se realizaron dos ensayos entre placas transparentes de metacrilato que permiten observar el avance del frente mojado. Se aplicó un caudal constante en superficie de $1 L/h$ durante 120 minutos, observando que la zona bajo el gotero se encontraba saturada sin charco apreciable; por lo que se ha simulado el experimento considerando condiciones de contorno para fuente puntual (gotero) de caudal $q = 1L/h$. Como la lámina tiene un grosor despreciable frente a su longitud (ver detalles del dispositivo en 4.3.1) podemos considerar una aproximación bidimensional sobre el plano-XZ; las simulaciones relativas a este ensayo se han realizado utilizando una versión del código en coordenadas cartesianas sobre este plano, utilizando una aproximación de Adams-Bashforth de grado $s = 2$ sobre la derivada temporal. Se pueden encontrar más detalles sobre esta versión del código en el Anejo VI.i.

Hemos considerado una caracterización del suelo según las funciones de vG-M, utilizando valores obtenidos experimentalmente de los contenidos de humedad en saturación e inicial aparente; el resto de parámetros utilizados se han estimado con ROSETTA a partir de información experimental obtenida de su textura y densidad aparente. Los parámetros del suelo se resumen en la Tabla 4.3.

En la siguiente figura se muestran los resultados del frente de avance obtenidos en los dos ensayos realizados, y su comparación con la simulación. El frente de avance experimental es una medida directa

obtenida por inspección visual. Por su parte, el frente de avance en simulación se ha estimado sobre cada punto que supera en un 5% el valor del contenido de humedad inicial: $\theta_f = 1.05\theta_0 \cong 0.1$.

		EXPERIMENTAL		ROSETTA				
Suelo	Tipo	θ_s	θ_0	$k_s(cm/min)$	θ_r	$\alpha(cm^{-1})$	m	n
C-C	Franco	0.598	0.095	0.0288	0.056	0.0068	0.359	1.605

Tabla 5.3. Resumen de valores medidos y estimados del suelo Cabanillas Cribado (C-C). Los contenidos de humedad en saturación e inicial fueron hallados experimentalmente en el laboratorio de Hidráulica. Los valores de α , n , y k_s fueron estimados con ROSETTA (Schaap et al, 2001) a través de información experimental obtenida de su textura y densidad aparente.

Figura 5.6. Avance del frente mojado en función del tiempo. (a) Avance en superficie, (b) avance en profundidad bajo el gotero. Suelo de la Tabla 5.3. Resultados de la simulación (puntos negros) frente a ensayos (círculos).

Se observa que las simulaciones ajustan bien a los datos experimentales del avance del frente mojado sobre la superficie. Sin embargo el programa sobreestima la profundidad alcanzada por el frente. Este hecho, sin duda puede deberse a una excesiva compactación del medio en la dirección vertical, ya que la profundidad alcanzada esperable debe ser igual o superior a la del avance del frente en superficie (como predice la simulación).

De la simulación se deduce que el efecto gravitatorio es despreciable para los parámetros del suelo considerados, ya que el frente de avance en profundidad es prácticamente el mismo que en superficie después de 105 minutos de riego. Suponiendo simetría radial, se pueden promediar todos los datos experimentales independientemente de su dirección, lo que supone un promedio de 28 datos para cada instante del tiempo. Lo que no sería del todo correcto debido a la compactación del suelo. La siguiente gráfica presenta la comparativa entre simulación y experimentos promediando todos los datos:

Figura 5.7. Avance del frente mojado. Promedio de todas las direcciones para cada instante del tiempo. Suelo C-C de la Tabla 5.3.

Como vemos en la gráfica, los resultados experimentales obtenidos muestran un avance del frente menor, lo que es debido al peso de los puntos cercanos al eje vertical, donde la excesiva compactación del suelo frena el avance en profundidad. No obstante, la similitud en la tendencia que muestran las dos gráficas y el ajuste razonable del frente mojado en superficie, permite concluir que el código supera satisfactoriamente el test dentro de un margen de incertidumbre experimental razonable. Lógicamente, la coincidencia aumentaría si se modificasen ligeramente los parámetros.

5.1.3.2. Evolución del frente de avance en superficie.

Con intención de realizar una prueba de infiltración más ajustada a la realidad del riego se llevó a cabo un experimento en campo. Para ello, se utilizaron las instalaciones del Campo de Prácticas de la Escuela de Ingenieros Agrónomos de la UPM (ETSIAAB).

En la Tabla 5.4 se resumen los parámetros utilizados para la simulación de este suelo, en función de los datos medidos y estimados con ROSETTA. El contenido de humedad inicial, en saturación y la constante de conductividad hidráulica se han medido experimentalmente. El resto de los parámetros se han estimado con ROSETTA a partir de la información textural y densidad aparente.

Suelo	Tipo	EXPERIMENTAL			ROSETTA			
		θ_0	θ_s	$k_s(cm/min)$	θ_r	$\alpha(cm^{-1})$	m	n
C-P	Franco-arenoso	0.083	0.583	0.165	0.053	0.0136	0.328	1.488

Tabla 5.4. Resumen de los valores utilizados del suelo Campo de Prácticas (C-P).

Como se mencionó en la Sección 4.3, se han realizado medidas sobre 15 goteros asumiendo las mismas condiciones experimentales para todos ellos. Para un caudal de $q = 2.3 L/h$ se ha observado que no hubo formación de charco, o este era despreciable, hasta los 150 minutos de riego. Por ello, se ha utilizado para la simulación una versión del programa en coordenadas cilíndricas con condiciones de contorno de fuente circular en superficie de radio $R_0 = 1 cm$, en el que se introduce un caudal constante de 2.3 L/h. El frente de avance en la simulación, como en el caso anterior, se ha estimado sobre cada punto que supera en un 5% el valor del contenido de humedad inicial: $\theta_f = 1.05\theta_0 \cong 0.087$.

La siguiente figura muestra la comparación entre los resultados numéricos (puntos sólidos) y experimentales (círculos). Los resultados del ensayo son un promedio de las observaciones recogidas para los 15 goteros.

Observamos que la simulación ajusta el frente de avance en superficie razonablemente hasta la primera hora de riego, pero lo sobreestima para tiempos superiores. Esto puede ser debido a varias causas como por ejemplo un tamaño de la zona saturada inferior al asumido en la simulación. También hay que tener en cuenta que el suelo en condiciones reales pierde agua en superficie por evaporación, lo que no

tiene en cuenta el modelo. Otra causa de esta desviación puede ser un valor excesivo para el parámetro de la conductividad hidráulica en saturación utilizado en la simulación. En cualquier caso, el ajuste se puede considerar satisfactorio dentro de un margen experimental razonable.

Figura 5.8. Avance del frente en superficie. Parámetros del suelo C-P (Campo de prácticas) en la Tabla 5.4.

5.1.3.3.- Evolución de la zona saturada en superficie.

Una de las características principales del modelo es que tiene la capacidad de estudiar la evolución de la zona saturada (charco) en superficie. Esta característica diferencial con respecto a otros modelos existentes lo convierte en una herramienta interesante para la modelización y diseño de riegos.

En el Campo de prácticas de la ETSIAAB, suelo de la Tabla 5.4 (C-P), se ha realizado un ensayo para medir la evolución del charco mojado bajo goteros auto-compensantes de caudal aplicado constante igual a 4, 8 y 24 L/h. Las observaciones se han comparado con simulaciones obtenidas con el modelo propuesto (Figura 5.9), en el que se han implementado condiciones de contorno variables en el tiempo como las expuestas en el Apartado 4.1.4.

Figura 5.9. Evolución de la zona saturada (charco). Resultados para tres goteros de distinto caudal. Observaciones (círculos) frente al resultado de la simulación (línea continua). Parámetros del suelo (C-P) en la Tabla 5.4.

La aproximación de la simulación a la situación real tiene un comportamiento satisfactorio, dentro del margen de error experimental. Esto implica que los parámetros del suelo estimados con ROSETTA y determinados experimentalmente de la Tabla 5.4 no están muy alejados su valor real. No obstante, además de los errores, cabe también esperar que haya diferencias de las propiedades hidro-físicas debajo de cada uno de los goteros.

Hay que tener en cuenta que estas observaciones están muy afectadas por las condiciones de heterogeneidad del suelo en superficie y evaporación. La existencia de materia orgánica en el suelo, rocas, grietas o cierta inclinación, son aspectos no controlados que limitan la precisión del modelo. Es por tanto necesario, considerar cierto margen de error en la modelización de riegos. Con la modificación de los parámetros más inciertos, podrían reducirse las diferencias entre simulaciones y observaciones.

5.2.- VALIDACIÓN DE SOLUCIONES ANALÍTICAS PROPUESTAS Y APLICACIONES.

En este apartado se presenta la validación de las soluciones analíticas simplificadas introducidas en el Capítulo 4.2 así como una propuesta de su aplicación para la caracterización de suelos. La validación se ha realizado por comparación de resultados respecto a la integración numérica de la ecuación de Richards en tres dimensiones con el modelo propuesto. Se han considerado las expresiones de caracterización del suelo de van Genuchten-Mualem, ecuaciones [3.13].

Se presentan resultados de validación para una fuente semiesférica y circular en superficie, usando suelos del catálogo de referencia de Carsel y Parrish (1988). En todos los casos probados, la validación ha resultado satisfactoria, independientemente de las condiciones de contorno, suelo, o caudal aplicado.

Al final del capítulo se propone un método de caracterización del suelo, respecto al reducido grupo de parámetros de los que dependen las expresiones analíticas simplificadas: $\theta_0, \theta_s, k_s, \tau_f$.

5.2.1.- Fuente semiesférica.

Se ha derivado desde la ecuación de Darcy, a partir de hipótesis similares a las del modelo de Green-Ampt, para una fuente semiesférica en superficie una ecuación analítica que describe el volumen (y caudal) infiltrado frente al tiempo [4.11]-[REF.4.1]. Utilizando argumentos de base física se ha generalizado la solución introduciendo el efecto gravitatorio en el sistema [4.11]-[REF.4.2]. En este apartado se presentan las simulaciones de validación del modelo.

La Tabla 5.5 resume los parámetros utilizados en las simulaciones. Los valores corresponden al suelo Franco del catálogo de Carsel y Parrish (1988), para las ecuaciones [3.13]. El contenido de humedad inicial considerado es $\theta_0 = 0.2$. La última columna corresponde al valor de la tensión en el frente, parámetro del que dependen las ecuaciones analíticas que se ha calculado a través de la integral [3.28], por el método de Simpson (Anejo I.ii).

Suelo	θ_s	θ_r	$\alpha(cm^{-1})$	$k_s(cm/min)$	m	n	θ_o	$R_0(cm)$	$\tau_f(cm)$
Franco.	0.43	0.078	0.036	0.0173	0.359	1.56	0.2	10	6.92

Tabla 5.5. Parámetros utilizados en las simulaciones. Suelo Franco del Catálogo de Carsel y Parrish (1988).

La Figura 5.10 muestra resultados obtenidos del volumen infiltrado en función del tiempo para una fuente semiesférica de radio $R_0 = 10\text{ cm}$, en ausencia de gravedad. La línea continua representa la predicción de la solución aproximada, ecuación [4.10b], mientras que los círculos muestran la solución numérica de la ecuación de Richards bajo las mismas condiciones según el modelo expuesto en el Capítulo 4.1. Las líneas de trazos muestran los límites de esta función para tiempos cortos y largos expresados en las aproximaciones [4.12a] - [4.13b]. Todos los diagramas de este apartado se muestran en base logarítmica con la finalidad de mostrar un campo más amplio de validación de datos.

Figura 5.10. Volumen infiltrado frente al tiempo. Solución de la ecuación de Richards (círculos) frente a solución aproximada (línea continua) para una fuente semiesférica superficial de radio $R_0 = 10\text{ cm}$, en ausencia de efecto gravitatorio.

En la Figura 5.11, se han añadido resultados obtenidos para la misma fuente pero considerando en este caso el efecto gravitatorio (línea continua sobre rombos). Podemos observar como para tiempos grandes

se produce un incremento sensible del volumen infiltrado debido a la fuerza gravitatoria.

La línea continua representa la predicción de las expresiones aproximadas, ecuación [4.11a] en combinación con las escalas [REF.4.1] y [REF.4.2]. Por su parte, los marcadores representan los resultados obtenidos a través de la integración numérica de la ecuación de Richards en ausencia de gravedad (círculos) y considerando la gravedad (rombos).

Figura 5.11. Volumen infiltrado frente a tiempo. Resultados obtenidos en ausencia de gravedad (círculos) y con gravedad (rombos). La solución de la ecuación de Richards se representa con los marcadores, mientras que la línea continua muestra los resultados obtenidos con las ecuaciones aproximadas.

Para dotar de una mayor generalidad a estos resultados de validación, se han realizado pruebas para fuentes de distinto radio concluyendo que el efecto gravitatorio es más importante cuanto mayor es el tamaño de la fuente. El efecto de la filtración para tiempos pequeños y grandes (líneas de trazos en Figura 5.10) se puede sumar, llegando a una aproximación de dos términos para tiempos intermedios (Figura 5.12).

La siguiente figura representa un compendio de todas las simulaciones realizadas en coordenadas adimensionales bajo efecto gravitatorio. Las líneas de trazos cortos representan el volumen infiltrado para los límites de tiempos pequeños y grandes desde la fuente semiesférica. La suma de estos dos efectos representa una buena aproximación (líneas de trazos largos) a los resultados obtenidos a través de la integración de la ecuación de Richards (círculos). También se representa en línea continua de color rojo la expresión aproximada propuesta [4.11a-REF.4.2]. La desviación máxima entre las dos expresiones aproximadas es inferior al 11%, la cual se produce para tiempos intermedios ($t^* = 72.2$). La desviación entre las aproximaciones y los resultados obtenidos por integración de la ecuación de Richards es incluso inferior ya que su volumen infiltrado se encuentra entre los límites que marcan las dos aproximaciones.

Figura 5.12. Volumen infiltrado frente al tiempo (variables adimensionales). Resultados obtenidos con la ecuación de Richards (círculos) frente a solución aproximada propuesta [4.11] (línea continua roja). La línea de trazos largos representa la aproximación de dos términos suma de las soluciones calculadas para los límites del volumen infiltrado para tiempos cercanos a cero e infinito.

Los resultados presentados en las anteriores figuras certifican un buen ajuste entre el modelo teórico propuesto y la solución numérica de la ecuación de Richards. Además, estos resultados certifican que, una aproximación de dos términos al estilo de Philip (1957) para la teoría

del flujo vertical, puede ser aplicable a este caso particular en tres dimensiones, del flujo desde una fuente semiesférica en superficie.

5.2.2.- Fuente circular.

Considerar un disco de radio constante (R_0), que se encuentra en saturación sobre la superficie a potencial matricial despreciable $h_0 = 0$. La suma de las ecuaciones [4.18.a-c] proporciona la expresión adimensional [4.19]-[REF.4.3] que corresponde a la suma del volumen infiltrado de los términos en los límites de tiempo pequeños y grandes de un disco saturado en superficie.

Análogamente, se puede sumar la aportación a la infiltración instantánea (caudal en 3D) para los tiempos pequeños y grandes, al estilo de Green-Ampt, ecuación [4.20a]. Su integración dirige a una expresión que relaciona el volumen infiltrado frente al tiempo [4.20b].

En la siguiente figura, se representa para un disco de radio $R_0 = 10\text{cm}$ y los parámetros del suelo de la Tabla 5.5, el volumen infiltrado en función del tiempo (escala logarítmica), considerando el efecto de la gravedad. Los resultados obtenidos por integración de la ecuación de Richards (círculos) ajustan bien a las dos soluciones aproximadas propuestas (líneas a trazos). Se concluye que, la aproximación de Philip de dos términos que representa la línea de trazos negra [4.19]-[REF.3] es también extensible a este tipo de geometría, dando lugar a un volumen infiltrado sensiblemente superior al que describe la ecuación que se deriva del caudal al estilo de Green-Ampt [4.20b]-[REF.3], correspondiente a la línea de trazos roja. La diferencia máxima entre estas dos aproximaciones, se puede medir en términos del volumen adimensional.

La Figura 5.14 representa el error relativo (en tanto por uno), de la desviación del volumen adimensional existente entre las ecuaciones [4.19] y [4.20b]. Se ha comprobado que la desviación máxima es menor que 15.1%, que corresponde al valor del tiempo adimensional $t^* = 6.94$. La expresión de dos términos de Philip [4.19] predice volúmenes infiltrados por encima de la aproximación al estilo de Green-Ampt [4.20b] para todos los valores de tiempo. Como se puede observar en la gráfica ambas expresiones coinciden para los tiempos límite cercanos a cero e infinito, siendo las desviaciones más grandes, al igual que para la semiesfera, las correspondientes a tiempos intermedios.

Figura 5.13. Volumen infiltrado frente al tiempo. Fuente circular y en superficie de radio $R_0 = 10\text{cm}$ considerando el efecto gravitatorio. Las líneas de trazos finos representan las soluciones aproximadas obtenidas para tiempos límite en cero e infinito. La línea de trazos negra representa su suma, ecuación [4.19]. La línea de trazos de color rojo representa la solución analítica aproximada [4.20b]. Las marcas circulares representan la integración directa de la ecuación de Richards. Los parámetros del suelo se resumen en la Tabla 5.5.

Figura 5.14. Desviación relativa en tanto por uno entre las ecuaciones [4.19] y [4.20b]

5.2.3.- Extensión de la validación a otros tipos de suelo y condiciones.

Con el objetivo de extender la validación de las soluciones analíticas propuestas, se han realizado pruebas para fuentes de distinto diámetro sobre suelos Franco, Franco arenoso y Franco arcilloso del catálogo de Carsel y Parrish (1988), bajo diferentes condiciones de humedad inicial. En la siguiente tabla se presentan las características de los suelos utilizados. En este caso, todas las pruebas se realizaron para geometría circular, teniendo en cuenta que su validación es extensible a las expresiones propuestas para la semiesfera, ya que se deducen a partir de ellas.

Suelo	θ_s	θ_r	n	$\alpha(cm^{-1})$	$k_s(cm/min)$	θ_0	$R_0 (cm)$
Franco	0.43	0.078	1.56	0.036	0.0173	0.1, 0.175, 0.25	1, 5, 15
F-arenoso	0.41	0.065	1.89	0.075	0.0736	0.1, 0.175, 0.25	1, 5, 15
F-arcilloso	0.41	0.095	1.31	0.019	0.0043	0.1, 0.175, 0.25	1, 5, 15

Tabla 5.6. Parámetros de los suelos analizados y condiciones iniciales y de contorno para validar las expresiones propuestas. Catálogo de Carsel y Parrish (1988). Se han utilizado fuentes de radio $R_0 = 1, 5, 15 \text{ cm}$, así como, condiciones de contenido de humedad inicial $\theta_0 = 0.1, 0.175, 0.25$.

La Figura 5.15 muestra el volumen infiltrado frente al tiempo de un suelo Franco-arenoso a contenido de humedad inicial $\theta_0 = 0.1$. Se muestran los tres casos estudiados para radios de la fuente: $R_0 = 1, 5$ y 15 cm . El resultado de la integración de la ecuación de Richards (círculos), ajusta en todos los casos satisfactoriamente a la predicción que arrojan las soluciones aproximadas propuestas (líneas).

Figura 5.15. Volumen infiltrado en función del tiempo. Tres simulaciones con diferente radio R_0 de la fuente emisora circular. Suelo Franco-arenoso de la Tabla 5.6 (contenido de humedad inicial $\theta_0 = 0.1$). Integración de la ecuación de Richards (círculos) frente a solución aproximada propuesta (líneas continuas).

La Figura 5.16 muestra la convergencia de las simulaciones hacia la solución analítica propuesta al aumentar la resolución espacio temporal [4.4c]. Se ha utilizado para este ejemplo una fuente circular superficial de 15 cm de radio sobre un suelo Franco-arcilloso a contenido de humedad inicial $\theta_0 = 0.25$. Notar como en la zona de la curva correspondiente a tiempos pequeños el ajuste mejora al aumentar la resolución espacial de las simulaciones. Al disminuir el tamaño de la red espacial dr , se reduce el paso de tiempo dt siguiendo el criterio establecido en [4.4c].

Se concluye que, la solución analítica propuesta puede mejorar la predicción de la integración numérica de la ecuación de Richards, si la resolución espacio-temporal elegida no es suficientemente alta, especialmente para tiempos pequeños de riego, con la ventaja añadida del ahorro de recursos, esfuerzo y tiempo de computación.

Figura 5.16. Volumen infiltrado frente a tiempo. Convergencia de la solución numérica hacia la analítica al aumentar la resolución espacio-temporal. Suelo Franco-arcilloso a contenido de humedad inicial $\theta_0 = 0.25$. Radio de la fuente $R_0 = 15\text{cm}$.

La figura 5.17 colecciona todas las simulaciones realizadas frente a las soluciones analíticas propuestas. Se presentan en variables adimensionales todos los resultados referidos a los tres tipos de suelo, radio de la fuente y condiciones iniciales que se han estudiado (parámetros de la Tabla 4.6). Se observa que el ajuste entre las simulaciones y soluciones analíticas propuestas es satisfactorio, omitiendo las desviaciones de carácter numérico propias de los tiempos pequeños de riego ($t^* < 0.1$).

Fig. 5.17 (a)

Fig. 5.17 (b)

Fig. 5.17 (c)

Figura 5.17. Volumen infiltrado en función del tiempo en variables adimensionales. Representación de todas las simulaciones realizadas para los suelos Franco, Franco arenoso y Franco arcilloso sobre las condiciones de contorno e iniciales estudiadas. Parámetros recogidos en la Tabla 5.6.

Se concluye que las soluciones analíticas propuestas superan el test de validación de forma satisfactoria. La integración directa de la ecuación de Richards converge, para tiempos pequeños, hacia estas soluciones de forma clara si la resolución espacio-temporal es suficientemente alta para los parámetros y tipos de suelo probados. Asimismo, la solución ajusta también adecuadamente para tiempos intermedios y elevados.

Este hecho implica que, estas soluciones pueden mejorar la predicción de los resultados obtenidos por la integración numérica de la ecuación de Richards en caso de que la resolución espacio-temporal no sea suficientemente alta. Teniendo en cuenta las limitaciones debidas al tiempo y esfuerzo de cálculo que tiene la resolución espacio-temporal en la integración numérica de la ecuación de Richards, este modelo analítico se consolida como una alternativa para la predicción del volumen y caudal aplicado en función del tiempo en riego superficial bajo las condiciones de contorno expuestas.

5.2.4.- Aplicación a la caracterización del suelo.

Teniendo en cuenta el buen comportamiento de las expresiones analíticas y considerando que tan solo dependen de cuatro parámetros del suelo $k_s, \tau_f, \theta_s, \theta_0$, se propone su uso para la caracterización del mismo. Los contenidos de humedad inicial y en saturación del suelo, pueden ser medidos experimentalmente con bastante precisión y pocos recursos en laboratorio mediante técnicas tradicionales (existe una descripción del método utilizado en el Anejo IV.ii). Lo que reduce, en este contexto, a tan solo dos incógnitas el problema de caracterización del suelo. Conocidos los contenidos de humedad, los parámetros k_s, τ_f se pueden estimar por un ajuste de mínimos cuadrados, frente a cualquiera de las dos ecuaciones derivadas para el disco [4.19]-[4.20b]-[REF.3]. La obtención de los datos experimentales necesarios para realizar este ajuste ($V - t$ ó $q - t$) requiere de un infiltrómetro de sección circular y radio R_0 .

Para valorar la bondad del ajuste se ha realizado una simulación en condiciones equivalentes a las de un infiltrómetro de sección circular para el suelo Franco del catálogo de Carsel y Parrish (Tabla 5.5). Para ello, se ha utilizado una versión del código similar a la que se ha presentado en la Sección 4.1 que asume condiciones de saturación para un círculo superficial de radio constante R_0 . Los datos obtenidos de volumen infiltrado frente a tiempo se han ajustado respecto a las ecuaciones [4.19]-[4.20b]-[REF.3] considerando los parámetros k_s y τ_f desconocidos. La Figura 5.18 presenta los resultados del ajuste en función del tiempo final de adquisición de datos.

Figura 5.18. Ajuste de los parámetros k_s y τ_f . Los círculos representan el ajuste sobre [4.20b] y los cuadrados sobre [4.19]. Las líneas rectas muestran el valor conocido para estos dos parámetros.

Observar que los dos parámetros están correlacionados de manera que cuando uno aumenta el otro disminuye. Por otro lado, vemos que es necesario un tiempo mínimo de observación para obtener un buen ajuste; en el caso más favorable para este tipo de suelo, ecuación [4.20b] al menos 200 minutos de riego (círculos). Evidentemente, la bondad del ajuste no solo dependerá del tiempo de observación, sino también del número de datos recogidos durante ese periodo. La Tabla 5.7 compara los resultados de ajuste obtenidos por ambas ecuaciones para el tiempo máximo de observación ($t = 500 \text{ min}$). Entre paréntesis se incluye el error relativo cometido en su estimación.

$t = 500 \text{ min}$	$k_s (\text{cm/min})$	$\tau_f (\text{cm})$
Dato conocido	0.0173	6.92
[4.19]	0.01539 (11.0%)	7.26 (4.9%)
[4.20b]	0.01729 (0.05%)	6.79 (1.9%)

Tabla 5.7. Ajuste a los parámetros k_s, τ_f según las expresiones analíticas propuestas [4.19]-[4.20b]-[REF.3]. Entre paréntesis se muestra el error relativo de la desviación. Suelo Franco del catálogo de Carsel y Parrish (Tabla 5.5).

Podemos observar que las dos ecuaciones ajustan satisfactoriamente los parámetros, aunque [4.20b] (círculos) mejora claramente el resultado obtenido con [4.19] (cuadrados). Este hecho sugiere que la ecuación analítica [4.20b] que fue derivada del caudal límite para tiempos pequeños y grandes de infiltración es una mejor aproximación que la ecuación de dos términos para el volumen [4.19]. En teoría de infiltración unidimensional, Philip ya mencionaba que su expresión de dos términos sobreestimaba para tiempos intermedios el volumen infiltrado; por otro lado, Sayah *et al*, (2016) mostraron que una aproximación de dos términos derivada de la infiltración instantánea (al estilo de Green-Ampt) se ajusta mejor que su equivalente para la infiltración acumulada (Philip), por lo que este resultado podría ser extensible a las tres dimensiones en virtud de este estudio.

La Tabla 5.7 muestra un peor ajuste para la tensión en el frente que para la conductividad hidráulica obtenida con [4.20b]; este hecho, puede ser debido a la gran sensibilidad que tiene la tensión en el frente de avance con respecto a los cambios de otros parámetros del suelo. De hecho, se ha comprobado que perturbaciones puntuales de carácter numérico en la simulación respecto a los valores $V - t$ afectan bastante al resultado del ajuste de estos dos parámetros. Por ello, cabe esperar que las desviaciones propias de los datos experimentales tengan un efecto similar.

Por otra parte, y considerando que con tan solo dos puntos de la curva se podría obtener una primera aproximación a estos dos parámetros, cabe mencionar que los datos ($V - t ; q - t$) deberían ser tomados para tiempos intermedios, ya que para los tiempos límite cercanos a cero e infinito las expresiones tan solo dependen de un parámetro. Otra posibilidad podría ser utilizar estas expresiones en los límites para calcular los parámetros en primera aproximación con tan solo un punto.

En el Anejo III se han incluido otros procedimientos probados y que pueden servir de referencia para la caracterización de suelos mediante estas expresiones.

5.3. EVOLUCIÓN DE LA ZONA SATURADA EN SUPERFICIE Y APLICACIONES.

Como se ha mencionado en capítulos anteriores el modelo numérico es capaz de calcular la evolución de la zona saturada en superficie (charco) asumiendo condiciones de contorno variables en el tiempo. Por el interés del fenómeno, se ha realizado un estudio para las tres categorías de suelo de referencia: Gardner, Clapp-Hornberger y van Genuchten-Mualem.

Cuando el caudal aplicado es mayor que el infiltrado el exceso de agua se acumula en superficie. Asumiendo que el suelo es plano y homogéneo, el agua acumulada se expande con simetría radial; la interacción suelo-agua debido a su tensión superficial junto con la rugosidad del suelo, determina la altura del agua almacenada. El código utiliza esta altura como dato para estudiar la evolución del charco.

En esta sección se compara el modelo propuesto con el resultado de referencia de la expresión de Wooding (1968) y los modelos existentes de Brandt (1971) y Bhatnagar (2008). Seguidamente, se presentan resultados de la evolución del charco mojado y radio límite para los tres catálogos de suelos citados anteriormente. Se concluye que el radio límite para todos ellos es aproximadamente proporcional a $\sqrt{q/k_s \Delta \theta}$.

5.3.1.- Contraste frente a otros modelos.

En la revisión bibliográfica se han reportado dos modelos numéricos capaces de estudiar la evolución del charco en superficie Brandt-Bresler (1971) y Bhatnagar-Chauhan (2008) para riego desde fuente puntual. Así mismo, se ha mencionado el modelo analítico de Wooding (1968) que determina el radio máximo que puede alcanzar el charco en función del caudal para suelos del tipo Gardner. En este apartado se comparan los resultados de la evolución del charco entre el modelo propuesto y los modelos de Brandt y Bhatnagar, así como los resultados de los tres modelos para el radio límite, respecto al modelo de Wooding. Para ello, y debido a la limitación procedente del modelo analítico de Wooding, se ha utilizado un suelo del tipo Gardner cuyos parámetros están recogidos en la Tabla 5.8. Las condiciones iniciales y de caudal aplicado son las

mismas en todos los casos para una fuente de riego puntual en superficie.

Suelo	α (cm^{-1})	k_s (cm/min)	θ_s	θ_0	κ (cm/min)	q (l/h)	z_r (cm)
Gilat Loam	0.025	0.014	0.44	0.213	0.06167	20	0.5

Tabla 5.8. Parámetros utilizados para la comparativa entre modelos de estudio de la evolución del charco y su radio límite. Suelo del tipo Gardner. Fuente: Bresler (1978). El parámetro z_r representa la rugosidad del suelo que fue asumida para la solución numérica a través del modelo propuesto en esta tesis.

En la Figura 5.19 se puede observar como la predicción del modelo propuesto se ajusta bastante bien a la de Bhatnagar para las mismas condiciones. Por otro lado, se observa que el modelo de Brandt tiende a sobreestimar el tamaño del radio mojado en función del tiempo. Resultados reportados por Lafolie *et al* (1989), así como el radio máximo que predice el modelo de Wooding para este mismo suelo confirman este hecho.

Un incremento de la superficie saturada implica un aumento del caudal infiltrado. Consecuentemente, si el caudal aplicado es constante el radio de la zona saturada se incrementa hasta alcanzar un régimen asintótico que determina el valor máximo del charco en régimen de flujo estacionario; circunstancia que se produce cuando el caudal infiltrado y aplicado es el mismo. La Tabla 5.9 compara los resultados del radio límite según el modelo propuesto, el modelo numérico de Bhatnagar (2008) y el modelo analítico de Wooding (1968), para dos caudales distintos sobre el suelo de parámetros recogidos en la Tabla 5.8.

q (L/h)	4	20	
R_{max} (cm)	21	65	Wooding
	21	66	Bhatnagar
	20	64	del Vigo

Tabla 5.9. Radio máximo del charco. Dos caudales aplicados sobre el suelo recogido en la Tabla 5.8. Comparativa entre el modelo propuesto el modelo numéricos de Bhatnagar y el modelo analítico de Wooding.

Figura 5.19. Evolución del radio mojado en función del tiempo. Comparativa de los resultados obtenidos por el modelo propuesto frente a los modelos de Brandt & Bresler (1978) y Bhatnagar & Chauhan (2008). $q = 20 \text{ L/h}$.

Los resultados de los tres modelos que se comparan en la Tabla 5.9 son similares para este ejemplo. La aproximación analítica de Wooding [3.36] es de utilidad debido a su fácil aplicación; aunque no depende directamente de la diferencia de humedad entre la zona saturada y el medio seco $\Delta\theta = \theta_s - \theta_0$, lo que puede afectar al fenómeno de evolución y crecimiento del charco ya que este parámetro claramente afecta a la infiltración¹⁴. El inconveniente más importante de la aproximación de Wooding es que se fundamenta en la hipótesis de un suelo caracterizado por las funciones del tipo Gardner lo que restringe su aplicación a suelos de este estilo. Sin embargo, el modelo propuesto, como el de Bhatnagar, no está limitado por estos aspectos lo que supone un valor añadido teniendo en cuenta que las expresiones de caracterización del suelo más modernas ajustan mejor a la mayoría de los suelos reales.

¹⁴ En el modelo de Wooding se puede relacionar la constante de conductividad hidráulica en saturación con la diferencia de contenidos de humedad a través de la ecuación [3.11b]. Notar que para puntos muy alejados de la fuente se cumple que $k_s \cong \kappa\Delta\theta$. Por lo que realmente existe una dependencia implícita de la ecuación [3.36] con respecto a $\Delta\theta$ a través de estos dos parámetros. El problema entonces es que para garantizar una buena aproximación el contenido de humedad inicial debe ser muy bajo.

5.3.2.- Estudio de radio límite.

En esta sección se presenta un análisis del radio límite de la zona saturada con respecto a suelos de los tres principales catálogos: Mualem (1976), Clapp & Hornberger (1978) y Carsel & Parrish (1988), los cuales respectivamente, representan a suelos caracterizados por las expresiones de Gardner [3.11], Clapp & Hornberger [3.12] y van-Genuchten & Mualem [3.13]. Para ello, se ha utilizado el modelo de simulación propuesto, y tres caudales de referencia $q = 2, 4$ y $8 L/h$.

5.3.2.1. Suelos del tipo de Gardner.

Los suelos analizados fueron elegidos del catálogo de Mualem (1976) por su buen ajuste empírico con respecto a la expresión de Gardner; en este sentido el coeficiente de correlación de ajuste a [3.11a] es superior en todos los casos seleccionados a 0.93, según se ha reportado (Mualem, 1976).

La Tabla 5.10 resume los resultados de las simulaciones realizadas. El tiempo de riego necesario para alcanzar el radio máximo se ha representado por t_{max} . El criterio utilizado para considerar que se ha alcanzado el régimen estacionario es que el radio máximo permanece constante al menos durante un tiempo superior al 30% del tiempo total de riego en simulación. A la derecha de t_{max} , se indica entre paréntesis cual fue el valor de este porcentaje en cada caso. Al ser suelos del tipo Gardner se ha incluido la predicción del modelo de Wooding (R_w). El radio límite obtenido con el modelo propuesto se representa por R_{max} .

En la mayoría de los casos el radio obtenido es similar al que predice el modelo de Wooding, o sensiblemente superior. La desviación entre los dos modelos es en promedio inferior al 9%, siendo de tan solo un 1.7% para los casos en los que el radio límite supera 10cm. Esto significa que el ajuste entre los dos modelos es mejor para suelos francos y arcillosos donde el tamaño del charco en régimen estacionario es mayor. Con suelos arenosos la aproximación analítica de Wooding subestima el radio límite obtenido en las simulaciones. Este hecho confirma los resultados reportados por Pullan y Collins (1987), Weir (1987) y Warrick (1992), que también han mencionado un pobre ajuste de la expresión de Wooding con respecto a soluciones numéricas propias bajo condiciones de radios límite pequeño. No obstante, también hay que

tener en cuenta los errores de las soluciones numéricas para tiempos largos de simulación

		Oso flaco fine sand	Touched silt Loam	Gilat Loam	Sheluhot Silty Clay	Bet Netofa Clay
	Fuente	Luthin & Day (1955)	Brooks & Corey (1964)	Bresler et al (1971)	Rawitz (1965)	Rawitz (1965)
	Ajuste	0.96	0.93	0.99	0.95	0.99
	α (cm ⁻¹)	0.072	0.0156	0.025	0.00726	0.0662
	k_s (cm/min)	1.2	0.02916	0.014	$8.64 \cdot 10^{-5}$	$5.7 \cdot 10^{-5}$
	θ_0	0.039	0.13	0.01	0.01	0.01
	θ_s	0.378	0.469	0.44	0.385	0.446
	$\Delta\theta$	0.339	0.339	0.43	0.375	0.436
	$k_s\Delta\theta$ (cm/m)	0.4068	0.0098852	0.00602	0.0000324	0.00002485
$q = 2L/h$	R_w (cm)	0.486	4.24	12.04	273.5	421.9
	R_{max} (cm)	0.8 (75%)	7 (50%)	12 (70%)	273 (35%)	420 (40%)
	t_{max} (días)	1	1	1	108	500
$q = 4L/h$	R_w (cm)	0.95	8.11	21.06	415.6	600.6
	R_{max} (cm)	1.2 (75%)	10 (70%)	21 (60%)	402 (50%)	598 (30 %)
	t_{max} (días)	1	1	1	1735	1735
$q = 8L/h$	R_w (cm)	1.81	15.05	35.20	645.6	737.2
	R_{max} (cm)	1.8 (60%)	19 (33%)	32 (65%)	650 (30%)	856 (55%)
	t_{max} (días)	1.25	1.25	1.25	2430	2430

Tabla 5.10. Radio límite del charco para cinco suelos representativos del catálogo de Mualem (1976). Se representa en negrita los valores superiores, y en cursiva los inferiores, a la predicción de Wooding.

Advertir que el tiempo de riego para alcanzar el radio máximo (t_{max}) es del orden de años en el caso de los suelos arcillosos, lo que en situación de riego real es equivalente a decir que no tiene límite. Una propiedad interesante del modelo numérico frente a la aproximación de Wooding es que permite medir este parámetro. La Figura 5.20 representa, a modo de ejemplo, la evolución del charco para una de las simulaciones realizadas.

Por otra parte, el producto $k_s\Delta\theta$ que para los suelos de la tabla es decreciente hacia la derecha se puede tomar como una tasa de la infiltración; cuanto mayor es su valor más capacidad de infiltración tiene el suelo y por tanto, menor es el radio límite. Se ha comprobado que, para este grupo de suelos el radio límite aumenta siguiendo la relación $R_{max} = (k_s\Delta\theta)^{-0.55}$ para todos los caudales estudiados. Adicionalmente, se ha comprobado que el radio límite crece de forma proporcional a la raíz cuadrada del caudal aplicado, por lo que se propone la siguiente ecuación empírica para el radio límite en relación a estos parámetros:

$$R_{max} = \gamma \sqrt{\frac{q}{k_s \Delta \theta}} \quad [5.1a]$$

Siendo $\gamma = 0.1781$ un factor sin dimensiones cuyo ajuste se presenta en la Figura 5.21, para un total de 15 datos recogidos de todas las computaciones. Esta ecuación es comparable al modelo de Wooding [3.36]:

$$q = \frac{4k_s}{\alpha} R_W + \pi k_s R_W^2 \quad [3.36]$$

$$q = \frac{\Delta \theta k_s}{\gamma^2} R_{max}^2 \quad [5.1a]$$

La ecuación empírica [5.1] carece del término central de la expresión de Wooding asociado a la constante macroscópica de escala (capilaridad), pero tiene en consideración la diferencia de contenidos de humedad, lo que esta indudablemente asociado a la capacidad de succión del medio.

Figura 5.20. Evolución del radio del charco. Suelo del tipo Gardner. El radio máximo se mantiene constante al menos durante un 30% del tiempo total de riego. Caudal $q = 4 \text{ L/h}$.

Figura 5.21. Ajuste de la ecuación [5.1a].

5.3.2.2. Suelos del tipo Clapp & Hornberger.

Se presenta en este apartado resultados del radio máximo computado para cinco suelos representativos del catálogo de Clapp y Hornberger (1978). Las expresiones de caracterización del suelo en este caso vienen definidas por [3.12]. Se han utilizado los mismos caudales que en el caso anterior.

Los suelos fueron seleccionados por el amplio rango de muestras experimentales que los autores analizaron para estudiar sus parámetros (más de 125 muestras por suelo según los datos publicados). La siguiente tabla resume los datos obtenidos en las simulaciones. Nuevamente, se ordenan de izquierda a derecha según su proporción creciente de arcilla.

La Figura 5.22 representa la evolución del radio saturado en función del tiempo hasta el régimen estacionario para el suelo Franco de este catálogo ($q = 2 \text{ L/h}$). Las simulaciones se realizaron con una resolución para el radio de 1 cm y rugosidad del suelo de $z_r = 0.5 \text{ cm}$.

		Sandy Loam	Silt Loam	Loam	Clay Loam	Silty Clay
	Muestreo	204	384	125	262	441
	% arcilla	0.09	0.14	0.19	0.34	0.49
	b	4.90	5.30	5.39	8.52	10.4
	h_s (cm)	21.8	78.6	47.8	63.0	49.0
	k_s (cm/m)	0.208	0.0432	0.0417	0.0147	0.0062
	θ_0	0.1993	0.3001	0.2566	0.3441	0.3681
	θ_s	0.435	0.485	0.451	0.476	0.492
	$\Delta\theta$	0.1357	0.185	0.1944	0.1319	0.1239
	$k_s\Delta\theta$	0.0282256	0.007992	0.0081064	0.00193893	0.00076818
$q = 2l/h$	R_{max} (cm)	11 (30%)	12 (50%)	17 (55%)	26 (85%)	57 (43%)
	t_{max} (días)	0.14	0.41	0.38	2.78	2.4
$q = 4l/h$	R_{max} (cm)	19 (50%)	19 (50%)	29 (33%)	44 (77%)	96 (25 %)
	t_{max} (días)	0.14	0.41	0.5	3	2.78
$q = 8l/h$	R_{max} (cm)	30 (36%)	19 (40%)	46 (55%)	82 (45%)	147 (39%)
	t_{max} (días)	0.17	0.5	0.83	4	6

Tabla 5.11. Radio máximo (R_{max}) para 5 suelos del catálogo de Clapp & Hornberger (1978). El tiempo de riego necesario para alcanzar el régimen estacionario es t_{max} . Notar que el factor $k_s\Delta\theta$ crece con el contenido de arcilla hacia la derecha de esta tabla.

Figura 5.22. Evolución del radio del charco frente al tiempo. Suelo Franco. Caudal aplicado: $q = 2 L/h$. El radio máximo se mantiene constante al menos durante un 30% del tiempo total de riego

Se ha observado que el radio máximo evoluciona según la tendencia $R_{max} = (k_s\Delta\theta)^{-0.45}$ para todos los caudales estudiados. Como en el caso anterior, se propone la siguiente relación empírica aproximada:

$$R_{max} = \gamma' \sqrt{\frac{q}{k_s \Delta \theta}} \quad [5.1b]$$

Donde el ajuste de la constante adimensional $\gamma' = 0.3145$ se representa en la siguiente figura:

Figura 5.23. Ajuste de la ecuación [5.1b].

5.3.2.3. Suelos del tipo van Genuchten-Mualem.

En este Apartado se presenta el estudio de radio límite para siete suelos del catálogo de Carsel y Parrish (1988), caracterizados por las expresiones de van Genuchten-Mualem, ecuaciones [3.13]. El criterio para la obtención del radio máximo en simulación, así como los caudales utilizados son los mismos que en los dos casos anteriores. Los suelos se ordenan de izquierda a derecha en la Tabla 5.12 desde los más arenosos hasta los más arcillosos. El producto $k_s \Delta \theta$ es creciente en este sentido.

		Sandy Loam	Sandy Clay Loam	Loam	Silt Loam	Silt	Clay	Silty Clay Loam
	$\alpha \text{ (cm}^{-1}\text{)}$	0.075	0.059	0.036	0.02	0.016	0.008	0.01
	$k_s \text{ (cm/m)}$	0.0736	0.0218	0.0173	0.0075	0.0042	0.0033	0.0012
	n	1.89	1.48	1.56	1.41	1.37	1.09	1.23
	θ_0	0.072	0.13	0.113	0.148	0.145	0.278	0.243
	θ_s	0.41	0.39	0.43	0.45	0.46	0.38	0.43
	$\Delta\theta$	0.338	0.26	0.317	0.302	0.315	0.102	0.187
	$k_s\Delta\theta$	0.0248	0.0057	0.0055	0.0023	0.0013	0.0003	0.0002
$q = 2L/h$	$R_{max}(cm)$	10 (40%)	21 (66%)	22(55%)	35 (25%)	48 (40%)	59 (32%)	88 (43%)
	$t_{max}(días)$	0.5	0.5	1	1.15	1	1	2
$q = 4L/h$	$R_{max}(cm)$	14 (90%)	30 (70%)	32(62%)	58 (31%)	72 (35%)	85 (20%)	115 (25 %)
	$t_{max}(días)$	0.5	0.5	1	1	1	1	2
$q = 8L/h$	$R_{max}(cm)$	21 (90%)	45 (22%)	49(83%)	72 (30%)	104(30%)	120(30%)	163 (39%)
	$t_{max}(días)$	0.5	0.5	1	1.4	1	1	2

Tabla 5.12. Radio límite para 7 suelos del catálogo de Carsel y Parrish. El tiempo de riego simulado viene indicado por t_{max} ; a su lado, y entre paréntesis, se apunta el porcentaje de tiempo registrado para el radio máximo respecto al tiempo total de riego simulado.

Se ha comprobado para este caso que el radio límite crece de forma proporcional a $(k_s\Delta\theta)^{-0.52}$. Como en los casos anteriores podemos aproximar a una tendencia:

$$R_{max} = \gamma'' \sqrt{\frac{q}{k_s\Delta\theta}} \quad [5.1c]$$

Donde $\gamma'' = 0.2596$ es una constante adimensional cuyo valor procede del ajuste que se presenta en la siguiente figura:

Figura 5.24. Ajuste de la ecuación [5.1c].

5.3.3.- Discusión de los resultados obtenidos para el radio límite.

De las simulaciones realizadas podemos extraer algunas conclusiones directas con respecto al radio de la zona saturada que son comunes a los tres catálogos:

- 1.- El radio del charco avanza más deprisa, para los suelos con mayor carácter arcilloso, que son aquellos en los que el producto $k_s \Delta \theta$ es más pequeño.
- 2.- El radio límite es mayor, y se alcanza más tarde, para los suelos de carácter arcilloso, que son aquellos en los que el producto $k_s \Delta \theta$ es más pequeño.
- 3.- El contenido de humedad inicial afecta a la evolución de la zona saturada como hemos visto en los dos puntos anteriores. Se ha comprobado que cuanto mayor es el contenido de humedad inicial, más rápido y más grande crece el charco.

En los suelos del tipo Gardner, aunque este parámetro no aparece explícitamente en la expresión de Wooding, está relacionado con el valor que toma k_s para cada suelo del catálogo de Mualem (1976) a través de la constante κ (ecuación [3.11b]), por lo que implícitamente también afecta al radio de Wooding.

- 4.- La representación del radio límite para todos los tipos de suelo de un mismo catálogo sigue la tendencia $(k_s \Delta \theta)^\delta$ donde δ es en este caso un parámetro constante para cada catálogo, y muy próximo $-1/2$ independiente del caudal aplicado. Por otro lado, se ha comprobado que el caudal aplicado afecta al radio máximo como una función raíz cuadrada para los suelos de los tres catálogos. Se concluye por tanto, que es posible un ajuste del tipo [5.1]:

$$R_{max} = \gamma \sqrt{\frac{q}{k_s \Delta \theta}} \quad [5.1]$$

Donde los valores obtenidos para el factor adimensional γ así como el coeficiente de correlación de cada ajuste se resumen en la siguiente tabla:

Catálogo	$\gamma [R^2]$
Gardner	0.1781 ± 0.009 [0.97]
Clapp-Horn.	0.3145 ± 0.023 [0.94]
vG-M.	0.2596 ± 0.021 [0.89]

Tabla 5.13. Valores del ajuste de γ .

5.- La constante de capilaridad macroscópica α que está relacionada con el tamaño del poro no aparece en estas ecuaciones a pesar de que su ajuste es satisfactorio. Este hecho representa que el efecto de este parámetro sobre el radio límite es muy pequeño o inexistente; además, al estar relacionado el tamaño del poro con la diferencia de contenidos de humedad $\Delta\theta$, se puede argumentar que la información de α ya está contenida en $\Delta\theta$.

Volviendo a las expresiones analíticas simplificadas, se puede observar que la expresión para un disco superficial de radio saturado constante en el límite cuando el tiempo tiende a infinito, ecuación [4.18d]-[REF.4.3], es equivalente al régimen estacionario que representa [5.1]. En este caso el radio del disco $R_0 = R_{max}$. Eliminando el primer término del factor c_g , lo que equivale a decir que el efecto de la succión es depreciable frente al gravitatorio, y despejando el radio límite:

$$R_{max} = \frac{1}{2^{3/4}\pi^{1/2}} \sqrt{\frac{q}{\Delta\theta k_s}} \quad [5.2a]$$

Lo que se corresponde con un valor para la constante de $\gamma = 0.3355$. Esta simplificación es asumible ya que para tiempos largos es sabido que el efecto predominante en el flujo es el gravitatorio. Este caso es general, para cualquier tipo de suelo que pueda ser definido a través de los cuatro parámetros propios de las expresiones analíticas propuestas. Notar que despreciando la succión, no hay dependencia en la última ecuación con respecto a la tensión en el frente de avance. Utilizando todos los términos de la ecuación [4.18d]-[REF.4.3] y por tanto, asumiendo el efecto de la succión, aparece el término de la tensión en el frente:

$$R_{max} = \frac{\tau_f}{4\Delta\theta} \left[\sqrt{1 + \frac{8\Delta\theta q}{\sqrt{2}\pi k_s \tau_f^2}} - 1 \right] \quad [5.2b]$$

En la que se ha omitido la solución negativa para la radio propia de esta ecuación de segundo grado. La siguiente figura compara las dos últimas expresiones sobre variables adimensionales para radio y caudal:

$$R_{max}^* = \sqrt{q^*} \quad [5.3a]$$

$$R_{max}^* = \sqrt{1 + q^*} - 1 \quad [5.3b]$$

$$R_{ref} = \frac{\tau_f}{4\Delta\theta} \quad ; \quad q_{ref} = \frac{\sqrt{2}\pi k_s \tau_f^2}{8\Delta\theta} \quad [REF.5.1]$$

Figura 5.25. Comparación entre las ecuaciones [5.3a] y [5.3b]. (a) Escala logarítmica, (b) escala decimal.

Se puede observar como el radio de la ecuación [5.3a] (línea roja) es mayor para todos los valores del caudal que el de la ecuación [5.3b] (línea azul). Obviamente, al considerar el efecto de la succión (por pequeño que sea) la filtración es mayor, y por tanto el radio límite en régimen estacionario es mas pequeño. Las diferencias en términos absolutos son mayores para caudales altos, aunque no superan el 3.2% dentro del rango de estudio. Las diferencias relativas son significativas para valores pequeños del caudal (donde el efecto de la succión es más importante) como se puede observar en el diagrama logarítmico, aunque desaparecen para valores intermedios del caudal.

Para contrastar los resultados se ha calculado el radio máximo sobre tres suelos de diferentes características recogidos en la Tabla 5.14 con los cuatro modelos mencionados, es decir, ecuación de Wooding [3.36],

ecuación empírica propuesta [5.1], ecuación analítica propuesta [4.18d]-[REF.3] y simulación. Se han elegido tres suelos caracterizados por las funciones de van Genuchten-Mualem, que son las más acreditadas para el ajuste de un suelo real. Los suelos recogidos en la Tabla 5.14 corresponden a un suelo franco-arenoso conocido, el campo de prácticas de la ETSIAAB (2), y dos suelos ficticios cuyos parámetros se han obtenido con ROSETTA; un suelo arcilloso (1) de textura (70%, 15%, 15%) y densidad aparente de 1.5 g/cm^3 , y un suelo arenoso (3) de textura (15%, 15%, 70%) con la misma densidad.

	Suelo	Tipo	θ_s	θ_r	$k_s(\text{cm/min})$	$\alpha(\text{cm}^{-1})$	n	θ_0	τ_f
(1)	70%-15%-15%	Arcilloso	0.4466	0.0989	0.00517	0.019	1.200	0.2	3.67
(2)	C-P	Franco	0.583	0.053	0.165	0.0136	1.488	0.2	15.91
(3)	15%-15%-70%	Arenoso	0.3961	0.0534	0.029	0.0284	1.467	0.2	7.23

Tabla 5.14. Parámetros de los suelos utilizados para el contraste entre modelos de estimación del radio límite. Los parámetros de los suelos (1) y (3) se han obtenido con ROSETTA, el suelo (2) corresponde al campo de prácticas de la escuela (C-P).

Para el uso de la ecuación [4.18d]-[REF.3] se ha estimado la tensión en el frente de los tres suelos a partir de la expresión de Neuman [3.28]. El contenido de humedad inicial asumido en los tres casos es $\theta_0 = 0.2$. El tiempo de riego necesario para alcanzar el radio límite ha sido mayor a 12h para todos los casos registrados según la simulación. Es previsible que el radio límite más pequeño corresponda al suelo franco-arenoso del campo de prácticas (C-P) debido a su elevado valor de k_s .

La Tabla 5.15 muestra los resultados obtenidos para el radio límite en centímetros para cuatro caudales que se han probado. Se puede extraer algunas conclusiones interesantes, asumiendo que el valor del radio máximo real para cada suelo fuera el de la integración directa de la ecuación de Richards (simulación). Se ha evaluado el promedio de la desviación relativa entre cada modelo y el valor simulado $\langle \varepsilon_r \rangle$.

En primer lugar, observamos que el modelo de Wooding subestima sistemáticamente el valor del radio máximo obtenido en las simulaciones para todos los suelos y caudal aplicado, lo que probablemente se deba al hecho de que $\theta_0 \gg \theta_r$. Este fenómeno, que ya se había observado para suelos del tipo Gardner en los casos de radio límite pequeño se ve muy acrecentado en estos tres suelos del tipo van

Genuchten-Mualem ($\langle \varepsilon_r \rangle = 48\%$)¹⁵. Igualmente, se confirma el hecho mencionado con anterioridad, y reportado por otros autores, de que la aproximación de Wooding ajusta peor cuando el radio límite es pequeño, donde aparecen las desviaciones más altas respecto a la simulación. Se concluye por tanto, que el modelo de Wooding para el cálculo del radio límite, que es una muy buena aproximación analítica a suelos caracterizados por funciones del tipo Gardner, no es tan preciso para suelos que no cumplen las restrictivas condiciones de las expresiones [3.11], y que son la mayoría.

SUELO	q	[3.36]	[4.18d]-[REF.3]	[5.1]	Simulación
		Ec. Wooding	Sol. Analítica	Empírico	
C-P	1	0.34	1.34	4.15	1.5
	6	2.01	6.52	10.18	7
	12	3.95	11.16	14.40	14
	24	7.62	18.25	20.36	22
Arcilloso (70%-15%-15%)	1	12.85	34.82	29.34	30
	6	51.81	90.30	71.86	80
	12	82.40	129.20	101.63	102
	24	126.96	184.22	143.73	136
Arenoso (15%-15%-70%)	1	3.76	10.45	12.39	9
	6	17.58	33.01	30.34	31
	12	29.52	49.25	42.91	48
	24	47.53	72.35	60.69	70
$\langle \varepsilon_r \rangle$		48%	14%	26%	

Tabla. 5.15. Radio límite (cm). Comparativa entre los tres modelos de estimación del radio límite de la zona saturada, y simulación. El promedio de la desviación relativa entre modelo y simulación es $\langle \varepsilon_r \rangle$.

Sorprendentemente, la desviación promedio más pequeña para estos tres tipos de suelo es la del modelo analítico propuesto (14%), que supera el ajuste del modelo empírico (26%) inferido de las simulaciones. Si bien es cierto, que omitiendo el dato (C-P, $q = 1L/h$) que está claramente sobrestimado por la predicción del ajuste empírico, ambos modelos tienen una precisión muy similar.

Por otro lado, se observa que el ajuste empírico muestra un comportamiento aceptable para los tres tipos de suelo aunque falla en los casos de radio límite pequeño. En estos casos, el modelo analítico

¹⁵ Recordar que la ecuación de Wooding se derivó partiendo de la hipótesis de un suelo caracterizado con la expresión de Gardner [3.11]. Es lógico que pierda su validez para otros tipos de suelo como el que se propone en este caso.

propuesto muestra un ajuste muy satisfactorio, aunque tiende a sobrestimar el radio límite simulado para el suelo arcilloso.

CAPITULO 6:

CONCLUSIONES.

A pesar de los numerosos avances que durante las últimas décadas se han obtenido para el análisis y predicción del flujo de agua en el suelo, todavía existe un amplio margen de mejora y progreso necesario para el perfeccionamiento en el diseño y eficiencia de los sistemas de riego. En este sentido, y como han apuntado algunos autores (Fernández-Gálvez y Simmonds, 2006; Ghanbarian-Alavijeh *et al*, 2010; Naglič *et al*, 2014), todavía son necesarios importantes progresos en la obtención de modelos numéricos más estables, otros modelos analíticos más ajustados a la realidad del fenómeno de la infiltración, y mejoras en la caracterización del suelo y estimación de sus parámetros. En este sentido, se han dirigido los esfuerzos realizados en esta tesis.

Se ha desarrollado un modelo numérico para la integración de la ecuación de Richards en tres dimensiones adaptado al riego por goteo en superficie, que ha demostrado ser eficiente y estable bajo las condiciones de resolución espacio-temporal impuestas. El modelo permite estudiar la dinámica del flujo de agua en el suelo para condiciones de contorno constantes o variables (del Vigo *et al*, 2019a-b), y ha demostrado su capacidad para analizar aspectos relevantes del riego por goteo como son la redistribución y sobrepresión (del Vigo *et al*, 2020), que no son abordables con algunos de los modelos numéricos que existen actualmente.

Por otro lado, el modelo numérico ha mostrado su idoneidad en el análisis de la evolución de la zona saturada en superficie. En este sentido, se ha comprobado que para las mismas condiciones de contorno, riego y suelo, reproduce resultados equivalentes al modelo numérico de Bhatnagar y Chauhan (2008) que también está basado en un esquema explícito de diferencias finitas para la integración temporal de la ecuación de Richards. Por su parte, se ha comprobado que, el modelo de Brandt *et al* (1971), sobrestima sensiblemente el tamaño del charco para cualquier instante del tiempo con respecto a estos dos modelos, lo que finalmente dirige a una sobreestimación del radio máximo del charco (límite asintótico) con respecto al modelo analítico de Wooding (1968). Otros modelos existentes con capacidad para estimar esta característica del riego recopilados en la bibliografía, como

son, Ababou (1981) y Lafolie (1989), deben ser desestimados ya que su predicción está claramente subestimada (hasta en un factor 1/3) con respecto al avance del charco y su radio máximo, dentro de los límites que marca la racionalidad.

Se concluye por tanto que, el modelo numérico propuesto, como el de Bhatnagar, es una herramienta adecuada para estimar el tamaño y evolución de la zona saturada en superficie bajo riego por goteo. Este hecho, demuestra la idoneidad de los esquemas numéricos en diferencias finitas para el estudio de esta característica del riego, de especial importancia para una planificación adecuada de la separación entre goteros.

Por todo ello, se considera que el modelo numérico propuesto puede ser una alternativa potente para el estudio del flujo de agua en el suelo, y de utilidad en la optimización del diseño y gestión de los sistemas de riego por goteo.

En segundo lugar, se ha derivado un conjunto de ecuaciones analíticas aproximadas desde la ecuación de Darcy para fuentes en superficie con geometría semiesférica y circular (del Vigo *et al*, 2019c). Este modelo, ha sido validado por comparación de resultados con respecto a la integración numérica de la ecuación de Richards, encontrado desviaciones pequeñas para un amplio rango de tiempos, condiciones de contorno y riego exploradas.

De las pruebas realizadas se ha inferido que, para una fuente circular en superficie, las diferencias máximas de volumen infiltrado frente a tiempo de este modelo analítico con respecto a observaciones reales no deberían exceder el 15% para tiempos intermedios de riego, siendo significativamente inferiores para tiempos cortos y largos de infiltración. Se ha comprobado además que, los resultados del volumen infiltrado frente a tiempo de las simulaciones para la mayoría de los casos explorados (y siendo la resolución espacio-temporal suficientemente alta) se encuentran entre los valores que predice la solución analítica aproximada [4.19] por exceso, y [4.20b] por defecto. Por lo que se puede considerar que estas dos ecuaciones acotan el valor del volumen infiltrado frente al tiempo en condiciones de riego real. Este hecho sugiere que, una interpolación entre ambas aproximaciones pueda llevar a un mejor ajuste del volumen infiltrado frente a tiempo en muchos casos.

Del mismo modo se ha advertido que, en la mayoría de las pruebas realizadas la predicción de [4.20b] se acerca más a los valores simulados que [4.19]. Este hecho confirma los resultados reportados por Sayah *et al* (2016) para flujo unidimensional, que han encontrado para la infiltración acumulada, una mejor aproximación de la expresión de Green-Ampt con respecto a sus simulaciones que con la aproximación de dos términos de Philip. Este resultado parece por tanto extensible, en base a los estudios presentados en esta tesis, a un modelo analítico en tres dimensiones que siga una estructura similar a estas dos aproximaciones (como el propuesto aquí), y que por las pruebas realizadas puede tener una validez extensible a cualquier geometría de la fuente.

Es importante señalar además que, el modelo analítico propuesto no está restringido a los suelos del tipo Gardner, como es el caso de los otros modelos analíticos existentes en la bibliografía para régimen transitorio, como el modelo analítico de Philip [3.19], que también relaciona el volumen infiltrado frente al tiempo. Igualmente, tampoco está sujeto a una restricción de caudal constante propia de los otros modelos analíticos en régimen transitorio mencionados en la Revisión Bibliográfica. Un aspecto secundario, pero que también puede ser ventajoso es que las ecuaciones derivadas del modelo propuesto son matemáticamente mucho más simples que la de los otros modelos existentes, de manera que, se pueden obtener resultados de volumen infiltrado frente a tiempo sin necesidad de calcular integrales impropias, o la integral asociada a la función error complementaria de Gauss que aparece en el modelo de Philip [3.19].

La excesiva parametrización de las funciones de van Genuchten-Mualem dificulta la obtención de todos los parámetros para un suelo real, y principalmente, los que están asociados a características difíciles de cuantificar como la conectividad entre las cavidades del medio poroso; de esta manera, no existen técnicas experimentales de medición establecidas para parámetros como (m, λ) . Aunque se están produciendo avances en este sentido aplicando la teoría de fractales (Ghanbarian-Alavijeh *et al*, 2011), la obtención de modelos de caracterización del suelo que dependan de un menor número de parámetros conmensurables, permitiría progresar en la modelización del flujo de agua en el suelo. Un problema añadido a la sobre-parametrización es que un excesivo número de parámetros puede dar lugar a curvas de caracterización coincidentes respecto a juegos de parámetros distintos, lo que es un problema de indeterminación del sistema, que tan solo

aumenta la incertidumbre. Lamentablemente, los modelos de caracterización del suelo menos parametrizados como son Gardner [3.11], o Clapp y Hornberger [3.12], no ajustan fielmente las curvas de retención del suelo real en la mayoría de los casos.

El modelo analítico propuesto (bajo las condiciones de contorno asumidas) depende únicamente de cuatro parámetros del suelo ($\theta_0, \theta_s, k_s, \tau_f$); entre ellos, los tres primeros, pueden ser determinados en laboratorio bajo procedimientos experimentales bien establecidos. No obstante, y teniendo en cuenta que la determinación experimental de parámetros se ve negativamente afectada por factores como la heterogeneidad del suelo y principalmente la alteración que se produce del mismo en el análisis experimental, se propone el ajuste de k_s y τ_f a partir del modelo analítico y observaciones en campo. Lo que reduce el análisis experimental a tan solo dos parámetros (θ_0, θ_s) que normalmente son los menos afectados por los dos factores mencionados con anterioridad. En este sentido, se ha demostrado que conocidos los contenidos de humedad (θ_0, θ_s), y datos de $V - t$ ($q - t$) obtenidos en campo con un infiltrómetro de sección circular, se pueden estimar con una adecuada precisión los otros dos parámetros del suelo (k_s, τ_f). La obtención experimental de los contenidos de humedad inicial y en saturación se puede realizar con bastante precisión y pocos recursos en el laboratorio por procedimientos estándar (como los que se recogen en el Anejo IV); por el contrario, la estimación de la tensión en el frente (τ_f) a través de la ecuación de Neuman [3.28] requiere de información previa (de la que no se dispone antes de caracterizar el suelo) sobre las curvas de retención y conductividad hidráulica, por lo que supone una ventaja el poder ajustar este parámetro estadísticamente respecto a valores observados en el proceso de infiltración.

Del análisis que se ha realizado de la capacidad de ajuste de las ecuaciones [4.19] y [4.20b] con respecto a valores conocidos de (k_s, τ_f), y datos de volumen (o caudal) frente a tiempo procedentes de simulación, se concluye que la precisión del método propuesto es muy alta, y aumenta de forma racional con el volumen de datos experimentales recogidos así como con el tiempo de riego utilizado para su obtención. Como ejemplo, se han reportado desviaciones del ajuste frente a los valores conocidos de un 1.9% para τ_f y tan solo 0.05% para k_s , sobre datos recogidos durante 500 minutos de riego. Se puede notar que la desviación en la estimación de la conductividad hidráulica en saturación está muy por debajo del error esperable para la obtención experimental de este parámetro por los métodos estándar (se puede consultar la Tabla V.1 del Anejo en la que se recoge un error experimental asociado a este parámetro muy superior).

Por todo ello, el desarrollo de un modelo de caracterización del suelo basado en funciones para la curva de retención y conductividad hidráulica asociadas a estos cuatro parámetros y que ajuste bien a la realidad del suelo, podría suponer un avance en la modelización de la dinámica del flujo de agua en el suelo, teniendo en cuenta los escasos recursos necesarios para la obtención precisa de estos cuatro parámetros. Se plantea por tanto, como una línea futura de investigación la obtención de un modelo de caracterización del suelo completo, que incluya unas expresiones explícitas para la curva de retención y función conductividad hidráulica en base a estos cuatro parámetros que pueda ajustar a la mayor parte de los tipos de suelo real.

El último punto que se ha abordado en esta tesis se refiere al estudio del avance de la zona saturada, y más concretamente al radio límite del charco para condiciones de riego por goteo superficial a caudal constante. Aprovechando el modelo numérico se han realizado simulaciones para una variedad de suelos representativos de los tres principales catálogos de referencia mencionados en esta tesis (Apartado 3.1.3). Se ha llegado a la conclusión de que el radio máximo del charco depende del caudal aplicado, la conductividad hidráulica en saturación, y la diferencia de los contenidos de humedad inicial y en saturación del suelo. La independencia de esta expresión del parámetro α (constante de escala macroscópica de capilaridad) supone una ventaja con respecto al otro modelo de referencia (Modelo de Wooding), ya que este parámetro es de obtención experimental más compleja; la segunda ventaja, y tal vez más importante, es que la aproximación de Wooding ha sido derivada, y por tanto, tan solo es válida para suelos caracterizados según las funciones del tipo Gardner [3.11]. Adicionalmente, conviene recordar que la aproximación de Wooding, dentro de su régimen de validez, y como han reportado otros autores mencionados en la revisión bibliográfica (Pullan y Collins, 1987; Weir, 1987; Warrick, 1992) tiende a subestimar sensiblemente su predicción del radio límite para caudales pequeños y suelos arenosos donde el tamaño del radio máximo en régimen estacionario es menor a 10 cm. Un comportamiento similar al descrito por estos autores se ha encontrado en las simulaciones realizadas en esta tesis.

Las pruebas realizadas sobre tres suelos del tipo van Genuchten-Mualem verifican que la predicción de la expresión empírica propuesta [5.1] es razonable, mejorando ampliamente la predicción del modelo de Wooding para este tipo de suelos; en este sentido, se ha comprobado que el modelo de Wooding subestima sistemáticamente los valores

obtenidos para el radio límite en todos los rangos analizados, en un promedio para el error relativo con respecto a los valores simulados cercano al 50%. Por su parte, las expresiones inferidas [5.1] para los suelos este tipo (vG-M), generan valores para el radio máximo que no siguen ningún patrón sistemático de desviación y que según se ha discutido en el capítulo anterior son en promedio inferiores al 15% con respecto a las simulaciones realizadas.

Alternativamente, se ha derivado desde el modelo analítico propuesto (para una fuente circular en superficie) una expresión explícita del radio máximo en régimen estacionario [5.2] que ha resultado ser muy similar a las expresiones inferidas [5.1], lo que supone, aunque solo sea de forma parcial, una justificación racional de las mismas. Sorprendentemente, las expresiones derivadas analíticamente para los tres suelos estudiados de este catálogo predicen valores para el radio máximo que en promedio se desvían tan solo en un 15% de los resultados simulados.

Se concluye por tanto que, cualquiera de estas dos vías (ecuaciones [5.1]-[5.2]) podría mejorar las técnicas del diseño de riegos, y en particular el posicionamiento de goteros, basadas en el parámetro de radio máximo del charco que proporciona el modelo de Wooding, como por ejemplo Bresler (1978), siendo además generalizable para otros tipos de suelo diferentes a los del tipo Gardner.

REFERENCIAS.

1. Ababou R. (1981). Modelisation des transferts hydriques dans un sol en infiltration localisee. These de Docteur Ingenieur, Universite de Grenoble.
2. Amin M. S. M. & Ekhmaj A. I. M. (2006). DIPAC-DripIrrigation Water Distribution Pattern Calculator. 7th International Micro-Irrigation Congress, 10-16 Sept. Pwtc, Kuala Lumpur, Malaysia.
3. Anderson M.P. & Woessner W.W. (1992). Applied groundwater modelling. Academic Press, New York.
4. Ayers R.N. & Watson K.K. (1977). Experimental and numerical studies of soil water movement to a water table. Proceedings of 6th Australian hydraulics and fluid mechanics conference held at Adelaide. Australia, 5–9 Dec 1977.
5. Barry D.A., Parlange J.Y., Li L., Jeng D.S. & Crapper M. (2005). Green-Ampt approximations. Adv Water Resour. 28(10):1003–1009.
6. Bates B.C., Kundzewicz Z.W., Wu S. & Palutikof J.P. (2008). Climate Change and Water. Technical Paper of the Intergovernmental Panel on Climate Change. Geneva: IPCC Secretariat.
7. Beasley D. & Huggins L. (1982). Answers (areal nonpoint source watershed environment simulation). User's Manual. Report No. EPA-905/9-82-001. United States Environmental Protection Agency, Chicago, IL.
8. Ben-Asher J., Charach Ch. & Zemel A. (1986). Infiltration and water extraction from trickle irrigation source: the effective hemisphere model. Soil Sci. Soc. American J. 50(4):882-887.
9. Bhatnagar P.R. & Chauhan H.S. (2008). Soil water movement under a single surface trickle source. Agric Water Manag. 95(7):799–808.
10. Bicknell B.R., Imhoff J.C., Kittle Jr.J.L., Donigian Jr.A.S. & Johnson R.C. (2001). Hydrological Simulation Program-FORTRAN. User's Manual for Release 12. U.S. Environmental Protection Agency, Athens, Georgia.

11. Bird N.R.A., Perrier E. & Rieu M. (2000). The water retention function for a model of soil structure with pore and solid fractal distributions. *Eur. J. Soil Sci.* 51: 55–63.
12. Bouwer H. (1969). Infiltration of water into no uniform soil. *J Irrig Drain Eng. ASCE Proc. Paper 6937*, 95 (IR4):451–462.
13. Brandt A., Bresler E., Diner N., Ben-Asher I., Heller J., Goldberg D. (1971). Infiltration from trickle source: I. mathematical model. *Soil Sci Soc Am Proc* 35:675–682.
14. Bresler, E. (1975). Two-dimensional transport of solutes during nonsteady infiltration from a trickle source. *Soil Sci Soc Am Proc* 39:604–613.
15. Brooks R.H. & Corey A.T. (1964). Hydraulic properties of porous media. *Hydrol. Pap. 3*, p 27. Colo. State Univ. Fort Collins, Colo, USA.
16. Buckingham, E. (1907). Studies on the movement of soil moisture. *Bull. 38*. U.S. Dept.of Agr.Bureau of soils, Washington, D.C.
17. Campbell G. S. (1974). A simple method for determining unsaturated conductivity from moisture retention data. *Soil Sci.* 117, 311-314.
18. Carnahan B. (1979). *Cálculo numérico. Métodos y aplicaciones*. Madrid.
19. Carsel R. & Parrish R. (1988). Developing joint probability of soil water retention characteristics. *Water Resources Research.* 24(5), 755-769.
20. Carslaw H.S. & Jaeger J.C. (1959). *Conduction of heat in solids*. Oxford University Press. Oxford, UK.
21. Caussade B.H., Dournes G. & Renard G. (1979). A new numerical solution of unsteady two-dimensional flow in unsaturated porous media. *Soil Sci.* 127:193-201.
22. Childs E.C. & Collis-George N. (1950). The permeability of porous media. *Proceedings of the Royal Society A.* 201:393-405.
23. Childs E.C. & Bybordi M. (1969). The vertical movement of water in a stratified porous material 1: Infiltration. *Water Resour Res* 5(2):446–459.

24. Chu S.T. (1994). Green-Ampt analysis of wetting patterns for surface emitters. *J. Irrig. Drain E.* 120(2), 414–421.
25. Clapp R.B. & Hornberger G.M. (1978). Empirical equations for soil hydraulic properties. *Water Resour Res.* 14:601–604.
26. Clothier B.E. & Scotter D.R. (1982). Constant-flux infiltration from a hemispherical cavity. *Soil. Sci. Soc. Am. J.* 46:696–700.
27. Cook F.J., Thorburn P.J., Fitch P. & Bristow K.L. (2003a). WetUp: a software tool to display approximate wetting patterns from drippers. *Irr Sci* 22:129–134.
28. Cook F.J., Thorburn P.J., Bristow K.L. & Cote C.M. (2003b). Infiltration from surface and buried point sources: the average wetting water content. *Water Resour Res.* 39:1364–1369.
29. Cook F.J., Thorburn P.J., Fitch P., Charlesworth P.B. & Bristow K.L. (2006). Modelling trickle irrigation: comparison of analytical and numerical models for estimation of wetting front position with time. *Environ Model Softw.* 21:1353–1359.
30. Cosby B.J., Hornberger G.M., Clapp R.B. & Ginn T.R. (1984). A statistical exploration of the relationships of soil moisture characteristics to the physical properties of soils. *Water Resources Research.* 20(6), 682-690.
31. Darcy, H. (1856). *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Dalmont, Paris.
32. Dasberg S. & Or D. (1999). *Drip irrigation*. Springer, Berlin.
33. Day P.R. (1965). *Methods of Soil Analysis, Part. 1*. American Society of Agronomy. Madison (Wisconsin).
34. del Vigo A., Zubelzu S. & Juana L. (2019a). Algoritmo para la resolución de la ecuación de Richards en 3-D para riego por goteo: Método, validación y resultados preliminares. XXXVII Congreso Nacional de Riegos. Don Benito. Spain.
35. del Vigo A., Zubelzu S. & Juana L. (2019b). Study of water infiltration in soil by Richards equations in 3D: summary and methodology validation. 11th World Congress on Water Resources and Environment. Madrid.

36. del Vigo A., Zubelzu S. & Juana L. (2019c). Soluciones analíticas aproximadas bajo hipótesis de Green-Ampt desde fuentes semiesférica y circular en superficie. *Jornadas Ingeniería del Agua (J.I.A)*. Toledo.
37. del Vigo A., Zubelzu S. & Juana L. (2020). Numerical routine for soil dynamics from trickle irrigation. *Applied Math. Model.* 83: 371-385.
38. Elmaloglou S., Diamantopoulos E. (2009). Simulation of soil water dynamics under subsurface drip irrigation from line source. *Agric Water Manage.* 96:1587–1595.
39. Elmaloglou S. & Diamantopoulos E. (2010). Soil water dynamics under surface trickle irrigation as affected by soil hydraulic properties, discharge rate, dripper spacing and irrigation duration. *Irrig Drain* 59 (3): 254–263.
40. Emery A.F. & Carson H.W. (1971). An evaluation of the use of finite element method in the computation of the temperature. *J Heat Trans* 93(2):136–146.
41. Fernández-Gálvez J., Simmonds L.P. (2006). Monitoring and modelling the three-dimensional flow of water under drip irrigation. *Agr. Water Manage.* 83, 197-208.
42. Flerchinger G.N., Watts F.J., Bloomsburg G.L. (1988). Explicit solution to Green-Ampt equation for nonuniform soil. *J Irrig Drain Engg ASCE* 114(3):561–565.
43. Friedel M.J. (2001). Documentation and verification of VST2D: a model for simulating transient, variably saturated, coupled water heat-solute transport in heterogeneous, anisotropic, 2-dimensional ground-water systems with variable fluid density. *Water-Resources Investigations Rep.* 00–4105. US Geological Survey, Urbana, IL.
44. Gardner, W.R. (1958). Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table. *Soil Sci.* 85. Pg.228.
45. Ghali G.S. (1989a). Multi-dimensional analysis of soil moisture dynamics in trickle irrigated fields I: mathematical modelling. *Water Resour Manage* 3:11–34.

46. Ghali G.S. (1989b). Multi-dimensional analysis of soil moisture dynamics in trickle irrigated fields II: model testing. *Water Resour Manage.* 3:35–47.
47. Ghanbarian-Alavijeh B, Liaghat A., Huang G.U. & van Genuchten M.Th. (2010). Estimation of the van Genuchten soil water retention properties from soil textural data. *Pedosphere.* 20(4): 456-465.
48. Ghanbarian-Alavijeh B, Millan H. & Huang G.U. (2011). A review of fractal, prefractal and pore-solid-fractal models for parameterizing the soil water retention curve. *Canadian Journal of Soil Sci.* 91(1): 1-14.
49. Ghildyal B.P. & Tripathi R.P. (1987). *Soil Physics.* Wiley Eastern Limited, New Delhi (India).
50. Giménez D., Perfect E., Rawls W.J. & Pachepsky Y. (1997). Fractal models for predicting soil hydraulic properties: a review. *Eng. Geol.* 48: 161–183.
51. Green W.H. & Ampt G.A. (1911). Studies in soil physic I: the flow of air and water through soils. *Journal of Agricultural Science.* 4. Pag.1.
52. Holtan, H.N. (1961). A Concept for Infiltration Estimates in Watershed Engineering. USDA-ARS. Pg.41.
53. Jain M.K., Iyenger S.R.K. & Jain, R.K. (1994). *Computational Methods for Partial Differential Equation.* Wiley Eastern Limited, New Delhi.
54. Jury W.A. & Earl K.D. (1977). Water movement in bare and cropped soil under isolated trickle emitters. *Soil Sci Soc Am J.* 41:852–856.
55. Kandelous M.M., Simunek J. (2010a). Comparison of numerical, analytical, and empirical models to estimate wetting patterns for surface and subsurface drip irrigation. *Irrig Sci* 28:435–444.
56. Kandelous M.M., Simunek J. (2010b). Numerical simulations of water movement in a subsurface drip irrigation system under field and laboratory conditions using HYDRUS-2D. *Agric Water Manage.* 97:1070–1076.
57. Keyvan M. & Peters R.T. (2011). Wetting patterns models for drip irrigation: new empirical model. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering.* 137(8): 530-36.

58. Killen M. & Slack D. (1987). Green-Ampt model to predict surge irrigation phenomena. *J. Irrig. Drain Eng.* 113: 575-584.
59. Klute A. (1986). Water retention: laboratory methods. *Methods of soil analysis*. 2.ed. Madison: American Society of Agronomy.
60. Kostiaikov, A.N. (1932). On the dynamics of the Coefficient of Water Percolation in soils and on necessity of studying it from a dynamic point of view for the purposes of amelioration. *Trans.Com.Int.Soc.Soil Sci.* 6th Moscow A. pg.17.
61. Lafolie F., Geunnelon R., van Genuchten M.Th. (1989a). Analysis of water flow under trickle irrigation: I. Theory and numerical solution. *Soil Sci Soc Am J Proc* 53:1310–1318.
62. Lafolie F., Geunnelon R., van Genuchten M.Th. (1989b). Analysis of water flow under trickle irrigation: II. Experimental evaluation. *Soil Sci Soc Am J.* 53:1318–1323.
63. Landau, L.D. & Lifshitz E.M. (1991). *Curso de Física Teórica: Mecánica de Fluidos* (Vol.6). Ed.Reverte.
64. Lane I.J. & Nearing M.A. (1989). USDA-Water Erosion Prediction Project: Hillslope Profile and Watershed Model Documentation. NSERL Report No. 2, USDA-ARS. National Soil Erosion Research Laboratory, West Lafayette., Indiana.
65. Leij F.J., Alves W.J., van Genuchten M.Th. & Williams J.R. (1996). Unsaturated Soil Hydraulic Database, UNSODA 1.0 User's Manual. EPA Report 600/R96/095. USEPA, Ada, UK.
66. Leij F.J. & van Genuchten M.Th. (1999). Characterisation and measurement of the hydraulic properties of unsaturated porous media. *Proceeding of the International Workshop*. University of California, Riverside, CA. pp. 1-12.
71. Li R.M., Stevens M.A., Simons D.B. (1976). Solutions to Green-Ampt infiltration equation. *J Irrig Drain Engg.* ASCE 102(2):239–248.
72. Lomen, D.O. & Warrick, A.W. (1974). Time-dependent linearized infiltration: II. Line source. *Soil Sci.Soc.Amer.Proc.* 38. pg.568.

73. Lubana P.P.S., Narda N.K., Brown L.C. (2002). Application of a hemispherical model to predict radius of wetted soil volume under point source emitters for trickle irrigated tomatoes in Punjab state. *Trans ASABE* 32:243–257.
74. Martín I. & Pérez V.M. (2000). *Cálculo numérico para computación en ciencia e ingeniería. Síntesis*. Madrid.
75. Mathews J.H. & Fink K.D. (1999). *Métodos numéricos con MATLAB*. 3ªed. Printice Hall. Madrid.
76. Mezenzev V.J. (1948). Theory of formation of the surface runoff. *Meteorology & Hydrology*. 3:33–46
77. Minasny B. & McBratney A.B. (2007). Estimating the water retention shape parameter from sand and clay content. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 71: 1105–1110.
78. Mualem, Y. (1976). A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water Resource Journal*. 12. Pg.513.
79. Naglič B., Kechavarzi C., Coulon F. & Pintar M. (2014). Numerical investigation of the influence of texture, surface drip emitter discharge rate and initial soil moisture condition on wetting pattern size. *Irrigation Science* 32(6):421-436.
80. Nemes A., Schaap M.G., Leij F.J. & Wosten J.H.M. (2001). Description of the unsaturated soil hydraulic database UNSODA. Version 2.0. *J. Hydrol.* 251:151–162.
81. Neuman S.P. (1973). Saturated-unsaturated seepage by finite elements. *J Hydraul Div. ASCE* 99 (HY12):.2233–2250.
82. Neuman S.P. (1976). Wetting front pressure head in the infiltration model of Green and Ampt. *Water Resources Research*, (12): 564-565.
83. Ogden F.L. & Saghafian B. (1997). Green and Ampt infiltration with redistribution. *J Irrig Drain Engg. ASCE*. 123(5):386–393.
84. Parlange J.Y., Barry D.A. & Haverkamp R. (2002). Explicit infiltration equations and the Lambert W-function. *Adv. Water Resour.* 25, 1119–1124.

85. Payero, J.O. (2005). Subsurface Drip Irrigation: it is a good choice for your operation?. Crop Watch News Service. University of Nebraska-Lincoln. Institute of Agriculture and Natural Resources (issue 3).
86. Philip, J.R. (1957). The theory of infiltration: 4. Sorptivity and algebraic infiltration equations. *Soil Science Journal*. 84:257-328.
87. Philip, J.R. (1957). The theory of infiltration: 5. The influence of the initial moisture content. *Soil Science Journal*. 84:329-339.
88. Philip, J.R. (1968). Steady infiltration from buried point sources and spherical cavities. *Water Resour. Res.* 4:1039-1047.
89. Philip, J.R. (1969). Theory of Infiltration. *Advances in hydro-science*. 5:215-296.
90. Philip, J.R. (1971). General theorem on steady infiltration from surface sources, with application to point and line sources. *Soil Sci Soc Am Proc.* 35:867-871.
91. Philip J.R. (1984a). Travel times from buried and surface infiltration points sources. *Water Resour Res.* 20:990–994.
92. Philip J.R. (1984b). Steady infiltration from spherical cavities. *Soil Sci Soc Am J.* 48:724–729.
93. Philip J.R. (1984c) Steady infiltration from circular cylindrical cavities. *Soil Sci Soc Am J* 48:270–278.
94. Philip J.R. (1984d). Mathematics, soil, and water. *NZ Math Soc Newslett.* 31:28–35.
95. Philip J.R. (1992). What happens near a quasi-linear point source?. *Water Resour Res* 28:47–52.
96. Philip J.R. (1993). Variable-head ponded infiltration under constant or variable rainfall. *Water Resour Res.* 28:47–52.
97. Pullan A.J. & Collins I.F. (1987). Two and three-dimensional steady quasilinear infiltration from buried and surface cavities using boundary element techniques. *Water Resour Res.* 23(8):1633–1644.

98. Pullan A.J. (1990). The quasilinear approximation for unsaturated porous media flow. *Water Resour Res.* 26(6):1219–1234.
99. Raats P.A.C. (1970). Steady infiltration from line sources and furrows. *Soil Sci Soc Am Proc.* 34:709–714.
100. Raats P.A.C. (1971a). Laterally confined, steady flows of water from sources and to sinks in unsaturated soils. *Soil Sci Soc Am Proc.* 35:294–304.
101. Raats P.A.C. (1971b). Steady infiltration from point sources, cavities and basins. *Soil Sci Soc Am Proc.* 35:689–694.
102. Raats, P.A.C. (1972). Steady Infiltration from Sources at Arbitrary Depth. *Soil Sci. Soc. Amer. Proc.* 36. Pag.399.
103. Ravi V., Williams J.R., Burden D.S. (1998). Estimation of infiltration rate in the vadose zone: compilation of simple mathematical models. Report EPA/600/R-97/128^a. National Risk Management Research Laboratory. US Environmental Protection Agency. Ada OK 74820.
104. Rawls W.J., Brakensiek D.L. & Logsdon S.D. (1993). Predicting saturated hydraulic conductivity utilizing fractal principles. *Soil Science Society of America Journal*, 57(5), 1193-1197.
105. Rawls W.J., Pachepsky Y. & Shen M.H. (2001). Testing soil water retention estimation with the MUUF pedotransfer model using data from the southern United States. *J. Hydrol.* 251: 177–185.
106. Richards L.A. (1931). Capillary conduction of liquids in porous medium. *Physics* 1:318–333.
107. Saad Y. (2000). *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. 2^oEd. SIAM. Philadelphia.
108. Sayah B., Gil M. & Juana L. (2016). Development of one-dimensional solutions for water infiltration. Analysis and parameters estimation. *Journal of Hydrology* 535: 226-234.
109. Schaap M.G. & Leij F.J. (1998). Database related accuracy and uncertainty of pedotransfer functions. *Soil Sci.* 163, 765-779.

110. Schaap M.G., Leij F.J. & van Genuchten M.Th. (1998). Neural network analysis for hierarchical prediction of soil water retention and saturated hydraulic conductivity. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 62: 847–855.
111. Schaap M.G. & Leij F.J. (2000). Improved prediction of unsaturated hydraulic conductivity with the Mualem-van Genuchten model. *Soil Sci. Soc. Am.J.* 64, 843-855.
112. Schaap M.G., Leij F.J. & van Genuchten M.Th. (2001). ROSETTA: A computer program for estimating soil hydraulic parameters with hierarchical pedotransfer functions. *J. Hydrol.* 251: 163–176.
113. Selim H.M. & Kirkham D. (1973). Unsteady two-dimensional flow of water in unsaturated soils above an impervious barrier. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.* 37:489-495.
114. Simmons G.F. (1993). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas. Mc Graw Hill. Madrid.
115. Šimůnek J., van Genuchten M. & Šejna M. (2006). The HYDRUS Software Package for Simulating the Two- and Three-Dimensional Movement of Water, Heat, and Multiple Solutes in Variably-Saturated Media, Technical Manual Version 1.0. University of California Riverside. Riverside, CA, 3PC. Progress, Prague. Czech Republic.
116. Smith R.E. & Parlange J.Y. (1978). A parameter efficient hydrologic infiltration model. *Water Resour. Res.* 14:533-538.
117. Sneddon I.N. (1951). Fourier Transforms. Mc-Graw Hill Book Company. New York.
118. Stone J.J., Hawkins R.H. & Shirley E.D. (1994). Approximate form of Green-Ampt infiltration equation. *J Irrig Drain Engg. ASCE.* 120(1):128–137.
119. Swamee P.K., Rathie P.N. & Ozelim L.C.D.S.M. (2012). Explicit equations for infiltration. *J. Hydrol.* 426–427, 151–153.
120. Schwartzman M. & Zur B. (1986). Emitter Spacing and Geometry of Wetted Soil Volume. *J. Irrig. Drain. Eng.* 112(3):242-253
121. Taghavi S.A., Marino M.A. & Rolston D.E. (1984). Infiltration from trickle irrigation source. *J Irrig Drain Eng Eng. ASCE.* 110(4):331–341.

122. Tan T.S., Phoon K.K. & Chong P.C. (2004). Numerical study of finite element method based solutions for propagation of wetting fronts in unsaturated. *Soil J Geotech Geoenviron Eng.* 130(3): 254–263.
123. Thorburn, P.J., Cook, F.J. & Bristow, K.L. (2000). Variations in wetting patterns from trickle emitters in soils of different texture. In: 6th international micro-irrigation conference (Micro2000). Cape Town, South Africa, 22–27. Oct 2000.
124. Thorburn P.J., Cook F.J. & Bristow K.L. (2003). Soil-dependent wetting from trickle emitters: implications for trickle design and management. *Irrig Sci* 22:121–127.
125. Van Genuchten, M.T. (1980). A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America Journal.* 44. Pg.892.
126. van Genuchten M.Th. & Leij F. (1992). On estimating the hydraulic properties of unsaturated soils. *Indirect Methods for Estimating the Hydraulic Properties of Unsaturated Soils.* Riverside: University of California, p.1.
127. Varadhan, R. & Joseph R.W. (1998). Estimation of infiltration rate in the vadose zone: compilation of simple mathematical models (volume I). U.S. Environmental Protection Agency.
128. Vatankhah A.R. (2015). Modified Green-Ampt Infiltration Model for Steady Rainfall. *J.Hydrol.Eng.* 20(4).
129. Warrick, A.W. (1974). Time-dependent linearized infiltration: I. Point source. *Soil Sci.Soc.Amer.Proc.* 34. pg.383.
130. Warrick A.W & Lomen D.O. (1976). Time-dependent linearized infiltration: III. Strip and disc sources. *Soil Sci.Soc.Amer.Proc.* 40:639–643.
131. Warrick A.W. (1992). Models for disc infiltrometer. *Water Resour. Res.* 28:1319-1327.
132. Weir G.J. (1987). Steady infiltration from small shallow circular ponds. *Water Resour Res.* 23:733–736.

133. Wooding R.A. (1968). Steady infiltration from a shallow circular pond. *Water Resour Res.* 4:1259–1273.
134. Wu, T.H., McKinnell, W.P. and Swanston, D.N. (1979). Strength of tree roots and landslides on Prince of Wales Island, Alaska. *Canadian Journal of Geotechnical Research* 16(1): 19-33.
135. Wu, I.P. (1987). An assessment of hydraulic design of micro-irrigation systems. *Agricultural water management.* 32: 275.
136. Yeh, G.T. (1999). *Computational subsurface hydrology: fluid flows.* Kluwer Academic Pub. Boston.
137. Zur, B. (1996). Wetted soil volume as a design objective in trickle irrigation. *Irrigation Science.* 16:101-105.
138. Zyvoloski G., Brunch J.C. & Sloss J.M. (1976). Solution of equation for two-dimensional infiltration problems. *Soil Sci.* 122:65-70.

ANEJOS.

ANEJO I. Fundamentos matemáticos.

I.i. Aproximación numérica de la derivada.

La resolución numérica de ecuaciones diferenciales (como la ecuación de Richards) implica un tratamiento de las derivadas que aparecen en la ecuación. Considerando una dimensión y la propia definición de derivada:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad [\text{I. 1}]$$

La función derivada se puede aproximar al siguiente cociente, en el que la distancia h deja de ser infinitesimal, dentro de un dominio $\mathcal{H} = (a, b) \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad [\text{I. 2a}]$$

Normalmente, la distancia h , también conocida como resolución espacial, suele ser constante y definida a partir del número de puntos considerados dentro del dominio $h = (b - a)/(N - 1)$. Obviamente, cuanto mayor sea la resolución espacial, y por tanto N , mejor es la aproximación a la derivada, a costa de mayor esfuerzo computacional.

Una mejor aproximación a la derivada es la fórmula de diferencias centradas. En este caso, se eligen dos puntos adyacentes a ambos lados del punto de estudio para la aproximación:

$$f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad [\text{I. 2b}]$$

Se puede demostrar que en este caso el error de truncamiento no supera el límite:

$$\varepsilon = \frac{h^2 f'''(c)}{6} = O(h^2) \quad [\text{I. 3a}]$$

Donde $c \in \mathcal{H}$, y el error disminuye con el cuadrado de la resolución espacial. En la mayoría de las simulaciones realizadas en esta tesis se ha utilizado esta definición de derivada.

Si se requiere una precisión mayor, se puede aproximar la derivada por la formula centrada de orden 4:

$$f'(x) \cong \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h} \quad [\text{I. } 2c]$$

Cuyo error de truncamiento es:

$$\varepsilon = \frac{h^4 f^{(4)}(c)}{30} = O(h^4) \quad [\text{I. } 3b]$$

Siendo $c \in \mathcal{H}$, una precisión de cuarto orden que obviamente aumenta el esfuerzo de computación de la aproximación de orden 2.

Derivadas de orden superior.

Desde la expresión para la derivada centrada y aplicando el teorema de Taylor se pueden deducir aproximaciones a la derivada centrada de orden superior. Para una cota de error de orden $O(h^2)$ se han utilizado las siguientes aproximaciones a las derivadas centradas:

$$f''(x) \cong \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} \quad [\text{I. } 4]$$

$$f^{(iv)}(x) \cong \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 6f(x) - 4f(x+h) + f(x+2h)}{h^4} \quad [\text{I. } 5]$$

I.ii. Aproximación numérica a la integral.

En esta tesis ha sido necesario resolver las integrales que no tienen solución analítica, de forma numérica. En este apartado se desarrollan algunas de las técnicas utilizadas en los cálculos para la integración de funciones de una variable.

I.ii.i Integral a partir de su definición.

También conocido como método de los rectángulos. Sea una función continua en el dominio $\mathcal{H} = (a, b) \in \mathbb{R}$. Como su integral definida en $\mathcal{H}$ es el área que queda por debajo de la función con respecto al eje-X, se puede aproximar como:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=1}^N f(x_i)h \quad [I.6]$$

Donde h es la distancia entre nodos (resolución espacial) tal que $h = b - a / (N - 1)$. Como en el caso de la derivada cuanto menor es h mejor es la aproximación aunque mayor el tiempo de cálculo. Como en cada uno de los términos de esta serie el error cometido es menor que $\varepsilon_i = (f(x_{i+1}) - f(x_i))h$, la cota de error es:

$$\varepsilon = L \cdot f'(c) \cdot h^2 \quad [I.7]$$

Donde $c \in \mathcal{H}$ es el punto del dominio donde la derivada de $f(x)$ es máxima.

I.ii.ii. Método de Simpson.

La regla del rectángulo no tiene en cuenta la curvatura de la función al resolver la integral numérica. Para tener en cuenta este efecto, se puede aproximar la curva de $f(x)$ entre dos o más nodos, a un polinomio de orden $s = n' - 1$, donde n' representa el número de puntos de interpolación. Este procedimiento se conoce como cuadratura de Newton-Cotes. En el caso particular de una parábola, la integral aproximada toma la forma:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3} \sum_{i=1}^{N-2} (f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})) \quad [I.8]$$

Expresión conocida como método de Simpson. Notar que el término predominante es el central, lo que configura la curvatura de la aproximación. El error cometido al aproximar una integral por el método de Simpson es inferior a:

$$\varepsilon = L \cdot h^4 \frac{f^{iv}(c)}{180} = O(h^4) \quad [\text{I. 9}]$$

Siendo $L = b - a$, y $c \in \mathcal{H} = (a, b)$ el punto donde la derivada de orden iv alcanza un máximo valor. La integral [3.28] se ha resuelto en todos para todos los casos analizados de esta tesis por este método.

I.ii.iii. Integrales impropias. Cuadratura de Gauss-Laguerre.

Una integral es impropia si su rango de integración tiende a infinito y/o si el integrando diverge en algún punto del dominio. En este trabajo se han tenido que resolver algunas integrales impropias recurriendo al método de la cuadratura de Gauss-Laguerre.

Consideremos el problema de integración siguiente:

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx \cong \sum_{i=1}^s w_i f(x_i) \quad [\text{I. 10}]$$

Donde la integral impropia se ha aproximado a una suma de N términos cuyo valor está determinado por el peso:

$$w_i = \frac{x_i}{(s+1)^2 [L_{s+1}(x_i)]^2} \quad [\text{I. 11}]$$

En la ecuación anterior la función esta evaluada sobre los puntos x_i que corresponden a las raíces de los polinomios del Laguerre de grado s , $L_s(x)$. Por consiguiente, los nodos de integración, no están equiespaciados, como ocurría en el caso de la sección anterior. La familia de polinomios de Laguerre son las funciones solución de la siguiente ecuación diferencial ordinaria (ecuación de Laguerre):

$$xy'' + (1-x)y' + sy = 0 \quad [\text{I. 12}]$$

Donde $s \in \mathbb{N}$. Y en particular, se pueden calcular a través de la fórmula de Rodrigues:

$$L_s(x) = \frac{e^x}{s!} \frac{d^s}{dx^s} (e^{-x} x^s) \quad [I.13]$$

Consecuentemente, los polinomios de Laguerre tienen un número de raíces (x_i) igual a su grado (s), y el número de términos de la aproximación a la integral [I.10]. Una vez determinados los polinomios de Laguerre con [I.13], el cálculo de sus raíces (x_i) es directo a través de cualquiera de los métodos numéricos conocidos (secante, Newton-Raphson), o también a través de la función *laguerreL* en MATLAB, que es la vía que se ha utilizado en esta tesis para la resolución de [3.23]. Obviamente, cuanto mayor es el grado del polinomio de Laguerre utilizado, mejor será la aproximación a la integral impropia a costa de un mayor esfuerzo computacional.

I.iii. Métodos de integración de ecuaciones diferenciales.

Cuando las condiciones de contorno o funciones de caracterización del suelo no son suficientemente sencillas, la ecuación de la filtración debe ser integrada numéricamente. En este apartado se detallan algunos de los métodos de integración más populares, así como los que se han utilizado para la resolución de la ecuación de Richards en esta tesis. Para una información más detallada, se pueden consultar los textos de la bibliografía: Carnahan et al (1979), Mathews & Fink (1999), Martín & Pérez (2000) y Saad (2000).

I.iii.i. Introducción.

Según el número de variables involucradas en la solución de una ecuación diferencial, se distinguen entre dos tipos de ecuaciones. Ecuación diferencial ordinaria (EDO), si la solución y resto de funciones implicadas tan solo dependen de una variable, y ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP), si la solución y funciones involucradas dependan de dos o más variables.

La derivada de orden superior en una ecuación diferencial determina el orden de la misma. Una ecuación diferencial de orden p es lineal si la incógnita y todas sus derivadas se pueden escribir como combinación lineal, siendo los factores que las acompañan funciones explícitas de las variables involucradas en la solución. Esto significa que la función incógnita, y ninguna de sus derivadas, están dentro de otra función, o esta multiplicada por alguna función que dependa de ellas mismas. A modo de ejemplo, una ecuación diferencial lineal ordinaria de orden p puede expresarse de la siguiente forma:

$$g(x) = \sum_{i=0}^p a(x)f^{(i)}(x) \quad [\text{I. 14}]$$

Donde la función incógnita es $f(x)$. La solución de una ecuación diferencial lineal suele ser más fácil de obtener, porque además puede expresarse como combinación lineal de soluciones particulares.

Por su interés las EDP lineales de segundo orden se clasifican en parabólicas, elípticas e hiperbólicas según el valor del discriminante $\Delta = B^2 - 4AC$, donde las funciones A , B y C acompañan a las derivadas de orden superior:

$$A(x, y)f_{xx} + B(x, y)f_{xy} + C(x, y)f_{yy} + Df_x + Ef_y + F = G(x, y) \quad [I. 15]$$

Notar que esta definición está restringida a las ecuaciones diferenciales lineales de dos variables (x, y) . En este caso, se dice que la ecuación es elíptica si $\Delta < 0$, parabólica si $\Delta = 0$, e hiperbólica si $\Delta > 0$. Advertir igualmente, que esta definición está dada para un subespacio $\Omega = (x, y) \in V^2$ del dominio de la solución (V^2) , ya que el signo del discriminante puede variar según el punto (x, y) .

La ecuación de la filtración (ecuación de Richards) observamos que:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(\theta) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(\theta) \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(\theta) \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \frac{\partial k(\theta)}{\partial z} \quad [3.10a]$$

No es una ecuación lineal, ya que las derivadas de h (ó en su caso θ , dependiendo de su formulación), están multiplicadas por funciones que dependen de ellas mismas $k(\theta)$, la conductividad hidráulica. En el caso particular $k = cte$, por ejemplo en saturación (k_s), o para un dominio $\Omega = (x, y)$ en el que k se pueda expresar como función explícita de las variables (x, y) esta ecuación se podría reducir a una lineal elíptica en régimen estacionario $\partial \theta / \partial t = 0$ y sobre el plano horizontal:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, y) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(x, y) \frac{\partial h}{\partial y} \right) \text{ en } \Omega \quad [I. 16a]$$

O también, en régimen estacionario y coordenadas cilíndricas en condiciones de simetría axial ($\partial / \partial \varphi = 0$), de utilidad en riego por goteo:

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \left(k(r, z) \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(r, z) \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \frac{k}{r} \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{\partial k}{\partial z} \text{ en } \Omega \quad [I. 16b]$$

Sería lineal elíptica dentro del subdominio Ω en que la conductividad hidráulica se pudiera expresar de forma explícita con respecto a las coordenadas espaciales $k(r, z)$.

El problema es que la situación que representan las ecuaciones [I.16] no es en general la situación de interés en los riegos donde domina el régimen transitorio.

La imposibilidad de resolver analíticamente la mayor parte de las ecuaciones diferenciales obliga a intentar su resolución numérica. Según se ha visto en el apartado anterior, las derivadas de una función se pueden aproximar numéricamente, por ejemplo por el método de la derivada centrada. Esto significa que se puede transformar cualquier ecuación diferencial, y particularmente la ecuación de Richards, en un sistema de ecuaciones algebraicas sustituyendo sus derivadas espaciales y temporales por sus correspondientes aproximaciones a la derivada. En integración numérica de ecuaciones diferenciales, se distingue entre métodos explícitos e implícitos de integración.

Los métodos explícitos permiten calcular todas las variables a través de las condiciones iniciales y de contorno, a excepción de una que se puede despejar y calcular explícitamente como combinación lineal de todas las demás. Generalmente, en problemas de evolución temporal, se determina la variable en el nuevo tiempo a partir de los valores de la variable en tiempos anteriores o del mismo instante ya calculados. Por el contrario, en los métodos implícitos, existe más de una incógnita en la ecuación aproximada una vez realizada la discretización, lo que obliga a resolver un sistema de ecuaciones algebraicas para cada nuevo instante.

Una segunda clasificación de métodos de integración numérica de ecuaciones diferenciales atiende al número de pasos de tiempo utilizados a la hora de calcular la incógnita en una iteración temporal. Así, muchos métodos sencillos utilizan un único paso de tiempo previo al que se pretende calcular para la resolución de las ecuaciones algebraicas en cada iteración. Un poco más sofisticados son los métodos multi-paso, que resuelven el sistema algebraico de cada iteración temporal utilizando información de dos o más pasos previos.

I.iii.ii. Método de Euler.

Considerar el problema de valor inicial $y' = f(y, t)$ definido dentro de un dominio tal que $t \in \mathcal{H} = (a, b)$, con la condición inicial conocida: $y(a) = y_0$. La función incógnita a determinar es, por tanto, $y(t)$.

La variable independiente t se puede discretizar $t_i = a + ih$ para N valores consecutivos en el intervalo (a, b) , siendo h el valor del equiespaciado para todo el dominio $h = (b - a)/(N - 1)$. Aplicando el teorema de Taylor sobre la incógnita $y(t)$, en un entorno de t_0 :

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) + \frac{y''(t_0)(t - t_0)^2}{2} + \dots \quad [\text{I. 17a}]$$

Y en el caso discreto:

$$\begin{aligned} y(t_1) &= y(t_0) + y'(t_0)(t_1 - t_0) + \frac{y''(t_0)(t_1 - t_0)^2}{2} + \dots \\ &= y(t_0) + y'(t_0)h + \frac{y''(t_0)h^2}{2} + \dots \quad [\text{I. 17b}] \end{aligned}$$

Siendo h suficientemente pequeño para que la aproximación de Taylor tenga valor. Si además despreciamos los términos de orden igual y superior a $O(h^2)$, nos queda:

$$y(t_1) = y(t_0) + y'(t_0)h \Rightarrow y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) \quad [\text{I. 17c}]$$

Expresión conocida como aproximación de Euler. El lado derecho de la igualdad anterior es conocido ya que depende exclusivamente de la condición inicial. Conocido y_1 , se puede repetir exactamente el mismo planteamiento para obtener explícitamente y_2 , y de forma iterativa cualquier valor de y_i :

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) \quad [\text{I. 18a}]$$

Notar que geométricamente $f(t_i, y_i)$ es el valor de la pendiente:

$$f(t_i, y_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad [\text{I. 18b}]$$

I.iii.iii. Método de la serie de Taylor.

Este método explícito es una versión más general del método de Euler, en el que se utiliza un truncamiento a orden n de la serie de Taylor. Considerar nuevamente el problema de valor inicial $y' = f(y, t)$ definido dentro de un dominio tal que $t \in \mathcal{H} = (a, b)$, con la condición inicial conocida: $y(a) = y_0$. Asumiendo que $y(t)$ es una función de clase C^n , la expansión de Taylor a orden n es:

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t_1 - t_0) + \frac{y''(t_0)(t_1 - t_0)^2}{2} + \dots + \frac{y^n(t_0)(t_1 - t_0)^n}{n!} \quad [\text{I. 19a}]$$

Lo que permite aproximar:

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)h + \frac{y''(t_0)h^2}{2} + \dots + \frac{y^n(t_0)h^n}{n!} \quad [\text{I. 19b}]$$

Las derivadas de orden superior están determinadas sobre t_0 ya que se pueden calcular a través de la regla de la cadena:

$$y' = f(y, t) \Rightarrow y'' = f' \cdot y' = f' \cdot f \Rightarrow y''' = \dots \quad [\text{I. 20}]$$

Por lo que finalmente, nos queda la expresión explícita general para cualquier término de la red de nodos:

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)h + \frac{y''(t_i)h^2}{2} + \dots + \frac{y^n(t_i)h^n}{n!} \quad [\text{I. 19c}]$$

Como en el método de Euler el valor para cada nodo se resuelve iterativamente desde el punto anterior. En este caso, la precisión es de orden $O(h^n)$, aunque el tiempo de computación será obviamente mayor debido entre otras cosas a la necesidad del cálculo de las derivadas de orden n .

I.iii.iv. Método predictor-corrector.

Este método está basado en la idea de resolver en primera instancia la ecuación aproximada para el paso de tiempo desconocido $y_p(t_{i+1})$, también llamado ‘predictor’, para luego usar este resultado en segunda instancia sobre la misma ecuación obteniendo una mejor aproximación a la solución conocida como ‘corrector’ $y_c(t_{i+1})$. Existen diversos tipos de métodos predicción-corrección; como ejemplo se presenta el método de Adams-Bashforth-Moulton, que es un desarrollo del método explícito presentado en el Apartado 4.1. Considerar el teorema fundamental del cálculo:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt \quad [4.1]$$

Aplicar la aproximación al polinomio de Lagrange de grado $s = 2$ sobre $f(t, y(t))$ para calcular el predictor:

$$y_p(t_{n+1}) = y(t_n) + h \left(\frac{3}{2} f(t_n, y_n(t)) - \frac{1}{2} f(t_{n-1}, y_{n-1}(t)) \right) \quad [\text{I. 21a}]$$

Conocido el predictor, se obtiene una estimación del valor para $f(t_{n+1}, y_{n+1}(t))$ pudiéndose utilizar al aplicar de nuevo la aproximación [4.1b] para obtener un resultado más fiable:

$$y_c(t_{n+1}) = y(t_n) + h \left(\frac{3}{2} f(t_{n+1}, y_{n+1}(t)) - \frac{1}{2} f(t_n, y_n(t)) \right) \quad [I. 21b]$$

Este desarrollo, convierte al método de Adams-Bashforth en un método implícito, ya que en general no se puede despejar $y(t_{n+1})$ de la ecuación anterior.

I.iii.v Método de Crank – Nicolson.

Este esquema implícito publicado por John Crank y Phyllis Nicolson en 1947 para resolver la ecuación del calor, tiene la peculiaridad de que utiliza la fórmula de las diferencias centradas sobre un valor intermedio entre dos pasos de tiempo. En este sentido, su derivada de segundo orden sobre el espacio se resuelve como un valor medio entre las aproximaciones de la derivada centrada para los tiempos t y $t + \Delta t$.

Siendo la ecuación del calor en una dimensión:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad [I. 22a]$$

Donde $c [m^2/s]$ es una constante propia del material conocida como difusividad térmica. Notar que la ecuación de Richards en una dimensión para el flujo horizontal sería similar sustituyendo la temperatura por el contenido de humedad, si fuera la difusividad hidráulica una constante, que no es, pues depende del contenido de humedad. La aproximación de Crank-Nicolson transforma la ecuación anterior en:

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} = c \frac{(T_{j+1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1}) + (T_{j+1}^n - 2T_j^n + T_{j-1}^n)}{2(\Delta z)^2} \quad [I. 22b]$$

La derivada temporal (índice n) se resuelve simplemente como una diferencia finita progresiva. La derivada segunda sobre la coordenada espacial (índice j) se ha obtenido como la media aritmética de la derivada centrada en los pasos de tiempo n y $n + 1$. El método es implícito ya que no existe ninguna opción de despejar cualquiera de los

términos desconocidos $T_{j,j\pm 1}^{n+1}$. Trasladando todos los términos desconocidos al mismo lado de la igualdad se llega a:

$$-\mu \cdot T_{j+1}^{n+1} + (2 + 2\mu)T_j^{n+1} - \mu \cdot T_{j-1}^{n+1} = (2 - 2\mu)T_j^n + \mu(T_{j+1}^n + T_{j-1}^n) \quad [1.22c]$$

Donde hay tres incógnitas al lado izquierdo de la igualdad para el paso de tiempo desconocido $n + 1$, mientras que el lado derecho de la igualdad es conocido. Se ha utilizado el factor $\mu = c^2 \Delta t / (\Delta z)^2$ en la simplificación. Este tipo de esquema implícito se resuelve como un sistema de ecuaciones algebraicas en cada iteración temporal, que en este caso sencillo es tridiagonal. Asumiendo que el primer y último nodo espacial son conocidos (condiciones de contorno) se obtienen la ecuación matricial $A \cdot X = B$ sobre los nodos intermedios $j = 2, 3, \dots, m - 1$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 + 2\mu & -\mu & & & 0 \\ -\mu & 2 + 2\mu & & & \\ & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & 2 + 2\mu & -\mu \\ & & & -\mu & 2 + 2\mu \end{bmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} T_2^{n+1} \\ T_3^{n+1} \\ \vdots \\ T_{m-1}^{n+1} \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} (2 - 2\mu)T_2^n + \mu(T_1^n + T_3^n) \\ (2 - 2\mu)T_3^n + \mu(T_2^n + T_4^n) \\ \vdots \\ (2 - 2\mu)T_{m-1}^n + \mu(T_{m-2}^n + T_m^n) \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \quad [1.23]$$

Sistema compatible determinado con $(m - 2)$ incógnitas.

Este tipo de métodos implícitos tienen el coste computacional asociado a la resolución de un sistema de ecuaciones algebraicas para cada iteración temporal; sin embargo, la resolución espacio-temporal necesaria para garantizar la estabilidad de los métodos implícitos normalmente es menor que en los métodos explícitos, por lo que en muchos problemas compensa el esfuerzo de cálculo.

I.iv. Funciones de Bessel.

Las funciones de Bessel definidas por Daniel Bernoulli y después generalizadas por Friedrich Bessel son una familia de funciones solución de la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \beta^2)y = 0 \quad [\text{I. 24}]$$

Donde el coeficiente $\beta \in \mathbb{C}$. Las funciones de Bessel de primera especie $J_\beta(x)$, están asociadas al parámetro β y aparecen cuando se resuelven problemas físicos ligados a la ecuación de Laplace o la ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas o esféricas. Por tanto, son necesarias para problemas de propagación de ondas, conducción o difusión, en coordenadas esféricas como es el caso de nuestra ecuación de la filtración.

La forma general de las funciones de Bessel de primera especie para puntos cercanos a $x = 0$ es:

$$J_\beta(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\beta} \quad [\text{I. 25}]$$

Donde Γ representa la función gamma que para números enteros se reduce simplemente al factorial. En el caso de la ecuación [3.25] el coeficiente β toma los valores (0,1), por tanto:

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (m+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} ; \quad J_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (m+2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1} \quad [\text{I. 26a}]$$

Por lo que representan polinomios de grado $2m$ y $2m+1$ respectivamente. Otra forma de expresar las funciones de Bessel es a través de su forma integral para la variable muda ω y valores enteros del parámetro $\beta = n \in \mathbb{Z}$:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\omega - x \sin \omega) d\omega \Rightarrow \begin{cases} J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(-x \sin \omega) d\omega \\ J_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\beta - x \sin \omega) d\omega \end{cases} \quad [\text{I. 26b}]$$

Figura I.1. Representación de las funciones de Bessel de primera especie para los coeficientes $\beta = 0,1,2$.

ANEJO II. Anejo a la Teoría de la Infiltración.

II.i. Catálogos de los modelos de caracterización del suelo utilizados.

Los catálogos de referencia para los modelos de caracterización del suelo mencionados en esta tesis son los que se exponen a continuación:

Suelo	Fuente	Rango de $-h$ [cm]		α [cm ⁻¹]	$-\alpha h_0$ [adim]	k_s [cm/s]	r
		desde	hasta				
Chino clay	Gardner (1959)	1.02	1.79×10 ⁴	6.85×10 ⁻⁴	3.69	2.29×10 ⁻⁵	0.75
Lamberg clay	King (1964) ^a	1.02	255	2.05×10 ⁻²	0.50	2.29×10 ⁻⁵	0.92
Bet netofa clay soil	Rawitz (1965) ^b	1.45	33.6	3.27×10 ⁻¹	-0.83	3.34×10 ⁻²	0.98
Lakish clay	Hadas (1971) ^c	1.25	980	6.62×10 ⁻²	-0.72	9.5×10 ⁻⁷	0.99
Yolo clay	Moore (1939)	40	700	1.38×10 ⁻²	1.06	8.1×10 ⁻⁵	0.99
Sticky clay	Rijtema (1965)	37.2	147	3.67×10 ⁻²	1.06	9.33×10 ⁻⁶	0.99
		1	10 ⁴	8.64×10 ⁻⁴	-2.53	2.54×10 ⁻⁶	0.72
		1	170	2.91×10 ⁻²	-0.44	2.54×10 ⁻⁶	0.94
Fragmented Lamberg clay	Brooks and Corey (1964)	9	139	4.1×10 ⁻²	0.57	2.14×10 ⁻³	0.99
Peat	Rijtema (1965)	1	10 ⁴	1.04×10 ⁻²	-3.96	6.13×10 ⁻⁵	0.65
		1	130	5.38×10 ⁻²	-0.77	6.13×10 ⁻⁵	0.94
Sheluhot silty clay	Rawitz (1965) ^b	1.3	890	7.26×10 ⁻²	-1.16	1.44×10 ⁻⁶	0.95
Touched silt loam	Brooks and Corey (1964)	12.2	298.8	1.56×10 ⁻²	0.62	4.86×10 ⁻⁴	0.93
Touched silt loam	King (1964) ^a	1.57	104.6	1.03×10 ⁻¹	1.37	6.64×10 ⁻⁴	0.98
Silt loam	Reisenauer (1963)	0	339	1.39×10 ⁻²	0.18	5.74×10 ⁻⁵	0.99
Indio loam	Gardner (1959)	0	10	1.69	-4.93	3.9×10 ⁻⁴	0.73
Yolo fine Sandy loam	Moore (1939)	43.3	300	2.5×10 ⁻²	0.14	4.07×10 ⁻⁵	0.79
Plainfield sand fraction (210-250μ)	Klute and Wilkinson (1958)	0	31	2.62×10 ⁻²	-2.21	0.03	0.21
Plainfield sand fraction (177-210μ)		30	37	0.28	9.14	0.02	0.69
Plainfield sand (149-177μ)		41.5	46	0.64	27.14	0.014	0.92
PF.S. (125-149μ)		45	53	0.33	16	0.0106	0.74
PF.S. (104-125μ)		55	65	0.371	21.9	73×10 ⁻⁴	0.73
Dackley sand	Moore (1939)	38.7	49.8	0.513	19.19	10 ⁻⁴	0.89
Oso flasco fine sand	Luthin and Day (1955)	0	50	7.2×10 ⁻²	0.66	0.02	0.96
G.E. 2 sand	King (1964) ^a	13.2	31.6	0.17	2.41	1.56×10 ⁻³	0.94
Crab creek sand	King (1964) ^a	4.17	15.4	0.466	1.73	1.27×10 ⁻²	0.98
G.E. 2 sand	Brooks and Corey (1964)	43.8	121	5.75×10 ⁻²	3.36	2.96×10 ⁻³	0.94
Sand (USSL + 3445)	Brooks and Corey (1964)	58.4	147.2	6.5×10 ⁻²	4.52	1.44×10 ⁻³	0.97

a Tesis doctoral. Colorado, USA
b Tesis doctoral. Jerusalén, Israel
c Comunicación personal (Mualem, 1976)

Tabla II.1. Catálogo de Mualem. Bresler (1978). Expresiones [3.11].

Textura de suelo	Suelos	Fracción de arcilla	b	h_s [cm]	h_s (log) cm	h cm	θ_s [adim]	k_s [cm/min]	S [cm/min ^{1/2}]
Sand	13	0.03	4.05 (1.78)	12.1 (14.3)	3.50	4.66	0.395 (0.056)	1.056	1.56
Loamy sand	30	0.06	4.38 (1.47)	9.0 (12.4)	1.78	2.38	0.410 (0.068)	0.938	1.04
Sandy loam	204	0.09	4.90 (1.75)	21.8 (31.0)	7.18	9.52	0.4350 (0.086)	0.208	1.03
Silt loam	384	0.14	5.30 (1.96)	78.6 (51.2)	56.6	75.3	0.485 (0.059)	0.0432	1.26
Loam	125	0.19	5.39 (1.87)	47.8 (51.2)	14.6	20.0	0.451 (0.078)	0.0417	0.693
Sandy clay loam	80	0.28	7.12 (2.43)	29.9 (37.8)	8.63	11.7	0.420 (0.059)	0.0378	0.488
Silty clay loam	147	0.34	7.75 (2.77)	35.6 (37.8)	14.6	19.7	0.477 (0.057)	0.0102	0.310
Clay loam	262	0.34	8.52 (3.44)	63.0 (51.0)	36.1	48.1	0.476 (0.053)	0.0147	0.537
Sandy clay	19	0.43	10.4 (1.64)	15.3 (17.3)	6.16	8.18	0.426 (0.057)	0.0130	0.223
Silty clay	441	0.49	10.4 (4.45)	49.0 (62.1)	17.4	23.0	0.492 (0.064)	0.0062	0.242
Clay	140	0.63	11.4 (3.70)	40.5 (39.7)	18.6	24.3	0.482 (0.050)	0.0077	0.268

* de Li et al. [1976].

Tabla II.2. Catálogo de Clapp y Hornberger. Expresiones [3.12].

	Suelo	θ_r	θ_s	α [cm ⁻¹]	n	m	k_s [cm/min]
1	Sand	0.045	0.43	0.145	2.68	0.6269	0.4950
2	Loamy Sand	0.057	0.41	0.124	2.28	0.5614	0.2432
3	Sandy Loam	0.065	0.41	0.075	1.89	0.4709	0.0736
4	Sandy Clay	0.100	0.39	0.059	1.48	0.3243	0.0218
5	Loam	0.078	0.43	0.036	1.56	0.3590	0.0173
6	Silt Loam	0.067	0.45	0.020	1.41	0.2908	0.0075
7	Clay Loam	0.095	0.41	0.019	1.31	0.2366	0.0043
8	Silt	0.034	0.46	0.016	1.37	0.2701	0.0042
9	Clay	0.068	0.38	0.008	1.09	0.0826	0.0033
10	Sandy Clay	0.100	0.38	0.027	1.23	0.1870	0.0020
11	Silt Clay Loam	0.089	0.43	0.010	1.23	0.1870	0.0012
12	Silt Clay	0.070	0.36	0.005	1.09	0.0826	0.0003

Tabla II.3. Catálogo de Carsel y Parrish. Expresiones [3.13].

II.ii. Modelos empíricos.

Esta categoría de modelos se fundamentan en la interpretación de los datos experimentales. La mayoría de ellos no representan ninguna ley física concreta. Por el contrario, arrojan una función de ajuste para variables de interés como son la infiltración instantánea, acumulada, avance del frente, o profundidad alcanzada, como funciones del tiempo o el volumen aplicado, inferida a través de datos obtenidos por observación directa.

Uno de los primeros modelos empíricos es el de Kostiakov (1932) para la infiltración vertical en una dimensión. Relaciona la infiltración instantánea con una función potencia del tiempo, de la forma:

$$i(t) = At^{-B} \quad [\text{II. 1}]$$

La infiltración acumulada surge de la integración directa de la anterior ecuación, de forma que:

$$I(t) = \frac{A}{1-B} t^{1-B} \quad [\text{II. 2}]$$

Donde $A > 0$ y $0 < B < 1$, son parámetros dependientes del suelo sin sentido físico alguno que se pueden obtener por ajuste a las observaciones. El modelo de Kostiakov ajusta bastante bien los datos observados, aunque se desvía de los modelos analíticos para largos tiempos de riego.

Para mejorar el ajuste del modelo de Kostiakov en procesos de infiltración largos, se propuso una modificación conocida como la ecuación de Mezencev (1948):

$$i(t) = I_f + At^{-B} \Rightarrow I(t) = i_f t + \frac{A}{1-B} t^{1-B} \quad [\text{II. 3}]$$

Donde I_f es la infiltración instantánea final en estado estacionario. Algunas de las mejoras introducidas por esta ecuación empírica son discutidas por J.R.Philip (1957) en su revisión de la teoría de la infiltración.

Posteriormente, el modelo de Holtan (1961) ha incluido parámetros con sentido físico, como el tamaño del poro del suelo buscando un mejor ajuste, aunque esta información puede ser de difícil obtención.

Modelos posteriores como Schwartzman y Zur (1986), están desarrollados para predecir el avance del frente mojado y su profundidad en función del tiempo. Para ello, introducen parámetros físicos del suelo como la conductividad hidráulica en saturación:

$$r_f = 1.82(V_i)^{0.22} \left(\frac{k_s}{q} \right)^{-0.017} \quad [\text{II. 4a}]$$

$$z_f = 2.54(V_i)^{0.63} \left(\frac{k_s}{q} \right)^{0.45} \quad [\text{II. 4b}]$$

Siendo r_f el radio de avance del frente y z_f su profundidad para un volumen total infiltrado V_i a caudal q . El rango de aplicabilidad de este modelo esta acotado a valores de conductividad hidráulica en saturación dentro del intervalo: $k_s = (0.0144, 0.144)$ cm/min.

Otro modelo en la misma línea es el de Amin & Ekhmaj (2006), con un rango más amplio de aplicación ya que sigue la base de datos y catálogo de varios autores. Utiliza un parámetro adicional que representa la variación media del contenido de humedad dentro del frente de avance $\langle \Delta \theta \rangle$. En ausencia de datos se puede aproximar como $\langle \Delta \theta \rangle \cong \theta_s/2$, dando buen resultado:

$$r_f = 0.2476 \langle \Delta \theta \rangle^{-0.5626} (V_i)^{0.2686} (q)^{-0.0028} (k_s)^{-0.0344} \quad [\text{II. 5a}]$$

$$z_f = 2.0336 \langle \Delta \theta \rangle^{-0.383} (V_i)^{0.365} (q)^{-0.101} (k_s)^{0.195} \quad [\text{II. 5b}]$$

La principal ventaja de los modelos empíricos es su sencillez matemática, pero también que no necesitan un conocimiento profundo de las propiedades físicas del suelo para poder predecir los fenómenos de infiltración. La mayor parte de ellos están inferidos a través de datos experimentales, aunque también se han obtenido modelos empíricos a través de datos obtenidos por simulación.

Otros modelos empíricos existentes en la bibliografía son: Ben-Asher *et al* (1986), Zur (1996), y Keyvan & Peters (2011).

II.iii. Teoría de la infiltración en una dimensión.

II.iii.i. Flujo horizontal.

Considerar un medio semi-infinito y homogéneo sobre el eje X, cuyo contenido de humedad inicial es θ_0 , en contacto con una fuente en saturación θ_s de potencial matricial $h_s = 0$. Considerando la relación existente entre el potencial matricial, la conductividad hidráulica y el contenido de humedad se introduce el concepto de difusividad hidráulica $D(\theta) = k(\theta) \cdot dh/d\theta$, utilizado por primera vez por Childs & Collins-George en (1950)^{§§§§}. De esta forma, la Ecuación de Richards y las condiciones de contorno se escriben:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(\theta) \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad [\text{II. 6}]$$

$$\begin{cases} t = 0 \text{ y } x > 0 \Rightarrow \theta = \theta_0 & [\text{II. 7a}] \\ t \geq 0 \text{ y } x = 0 \Rightarrow \theta = \theta_s & [\text{II. 7b}] \end{cases}$$

Esta ecuación diferencial no es lineal debido al producto $D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x}$. Para resolverla Bruce & Klute (1956) utilizaron la variable de Boltzmann:

$$B = \frac{x}{\sqrt{t}} \quad [\text{II. 8}]$$

Lo que convierte la ecuación anterior y sus condiciones iniciales y de contorno en:

$$-\frac{1}{2} B \frac{\partial \theta}{\partial B} = \frac{\partial}{\partial B} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial B} \right) \quad [\text{II. 9}]$$

$$\begin{cases} B \rightarrow \infty \Rightarrow \theta = \theta_0 & [\text{II. 10a}] \\ B = 0 \Rightarrow \theta = \theta_s & [\text{II. 10b}] \end{cases}$$

Por lo que la ecuación diferencial se convierte en ordinaria, dependiente únicamente de la variable B . Integrando se llega a:

$$-\frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} B d\theta = \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial B} \right]_{\theta_0}^{\theta} = D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial B} \Big|_{\theta} - 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} B d\theta = D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial B} \quad [\text{II. 11}]$$

^{§§§§} La pendiente de la curva de retención se la conoce como capacidad específica de humectación: $C(\theta) = d\theta/dh$, tal que $[C] = m^{-1}$.

Ya que para $(\theta = \theta_0)$, donde $B = \infty$, la derivada del contenido de humedad con respecto a la variable de Boltzmann se anula. La integral de la última ecuación se puede resolver numéricamente (Sayah et al, 2016), y conocido $D(\theta)$ se determina $\theta(B)$, y con ello $\theta(x, t)$.

Despejando la difusividad se obtiene:

$$D(\theta) = -\frac{1}{2\left(\frac{\partial\theta}{\partial B}\right)_\theta} \int_{\theta_0}^{\theta} B d\theta \quad [\text{II. 12a}]$$

Y deshaciendo el cambio:

$$D(\theta) = -\frac{1}{2t\frac{\partial\theta}{\partial x}} \int_{\theta_0}^{\theta} x(\theta) d\theta \quad [\text{II. 12b}]$$

La difusividad hidráulica se puede obtener utilizando esta fórmula y la curva $\theta(x)$ (obtenida experimentalmente), para un instante determinado de tiempo t . Teóricamente $D(\theta)$ es independiente del instante de tiempo seleccionado.

II.iii.ii. Sorptividad.

En el flujo horizontal en una dimensión la curva característica representa el contenido de humedad a lo largo del eje-X. Todas las curvas características convergen a una única función cuando se representa el contenido de humedad frente a la variable de Boltzmann $x/\sqrt{t}$. La sorptividad [$\text{cm}/\text{min}^{1/2}$], se define como el área que encierra esta familia de curvas para un suelo determinado. Matemáticamente:

$$S = \int_{\theta_0}^{\theta_s} B d\theta = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\infty} (\theta - \theta_o) dx = I/\sqrt{t} \quad [\text{II. 13}]$$

En una asimilación de infiltración horizontal con la expresión de Green-Ampt, la sorptividad es proporcional a la raíz cuadrada del producto de la conductividad hidráulica en saturación, la diferencia de contenidos de humedad y la tensión de succión del frente. La Sorptividad se define como la capacidad de infiltración de agua de un material por unidad de raíz cuadrada del tiempo. Está asociada a la

capacidad de absorción de agua del medio por medio de capilaridad. Esto implica que los suelos arenosos tienen mayor Sorptividad que los arcillosos (Figura II.1).

En ocasiones, en el contexto de la sorptividad, en el flujo horizontal se utiliza en lugar infiltración los términos de absorción acumulada A_a [cm] y absorción instantánea A_i [cm/min]:

$$A_a = S \cdot \sqrt{t} \quad [\text{II. 14a}]$$

$$A_i = \frac{S}{2\sqrt{t}} \quad [\text{II. 14b}]$$

Figura II.1. Sorptividad. Sayah *et al* (2016). (a) Definición de Sorptividad: área por debajo de la función normalizada $\theta(B)$. (b) Sorptividad calculada para seis suelos del tipo van Genuchten-Mualem. Observar que la Sorptividad es mayor cuanto mayor es la capacidad de absorción de agua del suelo.

En infiltración vertical unidimensional, para los primeros instantes de tiempo que el efecto gravitatorio es despreciarse, la infiltración acumulada se ajusta convenientemente a la del flujo horizontal en una dimensión. En estos casos, se puede usar la sorptividad como un parámetro que rige la infiltración para tiempos cercanos a cero. Según hemos visto en la Sección 4.2, este resultado es generalizable para infiltración en tres dimensiones.

II.iii.iii. Flujo vertical.

Considerar un medio solido semi-infinito y homogéneo en una dimensión. Considerar exclusivamente el efecto de la gravedad y de la succión. El contenido inicial de humedad del suelo es θ_0 , mientras que la fuente en superficie es puntual y en saturación θ_s para $z = 0$. La ecuación de Richards y sus condiciones iniciales y de contorno en este caso son:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k(\theta) \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \frac{\partial k(\theta)}{\partial z} \quad [\text{II. 15}]$$

$$\begin{cases} t = 0, z > 0 \Rightarrow \theta = \theta_0 & [\text{II. 16a}] \\ t \geq 0, z = 0 \Rightarrow \theta = \theta_s & [\text{II. 16b}] \end{cases}$$

Ecuación diferencial en derivadas parciales que no es lineal. Philip (1957) propuso resolver la ecuación en términos de $z(\theta, t)$ en lugar del contenido de humedad ya que de esta forma se llega a una ecuación similar a la del movimiento horizontal unidimensional. De esta forma, y teniendo en cuenta que z es diferenciable, se cumple que:

$$dz(\theta, t) = \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)_t d\theta + \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_\theta dt \quad [\text{II. 16}]$$

Philip (1957), propuso una solución del tipo:

$$z(\theta, t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(\theta) t^{iC} \quad [\text{II. 19}]$$

Siendo C un parámetro constante. Para que esta solución sea consistente con la de los primeros instantes de tiempo debe coincidir con la del flujo horizontal en una dimensión, por lo que según se ha visto:

$$z(\theta, t) = f_0 + f_1 t^C + \dots = B\sqrt{t} \Leftrightarrow \begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = B \\ C = 1/2 \end{cases} \quad [\text{II. 20}]$$

El resto de funciones $f_{i>1}$ tendrían una aportación menor a la solución por lo que se podrían despreciar. No obstante, llevando esta solución a la ecuación [II.17] se pueden calcular uno a uno e iterativamente todos los coeficientes $f_{i>1}$; ver por ejemplo, Ghildyal y Tripathi (1987).

Una vez obtenidos los coeficientes $f_{i>1}$ se puede escribir la infiltración acumulada, e instantánea (su derivada), de la siguiente forma:

$$I(t) = St^{\frac{1}{2}} + (S_2 + k_0)t + S_3t^{3/2} \dots \quad [\text{II. 21a}]$$

$$i(t) = \frac{1}{2}St^{-\frac{1}{2}} + S_2 + k_0 + \frac{3}{2}S_3t^{1/2} \dots \quad [\text{II. 21b}]$$

Donde se ha usado el valor de la Sorptividad (S) y sus términos de orden superior (S_i) para simplificar la anterior ecuación:

$$S = \int_{\theta_0}^{\theta_s} B d\theta \quad [\text{II. 13}]$$

$$S_i = \int_{\theta_0}^{\theta_s} f_i d\theta \quad [\text{II. 22}]$$

El error cometido al despreciar los términos de orden superior para un suelo estándar es pequeño. Por ejemplo, Ghildyal y Tripathi (1987) han calculado los valores de estos términos para el suelo *Yolo Light Clay* (Philip, 1957), que se presentan en la Tabla II.4. Se puede observar que los términos a partir del cuarto orden son insignificantes con respecto a los dos primeros, si bien, hay que considerar que los exponentes del tiempo van aumentando, va reduciéndose el orden de magnitud:

$S_1 \equiv S$	S_2	S_3	S_4
$1.254 \cdot 10^{-2}$	$4.654 \cdot 10^{-6}$	$1.405 \cdot 10^{-9}$	$8.961 \cdot 10^{-14}$

Tabla II.4. Valores obtenidos numéricamente para los coeficientes asociados a la solución de Philip (1957).

ANEJO III. Anejo a la caracterización de suelos.

Conocidos los contenidos de humedad inicial y en saturación del suelo, otra posibilidad alternativa a la que se ha presentado en el Apartado 5.2.4 de esta tesis para el cálculo de los parámetros k_s y τ_f consiste en resolver un sistema de dos ecuaciones independientes entre sí, con estos dos parámetros como incógnita.

Efectivamente, utilizando por ejemplo las ecuaciones [4.20a]-[4.20b]-[REF.3], y recogidas $N = 16$ observaciones de $(V - t)$ y $(q - t)$ para a cada una de ellas, se ha representado en el mismo plano las funciones $\tau_f(k_s)$ interpoladas sobre los N puntos asociados a cada una de estas dos ecuaciones. La independencia entre las dos ecuaciones [4.20] está garantizada dado que una es la derivada de la otra. La intersección entre las dos funciones de interpolación $\tau_f(k_s)$ lleva al resultado aproximado: $(k_s, \tau_f) = (0.01938, 9.735)$; el tiempo de riego simulado para la adquisición de estos $N = 16$ datos fue de 200 minutos. Aunque la precisión de este ajuste, en principio es menor que la que se ha presentado por el método de los mínimos cuadrados, es posible que aumentando el tiempo de riego y el número de datos recogidos mejore la aproximación.

Por otro lado, puede ser una ventaja desde el punto de vista del ahorro de tiempo experimental, utilizar las ecuaciones aproximadas para los límites de tiempos cercanos a cero. En este sentido se ha probado el ajuste entre las curvas de interpolación referentes a [4.15b]-[4.19]-[REF.3] hasta un tiempo máximo de infiltración de 30 minutos (Figura III.1). La ecuación [4.15b] describe el caudal infiltrado desde un disco para tiempos cercanos a cero, por lo que tan solo se han utilizado datos recogidos para tiempos inferiores a 1 minuto. Por su parte, la ecuación [4.19] es válida para tiempos intermedios, por lo que se han utilizado datos de volumen infiltrado frente al tiempo recogidos a lo largo de toda la simulación hasta un máximo de 30 minutos. Bajo condiciones de suelo y fuente emisora iguales a los del caso anterior se han obtenido los valores aproximados que representa la figura: $(k_s, \tau_f) \cong (0.01717, 6.511)$.

Figura III.1. Representación de las dos funciones $\tau_f(k_s)$ inferidas desde datos $q - t$ y $V - t$ procedentes de simulación (hasta 30 minutos de riego) para las ecuaciones respectivas [4.15b]-[4.19]-[REF.3]. La gráfica muestra el punto de intersección entre las dos curvas. Parámetros del suelo de la Tabla 5.5.

El resultado es sorprendentemente cercano a los datos conocidos, superando ampliamente la estimación obtenida a través del ajuste sobre [4.19]-[REF.3] que recoge la Tabla 5.8, para datos recogidos en simulación sobre 500 minutos de riego. Por otro lado, y aunque este resultado de ajuste es sensiblemente más pobre que el obtenido por mínimos cuadrados para [4.20b]-[REF.3], hay que considerar que el tiempo de medida es muy inferior (en un factor 1/16), lo que supone una ventaja importante en el ahorro de tiempo experimental en el supuesto real de toma de datos con infiltrómetro de sección circular.

La razón del satisfactorio ajuste que presenta la Figura 5.20 puede deberse al uso de la ecuación [4.15b]-[REF.3] que sabemos que es exacta para el límite $t \rightarrow 0$, por lo que en los intervalos de tiempo testados podría funcionar mejor que las aproximaciones para tiempos más largos como [4.20b]-[REF.3].

ANEJO IV. Procedimientos experimentales.

IV.i. Cálculo de errores.

Distinguimos entre error sistemático, de precisión del aparato y aleatorio. El error sistemático procede de una fuente conocida que afecta de forma regular o sistemática a la medida, de forma que se puede corregir o calibrar. El error de precisión del aparato es inherente a la sensibilidad del dispositivo de medida; como la fuente es conocida (imprecisión del dispositivo) para muchos autores es un caso particular de error sistemático. En esta tesis se ha utilizado este criterio, por lo que en muchos casos se ha identificado el error sistemático como el error de precisión del aparato. Finalmente, el error aleatorio procede de fuentes que siendo conocidas o desconocidas, no se puede controlar de manera que no hay forma de saber si el dato obtenido está por encima o por debajo del valor real. Para poder reducirlo, si la sensibilidad del aparato es suficiente, se utilizan las herramientas de cálculo estadístico que se exponen a continuación.

Considerando que el error sistemático (ε_s) no afecta al aleatorio (ε_a), y viceversa; es decir, que proceden de fuentes de error distintas, desde un punto de vista matemático, los debemos considerar como dos términos linealmente independientes entre sí, de manera que el error total, en términos de esperanza matemática, se calcula como la composición de los mismos de la siguiente forma:

$$\varepsilon_T = \sqrt{(\varepsilon_s)^2 + (\varepsilon_a)^2} \quad [\text{IV.1}]$$

Error de una medida directa.

Si el aparato de medida no es lo suficientemente sensible como para detectar el error aleatorio; es decir, si a partir de la segunda medida se obtiene siempre el mismo dato experimental, el error total es igual al error sistemático o de precisión del aparato ya que: $\varepsilon_s \gg \varepsilon_a \Rightarrow \varepsilon_T = \varepsilon_s$.

En caso contrario, y siguiendo una función de distribución de las medidas de forma Gaussiana, la media aritmética (μ) y desviación típica

(σ) son los parámetros estadísticos que proporcionan el valor más probable y error de la medida:

$$\mu = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N} \quad [\text{IV. 2}]$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N - 1}} \quad [\text{IV. 3}]$$

Siendo N el número de datos medidos y x_i cada una de las medidas. Cuando el número de datos no es muy alto es común utilizar la desviación típica de la distribución de probabilidad t-Student, que siendo una función de tendencia mas suave incorpora un margen de error mayor. Es este parámetro el que se ha considerado como error aleatorio en esta tesis. Su relación con la desviación típica de Gauss es:

$$\varepsilon_a = \sigma \frac{t_{N-1}}{N} \quad [\text{IV. 4}]$$

Dónde t_{N-1} es la t-Student de $N-1$ grados de libertad y para el nivel de significación desdado, que se se dispone en las hojas de cálculo como Excel o programas como Matlab o tabulada en textos de probabilidad y estadística de nivel universitario (Quesada *et al*, 1982).

Error de una medida indirecta. Propagación de errores.

Cuando una magnitud (y), se calcula a través de una formula analítica sobre la que se introducen N medidas directas sujetas a un error experimental: $x_i \pm \Delta x_i$, se dice que $y(x_i)$ es una medida indirecta. El valor más probable $\langle y \rangle$ y su error Δy , en el caso de que los errores sean independientes, se puede expresar como:

$$\langle y \rangle = y(\mu_i) \quad [\text{IV. 5}]$$

$$\Delta y = \sum_i^N \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i\right)^2} \quad [\text{IV. 6}]$$

IV.ii. Medida del contenido de humedad.

Se han realizado medidas del contenido de humedad inicial y en saturación de distintos suelos por exposición a temperaturas de ebullición a través de diferencias de masa. Para ello es necesario medir previamente la densidad aparente del suelo:

$$\rho = \frac{M}{V} \quad [\text{IV. 7}]$$

Donde en este caso M es la masa de la muestra y V su volumen. Los errores directos e indirectos asociados a esta medida son:

- 1.- Masa: $\Delta M = (0.1, 1000)g$. Dependiendo de la balanza en cada caso.
- 2.- Volumen: $\Delta V = (1, 1000)cm^3$ Dependiendo de la probeta en cada caso.
- 3.- Densidad:

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{\Delta M}{V}\right)^2 + \left(\frac{M\Delta V}{V^2}\right)^2} \quad [\text{IV. 8}]$$

IV.ii.i. Contenido de humedad inicial.

Considerar N muestras del mismo suelo en condiciones iniciales, cuya masa es conocida M_0 . Introducir en horno a temperatura de ebullición (110°C) durante al menos 24h. Obtener de nuevo su masa: M_{seco} .

La humedad inicial en términos de masa (sin contar el agua residual):

$$\theta'_0 = \frac{M_0 - M_{seco}}{M_0} = 1 - \frac{M_{seco}}{M_0} \quad [\text{IV. 9a}]$$

Cuyo error experimental es para cada muestra:

Báscula de precisión: $\Delta M = \Delta M_0 = 0.1g$.

$$\Delta\theta'_0 = \sqrt{\left(\frac{M_{seco}}{M_0^2} \Delta M_0\right)^2 + \left(\frac{\Delta M_{seco}}{M_0}\right)^2} \quad [\text{IV. 10a}]$$

En virtud de la relación entre masa, volumen y densidad, el contenido de humedad inicial aparente del suelo y su error en términos volumétricos son:

$$\tilde{\theta}_0 = \frac{\rho}{\rho_{agua}} \theta'_0 \cong \rho \theta'_0 \quad [\text{IV.11a}]$$

$$\Delta \tilde{\theta}_0 = \sqrt{(\theta'_0 \Delta \rho)^2 + (\rho \Delta \theta'_0)^2} \quad [\text{IV.12a}]$$

Donde se ha aproximado la densidad de agua a $1g/cm^3$ y siendo ρ la densidad aparente del suelo. Observar que el contenido de humedad volumétrico es mayor que el másico en virtud de que el agua tiene menor densidad que el suelo sólido. La probeta utilizada para medir volúmenes en este caso y que afecta al valor de $\Delta \rho$ es de precisión: $\Delta V = 1cm^3$.

Existe una cantidad de agua en el interior de las muestras, debido al efecto de coloides que, por sus condiciones de estanqueidad no permiten evaporar el agua almacenada que está relacionada con el contenido de humedad residual, y que no desaparece en el calentamiento. Para su estimación en nuestro caso hemos utilizado ROSETTA.

Por tanto, sumando al contenido inicial aparente el contenido residual del suelo estimado por ROSETTA, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\theta_0 = \tilde{\theta}_0 + \theta_r \quad [\text{IV.13a}]$$

Asumiendo que θ_r , al ser un valor estimado, no tiene error experimental hemos estimado que: $\Delta \theta_0 = 2\Delta \tilde{\theta}_0$ porque obviamente está asociado a cierta incertidumbre.

IV.ii.ii. Contenido de humedad en saturación.

Considerar N muestras en contacto con agua un tiempo suficiente (más de 24 horas) hasta alcanzar la saturación. Llevando las muestras a temperatura de ebullición, y por el mismo procedimiento que en el apartado anterior, se puede calcular por diferencia de masas el contenido de humedad en saturación:

$$\theta'_{sat} = \frac{M_{sat} - M_{seco}}{M_{sat}} = 1 - \frac{M_{seco}}{M_{sat}} \quad [\text{IV.9b}]$$

$$\Delta\theta'_{sat} = \sqrt{\left(\frac{M_{seco}}{M_{sat}^2} \Delta M_{sat}\right)^2 + \left(\frac{\Delta M_{seco}}{M_{sat}}\right)^2} \quad [\text{IV.10b}]$$

Igual que en el apartado anterior el contenido de humedad en saturación en términos volumétricos junto con su error será:

$$\tilde{\theta}_s = \frac{\rho}{\rho_{agua}} \theta'_{sat} \cong \rho \theta'_{sat} \quad [\text{IV.11b}]$$

$$\Delta\tilde{\theta}_s = \sqrt{(\theta'_{sat} \Delta\rho)^2 + (\rho \Delta\theta'_{sat})^2} \quad [\text{IV.12b}]$$

Donde otra vez hemos asumido $\rho_{agua} \cong 1$ y siendo el error de los dispositivos de medida directa:

Báscula de precisión: $\Delta m = 0.1g$.

Probeta: $\Delta V = 1cm^3$.

Finalmente, sumando el contenido residual del suelo estimado por ROSETTA, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\theta_s = \tilde{\theta}_s + \theta_r \quad [\text{IV.13b}]$$

Cuyo error vamos a estimar del mismo modo que en el apartado anterior $\Delta\theta_s = 2\Delta\tilde{\theta}_s$.

IV.iii. Medida de la conductividad hidráulica en saturación. Permeámetro de carga variable.

El permeámetro de carga variable es un dispositivo que permite medir la conductividad hidráulica de una muestra de suelo en saturación (Figura IV.1). La longitud del suelo saturado L se mantiene constante, mientras que la altura de agua $z(t)$, disminuye con función el tiempo. El agua atraviesa el suelo (que se ha saturado previamente) a través de un filtro poroso.

Figura IV.1. Esquema del permeámetro de carga variable.

Como el caudal es constante en todo el sistema:

$$q = \frac{dV}{dt} = v_L \cdot A_L = -A_z \frac{dz}{dt} \quad [\text{IV.14a}]$$

Donde A_L y A_z se refieren a las secciones del cilindro que contienen la muestra saturada de suelo y el capilar de entrada de agua, respectivamente. Como la velocidad del flujo en el suelo saturado (v_L) según la ecuación de Darcy es: $v_L = k_s M = k_s z(t)/L$ se puede integrar la siguiente ecuación con respecto al tiempo:

$$k_s \frac{z}{L} \cdot A_L = -A_z \frac{dz}{dt} \quad [\text{IV.14b}]$$

Llegando a la siguiente expresión una vez introducidos los límites de integración:

$$t = \frac{A_z L}{A_L k_s} \ln \left(\frac{z_0}{z} \right) \quad [\text{IV. 15}]$$

Función que relaciona la caída de carga en el capilar en función del tiempo del experimento.

A través de la pendiente β de una recta de regresión $t - \ln(z_0/z)$ se puede despejar la conductividad hidráulica en saturación:

$$k_s = \frac{A_z L}{A_L \beta} \quad [\text{IV. 16}]$$

El error de k_s es función del error cometido en la pendiente de la recta de regresión, así como de las medidas experimentales de longitud y áreas del capilar y muestra. Por propagación de errores:

$$\Delta k_s = \frac{r_z^2 L}{r_L^2 \beta} \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 + \left(\frac{2\Delta r_z}{r_z} \right)^2 + \left(\frac{2\Delta r_L}{r_L} \right)^2 + \left(\frac{\Delta \beta}{\beta} \right)^2} \quad [\text{IV. 17}]$$

Los errores sistemáticos de los aparatos utilizados para las medidas:

- 1.- Longitud: $\Delta L = 1mm$ (cinta métrica).
- 2.- Radio de la muestra: $\Delta r_L = 1mm$. (Cinta métrica).
- 3.- Radio del capilar: $\Delta r_z = 0.1mm$. (Calibre pie de rey).

Figura IV.2. Resultados del ajuste lineal para la obtención de k_s de los dos suelos analizados: (a) C-C; (b) C-P.

IV.iv. Medida de la textura. Densitómetro de Bouyoucos.

Conocer la textura de cada suelo nos ha permitido obtener una estimación con ROSETTA de los parámetros físicos del suelo. El siguiente gráfico clasifica los doce tipos texturales según U.S.D.A. (United States Department of Agricultural Soil Characterization) en función de su cantidad relativa de arcilla, limo y arena.

Figura IV.3. Triangulo de texturas según el USDA (Ghildyal y Tripathi, 1987).

El tamaño del grano es un factor clave para el proceso de filtración del suelo. Normalmente, cuanto más fino es el grano, más compacto es el suelo, y por tanto, más impermeable. La siguiente tabla clasifica las partículas de un suelo según su tamaño:

<i>Grava</i>	> 2mm
<i>Arena muy gruesa</i>	(1,2) mm
<i>Arena gruesa</i>	(0.5,1) mm
<i>Arena media</i>	(0.25,0.5) mm
<i>Arena fina</i>	(0.1,0.25) mm
<i>Arena muy fina</i>	(0.05,0.1) mm
<i>Limo</i>	(0.002,0.05) mm
<i>Arena</i>	< 0.002mm

Tabla IV.1. Tamaño de las partículas según el USDA.

El estudio edafológico tiene por objeto delimitar el porcentaje de partículas que según su tamaño, indicado en esta tabla, tiene cada uno de los suelos. Procedimiento:

- 1.- Separar 40 gramos de muestra seca al aire y sin grava (previamente tamizada con un filtro de 2mm).
- 2.- Añadir 100 ml de solución dispersante, y mezclar durante unos minutos, para posteriormente filtrar con un tamiz de 0.2mm, que separe la arena media y gruesa del resto de la disolución.

Figura IV.4. Mezcla de cada muestra con el fluido dispersante. Laboratorio de Edafología.

3.- Mezclar el resto de disolución con agua dentro de una probeta de 1L. Introducir el densitómetro, registrando medidas de su profundidad con el tiempo hasta un máximo de 24h.

La profundidad alcanzada por el densitómetro en función del tiempo depende de la cantidad de partículas en suspensión. Cuanto más arenosa sea la muestra, más rápido sedimenta, lo que favorece la inmersión del densitómetro ya que la disolución es menos densa. La densidad del fluido está afectada por la temperatura, por lo que es necesario medir esta magnitud cada vez que se extrae una medida de buzamiento.

Con los datos obtenidos del ensayo se puede representar en diagrama semi-logarítmico el porcentaje de partículas en suspensión (escala decimal) frente al diámetro de las mismas (escala logarítmica), lo que finalmente proporciona la información textural en términos de porcentaje relativo de arena, limo y arcilla.

Los parámetros de estos dos ejes se obtienen a través de las siguientes ecuaciones:

$$\%Particulas_{(<D)} = \frac{(L_n - L_0)}{p} \cdot 100 \quad [IV.18]$$

$$D(\mu m) = \frac{\delta}{\sqrt{t}} \sqrt{\frac{\eta}{\eta_{30^\circ}}} \quad [IV.19]$$

Donde los parámetros de las ecuaciones [IV.18]-[IV.19] se refieren a:

- $L_n \equiv$ Lectura del densitómetro en suspensión (buzamiento).
- $L_0 \equiv$ Parámetro de calibración (lectura del densitómetro en agua pura a la misma temperatura).
- $p \equiv$ Peso de la muestra seca (expuesta a temperatura de ebullición, 110°C).
- $\delta \equiv$ Parámetro de sedimentación (Tabla IV.2).
- $t \equiv$ Tiempo.
- $\sqrt{\frac{\eta}{\eta_{30^\circ}}} \equiv$ Factor de corrección por temperatura (Tabla IV.3).

L_n	θ	L_n	θ	L_n	θ	L_n	θ
-5	50,4	7	47,4	19	44,2	31	40,7
-4	50,1	8	47,2	20	43,9	32	40,4
-3	49,9	9	47,0	21	43,7	33	40,1
-2	49,6	10	46,7	22	43,4	34	39,8
-1	49,4	11	46,4	23	43,1	35	39,5
0	49,2	12	46,2	24	42,8	36	39,2
1	48,9	13	45,9	25	42,5	37	38,9
2	48,7	14	45,6	26	42,2	38	38,6
3	48,4	15	45,3	27	41,9	39	38,3
4	48,2	16	45,0	28	41,6	40	38,0
5	47,9	17	44,8	29	41,3		
6	47,7	18	44,5	30	41,0		

Tabla IV.2. Parámetro de sedimentación según medida de buzamiento (Day, 1965).

$\tau (^{\circ}\text{C})$	$\sqrt{\frac{\eta_{x^{\circ}\text{C}}}{\eta_{30^{\circ}\text{C}}}}$	$\tau (^{\circ}\text{C})$	$\sqrt{\frac{\eta_{x^{\circ}\text{C}}}{\eta_{30^{\circ}\text{C}}}}$	$\tau (^{\circ}\text{C})$	$\sqrt{\frac{\eta_{x^{\circ}\text{C}}}{\eta_{30^{\circ}\text{C}}}}$
12	1,24	19	1,13	26	1,04
13	1,23	20	1,12	27	1,04
14	1,21	21	1,10	28	1,02
15	1,19	22	1,09	29	1,01
16	1,18	23	1,08	30	1,00
17	1,16	24	1,07	31	0,99
18	1,14	25	1,05	32	0,98

Tabla IV.3. Factor corrector de densidad según la temperatura de la disolución (Day, 1965).

Figura IV.5. Material utilizado en el análisis textural. Laboratorio de Edafología.

ANEJO V. Datos experimentales.

V.i. Características de los suelos estudiados en esta tesis.

Se han estudiado experimentalmente cinco suelos en esta tesis (ver Figura V.1) que son:

- 1.- *Arévalo (A)*. Arena franca situada en el entorno del pueblo de Arévalo (Ávila). Localización: (41.06N, 4.71E).
- 2.- *Cabanillas cribado (C-C)*. Suelo franco del Club de Golf de Cabanillas del Campo (Guadalajara). Este suelo ha sido cribado con tamiz de 2mm. Localización: (40.65N, 3.24E).
- 3.- *Cabanillas sin cribar (C-S)*. Suelo franco del Club de Golf de Cabanillas del Campo. Guadalajara. Localización: (40.65N, 3.24E).
- 4.- *Campo de prácticas (C-P)*. Suelo franco arenoso del terreno de prácticas de la escuela de ingenieros agrónomos de la U.P.M. (Madrid). Localización: (40.44N, 3.74E).
- 5.- *Valdevebas (V)*.

Las propiedades hidro-físicas de estos suelos fueron determinadas experimentalmente a través de los métodos detallados en el Anejo IV, o estimadas mediante el software libre ROSETTA descrito en el Apartado 3.1.4. La Tabla V.1 colecciona todos los datos. Los campos azules son datos de la textura necesarios para la estimación con ROSETTA (campos verdes). Los campos en blanco son medidas experimentales acompañadas de su error. Los campos en naranja se refieren a la tensión en el frente, parámetro calculado con la expresión de Neuman [3.28], a través de una integral numérica resuelta por el método de Simpson (Apartado A.ii.ii).

	SUELO	A	C-C	C-S	C-P	V
EDAF.	Textura	Arena franca	Franco	Franco	Franco / Franco arenoso	Franco arenoso
	Arcilla	7%	15%	13%	15%	10%
	Limo	13%	45%	43%	33%	15%
	Arena	80%	40%	44%	52%	75%
EXPERIMENT.	ρ (g/cm ³)	1.68 ± 0.07	1.23 ± 0.10	1.40 ± 0.10	1.33 ± 0.10	1.43 ± 0.10
	$\tilde{\theta}_0$	0.012±0.021	0.039±0.027	0.039±0.021	0.030±0.024	0.022±0.019
	θ_0	0.053±0.042	0.095±0.054	0.088±0.042	0.083±0.048	0.100±0.038
	$\tilde{\theta}_s$	0.477±0.028	0.598±0.050	0.568±0.054	0.583±0.046	0.506±0.041
	θ_s	0.519±0.056	0.654±0.1	0.616±0.108	0.636±0.092	0.584±0.082
	k_s (cm/min)	-	0.133±0.064	-	0.165±0.071	-
ROSETTA	θ_r	0.0416	0.056	0.0479	0.053	0.078
	θ_s	0.3371	0.422	0.3802	0.41	0.43
	k_s (cm/min)	0.0427	0.0288	0.016	0.0249	0.0173
	n	1.6685	1.605	1.5316	1.488	1.56
	α (cm ⁻¹)	0.0406	0.0068	0.0099	0.0136	0.036
	τ_f (cm)	7.14	39.24	23.67	15.91	6.91

Tabla V.1. Propiedades determinadas los cinco suelos estudiados en esta tesis.

Figura V.1. Muestras de los cinco suelos utilizados en los ensayos de esta tesis. De izquierda a derecha: Arévalo (A), Cabanillas sin cribar (C-S), Campo de prácticas (C-P), Cabanillas cribado (C-C) y Valdebebas (V).

V.ii. Tablas de datos.

A continuación se recopilan las tablas de datos de los ensayos que se han presentado en esta tesis.

V.ii.i. Ensayo de infiltración entre placas.

Las siguientes tablas presentan las medidas realizadas en el experimento presentado en los apartados 4.3.1 y 5.1.3.1 para el suelo C-C. Los datos corresponden a la distancia (cm) de alcance del frente mojado para los tiempos (min) que se indican en la primera columna. Cada tabla presenta datos de distancia para dos bulbos (izquierda y derecha), que fueron analizados al mismo tiempo en cada ensayo, a lo largo de los siete radios distintos que en grados se han expresado en la primera fila.

A la derecha en naranja se promedian los datos para cada dirección, y en verde para todas las direcciones considerando simetría esférica.

TIEMPO (')	IZQUIERDA							DERECHA							PRIMER CUADRANTE				SIMETRÍA
	0	30	60	90	120	150	180	0	30	60	90	120	150	180	0°	30°	60°	90°	RADIAL
1	3.1	2.5	2	1	2	0.9	0.7	2.5	2.5	2	1.7	2	3.5	4.5	2.7	2.4	2.6	1.4	2.24
2	5	4	3.4	2.8	3.1	3.1	3.6	4	3	2.8	2.6	3.5	4.5	5.6	4.6	3.7	3.6	2.7	3.63
3	6	4.8	3.8	3.5	3.7	4.3	5	5	4.1	3.8	3.5	4.1	5.4	6.5	5.6	4.7	4.1	3.5	4.48
4	6.5	5.3	4.1	3.8	4.1	4.9	6.4	5.8	4.9	4.5	4	4.5	6	7	6.4	5.3	4.5	3.9	5.03
5	7.1	5.5	4.3	4.1	4.5	5.5	7	6.8	5.5	4.8	4.5	5	6.5	7.9	7.2	5.8	5.0	4.3	5.56
7	7.8	6	4.6	4.7	5.6	6.3	8	7.8	6.4	5.5	5.1	5.6	7.1	8.5	8.0	6.5	5.9	4.9	6.32
10	9	7.1	5	5.3	6.5	7.6	9.3	8	8.1	6.5	6.5	6.9	8	9.5	9.0	7.7	7.1	5.9	7.42
15	10.7	8.1	7	7.1	8.6	9.5	12.2	10.3	9.6	8.4	7.8	8.6	9.5	10.9	11.0	9.2	8.7	7.5	9.08
20	12.1	9.5	8.4	8.6	9.9	11.2	15.3	11.5	11	9.4	9	9.6	11	12.2	12.8	10.7	9.9	8.8	10.53
25	13.3	10.4	9.3	9.3	11	13	16.9	13.3	12.8	10.6	10	10.6	12.5	14	14.4	12.2	11.3	9.7	11.88
30	14.1	12.5	11.3	10	12.6	14	17.3	15	14.8	13	11.2	12	13.9	15	15.4	13.8	13.7	10.6	13.35
45	16.6	15.6	13.6	14.4	16.1	18.8	20.5	21.6	18.6	15.6	14.7	15.1	17.2	18	19.2	17.6	16.2	14.6	16.88
60	19.6	18.2	16.5	16.5	18.4	21.6	22.5	23.5	20.5	17.7	17.8	17.5	20.4	21.5	21.8	20.2	18.9	17.2	19.49
75	23.2	21.5	18.9	19.5	20.5	24.4	25.4	25.5	22.6	20.5	19.9	20	22.7	24.5	24.4	22.8	21.5	19.7	22.09
90	25.5	24	21	21.1	23.7	25.6	25.8	27	24.7	22.5	22.3	23.9	26	27	26.3	25.1	23.9	21.7	24.24
105	28	25.6	25.5	23.3	26.5	26.9	27.7	29	26.7	24.5	24.4	26.2	28.6	29.2	28.5	27.0	25.7	23.9	26.24

Tabla V.2. Primer ensayo.

TIEMPO (')	IZQUIERDA							DERECHA							PRIMER CUADRANTE				SIMETRÍA
	0	30	60	90	120	150	180	0	30	60	90	120	150	180	0°	30°	60°	90°	RADIAL
1	0	1.5	1.5	1.5	1.7	2	3.7	3.9	2.8	2.2	2.5	2.5	3.2	4.9	3.1	2.4	2.4	2.0	2.48
2	2.9	2.6	2.4	2.2	2.5	3.3	5.3	4.2	3.5	3.1	3	3.3	4.2	5.1	4.4	3.4	3.1	2.6	3.36
3	4.2	3.5	3	2.7	3.3	4.1	6.2	4.6	4.4	3.8	3.4	3.6	4.7	5.3	5.1	4.2	3.7	3.1	3.99
4	5.9	4.1	3.8	3.3	3.5	4.4	6.9	5.1	5.2	4.3	3.8	4	5.2	5.7	5.9	4.7	4.1	3.6	4.56
5	7.4	5.5	4.5	4.1	4.5	5	7.7	6.2	6	4.6	4.1	4.3	5.6	6	6.8	5.5	4.8	4.1	5.31
7	8.1	7.5	5.4	5	5.5	6.4	8.9	7.3	7.2	5.2	4.7	5	6.1	6	7.6	6.8	5.8	4.9	6.24
10	9.1	8.8	6.7	6.4	6.6	8	10.1	8.5	9	6.1	5.6	6	7	7	8.7	8.2	7.0	6.0	7.46
15	10.2	10.7	8.4	7.5	8.4	9.2	11.6	12	10.2	7.6	6.9	7	8.2	8.5	10.6	9.6	8.6	7.2	8.98
20	12.8	12.5	9.7	9	9.7	10.8	12.7	14.8	11.8	9.2	8.4	8.3	9.3	9.2	12.4	11.1	9.9	8.7	10.52
25	15.5	14.5	10.6	10.1	10.6	12.1	13.3	16.2	13.4	10.8	10	9.4	10.2	10	13.8	12.6	11.0	10.1	11.84
30	17	15.8	12.3	11.4	11.8	13.2	14.1	18	14.5	12.5	11	10.4	10.9	11	15.0	13.6	13.5	11.2	13.33
45	18.2	19.4	15.5	14.4	15.2	16.5	16.8	21.4	18.5	16.3	14	13.5	12.6	14.5	17.7	16.8	16.7	14.2	16.34
60	21.2	22.5	18.9	17	17.8	19.2	18.7	23.5	21.4	19.6	17.5	16.5	16.7	17.3	20.2	20.0	19.7	17.3	19.27
75	23.4	25.3	21.5	20.3	20.7	22.4	21.5	24.6	23	22	21.1	20.1	20.8	20.6	22.5	22.9	22.5	20.7	22.14
90	25.5	27.5	25	23.1	24	24.9	23.5	26.4	24.8	24.4	22.5	23.3	24	23.1	24.6	25.3	25.2	22.8	24.48
105	28.4	29.4	26.5	24.2	25.7	26.5	24.7	27.3	26	26.2	24.5	25.5	25.7	25.6	26.5	26.9	26.0	24.4	25.93
120	31.3	30.5	28	26	27.4	28	25.9	28.2	28	28.2	26.4	27.4	28.2	27.1	28.1	28.7	27.8	26.2	27.69

Tabla V.3. Segundo ensayo.

V.ii.ii. Ensayos de infiltración en campo.

En este apartado se presentan los datos recogidos en los dos ensayos de campo que se han descrito en los apartados 4.3.2 y 5.1.3.2-5.1.3.3.

La Tabla V.4 representa el avance del frente mojado para un total de quince goteros del mismo caudal ($q = 2.3 \text{ L/h}$) sobre el suelo C-P. Tiempo en minutos y diámetro en centímetros. A la derecha (columna azul) se presenta el diámetro promedio para todas las fuentes.

La Tabla V.5 representa el avance de la zona saturada para cuatro goteros de distinto caudal (auto-compensantes) para el mismo suelo. Radio del charco en centímetros y tiempo en minutos.

Experimento en campo.															
TIEMPO	Dímetros del frente de avance en superficie. (cm)														
1	10	10	9	10	8	11	10	13	14	12					10.7
4	14	13	15	12	12	16	13	15	18	17	13	15	12	16	14
8	20	16	21	16	16	20	17	20	23	21	18	21	20	20	18
12	22	20	23	19		20	17	23	26	24	24	24	20	22	20
15	21	21	26	22	17	22	19	23	27	24	25	27	24	24	24
20	25	26	28	23	21	23	24	26	28	28	28	29	24	25	25
25	30	26	30	26	21	26	22	28	30	29	29	29	26	27	26
30	32	28	31	27	24	27	27	29	30	31	31	33	29	29	28
35	33	29	32	27	25	28	28	29	31	31	33	34	31	31	30
40	33	30	34	28	26	29	27	30	32	32	33	35	31	32	32
45	36	29	33	30	26	30	28	32	35	35	34	35	31	32	33
50	36	30	34	30	27	31	27	33	35	36	37	38	33	34	35
55	35	30	34	30	27	31	27	33	35	36	37	38	33	34	35
60	36	31	35	30	27	32	30	33	35	35	37	39	33	34	34
65	36	32	34	31	28	32	30	33	36	37	37	38	33	34	35
70	37	32	34	31	28	32	28	34	35	37	36	39	33	35	34
75	37	33	36	33	28	32	30	34	36	36	38	40	34	35	37
80	38	33	36	33	29	33	31	34	36	37	40	40	35	35	36
85	38	32	37	33	28	33	32	35	38	39	38	40	36	36	37
90	39	33	37	33	30	35	33	35	37	38	39	40	38	37	38
150	41	39	43	37	35	40	37	39	42	41	42	44	40	40	41
180	44	40	45	38	36	40	37	40	42	40	41	46	40	41	42

Tabla V.4. Ensayo de avance del frente mojado.

Experimento en campo.				
TIEMPO	Radio del charco. (cm)			
3	2	2	4	8.5
5	3	4	6	10.5
7	4	5	6.5	11
10	4	5	5.5	12
15	4	5	8	13
22	4	6	6.5	14.5
30	5	6	7.5	15
42	5	6	7.5	15
50	4	6	10	16
60	4	6	12	17
CAUDAL	2 l/h	4 l/h	8 l/h	24 l/h

Tabla V.5. Ensayo de avance de la zona saturada.

ANEJO VI. Código.

VI.i. Modelo en coordenadas cartesianas.

VI.i.i. Estructura del modelo.

La ecuación de la filtración tridimensional para coordenadas cartesianas es:

$$\frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial \theta}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(\theta) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(\theta) \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(\theta) \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \frac{\partial k(\theta)}{\partial z} \quad [3.10a]$$

Discretización.

Dividiendo el espacio Físico en una red de puntos equi-espaciados y considerando que la variación infinitesimal sobre cada variable se aproxima a la distancia entre dos puntos contiguos sobre la misma dirección, se aproxima:

$$dx \cong \Delta x ; dy \cong \Delta y ; dz \cong \Delta z ; dt \cong \Delta t \quad [VI. 1]$$

Sustituyendo la derivada temporal por su aproximación de Adams-Bashforth de segundo grado ($s = 2$), y las derivadas espaciales por una aproximación a la derivada centrada, se propone el siguiente método explícito de integración numérica:

$$\theta_{ijk}^{n+1} = \theta_{ijk}^n + \Delta t \left[\frac{3}{2} f^n(\theta) - \frac{1}{2} f^{n-1}(\theta) \right] \quad [VI. 2]$$

Siendo la función $f(\theta)$ conocida para los dos tiempos previos indexados con superíndices n y $n - 1$:

$$f^n(\theta) = \frac{k(\theta_{ijk}^{n+1})}{(\Delta x)^2} [h(\theta_{i+1jk}^n) + h(\theta_{ij+1k}^n) + h(\theta_{ijk+1}^n) + h(\theta_{i-1jk}^n) + h(\theta_{ij-1k}^n) + h(\theta_{ijk-1}^n) - 6h(\theta_{ijk}^{n+1})] + \frac{1}{\Delta x} [k(\theta_{ijk+1}^n) - k(\theta_{ijk}^{n+1})] \quad [VI. 3]$$

Donde se ha asumido que $\Delta x = \Delta y = \Delta z$. Los subíndices i, j, k se refieren respectivamente a los tres ejes X, Y, Z . Notar que la función conductividad hidráulica se ha extraído como factor común de las tres derivadas espaciales ya que se evalúa sobre el nodo central, común a

las tres direcciones. En otras versiones se ha calculado la media aritmética con respecto a la conductividad hidráulica de los nodos contiguos.

Condiciones de contorno.

Gotero puntual y superficial en condiciones de saturación para cualquier instante del tiempo. El resto de nodos de la red tienen un contenido de humedad inicial constante. El medio es semi-infinito, por lo que su tamaño debe ser suficientemente grande como para que el frente de avance no alcance el contorno de la red de puntos. Siendo la longitud de la red L se cumple que:

- 1.- Fuente saturada: $\theta\left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, z = 0\right) = \theta_s$, para cualquier instante del tiempo.
- 2.- Condición inicial: $\theta(x, y, z) = \theta_0$ para $t = 0$. Excepto en $\left(\frac{D}{2}, \frac{D}{2}, 0\right)$ que el contenido es el de saturación.
- 3.- Condición de velocidad vertical nula en superficie.

Restricciones.

Para evitar problemas de divergencia numérica se ha considerado la siguiente restricción aplicable a cada punto de la red calculado: $\theta_0 \leq \theta(x, y, z) \leq \theta_s$.

Por razones de estabilidad numérica es necesario que el paso de tiempo sea suficientemente pequeño con respecto a la resolución espacial [4.4]. Igualmente, favorece la estabilidad numérica que la resolución espacio-temporal sea grande en los instantes iniciales, pudiéndose relajar este aspecto según avanza la simulación (Apartado 4.1.5).

Este modelo fue utilizado, por la simetría del sistema, para simular el ensayo de filtración entre placas paralelas (Epígrafe 5.1.3.1).

VI.i.ii. Código.

```
% ----- ^ -----|
% |--- 08/05/2019 ----- Ángel del Vigo García. Dpt. Ing. Hidráulica. -|
% |----- Escuela de ingenieros agrónomos.U.P.M. -----|
% |_____|

tic
clear all

%          --- ---
%          DATOS:
%          --- ---

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% DEFINICIÓN DE PARÁMETROS (LOAM). %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Cantidades de agua [adim]:
qr = 0.032;      % contenido residual.
qs = 0.387;      % contenido en saturación.
q0 = 0.387;      % contenido inicial de agua (saturación en z = 0)
lb = 0.5;        % coeficiente de conectividad porosa.

% Modelo de van Genutchen (1980). Parametros empiricos:
a  = 0.036;      % [1/cm]
N  = 1.56;
m  = 0.3590;

% Conductividad hidráulica en saturación:
ks = 0.03;% [cm/min]

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% DISCRETIZACIÓN. %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Discretización temporal [min]:
clear t
Tf = 1           % Tiempo final.
T = 0
dt = 0.001666    % Primer paso de tiempo.

for i = 1:100000 % Cantidad que satura (100000).
    t(i) = T + dt;

    if T < 50
        dt = dt*1.01;
        if dt > 0.05
            dt = 0.05
        end
    else
        dt = 0.05;
    end

    T = t(i);
    if T > Tf
        break
    end
end
end

t;
```

```

Nt = length(t)           % Número de pasos de tiempo.
dt = t(1)-0              % primer paso de tiempo.
Nt

% Eje-X [cm]:
dx = 1                   %
X = 52                   % Ancho del suelo.
x = [-X/2:dx:X/2];      % discretización espacial.
Nx = int16(X/dx) + 1     % número de puntos eje-X.

% Eje-Y [cm]:
dy = 1                   %
Y = 4                    % Ancho del suelo.
y = [-Y/2:dy:Y/2];      % discretización espacial.
Ny = int16(Y/dy) + 1     % número de puntos eje-Y.

% Eje-Z [cm]:
dz = 1                   %
Z = 26                   % Profundidad.
z = [0:-dz:-Z];         % discretización espacial.
Nz = int16(Z/dz) + 1     % número de puntos eje-Z.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% INCOGNITA. %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

q = zeros(Nx,Ny,Nz,Nt); % Inicialización.
q(:, :, :, :) = 0.2;
q(Nx/2,Ny/2,2,1) = qs; % Saturado en el gotero.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% FUNCIONES. %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Contenido relativo: qa = [0,1]
qa = (q - qr)/(qs-qr) ;

% Conductividad hidráulica: K(qa) < Ks*(qa)
K = ks*(qa.^lb).*((1 - ((1 - (qa.^(1/m))).^m)).^2) ; %TENSOR(4D) .

% Potencial de succión: h(qa)
h = -(1/a)*( 1./(qa.^(1/m)) - 1).^ (1/N) ; %TENSOR(4D) .

q0 = q(:, :, :, 1);

% ----- Primera iteración temporal. -----
for i=2:Nx-1
    for j=2:Ny-1
        for k=2:Nz-1
            q(i,j,k,2) = (4/3)*q0(i,j,k) - (1/3)*q0(i,j,k) + (1/3)*(dt/(dx*dx))* ...
                ((K(i+1,j,k,1)+K(i,j,k,1))*(h(i+1,j,k,1)-h(i,j,k,1)) ...
                + (K(i,j+1,k,1)+K(i,j,k,1))*(h(i,j+1,k,1)-h(i,j,k,1)) ...
                + (K(i,j,k+1,1)+K(i,j,k,1))*(h(i,j,k+1,1)-h(i,j,k,1)) ...
                + (K(i-1,j,k,1)+K(i,j,k,1))*(h(i-1,j,k,1)-h(i,j,k,1)) ...
                + (K(i,j-1,k,1)+K(i,j,k,1))*(h(i,j-1,k,1)-h(i,j,k,1)) ...
                + (K(i,j,k-1,1)+K(i,j,k,1))*(h(i,j,k-1,1)-h(i,j,k,1))) ...
                + (dt/dx)*(K(i,j,k+1,1) - K(i,j,k,1)) ;

```

```

end
end
end
q(Nx/2,Ny/2,2,2) = qs;
qa = (q - qr)/(qs-qr) ;
K = ks*(qa.^lb).*((1 - ((1 - (qa.^(1/m))).^m)).^2) ;
h = -(1/a)*( 1./(qa.^(1/m)) - 1).^(1/N) ;
dt = t(2)-t(1)
% -----
% ----- Resto de iteraciones. -----
for n=2:Nt-1
    for i=2:Nx-1
        for j=2:Ny-1
            for k=2:Nz-1
                q(i,j,k,n+1) = (4/3)*q(i,j,k,n)-(1/3)*q(i,j,k,n-1) + (1/3)*(dt/(dx*dx))*...
                    ((K(i+1,j,k,n)+K(i,j,k,n))*(h(i+1,j,k,n)-h(i,j,k,n)) ...
                    + (K(i,j+1,k,n)+K(i,j,k,n))*(h(i,j+1,k,n)-h(i,j,k,n)) ...
                    + (K(i,j,k+1,n)+K(i,j,k,n))*(h(i,j,k+1,n)-h(i,j,k,n)) ...
                    + (K(i-1,j,k,n)+K(i,j,k,n))*(h(i-1,j,k,n)-h(i,j,k,n)) ...
                    + (K(i,j-1,k,n)+K(i,j,k,n))*(h(i,j-1,k,n)-h(i,j,k,n)) ...
                    + (K(i,j,k-1,n)+K(i,j,k,n))*(h(i,j,k-1,n)-h(i,j,k,n))) ...
                    - (2/3)*(dt/dz)*(K(i,j,k+1,n) - K(i,j,k,n)) ;

                if q(i,j,k,n+1) > qs
                    q(i,j,k,n+1) = qs;
                end
                if q(i,j,k,n+1) < 0.2
                    q(i,j,k,n+1) = 0.2;
                end
                if q(i,j,2,n+1) > 0.2
                    q(i,j,1,n+1) = q(i,j,2,n+1);
                end
                if q(i,Ny-1,k,n+1) > 0.2
                    q(i,Ny,k,n+1) = q(i,Ny-1,k,n+1);
                end
                if q(i,2,k,n+1) > 0.2
                    q(i,1,k,n+1) = q(i,2,k,n+1);
                end
            end
        end
    end
end

for i=1:2
    q(Nx/2,Ny/2,i,n+1) = qs;
    q((Nx/2)+1,Ny/2,i,n+1) = qs;
    q((Nx/2)-1,Ny/2,i,n+1) = qs;
    q(Nx/2,(Ny/2)+1,i,n+1) = qs;
    q(Nx/2,(Ny/2)-1,i,n+1) = qs;
end

for i=1:Nx
    q(i,1,1,n+1) = q(i,1,2,n+1);
    q(i,Ny,1,n+1) = q(i,1,2,n+1);
end

qa = (q - qr)/(qs-qr) ;
K = ks*(qa.^lb).*((1 - ((1 - (qa.^(1/m))).^m)).^2) ;
h = -(1/a)*( 1./(qa.^(1/m)) - 1).^(1/N) ;
dt = t(n+1)-t(n);

```

```

if mod(n,25) == 1

    I = ((sum(sum(sum(q(2:Nx-1,2:Ny-1,2:Nz,n)))) - ...
        sum(sum(sum(q(2:Nx-1,2:Ny-1,2:Nz,1)))) + ...
        0.5*(sum(sum(q(:,1,:,n))) - sum(sum(q(:,1,:,1)))) + ...
        (sum(sum(q(:,Ny,:,n))) - sum(sum(q(:,Ny,:,1)))))*dx*dy*dz

    W((n-1)/25,1) = n;
    W((n-1)/25,2) = t(n);
    W((n-1)/25,3) = I;
end

end

% -----
%% Representación q(z):
figure(1)
v = reshape(q((Nx+1)/2,(Ny+1)/2,:,Nt),1,Nz);
plot(v(2:Nz),z(1:Nz-1)) % Corrige el origen sobre el eje-Z.
% -----
%% Representación contornos:
figure(2)
A = reshape(q(:,Ny/2,2:Nz,Nt),Nx,Nz-1)';
contour(A,5) % 8 líneas de contorno.
camroll(-180)
axis equal % Misma escala para los ejes.
xlim([dx X])
ylim([dz Z])
grid on
% ----- Infiltración total. -----
%I = sum(sum(sum(q(:, :, :, Nt)))) - sum(sum(sum(q(:, :, :, 1))))
% -----
toc

```

VI.ii. Modelo en coordenadas cilíndricas.

Se presenta a continuación el código de referencia principal de esta tesis, que está desarrollado en coordenadas cilíndricas.

En el primer punto, se muestra el código para una fuente puntual en superficie, utilizado para las simulaciones del Epígrafes 5.1.1.1.

En segundo lugar, se presenta el código para una fuente superficial extensa de radio constante con el que se han validado las soluciones analíticas aproximadas. Epígrafes 5.1.1.2 - 5.1.3.2 y Sección 5.2.

Finalmente, se muestra el código para condiciones de contorno variable, utilizado en el estudio de la evolución de la zona saturada. Epígrafe 5.1.3.3 y Sección 5.3.

VI.ii.i. Fuente puntual.

```

clc
clear
tic

%Suelos de la base de datos Carsel y Parrish (1988), 12 suelos
%1 sand,..., 9 clay, ..., 12 silty clay
%qr,qs,a,n,ks y qo (este último valor determinado para Cc -2/3(Cc-Pm),
%estimados a su vez con h = 1/3 y 15 atm
DSH=[ 0.045    0.057    0.065    0.1    0.078    0.067    0.095    0.034    0.068    0.1    0.089    0.07
      0.43    0.41    0.41    0.39    0.43    0.45    0.41    0.46    0.38    0.38    0.43    0.36
      0.145    0.124    0.075    0.059    0.036    0.02    0.019    0.016    0.008    0.027    0.01    0.005
      2.68    2.28    1.89    1.48    1.56    1.41    1.31    1.37    1.09    1.23    1.23    1.09
      0.4950    0.243194444444 0.07368055556 0.021833333333 0.017333333333 0.00750    0.004333333333 0.004166666667 0.003333333333 0.0020    0.001166666667 0.000333333333
      0.0452    0.0580    0.0718    0.1300    0.1133    0.1481    0.1886    0.1446    0.2955    0.2018    0.2427    0.2894];

%SELECCIÓN DE DATOS
%Suelo seleccionado
%j = 5;
%qr=DSH(1,j); qs=DSH(2,j); a= DSH(3,j); n=DSH(4,j); m=1-1/n; ks=DSH(5,j); la=0.5;

qs=0.30;
a = 0.073;
k = 0.557;
ks = 0.0975;
qo = 0.125; ho = log(1-(qs-qo)*k/ks)/a;

%Condiciones seleccionadas
tar = 60; tf = 90; %redistribución
qgot = 50;

%Flujo en tres dimensiones con simetría radial
dr0 = 1; dz0 = dr0; dr = dr0; dz=dz0;
Nr=60; Nz = 80;
r = dr/2:dr:Nr*dr;z =-dz/2:-dz:-Nz*dz;
mr=ones(Nz,1)*r;mz=z'*ones(1,Nr);

```

```

mh = ho-0*mz;mh(1,1) = 0;
mq = qs-ks/k*(1-exp(a*mh)).*(mh<0);
v0b=sum(sum(2*pi*dz*dr*mq.*mr));

qv = qgot/(dz*pi*dr^2);

dtmax = dz^2*qs/ks/8000/4; dtmin = 1e-8; rt = 1.0002;
t = 0; ta = 0; jt = 1; qi = 0;
vt=10^-2*[1,1.2,1.5,2,2.5,3,3.5,4,4.5,5,5.5,6,6.5,7,7.5,8,9];
vto = vt;
for i =1:4;
    vt=[vt, vto*10^i];
end
vt=[vt, 1000];
vti = zeros(length(vt),5);
qsol=qo*ones(Nz,Nr, length(vt));
dhmax = 1;

while t<tf
    mk = ks * exp(a*mh.*(mh<0));
    mh4(:,2:Nr) = mh(:,1:Nr-1);mh4(:,1)= mh(:,1); mk4 = ks * exp(a*mh4.*(mh4<0));
    mh2(:,1:Nr-1) = mh(:,2:Nr);mh2(:,Nr)= mh(:,Nr);mk2 = ks * exp(a*mh2.*(mh2<0));

    mh1(2:Nz,:) = mh(1:Nz-1,:);mh1(1,:)= mh(1,:); mk1 = ks * exp(a*mh1.*(mh1<0));
    mh3(1:Nz-1,:) = mh(2:Nz,:);mh3(Nz,:)= mh(Nz,:);mk3 = ks * exp(a*mh3.*(mh3<0));

    su1 = (mk + mk2) / 2 .* (mh2 - mh) / dr ^ 2 + (mk + mk4) / 2 .* (mh4 - mh) / dr ^ 2+mk./mr.*(mh2-mh4)/2/dr;
    su2 = (mk + mk1) / 2 .* (mh1 - mh) / dz ^ 2 + (mk + mk3) / 2 .* (mh3 - mh) / dz ^ 2 +(mk1- mk3) / 2 / dz;
    su2(1,:) = -(mk3(1,:)+mk(1,:))/dz.*((mh(1,:)-mh3(1,:))/dz+1);

    su = su1+su2;
    su(1,1) = 2*ks/dr^2*(mh2(1,1)+mh3(1,1)-2*mh(1,1)-dz)+2*qv*(t<=tar);

    dht = su*k/a./mk;
    dhdt = dht.*(dht>0)+0*(dht<0);
    dhtmax = max(max(dht.*(dht<dht(1,1)))));
    dt= max(min(dhmax/dhtmax, dtmax), dtmin);

```



```
mh = mh + dht*dt;
t = t+dt;

mq = qs-ks/k*(1-exp(a*mh.*(mh<0))).*(mh<0);
mq(mq<qo) = qo;

vb=sum(sum(2*pi*dz*dr*mq.*mr));
vi = vb-v0b;

mur=-mk.*(mh2-mh4)/2/dr; mur(:,1) = -mk(:,1).*(mh2(:,1)-mh(:,1))/dr;
muz=-mk.*((mh1-mh3)/2/dz+1); muz(1,:) = -mk(1,:).*(mh(1,:)-mh3(1,:))/dz+1);
mu = (mur.^2+muz.^2).^(1/2);

dtmin = min(dtmax,dtmin*rt);
if t>vt(jt)
    vti(jt,1) = t; vti(jt,2) = vi; vti(jt,3)= dt;vti(jt,4)= dr;
    if jt>1
        qi = (vi-vti(jt-1,2))/(t-vti(jt-1,1));
        vti(jt,5)= qi;
        [t vi/1000 dt*1000 dr qi]
    end
    qsol(:, :, jt) = mh;
    jt = jt+1;
    [t vi dt*1000 dr qi]

if t>0.05 & jt==2*fix(jt/2) %Representación de resultados;
    contour(mh,5)
    set(gca, 'YDir','reverse')
    axis equal
    grid on
    xlim([0 Nr])
    xlabel('Radius (cm)')
    ylabel('Depth (cm)')
    drawnow
end
end
```

```

if sum(mq(Nz/2+1:Nz/4:Nz,1))>1.1*Nz/4*qo | sum(mq(1, Nr/2+1:Nr/4:Nr))>1.1*Nr/4*qo
    dr = 2*dr; dz = 2*dz;
    mr = mr*2;mz = mz*2;
    mh0 = ho-mz;mh0(1,1) = 0;
    mq0 = qs-ks/k*(1-exp(a*mh0)).*(mh0<0);
    v0b=sum(sum(2*pi*dz*dr*mq0.*mr));
    mh(1:Nz/2,1:Nr/2) = mh(1:2:Nz-1, 1:2:Nr-1);
    mh(Nz/2+1:Nz,:) = mh0(Nz/2+1:Nz,:);
    mh(:,Nr/2+1:Nr) = mh0(:,Nr/2+1:Nr);
    dtmax = dtmax*3;dtmin=dtmin*3;
    qv = qv/8;
end
end

save inf3dr1Puntos
toc

```

VI.ii.ii. Condiciones de contorno constante.

```

clc
clear
tic
%Suelos de la base de datos Carsel y Parrish (1988), 12 suelos
%1 sand,..., 9 clay, ..., 12 silty clay
%qr,qs,a,n,ks y qo (este último valor determinado para Cc -2/3(Cc-Pm),
%estimados a su vez con h = 1/3 y 15 atm
DSH=[
0.045    0.057    0.065    0.1    0.078    0.067    0.095    0.034    0.068    0.1    0.089    0.07
0.43    0.41    0.41    0.39    0.43    0.45    0.41    0.46    0.38    0.38    0.43    0.36
0.145    0.124    0.075    0.059    0.036    0.02    0.019    0.016    0.008    0.027    0.01    0.005
2.68    2.28    1.89    1.48    1.56    1.41    1.31    1.37    1.09    1.23    1.23    1.09
0.4950    0.24319444444 0.07368055556 0.02183333333 0.01733333333 0.00750    0.00433333333 0.00416666667 0.00333333333 0.0020    0.00116666667 0.00033333333
0.0452    0.0580    0.0718    0.1300    0.1133    0.1481    0.1886    0.1446    0.2955    0.2018    0.2427    0.2894];

%SELECCIÓN DE DATOS
%Suelo seleccionado

```

```
j = 5;
%qr=DSH(1,j); qs=DSH(2,j); a= DSH(3,j); n=DSH(4,j); m=1-1/n; ks=DSH(5,j); la=0.5;
qr=0.058; qs=0.58; a= 0.0063; n=1.62; m=1-1/n; ks=0.074; la=0.5;

%Flujo en tres dimensiones con simetría radial, cilindro de trabajo.
dr = 1; dz = dr; Nr=40; Nz = 40;
r = dr/2:dr:Nr*dr; z = -dz/2:-dz:-Nz*dz;
mr=ones(Nz,1)*r;mz=z'*ones(1,Nr);
modelo = 1;

%Situación inicial y condición en la entrada
qo=0.092;seo = (qo - qr) / (qs - qr); ho = -((seo .^ (-1/m) - 1) .^(1 / n) / a);
ci = 0;
mh = ho-ci*mz;
rmoj = 1; mh(1,:)=mh(1,:).*(r>rmoj);
mha = mh;
mqa = (1+(-a*mh.*(mh<0)).^n).^(-m); mq = mqa*(qs-qr)+qr;mq0 = mq;
v0b=sum(sum(2*pi*dz*dr*mq0.*mr));

%Control de la integración
dtmax = dz^2*qs/ks/8000; dtmin = 1e-7; rt = 1.0002;
dhmax = 5;hs=-1; cmax = m*n*a*(qs-qr)*(1+(-a*hs).^n).^(-m-1).*(-a*hs)^(n-1);

%Riego y tiempos de estudio.
tar = 10000; tf = 60;

vt=10^-3*[1,1.2,1.5,2,2.5,3,3.5,4,4.5,5,5.5,6,6.5,7,7.5,8,9];
vto = vt;
for i =1:6;
    vt=[vt, vto*10^i];
end
vt=[vt, 10000];
vti = zeros(length(vt),6);
qsol=qo*ones(Nz,Nr, length(vt));

t = 0; ta = 0; jt = 1; qi = 0;
```

```

while t<tf
    mk = ks * mqa .^ la .* (1 - (1 - mqa .^ (1 / m)).^ m).^ 2;
    mc = (m*n*a*(qs-qr)*(1+(abs(a*mh)).^n).^(-m-1).*(abs(a*mh)).^(n-1)).*(mh<hs)+cmax*(mh>=hs);
    mh4(:,2:Nr) = mh(:,1:Nr-1);mh4(:,1)= mh(:,1);
    mqa = (1+(abs(a*mh4)).^n).^(-m).*(mh4<0)+(mh4>=0); mk4 = ks * mqa .^ la .* (1 - (1 - mqa .^ (1 / m)).^ m).^ 2;
    mh2(:,1:Nr-1) = mh(:,2:Nr);mh2(:,Nr)= mh(:,Nr);
    mqa = (1+(abs(a*mh2)).^n).^(-m).*(mh2<0)+(mh2>=0); mk2 = ks * mqa .^ la .* (1 - (1 - mqa .^ (1 / m)).^ m).^ 2;
    mh1(2:Nz,:) = mh(1:Nz-1,:);mh1(1,:)= mh(1,:);
    mqa = (1+(abs(a*mh1)).^n).^(-m).*(mh1<0)+(mh1>=0); mk1 = ks * mqa .^ la .* (1 - (1 - mqa .^ (1 / m)).^ m).^ 2;
    mh3(1:Nz-1,:) = mh(2:Nz,:);mh3(Nz,:)= mh(Nz,:);
    mqa = (1+(abs(a*mh3)).^n).^(-m).*(mh3<0)+(mh3>=0); mk3 = ks * mqa .^ la .* (1 - (1 - mqa .^ (1 / m)).^ m).^ 2;

    su1 = (mk + mk2) / 2 .* (mh2 - mh) / dr ^ 2 + (mk + mk4) / 2 .* (mh4 - mh) / dr ^ 2+mk./mr.*(mh2-mh4)/2/dr;
    su2 = (mk + mk1) / 2 .* (mh1 - mh) / dz ^ 2 + (mk + mk3) / 2 .* (mh3 - mh) / dz ^ 2 +(mk1- mk3) / 2 / dz;
    su2(1,:) = -(mk3(1,:)+mk(1,:))/dz.*(mh(1,:)-mh3(1,:))/dz+1);
    su = su1+su2;
    dht = su./mc;
    dhdt = dht.*(dht>0)+0*(dht<0);
    dhtmax = max(dhdt(:));
    dt= max(min(dhmax/dhtmax, dtmax), dtmin);
    dtmin = min(dtmax*(1+10*(t>1.1*tar)),dtmin*rt);

    if modelo ==1 | t ==0
        mh = mh + dht*dt;
    else
        mh = 4/3*mha-1/3*mhaa+2/3*dht*dt;
    end

    if t<tar
        mh(1,:)=mh(1,:).*(r>rmoj);
    end
    mh(mh<ho) = ho;

    mqa = (1+(-a*mh).*(mh<0)).^n).^(-m); mq = mqa*(qs-qr)+qr;
    t = t+dt;
    vb=sum(sum(2*pi*dz*dr*mq.*mr));
    vi = vb-v0b;

```

```
mhaa=mha; mha = mh;

%%%%%%%%% DEFINICIÓN DE LOS FRENTE DE AVANZE %%%
for i = 1:Nr
if mqa(1,i) < qo + 0.01*qo;
break
end
end
rf = r(i);

for j = 1:Nz
if mqa(j,1) < qo + 0.01*qo;
break
end
end
zf = z(j);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

if t>vt(jt)
vti(jt,1) = t; vti(jt,2) = vi; vti(jt,3)= rf;vti(jt,4)= dr;vti(jt,6)= rmoj;
if jt>1
qi = (vi-vti(jt-1,2))/(t-vti(jt-1,1));
vti(jt,5)= qi; [t vi/1000 rf dr zf rmoj]
end
qsol(:, :, jt) = mq;
jt = jt+1;
end

if sum(mq(Nz/2+1+Nz/4:Nz,1))>1.1*sum(mq0(Nz/2+1+Nz/4:Nz,1)) | sum(mq(1, ...
Nr/2+1+Nr/4:Nr))>1.1*sum(mq0(1,Nr/2+1+Nr/4:Nr))
dr = 2*dr; dz = 2*dz;
r = 2*r; z = 2*z;
mr = mr*2;mz = mz*2;
mh0 = ho-ci*mz;
mh0(1,:)=mh0(1,:).*(r>rmoj);
mqa0 = (1+(-a*mh0).^n).^(-m; mq0 = mqa0*(qs-qr)+qr;
```

```

v0b=sum(sum(2*pi*dz*dr*mq0.*mr));
mh(1:Nz/2,1:Nr/2) = mh(1:2:Nz-1, 1:2:Nr-1);
mh(Nz/2+1:Nz,:) = mh0(Nz/2+1:Nz,:);
mh(:,Nr/2+1:Nr) = mh0(:,Nr/2+1:Nr);
mqa = (1+(-a*mh.*(mh<0)).^n).^(-m);mq = mqa*(qs-qr)+qr;
dtmax = dtmax*3;dtmin=dtmin*3;
if modelo == 2
    mha(1:Nz/2,1:Nr/2) = mha(1:2:Nz-1, 1:2:Nr-1);
    mha(Nz/2+1:Nz,:) = mh0(Nz/2+1:Nz,:);
    mha(:,Nr/2+1:Nr) = mh0(:,Nr/2+1:Nr);
    mhaa = mha;
    mha = mh;
end
end
end

%%% REPRESENTACION DE RESULTADOS %%%%%%%%%%%%%%
figure (1)
    contour(mqa,12)
    set(gca, 'YDir','reverse')
% axis equal
% xlim([1 rf])
% ylim([1 -zf])
grid on
xlabel('Radius (cm)')
ylabel('Depth (cm)')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%5

clear mk mk1 mk2 mk3 mk4 mq0 mq1 mq2 mq3 mq4 mh1 mh2 mh3 mh4 su su1 su2 su3 mc mhaa mha
save inf3dr1Refr1360mininf
toc

```

VI.ii.iii. Condiciones de contorno variable.

```

clc
clear
tic

% PARAMETROS EN cm/min.
%Suelos de la base de datos Carsel y Parrish (1988), 12 suelos
%1 sand,..., 9 clay, ..., 12 silty clay
%qr,qs,a,n,ks y qo (este último valor determinado para Cc -2/3(Cc-Pm),
%estimados a su vez con h = 1/3 y 15 atm
DSH=[ 0.045    0.057    0.065    0.1    0.078    0.067    0.095    0.034    0.068    0.1    0.089    0.07
      0.43    0.41    0.41    0.39    0.43    0.45    0.41    0.46    0.38    0.38    0.43    0.36
      0.145    0.124    0.075    0.059    0.036    0.02    0.019    0.016    0.008    0.027    0.01    0.005
      2.68    2.28    1.89    1.48    1.56    1.41    1.31    1.37    1.09    1.23    1.23    1.09
      0.4950    0.24319444444 0.07368055556 0.02183333333 0.01733333333 0.00750    0.00433333333 0.00416666667 0.00333333333 0.0020    0.00116666667 0.00033333333
      0.0452    0.0580    0.0718    0.1300    0.1133    0.1481    0.1886    0.1446    0.2955    0.2018    0.2427    0.2894];

%SELECCIÓN DE DATOS
%Suelo seleccionado
j = 5;
qr=DSH(1,j); qs=DSH(2,j); a= DSH(3,j); n=DSH(4,j); m=1-1/n; ks=DSH(5,j); la=0.5;

%Flujo en tres dimensiones con simetría radial, cilindro de trabajo.
dr = .25; dz = dr; Nr=64; Nz = 72; % Grid
r = dr/2:dr:Nr*dr;z =-dz/2:-dz:-Nz*dz; %
mr=ones(Nz,1)*r;mz=z'*ones(1,Nr);
modelo = 1;
hsupmax = 0.5; hsup = 0; %Condidion superficie
tar = 120; tf = 120;
qgot = 100; %caudal (cm3/min)

%Situación inicial y condición en la entrada
qo =0.2;seo = (qo - qr) / (qs - qr); ho = -((seo .^ (-1/m) - 1) .^(1 / n) / a);
ci = 0;
mh = ho-ci*mz;
rmoj = dr; mh(1,:)=mh(1,:).*(r>rmoj);
mha = mh;
mqa = (1+(-a*mh.*(mh<0)).^n).^(-m); mq = mqa*(qs-qr)+qr;mq0 = mq;

```

```

v0b=sum(sum(2*pi*dz*dr*mq0.*mr));

%Control de la integración
dtmax = dz^2*qs/ks/8000; dtmin = 1e-7; rt = 1.0002;
dhmax = 5;hs=-1; cmax = m*n*a*(qs-qr)*(1+(-a*hs).^n).^(-m-1).*(-a*hs)^(n-1);

%Riego y tiempos de estudio.
tar = 10000; tf = 1; %min

vt=10^-3*[1,1.2,1.5,2,2.5,3,3.5,4,4.5,5,5.5,6,6.5,7,7.5,8,9];
vto = vt;
for i =1:6;
    vt=[vt, vto*10^i];
end
vt=[vt, 10000];
vti = zeros(length(vt),6);
qsol=qo*ones(Nz,Nr, length(vt));

t = 0; ta = 0; jt = 1; qi = 0;
while t<tf
    mk = ks * mqa .^ la .* (1 - (1 - mqa .^ (1 / m)).^ m).^ 2;
    mc = (m*n*a*(qs-qr)*(1+(abs(a*mh)).^n).^(-m-1).*(abs(a*mh)).^(n-1)).*(mh<hs)+cmax*(mh>=hs);
    mh4(:,2:Nr) = mh(:,1:Nr-1);mh4(:,1)= mh(:,1);
    mqa = (1+(abs(a*mh4)).^n).^(-m).*(mh4<0)+(mh4>=0); mk4 = ks * mqa .^ la .* (1 - (1 - mqa .^ (1 / m)).^ m).^ 2;
    mh2(:,1:Nr-1) = mh(:,2:Nr);mh2(:,Nr)= mh(:,Nr);
    mqa = (1+(abs(a*mh2)).^n).^(-m).*(mh2<0)+(mh2>=0); mk2 = ks * mqa .^ la .* (1 - (1 - mqa .^ (1 / m)).^ m).^ 2;
    mh1(2:Nz,:) = mh(1:Nz-1,:);mh1(1,:)= mh(1,:);
    mqa = (1+(abs(a*mh1)).^n).^(-m).*(mh1<0)+(mh1>=0); mk1 = ks * mqa .^ la .* (1 - (1 - mqa .^ (1 / m)).^ m).^ 2;
    mh3(1:Nz-1,:) = mh(2:Nz,:);mh3(Nz,:)= mh(Nz,:);
    mqa = (1+(abs(a*mh3)).^n).^(-m).*(mh3<0)+(mh3>=0); mk3 = ks * mqa .^ la .* (1 - (1 - mqa .^ (1 / m)).^ m).^ 2;

    su1 = (mk + mk2) / 2 .* (mh2 - mh) / dr ^ 2 + (mk + mk4) / 2 .* (mh4 - mh) / dr ^ 2+mk./mr.*(mh2-mh4)/2/dr;
    su2 = (mk + mk1) / 2 .* (mh1 - mh) / dz ^ 2 + (mk + mk3) / 2 .* (mh3 - mh) / dz ^ 2 +(mk1- mk3) / 2 / dz;
    su2(1,:) = -(mk3(1,:)+mk(1,:))/dz.*(mh(1,:)-mh3(1,:))/dz+1);
    su = su1+su2;
    dht = su./mc;
    dhdt = dht.*(dht>0)+0*(dht<0);

```



```
dhtmax = max(dhta(:));
dt= max(min(dhmax/dhtmax, dtmax), dtmin);
dtmin = min(dtmax*(1+10*(t>1.1*tar)),dtmin*rt);

if modelo ==1 | t ==0
    mh = mh + dht*dt;
else
    mh = 4/3*mha-1/3*mhaa+2/3*dht*dt;
end

if t<tar
    mh(1,:)=mh(1,:).*(r>rmoj);
end
mh(mh<ho) = ho;

mqa = (1+(-a*mh.*(mh<0)).^n).^(-m); mq = mqa*(qs-qr)+qr;
t = t+dt;

vb=sum(sum(2*pi*dz*dr*mq.*mr));
vi = vb-v0b;

vsup = qgot*min(t,tar)-vi;
if rmoj>0
    hsup = vsup/(pi*rmoj^2);
end
if hsup>hsupmax
    rmoj = rmoj+dr;
elseif hsup<0 & t>tar
    rmoj = 0;
end

mhaa=mha; mha = mh;

if t>vt(jt)
    vti(jt,1) = t; vti(jt,2) = vi; vti(jt,3)= dt;vti(jt,4)= dr;vti(jt,6)= rmoj;
    if jt>1
```

```

        qi = (vi-vti(jt-1,2))/(t-vti(jt-1,1));
        vti(jt,5)= qi; [t vi/1000 dt*1000 dr qi rmoj]
    end
    qsol(:, :, jt) = mq;
    jt = jt+1;
end

if sum(mq(Nz/2+1:Nz/4:Nz,1))>1.1*sum(mq0(Nz/2+1+Nz/4:Nz,1)) | sum(mq(1, Nr/2+1:Nr/4:Nr))>1.1*sum(mq0(1, Nr/2+1+Nr/4:Nr))
    dr = 2*dr; dz = 2*dz;
    r = 2*r; z = 2*z;
    mr = mr*2; mz = mz*2;
    mh0 = ho-ci*mz;
    mh0(1,:)=mh0(1,:).*(r>rmoj);
    mqa0 = (1+(-a*mh0).^n).^(-m; mq0 = mqa0*(qs-qr)+qr;

    v0b=sum(sum(2*pi*dz*dr*mq0.*mr));
    mh(1:Nz/2,1:Nr/2) = mh(1:2:Nz-1, 1:2:Nr-1);
    mh(Nz/2+1:Nz,:) = mh0(Nz/2+1:Nz,:);
    mh(:,Nr/2+1:Nr) = mh0(:,Nr/2+1:Nr);
    mqa = (1+(-a*mh.*(mh<0)).^n).^(-m; mq = mqa*(qs-qr)+qr;
    dtmax = dtmax*3; dtmin=dtmin*3;
    if modelo == 2
        mha(1:Nz/2,1:Nr/2) = mha(1:2:Nz-1, 1:2:Nr-1);
        mha(Nz/2+1:Nz,:) = mh0(Nz/2+1:Nz,:);
        mha(:,Nr/2+1:Nr) = mh0(:,Nr/2+1:Nr);
        mhaa = mha;
        mha = mh;
    end
end

end
clear mk mk1 mk2 mk3 mk4 mq0 mq1 mq2 mq3 mq4 mh1 mh2 mh3 mh4 su su1 su2 su3 mc mhaa mha
save inf3dr1RefRmojq100

```

```
% Representación gráfica de resultados. -----
figure (1)
    contour(mqa,6,'ShowText','on')
    set(gca, 'YDir','reverse')
    axis equal
    xlim([0 Nr])
    grid on
    xlabel('Radius (cm)')
    ylabel('Depth (cm)')

figure (2)
    plot(vti(1:jt-1,1),vti(1:jt-1,6))
    xlim([0 t])
    ylim([0 rmoj])
    grid on
    xlabel('Time (min)','FontSize',13,'FontWeight','bold')
    ylabel('Pounded radius (cm)','FontSize',13,'FontWeight','bold')
% -----

toc
```


ANEJO VII. Glosario de Términos.

Aquí se recoge la notación y unidades utilizadas para el uso de las magnitudes introducidas en el manuscrito.

- §•§ -

$a \equiv$ Distancia del foco al origen para coordenads esféricas oblatas [cm]

$A_a \equiv$ Absorción acumulada [cm]

$A_D \equiv$ Área del disco en modelo analítico aproximado [cm²]

$A_i \equiv$ Absorción instantánea [cm/min]

$A_L \equiv$ Sección muestra saturada en permeámetro de carga variable [cm²]

$A_{SM} \equiv$ Área de la semiesfera en modelo analítico aproximado [cm²]

$A_z \equiv$ Sección capilar en permeámetro carga variable.

$B \equiv$ Variable de Boltzmann [cm/min^{1/2}].

$C \equiv$ Capacidad específica del agua. Pendiente curva retención [cm⁻¹].

$b \equiv$ exponente del modelo de Clapp y Hornberger [Adim].

$D \equiv$ Difusividad hidráulica [cm²/min].

$d\vec{S} \equiv$ vector diferencial de superficie [cm²].

$H \equiv$ Potencial total por unidad de peso [cm].

$h \equiv$ Potencial matricial por unidad de peso (potencial de capilaridad) [cm].

$h_f \equiv$ Potencial matricial en el frente de avance [cm].

$h_0 \equiv$ Potencial matricial inicial del suelo [cm].

$h_s \equiv$ Potencial matricial del suelo en saturación [cm].

$I \equiv$ Infiltración acumulada [cm].

$I^* \equiv$ Infiltración acumulada adimensional.

$i \equiv$ Infiltración instantánea [cm/min].

$i, j, k \equiv$ Subíndices relativos a la discretización espacial.

$K \equiv$ Constante del producto $k_s \Delta \theta$ [cm/min].

$\hat{k} \equiv$ Vector unitario paralelo al eje vertical [adim].
 $k \equiv$ Conductividad hidráulica [cm/min].
 $k_h \equiv$ Conductividad hidráulica sobre el plano horizontal [cm/s].
 $k_s \equiv$ Conductividad hidráulica en saturación del suelo [cm/s].
 $k_z \equiv$ Conductividad hidráulica en la dirección vertical [cm/s].
 $L \equiv$ Tamaño de la red [cm].
 $L_R \equiv$ Tamaño de la red en la dirección radial [cm].
 $L_s \equiv$ Longitud del suelo saturado permeámetro de carga variable [cm].
 $L_z \equiv$ Profundidad máxima de la red de nodos [cm].
 $M \equiv$ Pendiente motriz [adim].
 $M_0 \equiv$ Masa inicial de la muestra medida experimentalmente [g].
 $M_{agua} \equiv$ Masa de agua que contiene la muestra [g].
 $M_{seco} \equiv$ Masa de la muestra tras secado en horno a 110°C [g].
 $M_{sat} \equiv$ Masa de la muestra saturada de agua [g].
 $m \equiv$ Parámetro de referencia de las funciones van Genuchten-Mualem [adim].
 $N \equiv$ número de nodos [adim].
 $N_r \equiv$ número de nodos en dirección radial [adim].
 $N_z \equiv$ número de nodos en dirección vertical [adim].
 $n \equiv$ Parámetro de referencia de las funciones van Genuchten-Mualem [adim].
 $n \equiv$ Subíndice relativo a la discretización temporal.
 $q \equiv$ Caudal aplicado [cm³/min].
 $q_i \equiv$ Caudal infiltrado [cm³/min].
 $q^* \equiv$ Caudal adimensional.
 $r \equiv$ Coordenada radial [cm].
 $R_{max} \equiv$ Radio máximo (régimen estacionario) del charco mojado [cm].
 $R_0 \equiv$ Radio zona saturada [cm].
 $R_0^* \equiv$ Radio zona saturada adimensional fuente circular [adim].
 $R_W \equiv$ Radio máximo según el modelo de Wooding [cm].

$r \equiv$ coordenada radial [cm].

$r^* \equiv$ coordenada radial adimensional [adim].

$r_f \equiv$ Radio del frente de avance [cm].

$r_L \equiv$ radio de la muestra saturada en permeámetro de carga var. [cm²]

$r_z \equiv$ radio del capilar en permeámetro carga variable.

$S \equiv$ Sorptividad [cm/min^{1/2}]

$s \equiv$ pendiente de la curva k-h. Modelo de Bhatnagar [cm⁻¹].

$s \equiv$ grado de interpolación en polinomios de Lagrange.

$t \equiv$ tiempo [min].

$t^* \equiv$ tiempo adimensional.

$t_{max} \equiv$ tiempo de riego necesario para alcanzar radio límite [min].

$t_0 \equiv$ tiempo inicial [min].

$V \equiv$ Volumen; volumen infiltrado [cm³].

$V^* \equiv$ Volumen adimensional.

$V_g \equiv$ Potencial gravitatorio [cm²/min²].

$V_a \equiv$ Volumen aplicado [cm³].

$V_g \equiv$ Potencial gravitatorio [cm²/min²].

$V_n \equiv$ Volumen neto en superficie [cm³].

$V_s \equiv$ Potencial de succión [cm²/min²].

$\vec{v} \equiv$ Vector velocidad [cm/min].

$v_r \equiv$ Componente radial de la velocidad [cm/min].

$w_i \equiv$ Pesos de la integral en la cuadratura de Gauss-Laguerre.

$z \equiv$ Profundidad [cm].

$z^* \equiv$ Profundidad adimensional [adim].

$z_f \equiv$ Profundidad del frente de avance [cm].

$z_r \equiv$ Altura de la rugosidad del suelo [cm].

$\alpha \equiv$ Constante de escala macroscópica de capilaridad [cm⁻¹].
 $\beta \equiv$ Pendiente de recta de regresión permeámetro carga var. [min].
 $\gamma \equiv$ Constante de proporcionalidad al radio máximo [adim].
 $\delta \equiv$ factor de crecimiento del paso de tiempo [adim].
 $\varepsilon_a \equiv$ Error aleatorio.
 $\varepsilon_r \equiv$ Error relativo [adim].
 $\varepsilon_s \equiv$ Error sistemático.
 $\varepsilon_T \equiv$ Error total.
 $\eta \equiv$ Coordenada radial en sistema de referencia esféricas oblatas.
 $\theta \equiv$ Contenido de humedad volumétrico [adim].
 $\theta^* \equiv$ Contenido de humedad volumétrico normalizado [adim].
 $\theta' \equiv$ Contenido de humedad másico [adim].
 $\theta_f \equiv$ Contenido de humedad del frente de avance [adim].
 $\tilde{\theta}_0 \equiv$ Contenido de humedad inicial aparente [adim].
 $\theta_0 \equiv$ Contenido de humedad inicial del suelo [adim].
 $\theta_r \equiv$ Contenido de humedad residual del suelo [adim].
 $\tilde{\theta}_s \equiv$ Contenido de humedad en saturación aparente [adim].
 $\theta_s \equiv$ Contenido de humedad en saturación del suelo [adim].
 $\vartheta \equiv$ Ángulo polar (colatitud) en coordenadas esféricas [rd].
 $\kappa \equiv$ Constante de Warrick. Variación de la conductividad hidráulica frente al contenido de humedad [cm/min].
 $\rho \equiv$ Densidad aparente [g/cm³].
 $\rho^* \equiv$ Radio auxiliar adimensional [adim].
 $\tau_f \equiv$ Tensión en el frente de avance [cm].
 $\phi \equiv$ Potencial de flujo matricial [cm²/min].
 $\phi^* \equiv$ Potencial de flujo matricial adimensional [adim].
 $\chi \equiv$ Cambio de variable del modelo de Brandt [cm²/min]
 $\varphi \equiv$ Ángulo azimuthal (ecuatorial) en coordenadas esféricas.
 $\psi \equiv$ Coordenada angular sistema de referencia en esféricas oblatas.
 $\omega \equiv$ Variable muda en integración [adim].

- § • § -

$\vec{\nabla} \equiv$ operador gradiente (nabla) [cm^{-1}].

$\Delta \equiv$ Incremento ó incertidumbre [adim].

ANEJO VIII.

Publicaciones científicas relativas a la tesis.

1. del Vigo A., Zubelzu S. & Juana L. (2019a). Algoritmo para la resolución de la ecuación de Richards en 3-D para riego por goteo: Método, validación y resultados preliminares. Congreso Nacional de Riegos. A-6:38-45. Don Benito (Badajoz). Spain.
2. del Vigo A., Zubelzu S. & Juana L. (2019b). Study of water infiltration in soil by Richards equations in 3D: summary and methodology validation. 11th World Congress on Water Resources and Environment. VIII:375-377. Madrid. Spain.
3. del Vigo A., Zubelzu S. & Juana L. (2019c). Soluciones analíticas aproximadas bajo hipótesis de Green-Ampt desde fuentes semiesférica y circular en superficie. VI Jornadas Ingeniería del Agua. B:187-190. Toledo. Spain.
4. del Vigo A., Zubelzu S. & Juana L. (2020a). Numerical routine for soil water dynamics from trickle irrigation. Applied Math. Model. 83: 371-385.
5. del Vigo A., Zubelzu S. & Juana L. (2020b). Infiltration models for hemispherical and disc sources based on Green-Ampt principia. Journal of Hydrology. (En revisión).