

Análisis dinámico tridimensional del sistema catenaria – pantógrafo en líneas ferroviarias de Alta Velocidad (350 km/h)

García de Jalón, Javier. España
jgjalon@etsii.upm.es

Jorroto Marcos, Federico. España
citef.fjorroto@etsii.upm.es

1. Introducción

Con el aumento de la velocidad de circulación de los ferrocarriles, el comportamiento dinámico del sistema catenaria-pantógrafo resulta cada vez más crítico debido al notable incremento en el número y duración de los despegues. Este fenómeno afecta negativamente a la correcta captación de corriente, originando a su vez perturbaciones de carácter electromagnético e incrementando el desgaste de la línea aérea.

Los programas de simulación constituyen una herramienta esencial en la fase de diseño para garantizar un correcto comportamiento dinámico de estos sistemas. Además, dada la dificultad de realización de pruebas de campo en líneas electrificadas y con tráfico continuo, estas simulaciones proporcionan también una gran ayuda para mejorar líneas ya construidas, así como para la elección del pantógrafo más adecuado a cada línea.

En este artículo, los autores presentan un programa informático sencillo y eficiente que permite analizar el comportamiento estático y dinámico de sistemas catenaria-pantógrafo. A diferencia de lo que suele ser habitual en la bibliografía, este programa permite realizar estudios 3-D de sistemas reales con decenas de miles de grados de libertad, considerando los efectos del descentramiento del hilo de contacto, del efecto del viento lateral, de la circulación en tramos curvos, de los cambios de seccionamiento, de las agujas aéreas y de catenarias con dos hilos de contacto. Esta herramienta se ha desarrollado en MatLab[®], está basada en el método de los elementos finitos (FEM) y hace uso de un elemento especial de tipo viga pretensada con el que se tiene en cuenta el efecto que produce la tensión en los cables sobre su rigidez a flexión.

Una de las mayores dificultades del problema es la introducción de la condición de contacto del pantógrafo con la catenaria ya que, como es sabido, las fuerzas móviles dan lugar a la aparición de problemas numéricos cada vez que éstas pasan por uno de los nudos del mallado, que se comportan como si fueran “puntos duros”. Este fenómeno, cuyo efecto disminuye con el tamaño de los elementos, es tanto más acusado cuanto mayor es la velocidad de la carga, por lo que resulta crítico en la simulación de pantógrafos circulando a alta velocidad, ya que obliga a utilizar elementos muy pequeños, con el consiguiente aumento del número de ecuaciones y del tiempo de cálculo. Para eliminar este problema se ha utilizado un mallado móvil del hilo de contacto, con el que han podido obtenerse resultados altamente satisfactorios en tiempos de

cálculo muy aceptables.

La magnitud del problema numérico viene dada por el número de grados de libertad y por el paso de integración utilizado, que está condicionado por el algoritmo de integración y la duración de los despegues. A modo de ejemplo, una simulación a lo largo de un seccionamiento de 20 vanos modelizado con elementos de 1m de longitud da lugar a 20000 ecuaciones, que deben resolverse 5000 veces por cada segundo de simulación. El programa contempla algunas características no lineales del sistema, como son la conexión-desconexión de péndolas y el acoplamiento-despegue de los pantógrafos.

Este programa ha sido validado a través de una normativa europea, y permite analizar el comportamiento estático y dinámico de diferentes sistemas, en los que se contempla la circulación simultánea de varios pantógrafos a lo largo de diversos vanos pertenecientes a catenarias simples, catenarias con péndola en "Y" y cambios de seccionamiento, dotadas de uno o dos hilos de contacto.

2. Modelización del sistema pantógrafo-catenaria

Ambos elementos se modelizan por separado. La catenaria se modeliza por medio de elementos finitos, utilizando un elemento viga especial que tiene en cuenta los efectos de la pre-tracción. El pantógrafo se modeliza mediante un sistema simplificado de masas, muelles y amortiguadores, aunque dado su pequeño nº de grados de libertad, su modelización como sistema multicuerpo no afecta apenas a la eficiencia numérica del programa.

2.1. Elementos viga 3-D pre-tensados

En la mecánica de hilos es habitual no despreciar los grandes desplazamientos pero sí la rigidez a flexión. Sin embargo, en el caso de la catenaria no se consideran grandes desplazamientos pero se tiene en cuenta la rigidez a flexión aumentada por la alta pre-tracción de los hilos. Tanto el cable de contacto como el sustentador (y el falso sustentador o péndola en "Y") se modelizan con elementos viga pre-tensada [1] que resultan mucho más precisos que los elementos estándar.

Las funciones de forma para las deformaciones de flexión de estas vigas son las siguientes:

$$N_y^i = \frac{\cos\left(u\frac{L-x}{L}\right) - \cos\left(u\frac{x}{L}\right) - u\frac{x}{L}\sin u - 1 + \cos u + u\sin u}{-2 + 2\cos u + u\sin u} \quad (1)$$

$$N_z^{ii} = \frac{u\left[\sin\left(u\frac{L-x}{L}\right) + \sin\left(u\frac{x}{L}\right) - \sin u\right]}{L(-2 + 2\cos u + u\sin u)} \quad (2)$$

$$N_{\theta_z}^i = \frac{L\left[-\sin\left(u\frac{L-x}{L}\right) - \sin\left(u\frac{x}{L}\right) + \cos\left(u\frac{L-x}{L}\right) - u\frac{x}{L} + u\frac{x}{L}\cos u + \sin u - u\cos u\right]}{u(-2 + 2\cos u + u\sin u)} \quad (3)$$

$$N_{\theta_y}^i = \frac{\cos\left(u\frac{L-x}{L}\right) - \cos\left(u\frac{x}{L}\right) + u\frac{x}{L}\sin\left(u\frac{L-x}{L}\right) - 1 + \cos u}{-2 + 2\cos u + u\sin u} \quad (4)$$

Su representación geométrica se observa en la Figura 1 junto con los polinomios cúbicos ordinarios, cuando el elemento mide 1m y 0.25m y el hilo está pretraccionado con 20kN.

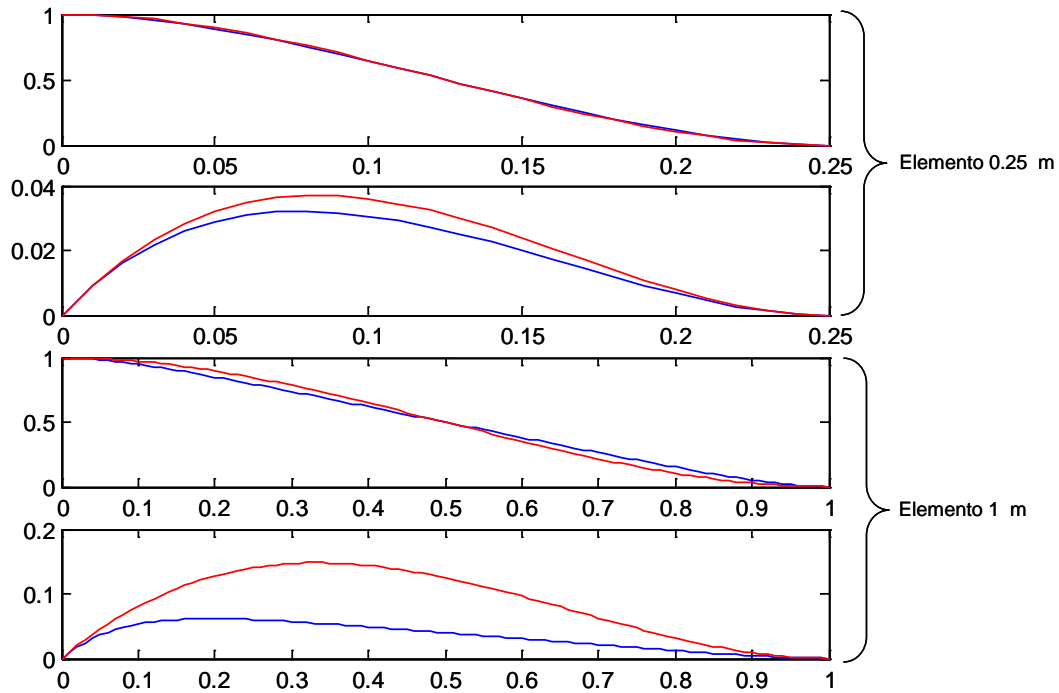


Figura 1. Funciones de forma especiales y estándar para elementos de 0.25m y 1m.

2.2. Modelización del pantógrafo

Los pantógrafos se diseñan para mantener lo más uniforme posible la fuerza de contacto con la catenaria. Por eso se distinguen dos partes fundamentales: una inferior, menos activa, que compensa las diferencias de altura de la catenaria a lo largo de las grandes distancias (viaductos, túneles, ...) y una superior, más ligera, que tiene que adaptarse a los movimientos rápidos y de pequeña amplitud (imperfecciones de la altura del hilo, flecha, vibraciones del techo de la locomotora, proceso de despegues, etc.). Los pantógrafos se pueden modelizar como un conjunto de masas, muelles y amortiguadores con 2 ó más grados de libertad (gdl). Dos masas son suficientes si el pantógrafo es simétrico y tres si es asimétrico (como suelen ser los utilizados en alta velocidad). Los parámetros de estos modelos simplificados se ajustan mediante ensayos experimentales, con lo que se consigue que se adapten bastante bien a la realidad.

2.3. Interacción pantógrafo-catenaria

Para la resolución del problema de la interacción entre el pantógrafo y la catenaria se han utilizado multiplicadores de Lagrange, por la facilidad con que permiten introducir las ecuaciones de restricción del contacto. Las ecuaciones de Lagrange pueden expresarse como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \sum \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{Q} \quad (5)$$

donde T , V y R son respectivamente la energía cinética, la potencial elástica y la función de disipación de Rayleigh; \mathbf{x} y $\dot{\mathbf{x}}$ los vectores de coordenadas y velocidades generalizadas; \mathbf{Q} el

vector de fuerzas generalizadas no derivables de un potencial; λ_i los multiplicadores de Lagrange, y \mathbf{a}_i los vectores que resultan de derivar las ecuaciones de restricción respecto al vector de coordenadas generalizadas.

Descomponiendo los desplazamientos de catenaria y pantógrafo en sus componentes básicas, las distintas componentes de la energía se pueden formular mediante las formas cuadráticas:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_c^T \mathbf{M}_c \dot{\mathbf{x}}_c + \frac{1}{2} \left\{ \dot{\mathbf{x}}_{pc}^T \quad \dot{\mathbf{x}}_{pb}^T \right\} [\mathbf{M}_p] \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{pc} \\ \dot{\mathbf{x}}_{pb} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{x}_c^T \mathbf{K}_c \mathbf{x}_c + \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{x}_{pc}^T \quad \mathbf{x}_{pb}^T \right\} [\mathbf{K}_p] \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{pc} \\ \mathbf{x}_{pb} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$R = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_c^T \mathbf{C}_c \dot{\mathbf{x}}_c + \frac{1}{2} \left\{ \dot{\mathbf{x}}_{pc}^T \quad \dot{\mathbf{x}}_{pb}^T \right\} [\mathbf{C}_p] \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{pc} \\ \dot{\mathbf{x}}_{pb} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

donde \mathbf{x}_c y $\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{pc} \\ \mathbf{x}_{pb} \end{Bmatrix}$ son los desplazamientos nodales de la catenaria y de la cabeza y la base del pantógrafo, respectivamente. De esta forma, el vector de coordenadas generalizadas es:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \dot{\mathbf{x}}_{pc} \\ \dot{\mathbf{x}}_{pb} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Las ecuaciones de restricción imponen la condición de que el pantógrafo permanezca en contacto con la catenaria, mediante igualdad de posiciones de la cabeza del pantógrafo y el hilo de contacto. El desplazamiento de la catenaria en el punto de contacto se calcula aplicando el principio de superposición: es la suma del desplazamiento debido a los desplazamientos nodales de la catenaria y el desplazamiento de empotramiento perfecto dentro de dicho elemento. El desplazamiento del punto de contacto se puede expresar, por tanto, como:

$$\mathbf{x}_{contact} = \mathbf{N}(t)^T \mathbf{x}_c + k \cdot F \quad (10)$$

donde $\mathbf{N}(t)$ es el vector de funciones de forma del elemento, F es la fuerza de contacto y k es el desplazamiento de empotramiento perfecto para un fuerza de contacto unitaria (Figura 2).

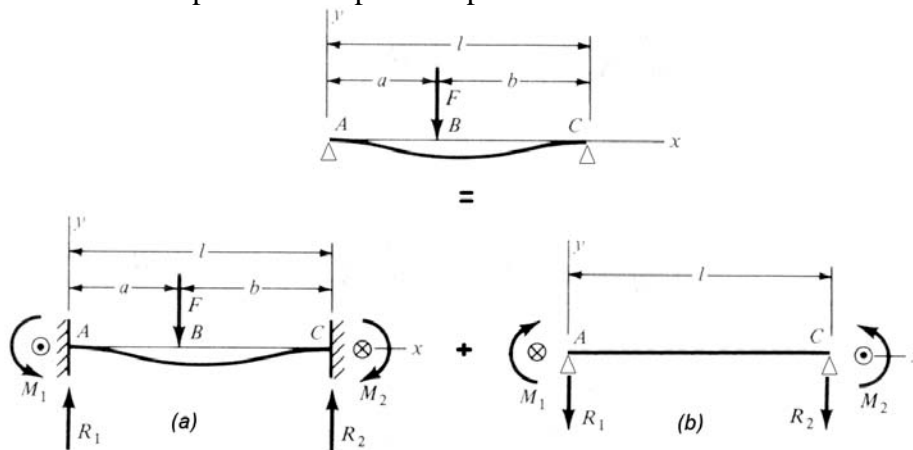


Figura 2 Desplazamiento del punto de contacto del hilo aplicando superposición.

Para el caso más sencillo de un pantógrafo y un hilo de contacto la ecuación de restricción es:

$$\mathbf{N}(t)^T \mathbf{x}_c + k \cdot F - x_{pc} = f(v \cdot t) \quad (11)$$

donde $f(v \cdot t)$ es la predeformación o flecha del hilo de contacto, que es función del espacio recorrido por el tren en un tiempo t . La derivada de las ecuaciones de restricción (11) respecto al vector de coordenadas generalizadas tiene la forma:

$$\mathbf{a}(t)^T = \mathbf{N}(t)^T \{-1, 0, \dots, 0\} \quad (12)$$

Finalmente, el vector \mathbf{Q} de fuerzas generalizadas comprende la fuerza estática aplicada por el pantógrafo F_e , la fuerza aerodinámica F_a , y las fuerzas originadas por el movimiento del techo de la locomotora. Utilizando notación matricial, las ecuaciones dinámicas de la catenaria y del pantógrafo vienen dadas por la expresión:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_c & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_c \\ \ddot{\mathbf{x}}_{pc} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{pb} \\ \ddot{\lambda} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_c & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_c \\ \dot{\mathbf{x}}_{pc} \\ \dot{\mathbf{x}}_{pb} \\ \dot{\lambda} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_c & \mathbf{0} & \mathbf{N}(t) \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_p & \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \\ \mathbf{N}(t)^T & \begin{Bmatrix} 0 & -1 \end{Bmatrix} & -k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_{pc} \\ \mathbf{x}_{pb} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ -F_e \\ f(v \cdot t) \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Observando este sistema de ecuaciones diferenciales se comprende el significado físico del multiplicador de Lagrange. Así, el producto $\mathbf{N}(t) \cdot \lambda$ se identifica con las fuerzas nodales equivalentes correspondientes a la fuerza F ejercida por el pantógrafo en un punto interior de un elemento. De aquí se deduce que los multiplicadores de Lagrange λ son las fuerzas de contacto entre pantógrafo y catenaria. En la ecuación matricial (13) sólo la matriz de rigidez tiene términos dependientes del tiempo, que están concentrados en las últimas filas y columnas. Esta propiedad permitirá optimizar el tiempo de cálculo.

2.4. Integración del sistema de ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones (13) resultan no lineales debido a la conexión y desconexión de péndolas, y a las pérdidas de contacto entre pantógrafo y catenaria. Como consecuencia las matrices en (13) no son constantes a lo largo de la integración, y se deben alterar conforme la propia integración da lugar a unos estados u otros. Es por esto que se ha optado por métodos de integración adaptados a las características del problema, tales como los integradores estructurales, incluyendo cierto amortiguamiento numérico. El α -method de Hilber, Hughes y Taylor [?] ha sido el integrador utilizado, debido a los buenos resultados obtenidos y la posibilidad de controlar la disipación.

2.5. El problema numérico de las cargas móviles

Es conocido que si una fuerza puntual cruza en un análisis dinámico un nudo de la malla en una discretización por elementos finitos se producen problemas de tipo numérico [2], [3]. La Figura 3 muestra un cable biempotrado de 120m de longitud con elementos finitos de 1.5m. En contacto con el hilo se mueve un pantógrafo de dos gdl a 50 m/s. En este caso no está permitida la separación de cable y pantógrafo, de forma que aparecen fuerzas positivas cuando cable y pantógrafo tienden a separarse. Pueden observarse grandes oscilaciones en la fuerza de contacto, claramente ligadas a la longitud del elemento finito que se utiliza.

El problema se puede resolver refinando la discretización como se ve también en la Figura 3 (línea roja), donde el tamaño de los elementos se ha reducido a 0.10m. Esta solución implica un fuerte incremento en coste computacional.

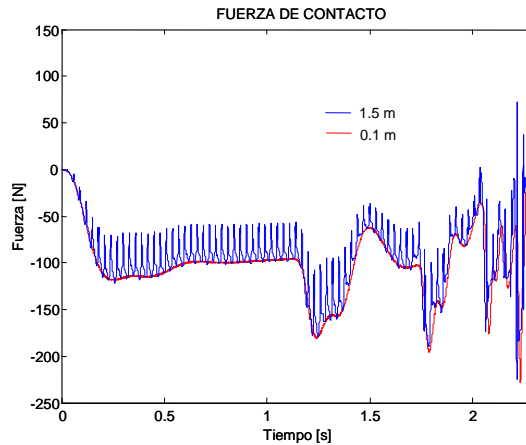


Figura 3. Fuerza de contacto pantógrafo-catenaria.

2.6. Descripción de la solución adoptada

A la solución del acoplamiento mediante multiplicadores de Lagrange según la ec. (13) se le denomina solución “exacta”. Algunos autores añaden a la ecuación de compatibilidad un muelle de contacto. A este tipo de solución se le puede llamar “aproximada”. Una posible solución al problema citado ha consistido en utilizar la solución “aproximada”. Otra posible solución consiste en aproximar la carga de contacto puntual mediante una función continua más suave. En este trabajo se ha preferido mantener las fuerzas puntuales.

La solución preferida por los autores de este trabajo ha consistido en implementar un refinamiento móvil del mallado, de modo que siempre existen elementos más pequeños en la zona de contacto pero sólo en ella, manteniendo elementos de mayor tamaño en el resto del modelo. Este método se complementa con la utilización de integradores con disipación numérica. Se parte de un mallado general uniforme como el mostrado en la Figura 4 y se ensamblan las matrices correspondientes de rigidez, inercia y amortiguamiento,.

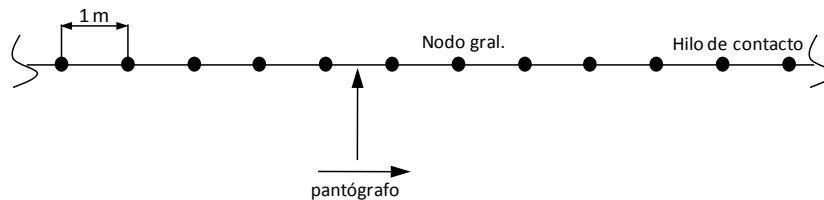


Figura 4. Mallado uniforme en el espacio y constante en el tiempo.

A continuación se realiza un mallado más fino en la zona de contacto del pantógrafo con la catenaria, es decir en el elemento de contacto y en al menos dos elementos por delante según se observa en la Figura 5. Cuando el pantógrafo pasa a un nuevo elemento el elemento anterior vuelve a su tamaño anterior y se refina el mallado en un nuevo elemento por delante. Los des-

plazamientos, velocidades y aceleraciones de los nuevos nudos se obtienen interpolando.

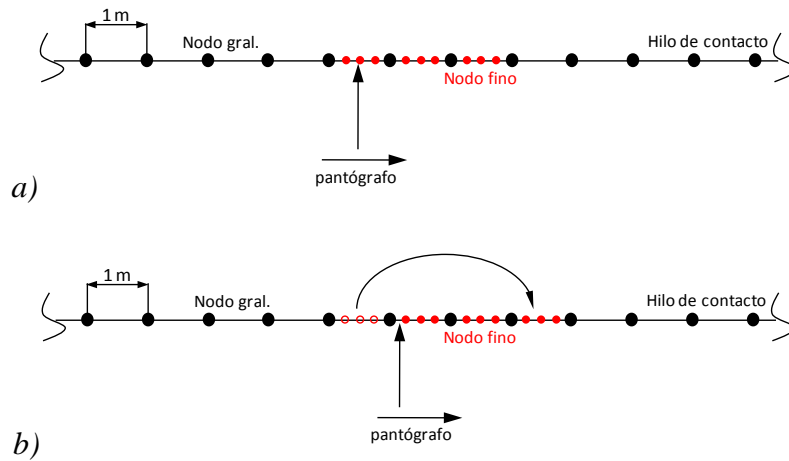


Figura 5. Mallado general y zona de contacto remallada.

Las ecuaciones son similares a la ec (13), con nuevos nudos \mathbf{x}_{cm} añadidos a la catenaria.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{cf} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{cm} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_{cf} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{cm} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{pc} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{pb} \\ \ddot{\lambda} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{cf} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{cm} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{cf} \\ \dot{\mathbf{x}}_{cm} \\ \dot{\mathbf{x}}_{pc} \\ \dot{\mathbf{x}}_{pb} \\ \dot{\lambda} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cf} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_f(t) \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{cm} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_m(t) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_p & \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \\ \mathbf{N}_f(t)^T & \mathbf{N}_m(t)^T & \begin{Bmatrix} 0 & -1 \end{Bmatrix} & -k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{cf} \\ \mathbf{x}_{cm} \\ \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{pc} \\ \mathbf{x}_{pb} \end{Bmatrix} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \begin{Bmatrix} 0 \\ -F_e \end{Bmatrix} \\ f(v \cdot t) \end{Bmatrix} \quad (14)$$

3. Resultados y conclusiones

Se ha comprobado que los resultados mejoran significativamente con los citados elementos viga pretensados. Se han utilizado discretizaciones de 10 y 20 tramos, con 176 elementos viga y 7 péndolas por tramo. Los elementos finitos tienen una longitud aproximada de 1m y de 0.1m en la zona remallada. La Figura 6 muestra los resultados con un pantógrafo a 100m/s comparando funciones de interpolación cúbicas (en verde, muy oscilantes) y trigonométricas (en azul, más suaves). La Figura 7 muestra los efectos de remallas más o menos elementos por delante del pantógrafo. La solución de referencia utiliza todos los elementos de 0.1m.

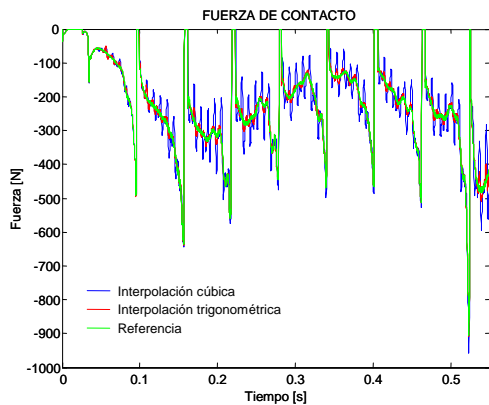


Figura 6. Elementos cúbicos y trigonométricos.

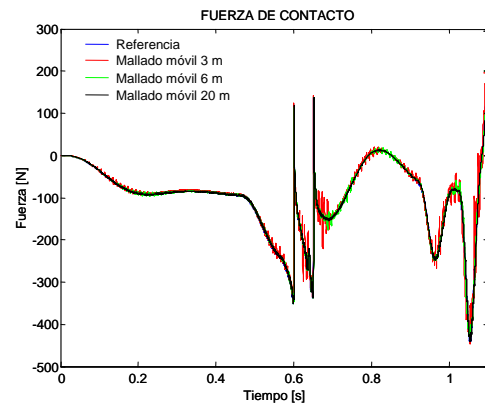


Figura 7. Efectos del tamaño del mallado móvil.

La resolución eficiente de modelos 3-D de tamaño real exige técnicas numéricas adecuadas. Se ha utilizado la factorización de Cholesky con renumeración de variables para reducir el llenado y adaptarse al refinamiento de la malla. La factorización debe repetirse cada vez que se desconecta una péndola o se modifica el mallado. La Figura 8 muestra los elementos no nulos del factor resultante de Cholesky sin renumeración y la Figura 9 renumerando.

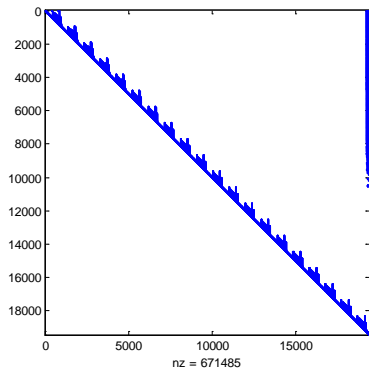


Figura 8. Matriz L^T de Cholesky sin renumerar.

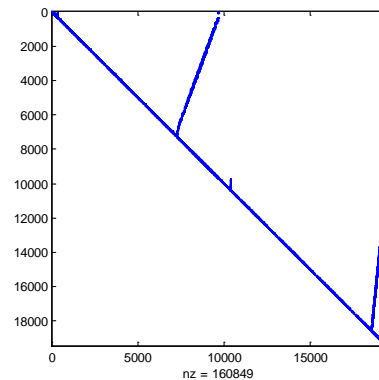


Figura 9. Matriz L^T de Cholesky renumerando.

La Tabla 1 muestra los resultados de algunas simulaciones de gran tamaño realizadas con la metodología descrita en los apartados anteriores. Puede observarse que los modelos 2-D tienen un coste aproximado del 40% de los modelos plenamente 3-D. Se concluye que estos últimos pueden resultar necesarios y rentables. En el caso más complejo, que incluye dos pantógrafos, 20 tramos y 22348 gdl, la simulación se ha realizado en menos de hora y media, incluyendo 3087 refactorizaciones de una matriz 22348×22348 (429 debidas a desconexiones de péndolas y el resto a los remallados de la zona de contacto). Se ha utilizado un PC con un Intel i320.

Tabla 1. Tiempos en función de modelo y tamaño para una velocidad de 100 m/s

modelo	tramos	gdl	pasos	refact.	CPU (s)
2-D, 1 pant.	10	10222	34800	811 (123)	751,1
2-D, 1 pant.	20	19882	69800	1631 (243)	2525,0
3-D, 2 pant.	10	11728	24800	1271 (173)	1511,9
3-D, 2 pant.	20	22348	59602	3087 (429)	5018,3

4. Referencias

- [1] BEAUFIT, F. W., ROWAN, W. H., HOADLEY, P. G. and HACKETT, R. M., (1978), *Computer Methods of Structural Analysis*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall.
- [2] JENSEN, C. N. (1997), *Nonlinear systems with discrete and continuous elements*. ATV Industrial Ph.D. project ATV 551. Lyngby.
- [3] ARNOLD, M. and SIMEON, B., (1990), *The simulation of pantograph and catenary: a PDAE approach*, Technical Report 1990, (1998) TU Darmstadt, Department of Mathematics.
- [4] SCHAUB, M. and SIMEON, B., *Pantograph-catenary dynamics: an analysis of models and simulation techniques*, Mathematical and Computer Modeling of Dynamical Systems, Vol. 7, No 2, (2001), pp. 225-238.