



Explorando el comportamiento estructural
de láminas reticulares:

Sistema integrado de aplicación de carga y
reconstrucción digital

Paula Hauschild Arencibia

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE
ARQUITECTURA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

Paula Hauschild Arencibia

Explorando el comportamiento estructural de láminas reticulares:
Sistema integrado de aplicación de carga y reconstrucción digital.

**EXPLORANDO EL COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL DE LÁMINAS
RETICULARES:**

**SISTEMA INTEGRADO DE APLICACIÓN DE CARGA Y RECONSTRUCCIÓN
DIGITAL.**

Estudiante

Paula Hauschild Arencibia

Expediente

19180

Tutor

Antonio José Lara Bocanegra

Departamento de Estructuras y Físicas de edificación

Aula TFG 8

Héctor Navarro, coordinador

Enrique Moreno Pérez, adjunto

Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid

Universidad Politécnica de Madrid

AGRADECIMIENTOS

Quisiera expresar mi agradecimiento, en primer lugar, a **Antonio José Lara Bocanegra**, mi tutor, por su constante orientación y acompañamiento a lo largo de todo el proceso de elaboración de este Trabajo Fin de Grado. Su implicación, disponibilidad y criterio han sido fundamentales para el desarrollo y enfoque del trabajo.

A **Carlos Martínez Criado**, por su ayuda continua en la resolución de dudas relacionadas con Grasshopper y con el diseño y desarrollo de prototipos, así como por su disposición permanente para asesorarme en los distintos aspectos técnicos del trabajo.

A **Manuel Viscasillas**, técnico del laboratorio de estructuras de la ETSAM, por su apoyo durante el montaje del escenario experimental y la realización de los ensayos, así como por facilitarme el uso del laboratorio, espacio imprescindible para el desarrollo de la parte experimental del trabajo.

A **José María Herranz**, responsable del taller de maquetas, por sus valiosos consejos en relación con el montaje y la impresión de prototipos, y por su disponibilidad para resolver dudas durante el proceso.

A **Almudena Majano**, profesora del área de estructuras de la ETSAM, por aportar su opinión y criterio técnico en distintas fases del trabajo, contribuyendo a su mejora.

Asimismo, quiero agradecer al **personal de mantenimiento de la ETSAM** su eficacia y rapidez en la resolución de los problemas surgidos durante la ejecución de los ensayos experimentales.

Por último, agradezco a **mi familia y amigos** su apoyo constante e incondicional a lo largo de todo este proceso

ÍNDICE

Resumen

Interés del trabajo

Marco de la investigación y modelo de referencia

1. Objetivo
2. Metodología
3. Fundamentos y antecedentes
 - 3.1 Comportamiento reológico de la madera y su influencia en el método de control de las pruebas de carga
 - 3.2 Pruebas de carga en estructuras laminares. Casos de estudio
 - 3.3 Sistema de bajo coste para el control de desplazamientos en pruebas de carga de modelos a escala de estructuras laminares reticulares. Aplicación de la fotogrametría.
4. Desarrollo de sistema integrado de aplicación de carga y control de deformaciones
 - 4.1 Conceptualización de un sistema isostático de aplicación de carga
 - 4.2 Adecuación del sistema de aplicación de carga al modelo de referencia
 - 4.3 Componentes del sistema
 - 4.4 Diseño, desarrollo y prototipado de componentes. Proceso de montaje.
5. Pruebas de carga. Validación del sistema
 - 5.1 Ensayos preliminares. Dispositivo nodal y ensayo global mediante control por fuerza.
 - 5.2 Ensayos mediante control por deformación. Procedimientos de aplicación de carga y medición de deformaciones.
 - 5.3 Obtención y análisis de resultados
6. Visualización avanzada de resultados
 - 6.1 Reconstrucción digital del modelo
 - 6.2 Representación de resultados
7. Conclusiones
8. Fuentes
 - 8.1 Bibliografía
 - 8.2 Procedencia de ilustraciones
9. Anexo

RESUMEN

Las estructuras laminares reticulares de madera, conocidas como *gridshells*, se caracterizan por su elevada eficiencia estructural y su capacidad para cubrir grandes luces con una cantidad mínima de material. Sin embargo, su ligereza, esbeltez y el empleo habitual de uniones semirrígidas las convierten en estructuras altamente deformables, lo que hace imprescindible la realización de pruebas de carga en modelos físicos para evaluar su comportamiento estructural y validar los procedimientos de análisis.

El objetivo principal de este Trabajo Fin de Grado es desarrollar y validar un sistema integrado de aplicación de carga y control de deformaciones para estructuras laminares reticulares de madera, que permita estudiar su comportamiento estructural mediante ensayos experimentales precisos en modelos a escala.

La metodología seguida se estructura en cuatro fases.

En primer lugar, se realiza una revisión del estado del arte, analizando el comportamiento reológico de la madera, distintos métodos de ensayo en estructuras laminares y técnicas de medición de desplazamientos.

En segundo lugar, se diseña y materializa un sistema propio de aplicación de carga isostático, concebido para generar un estado de carga similar a una carga superficial, garantizar la inmovilización de los puntos de la estructura durante el ensayo, y conocer la carga aplicada en cada nudo.

En tercer lugar, se llevan a cabo pruebas de carga en un modelo físico de referencia, empleando técnicas fotogramétricas para la medición de desplazamientos. Por último, se desarrolla un algoritmo en Grasshopper para la reconstrucción digital del modelo y la visualización avanzada de los resultados, así como su deformada.

Los resultados obtenidos validan la eficacia del sistema de carga desarrollado y confirman la idoneidad de la fotogrametría como técnica de bajo coste y alta precisión para la medición de desplazamientos en modelos a escala. Asimismo, los ensayos realizados corroboran la elevada eficiencia estructural de las estructuras laminares reticulares de madera. En conjunto, el trabajo presenta un procedimiento experimental integrado que combina aplicación de carga, medición y visualización digital para el estudio del comportamiento estructural de *gridshells*.

Palabras clave:

Gridshell · Pruebas de carga · Modelos a escala · Control por desplazamiento · Fotogrametría · Grasshopper

INTERÉS DEL TRABAJO

El presente trabajo se centra en el estudio de las estructuras laminares reticulares de madera, conocidas como “*gridshells*”. Estas estructuras están formadas por una malla o retícula de elementos lineales de madera que, mediante su disposición geométrica y su deformación elástica, configuran superficies tridimensionales, generalmente de doble curvatura.

Las *gridshells* se caracterizan por su alta eficiencia estructural, ya que son capaces de cubrir grandes luces con un consumo mínimo de material. Esto se debe a que la forma adoptada por la estructura permite que los esfuerzos se transmitan principalmente por efecto membrana, minimizando los momentos flectores y aprovechando al máximo la capacidad resistente de la madera. Como resultado, se obtienen estructuras ligeras, esbeltas y con una elevada relación resistencia-peso.

Desde el punto de vista constructivo, por lo general, las *gridshells* de madera se realizan a partir de elementos inicialmente rectos y de pequeña sección, que se curvan elásticamente durante el proceso de montaje, generando tensiones internas que contribuyen a la estabilidad global de la estructura. Este principio permite una gran libertad formal y facilita la adaptación de la estructura a geometrías complejas.

La ligereza y esbeltez de estas estructuras, junto con el empleo de uniones semirrígidas, las hacen altamente flexibles y sensibles a las deformaciones. Por este motivo, resulta imprescindible llevar a cabo un análisis previo riguroso, así como realizar ensayos de carga en modelos físicos a escala, que permitan evaluar con precisión su comportamiento estructural. Estos ensayos deben apoyarse en métodos de medición cuidadosamente calibrados, de modo que los resultados experimentales sirvan para validar y ajustar los modelos de cálculo empleados en el análisis y diseño de este tipo de estructuras.

Un ejemplo emblemático de este tipo de estructuras es la Multihalle en Mannheim, diseñada por Frei Otto y construida en 1975. Se trata de un pabellón de aproximadamente 7400 metros cuadrados, cuya estructura cubre luces de hasta 60 metros utilizando láminas de madera de tan solo $50 \times 50 \text{ mm}^2$ de sección.

En este caso, se realizaron pruebas de carga tanto en un modelo físico a escala como en la estructura real ya construida. En el modelo a escala, la carga se aplicó mediante la suspensión de clavos en los nudos (Fig. 02), mientras que en el modelo real se utilizaron bidones de agua suspendidos en un número significativo de nudos (Fig. 01).

Ambos procedimientos corresponden a ensayos de control por fuerza, en los que se aplican cargas conocidas en puntos específicos de la estructura, permitiendo evaluar las deformaciones resultantes y analizar el comportamiento estructural.



Fig. 01. Vista interior de la Multihalle durante la prueba de carga, Mannheim. Frei Otto, 1975.

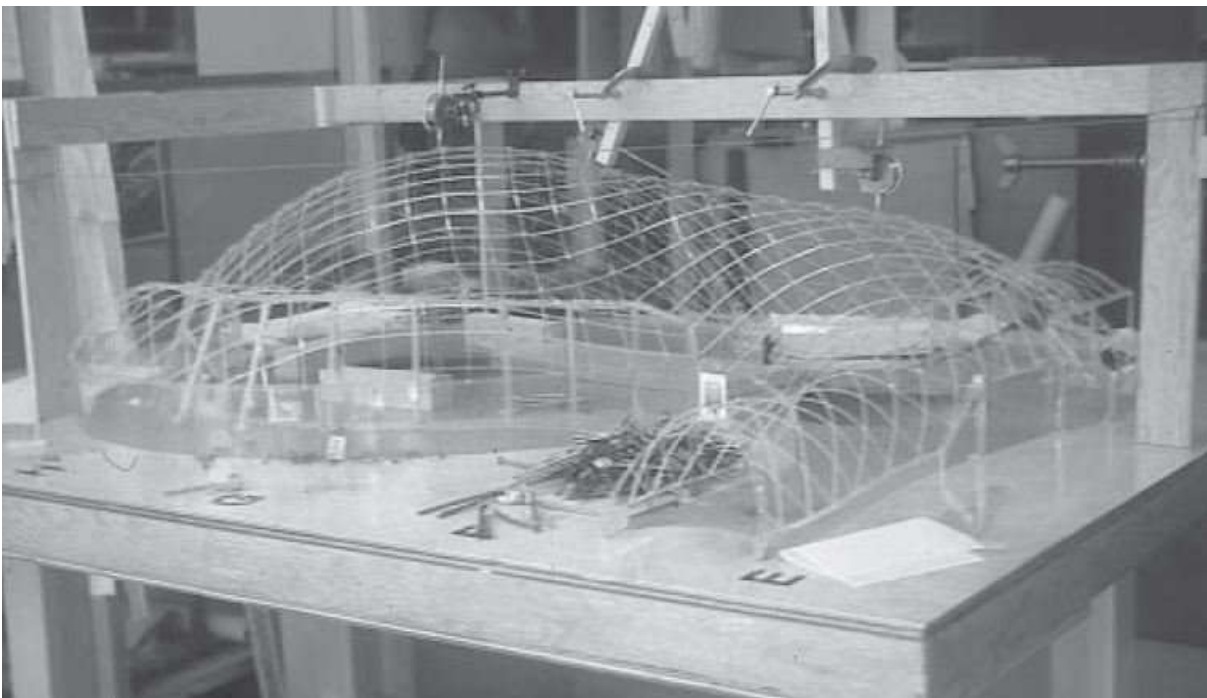


Fig. 02. Modelo físico a escala para ensayo de carga de la Multihalle, Mannheim. Frei Otto, 1975

MARCO DE LA INVESTIGACIÓN Y MODELO DE REFERENCIA

El presente TFG se enmarca en el proyecto de I+D+i titulado “Sistema constructivo para estructuras laminares reticulares basado en nuevos productos de madera de altas prestaciones y tecnología de fabricación digital”, Ref. PID2020-112954RA-I00, financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación.

En el ámbito de dicho proyecto se prevé la construcción de un demostrador de gridshell a escala real, con una luz aproximada de 12 m (Fig. 03), y la realización una prueba de carga destinada a evaluar su comportamiento estructural mediante la medición precisa tanto de la carga aplicada en los nodos como de todos los desplazamientos nodales.



Fig. 03. Imagen del demostrador a construir en el proyecto de I+D+i PID2020-112954RA-I00.

Como parte del proceso de diseño del demostrador se ha realizado un modelo a escala del mismo el cual se ha tomado como *modelo de referencia* en este trabajo. Dicho modelo se ha realizado en DM y tiene unas dimensiones globales de 103.5 cm de largo, 51 cm de ancho y una altura máxima de 35 cm (Fig. 04).

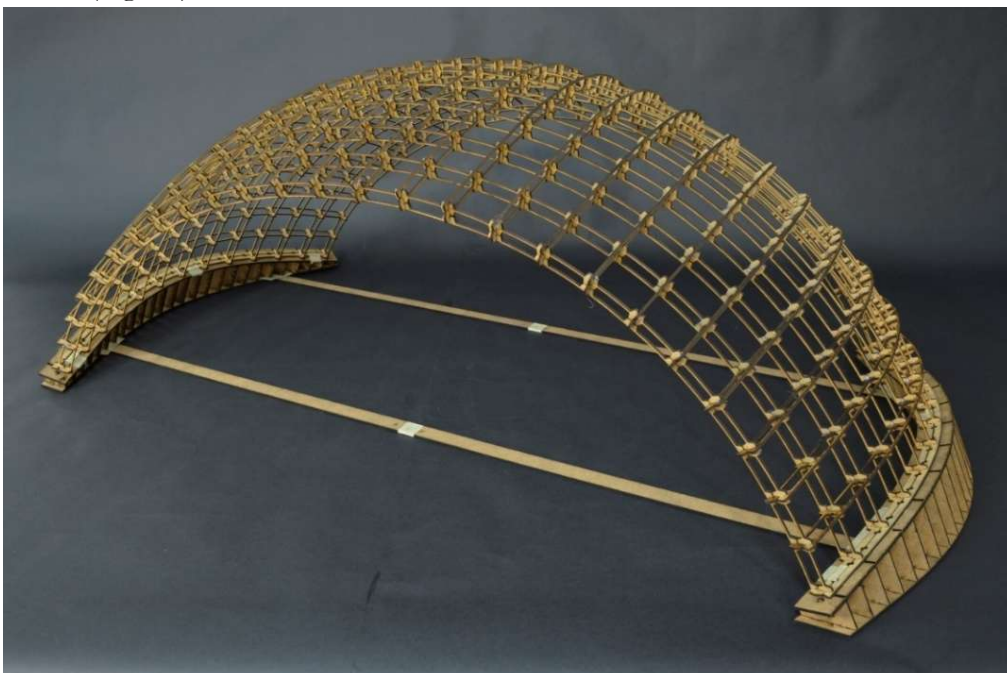


Fig. 04. Imagen del modelo de referencia utilizado en el presente trabajo

1. OBJETIVO

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar un sistema de pruebas de carga para estructuras laminares reticulares, que integre el mecanismo de aplicación de carga, el sistema de medición de deformaciones y que sirva de base para la posterior reconstrucción digital de la estructura y su deformada. Asimismo, se pretende validar dicho sistema mediante su aplicación en el modelo de referencia (Fig. 04), con el fin de poder estudiar y explorar su comportamiento estructural.

2. METODOLOGÍA

Para cumplir con el objetivo propuesto, se plantea una metodología estructurada en cuatro fases consecutivas:

1. Fase inicial

Recopilación y análisis sintético de los fundamentos y antecedentes que constituyen la base de conocimiento de la propuesta, incluyendo aspectos relacionados con la reología del material y el estudio de casos de referencia.

2. Fase de desarrollo

Diseño y materialización del sistema integrado de aplicación de carga y control de deformaciones, desde su conceptualización hasta el prototipado de componentes y el montaje final.

3. Fase de validación

Realización de pruebas de carga para verificar el funcionamiento del sistema y evaluar los errores de medición.

4. Fase de visualización

Desarrollo de un script para la reconstrucción digital del modelo a escala y su deformada, a partir de los datos obtenidos de las pruebas de carga realizadas en la fase anterior

3. FUNDAMENTOS Y ANTECEDENTES

3.1 Comportamiento reológico de la madera y su influencia en el método de control de las pruebas de carga

La madera presenta un comportamiento reológico que condiciona de manera significativa su respuesta mecánica bajo la acción de cargas mantenidas en el tiempo. Esta característica hace necesaria una comprensión de sus propiedades elasto-visco-plásticas y de su evolución temporal, especialmente en el contexto de ensayos experimentales y pruebas de carga, donde los efectos diferidos pueden influir de forma determinante en los resultados y su interpretación.

Uno de los principales fenómenos asociados a este comportamiento es la fluencia, definida como el incremento progresivo de la deformación en el tiempo de un elemento sometido a un estado de carga constante. En términos estructurales, una estructura de madera sometida a una carga mantenida experimenta una deformación inicial de carácter predominantemente elástico, a la que se superpone una deformación diferida que evoluciona con el tiempo hasta alcanzar, en condiciones estables, un estado de equilibrio (Fig. 05). En consecuencia, la magnitud de la deformación observada durante una prueba de carga depende del instante en el que se realice la medición, siendo, en general, mayor cuanto mayor sea el tiempo transcurrido desde la aplicación de la carga.

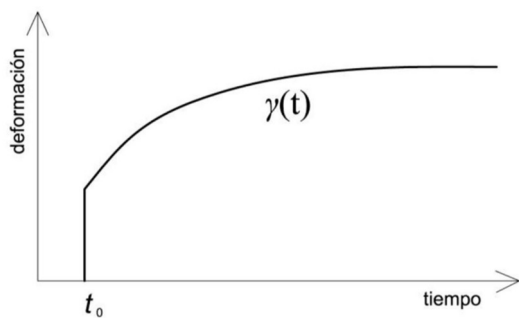


Fig. 05. Fluencia en madera. Curva típica tiempo-deformación.

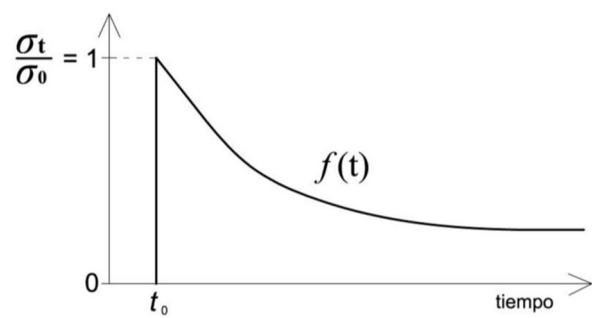


Fig. 06. Relajación de tensiones en madera. Curva típica tiempo-ratio tensiones

De forma complementaria, la madera manifiesta el fenómeno de relajación de tensiones, que consiste en la disminución progresiva de las tensiones internas en un elemento sometido a una deformación impuesta constante (Fig. 06). Desde un punto de vista físico, ello implica que, para mantener una deformación de magnitud constante en el tiempo, la carga necesaria para generarla debe reducirse de manera gradual como consecuencia de los mecanismos viscoelásticos propios del material.

La coexistencia de los fenómenos de fluencia y relajación de tensiones tiene implicaciones directas en el diseño y la ejecución de pruebas de carga sobre estructuras de madera. En particular, pone de manifiesto la imposibilidad de mantener simultáneamente constantes, a lo

largo del tiempo, tanto la fuerza aplicada como los desplazamientos resultantes. En consecuencia, resulta imprescindible definir previamente cuál de estas magnitudes se controla durante el ensayo, decisión que condiciona de forma directa el sistema de aplicación de carga, el protocolo experimental y los métodos de medición empleados.

Estas consideraciones adquieren especial relevancia en el estudio experimental de estructuras ligeras y altamente deformables, como las gridshells, donde los efectos reológicos pueden ser comparables, o incluso superiores, a la respuesta elástica instantánea, y deben ser tenidos en cuenta para una correcta interpretación del comportamiento estructural observado.

Desde esta óptica, los ensayos pueden clasificarse en dos grandes grupos, según la magnitud que se mantiene constante durante la prueba de carga: la fuerza aplicada o el desplazamiento impuesto.

Ensayos mecánicos bajo fuerza constante (control por fuerza)

En un ensayo en control por fuerza, la carga aplicada sobre el elemento estructural se mantiene constante a lo largo del tiempo, permitiendo observar la evolución de la deformación inducida. Este tipo de ensayo es especialmente útil para analizar la fluencia, ya que permite cuantificar cómo la deformación se incrementa progresivamente bajo una carga sostenida. También es muy utilizado cuando se desea conocer la carga última de la estructura dada su facilidad de aplicación. Sin embargo, su principal limitación reside en que la magnitud de la deformación no se mantiene constante a lo largo del tiempo, lo que puede complicar la comparación de resultados entre distintos ensayos o con predicciones teóricas, especialmente en elementos donde los efectos viscoelásticos son significativos.

Ensayos mecánicos bajo desplazamiento constante (control por desplazamiento)

Por el contrario, en un ensayo en control por desplazamiento, se impone y mantiene constante un desplazamiento específico del elemento estructural, registrando la evolución de la carga necesaria para sostenerlo. Este procedimiento permite estudiar la relajación de tensiones, observando cómo la carga requerida disminuye con el tiempo para mantener la deformación constante. La ventaja de este enfoque radica en la posibilidad de controlar con precisión la deformación, lo que resulta particularmente relevante en elementos esbeltos y estructuras laminares, donde los desplazamientos pueden tener un efecto crítico sobre la geometría y la redistribución de esfuerzos. Este procedimiento también es el preferido cuando se desea monitorizar la posición deformada de la estructura bajo carga, ya que ésta permanece inmóvil durante la misma. No obstante, en el caso de estructuras en las que se requiere conocer la carga aplicada en múltiples puntos, como ocurre generalmente en estructuras laminares, los sistemas de aplicación de carga son mucho más complejos que en el caso de los ensayos en control por fuerza.

La elección entre ambos tipos de ensayo depende de varios factores como los recursos disponibles, la facilidad de ejecución del ensayo y los objetivos específicos del estudio.

3.2 Pruebas de carga en estructuras laminares. Casos de estudio

En esta sección se incluye una selección de casos de estudio relevantes de pruebas de carga bien documentadas de estructuras laminares de hormigón y estructuras laminares reticulares de madera:

1. Cúpula de hormigón prefabricada. Eduardo Torroja (1949)
2. Essen model. Frei Otto (1962)
3. Geodesic ribbed shell. Claudio Pirazzi, Yves Weinand (2006)
4. Triaxial elastic gridshell. Antonio José Lara-Bocanegra, Almudena Majano-Majano, Juan Ortiz, Manuel Guaita (2022)
5. Spherical cap gridshell. David Andersson Largueche (2024)
6. Heimberg and Brugg swimming pool model. Heinz Isler (2024)

Cada caso se presenta de modo sintético, en formato de ficha, incluyendo los aspectos más relevantes de interés para el presente trabajo:

- Descripción de la estructura y prueba de carga
- Objetivo del estudio
- Tipo de control (fuerza o desplazamiento)
- Método de aplicación de carga
- Método de medición de desplazamientos
- Bibliografía consultada

Caso 1: Cúpula de hormigón prefabricada – Eduardo Torroja – 1949



Fig. 07. Imagen exterior del protoipo de cúpula.

Ensayo de una cúpula de planta circular con un óculo central, formada por 12 módulos independientes e iguales de hormigón armado, unidos entre sí y soportada en doce pilares. El modelo se realizó a escala 1:5

Descripción



Fig. 08. Armado de uno de los módulos de la cúpula

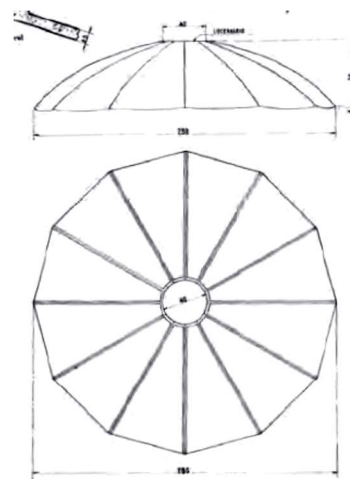


Fig. 09. Esquema geométrico

Objetivo	Investigar nuevos procedimientos de construcción de láminas mediante elementos prefabricados (alternativos al encofrado continuo) y realizar una prueba de carga hasta alcanzar la rotura del modelo
Tipo de control	Fuerza
Método de aplicación de carga	<p>Sistema de cilindros de acero suspendidos mediante alambres que pasaban por huecos en la lámina. Estos cilindros colgaban dentro de un depósito de agua; al bajar el nivel del agua, el peso se aplicaba gradualmente sobre la estructura.</p>  <p>Fig. 10. Prueba de carga en la cúpula prefabricada</p>
Método de medición de desplazamientos	Se utilizaron comparadores analógicos (aparatos de medida de desplazamientos lineales) para registrar movimientos radiales en los nervios y recorridos verticales en diversos puntos de la lámina y el contorno.
Bibliografía	<p>ANTUÑA BERNARDO, J., 2019. <i>Ensayos en modelos de estructuras laminares. Los primeros resultados de Eduardo Torroja en el Laboratorio Central</i>. En: S. Huerta Fernández y I. J. Gil Crespo (eds.) <i>Actas del Undécimo Congreso Nacional de Historia de la Construcción</i>, Vol. 1, Soria, 9-12 octubre 2019, pp. 61-70. ISBN 978-84-9728-5766.</p> <p>http://www.sedhc.es/biblioteca/actas/6_Joaquin%20Antuna%20Bernardo.pdf</p>

Caso 2: Essen model – Frei Otto – 1962

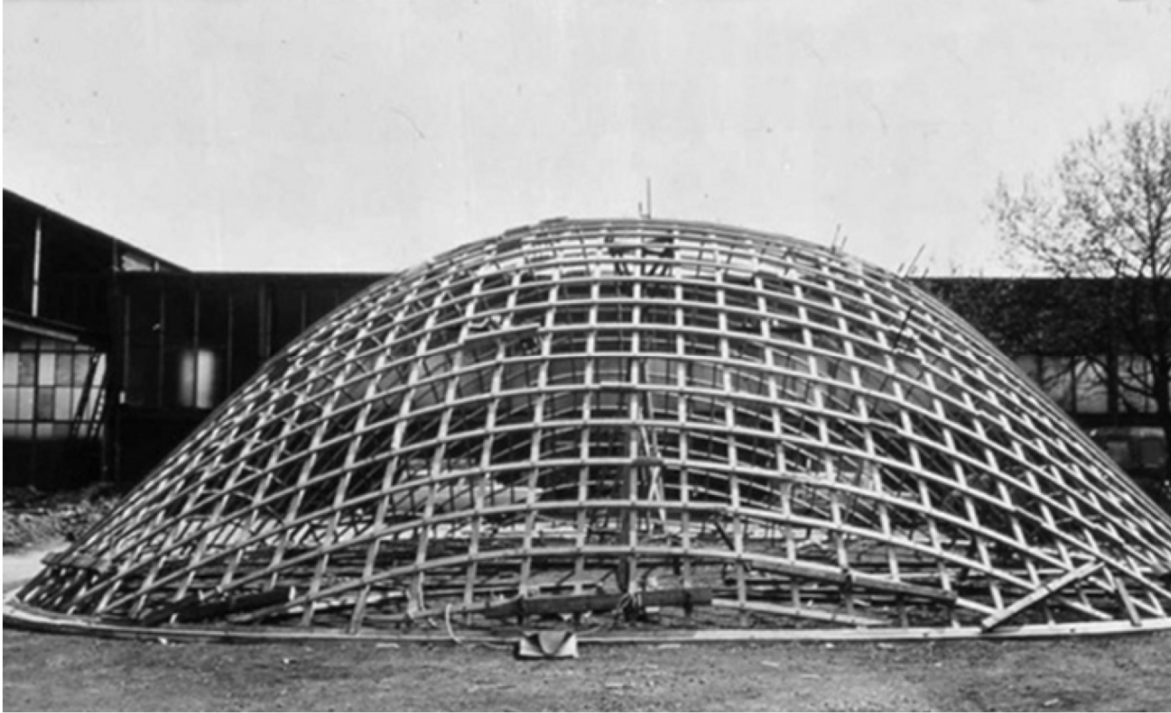


Fig. 11. Vista exterior tras el montaje. Essen Model.

El modelo Essen es una de las primeras estructuras gridshell de madera deformadas elásticamente que se construyeron a escala real. Se realizó una prueba de carga como parte de las investigaciones iniciales sobre gridshells llevadas a cabo por Frei Otto y su equipo en el Instituto de Estructuras Ligeras de Stuttgart. Se trata de un modelo a escala 1/16.

Dimensiones del modelo: $93 \times 93 \times 30.5 \text{ cm}^3$.

Secciones de las láminas: $3 \times 1.7 \text{ mm}^2$

Descripción

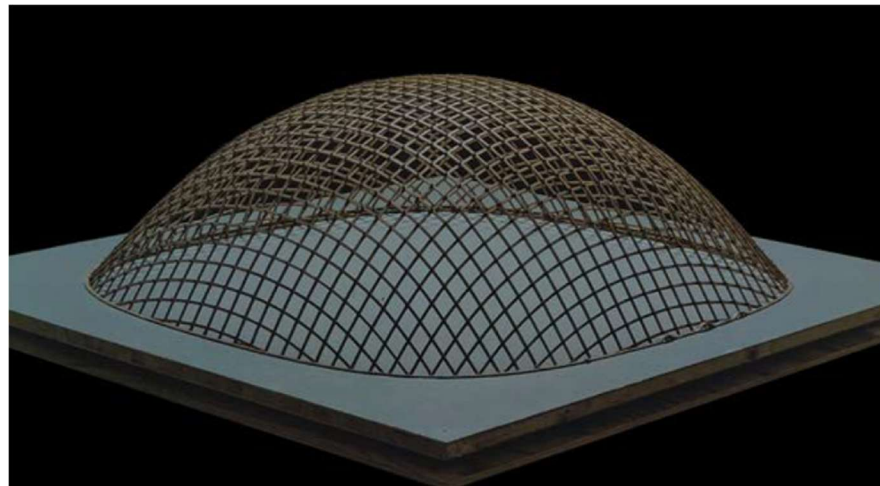
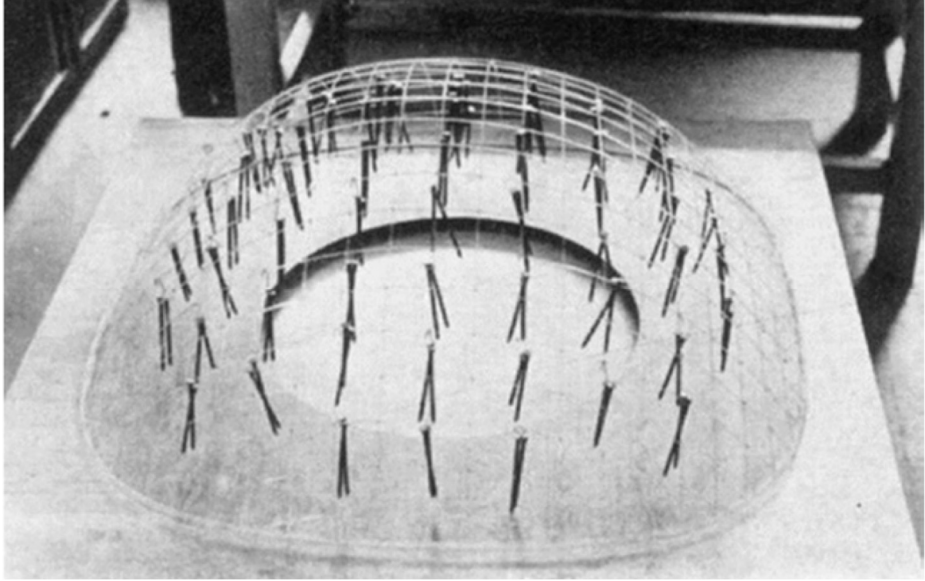


Fig. 12. Modelo a escala. Essen Model

Objetivo	Analizar el comportamiento estructural de la estructura sometida a cargas distribuidas y puntuales, evaluando distintas soluciones de unión y de triangulación. Para ello, se midieron las deformaciones producidas durante el proceso de carga hasta alcanzar el colapso
Tipo de control	Fuerza
Método de aplicación de carga	<p>Aplicación de una carga fija mediante la suspensión de clavos de 12.5 g en todos los nudos, combinados con carga puntual adicional en tres puntos concretos</p>  <p>Fig. 13. Prueba de carga en modelo a escala mediante suspensión de clavos. Essen Model.</p> <p>Se ensayaron varias configuraciones con diferentes tipos de unión:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Uniones mediante pasadores, con rotación libre. • Uniones pegadas, sin posibilidad de rotación. • Uniones con pasadores y tirantes, que permitían la rotación. • Uniones pegadas con tirantes de nailon en los nudos.
Método de medición de desplazamientos	Comparador analógico
Bibliografía	Liddell, I., 2015. <i>Frei Otto and the development of gridshells</i> . Case Studies in Structural Engineering, 4, pp.39–49. https://doi.org/10.1016/j.csse.2015.08.001

Caso 3: Geodesic ribbed shell - Claudio Pirazzzi, Yves Weinand - 2006





Fig. 14. Imagen durante el montaje. *Geodesic ribbed shell*

Descripción

Desarrollo y validación de un prototipo de cáscara de nervaduras de madera de forma libre mediante el software GEOS. La estructura utiliza listones delgados de abeto suizo dispuestos según líneas geodésicas para minimizar las tensiones de flexión.

Dimensiones de la estructura: $8 \times 3 \times 2.06 \text{ m}^3$

Sección de láminas $12 \times 60 \text{ mm}^2$

Objetivo	Examinar la fiabilidad y precisión del software GEOS en la generación de mallas geodésicas sobre superficies complejas. Además, busca evaluar el modelo de cálculo estructural mediante la comparación de deformaciones medidas en la estructura y las calculadas mediante software de elementos finitos SAP2000
Tipo de control	Desplazamiento
Método de aplicación de carga	<p>Aplicación de fuerzas puntuales simétricas normales a la superficie en dos de los nudos del eje central. Las cargas fueron introducidas mediante cabrestantes de cable las cuales permiten controlar la deformación.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;">   </div> <p style="display: flex; justify-content: space-around;"> Fig. 15. Prueba de carga. <i>Geodesic ribbed shell</i> Fig. 16. Detalle de cabrestante y célula de carga. </p>
Método de medición de desplazamientos	Cabrestantes dispuestos en diferentes nudos
Bibliografía	PIRAZZI, C., & WEINAND, Y. (2006). <i>Geodesic Lines on Free-Form Surfaces - Optimized Grids for Timber Rib Shells</i> . 9th World Conference on Timber Engineering 2006, WCTE 2006. 1.

Caso 4: Triaxial elastic gridshell - Antonio José Lara-Bocanegra, Almudena Majano-Majano, Juan Ortiz, Manuel Guaita - 2022



Fig. 17. Prueba de carga. *Triaxial elastic gridshell*

Descripción

Diseño, construcción y ensayo de carga de un prototipo a escala real de una malla elástica triaxial de madera de eucalipto (*Eucalyptus globulus*).
 Dimensiones de la estructura: $4.55 \times 7 \text{ m}^2$
 Sección de láminas: $60 \times 25 \text{ mm}^2$

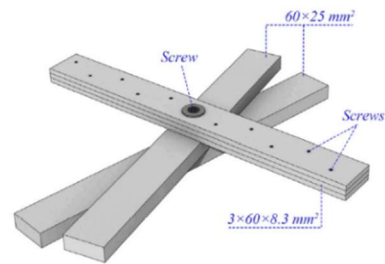


Fig. 18. Detalle del nudo. *Triaxial elastic gridshell*

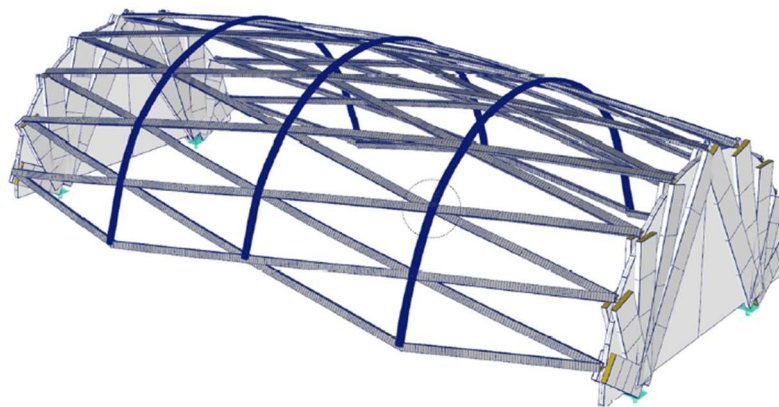



Fig. 19. Modelo en Rhino. *Triaxial elastic gridshell*

Objetivo	Evaluar la respuesta de la estructura y validar un modelo numérico de elementos finitos que considera el deslizamiento entre capas
Tipo de control	Fuerza
Método de aplicación de carga	<p>Aplicación de carga vertical mediante bidones de agua colgados de los cinco nudos centrales. En cada nudo se aplicó una carga de 105 kg</p>  <p>Fig. 20. Sistema de aplicación de carga. <i>Triaxial elastic gridshell</i></p>
Método de medición de desplazamientos	<ul style="list-style-type: none"> • Fotogrametría para la medición de desplazamientos de todos los nudos y los puntos medios de las barras. Proceso de fotografiado en dos estados: con y sin carga. • Software de procesado: PhotoModeler y Metashape • LVDT para medir desplazamientos con precisión en algunos puntos.
Bibliografía	<p>LARA-BOCANEGRA, A. J., MAJANO-MAJANO, A., GUAITA, M. Y ORTIZ, J. (2022). <i>Structural Analysis and Form-Finding of Triaxial Elastic Timber Gridshells Considering Interlayer Slips: Numerical Modelling and Full-Scale Test. Applied Sciences</i>, 12(11). 5335. https://doi.org/10.3390/app12115335</p>

Caso 5: Spherical cap gridshell - David Andersson Largueche 2024



Fig. 21. Prueba de carga. Spherical cap gridshell

Descripción

Desarrollo y evaluación de una malla elástica de madera (gridshell) en forma de casquete esférico utilizando secciones de viga compuestas y un patrón de red Kagome.

Dimensiones de la estructura: $3.2 \times 3.2 \times 1 \text{ m}^3$

Sección de las láminas: $80 \times 6 \text{ mm}^2$

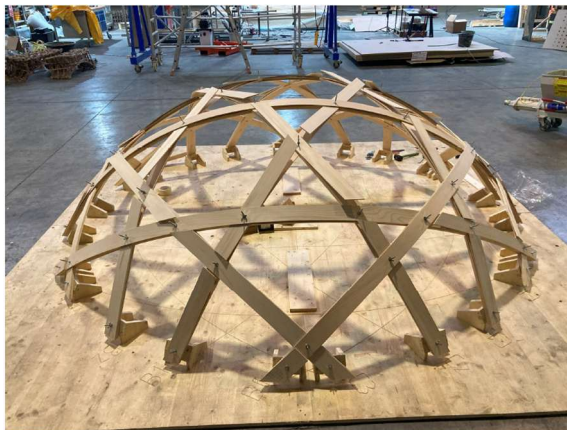
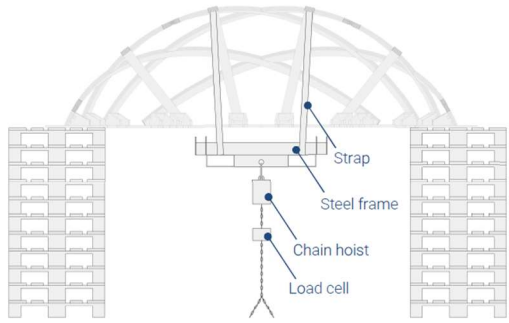
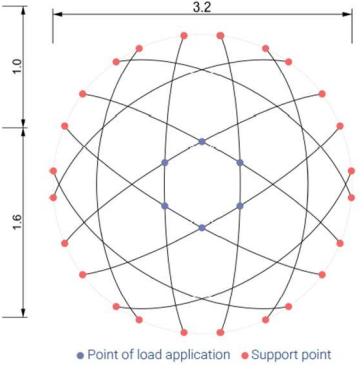



Fig. 22. Proceso de montaje de la estructura. Spherical cap gridshell.

Objetivo

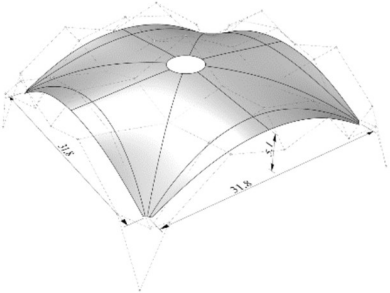
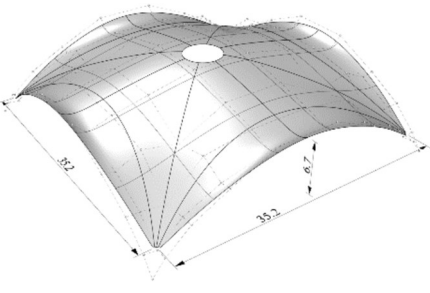
Superar los problemas de inestabilidad en estructuras de gran escala mediante el uso de capas superpuestas de láminas de madera acopladas mecánicamente, evaluando la precisión de modelos numéricos desarrollados con el software de análisis estructural SOFISTIK mediante la comparación con los resultados experimentales

Tipo de control	Desplazamiento
Método de aplicación de carga	<p>Aplicación gradual de carga mediante una célula de carga en los seis nodos superiores de la estructura mediante un polipasto de cadena y un marco de acero rígido, realizando pasos de carga de 1 kN.</p>  
	
	<p>Fig. 23. Componentes del sistema de aplicación de carga</p> <p>Fig. 24. Puntos de aplicación de carga</p>
Método de medición de desplazamientos	Estación total de escaneado
Bibliografía	<p>ANDERSSON LARGUECHE, D., & LA MAGNA, R. (2024). <i>Development and assessment of a spherical cap timber gridshell with compound beam sections</i>. Proceedings of the IASS 2024 Symposium de Zurich, Suiza.</p>

Caso 6: Heimberg and Brugg swimming pool model - Heinz Isler 1978



Fig. 26. Vista exterior. Heimberg swimming pool

<p>Descripción</p>	<p>Estudio comparativo del comportamiento estructural de dos modelos a escala (1:50) de cubiertas tipo cáscara de hormigón diseñadas por Heinz Isler para las piscinas de Heimberg y Brugg. El análisis se centra en la influencia de la geometría de los bordes en la estabilidad de la estructura.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>Fig. 27. Modelo de Heimberg (31,8 × 31,8 m²)</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Fig. 28. Modelo de Brugg (35,2 × 35,2 m²)</p> </div> </div>
<p>Objetivo</p>	<p>Cuantificar el comportamiento de membrana (tensiones en el plano de la lámina) y la resistencia al pandeo (estabilidad) de las cáscaras de hormigón. Posterior simulación mediante análisis de Modelos de Elementos Finitos (FEM)</p>
<p>Tipo de control</p>	<p>Fuerza</p>

<p>Método de aplicación de carga</p>	<p>Aplicación de una carga fija uniformemente distribuida (UDL) de 1 kN/m² en dirección vertical descendente sobre la superficie de los modelos.</p> <p>El sistema de carga se compone de un conjunto de piezas unidas de forma articulada que distribuye la carga del peso fijo a todos los puntos de la estructura.</p>  <p>Fig. 29. Sistema de aplicación de carga en modelo a escala.</p>
<p>Método de medición de desplazamientos</p>	<p>Escáner 3D</p>
<p>Bibliografía</p>	<p>EIGENRAAM, P., LI, Q., CHILTON, J. AND BORGART, A. (2024) <i>3D scanning and structural analysis of Heinz Isler's shell for swimming pools</i>. In: Block, P., Boller, G., De Wolf, C., Pauli, J. and Kaufmann, W. (eds.) <i>Proceedings of the IASS 2024 Symposium: Redefining the Art of Structural Design</i>, Zurich, Switzerland, 26–30 August 2024. International Association for Shell and Spatial Structures (IASS). https://app.iass2024.org/files/IASS_2024_Paper_113.pdf</p>

A continuación, se realiza una tabla resumen con una recopilación de los datos de interés de todos los casos estudiados (Tabla 01).

Proyecto	Tipo de control	Método de aplicación de carga	Método de medición de desplazamientos
Cúpula de hormigón prefabricada	Fuerza	Suspensión de cilindros de acero en un depósito de agua	Comparador
Essen model	Fuerza	Suspensión de clavos	Comparador
Geodesic ribbed shell	Desplazamiento	Cabrestantes con célula de carga	Comparador
Triaxial elastic gridshell	Fuerza	Suspensión de bidones de agua	Fotogrametría
Spherical cap gridshell	Desplazamiento	Cabrestantes con célula de carga	Estación total de escaneado
Heimberg and Brugg swimming pool model	Fuerza	Suspensión de un peso fijo	Escáner 3D

Tabla 01. Tabla resumen de casos de estudio

3.3 Sistema de bajo coste para el control de desplazamientos en pruebas de carga de modelos a escala de estructuras laminares reticulares. Aplicación de la fotogrametría

La fotogrametría es una técnica de bajo coste que permite crear un modelo digital 3D a partir de fotografías de un objeto real. Su ámbito de aplicación cubre múltiples escalas, desde la reconstrucción de pequeñas piezas o elementos, hasta edificios o paisajes naturales o urbanos (Fig. 30). En general, el proceso requiere de los siguientes pasos:

1. Barrido de fotos del objeto. Se realiza un barrido de imágenes tomadas desde distintos ángulos, siguiendo un orden y manteniendo una distancia constante respecto del objeto.
2. Procesado de imágenes en un software especializado: un software que es capaz de orientar las fotografías en el espacio digital identificando puntos comunes entre ellas. El software traza rayos desde cada punto de la imagen en la posición en que se ha tomado hasta el punto equivalente que reconoce en el objeto; cuantas más imágenes, mayor será el número de rayos asociados a cada punto y, por tanto, mayor será la precisión.
3. Generación de la nube de puntos: Una vez orientadas las fotografías, el software crea una nube de puntos muy densa que puede escalarse, orientarse y exportarse para su posterior análisis o tratamiento. A partir de la nube de puntos puede reconstruirse la superficie del objeto mediante diferentes procedimientos.

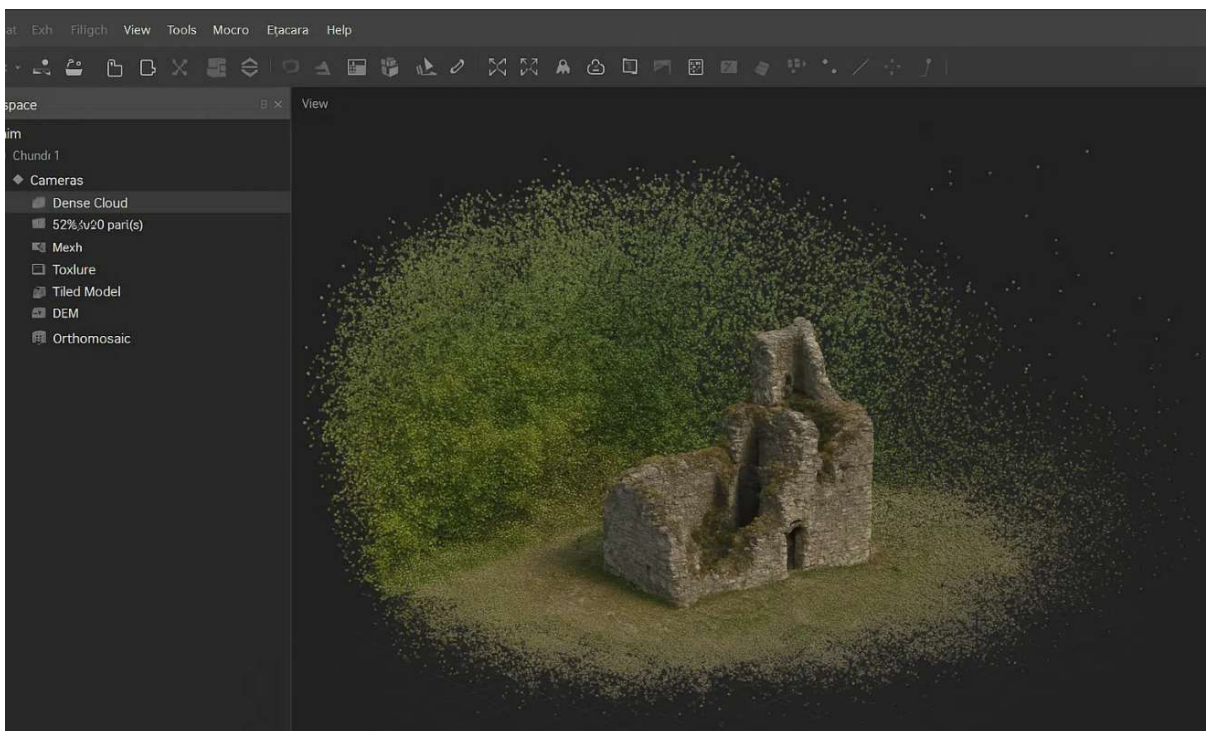


Fig. 30. Generación de nube de puntos de un objeto a partir de la fotogrametría. Software Metashape.

Para la evaluación de desplazamientos en pruebas de carga es muy útil conocer la posición de puntos concretos antes y después de la aplicación de la carga. Para ello, se pueden usar dianas colocadas sobre los puntos a monitorizar. Mediante el fotografiado antes y durante la prueba de carga puede obtenerse la posición del centro de la diana en ambas situaciones y, a partir de los mismas, deducir el desplazamiento de los puntos correspondientes. Como se ha visto en el apartado anterior, dedicado a pruebas de carga de estructuras laminares de gran tamaño, este procedimiento ya ha sido utilizado con éxito en la evaluación de los desplazamientos nodales de este tipo de estructuras (Triaxial elastic gridshell).

La versatilidad del método, la buena calidad de la medida, la economía del equipo y su adecuación a modelos pequeños permiten también su aplicación exitosa al control de desplazamientos de pequeños modelos a escala, tal y como se ha puesto de relieve en el trabajo titulado “*Fotogrametría aplicada al análisis estructural de láminas reticulares: Desarrollo de un método para la evaluación de deformaciones en pruebas de carga de modelos a escala*”. En dicho trabajo se desarrolla y evalúa un método fotogramétrico específicamente adaptado para la medición de los desplazamientos nodales en pruebas de carga de modelos a escala de láminas reticulares, obteniendo errores del orden de décimas de milímetros. Por su relación directa con el presente trabajo, a continuación, se resumen los aspectos fundamentales de dicho método, el cual consiste en cuatro fases claramente diferenciadas:

1. Trabajos previos:

En esta primera fase, se definen tres aspectos fundamentales:

Por un lado, se define el tamaño adecuado de las dianas, en función de las características de la cámara. En dicho trabajo se utilizaron dianas de 1 cm de diámetro.

Por otro lado, la calibración de la cámara. Las fotografías deben tener la mayor calidad posible y la mayor nitidez posible para que el software pueda localizar los centros de las dianas con la mayor precisión posible. Por ello se debe calibrar la cámara con los siguientes parámetros (Tabla 02):

Sensibilidad ISO	Lo más baja posible (100)
Enfoque	Manual
Velocidad de obturación	En automático (A)
Profundidad de campo (f)	Máxima apertura posible (entre f/8 y f/11)

Tabla 02. Tabla de parámetros de fotografiado

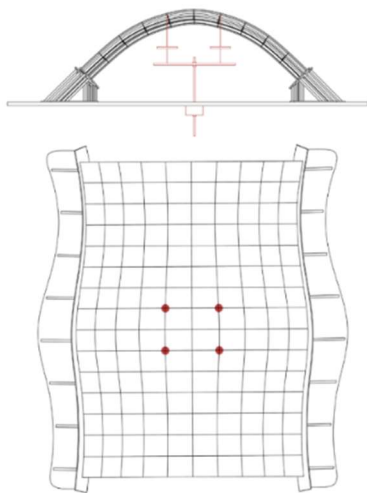


Fig.31. Sistema de aplicación de carga.

Por último, se define el procedimiento de aplicación de la carga, que se realiza mediante un sistema compuesto por tres piezas de madera (DM) ancladas a cuatro nudos centrales de la estructura. Dos de estas piezas cuelgan de cada par de nudos, mientras que la tercera conecta a las dos anteriores.

La fuerza se aplica en el punto central de esta última mediante una varilla roscada con topes que, al acortarse, tensa los cables unidos a los cuatro nudos, generando un estado de carga con cuatro cargas puntuales centrales de igual magnitud (Fig. 31)

2. Preparación del escenario

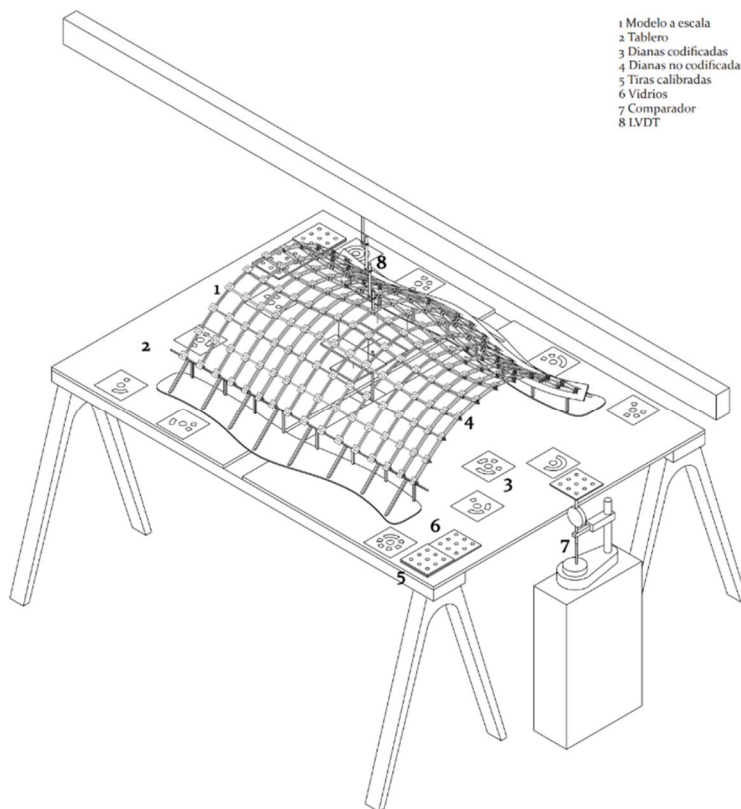


Fig. 32. Escenario de trabajo.

Colocación del modelo físico:

El modelo se coloca sobre un tablero, a ser posible con textura, y lo suficientemente grande como para que haya unos centímetros de margen entre el límite de la estructura y el borde del mismo. Se debe disponer de espacio libre alrededor suficiente para poder hacer el fotografiado correctamente (Fig. 32).

Colocación de dianas:

- Sin codificar: sirven para obtener la posición de puntos específicos. Se disponen en todos los nudos de la estructura. La colocación debe ser minuciosa, cuidando que el centro de las dianas esté realmente en el centro de los nudos. Las dianas son de papel y se pegan directamente sobre la estructura. Además de las dianas sobre los nodos, se colocan varias cuadrículas de dianas en el tablero, sobre vidrios de varios grosores, para chequear las distancias en el eje Z (Fig. 33).
- Codificadas: el software les asigna un nombre específico, se utilizan para el escado del modelo y para la medición de distancias de control o de chequeo. Se colocan varias en el tablero, servirán para el escalado y el chequeo, puesto que estas permanecen siempre en el mismo sitio (Fig. 33).

Herramientas de medición:

- Comparador con dianas: es un instrumento de medición, con un eje que sube y baja, pudiendo medir distancias con una precisión de centésimas de milímetro. En el trabajo se utiliza para medir distancias en el eje Z. Se coloca en la escena, pero ajeno al tablero y a la estructura. En la parte superior del eje se coloca una pequeña base con una cuadrícula de dianas. En cada proyecto fotogramétrico (sin carga y con carga) se debe cambiar la altura de las dianas. El comparador nos dará esa altura y servirá como distancia de chequeo en el eje Z (Fig. 33).
- LVDT: es otro instrumento de medición que se utiliza para medir desplazamientos en el eje Z. En concreto, se utiliza para medir el desplazamiento de uno de los nudos de la estructura. Se coloca en el nudo central más alto y mide el desplazamiento vertical de ese punto entre los dos estados (sin carga y con carga). Esta distancia servirá también como distancia de chequeo para, junto con la del comparador, comprobar el error entre los dos modelos (Fig. 33).
- Célula de carga: se utiliza para medir con precisión la fuerza en Newtons aplicada en la maqueta. Se conecta al sistema de aplicación de carga mediante una varilla roscada. (Fig. 33).

3. Fotografiado y toma de datos

Como ya se ha mencionado, la calidad y la nitidez de las fotografías influye de manera directa en la precisión de los resultados. Los ajustes de la cámara definidos en el método fueron:

- ISO 100
- Enfoque manual
- Apertura de diafragma F11
- Velocidad de obturación automática (modo A)

Asimismo, es necesario planificar una trayectoria de fotografiado que permita realizar un barrido ordenado y suficiente de imágenes, de modo que el software disponga de la mayor cantidad de información posible. Dicha trayectoria debe ser continua, con fotografías tomadas a intervalos próximos entre sí, garantizando un solapamiento entre imágenes consecutivas. Cuanto mayor sea el número de fotografías, mayor será la información disponible para el software y, en consecuencia, mayor la precisión del modelo obtenido.

En el ensayo realizado en este trabajo se hicieron barridos de 75 fotografías.

Tras la realización de los barridos fotográficos, se procede a la recopilación de los datos aportados por los elementos auxiliares para la validación de la prueba:

Por un lado, se midieron con cinta métrica las distancias entre dianas codificadas para obtener medidas de control y de chequeo. Por otro lado, se comprobaron los datos registrados por el LVDT en los proyectos con y sin carga. Y por último, se comprobaron las medidas proporcionadas por el comparador en ambos proyectos.

4. Procesamiento de imágenes y evaluación de errores

Los programas utilizados para el procesado son: *Metashape* para la construcción de los modelos de puntos y el escalado, y *CloudCompare* para la orientación de los modelos.

El procedimiento consiste en lo siguiente:

Para empezar, se hace una calibración previa de la cámara, con fotografías tomadas a un tablero de ajedrez, que se importan en Metashape. Con estas imágenes, el software es capaz de identificar y corregir, reduciendo errores asociados con la detección de imágenes.

Una vez calibrada la cámara, se importan las imágenes de la maqueta en Metashape, trabajando en dos proyectos por separado, el proyecto del modelo con carga y del modelo sin carga. Se lleva a cabo el proceso de orientación de imágenes que genera la nube de puntos y posteriormente, la detección de las dianas, tanto codificadas como sin codificar. Detectadas las dianas, se hace una limpieza de datos, eliminando de cada fotografía, aquellas dianas que el programa no detecte correctamente.

Una vez obtenidos los modelos de puntos de ambos proyectos, se realiza el escalado introduciendo las distancias de control obtenidas previamente en la toma de datos. Una vez escalados se introducen los modelos en CloudCompare para su orientación y superposición. Este software permite seleccionar los puntos compartidos de ambos proyectos y colocarlos en el mismo sistema de coordenadas.

El último paso es realizar una evaluación de los errores para validar el ensayo realizado, que, como ya se ha mencionado, en el proceso de este ensayo se obtuvieron los resultados con un error máximo de décimas de milímetro.

4 DESARROLLO DE SISTEMA INTEGRADO DE APLICACIÓN DE CARGA Y CONTROL DE DEFORMACIONES

4.1 Conceptualización de un sistema isostático de aplicación de carga

El sistema de aplicación de carga desarrollado en este trabajo se plantea a partir de tres premisas fundamentales que condicionan su diseño y funcionamiento:

1. Mantener inmóviles los puntos de la estructura durante la prueba de carga, con el objetivo de aumentar la calidad y precisión del proyecto fotogramétrico, evitando desplazamientos no controlados durante el proceso de medición.
2. Conocer la carga aplicada en cada nudo, de forma que sea posible determinar con precisión el estado real de cargas que actúa sobre la estructura durante el ensayo.
3. Imponer un estado de carga similar a una carga superficial, evitando la aplicación de cargas concentradas de elevada magnitud, poco representativas del comportamiento real de las estructuras laminares.

En el análisis previo de los casos de estudio, se ha comprobado que no existe ningún método de ensayo que cumpla simultáneamente con estas tres premisas. Por este motivo, se ha desarrollado un sistema de aplicación de carga propio que fusiona principios empleados en distintos ensayos experimentales de referencia, dando respuesta conjunta a los requisitos planteados.

Las ideas fundamentales en las que se apoya el concepto del sistema son las siguientes:

1. Ensayo en control por desplazamiento, que garantiza que los puntos de aplicación de carga permanecen inmóviles durante la prueba.
2. Sistema de aplicación de carga isostático (biapoyado), que permite conocer de forma directa el valor de las reacciones y distribuir una única carga aplicada en un punto entre un elevado número de nudos de la estructura.

A partir de estas ideas se desarrolla el sistema de aplicación de carga descrito en los apartados siguientes, adaptado específicamente al modelo de referencia objeto de estudio.

Una de las premisas es la generación de un estado de carga que se aproxime, en la medida de lo posible, a una acción real, como puede ser una carga de nieve, caracterizada por ser una carga superficial uniformemente distribuida. Para ello, el sistema debe ser capaz de distribuir la carga desde el punto de aplicación en el que se coloca una célula de carga, hasta el mayor número posible de nudos.

Para desarrollar el sistema, se tomará como referencia el sistema diseñado por Heinz Isler explicado anteriormente en el apartado 3.2 (Caso 6): un ensayo de control por fuerza en el que la estructura tiene un peso fijo colgado de todo un sistema de piezas de madera. Piezas que están unidas de forma articulada y crean esquemas de carga biapoyados entre sí, de tal forma que la carga se va distribuyendo, subdividiéndose de pieza en pieza hasta llegar, de forma equivalente, a los nudos de la estructura.

Teniendo este caso como referencia, se presenta el sistema propuesto mediante un esquema basado en un ejemplo simplificado, aplicando carga en 8 nudos.

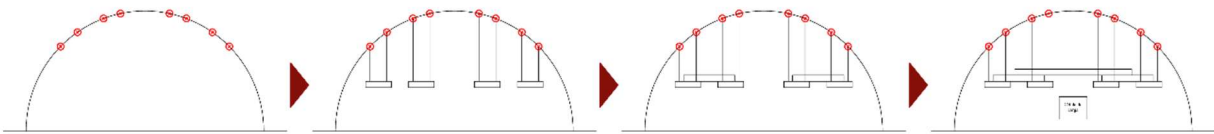


Fig. 33. Proceso conceptual de carga.

El procedimiento es el siguiente:

De los nudos a cargar, se suspende un primer nivel de piezas, en ese primer nivel se apoya el segundo nivel, y así sucesivamente hasta que el último nivel sea una única pieza en la que se conecta la célula de carga. Todas las piezas se apoyan sobre dos nudos en sus extremos de forma articulada. De esta forma, al aplicar carga en esa última pieza, la carga se subdivide de pieza en pieza hasta distribuirse por igual entre los ocho nudos de la estructura (Fig. 33 y Fig. 34).

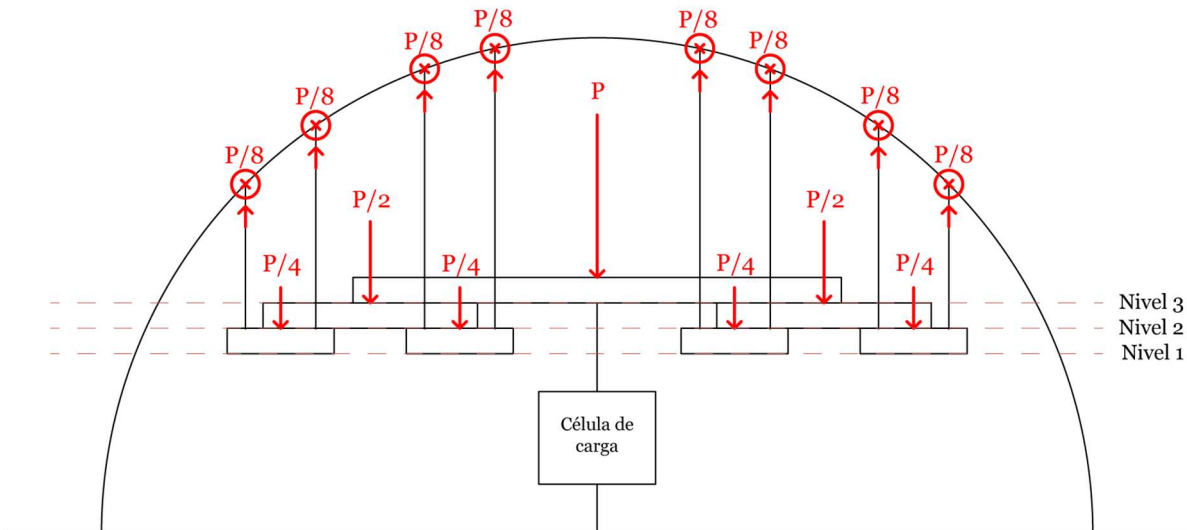


Fig. 34. Reparto de fuerzas en el sistema de aplicación de carga propuesto.

Se extraen las siguientes conclusiones:

- Para que el sistema funcione, el número de nudos de aplicación de la carga debe ser una potencia de 2 ya que, de lo contrario quedarían piezas sueltas y no se podría resolver.

$$\boxed{\text{N}^\circ \text{ nudos a cargar} = 2^n}$$

- Una vez determinado el número de nudos, la carga por nudo se calcula dividiendo la carga registrada por la célula de carga entre el número total de nudos.

$$\boxed{\text{Carga por punto} = P/\text{N}^\circ \text{ de nudos}}$$

- Finalmente, el número de niveles necesarios se corresponde con el exponente de la función exponencial de 2 que define la cantidad de nudos.

$$\boxed{\text{N}^\circ \text{ niveles} = n}$$

En el caso del ejemplo (Fig. 34), como bien se puede observar en el esquema, es un estado de carga en el que la fuerza se aplica en 8 nudos. Las premisas anteriores quedarían de la siguiente manera:

- Número de nudos a cargar = $2^3 = 8$
- Carga por nudo = $P/8$
- Niveles = $n = 3$

4.2 Adecuación del sistema de aplicación de carga al modelo de referencia

El modelo de referencia tiene un total de 338 nudos. El número máximo de nudos en los que se puede aplicar carga, según el sistema diseñado es 128, que equivale a 2^7 . Tomada esta decisión, y aplicando las condiciones del sistema se obtienen las siguientes valores:

- Número de nudos a cargar = $2^7 = 128$
- Carga por nudo = $P/128$
- Niveles = exponente de $2^7 = 7$

Con estas condiciones se procede a realizar un estudio sobre la distribución más adecuada y eficiente de los nudos a cargar. Recordemos que una de las premisas del sistema es generar un estado de carga superficial, similar a una carga de nieve. Si bien la nieve se acumula en la totalidad de la superficie cuando éstas son planas, no ocurre así en superficies inclinadas o curvas, como la de la estructura de referencia (Fig. 35). Considerando que la nieve tiende a deslizarse en superficies con inclinaciones superiores a 60° , no se produciría acumulación en la zona inferior cercana a los apoyos (Fig. 36).

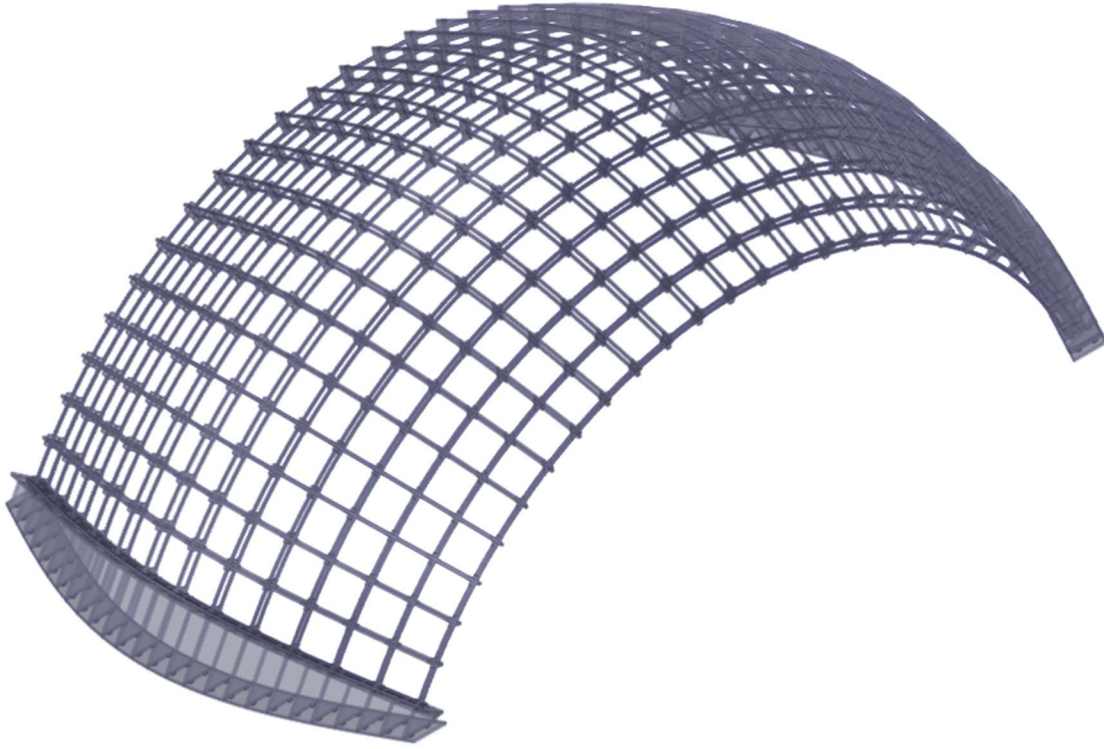


Fig. 35. Geometría del modelo de referencia

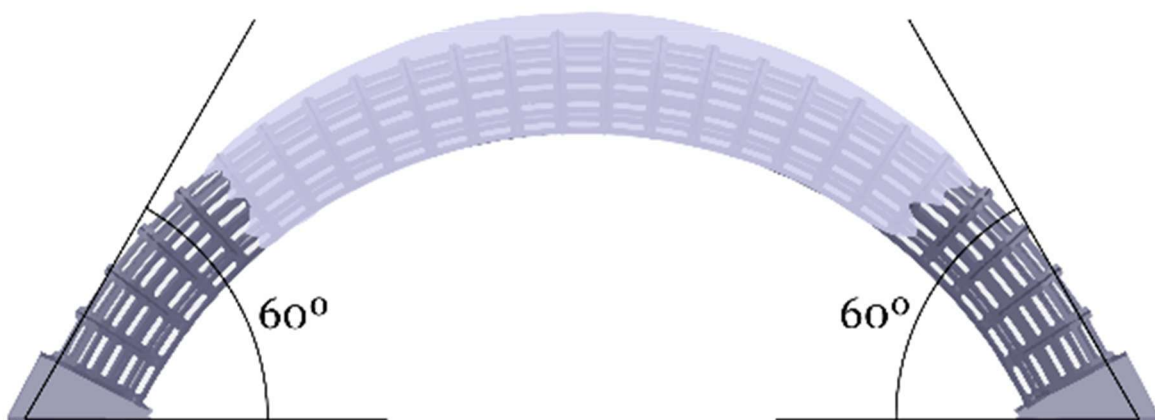


Fig. 36. Distribución de carga de nieve sobre el modelo de referencia

Se analizan diferentes opciones posibles de distribución de carga en 128 nudos que podrían ser interesantes (Fig. 37), llegando a la conclusión que la más adecuada es la correspondiente a la opción 3, en la que la carga se concentra en la zona central de la estructura, que es la más aproximada a la de una carga de nieve.

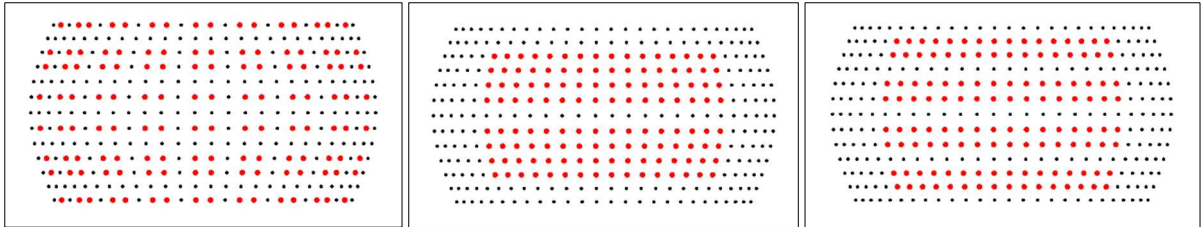


Fig. 37: Opciones de distribución de carga analizadas. Izq.: opción1; centro: opción 2; dcha.: opción 3 (elegida).

En las Figuras 38 y 39 se muestran un alzado y una perspectiva frontal del diseño del sistema de carga propuesto, adaptado a la estructura de referencia.

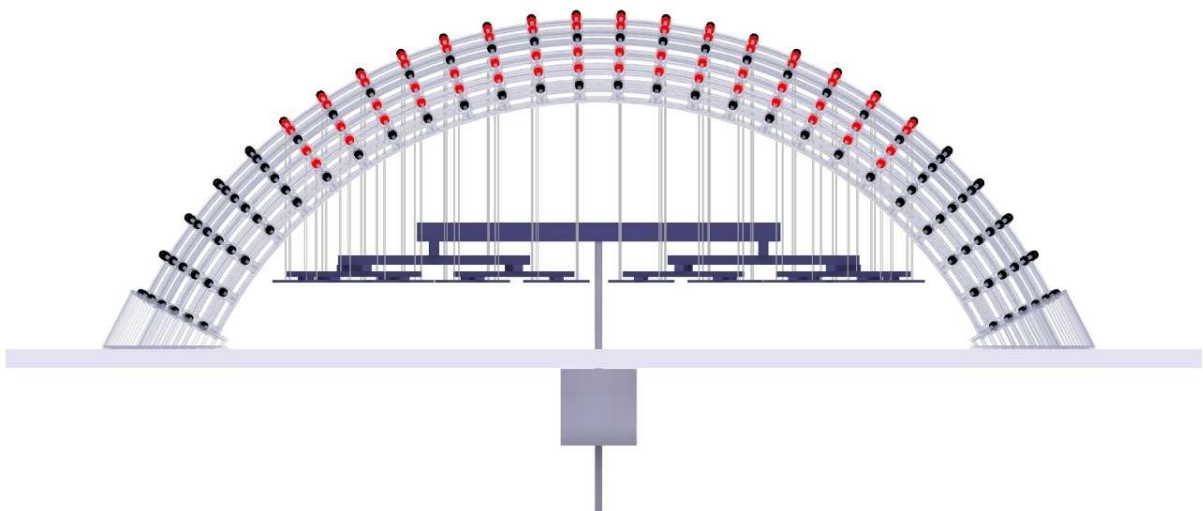


Fig. 38. Alzado del sistema de carga propuesto adaptado al modelo de referencia.

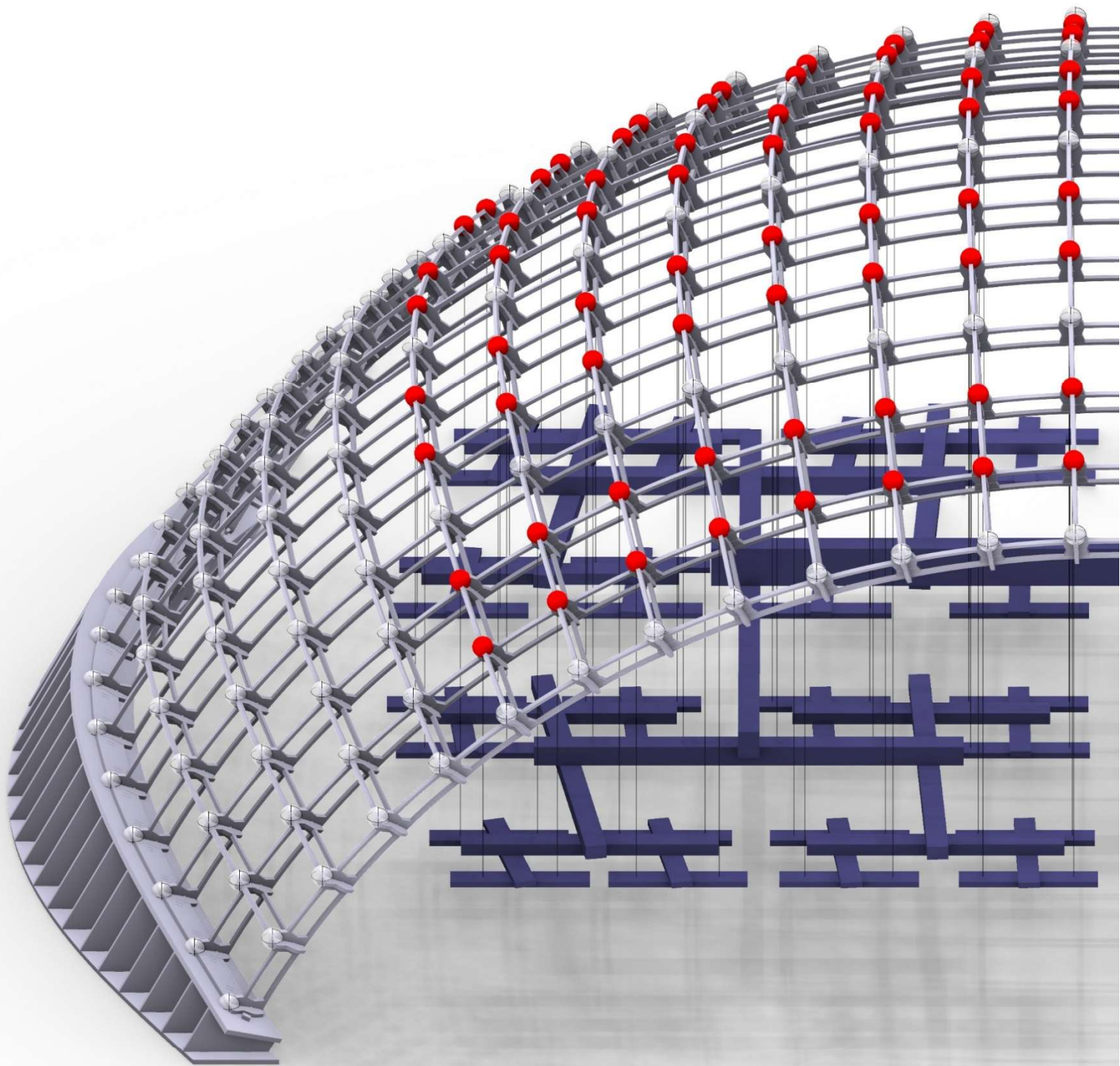
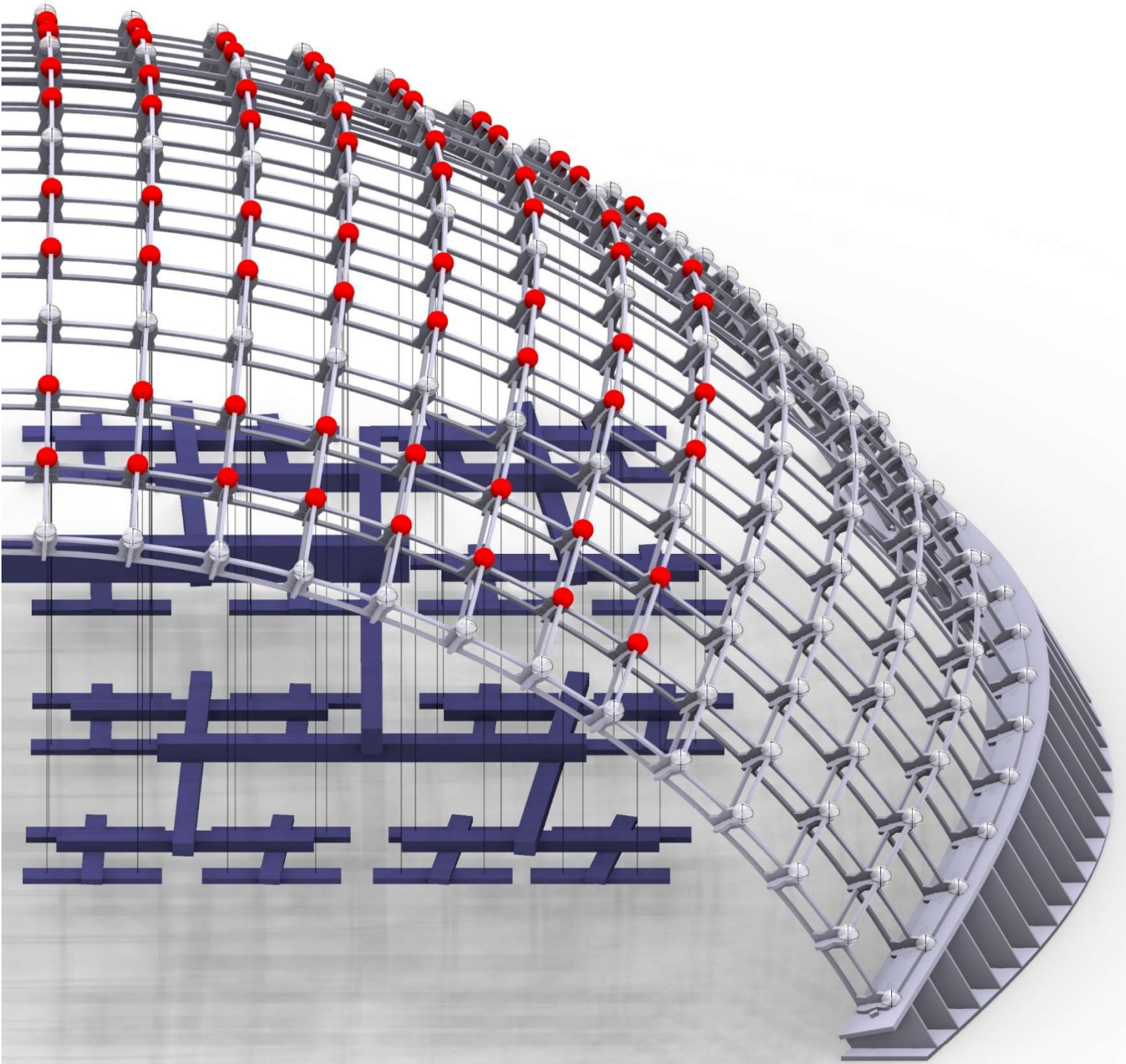


Fig. 39. Axonometría del sistema de carga propuesto adaptado al modelo de referencia.



4.3 Componentes del sistema

Una vez realizado el diseño conceptual del sistema, se procede a definir sus componentes y cómo materializarlos para su efectiva ejecución y aplicación en el modelo de referencia físico (Fig. 40):

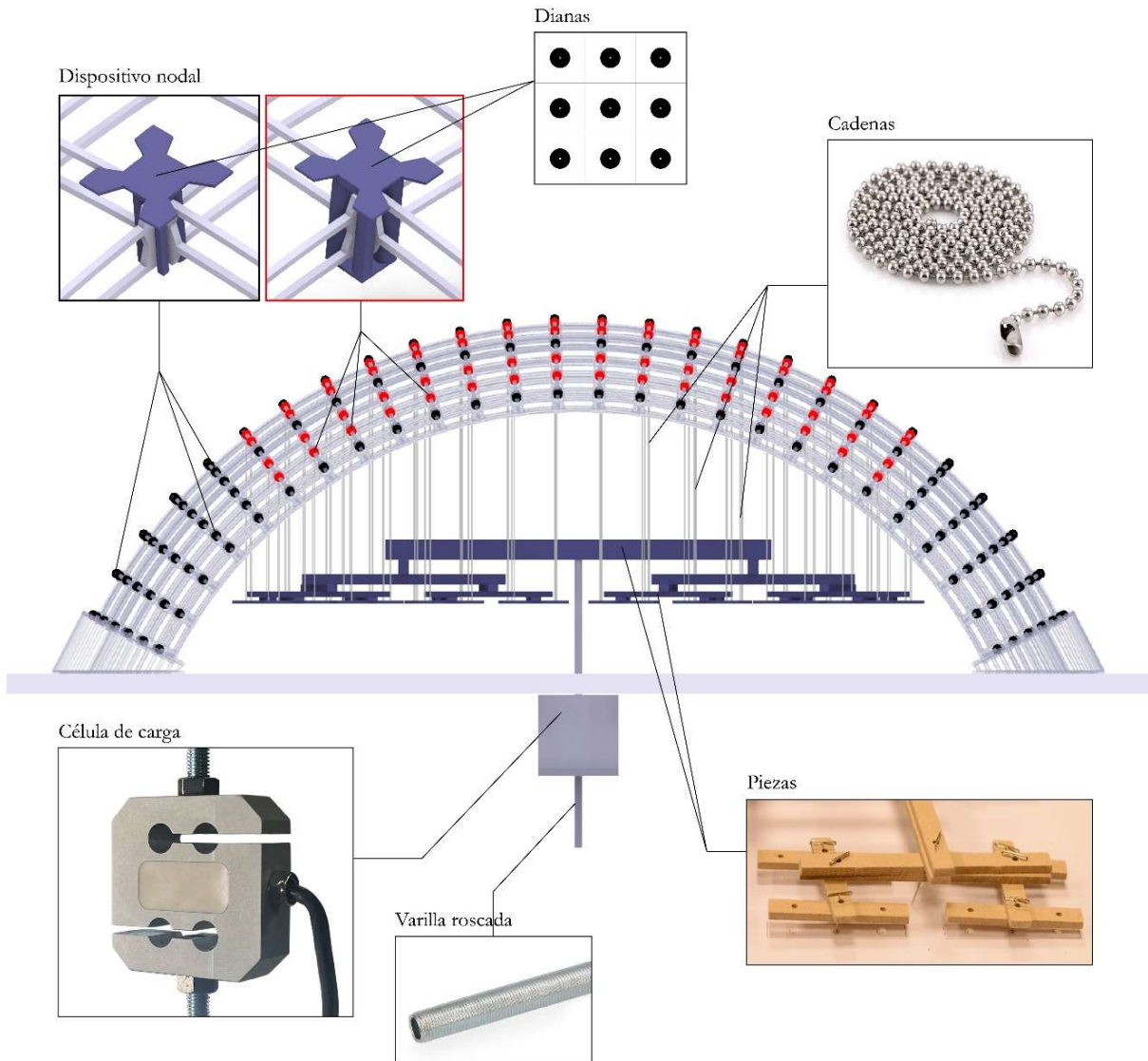


Fig. 40. Materialización del sistema de aplicación de carga. Componentes del sistema.

En la siguiente tabla se recopilan los principales componentes físicos que constituyen el sistema de aplicación de carga desarrollado, incluyendo información sintética sobre su función, material, número de unidades necesarias, tipo (a medida o de catálogo) y el proceso de diseño y fabricación para los componentes realizados a medida.

Componente	Función	Material	Unidades	Tipo	Diseño y fabricación
Dispositivo nodal	Integrar en un único dispositivo las dianas y el elemento de aplicación de la carga	PLA de color blanco	338 (210 dispositivos de nudo sin carga + 128 dispositivos de nudo con carga)	A medida (prototipado)	Diseñados en Rhino e impresos en 3D
Dianas	Identificación automática de puntos (nudos de la estructura) en el espacio digital mediante fotogrametría, para la posterior medición de deformaciones	Papel	338	A medida	Dibujadas en CAD, impresas y cortadas
Vigas de carga	Distribuir la carga desde la célula a los nudos de la estructura	Madera (DM)	127	A medida (prototipado)	Diseñadas paramétrica mente en Rhino + Grasshopper y mecanizadas con CNC
Cadenas	Trasladar la carga desde el primer nivel de vigas de carga a los nudos de la estructura	Aluminio	128 (30 metros lineales)	De catálogo (cortadas a medida)	-
Célula de carga	Medición de la fuerza aplicada	Metal	1 (capac. 50 kg)	De catálogo	-
Varilla roscada	Conectar la célula de carga con la viga del último nivel	Acero	1 (métrica 8)	De catálogo	-

Tabla 03. Características de los componentes del sistema.

4.4 Diseño, desarrollo y prototipado de componentes. Proceso de montaje

Una vez definidos los componentes principales, es fundamental estudiar minuciosamente la forma en que estos deben conectarse e integrarse físicamente.

Otro aspecto importante es el proceso de montaje del sistema ya que éste está constituido por cientos de piezas, lo que obliga a seguir un orden determinado.

Tras varias pruebas, el proceso de montaje llevado a cabo fue el siguiente:

- Colocación de los dispositivos nodales sobre el modelo de referencia
- Montaje del sistema de vigas de carga
- Colocación de las cadenas. Conexión entre vigas de carga y dispositivos nodales
- Conexión del sistema de vigas de carga a la célula de carga

A continuación, se describen detalladamente los diferentes componentes del sistema, el proceso de montaje llevado a cabo y el proceso de diseño y fabricación de los componentes realizados a medida.

Dispositivo nodal:

Es necesario considerar que en la estructura existen dos tipos de nudos: a los que se aplica carga y a los que no. Y es importante identificar los elementos que debe integrar cada uno.

En los nudos que no se aplica carga se deben colocar solamente las dianas, mientras que en los que se aplica carga deben colocarse tanto las dianas como las cadenas.

Para ello se opta por diseñar un componente, “*dispositivo nodal*”, fabricable mediante impresión 3D capaz de integrar los elementos requeridos en cada tipo de nudo. Al haber dos tipos de nudos, hay dos dispositivos nodales diferentes:

- Dispositivo de nudo con carga: debe integrar tanto la fijación de la diana como el anclaje para la cadena.
- Dispositivo de nudo sin carga: sirve solamente para colocar la diana en el centro de cada nudo, por lo que se modifica el diseño simplemente eliminando el elemento de anclaje de la cadena.

A continuación, se presenta el proceso de diseño y prototipado del dispositivo de nudo con carga, incluyendo las pruebas fallidas con sus correspondientes motivos, hasta llegar a la solución definitiva.

Prototipo 1 - fallido

Se diseñó con un enganche esférico para anclar el enganche de cierre de la cadena.

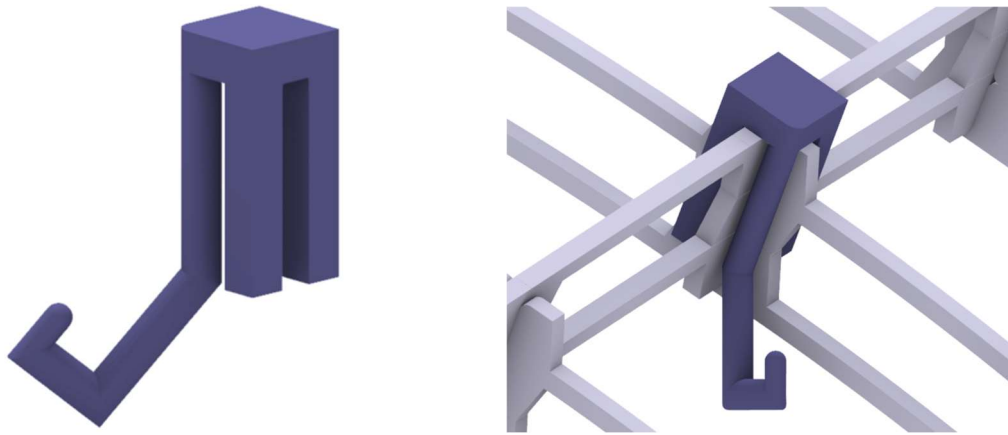


Fig. 41. Prototipo 1 (fallido)

Prototipo 2 - fallido

El planteamiento es el mismo que en el anterior prototipo, pero incorporando una ranura, para que se pueda anclar la cadena directamente, prescindiendo del enganche de cierre de la cadena.

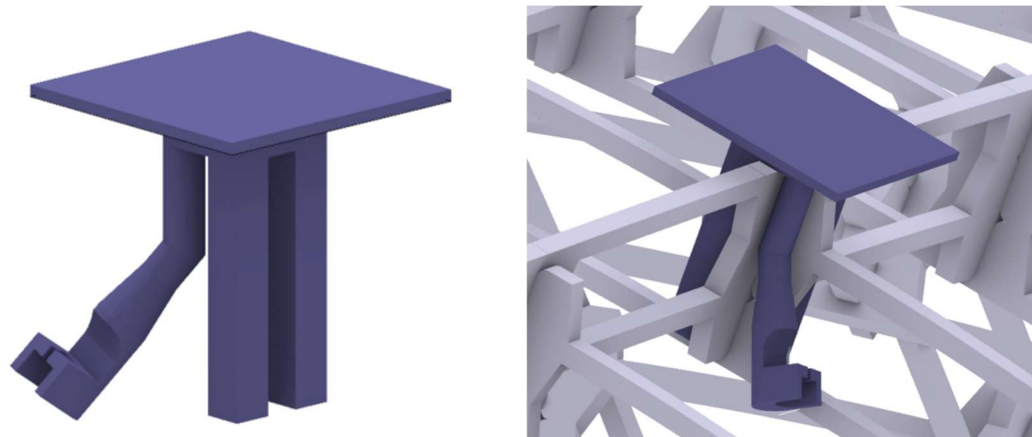


Fig. 42. Prototipo 2 (fallido)

Los prototipos 1 y 2 tienen los mismos inconvenientes. Ambos están diseñados para que cada uno adopte la inclinación del enganche adecuada según el ángulo que forma la estructura con la vertical en cada nudo, de manera que la cadena quede alineada con la vertical en todos los nudos. Esto genera un dispositivo diferente para cada nudo, con geometrías complejas que dificultan la fabricación, además de complicar considerablemente el montaje, ya que cada dispositivo debería colocarse cuidadosamente en el punto correspondiente.

Prototipo 3 - fallido

Se plantea una única pieza válida para todos los nudos. Pieza dividida en dos partes, una que agarra al nudo y otra que se encaja para cerrarlo completamente.

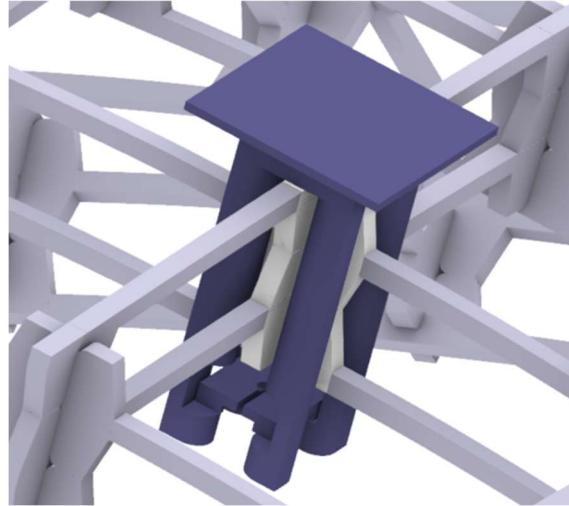
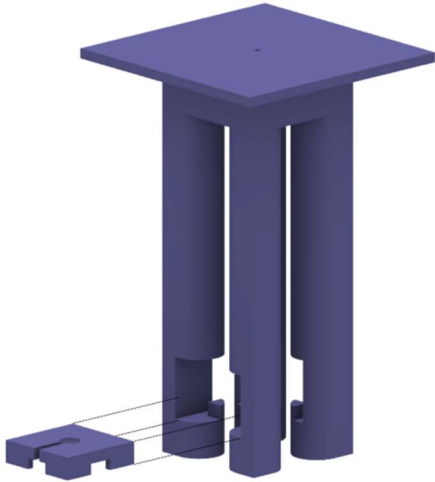


Fig. 43. Prototipo 3 (fallido)

Prototipo 4 - fallido

El planteamiento es el mismo que en el prototipo 3, pero tratando de optimizar la cantidad de material para así optimizar también el tiempo de impresión.

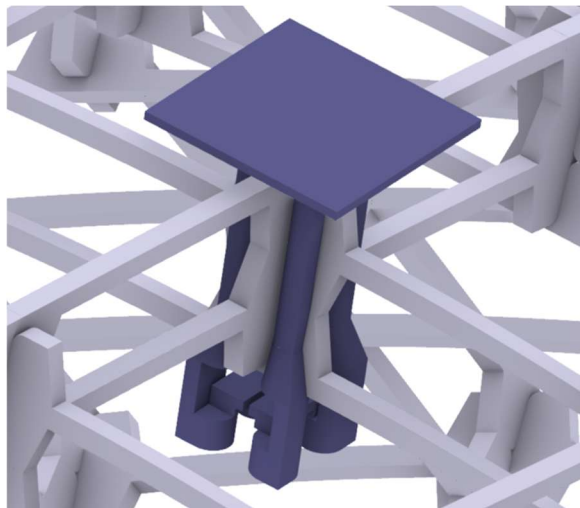
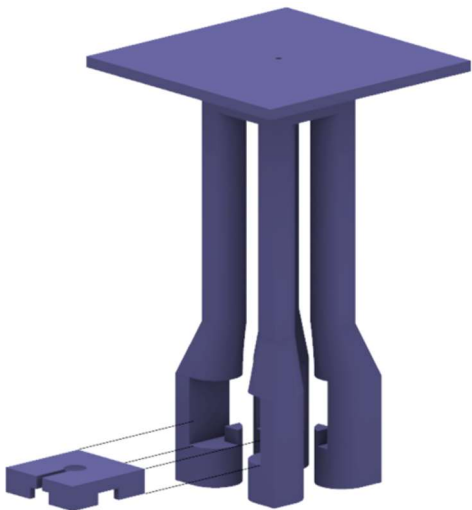


Fig. 44. Prototipo 4 (fallido)

Prototipo 5 - fallido

Una variación del prototipo 3 planteado para insertarse en dirección contraria. La pieza que cierra es la de la diana en vez de la de la cadena.

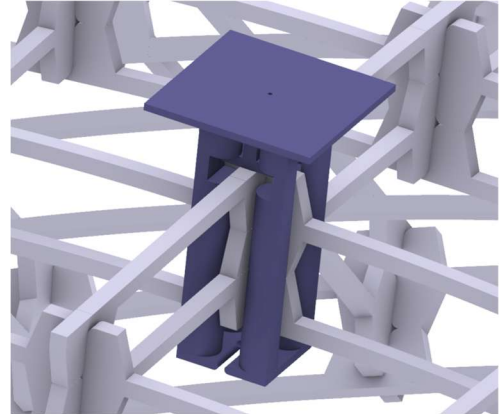
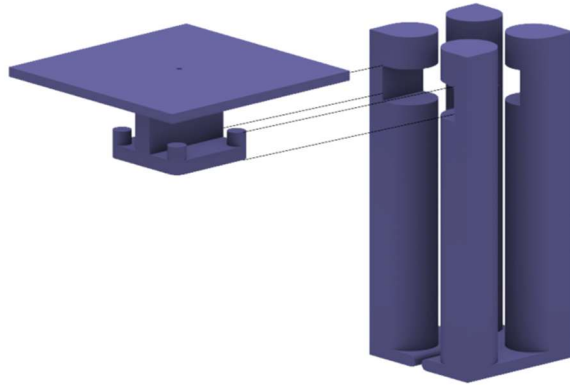


Fig. 45. Prototipo 5 (fallido)

Prototipo 6 - fallido

En este caso se ha hecho la misma variación, cambiando la dirección en la que se inserta, pero con el prototipo 4.

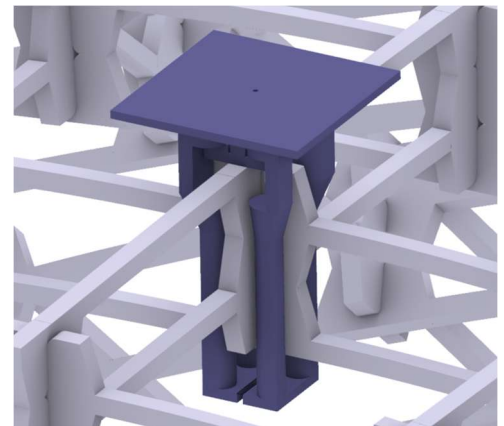
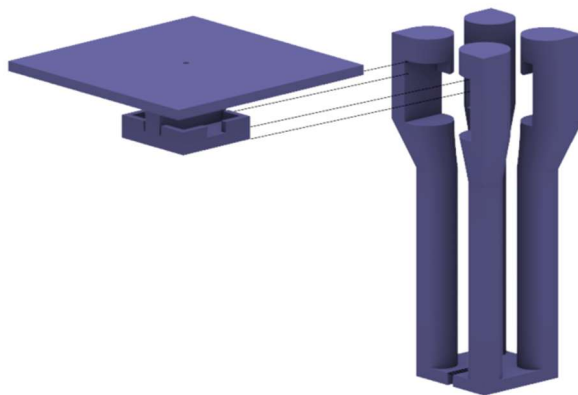


Fig. 46. Prototipo 6 (fallido)

El inconveniente de los prototipos 3, 4, 5, y 6 es que en sus geometrías incluyen elementos demasiado pequeños y elementos en voladizo que, aunque son imprescindibles para que el ensamblaje funcione, hacen que la fabricación sea inviable con una impresora 3D convencional.

Prototipos definitivos

- Dispositivo para nudos con carga

Se optimiza la versión anterior simplificando la geometría de los elementos de anclaje entre ambas partes del dispositivo (Fig. 47), sustituyendo los voladizos por elementos inclinados a 45° para que sea fácilmente fabricable.

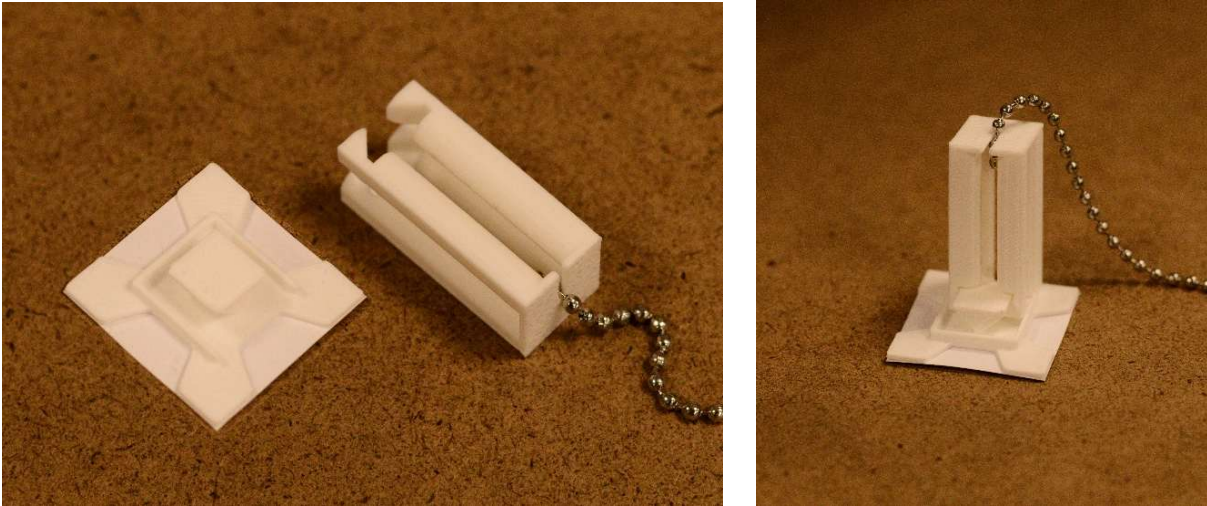


Fig 47: Prototipo definitivo para nudos con carga. Izq.: piezas del dispositivo; dcha.: dispositivo ensamblado.

Resultado:

Un dispositivo válido para todos los nudos, dividido en dos partes: una con la ranura de anclaje para la cadena y las cuatro patas que agarran el nudo, y otra con la plataforma de colocación de la diana que se ensambla con la primera encerrando al nudo por completo, permitiendo que, al aplicar la carga, ambas trabajen en conjunto.

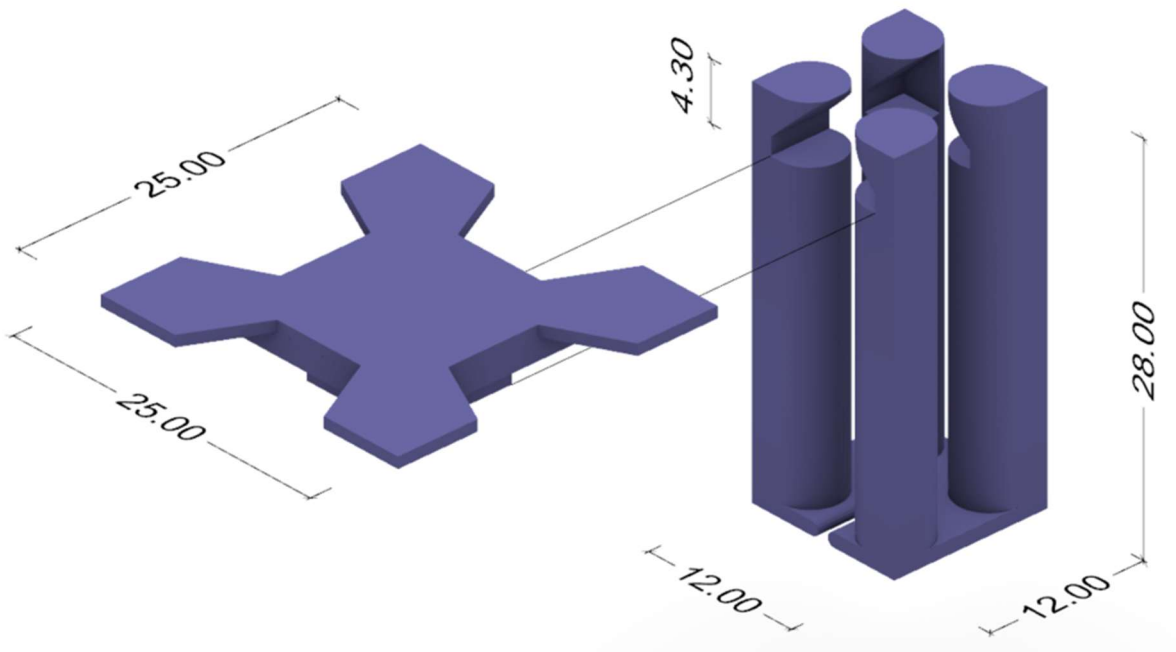


Fig 48: Dimensiones del prototipo definitivo para nudos con carga en mm

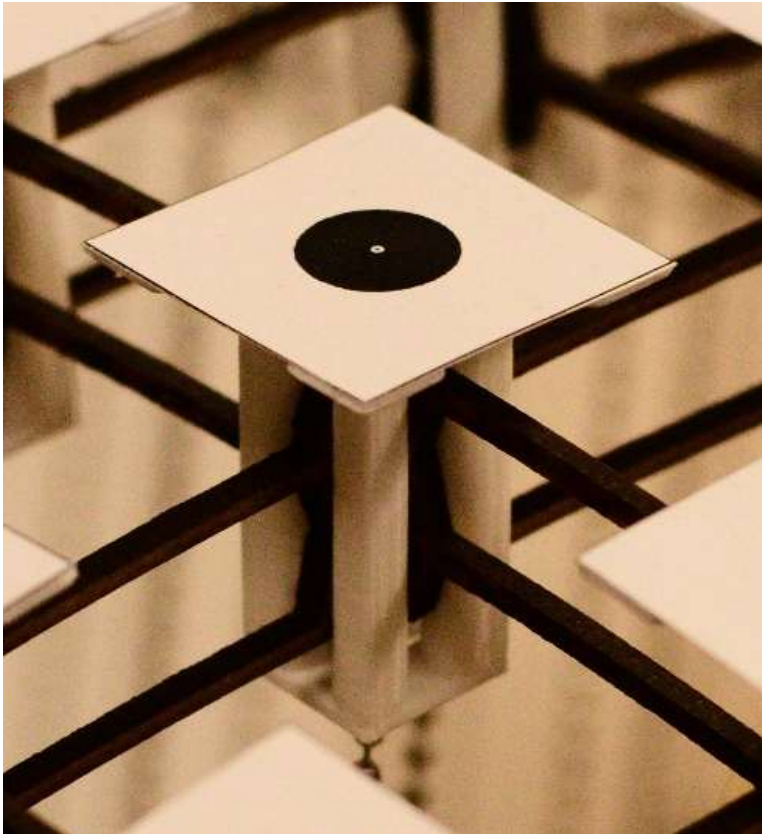


Fig 49: Dispositivo nodal con carga colocado en el modelo de referencia.

- Dispositivo para nudos sin carga

La geometría se modifica para prescindir de la ranura de anclaje de la cadena. Es una única pieza abierta que contiene la plataforma de colocación de la diana y las cuatro patas de agarre. Al no tener que soportar carga, no es necesaria una pieza de cierre.

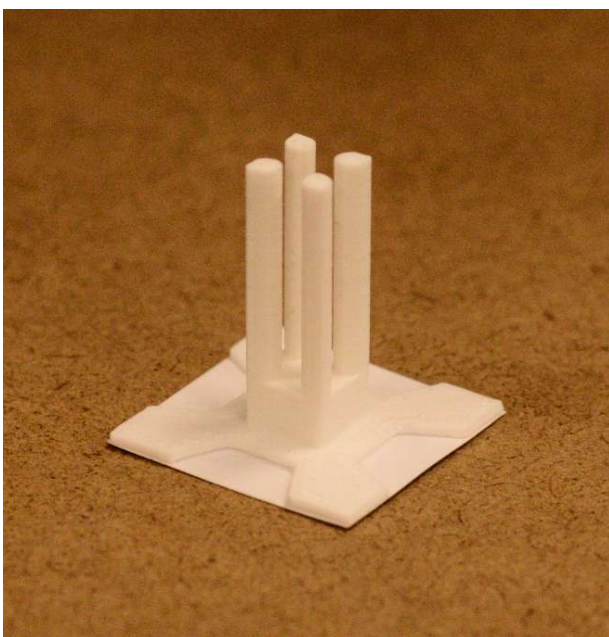


Fig. 50. Dispositivo para nudos sin carga



Fig. 51. Dispositivo nodal sin carga colocado en el modelo de referencia.

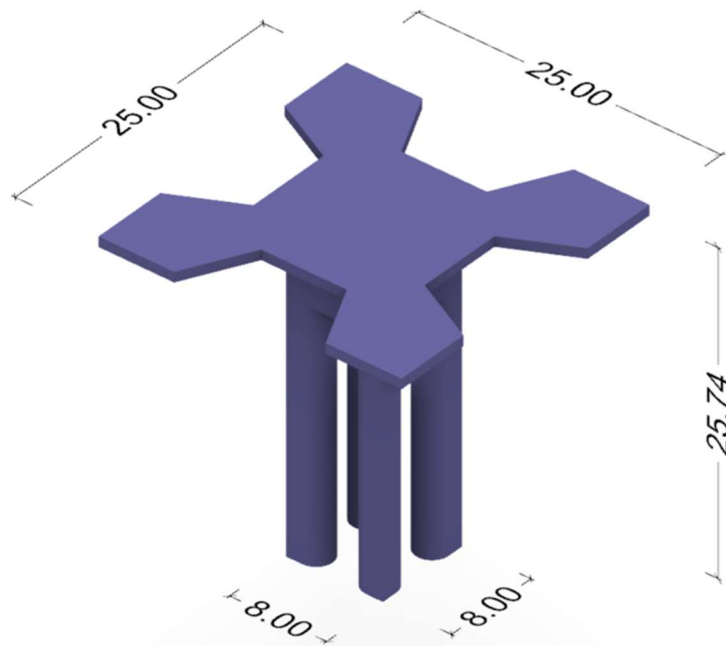


Fig 52: Dimensiones del prototipo definitivo para nudos sin carga en mm.

Teniendo el diseño de los prototipos definitivos, se realiza la impresión de 128 copias del dispositivo de nudos con carga y 210 copias del dispositivo de nudos sin carga (Fig. 53). En total 338 dispositivos nodales, que equivale al número total de nudos de la estructura.

Una vez fabricados, el siguiente paso es pegar las dianas en todos ellos y colocarlos en la estructura.



Fig. 53.. Impresión de dispositivos nodales. Izq.: nudos sin carga; dcha.: nudos con carga.

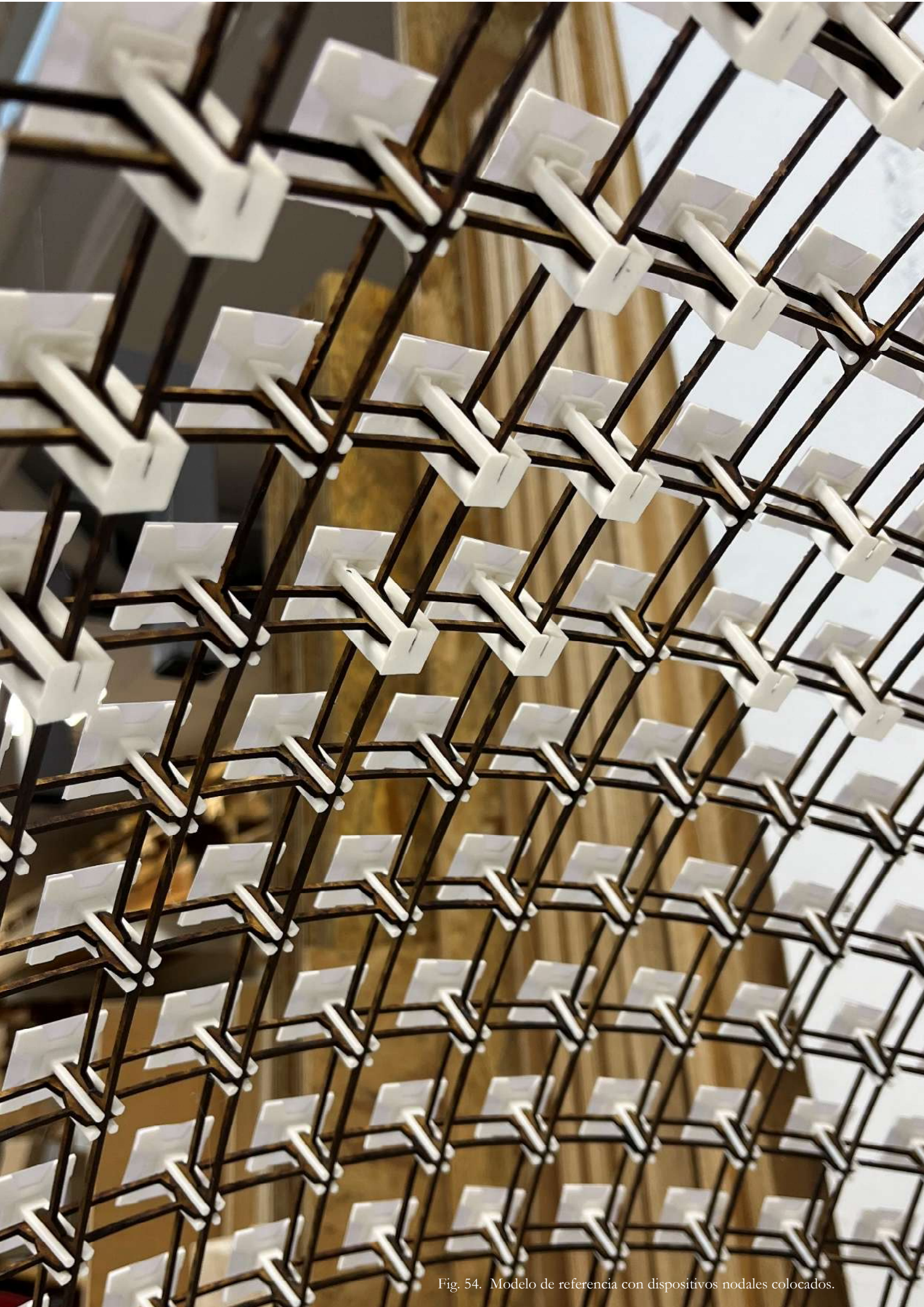


Fig. 54. Modelo de referencia con dispositivos nodales colocados.

Vigas de carga:

Son piezas de madera (DM) diseñadas en un modelo paramétrico, con el cual, cada viga adopta la longitud necesaria, según la posición de los nudos de los que cuelga, y el canto requerido en función de la distancia entre apoyos que le corresponde.

Una vez diseñadas las 127 piezas se prepara el archivo de corte para mecanizarlas con CNC, consiguiendo así la mayor precisión tanto en el corte como en los taladros.

El canto de las vigas es un aspecto fundamental para que el sistema funcione correctamente. Se debe garantizar que las piezas se deforman mínimamente. Para ello, a medida que aumenta la luz de las piezas debe aumentar también el canto. En el diseño se ha definido una esbeltez máxima de L/18, definiendo así los cantos de las vigas en los siete niveles (Tabla 04):

Nivel	Luz aproximada entre apoyos (L)	Canto (h)	Esbeltez aproximada
1	34 – 46 mm	4 mm	L/10
2	38 – 42 mm	4 mm	L/10
3	74 – 91 mm	8 mm	L/10
4	120 – 122 mm	8 mm	L/15
5	166 – 167 mm	10 mm	L/16
6	250 mm	14 mm	L/18
7	344 mm	20 mm	L/17

Tabla 04. Tabla de características geométricas de las vigas carga por niveles: Luz, canto y esbeltez.

Cada pieza tiene 3 orificios, uno en cada extremo y otro en el centro. Los orificios de los extremos permiten la articulación de las piezas en sus apoyos y el del centro permite la articulación con las piezas del nivel superior. Es imprescindible que las piezas se conecten de forma articulada para garantizar el isostatismo del sistema y el valor de la carga en cada extremo.

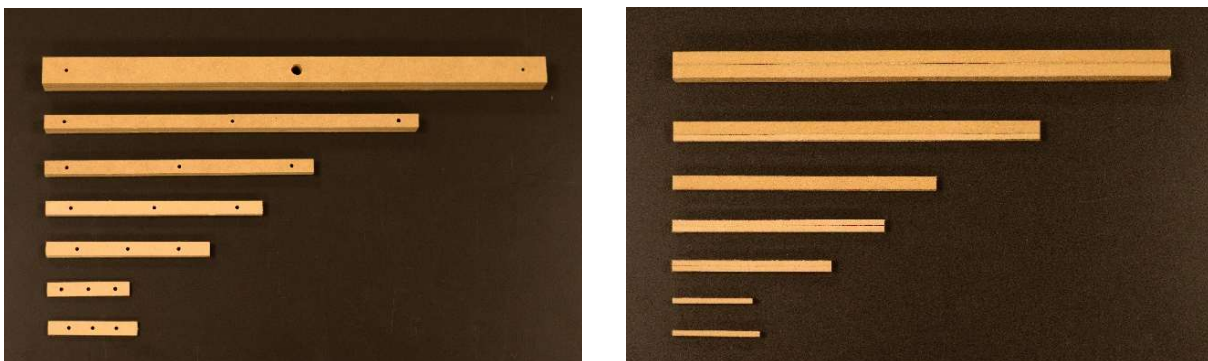


Fig. 55: Vigas de carga ordenadas por niveles. Izq.: vista en planta; dcha.: vista de canto.

Una vez cortadas se colocan en su posición correspondiente, generando una estructura piramidal de siete niveles (Fig. 56).

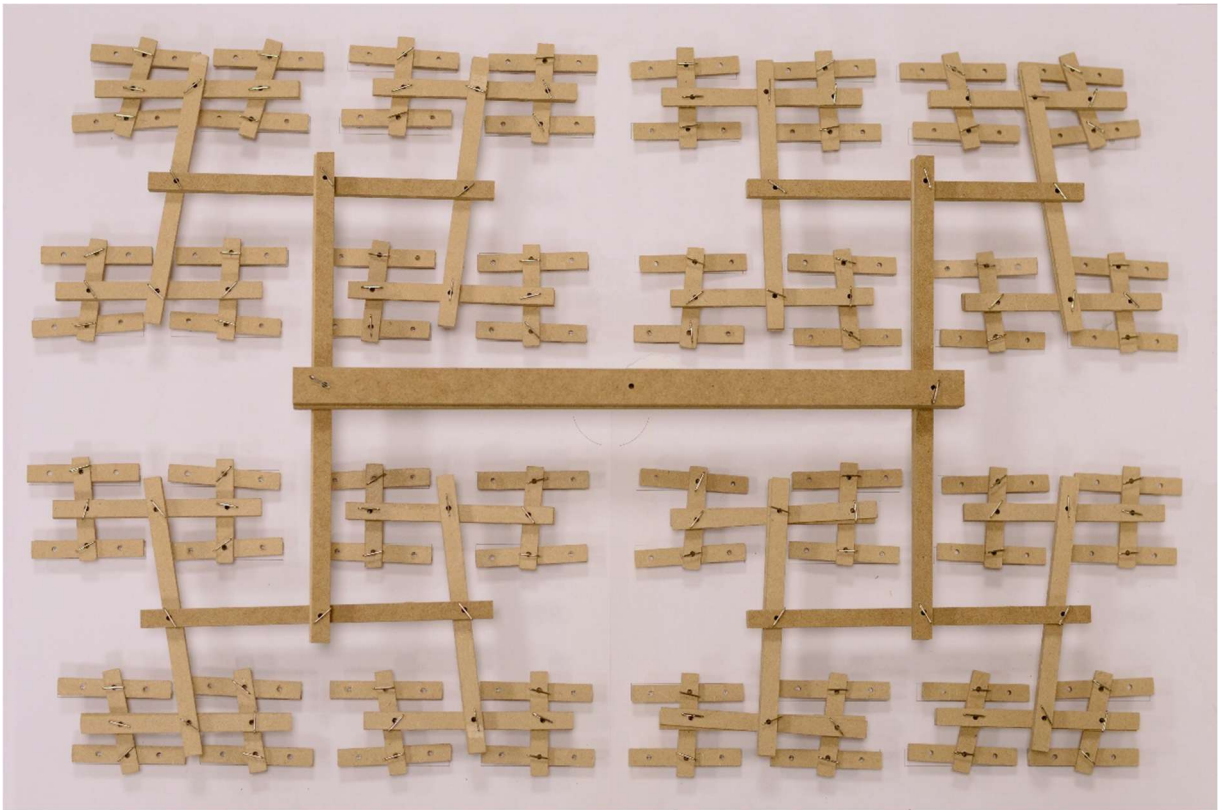


Fig. 56. Vigas de carga. Montaje en estructura piramidal de siete niveles.

En la estructura generada, las uniones a resolver son las siguientes:

- Unión entre las cadenas con las piezas del nivel 1.

Las piezas del primer nivel se encuentran suspendidas de las cadenas. Lo que significa que las propias cadenas son los apoyos de las piezas de este primer nivel. Los orificios de las piezas tienen el mismo diámetro que las cuentas de la cadena y están pensados para permitir el paso de la misma, de manera que, al colocar una pieza de cierre por debajo, se genere un tope que garantice su correcta sujeción (Fig. 57).

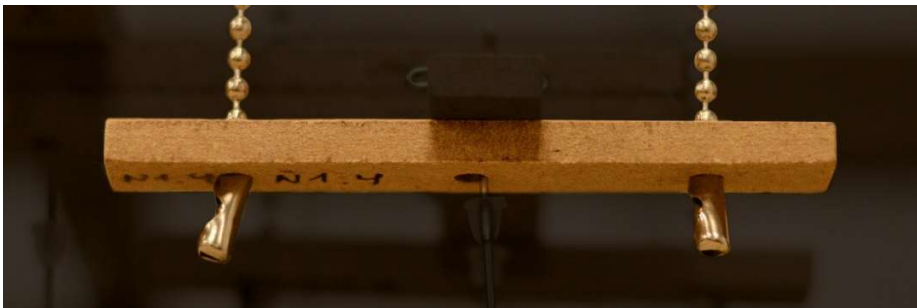


Fig. 57. Detalle de unión entre viga de carga de nivel 1 y cadenas.

- Unión entre pieza y pieza

En los niveles superiores, las piezas se apoyan unas sobre otras: las del segundo nivel en las del primero, las del tercero en las del segundo, y así sucesivamente. El objetivo de esta unión es fijarlas de forma articulada, para que se apoyen siempre sobre los centros de las piezas inferiores.

Como elementos de articulación, se emplean imperdibles en T combinados con tapones de silicona. Su funcionamiento es similar al de un pendiente: se colocan las piezas alineando los orificios de las mismas, se introduce el alfiler a través de ellos y se fija por el lado opuesto mediante el tapón de silicona. El diámetro de los taladros es suficiente para proporcionar la holgura necesaria y garantizar un comportamiento articulado real de la unión (Fig. 58).

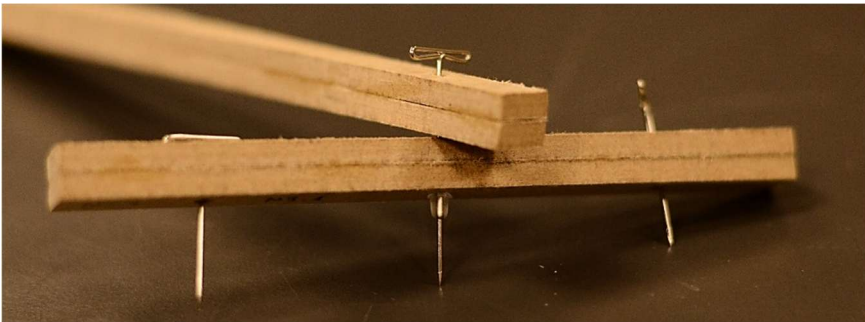


Fig. 58. Detalle de unión entre vigas de carga.

El resultado es parecido al mecanismo de los títeres: las piezas quedan unidas en la estructura piramidal de forma articulada, de modo que, al manipularlas, pueden girar libremente (Fig. xx).

Esta libertad de movimiento es problemática durante el proceso de cuelgue puesto que las piezas se mueven y giran en todas las direcciones. Por evitar este inconveniente durante el montaje se utilizó una lámina de cartón pluma auxiliar para fijar las piezas en su posición, asegurando así que están niveladas, para posteriormente colocarlas debajo de la maqueta y unirlas a las cadenas fácilmente (Fig. 59).

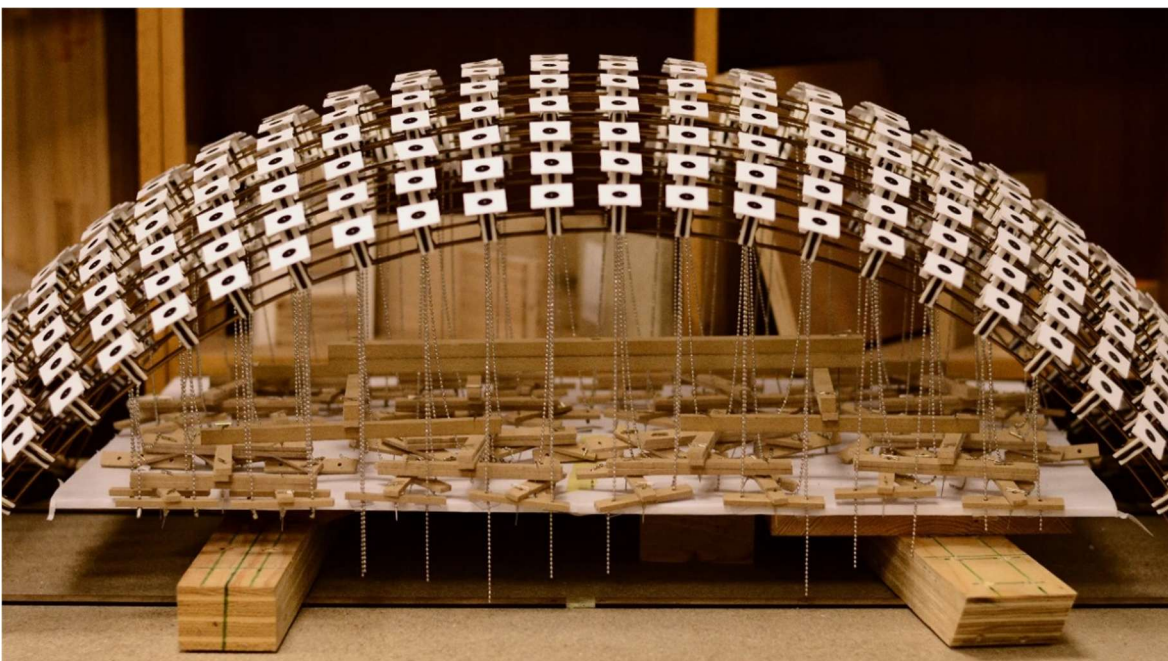


Fig 59. Proceso de suspensión de las vigas de carga sobre las cadenas, con lámina de cartón pluma auxiliar.

Cadenas:

Al tener la estructura una forma abovedada, las cadenas deben tener longitudes diferentes para que las piezas queden niveladas. Para facilitar el montaje, en un principio se cortan todas de la misma medida, la correspondiente a la más larga.

Cuando el sistema de piezas de madera está colocado en su posición definitiva (debajo de la estructura), se van colgando las cadenas una a una, y se introducen en los taladros de las piezas. Teniendo todas colocadas, se corta el sobrante de cada una y se fijan por debajo con el enganche de cierre de la propia cadena. Como se ha explicado anteriormente, el enganche hace de tope y permite que todas las piezas queden colgadas (Fig. 60 y Fig. 61).

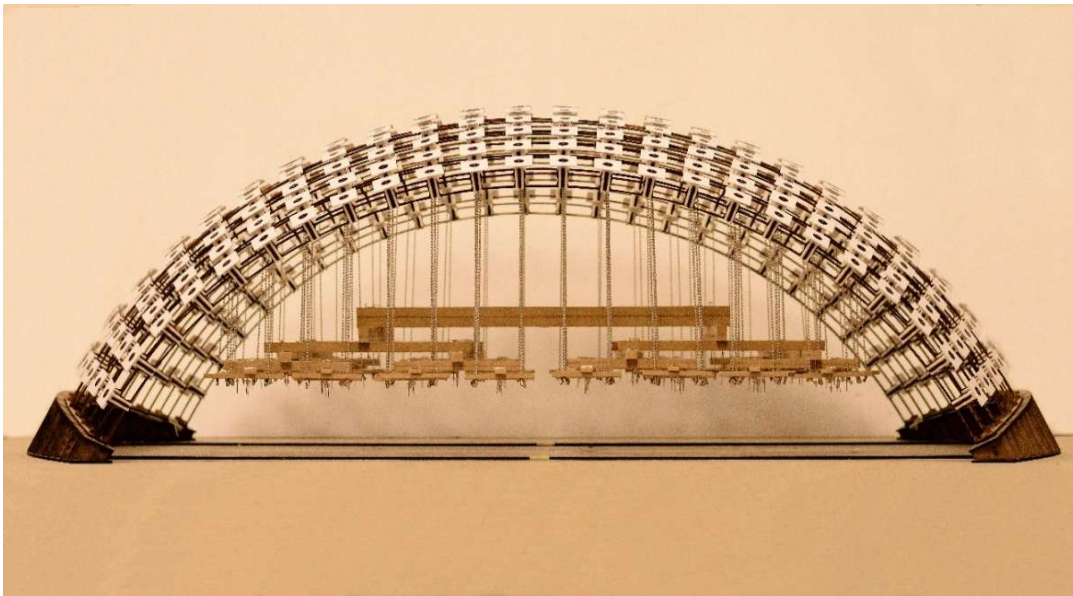


Fig. 60. Estructura piramidal de vigas de carga colgada del modelo de referencia. Vista en alzado.

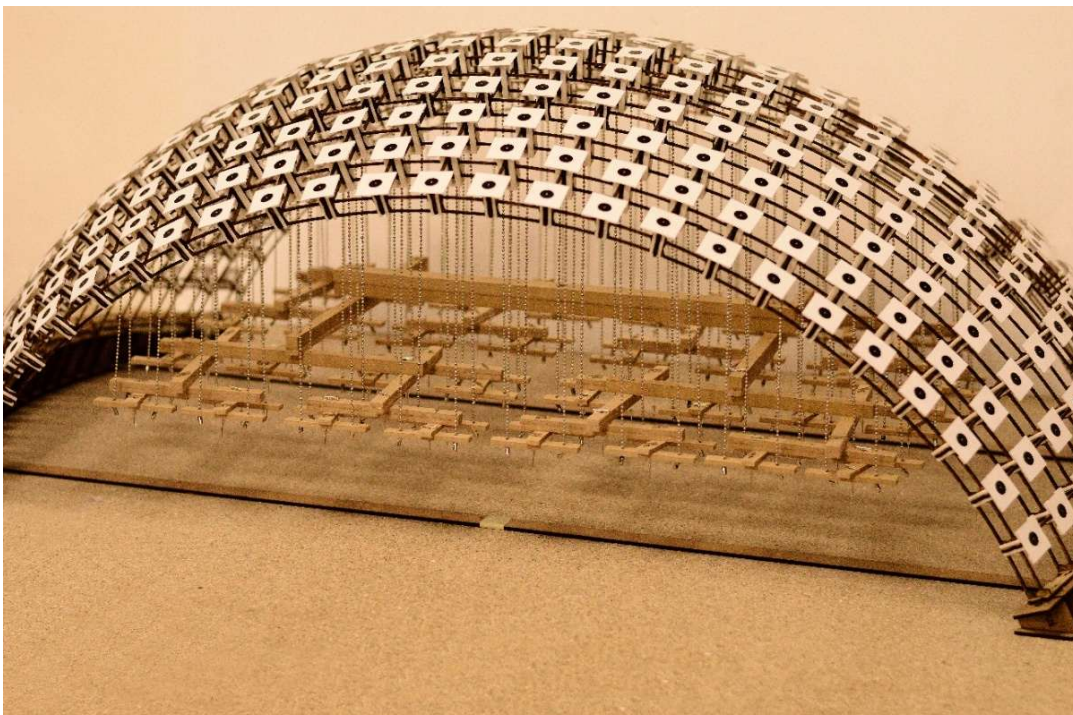


Fig. 61. Estructura piramidal de vigas de carga colgada del modelo de referencia.. Vista en perspectiva.

Célula de carga y varilla roscada:

Tal y como se ha indicado anteriormente, la viga central que compone el último nivel debe conectarse a la célula de carga para que esta mida la fuerza ejercida sobre ella.

La célula utilizada tiene una rosca de métrica de 8 milímetros. Ésta se conecta a la viga central mediante una varilla roscada, por lo que tanto la varilla, como el taladro central de la viga deben tener ese mismo diámetro. En su colocación, la varilla se dispone en vertical, atravesando tanto la viga como el tablero. La varilla, en el extremo superior, se fija a la viga central con una tuerca. En el otro extremo, debajo del tablero, se enrosca a la célula en su orificio superior. En el orificio inferior de la célula se acopla otra varilla que atraviesa el “puente” de carga (ver Fig 62). El puente permite que la célula apoye sobre el tablero y no sobre la estructura cuando no está siendo ensayada.

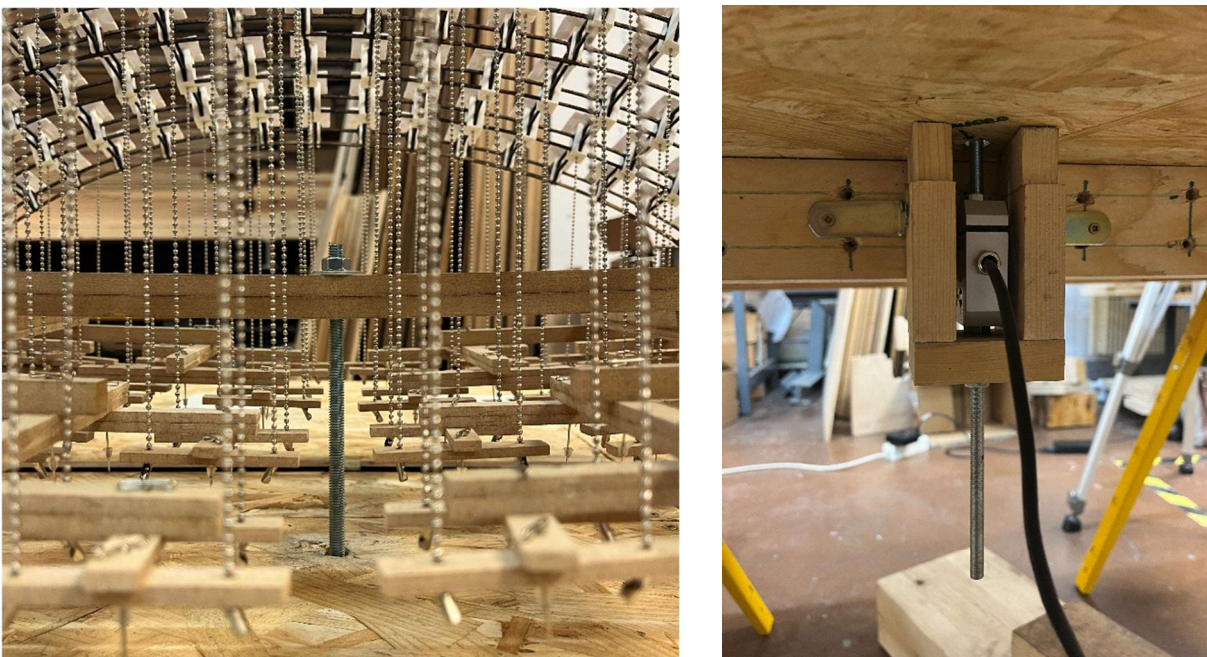


Fig. 62. Célula de carga y varillas roscada. Izq.: conexión superior con el sistema de vigas de carga; dcha.: conexión inferior con el puente de carga.

En el lado inferior del puente, enroscada en la varilla, se coloca otra tuerca que permite aumentar la carga progresivamente al enroscarse. Al enroscar la tuerca, la célula desciende, aplicando carga sobre la viga central y, por tanto, sobre la estructura. Con este sistema la carga se aplica mediante control por desplazamiento.



Fig. 63. Sistema de aplicación de carga completo

5 PRUEBAS DE CARGA. VALIDACIÓN DEL SISTEMA

5.1 Ensayos preliminares. Dispositivo nodal y ensayo global mediante control por fuerza

Ensayo de control por fuerza del dispositivo nodal:

Para comprobar la resistencia del dispositivo nodal y asegurar que no rompa durante el ensayo, se realiza un ensayo a uno de ellos, colgando peso del mismo mediante un dinamómetro.

El resultado fue el siguiente: el dispositivo no falla por rotura sino por deformación. Sus componentes son ligeramente flexibles y al ir aumentando la carga, las patas se van abriendo hasta el punto en el que las dos piezas del dispositivo se separan, lo que supone el fallo.

Durante el ensayo se consiguió colgar una carga máxima 1,5 kg antes de que se produjera el fallo (Fig. 64).

En el sistema de carga diseñado trabajan 128 dispositivos nodales a la misma carga, por lo que para se produzca el fallo, el modelo tendría que soportar una carga total de más de 190 kg ($128 \times 1,5 \text{ kg} = 192 \text{ kg}$), lo cual es una carga ampliamente superior a la capacidad resistente esperada, que no debería ser superior a la de la célula de carga utilizada (50 kg), la cual permite una carga nodal máxima de unos 400 g ($50\text{kg}/128=0.39 \text{ kg}$), muy inferior a la de rotura del dispositivo. Por ello se concluye que el diseño del dispositivo nodal es suficiente en términos de resistencia.



Fig. 64. Prueba de carga del dispositivo nodal. Izq.: Imagen general del ensayo; dcha.: detalle del dinamómetro con la carga máxima alcanzada durante el ensayo.

Ensayo global del modelo físico mediante control por fuerza:

Antes de realizar el ensayo principal mediante control por deformación, se decidió hacer un pequeño ensayo global mediante control por fuerza, sometiendo el modelo únicamente al peso muerto de la célula de carga y la varilla. Una vez preparado el escenario y colocada la célula de carga, se dejó suspendida durante una hora y media, comprobando que efectivamente la deformación aumenta de forma progresiva.

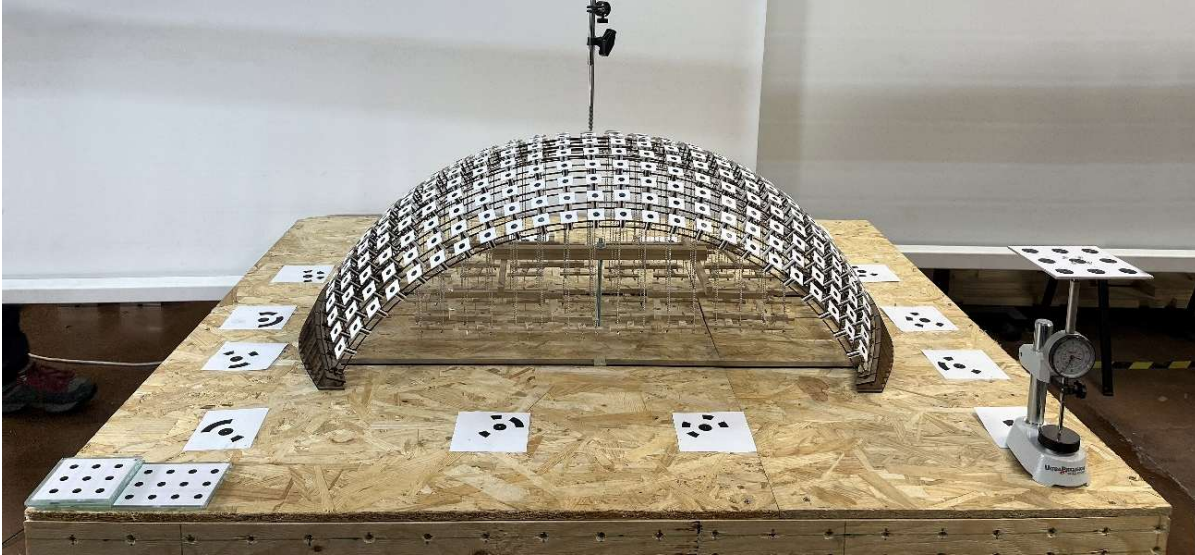


Fig. 65. Ensayo de control por fuerza con el peso de la célula y la varilla roscada

La célula, junto con la varilla roscada y las tuercas, tiene un peso aproximado de 2 kg.

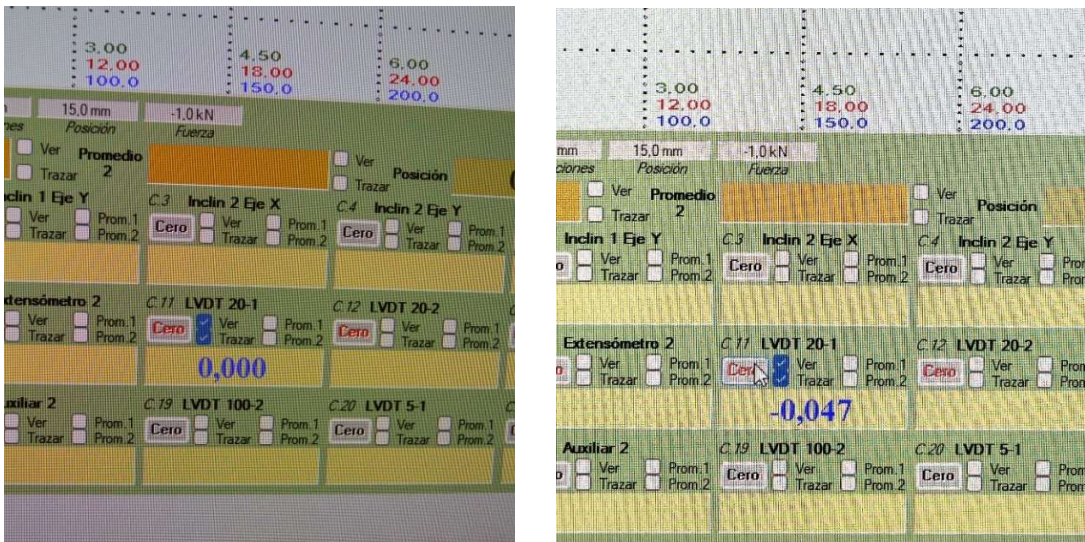


Fig. 66. Medición del LVDT durante el ensayo global en control por fuerza: Izq.: al inicio del ensayo; dcha.: al fin del ensayo.

Como se puede observar en las imágenes, al inicio del ensayo, inmediatamente después de colocar la célula de carga, el desplazamiento inicial es nulo. Con el transcurso del tiempo, el desplazamiento aumenta hasta 0,047 mm (Fig. 66). Por lo tanto, durante un periodo de una hora y media, y con un peso de alrededor de 2 kg, se produce un desplazamiento de aproximadamente media décima de milímetro, comprobando así el fenómeno de la fluencia del material, tal como se describe en el apartado 3.1

5.2 Ensayos mediante control por deformación. Procedimientos de aplicación de carga y medición de deformaciones.

Para validar el sistema de aplicación de carga y control de deformaciones desarrollado en este TFG (apartado 4) se han llevado a cabo dos pruebas de carga globales mediante control por deformación.

Para la medición de desplazamientos nodales se emplea la fotogrametría, siguiendo el método propuesto en el trabajo “*Fotogrametría aplicada al análisis estructural de láminas reticulares: Desarrollo de un método para la evaluación de deformaciones en pruebas de carga de modelos a escala*” (apartado 3.3.), pero aumentando considerablemente el número de fotos de cada proyecto con el objetivo de disminuir el error de medición.

A continuación, se resumen los aspectos más importantes de la prueba de carga.

Preparación del escenario:

- Tablero y modelo físico: el modelo físico se coloca en el centro del tablero, y se disponen las dianas codificadas alrededor del mismo (Fig. 67).
- Vidrios: se colocan en una de las esquinas del tablero (Fig. 67).
- Comparador: se dispone a un lado, lo más cerca posible del tablero, pero sin tener contacto con este (Fig. 68).
- LVDT: se dispone una viga metálica sobre la maqueta y a ella se engancha el LVDT mediante un electroimán, se coloca en el centro, en contacto con el nudo central de la estructura (Fig. 69).



Fig. 67. Escenario de fotografiado completo



Fig. 68. Detalle de posición del comparador



Fig. 69. Detalle de posición del LVDT

Parámetros de fotografiado:

Los ajustes de la cámara empleados son los siguientes: enfoque manual, apertura de diafragma $f/11$ y velocidad de obturación en modo automático. En cuanto a la sensibilidad ISO, en el fotografiado del estado **sin carga** se utiliza un valor de ISO 100, mientras que en el fotografiado del estado **con carga** se decide aumentar la sensibilidad a ISO 1600. Esta decisión se debe a que, al no disponer de un disparador remoto, el incremento del ISO permite reducir el tiempo de obturación, obteniendo así fotografías más nítidas.

Estrategia de fotografiado:

En el trabajo de referencia se hicieron barridos de 75 fotos. En este trabajo se intenta disminuir el error haciendo barridos de entre 130 y 150 fotos.

Se sigue una trayectoria continua, dividida en cuatro recorridos sucesivos. En primer lugar, se barre uno de los laterales desde un ángulo intermedio; a continuación, se repite el barrido del mismo lateral desde un ángulo más elevado. Posteriormente, se barre el lateral opuesto siguiendo las mismas dos fases, pero en orden inverso: primero desde el ángulo superior y, finalmente, desde el ángulo inferior. Las imágenes se capturan a intervalos muy próximos, garantizando el solapamiento entre imágenes consecutivas.

Se realiza un total de dos pruebas de carga, a dos niveles de deformación diferentes, por lo que el proceso de fotografiado se repite tres veces: una con el modelo sin carga, otra durante el primer ensayo y una tercera durante el segundo ensayo.

5.3 Obtención y análisis de resultados

Como se menciona anteriormente, se realizan dos ensayos de carga: uno en el que la estructura se somete a un desplazamiento de 5 mm en el nudo central y otro con un desplazamiento de 10 mm. En cada ensayo se registran los datos del LVDT y de la célula de carga con el fin de cuantificar la carga soportada bajo dichos desplazamientos y evaluar su comportamiento frente al fenómeno de relajación de tensiones (explicado en el apartado 3.1).

Prueba de carga 1. Desplazamiento impuesto en nodo central de 5 mm



Fig. 70. Mediciones durante la prueba de carga 1. Izq.: Medición del LVDT al final del ensayo; centro: fuerza registrada al inicio del fotografiado; dcha.: fuerza registrada al final del fotografiado.

Como ya se ha mencionado, en este ensayo se fija un desplazamiento de 5 mm. Se mide la fuerza tanto al inicio como al final del fotografiado. Se tarda alrededor de hora y media en hacer el barrido de fotos completo. En ese tiempo, podemos observar que, por el fenómeno de relajación de tensiones, la fuerza aplicada ha bajado de 65,801 N a 59,991 N (Fig. 70) .En un periodo de una hora y media, la fuerza ha disminuido casi un 9%.

Prueba de carga 2. Desplazamiento impuesto en nodo central de 10 mm

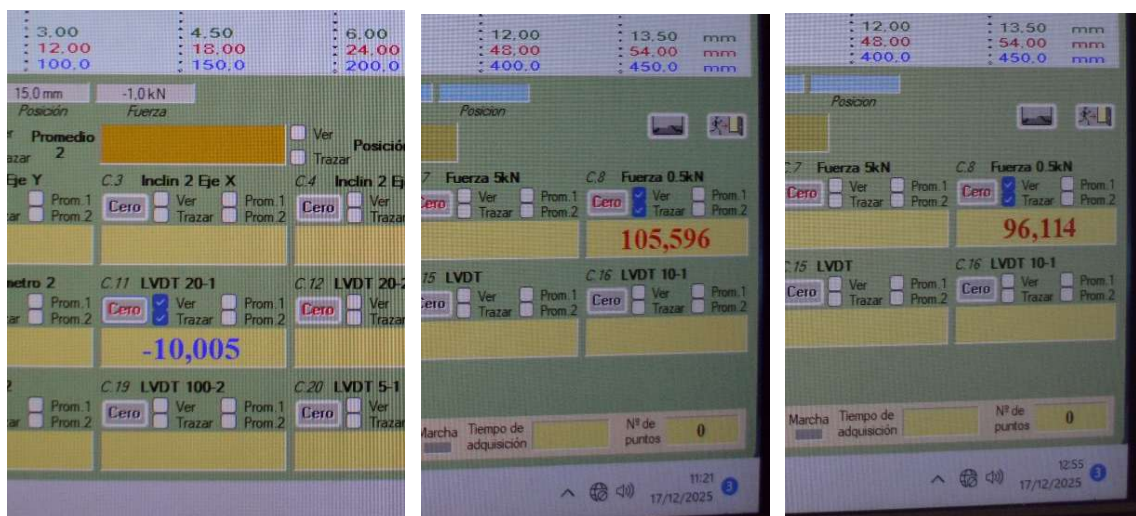


Fig. 71. Mediciones durante la prueba de carga 2. Izq.: Medición del LVDT al final del ensayo; centro: fuerza registrada al inicio del fotografiado; dcha.: fuerza registrada al final del fotografiado.

En este caso, el desplazamiento se fija en 10 mm. Se puede comprobar que, en aproximadamente el mismo periodo de tiempo, la carga ha bajado de 105,596 N a 96,114 N (Fig. 71). Asimismo, se verifica que, por el fenómeno de relajación de tensiones, durante el mismo periodo de tiempo, la disminución de la fuerza se mantiene cerca del 9 % como en el anterior ensayo.

Realizando una tara de la estructura junto con el sistema de carga, se obtiene un peso de 2,199 kg. Para hallar el peso de la estructura, se resta el peso del sistema de carga (dispositivos nodales + cadenas + vigas + articulaciones), estimado en aproximadamente 1,5 kg (ver desglose en el anexo).

La carga máxima aplicada durante el ensayo es de 105,596 N (Fig. 71), que equivale a unos 10,6 kg. Para hallar el peso total resistido por la estructura durante la prueba, se suma a este valor el peso del sistema de carga (1.5 kg), obteniéndose un peso total máximo de 12.1 kg.

Este valor no representa la carga máxima que puede soportar la estructura, ya que en los ensayos no se ha llegado a la rotura. Sin embargo, a partir de estos datos se puede concluir lo siguiente:

Dado que el peso de la maqueta es de 0,70 kg y el peso máximo resistido durante el ensayo es de 12,1 kg, la relación entre la carga resistida y el peso propio de la estructura es de 17. Es decir, la maqueta es capaz de soportar al menos 17 veces su propio peso.

A continuación, se realiza el procesamiento de imágenes para la obtención del modelo digital 3D de los nodos, en los estados sin carga y con carga, según el procedimiento descrito en el apartado 3.3. Se realiza el análisis solo del estado con mayor carga, es decir del ensayo 2 (desplazamiento impuesto en nodo central de 10 mm). El procesamiento consta de tres fases:

Fase 1. Creación del modelo digital con posicionamiento de los nudos y su escalado. Metashape

En primer lugar, se realiza la toma de distancias de control y de chequeo para el escalado y la comprobación del error en Metashape:

- Se miden las distancias entre las dianas codificadas del tablero con una cinta métrica. Estas distancias se utilizan como medidas de control y de chequeo (Fig. 73).
- Se recogen las medidas del comparador en los ensayos (Fig. 74).
- Se toman los desplazamientos registrados por el LVDT, vistos anteriormente, que se utilizarán como medidas de chequeo.

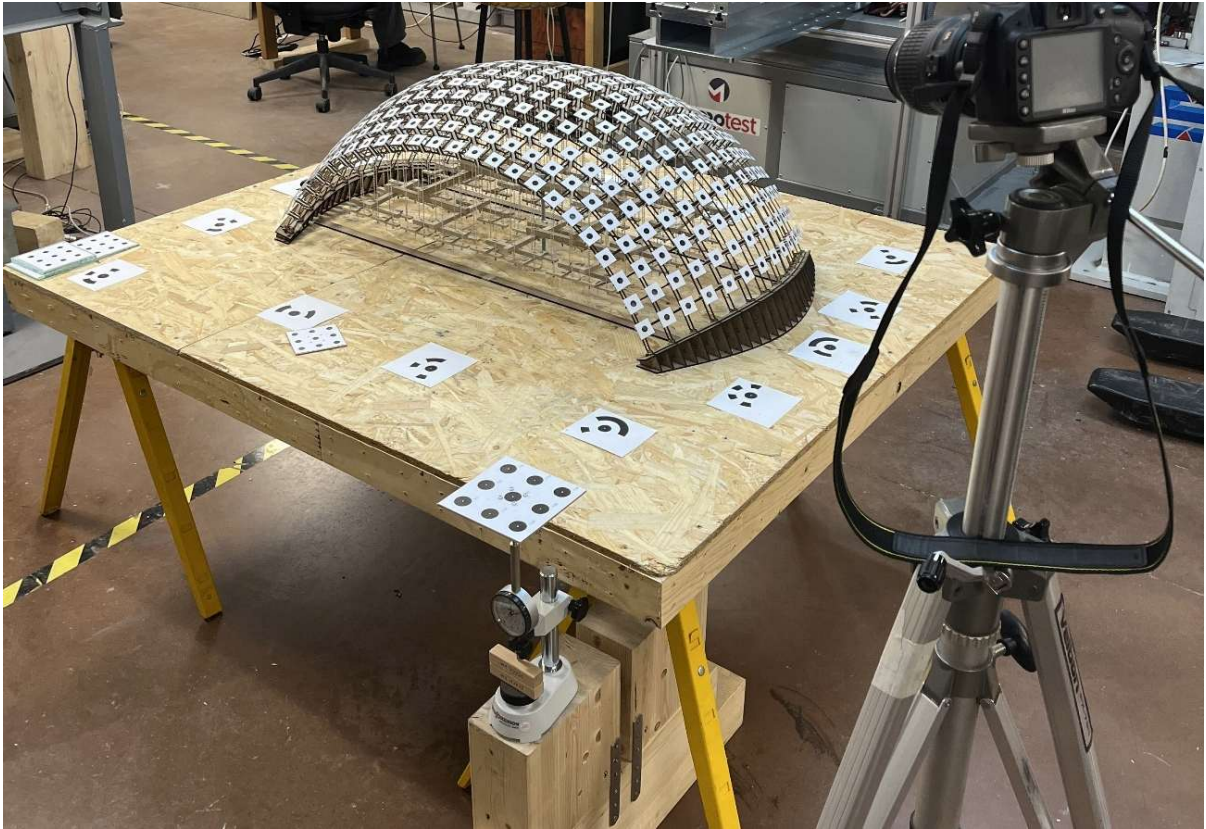


Fig. 72. Escenario, posición de elementos para la toma de distancias de control y de chequeo.

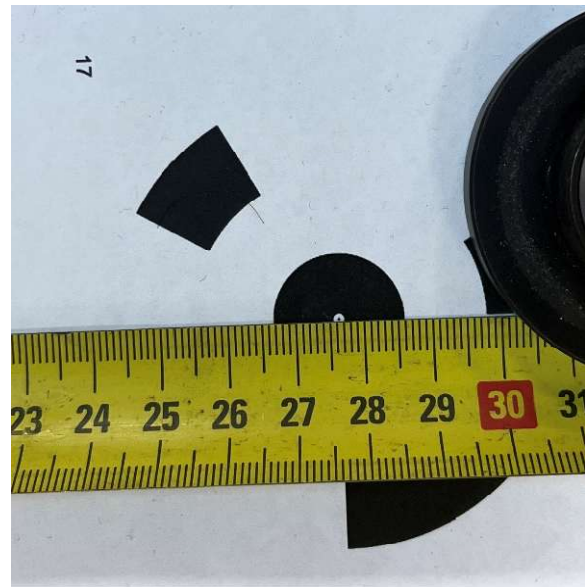


Fig. 73. Toma de distancias entre las dianas codificadas del tablero.

Fase 2. Orientación y superposición de modelos. CloudCompare

Realizado el procesado de imágenes en los dos proyectos, se exportan los modelos de puntos y se importan en CloudCompare, donde se vuelven a introducir las medidas y se orientan ambos modelos, marcando los puntos comunes para situarlos en el mismo sistema de coordenadas (Fig. 76).

Una vez superpuestos ambos modelos se exportan en formato “dwg” para la posterior representación de los resultados.

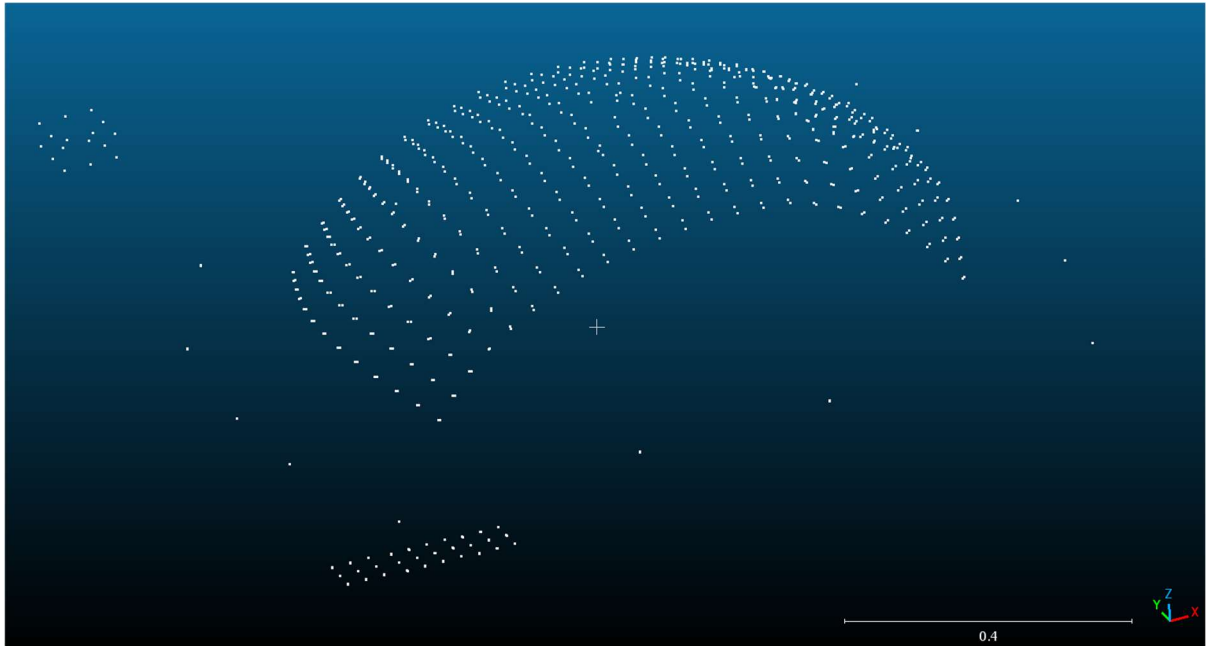


Fig. 76. Superposición de los modelos sin y con carga en CloudCompar

Fase 3. Cuantificación de errores de medición.

Por un lado, se comprueba el error en Metashape de cada uno de los modelos de forma independiente. Dicho error corresponde a la diferencia entre las distancias reales de control y de chequeo y las distancias obtenidas a partir de los modelos reconstruidos. A continuación, se presenta una tabla con las medidas reales y los errores asociados a ambos modelos (Fig. xx).

Errores de posición y escalado en los modelos individuales de Metashape			
Parejas de dianas codificadas	Distancia real [mm]	Error en modelo sin carga [mm]	Error en modelo con carga [mm]
target 4_target 33	815,367	1,417	-0,084
target 9_target 47	1147,098	-1,002	0,371
target 16_target 48	809,643	-0,707	0,209
target 16_target 168	392,367	-0,683	0,150
target 32_target 37	1055,367	-0,233	-0,098
target 32_target 85	393,825	0,074	-0,315
target 33_target 48	292,433	-0,067	0,024

target 34_target 39	1185,062	-0,288	0,130
target 37_target 168	835,146	-0,754	0,366
target 40_target 85	1206,557	-0,693	0,061
target 40_target 168	416,297	-0,303	0,080
target 161_target 168	1011,466	-1,284	0,426
Errores totales			
Tipo de medidas	Error total en modelo sin carga [mm]	Error total en modelo con carga [mm]	
Medidas de control	0,690	0,252	
Medidas de chequeo	0,882	0,196	

Tabla 05. Tabla resumen de los errores de posición y escalado en los modelos sin y con carga.

Como se puede observar, el error total de ambos modelos es del orden de décimas de milímetro. Sin embargo, el error total del modelo con carga es aproximadamente entre 3 y 4 veces inferior al obtenido en el modelo sin carga. Esto es debido, probablemente, al uso de una mayor ISO en el modelo con carga, que proporcionaba mayores velocidades de obturación. Por lo tanto, se puede concluir que, en la calidad de las imágenes, la posible distorsión por movimiento durante la obturación tiene un mayor efecto que la sensibilidad ISO. En consecuencia, la decisión de aumentar la sensibilidad ISO durante la captura de imágenes resulta acertada cuando no se dispone de un disparador remoto.

Por otro lado, se evalúa el error entre los dos modelos superponiéndolos en CloudCompare y definiendo los puntos comunes entre ambos (las dianas codificadas del tablero) (Fig. xx). De este procedimiento se obtienen también las coordenadas de cada nudo en los estados con y sin carga (ver tabla de coordenadas en el anexo).

6 VISUALIZACIÓN AVANZADA DE RESULTADOS

6.1 Reconstrucción digital del modelo

Para la reconstrucción de la geometría del modelo de referencia se utilizan los puntos correspondientes al estado sin carga.

Estos puntos se importan en Grasshopper y, a partir de ellos, se obtienen las directrices y generatrices de la estructura. Con dichas curvas se generan las distintas familias de láminas que conforman la estructura, organizadas en cuatro capas: dos asociadas a las directrices y dos a las generatrices. Una vez obtenido el modelo alámbrico con las distintas familias de curvas correctamente posicionadas, se asigna a cada una de ellas la sección real de las láminas ($2 \times 2 \text{ cm}^2$). De este modo se obtiene la reconstrucción final del modelo geométrico deseado (Fig. 77).

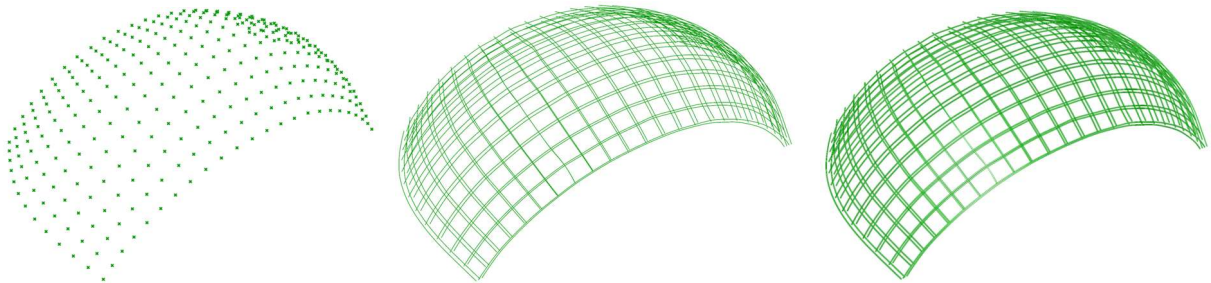


Fig. 77. Fases de reconstrucción digital del modelo de referencia: 1) importación de puntos; 2) generación de la estructura alámbrica y 3) generación de la estructura con secciones transversales.

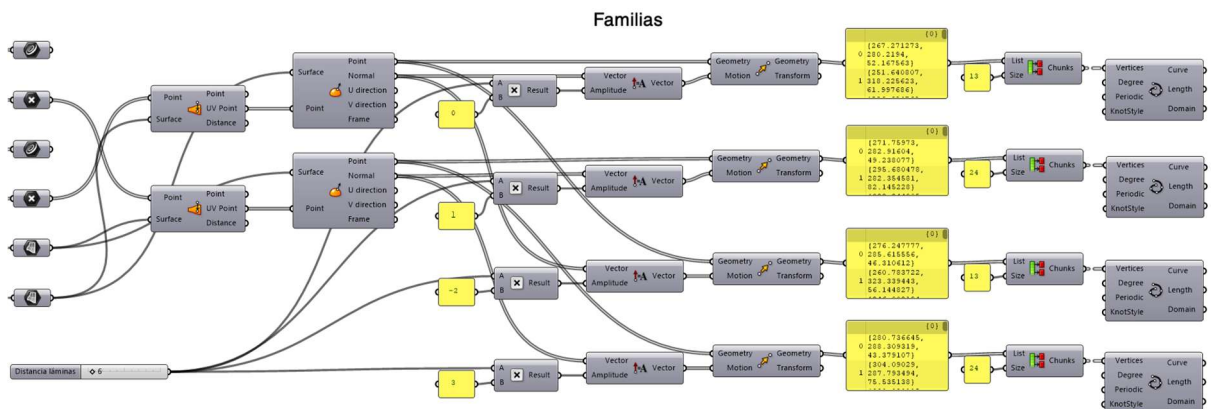


Fig. 78. Definición paramétrica para la obtención de la estructura alámbrica. Familias de curvas directrices y generatrices.

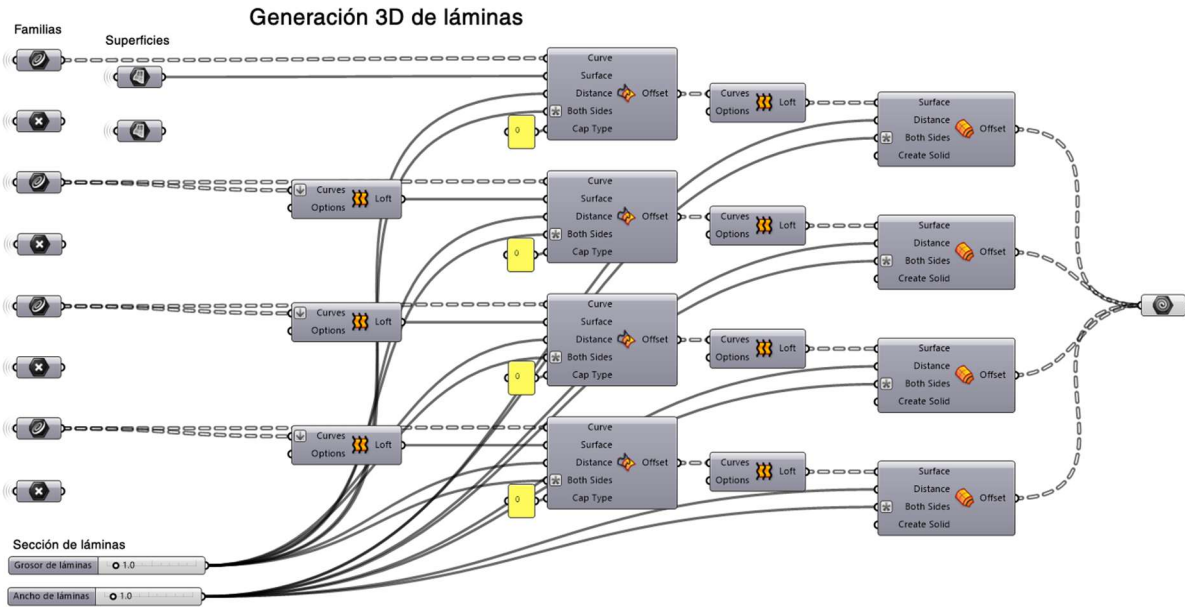


Fig. 79. Definición paramétrica para la obtención del modelo tridimensional con las secciones transversales.

6.2 Representación de resultados

En este trabajo se desarrollan algoritmos que permiten incorporar los resultados de la prueba de carga sobre el modelo reconstruido, con las siguientes opciones de visualización:

- Vectores de desplazamientos nodales, \bar{U} .
- Valores numéricos de desplazamientos nodales (módulo de los vectores $|\bar{U}|$), o de cualquiera de sus componentes U_x , U_y , U_z .
- Reconstrucción de la deformada, incluyendo la estructura multicapa y las secciones de las barras.
- Posibilidad de amplificación de la deformada y su superposición con la geometría sin deformar.
- Uso de gradiente de color asociado a la magnitud de los desplazamientos, para la mejor interpretación visual de los resultados.

Para la visualización de los resultados, es necesario comparar el modelo inicial con el modelo deformado. Para ello, ambos modelos de puntos se superponen y se introducen en Grasshopper manteniendo el mismo orden de numeración, de manera que el software pueda identificar cada punto de la estructura y asociarlo con su correspondiente punto desplazado.

A partir de las coordenadas de los puntos iniciales (modelo sin carga) y finales (modelo con carga), se obtiene el vector de desplazamiento de cada nudo, lo que permite obtener tanto el diagrama de vectores (Fig. 80) como el diagrama de valores numéricos de desplazamientos nodales o cualquiera de sus componentes (Fig. 81). Con el fin de mejorar la claridad visual de los resultados, dichos diagramas se representan mediante un gradiente de color en función de la magnitud del desplazamiento.

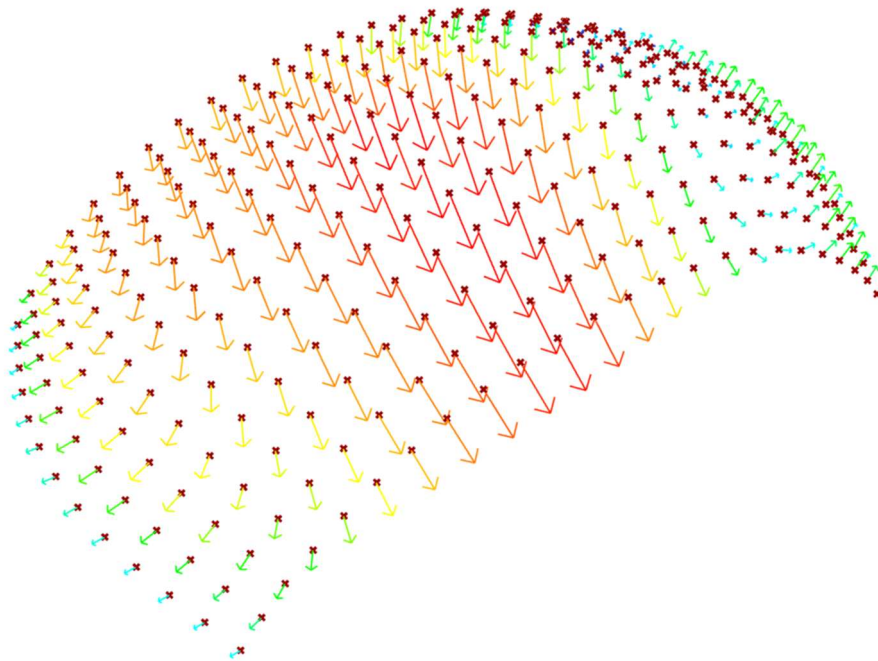


Fig. 80. Representación de vectores desplazamiento nodales \bar{U} .

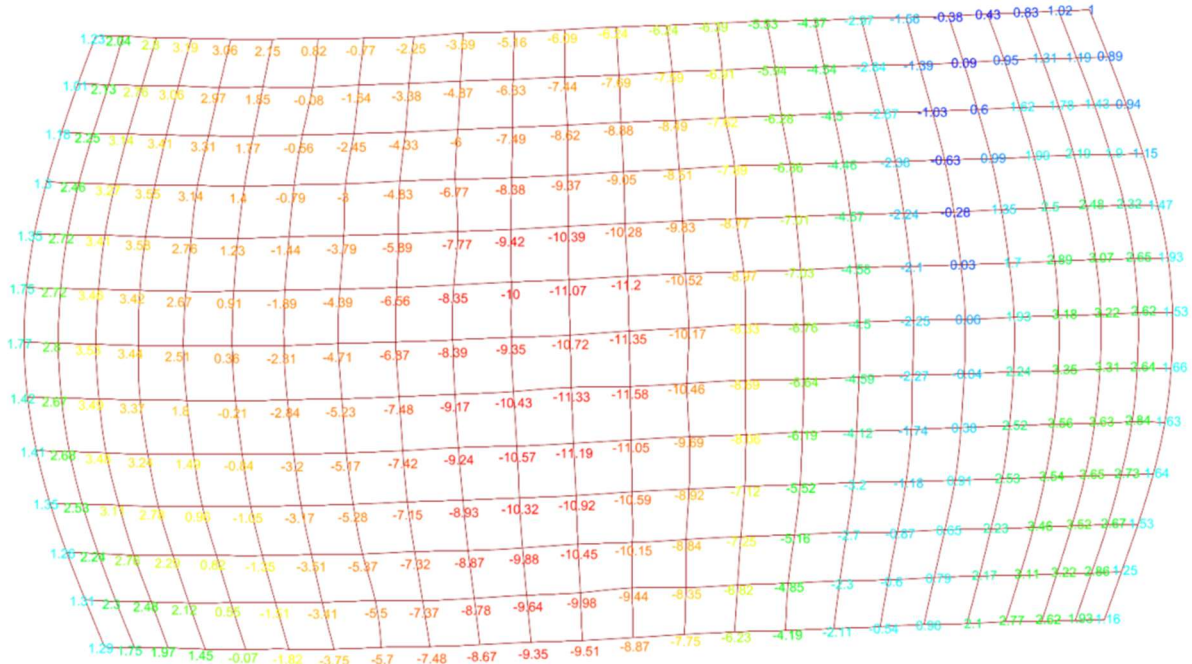


Fig. 81. Representación de valores de desplazamientos nodales U_z (en mm).

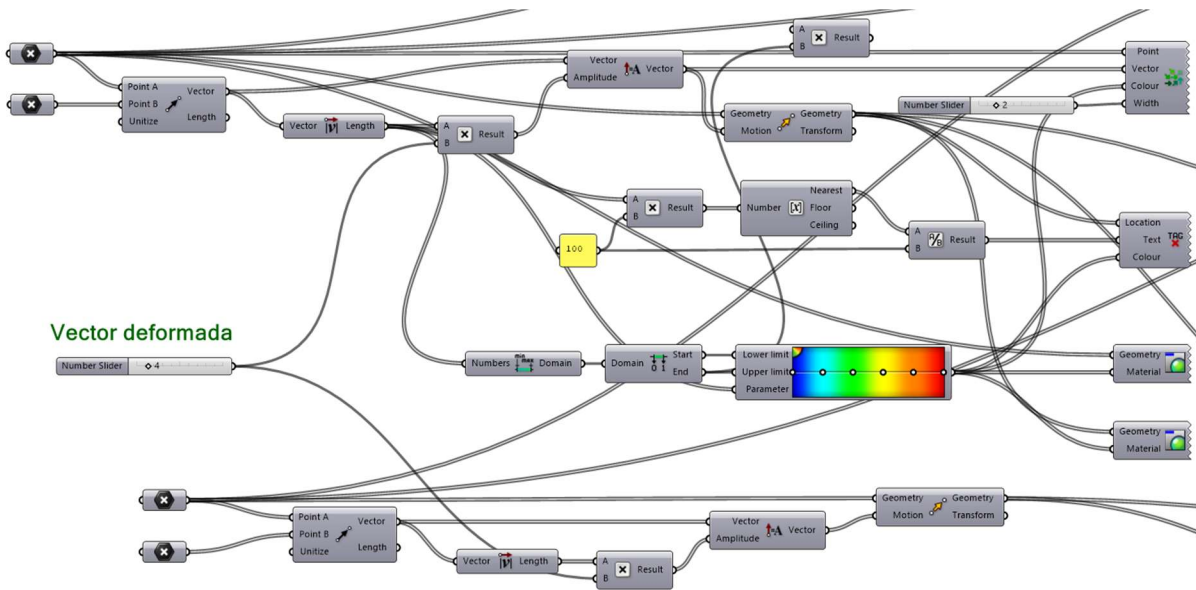


Fig. 82. Definición paramétrica de los vectores y valores de desplazamientos nodales.

Para la reconstrucción de la deformada de la estructura se sigue el mismo proceso de reconstrucción descrito anteriormente para el estado sin carga, pero utilizando en este caso el modelo de puntos correspondiente al estado con carga. En el diagrama se emplea el mismo gradiente de color para la representación de los desplazamientos globales (Fig. 83 y Fig. 84).

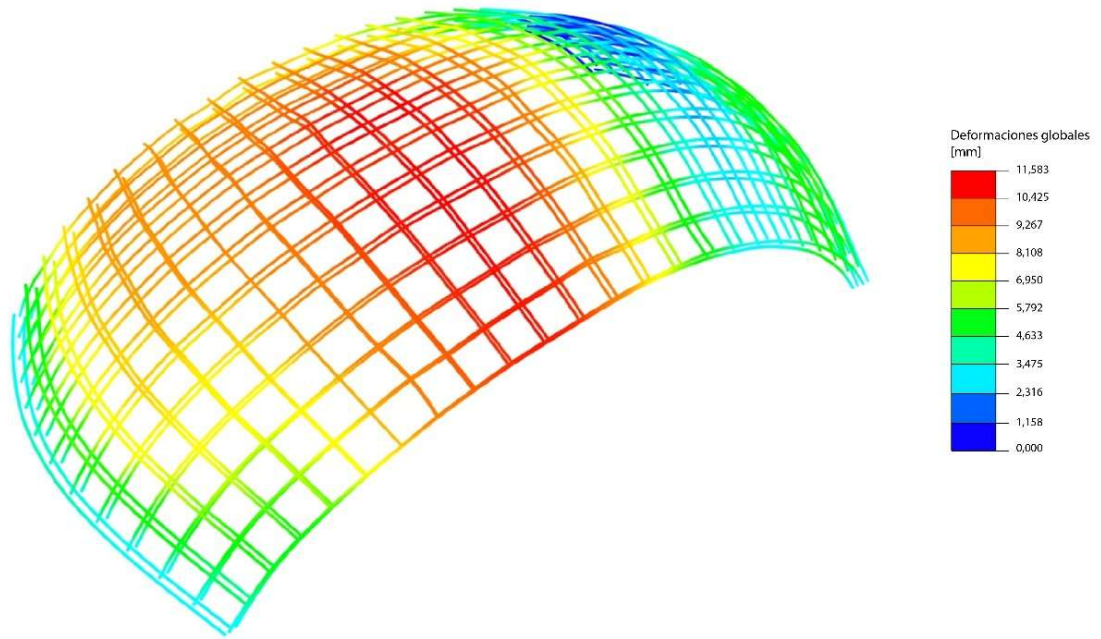


Fig. 83. Representación axonométrica de la deformada de la estructura. Deformaciones globales.

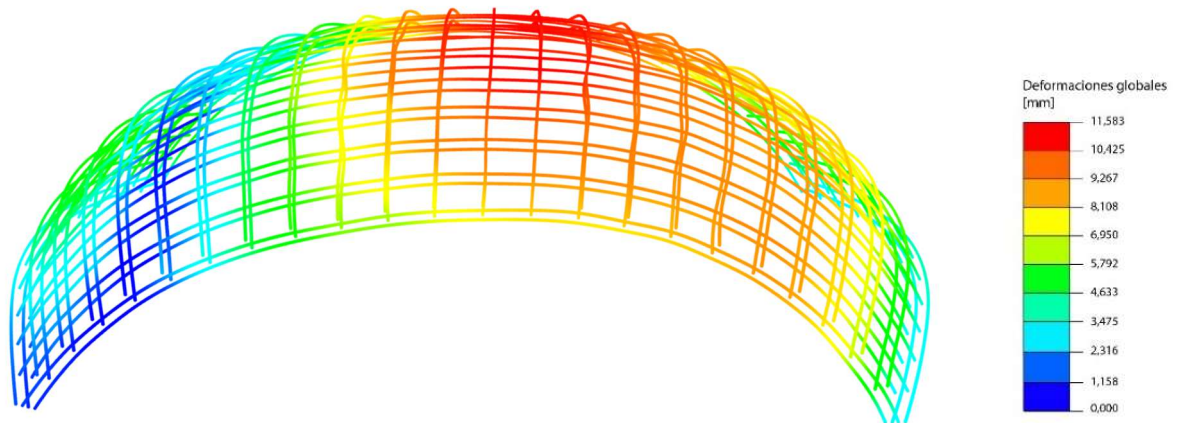


Fig. 84. Representación en perspectiva frontal de la deformada de la estructura. Deformaciones globales.

Los desplazamientos nodales pueden ser incrementados mediante un multiplicador que amplifica los vectores de desplazamiento nodales. De este modo se puede obtener una vista de la deformada amplificada, que puede resultar útil para el análisis de la estructura

En las Fig. 85 y Fig. 86 se muestra vistas de la deformada, amplificada 4 veces, superpuesta a la geometría de la estructura original.

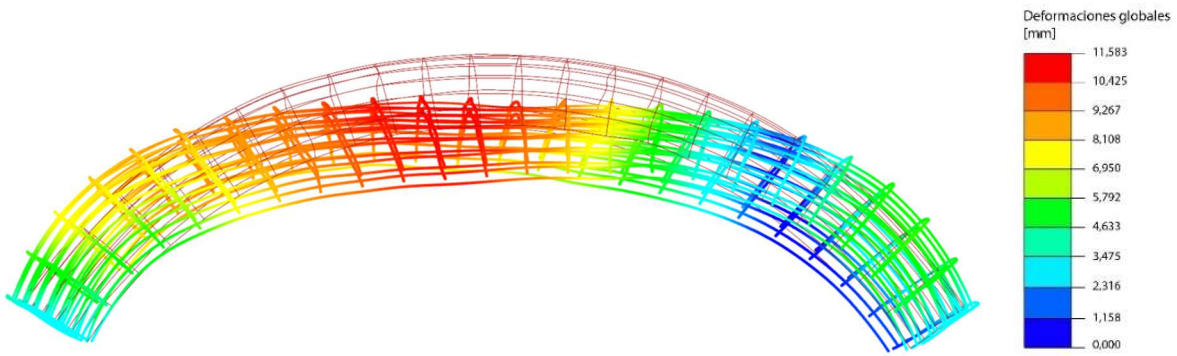


Fig. 85. Representación en alzado de la deformada de la estructura (amplificada $\times 4$) superpuesta a la estructura original. Deformaciones globales.

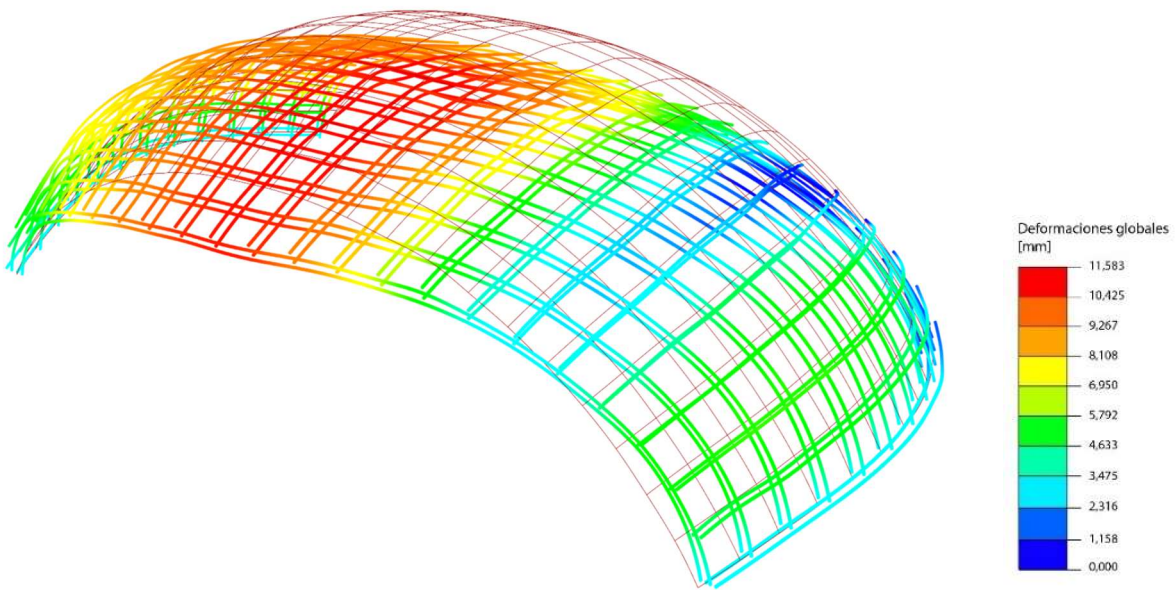


Fig. 86. Representación en perspectiva de la deformada de la estructura (amplificada $\times 4$) superpuesta a la estructura original. Deformaciones globales.

Como se puede observar en las imágenes, la deformada no es totalmente simétrica. Esto es normal en los ensayos experimentales debido a las imperfecciones de ejecución, tanto de la propia estructura como del sistema de aplicación de carga.

Envolvente (deformada)

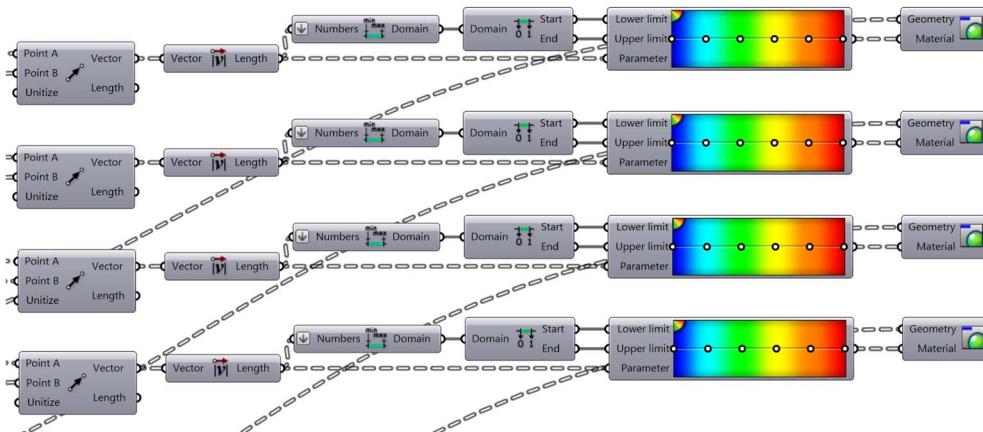


Fig. 87. Definición de la deformada

7 CONCLUSIONES

1. *Eficacia y validación del sistema de carga diseñado*

El sistema de aplicación de carga desarrollado ha demostrado ser eficaz para generar estados de carga complejos y representativos en estructuras laminares reticulares a escala. La configuración isostática basada en una estructura piramidal de piezas articuladas ha permitido distribuir una carga aplicada en un único punto entre un número elevado de nudos de forma equilibrada y controlada. Los ensayos realizados confirman el correcto funcionamiento del sistema, así como la coherencia entre la carga aplicada y la respuesta estructural observada, validando su idoneidad para el estudio experimental de gridshells de madera.

2. *Innovación en el diseño de componentes y prototipado*

Uno de los principales aportes del trabajo es el diseño del dispositivo nodal, concebido como un componente capaz de integrar en un único elemento la aplicación de carga y la colocación de dianas para la medición de desplazamientos. El proceso iterativo de diseño y prototipado ha permitido alcanzar una solución geoméricamente sencilla, funcional y fácilmente fabricable mediante impresión 3D. Este enfoque ha demostrado el potencial del prototipado digital como herramienta para resolver problemas complejos de forma eficiente y reproducible.

3. *Caracterización del comportamiento reológico de la madera*

Por un lado, el ensayo realizado mediante control por fuerza ha permitido observar el fenómeno de la fluencia, registrando desplazamientos progresivos (hasta 0,047 mm en 1,5 horas) bajo carga constante. Por otro lado, en los ensayos de control por desplazamiento, se cuantificó el fenómeno de la relajación de tensiones, observándose una disminución de la fuerza de aproximadamente el 9% tras una hora y media de mantenimiento de la deformación.

4. *Precisión de la fotogrametría*

Los resultados obtenidos confirman la fotogrametría como una técnica de bajo coste y alta precisión para la medición de desplazamientos en modelos a escala. En comparación con el método empleado en el TFG de referencia, se ha incrementado tanto el número de fotografías por barrido como el número de medidas de control y de chequeo, lo que, junto con la decisión de aumentar el valor de ISO para evitar imágenes movidas, ha permitido reducir en una de las pruebas el error máximo en un 49%, evidenciando la eficacia de las mejoras introducidas en el procedimiento experimental.

5. Potencial de la visualización digital

La integración de los datos experimentales en algoritmos desarrollados en Grasshopper permite no solo reconstruir fielmente la geometría real del modelo, sino también visualizar y amplificar las deformadas para un análisis estructural avanzado. Esta herramienta facilita la interpretación del comportamiento global de la estructura y la lectura comparada de los distintos estados de carga, reforzando el valor de la visualización digital como complemento fundamental al ensayo físico.

6. Eficiencia estructural y síntesis final

En última instancia, el trabajo corrobora la extraordinaria eficiencia estructural de las estructuras laminares reticulares de madera, tal y como confirman los resultados experimentales obtenidos. Los ensayos realizados muestran que el modelo analizado es capaz de resistir al menos 17 veces su propio peso, confirmando el elevado aprovechamiento resistente del sistema estructural y la idoneidad de este tipo de soluciones para estructuras ligeras. El sistema experimental desarrollado, que integra la aplicación de carga, la medición de deformaciones y la reconstrucción digital, se presenta como una herramienta válida y coherente para el análisis y la validación de estructuras laminares reticulares, y como una base sólida para futuras aplicaciones y estudios a mayor escala.

8 FUENTES

8.1 Bibliografía

Agisoft Metashape. s. f. “Cómo limpiar nubes de puntos ruidosas en Metashape: Guía paso a paso.” <https://www.agisoftmetashape.com/es/como-limpiar-nubes-de-puntos-ruidosas-en-metashape-guia-paso-a-paso/>

Andersson Largueche, D., & La Magna, R. (2024). *Development and assessment of a spherical cap timber gridshell with compound beam sections*. Proceedings of the IASS 2024 Symposium de Zurich, Suiza.

Antuña Bernardo, J. (2019). *Ensayos en modelos de estructuras laminares. Los primeros resultados de Eduardo Torroja en el Laboratorio Central*. En: S. Huerta Fernández y I. J. Gil Crespo (eds.) *Actas del Undécimo Congreso Nacional de Historia de la Construcción*, Vol. 1, Soria, 9-12 octubre 2019, pp. 61-70. ISBN 978-84-9728-5766.
http://www.sedhc.es/biblioteca/actas/6_Joaquin%20Antuna%20Bernardo.pdf

Eigenraam, P., Li, Q., Chilton, J. And Borgart, A. (2024) *3D scanning and structural analysis of Heinz Isler's shell for swimming pools*. In: Block, P., Boller, G., De Wolf, C., Pauli, J. and Kaufmann, W. (eds.) *Proceedings of the IASS 2024 Symposium: Redefining the Art of Structural Design*, Zurich, Switzerland, 26–30 August 2024. International Association for Shell and Spatial Structures (IASS). https://app.iass2024.org/files/IASS_2024_Paper_113.pdf

Gracia Mayans, Ana. s. f. *Fotogrametría aplicada al análisis estructural de láminas reticulares: Desarrollo de un método para la evaluación de deformaciones en pruebas de carga de modelos a escala*. Trabajo Fin de Grado, Universidad Politécnica de Madrid – ETSAM.
https://oa.upm.es/88421/1/TFG_Enc25_Gracia_Mayans_Ana.pdf

Lara-Bocanegra, A. J., Majano-Majano, A. y Guaita, M. (2017). Relajación de tensiones en láminas curvadas de madera: Revisión de los procedimientos de ensayo y enfoques de análisis estructural aplicados a estructuras laminares. II Congreso Latinoamericano de Estructuras de Madera de Buenos Aires, Argentina, figura 2, página 3.

Tomado De Lara-Bocanegra, A. J., Majano-Majano, A., Guaita, M. Y Ortiz, J. (2022). *Structural Analysis and Form-Finding of Triaxial Elastic Timber Gridshells Considering Interlayer Slips: Numerical Modelling and Full-Scale Test*. *Applied. Sciences*, 12(11). 5335.
<https://doi.org/10.3390/app12115335>

Liddell, I., 2015. *Frei Otto and the development of gridshells*. *Case Studies in Structural Engineering*, 4, pp.39–49. <https://doi.org/10.1016/j.csse.2015.08.001>

- Liddell, W. I. (2020). Models for the design development, engineering and construction of the Multihalle for the 1975 Bundesgartenschau in Mannheim. En K.-U. Bletzinger, E. Ramm & R. Wüchner (Eds.), *Form and Force: Proceedings of the IASS Symposium 2019 and Structural Membranes 2019* (pp. 1-10). Ernst & Sohn GmbH & Co. KG. Figura 22.13, página 14.
- Majano-Majano, Lara-Bocanegra, A. J., A., Martínez Criado, C., Roig Vena, A. L., Reynolds NA, T., Cardoso Xavier, J. M., Ortiz Sanz, J., y Rodríguez López, D. (2020). *Sistema constructivo para estructuras laminares reticulares basado en nuevos productos de madera de altas prestaciones y tecnología de fabricación digital*. Ref. PID2020-112954RA-I00. Ministerio de Ciencia e Innovación.
- Molina León, F. M. (2018). Multihalle de Frei Otto. *Una cubierta generada por compresión, como modelo*. ZARCH 11, 154–167. https://doi.org/10.26754/ojs_zarch/zarch.2018113213
- Pirazzi, C., & Weinand, Y. (2006). *Geodesic Lines on Free-Form Surfaces - Optimized Grids for Timber Rib Shells*. 9th World Conference on Timber Engineering 2006, WCTE 2006. 1.

8.2 Procedencia de ilustraciones

- Fig. 01 - Tomado de Molina León, F. M. (2018). Multihalle de Frei Otto. *Una cubierta generada por compresión, como modelo*. ZARCH 11, 154–167. https://doi.org/10.26754/ojs_zarch/zarch.2018113213
- Fig. 02 – Tomado de Liddell, W. I. (2020). Models for the design development, engineering and construction of the Multihalle for the 1975 Bundesgartenschau in Mannheim. En K.-U. Bletzinger, E. Ramm & R. Wüchner (Eds.), *Form and Force: Proceedings of the IASS Symposium 2019 and Structural Membranes 2019* (pp. 1-10). Ernst & Sohn GmbH & Co. KG. Figura 22.13, página 14.
- Fig. 03 – Majano-Majano, Lara-Bocanegra, A. J., A., Martínez Criado, C., Roig Vena, A. L., Reynolds NA, T., Cardoso Xavier, J. M., Ortiz Sanz, J., y Rodríguez López, D. (2020). *Sistema constructivo para estructuras laminares reticulares basado en nuevos productos de madera de altas prestaciones y tecnología de fabricación digital*. Ref. PID2020-112954RA-I00. Ministerio de Ciencia e Innovación.
- Fig. 04 – Fig. 03 – Majano-Majano, Lara-Bocanegra, A. J., A., Martínez Criado, C., Roig Vena, A. L., Reynolds NA, T., Cardoso Xavier, J. M., Ortiz Sanz, J., y Rodríguez López, D. (2020). *Sistema constructivo para estructuras laminares reticulares basado en nuevos productos de madera de altas prestaciones y tecnología de fabricación digital*. Ref. PID2020-112954RA-I00. Ministerio de Ciencia e Innovación.
- Fig. 05 – Tomado de Lara-Bocanegra, A. J., Majano-Majano, A. y Guaita, M. (2017). Relajación de tensiones en láminas curvadas de madera: Revisión de los procedimientos de ensayo y enfoques de análisis estructural aplicados a estructuras laminares. II Congreso Latinoamericano de Estructuras de Madera de Buenos Aires, Argentina, figura 2, página 3.
- Fig. 06 – Tomado de Lara-Bocanegra, A. J., Majano-Majano, A. y Guaita, M. (2017). Relajación de tensiones en láminas curvadas de madera: Revisión de los procedimientos de ensayo y enfoques de análisis estructural aplicados a estructuras laminares. II Congreso Latinoamericano de Estructuras de Madera de Buenos Aires, Argentina, figura 2, página 3.
- Fig. 07 – Tomado de Antuña Bernardo, J. (2019). *Ensayos en modelos de estructuras laminares. Los primeros resultados de Eduardo Torroja en el Laboratorio Central*. En: S. Huerta Fernández y I. J. Gil Crespo (eds.) *Actas del Undécimo Congreso Nacional de Historia de la Construcción*, Vol. 1, Soria, 9-12 octubre 2019, pp. 61-70. ISBN 978-84-9728-5766. http://www.sedhc.es/biblioteca/actas/6_Joaquin%20Antuna%20Bernardo.pdf

- Fig. 08 – Tomado de Antuña Bernardo, J. (2019). *Ensayos en modelos de estructuras laminares. Los primeros resultados de Eduardo Torroja en el Laboratorio Central*. En: S. Huerta Fernández y I. J. Gil Crespo (eds.) *Actas del Undécimo Congreso Nacional de Historia de la Construcción*, Vol. 1, Soria, 9-12 octubre 2019, pp. 61-70. ISBN 978-84-9728-5766.
http://www.sedhc.es/biblioteca/actas/6_Joaquin%20Antuna%20Bernardo.pdf
- Fig. 09 – Tomado de Antuña Bernardo, J. (2019). *Ensayos en modelos de estructuras laminares. Los primeros resultados de Eduardo Torroja en el Laboratorio Central*. En: S. Huerta Fernández y I. J. Gil Crespo (eds.) *Actas del Undécimo Congreso Nacional de Historia de la Construcción*, Vol. 1, Soria, 9-12 octubre 2019, pp. 61-70. ISBN 978-84-9728-5766.
http://www.sedhc.es/biblioteca/actas/6_Joaquin%20Antuna%20Bernardo.pdf
- Fig. 10 – Tomado de Antuña Bernardo, J. (2019). *Ensayos en modelos de estructuras laminares. Los primeros resultados de Eduardo Torroja en el Laboratorio Central*. En: S. Huerta Fernández y I. J. Gil Crespo (eds.) *Actas del Undécimo Congreso Nacional de Historia de la Construcción*, Vol. 1, Soria, 9-12 octubre 2019, pp. 61-70. ISBN 978-84-9728-5766.
http://www.sedhc.es/biblioteca/actas/6_Joaquin%20Antuna%20Bernardo.pdf
- Fig. 11 – Tomado de Liddell, I., 2015. *Frei Otto and the development of gridsbells*. Case Studies in Structural Engineering, 4, pp.39–49. <https://doi.org/10.1016/j.csse.2015.08.001>
- Fig. 12 – Tomado de Liddell, I., 2015. *Frei Otto and the development of gridsbells*. Case Studies in Structural Engineering, 4, pp.39–49. <https://doi.org/10.1016/j.csse.2015.08.001>
- Fig. 13 – Tomado de Liddell, I., 2015. *Frei Otto and the development of gridsbells*. Case Studies in Structural Engineering, 4, pp.39–49. <https://doi.org/10.1016/j.csse.2015.08.001>
- Fig. 14 – Tomado de Pirazzi, C., & Weinand, Y. (2006). *Geodesic Lines on Free-Form Surfaces - Optimized Grids for Timber Rib Shells*. 9th World Conference on Timber Engineering 2006, WCTE 2006. 1.
- Fig. 15 – Tomado de Pirazzi, C., & Weinand, Y. (2006). *Geodesic Lines on Free-Form Surfaces - Optimized Grids for Timber Rib Shells*. 9th World Conference on Timber Engineering 2006, WCTE 2006. 1.
- Fig. 16 – Tomado de Pirazzi, C., & Weinand, Y. (2006). *Geodesic Lines on Free-Form Surfaces - Optimized Grids for Timber Rib Shells*. 9th World Conference on Timber Engineering 2006, WCTE 2006. 1.
- Fig. 17 – Tomado De Lara-Bocanegra, A. J., Majano-Majano, A., Guaita, M. Y Ortiz, J. (2022). *Structural Analysis and Form-Finding of Triaxial Elastic Timber Gridsbells Considering Interlayer Slips: Numerical Modelling and Full-Scale Test*. *Applied Sciences*, 12(11). 5335.
<https://doi.org/10.3390/app12115335>

- Fig. 18 – Tomado De Lara-Bocanegra, A. J., Majano-Majano, A., Guaita, M. Y Ortiz, J. (2022). *Structural Analysis and Form-Finding of Triaxial Elastic Timber Gridshells Considering Interlayer Slips: Numerical Modelling and Full-Scale Test*. *Applied Sciences*, 12(11). 5335. <https://doi.org/10.3390/app12115335>
- Fig. 19 – Tomado De Lara-Bocanegra, A. J., Majano-Majano, A., Guaita, M. Y Ortiz, J. (2022). *Structural Analysis and Form-Finding of Triaxial Elastic Timber Gridshells Considering Interlayer Slips: Numerical Modelling and Full-Scale Test*. *Applied Sciences*, 12(11). 5335. <https://doi.org/10.3390/app12115335>
- Fig. 20 – Tomado De Lara-Bocanegra, A. J., Majano-Majano, A., Guaita, M. Y Ortiz, J. (2022). *Structural Analysis and Form-Finding of Triaxial Elastic Timber Gridshells Considering Interlayer Slips: Numerical Modelling and Full-Scale Test*. *Applied Sciences*, 12(11). 5335. <https://doi.org/10.3390/app12115335>
- Fig. 21 – Tomado de Andersson Largueche, D., & La Magna, R. (2024). *Development and assessment of a spherical cap timber gridshell with compound beam sections*. Proceedings of the IASS 2024 Symposium de Zurich, Suiza.
- Fig. 22 – Tomado de Andersson Largueche, D., & La Magna, R. (2024). *Development and assessment of a spherical cap timber gridshell with compound beam sections*. Proceedings of the IASS 2024 Symposium de Zurich, Suiza.
- Fig. 23 – Tomado de Andersson Largueche, D., & La Magna, R. (2024). *Development and assessment of a spherical cap timber gridshell with compound beam sections*. Proceedings of the IASS 2024 Symposium de Zurich, Suiza.
- Fig. 24 – Tomado de Andersson Largueche, D., & La Magna, R. (2024). *Development and assessment of a spherical cap timber gridshell with compound beam sections*. Proceedings of the IASS 2024 Symposium de Zurich, Suiza.
- Fig. 25 – Tomado de Andersson Largueche, D., & La Magna, R. (2024). *Development and assessment of a spherical cap timber gridshell with compound beam sections*. Proceedings of the IASS 2024 Symposium de Zurich, Suiza.
- Fig. 26 – Eigenraam, P., Li, Q., Chilton, J. And Borgart, A. (2024) *3D scanning and structural analysis of Heinz Isler's shell for swimming pools*. In: Block, P., Boller, G., De Wolf, C., Pauli, J. and Kaufmann, W. (eds.) *Proceedings of the IASS 2024 Symposium: Redefining the Art of Structural Design*, Zurich, Switzerland, 26–30 August 2024. International Association for Shell and Spatial Structures (IASS). https://app.iass2024.org/files/IASS_2024_Paper_113.pdf

Fig. 27 – Eigenraam, P., Li, Q., Chilton, J. And Borgart, A. (2024) *3D scanning and structural analysis of Heinz Isler's shell for swimming pools*. In: Block, P., Boller, G., De Wolf, C., Pauli, J. and Kaufmann, W. (eds.) *Proceedings of the IASS 2024 Symposium: Redefining the Art of Structural Design*, Zurich, Switzerland, 26–30 August 2024. International Association for Shell and Spatial Structures (IASS). https://app.iass2024.org/files/IASS_2024_Paper_113.pdf

Fig. 28 – Eigenraam, P., Li, Q., Chilton, J. And Borgart, A. (2024) *3D scanning and structural analysis of Heinz Isler's shell for swimming pools*. In: Block, P., Boller, G., De Wolf, C., Pauli, J. and Kaufmann, W. (eds.) *Proceedings of the IASS 2024 Symposium: Redefining the Art of Structural Design*, Zurich, Switzerland, 26–30 August 2024. International Association for Shell and Spatial Structures (IASS). https://app.iass2024.org/files/IASS_2024_Paper_113.pdf

Fig. 29 – Eigenraam, P., Li, Q., Chilton, J. And Borgart, A. (2024) *3D scanning and structural analysis of Heinz Isler's shell for swimming pools*. In: Block, P., Boller, G., De Wolf, C., Pauli, J. and Kaufmann, W. (eds.) *Proceedings of the IASS 2024 Symposium: Redefining the Art of Structural Design*, Zurich, Switzerland, 26–30 August 2024. International Association for Shell and Spatial Structures (IASS). https://app.iass2024.org/files/IASS_2024_Paper_113.pdf

Fig. 30 – Tomado de Agisoft Metashape. s. f. “Cómo limpiar nubes de puntos ruidosas en Metashape: Guía paso a paso.” <https://www.agisoftmetashape.com/es/como-limpiar-nubes-de-puntos-ruidosas-en-metashape-guia-paso-a-paso/>

Fig. 31 – Tomado de Gracia Mayans, Ana. s. f. *Fotogrametría aplicada al análisis estructural de láminas reticulares: Desarrollo de un método para la evaluación de deformaciones en pruebas de carga de modelos a escala*. Trabajo Fin de Grado, Universidad Politécnica de Madrid – ETSAM. https://oa.upm.es/88421/1/TFG_Ene25_Gracia_Mayans_Ana.pdf

Fig. 32 – Tomado de Gracia Mayans, Ana. s. f. *Fotogrametría aplicada al análisis estructural de láminas reticulares: Desarrollo de un método para la evaluación de deformaciones en pruebas de carga de modelos a escala*. Trabajo Fin de Grado, Universidad Politécnica de Madrid – ETSAM. https://oa.upm.es/88421/1/TFG_Ene25_Gracia_Mayans_Ana.pdf

Fig. 33 – Imagen de elaboración propia

Fig. 34 – Imagen de elaboración propia

Fig. 35 – Imagen de elaboración propia

Fig. 36 – Imagen de elaboración propia

Fig. 37 – Imagen de elaboración propia

Fig. 38 – Imagen de elaboración propia

Fig. 39 – Imagen de elaboración propia

Fig. 40 – Imagen de elaboración propia

Fig. 41 – Imagen de elaboración propia

Fig. 42 – Imagen de elaboración propia

Fig. 43 – Imagen de elaboración propia

Fig. 44 – Imagen de elaboración propia

Fig. 45 – Imagen de elaboración propia

Fig. 46 – Imagen de elaboración propia

Fig. 47 – Imagen de elaboración propia

Fig. 48 – Imagen de elaboración propia

Fig. 49 – Imagen de elaboración propia

Fig. 50 – Imagen de elaboración propia

Fig. 51 – Imagen de elaboración propia

Fig. 52 – Imagen de elaboración propia

Fig. 53 – Imagen de elaboración propia

Fig. 54 – Imagen de elaboración propia

Fig. 55 – Imagen de elaboración propia

Fig. 56 – Imagen de elaboración propia

Fig. 57 – Imagen de elaboración propia

Fig. 58 – Imagen de elaboración propia

Fig. 59 – Imagen de elaboración propia

Fig. 60 – Imagen de elaboración propia

Fig. 61 – Imagen de elaboración propia

Fig. 62 – Imagen de elaboración propia

Fig. 63 – Imagen de elaboración propia

Fig. 64 – Imagen de elaboración propia

Fig. 65 – Imagen de elaboración propia

Fig. 66 – Imagen de elaboración propia

Fig. 67 – Imagen de elaboración propia

Fig. 68 – Imagen de elaboración propia

Fig. 69 – Imagen de elaboración propia

Fig. 70 – Imagen de elaboración propia

Fig. 71 – Imagen de elaboración propia

Fig. 72 – Imagen de elaboración propia

Fig. 73 – Imagen de elaboración propia

Fig. 74 – Imagen de elaboración propia

Fig. 75 – Imagen de elaboración propia

Fig. 76 – Imagen de elaboración propia

Fig. 77 – Imagen de elaboración propia

Fig. 78 – Imagen de elaboración propia

Fig. 79 – Imagen de elaboración propia

Fig. 80 – Imagen de elaboración propia

Fig. 81 – Imagen de elaboración propia

Fig. 82 – Imagen de elaboración propia

Fig. 83 – Imagen de elaboración propia

Fig. 84 – Imagen de elaboración propia

Fig. 85 – Imagen de elaboración propia

Fig. 86 – Imagen de elaboración propia

Fig. 87 – Imagen de elaboración propia

Tabla 01 – Imagen de elaboración propia

Tabla 02 – Imagen de elaboración propia

Tabla 03 – Imagen de elaboración propia

Tabla 04 – Imagen de elaboración propia

Tabla 05 – Imagen de elaboración propia

9 ANEXO

Tabla A1.

Peso de los componentes del sistema de carga [kg]	
Modelo	0.700
Dispositivos nodales	0.700
Cadenas	0.115
Pirámide de vigas (vigas + piezas de articulación)	0.683
Célula de carga + varilla roscada	2.000

Tabla A2. Resultado de los proyectos fotogramétricos. Coordenadas de los puntos en el estado sin carga y el ensayo 2 (desplazamiento impuesto de 10mm).

Puntos	Sin carga			Con carga		
	X	Y	Z	X	Y	Z
Point 1	0,9123891	0,78668183	0,18886419	0,39233381	0,34488136	0,22336127
Point 2	0,92278534	0,74893224	0,20377301	0,34214598	0,38503629	0,21425575
Point 3	105.640.852	0,41797552	0,1432226	0,40341932	0,30726907	0,20815368
Point 4	106.406.558	0,46024099	0,15143113	0,43281427	0,3449533	0,2423217
Point 5	0,43891227	0,76964355	0,21859533	0,44212013	0,30687144	0,22690831
Point 6	0,39465702	0,7306717	0,21253985	0,22460407	0,5216189	0,13067552
Point 7	0,88564932	0,74821615	0,2245962	0,42337531	0,68156636	0,24694966
Point 8	0,87616068	0,78574455	0,20830233	0,35429457	0,34638253	0,20100591
Point 9	0,95851034	0,75040674	0,17943983	0,95897537	0,45663375	0,24381447
Point 10	102.424.598	0,41675282	0,17639054	0,38235193	0,38405547	0,23689654
Point 11	0,40241686	0,76917809	0,19833292	0,9546392	0,41406083	0,23344032
Point 12	0,36880776	0,76917475	0,17461261	0,25390124	0,5190438	0,16763586
Point 13	0,83880633	0,78421605	0,22483614	0,36637729	0,30860114	0,1864481
Point 14	0,94630194	0,78779083	0,16530655	0,99385566	0,41598922	0,20832464
Point 15	0,35960555	0,73051596	0,18805052	0,98445457	0,37587523	0,19637826
Point 16	0,38683048	0,69130927	0,22617458	0,27286023	0,389736	0,15417366
Point 17	0,95647091	0,45685503	0,24343298	0,33120304	0,31024116	0,1612395
Point 18	0,91642749	0,45520115	0,2661317	0,31762812	0,34779245	0,1745868
Point 19	0,98062289	0,37540603	0,19415094	0,43550417	0,75960857	0,21941343
Point 20	108.532.655	0,41872194	0,10854119	0,39829615	0,7594381	0,20048352
Point 21	104.561.973	0,37785321	0,13340124	103.650.641	0,46051583	0,18885207
Point 22	106.829.798	0,50395006	0,15655842	0,34584484	0,68274313	0,20420183
Point 23	103.128.672	0,45949546	0,18528815	0,45196453	0,26936087	0,21004371
Point 24	103.358.614	0,33923191	0,12222629	102.013.421	0,37763792	0,16839954
Point 25	0,96982223	0,71258783	0,19298472	0,97528446	0,33807775	0,18295619
Point 26	0,47597292	0,76998711	0,23531036	0,28792518	0,5161019	0,201656

Point 27	0,43462613	0,73048782	0,23437108	0,29609755	0,42871952	0,19517267
Point 28	0,93332642	0,71118367	0,21811998	0,28943792	0,47216734	0,19996312
Point 29	0,42636496	0,69210839	0,2475073	0,30523098	0,38666549	0,18673068
Point 30	0,95177633	0,41444999	0,232528	0,32843152	0,4701581	0,22972551
Point 31	102.175.534	0,75342733	0,12193172	0,39058602	0,72072661	0,21439019
Point 32	109.831.226	0,50438762	0,12018092	0,92212325	0,74796933	0,20238261
Point 33	103.516.459	0,71510506	0,13320586	0,37519684	0,42609563	0,24747622
Point 34	100.379.300	0,33799499	0,15281317	0,38268209	0,68143427	0,22794625
Point 35	0,7598089	0,78199095	0,24782251	0,94400877	0,67180812	0,23030601
Point 36	0,79977363	0,78369367	0,23827952	0,99960989	0,45863375	0,21865386
Point 37	0,47189337	0,73230195	0,25052884	0,37855881	0,27160487	0,17119178
Point 38	0,98966968	0,41572708	0,20579827	0,52425933	0,30772623	0,25326946
Point 39	0,46780741	0,6931197	0,26565781	0,49063942	0,27018857	0,22512709
Point 40	0,94352502	0,37463796	0,21986723	0,94673175	0,37417763	0,2205179
Point 41	0,92668766	0,2984429	0,19020002	0,93827653	0,3355718	0,20632929
Point 42	0,93493557	0,33618027	0,20553543	0,90046382	0,33281001	0,22691679
Point 43	0,9122479	0,4132995	0,25547597	0,25605199	0,47485921	0,16650365
Point 44	0,89146626	0,29676351	0,2113445	0,30017993	0,31262988	0,13176574
Point 45	106.147.587	0,3397558	0,08908854	0,26205862	0,43161359	0,16163348
Point 46	107.445.323	0,37855422	0,09915058	0,28552732	0,34986863	0,14345224
Point 47	100.369.382	0,71428812	0,16446595	0,37497929	0,64124507	0,23970437
Point 48	100.784.838	0,79057652	0,1105318	0,43152165	0,72002029	0,23428956
Point 49	102.152.288	0,3009693	0,1099734	0,47323072	0,75998026	0,23453943
Point 50	101.494.503	0,37659249	0,16493969	0,36943054	0,4682627	0,25383982
Point 51	0,99551088	0,45825532	0,21613148	102.945.614	0,4177652	0,17993374
Point 52	0,99130052	0,75216025	0,15169248	103.992.164	0,50352591	0,19429626
Point 53	0,85404843	0,70923108	0,25762889	0,91786695	0,45433378	0,26438868
Point 54	0,80687577	0,74640083	0,25553298	0,41813469	0,42546588	0,26736987
Point 55	0,86180252	0,66968137	0,27202737	0,41433644	0,27037665	0,19229577
Point 56	0,87251067	0,45392093	0,28529173	0,33458021	0,42730609	0,22362475
Point 57	0,33503672	0,31587863	0,1591168	0,91418982	0,41219074	0,25429854
Point 58	0,90524006	0,37288502	0,24251188	0,41297331	0,59958804	0,26909065
Point 59	0,35724366	0,35391533	0,20018224	0,90747434	0,37153524	0,24163832
Point 60	111.117.566	0,41937399	0,07098071	0,93031424	0,2976892	0,19115914
Point 61	109.421.456	0,46144313	0,115702	0,19887283	0,52434802	0,09092961
Point 62	106.490.552	0,59193629	0,15644744	0,28921834	0,56038934	0,19936121
Point 63	103.478.992	0,50242645	0,19094457	0,32518375	0,51379985	0,23133631
Point 64	0,29744059	0,7319687	0,12922198	0,3703208	0,59903073	0,24913858
Point 65	101.526.761	0,67455679	0,17599991	0,33650613	0,64284903	0,21506685
Point 66	0,97773451	0,78930962	0,13906293	0,46571618	0,68240225	0,2632046
Point 67	0,84638107	0,74683982	0,24170946	0,36400965	0,76027203	0,17766994
Point 68	0,33722043	0,76992756	0,14783023	0,35473272	0,72161883	0,19101778

Point 69	0,97133827	0,33758566	0,18078956	0,90343624	0,66993302	0,2511417
Point 70	0,89504927	0,71016395	0,23996007	0,9333517	0,71056992	0,21708529
Point 71	0,96116924	0,29911259	0,1665497	0,34475297	0,27349064	0,14693259
Point 72	0,51224345	0,7335341	0,2622444	0,4590871	0,64199126	0,27601549
Point 73	0,41983178	0,65204704	0,25991085	0,41674566	0,64147007	0,25911859
Point 74	0,46123955	0,6527819	0,27901372	106.950.569	0,46157524	0,15506493
Point 75	0,36878282	0,31599745	0,18590115	100.266.492	0,50208431	0,2243315
Point 76	0,898022	0,33436579	0,2275168	0,46104369	0,42585146	0,28473681
Point 77	0,40475479	0,31597263	0,2096597	0,560794	0,34808263	0,27824387
Point 78	104.845.691	0,30176741	0,07890322	0,40976539	0,55641699	0,2752341
Point 79	107.176.793	0,30196595	0,04510315	0,47488424	0,34491435	0,25911716
Point 80	106.386.840	0,71626973	0,10001235	0,53047043	0,27100605	0,23639992
Point 81	104.969.716	0,75386494	0,09018821	0,89425915	0,29510096	0,21080461
Point 82	103.507.316	0,79179806	0,07935514	0,27255556	0,31473336	0,09837845
Point 83	0,28595817	0,69290167	0,13965805	0,25605124	0,56310409	0,16557173
Point 84	0,32664412	0,73162133	0,16072603	0,25768992	0,35285375	0,10897481
Point 85	106.907.165	0,54771847	0,15812747	0,33150256	0,600604	0,22439547
Point 86	104.744.267	0,67600483	0,14302531	0,24444324	0,39227709	0,11830749
Point 87	103.182.638	0,59067875	0,19029529	0,30177522	0,64468193	0,18566623
Point 88	0,3169913	0,69226021	0,1718742	0,31116197	0,68520021	0,17528017
Point 89	0,59715283	0,77500081	0,25986937	0,36556023	0,51238459	0,25645071
Point 90	0,35082832	0,69148344	0,20088777	0,91120201	0,7855289	0,18730155
Point 91	0,98075897	0,67309242	0,20501642	101.817.751	0,67575961	0,17798615
Point 92	0,87437856	0,49742976	0,29254663	0,9824053	0,67347485	0,20600696
Point 93	0,68114442	0,74018258	0,27723584	0,321015	0,72449696	0,16378631
Point 94	0,55360967	0,73549992	0,27100497	0,51732421	0,346883	0,26973444
Point 95	0,30470499	0,31671467	0,12928678	105.125.463	0,37903249	0,13692285
Point 96	0,50935394	0,69452649	0,27794853	0,48573467	0,30751103	0,24338195
Point 97	0,50486243	0,65504467	0,29127592	0,56602526	0,30977905	0,26208958
Point 98	0,8118338	0,70778555	0,27290654	100.884.604	0,33909056	0,15592113
Point 99	0,34813413	0,27874079	0,1454839	0,99727035	0,30176577	0,14247608
Point 100	0,86456233	0,37244248	0,26027748	0,96553481	0,29940706	0,16864759
Point 101	0,8589589	0,33354926	0,24468035	0,86615372	0,37026238	0,25758043
Point 102	0,81738877	0,33162752	0,2601496	0,85625678	0,29244649	0,22724709
Point 103	0,85417986	0,29514277	0,22936133	0,23365882	0,4344635	0,12516284
Point 104	0,81543249	0,29357576	0,24560003	0,22631314	0,56563139	0,1289469
Point 105	108.571.279	0,34119332	0,05365814	0,3272121	0,55775756	0,2298077
Point 106	109.879.971	0,37873706	0,0628539	0,31441677	0,27609196	0,11878609
Point 107	112.557.971	0,50454634	0,08138544	0,29397538	0,60346794	0,19374627
Point 108	0,27039194	0,73251808	0,09628084	0,33219308	0,76253295	0,15101583
Point 109	0,30883959	0,77031702	0,11786495	0,89423448	0,70904702	0,23729147
Point 110	108.816.075	0,63535792	0,11575969	0,86062455	0,668037	0,26756367

Point 111	109.552.121	0,59250998	0,12032522	0,94596326	0,78700799	0,1649265
Point 112	105.739.200	0,63470852	0,15140523	0,95887905	0,7500267	0,17952578
Point 113	0,67904693	0,77897996	0,25991195	0,87425107	0,78418773	0,2053363
Point 114	0,51619405	0,7711764	0,24595483	0,95186025	0,6299988	0,24130629
Point 115	0,30774447	0,65154779	0,18211822	107.355.785	0,50542951	0,15986703
Point 116	0,72399855	0,74278468	0,27287692	0,42411736	0,38392192	0,25676766
Point 117	0,99222791	0,30064425	0,13970222	0,87322223	0,45229015	0,28116974
Point 118	0,29080489	0,35430622	0,14068729	0,22691116	0,4775739	0,12938753
Point 119	0,34202623	0,65149379	0,21192402	0,26140431	0,60653621	0,16059753
Point 120	0,34595045	0,39333749	0,21329242	0,24171919	0,65021825	0,11709272
Point 121	0,32233742	0,35395044	0,17229389	0,23225889	0,60884881	0,12422581
Point 122	0,38074771	0,27864441	0,17126039	0,26986274	0,64740926	0,15299553
Point 123	0,39421675	0,35382769	0,22471465	0,36690474	0,55662912	0,25517529
Point 124	0,82248628	0,37061208	0,27515358	0,82932419	0,53717709	0,30288637
Point 125	0,81899047	0,66836554	0,28726721	0,9710685	0,71266353	0,19358285
Point 126	0,41533947	0,27873942	0,19411661	106.188.285	0,41931722	0,14687538
Point 127	0,48980355	0,27999762	0,23082604	0,46684232	0,38470602	0,27332559
Point 128	112.052.274	0,46090695	0,07762508	0,55228931	0,43086356	0,30460557
Point 129	107.492.602	0,75509471	0,05504076	0,41238302	0,46865287	0,27465507
Point 130	108.951.795	0,71643013	0,06390896	103.905.272	0,34053814	0,125443
Point 131	0,24576189	0,7331627	0,06138133	102.667.665	0,30256617	0,11258881
Point 132	105.987.811	0,79258066	0,04674753	0,77966607	0,36518797	0,27800801
Point 133	0,28197694	0,77153736	0,08766942	0,65117532	0,31573847	0,27040383
Point 134	0,25789952	0,6932289	0,10625077	0,73564655	0,32285655	0,26810193
Point 135	107.683.980	0,67637801	0,108764	0,86082518	0,33090502	0,24237873
Point 136	109.900.260	0,54921371	0,12169291	0,77719378	0,32611275	0,26256892
Point 137	111.480.951	0,63515586	0,07794943	0,81800967	0,32841009	0,25530088
Point 138	102.481.461	0,63335222	0,18457904	0,73473382	0,28483492	0,25108087
Point 139	0,63789392	0,77692974	0,26071376	0,81675071	0,29002583	0,24140595
Point 140	0,99881601	0,50159311	0,22208931	0,25331622	0,68976951	0,10850056
Point 141	0,55556935	0,77399898	0,2563552	0,87482136	0,54001009	0,28957766
Point 142	0,20247392	0,52560568	0,08915798	0,96147865	0,49992085	0,24977283
Point 143	0,76434523	0,74439555	0,26580682	0,91052419	0,62836808	0,26270542
Point 144	0,2756668	0,65248418	0,14972916	109.885.275	0,46280164	0,11854029
Point 145	0,94327557	0,6721043	0,23093669	0,97812355	0,78896922	0,13949491
Point 146	0,23012999	0,5246315	0,12787458	0,88419348	0,74682826	0,22175665
Point 147	0,917409	0,49911392	0,27351865	0,51009876	0,72337556	0,25886378
Point 148	0,26028553	0,52398121	0,16410558	100.591.433	0,7149772	0,16608611
Point 149	0,63755792	0,73884606	0,27761114	0,80442429	0,74385321	0,24959648
Point 150	0,71948832	0,78032213	0,25566363	110.289.311	0,50581324	0,12282084
Point 151	0,26748255	0,61159086	0,15718448	102.828.431	0,63449627	0,18707897
Point 152	0,90373027	0,67078429	0,25349984	0,83635968	0,78231728	0,22046354

Point 153	0,31832731	0,279695	0,11681225	0,5071311	0,42787388	0,29566771
Point 154	0,87489349	0,54152775	0,2940824	103.584.647	0,59187782	0,19318365
Point 155	0,77430326	0,29241163	0,25236946	0,99122882	0,63247067	0,21631019
Point 156	0,23264533	0,69432229	0,06991983	103.979.540	0,54802072	0,19580071
Point 157	112.310.016	0,59319562	0,08142229	0,8287974	0,45060205	0,29401454
Point 158	0,5957225	0,69827223	0,29137132	0,73566395	0,36174166	0,28389406
Point 159	103.507.447	0,54682279	0,19262131	0,69281441	0,32101926	0,27143508
Point 160	0,59594196	0,73684853	0,27573746	0,78263372	0,40555388	0,29286063
Point 161	0,55147511	0,69645977	0,28682134	0,69380647	0,28068548	0,25377804
Point 162	0,26221102	0,35553423	0,10673843	0,23366068	0,35551593	0,07195345
Point 163	0,68284571	0,7022084	0,29325429	0,27823249	0,76765227	0,08971057
Point 164	0,23245326	0,48066038	0,12672038	0,20892507	0,43711826	0,08565358
Point 165	0,27870411	0,39451855	0,1510631	0,26625606	0,72892827	0,09840769
Point 166	0,20519681	0,48133403	0,0878261	0,29221809	0,72663075	0,13198435
Point 167	0,77420473	0,66735321	0,29725796	0,28764647	0,27744046	0,08720393
Point 168	0,54955328	0,65640342	0,30100033	0,28051984	0,68780392	0,14279319
Point 169	0,31054467	0,3932628	0,18395154	0,30418527	0,76459581	0,12066499
Point 170	0,30018649	0,61036849	0,19016524	0,84435791	0,74492258	0,23717019
Point 171	0,86991704	0,412514	0,27385774	108.998.871	0,42000583	0,11127051
Point 172	0,86741084	0,62811041	0,28345174	0,46960142	0,72192115	0,24889161
Point 173	0,42535588	0,39416528	0,25993398	0,5110817	0,38662815	0,28542644
Point 174	0,38488942	0,39322177	0,23794505	107.916.522	0,37982777	0,10181641
Point 175	0,51677471	0,35701862	0,27705592	0,99814028	0,58954936	0,22290722
Point 176	0,47483918	0,35512906	0,2644898	0,79700691	0,7813372	0,232748
Point 177	0,43370795	0,35471243	0,24583277	106.931.031	0,5934996	0,15952203
Point 178	0,52315307	0,31763816	0,26063466	0,45717302	0,46928948	0,29147857
Point 179	0,48510936	0,31754673	0,24888271	0,6047017	0,35092551	0,28329244
Point 180	0,77668065	0,33022392	0,26938516	105.287.218	0,30334163	0,08083063
Point 181	0,56471759	0,31952435	0,27086747	0,82304919	0,36769322	0,2699903
Point 182	0,52907622	0,28082794	0,24387534	0,77541441	0,28811207	0,24614403
Point 183	110.300.291	0,6768353	0,07150367	0,65300614	0,27700567	0,25274584
Point 184	0,22072853	0,65451342	0,07767607	0,24869514	0,31728297	0,06330344
Point 185	0,20444909	0,56949687	0,08778547	0,20142509	0,48005414	0,08924665
Point 186	0,24653152	0,65357131	0,11463086	0,22013114	0,39500192	0,07940966
Point 187	0,23738851	0,61203283	0,12150225	0,21776541	0,65292186	0,07897218
Point 188	0,23668477	0,35651448	0,07068901	0,86649728	0,62648249	0,27888513
Point 189	0,2763339	0,31715754	0,09607471	100.284.505	0,54614663	0,22554402
Point 190	0,72661692	0,7039392	0,28981969	0,8220346	0,62380373	0,29183957
Point 191	0,95903659	0,50004983	0,24980825	100.871.491	0,79074186	0,11135948
Point 192	0,23185389	0,56866479	0,12622499	103.760.290	0,71608227	0,13498913
Point 193	0,29147556	0,27963513	0,08545028	0,78305095	0,44751775	0,3030926
Point 194	0,63966054	0,70005655	0,29373553	0,85245472	0,70748127	0,25312847

Point 195	0,37974215	0,65096605	0,2382995	0,5491426	0,47346392	0,31156501
Point 196	0,26237434	0,56804878	0,16211221	106.141.663	0,63636535	0,15388405
Point 197	0,2942436	0,52285403	0,19821948	107.393.873	0,54930037	0,16134502
Point 198	0,33687884	0,60933429	0,22163063	0,45482045	0,55742031	0,29222199
Point 199	0,9104315	0,62917572	0,26494837	0,75697404	0,77889258	0,24143334
Point 200	0,2957553	0,47901398	0,19658911	0,73772544	0,40237969	0,29839075
Point 201	0,87218755	0,58562529	0,29096124	0,64897817	0,35494259	0,28662089
Point 202	0,82353252	0,62640691	0,29885396	0,60796934	0,31268936	0,26705092
Point 203	0,41950712	0,4356364	0,27056578	0,61205918	0,27466983	0,24935016
Point 204	0,37792629	0,43556964	0,24832043	0,2576313	0,76929909	0,0531041
Point 205	0,77928728	0,36912185	0,28525305	0,22979438	0,69263822	0,0710969
Point 206	0,44231248	0,31643558	0,23031648	0,24315512	0,73154682	0,06238776
Point 207	0,55977345	0,35789037	0,28711367	0,20725457	0,61085439	0,08508924
Point 208	0,45193061	0,2787289	0,21379074	0,20093623	0,56821525	0,08953521
Point 209	0,73368162	0,29044637	0,25883058	0,7803573	0,57852983	0,30824289
Point 210	112.663.150	0,54931629	0,08292581	0,87472969	0,49590102	0,28795558
Point 211	0,25988874	0,77123034	0,05186959	0,91954702	0,54245985	0,2729924
Point 212	0,2516408	0,31822562	0,06199769	0,99252015	0,75233364	0,15263827
Point 213	0,21065389	0,61228365	0,08374386	0,9579097	0,58771229	0,24867631
Point 214	0,99930888	0,54558706	0,22361042	0,91852456	0,49834302	0,27124605
Point 215	0,98902363	0,63204366	0,21495858	105.059.195	0,67728227	0,14522
Point 216	0,91861022	0,5432086	0,27524114	0,50328648	0,64434546	0,28644302
Point 217	0,76685047	0,70593399	0,28266895	0,78226513	0,49122825	0,30984241
Point 218	0,95997083	0,54379308	0,25144336	110.333.419	0,55067742	0,12431344
Point 219	0,7297191	0,66464317	0,30465594	0,40889323	0,51213771	0,27738458
Point 220	0,91571897	0,58652234	0,27222833	106.588.185	0,34136868	0,09195252
Point 221	0,29564056	0,56724083	0,19594015	0,45793882	0,60036939	0,28609747
Point 222	0,9508307	0,63018835	0,2415891	0,69285566	0,35781226	0,2860336
Point 223	0,82746416	0,58366215	0,30672082	0,87105221	0,41063294	0,27065653
Point 224	0,78166407	0,5822506	0,3172152	0,82628053	0,58114028	0,29969019
Point 225	0,82705611	0,41086817	0,28861377	112.361.884	0,46179628	0,07925501
Point 226	0,73500794	0,32813391	0,27644804	111.415.863	0,42019516	0,07261667
Point 227	0,60359377	0,36002102	0,29317641	102.342.427	0,75405192	0,1232382
Point 228	0,60690725	0,32201463	0,27668846	0,80972821	0,70523041	0,26662484
Point 229	0,56917524	0,28226152	0,25368431	0,82974845	0,4932715	0,30049449
Point 230	0,61051035	0,28417999	0,25870091	0,507595	0,68400425	0,273615
Point 231	0,26727128	0,28021941	0,05216756	109.952.927	0,59404254	0,12297799
Point 232	0,99528658	0,58900094	0,22120266	0,81731856	0,66585284	0,28090429
Point 233	0,55165476	0,61453414	0,31271836	0,55624843	0,38848901	0,29345715
Point 234	0,26841891	0,43656504	0,15814857	0,72127992	0,73819005	0,2652835
Point 235	0,50378436	0,61246693	0,30287236	0,72430068	0,69912148	0,28133053
Point 236	0,26271898	0,47978652	0,16301127	0,551718	0,72585154	0,26613766

Point 237	0,30198425	0,43541491	0,19193456	0,51370573	0,76153457	0,24370916
Point 238	0,33333564	0,47872075	0,22792727	0,45386046	0,5134716	0,29412612
Point 239	0,78242135	0,40945598	0,29997873	0,50055104	0,51493543	0,30528337
Point 240	0,33865982	0,43565062	0,22213107	0,26437363	0,27935371	0,05345966
Point 241	0,73534203	0,3668431	0,29273126	0,78222895	0,53624618	0,31236497
Point 242	0,45967528	0,61133069	0,28988439	112.867.117	0,50539654	0,08304421
Point 243	0,82985651	0,53956538	0,3096469	112.942.672	0,550188	0,08445537
Point 244	0,46729639	0,39508516	0,2786018	0,962102	0,54370463	0,25149912
Point 245	0,65013343	0,32401574	0,2803883	0,77239555	0,66366982	0,28936535
Point 246	0,69188833	0,32794455	0,28087687	106.611.609	0,71720159	0,10144716
Point 247	0,69256711	0,28789446	0,262649	110.174.644	0,37968224	0,06438377
Point 248	0,65157163	0,2856411	0,26225176	109.172.916	0,63682109	0,11808138
Point 249	0,21236469	0,43833497	0,08423911	0,76192349	0,74093205	0,25890005
Point 250	0,24931961	0,39522749	0,11577366	107.480.288	0,30296069	0,04626241
Point 251	0,23896608	0,43748075	0,12248541	0,71694279	0,7764194	0,24942018
Point 252	0,95636314	0,5878166	0,24864466	0,82741272	0,4081358	0,28309646
Point 253	0,73762357	0,40739259	0,3073127	0,87179756	0,58404922	0,28637749
Point 254	0,73767298	0,44950131	0,31854185	103.622.854	0,79221439	0,08037811
Point 255	0,82876503	0,45311773	0,30020779	105.135.632	0,75451332	0,09138057
Point 256	0,3327283	0,5664466	0,22713614	0,91613251	0,58577782	0,2701273
Point 257	0,33063167	0,52242333	0,22882596	112.549.293	0,59405917	0,08335156
Point 258	0,41569263	0,61022592	0,27053097	108.859.980	0,34205109	0,05490481
Point 259	0,69205123	0,36435467	0,29618046	107.976.997	0,67761761	0,11066066
Point 260	0,46171153	0,43639326	0,28990954	0,50384414	0,47135219	0,30311251
Point 261	0,41236362	0,56717378	0,27712864	0,57081479	0,27254716	0,24501364
Point 262	0,22326033	0,39607733	0,07806368	0,64513034	0,43620548	0,31151104
Point 263	0,5556246	0,39841983	0,30239141	0,77410018	0,62081844	0,30073446
Point 264	0,64664954	0,40218055	0,31113327	111.715.162	0,63600481	0,07941478
Point 265	0,64464039	0,44415373	0,32269719	0,73534793	0,48769066	0,31517881
Point 266	0,3745074	0,60894573	0,24791121	0,59416199	0,51972008	0,31896523
Point 267	0,45821121	0,47995973	0,29670432	0,73734158	0,44472045	0,30885336
Point 268	0,41430041	0,47918785	0,27749947	0,63559335	0,76987898	0,25462246
Point 269	0,77568293	0,62482661	0,309504	0,67648548	0,77362835	0,25367367
Point 270	0,37122726	0,56653774	0,25426301	106.097.579	0,79299563	0,04774453
Point 271	0,6481716	0,36306053	0,2970711	0,59942931	0,43301514	0,30957893
Point 272	0,6009897	0,40020815	0,30852124	0,7277714	0,65983921	0,29615054
Point 273	0,69182813	0,40516877	0,31085327	0,68993896	0,48368341	0,31831741
Point 274	0,7832821	0,45097575	0,31115317	0,69075894	0,44067696	0,31134138
Point 275	0,6909104	0,44694045	0,32239074	0,59499151	0,76662141	0,25471172
Point 276	0,69041711	0,48987603	0,32990101	0,67868507	0,73408163	0,26954654
Point 277	0,73611927	0,49237522	0,32563755	0,60144478	0,39111558	0,29819798
Point 278	0,82998955	0,49565127	0,30713567	110.488.963	0,67751026	0,07265657

Point 279	0,68489659	0,66260928	0,30836412	0,6471417	0,39420024	0,30021113
Point 280	0,68621761	0,62093079	0,32039568	0,63864905	0,65150654	0,29924688
Point 281	0,78293622	0,49478847	0,31853381	0,54710847	0,51714569	0,31403714
Point 282	0,64003628	0,65982813	0,30862138	0,59411949	0,68889475	0,28387982
Point 283	0,78298128	0,53976125	0,32069767	0,63570482	0,73109466	0,27017549
Point 284	0,51086903	0,39700717	0,29257989	107.631.588	0,7555474	0,05593007
Point 285	0,59489602	0,65776545	0,30588338	0,54833162	0,64603275	0,29423273
Point 286	0,54923826	0,48351359	0,32073197	0,68316698	0,65616494	0,29931518
Point 287	0,59899497	0,44200575	0,32014644	0,55085093	0,60394067	0,30494413
Point 288	0,55195808	0,44074216	0,3138442	0,54990482	0,6864776	0,28082567
Point 289	0,37261921	0,47806573	0,25405091	0,59418035	0,72801858	0,26940385
Point 290	0,45520422	0,52434039	0,29883313	0,68076509	0,69575506	0,28436947
Point 291	0,36991787	0,52241576	0,25609249	0,69211316	0,39872918	0,30025983
Point 292	0,64039171	0,61874712	0,32036534	0,59373802	0,64812553	0,29750311
Point 293	0,73241335	0,62307203	0,31635332	0,73063475	0,61774707	0,30651879
Point 294	0,68817306	0,57848638	0,32788163	0,63904619	0,61008263	0,30997536
Point 295	0,50718921	0,43822688	0,30308703	0,63773102	0,69188893	0,28511068
Point 296	0,41147587	0,52276069	0,27969101	0,64291179	0,48148078	0,31829929
Point 297	0,59416264	0,61612862	0,31765163	0,50267833	0,60154301	0,29698616
Point 298	0,50429308	0,48166436	0,3105965	109.112.608	0,71701652	0,06485205
Point 299	0,64285582	0,4892433	0,3296279	0,76466119	0,70219594	0,27505115
Point 300	0,73468083	0,58050203	0,32435596	0,55340296	0,76482755	0,25266749
Point 301	0,59458083	0,52925879	0,32831612	0,50093901	0,558698	0,30303901
Point 302	0,64087749	0,57575977	0,3280848	0,6401329	0,56697184	0,31701282
Point 303	0,45653981	0,56826073	0,29660809	0,59628689	0,47667849	0,31656548
Point 304	0,59628904	0,4858003	0,32699341	0,59315652	0,60626358	0,30822712
Point 305	0,6893186	0,53447098	0,33097005	0,66553491	0,53401357	0,32846642
Point 306	0,5014562	0,52560198	0,3121486	0,25536144	0,06113623	-0,00793241
Point 307	0,59454483	0,57388544	0,32505885	0,22793651	0,06058009	-0,00793114
Point 308	0,14081751	120.434.058	0,08402268	0,68476444	0,6140011	0,31011811
Point 309	0,10093187	120.383.954	0,08429497	0,73339993	0,57523376	0,31383365
Point 310	0,18069699	120.485.926	0,08386762	0,68674254	0,57152116	0,31667694
Point 311	0,1179195	0,05682058	-0,00404746	0,20048308	0,06001431	-0,00790847
Point 312	0,25569153	0,06077749	-0,00825841	0,14523022	0,05766119	-0,00374405
Point 313	0,20073655	0,05960653	-0,00822647	0,17266823	0,0580049	-0,00380423
Point 314	0,22821149	0,06019276	-0,00824051	0,17305213	0,03051363	-0,00383931
Point 315	0,14539823	0,0571909	-0,00403485	0,25589031	0,03365133	-0,00797181
Point 316	0,17287347	0,05754858	-0,00408761	0,22846635	0,03311383	-0,00795351
Point 317	0,25628236	0,03325167	-0,00837382	0,20102966	0,03254686	-0,00793002
Point 318	0,22879998	0,03267527	-0,00833467	0,14562425	0,03016727	-0,00379887
Point 319	0,25693813	0,00566901	-0,00840996	0,59383309	0,56405693	0,31506288
Point 320	0,22944391	0,00508975	-0,008328	0,22905317	0,00558426	-0,00786664

Point 321	0,18015343	124.477.637	0,08363056	0,25648651	0,00613112	-0,00792583
Point 322	0,10037963	124.376.702	0,084401	0,17343664	0,00307319	-0,00370748
Point 323	0,0998757	128.372.192	0,08460069	0,20163025	0,00502991	-0,00787454
Point 324	0,1397416	128.423.750	0,08412158	0,7363084	0,53200853	0,31752837
Point 325	0,17961539	128.473.282	0,08382444	0,11779076	0,05731348	-0,00375621
Point 326	0,09045488	0,05644123	-0,00405169	0,09037126	0,05696227	-0,00374468
Point 327	0,1183482	0,02927113	-0,00416861	0,11818866	0,02981966	-0,00381321
Point 328	0,14583217	0,02964674	-0,00415067	0,68853211	0,52791053	0,31961998
Point 329	0,20132095	0,03208588	-0,00829896	0,14598827	0,00272366	-0,00365587
Point 330	0,17331414	0,03001843	-0,00421444	0,05594629	0,05638177	0,0004251
Point 331	0,14623803	0,00214756	-0,00409068	0,02840558	0,05637657	0,00036582
Point 332	0,17372245	0,00251725	-0,00413804	0,09076122	0,02945067	-0,00372851
Point 333	0,20196262	0,00451107	-0,00831264	0,11855351	0,00236869	-0,00374775
Point 334	0,5474633	0,5273881	0,32242376	0,54750633	0,56085539	0,31129906
Point 335	0,73731172	0,53685057	0,32770205	0,00092302	0,05636377	0,00046097
Point 336	0,54827088	0,57151544	0,31964818	0,05591094	0,02896346	0,00037644
Point 337	0,50219482	0,56949675	0,30959457	0,00088534	0,02894673	0,00041795
Point 338	0,05598249	0,05585286	0,00007313	0,02837298	0,02894856	0,00037162
Point 339	0,02839774	0,05583603	-0,00000564	0,0283513	0,00153431	0,00042964
Point 340	0,02836858	0,02833491	-0,00002519	0,09114213	0,00201491	-0,00369089
Point 341	0,0559564	0,02835763	-0,00000386	0,05588392	0,00154243	0,00041288
Point 342	0,09087589	0,02888234	-0,00410575	0,14015973	120.316.160	0,04762856
Point 343	0,66480124	0,5318166	0,33918744	0,17936113	124.363.887	0,04737207
Point 344	0,11874654	0,00176827	-0,00417777	0,00086602	0,0015465	0,00043142
Point 345	0,00088175	0,05582681	0,00005893	0,09959985	124.255.323	0,04826513
Point 346	0,00084017	0,02833153	0	0,10025749	120.260.394	0,04798602
Point 347	0,05594258	0,00086313	-0,0000054	0,13899919	128.308.761	0,04796176
Point 348	0,0912717	0,00137399	-0,00412927	0,178728	128.358.519	0,04776095
Point 349	0,00081115	0,0008283	0	0,09905779	128.253.651	0,04855527
Point 350	0,02834867	0,00084017	0	0,18000068	120.375.049	0,04741968
Point 351	0,5049724	0,98254275	-0,00965706	0,50478339	0,98253477	-0,00954953
Point 352	0,08350597	0,74797642	-0,01004477	0,08336525	0,74786782	-0,01015062
Point 353	0,81401813	0,9854576	-0,01248246	0,81400239	0,98558277	-0,01204449
Point 354	0,14327951	0,14953065	-0,01103091	0,14332165	0,14988546	-0,01119577
Point 355	0,51796001	0,16728722	-0,0132428	0,51807058	0,16736704	-0,01299046
Point 356	126.092.684	0,38608089	-0,01922878	126.104.152	0,38594955	-0,0194132
Point 357	119.861.960	0,14803942	-0,01838083	119.856.060	0,14778259	-0,01886745
Point 358	0,07593346	0,37606308	-0,0113641	0,07591625	0,37622225	-0,01145791
Point 359	127.150.857	0,57198501	-0,01774511	127.151.036	0,57198751	-0,01768157
Point 360	122.817.993	0,82232797	-0,01518453	122.840.083	0,82237476	-0,01530567
Point 361	0,81024402	0,17583545	-0,01697237	0,81038821	0,17575052	-0,016304
Point 362	0,06551184	0,53559786	-0,01252602	0,06545223	0,53561163	-0,01254842

Point 363	0,19529925	0,95549679	-0,00897393	0,19501485	0,95519906	-0,00923209
Point 364	120.637.536	0,98313707	-0,01387815	120.650.733	0,98324221	-0,01397061