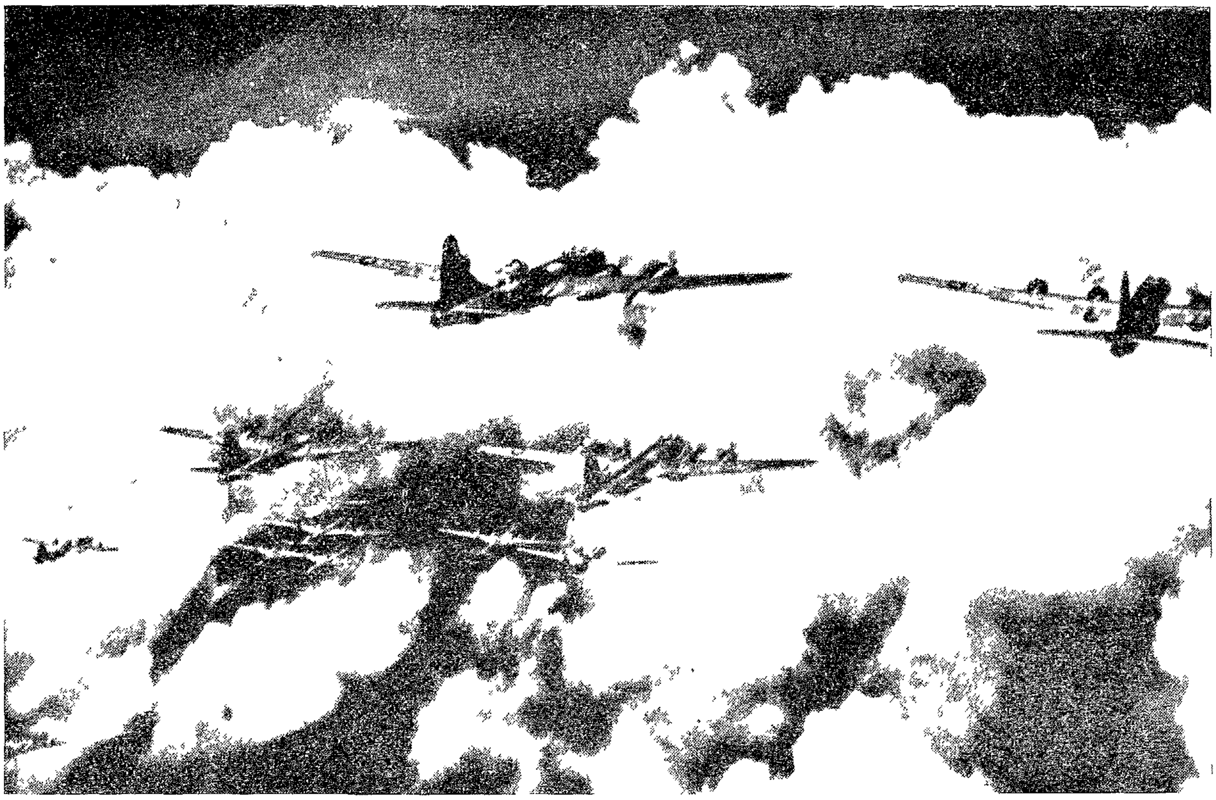


Consideraciones acerca del bombardeo en medio de densidad variable

Por HERMENEGILDO MARIN ARAEZ y CARLOS SANCHEZ TARIFA,
Alféreces cadetes de la Academia Militar de Ingenieros Aeronáuticos.

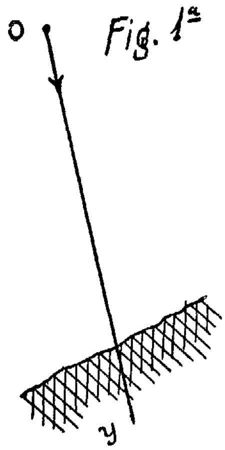
Continuamente se presentan nuevos problemas en la realización y estudio de un bombardeo, al irse incrementando día por día la altura de lanzamiento. Es preciso tener en cuenta todos los factores que intervienen en el problema, factores que en estudios anteriores se despreciaban por no tener influencia sensible en los resultados numéricos obtenidos. Uno de los factores que han adquirido importancia con dicho incremento de altura es la densidad atmosférica. Para tiro artillero rasante y bombardeos aéreos a muy baja altura, puede tomarse una densidad constante e igual a la del punto de partida del proyectil. Para un bombardeo a una altura media es suficiente la precisión que se logra tomando una densidad constante e igual a la media aritmética de las densidades en el suelo y en el punto de lanzamiento. Pero para los actuales bombardeos subestratosféricos a 9.000 y 10.000 metros de altura, en los que la densidad del aire a la altura de vuelo es aproximadamente la tercera parte que la del suelo, es preciso introducir el concepto de la densidad función de la altura y hacer los cálculos de un bombardeo con arreglo a esta hipótesis, si quieren obtenerse resultados precisos y concordantes con los obtenidos por medio de experiencias. En nuestro artículo vamos a estudiar cómo varía el concepto de velocidad límite y cómo influye en la curva $V = f_o\ (y)$ la introducción de esta nueva función.

Velocidad límite.

Sabemos que si desde un punto 0 lanzamos un proyectil sin velocidad inicial, su aceleración en un instante cualquiera viene dada por la fórmula

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = g - c\, F(v) \quad \text{(Fig. 1).}$$

En la que: g es la aceleración de la gravedad, $F\ (v)$ es la función resistente, aproximadamente proporcional a v^2 para velocidades hasta de 150 m/seg., y c es el coeficiente balístico, proporcional a la densidad ρ del aire y a unas variables que dependen únicamente del tipo de bomba empleada;



es decir, que serán constantes para una bomba dada.

Llamamos velocidad límite v' aquella que hace el movimiento uniforme. Vendrá dada por:

$$g - c\,F(v') = 0.$$

Hasta ahora suponemos la densidad constante, y con esta hipótesis resulta que, desde el momento en que $V = V'$, conservará la velocidad este valor prosiguiendo el movimiento de un modo uniforme. Es fácil ver que la velocidad v' se alcanzaría para un tiempo infinitamente grande. En efecto: de

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{d v}{d t} = g - c\,F(v); \qquad d t = \frac{d v}{g - c\,F(v)},$$

y habremos de examinar la convergencia de la integral:

$$t = \int_{o}^{v'} \frac{d v}{g - c\,F(v)},$$

en la que g y c son constantes y $F(v)$ monótona creciente. Esta integral será divergente cuando el límite de la cantidad subintegral para $V = V'$ sea un infinito de igual o mayor que primer orden. Para ver el orden de infinitud, compararemos dicha cantidad subintegral con la función $\frac{1}{v - v'}$. El límite de esta relación es, según la regla de L'Hopital, la inversa de la derivada de $[g - c\,F(v)]$ con relación a v, y como dicha derivada para $V = V'$ toma un valor finito no nulo, resulta que la cantidad subintegral es un infinito de primer orden y la integral es, por tanto, divergente.

Supongamos ahora que c sea una función de la altura y, función $\varphi(y)$ que no precisaremos de momento, exigiéndola únicamente que sea una función monótona creciente y no acotada, para todo valor de y comprendido entre cero e infinito (ejes de la fig. 1). Aunque esta función sólo tenga sentido para valores de y, comprendidos entre una altura dada (h) y el suelo (o), podremos, por extrapolación, considerarla para una y cualquiera, superior a la cota del suelo. En este caso no puede existir movimiento uniforme. En efecto: si para un instante dado se anulase la aceleración del proyectil, sería $g - \varphi(y)\,F(v) = o$, y V no puede permanecer constante y, por tanto, continuar siendo nula la aceleración, pues $\varphi(y)$ varía con y. Se obtiene, por tanto, un punto estacionario de velocidades.

CURVA $v = f(y)$.

Veamos si el proyectil alcanza realmente esta velocidad v_1, si el tiempo empleado en alcanzarla es finito y cómo es la gráfica de la función $v = f(y)$. Para ello, compararemos las funciones $V = f_o(y)$; $V = f(y)$ dadas por las ecuaciones diferenciales:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{d^2 y}{d t^2} = g - c_o\,F(v) & \text{ó} & v\,\dfrac{d v}{d y} = g - c_o\,F(v), \\[2ex] \dfrac{d^2 y}{d t^2} = g - \varphi(y)\,F(v) & \text{ó} & v\,\dfrac{d v}{d y} = g - \varphi(y)\,F(v), \end{array}\right.$$

la primera ecuación para el caso de densidad constante, siendo c_o el valor del coeficiente balístico para el punto de lanzamiento; y la segunda, para el caso general, siendo $\varphi(y_o) = \varphi(o) = C_o$. La gráfica de la primera función es conocida, su forma puede verse en la figura 2, con una asíntota horizontal a la distancia v'. La segunda, que es la que queremos estudiar, lo haremos por los valores de su derivada

$$\frac{d v}{d y} = \frac{1}{v}\left[g - \varphi(y)\,F(v)\right].$$

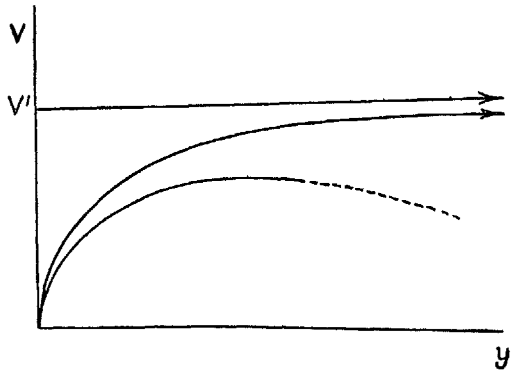


Fig. 2ª

Comparando esta derivada con la

$$\frac{d v}{d y} = \frac{1}{v}\left[y - c_o\,F(v)\right],$$

vemos que ésta es constantemente mayor que la primera para un mismo v, por ser $\varphi(y) > C_o$ para $y > o$. Las funciones toman en el origen el mismo valor (cero) y las derivadas toman el valor, infinito, pues:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{y \to 0} \left(\dfrac{d v}{d y}\right) = \lim\limits_{y \to 0} \left(\dfrac{g}{v_o} - \dfrac{\varphi(y)\,F(v_o)}{v_o}\right) = \infty \\[3ex] \lim\limits_{y \to 0} \left(\dfrac{d v}{d y}\right) = \lim\limits_{y \to 0} \left(\dfrac{g}{v_o} - \dfrac{c_o\,F(v_o)}{v_o}\right) = \infty \end{array}\right\} \quad v_o \to 0,$$

por ser $F(v_o)$ un infinitésimo de orden superior al primero para $V \to o$. Por tanto, resulta que la curva $f(y)$ permanece por debajo de la $f_o(y)$ por partir de un mismo origen con idéntica tangente y permanecer la pendiente de la primera menor que la de la segunda. Por tanto, para una misma altura y, la velocidad, en el caso de ser la densidad función de la altura, es menor que en el caso de densidad constante, resultado lógico por haber partido de una misma densidad y haber considerado creciente ésta.

Para estudiar la forma de la curva, introduzcamos la función $V'(y) = g - \varphi(y) F(v') = o$. Esta función nos da, para cada valor de la altura y, el valor correspondiente de la velocidad que tendría que llevar un proyectil para que en dicha cota y tuviese aceleración nula. Por tanto, para que el movimiento de un proyectil definido por la función $V = f(y)$ tenga un punto estacionario de velocidades, es preciso que las dos curvas se corten. Ahora bien, con la hipótesis establecida acerca de la forma de la función $\varphi(y)$, es fácil ver que la forma del gráfico de la función $V'(y)$ será el representado en la figura 3; es decir, que la curva parte del valor $d V'_o$ de la velocidad, dado por $g - C_o\ F(V'_o) = o$, y permanece decreciente hasta $y = \infty$, en que la velocidad se anula.

La función $V = f(y)$ es creciente en la parte del plano situada por debajo de la curva $V'(y)$, por ser su derivada

$$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{v}\left[g - \varphi(y) F(v)\right]$$

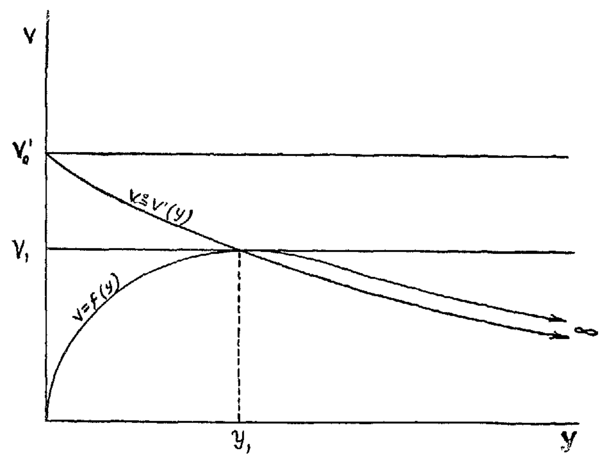


Fig. 3.ª

positiva. Análogamente se ve que es decreciente o constante, según que los puntos que consideremos estén situados por encima o coincidiendo con la curva $V'(y)$.

Nuestra curva de velocidades del movimiento parte de un punto de la primera región; es decir, la función será creciente, y como la $V'(y)$ tiende a cero cuando y tiende a infinito, las dos curvas se cortarán en un punto en el que la $V = f(y)$ tendrá un valor estacionario de la velocidad, punto que se habrá alcanzado con abscisa finita. En dicho punto existirá una tangente horizontal, y, por tanto, en un cierto entorno de él, V tomará valores por encima de la curva $V'(y)$, y por estar situados estos puntos en la segunda región, la función será decreciente. No pueden existir más contactos entre las dos curvas, porque un contacto de primer orden, es decir, con $\frac{dv}{dy} = 0$ (tangente horizontal) es incompatible con la condición $\left|\frac{dv}{dy}\right| > \left|\frac{dv'}{d\gamma}\right|$ y un contacto de segundo orden con coincidencia de valores nulos de ambas derivadas no puede producirse al ser $\frac{dv'}{dy} \neq 0$ en toda la curva. La curva $V = f(y)$ permanecerá constantemente decreciente al conservarse por encima de la $V'(y)$ cuando y tiende a infinito. Es fácil ver que el eje $O\ Y$ es asíntota de la curva; nos basta ver que como

$$\lim_{\gamma \to \infty} v \frac{dv}{dy} = 0 = \lim_{\gamma \to \infty} g - \varphi(y) F(v)$$

ha de ser

$$\lim_{\gamma \to \infty} \varphi(y) F(v) = g;$$

y como

$$\lim_{\gamma \to \infty} \varphi(y) = \infty,$$

resulta

$$\lim_{\gamma \to \infty} F(v) = 0,$$

o sea

$$\lim_{\gamma \to \infty} v = 0.$$

Puede completarse este estudio gráfico del movimiento con uno analítico, en el que se demuestre cómo el máximo de la función se alcanza en un tiempo finito. La existencia de dicho máximo puede demostrarse sin recurrir a la curva $V'(y) = o$; basta considerar que nuestra curva se conserva inferior a la $V = f_o(y)$ de densidad constante, y como ésta tiene una asíntota $V = V'_o$, resultará que la función tendrá un máximo con abscisa finita o infinita. Para este estudio nos bastará considerar la convergencia de la integral

$$t = \int_o^{v_1} \frac{dv}{g - \varphi(y) F(v)},$$

en la que la cantidad subintegral toma el valor infinito para $V = V_1$. Analicemos el valor de la derivada respecto a V, de $g - \varphi(y) F(v)$:

$$\frac{d}{dv}\left[g - \varphi(y) F(v)\right] = -\varphi(y) F'(v) - F(v) \varphi'(y) \frac{dy}{dv},$$

que para $y = y_1$; $V = V_1$, queda

$$-\varphi(y_1) F'(v_1) - F(v_1) \varphi'(v_1) \left(\frac{dy}{dv}\right)_{v = v_1}.$$

$F'(V_1)$, $F(V_1)$ y $\varphi'(y_1)$ tendrán valores finitos distintos de cero, y $\varphi(y_1)$ podrá tender a constante o $a + \infty$ (pues aún no hemos demostrado que la abscisa y_1 sea finita) y como $\frac{d\gamma}{dv} = \frac{v}{g - \varphi(\eta) F(v)}$ tiende $a + \infty$ $(V = V_1)$, en ambos casos la derivada tiende a infinito, y, por tanto, $g - \varphi(y) F(V)$ es un infinitésimo de orden inferior al primero, y, por tanto, la integral es convergente y t resulta finito.

INTEGRACIÓN DE LA FUNCIÓN $V = f(y)$.

Mientras no conozcamos la forma de la función $F(V)$, no podremos traducir en una ley analítica la dependencia de V respecto de y. Para efectuar la integración pondremos $F(V) = Bv^2$, fórmula que, como sabemos, nos da una aproximación suficiente en la práctica. En la ecuación diferencial

$$v \frac{dv}{d\gamma} = g - i\rho \frac{d^2}{p} B V^2$$

pondremos

$$\frac{i d^2}{p} B = K$$

y haremos el cambio de variable $Z = V^2$, quedando finalmente:

$$\frac{dz}{d\gamma} + 2K\rho z - 2g = 0.$$

En la cual ρ es una cierta función de la altura y. La solución general de esta ecuación diferencial es:

$$\text{(a)} \qquad z = e^{-2K\int \rho\, d\gamma} \left\{ C + 2g \int e^{2K\int \rho\, d\gamma} d\gamma \right\}$$

En realidad, la dependencia de la densidad con la altura no es reductible a ninguna fórmula matemática. Suponiendo un gradiente constante de temperaturas de 6,5 grados por kilómetro en la atmósfera C. I. N. A., y de 5 grados por kilómetro en la alemana, la fórmula de Everling $\frac{\rho}{\rho_o} = 0{,}9^h$ nos da aproximación suficiente hasta los 10.000 metros, altura máxima a que se realizan hoy día los bombardeos. En esta fórmula, h es la altura expresada en kilómetros y contada a partir del suelo, y ρ y ρ_o las densidades relativas del aire. Con los ejes que hemos adoptado, la fórmula se nos convierte en la

$$\frac{\rho}{\rho_o} = 0{,}9^{-y} = e^{0{,}105\, y},$$

siendo ρ_o la densidad correspondiente al punto de lanzamiento. Para integrar la ecuación (a) procederemos por sucesivos desarrollos en serie:

$$\rho = \rho_o \left[1 + 0{,}105\,\gamma + \frac{1}{2}\, 0{,}011\, y^2 + \ldots\right].$$

Tomaremos sólo los dos primeros términos de este desarrollo, que nos dan una aproximación del 10 por 100 en la estimación del valor de la densidad para una altura dada y. Con esto resulta:

$$e^{-2K\int \rho\, d\gamma} = e^{-2K\rho_o\left[\gamma + \frac{1}{2}\, 0{,}105\,\gamma^2\right]} =$$

$$= e^{-2K\rho_o\gamma}\left[1 - K\rho_o\, 0{,}105\,\gamma^2\right],$$

y, por tanto,

$$e^{2K\int \rho\, d\gamma} = e^{2K\rho_o\gamma}\left[1 + K\rho_o\, 0{,}105\,\gamma^2\right]$$

y la integral

$$\int e^{2K\int \rho\, d\gamma} d\gamma$$

vale:

$$\int e^{2K\rho_o\gamma}\left[1 + K\rho_o\, 0{,}105\,\gamma^2\right] d\gamma,$$

que integrada por partes resulta:

$$\int e^{2K\int \rho\, d\gamma} d\gamma =$$

$$= \frac{e^{2K\rho_o\gamma}}{2K\rho_o}\left[1 + 0{,}105\,K\rho_o\,\gamma^2 - 0{,}105\,\gamma + \frac{0{,}105}{2K\rho_o}\right],$$

obteniéndose para valor de Z:

$$Z = e^{-2K\rho_o\gamma}\left[1 - 0{,}105\,K\rho_o\, y^2\right]$$

$$\left[C + 2g\,\frac{e^{2K\rho_o\gamma}}{2K\rho_o}\,(1 + 0{,}105\,K\rho_o\,\gamma^2) - 0{,}105\,\gamma + \frac{0{,}105}{2K\rho_o}\right].$$

La constante la determinamos con la condición de que para $y = 0$; $V = 0$

$$C = -\frac{g}{K\rho_o}\left(1 + \frac{0{,}105}{2K\rho_o}\right).$$

Finalmente:

$$Z = V^2 = V_o'^2\left[1 - e^{-2b\gamma}\right] +$$

$$+ V_o'^2\, 0{,}105\left[\frac{1}{2b} - y + b\gamma^2 e^{-2b\gamma} - \frac{e^{-2b\gamma}}{2b}\right],$$

con

$$b = K\rho_o \qquad \text{y} \qquad V_o'^2 = -\frac{g}{K\rho_o}.$$

Siendo V'_o el valor, da la velocidad límite correspondiente a la densidad del punto de lanzamiento. Ahora bien: $V_o'^2\left[1 - e^{-2b\gamma}\right]$ es la fórmula que nos da la velocidad en función de y, supuesta constante la densidad (basta integrar en $\frac{v\,dv}{dy} = g - b\,v^2$), y llamándola V_c queda:

$$V^2 = V_c^2 + V_o'^2\, 0{,}105\left(-y + \frac{1}{2b} + b\gamma^2 e^{-2b\gamma} - \frac{e^{-2b\gamma}}{2b}\right) =$$

$$= V_c^2 + V_o'^2\, 0{,}105\, f(y),$$

siendo $f(y)$ una función negativa para toda y positiva, y cuyo desarrollo en serie de potencias se obtiene por:

$$f(\gamma) = -\frac{4}{3}\, b^2\gamma^3 + \frac{5}{3}\, b^3\gamma^4 - \frac{16}{15}\, b^4\gamma^5 + \ldots,$$

del que tomaremos sólo el primer término; es decir, que los valores del cuadrado de la velocidad se obtendrán de los obtenidos supuesta constante la densidad, restándoles los de la parábola cúbica $V_f = 0{,}14\, b^2 y^3 \,.\, V_o'^2$, resultando como fórmula final:

$$V^2 = V_c^2 - V_o'^2\, 0{,}14\, b^2\gamma^3.$$