

Sobre el alcance de las estructuras
Una exploración sobre límites físicos al crecimiento

Mariano Vázquez Espí¹

Alcalá de Henáres y Ondara, 2003-2004

¹Grupo de Investigación en Arquitectura, Urbanismo y Sostenibilidad de la UPM

Este es un documento de trabajo. Puede considerarse un manuscrito inacabado. En 2003 albergaba el propósito de presentarme a un concurso de habilitación para concursar a plaza de catedrático y este manuscrito es el resultado de la investigación que había que realizar para el tercer ejercicio del concurso. Otro objetivo no menos importante, aunque de él apenas queda rastro en el manuscrito, era descubrir el patrón de Michell para el denominado *bridge problem* en la literatura y poderlo presentar en el centenario de la publicación del teorema del citado autor (2004). Mientras tanto, una célula que acabaría siendo mi segundo hijo, Lucas, tuvo a bien interferirse en mi camino académico, camino que abandoné gustoso para dedicarme a su crianza.

He encontrado el manuscrito en el curso de una mudanza y tras leerlo me ha parecido que tenía interés hacerlo accesible al público como tal documento de trabajo. De hecho casi diez años después he vuelto a las andadas gracias a una estancia sabática en el Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE) de la Universidad Politécnica de Cataluña. Es seguro que reutilizaré parte de este material, aunque otras partes están superadas o eran claramente erróneas.

El material se ofrece tal cual. No está revisado ni corregido en ningún sentido. Faltan todas las referencias bibliográficas con que dar cuenta de lo tomado en préstamo de otros autores, especialmente de Ricardo Aroca y Jaime Cervera del Departamento de Estructuras de la Edificación de la UPM.

Ondara, a 18 de marzo de 2011.

Índice general

1. Los tamaños insuperables de Galileo	3
1.1. El peso suspendido de un cable	5
1.1.1. Cables ‘exponenciales’	5
1.1.2. Un cable ‘plano’	6
1.2. La ménsula con carga uniforme	7
1.2.1. Ménsulas ‘exponenciales’	8
1.2.2. Una ménsula ‘plana’	8
2. La teoría ‘estándar’ sobre el diseño de estructuras	10
2.1. Problemas y soluciones estructurales	10
2.1.1. El número de Maxwell	10
2.1.2. Tamaño, esquema, proporción y material	11
2.2. Volumen resistente, dimensionado estricto y cantidad de estructura	12
2.3. Esbeltez óptima de un esquema	14
2.4. Cantidad de estructura y peso propio	15
2.5. Propiedades invariantes de una directriz	16
2.6. Diseño con sección constante	17
2.6.1. Eficacia estructural o rendimiento e	17
2.6.2. Tracción. Alcance del material	17
2.6.3. Compresión	18
2.6.4. Flexión simple: vigas apoyadas de alma llena.	18
2.6.5. Flexión simple: vigas empotradas	24
2.6.6. Flexión simple: viga triangulada de cordones paralelos.	24
2.6.7. Flexión con canto constante: conclusiones	28
3. Cerchas isostáticas	29
4. Cerchas isostáticas: tensión media	30
4.1. Resistencia	30
4.2. Acciones: carga externa y peso propio	30
4.3. Dimensionado estricto	31
4.4. Equilibrio de cerchas ‘estrictas’	31
4.4.1. Cerchas de tamaño ‘alcanzable’	34
4.5. Un ejemplo	35
5. Cerchas isostáticas: tensión máxima y sección constante	37
5.1. Flexión compuesta con sección constante	37
5.2. Equilibrio de cerchas con flexión local	39
5.3. Dimensionados ideal y estricto	41
A. Mecánica de un universo plano	42

Capítulo 1

Los tamaños insuperables de Galileo

PROPOSICIÓN VII

Entre los prismas o cilindros pesados [gravi] y semejantes, hay uno y sólo uno que llega a encontrarse (a consecuencia de su propio peso) en un estado límite entre romperse y mantenerse todavía entero, de modo que todo aquel que sea más grande, incapaz de sostener su propio peso, se romperá, mientras que todo el que sea más pequeño opondrá alguna resistencia a la fuerza que se haga para romperlo.

[...]

De lo que se ha demostrado hasta el momento, como podéis ver, se infiere la imposibilidad de poder, no sólo en el arte sino en la misma naturaleza, aumentar los mecanismos hasta dimensiones inmensas, de modo que sería imposible fabricar naves, palacios o templos enormes, de tal forma que sus remos, patios, vigas, cerrojos y, en suma, todas sus partes constituyentes, pudiesen sostenerse. Así, tampoco podría la naturaleza hacer árboles de un tamaño desmesurado, ya que sus ramas acabarían por venirse abajo bajo su propio peso. Sería imposible, igualmente, construir estructuras óseas de hombres, caballos u otros animales, que pudiesen mantenerse y realizar sus propios menesteres, a no ser que se utilizara un material más duro y resistente que el normal, en caso de que no se les agrandara tales huesos de modo tan desproporcionado que la figura y aspecto del animal en cuestión llegase a ser algo monstruosamente grande; lo cual, tal vez, intuyó nuestro sagaz Poeta cuando, describiendo un grandísimo gigante, decía:

*Imposible reconocer su altura,
Tan desmesuradamente grande es su grosor*¹.

La que ha venido en llamarse *ley de los cubos y los cuadrados*, formulada por Galileo por vez primera en sus *Discorsii*, es una proposición muy general sobre la *imposibilidad del crecimiento indefinido por semejanza* de una figura sujeta a condiciones que atañen simultáneamente a su superficie y a su volumen.

El caso ‘mecánico’ es particularmente simple de explicar: la resistencia de estructuras semejantes crece con el cuadrado de su tamaño, mientras que su propio peso lo hace con el cubo. Si una estructura, que es segura para un tamaño y carga útil dados, crece por semejanza, verá aumentar su peso propio más deprisa que su resistencia, alcanzando para algún tamaño determinado una situación insuperable, en la que la estructura colapsa por su propio peso sin necesidad de carga útil adicional.

La resistencia, medida en términos de tensión (una fuerza por unidad de superficie), es un *flujo*. Por su parte, la carga, tanto la útil como la propia, es un *stock*, medido por unidad de volumen. Las condiciones de equilibrio mecánico pueden describirse como un ajuste entre flujos y *stocks*. Esta idea puede generalizarse a cualquier sistema físico cuya estabilidad resulta

¹ARIOSTO, *Orlando furioso*. XVII, 30.

de un compromiso entre flujos y *stocks*: así ha sido explorada en campos tan dispares como la conducción de calor, la cosmología cuántica o el transporte de materiales en sistemas urbanos.

Debe notarse que la imposibilidad mencionada sólo se refiere a figuras semejantes de distinto tamaño. El propio Galileo, a renglón seguido de su proposición VII, comenzó a explorar en que condiciones podrían superarse tales *tamaños insuperables*. Su respuesta ofrece dos tipos de soluciones en el caso mecánico: por una lado, utilizar materiales más resistentes; por otro, renunciar a la semejanza formal y variar las proporciones de la figura. La primera solución es una mera maniobra de distracción: un material más resistente tan sólo aumenta el tamaño insuperable, sin acabar con su existencia. La segunda solución es mucho más prometedora: permite abrigar la esperanza de que exista, para cada tamaño, una forma óptima capaz no sólo de soportarse así misma, también de soportar carga adicional; en último extremo, permite especular con la posibilidad de que cualquier problema estructural sea resoluble para cualquier tamaño, sin más que encontrar la figura apropiada.

En uno de los casos más simples estudiados por Galileo, el cable que sostiene un peso, la segunda vía, andando el tiempo, dio como resultado una solución que puede crecer indefinidamente: si en vez de un cable de diámetro constante se utiliza un cable cuyo diámetro crece exponencialmente con la longitud, se obtiene una estructura cuyo tamaño puede crecer indefinidamente a la vez que puede soportar carga adicional. Así pues, el problema de suspender un peso tiene *siempre* solución para cualquier tamaño, al menos dentro de las condiciones simples en que el problema se planteó.

Los demás casos simples analizados por Galileo admiten soluciones exponenciales semejantes, tal es el caso de una ménsula sometida a una carga útil en el extremo o a una carga útil uniforme sobre su longitud.

Esta conclusión, puede resumirse en forma de hipótesis:

Entre todas las figuras estructurales no semejantes pero de igual tamaño, apropiadas para resolver un mismo problema estructural, existe al menos una que es capaz de soportar su propio peso y alguna carga útil.

La importancia de esta hipótesis tiene que enjuiciarse en dos planos bien distintos:

- Desde el punto de vista de la ‘teoría’, la conclusión es importantísima, pues resulta muy diferente que exista o no un tamaño insuperable para cada problema estructural: si existe un límite, *hay casos de un problema estructural que son irresolubles*; si no existe, el problema estructural siempre tiene solución.
- Desde un punto de vista ‘práctico’, si para eliminar el tamaño insuperable hay que ‘pagar’ con un volumen estructural que crece exponencialmente, no hay diferencia apreciable: a fin de cuentas, un volumen estructural que crece exponencialmente con el tamaño significa un coste prohibitivo a partir de cierto tamaño. De poco sirve conocer la solución si su construcción queda fuera de nuestro alcance.

Sin embargo, esta diferencia entre lo irresoluble y lo *intratable* se ha apreciado en otras disciplinas de forma distinta. Por ejemplo, en teoría de algoritmos (una rama de la computación) se reconoce una diferencia esencial entre aquellos problemas que son irresolubles y aquellos otros, *intratables*, cuya solución exigiría emplear descomunales cantidades de tiempo. Desde el punto de vista práctico, la diferencia sigue siendo esencial: un problema irresoluble *no tiene solución* y carece de sentido intentar resolverlo; un problema intratable la tiene, aunque no esté a nuestro alcance, así que puede merecer la pena destilar soluciones *que se aproximen* a la solución inalcanzable, mediante métodos que no requieran esas descomunales cantidades de tiempo. El desarrollo en las dos últimas décadas de métodos de aproximación como el recocido simulado o el algoritmo genético ha sido la respuesta a la aparición frecuente de problemas intratables (típicamente problemas de optimización de diseños, tanto en arquitectura como en ingeniería). La teoría, por su parte, se afana en averiguar si la distinción entre problemas intratables y aquellos otros fácilmente resolubles, es fruto de nuestra ignorancia o de una diferencia esencial entre ambas clases (cuestión que hasta la fecha continúa abierta, puesto que nadie ha conseguido demostrar que aquellos que nos parecen intratables lo sean).

En la discusión anterior cobra importancia el concepto de ‘coste’: pues desde un punto de vista práctico tanto da disponer de una solución de coste impagable que no tenerla. Para evitar tediosas discusiones acerca del ‘coste’ y de como medirlo, usaré la definición estándar de la termodinámica para rendimiento:

$$\text{Rendimiento} = \frac{\text{Cantidad útil}}{\text{Cantidad total}} \quad (1.1)$$

La Segunda Ley es *siempre* de aplicación, de manera que en un sistema aislado el rendimiento es siempre menor que la unidad. El coste es, simplemente, el inverso del rendimiento:

$$\text{Coste} = \frac{1}{\text{Rendimiento}} = \frac{\text{Cantidad total}}{\text{Cantidad útil}} \quad (1.2)$$

y para sistemas aislados, el coste es *siempre* mayor que la unidad.

La Segunda Ley admite una reinterpretación mecánica, y la Mecánica una reinterpretación termodinámica, digna de mención: una estructura se diseña para soportar carga útil. La estructura ideal es la que no pesa, dedicando toda su resistencia a soportar carga útil. En tales condiciones ideales (análogas a la condición de ‘reversibilidad’), el rendimiento y el coste son la unidad. Pero una estructura real pesa *inevitablemente* así que parte de la resistencia debe emplearse en sostener su propio peso, el rendimiento resulta menor que la unidad (y el coste mayor que ella). Veremos que, en las estructuras, el rendimiento disminuye monótonamente con el tamaño. Y puesto que las estructuras construidas con los nuevos materiales son frecuentemente *estructuralmente pequeñas*, los rendimientos pueden acercarse a la unidad. En términos prácticos: el peso propio de la estructura es despreciable, y despreciarlo es la práctica habitual en su cálculo y diseño. Sin embargo, cualitativamente, el rendimiento estructural es siempre menor que la unidad, y será tanto menor cuanto más grande la estructura. La proposición VII, traducida a nuestro actual vocabulario dice que: *para estructuras semejantes, existe un tamaño finito para el que el rendimiento es nulo*.

El objetivo primordial de esta investigación puede enunciarse ahora en forma de pregunta:

¿Existen problemas estructurales irresolubles a partir de cierto tamaño? O, por el contrario, a partir de cierto tamaño, los problemas estructurales se vuelven intratables.

Inevitablemente, debido a la discusión de más arriba, existe un objetivo ‘dual’, de orden más práctico, pero no menos importante:

¿Siguen siendo buena guía las estrategias de diseño estructural para tamaños pequeños cuando el tamaño crece y el peso propio cobra importancia?

Existe una respuesta estándar a tales preguntas, compiladas en la teoría estándar del diseño de estructuras, que examinaremos en el siguiente capítulo. Después examinaremos de cerca un problema estructural paradigmático: sostener pesos sobre una línea apoyada en sus extremos, intentando mejorar las respuestas estándar a esas dos preguntas. A la luz de ellas, examinaremos después algunos ejemplos de problemas estructurales de tamaño mediano y sus soluciones contemporáneas.

Pero antes de nada veamos que pasó con los casos presentados por Galileo.

1.1. El peso suspendido de un cable

Si la sección del cable es constante su resistencia es el producto de su tensión segura, \mathbf{f} , por el área de su sección, \mathbf{A} . Para una longitud L , su peso es proporcional a su volumen, $\rho L \mathbf{A}$, siendo ρ su peso específico. Con un peso Q tenemos:

$$\mathbf{fA} = \rho L \mathbf{A} + Q$$

Existe un tamaño ‘límite’ más allá del cual, aun sin peso ($Q=0$), el cable resulta inseguro:

$$\mathcal{L} = \frac{\mathbf{f}}{\rho}$$

El *alcance* del cable no depende de su sección y como se ve es una *propiedad del material*: ese cociente ha recibido el nombre de *alcance del material*, \mathcal{A} . El alcance del cable como estructura coincide con él.

Nótese que en un cable de tamaño $L = \mathcal{A}$, sin carga externa, la tensión en el extremo inferior es nula, siendo máxima en el superior $\sigma = \mathbf{f}$. La tensión media en el volumen es la mitad de la segura: no se aprovecha toda la resistencia del material.

1.1.1. Cables ‘exponenciales’

Si dejamos que la figura del cable adopte cualquier forma, puede plantearse la condición de que el cable tenga tensión constante bajo su propio peso:

$$\mathbf{fA} = \int_0^L \rho A dx; \quad \frac{dA}{A} = \frac{dx}{\mathcal{A}}$$

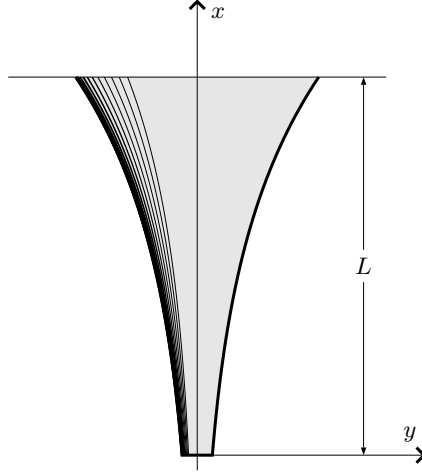


Figura 1.1: Cable de tensión ‘constante’: solución clásica

y la solución es un perfil exponencial:

$$A = A_0 \cdot \exp(x/A)$$

y para una sección circular:

$$y = r_0 \cdot \sqrt{\exp(x/A)}$$

Esta solución, clásica en los manuales de principios del XX, parece superar los límites de la proposición VII: la tensión es constante *con independencia del tamaño del cable*. Y es capaz de soportar una carga ($Q = A_0 \mathbf{f}$).

Pero, el volumen del cable crece exponencialmente con su tamaño ($A_0 \cdot \mathcal{A}(\exp(L/A) - 1)$), por lo que en cualquier caso es una estructura ‘intratable’, con un coste:

$$\frac{Q + \rho V(L)}{Q} = 1 + \frac{1}{\rho} \{ \exp(L/A) - 1 \}$$

Además, desafortunadamente, *no es la solución* del problema planteado: la solución tan sólo asegura la constancia de la tensión en la dirección de x , $\sigma_x = \mathbf{f}$. Pero ésta no es la tensión principal y como el borde está libre de tensiones, una dirección principal es normal a él ($\sigma_b = 0$) y la otra tangente. La tensión tangencial τ_{xy} no es nula en el borde y , en consecuencia, la tensión en la dirección tangente al borde, σ_a , es *mayor* que \mathbf{f} : la solución resulta insegura.

Más precisamente, $\sigma_a = \mathbf{f} / \cos^2(\alpha)$ siendo α el ángulo de la tangente al borde con el eje x . Conforme L crece, $\cos \alpha \rightarrow 0$, y la tensión máxima crece también exponencialmente.

1.1.2. Un cable ‘plano’

Para resolverlo, el problema debe plantearse tensorialmente. Para evitar complicaciones innecesarias me limitaré a un universo de dos dimensiones. El borde vendrá definido por su distancia a x como $r = r(x)$. Sea $\beta = \beta(x, y)$ la orientación de la dirección principal respecto al eje x . Por simetría, $\beta(x, 0) = 0$, y en el borde, libre de tensiones, $\tan(\beta(x, r(x))) = dr/dx$.

Para aprovechar toda la resistencia del material, el tensor de tensiones debe estar en el límite de resistencia en cualquier punto (x, y) . Por ejemplo, para un material ‘metálico’, la situación límite está definida por el criterio de Hubert y Von Mises:

$$\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - \sigma_a \sigma_b = \mathbf{f}^2 \quad (1.3)$$

Y en coordenadas (x, y) :

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 - \sigma_x \sigma_y = \mathbf{f}^2$$

De esta condición podemos eliminar σ_y :

$$\sigma_y = \frac{1}{2} \sigma_x - \frac{1}{2} \sqrt{4\mathbf{f}^2 - 3\sigma_x^2 - 12\tau_{xy}^2}$$

Para determinar las dos funciones de tensión restantes, tenemos las dos ecuaciones diferenciales de equilibrio:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{3\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + 12\tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}}{\sqrt{4\mathbf{f}^2 - 3\sigma_x(x,y)^2 - 12\tau_{xy}^2}} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \rho = 0$$

Para determinar r , contamos con las condiciones de borde:

$$\frac{2\tau_{xy}(x, r(x))}{\mathbf{f} + \sqrt{\mathbf{f}^2 - 4\tau_{xy}(x, r(x))^2}} = \frac{dr(x)}{dx}$$

Y en el extremo inferior, $(0, 0)$, si no hay carga ($Q = 0$):

$$\{r(0) = 0, \tau_{xy}(0, 0) = 0, \sigma_x(0, 0) = \mathbf{f}\}$$

Si, por el contrario hay una carga Q , podemos especular con:

$$\{r(0) = r_0, 2 \int_0^{r_0} \sigma_x(0, y) dy = Q\}$$

El problema, planteado en esta forma genérica, parece *difícil* de resolver de forma directa.

Especulación

Cabría pensar en soluciones parciales. Por ejemplo, para cada función r , las tensiones quizá podrían calcularse con una función de Airy; si esto fuera posible a un coste razonable, cabría pensar en obtener r como aquella forma óptima que maximiza la carga soportada para cada tamaño. Cabrían otras variaciones de la misma idea.

1.2. La ménsula con carga uniforme

Si la carga Q se reparte uniformemente sobre la viga, tendremos una carga $p = Q/L$ por unidad de longitud. Con un área \mathbf{A} , la viga pesará $\rho\mathbf{A}$ por unidad de longitud. El momento en el empotramiento valdrá:

$$M = \frac{(p + \rho\mathbf{A})L^2}{2}$$

Si el radio de giro de la sección es \mathbf{i} , y su canto es \mathbf{h} , la condición de resistencia habitual (semejante a la empleada por Galileo) es:

$$2 \frac{\mathbf{i}^2 \mathbf{A}}{\mathbf{h}} \geq \frac{(p + \rho\mathbf{A})L^2}{2}$$

Para ménsulas semejantes, las proporciones $\lambda_b = L/\mathbf{h}$ (la *esbeltez*) y $\phi = \mathbf{i}/\mathbf{h}$ (*factor de forma de la sección de la ménsula*) permanecen constantes con el tamaño:

$$2\mathbf{f}\phi^2 \mathbf{A} \geq \frac{(p + \rho\mathbf{A})\lambda_b}{2} \cdot L$$

Puesto que $\beta = \lambda_b/\phi^2$ (*factor de diseño* de la ménsula) es también constante:

$$2\mathbf{f}\mathbf{A} \geq \frac{(p + \rho\mathbf{A})\beta}{2} \cdot L$$

y en consecuencia el máximo alcance de una mensula ' β ':

$$L \leq \frac{4\mathbf{f}\mathbf{A}}{(p + \rho\mathbf{A})\beta}; \quad \mathcal{L} = L(p = 0) = \frac{4\mathbf{A}}{\beta}$$

Para que el modelo empleado sea realista, debe cumplirse que $\lambda_b \gg 2$. Por otra parte, ϕ tiene un rango muy limitado de valores, entre $\frac{1}{4}$ (sección circular) y $\frac{1}{2}$ (sección ideal). Por tanto, debemos considerar $\beta \gg 8$, siendo $\beta = 60$ un valor muy razonable (perfiles en I con esbeltez 10), para el que resulta un alcance de unas 7 centésimas del alcance del material. La primera conclusión, obvia, es que los problemas de flexión son *difíciles* en comparación con los problemas de tracción.

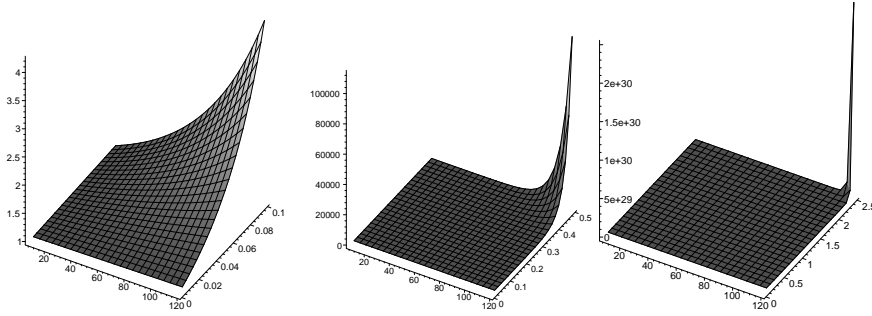


Figura 1.2: Volumen de una ménsula ‘exponencial’ de canto constante. Se representa la función $V/(b_0 h L)$ para distintos valores de β ($[8 \dots 120]$), y L/\mathcal{A} ($[0 \dots 0,1]$, $[0 \dots 0,5]$ y $[0 \dots 2,5]$). Exhibe el comportamiento típico de las funciones exponenciales: «parece que no crece... hasta que crece».

1.2.1. Ménsulas ‘exponenciales’

Si abandonamos la semejanza y, entonces, la definición de la sección (area, canto, radio de giro) puede variar a lo largo de la luz de la ménsula, podemos plantearnos la forma de una viga de mayor alcance que aquella otra de sección constante. Existe una falsa solución, como en el caso del cable, con un área que crece exponencialmente mientras el canto y el factor de diseño permanecen constantes, manteniendo constante la tensión en la dirección de la luz, pero con una tensión principal creciendo exponencialmente (véase la figura 1.2). La ménsula tendría una figura dada por:

$$A(L) = A_0 \cdot \exp\left(\frac{hL^2}{4\mathcal{A}i^2}\right) = A_0 \cdot \exp\left(\frac{L}{\mathcal{A}} \frac{\beta}{4}\right)$$

Utilizando una sección rectangular, es posible mejorar esta primera solución, teniendo en cuenta además que la tensión tangencial máxima debe tener límite. Las condiciones de resistencia son ahora:

$$\mathbf{f}_\tau \cdot \frac{2}{3} A(x) = \int_0^x (p + \rho A) dt$$

$$\mathbf{f} \cdot \frac{1}{6} A(x) h(x) = \int_0^x d\xi \int_0^\xi (p + \rho A) dt$$

Integrando estas ecuaciones se determina la figura de la ménsula ($A(x)$ y $h(x)$), resultando que su volumen varía según:

$$V(L) = \frac{pL}{\rho} \left\{ \frac{2}{3} \frac{\mathbf{f}_\tau}{\mathbf{f}} \frac{\mathcal{A}}{L} \left[\exp\left(\frac{3}{2} \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{f}_\tau} \frac{L}{\mathcal{A}}\right) - 1 \right] - 1 \right\}$$

Analizando el caso $p = 0$ vemos que el alcance de la solución es infinito: siempre puede soportar carga. Pero, una vez más, el coste crece exponencialmente con el tamaño y, debido al crecimiento exponencial del área, la tensión principal paralela al borde crece también exponencialmente: la solución es insegura.

1.2.2. Una ménsula ‘plana’

Para ver cómo sería la solución, podemos plantear de nuevo el problema de forma tensorial en un universo de dos dimensiones, más simple. Para evitar complicaciones, podemos suponer la carga Q aplicada a lo largo del eje x , y repartida a lo largo de toda la altura de la ménsula, véase la figura 1.3.

Como antes, el borde vendrá definido por $r(x)$. Si repartimos uniformemente la carga p a lo largo del canto, resulta una carga por unidad de volumen de valor $p/(2r(x))$. Otros repartos son posibles: en todo caso, tendremos una función $\pi(v)$ de carga por unidad de volumen, con:

$$v = \frac{y}{r(x)} \quad p = \int_{-1}^1 \pi(v) dv$$

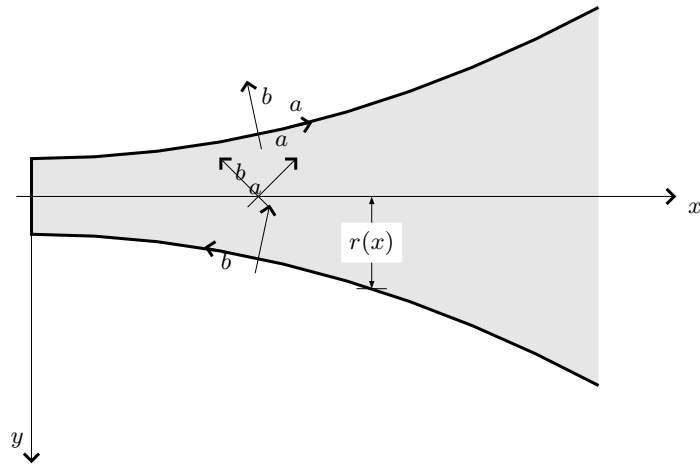


Figura 1.3: Ménsula plana

De nuevo, $\beta = \beta(x, y)$ es la orientación de la dirección principal de tracción respecto al eje x . En el borde inferior, comprimido, $\beta(x, y)$ es el ángulo de la normal a $y = r(x)$; mientras que en el borde superior, traccionado, coincide con el de la tangente:

$$\tan(\beta(x, r(x))) = -\frac{1}{dr(x)/dx} \quad \tan(\beta(x, -r(x))) = -\frac{dr(x)}{dx}$$

Debido a la simetría, cabría esperar que $\beta(x, 0) = -45^\circ$.

La condición límite para la resistencia es como antes, ecuación (1.3) y siguientes.

Las dos ecuaciones diferenciales de equilibrio son ahora:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + (\rho + \pi(y/r(x))) = 0$$

Referencias

Capítulo 2

La teoría ‘estándar’ sobre el diseño de estructuras

Por teoría ‘estándar’ entiendo lo que en la literatura anglosajona se denomina *filosofía del proyecto*: el conjunto de reglas que pueden ayudar a especificar una estructura lista para ser analizada. Porque, durante el proyecto de una estructura, el Análisis de estructuras permite comprobar un diseño contra los requisitos estructurales exigidos, sólo si se cumple con una *condición imprescindible*: que el diseño esté determinado previamente. Es este *círculo vicioso* de indefinición lo que constituye la sal del proyecto (y, por cierto, no sólo de estructuras).

Por teoría ‘estándar’ entiendo lo que sabemos hasta ahora, que no es poco pero que tampoco cubre todo el área de nuestros problemas prácticos. La teoría ha ido formándose con aportaciones muy variadas desde mediados del XIX y su inclusión aquí, en apretado resumen, es pertinente por cuanto contiene una respuesta al problema investigado.

Además de su resumen, incluyo entremezcladas las acotaciones que hay que hacer a la formulación estándar tras una consideración detallada del peso propio de la estructura, la mayor parte de ellas en forma de **observaciones**. Para evitar complicaciones, la mayor parte del material se ofrece en un universo de dos dimensiones.

2.1. Problemas y soluciones estructurales

2.1.1. El número de Maxwell

Desde el punto de vista del diseño de soluciones, un problema estructural está bien determinado especificando un conjunto de fuerzas exteriores en equilibrio (*acciones y reacciones*) con posiciones bien definidas en un espacio métrico. Desde luego, desde el punto de vista del análisis, existen definiciones mucho más generales que puede incluir fuerzas variables, definición indirecta de las reacciones a través de una sustentación determinada, etc. Sin embargo, en tales definiciones carecemos (de momento) de invariantes sencillos (y con expresión analítica) respecto a la solución analizada, lo que impide la comparación entre varias de ellas. Si por el contrario, las fuerzas exteriores están completamente definidas con independencia de la estructura contamos con un invariante que caracteriza el problema estructural: el *número de Maxwell* del problema. Para una estructura de barras comprimidas y traccionadas el número de Maxwell, \mathcal{M} , se define en función de la sollicitación de cada barra, N_i , y de su longitud, l_i :

$$\mathcal{M} = \sum_i N_i \cdot l_i \quad (2.1)$$

Si las fuerzas exteriores son un conjunto de fuerzas \vec{F}_j en posiciones definidas por vectores \vec{X}_j se demuestra a través del principio de los trabajos virtuales que:

$$\mathcal{M} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{X}_i \quad (2.2)$$

Esta segunda expresión permite visualizar el número de Maxwell como el camino que han de recorrer las cargas *en su dirección* hasta llegar al origen de coordenadas. (La elección

del origen es arbitraria debido a que las ecuaciones de equilibrio pueden elegirse también arbitrariamente.) Si las fuerzas exteriores se descomponen en acciones y reacciones, podemos verlas como un par de fuerzas iguales y opuestas —las resultantes de ambos conjuntos—, enfrentadas a cierta distancia: si las resultantes son unitarias, el número de Maxwell es la distancia que las separa (basta con tomar el origen en el punto de aplicación de una de ellas). El número de Maxwell *no es una medida* de la importancia del problema; tan sólo de la magnitud del traslado *en la dirección* de la resultante de acciones, traslado necesario para ‘conectar’ con la de las reacciones: \mathcal{M} mide el traslado *longitudinal*.

En los problemas en que el traslado longitudinal es nulo (sólo hay traslado *transversal* de cargas), $\mathcal{M}=0$, mientras que para problemas de tracción, simple o compuesta, $\mathcal{M} > 0$. Ya vimos que los problemas de flexión son ‘más difíciles’ que los de tracción o compresión y no puede extrañar por ello que hayan concitado atención preferente.

Si en la ecuación (2.2), tanto \vec{F} como \vec{X} son independientes de la estructura elegida, \mathcal{M} es un invariante que caracteriza el problema. Si la estructura es grande y el peso propio no es despreciable, el número de Maxwell pierde, en general, su carácter constante. Veremos que la teoría estándar avanza, bien considerando aquellos casos en que el peso propio no afecta al valor de \mathcal{M} , bien mediante aproximaciones basadas en el caso anterior (que en cualquier caso son límites para las estructuras cuando su tamaño tiende a cero).

Un caso de particular interés es el de los *puentes*: cargas perpendiculares a lo largo de una línea horizontal entre apoyos, con $\mathcal{M}=0$. Si la línea es un eje de simetría del diseño, el peso propio tan sólo requiere traslado transversal y \mathcal{M} sigue siendo un invariante.

2.1.2. Tamaño, esquema, proporción y material

Para cada problema estructural, una solución (un diseño) debe especificar el volumen material que permite poner en comunicación mecánica las distintas fuerzas exteriores entre sí (acciones y reacciones). Hay que especificar por tanto un material con propiedades mecánicas y la geometría de su volumen.

Como hemos visto, las propiedades mecánicas del material significativas son su resistencia \mathbf{f} , su peso específico ρ , y, a la hora de analizar la rigidez de la estructura, su módulo de Young, \mathbf{E} . Sin embargo, mientras nos limitemos a analizar la resistencia, ya hemos visto que las diferencias entre distintos materiales se sintetizan en su alcance, $\mathcal{A}=\mathbf{f}/\rho$. Un material de mayor alcance no permite escapar a un límite sobre el tamaño, simplemente aumenta el valor de tal límite.

La geometría admite, por supuesto, una definición estrictamente matemática: por ejemplo, en un universo de dos dimensiones a través de una función $G(x, y) \geq 0$ que especifica que puntos del espacio pertenecen al volumen de la estructura; por supuesto, debe ser $G(X_i) \geq 0$ para todas las posiciones de las fuerzas exteriores. Quizás un gran mérito de Galileo y de la teoría estándar es descomponer una definición semejante en partes *mucho más significativas* (aunque hasta cierto punto imprecisas): tamaño, grueso, proporción y esquema.

Tamaño

Puesto que el número de Maxwell es una suma de productos escalares, resulta que:

$$\mathcal{M} = \sum F_i X_i \cos(\alpha_i)$$

siendo α_i el ángulo entre \vec{F}_i y \vec{X}_i . Si normalizamos el conjunto de vectores de posición podemos representar problemas de distinto tamaño en un espacio *unitario* común: $\vec{X}_i = L \cdot \vec{x}_i$, siendo L el factor de normalización que, además, mide el tamaño del problema. Si además la intensidad de las fuerzas exteriores es una función del tamaño, $F_i = h(L) \cdot f_i$, entonces el número de Maxwell es ‘constante’ para problemas de distinto tamaño, salvo un factor de escala:

$$\mathcal{M} = Lh(L) \sum f_i x_i \cos \alpha_i = Lh(L) \mathcal{M}_u$$

siendo \mathcal{M}_u el número de Maxwell del tamaño unidad.

Cualquier solución estructural para el problema unidad puede servir para un problema L , sin más que ‘escalarla’ apropiadamente. Por tanto, para cada solución ‘unidad’ puede generarse de inmediato una solución de tamaño L . Sin embargo, debido a $h(L)$, no puede asegurarse que esa solución, sin más, cumpla los requisitos estructurales (incluso si la solución unidad los cumple).

En los problemas sin traslado longitudinal ($\mathcal{M}=0$), una elección espontánea de L es la *luz*, es decir la distancia entre apoyos sucesivos, respecto a la que las acciones son perpendiculares.

Grosor

En general, la forma de la estructura la podemos reducir a una directriz \mathcal{D} prescindiendo de su ‘grosor’ en cada punto. Por ejemplo, una viga puede reducirse a una curva directriz $D(x, y) = 0$ —y en forma paramétrica $x = D_x(s)$, $y = D_y(s)$ — con un área $A(s)$ bien definida en cada punto de la curva; en una estructura triangulada, tendríamos las coordenadas de los nudos y el área de cada barra; etc. En general el volumen estructural vendría definido por:

$$V = \int A(s) ds$$

y normalizando $A(s)$ como $A(s) = \mathcal{G}a(s)$, para estructuras de distinto grosor (iguales en todo lo demás):

$$V = \mathcal{G} \int a(s) ds$$

Para estructuras que, además, son de distinto tamaño:

$$V = \mathcal{G}L^3 \int \Omega(\xi) d\xi$$

en la que Ω y ξ son, respectivamente, el área y la longitud de la estructura unidad. Tanto $a(s)$ como $\Omega(\xi)$ pueden entenderse como *leyes de dimensionado* para una estructura de tamaño L o unidad, respectivamente.

Esquema y proporción

Desnudada de su grosor, la estructura se reduce a una directriz \mathcal{D} definida por $D(x, y)$. La directriz puede generarse a partir de una definición en un espacio paramétrico u, v y una transformación de coordenadas posterior, $[\mathbf{T}]$. Si $E(u, v) = 0$ —o en forma paramétrica, $u = E_u(u, v)$ y $v = E_v(u, v)$ — es una directriz en coordenadas u, v , entonces:

$$\begin{bmatrix} D_x(x, y) \\ D_y(x, y) \end{bmatrix} = [\mathbf{T}] \begin{bmatrix} E_u(u, v) \\ E_v(u, v) \end{bmatrix}$$

De este modo, con una misma definición E podemos generar una variedad de directrices D . Desde Galileo se ha prestado atención preferente a un tipo particular de transformaciones $[\mathbf{T}]$, las transformaciones afines. La teoría estándar, por su parte, centrada en los problemas $\mathcal{M} = 0$, restringe voluntariamente su atención a transformaciones del tipo:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Para este tipo de transformaciones, E recibe el nombre de *esquema* \mathcal{E} , y k , de *proporción* (en general, para transformaciones lineales pueden existir cuatro de ellas en dos dimensiones). En particular, si el tamaño es la ‘luz de puente’, L , el esquema puede circunscribirse a un cuadrado de lado L y entonces cada directriz estará circunscrita a un rectángulo de base L y altura kL . Denominando *canto* a kL y *esbeltez* λ a la proporción del rectángulo, $L/(kL)$, vemos que $\lambda = 1/k$. Reconocemos aquí la jerga habitual en el proyecto de vigas: luz L , canto L/λ y esbeltez λ .

2.2. Volumen resistente, dimensionado estricto y cantidad de estructura

El volumen de la estructura es:

$$V = \int A(s) ds$$

Observación 1 Con independencia de su carga, una estructura está en condiciones de soportar solicitaciones de magnitud $R(s) = \mathbf{f}A(s)$ en cada una de sus secciones. Podemos definir entonces el volumen resistente como:

$$U = \frac{V}{\mathbf{f}} = \int \text{abs}(R(s)) ds$$

La ventaja de una definición semejante es que podemos estudiar las propiedades geométricas de las distintas soluciones a un problema estructural con independencia del material empleado. El volumen resistente muestra la potencialidad estructural de una forma, aunque todavía no tiene conexión con un problema estructural concreto. Porque, de hecho, el conjunto de fuerzas $R(s)$ no es necesariamente un conjunto en equilibrio con las fuerzas exteriores de un problema dado (aunque existe al menos un problema para el que tal forma es una solución, es decir, existe un conjunto de fuerzas exteriores en equilibrio con el conjunto $R(s)$; se trata de un problema con poco interés, debido a que la solución es única).

Diremos que la estructura está dimensionada estrictamente, si en cualquier punto de su directriz $\text{fabs}(A(s)) = \text{abs}(N(s))$, siendo $N(s)$ la sollicitación de tracción o compresión en s para un problema estructural dado. En tal caso, el volumen resistente es ahora:

$$U_{\text{estricto}} = W = \int \text{abs}(N(s)) \, ds \quad (2.3)$$

El volumen resistente de una estructura dimensionada estrictamente, o *volumen estricto*, ha recibido variadas denominaciones: *trabajo estructural* (tiene unidades de energía), *volumen estructural* (para una directriz dada es proporcional al volumen de la estructura mínima) o *cantidad de estructura* W . Probablemente es ésta la denominación preferible: se puede visualizar imaginando la estructura como un volumen de tensiones, y para una directriz y un material dados es el mínimo volumen de tensiones requeridos para la solución del problema estructural. Para pasar de un material a otro basta con multiplicar el volumen por la razón entre sus tensiones seguras: la cantidad de estructura permanece constante y es independiente del material empleado (para una directriz dada).

Aunque he introducido la cantidad de estructura como un volumen resistente estricto, la ecuación (2.3) ofrece una definición independiente de W . En general $U \geq W$ y en el capítulo anterior hemos visto las dificultades de dar con un diseño estricto en casos simples cuando entraba en juego el peso propio. Sin embargo, para cualquier estructura que pueda ser analizada (determinación de $N(s)$), la cantidad de estructura puede ser calculada, del mismo modo que el número de Maxwell.

La cantidad de estructura puede descomponerse en cantidad de estructura traccionada y cantidad de estructura comprimida:

$$W = W^+ + W^-$$

y de la definición del número de Maxwell, ecuación (2.1):

$$\mathcal{M} = W^+ - W^-$$

De aquí surge inmediatamente quizás la primera regla de la teoría estándar:

Regla de diseño 1 *Para un problema dado, con número de Maxwell \mathcal{M} constante, y con diseños estrictos, cualquier variación de la directriz $\mathcal{D}(\mathcal{E}, \lambda)$ que disminuya de la cantidad de estructura traccionada tiene como consecuencia igual disminución en la cantidad de estructura comprimida (y viceversa).*

Observación 2 *Para problemas con peso propio, la regla sólo puede considerarse exacta si el número de Maxwell del peso propio es nulo, es decir, si las soluciones consideradas tienen como eje de simetría horizontal la línea entre apoyos.*

La regla es valiosa, en cualquier caso, si $L \rightarrow 0$. La regla tiene varias consecuencias:

Regla de diseño 2 *Para un problema dado, con número de Maxwell $\mathcal{M} > 0$ ($\mathcal{M} < 0$), y con diseños estrictos, las estructuras mínimas son de volumen $V \geq \mathcal{M}/\mathbf{f}$ ($V \geq -\mathcal{M}/\mathbf{f}$).*

Regla de diseño 3 *Para un problema dado, con número de Maxwell $\mathcal{M} = 0$, y con diseños estrictos, la cantidad de estructura traccionada es la misma que la cantidad de estructura comprimida. Si, además el conjunto de fuerzas exteriores no es idénticamente nulo, las estructuras mínimas son de volumen $V > 0$.*

MICHELL suministró a principios del XX un teorema de identificación de tales estructuras mínimas, y para el problema transversal puro, describió soluciones para casos de carga simples y tamaño nulo (peso propio despreciable). Estos problemas, con $\mathcal{M} = 0$, son los cruciales desde el punto de vista formal:

- En los problemas de puro traslado longitudinal, la directriz de la estructura está inmediatamente sugerida por la línea que materializa ese traslado, quedando el diseño de la estructura a expensas del diseño de su grueso. Además contamos al menos con una cota inferior del volumen resistente necesario (que puede ser significativa): el valor absoluto de \mathcal{M} . Y podemos medir la eficacia general de nuestro diseño por la cercanía a ese valor.
- Por contra en los problemas de puro traslado transversal, la línea de traslado no basta, *necesitamos canto*, y podemos darlo de muchas maneras distintas. Además, no contamos (en principio) con cotas significativas del volumen resistente necesario ($\mathcal{M}=0$) y, ante un diseño concreto, desconocemos si estamos lejos de la mejor solución posible.

El número de Maxwell tiene una ‘carencia’ que merece la pena subrayar: en los casos en que $\mathcal{M} \neq 0$ no contiene información de la proporción entre el traslado transversal y el longitudinal, pues sólo mide este último.

Observación 3 *Esta carencia puede subsanarse en parte calculando el brazo de palanca de la resultante de acciones respecto al punto de aplicación de una cualquiera de las reacciones: si este brazo resulta nulo el problema es puramente longitudinal; en otro caso incluye un problema transversal.*

2.3. Esbeltez óptima de un esquema

La cantidad de estructura también puede dividirse en cantidad de estructura ‘vertical’ y ‘horizontal’, aunque ahora la división no resulta tan intuitiva. Dado el carácter vectorial de N y de s y, puesto que se tratan de vectores alineados:

$$\text{abs}(N) ds = \text{abs}(N_x) dx + \text{abs}(N_y) dy$$

De ahí se sigue que:

$$W^{\parallel} = \int \text{abs}(N_y) dy; \quad W^{\perp} = \int \text{abs}(N_x) dx; \quad W = W^{\parallel} + W^{\perp}$$

Un cambio de la esbeltez λ es un cambio afín que implica cambios en la orientación y magnitud de las sollicitaciones y también de todas las fuerzas exteriores horizontales, pero que deja inalteradas las fuerzas exteriores verticales. Para problemas tipo ‘puente’, el número de Maxwell sigue siendo invariante y por tanto un cambio de esbeltez genera distintas directrices \mathcal{D} a partir del mismo esquema \mathcal{E} que resuelven el mismo problema¹. Se ha demostrado que, en estas condiciones, la directriz óptima para el esquema \mathcal{E} se obtiene cuando las cantidades de estructura vertical y horizontal son iguales, lo que ha permitido formular una regla para calcular la esbeltez óptima λ_{opt} del esquema \mathcal{E} a partir de una directriz no óptima para ese mismo esquema:

Regla de diseño 4 *Para cualquier problema cuyo número de Maxwell sea invariante respecto a la esbeltez λ de un esquema \mathcal{E} de tamaño L , y dadas las cantidades de estructura vertical W^{\parallel} y horizontal W^{\perp} de ese esquema para esa esbeltez, la esbeltez óptima para ese esquema se obtiene como:*

$$\lambda_{\text{opt}} = \lambda \frac{W^{\parallel}}{\sqrt{W^{\parallel} W^{\perp}}} = \lambda \frac{\sqrt{W^{\parallel} W^{\perp}}}{W^{\perp}}$$

y la cantidad de estructura mínima para ese esquema será:

$$W_{\text{opt}} = 2\sqrt{W^{\parallel} W^{\perp}}$$

También se ha demostrado que para problemas tipo “puente”, si el esquema \mathcal{E} de partida en la regla anterior no es simétrico respecto a la línea de apoyos, se obtiene un esquema mejor sumando al esquema original su simétrico respecto a la línea de apoyos y suprimiendo toda la estructura que queda sobre esa línea. La esbeltez óptima del nuevo esquema se calcula como antes.

¹Lo que sigue en cualquier caso sirve para cualquier tipo de problema, pero durante la transformación el tipo de problema resuelto puede variar, en general.

Observación 4 En la transformación afín de la regla anterior, aunque la carga útil permanece constante, el peso propio de la barra varía. En consecuencia la solución ‘óptima’ obtenida, o bien es de pequeño tamaño, o bien no está en equilibrio. Aunque la situación es compleja —como veremos—, la variación de peso propio puede estimarse en cada barra, con:

$$W^{\parallel} \cdot \left(1 - \frac{\lambda'}{\lambda} \tan^2(\alpha)\right)$$

siendo λ' la nueva esbeltez y α el ángulo de la barra con la horizontal. La variación del peso propio es distinta para cada barra: nula para las horizontales y de cualquier signo para el resto. Cuando la esbeltez disminuye y la barra es vertical, la variación tiende a ser inversamente proporcional a la de la esbeltez.

2.4. Cantidad de estructura y peso propio

Para cada directriz \mathcal{D} (definida por un esquema \mathcal{E} y una esbeltez λ) y una ley de dimensionado Ω , la cantidad de estructura puede expresarse de forma bastante general como:

$$W \geq \gamma Q L \lambda \quad (2.4)$$

en la que Q es la totalidad de la carga útil sobre la estructura, y γ es una función del esquema \mathcal{E} , de la esbeltez λ , del problema y de la ley Ω . La forma general de la función para tamaños pequeños es:

$$\gamma \approx k_1 \left(1 + \frac{k_2}{\lambda} + \frac{\lambda_{\text{opt}}^2}{\lambda^2}\right) \quad (2.5)$$

en la que k_1 y k_2 son constante dependientes del problema, del esquema y de la ley consideradas. γ tiende rápidamente a k_1 conforme crece λ .

Observación 5 Las ecuaciones (2.4) y (2.5) deben considerarse con precaución: han sido deducidas para $L \rightarrow 0$, es decir, sin peso propio. Su campo de validez no puede, impunemente, abarcar el caso $\lambda \rightarrow \infty$, puesto que en muchos casos lo último implica también $L \rightarrow \infty$, y entonces el peso propio puede volverse determinante. La consideración del peso propio implica generalmente un cambio en la ley de dimensionado y por tanto en γ . Puesto que, hasta la fecha, la teoría estándar se ha dedicado sobre todo a poner orden en el proyecto de estructuras pequeñas, no hay disponible ninguna aseveración del comportamiento de γ con la variación de Ω .

Cuando el dimensionado es estricto (sin considerar peso propio), se llega al límite mínimo de W . En tal caso el peso propio de la estructura debe ser:

$$P \geq \frac{W}{\mathcal{A}} \quad (2.6)$$

La igualdad sólo puede postularse si $L \rightarrow 0$ o en aquellos casos en que sea posible deducir W teniendo en cuenta el peso propio. En el resto, la desigualdad es estricta pues la estructura necesita volumen resistente para soportarse a sí misma.

Supongamos ahora el problema en que la carga útil es el peso propio de la estructura y que no se admite más carga, pues la estructura está en el límite de su resistencia. Supongamos además que fuéramos capaces de determinar la ley de dimensionado que, en tal caso, conduce a un dimensionado estricto. Entonces, de la ecuación (2.4) y de la (2.6):

$$W \approx \gamma P \mathcal{L} \lambda \approx \gamma \frac{W}{\mathcal{A}} \mathcal{L} \lambda$$

de donde se deduce, eliminando W :

$$\mathcal{L} \approx \frac{\mathcal{A}}{\gamma \lambda} \quad (2.7)$$

\mathcal{L} es un tamaño insuperable para el esquema y la ley considerados. Sería un límite independiente de P .

Observación 6 La ecuación es engañosa respecto a la dependencia de \mathcal{L} con W : en efecto, para calcular W necesitamos una ley Ω , o bien elegimos una ley Ω conforme con un caso conocido para W (generalmente, sin peso propio y para un esquema de carga útil estándar cuyo parecido con el peso de la estructura sea obvio). Además, para que el dimensionado sea estricto tendremos que variar Ω con λ . En consecuencia, la ecuación (2.7) debe tomarse como lo que es: una aproximación razonable al alcance estructural de un esquema \mathcal{E} , ante la falta de algo mejor.

Aceptando el valor del alcance estructural \mathcal{L} dado por la ecuación (2.7), un directriz \mathcal{D} de menor tamaño e idéntico dimensionado podría soportar carga adicional *homóloga* con P , hasta alcanzar la misma cantidad de estructura:

$$\gamma P \mathcal{L} \lambda = \gamma (P + Q) L \lambda$$

Por tanto:

$$\frac{P}{P + Q} = \frac{L}{\mathcal{L}}; \quad r = \frac{Q}{P + Q} = 1 - \frac{L}{\mathcal{L}} \quad (2.8)$$

La última expresión da el rendimiento, el cual disminuye monótonamente con el tamaño (con lo que el coste crece monótonamente). La razón L/\mathcal{L} ha sido denominada *talla* de la estructura. La importancia *práctica* del alcance (y no sólo teórica) deriva de su utilidad: si se conoce el alcance estructural \mathcal{L} es inmediato estimar el peso propio de la estructura en función de la carga útil Q y su tamaño L , tras elegir una directriz $\mathcal{D}(\mathcal{E}, \lambda)$:

$$P = Q \frac{L}{\mathcal{L} - L} \quad (2.9)$$

Observación 7 *Desafortunadamente, las expresiones anteriores sólo son exactas para la ley Ω que conduce a un dimensionado estricto cuando sólo actúa el peso propio, y para una carga útil Q , distribuida de forma homóloga al peso propio P . En caricatura: las expresiones anteriores suministran el rendimiento de una estructura cuando soporta a varias de sus gemelas (ella misma incluida).*

2.5. Propiedades invariantes de una directriz

Hemos visto que, ignorando la ‘cuestión’ del peso propio, el alcance estructural es un invariante de cada directriz \mathcal{D} ; aunque en realidad se trata más bien de un *pseudoinvariante*. Pero de enorme utilidad —véase el próximo capítulo.

El principio de los trabajos virtuales permite demostrar que una directriz dada, dimensionada con un grueso tal que el valor absoluto de la deformación, ε , sea constante en todo su volumen, experimenta movimientos proporcionales al tamaño. Si, como suele ser habitual, el requisito de rigidez limita los movimientos relativos a la luz, resulta que una directriz así dimensionada será suficientemente rígida con independencia del tamaño. Es decir, la *mínima rigidez* de una estructura puede calcularse a la vista de un dibujo de ella sin escala, sin más que fijar el valor de su deformación constante en la deformación segura del material (\mathbf{f}/\mathbf{E}), y un *patrón* de los signos de sus tensiones (es decir, especificando que partes estarán traccionadas y cuales comprimidas).

El teorema de MICHELL (desafortunadamente sólo válido para $L \rightarrow 0$) permite dar un paso más:

Regla de diseño 5 *Para cada problema, las directrices óptimas son, además, las más rígidas de entre todas las estrictas.*

Observación 8 *Se da aquí un curiosa situación estética: un diseño estricto que no es rígido puede ‘mejorarse’ con dos métodos estéticamente contrapuestos: o bien aumentamos el grueso de sus barras para disminuir su deformación (aumentando su peso), o bien alteramos su esquema y su esbeltez (su directriz) a fin de reducir su grosor (disminuyendo su peso).*

El primer camino tiene un límite asintótico, aquel en que la deformación requerida para cumplir el requisito de rigidez es justamente la correspondiente a la tensión necesaria para soportar el peso propio: entonces, un aumento de grueso no trae aparejado ninguna disminución de la deformación. En consecuencia, cabe enunciar el siguiente teorema, bastante obvio por lo demás:

Teorema 1 *Para cada esquema estructural y cada ley de dimensionado existe una deformación mínima que no puede disminuirse sin alterar alguno de los dos o ambos, aquella que se produce bajo el propio peso de la estructura cuando la esbeltez del esquema es óptima.*

El segundo camino tiene su límite en la rigidez de la estructura de peso mínimo para el problema considerado (un límite, en general desconocido). Sin embargo, dado que salvo para conjuntos de fuerzas externas idénticamente nulos, la cantidad de estructura es estrictamente mayor que cero, podemos asegurar que ese límite existe y no es nulo:

Teorema 2 Para todo problema estructural, cualquiera que sea el material, la directriz y el tamaño de la estructura, existe un límite insuperable para la rigidez de la estructura.

Este último teorema, también obvio (la resistencia requiere deformación), muestra que si no diéramos con un tamaño insuperable para cumplir con el requisito de resistencia, podríamos ‘crear’ un límite insuperable con un requisito de rigidez especialmente exigente. Sin embargo, en general, *no se trataría de un tamaño insuperable* pues, tal y como enfatiza el teorema, tal límite afectaría a todos los tamaños sin distinción.

2.6. Diseño con sección constante

Con todas sus ‘lagunas’, la teoría estándar es una herramienta muy útil para el proyecto de estructuras, pues permite elegir rápidamente entre alternativas, conociendo de antemano las consecuencias de cada una en términos de rendimiento y coste. Como muestra se ofrece a continuación la manera de destilar reglas de diseño para casos canónicos, que incluyen cables, soportes y vigas apoyadas.

En todos los casos se trata de las soluciones más simples para los problemas planteados: una directriz \mathcal{D} recta con una ley de dimensionado Ω constante a lo largo de ella.

2.6.1. Eficacia estructural o rendimiento e .

Para el caso particular de carga útil homogénea con el peso propio de la estructura, la definición del rendimiento puede establecerse para las cargas por unidad de longitud.

$$e = \frac{Q}{R} = \frac{R-P}{R} = 1 - \frac{P}{R} < 1 \quad P = (1-e)R \quad Q = eR = \frac{e}{1-e}P$$

siendo e : eficacia o rendimiento de una estructura, fracción de su capacidad de carga que puede dedicarse a soportar carga adicional a su propio peso. Multiplicada por 100 puede leerse como un porcentaje.

R: carga total que es capaz de soportar la estructura, $P+Q$

P: peso propio de la estructura, tara

Q: carga adicional al peso propio, carga útil

2.6.2. Tracción. Alcance del material

Cable traccionado de sección constante sometido a un peso Q en un extremo y a su propio peso. Requisito de resistencia:

$$N_{\max} = R = Q + \rho AL \leq Af$$

$$L \leq \frac{Af - Q}{A\rho} = \mathcal{A} - \frac{Q}{A\rho}$$

siendo **A**: área (constante) de la sección

L : longitud del cable

f: tensión segura a tracción del material

ρ : peso específico del material

Tamaño insuperable \mathcal{L} : máxima longitud que es segura cuando sólo actúa el peso propio de la estructura.

$$\mathcal{L} = \text{máx } L = \frac{f}{\rho} = \mathcal{A}$$

Cualquier cable vertical traccionado, articulado en *un solo* extremo no puede ser más largo que \mathcal{A} ; en general, ninguna pieza vertical de una estructura, traccionada en esa dirección y conectada *sólo en sus dos extremos*, puede ser mayor que $2\mathcal{A}$.

¿Cuál es la eficacia, es decir, la capacidad de soportar carga adicional de un cable de longitud L ?

$$e = \frac{Q}{Q+P} = \frac{Af - \rho AL}{Af} = \frac{\mathcal{A} - L}{\mathcal{A}} = 1 - \frac{L}{\mathcal{A}}$$

La longitud del cable puede describirse como una función de la eficacia:

$$L = \ell(e) = (1 - e)\mathcal{A}$$

Dada la longitud y el área de un cable, así como el material, la carga adicional que puede soportar es simplemente:

$$\mathbf{Q} = (\mathcal{A} - L)\rho\mathbf{A}$$

Un valor razonable de la eficacia es de 0,9 (90%). Cuanto menor es la eficacia, mayor es el despilfarro y la contaminación producida para resolver el problema estructural de soportar la carga \mathbf{Q} .

material	\mathbf{f} MN/m ²	ρ kN/m ³	\mathcal{A} m	$\ell(90\%)$ m
acero de alta resistencia	500	78,5	6.370	637
acero	180	78,5	2.290	229
madera	10	8	1.250	125

2.6.3. Compresión

La solución de la ecuación diferencial asociada a una barra comprimida por su propio peso no es trivial. A favor de seguridad podemos considerar que el peso propio actúa en el extremo donde se aplica la carga adicional \mathbf{Q} . Entonces, el requisito de resistencia puede expresarse como:

$$\mathbf{Q} + \rho\mathbf{A}L \leq \frac{\mathbf{A}\mathbf{f}}{\omega(L_p)}$$

siendo L_p : longitud de pandeo, en general distinta de L . Puede expresarse como una fracción de la longitud: $L_p = \beta L$.

ω : coeficiente de pandeo de la sección \mathbf{A} , para una longitud de pandeo L_p .

De la expresión anterior no es posible, en general, despejar L , puesto que ω depende de ella, $\omega = \omega(L)$. Sin embargo, a condición de variar la **forma** de la sección conforme varíe L , a fin de mantener constante ω , puede procederse igual que en tracción y obtener:

$$\mathcal{L}(\omega) = \frac{\mathbf{f}}{\rho\omega} = \frac{\mathcal{A}}{\omega}$$

y análogamente:

$$e(\omega) = 1 - \omega \frac{L}{\mathcal{A}} \quad \ell(e(\omega)) = (1 - e) \frac{\mathcal{A}}{\omega} \quad \mathbf{Q}(\omega) = \left(\frac{\mathcal{A}}{\omega} - L \right) \rho\mathbf{A}$$

Debe quedar claro que aunque el área es constante también es constante la esbeltez mecánica: es decir, se aumenta el radio de giro de la sección (cambiando su forma) según aumenta la longitud.

Valores de $\ell(90\%, \omega)$ (m). Compresión centrada.

material	\mathbf{f} MN/m ²	ρ kN/m ³	\mathcal{A} m	$\ell(90\%, \omega)$		
				$\omega = 1,1$	1,5	2
acero corriente	180	78,5	2.290	208	153	115
madera	10	8	1.250	114	83,3	62,5

2.6.4. Flexión simple: vigas apoyadas de alma llena.

El modelo de comportamiento de vigas de alma llena basado en la hipótesis de Navier tiene limitaciones: en particular la relación entre longitud y canto de la viga, su esbeltez, debe ser mayor que 2 para que sea aplicable.

Los requisitos que cualquier diseño tiene que cumplir son, en este caso, tres: resistencia a momento (σ_x), a cortante (τ), y requisito de rigidez. Hay un requisito adicional: el apoyo de la viga debe ser posible (σ_y).

La sección de la viga, **siempre que sea simétrica respecto al eje de flexión**, puede describirse con unos pocos parámetros fundamentales: su área \mathbf{A} , su canto \mathbf{h} , la proporción de su brazo de palanca, \mathbf{z} , a su canto, \mathbf{h} , $\vartheta = \mathbf{z}/\mathbf{h}$; su módulo estático, \mathbf{S} , o su proporción al área

por el canto, $\mathbf{S} = \alpha \mathbf{A} \mathbf{h}$; y su área eficaz a rasante, \mathbf{A}_R , o su proporción al área, $\mathbf{A}_R = \beta \mathbf{A}$. Con estos datos (\mathbf{A} , \mathbf{h} , ϑ , α , β) es posible calcular cualquier otra propiedad de interés:

$$\text{Inercia } \mathbf{I} = \mathbf{S} z = \alpha \vartheta \mathbf{A} \mathbf{h}^2 \quad \text{Módulo resistente } \mathbf{W} = \frac{2\mathbf{I}}{\mathbf{h}} = \frac{2\mathbf{S}z}{\mathbf{h}} = 2\alpha \vartheta \mathbf{A} \mathbf{h}$$

Los tres requisitos principales son, para carga uniforme, de la forma:

$$V = \frac{\mathbf{r}L}{2} \leq \mathbf{A}_R \mathbf{f}_\tau \quad M = \frac{\mathbf{r}L^2}{8} \leq \mathbf{W} \mathbf{f} \quad \phi = \frac{2\delta}{L} = 2 \frac{5\mathbf{r}L^3}{384\mathbf{E}\mathbf{I}} \leq \phi_{\text{tol}}$$

siendo \mathbf{r} : carga total por unidad de longitud, \mathbf{R}/L

ϕ : distorsión de referencia de la viga

ϕ_{tol} : distorsión tolerable

A la vista de estas fórmulas, *si la longitud L está determinada*, cabe esperar que la resistencia a cortante, V , sea determinante en luces cortas, mientras que el requisito de rigidez, δ , sea determinante en luces largas, quedando la resistencia a momento, M , como condición crítica en luces medias.

En términos del área \mathbf{A} , el canto \mathbf{h} y la esbeltez, $\lambda = L/\mathbf{h}$, podemos separar los parámetros de la forma de aquellos otros que tienen que ver con los materiales empleados:

$$\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{A}} \frac{1}{2\beta} \leq \mathbf{f}_\tau \quad \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{A}} \frac{\lambda}{16\alpha\vartheta} \leq \mathbf{f} \quad \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{A}} \frac{10\lambda^2}{384\alpha\vartheta} \leq \phi_{\text{tol}} \mathbf{E}$$

Si la longitud L es variable, la resistencia a esfuerzo cortante supone un límite absoluto *para cualquier esbeltez*, mientras que el requisito de rigidez será determinante sólo para una esbeltez grande.

Relación entre momento y cortante. Para simultáneamente resistir momento y cortante, en una viga de sección constante tiene que ocurrir:

$$V = \frac{\mathbf{r}L}{2} \leq \mathbf{A}_R \mathbf{f}_\tau = \beta \mathbf{A} \mathbf{f}_\tau \quad M = \frac{\mathbf{r}L^2}{8} = V \frac{L}{4} \leq \mathbf{W} \mathbf{f} = 2\alpha \vartheta \mathbf{A} \mathbf{h}$$

Si se cumple estrictamente con la resistencia a cortante, entonces también cumplimos con la resistencia a momento **siempre que la esbeltez geométrica de la viga**, λ , cumpla con:

$$\lambda = \frac{L}{\mathbf{h}} \leq 8 \frac{\alpha z}{\beta \mathbf{h}} \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{f}_\tau} = 8 \frac{\alpha}{\beta} \vartheta \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{f}_\tau} = 8 \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{A}_R \mathbf{h}^2} \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{f}_\tau} = \lambda_v$$

A este valor *límite* para la esbeltez le denominaremos *esbeltez límite por cortante*, λ_v . Si la viga tiene mayor esbeltez que λ_v nos podemos despreocupar de la resistencia a cortante: bastará que resista el momento y su resistencia a cortante será sobrada. Para cada material y tipo de sección es fácil calcular su valor:

Esbeltez límite frente al cortante, viga apoyada de alma llena

sección	α	β	ϑ	\mathbf{f} N/mm ²	\mathbf{f}_τ N/mm ²	λ_v
IPE acero	$\frac{5}{26}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{9}$	180	100	7,4
HEB acero	$\frac{6}{29}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{9}$	180	100	13,2
$\mathbf{h} \times \mathbf{b}$ madera	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	10	1	10
circular de acero	$\frac{1}{3\pi}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3\pi}{16}$	180	100	1,2
circular de madera	$\frac{1}{3\pi}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3\pi}{16}$	10	1	6,7

Relación entre momento y flecha. Como es bien sabido, cualquier pieza que soporte estrictamente un momento, tampoco tendrá problemas de rigidez **mientras que no supere** una cierta esbeltez, denominada *esbeltez límite frente a flecha*, λ_δ . Este valor depende de cual sea la distorsión tolerable, ϕ_{tol} , en la viga y del material de ésta:

$$\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{A}} = \mathbf{f} \frac{16\alpha\vartheta}{\lambda} \quad \mathbf{f} \frac{16\alpha\vartheta}{\lambda} \frac{10\lambda^2}{384\alpha\vartheta} = \phi_{\text{tol}} \mathbf{E} \quad \lambda_\delta = \frac{24}{10} \frac{\phi_{\text{tol}} \mathbf{E}}{\mathbf{f}}$$

Esbeltez límite frente a flecha, vigas apoyadas

material	$\varepsilon_f = \mathbf{f}/\mathbf{E}$	cubiertas	pisos
acero	0,9 mm/m	21,3	10,7
madera	0,8 mm/m	24	12
$\phi_{tol} =$		8 mm/m	4 mm/m

Relación entre cortante y flecha. Para algunos perfiles anómalos, como los HEB, puede ocurrir que nunca sea necesaria la comprobación a momento. Tal caso se da cuando la esbeltez límite a flecha, λ_δ , es menor que la esbeltez límite a cortante, λ_v . Nos interesa entonces la esbeltez para la cual las comprobaciones a cortante y a flecha son ambas críticas:

$$\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{A}} = 2\beta\mathbf{f}_\tau \quad 2\beta\mathbf{f}_\tau \frac{10\lambda^2}{384\alpha\vartheta} = \phi_{tol}\mathbf{E} \quad \lambda_{v\delta} = \sqrt{\frac{96\alpha\vartheta}{5\beta} \frac{\phi_{tol}\mathbf{E}}{\mathbf{f}_\tau}} = \sqrt{\frac{96}{5} \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{A}_R\mathbf{h}^2} \frac{\phi_{tol}\mathbf{E}}{\mathbf{f}_\tau}}$$

Esbelteces límite para perfiles HEB

tamaño	λ_v	$\phi_{tol} = 4 \text{ mm/m}$		$\phi_{tol} = 2 \text{ mm/m}$	
		$\lambda_{v\delta}$	λ_δ	$\lambda_{v\delta}$	λ_δ
pequeño	12	11,3	10,7	8,01	5,33
mediano	13	11,8	10,7	8,32	5,33
grande	11	10,9	10,7	7,67	5,33

Tamaño insuperable de la viga de alma llena, con resistencia estricta a momento. Una viga de alma llena de área \mathbf{A} , tiene un peso por unidad de longitud $\mathbf{p} = \rho\mathbf{A}$. Denominando \mathbf{q} a la carga adicional a su propio peso, si resiste estrictamente el momento máximo a que está sometida verificará:

$$\frac{\mathbf{r}L^2}{8} = \frac{(\mathbf{p} + \mathbf{q})L^2}{8} = \mathbf{Wf} = 2\alpha\vartheta\mathbf{A}\mathbf{h}\mathbf{f}$$

La longitud máxima que puede alcanzar resistiendo con seguridad el momento es entonces:

$$L = \sqrt{\frac{16\alpha\vartheta\mathbf{A}\mathbf{h}\mathbf{f}}{\rho\mathbf{A} + \mathbf{q}}}$$

y según las definiciones anteriores el tamaño insuperable por resistencia a momento es:

$$\mathcal{L} = L(\mathbf{q} = 0) = 4\sqrt{\alpha\vartheta\mathbf{A}\mathbf{h}}$$

En general, para la longitud \mathcal{L} su flecha ya sería intolerable, pues habiendo mantenido constante su canto, su esbeltez aumenta proporcionalmente con la longitud, superando el límite λ_δ . Para la longitud \mathcal{L} la viga tiene eficacia nula, pues sólo es capaz de soportar su propio peso. Para longitudes menores que \mathcal{L} , como el momento resistido con seguridad es el mismo, se tiene que:

$$\frac{\mathbf{p}\mathcal{L}^2}{8} = \frac{\mathbf{r}L^2}{8} \quad \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{r}} = \left(\frac{L}{\mathcal{L}}\right)^2$$

La eficacia de la viga es, como siempre:

$$e = \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{P} + \mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{q}L}{\mathbf{p}L + \mathbf{q}L} = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{p}}{\mathbf{r}} = 1 - \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{r}} = 1 - \left(\frac{L}{\mathcal{L}}\right)^2$$

De aquí podemos determinar la máxima longitud para una eficacia dada:

$$\ell(e) = \sqrt{1 - e} \times \mathcal{L}$$

Sustituyendo \mathcal{L} por su expresión en función de las características de la sección:

$$\ell(e) = \sqrt{1 - e} \times 4\sqrt{\alpha\vartheta\mathbf{A}\mathbf{h}} = \sqrt{1 - e} \times 4\sqrt{\alpha\vartheta\mathbf{A} \frac{\ell(e)}{\lambda(e)}}$$

Y de la última expresión podemos obtener la longitud para una eficacia y esbeltez dadas de antemano:

$$\ell(e, \lambda) = 16(1 - e)\alpha\vartheta \frac{\mathbf{A}}{\lambda} = 16(1 - e) \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{A}\mathbf{h}^2} \frac{\mathbf{A}}{\lambda}$$

Tamaño insuperable con resistencia estricta a esfuerzo cortante. Si $2 \leq \lambda \leq \min\{\lambda_v, \lambda_{v\delta}\}$:

$$\frac{rL}{2} = \frac{(\mathbf{p} + \mathbf{q})L}{2} = \mathbf{A}_R \mathbf{f}_\tau$$

La longitud máxima resistiendo con seguridad el cortante es:

$$L \leq \frac{2\beta \mathbf{A} \mathbf{f}_\tau}{\rho \mathbf{A} + \mathbf{q}}$$

y el tamaño insuperable es:

$$\mathcal{L} = L(\mathbf{q} = 0) = 2\beta \frac{\mathbf{f}_\tau}{\mathbf{f}} \mathcal{A}$$

Para tamaños $L \leq \mathcal{L}$:

$$\frac{\mathbf{p}\mathcal{L}}{2} = \frac{rL}{2} \quad \frac{\mathbf{p}}{r} = \frac{L}{\mathcal{L}} = 1 - e$$

con una eficacia:

$$e = 1 - \frac{L}{\mathcal{L}}$$

La máxima longitud para una eficacia dada es:

$$\ell(e, \lambda) = (1 - e)\mathcal{L} = (1 - e) \cdot 2\beta \frac{\mathbf{f}_\tau}{\mathbf{f}} \mathcal{A} \text{ si } \lambda \leq \min\{\lambda_v, \lambda_{v\delta}\}$$

y resulta constante con la esbeltez (pero dentro del rango de validez).

Tamaño insuperable con rigidez estricta. Si la esbeltez es mayor que λ_δ , entonces el diseño es por flecha:

$$\frac{10(\mathbf{p} + \mathbf{q})L^3}{384\mathbf{E}\mathbf{I}} = \phi_{\text{tol}} \quad L = \left(\frac{384}{10} \frac{\alpha\vartheta \mathbf{A} \mathbf{h}^2 \mathbf{f}}{\rho \mathbf{A} + \mathbf{q}} \frac{\phi_{\text{tol}}}{\varepsilon_f} \right)^{1/3}$$

y el tamaño insuperable es:

$$\mathcal{L} = \left(\frac{384}{10} \alpha\vartheta \mathcal{A} \frac{\phi_{\text{tol}}}{\varepsilon_f} \mathbf{h}^2 \right)^{1/3}$$

Para $L \leq \mathcal{L}$:

$$\mathbf{p}\mathcal{L}^3 = rL^3; \quad (1 - e) = \frac{\mathbf{p}}{r} = \left(\frac{L}{\mathcal{L}} \right)^3$$

y la longitud máxima en función de la eficacia y la esbeltez:

$$\ell(e, \lambda) = (1 - e) \frac{384}{10} \alpha\vartheta \mathcal{A} \frac{\phi_{\text{tol}}}{\varepsilon_f} \frac{1}{\lambda^2} \text{ si } \lambda \geq \lambda_\delta$$

Panorama del alcance de la viga de alma llena. Podemos ahora resumir los resultados anteriores, expresando de una manera homogénea la máxima longitud para una eficacia y una esbeltez dadas de antemano:

$$\ell(e, \lambda) = (1 - e) \cdot \mathcal{L}(\lambda)$$

una conclusión que vaticinaba la teoría estándar (véase la ecuación (2.8)). $\mathcal{L}(\lambda)$ es el tamaño insuperable (o alcance estructural) para una esbeltez dada:

$$\mathcal{L}(\lambda) = \mathcal{A} \times \begin{cases} 2\beta \frac{\mathbf{f}_\tau}{\mathbf{f}} & \text{si } \lambda \leq \min\{\lambda_v, \lambda_{v\delta}\} \\ \frac{16\alpha\vartheta}{\lambda} & \text{si } \lambda_v \leq \lambda \leq \lambda_\delta \\ \frac{384}{10} \frac{\alpha\vartheta}{\lambda^2} \frac{\phi_{\text{tol}} \mathbf{E}}{\mathbf{f}} & \text{si } \lambda \geq \min\{\lambda_\delta, \lambda_{v\delta}\} \end{cases}$$

Para esbelteces menores que λ_v hay un límite insuperable, límite que decrece de forma monótona para esbelteces mayores.

Máximo alcance de piezas poco esbeltas

sección	IPE	HEB	$\mathbf{h} \times \mathbf{b}$ (madera)
$\mathcal{L}(\lambda)/\mathcal{A}$	0,37	0,22	0,07

Cuadro 2.1: RENDIMIENTO DE PERFILES IPE APOYADOS EN ‘PISOS’

Para cada valor de L y de λ , se da el valor de $e(L, \lambda)$ y de \mathbf{q}/\mathbf{p} . Figuran en **negrilla** las combinaciones con $e > 90\%$; y han sido eliminadas aquellas otras con $e < 10\%$. Figuran subrayadas las combinaciones alcanzables con los perfiles disponibles en el comercio.

$$\phi_{\text{tol}} = 4 \text{ mm/m}$$

λ	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$\mathcal{L}(\lambda)$ (m)	848	626	297	167	107	74				
L (m) = 6	0,99 140	0,99 103	0,98 48,5	0,96 26,8	0,94 16,8	0,92 11,4	<u>0,89</u> <u>8,09</u>	<u>0,86</u> <u>5,96</u>	<u>0,82</u> <u>4,5</u>	<u>0,78</u> <u>3,45</u>
12	0,99 69,7	0,98 51,2	0,96 23,7	0,93 12,9	<u>0,89</u> <u>7,91</u>	<u>0,84</u> <u>5,19</u>	<u>0,78</u> <u>3,54</u>	<u>0,71</u> <u>2,48</u>	<u>0,64</u> <u>1,75</u>	<u>0,55</u> <u>1,23</u>
18	0,98 46,1	0,97 33,8	0,94 15,5	0,89 8,28	0,83 4,94	0,76 3,12	<u>0,67</u> <u>2,03</u>	<u>0,57</u> <u>1,32</u>	<u>0,45</u> <u>0,833</u>	<u>0,33</u> <u>0,485</u>
24	0,97 34,3	0,96 25,1	0,92 11,4	0,86 5,96	0,78 3,45	0,68 2,09	<u>0,56</u> <u>1,27</u>	<u>0,43</u> <u>0,74</u>	<u>0,27</u> <u>0,375</u>	<u>0,1</u> <u>0,113</u>
30	0,96 27,3	0,95 19,9	0,9 8,9	0,82 4,57	0,72 2,56	0,6 1,47	0,45 0,818	0,28 0,392	\wedge $<$	\wedge $<$
36	0,96 22,6	0,94 16,4	0,88 7,25	0,78 3,64	0,66 1,97	0,52 1,06	0,34 0,515	0,14 0,16	\wedge $<$	\wedge $<$
42	0,95 19,2	0,93 13,9	0,86 6,07	0,75 2,98	0,61 1,55	0,43 0,767	0,23 0,299	\wedge $<$	\wedge $<$	\wedge $<$
48	0,94 16,7	0,92 12	0,84 5,19	0,71 2,48	0,55 1,23	0,35 0,546	0,12 0,136	\wedge $<$	\wedge $<$	\wedge $<$
54	0,94 14,7	0,91 10,6	0,82 4,5	0,68 2,09	0,49 0,979	0,27 0,375	\wedge $<$	\wedge $<$	\wedge $<$	\wedge $<$
60	0,93 13,1	0,9 9,44	0,8 3,95	0,64 1,78	0,44 0,782	0,19 0,237	\wedge $<$	\wedge $<$	\wedge $<$	\wedge $<$

En el proyecto de estructuras, cuando no hay libertad de diseño, vienen determinados tanto el tamaño L como la esbeltez λ ; en tal caso, querríamos saber las consecuencias tanto en lo que respecta a la eficacia como al requisito crítico que hay que comprobar:

$$e(L, \lambda) = 1 - \frac{L}{\mathcal{L}(\lambda)} = \frac{\mathcal{L}(\lambda) - L}{\mathcal{L}(\lambda)}$$

Además un perfil de esbeltez λ , de peso \mathbf{p} , podrá soportar una carga útil dada por:

$$\mathbf{q} = \frac{e(L, \lambda)}{1 - e(L, \lambda)} \mathbf{p} = \frac{\mathcal{L}(\lambda) - L}{L} \mathbf{p}$$

Si la carga útil superficial es \mathbf{w} , entonces harán falta \mathbf{w}/\mathbf{q} de tales perfiles por unidad de longitud (o, tales perfiles deberá separarse una distancia igual a \mathbf{q}/\mathbf{w}):

$$\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{w}} = \frac{\mathcal{L}(\lambda) - L}{L} \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{w}}$$

Esta última expresión es la solución *geométrica* del problema de diseño, dado que no resulta necesaria ninguna comprobación.

A la vista de los cuadros 2.1 y 2.2, se observa que el problema con las vigas de alma llena es su disponibilidad industrial: con un IPE600 y una esbeltez 30 puede alcanzarse 18 m, con una eficacia algo baja, del 80% en pisos (88% en cubiertas; pero con esbeltez 5, tan sólo alcanzamos 3 m, aunque con rendimientos cercanos a la unidad. En todo caso, no hay problema por rendimiento en diseñar secciones en *I ad hoc* de mayor canto para cada caso.

Cuadro 2.2: RENDIMIENTO DE PERFILES IPE APOYADOS EN ‘CUBIERTAS’

Para cada valor de L y de λ , se da el valor de $e(L, \lambda)$ y de $\mathbf{q/p}$. Figuran en **negrilla** las combinaciones con $e > 90\%$; y han sido eliminadas aquellas otras con $e < 10\%$. Figuran subrayadas las combinaciones alcanzables con los perfiles disponibles en el comercio.

$$\phi_{\text{tol}} = 8 \text{ mm/m}$$

λ	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$\mathcal{L}(\lambda)$ (m)	848	626	418	313	214	148				
L (m) = 6	0,99 140	0,99 103	0,99 68,6	0,98 51,2	0,97 34,6	0,96 23,7	0,94 17,2	0,93 12,9	0,91 10	0,89 7,91
12	0,99 69,7	0,98 51,2	0,97 33,8	0,96 25,1	0,94 16,8	0,92 11,4	0,89 8,09	0,86 5,96	0,82 4,5	0,78 3,45
18	0,98 46,1	0,97 33,8	0,96 22,2	0,94 16,4	0,92 10,9	0,88 7,25	0,83 5,06	0,78 3,64	0,73 2,67	0,66 1,97
24	0,97 34,3	0,96 25,1	0,94 16,4	0,92 12	0,89 7,91	0,84 5,19	0,78 3,54	0,71 2,48	0,64 1,75	0,55 1,23
30	0,96 27,3	0,95 19,9	0,93 12,9	0,9 9,44	0,86 6,13	0,8 3,95	0,72 2,64	0,64 1,78	0,55 1,2	0,44 0,782
36	0,96 22,6	0,94 16,4	0,91 10,6	0,89 7,7	0,83 4,94	0,76 3,12	0,67 2,03	0,57 1,32	0,45 0,833	0,33 0,485
42	0,95 19,2	0,93 13,9	0,9 8,94	0,87 6,46	0,8 4,09	0,72 2,53	0,61 1,6	0,5 0,988	0,36 0,571	0,21 0,273
48	0,94 16,7	0,92 12	0,89 7,7	0,85 5,52	0,78 3,45	0,68 2,09	0,56 1,27	0,43 0,74	0,27 0,375	0,1 0,113
54	0,94 14,7	0,91 10,6	0,87 6,73	0,83 4,8	0,75 2,96	0,64 1,75	0,5 1,02	0,35 0,546	0,18 0,222	^ <
60	0,93 13,1	0,9 9,44	0,86 5,96	0,81 4,22	0,72 2,56	0,6 1,47	0,45 0,818	0,28 0,392	^ <	^ <

2.6.5. Flexión simple: vigas empotradas

Se obtiene mayores alcances para esbelteces altas empotrando la viga en sus dos extremos. Sin embargo, el máximo alcance (por cortante) permanece idéntico. Los alcances $\mathcal{L}(\lambda)$ para esbelteces en que el momento rige el diseño aumentan al doble para diseño plástico y a vez y media para cálculo elástico. En lo que se refiere al alcance por flecha, en cálculo plástico se multiplican por 3,75; por cinco, en el diseño elástico. En consecuencia, los perfiles IPE disponibles industrialmente operan con rendimientos superiores al 90% y hasta 30m de luz (esbeltez 50). En ese mismo rango de esbeltez, las formas en I, diseñadas por encargo, podrían alcanzar los 60m con rendimientos del 95%(esbeltez 10).

2.6.6. Flexión simple: viga triangulada de cordones paralelos.

La libertad de diseño de las vigas trianguladas es grande: pueden determinarse de manera independiente el canto \mathbf{h} , los ángulos de las diagonales traccionadas y comprimidas, los coeficiente de pandeo del cordón y de las diagonales comprimidas, el ajuste de cada barra a su sollicitación, etc. Para obtener alguna luz en este amplísimo catálogo de posibilidades manejaremos un modelo estándar de diseño que, si bien no es óptimo, resulta de un compromiso entre la simplicidad y la eficacia.

El dimensionado de cada tipo de barra (cordón y diagonal) será constante a lo largo de la longitud. El dimensionado será siempre por compresión, diseñando la sección adecuada para obtener un coeficiente de pandeo uniforme, ω . La viga tendrá todas sus diagonales inclinadas a 45°. En caso de duda se supondrá siempre lo peor.

En estas condiciones, el peso por unidad de longitud de la viga será:

$$\mathbf{p} = (2\mathbf{A}_C + \sqrt{2}\mathbf{A}_D)\rho$$

siendo \mathbf{A}_C : área de los cordones

\mathbf{A}_D : área de las diagonales

Resistencia a momento y cortante. En el caso peor, la compresión en el cordón será M/z . Por consiguiente:

$$\frac{\mathbf{r}L^2}{8} = \frac{\mathbf{A}_C}{\omega} \mathbf{z} \mathbf{f}$$

En el caso peor, el cortante máximo actuará en la diagonal comprimida. Por consiguiente:

$$\sqrt{2} \frac{\mathbf{r}L}{2} = \frac{\mathbf{A}_D}{\omega} \mathbf{f}$$

En consecuencia:

$$\mathbf{A}_D = \mathbf{A}_C \left(4\sqrt{2} \frac{\mathbf{z}}{L} \right)$$

y el peso por unidad de longitud puede expresarse ahora en función del peso de los cordones:

$$\mathbf{p} = 2\rho\mathbf{A}_C \left(1 + 4\frac{\mathbf{z}}{L} \right) = 2\rho\mathbf{A}_C \left(1 + \frac{4}{\lambda_z} \right)$$

Esta viga (λ_z , \mathbf{A}_C) va variando su esbeltez y el área de sus barras acompasadamente con su longitud y carga total. En consecuencia, ni su sección ni su peso propio pueden considerarse constantes: son funciones de λ_z y de \mathbf{A}_C . En todo caso la viga es estrictamente segura a esfuerzo cortante si lo es a momento. Para que efectivamente ocurra esto último:

$$\mathbf{A}_C \geq \frac{\mathbf{r}L^2}{8} \frac{1}{\mathbf{z}} \frac{\omega}{\mathbf{f}}$$

sustituyendo en la expresión de $\mathbf{p}(\lambda_z, \mathbf{A}_C)$:

$$\mathbf{p} \geq 2\rho \frac{\mathbf{r}L^2}{8} \frac{1}{\mathbf{z}} \frac{\omega}{\mathbf{f}} \left(1 + \frac{4}{\lambda_z} \right) = \frac{\lambda_z}{4} \frac{\omega}{\mathcal{A}} (\mathbf{p} + \mathbf{q}) L \left(1 + \frac{4}{\lambda_z} \right)$$

expresión de la que podemos despejar L :

$$L \leq \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \frac{\mathcal{A}}{\omega} \frac{4}{\lambda_z} \frac{1}{1 + \frac{4}{\lambda_z}}$$

que nos permite obtener la longitud como una función de la eficacia y la esbeltez:

$$\ell(e, \lambda_z, \omega) = (1 - e) \frac{\mathcal{A}}{\omega} \frac{4}{4 + \lambda_z}$$

y, por ultimo, el tamaño insuperable para cada esbeltez es, como siempre:

$$\mathcal{L}(\lambda_z, \omega) = \ell(0, \lambda_z) = \frac{\mathcal{A}}{\omega} \frac{4}{4 + \lambda_z}$$

Aquí no tenemos otro límite que el de validez del modelo empleado que, juiciosamente, podemos fijar en $\lambda_z = 5$; para esta esbeltez resulta un alcance insuperable en la horquilla 0,22–0,40, dependiendo del coeficiente de pandeo empleado². Por tanto, se trata de un alcance comparable a las secciones I de alma llena.

Requisito de rigidez. Mediante la aplicación del principio de los trabajos virtuales no resulta difícil deducir cual es la esbeltez límite por flecha para la viga así diseñada. La expresión es:

$$\lambda_z \leq \lambda_\delta = \frac{6}{5} \left(2 \frac{\phi_{\text{tol}} \omega}{\varepsilon_f} - 1 \right)$$

λ_δ para vigas de cordones paralelos de acero

ω	pisos	cubiertas
1,1	11	19
1,5	15	31
2	20	41

Si la viga tiene un esbeltez λ_z mayor que la límite, λ_δ , el requisito de rigidez rige el diseño. La distorsión de la viga depende de la deformación media de sus barras:

$$\phi = \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{5}{6} \lambda_z + 1 \right) \leq \phi_{\text{tol}} \quad \varepsilon = \phi_{\text{tol}} \frac{12}{5\lambda_z + 6}$$

Por tanto el diseño de las barras tiene que hacerse con una tensión $\mathbf{E}\varepsilon$, menor que \mathbf{f} :

$$\mathbf{A}_C = \frac{\mathbf{r}L^2}{8z} \frac{1}{\mathbf{E}\varepsilon} = \frac{\mathbf{r}L^2}{8z\mathbf{E}} \frac{5\lambda_z + 6}{12\phi_{\text{tol}}}$$

resultando un peso para la pieza:

$$\mathbf{p} = 2\rho \frac{\mathbf{r}L^2}{8z\mathbf{E}} \frac{5\lambda_z + 6}{12\phi_{\text{tol}}} \frac{\lambda_z + 4}{\lambda_z}$$

La longitud alcanzable para cada eficacia e y esbeltez λ_z es ahora:

$$\ell(e, \lambda_z) = (1 - e) \cdot 48\mathcal{A} \cdot \frac{\phi_{\text{tol}}\mathbf{E}}{\mathbf{f}} \frac{1}{(4 + \lambda_z)(6 + 5\lambda_z)}$$

siendo el alcance estructural:

$$\mathcal{L}(\lambda_z) = 48\mathcal{A} \cdot \frac{\phi_{\text{tol}}\mathbf{E}}{\mathbf{f}} \frac{1}{(4 + \lambda_z)(6 + 5\lambda_z)}$$

Panorama del alcance estructural para vigas de celosía. En resumen, la máxima longitud alcanzable con una viga en celosía depende de su esbeltez, eficacia y coeficiente de pandeo de sus barras:

$$\ell(e, \lambda_z, \omega) = (1 - e) \cdot \mathcal{L}(\lambda_z, \omega)$$

siendo $\mathcal{L}(\lambda_z, \omega)$ el alcance estructural para una esbeltez dada:

$$\mathcal{L}(\lambda_z, \omega) = \mathcal{A} \cdot \frac{4}{\lambda_z + 4} \times \begin{cases} \frac{1}{\omega} & \text{si } \lambda_z \leq \lambda_\delta \\ \frac{\phi_{\text{tol}}\mathbf{E}}{\mathbf{f}} \frac{12}{6 + 5\lambda_z} & \text{si } \lambda_z \geq \lambda_\delta \end{cases}$$

El planteamiento para el proyecto de estructuras es similar al de las vigas de alma llena: para cada tamaño L y esbeltez λ_z podemos vaticinar su eficacia y el cociente entre su peso propio y la carga útil \mathbf{r}/\mathbf{p} , véanse los cuadros 2.3 y 2.4, y las ecuaciones (2.8) y (2.9); de forma que podemos saber el peso de cada viga y su separación. Puesto que la solución empleada no es óptima, cabe esperar ligeras variaciones al variar los parámetros de diseño empleados (aunque el peso propio continúe siendo constante a lo largo de la luz).

²Como la importancia del pandeo aumenta con factores proporcionales a l/\mathbf{r} , siendo l la longitud media de las barras, resulta fácil mantenerla constante al aumentar L : basta con aumentar el número de módulos de la cercha (lo que ocurre espontáneamente al mantener el ángulo de las diagonales).

Cuadro 2.3: RENDIMIENTO DE VIGAS EN CELOSÍA APOYADAS EN ‘PISOS’

Para cada valor de L y de λ , se da el valor de $e(L, \lambda)$ y de $\mathbf{q/p}$. Figuran en **negrilla** las combinaciones con $e > 90\%$; y han sido eliminadas aquellas otras con $e < 10\%$.

$$\phi_{\text{tol}} = 4 \text{ mm/m} \quad \omega = 1,5$$

λ	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$\mathcal{L}(\lambda)$ (m)	679	436	317	192	129	92	69	54	43	35
L (m) = 6	0,99	0,99	0,98	0,97	0,95	0,93	0,91	0,89	0,86	0,83
	112	71,7	51,9	31	20,4	14,4	10,5	7,98	6,19	4,89
12	0,98	0,97	0,96	0,94	0,91	0,87	0,83	0,78	0,72	0,66
	55,5	35,3	25,5	15	9,72	6,68	4,77	3,49	2,6	1,94
18	0,97	0,96	0,94	0,91	0,86	0,8	0,74	0,67	0,58	0,49
	36,7	23,2	16,6	9,67	6,14	4,12	2,84	1,99	1,4	0,963
24	0,96	0,94	0,92	0,88	0,81	0,74	0,65	0,55	0,44	0,32
	27,3	17,2	12,2	7	4,36	2,84	1,88	1,25	0,798	0,472
30	0,96	0,93	0,91	0,84	0,77	0,67	0,57	0,44	0,3	0,15
	21,6	13,5	9,58	5,4	3,29	2,07	1,31	0,797	0,439	0,178
36	0,95	0,92	0,89	0,81	0,72	0,61	0,48	0,33	0,17	^
	17,8	11,1	7,82	4,33	2,57	1,56	0,922	0,497	0,199	<
42	0,94	0,9	0,87	0,78	0,67	0,54	0,39	0,22	^	^
	15,2	9,39	6,56	3,57	2,06	1,19	0,648	0,283	<	<
48	0,93	0,89	0,85	0,75	0,63	0,48	0,31	0,11	^	^
	13,1	8,09	5,61	3	1,68	0,919	0,442	0,123	<	<
54	0,92	0,88	0,83	0,72	0,58	0,41	0,22	^	^	^
	11,6	7,08	4,88	2,56	1,38	0,706	0,282	<	<	<
60	0,91	0,86	0,81	0,69	0,53	0,35	0,13	^	^	^
	10,3	6,27	4,29	2,2	1,14	0,535	0,153	<	<	<

Cuadro 2.4: RENDIMIENTO DE VIGAS EN CELOSÍA APOYADAS EN ‘CUBIERTAS’

Para cada valor de L y de λ , se da el valor de $e(L, \lambda)$ y de $\mathbf{q/p}$. Figuran en **negrilla** las combinaciones con $e > 90\%$; y han sido eliminadas aquellas otras con $e < 10\%$.

$$\phi_{\text{tol}} = 8 \text{ mm/m} \quad \omega = 1,5$$

λ	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$\mathcal{L}(\lambda)$ (m)	679	436	321	254	211	180	138	108	86	71
L (m) = 6	0,99	0,99	0,98	0,98	0,97	0,97	0,96	0,94	0,93	0,92
	112	71,7	52,6	41,4	34,1	28,9	22,1	17	13,4	10,8
12	0,98	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93	0,91	0,89	0,86	0,83
	55,5	35,3	25,8	20,2	16,5	14	10,5	7,98	6,19	4,89
18	0,97	0,96	0,94	0,93	0,91	0,9	0,87	0,83	0,79	0,75
	36,7	23,2	16,9	13,1	10,7	8,98	6,69	4,99	3,8	2,93
24	0,96	0,94	0,93	0,91	0,88	0,87	0,83	0,78	0,72	0,66
	27,3	17,2	12,4	9,6	7,77	6,48	4,77	3,49	2,6	1,94
30	0,96	0,93	0,91	0,88	0,86	0,83	0,78	0,72	0,65	0,58
	21,6	13,5	9,71	7,48	6,02	4,99	3,61	2,59	1,88	1,36
36	0,95	0,92	0,89	0,86	0,83	0,8	0,74	0,67	0,58	0,49
	17,8	11,1	7,93	6,07	4,85	3,99	2,84	1,99	1,4	0,963
42	0,94	0,9	0,87	0,83	0,8	0,77	0,7	0,61	0,51	0,41
	15,2	9,39	6,65	5,06	4,01	3,28	2,3	1,57	1,06	0,683
48	0,93	0,89	0,85	0,81	0,77	0,73	0,65	0,55	0,44	0,32
	13,1	8,09	5,7	4,3	3,39	2,74	1,88	1,25	0,798	0,472
54	0,92	0,88	0,83	0,79	0,74	0,7	0,61	0,5	0,37	0,24
	11,6	7,08	4,95	3,71	2,9	2,33	1,56	0,996	0,599	0,309
60	0,91	0,86	0,81	0,76	0,72	0,67	0,57	0,44	0,3	0,15
	10,3	6,27	4,36	3,24	2,51	1,99	1,31	0,797	0,439	0,178

Cuadro 2.5: ALCANCES VIABLES EN FLEXIÓN SIMPLE.

$$e \geq 90\%, \omega = 1,5$$

sección	pisos	cubiertas
	$\phi_{tol} : 4 \text{ mm/m}$	8 mm/m
IPE apoyado 'comercial'	$\leq 12 \text{ m}$	$\leq 18 \text{ m}$
	$\lambda = 30$	
IPE empotrado	$\leq 22 \text{ m}$	$\leq 30 \text{ m}$
	$\lambda = 45$	$\lambda = 50$
celosía de canto constante	$\leq 42 \text{ m} (\lambda_z = 10)$	

2.6.7. Flexión con canto constante: conclusiones

Debe notarse que, debido al coeficiente de pandeo considerado (1,5), con una sección en I podrían alcanzarse tamaño mayores que con vigas de cordones paralelos: hasta 60 m en pisos o cubiertas, con una eficacia del 90 % y una esbeltez de 10. Pero el mayor IPE producido industrialmente no da para tanto: con 600 mm de canto y una esbeltez de 10 sólo da para 6 metros ¡pero con una eficacia cercana al 99%! Una sección en I para 60 metros debería ser diseñada y producida por encargo: para eso es mejor construir una viga de cordones paralelos: con similar esbeltez y eficacia. Además es posible dotarla de una sección variable, algo más ajustada y eficaz. Los rangos de cada solución, si exigimos rendimientos de al menos el 90 % eficacia son los reflejados en el cuadro 2.5, en el que se ha tenido en cuenta la disponibilidad comercial.

Con esbelteces menores puede aumentarse algo el alcance eficaz de la viga de cordones paralelos, pero no mucho. Para superar esta cota de 42 metros, es necesario acudir a vigas de canto variables y, para ir más lejos aún, a estructuras diseñadas con la vista puesta en el funicular de sus cargas. Al menos mientras los apoyos sigan en los extremos de la estructura. (Siempre queda la solución, *estéticamente censurable*, de acudir a eficacias menores del 90 %, para conseguir tamaños mayores despilfarrando materiales y produciendo contaminación.)

En el caso de otras condiciones de apoyo, estos valores puede seguir sirviendo de referencia, sin más que tomar como tamaño del problema la distancia entre los puntos de momento nulo de la solución.

Referencias

Capítulo 3

Cerchas isostáticas

De un modo general, una cercha isostática consta de n nudos, a condiciones de apoyo (o movimientos impedidos), y b barras, con la condición *necesaria* $2n = a + b$, contando en consecuencia con g grados de libertad ($g = 2n - a = b$).

El conjunto de acciones puede especificarse mediante una distribución $\{\mathbf{F}\}$ de g fuerzas sobre los nudos ('alineadas' con los grados de libertad). Siendo $\{\mathbf{N}\}$ las solicitaciones en las barras, el equilibrio se expresa en forma compacta como

$$[\mathbf{H}] \{\mathbf{N}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (3.1)$$

La matriz $[\mathbf{H}]$ es una matriz 'geométrica' y da cuenta de la dirección de cada solicitación y de su contribución neta al equilibrio de cada acción exterior; se trata de una matriz adimensional que no depende del tamaño de la cercha, tan sólo de la posición relativa de sus nudos en el espacio y de las condiciones de apoyo. La matriz $[\mathbf{H}]$ también puede obtenerse para el caso general de cerchas no isostáticas.

La condición necesaria para que la cercha sea una estructura viable *para cualquier valor de* $\{\mathbf{F}\}$ es que el determinante de $[\mathbf{H}]$ sea distinto de cero. En tal caso, las solicitaciones se obtienen directamente:

$$\{\mathbf{N}\} = [\mathbf{H}]^{-1} \{\mathbf{F}\} \quad (3.2)$$

El material de la cercha estará distribuido entre sus barras, de forma que el volumen total de material vendrá dado por el producto escalar de las áreas de las secciones de las barras por las longitudes de las mismas, $V = \{\mathbf{L}\}^T \cdot \{\mathbf{A}\}$.

Si A es un área característica de la cercha, $\{\mathbf{A}\} = A\{\mathbf{a}\}$. Por otra parte, cerchas sólo distintas en su tamaño tendrán sus longitudes proporcionales; denominando L al tamaño de cada cercha, todas ellas tendrán en común la distribución de las longitudes de sus barras: $\{\mathbf{L}\} = L\{\ell\}$. L es una longitud característica, como la distancia entre apoyos.

Cerchas que sólo se distinguen en el tamaño (pero con geometría y dimensionado semejantes) tienen volúmenes proporcionales al de la cercha de tamaño y área característica 'unidad':

$$V = LA\{\ell\}^T\{\mathbf{a}\} \quad (3.3)$$

Capítulo 4

Cerchas isostáticas: tensión media

4.1. Resistencia

Si todas las barras son del mismo material y éste resiste con seguridad iguales tensiones \mathbf{f} de compresión y tracción, un requisito de seguridad *sobre la tensión media* puede expresarse como:¹

$$\text{abs}(N_i) \leq \mathbf{f} A a_i \quad i = 1 \dots g \quad (4.1)$$

Este es el requisito habitualmente empleado para estructuras pequeñas, en las que el peso propio es despreciable.

4.2. Acciones: carga externa y peso propio

La totalidad de la acción sobre la cercha puede descomponerse en carga útil y peso propio. La primera puede expresarse como producto de una distribución sobre los nudos, $\{\mathbf{q}\}$, y una carga característica, Q . La segunda es directamente proporcional al volumen de material empleado en la cercha, siendo la constante de la proporción el peso específico del material, ρ :

$$P = \rho V \quad (4.2)$$

Para cada geometría y dimensionado, la distribución del peso propio puede expresarse en función de la que tenga la cercha de tamaño y área característica ‘unidad’ y el tamaño y área característica de una cercha particular:

$$\rho L A [\mathbf{p}] \{\mathbf{a}\} \quad (4.3)$$

expresión en la que $[\mathbf{p}]$ es una matriz cuyas g columnas representan las cargas sobre los nudos de la cercha de tamaño ‘unidad’ debidas a cada una de las barras si éstas tuvieran sección unitaria.

En consecuencia, la acción total sobre una cercha puede calcularse como:

$$\{\mathbf{F}\} = \rho L A [\mathbf{p}] \{\mathbf{a}\} + Q \{\mathbf{q}\} \quad (4.4)$$

El valor Q puede elegirse arbitrariamente, aunque una elección conveniente es el valor de la carga útil total. En cualquier caso, Q representa la *intensidad* de carga con distribución $\{\mathbf{q}\}$.

La longitud L conviene que sea una longitud que caracterice el problema estructural, como la distancia entre apoyos. En tal caso, podemos denominarla *tamaño* del problema o de la estructura.

¹Se trata del requisito de seguridad para la *tensión media* de la barra, lo que ignora los efectos de la flexión y del peso propio de la barra sobre sí misma. Más adelante, se abordan estos efectos.

La carga total sobre la cercha es:

$$\{\mathbf{F}\} = \rho LA [\mathbf{p}] \{\mathbf{a}\} + Q\{\mathbf{q}\} = \rho LA \left([\mathbf{p}] \{\mathbf{a}\} + \frac{Q}{\rho LA} \{\mathbf{q}\} \right) \quad (4.5)$$

Un primer resultado totalmente general es que una cercha en la que se incrementa la carga en un factor α , mantendrá constante su estado de tensión al aumentar las áreas de sus barras en el mismo factor y, en consecuencia, habrá de soportar una carga total α veces mayor. Y, por tanto, la intensidad de carga *no afecta* al rendimiento de la estructura ni a su coste. La intensidad de carga, en consecuencia, es una característica ‘menor’ del problema estructural, mucho mejor caracterizado por la la distribución $\{\mathbf{q}\}$ y por el tamaño L .

4.3. Dimensionado estricto

A partir de las solicitaciones $\{\mathbf{N}\}$ en la cercha, puede definirse el *patrón de signos* de las solicitaciones, como una matriz diagonal $[\mathbf{S}]$ en la que $S_{ii} = \text{sgn}(N_i)$.² El determinante de $[\mathbf{S}]$ es ± 1 , y $[\mathbf{S}] = [\mathbf{S}]^{-1} = [\mathbf{S}]^T$, es decir, se trata de una matriz ortogonal, unitaria y normal.

El patrón de signos $[\mathbf{S}]$ sólo está determinado una vez que lo está $\{\mathbf{N}\}$. Por el principio de superposición, las solicitaciones serán suma de las debidas al peso propio y de aquellas otras debidas a la carga útil, $\{\mathbf{N}\} = \{\mathbf{N}^p\} + \{\mathbf{N}^q\}$. Pero, en general, $[\mathbf{S}^p] \neq [\mathbf{S}^q]$, $[\mathbf{S}] \neq [\mathbf{S}^q]$ y $[\mathbf{S}] \neq [\mathbf{S}^p]$.

La matriz $[\mathbf{S}]$ permite expresar el requisito de resistencia sin utilizar el valor absoluto. En particular, permite definir de forma sencilla el dimensionado estricto.

Definición 1 *Una cercha está dimensionada estrictamente respecto a su tensión media, es decir, la tensión media de todas sus barras es constante si*

$$[\mathbf{S}] \{\mathbf{N}\} = \mathbf{f}A\{\mathbf{a}\} \quad (4.6)$$

Cuando el contexto deshaga cualquier ambigüedad, tales cerchas se denominarán en lo sucesivo cerchas estrictas.

El patrón de signos $[\mathbf{S}]$ expresa el cuadrante del espacio vectorial donde está situado el vector $\{\mathbf{N}\}$. Nótese que la resistencia del diseño, $\mathbf{f}A\{\mathbf{a}\}$, es un vector situado en ese mismo espacio, pero siempre en el cuadrante ‘positivo’. En consecuencia, $[\mathbf{S}]$ simplemente sitúa a $\{\mathbf{N}\}$ en ese cuadrante y entonces pueden hacerse comparaciones directas entre las solicitaciones y las resistencias. Definiendo la relación $\{\mathbf{x}\} \prec \{\mathbf{y}\}$ como $x_i < y_i \forall i$, el requisito de seguridad para cualquier dimensionado, estricto o no, se expresa como:

$$[\mathbf{S}] \{\mathbf{N}\} \preceq \mathbf{f}A\{\mathbf{a}\} \quad (4.7)$$

La transformación $\{\mathbf{x}\} \rightarrow [\mathbf{S}] \{\mathbf{x}\}$ aplica a $\{\mathbf{x}\}$ las mismas simetrías o rotaciones que a $\{\mathbf{N}\}$, de manera que $[\mathbf{S}] \{\mathbf{N}\}$ y $[\mathbf{S}] \{\mathbf{x}\}$ quedarán en el cuadrante positivo si y sólo si $\{\mathbf{N}\}$ y $\{\mathbf{x}\}$ estaban en el mismo cuadrante.

4.4. Equilibrio de cerchas ‘estrictas’

Sustituyendo la ecuación (3.2) en la ecuación (4.6):

$$\mathbf{f}A\{\mathbf{a}\} = [\mathbf{S}] [\mathbf{H}]^{-1} \{\mathbf{F}\} \quad (4.8)$$

y empleando ahora la ecuación (4.4):

$$\mathbf{f}A\{\mathbf{a}\} = [\mathbf{S}] [\mathbf{H}]^{-1} (\rho LA [\mathbf{p}] \{\mathbf{a}\} + Q\{\mathbf{q}\}) \quad (4.9)$$

Reorganizando los términos para sacar factor común la distribución $\{\mathbf{a}\}$:

$$\mathbf{A} \mathbf{f} \cdot \left([\mathbf{1}] - \frac{\rho L}{\mathbf{f}} [\mathbf{S}] [\mathbf{H}]^{-1} [\mathbf{p}] \right) \cdot \{\mathbf{a}\} = [\mathbf{S}] \cdot Q [\mathbf{H}]^{-1} \{\mathbf{q}\} \quad (4.10)$$

en la que $[\mathbf{1}]$ es la matriz unidad. En esta expresión surge el alcance del material, $\mathcal{A} = \mathbf{f}/\rho$. Por otra parte, el producto $[\mathbf{H}]^{-1} \{\mathbf{q}\}$ no es otra cosa que las solicitaciones debidas a la carga útil para una intensidad Q unitaria, $\{\mathbf{n}^q\}$. Si además multiplicamos por $[\mathbf{S}]$:

$$\left([\mathbf{S}] - \frac{L}{\mathcal{A}} [\mathbf{H}]^{-1} [\mathbf{p}] \right) \cdot \{\mathbf{a}\} = \left([\mathbf{S}] - \frac{L}{\mathcal{A}} [\mathbf{B}] \right) \cdot \{\mathbf{a}\} = \frac{Q}{\mathbf{f}A} \{\mathbf{n}^q\} \quad (4.11)$$

² $\text{sgn}(x)$ es 1 si $x \geq 0$ y -1 en otro caso.

La primera expresión entre paréntesis es la matriz que rige la solución del problema:

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{S}] - \frac{L}{\mathcal{A}} [\mathbf{H}]^{-1} [\mathbf{p}] = [\mathbf{S}] - \frac{L}{\mathcal{A}} [\mathbf{B}] \quad (4.12)$$

$[\mathbf{C}]$ depende del patrón de signos de las solicitaciones, del tamaño de la cercha en relación al alcance del material, y de su geometría, puesto que tanto $[\mathbf{H}]$ como $[\mathbf{p}]$ no dependen de un dimensionado en concreto. Por otra parte, $\{\mathbf{n}^q\}$ no depende del tamaño ni de la intensidad de la carga, tan sólo de la geometría de la cercha y de la distribución de la carga útil.

La ecuación (4.11) es, en cualquier caso, ‘engañosa’: *no es la solución* al problema de diseñar estrictamente una cercha teniendo en cuenta su peso propio, puesto que $[\mathbf{S}]$, el patrón de signos de las solicitaciones, depende de la distribución de las solicitaciones debidas al peso propio $\{\mathbf{N}^p\}$, y éstas a su vez dependen de la distribución de las áreas de las barras, $A\{\mathbf{a}\}$. El mejor resultado que he obtenido hasta la fecha consiste en el siguiente teorema:

Especulación

Teorema 3 Si la ecuación (4.11) tiene solución para valores concretos de L y $\{\mathbf{n}^q\}$, la solución es única y corresponde a un único patrón de signos $[\mathbf{S}]$.

Demostración: supóngase que existiera otro patrón de signos con otra distribución de áreas como solución; entonces tendríamos...

Otra forma de esa ecuación se obtiene al multiplicar por $[\mathbf{S}]$:

$$\left([\mathbf{1}] - \frac{L}{\mathcal{A}} [\mathbf{S}] [\mathbf{B}] \right) \cdot \{\mathbf{a}\} = \frac{Q}{fA} [\mathbf{S}] \{\mathbf{n}^q\} \equiv \{\mathbf{a}_q\} \quad (4.13)$$

Las columnas de la matriz $[\mathbf{H}]^{-1} [\mathbf{p}]$ son las solicitaciones debidas al peso de cada barra cuando $\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{1}\}$ en la cercha ‘unidad’. Es decir, denominando $[\mathbf{B}]$ a $[\mathbf{H}]^{-1} [\mathbf{p}]$, cada elemento B_{ij} representa la solicitación producida en la barra i por el peso de la barra j de área unidad, cuando el tamaño de la cercha es también la unidad.

Por tanto, si $\text{sgn}(B_{ij}) = \text{sgn}(B_{ik}) \quad \forall j, k \in \{1 \dots g\}$, el correspondiente signo de la solicitación de la barra i en $[\mathbf{S}^p]$ está determinado y es independiente de $\{\mathbf{a}\}$, puesto que $\{\mathbf{0}\} \preceq \{\mathbf{a}\}$. Puede mostrarse con facilidad que esta interesante propiedad *no se cumplirá* para todas las barras.³ Vemos que la geometría de la cercha puede determinar *algunos* signos de $[\mathbf{S}^p]$, pero en general no todos. Este patrón de signos, que no depende de la distribución de áreas $\{\mathbf{a}\}$, puede definirse con:

$$\mathcal{S}_i = \begin{cases} \text{sgn}(B_{ii}) & \text{si } \forall j, k \in \{1 \dots g\} \quad \text{sgn}(B_{ij}) = \text{sgn}(B_{ik}) \\ 0 & \text{si } \exists j, k \quad \text{sgn}(B_{ij}) \neq \text{sgn}(B_{ik}) \end{cases} \quad (4.14)$$

y $[\mathcal{S}] = \text{diag}(\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_g)$.

Si el patrón de signos $[\mathbf{S}^p]$ fuera independiente de $\{\mathbf{a}\}$ y, además, fuera idéntico al patrón de signos $[\mathbf{S}^q]$, $[\mathbf{S}]$ estaría determinado y entonces la ecuación (4.11) podría resolverse sin incertidumbre. Éste es el caso cuando $[\mathcal{S}] = [\mathbf{S}^q]$. Pero, en general, no ocurre así. Hay dos razones para ello:

- **Signo indeterminado.** Si $\mathcal{S}_i = 0$ no podemos anticipar cómo será $[\mathbf{S}]$, pues $[\mathbf{S}^p]$ depende de $\{\mathbf{a}\}$, es decir, de la solución de la ecuación (4.11).
- **Signos distintos.** Si $\mathcal{S}_i \neq 0$ y $\mathcal{S}_i \neq \mathcal{S}_{ii}^q$ tampoco podemos anticipar cómo será $[\mathbf{S}]$, pues el valor de \mathcal{S}_{ii} dependerá de cual sea la carga predominante, la útil o el peso propio.

Ambas situaciones, aunque distintas, se resumen en la condición $[\mathcal{S}] \neq [\mathbf{S}^q]$, condición que podemos analizar anticipadamente con sólo fijar $\{\mathbf{q}\}$ y la geometría de la cercha: en tal caso, no podemos asegurar que las solicitaciones debidas al peso propio estén situadas en el mismo cuadrante que aquellas otras debidas a la carga útil.

Si hay $d \leq g$ diferencias entre $[\mathcal{S}]$ y $[\mathbf{S}^q]$, la ecuación (4.11) representa, en realidad, las distintas ecuaciones que pueden escribirse para todas las matrices $[\mathbf{S}]$ sujetas a los signos idénticos de $[\mathcal{S}]$ y $[\mathbf{S}^q]$. Puesto que se trata de variaciones con repetición de 2 elementos (+1 y -1) tomados de d en d , es un número exponencialmente grande de ecuaciones, 2^d . Se trata, en principio, de un problema *algorítmicamente* intratable.

³Para vigas trianguladas apoyadas en ambos extremos, la propiedad se cumple típicamente para las barras situadas en el perímetro, pero *no se cumple* para las barras al interior, las de la celosía.

Por último, debe notarse que, incluso suponiendo $[\mathbf{S}]$ conocido *a priori*, la solución para $\{\mathbf{a}\}$ ha de consistir en un vector con componentes positivas. Por tanto un determinante no nulo de $[\mathbf{C}]$ no asegura la existencia de una solución.

Una vez obtenida la solución de la ecuación (4.11), la intensidad de carga Q en equilibrio se obtiene como:

$$\frac{Q}{fA} = \frac{\{\mathbf{n}^q\}^T [\mathbf{C}] \{\mathbf{a}\}}{\{\mathbf{n}^q\}^T \{\mathbf{n}^q\}} \quad (4.15)$$

Si la solución de la ecuación (4.11) es *única* y resuelve el problema planteado, entonces Q/fA sólo depende de L : para los valores de L que hagan nulo el determinante de $[\mathbf{C}]$, $Q = 0$ y la cercha es incapaz de soportar carga útil; tales valores de L , en adelante \mathcal{L} , se denominan *alcances* de la cercha.

Cerchas estrictas y pequeñas

Conforme $L \rightarrow 0$, el propio peso de la cercha se hace despreciable y $[\mathbf{S}] \rightarrow [\mathbf{S}^q]$. En el calculo habitual, de hecho, el propio peso se desprecia y se obtiene como solución aproximada:

$$\{\mathbf{a}\} \approx \{\mathbf{a}_0\} = \frac{Q}{fA} [\mathbf{S}^q] \{\mathbf{n}^q\} \quad (4.16)$$

Alcance de cerchas estrictas

Conforme L crece, el peso propio se impone a la carga útil, hasta que en el límite, la cercha de máximo tamaño es incapaz de soportar otra carga que su propio peso. Esta situación define el máximo alcance de una cercha con geometría dada. Por encima de ese tamaño máximo, \mathcal{L} en adelante, la cercha es inviable (salvo que se use un material de mayor alcance). Por debajo de él, la cercha es capaz de soportar alguna carga útil. Estudiando la ecuación (4.11) para el caso particular en que $Q = 0$, se obtiene la formulación de un problema de valores propios:

$$\frac{A}{\mathcal{L}} \cdot \{\mathbf{a}\} = [\mathbf{S}] [\mathbf{H}]^{-1} [\mathbf{p}] \cdot \{\mathbf{a}\} = [\mathbf{S}] [\mathbf{B}] \{\mathbf{a}\} \quad (4.17)$$

Los valores propios son, precisamente, la proporción entre el alcance del material y el máximo tamaño de la cercha (o alcance de la misma). Y los vectores propios serían precisamente las distribuciones de área en las barras que permiten alcanzar tal tamaño. El significado físico sugiere buscar el valor propio real de mayor valor, que corresponderá al alcance mínimo de la cercha⁴. Esta ecuación, en todo caso, es ‘engañosa’ una vez más: no sólo porque $[\mathbf{S}]$ sigue dependiendo de $\{\mathbf{a}\}$, también porque los valores propios deben ser reales, y los vectores propios de componentes positivas, para que la solución mecánica tenga sentido.

Para cualquier cercha, el número de ceros c de la diagonal de $[\mathbf{S}]$, indica los valores indeterminados de $[\mathbf{S}]$, es decir, los signos que dependen de la distribución del peso propio de la cercha, $\{\mathbf{a}\}$. En principio, existen 2^c distribuciones de signos $[\mathbf{S}]$ (sujetas a la existencia de una solución de la ecuación (4.17) tal que $\{\mathbf{0}\} \preceq \{\mathbf{a}\}$), por lo que, en principio, una cercha puede tener distintos alcances según sea la distribución de su peso propio. La relación entre el número de ecuaciones (4.17) y el de ecuaciones (4.11) puede sintetizarse en el hecho de que $c \leq d \leq g$, es decir, potencialmente existen más soluciones para $Q \neq 0$ que para el caso límite $Q=0$.

El caso $c = 0$ podría ser especial: para $Q = 0$, $[\mathbf{S}] = [\mathbf{S}]$ y si la ecuación (4.17) tiene solución, la cercha tiene alcances definidos para concretas distribuciones de su peso que no dependen de su tamaño y, en consecuencia, tales tamaños suponen un límite insuperable para cualquier distribución de carga útil $\{\mathbf{q}\}$.

El conjunto de distribuciones $\{\mathbf{a}_{\mathcal{L}}\}$ asociadas a un alcance \mathcal{L} y a un patrón de signos $[\mathbf{S}]$ junto con $\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{0}\}$ forma un subespacio vectorial propio: cualquier $\{\mathbf{a}_{\mathcal{L}}\}$ dentro del subespacio cumple con la ecuación (4.17) para \mathcal{L} y $[\mathbf{S}]$. En particular, cualquiera de tales distribuciones verifica que:

$$\frac{L}{\mathcal{L}} \{\mathbf{a}_{\mathcal{L}}\} = \frac{L}{A} [\mathbf{S}] [\mathbf{B}] \{\mathbf{a}_{\mathcal{L}}\} \quad (4.18)$$

⁴Alternativamente, puede considerarse el valor propio real mínimo y menor que cero: se trataría del alcance de la cercha para intensidades *negativas* de la carga, $Q < 0$, o el alcance de la cercha simétrica respecto del origen de coordenadas con $Q > 0$.

4.4.1. Cerchas de tamaño ‘alcanzable’

Para un tamaño L , menor que el alcance de la cercha, la dificultad de resolver la ecuación (4.11) reside en que no podemos, en general, anticipar, como será $[\mathbf{S}]$. La ecuación puede escribirse como:

$$[\mathbf{S}] \{\mathbf{a}\} = \frac{Q}{fA} \{\mathbf{n}^q\} + \frac{L}{\mathcal{A}} [\mathbf{B}] \{\mathbf{a}\} \quad (4.19)$$

Utilizando la ecuación (4.16) y multiplicando por $[\mathbf{S}]$:

$$\{\mathbf{a}\} = [\mathbf{S}] [\mathbf{S}^q] \{\mathbf{a}_q\} + \frac{L}{\mathcal{A}} [\mathbf{S}] [\mathbf{B}] \{\mathbf{a}\} \quad (4.20)$$

A partir de esta expresión es posible plantear una aproximación en serie, $\{\mathbf{a}_i\}$, a la solución $\{\mathbf{a}\}$ de la ecuación (4.11). El primer término de la serie viene dado por:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{a}_0\} &= \{\mathbf{a}_q\} \\ \frac{Q}{fA} \{\mathbf{n}_0\} &= [\mathbf{S}^q] \{\mathbf{a}_q\} + \frac{L}{\mathcal{A}} [\mathbf{B}] \{\mathbf{a}_0\} \\ [\mathbf{S}_0] &= \text{diag}(\text{sgn}(\{\mathbf{n}_0\})) \end{aligned}$$

Empleando otra vez la ecuación (4.20):

$$\begin{aligned} \{\mathbf{a}_1\} &= [\mathbf{S}_0] [\mathbf{S}^q] \{\mathbf{a}_q\} + [\mathbf{S}_0] \frac{L}{\mathcal{A}} [\mathbf{B}] \{\mathbf{a}_0\} = [\mathbf{S}_0] \frac{Q}{fA} \{\mathbf{n}_0\} \\ \frac{Q}{fA} \{\mathbf{n}_1\} &= [\mathbf{S}^q] \{\mathbf{a}_q\} + \frac{L}{\mathcal{A}} [\mathbf{B}] \{\mathbf{a}_1\} \\ [\mathbf{S}_1] &= \text{diag}(\text{sgn}(\{\mathbf{n}_1\})) \end{aligned}$$

y para el término i -ésimo se tendrá:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{a}_i\} &= [\mathbf{S}_{i-1}] [\mathbf{S}^q] \{\mathbf{a}_q\} + [\mathbf{S}_{i-1}] \frac{L}{\mathcal{A}} [\mathbf{B}] \{\mathbf{a}_{i-1}\} = [\mathbf{S}_{i-1}] \frac{Q}{fA} \{\mathbf{n}_{i-1}\} \\ \frac{Q}{fA} \{\mathbf{n}_i\} &= [\mathbf{S}^q] \{\mathbf{a}_q\} + \frac{L}{\mathcal{A}} [\mathbf{B}] \{\mathbf{a}_i\} \\ [\mathbf{S}_i] &= \text{diag}(\text{sgn}(\{\mathbf{n}_i\})) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Si la serie converge, en el límite $\{\mathbf{a}_i\} \rightarrow \{\mathbf{a}_{i+1}\}$ y $[\mathbf{S}_{i-1}] \rightarrow [\mathbf{S}_i]$. En tal caso,

$$\{\mathbf{a}_{i+1}\} - \{\mathbf{a}_i\} = [\mathbf{S}_i] \frac{L}{\mathcal{A}} [\mathbf{B}] (\{\mathbf{a}_i\} - \{\mathbf{a}_{i-1}\}) \quad (4.22)$$

Especulación

¿Puede sacarse alguna conclusión a partir de aquí en lo que se refiere a la matriz $[\mathbf{B}]$? ¿Algo como $[\mathbf{S}_i] [\mathbf{B}]$ debe ser *of full rank* o lo contrario?

Por comparación con la ecuación (4.17), si $\{\mathbf{a}_i\} - \{\mathbf{a}_{i-1}\}$ es un autovector para $[\mathbf{S}] = [\mathbf{S}_i]$, se concluye que:

$$\{\mathbf{a}_{i+1}\} - \{\mathbf{a}_i\} = \frac{L}{\mathcal{L}} (\{\mathbf{a}_i\} - \{\mathbf{a}_{i-1}\}) \quad (4.23)$$

lo que parece asegurar la convergencia si $L < \mathcal{L}$. Para ello, la condición es que $[\mathbf{S}_i] = [\mathbf{S}_{i+1}]$, lo que no parece que, en general, vaya a suceder.

Dimensionados y geometrías ‘conformes’

Definición 2 *Un dimensionado $\{\mathbf{a}\}$ es ‘conforme’ con una distribución de cargas $\{\mathbf{q}\}$ cuando*

$$[\mathbf{S}] = [\mathbf{S}^q] \quad (4.24)$$

La idea es que el patrón de signos $[\mathbf{S}]$ indica en que ‘cuadrante’ del espacio vectorial se encuentra el vector de solicitaciones. Si el peso propio se distribuye de forma proporcional a la carga útil, ambos vectores de carga están alineados y lo mismo ocurre con las correspondientes solicitaciones. La definición anterior relaja la condición de semejanza, imposible en la práctica, requiriendo únicamente que tanto $\{\mathbf{n}^q\}$ como $\{\mathbf{n}^q\} + \{\mathbf{n}^p\}$ se encuentren en el mismo ‘cuadrante’ del espacio, sin que sea preciso que estén alineados.

Si la ecuación (4.17) tiene solución con $[\mathbf{S}^q] = [\mathbf{S}^p] = [\mathbf{S}]$ en las condiciones antedichas, determina el alcance de una cercha y su dimensionado conforme $\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{a}_{\mathcal{L}}\}$ para ese tamaño, que además es estricto (pueden existir varios). Si la solución no existe, la geometría empleada no tiene dimensionado conforme con la distribución de carga para todos los tamaños que pueda alcanzar y su alcance *depende de su tamaño*. (Debe notarse que para tamaños suficientemente pequeños el dimensionado siempre es conforme: si $L \rightarrow 0$ entonces $[\mathbf{S}^p] \rightarrow [\mathbf{S}^q]$.)

Definición 3 Una geometría es conforme con una distribución de carga útil $\{\mathbf{q}\}$ si la ecuación (4.17) con $[\mathbf{S}] = [\mathbf{S}^q]$ admite solución real \mathcal{A}/\mathcal{L} con una distribución $\{\mathbf{a}_{\mathcal{L}}\}$ de componentes positivas.

Para una geometría conforme existe siempre un dimensionado conforme para cualquier tamaño alcanzable.

Geometrías ‘no defectivas’

Supongamos que la ecuación (4.17) tiene solución real para un patrón concreto de signos $[\mathbf{S}]$. En particular, supongamos que la matriz $[\mathbf{S}][\mathbf{B}]$ sea no defectiva, es decir, diagonalizable, con g valores propios reales. En tal caso existe una matriz diagonal $[\mathbf{\Lambda}] = \text{diag}(\mathcal{A}/\mathcal{L}_i)$, tal que:

$$[\mathbf{S}][\mathbf{B}] = [\mathbf{X}][\mathbf{\Lambda}][\mathbf{X}]^{-1} \quad (4.25)$$

estando la matriz $[\mathbf{X}]$ formada por el conjunto de vectores propios que, en las condiciones antedichas, forman una base ortogonal del espacio de los dimensionados (o de las solicitaciones, salvo un factor de escala).

En tal caso, la ecuación (4.13) puede escribirse:

$$\left([\mathbf{1}] - \frac{L}{\mathcal{A}} [\mathbf{\Lambda}] \right) [\mathbf{X}]^{-1} \{\mathbf{a}\} = [\mathbf{X}]^{-1} \{\mathbf{a}_q\} \quad (4.26)$$

Puesto que $[\mathbf{X}]^{-1}$ es la matriz de cambio de base, la ecuación anterior puede verse en los ejes definidos por los vectores propios:

$$\left([\mathbf{1}] - \frac{L}{\mathcal{A}} [\mathbf{\Lambda}] \right) \{\mathbf{b}\} = \{\mathbf{b}_q\} \quad (4.27)$$

en la que $\{\mathbf{b}\}$ o $\{\mathbf{b}_q\}$ son las distribuciones $\{\mathbf{a}\}$ o $\{\mathbf{a}_q\}$ pero en coordenadas ‘propias’. Puesto que la matriz que resulta en el miembro izquierdo es diagonal, podemos escribir:

$$\text{diag} \left(1 - \frac{L}{\mathcal{L}_i} \right) \{\mathbf{b}\} = \{\mathbf{b}_q\} \quad (4.28)$$

cuya solución es trivial:

$$\{\mathbf{b}\} = \text{diag} \left(\frac{\mathcal{L}_i}{\mathcal{L}_i - L} \right) \{\mathbf{b}_q\} \quad (4.29)$$

Ahora vemos con claridad que si $L \rightarrow \min_i(\mathcal{L}_i)$, $\{\mathbf{b}\}$ debe ‘crecer’ hasta el infinito (si $L > \min_i(\mathcal{L}_i)$, $\{\mathbf{b}\}$ tendría alguna componente negativa).

Con la ecuación (4.15) podemos calcular como varía la intensidad de carga con el tamaño. Si hay un único valor propio con multiplicidad g , obtenemos:

$$\frac{Q}{\mathbf{f}A} = 1 - \frac{L}{\mathcal{L}} \quad (4.30)$$

en la que reconocemos la definición de *talla estructural* de la teoría estándar ($\mathcal{X} = L/\mathcal{L}$) y el origen de la ‘regla’ para el cálculo de la ‘eficacia estructural’ o del *rendimiento*. Sin embargo, vemos también que las condiciones para que la regla de la teoría estándar sea aplicable son muy estrictas (un único alcance real con multiplicidad g) y, en general, no se cumplirán: tal regla es una buena aproximación en muchas ocasiones, pero sólo eso.

4.5. Un ejemplo

Para mejor ilustrar el significado del planteamiento esbozado lo mejor es un ejemplo muy simple, bien conocido. En la barra vertical de la figura, las componentes ‘en los nudos’ del peso propio valen $\rho AL/2$, mientras la componente de carga en el nudo inferior es simplemente Q . El requisito de resistencia es:

$$S \left(\frac{Q}{A\mathbf{f}} + \frac{1}{2} \frac{L}{\mathcal{A}} \right) = 1$$

Puesto que S sólo puede tener dos valores (± 1) tenemos dos ecuaciones posibles. Para $S = 1$ y $Q = 0$ resulta un alcance doble del habitual, $\mathcal{L} = 2\mathcal{A}$, en razón de que no hay límite a la tensión máxima, tan sólo a la tensión media. Para $S = -1$, el alcance es negativo, salvo que se considere $Q < 0$ (con $L = 0$ resulta, efectivamente $Q = -A\mathbf{f}$); en este último caso, un modelo realista predice una sollicitación máxima en el extremo superior de valor $\rho AL + Q$, y el requisito de resistencia sobre la tensión máxima sería:

$$-(\rho AL + Q) = A\mathbf{f}$$

resultando para Q :

$$Q = -\rho AL - A\mathbf{f} = -A\mathbf{f} \left(\frac{L}{\mathcal{A}} + 1 \right)$$

y el alcance resulta también negativo ($\mathcal{L} = -\mathcal{A}$), salvo que consideremos $Q < 0$.

La diferencia sustancial está por tanto en la que hay entre la tensión media (derivada de considerar una sollicitación constante en la barra) y la tensión máxima (deducida tras considerar los efectos locales del peso propio sobre la propia barra, y no sólo sobre los nudos de la estructura).

Capítulo 5

Cerchas isostáticas: tensión máxima y sección constante

Para poder considerar la tensión máxima local en cada barra de la cercha resulta imprescindible hacer alguna ‘apuesta’ sobre la forma de diseñarlas. La generalización más sencilla del modelo de tensión media es pensar en barras de área constante. Pero al considerar la variación de tensión a lo largo de la barra, éste ya no es constante y el dimensionado no es estricto respecto a la tensión máxima. El requisito de resistencia tendrá que establecerse como un límite a la tensión máxima de la pieza (‘tensión de comparación’).

5.1. Flexión compuesta con sección constante

La barra de la figura 5.1 pertenece a una cercha y, en el equilibrio, está sometida a una sollicitación normal N . Sus características geométricas son: área \mathbf{A} , radio de giro \mathbf{i} , longitud l , y canto \mathbf{h} . Su peso por unidad de longitud es $\rho\mathbf{A}$. Si la barra está articulada en sus extremos, la flexión local viene dada por:

$$\mathbf{M}(x) = \frac{1}{2}\rho\mathbf{A}lx - \frac{1}{2}\rho\mathbf{A}\frac{x^2}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{2}\rho\mathbf{A}x\left(l - \frac{x}{\cos(\alpha)}\right)$$

La tensión normal debida a la flexión depende del módulo resistente de la sección. Para secciones con un eje horizontal de simetría (las más adecuadas para flexión compuesta), el módulo resistente \mathbf{W} es:

$$\mathbf{W} = 2\left(\frac{\mathbf{i}}{\mathbf{h}}\right)^2 \frac{\mathbf{h}}{l}\mathbf{A}l = 2\frac{\phi^2}{\lambda_b}\mathbf{A}l$$

en la que $\lambda_b = l/\mathbf{h}$ es la esbeltez geométrica de la pieza, y $\phi = \mathbf{i}/\mathbf{h}$ es un factor de forma de la sección empleada en la pieza. (Así, si todas las piezas de la cercha se diseñan con la misma forma de sección, o cuando menos con formas afines, ϕ será una constante de la cercha.)

El esfuerzo normal local (al que hay sumar la sollicitación N) a lo largo de la longitud es:

$$\mathbf{N}(x) = -\frac{1}{2}\rho\mathbf{A}l\sin(\alpha) + \rho\mathbf{A}\frac{x}{\cos(\alpha)}\sin(\alpha)$$

La tensión normal debida a la tracción local se obtiene directamente dividiendo por el área de la pieza, \mathbf{A} .

Las tensiones locales son críticas en las caras de la pieza, a una distancia $t = \pm\mathbf{h}/2$ de su centro de gravedad. Ello es así porque la tracción produce tensiones uniformes en la sección mientras que la flexión produce una tensión media nula en el centro de gravedad, con tracciones y compresiones en caras opuestas. El incremento de tensión en cada sección se obtiene sumando ambos efectos:

$$\Delta\sigma = \frac{1}{\mathbf{A}}\left(\mathbf{N} \pm \frac{\lambda_b}{2\phi^2 l}\mathbf{M}\right)$$

y utilizando la coordenada s y la geometría de la ‘cercha unidad’ podemos escribir:

$$\frac{\Delta\sigma(s)}{\rho L} = \frac{1}{4}\ell\left\{\left(4\frac{s}{l} - 2\right)\sin(\alpha) \pm \frac{\lambda_b}{\phi^2}\frac{s}{l}\cos(\alpha)\left(1 - \frac{s}{l}\right)\right\}$$

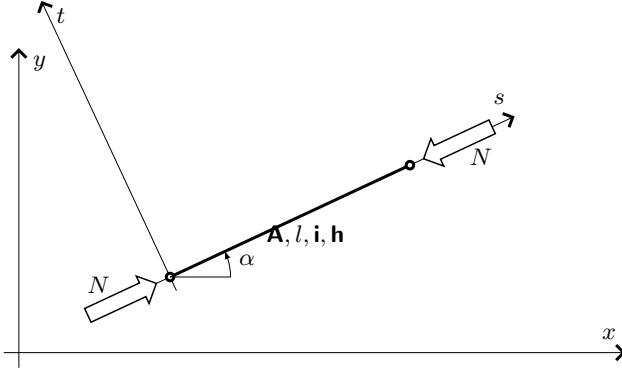


Figura 5.1: Barra de sección constante

Si la esbeltez de cada barra no varía con L y la forma de su sección sólo experimenta transformaciones afines entonces, para cerchas con esquemas semejantes, el incremento de tensión normal en cada barra debido a los efectos locales de su peso propio es proporcional al tamaño y la razón de la proporción está completamente determinada en la cercha 'unidad'. Es decir, que denominando β a la proporción λ_b/ϕ^2 , el incremento de tensión viene dado por $\rho L \cdot \varphi(\alpha, \beta, \ell, s/l)$ con:

$$\varphi(\alpha, \beta, \ell, s/l) = \frac{1}{4} \ell \left\{ \left(4 \frac{s}{l} - 2 \right) \sin(\alpha) \pm \frac{\lambda_b}{\phi^2} \frac{s}{l} \cos(\alpha) \left(1 - \frac{s}{l} \right) \right\}$$

Es posible cumplir con estas condiciones si se usan secciones afines cuya forma esté definida por dos parámetros. Por ejemplo, en una sección rectangular de canto h y ancho b , puede decidirse el canto para mantener constante la esbeltez, y el ancho para dimensionar la pieza estrictamente en la sección más solicitada; y como el radio de giro de un rectángulo es $h/\sqrt{12}$, $\phi = 1/\sqrt{12}$ y se cumplen las dos condiciones (para sección rectangular con esbeltez geométrica 10, $\beta = 120$). Por tanto, bastará con elegir formas de sección afines definidas por dos parámetros independientes: no es una condición fácil de cumplir. Por ejemplo, *no podemos elegir* perfiles IPE, cuyo único parámetro es el canto. Tampoco tubos redondos huecos definidos por su diámetro y el espesor de su pared: no son afines entre sí, salvo que la proporción entre espesor y diámetro sea constante y entonces no tenemos dos parámetros, sólo uno. Sí podemos elegir tubos huecos de sección elíptica con una proporción constante entre el espesor mínimo y el ancho: son afines entre sí y tenemos sus dos diámetros como parámetros.

Si se desea cumplir más condiciones en el diseño de la pieza es necesario aumentar el número de parámetros que la definen, conservando la relación de afinidad. Se trata, de hecho, de una situación incómoda, difícil de cumplir en la práctica.

En cada sección, la tensión restante, útil para resistir carga, es $f - \text{abs}(\Delta\sigma)$:

$$f - \text{abs}(\Delta\sigma) = f \left(1 - \frac{L}{A} \cdot \varphi(\alpha, \beta, \ell, s/l) \right)$$

Las secciones críticas son aquellas donde la tensión útil es mínima, es decir, aquellas donde φ sea máxima. Puesto que $\Delta\sigma(s)$ es una parábola puede existir una sección crítica en la zona central de la pieza, que podemos determinar resolviendo la ecuación $\partial\Delta\sigma(s)/\partial s = 0$, obteniéndose dos puntos críticos:

$$0 \leq \frac{s_0}{l} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{4 \tan(\alpha)}{\beta} \right) \leq 1 \quad \text{con} \quad \text{abs}(\tan(\alpha)) \leq \frac{\beta}{4} \quad (5.1)$$

Con las condiciones de diseño sobre la esbeltez y la forma, resulta que la posición relativa de tales puntos, simétricos respecto al centro del vano, varía exclusivamente con la inclinación de cada barra, no dependiendo del tamaño unitario de la barra ℓ . El incremento de tensión en ambos puntos sólo se diferencia en el signo de la tensión:

$$\Delta\sigma(s_0) = \pm \frac{1}{16} \rho l \frac{16\phi^4 - 16\phi^4 \cos(\alpha)^2 + \lambda_b^2 \cos(\alpha)^2}{\phi^2 \lambda_b \cos(\alpha)}$$

$$\begin{aligned}
&= \pm \rho L \times \frac{\ell}{\beta} \left\{ \frac{1}{\cos(\alpha)} + \left(\frac{\beta^2}{16} - 1 \right) \cos(\alpha) \right\} \\
&= \pm \rho L \times \varphi_0(\alpha, \beta, \ell)
\end{aligned} \tag{5.2}$$

en la que $\varphi_0(\alpha, \beta, \ell) = \varphi(\alpha, \beta, \ell, s_0/l)$.

En las secciones extremas, aunque localmente no críticas, los valores de tensión pueden ser pésimos absolutos, con incrementos de tensión de valor $\pm \rho l \sin(\alpha)/2$. Esto es lo que ocurre cuando s_0 (o α) no cumple la condición (5.1).

Por tanto hay como mucho dos puntos, los extremos o los puntos s_0 , en los que la tensión puede alcanzar un máximo absoluto: el extremo o el punto s_0 que hay que considerar depende del signo de N . Pero sea cual sea este signo, el valor absoluto de la tensión útil es el que resulta de restar a la tensión segura \mathbf{f} el mayor incremento en valor absoluto, sea el del extremo o el del vano:

$$\text{máx} \left(\frac{\Delta\sigma}{\rho L} \right) = \begin{cases} \text{abs}(\varphi_0(\alpha, \beta)) & \text{si } \text{abs}(\tan \alpha) \leq \frac{\beta}{4}, \\ \frac{1}{2} \ell \text{abs}(\sin(\alpha)) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para cada barra i , el requisito de resistencia puede expresarse ahora como:

$$(\mathbf{f} - \{\text{máx}(\Delta\sigma)\}_i) A_i \geq S_i N_i$$

Denominado σ_i a la tensión útil en cada barra, $\mathbf{f} - (\text{máx}(\Delta\sigma))_i$, tendremos:

$$\sigma_i = \mathbf{f} \left(1 - \frac{L}{\mathcal{A}} \varphi_{\text{cr}}(\alpha_i, \beta_i) \right)$$

con:

$$\varphi_{\text{cr}}(\alpha_i, \beta_i) = \begin{cases} \text{abs}(\varphi_0(\alpha_i, \beta_i)) & \text{si } \text{abs}(\tan \alpha_i) \leq \frac{\beta_i}{4} \text{ (ec. 5.2),} \\ \frac{1}{2} \ell_i \text{abs}(\sin(\alpha_i)) & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{5.3}$$

La situación, en resumen, es como sigue: la figura de la cercha, la esbeltez geométrica de sus barras y el factor de forma de sus ‘gruesos’, originan una distribución de ‘gasto unitario y local’ de tensión debido al peso propio, $\{\varphi_{\text{cr}}\}$. Ese gasto, además, crece proporcionalmente con el tamaño. Lo que queda de tensión, es la tensión útil capaz de equilibrar la carga total, que incluye, además de la carga útil, el efecto global del propio peso.

5.2. Equilibrio de cerchas con flexión local

Podemos ahora escribir la ecuación general de equilibrio, análoga a la ecuación (4.11):

$$\left\{ [\mathbf{1}] - \frac{L}{\mathcal{A}} (\text{diag}(\{\varphi_{\text{cr}}\}) + [\mathbf{S}][\mathbf{B}]) \right\} \cdot \{\mathbf{a}\} = \frac{Q}{\mathbf{f}\mathcal{A}} [\mathbf{S}] \{\mathbf{n}^q\} \tag{5.4}$$

El efecto neto no parece dramático: hay un variación de la matriz $[\mathbf{C}]$ al contabilizar el efecto local del peso propio. El problema por lo demás tiene las mismas características ya comentadas.

Pero merece la pena subrayar que el efecto local del peso propio *es independiente* del patrón de signos $[\mathbf{S}]$ correspondiente a un dimensionado $\{\mathbf{a}\}$ y a un patrón de cargas $\{\mathbf{q}\}$. Esta es una diferencia sustancial: el efecto local del peso propio supone una pérdida neta de resistencia que en ningún modo puede ser compensada por una distribución ‘inteligente’ del dimensionado (capaz de compensar en alguna medida el efecto de la carga útil). Incluso si especulamos con que $[\mathbf{S}] = [\mathbf{0}]$, es decir, que todos los efectos globales son nulos, llegamos a un problema de valores propios que sintetiza el efecto local:

$$\text{diag}(\{\varphi_{\text{cr}}\}) \{\mathbf{a}\} = \frac{A}{\mathcal{L}^\ell} \{\mathbf{a}\} \tag{5.5}$$

Puesto que tenemos una matriz diagonal, las componentes de $\{\varphi_{\text{cr}}\}$ son *precisamente* los valores propios. Cada barra define un alcance local para la cercha:

$$\frac{\mathcal{L}_i^\ell}{\mathcal{A}} = \frac{1}{\varphi_{\text{cr},i}}$$

Así, para barras prácticamente verticales tendremos que:

$$\frac{\mathcal{L}_i^\ell}{\mathcal{A}} = \frac{2}{\ell_i \text{abs}(\sin(\alpha_i))}$$

Mientras que para barras lo suficientemente ‘desplomadas’ como para que la flexión local sea dominante:

$$\frac{\mathcal{L}_i^\ell}{\mathcal{A}} = \frac{\beta}{\ell} \frac{1}{\text{abs} \left(\frac{1}{\cos(\alpha)} + \left(\frac{\beta^2}{16} - 1 \right) \cos(\alpha) \right)}$$

La importancia de estos alcances locales puede verse si analizamos las condiciones en que la ecuación (5.4) tiene solución. La matriz que rige el conjunto de ecuaciones es:

$$[\mathbf{D}] = \left\{ [\mathbf{1}] - \frac{L}{\mathcal{A}} (\text{diag}(\{\varphi_{\text{cr}}\}) + [\mathbf{S}] [\mathbf{B}]) \right\}$$

Puesto que el rango de $[\mathbf{B}]$ es siempre menor que g , si $L = \mathcal{L}_i^\ell$ entonces la posibilidad de que $[\mathbf{D}]$ sea singular para ese tama no es muy elevada (basta que i corresponda con un valor singular nulo de $[\mathbf{B}]$). Por tanto, los alcances locales \mathcal{L}_i^ℓ tienen una alta probabilidad de ser también alcances globales.

Al considerar la variación de \mathcal{L}_i^ℓ pueden destilarse algunas reglas de diseño para las piezas de la cercha *si lo que se desea es aumentar el ‘alcance local’*:

- Lo mejor son piezas de longitud pequeña en proporción al tamaño: el alcance local de cada barra es inversamente proporcional a su longitud en la cercha unidad.
- Para un factor de diseño β constante, el alcance *parece ser* máximo para barras con la inclinación crítica en la que $\tan(\alpha) = \beta/4$ (los puntos críticos en el vano se sitúan justamente en los extremos):

$$\max_{\alpha} \frac{\mathcal{L}^\ell}{\mathcal{A}} = \frac{2}{\ell} \sqrt{1 + \frac{16}{\beta^2}}$$

Para $\beta \rightarrow \infty$ el máximo alcance tiende a $2\mathcal{A}/\ell$; correspondientemente para $\beta \rightarrow 0$ el alcance es infinito. Aquí opera el hecho de que sólo estamos considerando la tensión normal, por lo que debe ser $\lambda_b \geq 2$ para respetar los límites del principio de Saint Venant. Para sección rectangular, significa que $\beta \geq 24$ y el máximo alcance ‘a nuestro alcance’ resulta ser $\approx 2,03\mathcal{A}/\ell$, es decir que en números redondos podemos retener $2\mathcal{A}/\ell$ como una ‘buena’ acotación del alcance local.

- En el caso de barras horizontales y la condición $\lambda_b \geq 2$, lo mejor que podemos conseguir es utilizar una sección ideal con $\phi^2 = 1/4$ y $\beta = 8$, lo que sitúa el máximo alcance en $2\mathcal{A}/\ell$. Si el tamaño de la cercha se divide en m módulos, $\ell = 1/m$ y el máximo alcance local sera del orden de $2m\mathcal{A}$, lo que sugiere que el número mínimo de módulos en una estructura grande debe ser $m \gg L/(2\mathcal{A})$. Para el caso de sección rectangular y esbeltez moderada ($\lambda = 10$), un cálculo similar sugiere $m \gg 3L/(2\mathcal{A})$. Son reglas habituales, fáciles de cumplir.
- Si existen barras verticales que atraviesan todo el canto de una cercha de esbeltez global λ , $\ell = h/L = 1/\lambda$ y el máximo alcance local es del orden de $2\mathcal{A}\lambda$. Por tanto, una estructura *grande* con un esquema sencillo en celosía, para ser viable *probablemente tendrá que ser esbelta*.
- Con sección ideal y $\lambda \geq 2$ ($\beta = 8$), el alcance es máximo para $\tan \alpha = 2$ ($\alpha = 63^\circ$), con un valor $2,24\mathcal{A}/\ell$, lo que para celosías simples sugiere emplear triángulos equiláteros (regla bien conocida).
- Finalmente, para las barras inclinadas ($\tan \alpha < \beta/4$), β *disminuye* el alcance local, aunque de forma sólo significativa cuando pasamos de valores ‘pequeños’ (como 12) a valores ‘medianos’ (como 120); un nuevo aumento de magnitud (de 120 a 1200) no introduce variaciones significativas. Esta ‘insignificancia’ se vuelve irrelevancia para barras casi verticales ($\tan \alpha > \beta/4$), el alcance no depende de β y para $\lambda_b \geq 2$ y $\phi^2 \leq 1/4$ permanece prácticamente constante en el valor $2\mathcal{A}/\ell$.

La discusión anterior sugiere una estrategia de diseño: que el alcance local de todas las barras de la cercha sea constante. En tal caso la tensión útil en todas las barras sería la misma fracción de la tensión segura \mathbf{f} , y el problema se reduciría al del capítulo anterior, es decir, a determinar el alcance global con una tensión media constante, igual a la útil, aunque con una valor menor que la que corresponde al material. Sin embargo, *tal estrategia es imposible* mientras que aceptemos la condición $\lambda_b \geq 2$, debido a que $\phi \leq 1/2$ es un límite insuperable en términos absolutos.

Lo siguiente mejor es adoptar como estrategia de diseño precisamente $\lambda_b = 2$, $\phi^2 = 1/4$ y $\beta = 8$, lo que permite obtener una cercha *ideal*, cuyos alcances serían cotas significativas (pero inalcanzables) de las cerchas reales. Para una cercha ideal, $\{\varphi_{cr}\}$ depende tan sólo del esquema de la cercha, en cierto sentido es una propiedad de la cercha:

$$\varphi_{cr,i}(\alpha_i, \beta_i) = \begin{cases} \frac{\ell_i}{8} \cdot \text{abs} \left(\frac{1 + 3 \cos^2 \alpha_i}{\cos \alpha_i} \right) & \text{si } \text{abs}(\tan \alpha_i) \leq 2 \\ \frac{1}{2} \ell_i \cdot \text{abs}(\sin(\alpha_i)) & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (5.6)$$

Nótese que este diseño ideal es uno de los posibles diseños estrictos y su peso no es necesariamente mínimo. Sin embargo, se trataría del diseño que mayor la tensión útil disponible.

La estrategia alternativa consiste en adoptar como nuevas variables de diseño la esbeltez de las barras y la forma de la sección en cada pieza, y buscar, para cada tamaño, el diseño de mayor rendimiento.

5.3. Dimensionados ideal y estricto

Con el mismo planteamiento y nomenclatura que en §4.6, podemos ahora definir el dimensionado ‘estricto’ de una cercha con piezas de sección constante respecto a la tensión máxima de sus barras:

Definición 4 *Una cercha está dimensionada estrictamente respecto a la tensión máxima de sus barras, es decir, la tensión máxima de todas sus barras es constante, si*

$$[\mathbf{S}] \{\mathbf{N}\} = \mathbf{f}A \left([\mathbf{1}] - \frac{L}{\mathcal{A}} \cdot \text{diag}(\{\varphi_{cr}\}) \right) \{\mathbf{a}\} \quad (5.7)$$

Cuando el contexto deshaga cualquier ambigüedad, tales cerchas se denominarán en lo sucesivo cerchas estrictas.

La diferencia que hay que notar es que un dimensionado estricto respecto a la tensión media es *único*, mientras que hay múltiples diseños estrictos respecto a la tensión máxima. De entre todos ellos merece especial atención el diseño ideal.

Definición 5 *Una cercha es ideal si está dimensionada estrictamente respecto a la tensión máxima de sus barras, y el factor de diseño de todas es ellas es $\beta = 8$.*

Cuando el contexto deshaga cualquier ambigüedad, tales cerchas se denominarán en lo sucesivo cerchas ideales.

Apéndice A

Mecánica de un universo plano

Nadie podrá visitar nunca un universo semejante, pero pueden decirse algunas cosas sobre su mecánica.

Ciñendonos a materiales isotrópos y de comportamiento lineal, las relaciones entre tensiones y deformaciones serían similares a las usuales para estados planos en tres dimensiones. En concreto, en tensiones principales, y denotando por ν el coeficiente de Poisson y por E por el módulo de Young:

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a - \nu \sigma_b}{E} \quad \varepsilon_b = \frac{\sigma_b - \nu \sigma_a}{E}$$

y sus inversas:

$$\sigma_a = \frac{E(\varepsilon_a + \nu \varepsilon_b)}{1 - \nu^2} \quad \sigma_b = \frac{E(\varepsilon_b + \nu \varepsilon_a)}{1 - \nu^2}$$

La densidad de energía de deformación se calcula como la suma de todo el trabajo realizado en ambas caras para deformar un volumen infinitesimal: **OJO: si las direcciones principales de tensión no coinciden con las de deformación este cálculo puede no ser suficientemente general.**

$$U = \int \sigma_a d\varepsilon_a + \sigma_b d\varepsilon_b = \frac{1}{2} \frac{E(\varepsilon_a^2 + 4\nu \varepsilon_b \varepsilon_a + \varepsilon_b^2)}{1 - \nu^2}$$

La estabilidad energética de un universo semejante, requiere que $U \geq 0$ para cualquier deformación imaginable. Puesto que, en principio, ν es constante, su rango posible de valores debe ser compatible con la condición sobre U ; en consecuencia, $\nu = 0$ en este universo: al revés que en el nuestro, en el que una dilatación suele verse acompañada por una contracción perpendicular, aquí ambas direcciones están totalmente desacopladas.

Comprobación:

$$\begin{aligned} U &= 0 \\ \varepsilon_a^2 + 4\nu \varepsilon_b \varepsilon_a + \varepsilon_b^2 &= 0 \\ (\varepsilon_a + \varepsilon_b)^2 + 2\nu \varepsilon_b \varepsilon_a &= 0 \end{aligned}$$

Para una distorsión $\varepsilon_a + \varepsilon_b = 0$ y $\varepsilon_a \varepsilon_b < 0$, y en consecuencia tiene que ser $\nu = 0$.

Las ecuaciones generales del universo plano son por tanto:

$$U = \frac{1}{2} E(\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2) \quad \sigma_i = E\varepsilon_i$$

La energía de deformación podemos descomponerla, como es costumbre, en dos términos: la energía correspondiente a una dilatación uniforme y aquella otra correspondiente a una distorsión sin cambio de volumen. La primera resulta de integrar el trabajo realizado durante una expansión en ambas direcciones:

$$U_e = 2 \int \sigma d\varepsilon = E\varepsilon^2$$

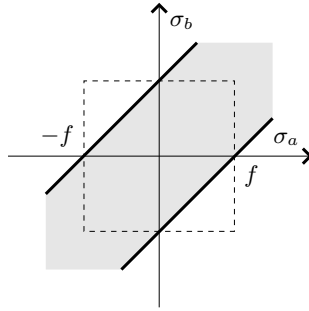


Figura A.1: CRITERIO DE HUBER Y VON MISES EN 2D

y como la deformación media es la semisuma de las deformaciones en cada dirección:

$$U_e = \frac{E}{4}(\varepsilon_a + \varepsilon_b)^2$$

La deformación debida a la distorsión es simplemente la diferencia:

$$U_d = U - U_e = \frac{1}{4} E (\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 = \frac{1}{4} \frac{(\sigma_a - \sigma_b)^2}{E}$$

Los criterios de rotura (o plasticidad) se establecerían, al igual que en nuestro mundo, por referencia a los ensayos de tracción o compresión simple. Así el criterio de rotura de Huber y Von Mises, postularía que en cualquier estado de deformación la energía de distorsión no puede superar la correspondiente al estado de tracción simple:

$$U_d(\sigma_b=0) = \frac{f^2}{4E}$$

siendo f la tensión de rotura en el ensayo de tracción. El criterio se cuantifica entonces con:

$$\frac{1}{4} \frac{(\sigma_a - \sigma_b)^2}{E} \leq \frac{f^2}{4E} \quad (\sigma_a - \sigma_b)^2 \leq f^2$$

Alternativamente:

$$\tau_{\max}^2 \leq \left(\frac{f}{2}\right)^2$$

Con este criterio, los estados admisibles de tensión pertenecen a la zona sombreada de la figura A.1, que se extiende hacia el infinito en la dirección de los estados biaxiales ($\sigma_a = \sigma_b$)¹. El espacio de las tensiones admisibles está limitado por dos rectas:

$$\sigma_b = \sigma_a + f \quad \sigma_b = \sigma_a - f$$

En coordenadas (x, y) , el criterio se expresa como:

$$\sigma_x^2 - 2\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 4\tau_{xy}^2 \leq f^2$$

¹Es en todo similar al criterio de Tresca en 3D: en 2D ambos criterios coinciden por ser $\nu=0$.